التحليل العددي(2)

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

التحليل العددي (2)

الدكتورة

برلنت صبري مطيط

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

1434-1435هـ

2013-2014 م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المحتويات

مقدمة 9

الفصل الأول 13

التقريبات باستخدام المربعات الصغرى 13

1-مقدمة عامة 13

2- تمهيد رياضي 14

3- التقريب الخطي و غير الخطي 16

3-1-التقريب الخطي 17

3-1-1-التقريب الخطي لبيانات متقطعة 18

3-1-2-التقريب الخطي لتوابع مستمرة... 34

3-1-3-تقدير الحد الأعلى للخطأ المرتكب 74

3-2-التقريب غير الخطي 75

تمارين 89

الفصل الثاني 95

حل جمل المعادلات الخطية 95

1-مقدمة 95

2- تمهيد رياضي 96

3-طرائق حل جمل المعادلات الخطية 110

3-1-الطرائق المباشرة لحل جملة المعادلات الخطية 111

3-1-1-طريقة غاوس المحسنة 112

3-1-2-طريقة غاوس جوردان 117

3-1-3-تقنيات المرتكز 120

3-1-4-طرائق LU 126
3-2-الطرائق التكرارية 139
3-2-1-طريقة جاكوبي 145
3-2-2-طريقة غاوس سيدل 149
3-2-3-طريقة S.O.R 152
تمارين 161
الفصل الثالث 165
الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية 165
1- مبرهنة بيكارد لوجود ووحدانية الحلول 166
2- الطرائق ذات الخطوة الواحدة 169
3- الطرائق ذات الخطوات المتعددة 195
تمارين 209
الفصل الرابع 215
الحل العددي لجمل المعادلات غير الخطية 215
1-مقدمة 215
2- طريقة نيوتن 215
3- طريقة تكرار النقطة الثابتة ومبرهنة التطبيق (التقلصي) الانضغاطي 223
تمارين 235
الفصل الخامس 239
الأمثليات العددية 239
1-مقدمة 239
2- تحديد القيمة الصغرى لتابع بمتغير واحد 240
2-1 طرائق البحث المجالية 242

3-طرائق نيلدر – ميد– بويل 258
4-طريقة التدرج و نيوتن 280
تمارين 291
المصطلحات 297
المراجع 319

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

يُعد علم التحليل العددي من العلوم المشتركة بين علوم الرياضيات و الهندسة والإحصاء، حيث يبين كيفية بناء خوارزمية لحل مسائل رياضية، وذلك ضمن شروط رياضية تضمن وجود الحل ووحدانيته وشروط هندسية تتحقق فيها الخوارزمية بأقل كلفة ممكنة.

يعرض هذا الكتاب بعض الطرائق العددية و عدداً من الخوارزميات لأهم المسائل الرياضية، وهو الجزء الثاني لكتابي التحليل العددي (1)، وقد أدرجتُ العديد من الأمثلة المتنوعة، ليتمكّن طالبنا العزيز من استيعاب الطرائق فتتشكل عنده قاعدة علمية قوية ومتينة نستطيع عليها أن نبني باحثاً، ورجائي من الله عز وجل أن يتطور هذا العلم على أيدي طلابنا الأعزاء، ولذلك ننصح طلابنا بحل الأمثلة و التأكد من الأجوبة من الكتاب ثم الانتقال إلى حل التمارين غير المحلولة، وبذلك يكتسب الطالب مرونة وسرعة في الحل. و مع أن الاهتمام يتركز على الخوارزميات، إلا أنني لم أتردد في وضع الأسس النظرية لبناء هذه الخوارزميات.

يتألف الكتاب من خمسة فصول :

- يتناول الفصل الأول موضوع التقريبات وقد حاولت ذكر أهم القواعد الأساسية له، و يُعد من الموضوعات المهمة جداً، وهو يتطور بشكل سريع ، قمتُ بعرض التقريبات من خلال تقسيمي الموضوع الى قسمين: التقريبات الخطية و التقريبات غير الخطية، ثم قسمت التقريبات الخطية الى بيانات متقطعة و توابع مستمرة (التوابع الجبرية و التوابع المتعامدة)، وبينتُ أهم المبرهنات التي تناولت موضوع الحد الأعلى للأخطاء المرتكبة، اقتصرت دراستي في قسم التقريبات غير الخطية على بعض الحالات الخاصة كالتوابع

الأسية، إذ تتطلب دراسة هذا النوع بحث الأمثليات أولاً، ويُعد من أصعب أنواع التقريبات وأتمنى أن يوفقني الله في دراسته في الأيام المقبلة.

- يتصدى الفصل الثاني لدراسة الحل العددي للمعادلات الخطية التي تُعتبر من أهم الأبحاث التي عالجها التحليل العددي حيث بينتُ الطرائق المباشرة والطرائق التكرارية، ثم تطرَّقتُ إلى شرط تقارب الصيغ التكرارية، وكيفية إيجاد نصف القطر الطيفي، و ذكرتُ أهم المبرهنات المتعلقة به.
- يتضمن الفصل الثالث الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية ، ومبرهنة بيكارد لوجود ووحدانية الحلول، ويعرض بعض الطرائق ذات الخطوة الواحدة، ثم الطرائق ذات الخطوات المتعددة.
- و يُعالج الفصل الرابع الحل العددي لجمل المعادلات غير الخطية، و للتبسيط تمت دراستها بمتغيرين، وتُعتبر طريقة نيوتن و النقطة الثابتة من أشهر الطرائق المتبعة، ثم بينتُ شرط التقارب لكل طريقة متبعة، مع ذكر الأمثلة المحلولة عند كل فقرة.
- أخيراً يدرس الفصل الخامس الأمثليات، وهي دراسة القيمة الصغرى لتابع بعدة متغيرات، حاولت أن أُبين أشهر الطرائق الحديثة، كطرائق البحث المجالية (النسبة الذهبية و طريقة فيبوناتشي)، وعرضتُ أهم الطرائق التي تستخدم المشتقات من المرتبة الأولى ثم الطرائق التي تعتمد على المشتقات الأولى و الثانية، ثم الطرائق التي لا تعتمد على المشتقات كطريقة نيلدر، وأرفقتها بالرسوم التوضيحية والأمثلة المتنوعة.

و يتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمارين، تهدف إلى مساعدة القارئ في استيعاب المفاهيم المدروسة.

نرجو من زملائنا و طلابنا الأعزاء ألا يبخلوا بأية ملاحظة أو اقتراح حول الكتاب. وأرسالها على الأيميل berlant2014@gmail.com .

وأود أن أشكر كل من ساندني في هذا الكتاب، جزاهم الله عني خير جزاء.

ختاماً نأمل أن يفي هذا الكتاب بالغرض المنشود.

والله من وراء القصد.

المؤلفة

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الأول

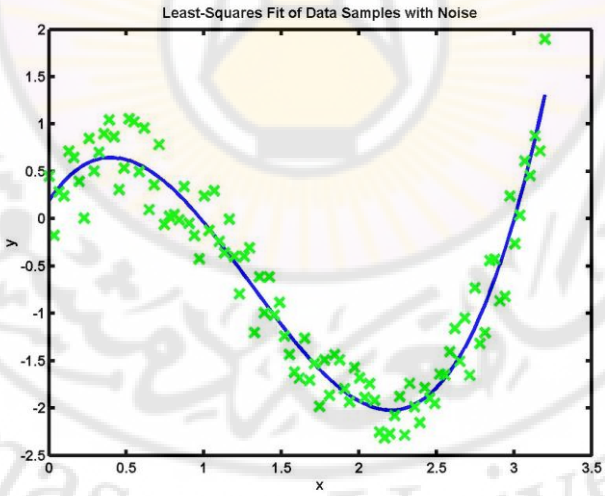
التقريبات باستخدام المربعات الصغرى

Least Squares Approximations

1- مقدمة:

درسنا في ما سبق من أبحاث التحليل العددي (1) بحث الاستيفاء حيث إنَّ الاستيفاء هو البحث عن تابع (قد تكون حدودية) تمر من جميع النقاط المعطاة، فبفرض أنّه لدينا خمس نقاط عندئذٍ تكون الحدودية من الدرجة الرابعة.

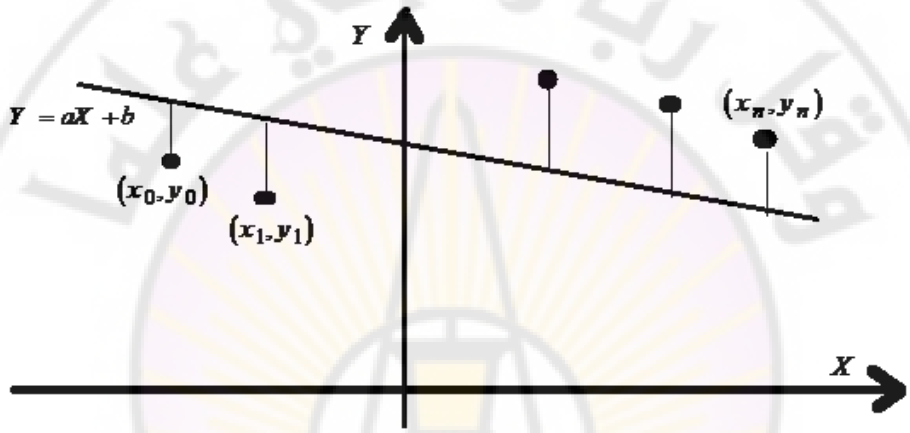
فإذا كان لدينا مئة نقطة متوزعة كما في الشكل 1 فإن الحدودية ستكون من الدرجة تسع وتسعين.



الشكل 1

وهنا نعلم أنَّ إمكانية الاستيفاء موجودة ولكن نسبة الخطأ كبيرة جداً لذلك تُستخدم طريقة ثانية وهي التقريبات وتعتمد على اختبار التابع الذي قد يكون حدودية

أو تابع أسياً أو لوغارتمياً، بحيث قد يمر التابع من النقاط المعطاة وقد لا يمر من النقاط الأخرى ولكن الشرط هو أن يكون الخطأ الكلي (حيث إنَّ الخطأ الكلي هو مجموع الأخطاء لكل النقاط والخطأ هو بعد النقطة عن التابع، الشكل 2) أصغر ما يمكن.



الشكل 2

وهكذا نجد أنه في التقريبات نختار التابع (من زمرة محددة) ثم نحسب الخطأ، ويكون هذا التابع أفضل تابع من هذه الزمرة. وأخيراً نقبل التابع (من هذه الزمرة) أو نرفضه حسب قيمة الخطأ. مع ملاحظة أنه لا توجد طريقة فعلية لاختيار الزمرة المناسبة .

2- تمهيد رياضي:

تعريف (1) الاستقلال و الارتباط الخطي:

لتكن التوابع $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n \in C[a,b]$ ، نقول إنها مستقلة خطياً إذا تحقق:

$$\alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0; \quad \forall \alpha_k \in \mathbf{R}; k = 0, ..., n \tag{1}$$

وفيما عدا ذلك ندعوها مرتبطة خطياً.

تعريف (2) النظيم ونصف النظيم:

بفرض $f(x)\in[a,b]$، نعرف نظيم التابع $f(x)$ بأنه عدد موجب حقيقي، يرمز له $\|f\|$ ويحقق ما يلي:

1- $\|f\|\geq 0$.

2- $\|f\|=0$ إذا و فقط إذا كان $f=0$ في كل مكان في $[a,b]$.

3- $\forall\lambda\in\mathbf{R};\ \|\lambda f\|=|\lambda|\|f\|$

4- $\forall f,g\in C[a,b];\ \|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$ (و تُدعى متراجحة المثلث)

و إذا تحققت كل الشروط باستثناء (2)، فندعو $\|f\|$ نصف نظيم.

نُعرف المسافة بين دالتين $f_1,f_2\in C[a,b]$ بالعلاقة:

$$d(f_1,f_2):=\|f_1-f_2\|. \tag{2}$$

و تحقق :

1- $d(f_1,f_2)\geq 0$

2- $d(f_1,f_2)=0$ إذا و فقط إذا كان $\forall x\in[a,b];\ f_1(x)=f_2(x)$

3- $d(f_1,f_2)=d(f_2,f_1)$ (3)

4- $\forall f_1,f_2,f_3\in[a,b];\quad d(f_1,f_3)\leq d(f_1,f_2)+d(f_2,f_3)$

تعريف (3) تابع الوزن:

نقول إنَّ $w(x)$ هو تابع وزن على المجال $]a,b[$ إذا وفقط إذا حقق ما يلي:

1) w تابع مستمر.

2) $w(x)>0$.

3) $\forall n\in N, x\in]a,b[\ :\ \int_a^b w(x)|x|^n\,dx<\infty$

مثال(1):

$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ هو تابع وزن على المجال $]-1,1[$.

3- التقريب الخطي و غير الخطي:

ليكن $f(x)$ تابع معرف و مستمر على المجال $[a,b]\subset \mathrm{R}$ ، و بفرض $\phi\in C[a,b]$ و بحيث :

$$\phi(x):=\phi(x,c_0,c_1,...,c_n)=\phi(x,c)\ ; \tag{4}$$

$$x\in[a,b], c=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\...\\c_n\end{bmatrix}=(c_0,c_1,...,c_n)^{\mathrm{T}}, c_k\in\mathbf{R}$$ علماً أن

والمطلوب إيجاد المعاملات $c_0,c_1,...,c_n$ بحيث تكون المسافة بين $f(x)$ و $\phi(x)$ أصغر ما يمكن.

و نميز حالتين بالنسبة لـ $f(x)$:

أولاً: إذا كان التابع $f(x)$ معطى عند عدد منته من النقاط $x_i\in[a,b]$ ، وبحيث $y_i=f(x_i)$ ، عندئذٍ تُدعى المسألة بمسألة تقريب المربعات الصغرى لبيانات متقطعة.

ثانياً: إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للاشتقاق أو قابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$، عندئذٍ تُدعى المسألة بمسألة تقريب المربعات الصغرى للتوابع المستمرة.

أما بالنسبة للتابع $\phi(x)$ فيتم إيجادها استناداً إلى:

إذا أمكـن كتابـة التـابع $\phi(x)$ بدلالـة توابـع مسـتقلة خطيـاً $\varphi_k(x)\in[a,b]$، أي بالشكل

$$\phi(x,c)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_n\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x) \quad (5)$$

عندئذٍ تُدعى المسألة بمسألة التقريب الخطية. وفيما عدا ذلك فإننا ندعوها بمسألة التقريب غير الخطية.

مثال على مسألة التقريب الخطي :

$$\phi(x,c_0,c_1,c_2,c_3)=c_0+c_1e^{2x}+c_2\ln(x)+c_3\left(x^2+1\right)$$

و كمثال على مسألة التقريب غير الخطي :

$$\phi(x,c_0,c_1,c_2,c_3,c_4)=c_0\cos h(c_1x)+c_2e^{-c_3(x-c_4)}$$

1-3 التقريب الخطي:

بفرض $f\in C[a,b]$، و $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n\in C[a,b]$ توابع مستقلة خطياً، وبفرض S مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة من $\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n\}$ بحيث:

$$\forall\phi\in S\ ;\ \phi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x) \quad (6)$$

عندئذٍ:

$$d(f,\phi)=\|f-\phi\| \quad (7)$$
$$:=D(c_0,c_1,...,c_n)$$

أي إنَّ المسافة بين الدالتين f,ϕ تعتمد على التابع ϕ (أو معاملاتها). توجد بعض الأشكال المألوفة للتوابع φ_k :

1- $\varphi_0=1,\varphi_1=x,\varphi_2=x^2,...,\varphi_n=x^n$ (حدوديات من الدرجة n على الأكثر).

2- $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = \cos(x), \varphi_2 = \sin(x), \varphi_3 = \cos(2x), \varphi_4 = \sin(2x), \ldots$

(توابع مثلثية).

3- $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = e^{\alpha_1 x}, \varphi_2 = e^{\alpha_2 x}, \varphi_3 = e^{\alpha_3 x}, \ldots$ حيث $\alpha_i \in \mathrm{R}$ مختلفة.

4- التوابع المتعامدة .

والآن يُمكن أن تُصاغ مسألة التقريب كما يلي:

بفرض $f \in C[a,b]$، و التوابع $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C[a,b]$ توابع مستقلة خطياً، و المطلوب إيجاد $\phi^{(0)}(x) \in S$ وبحيث:

$$\phi^{(0)}(x) := \phi^{(0)}\left(x, c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \varphi_k(x) \in S \qquad (8)$$

$$D\left(c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}\right) = \left\| f - \phi^{(0)} \right\| = \min_{\phi \in S} \|f - \phi\| = \min_{\phi \in S} D\left(c_0, c_1, \ldots, c_n\right) \qquad (9)$$

توطئة (1)(مبرهنة الوجود) :

لكل جملة توابع مستقلة خطياً $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C[a,b]$ ، ولكل $\|..\|$ نظيم. يوجد على الأقل تابع تقريب $\phi^{(0)} \in S$ يُحقق (9) و ذلك أياً كان $f \in C[a,b]$.

1-1-3 التقريب الخطي لبيانات متقطعة:

في هذه الحالة تُصاغ مسألتنا كما يلي :

نبحث عن $\phi^{(0)}$ من العلاقة (8) لأجل تابع $f \in C[a,b]$، ومعلوم عند $N+1$ نقطة مختلفة $x_i \in [a,b], i = 0,1,2,\ldots,N \ (N \geq n)$، و بحيث $y_i = f(x_i)$، وبحيث $\forall g \in C[a,b]$

$$\|g\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{N} w_i g^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

حيث w_i أعداد حقيقية كأوزان، و $\|g\|_2$ نصف النظيم .

اذا وضعنا $g = f - \phi$ فإن العلاقة (10) تُصبح :

$$\left\| f - \phi^{(0)} \right\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \|f - \phi\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i, c) \right) = \min_{\phi \in S} D^2(c_0, c_1, ..., c_n) \qquad (11)$$

وغالباً يرمز $E(x_i) = f(x_i) - \phi(x_i, c)$

بتطبيق الشروط $\frac{\partial \left(D^2 \right)}{\partial C_j} = 0 \, , \, j = 0, ..., n$ ، نحصل على $(n+1)$ جملة معادلات خطية بالنسبة للمجاهيل C_j^0 للتقريب الأمثل.

بمـــا أن $\phi(x_i, c) = \phi(x_i, c_0, c_1, ..., c_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x_i)$ و $\frac{\partial \phi(x_i)}{\partial C_j} = \varphi(x_i)$ ،

وبالتالي فإن جملة المعادلات الخطية :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \varphi_j(x_i); j = 0, ..., n; N \geq n. \qquad (12)$$

نرمز

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) := \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \\ (f, \varphi_j) := \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \varphi_j(x_i), \end{cases} \qquad (13)$$

عندئذٍ تُصبح جملة المعادلات الخطية بالصيغة المصفوفية:

$$G\ c = a \tag{14}$$

حيث:

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & .. & (\varphi_0,\varphi_n) \\ . & & . \\ . & & . \\ (\varphi_n,\varphi_0) & ... & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ . \\ . \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ . \\ . \\ (f,\varphi_0) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

ونلاحظ $G = G^T$ $\left(\left(\varphi_j, \varphi_k\right) = \left(\varphi_k, \varphi_j\right) \right)$.

في الحقيقة يجب الانتباه إلى أن جملة المعادلات الخطية (15) غالباً $(n \geq 10)$ ما تكون مريضة، من إحدى الطرائق المتبعة لتجنب ذلك نستخدم طرائق (QR) لتفريق المصفوفة G، أو تغيير شكل الحدودية إلى الحدوديات المتعامدة .

تعريف (4):

بفرض $w_i > 0$ توابع وزن، و يمكن تمثيل $\varphi_k \in C[a,b]$ بالشعاع :

$$\varphi_k := \left(\sqrt{w_0}\varphi_k(x_0), \sqrt{w_1}\varphi_k(x_1), ..., \sqrt{w_N}\varphi_k(x_N)\right)^T \in \mathrm{R}^{n+1} \tag{16}$$

عندئذٍ نجد

$$\left(\varphi_j, \varphi_k\right) = \varphi_j^T \varphi_k \ , \left(f, \varphi_j\right) = f^T \varphi_k ; \tag{17}$$

حيث

$$f := \left(\sqrt{w_0} f(x_0), \sqrt{w_1} f(x_1), ..., \sqrt{w_N} f(x_N)\right)^T \in \mathrm{R}^{n+1} \tag{18}$$

إذا كانت $w_i = 1$ ، فإن

$$\varphi_k := \left(\varphi_k(x_0), \varphi_k(x_1), ..., \varphi_k(x_N)\right)^T, \ f := \left(f(x_0), f(x_1), ..., f(x_N)\right)^T$$

مبرهنة (2) :

إن جملة المعادلات الخطية في العلاقة (12) قابلة للحل و بشكل وحيد إذا و فقط إذا

كانت التوابع $\varphi_k , k = 0,1,...,n$ مستقلة خطياً.

ملاحظة :

إذا كـان $n \geq N$ فـإن التوابـع $\varphi_k , k = 0,1,...,n$ مرتبطـة خطيـاً،(إذا $n > N$ فـإن $\varphi_k , k = 0,1,...,n$ مرتبطـة خطيـاً حتمـاً ، و إذا كـان $n = N$ فالمسـألة هـي مسـألة استيفاء).

1-1-1-3 التقريب بالحدوديات الجبرية

في هذه الحالة نفترض $\varphi_k (x_i) = x_i^k$ ، نعوض في (12) فنجد:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \sum_{i=0}^{N} w_i x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) x_i^j , j = 0,1,...,n. \quad (19)$$

بفرض $w_i = 1$ ، عندئذٍ تكون جملة المعادلات الخطية (15) بالشكل:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & ... & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & ... & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & ... & \sum x_i^{n+2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & ... & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ . \\ . \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum f(x_i) x_i \\ \sum f(x_i) x_i^2 \\ . \\ . \\ . \\ \sum f(x_i) x_i^n \end{pmatrix}. \quad (20)$$

<u>حالات خاصة:</u>

1) $n = 1$ تقريب البيانات إلى مستقيم:

لـدينا $N+1$ نقطـة مختلفـة و $(x_i , y_i) \in \mathrm{R}^2$ حيـث $i = 0,...,N$ ، والتقريـب لمسـتقيم معادلته :

$$y = \phi^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{1} c_k^{(0)} x^k$$
$$= c_0^{(0)} + c_1^{(0)} x$$

نعوض في (20)، فنجد:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}.$$

نرمز:

$$S_x = \sum_{i=0}^{N} x_i \ , \ S_{xx} = \sum_{i=0}^{N} x_i^2 \ , \ S_{xy} = \sum_{i=0}^{N} x_i y_i \ , \ S_y = \sum_{i=0}^{N} y_i$$

وبحل جملة المعادلات نجد:

$$c_0^{(0)} = \frac{(N+1)S_{xy} - S_x S_y}{(N+1)S_{xx} - S_x S_x} \qquad (21)$$

$$c_1^{(0)} = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{(N+1)S_{xx} - S_x S_x} \qquad (22)$$

مثال(2):

أوجد معادلة المستقيم الذي يقرب البيانات التالية:

$(1,2.1),(2,2.9),(5,6.1),(7,8.3)$ ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

لنحسب كل من $S_x \ , \ S_{xx} \ , \ S_{xy} \ , \ S_y$

$$S_x = \sum x_i = 1+2+5+7 = 15$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2 = 79$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i = (1)(2.1) + (2)(2.9) + (5)(6.1) + (7)(8.3) = 96.5$$

$$S_y = \sum y_i = 2.1 + 2.9 + 6.1 + 8.3 = 19.4$$

وبذلك نجد:

$$c_0^{(0)} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{4(96.5) - (15)(19.4)}{4(79) - (15)(15)} = \frac{386 - 291}{316 - 225} = \frac{95}{91} = 1.04396$$

$$c_1^{(0)} = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{(79)(19.4) - (96.5)(15)}{4(79) - (15)(15)}$$

$$= \frac{1532.6 - 1447.5}{316 - 225} = \frac{85.1}{91} = 0.9352$$

وبذلك يكون التابع الخطي المطلوب :

$$f(x) = 1.04396\,x + 0.9352$$

ويكون الخطأ المرتكب:

$$E = \sum_{i=1}^{4} [f(x_i) - y_i]^2$$

$$E = [f(x_1) - y_1]^2 + [f(x_2) - y_2]^2 + [f(x_3) - y_3]^2 + [f(x_4) - y_4]^2$$

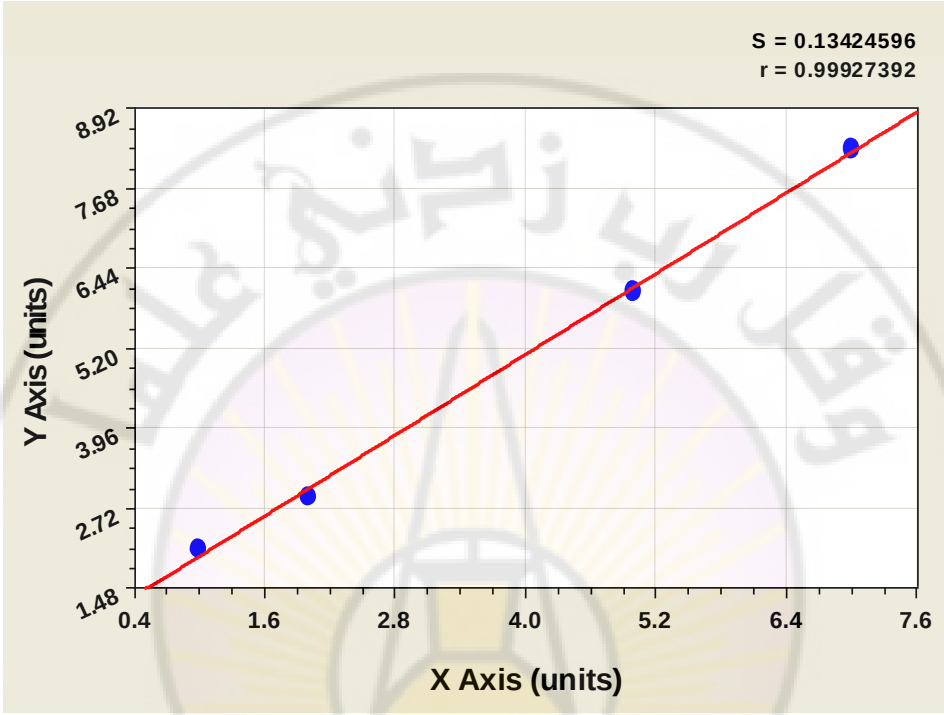
حيث:

$$f(x_1) = 1.04396(1) + 0.9352 = 1.9792$$
$$f(x_2) = 1.04396(2) + 0.9352 = 3.0232$$
$$f(x_3) = 1.04396(5) + 0.9352 = 6.1552$$
$$f(x_4) = 1.04396(7) + 0.9352 = 8.2432$$

ومنه:

$$E = [2.1 - 1.9792]^2 + [2.9 - 3.0232]^2 + [6.1 - 6.1552]^2 + [8.3 - 8.2432]^2$$
$$= [0.1208]^2 + [-0.1232]^2 + [-0.0552]^2 + [0.0568]^2$$
$$= 0.01459264 + 0.01517824 + 0.00304704 + 0.00322624$$
$$= 0.03604416$$

يبين الشكل3 البيانات المعطاة والتابع المقرب.



الشكل 3: البيانات ومستقيم التقريب للمثال(2)

مثال(3):

قرب البيانات التالية باستخدام تابع خطي ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	-1	0	1	2	3	4	5	6

الحل:

بحساب كل من S_y , S_{xy} , S_{xx} , S_x

$$S_x = \sum_{i=1}^{8} x_i = 20 \qquad S_{xx} = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 92$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 25 \qquad S_y = \sum_{i=1}^{8} y_i = 37$$

وبذلك نجد:

$$c_0^{(0)} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{8(25) - (20)(37)}{8(92) - (20)(20)} = \frac{200 - 740}{736 - 400} = \frac{-540}{336} = -1.6071429$$

$$c_1^{(0)} = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{nS_{xx} - S_x S_x} = \frac{(92)(37) - (25)(20)}{8(92) - (20)(20)}$$

$$= \frac{3404 - 500}{736 - 400} = \frac{2904}{336} = 8.6428571$$

وبذلك يكون التابع الخطي المطلوب :

$$f(x) = -1.6071429x + 8.6428571$$

ومنه:

$$f(x_1) = -1.6071429(-1) + 8.6428571 = 10.25$$

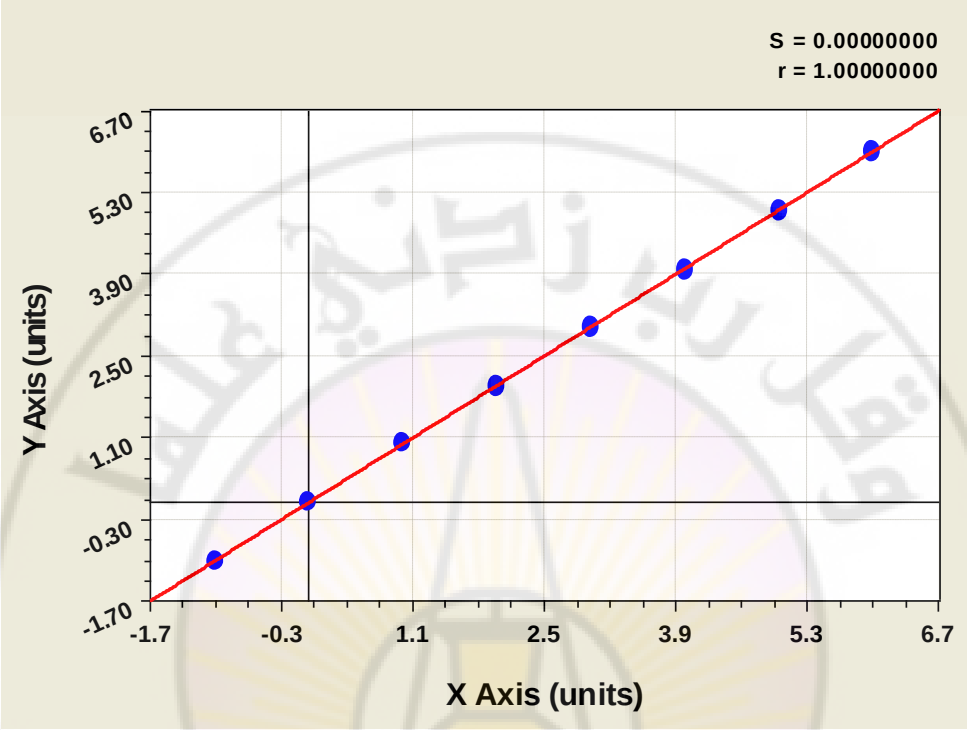
$$f(x_2) = -1.6071429(0) + 8.6428571 = 8.6428571$$
$$f(x_3) = -1.6071429(1) + 8.6428571 = 7.0357142$$
$$f(x_4) = -1.6071429(2) + 8.6428571 = 5.428513$$
$$f(x_5) = -1.6071429(3) + 8.6428571 = 3.8214284$$
$$f(x_6) = -1.6071429(4) + 8.6428571 = 2.2142855$$
$$f(x_7) = -1.6071429(5) + 8.6428571 = 0.6071426$$
$$f(x_8) = -1.6071429(6) + 8.6428571 = -1.0000003$$

ويكون الخطأ المرتكب:

$$E = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

$$E = [-0.25]^2 + [0.3571429]^2 + [0.0357142]^2 + [0.4285713]^2$$
$$+ [0.17857145]^2 + [0.7857145]^2 + [-0.6071426]^2 + [-2.00]^2$$
$$= 0.0625 + 0.128551051 + 0.0012755 + 0.183673$$
$$+ 0.0318878 + 0.6173473 + 0.368622 + 4.0000012$$
$$= 1.392858446$$

يبين الشكل 4 البيانات المعطاة والتابع المقربة.



الشكل 4: البيانات ومستقيم التقريب للمثال 3

2) $n = 2$ تقريب البيانات إلى قطع مكافئ :

لدينا $N+1$ نقطة مختلفة و $(x_i, y_i) \in \mathrm{R}^2$ حيث $i = 0,\ldots,N$ ، والتقريب إلى قطع مكافئ حيث معادلته :

$$y = \phi^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k^{(0)} x^k$$
$$= c_0^{(0)} + c_1^{(0)} x + c_2^{(0)} x^2$$

نعوض في (20)، فنجد:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

وبحساب قيم المجاميع وتعويضها يمكن الحصول على قيم المعاملات $c_0^{(0)},c_1^{(0)},c_2^{(0)}$ وتعويضها في التابع بسهولة.

مثال(4):

أوجد معادلة تابع من الدرجة الثانية الذي يقرب البيانات التالية:

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	0	0.19	0.26	0.29	0.31

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

بملاحظة أن عدد البيانات المعطاة في هذا المثال 4 لنقم بحساب المجاميع.

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 0+0.5+1+1.5+2 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0+0.25+1+2.25+4 = 7.5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 0+0.125+1+3.375+8 = 12.5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 0+0.0625+1+5.0625+16 = 22.125$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = (0)(0)+(0.5)(0.19)+(1)(0.26)+(1.5)(0.29)+(2)(0.31) = 1.41$$

ومنه نجد:

$$c_0^{(0)}(22.125)+c_1^{(0)}(12.5)+c_2^{(0)}(7.5) = 2.2$$

$$c_0^{(0)}(1.125)+c_1^{(0)}(7.5)+c_2^{(0)}(5) = 2.2$$

$$c_0^{(0)}(7.5)+c_1^{(0)}(5)+c_2^{(0)}(5) = 1.05$$

وبحل هذه الجملة من المعادلات نجد:

$$c_0^{(0)} = -0.186 \ , \ c_1^{(0)} = 0.3611 \ , \ c_2^{(0)} = 0.0117$$

ويكون التابع التربيعي المطلوب:

$$f(x) = -0.186x^2 + 0.3611x + 0.0117$$

و قيمة الخطأ المرتكب:

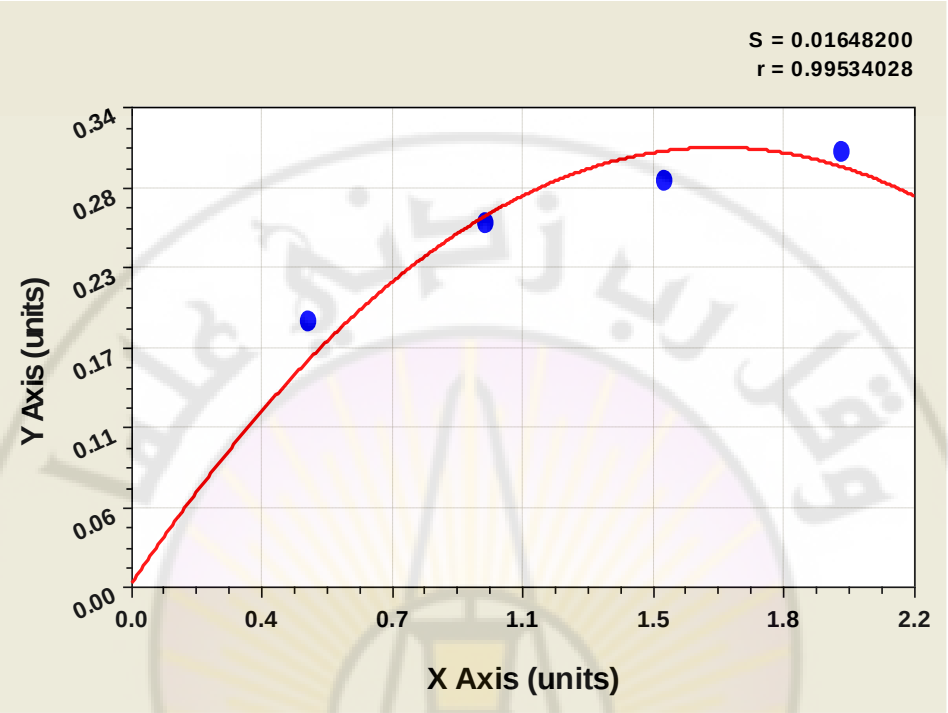
$$E = 0.00124629$$

ويبين الجدول1 قيم التابع المقرب عند النقاط المعطاة

x_i	y_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
0	0	0.0117	-0.0117	0.00013689
0.5	0.19	0.1651125	0.0248875	0.0006193877
1	0.26	0.26425	-0.00425	0.0000180625
1.5	0.29	0.3091125	-0.0191125	0.0003652877
2	0.31	0.2997	0.0103	0.00010609

الجدول 1

يوضح الشكل 5 الرسم البياني للبيانات المعطاة والتابع المقرب:



الشكل 5: البيانات وتابع التقريب للمثال 4

مثال(5):

أوجد معادلة تابع من الدرجة الثالثة الذي يقرب البيانات التالية:

x_i	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	0.05	0.08	0.14	0.23	0.35	0.50	0.65	0.77	0.86	0.92	0.95

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

عدد البيانات المعطاة $N = 11$. الحدودية المطلوبة من الدرجة الثالثة وبالتالي لدينا أربع معادلات بأربعة مجاهيل.

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^0 + c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^1 + c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^2 + c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^3 = \sum_{i=1}^{11}y_i$$

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{1}+c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{2}+c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{3}+c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{4}=\sum_{i=1}^{11}y_i x_i$$

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{2}+c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{3}+c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{4}+c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{5}=\sum_{i=1}^{11}y_i x_i^{2}$$

$$c_0^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{3}+c_1^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{4}+c_2^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{5}+c_3^{(0)}\sum_{i=1}^{11}x_i^{6}=\sum_{i=1}^{11}y_i x_i^{3}$$

لنوجد قيمة كل من هذه المجاميع:

$$\sum_{i=1}^{11}x_i^{0}=11 \qquad \sum_{i=1}^{11}x_i^{1}=0 \qquad \sum_{i=1}^{11}x_i^{2}=4.4$$

$$\sum_{i=1}^{11}x_i^{3}=0 \qquad \sum_{i=1}^{11}x_i^{4}=3.1328 \qquad \sum_{i=1}^{11}x_i^{5}=0$$

$$\sum_{i=1}^{11}x_i^{6}=2.6259 \qquad \sum_{i=1}^{11}y_i x_i^{0}=5.5 \qquad \sum_{i=1}^{11}y_i x_i^{1}=2.28$$

$$\sum_{i=1}^{11}y_i x_i^{2}=2.20 \qquad \sum_{i=1}^{11}y_i x_i^{3}=1.5226$$

بالتعويض في جملة المعادلات:

$$c_0^{(0)}(11)+c_1^{(0)}(0)+c_2^{(0)}(4.4)+c_3^{(0)}(0)=5.5$$

$$c_0^{(0)}(0)+c_1^{(0)}(4.4)+c_2^{(0)}(0)+c_3^{(0)}(3.1328)=2.28$$

$$c_0^{(0)}(4.4)+c_1^{(0)}(0)+c_2^{(0)}(3.1328)+c_3^{(0)}(0)=2.2$$

$$c_0^{(0)}(0)+c_1^{(0)}(3.1328)+c_2^{(0)}(0)+c_3^{(0)}(2.6259)=1.5226$$

ومنه

$$c_0^{(0)}(11)+c_2^{(0)}(4.4)=5.5$$

$$c_1^{(0)}(4.4)+c_3^{(0)}(3.1328)=2.28$$

$$c_0^{(0)}(4.4)+c_2^{(0)}(3.1328)=2.2$$

$$c_1^{(0)}(3.1328)+c_3^{(0)}(2.6259)=1.5226$$

وبحل هذه الجملة نجد:

$$c_0^{(0)}=0.5,\ c_1^{(0)}=0.6997\ ,\ c_2^{(0)}=0\ ,\ c_3^{(0)}=-0.255$$

والتابع هو:

$$f\ (x)=-0.255x^{3}+0.6997\ x\ +0.5$$

والخطأ المرتكب هو:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2$$

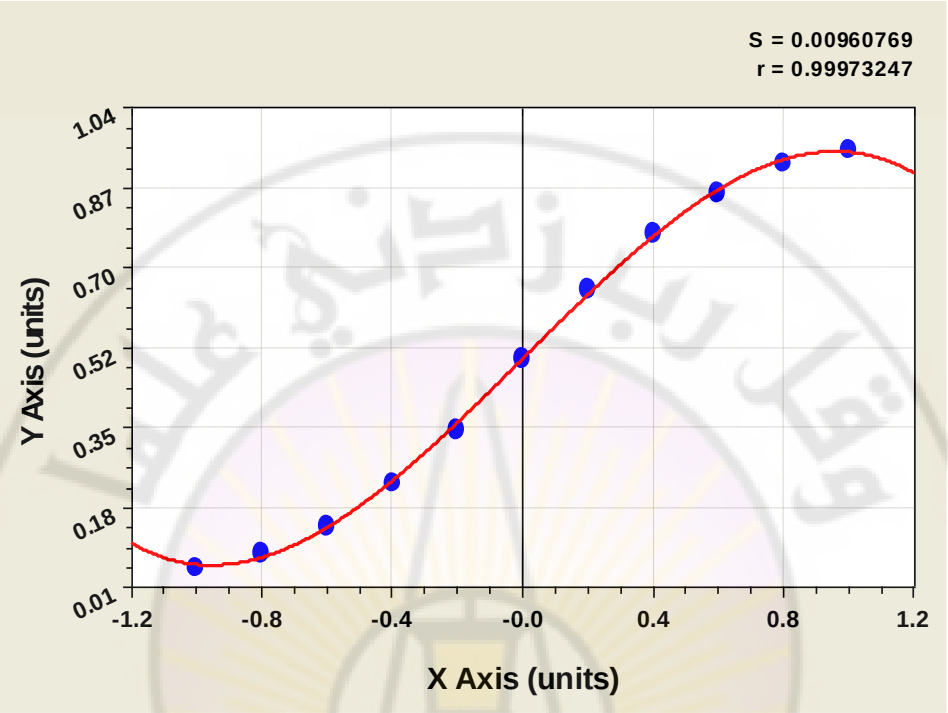
حيث:

x_i	y_i	$f(x_i)$	$(y_i-f(x_i))^2$
-1	0.05	0.0552	0.00003
-0.8	0.08	0.0708	0.00009
-0.6	0.14	0.1352	0.00002
-0.4	0.23	0.2364	0.00004
-0.2	0.35	0.3621	0.00014
0	0.50	0.5000	0
0.2	0.65	0.6379	0.00015
0.4	0.77	0.7636	0.00004
0.6	0.86	0.8648	0.00002
0.8	0.92	0.9292	0.00009
1	0.95	0.9448	0.00003

وبالتالي:

$$E=\sum_{i=1}^{11}\left[f(x_i)-y_i\right]^2=0.00064418$$

والرسم البياني للبيانات والتابع المقرب:



الشكل 6: البيانات وتابع التقريب للمثال 5

2-1-1-3 التقريب بالحدوديات المتعامدة

ذكرنا في الفقرة السابقة، أنه كي نتجنب مرض جملة المعادلات الخطية نستخدم الحدوديات المتعامدة. و هذا ما سنقدمه في هذه الفقرة.

في هذه الحالة نفترض $\varphi_k(x_i)=Q_k$ كتقريب للتابع ϕ:

$$\phi : \phi(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k Q_k = c_0Q_0 + c_1Q_1 + \ldots + c_nQ_n \qquad (23)$$

حيث نشترط

$$(\varphi_j,\varphi_k)\equiv(Q_j,Q_k)=0\,;\ j\neq k \qquad (24)$$

عندئذٍ تكون مصفوفة (G) لجملة المعادلات الخطية (20) قطرية، (لا توجد عمليات عددية كثيرة لحساب الحل ، سينتج معنا مباشرة ، و بذلك تجنبنا مرض الجملة الخطية).

ويتم حساب $c_j^{(0)}$ بالشكل:

$$c_j^{(0)} = \frac{(f, Q_j)}{(Q_j, Q_j)} \; ; \; j = 0,\ldots,n \tag{25}$$

$$\begin{cases} (Q_j, Q_j) := \sum_{i=0}^{N} w_i Q_j^2(x_i), \\ (f, Q_j) := \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) Q_j(x_i), \end{cases} \tag{26}$$

يمكن حساب الحدوديات المتعامدة Q_k بشكل تعاودي (غرام _ شميدت) كما يلي:

ضمن المجال $[a,b]$ بالنسبة لتابع الوزن $w(x)$:

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = x - b_1$$

$$Q_k(x) = (x - b_k)Q_{k-1}(x) - d_k Q_{k-2}(x) \; ; \; k \geq 2 \tag{27}$$

حيث:

$$x \in [a,b]$$

$$b_k = \frac{(xQ_{k-1}, Q_{k-1})}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})} \quad ; \quad k \geq 1 \tag{28}$$

$$d_k = \frac{(Q_{k-1}, Q_{k-1})}{(Q_{k-2}, Q_{k-2})} \quad ; \quad k \geq 2 \tag{29}$$

مع ملاحظة

(30)
$$(xQ_{k-1},Q_{k-1}) := \sum_{i=0}^{N} w_i x_i Q_{k-1}^2(x_i).$$

2-1-3 التقريب الخطي لتوابع مستمرة:

تُصاغ مسألتنا كما يلي :

نبحث عن تابع $\phi^{(0)}$ من الشكل (8) لأجل تابع $f \in C[a,b]$، وبحيث

(31)
$$\|g\|_2 = \left(\int_a^b w\, g^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}} ; w, g \in C[a,b]$$

حيث (w) تابع وزن، و $\|g\|_2$ نصف النظيم .

اذا وضعنا $g = f - \phi$ في العلاقة (9) نجد:

(32)
$$\left\| f - \phi^{(0)} \right\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \|f - \phi\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \int_a^b w \left(f(x) - \phi(x,c) \right) dx$$
$$= \min_{\phi \in S} D^2(c_0, c_1, ..., c_n)$$

و يرمز $E(x) = f(x) - \phi(x,c)$

بتطبيق الشروط $\frac{\partial\left(D^2\right)}{\partial C_j} = 0 \; , \; j = 0,...,n$، نحصل على $(n+1)$ جملة معادلات خطية المجاهيل هي: C_j^0 (عددهم $(n+1)$)، وذلك كما يلي:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \int_a^b w(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b w(x)f(x)\varphi_j(x)dx \quad ; j = 0,...,n. \tag{33}$$

نرمز

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) := \int_a^b w(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx, \\ (f, \varphi_j) := \int_a^b w(x)f(x)\varphi_j(x)dx \quad , \end{cases} \tag{34}$$

عندئذٍ تُصبح جملة المعادلات الخطية بالشكل المصفوفي:

$$G\,c = a \tag{35}$$

حيث:

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & .. & (\varphi_0,\varphi_n) \\ . & & . \\ . & & . \\ (\varphi_n,\varphi_0) & ... & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ . \\ . \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ . \\ . \\ (f,\varphi_0) \end{pmatrix}. \tag{36}$$

ونلاحظ $G = G^T$ $\left((\varphi_j,\varphi_k) = (\varphi_k,\varphi_j)\right)$.

مبرهنة(3):

مجموعة التوابع $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n \in C[a,b]$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\det G = 0; \quad \forall x \in [a,b] \tag{37}$$

مبرهنة(4) :

لتكن $f \in C[a,b]$، و $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n \in C[a,b]$ مجموعة توابع مستقلة خطياً،

عندئذٍ:

يوجد تمثيل وحيد $\phi^{(0)}$ من نوع التوابع (8) يحقق (32) وفق النظيم (31)، وتحقق المعاملات C_j^0 العلاقة (33).

1-2-1-3 التقريب بالحدوديات الجبرية

في هذه الحالة نفترض $\varphi_k(x_i)=x_i^k$ ، نعوض في (33) فنجد:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^{(0)} \int_a^b w_i x_i^{k+j} dx = \int_a^b w_i f(x_i) x_i^j \ , j=0,1,...,n. \tag{38}$$

بفرض $w(x)=1$ ، عندئذٍ تكون جملة المعادلات الخطية (38) كما يلي:

$$Gc = a. \tag{39}$$

حيث

$$G = \begin{pmatrix} \int_a^b dx & \int_a^b x dx & \int_a^b x^2 dx & \dots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \dots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \int_a^b x^4 dx & \dots & \int_a^b x^{n+2} dx \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \dots & \int_a^b x^{2n} dx \end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n^{(0)} \end{pmatrix};a=\begin{pmatrix} \int_a^b f(x)dx \\ \int_a^b f(x)xdx \\ \int_a^b f(x)x^2dx \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_a^b f(x)x^n dx \end{pmatrix}.$$

حالة خاصة: $(n=2)$

لنوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع $f(x)$ على المجال $[-1,1]$. نسعى إلى إيجاد الحدودية

$$p_2(x)=c_0^{(2)}x^2+c_0^{(1)}x+c_0^{(0)}$$

بحيث يكون الخطأ أصغر ما يمكن .

بملاحظة أن $n=2$, ينتج لدينا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل :

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}1dx+c_0^{(1)}\int_{-1}^{1}xdx+c_0^{(2)}\int_{-1}^{1}x^2dx=\int_{-1}^{1}(1)(f(x))dx \;;j=0$$

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}xdx+c_0^{(1)}\int_{-1}^{1}x^2dx+c_0^{(2)}\int_{-1}^{1}x^3dx=\int_{-1}^{1}xf(x)dx \;;j=1$$

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}x^2dx+c_0^{(1)}\int_{-1}^{1}x^3dx+c_0^{(2)}\int_{-1}^{1}x^4dx=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx \;;j=2$$

لنحسب التكاملات التالية:

$$\int_{-1}^{1}1dx=2$$

$$\int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

بالتعويض بجملة المعادلات الخطية السابقة نجد:

$$2c_0^{(0)} + 0c_0^{(1)} + \frac{2}{3}c_0^{(2)} = \int_{-1}^{1}(1)(f(x))dx$$

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1} x dx + c_0^{(1)}\int_{-1}^{1} x^2 dx + c_0^{(2)}\int_{-1}^{1} x^3 dx = \int_{-1}^{1} x f(x) dx \; ; j = 1$$

$$\frac{2}{3}c_0^{(0)} + 0c_0^{(1)} + \frac{2}{5}c_0^{(2)} = \int_{-1}^{1} x f(x) dx$$

وبحل هذه الجملة نوجد المتغيرات $c_0^{(0)}$ $c_0^{(1)}$ $c_0^{(2)}$.

مثال(6):

أوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع:

$$f(x) = \sin \pi x$$

وذلك على المجال $[0,1]$.

الحل:

بملاحظة أن $n = 2$ و $a = 0$ و $b = 1$ ينتج لدينا جملة المعادلات التالية :

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1} 1 dx + c_0^{(1)}\int_{-1}^{1} x dx + c_0^{(2)}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_{-1}^{1}(1)(\sin \pi x)dx$$

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}xdx+c_0^{(1)}\int_{-1}^{1}x^2dx+c_0^{(2)}\int_{-1}^{1}x^3dx=\int_{-1}^{1}x\sin\pi xdx$$

$$c_0^{(0)}\int_{-1}^{1}x^2dx+c_0^{(1)}\int_{-1}^{1}x^3dx+c_0^{(2)}\int_{-1}^{1}x^4dx=\int_{-1}^{1}x^2\sin\pi xdx$$

لنحسب كل من التكاملات السابقة:

$$\int_0^1 1dx=x\Big|_0^1=1$$

$$\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x^4dx=\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{5}$$

$$\int_{-1}^{1}(1)(\sin\pi x)dx=\int_{-1}^{1}\sin\pi xdx=\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\Big|_{-1}^{1}$$

$$\int_0^1(x)(\sin\pi x)dx=\frac{-1}{\pi}x\cos\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{-1}{\pi}\cos\pi xdx$$

$$=\frac{-1}{\pi}x\cos\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi xdx$$

$$=\frac{-1}{\pi}x\cos\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{-1}{\pi}(-1-0)+\frac{1}{\pi^2}(0)=\frac{1}{\pi}$$

و بالطريقة نفسها نجد:

$$\int_{-1}^{1} x^2 \sin \pi x dx = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

بتعويض التكاملات السابقة في جملة المعادلات نجد:

$$c_0^{(0)} + \frac{1}{2} c_0^{(1)} + \frac{1}{3} c_0^{(2)} = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{1}{2} c_0^{(0)} + \frac{1}{3} c_0^{(1)} + \frac{1}{4} c_0^{(2)} = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{3} c_0^{(0)} + \frac{1}{4} c_0^{(1)} + \frac{1}{5} c_0^{(2)} = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

وبحل هذه الجملة نجد:

$$c_0^{(0)} = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx 0.050465$$

$$c_0^{(1)} = -c_0^{(2)} = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251$$

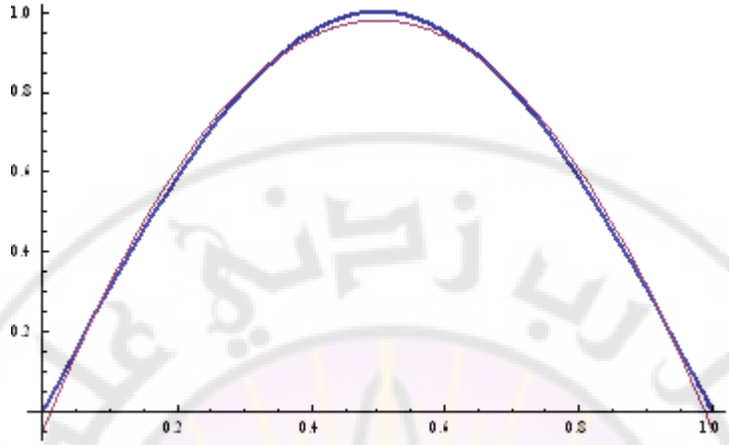
وبالتالي حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع:

$$f(x) = \sin \pi x$$

هي:

$$p_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 7: التابع $f(x)=\sin \pi x$ وتابع التقريب للمثال 6

لنحسب قيمة الخطأ المرتكب:

بوضع:

$$c_0^{(2)} = -4.12251 \ , \ c_0^{(1)} = 4.12251 \ , \ c_0^{(0)} = -0.050465$$

يكون:

$$E = \int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 dx$$

$$= \int_0^1 (f^2(x) - 2f(x)p_n(x) + p_n^2(x))dx$$

$$= \int_0^1 (\sin \pi x)^2 dx - 2\int_0^1 (\sin \pi x)(c_0^{(2)}x^2 + c_0^{(1)}x + c_0^{(0)})dx +$$

$$\int_0^1 (c_0^{(2)}x^2 + c_0^{(1)}x + c_0^{(0)})^2 dx$$

$$= 0.5 - 2(0.4997020760523) + 0.499685693825$$

$$= 0.0002815417204$$

$$E_1 = \sqrt{E} \Rightarrow E_1 = \sqrt{0.0002815417204} = 0.054536$$

مثال(7):

أوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع:

$$f(x) = e^x$$

وذلك على المجال $[-1,1]$.

الحل:

بملاحظة أن $n = 2$ و $a = -1$ و $b = 1$ ينتج لدينا جملة المعادلات التالية :

$$c_0^{(0)} \int_{-1}^{1} 1dx + c_0^{(1)} \int_{-1}^{1} x dx + c_0^{(2)} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_{-1}^{1} (1)\left(e^x\right) dx$$

$$c_0^{(0)} \int_{-1}^{1} x dx + c_0^{(1)} \int_{-1}^{1} x^2 dx + c_0^{(2)} \int_{-1}^{1} x^3 dx = \int_{-1}^{1} x\left(e^x\right) dx$$

$$c_0^{(0)} \int_{-1}^{1} x^2 dx + c_0^{(1)} \int_{-1}^{1} x^3 dx + c_0^{(2)} \int_{-1}^{1} x^4 dx = \int_{-1}^{1} x^2\left(e^x\right) dx$$

لنحسب كل من التكاملات السابقة:

$$\int_{-1}^{1} 1dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$\int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} (1)(e^x) dx = \int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e} \approx 2.3504$$

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx = xe^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = \left(e + \frac{1}{e}\right) + \left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} \approx 0.7358$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = x^2 e^x\Big|_{-1}^{1} - 2x\int_{-1}^{1} e^x dx = \left(e - \frac{1}{e}\right) - 2\left(\frac{2}{e}\right) = e - \frac{5}{e} \approx 0.8789$$

بالتعويض في جملة المعادلات و بالطريقة نفسها نجد:

$$2c_0^{(0)} + 0c_0^{(1)} + \frac{2}{3}c_0^{(2)} = 2.3504$$

$$0c_0^{(0)} + \frac{2}{3}c_0^{(1)} + 0c_0^{(2)} = 0.7358$$

$$\frac{2}{3}c_0^{(0)} + 0c_0^{(1)} + \frac{2}{5}c_0^{(2)} = 0.8789$$

وبحل هذه الجملة نجد:

$$c_0^{(0)} = 0.99629 \ , \ c_0^{(1)} = 1.1036 \ , \ c_0^{(2)} = 0.53672$$

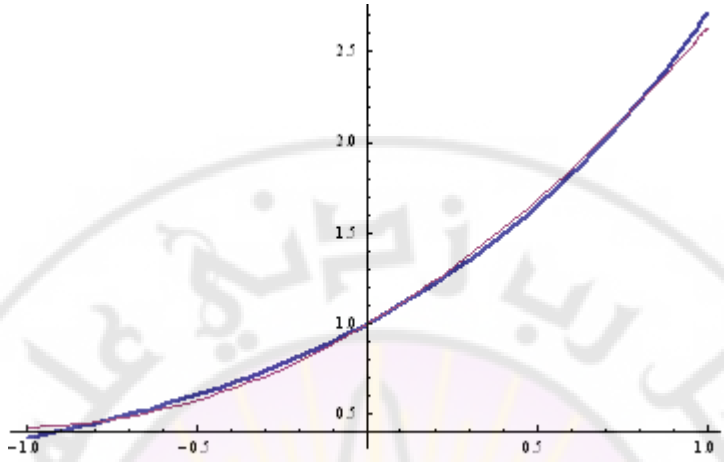
وبالتالي حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع:

$$f(x) = e^x$$

هي:

$$p_2(x) = 0.5367x^2 + 1.1036x + 0.99629$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 8: التابع $f(x)=e^x$ وتابع التقريب للمثال 7

لنحسب قيمة الخطأ المرتكب:

لدينا

$$c_0^{(0)}=0.99629\ ,\ c_0^{(1)}=1.1036\ ,\ c_0^{(2)}=0.53672$$

ومنه:

$$E=\int_a^b (f(x)-p_n(x))^2\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(f^2(x)-2f(x)p_n(x)+p_n^2(x))dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(e^x)^2dx-2\int_{-1}^{1}(e^x)(c_0^{(2)}x^2+c_0^{(1)}x+c_0^{(0)})dx$$

$$+\int_0^1(c_0^{(2)}x^2+c_0^{(1)}x+c_0^{(0)})^2dx$$

$$=0.0144$$

$$E_1=\sqrt{E}\Rightarrow E_1=0.03795$$

3-1-2-2 التقريب بالحدوديات المتعامدة :

في هذه الحالة نفترض $\varphi_k(x_i)=Q_k$ كتقريب للتابع ϕ :

$$\phi : \phi(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k Q_k = c_0Q_0+c_1Q_1+\ldots+c_nQ_n \tag{40}$$

حيث نشترط

$$(\varphi_j,\varphi_k)\equiv(Q_j,Q_k)=0\ ;\ j\neq k \tag{41}$$

عندئذٍ تكون مصفوفة (G) لجملة المعادلات الخطية (35) قطرية، ويتم حساب $c_j^{(0)}$ كما يلي:

$$c_j^{(0)}=\frac{(f,Q_j)}{(Q_j,Q_j)}\ ;\ j=0,\ldots,n \tag{42}$$

$$\begin{cases} (Q_j,Q_j):=\int_a^b w(x)Q_j^2(x)dx \\ (f,Q_j):=\int_a^b w(x)f(x)Q_j(x)dx \end{cases} \tag{43}$$

ويبين الجدول التالي أشهر الدوال المتعامدة:

اسم الحدودية	المجال $]a,b[$	$w(x)$	b_k	d_k
Legendre ليجندر	$]-1,1[$	1	0	$\frac{1}{4-k^{-2}}$
Chebyshev تشبتشيف	$]-1,1[$	$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	0	$\begin{cases}\frac{1}{2};k=1\\ \frac{1}{4};k\geq 2\end{cases}$
Jacobi جاكوبي	$]-1,1[$	$(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2k+\alpha+\beta)(2+2k+\alpha+\beta)}$	$\frac{4k(k+\alpha)(k+\beta)(k+\alpha+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)^4-(2k+\alpha+\beta)^2}$
Jacobi, $\alpha=\beta$	$]-1,1[$	$\left(1-x^2\right)^{\alpha}$	0	$\frac{k(k+2\alpha)}{4(k+\alpha)^2-1}$
Laguerre لاكير	$]0,\infty[$	e^{-x}	$2k+1$	k^2
Hermite هرميت	$]-\infty,\infty[$	e^{-x^2}	0	$\frac{k}{2}$

الجدول 2

خواص الحدوديات المتعامدة:

1- يمكن حساب الحدوديات المتعامدة Q_k بشكل تعاودي (غرام _ شميدت) ضمن المجال $[a,b]$ بالنسبة لتابع الوزن $w(x)$ ، كما يلي::

$$Q_0(x)=1$$

$$Q_1(x)=x-b_1$$

$$Q_k(x)=(x-b_k)Q_{k-1}(x)-d_kQ_{k-2}(x)\ ;\ k\geq 2 \qquad (44)$$

حيث:

$$x \in [a,b]$$

$$b_k = \frac{(xQ_{k-1}, Q_{k-1})}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})}; k \geq 1 \quad (45)$$

$$d_k = \frac{(Q_{k-1}, Q_{k-1})}{(Q_{k-2}, Q_{k-2})}; k \geq 2 \quad (46)$$

مع ملاحظة :

$$(xQ_{k-1}, Q_{k-1}) := \int_a^b w(x)\, x\, Q_{k-1}^2(x). \quad (47)$$

2- للحدوديات المتعامدة Q_k $(k = 0,1,...,n)$ $n+1$ جذرٌ حقيقيٌ في المجال $]a,b[$

3- أي تابع لـ x معرف على مجال منتهٍ $[a,b]$ يمكن تحويله إلى تابع لـ t على المجال $[-1, 1]$ وذلك بإجراء التحويل التالي :

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad (48)$$

مع ملاحظة:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt \quad (49)$$

3-1-2-2-1 التقريب باستخدام حدوديات لوجاندر:

تعريف حدوديات لوجاندر (5): وهي حدوديات متعامدة على المجال $]-1,1[$ بالنسبة لتابع الوزن:

$$w(x) = 1 \quad (50)$$

وتعطى كما يلي:

(51) $$P_{k+1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right]; n = 0,1,2,...$$

بشكل خاص:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

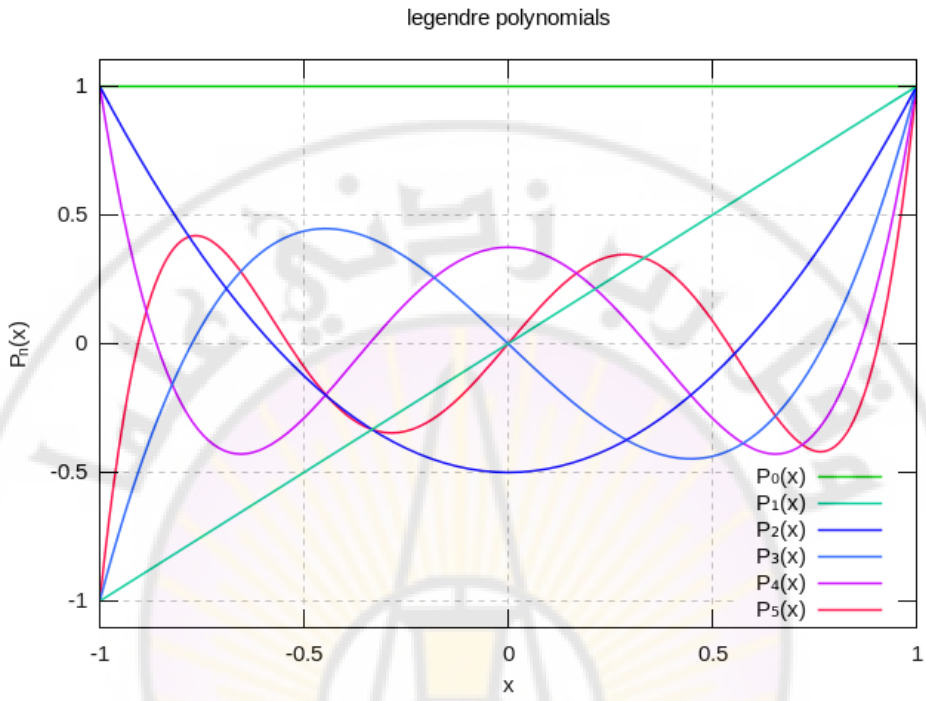
والعلاقة التكرارية:

(52) $$P_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}\left[(2k+1)\,x\,P_k(x) - (k)\,P_{k-1}(x)\right]$$

ونلاحظ

(53) $$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = \delta_{ij}\,\frac{2}{2i+1}$$

والرسم البياني لحدوديات لوجاندر هو:



الشكل 9

حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة n تأخذ الشكل:

$$\phi(x)=c_0^{(0)}p_0(x)+c_1^{(0)}p_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}p_n(x)$$

حيث $c_0^{(0)},c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ من العلاقة (42)

مثال(8):

أوجد حدودية المربعات الصغرى من الدرجة الأولى للتابع: $f(x)=\cos x$ على المجال $[-1\,,1]$ باستخدام حدوديات لوجاندر.

الحل:

نهدف إلى إيجاد الحدودية:

$$\phi(x)=c_0^{(0)}p_0(x)+c_1^{(0)}p_1(x)$$

وجدنا سابقاً:

$$c_0^{(0)} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)p_0(x)dx}{\int_{-1}^{1} p_0(x)p_0(x)dx}$$

$$c_1^{(0)} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)p_1(x)dx}{\int_{-1}^{1} p_1(x)p_1(x)dx}$$

وبتعويض كلٍ بما يساويه نجد:

ومنه:

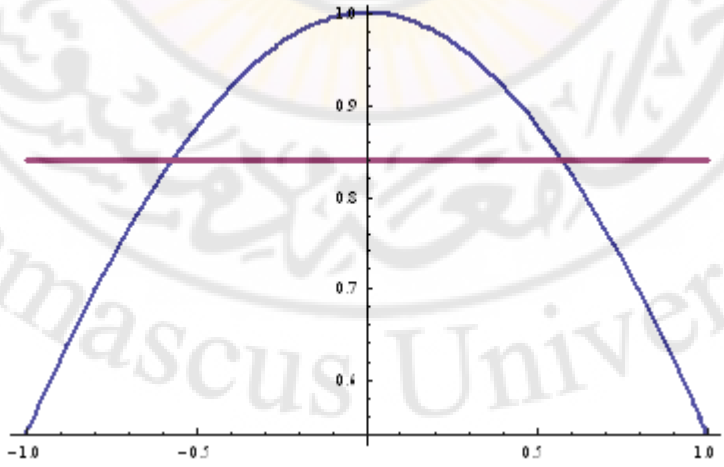
$$c_0^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos x dx = \sin 1$$

$$c_1^{(0)} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x \cos x dx = 0$$

وبالتالي:

$$\phi(x) = \sin 1$$

والرسم البياني:



الشكل 10: التابع $f(x) = \cos x$ وتابع التقريب للمثال 8

لنحسب قيمة الخطأ المرتكب:

$$E = \int_{-1}^{1} (\phi(x) - f(x))^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (f^2(x) - 2f(x)\phi(x) - \phi^2(x)) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f^2(x) dx - 2\int_{-1}^{1} f(x)\phi(x) dx + \int_{-1}^{1} \phi^2(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (\cos x)^2 dx - 2\int_{-1}^{1} \cos x \sin 1 dx + \int_{-1}^{1} (\sin 1)^2 dx$$

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$= 1.454649 - 2(1.4161468) + 1.4161468$$

$$= 0.0385022$$

$$E_1 = \sqrt{E} \Rightarrow \quad E_1 = \sqrt{0.0385022} = 0.196224$$

مثال(9):

أوجد حدودية المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع: $f(x) = e^x$ على المجال $[-1, 1]$ باستخدام حدوديات لوجاندر.

الحل:

نهدف إلى إيجاد الحدودية:

$$\phi(x) = c_0^{(0)} p_0(x) + c_1^{(0)} p_1(x) + c_2^{(0)} p_2(x)$$

وجدنا سابقاً:

$$c_0^{(0)} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) p_0(x) dx}{\int_{-1}^{1} p_0(x) p_0(x) dx}$$

$$c_1^{(0)} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)p_1(x)dx}{\int_{-1}^{1} p_1(x)p_1(x)dx}$$

$$c_2^{(0)} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)p_2(x)dx}{\int_{-1}^{1} p_2(x)p_2(x)dx}$$

وبتعويض كلٍ بما يساويه نجد:

$$c_0^{(0)} = \frac{\int_{-1}^{1} e^x dx}{2} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$c_1^{(0)} = \left(\frac{3}{2}\right)\int_{-1}^{1} xe^x dx = \frac{3}{e}$$

$$c_2^{(0)} = \left(\frac{5}{2}\right)\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)e^x dx = \frac{5}{3}\left(e - \frac{7}{e}\right)$$

وبالتالي:

$$\phi(x) = c_0^{(0)}p_0(x) + c_1^{(0)}p_1(x) + c_2^{(0)}p_2(x)$$

$$\phi(x) = 0.2385429x^2 + 1.103638x + 1.09569$$

لنحسب قيمة الخطأ المرتكب:

$$E = \int_{-1}^{1}(\phi(x) - f(x))^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(f^2(x) - 2\phi(x)f(x) - \phi^2(x))dx$$

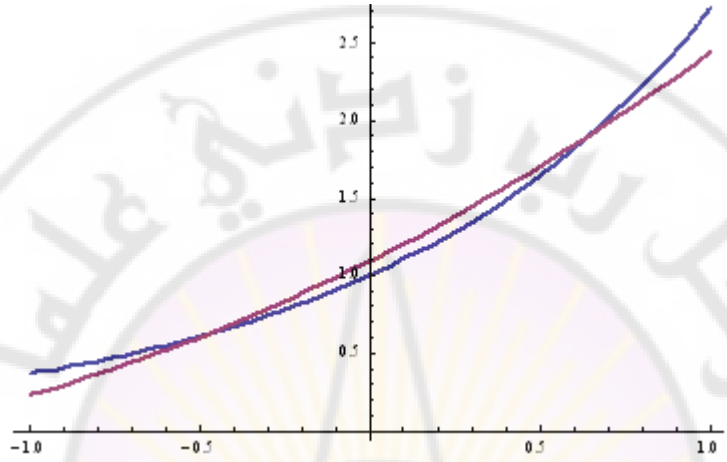
$$= \int_{-1}^{1} f^2(x)dx - 2\int_{-1}^{1} f(x)\phi(x)dx + \int_{-1}^{1}\phi^2(x)dx$$

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$= 3.62686 - 2(-3.1282) + 3.58434 = 0.01726$$

$$E_1 = \sqrt{E} \Rightarrow E_1 = 0.13138$$

والرسم البياني:



الشكل 11: التابع $f(x) = e^x$ وتابع التقريب للمثال 9

مثال(10):

أوجد حدودية المربعات الصغرى من الدرجة الأولى للتابع: $f(x) = \cos x$ على المجال $[0\ ,\ \pi]$ باستخدام حدوديات لوجاندر.

الحل:

نجري التحويل التالي :

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1+t)$$

وعندئذٍ:

$$F(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+t)\right) = -\sin\frac{\pi}{2}t \quad ; \quad -1 \le t \le 1$$

نهدف إلى إيجاد الحدودية:

$$\phi(t)=c_0^{(0)}p_0(t)+c_1^{(0)}p_1(t)$$

وجدنا سابقاً:

$$c_0^{(0)}=\frac{\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}F(t)p_0(t)dt}{\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}p_0(t)p_0(t)dt}$$

$$c_1^{(0)}=\frac{\int_{-1}^{1}F(t)p_1(t)dt}{\int_{-1}^{1}p_1(t)p_1(t)dt}$$

وجدنا سابقاً:

$$c_0^{(0)}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$=\frac{-1}{2}\left[\frac{-1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right]\Bigg|_{-1}^{1}=0$$

$$c_1^{(0)}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}tF(t)dt=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$=\frac{3}{2}\left(\left[\frac{-2}{\pi}t\sin\frac{\pi}{2}t\right]\Bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(0+\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}t\sin\frac{\pi}{2}t\right]\Bigg|_{-1}^{1}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{8}{\pi^2}\right)=\frac{12}{\pi^2}$$

$$\phi(t)=c_0^{(0)}p_0(t)+c_1^{(0)}p_1(t)=\frac{-12}{\pi^2}t$$

بالعودة إلى المتحول x

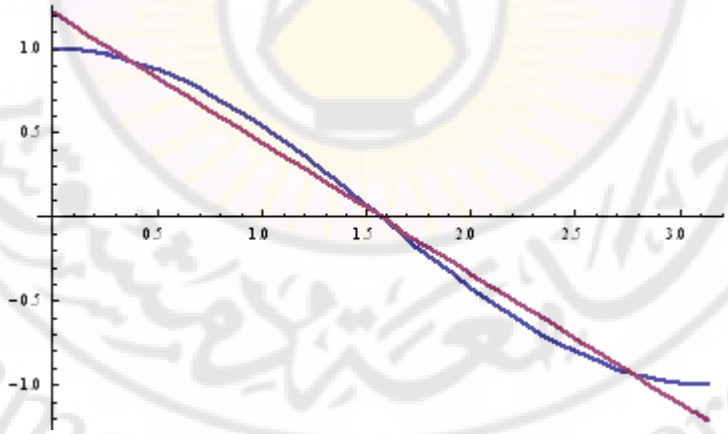
$$t=\frac{2x-(b-a)}{(b+a)}=\frac{2x-\pi}{\pi}$$

$$\phi(x)=\frac{-12}{\pi^2}\left(\frac{2x-\pi}{\pi}\right)=\frac{-24x+12\pi}{\pi^3}=\frac{-24}{\pi^3}x+\frac{12}{\pi^2}$$
$$=-0.77404x+1.21585$$

لنحسب قيمة الخطأ المرتكب:

$$E=\int_a^b(\phi(x)-f(x))^2dx$$
$$=\int_0^{\pi}(f^2(x)-2f(x)\phi(x)-\phi^2(x))dx$$
$$=\int_0^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-1}^{1}f(x)\phi(x)dx+\int_{-1}^{1}\phi^2(x)dx$$
$$=1.570796-2(1.54807365)+1.54807365$$
$$=0.02272235$$
$$E_1=\sqrt{E}\Rightarrow\ E_1=\sqrt{0.02272235}=0.150881$$

والرسم البياني:



الشكل 12: التابع $f(x)=\cos x$ وتابع التقريب للمثال 10

3-1-2-2-2 التقريب باستخدام حدوديات هرميت:

تعريف حدوديات هرميت (6): وهي حدوديات متعامدة على المجال $]-\infty,\infty[$ بالنسبة لتابع الوزن:

(54) $$w(x) = e^{-x^2}$$

وتعطى كما يلي:

(55) $$\mathrm{H}_n(\mathrm{x}) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]; n = 0,1,2,...$$

بشكل خاص:

$$H_0(\mathrm{x}) = 1$$

$$H_1(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}$$

$$H_2(\mathrm{x}) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(\mathrm{x}) = 8x^3 - 12x$$

والعلاقة التكرارية:

(56) $$H_{k+1}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}\,\mathrm{H}_k(x) - 2k\,\mathrm{H}_{k-1}(x) \quad ; k = 1,2,...$$

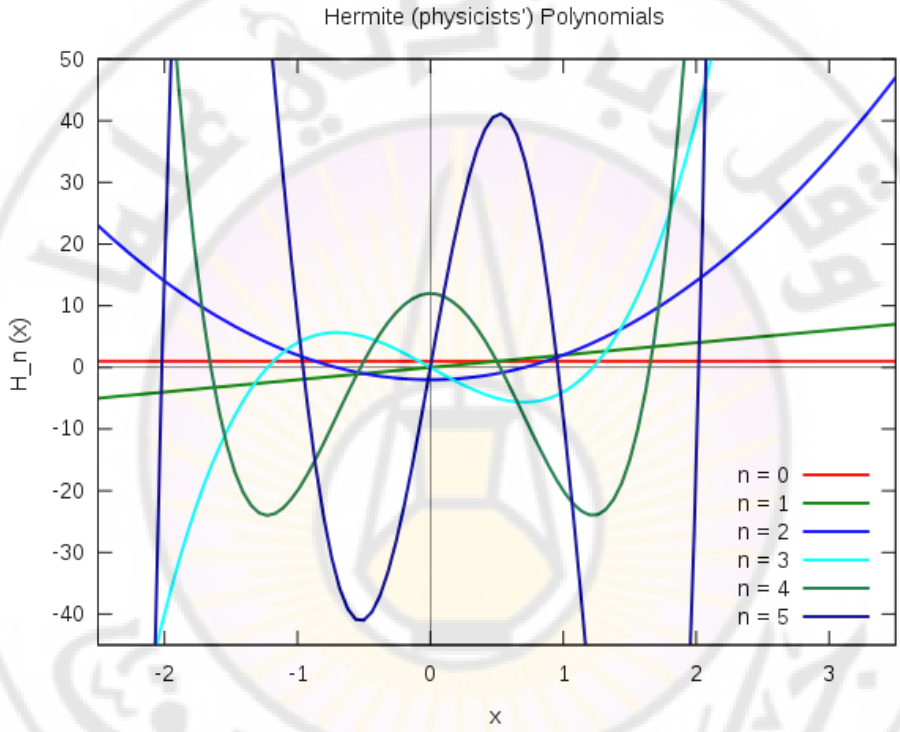
تحقق دوال هرميت الخاصة:

(57) $$\mathrm{H}_n'(\mathrm{x}) = 2n\,\mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{x}) \quad ; n = 0,1,2,...$$

ونلاحظ

(58) $$\int_{-1}^{1} H_i(\mathrm{x})\mathrm{H}_j(\mathrm{x})\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{dx} = \delta_{ij}\; j!2^j\sqrt{\pi}$$

والرسم البياني لحدوديات هرميت هو:



الشكل 13

حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة n تأخذ الشكل:

$$\phi(x)=c_0^{(0)}H_0(x)+c_1^{(0)}H_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}H_n(x)$$

حيث $c_0^{(0)},c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ من العلاقة (42)، والتي تجعل الخطأ

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(\phi(x)-f(x))^2dx$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\left[c_0^{(0)}H_0(x)+c_1^{(0)}H_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}H_n(x)-f(x)\right]^2dx$$

أصغر ما يمكن.

3-1-2-2-3 التقريب باستخدام حدوديات لاكير:

تعريف حدوديات لاكير (7): هي حدوديات متعامدة على المجال $]0,\infty[$ بالنسبة لتابع الوزن:

$$w(x) = e^{-x} \tag{59}$$

وتعطى كما يلي:

$$L_n(x) = \frac{1}{e^{-x}\, n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x} \right]; n \geq 0 \tag{60}$$

بشكل خاص:

$$L_0(\mathrm{x}) = 1$$

$$L_1(\mathrm{x}) = 1 - \mathrm{x}$$

$$L_2(\mathrm{x}) = \frac{1}{2!}\left(2 - 4x + x^2\right)$$

ونلاحظ

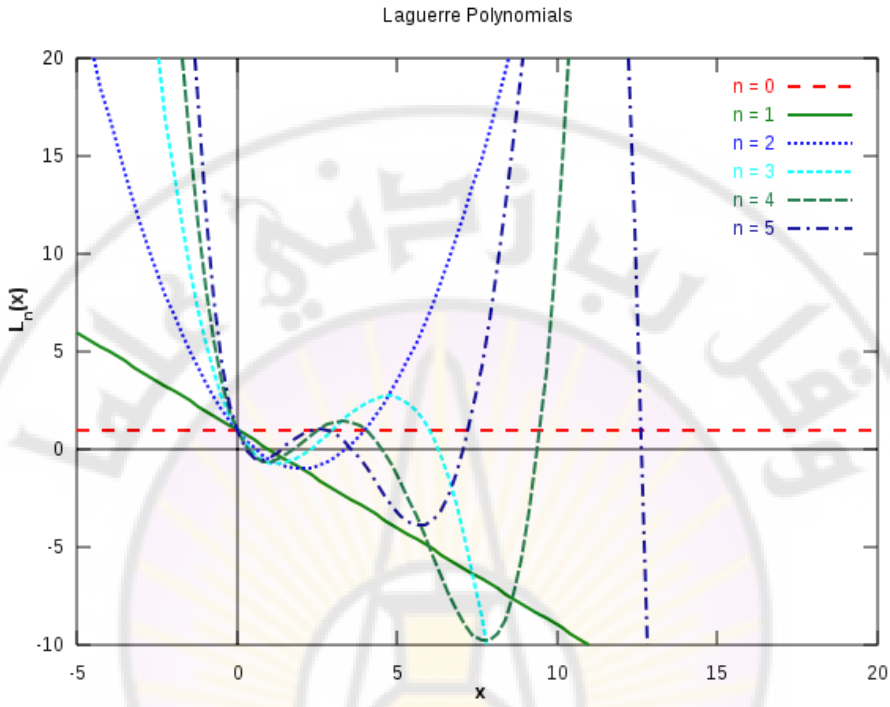
$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{61}$$

و العلاقة التكرارية:

$$L_{k+1}(\mathrm{x}) = \frac{1}{k+1}\left[(2k + 1 - x) L_k(\mathrm{x}) - \mathrm{k} L_{k-1}(\mathrm{x}) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i!} x^i \tag{62}$$

والرسم البياني لحدوديات لاكير هو:



الشكل 14

حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة n تأخذ الشكل:

$$\phi(x)=c_0^{(0)}L_0(x)+c_1^{(0)}L_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}L_n(x)$$

حيث $c_0^{(0)},c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ من العلاقة (42).

4-2-2-1-3 التقريب باستخدام حدوديات تشبتشيف:

تعريف حدوديات تشبتشيف (8): وهي حدوديات متعامدة على المجال $]-1,1[$ بالنسبة لتابع الوزن:

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (63)$$

وتُعطى كما يلي:

(64) $$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad ; n \geq 0$$

بشكل خاص:

$$n = 0 \Rightarrow T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$$

ملاحظة:

لاستخدام خواص التوابع المثلثية المتعامدة نجري التحويل :

$$\theta = \arccos(x) \Rightarrow x = \cos\theta$$

إن التوابع $T_n(x)$ في الحقيقة هي حدوديات متعامدة، وهي تحقق العلاقة التالية:

(65) $$\int_{-1}^{1} w(x) T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & if \quad m = n \neq 0 \\ \pi & if \quad m = n = 0 \end{cases}$$

بالاضافة لذلك العلاقة تكرارية تربط بين حدوديات تشيبتشيف هي:

(66) $$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad ; \quad n \geq 1$$

يمكن الحصول على توابع تشيبتشيف على شكل حدوديات بطريقة مبسطة باستخدام العلاقة التكرارية الأساسية :

$$T_0(x) = \cos(\arccos(x)) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

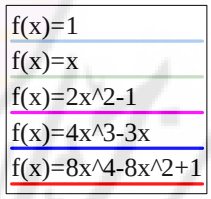
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^4 + 1$$

وهكذا.....

ونلاحظ ان معامل أكبر درجة في حدودية تشيبتشيف هو 2^{n-1}.

والرسم البياني لحدوديات تشيبتشيف هو:



الشكل 15

حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة n تأخذ الشكل:

$$\phi(x)=c_0^{(0)}T_0(x)+c_1^{(0)}T_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}T_n(x)$$

حيث $c_0^{(0)},c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ من العلاقة (42)

مبرهنة (5) :

إن حدودية تشيبتشيف $T_n(x)$ من الدرجة $n\geq 1$ لها n صفراً بسيطاً على المجال

[−1 , 1] عند النقاط:

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \;\; ; \;\; \forall k = 1,2,\ldots,n \tag{67}$$

وأكثر من ذلك $T_n(x)$ تبلغ قيمتها العظمى بالقيمة المطلقة عند النقاط:

$$\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \;\; ; \;\; \forall k = 1,2,\ldots,n \tag{68}$$

أي :

$$T_n\left(\bar{x}'_k\right) = (-1)^k \tag{69}$$

تعريف حدوديات تشيبتشيف واحدية المعامل الرئيسي (9):

ونرمز لها بالرمز $\tilde{T}_n(x)$ وهي الحدوديات التي تنتج عن حدوديات تشيبتشيف بتقسيم $T_n(x)$ على المعامل الرئيسي 2^{n-1} ومنه:

$$\tilde{T}_0(x) = 1$$

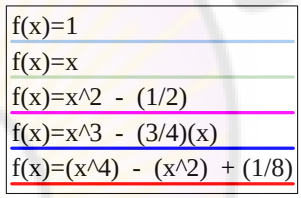
$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \;\; ; \;\; n \geq 1 \tag{70}$$

وتصبح العلاقة التكرارية:

$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \frac{1}{2}\tilde{T}_0(x) \tag{71}$$

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \;\; ; \;\; n \geq 2 \tag{72}$$

والرسم البياني لحدوديات تشيبتشيف واحدية المعامل الرئيسي:



الشكل 16

وبما أن $\tilde{T}_n(x)$ هي مضاعفات لـ $T_n(x)$ فهذا يقتضي أن أصفار $\tilde{T}_n(x)$ هي أيضاً أصفار $T_n(x)$، وهي:

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \;;\; \forall k = 1,2,\ldots,n \tag{73}$$

كما أن القيمة العظمى لـ $\tilde{T}_n(x)$ عند النقاط:

$$\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \;;\; \forall k = 1,2,\ldots,n \tag{74}$$

حيث

$$T_n\left(\bar{x}'_k\right) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \tag{75}$$

لـتكن $\widetilde{\Pi}_n$ ترمـز إلـى مجموعـة جميـع الحـدوديات واحديـة المعامـل الرئيسـي مـن الدرجـة n . تؤدي العلاقة السابقة إلى خاصة هامة جداً تتميز بها $\widetilde{T}_n(x)$ عن باقي أعضاء المجموعة $\widetilde{\Pi}_n$ سنذكرها في المبرهنة التالية.

مبرهنة (6) :

الحدوديات $\widetilde{T}_n(x)$ حيث $n \geq 1$ تتمتع بالخاصة التالية:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1\leq x\leq 1}\left|\widetilde{T}_n(x)\right| \leq \max_{-1\leq x\leq 1}\left|p_n(x)\right| \qquad (76)$$

وذلك أياً كانت $p_n(x) \in \widetilde{\Pi}_n$.

تكمن أهمية حدوديات تشيبتشيف بإمكانية استخدامها في تصغير الخطأ الناتج في الاستيفاء.

تذكرة:

حدودية الاستيفاء من الدرجة n بطريقة لاغرانج على المجال $[a,b]$ تعطى كما يلي:

$$p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n)$$

حيث :

$x_n,\ldots,x_1,x_0$ نقاط مختارة من المجال $[-1,1]$ وَ $f \in C^{n+1}[-1,1]$ التابع المعطى.

كما أنّ :

$$L_i(x) = \prod_{i\neq j}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \;\; ; \;\; i,j = 0,1,\ldots,n$$

مبرهنة (7) :

لـتكن $\{x_0,x_1,\ldots x_n\}$ مجموعـة مـن النقـاط المختلفـة مـن المجـال $[-1,1]$ ولـيكن $f \in C^{n+1}[-1,1]$ عندئذٍ أياً كانت $x \in [-1,1]$ يوجد عدد $\xi(x) \in]-1,1[$ بحيث:

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n-1)!}(x-x_0)..(x-x_n) \qquad (77)$$

ويكون :

$$E=\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-p_n(x)|$$

ومنه:

$$E\le\frac{1}{(n-1)!}\max_{-1\le x\le 1}|f^{(n+1)}(\xi(x))|\max_{-1\le x\le 1}|(x-x_0)..(x-x_n)|$$

حيث $p_n(x)$ حدودية استيفاء لاغرانج .

نلاحظ أنه لا يوجد قيد على $\xi(x)$ لذلك حتى نصغّر الخطأ لابد من حسن اختيار النقاط $x_0, x_1, ... x_n$ من المجال [–1,1] وذلك لتصغير المقدار $|(x-x_0)..(x-x_n)|$ بما أنّ $(x-x_0),...,(x-x_n)$ هي حدودية واحدية المعامل الرئيسي من الدرجة $n+1$ فإنها تكون أصغر ما يمكن عندما :

$$(x-x_0)..(x-x_n)=\tilde{T}_{n+1}(x)$$

إذاً المقدار $\max_{-1\le x\le 1}|(x-x_0)..(x-x_n)|$ يكون أصغر ما يمكن عندما تكون النقاط x_k هي أصفار $\tilde{T}_{n+1}(x)$ (والتي عددها $k+1$) من أجل $k=0,1,...,n$ أي عندما تكون x_k هي :

$$\bar{x}_{k+1}=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$$

وبما أنّ

$$\frac{1}{2^n}=\max_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_{n+1}(x)|$$

هذا يقتضي :

$$\frac{1}{2^n}=\max_{-1\le x\le 1}|(x-\tilde{x}_1)..(x-\tilde{x}_{n+1})|$$

$$\leq \max_{-1\leq x\leq 1}\left|(x-x_0)..(x-x_n)\right|$$

وبالتالي يكون :

$$\max_{-1\leq x\leq 1}\left|f(x)-p_n(x)\right| \leq \frac{1}{2^n(n-1)!}\max_{-1\leq x\leq 1}\left|f^{(n+1)}(\xi(x))\right| \quad (78)$$

مثال(11):

أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الثانية للتابع $f(x)=\sin \pi x$ على المجال $[-1\ ,1]$ و باستخدام أصفار تشبتشيف،ثم قدر قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

بما أن $n=2$ فالحدودية المطلوبة من الشكل:

$$p_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

لنوجد النقاط x_k حيث $k=0,1,2$.

$$x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)\ ;\ k=0,1,2$$

$$k=0\Rightarrow x_0=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1\Rightarrow x_1=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)=0$$

$$k=2\Rightarrow x_2=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

وبالتالي:

$$x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ x_1=0\ ,\ x_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

كما أن:

$$f(x_0)=\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)=0.4086$$

$$f(x_1)=\sin(0)=0$$

$$f(x_2)=\sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\pi\right)=-0.4086$$

كما أن:

$$L_i(x)=\prod_{i\neq j}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\quad ;\quad i,j=0,1,\ldots,n$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{2}{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{-4}{3}x^2+1$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{2}{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

ومنه:

$$p_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

$$p_2(x)=\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)(0.4086)+\left(\frac{-4}{3}x^2+1\right)(0)$$
$$+\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)(-0.4086)$$

$$p_2(x)=\frac{681\sqrt{3}x}{2500}=0.4718106x$$

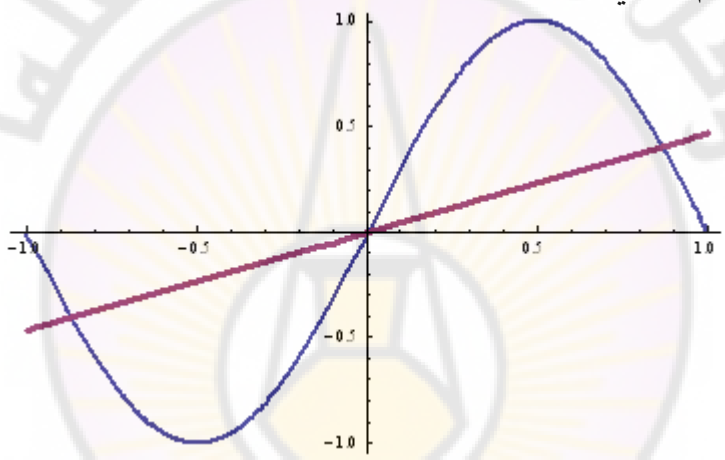
والخطأ المرتكب:

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|f\ (x)-p_2(x)\right|\le\frac{1}{2^2(3)!}\max_{-1\le x\le 1}\left|f^{(3)}\left(\xi(x)\right)\right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin(x)-p_2(x)\right|\le\frac{1}{24}\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin^{(3)}(\xi(x))\right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin(x)-p_2(x)\right|\le\frac{1}{24}(8)=\frac{1}{3}$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 17

يمكن تحويل النقاط x_k من المجال $[-1,1]$ إلى المجال $[a,b]$ كما يبين لنا المثال التالي:

مثال(12):

أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الثالثة للتابع $f(x)=xe^x$ على المجال $[0,1.5]$ و باستخدام أصفار تشبتشيف.

الحل:

بما أن $n=3$ فالحدودية المطلوبة من الشكل:

$$p_2(x)=L_0(x)f\ (x_0)+L_1(x)f\ (x_1)+L_2(x)f\ (x_2)+L_3(x)f\ (x_3)$$

$$p_2(x) = L_0(x)0 + L_1(x)\left(0.5e^{0.5}\right) + L_2(x)(e) + L_3(x)\left(1.5e^{1.5}\right)$$

باجراء الحسابات نجد:

$$L_0(x) = 1.3333x^3 + 4.0000x^2 - 3.6667x + 1,$$

$$L_1(x) = 4.0000x^3 + 10.000x^2 + 6.0000x,$$

$$L_2(x) = 4.0000x^3 + 8.000x^2 - 3.0000x,$$

$$L_3(x) = 1.3333x^3 - 2.000x^2 + 0.66667x,$$

وبالتالي:

$$p_3(x) = 1.3875x^3 + 0.057570x^2 + 1.2730.$$

نوجد النقاط x_k حيث $k = 0,1,2,3$.

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{8}\pi\right) \;;\; k = 0,1,2,3$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.92388,$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = 0.38268,$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -0.3826,$$

$$k = 3 \Rightarrow x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -0.92388,$$

هذه الأصفار لأجل المجال $[-1,1]$، و من أجل المجال $[0\ ,\ 1.5]$ نقوم بالتحويل التالي:

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}\left[(b-a)x_k + (b+a)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(1.5-0)x_k + (1.5+0)\right]$$
$$= 0.75 + 0.75x_k$$

وبالتالي:

$$\tilde{x}_0 = 1.44291,\ \ \tilde{x}_1 = 1.03701,\ \ \tilde{x}_2 = 0.46299, \tilde{x}_3 = 0.05709$$

كما أن:

$$\tilde{L_0}(x) = 1.8142x^3 - 2.8249x^2 + 1.0264x - 0.049728,$$

$$\tilde{L_1}(x) = -4.3799x^3 + 8.5977x^2 - 3.4026x - 0.16705,$$

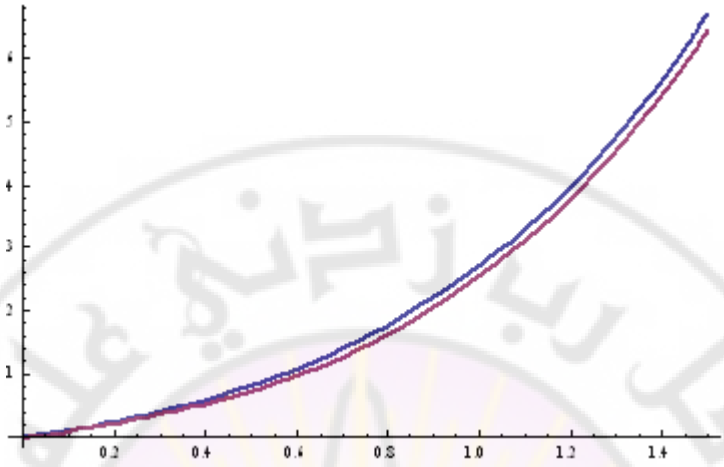
$$\tilde{L_2}(x) = 4.3799x^3 - 11.112x^2 + 7.1738x - 0.37415,$$

$$\tilde{L_3}(x) = 1.8142x^3 - 5.3390x^2 + 4.7976x - 1.2568.$$

وبالتالي:

$$\tilde{P_3}(x) = 1.3811x^3 + 0.04465x^2 + 1.3031x - 0.014352\ .$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 18

يمكن الاستفادة أيضاً من حدوديات تشيبتشيف في إيجاد طرائق لتخفيض درجة حدودية التقريب مع أقل خسارة ممكنة للدقة وذلك لأن حدوديات تشيبتشيف تملك قيماً صغرى وعظمى بالقيمة المطلقة تتوزع بانتظام على مجال ما .

لنفرض أننا نريد تقريب حدودية اختيارية من الدرجة n من الشكل :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

على المجال $[-1,1]$ بحدودية من الدرجة $n-1$ على الأكثر .

الموضوع المدروس هو اختيار $p_{n-1}(x)$ من Π_{n-1} بحيث يكون

$$\max_{-1\le x\le 1} |p_n(x) - p_{n-1}(x)|$$

أصغر ما يمكن .

نلاحظ أن $(p_n(x) - p_{n-1}(x))/a_n$ هي حدودية واحدية المعامل الرئيسي من الدرجة n وبالتالي حسب مبرهنة سابقة يكون:

$$\max_{-1\le x\le 1} |p_n(x) - p_{n-1}(x)| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$$

وتتحقق المساواة عندما :

$$\left(p_n(x)-p_{n-1}(x)\right)/a_n = \tilde{T}_n(x) \qquad (79)$$

هذا يعني أننا يجب أن نختار :

$$p_{n-1}(x) = p_n(x) - a_n\tilde{T}_n(x) \qquad (80)$$

وبهذا الاختيار يصبح لدينا:

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|p_n(x)-p_{n-1}(x)\right| = \left|a_n\right|\max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{\left(p_n(x)-p_{n-1}(x)\right)}{a_n}\right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|p_n(x)-p_{n-1}(x)\right| = \frac{\left|a_n\right|}{2^{n-1}} \qquad (81)$$

مثال(13):

ليكن لدينا التابع: $f(x)=e^x$ و المقرب على المجال $[-1\,,1]$ بواسطة حدودية ماك لوران من الدرجة الرابعة:

$$p_4(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

وخطأ الاقتطاع هو:

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)\right|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

أي:

$$\left|R_4(x)\right| = \frac{\left|f^{(5)}\left(\xi(x)\right)\right|x^5|}{5!} = \frac{\left|e^{\xi(x)}\right|x^5|}{120} \le \frac{e}{120} \approx 0.023$$

حيث $-1\le x\le 1$.

الحدودية من الدرجة الثالثة تعطى بالعلاقة:

$$p_3(x) = p_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

وبهذا يكون:

$$\left|p_4(x) - p_3(x)\right| \le \frac{\frac{1}{24}}{2^3} = \frac{1}{192} \le 0.0053$$

والخطأ المرتكب يكون حاصل جمع هذا الأخير مع خطأ الاقتطاع:

$$E = 0.0053 + 0.023 = 0.0283$$

والرسم البياني:

f(x)=e^x
f(x)=1 + x + (x^2)/2 + (x^3)/6 + (x^4)/24
f(x)=191/192 + x + (13/24) x^2 + (1/6) x^3

الشكل 19

3-1-3 تقدير الحد الأعلى للخطأ المرتكب :

في الحقيقة يوجد سبب آخر يدعونا لاستخدام حدوديات تشبتشيف، فبفرض أنّه لدينا بعض النقاط العشوائية غير منتظمة التوزيع، وتُسبب أخطاء كبيرة (كما في تابع رانج الذي دُرس بتحليل عددي 1)، يمكننا باستخدام توابع تشبتشيف عند النقاط المنتظمة التوزيع دراسة الحد الأعلى للخطأ، وتحديد عدد النقاط اللازمة للحصول على دقة معطاة.

مبرهنة **ريفلن Rivlin's Theorem (8)** :

لتكن $f \in C[a,b]$، و بفرض P_n حدودية تشبتيف ، و $\|f - P_n^*\| = \inf_{\deg(p)\le n} \|f - P\| = E_n^*(f)$ عندئذٍ:

$$\|f - P_n\|_\infty \le [2\pi \log(n) + 2] E_n^*(f)$$

الخطأ المرتكب باستخدام حدوديات تشبتشيف لن يتجاوز الخطأ المرتكب باستخدام حدوديات أخرى من الدرجة ذاتها مضروباً بالمقدار $[2\pi \log(n) + 2]$.

مبرهنة جاكسون Jackson's Theorem (9):

ضمن الفرضيات ذاتها لمبرهنة ريفلن، فإن:

$$\|f - P_n\|_\infty \le \frac{6}{n} \|f'\|_\infty (b-a) \left[\frac{\log(n)}{\pi + 1}\right]$$

و تُبين لنا أنَّ الخطأ بحدوديات تشبتشيف سيسعى للصفر من أجل $n \to \infty$ ، هذه العلاقة تُحدد لنا عدد النقاط المطلوبة من أجل دقة معينة معطاة.

مبرهنة(10):

لتكن $f \in C[-1,1]$، و $f, f', ..., f^{(k)}$ توابع متقاربة بالاطلاق، و $\| \ \| = \| \ \|_\infty or \| \ \|_2$ ، $w(x) = \frac{1}{\sqrt{z - x^2}}$، و $\left\|f^{(k)}\right\|$ موجودة، عندئذٍ:

أ-

$$E_n(f) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \frac{\left\|f^{(k)}\right\|}{(n+1)(n)...(n-k+2)}; n \ge k$$

ب- بفرض $w(f;\delta) := \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|$

عندئذٍ:

$$E_n(f) \le w\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)$$

مبرهنة تيمان Timan's Theorem (11) :

لتكن $f \in C[a,b]$، عندئذٍ:

توجد حدودية P_n تحقق:

$$|f - P_n(x)| \le c_k \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^k w\left(f^{(k)}; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

مبرهنة سينويل و رانك Sinwel and Runck Theorem (12):

لتكن $f \in C[-1,1]$، عندئذٍ:

توجد حدودية P_n تحقق:

$$|f - P_n(x)| \le \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^k \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\left\|f^{(k)}\right\|}{(n-2)(n-4)...(n-2k)}; n \ge k$$

2-3 التقريب غير الخطي:

بفرض $f \in C[a,b]$، و $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n \in C[a,b]$ توابع مرتبطة خطياً **بالثوابت** ، والتقريب غير الخطي هو البحث عن تابع $\phi(x)$ بدلالة التوابع $\varphi_k(x) \in [a,b]$ كما يلي:

$$\phi(x,c) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + ... + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x) \tag{82}$$

مثال

$$\phi(x,c_0,c_1,c_2,c_3) = c_0 + c_1 e^{2c_4 x} + c_2 \ln(c_5 x) + c_3\left(x^2+1\right)$$

و بشكل مشابه للتقريب الخطي نبحث عن تابع $\phi(x,c)$ يُحقق:

$$\left\| f - \phi^{(0)} \right\|_2^2 = \min_{\phi \in S} \| f - \phi \|_2^2 = \min_{\phi \in S} \sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i,c) \right)$$
$$= \min_{\phi \in S} D^2(c_0,c_1,...,c_n) \tag{83}$$

بتطبيق الشروط $\frac{\partial\left(D^2\right)}{\partial C_j} = 0 \; , \; j = 0,...,n$ ، نحصل على $(n+1)$ جملة معادلات غير خطية بالنسبة للمجاهيل C_j^0 للتقريب الأمثل. وعندئذٍ تُدعى المسألة بمسألة التقريب غير الخطي.

إن حل جملة معادلات غير خطية هو بحث الأمثليات (الفصل الخامس)

سنقوم الآن بدراسة بعض التوابع التي يمكن أن تؤول بإجراء تحويل مناسب من جملة المعادلات غير الخطية إلى جملة معادلات خطية.

1-2-3 التقريب بتابع أسي من الشكل $\left(be^{ax}\right)$:

لتكن لدينا البيانات المعطاة $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),.....,(x_n,y_n)\}$، نريد تقريب هذه البيانات بتابع أسي من الشكل:

$$y = be^{ax} \tag{84}$$

$$y = be^{ax} \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(b) + ax$$

وباستخدام الرموز التالية:

$$Y = \ln(y)$$

$$B = \ln(b)$$

$$A = a$$

$$X = x$$

نحصل على المعادلة:

$$Y = AX + B$$

وهو تابع خطي نحسب فيه الثوابت بالطريقة المعتادة.

ملاحظة:

وبالشكل نفسه نتعامل من أجل التقريب إلى تابع لوغاريتمي أو كسري أو مثلثي .

مثال(14)

قرب البيانات التالية إلى تابع أسي ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب:

x_i	1	1.25	1.50	1.75	2
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

الحل:

عدد البيانات المعطاة $n = 5$. التابع المطلوبة من الشكل: $y = be^{ax}$.

نجري التحويل التالي:

$$Y = \ln(y)$$

$$B = \ln(b)$$

$$A = a$$

$$X = x$$

فنحصل على المعادلة:

$$Y = AX + B$$

i	1	2	3	4	5
$Y_i = \ln(y_i)$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

ويكون:

$$c_0^{(0)} = \frac{(N+1)S_{xy} - S_x S_y}{(N+1)S_{xx} - S_x S_x}$$

$$c_1^{(0)} = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{(N+1)S_{xx} - S_x S_x}$$

حيث

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \ , \ S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ , \ S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \ S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

وبالتالي:

$$S_x = \sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 1.25 + 1.5 + 1.75 + 2 = 7.5$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 + 1.5625 + 2.25 + 3.625 + 4 = 11.87$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1.629 + 2.195 + 2.814 + 3.514 + 4.27 = 14.422$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{5} y_i = 1.629 + 1.756 + 1.876 + 2.008 + 2.135 = 9.404$$

$$c_0^{(0)} = \frac{5(14.422) - (7.5)(9.404)}{5(11.875) - (7.5)(2)} = 0.5056$$

$$c_1^{(0)} = \frac{(9.404)(11.875) - (7.5)(14.422)}{5(11.875) - (7.5)(2)} = 1.122$$

ومنه:

$$A = a = 0.5056$$

$$B = \ln(b) = 1.122 \Rightarrow b = e^{1.122} = 3.071$$

ومنه التابع المطلوب:

$$y = f(x) = 3.071e^{0.5056x}$$

والخطأ المرتكب:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - be^{ax_i} \right]^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - 3.071e^{0.5056x_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{5} d_i^2$$

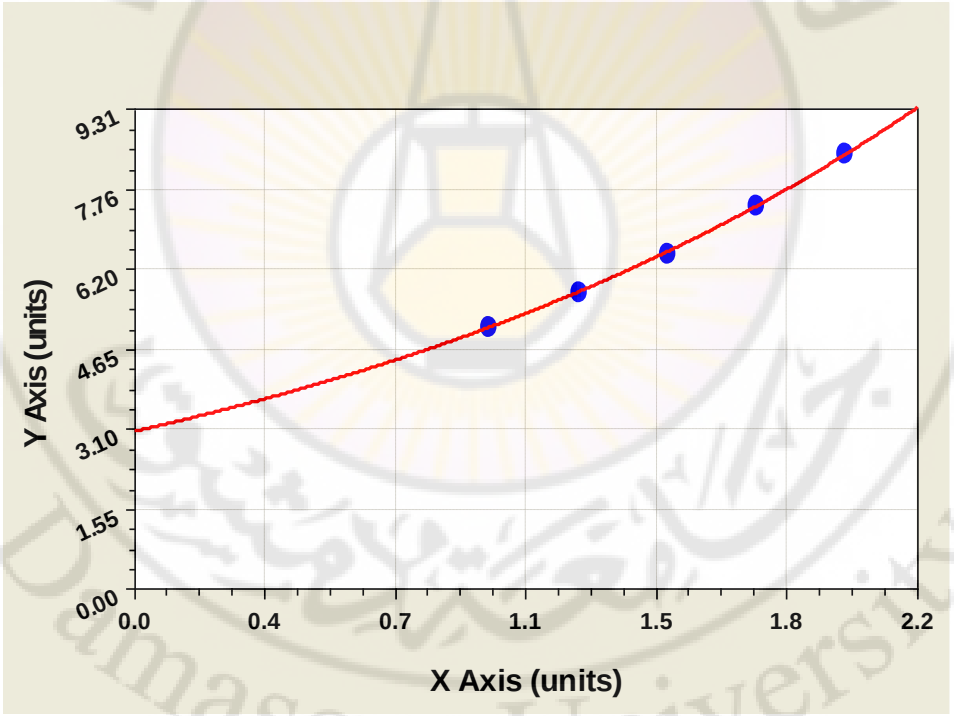
حيث:

i	x_i	y_i	$f(x_i)$	d_i^2
1	1	5.10	5.09475	0.00003
2	1.25	5.79	5.78136	0.00008
3	1.5	6.53	6.56041	0.00092
4	1.75	7.45	7.44464	0.00003
5	2	8.46	8.44793	0.00015

ومنه:

$$E = 0.00121$$

والرسم البياني:

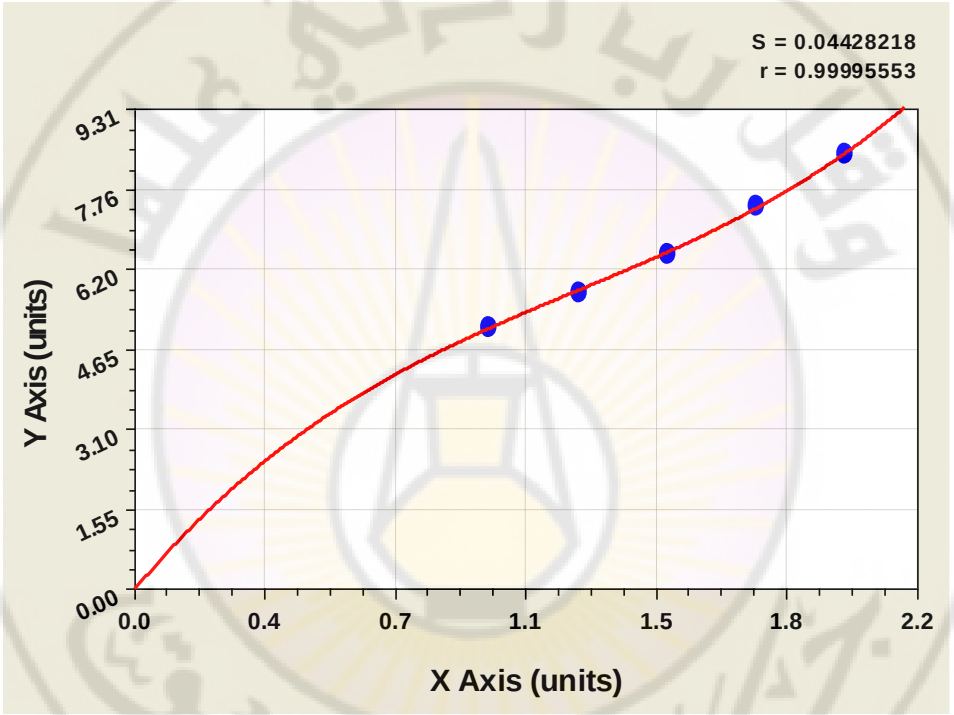


الشكل 20: البيانات والتابع التقريب للمثال 14

ونجد أيضاً التقريب بتابع كثير حدود من الدرجة الثالثة (بطريقة المربعات الصغرى) لنفس البيانات المعطاة سابقاً يأخذ الشكل:

$$y = 0.21333x^3 - 0.02286x^2 + 1.93524x + 2.97743$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 21: البيانات و تابع التقريب الحدودية من الدرجة 3 للمثال 14

نلاحظ أن التقريب بالتابع الأسي أفضل من التقريب بتابع كثير حدود من الدرجة الثالثة.

2-2-3 التقريب بتابع قوة من الشكل $\left(bx^a\right)$:

لتكن لدينا البيانات المعطاة $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),.....,(x_n,y_n)\}$، نريد تقريب هذه البيانات بتابع قوة من الشكل:

$$f(x) = bx^a \qquad (85)$$

نقوم بالتحويل التالي:

$$y = bx^a \qquad \Rightarrow \qquad \ln(y) = \ln(b) + a\ln(x)$$

وبوضع:

$$Y = \ln(y) \qquad B = \ln(b) \qquad A = a \qquad X = x$$

نجد:

$$Y = AX + B$$

وهو تابع خطي نحصل فيه على الثوابت بالطريقة المعتادة.

حالة خاصة:

إذا كانت قيمة a معلومة فإننا نجد أن :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2a}}$$

مثال(15):

قرب البيانات التالية إلى التابع: $f(x) = bx^{3/2}$.

i	x_i	y_i
1	58	88
2	108	225
3	150	365
4	228	687

الحل:

وجدنا أن:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i x_i^{3/2}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^3}$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i^{3/2} = (88)(58^{3/2}) + (225)(108^{3/2}) + (365)(150^{3/2}) + (687)(228^{3/2})$$

$$= 3327103.4640$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = (58^3) + (108^3) + (150^3) + (228^3) = 16682176$$

وبالتالي نجد:

$$b = \frac{3327105.4640}{16682176} = 0.19944062$$

مثال(16):

قرب البيانات التالية إلى التابع: $f(x) = \frac{1}{2} bx^2$.

i	x_i	y_i
1	0.2	0.1960
2	0.4	0.7850
3	0.6	1.7665
4	0.8	3.1405
5	1.0	4.9075

الحل:

وجدنا أن:

$$\frac{1}{2} b = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4}$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 = (0.1960)(0.2^2) + (0.7850)(0.4^2) + (1.7665)(0.6^2)$$
$$+ (3.1405)(0.8^2) + (4.9075)$$
$$= 7.6868$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = (0.2^4) + (0.4^4) + (0.6^4) + (0.8^4) + (1^4) = 1.5664$$

ومنه:

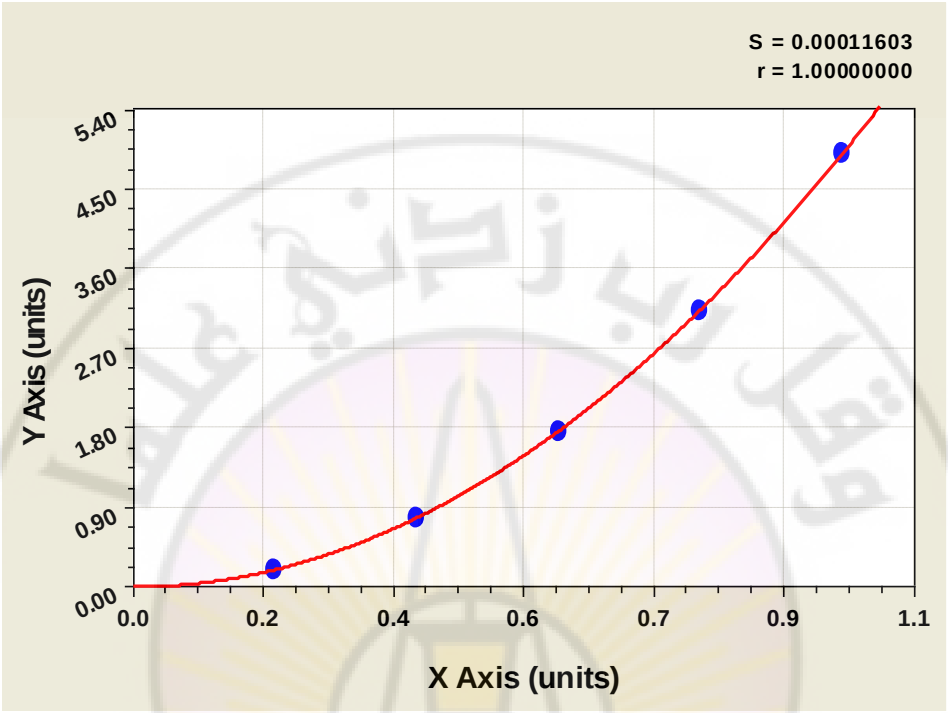
$$\frac{1}{2} b = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4} = \frac{7.6868}{1.5664} = 4.9073$$

–وبالتالي:

$$b = (4.9073)(2) = 9.8164$$

$$f(x) = 4.9073x^2$$

Damascus University



الشكل 22: البيانات و تابع التقريب للمثال 16

3-2-3 التقريب إلى توابع من أشكال أخرى:

يمكن تحويل بعض التوابع غير الخطية إلى تابع خطي من الشكل:

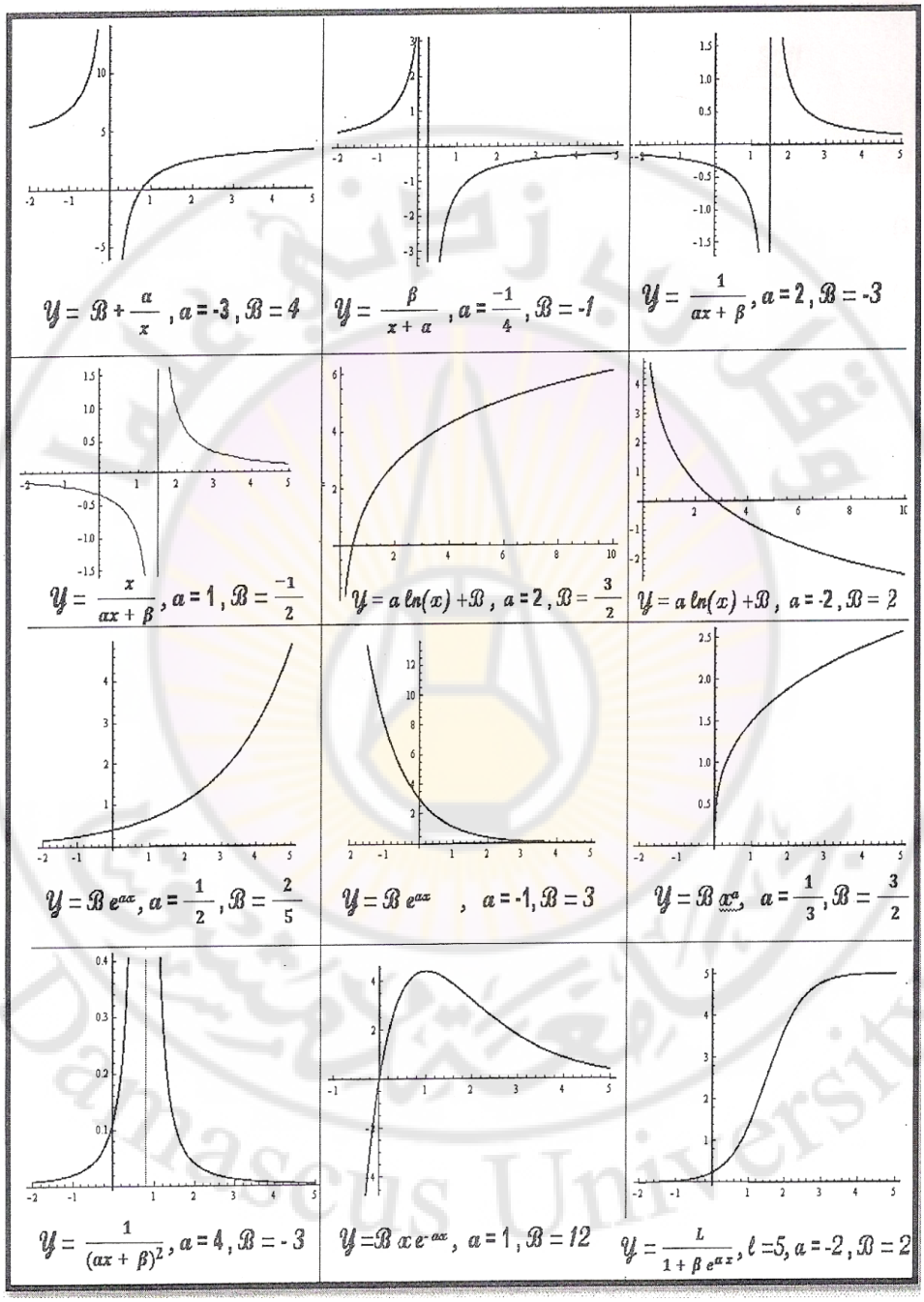
$$Y = AX + B$$

وسندرج الجدول التالي :

التابع غير الخطي	طريقة التحويل	الترميز
$y = be^{ax}$	$\ln y = \ln b + ax$	$Y = \ln y, B = \ln b, A = a, X = x$
$y = bx^{a}$	$\ln y = \ln b + a \ln x$	$Y = \ln y, B = \ln b, A = a, X = x$
$y = b + \frac{a}{x}$	$y = b + a\left(\frac{1}{x}\right)$	$Y = y, B = b, A = a, X = \frac{1}{x}$
$y = \frac{b}{x + a}$	$\frac{1}{y} = x\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)$	$Y = \frac{1}{y}, B = \frac{a}{b}, A = \frac{1}{b}, X = x$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$Y = \frac{1}{y}, B = b, A = a, X = x$
$y = a \ln x + b$		$Y = y, B = b, A = a, X = \ln x$
$y = \frac{1}{(ax + b)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{y}} = ax + b$	$Y = \frac{1}{\sqrt{y}}, B = b, A = a, X = x$
$y = be^{x} - ax$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln b - ax$	$Y = \ln \frac{y}{x}, B = \ln b, A = -a, X = x$
$y = \frac{L}{1 + be^{ax}}$	$\ln(\frac{L}{y} - 1) = \ln b + ax$ حيث ثابت معلوم	$Y = \ln(\frac{L}{y} - 1), B = \ln b,$ $A = a, X = x$
$y = a \cos x + b$		$Y = y, B = b, A = a, X = \cos x$
$y = a \sin x + b$		$Y = y, B = b, A = a, X = \sin x$

الجدول 3

ويوضح الرسم البياني التوابع غير الخطية:


$y = B + \frac{a}{x}$, $a = -3$, $B = 4$
$y = \frac{\beta}{x + a}$, $a = \frac{-1}{4}$, $B = -1$
$y = \frac{1}{ax + \beta}$, $a = 2$, $B = -3$
$y = \frac{x}{ax + \beta}$, $a = 1$, $B = \frac{-1}{2}$
$y = a\,ln(x) + B$, $a = 2$, $B = \frac{3}{2}$
$y = a\,ln(x) + B$, $a = -2$, $B = 2$
$y = B\,e^{ax}$, $a = \frac{1}{2}$, $B = \frac{2}{5}$
$y = B\,e^{ax}$, $a = -1$, $B = 3$
$y = B\,x^{a}$, $a = \frac{1}{3}$, $B = \frac{3}{2}$
$y = \frac{1}{(ax + \beta)^2}$, $a = 4$, $B = -3$
$y = B\,x\,e^{-ax}$, $a = 1$, $B = 12$
$y = \frac{L}{1 + \beta\,e^{az}}$, $\ell = 5$, $a = -2$, $B = 2$

الشكل 22

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1-أوجد كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى، من الدرجة $(1,2,3)$ والتي تقرب البيانات التالية :

i	1	2	3	4	5
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

2-أوجد كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى، من الدرجة $(1,2,3)$ والتي تقرب البيانات التالية، ثم احسب الخطأ E في كل حالة وارسم المعطيات وكثيرات الحدود.

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

3-أوجد كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى، من الدرجة $(1,2,3)$ والتي تقرب البيانات التالية، ثم احسب الخطأ E في كل حالة وارسم المعطيات وكثيرات الحدود.

x_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

4-ليكن لدينا المعطيات التالية :

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53
x_i	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

أ- انشئ كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى من الدرجة الاولى واحسب الخطأ.

ب- انشئ كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى من الدرجة الثانية واحسب الخطأ.

ت- انشئ كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى من الدرجة الثالثة واحسب الخطأ.

ث- انشئ كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات الشكل be^{ax} واحسب الخطأ.

ج- انشئ كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات الشكل be^{a} واحسب الخطأ.

5-أوجد تقريبات كثيرة حدود أصغر المربعات الخطية للتابع $f(x)$ على المجال المذكور لكل من المسائل التالية :

أ) $f(x)=x^2+3x+2,[0,1];$ ب) $f(x)=x^3,[0,2];$

ج) $f(x)=\frac{1}{x},[1,3];$ د) $f(x)=e^x,[0,2];$

هـ) $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{3}\sin 2x,[0,1];$ و) $f(x)=x\ln x,[1,3];$

6-أوجد كثيرة الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتوابع الواردة في التمرين (5)على المجالات المرافقة .

7-أوجد تقريب كثيرة الحدود الصغرى الخطية باستخدام طريقة المربعات الصغرى على المجال $[-1,1]$ للتوابع التالية:

أ) $f(x)=x^2-2x+3$ ب) $f(x)=x^3$

ج) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ د) $f(x)=e^{x}$

هـ) $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{3}\sin 2x$ و) $f(x)=\ln(x+2)$

8-احسب الخطأ E الناتج عن التقريبات التمارين(5 و 6 و 7).

9-استخدم طريقة غرام-شميدت لتكون $\phi_0(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\phi_3(x)$ المتعلقة بالفترات التالية: أ) $[0,1]$ ب) $[0,2]$ ج) $[1,3]$

10- استخدم طريقة غرام -شميدت لحساب L_1,L_2,L_3 حيث $\{L_0,L_1,L_2,L_3\}$ مجموعة كثيرات حدود متعامدةعلى $(0,\infty)$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x)=e^{-x}$ وحيث $L_0(x)\equiv 1$ تسمى كثيرات الحدود الناتجة عن هذه الطريقة كثيرات حدود لاغير.

11- استخدم كثيرات حدود لاغير المحسوبة في التمرين (10) و باستخدام طريقة المربعات الصغرى لحساب كثيرات الحدود الصغرى من الدرجة الاولى ,الثانية,الثالثة على الفترة $(0,\infty)$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x)=e^{-x}$ من أجل التوابع التالية:

أ) $f(x)=x^{2}$ ب) $f(x)=e^{-3}$

ج) $f(x)=x^{3}$ د) $f(x)=e^{-2x}$

12- أثبت أن التوابع:

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\phi_1(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\cos x,...,\phi_n(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\cos nx,$$

$$\phi_{n+1}(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\sin x,....,\phi_{2n-1}(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\sin(n-1)x$$

متعامدة على $[-\pi,\pi]$ بالنسبة $w(x)\equiv 1$. (إرشاد: استخدام المتطابقتين المثلثتين المتعلقتين بـ $\sin(mx\pm nx),\cos(mx\pm nx)$ لتبسيط التكاملات)

13- استخدم أصفار $\tilde{T}_3$ لتكوين كثيرة حدود استيفاء من الدرجة الثانية للتوابع والمجالات التالية :

أ) $f(x)=e^x$ ب) $f(x)=\sin x$

ج) $f(x)=\ln(x+2)$ د) $f(x)=x^4$

14- أوجد الحد الأعلى الأعظمي لخطأ التقريب في التمرين(13)على المجال $[-1,1]$.

15- استخدم أصفار $\tilde{T}_4$ لانشاء كثيرة حدود استيفاء من الدرجة الثالثة لتوابع التمرين(13).

16- استخدام أصفار $\tilde{T}_3$ وتحويلات للمجال المعطى لتكوين كثيرة حدود استيفاء من الدرجة الثانية للتوابع التالية:

أ) $f(x)=\frac{1}{x},[1,3];$ ب) $f(x)=e^{-x},[0,2];$

ه) $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{3}\sin 2x,[0,1];$ و) $f(x)=x\ln x,[1,3];$

ثم أوجد الحد الأعلى الأعظمي للخطأ المرتكب.

17- برهن أن كل كثيرة حدود تشبيشيف $T_n(x)$ تحقق العلاقة:

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}.$$

18- أوجد تقريب تشيبيشيف للتوابع :

(أ) $f(x)=e^{-x}$ (الحدان الأولان فقط)

(ب) $f(x)=\cos x$ (الحدود الثلاثة الأوائل فقط)

(ج) $f(x)=\sin x$ (الحدود الاربعة الأوائل فقط)

(د) $f(x)=e^{x}$ (الحدود الخمسة الأوائل فقط)

19- أوجد تقريب لوجاندر من الدرجة الثانية للتوابع التالية:

أ) $f(x)=\ln\left(1+x^{4}\right),[-1,1];$ ب) $f(x)=e^{-x},[0,2];$

ج) $f(x)=\sin(\pi x),[0,1];$ ث) $f(x)=\cos(\pi x),[-1,1];$

20- قرب البيانات التالية إلى التابع: $f(x)=bx^{3}$.

i	x_i	y_i
1	0.2	0.1960
2	0.4	0.7850
3	0.6	1.7665
4	0.8	3.1405
5	1.0	4.9075

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

الحل العددي لجملة المعادلات الخطية

Numerical Solution System of Linear Equations

1- مقدمة

تُعد جمل المعادلات الخطية من الموضوعات المهمة جداً في العلوم الرياضية والهندسية و الفيزيائية، وذلك لكونها تبرز عند دراسة معظم الظواهر التّي تواجهنا، وقد نال موضوع إيجاد حلول هذه الجمل اهتمام العديد من العلماء مما جعل دراسة طرائق حل هذه الجمل أمراً في غاية الأهمية ولذلك سنستعرض في هذا الفصل بعض أشهر الطرائق المستخدمة لحل جمل المعادلات الخطية.

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

والتي يمكن إعادة كتابة هذه الجملة وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$AX = b \qquad (2)$$

حيثُ:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ و } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R) \qquad (3)$$

2- تمهيد رياضي:

تعريف(1):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **شاذة** إذا كان $\det(A) = 0$ وإنّها غير شاذة إذا كان $\det(A) \neq 0$.

تعريف(2):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **متناظرة** إذا كان $A = A^T$ حيثُ A^T منقول المصفوفة A.

تعريف(3):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **واحديه** إذا كان

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & ;i \neq j \\ 1 & ;i = j \end{cases} \qquad (4)$$

ويرمز لها عادةً بالرمز I_n.

تعريف(4):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **قطرية** إذا كان

$$a_{i\,j} = 0 \quad ;i \neq j \qquad (5)$$

تعريف(5):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **مثلثية عليا** إذا كان

$$a_{ij} = 0 \quad ;i \geq j \qquad (6)$$

ويُرمز لها عادةً بالرمز U.

مثال(1):

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

تعريف(6):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **مثلثيه سفلى** إذا كان

$$a_{ij} = 0 \qquad ; i \le j \tag{8}$$

ويرمز لها بالرمز L.

مثال(2):

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

تعريف(7):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **مسيطرة قطرياً** Diagonally Dominant إذا كان

$$|a_{ij}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}| \qquad ; i = 1, \ldots, n \tag{10}$$

تعريف(8):

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **مسيطرة قطرياً تماماً** Strictly Diagonally Dominant إذا كان

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}| \qquad ; i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

مثال(3):

لتكن لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 5 & -6\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix}6 & 4 & -3\\ 4 & -2 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{12}$$

أي من هاتين المصفوفتين مسيطرة قطرياً؟

الحل:

إنّ المصفوفة A تحقق أنّ:

$$\begin{aligned}&|7|>|2|+|0|\\ &|5|>|3|+|-1|\\ &|-6|>|0|+|5|\end{aligned} \tag{13}$$

ومنه A مسيطرة قطرياً تماماً.

أمّا بالنسبة للمصفوفة B لأنّ $|6|\not>|4|+|-3|$

إذن B ليست مسيطرة قطرياً تماماً.

تعريف(9):

يُقال عن المصفوفة $A\in M_n(R)$ إنّها **معرفة إيجابياً**(Positive definite) إذا كانت:

1) تناظرية

2) إذا كان $x^TAx>0$ وذلك من أجل كل n وكل شعاع $x\neq 0$.

مثال(4):

أثبت أنّ المصفوفة التالية معرفة إيجابياً

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix} \tag{14}$$

الحل:

1) من الواضح أنّ $A = A^T$.

2) بفرض أنّ $0 \neq x \in M_{3\times 1}(R)$

$$x^T A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$

ما لم يكن $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

مبرهنة(1):

بفرض $A \in M_n(R)$ مصفوفة معرفة إيجابياً عندئذٍ

1) A قابلة للقلب.

2) جميع عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً.

مبرهنة(2):

إنّ حل الجملة $AX = b$ موجود ووحيد إذا كانت مصفوفة الأمثال غير شاذة أي $\det(A) \neq 0$.

تعريف(10):

بفرض $A \in M_n(R)$، نسمي مجموعة قيم λ التي تحقق المعادلة:

$$Ax = \lambda x \quad ; x \neq 0$$

بالقيم الذاتية Eigenvalues الموافقة للمصفوفة A أو **طيف المصفوفة Matrix A Spectrum** ، ونسمي الشعاع x **بالشعاع الذاتي Eigenvector** الموافق للقيمة

الذاتية λ.

ملاحظة:

يوجد للمعادلة $x \neq 0$; $Ax = \lambda x$ حل غير صفري إذا كان

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

تُسمى المساواة الأخيرة **بالمعادلة المميزة للمصفوفة** A أو **كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة** A ويرمز لها بـ $P_n(\lambda)$ حيثُ n بعد المصفوفة A.

تعريف(11):

بفرض $A \in M_n(R)$، نسمي العدد

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \quad Ax = \lambda x \ ; x \neq 0\}$$

بنصف القطر الطيفي spectral radius للمصفوفة A.

مثال(5):

أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ثمّ عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية ونصف القطر الطيفي للمصفوفة A.

الحل:

$$P_2(x) = \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

وعليه فإنّ $\{2,3\}$ هي مجموعة القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A.

لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة لـ A نعوض في العلاقة

$$Ax = \lambda x$$

أي:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$(4-\lambda)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

بتعويض $\lambda = 2$ في العلاقة الأخيرة نجد أنّ:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

أي إنّ x_2 اختياري.

نختار $x_2 = 1$ فيكون $x_1 = \frac{1}{2}$ وبناءً عليه فإنّ الشعاع الذاتي الموافق للقيم الذاتية $\lambda = 2$ هو $x = (1 \quad 2)^T$، وبأسلوب مشابه لما سبق نجد أنّ الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 3$ هو $x = (1 \quad 1)^T$.

لنوجد الآن **نصف القطر الطيفي** للمصفوفة A

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \quad Ax = \lambda x \ ; x \neq 0\} = \max\{2,3\} = 3$$

مبرهنة جيشغورين(Theorem Gerschgorin's) (3) :

لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $A \in M_n(R)$ عندئذٍ من أجل أي عدد صحيح $1 \leq j \leq n$ يتحقق أنّ

$$|a_{jj} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \qquad (15)$$

ملاحظة:

بفرض $d_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|$ حيث $1 \leq j \leq n$ تُسمى مجموعة الأقراص $D_j(a_{jj}, d_j)$; $1 \leq j \leq n$ بأقراص جيشغورين.

مثال(6):

أوجد أقراص جيشغورين الموافقة للمصفوفة

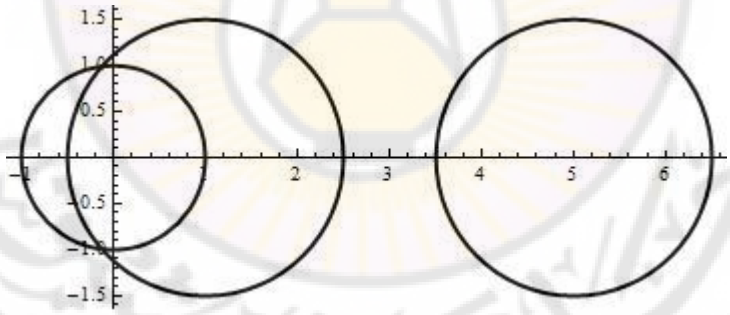
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$a_{11}=0\Rightarrow |a_{11}-\lambda|\le \sum_{k=2}^{3}|a_{1k}|=1 \ \Rightarrow D_1(0,1)$$

$$a_{22}=5\Rightarrow |a_{22}-\lambda|\le \sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{3}|a_{2k}|=\frac{3}{2}\Rightarrow D_2\left(5,\frac{3}{2}\right)$$

$$a_{33}=1\Rightarrow |a_{33}-\lambda|\le \sum_{k=1}^{2}|a_{3k}|=\frac{3}{2}\Rightarrow D_1\left(1,\frac{3}{2}\right)$$



الشكل(1)

ملاحظة:

في المثال السابق نجد بالحساب أنّ طيف المصفوفة A هو المجموعة:

$$\{\lambda_1=-0.209,\lambda_2=5.305,\lambda_3=0.904\}$$

نلاحظ أنّ

$$\lambda_1,\lambda_3\in D_1\cap D_3,\lambda_2\in D_2$$

مبرهنة(4) (جيشغورين المحددة):

إنّ اتحاد أقراص جيشغورين لمصفوفة مربعة A يحوي جميع القيم الذاتية الموافقة لهذه المصفوفة.

مثال(7):

أوجد حداً أعلى للقيم الذاتية الموافقة للمصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

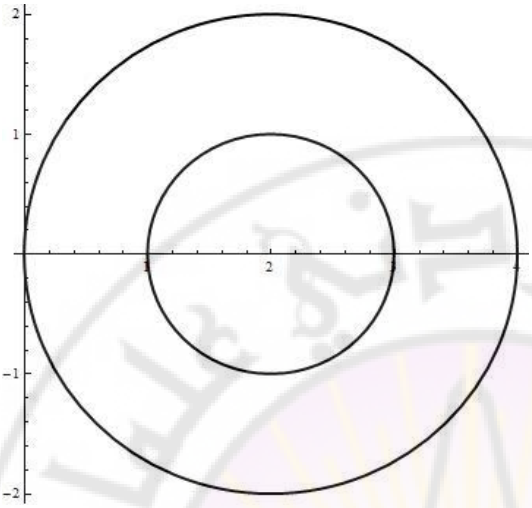
حسب مبرهنة جيشغورين المحددة فإنّ اتحاد جميع الأقراص

$$D_j\left(a_{jj},d_j\right)=\left\{\left|a_{jj}-\lambda\right|\le d_j \quad ; d_j=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left|a_{jk}\right| \wedge\ j=1,\ldots,n\right\}$$

يجب أن يحوي جميع القيم الذاتية

$$n=4$$
$$j=1,4\Rightarrow\left|2-\lambda\right|\le 1\ \Rightarrow D_1(0,1)$$
$$j=2,3\Rightarrow\left|2-\lambda\right|\le 2\ \Rightarrow D_2(2,2)$$

بما أنّ A تناظرية فإنّ جميع القيم الذاتية حقيقية وعليه:



$$D_1 \cup D_2 = D_2 = D_2(2,2)$$
$$\lambda \in D_2 \Rightarrow 0 \le \lambda \le 4$$

وعليه فإنّ $\lambda = 4$ حدٌّ أعلى للقيم الذاتية.

ويمكن التحقق من ذلك بحساب القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A والتي تُعطى بالشكل:

$$\{\lambda_1 = 3.618, \lambda_2 = 2.618, \lambda_3 = 1.382, \lambda_4 = 0.382\}$$

ملاحظة:

تفيد المبرهنة الأخيرة في إيجاد الحدود العليا للقيم الذاتية وبالتالي تساعد على إيجاد الحد الأعلى **لنصف القطر الطيفي**.

تعريف(12) (نظيم شعاع):

يُعرّف نظيم شعاع بأنّه التطبيق

$$\|\cdot\| : R^n \to R^+ = [0, +\infty[$$

الّذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|x\| > 0 \quad if \quad x \neq 0$
2. $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
3. $\|c\,x\| = |c|\|x\|$
4. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

أمثلة على نظائم الأشعة:

1) نظيم القيمة المطلقة أو ℓ_1 :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2) النظيم الإقليدي أو ℓ_2 :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

3) نظيم الـ max أو ℓ_∞

$$\|x\|_\infty = \max_{0 \le i \le n} |x_i|$$

مثال(8):

بفرض أنّه لدينا الشعاع $x = (4,4,-4,4)^T$ أوجد $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$.

الحل:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = 16$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} |x_i|^2} = 8$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4} \{|x_i|\} = 4$$

تعريف(13) (نظيم مصفوفة):

يُعرّف نظيم مصفوفة بأنّه التطبيق:

$$\|\cdot\| : M_{m \times n}(R) \to R^+ = [0, +\infty[$$

الّذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|A\| > 0 \quad if \quad A \neq 0$
2. $\|c\,A\| = |c| \|A\|$
3. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

ملاحظة:

إنّ أي نظيم لمصفوفة يُحقق خاصية التماسك (Consistency property)

$$\|A\cdot B\|\le\|A\|\cdot\|B\| \quad \forall A,B\in M_{m\times n}(R)$$

أمثلة على نظائم مصفوفة:

1) النظيم الإقليدي لمصفوفة أو نظيم (Frobenius)

$$F(A)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

2) النظائم المرتبة جزئياً لمصفوفة (Subordinate norms)

$$\|A\|_1=\max_k\sum_i|a_{ik}|$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\max_i\{|\lambda_i|\}} \quad ;\lambda_i\in\lambda\left(A^T.A\right)$$

$$\|A\|_\infty=\max_i\sum_k|a_{ik}|$$

مثال(9): احسب $\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_1$ للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

الحل:

$$\|A\|_1=\max_j\sum_i|a_{ij}|=\max_{1\le j\le3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{4,4,4\}=4$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\max_i\{|\lambda_i|\}} \quad ;\lambda_i\in\lambda\left(A^T.A\right)$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&2&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\det\left(AA^T - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.0616 \\ \lambda_2 = 5.0256 \\ \lambda_3 = 12.9128 \end{cases}$$

ومنه:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \{|\lambda_i|\}} = \sqrt{12.9128} \approx 3.5934$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{3,5,4\} = 5$$

مبرهنة(5):

بفرض A مصفوفة مربعة عندئذٍ $\rho(A) \le \|A\|$ حيثُ $\|.\|$ نظيم مرتب جزئياً لمصفوفة A،أي لا يوجد قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة تتجاوز نظيم المصفوفة.

مبرهنة(6):

بفرض A مصفوفة مربعة عندئذٍ $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ إذا كان $\|A\| < 1$ أو إذا وفقط إذا $\rho(A) \le 1$.

تعريف(14)العدد الشرطي لمصفوفة (Condition number of matrix):

بعض جمل المعادلات الخطية حساسة جداً لأخطاء التدوير أي إنّه يمكن أن نحصل على حلول مختلفة تماماً عند تدوير بعض عناصر الجملة، ندعو الجملة في مثل هذه الحالة بالجملة المريضة (ill-condition system) ولمعرفة فيما إذا كانت جملة ما مريضة أم لا فإننا نعتمد على ما يُسمى بالعدد الشرطي لمصفوفة الأمثال.

ونعرف هذا العدد كما يلي:

بفرض A مصفوفة مربعة وقابلة للقلب $(\det(A) \ne 0)$ عندئذٍ يُعرّف **العدد الشرطي** لهذه المصفوفة على أنّه

$$cond\,(A) = \|A\| \left\| A^T \right\|$$

حيثُ $\|.\|$ نظيم مرتب جزئياً للمصفوفة A.

مبرهنة(7):

بفرض $A \in M_n(R)$ بحيثُ $\det(A) \neq 0$ وليكن $\|.\|$ نظيم مرتب جزئياً للمصفوفة A عندئذٍ:

1) $cond(A) = cond\left(A^{-1}\right)$

2) $cond(\alpha A) = \alpha\, cond(A)$

3) $cond(I_n) = 1$

4) $cond(A) > 0$

تعريف(15)(الجملة المريضة والجملة الجيدة)

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية $Ax = b$ حيثُ $\det(A) \neq 0$ عندئذٍ:

- يُقال عن هذه الجملة إنّها **مريضة** إذا كان العدد الشرطي لمصفوفة أمثالها **كبير** نسبياً.
- يُقال عن هذه الجملة إنّها **جيدة** well إذا كان العدد الشرطي لمصفوفة أمثالها **صغير** نسبياً.

ملاحظة:

غالباً ما تعتبر الجملة جيدة إذا كان $cond(A) \approx 1$ وخلاف ذلك تكون الجملة مريضة وهذا ما سنعتمده هنا

مثال(10):

بفرض $\varepsilon > 0$ (مقدار مثبت) ولتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1) أوجد A^{-1} بالنسبة لنظيم ℓ_∞ على R^n.

2) أوجد حداً أدنى للعدد الشرطي الموافق للمصفوفة A إذا علمت أنّ $\varepsilon \le 0.01$.

الحل:

1)

$$A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & -1-\varepsilon \\ -1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_{1\le i\le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{2+\varepsilon, 2-\varepsilon\} = 2+\varepsilon$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \varepsilon^{-2}(2+\varepsilon)$$

وعليه

$$cond(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty$$

$$= (2+\varepsilon)\varepsilon^{-2}(2+\varepsilon) = \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2$$

2)

$$\varepsilon \le 0.01 \Rightarrow \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2 \ge 4041$$

وعليه

$$cond_\infty(A) \ge 4041$$

وبذلك يكون 4041 حد أدنى للعدد الشرطي لـ A وفق نظيم ℓ_∞، أي إنّ العدد الشرطي كبير نسبياً فالجملة التي تكون A مصفوفة أمثالها مريضة.

مثال(11):

إذا علمت أنّ مصفوفة هيلبرت من البعد n تُعطى بالشكل:

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

أوجد العدد الشرطي من أجل H_4 .

الحل:

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

بالحساب نجد أنّ $\|H_4\|_\infty = \frac{25}{12}$ و $\left\|H_4^{-1}\right\|_\infty = 13620$ وبناءً عليه فإنّ $cond_\infty(H) \approx 28000$ أي إنّ العدد الشرطي كبير نسبياً وبالتالي فإنّ الجملة التي مصفوفة أمثالها H_4 مريضة.

3- طرائق حل جمل المعادلات الخطية:

تتمحور الطرائق المستخدمة لحل جمل المعادلات الخطية في قسمين هما :

1. الطرائق المباشرة وسنعرض منها:
   1.1. طريقة غاوس المحسنة
   2.1. طريقة غاوس جوردان
   3.1. تقنيات المرتكز وسندرس منها
      1.3.1. تقنية المرتكز الجزئي

2.3.1. تقنية المرتكز الجزئي الدرجي.

4.1. طرائق LU و سندرس منها:

1.4.1. طريقة كروات

2.4.1. طريقة دوليتل.

3.4.1. طريقة تشوليسكي.

2. الطرائق التكرارية وسنعرض منها:

1.2. طريقة جاكوبي.

2.2.طريقة غاوس سيدل.

3.2.طريقة S.O.R.

سنفصل فيما يلي هذه الطرائق.

3-1- الطرائق المباشرة لحل جملة المعادلات الخطية:

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية $A\,X = b$ حيثُ $\det(A) \neq 0$ عندئذٍ:

1) إذا كانت $A = D$ (مصفوفة الأمثال مصفوفة قطرية) أي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

عندئذٍ يُعطى حل الجملة بالشكل:

$$x_k = \frac{b_k}{a_{kk}} \quad ; \begin{cases} k = 1, \ldots, n \\ a_{kk} \neq 0 \end{cases}$$

2) إذا كانت $A = L$ (مصفوفة الأمثال مصفوفة مثلثيه سفلى) أي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

عندئذٍ يُعطى حل الجملة بالشكل:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_k=\dfrac{b_k-\sum_{j=1}^{k-1}a_{kj}x_j}{a_{kk}};\begin{cases} k=2,\ldots,n \\ a_{kk}\neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

وتُدعى هذه الطريقة **بالتعويضات المتتالية الأمامية.**

3) إذا كانت $A=U$ (مصفوفة الأمثال مصفوفة مثلثيه عليا) أي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

عندئذٍ يُعطى حل الجملة بالشكل:

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k=\dfrac{b_k-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj}x_j}{a_{kk}};\begin{cases} k=n-1,\ldots,1 \\ a_{kk}\neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

وتُدعى هذه الطريقة **بالتعويضات المتتالية التراجعية.**

3-1-1- طريقة غاوس المحسنّة (المعدلة):

لابدّ لنا قبل استعراض هذه الطريقة من التذكير **بالتحويلات السطرية (العمودية) الأولية لمصفوفة:**

1. المبادلة بين سطرين من أسطر المصفوفة أي $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. ضرب جميع عناصر أحد الأسطر بعدد لا يساوي الصفر أي $\alpha R_j \quad ;\alpha \neq 0$.
3. إضافة أحد الأسطر إلى سطر آخر بعد ضربه بعدد ما لا يساوي الصفر أي $\alpha R_i \mp R_j \quad ;\alpha \neq 0$.

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ $\det(A) \neq 0$ تقوم طريقة غاوس المحسنة لحل هذه الجملة (إيجاد X) على الخطوات التالية:

1) نوسع مصفوفة الأمثال A وذلك بإضافة عمود الثوابت إلى هذه المصفوفة بالشكل:

$$\tilde{A} = \underset{I}{\left(A\right.} \quad \vdots \quad \underset{II}{\left.b\right)}$$

حيثُ A مصفوفة الأمثال، b عمود الثوابت.

2) نحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ إلى مصفوفة مثلثيه عليا وذلك بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \leftrightarrow R_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i \quad ; \begin{cases} j = i+1, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

وبذلك نكون قد حوّلنا المصفوفة الموسّعة لتصبح مكافئة لمصفوفة من الشكل:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & \vdots & a'_{1,n+1} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & \vdots & a'_{2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a'_{nn} & \vdots & a'_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

أي:

$$(A \,|\, b) \xrightarrow{Gauss} (U \,|\, C)$$

3) نحل الجملة الناتجة باستخدام طريقة التعويضات المتتالية التراجعية فنجد:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b'_{n,n+1}}{a'_{n,n}} \\ x_i = \dfrac{a'_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j}{a'_{ii}} ; \begin{cases} k = n-1,\ldots,1 \\ a'_{ii} \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

مثال(12):

حل جمل المعادلات الآتية باستخدام طريقة غاوس المعدّلة:

1-

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

الحل:

1-

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 \to R_4 + 2R_3 \end{array}$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

فالجملة الناتجة:

$$2x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2$$
$$x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = 2$$
$$2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \Rightarrow x_1 = -7$$

ومنه حل الجملة

$$X = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$

-2

الحل:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

ومنه:

$$\Leftarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

وهـذا مسـتحيل إذن الجملـة مسـتحيلة الحل.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

-3

الحل:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

ومنه:

$$x_3 = 2 \Leftarrow \begin{cases} -x_3 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

وعليه فإنّ $x_2 = 2 - x_1$ حيثُ x_1 اختيـاري إذن للجملـة عـدد لانهـائي من الحلول.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

مساوئ طريقة غاوس المعدّلة:

1) الكلفة الحسابية العالية لهذه الطريقة حيثُ تبلغ هذه الكلفة $n^3/3$ من أجل n كبيرة جداً .

2) لا يمكن تطبيقها بشكل مباشر عندما يكون أحد عناصر القطر الرئيسي صفر.

3) تعاني من حساسية عالية لأخطاء التدوير.

ملاحظة:

إذا كان أحد عناصر القطر الرئيسي مساوياً للصفر فإننا نقوم بإعادة ترتيب الأسطر بحيث نجعل جميع عناصر القطر الرئيسي غير مساوية للصفر وذلك قبل البدء بتطبيق غاوس المحسنة.

مثال(13):

حل جملة المعادلات الآتية بطريقة غاوس المحسنة

$$8x_2 + 2x_3 = -7$$
$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8$$
$$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26$$

الحل:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 8 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{array}\right)$$

بما أنّ $a_{11} = 0$ فإنّه لا يمكن تطبيق غاوس المحسنة بشكل مباشر لذلك نجري التحويل $R_i \leftrightarrow R_j$ أي نبادل بين السطرين الأول والثاني وعليه فإننا نحصل على المصفوفة المكافئة.

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{array}\right) \qquad R_3 \to R3 - 2R_1$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & 4 & 10 \end{array}\right) \qquad R_3 \to R_3 + R_1$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

وبذلك تصبح الجملة بالشكل:

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_1 = 4$$
$$8x_2 + 2x_3 = -7 \Rightarrow x_2 = -1$$
$$6x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 0.5$$

أي إنّ حل الجملة هو

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}^T$$

3-1-2- طريقة غاوس جوردان:

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ $\det(A) \neq 0$ تقوم طريقة غاوس جوردان لإيجاد حل هذه الجملة على الخطوات التالية:

1) توسيع مصفوفة الأمثال

$$\tilde{A} = \underset{I}{\left(A \right.} \ \vdots \ \underset{II}{\left. b \right)}$$

حيثُ A مصفوفة الأمثال، b عمود الثوابت.

2) نحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ إلى مصفوفة قطرية وذلك

- بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \leftrightarrow R_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i \quad ; \begin{cases} j = i+1, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

- بجعل العناصر التي فوق القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \leftrightarrow R_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i \quad ; \begin{cases} j = 1, \ldots, i-1 \\ j = 1, 2, \ldots, i-1 \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

أي:

$$(A \,|\, b) \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} (U \,|\, C)$$

3) نحل الجملة الناتجة.

مثال(14):

حل جملة المعادلات الآتية بطريقة غاوس جوردان

$$x - y + 4z = 16$$
$$3x + 2y + z = 18$$
$$x + 4y - 2z = 12$$

الحل:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 18 \\ 1 & 4 & -2 & 12 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$$

ومنه:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -11 & -30 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \end{array}\right) \qquad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -11 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + \frac{11}{5} R_3 \\ R_1 \to R_1 - \frac{4}{5} R_3 \end{array}$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -4.5 \\ 0 & 5 & 0 & 27.5 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{array}\right) \qquad R_1 \to R_1 + \frac{1}{5} R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.64 \\ 0 & 5 & 0 & 27.5 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{array}\right)$$

وبذلك نحصل على الجملة

$$x = 0.64$$
$$5y = 27.5 \Rightarrow y = 5.44$$
$$5z = 26 \Rightarrow z = 5.2$$

مساوئ طريقة غاوس جوردان:

أبرز مساوئ هذه الطريقة الكلفة الحسابية العالية جداً والتّي لا يبررها إلا كون هذه الطريقة تساعدنا وبشكل كبير جداً على إيجاد معكوس مصفوفة غير شاذة.

3-1-3- تقنيات المرتكز Pivoting Strategies:

تُدعى العناصر $\{a_{ii}\}_{1\le i\le n}$ في مصفوفة موسعة $\tilde{A}$ موافقة لجملة معادلات خطية **بالعناصر الرائدة** (Pivots).

إذا كان أحد العناصر الرائدة على الأقل صغيراً نسبياً بالنسبة لعناصر عموده فإنّ طريقة غاوس المعدلة تفشل الأمر الذي يمكن توضيحه من خلال المثال التالي:

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} E_1 : 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2 : 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \end{cases} \qquad (16)$$

من الواضح أنّ حل هذه الجملة وفق الطرائق المباشرة هو $x_1 = 10, x_2 = 1$.

سنقوم فيما يلي بحل هذه الجملة باستخدام طريقة غاوس مع ملاحظة أنّ العنصر الرائد في العمود الأول 0.003 صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده.

إنّ المصفوفة الموسعة الموافقة للجملة السابقة هي

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc:c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1$$

$$m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.6\overline{6} \approx 1764$$

ومنه:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cc:c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right)$$

وعليه

$$0.003x_1 + 59.14x_2 \approx 59.17$$
$$-104300x_2 \approx -104400 \Rightarrow x_2 \approx 1.001$$

ومنهُ

$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003} = -10$$

يُمكننا بسهولة ملاحظة أنّ القيمة التقريبية لـ x_2 قريبة من القيمة الفعلية لـ x_2 بينما

قيمة x_1 التقريبية بعيدة جداً عن قيمة x_1 الفعلية وذلك لأنّ العنصر الرائد a_{11} صغير نسبياً بالنسبة إلى a_{21}

مما يعني أنّ طريقة غاوس المعدلة تفشل.

وللتخلص من هذه المشكلة(الفشل الناتج عن كون أحد العناصر الرائدة صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده) يتم تطبيق

3-1-3-1- تقنيات المرتكز الجزئي Partial Pivoting:

والتّي تقوم على تطبيق الخطوات التالية على كل عمود يكون عنصره الرائد صغيراً نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده

1) نختار أكبر عنصر(بالقيمة المطلقة) من العناصر الواقعة تحت العنصر الرائد لمصفوفة موسعة موافقة لجملة معادلات الخطية أي:

$$|a_{ik}| = \max_{k \le j \le n} |a_{jk}|$$

حيثُ k رقم سطر العنصر الرائد، n عدد أسطر المصفوفة الموسعة.

2) نبدل السطر(i) والسطر(k) أي $R_i \leftrightarrow R_k$.

سنقوم فيما يلي بتطبيق تقنية المرتكز الجزئي لحل جملة المعادلات الخطية السابقة (16).

وجدنا أنّ المصفوفة الموسعة الموافقة للجملة السابقة هي:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \end{pmatrix}$$

ولاحظنا أنّ العنصر الرائد في العمود الأول $a_{11} = 0.003$ صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده وعليه

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|\} = \max\{|0.003|, |5.291|\} = |5.291| = |a_{21}|$$

وعليه

$$R_2 \leftrightarrow R_1$$

وبذلك تصبح المصفوفة الموسعة بالشكل:

$$A' = \begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \end{pmatrix}$$

لنطبق الآن طريقة غاوس المعدلة

$$R_2 \to R_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} R_1$$

$$\frac{a'_{21}}{a'_{11}} = \frac{0.003}{5.291} = 0.000567$$

وعليه:

$$\begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \\ 0 & 59.14 & \vdots & 59.17 \end{pmatrix}$$

بالمتابعة نجد أنّ الحل التقريبي

$$(x_1 = 10\,,\, x_2 = 1)$$

الأمر الذي يعني أنّ تقنية المرتكز الجزئي قد ساعدتنا في تحسين طريقة غاوس المعدلة وذلك في حال كان أحد العناصر الرائدة صغيراً نسبياً بالنسبة لبقية العناصر. أمّا الآن فإننا سنستعرض تقنية أخرى من تقنيات المرتكز الجزئي لتحسين غاوس المعدلة وهي تقنية

3-1-3-2- تقنيات المرتكز الجزئي الدرجي Scaled Partial Pivoting:

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية

$$AX = b$$

تُدعى $\tilde{A} = (A \mid b)$ المصفوفة الموسعة الموافقة لهذه الجملة التي عدد أسطرها n.

تقوم تقنية **المرتكز الجزئي الدرجي** على تطبيق الخطوات التالية وذلك من أجل $j = 1, 2, \ldots, n-1$:

1) نوجد المجموعة

$$\left\{S_i \ ; S_i = \max_{j \le k \le n} \{|a_{ik}|\}\right\}_{j \le i \le n}$$

2) نوجد

$$\max_{j \le i \le n} \left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$$

ومنه

$$\exists \omega \in Z^+ \quad ; \max_{j \le i \le n} \left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\} = \frac{|a_{\omega j}|}{S_\omega}$$

3) نجري التحويل

$$R_j \leftrightarrow R_\omega$$

4) نطبق طريقة غاوس المعدلة على المصفوفة الناتجة عن التحويل.

مثال(15):

حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة غاوس المعدلة وتقنية المرتكز الجزئي:

$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -1$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$6x_1 + 8x_2 - x_3 = 35$$

الحل

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 5 & \vdots & -1 \\ -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 6 & 8 & -1 & \vdots & 35 \end{array}\right)$$

الخطوة الأولى (من أجل $j = 1$):

نوجد المجموعة

$$\left\{S_i\ ; S_i = \max_{1\le k\le 3}\left\{|a_{ik}|\right\}\right\}_{1\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\max\limits_{1\le k\le 3}\left\{|a_{1k}|\right\}=5\\ \max\limits_{1\le k\le 3}\left\{|a_{2k}|\right\}=3\\ \max\limits_{1\le k\le 3}\left\{|a_{3k}|\right\}=8\end{array}\right\}\Rightarrow\{5,3,8\}$$

نوجد

$$\max_{j\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$$

بدايةً نوجد المجموعة

$$\left\{\frac{|a_{i1}|}{S_i}\right\}_{1\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{|a_{11}|}{S_1}=\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{|a_{21}|}{S_2}=\dfrac{3}{3}=1\\ \dfrac{|a_{31}|}{S_3}=\dfrac{6}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\frac{3}{5},1,\frac{6}{8}\right\}$$

نوجد الآن العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة

$$\max\left\{\frac{3}{5},1,\frac{6}{8}\right\}=1$$

نجري التحويل $R_1\leftrightarrow R_2$ وعليه تصبح المصفوفة $\tilde{A}$ بالشكل:

$$\tilde{A}^*=\left(\begin{array}{ccc:c}-3 & 2 & 1 & 1\\ 3 & -4 & 5 & -1\\ 6 & 8 & -1 & 35\end{array}\right)$$

نطبق غاوس المعدلة على المصفوفة الأخيرة فنجد

$$\tilde{A}^* \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & +6 & \vdots & 0 \\ 0 & 12 & 1 & \vdots & 37 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثانية(من أجل $j = 2$):

نوجد المجموعة

$$\left\{S_i' ; S_i' = \max_{2\le k\le 3}\left\{\left|a_{ik}^*\right|\right\}\right\}_{2\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{1\le k\le 3}\left\{\left|a_{2k}^*\right|\right\} = 6 \\ \max\limits_{1\le k\le 3}\left\{\left|a_{3k}^*\right|\right\} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \{6,12\}$$

نوجد

$$\max_{2\le i\le n}\left\{\frac{\left|a_{ij}^*\right|}{S_i}\right\}_{2\le i\le 3}$$

بدايةً نوجد المجموعة

$$\left\{\frac{\left|a_{i\,2}^*\right|}{S_i'}\right\}_{2\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\left|a_{21}^*\right|}{S_2'} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\left|a_{31}^*\right|}{S_3'} = \dfrac{12}{12} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{1}{3},1\right\}$$

نوجد الآن العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة

$$\max\left\{\frac{1}{3},1\right\} = 1 = \frac{\left|a_{31}^*\right|}{S_3'}$$

نجري التحويل $R_2 \leftrightarrow R_3$ وعليه تصبح المصفوفة $\tilde{A}^*$ بالشكل:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 12 & 1 & \vdots & 37 \\ 0 & -2 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

نطبق غاوس المعدلة على المصفوفة الأخيرة فنحصل على الجملة

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$12x_2 + x_3 = 37$$
$$37x_3 = 37$$

بتطبيق طريقة التعويضات التراجعية على الجملة الأخيرة نجد

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 3$$
$$x_3 = 1$$

وعليه:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$$

3-1-4- طرائق LU

تعريف (16)

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها **قابلة للتفريق وفق** LU إذا وجدت مصفوفة مثلثيه سفلى L ومصفوفة مثلثيه عليا U بحيث يتحقق $A = LU$.

ملاحظات:

1) إنّ تفريق LU ليس وحيداً.

2) تقوم طرائق LU على تفريق المصفوفة A (مصفوفة الأمثال) في جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ $\det(A) \neq 0$ وفق تقريب LU وبناءً عليه تصبح جملة المعادلات الخطية بالشكل:

$$(LU)X = b \Leftrightarrow L(UX) = b$$

ولحل الجملة الأخيرة نقوم بحل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} UX = Z \\ LZ = b \end{cases}$$

3) بفرض $A \in M_n(R)$ مصفوفة قابلة للتفريق وفق LU عندئذٍ نستطيع أن نكتب

$$A = LU$$

أي

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n^2} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ell_{11} & \cdots & \cdots & \ell_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \cdots & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix}}_{\frac{n(n+1)}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

معلوم — مجهول — مجهول

$n(n+1) = n^2 + n$ مجهول

بالمساواة بين الطرفين نحصل على n^2 معادلة بـ $n^2 + n$ مجهول أي لدينا n مجهول اختياري تختلف طرائق LU باختلاف طريقة اختيار هذه المجاهيل.

3-1-4-1- طريقة كراوت Crout's method:

تعريف(17) تفريق كروات:

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها قابلة للتفريق وفق كراوت إذا كانت

1) قابلة للتفريق وفق LU.

2) $u_{ii} = 1; i = 1, \ldots, n$.

لنعين الآن عناصر L و U باستخدام هذا التفريق.

بما أنّ A قابلة للتفريق وفق LU فإنه ينتج:

$$A = LU$$

ومنه:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} u_{kj} \; ; i, j = 1, \ldots, n$$

إذا كان $i \geq j$ فإنّ:

$$\ell_{ij} = \ell_{ij} u_{jj}$$

$$\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \ell_{ik} u_{kj}$$

$$\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} - \underbrace{\sum_{k=j+1}^{n} \ell_{ik} u_{kj}}_{0}$$

$$\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \quad ; i, j = 1, \ldots, n \tag{17}$$

وعندما $i < j$ فإنّ:

$$u_{ij} = \frac{1}{\ell_{ii}} \left(\ell_{ii} u_{ij} \right)$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \ell_{ik} u_{kj}}{\ell_{ii}}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} - \overbrace{\sum_{k=i+1}^{n} \ell_{ik} u_{kj}}^{0}}{\ell_{ii}}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}}{\ell_{ii}} \quad ; i, j = 1, \ldots, n \tag{18}$$

وعليه وبمراعاة (17) و (18) يصبح L و U بالشكل التالي:

$$L=\begin{pmatrix}\ell_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & \ell_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn}\end{pmatrix}\quad,\quad U=\begin{pmatrix}1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

مثال(16):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}x+y+z&=1\\ 4x+3y-z&=6\\ 3x+5y+3z&=4\end{aligned}$$

وفق طريقة كراوت بدقة ثلاث منازل عشرية.

الحل:

$$L=\begin{pmatrix}\ell_{11} & 0 & 0\\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0\\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33}\end{pmatrix}\quad,\quad U=\begin{pmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -1\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

$$\ell_{11}=a_{11}=1,\ \ell_{21}=a_{21}=4,\ \ell_{31}=a_{31}=3$$

$$u_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=1, u_{12}=\frac{a_{13}}{a_{11}}=1$$

وعليه نجد

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & \ell_{22} & 0\\ 3 & \ell_{32} & \ell_{33}\end{pmatrix}\quad,\quad U=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -1\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

$$\ell_{22}=a_{22}-\ell_{21}u_{12}=-1$$

$$u_{23}=\frac{a_{23}-\ell_{21}u_{12}}{\ell_{22}}=5$$

وعليه

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&\ell_{32}&\ell_{33}\end{pmatrix}\quad,\quad U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&-1\\3&5&3\end{pmatrix}$$

$$\ell_{32}=2\quad,\quad \ell_{33}=2$$

وعليه

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&2\end{pmatrix}\quad,\quad U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&-1\\3&5&3\end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على الجملة

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&2\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}UX=Z\\LZ=b\end{cases}$$

$$LZ=b\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}_{Z}=\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}$$

ومنهُ

$$x'=1$$
$$4x'-y'=6$$
$$3x'+2y'-10z'=4$$

وبحل هذه الجملة نجد أنّ

$$x' = 1$$
$$y' = -2$$
$$z' = -0.5$$

وعليه

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -0.5 \end{pmatrix}^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$x + y + z = 1$$
$$y + 5z = -2$$
$$z = -0.5$$

وبحل هذه الجملة نجد أنّ

$$x = 1$$
$$y = 0.5$$
$$z = -0.5$$

وعليه

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T$$

وهو المطلوب.

3-1-4-2- طريقة دوليتل Dolittle's:

تعريف(18) تفريق دوليتل:

يُقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ إنّها قابلة للتفريق وفق دوليتل إذا كانت

1) قابلة للتفريق وفق LU.
2) $u_{ii} = 1; i = 1,\ldots,n$.

لنعين الآن عناصر L و U باستخدام هذا التفريق.

بما أنّ A قابلة للتفريق وفق LU فإنه ينتج:

$$A = LU$$

ومنه:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} u_{kj} \quad ; i, j = 1, \ldots, n$$

إذا كان $i \geq j$ فإنّ:

$$u_{ij} = u_{ij} \ell_{jj}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \ell_{ik} u_{kj}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} - \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} \ell_{ik} u_{kj}}_{0}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} \quad ; i, j = 1, \ldots, n \tag{19}$$

وعندما $i < j$ فإنّ:

$$\ell_{ij} = \frac{1}{u_{ii}}\left(u_{ii}\ \ell_{ij}\right)$$

$$\ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \ell_{ik}\, u_{kj}}{u_{ii}}$$

$$\ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj} - \overbrace{\sum_{k=j+1}^{n} \ell_{ik}\, u_{kj}}^{0}}{u_{ii}}$$

$$\ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj}}{u_{ii}} \quad ;i, j = 1,\ldots,n \tag{20}$$

وعليه وبمراعاة (19) و (20) يصبح L و U بالشكل التالي:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \ell_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال(17):

بفرض أنّه لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1) فرق هذه المصفوفة وفق دوليتل.

2) استفد من الطلب السابق في حل جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ $b = (1 \quad 1 \quad 1)^T$

الحل:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} = 1, u_{12} = a_{12} = 1, u_{13} = a_{13} = -1$$

$$\ell_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 1, \ell_{12} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = -2$$

وعليه نجد

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - \ell_{21} u_{21} = 1$$

$$u_{23} = a_{23} - \ell_{21} u_{12} = -1$$

ومنهُ:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31} u_{12}}{u_{22}} = 3 \quad , \quad u_{33} = a_{33} - \ell_{31} u_{12} - \ell_{32} u_{23} = 2$$

وعليه

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على الجملة

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-2&3&1\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}UX=Z\\LZ=b\end{cases}$$

$$LZ=b\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}_{Z}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

وحسب طريقة التعويضات المتقدمة نجد أنّ:

$$x'=1$$
$$y'=0$$
$$z'=3$$

وعليه

$$Z=\begin{pmatrix}1&0&3\end{pmatrix}^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX=Z\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

وبتطبيق طريقة التعويضات التراجعية نجد أنّ

$$x=1$$
$$y=\frac{3}{2}$$
$$z=\frac{3}{2}$$

وعليه

$$X = (1 \quad 1.5 \quad 1.5)^T$$

وهو المطلوب.

3-1-4-4- طريقة تشوليسكي(Choleskey's method):

تعريف(19) (تفريق تشوليسكي):

يقال عن المصفوفة $A \in M_n(R)$ أنّها **قابلة للتفريق وفق تشوليسكي** إذا كانت

1) قابلة للتفريق وفق LU.

2) $U = L^T$.

لنعين الآن عناصر L و U باستخدام هذا التفريق.

بما أنّ A قابلة للتفريق وفق LU فإنه ينتج:

$$A = LU = LL^T$$

ومنه:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} u_{kj} \quad ; i, j = 1, \ldots, n$$

ولكن $U = L^T$ أي $u_{ij} = \ell_{ji}$ وبناءً عليه

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} \ell_{jk} \quad ; i, j = 1, \ldots, n \qquad (21)$$

عندما $i = j$ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik}^2$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}^2 + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} \ell_{ik}^2}_{0}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}^2$$

وعليه

$$a_{11} = \ell_{11}^2 \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2 + \ell_{ii}^2 \quad ; i = 2,\ldots,n$$

ومنهُ:

$$\ell_{ii}^2 = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2$$

$$\ell_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2} \quad ; i = 2,\ldots,n \qquad (22)$$

وعندما $j = 1$ تصبح العلاقة (21) بالشكل:

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\ell_{1k} = \ell_{i1}\ell_{11} + \underbrace{\sum_{k=2}^{i} \ell_{ik}\ell_{1k}}_{0}$$

$$a_{i1} = \ell_{i1}\ell_{11} \Rightarrow \ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}}$$

وعندما $j > 1$ تصبح العلاقة (21) بالشكل:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{ik}\ell_{jk} = \ell_{ij}\ell_{jj} + \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{1k}}_{0}$$

$$\ell_{i1} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk}}{\ell_{jj}} \quad ; \begin{cases} j \geq 2 \\ i = j+1,\ldots,n \end{cases}$$

مثال(18):

حل جملة المعادلات الخطية الآتية وفق طريقة تشوليسكي:

$$4x + 2y + 14z = 14$$
$$2x + 17y - 5z = -101$$
$$14x - 5y + 83z = 155$$

الحل:

نكتب المصفوفة A (مصفوفة الأمثال) وفق طريقة تشوليسكي:

$$A = LU = LL^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2\,,\ \ell_{21} = \frac{a_{21}}{\ell_{11}} = 1\,,\ \ell_{31} = \frac{a_{31}}{\ell_{11}} = 7$$

$$\ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = 4$$

$$\ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31}\ell_{21}}{\ell_{22}} = -3$$

$$\ell_{33} = \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = 5$$

وبذلك تصبح جملة المعادلات بالشكل

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} UX = Z \\ LZ = b \end{cases}$$

$$LZ = b \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{Z} = \begin{pmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$Z = \begin{pmatrix} 7 & -22 & 5 \end{pmatrix}^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}^T$$

وهو المطلوب.

3-2- الطرائق التكرارية:

توجد جمل من المعادلات الخطية كبيرة جداً بحيث يتطلب حلها وفق الطرائق المباشرة جهداً كبيراً مما دفع العلماء إلى إيجاد طرائق عددية تفيدنا في حل مثل هذه الجمل وتوفر علينا الكلفة الحسابية العالية للطرائق المباشرة حيث تعتمد الكلفة الحسابية لمثل هذه الطرائق على مقدار الدقة المطلوبة.

سنستعرض فيما يلي ثلاثاً من أشهر الطرائق التقريبية المستخدمة لحل جمل المعادلات الخطية.

1) طريقة جاكوبي (Jacobi method)

2) طريقة غاوس سيدل (Gauss sedial method)

3) طريقة S.O.R (Successive Over Relaxation)

ملاحظة:

اعتُمدَ في بناء المتتاليات التكرارية الموافقة للطرائق العددية السابقة على مبدأ النقطة الثابتة.

تعريف (20) (تابع التقليص) Contraction mapping :

يُقال عن التابع $g: A \to B$ أنّه تقليص على المجموعة $D \subseteq A$ إذا تحقق:

$$\exists k: 0 \le k < 1; \forall x, y \in D: \|g(x) - g(y)\| \le k \|x - y\|$$

تعريف (21):

يُقال أنّ للتابع g نقطة ثابتة α إذا تحقق أنّ $g(\alpha)=\alpha$.

مبرهنة (8) (مبرهنة القيمة الثابتة):

إذا كان $g:A\to B$ تابع تقليص فإنّ

1) لـ g نقطة ثابتة وحيدة في A.

2) بفرض $\alpha\in A$ ولتكن $x^{(n)}$ الحل الوحيد للعلاقة التكرارية

$$\begin{cases} x^{(0)}=d \\ x^{(n+1)}=g(x^{(n)}) \end{cases}$$

عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=\alpha$$

أي إنّ حدود المتتالية $x^{(n)}$ تشكل حلولاً تقريبية للمعادلة:

$$g(x)-x=0$$

ملاحظات:

1) بفرض أنّه لدينا التابع

$$F:M_n(R)\to M_n(R)$$
$$F(x)=B\,x+C$$

إنّ هذا التابع تقليص إذا كان $\|B\|<1$ لأنّ

$$\|F(x)-F(y)\|\le\|B\,x+C-B\,y-C\|=\|B\,(x-y)\|\le\|B\|\|x-y\|<\|x-y\|$$

وبناءً على مبرهنة القيمة الثابتة فإنّه يمكن بناء متتالية تكرارية تتقارب نحو الحل بالشكل:

$$x^{(k+1)}=F(x^{(k)}) \qquad \forall\, x^{(0)}$$

بفرض أنّه لدينا جملة من المعادلات الخطية

$$AX=b \quad ; \quad \det(A)\neq 0 \tag{23}$$

تقوم جميع الطرائق العددية التي سندرسها على تفريق مصفوفة الأمثال بالشكل:

$$A = M - N \quad ; \quad \det(M) \neq 0 \tag{24}$$

نعوض (24) في (23) فنجد أنّ:

$$(M - N)X = b$$
$$MX = NX + b$$

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}b \tag{25}$$

بالاعتماد على مبرهنة القيمة الثابتة وبالاستفادة من المناقشة الواردة في الملاحظة الأولى يمكن بناء المتتالية التكرارية

$$X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b \qquad ; k \geq 0 \quad \forall x^{(0)} \tag{26}$$

$$\begin{cases} B = M^{-1}N \\ C = M^{-1}b \end{cases} \tag{27}$$

تعريف (22):

بفرض $A = M - N \in M_n(R)$ حيثُ M مصفوفة غير شاذة، إنّ الطريقة العددية المستخدمة لحل جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ $\det(A) \neq 0$ تتقارب نحو حل الجملة X إذا كانت المتتالية التكرارية $x^{(k)}$ الموافقة لهذه الطريقة متقاربة نحو هذا الحل وعندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{k \to \infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$$

حيثُ $\| \ \|$ نظيم ما.

مبرهنة(9):

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية العددية (26) الموافقة للطرائق المستخدمة في حل جمل المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ $\det(A) \neq 0$ نحو الحل x هو أن يتحقق $\rho(A) < 1$.

تعريف(23):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX=b$ حيثُ $\det(A)\neq 0$ وبفرض x الحل الفعلي لهذه الجملة و $\tilde{x}$ الحل التقريبي لهذه الجملة باستخدام إحدى الطرائق العددية التي أشرنا إليها سابقاً عندئذٍ

يُعرّف **الخطأ الفعلي** بالشكل:

$$E=x-\tilde{x}$$

ويُعرّف **الخطأ النسبي** على أنّه المقدار

$$R=\frac{\|E\|}{\|X\|}$$

حيثُ $\|\ \|$ نظيم ما.

مبرهنة(10):

إذا كان $\|B\|<1$ فإنّ $\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|=0$ حيثُ x الحل الفعلي لجملة المعادلات الخطية $AX=b$ حيثُ $\det(A)\neq 0$ و $x^{(k)}$ متتالية من الحلول التقريبية (المعطاة بالعلاقة (26)) للجملة السابقة.

الإثبات:

بما أنّ x هو الحل الفعلي للجملة $AX=b$ فإنّه يتحقق أنّ

$$x=B\,x+C \tag{28}$$

وبما أنّ $x^{(k)}$ متتالية من الحلول التقريبية للجملة $AX=b$ فإنّ

$$x^{(k)}=B\,x^{(k-1)}+C \tag{29}$$

بطرح (29) من (28) نجد:

$$x^{(k)}-x=B\left(x^{(k-1)}-x\right)$$

بأخذ نظيم الطرفين نجد

$$0\leq\left\|x^{(k)}-x\right\|=\left\|B\left(x^{(k-1)}-x\right)\right\|\leq\|B\|\left\|\left(x^{(k-1)}-x\right)\right\|\leq\cdots\leq\|B\|^{k}\left\|x^{(0)}-x\right\|$$

وبما أنّ $\|B\|<1$ فإنّ:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|=0$$

مبرهنة(11):

بفرض أنّه لدينا جملة المعدلات الخطية $AX=b$ حيثُ $\det(A)\neq 0$، وبفرض x، $\tilde{x}$ الحل الفعلي والتقريبي لهذه الجملة على الترتيب عندئذٍ يتحقق أنّ

$$R\le Cond(A)\frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|} \qquad (30)$$

حيثُ $\|.\|$ نظيم مرتب جزئياً للمصفوفة A.

الإثبات:

بما أنّ x، $\tilde{x}$ الحل الفعلي والتقريبي للجملة $AX=b$ فإنه ينتج:

$$\left.\begin{aligned}Ax&=b\\A\tilde{x}&=\tilde{b}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\left(x-\tilde{x}\right)=b-\tilde{b}\Rightarrow x-\tilde{x}=A^{-1}\left(b-\tilde{b}\right)$$

بأخذ نظيم الطرفين نجد أنّ:

$$\left\|x-\tilde{x}\right\|\le\left\|A^{-1}\right\|\left\|b-\tilde{b}\right\| \qquad (31)$$

من جهة أخرى

$$\|b\|=\|AX\|\le\|A\|\|X\|\Rightarrow\|X\|\ge\frac{\|b\|}{\|A\|}$$

وعليه

$$\frac{1}{\|X\|}\ge\frac{\|A\|}{\|b\|} \qquad (32)$$

من (31) و (32) نجد أنّ

$$R=\frac{\|E\|}{\|X\|}=\frac{\left\|x-\tilde{x}\right\|}{\|X\|}\le\left\|A^{-1}\right\|\|A\|\frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|}=Cond(A)\frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|}$$

تعريف(24):

يُسمى المقدار $r = A\,x - A\,\tilde{x} = b - \tilde{b}$ بالباقي حيثُ x، $\tilde{x}$ الحل الفعلي والتقريبي لجملة المعادلات الخطية $AX = b$ التي مصفوفة أمثالها مربعة وغير شاذة.

ملاحظة:

1) بالاستفادة من التعريف الأخير تصبح العلاقة (30) بالشكل

$$R \le Cond\,(A)\,\frac{\|r\|}{\|b\|} \qquad (33)$$

2) نصطلح على تسمية النسبة

$$R_r = \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

الخطأ النسبي للباقي وعليه تؤول العلاقة (33) إلى العلاقة:

$$R \le Cond\,(A)\,R_r$$

عادةً ما يكون الحل الفعلي لجملة المعادلات الخطية غير معلوم مما يجعل إيجاد الخطأ الفعلي والنسبي أمراً مستحيلاً وذلك لاعتمادهما بشكل أساسي على الحل الفعلي.

تبين العلاقة الأخيرة أنّه إذا كان العدد الشرطي صغيراً و R_r صغير فإنّ الخطأ النسبي الناتج عن استخدام الطريقة العددية لإيجاد الحل التقريبي يكون صغيراً، كما تبين لنا هذه العلاقة أنّه إذا كان العدد الشرطي كبيراً فإنّ الخطأ النسبي يكون كبيراً حتى ولو كان R_r صغيراً الأمر الذي يعني أنّ العلاقة (30) تشكل معياراً جديداً لمعرفة دقة الحل التقريبي وذلك دون الحاجة إلى معرفة الحل الفعلي.

وجدنا في المثال (10) أنّ

$$Cond_{\infty}(A) = \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^2$$

لنناقش وضع الخطأ النسبي لجملة خطية مصفوفة أمثالها A إذا كان $\varepsilon \le 0.01$.
بسهولة نجد أنّ

$$Cond_{\infty}(A) \ge 4041$$

مما يعني أنّ الخطأ النسبي الناتج عن إيجاد الحل التقريبي كبير نسبياً وذلك مهما كان R_r صغيراً.

3-2-1- طريقة جاكوبي (Jacobi method):

تعريف(25):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ التي مصفوفة أمثالها مربعة وغير شاذة تُعرّف طريقة جاكوبي العددية بأنّها الطريقة التي تُفرق فيها مصفوفة الأمثال بالشكل

$$A = M - N \quad ; \begin{cases} M = D = diag(a_{ii}) \\ N = D - A = -L - U \end{cases}$$

حيثُ

$$\begin{cases} l_{ij} = a_{ij} & ; i > j \\ u_{ij} = a_{ij} & ; i < j \end{cases}$$

بالاعتماد على التعريف السابق والعلاقة (26) نجد أنّ المتتالية التكرارية الموافقة لطريقة جاكوبي تُعطى بالشكل:

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(K)} + C_J \qquad (34)$$

حيثُ

$$\begin{cases} B_J = M^{-1}N = D^{-1}(L+U) \\ C_J = M^{-1}b = D^{-1}b \end{cases}$$

مثال(19):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ

$$A=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 2 & 10\end{pmatrix}\quad,\quad b=\begin{pmatrix}11\\ 12\end{pmatrix}$$

أوجد الحل التقريبي لهذه الجملة باستخدام طريقة جاكوبي علماً أنّ

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

الحل:

$$D=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}$$

$$L+U=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix}0 & -0.1\\ -0.2 & 0\end{pmatrix}$$

$$C_J=D^{-1}b=\begin{pmatrix}1.1\\ 1.2\end{pmatrix}$$

وعليه نجد أنّ متتالية الحلول التكرارية

$$x^{(k+1)}=B_J x^{(K)}+C_J\ ;\begin{cases}B_J=\begin{pmatrix}0 & -0.1\\ -0.2 & 0\end{pmatrix}\\ C_J=\begin{pmatrix}1.1\\ 1.2\end{pmatrix}\end{cases}$$

بتعويض القيمة الابتدائية في هذه العلاقة نجد أنّ

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1.1\\ 1.2\end{pmatrix}$$

وبالمتابعة نجد أنّ

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix}0.98\\ 0.98\end{pmatrix},\ x^{(3)}=\begin{pmatrix}1.002\\ 1.004\end{pmatrix},\ x^{(k)}\to\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

حيثُ $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ الحل الفعلي للجملة المعطاة.

إنّ العلاقة (34) غير عملية وذلك لاحتوائها على معكوس المصفوفة D مما دفع العلماء إلى إيجاد صيغة مكافئة لـ (34) سهلة التطبيق عملياً.

من العلاقة (25) والتعريف الأخير نجد أنّ المتتالية التكرارية:

$$D\,x^{(k+1)} = -(L+U)\,x^{(K)} + b$$

والتي يمكن إعادة كتابتها لتصبح بالشكل:

$$a_{ii}\,x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j>i \\ j\neq i}} x_j^{(K)} \quad ;i = 1,\ldots,n \tag{35}$$

مبرهنة (12):

إنّ طريقة جاكوبي العددية والتّي تُعطى متتاليتها التكرارية بالعلاقة (34) تتقارب نحو حل الجملة $AX = b$ ، التي مصفوفة أمثالها مربعة غير شاذة، إذا كانت مصفوفة أمثالها مسيطرة قطرياً تماماً أي إذا كان

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{n} |a_{ij}| \quad ;i = 1,\ldots,n$$

ملاحظة:

بالاعتماد على المبرهنة (9) يمكن القول إنّ طريقة جاكوبي متقاربة إذا كان $\rho(B_J) < 1$.

مثال(20):

أوجد الحل التقريبي للجملة

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + x_3 &= -17 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= 14 \\ x_1 + 6x_2 &= 14 \end{aligned}$$

وذلك بدقة أربعة منازل مستخدماً طريقة جاكوبي علماً أنّ القيمة الابتدائية $x^{(0)} = 0$.

الحل:

إنّ هذه الجملة ليست مسيطرة قطرياً تماماً وذلك لأنّه في المعادلة الثانية $|7| \not> |2|$.

لذلك نغير ترتيب المعادلات حيثُ سنقوم بتبديل المعادلة الثانية والثالثة فتصبح الجملة بالشكل:

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + x_3 &= -17 \\ x_1 + 6x_2 &= 14 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= 14 \end{aligned}$$

وهي جملة مسيطرة قطرياً تماماً.

لنطبق خوارزمية جاكوبي المعطاة بالعلاقة (35) فنحصل على المتتالية التكرارية:

$$(*) \quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left(-17 - 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(-14 - x_2\right) \\ x_3^{(K+1)} = \frac{1}{-6}\left(14 - x_1 + 2x_2\right) \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.8889 \\ 0.6667 \\ -2.3334 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.9268 \\ 0.9816 \\ -2.8706 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -2.1538 \\ 1.0257 \\ -3.0344 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(4)} = \begin{pmatrix} -2.0077 \\ 1.0257 \\ -3.0344 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(5)} = \begin{pmatrix} -2.0077 \\ 1.0014 \\ -3.0101 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$x^{(6)} = \begin{pmatrix} -1.9996 \\ 1.0014 \\ -3.0020 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(7)} = \begin{pmatrix} -2.0005 \\ 1.0000 \\ -3.0006 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(8)} = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 1.0002 \\ -3.0003 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$x^{(9)} = \begin{pmatrix} -2.0002 \\ 1.0001 \\ -3.0002 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(10)} = \begin{pmatrix} -2.0002 \\ 1.0001 \\ -3.0002 \end{pmatrix}$$

$$\left\| x^{(9)} - x^{(10)} \right\| \le \frac{10^{-3}}{2}$$

وعليه يكون الحل التقريبي المطلوب:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2-2-3-طريقة غاوس سيدل (Gauss-Seidel method):

تعريف(26):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ التي مصفوفة أمثالها مربعة وغير شاذة تُعرّف طريقة غاوس سيدل العددية بأنّها الطريقة التي تُفرق فيها مصفوفة الأمثال بالشكل

$$A = M - N \qquad ;\begin{cases} M = D + L \\ N = -U \end{cases}$$

حيثُ

$$\begin{cases} l_{ij} = a_{ij} & ;i > j \\ u_{ij} = a_{ij} & ;i < j \end{cases}$$

بالاعتماد على التعريف السابق والعلاقة (26) نجد أنّ المتتالية التكرارية الموافقة لطريقة غاوس سيدل تُعطى بالشكل:

$$x^{(k+1)} = B_{Gs}x^{(K)} + C_{Gs} \tag{36}$$

حيثُ

$$\begin{cases} B_{Gs} = M^{-1}N = -(D+L)^{-1}U \\ C_{GS} = M^{-1}b = (D+L)^{-1}b \end{cases}$$

مثال(21):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

أوجد الحل التقريبي لهذه الجملة باستخدام طريقة غاوس سيدل علماً أنّ

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$D + L = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow (D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.02 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$B_{Gs} = -(D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix}$$

$$C_{Gs} = (D-L)^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.98 \end{pmatrix}$$

وعليه نجد أنّ متتالية الحلول التكرارية

$$x^{(k+1)} = B_{Gs}x^{(K)} + C_{Gs} \; ; \begin{cases} B_{Gs} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix} \\ C_{Gs} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.98 \end{pmatrix} \end{cases}$$

بتعويض القيمة الابتدائية في العلاقة الأخيرة نجد أنّ

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.98 \end{pmatrix}$$

وبالمتابعة نجد أنّ

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.9996 \end{pmatrix}, \; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.00004 \\ 0.99992 \end{pmatrix}, x^{(k)} \underset{k \to \infty}{\to} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حيثُ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ الحل الفعلي للجملة المعطاة.

نظراً لصعوبة التعامل مع الصيغة المصفوفية للمتتالية التكرارية الموافقة لطريقة غاوس–سيدل فإننا سنقدم خوارزمية تمكننا من إيجاد الحلول التقريبية وذلك دون

الحاجة إلى حساب مقلوب المصفوفة $D+L$.

من العلاقة (25) والتعريف الأخير نجد أنّ المتتالية التكرارية:

$$(D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(K)} + b$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$(36)\quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{\omega}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}\right) \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \end{cases} ; \quad i = 2,3,\ldots,n$$

مبرهنة (13):

إذا كانت مصفوفة أمثال جملة معادلات خطية مسيطرة قطرياً تماماً فإنّ الحل التقريبي الناتج عن استخدام طريقة غاوس سيدل العددية والتّي تُعطى متتاليتها التكرارية بالعلاقة (36) يتقارب نحو حل الجملة $AX = b$.

ملاحظة:

بالاعتماد على المبرهنة (9) يمكن القول إنّ طريقة جاكوبي متقاربة إذا كان $\rho(B_{Gs}) < 1$.

مثال(22):

أوجد الحل العددي لجملة المعادلات:

$$9x + y + z = 7$$
$$x + 3y + z = 5$$
$$x + y + 4z = 6$$

مقرباً إلى ثلاث منازل وذلك باستخدام طريقة غاوس سيدل علماً أنّ القيمة الابتدائية $X^{(0)}$.

الحل:

مصفوفة الأمثال مسيطرة قطرياً تماماً.

بتطبيق الخوارزمية (36) نجد

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(7 - y^{(k)} - z^{(k)}\right) \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(5 - x^{(k+1)} - z^{(k)}\right) \\ z^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 - x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

نعوض القيمة الابتدائية $x^{(0)}$ في العلاقة الأخيرة

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.2 \\ 0.85 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.0533 \\ 0.9892 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9915 \\ 1.0064 \\ 1.0005 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.9986 \\ 1.0003 \\ 1.0003 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 0.9999 \\ 1.0001 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0001 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(7)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0001 \end{pmatrix}$$

بما أنّ

$$\left\| x^{(7)} - x^{(6)} \right\| \le \frac{10^{-3}}{2}$$

فإنّ الحل التقريبي

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3-2-3-طريقة S.O.R :

تعريف(27):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ التي مصفوفة أمثالها مربعة

وغير شاذة تُعرّف طريقة S.O.R العددية بأنّها الطريقة التي تُفرق فيها مصفوفة الأمثال بالشكل

$$A = M - N \quad ; \begin{cases} M = \dfrac{D}{\omega} + L \\ N = \dfrac{1-\omega}{\omega} D - U \end{cases}$$

حيثُ

$$\begin{cases} l_{ij} = a_{ij} & ; i > j \\ u_{ij} = a_{ij} & ; i < j \end{cases}$$

بالاعتماد على التعريف السابق والعلاقة (26) نجد أنّ المتتالية التكرارية الموافقة لطريقة S.O.R تُعطى بالشكل:

$$x^{(k+1)} = B_{SOR} x^{(k)} + C_{SOR} \tag{37}$$

حيثُ

$$\begin{cases} B_{SOR} = M^{-1}N = -\left(\dfrac{D}{\omega} + L\right)^{-1}\left(\dfrac{1-\omega}{\omega} D - U\right) \\ C_{SOR} = M^{-1}b = \left(\dfrac{D}{\omega} + L\right)^{-1} b \end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كانت $\omega = 1$ فإنّ طريقة S.O.R تتطابق مع طريقة غاوس سيدل.

مثال(23):

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1) أوجد جذور هذه الجملة باستخدام طريقة S.O.R في حال $\omega = 1$.

2) قارن بين $\rho(B_{SOR})$ و $\rho(B_{GS})$ عندما يحقق ω العلاقة $4(1-\omega)+\frac{\omega^2}{100}=0$.

الحل:

$$\frac{1}{\omega}D+L=\begin{pmatrix}\frac{10}{\omega} & 0\\ 1 & \frac{10}{\omega}\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{1}{\omega}D+L\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\omega}{10} & 0\\ -\frac{\omega^2}{100} & \frac{\omega}{10}\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega}D-U\right)=\begin{pmatrix}\frac{1-\omega}{\omega}(10) & -1\\ 0 & \frac{1-\omega}{\omega}(10)\end{pmatrix}$$

ومنه

$$B_{SOR}=-\left(\frac{D}{\omega}+L\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D-U\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1-\omega & -\frac{\omega}{10}\\ \frac{\omega(1-\omega)}{10} & \frac{\omega^2}{100}+1-\omega\end{pmatrix}$$

القيم الذاتية الموافقة لهذه المصفوفة تنتج من العلاقة

$$\det\left(B_{SOR}-\lambda I\right)=0$$

$$(1-\omega-\lambda)\left[\frac{\omega^2}{100}+1-\omega-\lambda\right]-\frac{\omega^2(1-\omega)}{100}=0$$

$$\lambda^2-\lambda\left[\frac{\omega^2}{100}+2(1-\omega)\right]-(1-\omega)^2=0$$

نحل المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى λ فنجد:

$$\lambda=(1-\omega)+\frac{\omega^2}{200}\pm\frac{1}{2}\left[4(1-\omega)\frac{\omega^2}{100}+\frac{\omega^2}{10000}\right]^{1/2}$$

وجدنا أنّه عندما $\omega=1$ فإنّ طريقة S.O.R تتطابق مع طريقة غاوس سيدل بتعويض $\omega=1$ في العلاقة الأخيرة نجد أنّ $\lambda=1$ الأمر الذي يعني وجود جذرين هما $0,0.01$، وبتغيير ω تتغير الجذور.

بفرض أننا اخترنا ω تحقق العلاقة $4(1-\omega)+\frac{\omega^2}{100}=0$ عندئذٍ

$$\frac{\omega^2}{200}=2(1-\omega)$$

وعليه $\lambda=\omega-1$.

ومنه فإنّ أصغر قيمة لـ ω هي $\omega=1.002512579$ أي إنّ $\omega\approx 1$ أي إنّها قريبة جداً من قيمة ω الموافقة لطريقة غاوس سيدل.

بالحساب نجد أنّ

$$\rho(B_{SOR})=0.002512579$$

في حين أنّ

$$\rho(B_{SOR})=0.01$$

مما يوضح الدور الذي يلعبه $\rho(B)$ في عملية اختيار ω.

مبرهنة(14)(kahan):

إذا كانت A مصفوفة مربعة وغير شاذة موافقة لجملة المعادلات الخطية $AX=b$ عندئذٍ يُحقق نصف القطر الطيفي $\rho(B_{SOR})$ الناتج عن طريقة S.O.R العلاقة

$$\rho(B_{SOR})\geq|1-\omega| \quad \forall\omega\neq 0$$

وعليه فإنّ طريقة S.O.R تتقارب فقط عندما $\omega\in]0,2[$.

مبرهنة (15) (Ostrowski-Reich):

إذا كانت A مصفوفة معرفة إيجاباً و $\omega\in]0,2[$ عندئذٍ تتقارب طريقة S.O.R من أجل أي قيمة ابتدائية $x^{(0)}$.

مبرهنة (16):

إذا كانت A مصفوفة معرفة إيجاباً وثلاثية الأقطار (Tridiagonal) عندئذٍ القيمة المثلى لـ ω تُعطى بالعلاقة:

$$\omega_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho(B_J)\right)^2}}$$

مثال(24):

أوجد الاختيار الأمثل لـ ω الموافقة لطريقة S.O.R للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

1) من الواضح أنّ A ثلاثية الأقطار.

2) إنّ A معرفة إيجاباً لأنّ

- A تناظرية $(A = A^T)$
- A معرفة إيجاباً لأنّه من أجل $0 \neq x \in M_{3\times 1}(R)$

$$x^T A\, x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ -x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + 3\left(x_1 + x_3\right)^2 + 3x_2^2 + \left(x_2 - x_3\right)^2 > 0$$

لنحسب الآن $\rho(B_J)$:

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B_J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0.625)$$

$$\rho(B_J) = \sqrt{0.625}$$

نعوض في العلاقة

$$\omega_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho(B_J)\right)^2}}$$

فنجد

$$\omega_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-0.625}} \approx 1.24$$

نظراً لصعوبة التعامل مع الصيغة المصفوفية للمتتالية التكرارية الموافقة لطريقة S.O.R فإننا سنقدم خوارزمية تمكننا من إيجاد الحلول التقريبية وذلك دون الحاجة إلى حساب مقلوب المصفوفة $\frac{D}{\omega}+L$.

من العلاقة (3) والتعريف الأخير نجد أنّ المتتالية التكرارية:

$$\left(\frac{D}{\omega}+L\right)x^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D - U\right)x^{(k)} + b$$

والتّي يمكن كتابتها بالشكل:

$$(38) \quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}\right) \\ x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$; \quad i = 2,3,\ldots,n$$

مثال(25):

لتكن جملة المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

والمطلوب أوجد الحل العددي لهذه الجملة إذا علمت أنّ $x^{(0)} = (1,1,1)^T$ وذلك باستخدام طريقة غاوس سيدل و S.O.R علماً أنّ $\omega = 1.25$.

الحل:

- **باستخدام طريقة غاوس سيدل:**

1) مصفوفة الأمثال مسيطرة قطرياً تماماً.

2) بتطبيق الخوارزمية (36) نجد أنّ

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.75x_2^{(k)} + 6 \\ x_2^{(k+1)} = -0.75x_1^{(k+1)} + 0.25x_3^{(k)} + 7.5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.25x_2^{(k+1)} - 6 \end{cases}$$

يُوضح الجدول التالي التكرارات السبعة الأولى الموافقة لهذه الطريقة

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	1	5.250000	3.1406250	3.0878906
$x_2^{(k)}$	1	3.812500	3.8828125	3.9267578
$x_3^{(k)}$	1	–5.046875	–5.0292969	–5.0183105

4	5	6	7
3.0549316	3.0343323	3.0214577	3.0134110
3.9542236	3.9713898	3.9821186	3.9888241
–5.0071526	–5.0071526	–5.0044703	–5.0027940

- **باستخدام طريقة S.O.R:**

1) لدينا $\omega = 1.25$ بتطبيق الخوارزمية (38) نجد أنّ

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.25x_1^{(k)} - 0.3975x_2^{(k)} + 7.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.937x_1^{(k+1)} - 0.25x_2^{(k)} + 0.3125x_3^{(k)} + 7.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.3125x_2^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} - 7.5 \end{cases}$$

يُوضح الجدول التالي التكرارات السبعة الأولى الموافقة لهذه الطريقة:

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	1	6.312500	2.6223145	3.1333027
$x_2^{(k)}$	1	3.5195313	3.9585266	4.0102646
$x_3^{(k)}$	1	–6.6501465	–4.6004238	–5.0966863

4	5	6	7
2.9570512	3.0037211	2.9963276	3.0000498
4.0074838	4.0029250	4.0009262	4.0002586
–4.9734897	–5.0057135	–4.9982822	–5.0003486

مثال(26):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= -4 \end{aligned}$$

والمطلوب:

1) ادرس التقارب بطريقة جاكوبي.

2) أوجد ω_{Opt} في طريقة S.O.R.

الحل:

لنحسب الآن $\rho(B_J)$:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

ومنه

$$B_J=D^{-1}\left(L+U\right)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

$$B_J-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\left(B_J-\lambda I\right)=\lambda^2-\frac{1}{9}=0\Rightarrow\lambda=\mp\frac{1}{3}$$

$$\rho\left(B_J\right)=\frac{1}{3}<1$$

إذن طريقة جاكوبي متقاربة.

نعوض في العلاقة

$$\omega_{Opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho\left(B_J\right)\right)^2}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{9}}}\approx 1.02944$$

تمارين

1- أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 10 \\ 3x + 2y + 3z &= 18 \\ 1x + 4y + 9z &= 16 \end{aligned}$$

a) غاوس المحسنة.

b) غاوس جوردان.

c) المرتكز الجزئي الدرجي.

2- أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 10 \\ 2x + 3y + 2z &= 14 \\ 1x + 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

a) كراوت.

b) دوليتل.

c) المرتكز الجزئي الدرجي.

3- أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 0.729x + 0.81y + 0.9z &= 0.6867 \\ x + y + z &= 0.8338 \\ 1.331x + 1.21y + 1.1z &= 1.000 \end{aligned}$$

a) المرتكز الجزئي.

b) المرتكز الجزئي الدرجي.

علماً أن التدوير لأربعة أرقام، و أن الحل الفعلي هو

$$(0.2245, 0.2814, 0.3279)$$

4- أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x + 8y + 22z &= 6 \\ 3x + 22y + 82z &= -10 \end{aligned}$$

a) كراوت.

b) دوليتل.

c) تشولسكي (تحقق من الشروط).

5- أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 14z &= 14 \\ 2x + 17y - 5z &= -101 \\ 14x - 5y + 83z &= 155 \end{aligned}$$

a) كراوت.

b) دوليتل.

c) تشولسكي (تحقق من الشروط).

6- أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 2x + 1y + 1z &= 5 \\ 3x + 5y + 2z &= 15 \\ 2x + y + 4z &= 8 \end{aligned}$$

حيث نقطة البدء $(0,0,0)$ وبتكرار 6 مرات.

a) جاكوبي.

b) غاوس–سيدل.

c) طريقة $(S.O.R)$ من أجل $W = 1.2$ و $W = 0.6$.

7- بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\left|\begin{array}{rcl} 5x+7y &=& 0.7 \\ 7x+10y &=& 1 \end{array}\right.$$ حيث الحل الفعلي $(0,0.1)$.

فإذا قمنا ببعض الارتياب فحصلنا على الجملة التالية:

$$\left|\begin{array}{rcl} 5\tilde{x}+7\tilde{y} &=& 0.69 \\ 7\tilde{x}+10\tilde{y} &=& 1.01 \end{array}\right.$$ الحل التقريبي $(-0.17,0.22)$.

a) أوجد العدد الشرطي.

b) أوجد الخطأ المطلق و النسبي الفعلي.

c) أوجد الخطأ المطلق و النسبي المرتكب.

8- أوجد جميع قيم α,β التي تكون من أجلها:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) A شاذة.

b) A مسيطرة قطرياً تماماً.

c) A متناظرة.

d) A معرفة ايجابياً.

9- أثبت أنّ المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

معرفة إيجابياً.

10-لتكن لدينا المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

a) اوجد نصف القطر الطيفي.

b) أوجد أقراص جيشغورين.

c) هل يمكن تطبيق الطرائق التكرارية؟

d) بفرض $B=\frac{1}{3}A$ ، أدرس تقارب B .

11-بفرض

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

أثبت أن $\rho(A)\le\|A\|_\infty$

12-لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}4x_1+3x_2 &= 2\\ 3x_1+4x_2-x_3 &= -6\\ -x_2+4x_3 &= 1\end{aligned}$$

والمطلوب:

e) ادرس التقارب بطريقة جاكوبي.

f) أوجد ω_{Opt} في طريقة S.O.R.

الفصل الثالث

الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية

Numerical Solution of Ordinary Differential Equations

يمكن وصف العديد من الظواهر الفيزيائية باستخدام المعادلات التفاضلية، وهذا ما يعطي دراسة هذه المعادلات أهمية في الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية، هذا وقد برز في مجال دراسة المعادلات التفاضلية العادية أسماء العلماء مثل Cauchy و Poincare و Hilbert، وما تزال الدراسة مستمرة حتى اليوم.

من أهم الموضوعات المدروسة في هذا المجال:

- وجود ووحدانية الحلول المحققة لشروط معينة.
- خصائص الحلول.
- مبرهنة الاستقرار (تأثير التغيرات الصغيرة على الحل).
- مسائل القيمة الحدية، التوابع المتعامدة، والمبرهنة الطيفية.

وهناك نوعان من المعادلات التفاضلية:

1. المعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential Equations(ODE)
2. المعادلات التفاضلية الجزئية Partial Differential Equations(PDE)

فالمعادلة التفاضلية العادية تحتوي على متغير مستقل واحد أما المعادلة التفاضلية الجزئية فتحتوي على عدد من المتغيرات المستقلة (فمثلاً، تعتمد معادلة درجة الحرارة $u(x,t)$ على الموضع x والزمن t).

نرمز للمعادلة التفاضلية العادية بالرمز $\frac{dy}{dx}$ أو y' أو $y^{(1)}$ ويكون لحلها الصيغة:

$$y = g(x, c_1, c_2, ..., c_n)$$

حيث C_n عبارة عن ثوابت، ويشتمل هذا النوع من المعادلات التفاضلية على:

1) مسائل القيم الابتدائية Initial Value Problem:

يكون للمعادلة التفاضلية في هذا النوع من المسائل شرط ابتدائي **(initial Condition)** للمتغيرات، ويمثل هذا الشرط الابتدائي النقطة الابتدائية التي يمر بها التابع التي تمثل حلّ المعادلة التفاضلية.

2) مسائل القيم الحدية Boundary Value Problem :

أما في هذا النوع من المسائل فيكون للمعادلة التفاضلية شرط ابتدائي وشرط آخر معين عند نهاية المجال للمتغير المستقل، ويمثل هذان الشرطان نقطتان يجب أن يمر التابع بهما التي تمثل حل المعادلة التفاضلية.

نتناول في هذا الجزء بعض الطرائق العددية المستخدمة في حل المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى ذات الصيغة:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

والمزوّدة بالشرط الابتدائي: $y(x_0) = y_0$

تعتمد الطرائق العددية على معرفة قيمة المتغير y في لحظة البدء x_0 ثم ننطلق من هذه النقطة خطوة بخطوة فنحسب y_1 من أجل $x_0 + h$ و y_2 من أجل $x_1 + 2h$ حيث $h = \frac{b-a}{M}$.

1- مبرهنة بيكارد لوجود ووحدانية الحلول(1) :

(Picard's Theorem: Existence and Uniqueness of Solution):

تُعد هذه المبرهنة هي المبرهنة الأساسية في حل مسائل القيم الابتدائية.

ليكن $f(x,y)$ تابعاً مستمراً على D حيث إن:

$$D = \{(x,y) : x \in [x_0, x_{final}], y \in [y_0 - h, y_0 + h]\} \quad \text{و} \quad h > 0$$

و لنفرض أن :

1. $|f(x,y_0)| \le K$ وذلك $\forall x \in [x_0, x_{final}]$ و $K > 0$

2. يحقق التابع شرط ليبتشز أي يوجد ثابت $L>0$ يحقق :

$$\left|f(x,u)-f(x,v)\right|\le L|u-v|$$

وذلك $\forall u,v\in[y_0-h,y_0+h],\ \forall x\in\left[x_0,x_{final}\right]$

3. $h\ge\dfrac{K}{L}\left(e^{L\left(x_0,x_{final}\right)}-1\right)$

عندئذ يوجد حل وحيد $y\in C^1\left[x_0,x_{final}\right]$ يحقق $y(x_0)=y_0$ و $y'(x)=f(x,y)$ وذلك $\forall x\in\left[x_0,x_{final}\right]$.

بشكل مبسط تنص مبرهنة بيكارد أنه ضمن الفرضيات السابقة يوجد حل ضمن المنطقة D . وهذا الحل الوحيد في $C^1\left[x_0,x_{final}\right]$ الذي يحقق مسألة القيمة الابتدائية .

مثال(1):

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية:

$$y'(t)=1+x\sin(xy)\quad ;\qquad 0\le x\le 2\qquad y(0)=0$$

عندئذ بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى $\zeta\in[y_1,y_2]$ نجد:

$$\frac{f(x,y_2)-f(x,y_1)}{y_2-y_1}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,\zeta)=x^2\cos(x\zeta)$$

نستنتج:

$$\left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|=|y_2-y_1|\left|x^2\cos(x\zeta)\right|\le 4|y_2-y_1|$$

أي إنّ f يحقق الشروط السابقة ومسألة القيمة الابتدائية لها حل وحيد، حيث $-\infty<y<\infty$ و $0\le x\le 2$.

تعريف(1):

نقول عن مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(x)=f(x,y)\quad ;\qquad a\le x\le b\qquad y(a)=\alpha$$

إنها موضوعة جيداً (أو جيدة الطرح) إذا تحققت الشروط التالية:

1. للمسألة حل وحيد.
2. من أجل أي عدد موجب ε يوجد ثابت موجب آخر $k(\varepsilon)$ بحيث إنّه إذا كان $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ و $\delta(t)$ تابع مستمر على $[a,b]$ يحقق $|\delta(x)| < \varepsilon$ على المجال $[a,b]$، يوجد حل وحيد $z(x)$ للمسألة:

$$z(a) = \alpha + \varepsilon_0$$

$$z'(x) = f(x,y) + \delta(x) \qquad a \le x \le b$$

بحيث يُحقق:

$$|z(x) - y(x)| < k(\varepsilon)\varepsilon$$

ندعو المسألة الواردة في الشرط الثاني من المبرهنة السابقة بالمسألة القلقة perturbed problem، وتفترض إمكانية وجود خطأ $\delta(x)$ في تقديم عبارة المعادلة التفاضلية، مقابل خطأ ε_0 في الشرط الابتدائي.

تهتم الطرائق العددية دائما بحل المعادلة القلقة،لأن أي خطأ يدخل في التمثيل يؤدي إلى مسألة من هذا الطراز، وفي حال كون المعادلة موضوعة جيداً فإن الحل العددي للمعادلة القلقة سوف يكون قريباً جداً من حل المعادلة الأصلية، والمبرهنة التالية توضح هذا الأمر:

مبرهنة(2) :

لتكن المجموعة D المعرفة بالشكل:

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in]-\infty, +\infty[\}$$

فإذا كان f مستمراً على D ويحقق شرط ليبتشز بالمتغير y ،عندها تكون مسألة القيمة الابتدائية (1) موضوعة جيداً.

مثال(2):

بفرض المجموعة D هي:

$$D = \{(x,y) \ : \ x \in [0,1] \ , \ y \in]-\infty, +\infty[\}$$

ولنأخذ مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$y'(x)=y-x^2-1\,;\qquad 0\le x\le 2\qquad ,\ y(0)=0.5$$

لدينا:

$$\left|\frac{\partial\left(y-x^2-1\right)}{\partial y}\right|\le|1|=1$$

نستنتج أن التابع يحقق شرط ليبتشزعلى D، وبما أنه مستمر على المجموعة D، فإن المسألة موضوعة جيدا.

والمسألة المرافقة لها هي:

$$z'(x)=z-x^2-1+\delta\,;\qquad 0\le x\le 2\ ,\ z(0)=0.5+\varepsilon_0$$

حيث δ و ε_0 ثابتان

لكن الحل الفعلي للمسالة هو:

$$y(x)=(x+1)^2-0.5e^x$$

أما المسألة القلقة فحلّها:

$$z(x)=(x+1)^2+(\delta+\varepsilon_0-0.5)e^x-\delta$$

ويمكننا التحقق أنه إذا كان $|\delta|<\varepsilon$ و $|\varepsilon_0|<\varepsilon$ فإن:

$$\begin{aligned}|z(x)-y(x)|&=\left|(\delta+\varepsilon_0-0.5)e^x-\delta\right|\\&\le|\delta+\varepsilon_0|e^2+|\delta|\\&\le\left(2e^2+1\right)\varepsilon\end{aligned}$$

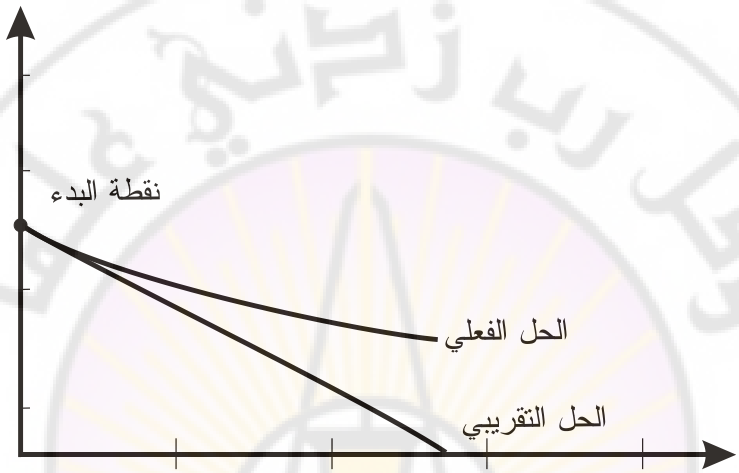
وهذا يتوافق مع معطيات المبرهنة السابقة.

2- الطرائق ذات الخطوة الواحدة:

سنستعرض في البداية طريقتين ابتدائيتين لإعطاء القارئ فكرة عن الموضوع المدروس، ومن ثم ننتقل إلى طرائق أخرى أكثر دقة وفاعلية.

1-2 طريقة أولر:

هدف هذه الطريقة هو إيجاد تقريب لمسألة قيمة ابتدائية موضوعة جيداً، وقد سميت باسم ليونارد أولر الذي وضعها عام 1768.



الشكل 1

في البداية يتم توليد نقاط تُدعى نقاط الشبكة، في المجال $[a,b]$. نشترط هنا أن تكون النقاط موزعة بالتساوي ويتحقق هذا الشرط باختيار عدد صحيح موجب M و اختيار النقاط $\{x_0,x_1,...,x_M\}$ بحيث يكون $x_i=a+ih$، ويدعى البعد بين كل نقطتين متجاورتين $h=\frac{b-a}{M}$ حجم الخطوة، ثم نقرب $y(x)$ عند هذه النقاط ، و ينتج عندئذ تقريبات من الشكل $y(x_i)\ ;\ i=0,1,...,M$.

سنستخدم مبرهنة تايلور بجوار $x+h$

$$y(x+h)=y(x)+hy'(x)+\frac{h^2}{2!}y''(x)+...+\frac{h^n}{n!}y^{(n)}$$

وبحذف الحدود اعتباراً من الحد $\frac{h^2}{2!}y''(x)$ ينتج أن:

$$y(x+h)=y(x)+hy'(x)=y(x)+hf(x,y)$$

نبدأ بالنقطة (x_0,y_0)، فنجد بالتعويض في العلاقة أعلاه أن:

$$y_1 = y(x_0 + h)$$
$$= y(x_0) + hy'(x_0)$$
$$y_2 = y(x_0 + 2h)$$
$$= y(x_0) + 2hy'(x_0)$$
$$\vdots$$
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad n = 0,1,2,3,...,M-1$$

أي إنّ الصيغة العامة لقانون أولر هي:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{2}$$

حيث $x_n = x_0 + nh \quad n = 0,1,2,3,...,M-1$

مثال(3):

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = x + y$ حيث $y(0) = 0$، و بفرض $h = 0.2$ في المجال $[0,1]$.

الحل:

باستخدام العلاقة(2) وبالاستفادة من الشرط $y(0) = 0$ نجد أن:

$$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \qquad x_n = x_0 + nh = nh$$

$$y_1 = y_0 + 0.2(x_0 + y_0) = 0$$
$$y_2 = y_1 + 0.2(x_1 + y_1) = 0 + 0.2(0.2 + 0) = 0.4$$
$$y_3 = y_2 + 0.2(x_2 + y_2) = 0.4 + 0.2(0.4 + 0.04) = 0.128$$
$$y_4 = y_3 + 0.2(x_3 + y_3) = 0.128 + 0.2(0.6 + 0.128) = 0.274$$
$$y_5 = y_4 + 0.2(x_4 + y_4) = 0.48 + 0.2(0.8 + 0.489) = 1.747$$

n	$x_n = 0.2n$	$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$
0	0	0
1	0.2	0.04
2	0.4	0.128
3	0.6	0.271
4	0.8	0.489
5	1	1.747

جدول 1

مثال(4):

أوجد الحل التقريبي لمسالة الشرط الابتدائي:

$$y' = -y + x + 1 \quad ; \; 0 \le x \le 1 \quad , \quad y(0) = 1$$

ثم قارنه بالحل الفعلي: $y = x + e^{-x}$.

(نقصد بالمقارنة الخطأ المطلق ويمثل القيمة المطلقة للفرق بين الحل الفعلي والحل التقريبي) أي $E = |y_{n+1} - z_{n+1}|$

الحل:

$$x_n = x_0 + nh \quad , \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(-y_n + x_n + 1)$$

$$y_1 = y_1 + 0.1(-y_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1$$

$$y_2 = y_1 + 0.1(-y_1 + x_1 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$$

وهكذا نحصل على القيم التقريبية الموضحة في الجدول أدناه.

n	x_n	$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.029
3	0.3	1.016100
4	0.4	1.90490
5	0.5	1.131441
6	0.6	1.78297
7	0.7	1.230467
8	0.8	1.287420
9	0.9	1.348578

جدول 2

وللمقارنة بين الحل التقريبي والحل الفعلي نوجد قيم الحل الفعلي عند النقاط x_n :

$$z_{n+1} = x_n + e^{(-x_n)}$$

$$z_1 = x_0 + e^{x_0} = 0 + e^0 = 1$$

$$z_2 = x_1 + e^{x_1} = 0.1 + e^{-0.1} = 1.04837$$

$$z_3 = x_2 + e^{x_2} = 0.2 + e^{(-0.2)} = 1.018731$$

$$z_4 = x_3 + e^{-x_3} = 0.3 + e^{(-0.3)} = 10.40818$$

وهكذا نحصل على جدول المقارنة التالي:

n	y_{n+1}	z_{n+1}	$Error = \lvert y_{n+1} - z_{n+1} \rvert$
0	1	1	0.00000
1	1.01	1.04837	0.03837
2	1.029	1.048731	0.0217631
3	1.016100	1.040818	0.024718
4	1.90490	1.070320	0.16542
5	1.131441	1.06531	0.066131
6	1.78297	1.148812	0.634158
7	1.230467	1.196585	0.033883
8	1.287420	1.249329	0.038091
9	1.348578	1.306570	0.042008

جدول 3

مبرهنة(3) :

بفرض أن f تابع مستمر ويحقق شرط ليبتشز بالمتغير y والثابت L على المجموعة D

$$D = \{(x, y) | a \le x \le b, -\infty < y < \infty\}$$

و M ثابت يحقق:

$$|y''(x)| \le M \quad ; \qquad \forall x \in [a, b]$$

وبفرض أن $y(x)$ يرمز لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(x) = f(x, y) \; ; \qquad a \le x \le b \, , \qquad y(a) = \alpha$$

و $i = 0,1,2,...,M-1$ $w_i \approx y(t_i)$ هي التقريبات المولدة بطرائق أولر لـ n من النقاط. عندئذ تحقق القيمة المطلقة للخطأ المتراجحة التالية:

$$\left|y(x_i)-w_i\right| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(x_i-a)}-1\right] \qquad (3)$$

تبين المبرهنة السابقة أن هناك علاقة خطية بين طول الخطوة h والقيمة الحدية للخطأ، ونلاحظ أن تصغير طول الخطوة يعطينا دقة أكبر للتقريبات التي نريد الحصول عليها.

ملاحظة:

موطن الضعف في المبرهنة يقع في ضرورة معرفة المشتق الثاني للحل. رغم كون هذا الشرط يمنعنا من إيجاد حد واقعي للخطأ، فيجب الإشارة إلى أن كُلاً من $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود. لذا:

$$y''(x)=\frac{dy'}{dx}(x)=\frac{df}{dx}\left(x,y(x)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y(x)\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y(x)\right).f\left(x,y(x)\right)$$

إذا من الممكن أحياناً إيجاد الخطأ في $y''(x)$ دون معرفة $y(x)$ بصورة صريحة.

تم إهمال أثر أخطاء التدوير في نتيجة المبرهنة (3) لحساب القيمة الحدية للخطأ التي تتأثر بمقدار الخطوة h، حيث إنه كلما صغرنا مقدار الخطوة فإننا سوف نضطر لإجراء حسابات أخرى وهذا يؤدي بدوره إلى ظهور أخطاء إضافية، ويمكن في هذه الحالة الاستفادة من صيغة المعادلة المميزة:

$$w_0=\alpha$$

$$w_{i+1}=w_i+hf\left(x_i,w_i\right) \qquad i=0,1,2,\ldots,M-1$$

إذ نستخدم عوضاً عنها المعادلة:

$$y_0=\alpha+\delta_0$$

$$y_{i+1}=y_i+hf\left(x_i,y_i\right)+\delta_{i+1} \qquad i=0,1,2,\ldots,M-1$$

حيث ترمز δ_i إلى أخطاء التدوير المرتبطة بالتقريب y_i.

مبرهنة(4) :

ليكن $y(x)$ حلاً وحيداً لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(x)=f(x,y) \qquad a\le x\le b \qquad y(a)=\alpha$$

و $u_0,u_1,\ldots,u_n$ هي القيم التقريبية للحل الناتجة عن استخدام الطرائق السابقة:

$$u_0=\alpha+\delta_0$$

$$y_{i+1}=y_i+hf\left(x_i,y_i\right)+\delta_{i+1} \qquad i=0,1,2,\ldots,M-1$$

فإذا كانت $(|\delta_i|<\delta)\ \forall i=0,1,2,\ldots,M$، وتحققت أيضاً فرضيات مبرهنة الخطأ الحدي. (أي إنّ f مستمر ويحقق شرط ليبتشز على D بثابت L ويوجد حد أعلى للقيمة المطلقة للمشتق الثاني لـ y). فإن:

$$|y(x_i)-y_i|\le\frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(x_i-a)}-1\right]+|\delta_0|e^{L(x_i-a)} \qquad (4)$$

نلاحظ أنّ الخطأ هنا غير مرتبط خطياً بمقدار الخطوة h وذلك لأن:

$$\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)\xrightarrow{h\to0}\infty$$

ويُتوقع أن يصبح الخطأ أكبر من أجل قيم لـ h صغيرة بشكل كاف، ويمكن إجراء بعض الحسابات لإيجاد حد أدنى لمقدار الخطوة h، وذلك بوضع:

$$E(h)=\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right) \qquad (5)$$

$$\Rightarrow E'(h)=\left(\frac{M}{2}+\frac{\delta}{h^2}\right)$$

وعندئذ نجد:

إذا كان $h<\sqrt{2\delta/M}$ ، فإن $E'(h)<0$ وعليه فإن $E(h)$ يتناقص، مع ملاحظة $|E(h)|$ متزايدة .

وإذا كان $h>\sqrt{2\delta/M}$ ، فإن $E'(h)>0$ وعليه فإن $E(h)$ يتزايد.

أما القيمة الدنيا لخطأ الخطوة فهي من أجل h التالية:

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}} \qquad (6)$$

ويؤدي تناقص h إلى أقل من هذه القيمة زيادة في الخطأ الكلي في التقريب، لقد جرت العادة أن تكون قيمة δ صغيرة بقدر كافٍ بحيث لا يؤثر هذا الحد الأدنى لـ h في عمليات طرائق أولر.

2-2 طريقة سلسلة تايلور Taylor series method:

لما كان غرض الأساليب العددية هو إيجاد تقريبات بدقة كافية وبأقل جهد ممكن، فإننا نحتاج إلى وسيلة لمقارنة فعاليات مختلف طرائق التقريب. المعيار الأول الذي ندرسه يُدعى خطأ القطع المحلي للطريقة.

تعريف(2):

يُعطى **خطأ القطع الموضعي** (Local truncation) في كل خطوة لمعادلة الفروق التالية:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(x_i, w_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots,M-1$$

بالعلاقة:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - \left(y_i + h\phi(x_i, y_i)\right)}{h}$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(x_i, y_i)$$

فمن أجل طريقة أولر نجد أن علاقة القطع الموضعي عند الخطوة i تعطى بالعلاقة:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) \qquad ,i = 0,1,2,\ldots,M-1$$

$$= \frac{1}{h}\left(y(t_{i+1}) - w_{i+1}\right)$$

ويدعى هذا الخطأ بالخطأ الموضعي لأنه يقيس دقة الطريقة عند خطوة محددة ، وذلك بفرض أن الطريقة كانت صحيحة عند الخطوة السابقة، وهو مرتبط بالمعادلة

التفاضلية وبمقدار الخطوة في التقريب.

و نلاحظ أن :

$$\tau_{i+1}(h)=\frac{h}{2}y''(\zeta_i) \text{ حيث } \zeta_i\in[x_i,x_{i+1}]$$

بما أن المشتق الثاني محدود من الأعلى بثابت K على مجال قيم x ينتج:

$$\left|\tau_{i+1}(h)\right|\le\frac{h}{2}K \qquad (7)$$

ومنه فإنّ خطأ القطع الموضعي لطريقة أولر تابع لـ h ونعبر عنه $O(h)$ وترمز قوى h لمرتبة الخطأ.

لنفترض أن $y(x)$ قابلة للمفاضلة حتى المرتبة $(n+1)$، بتطبيق مبرهنة تايلور بجوار x_{n+1} :

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\ldots+\frac{h^n}{(n)!}y^{(n)}(\zeta,y(\zeta_i))$$

حيث $\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$.

لكن:

$$y'(x)=f\left(x,y(x)\right),y''(x)=f'\left(x,y(x)\right),\ldots,y^{(M)}(x)=f^{(M-1)}\left(x,y(x)\right)$$

بالتعويض نجد:

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_n,y_n)+\ldots+\frac{h^M}{(M)!}f^{(M-1)}(\zeta,y(\zeta_i)) \qquad (8)$$

وتدعى هذه الطريقة طريقة تايلور من المرتبة M.

تستخدم طريقة تايلور من مراتب مختلفة في الحالات التي يمكن الحصول فيها على تفاضل التابع رياضياً، وتمتاز هذه الطريقة على بعض الطرائق الأخرى بأنها لا تتأثر بخطأ التدوير مثلما تتأثر الفروق المستخدمة في الطرائق المذكورة ويمكن استخدام قيمة h كبيرة نوعاً ما.

ويمكن كتابة العلاقة (8) بالشكل :

$$y_{n+1} = y_n + hT^{(n)}(x_n, y_n) \;\; ; \;\; n = 0,1,2,...,M-1 \qquad (9)$$

حيث:

$$T^{(n)}(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + ... + \frac{h^{(n-1)}}{(n)!} f^{(n-1)}(x_n, y_n)$$

مثال (5):

أوجد الحل التقريبي لمسالة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + x + 1 \;\; ; 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1$$

باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الثانية والمرتبة الرابعة.

الحل:

أولاً: باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الثانية:

$$y_{n+1} = y_n + hT^{2}(x_n, y_n)$$

$$T^{2}(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1$$

$$f'(x_n, y_n) = -y_n' + 1 = y_n - x_n$$

$$T^{(2)}(x, y) = -y_n + x_n + 1 + \frac{h}{2}(y_n - x_n) = (1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1$$

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1] \quad ; \quad n = 0,1,2,....., M-1$$

$$y_1 = y_0 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(x_n - y_n) + 1]$$

$$= 0 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(0 - 1)] = 1.00500$$

$$y_2 = y_1 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(x_1 - y_1) + 1]$$

$$= 1.00500 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(0.1 - 1.00500) + 1] = 1.019025$$

وهكذا نحصل على بقية القيم حتى قيمة y_9 والجدول 4 يوضح القيم المحسوبة

ثانياً: باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الرابعة:

$$y_{n+1} = y_n + hT^4(x_n, y_n))$$

حيث:

$$T^4(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!} f'''(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n - x_n + 1$$

$$f'(x_n, y_n) = -y_n' + 1 = y_n - x_n - 1 + 1 = y_n - x_n$$

$$f''(x_n, y_n) = -y_n + x_n$$

$$f'''(x_n, y_n) = y_n - x_n$$

وبالتعويض في العلاقة:

$$T^4(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!} f'''(x_n, y_n)$$

نجد أن:

$$T^4(x_n, y_n) = 1 + (1 - \frac{h^3}{24} + \frac{h^2}{6} - \frac{h}{2})(x_n - y_n)$$

وبالتعويض في سلسلة تايلور نجد أن:

$$y_{n+1} = y_n + h[1 + (1 - \frac{h^3}{24} + \frac{h^2}{6} - \frac{h}{2})(x_n - y_n)])$$

ملاحظة :

يمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة n, y_n بالشكل التالي :

إذا كان $n = 10$ فإن $h = 0.1$ و $x_n = nh$ بالنسبة لسلسة تايلور من المرتبة الثانية:

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1]$$

$$= y_n + 0.1\,[0.95(0.1\,n - y_n) + 1]$$

$$y_{n+1} = 0.905 y_n + 0.0095n + 0.1$$

وبالنسبة لصيغة تايلور من المرتبة الرابعة تصبح:

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \frac{h^3}{24} + \frac{h^2}{6} - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1]$$

$$= y_n + 0.1[(1 - \frac{0.01}{24} + \frac{0.01}{6} - \frac{0.1}{2})(0.1n - y_n) + 1]$$

$$y_{n+1} = 0.9048375y_n + 0.00951625n + 0.1$$

من أجل: $n = 0,1,2,3,.....,9$

والجدول 4 يمثل القيم المحسوبة في حالة سلسلة تايلور من المرتبة الثانية والرابعة:

x_n	Taylor method of order 2	Taylor method of order 4
0.0	0.00000	1.00000
0.1	1.00500	1.0048375
0.2	1.09025	1.0187309014
0.3	1.041218	1.0408184220
0.4	1.070802	1.0703202889
0.5	1.107076	1.1005309344
0.6	1.149404	1.488119344
0.7	.....	.....
0.8	.....	.....
0.9	.....	.....

جدول 4

ملاحظة:

يمكن اعتبار طريقة أولر على أنها طريقة تايلور من المرتبة الأولى. و كلما كانت درجة حدودية تايلور أكبر (أي من رتب أعلى كالمرتبة الخامسة أوالسادسة أو.....) كانت درجة الدقة أكبر.

مثال(6):

استخدم طريقة تايلور من المرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{(x-y)}{2} \; ; \; y(0) = 1 \; , 0 \le x \le 3$$

ومن أجل $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ، ثم قارن النتيجة بالحل الفعلي $y = 3e^{-x/2} - 2 + x$.

الحل:

يُعطى قانون سلسلة تايلور من المرتبة الرابعة بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + hT^4(x_n, y_n)$$

حيث: $T^4(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!} f'''(x_n, y_n)$

ومنه:

$$f(x_n, y_n) = \frac{(x - y)}{2}$$

$$f'(x_n, y_n) = \frac{1 - y'}{2} = \frac{(1 - (x - y)/2)}{2} = \frac{2 - x + y}{4}$$

$$f''(x_n, y_n) = \frac{0 - 1 + y'}{4} = \frac{-1 + (x - y)/2}{4} = \frac{-2 + x - y}{8}$$

$$f'''(x_n, y_n) = \frac{-0 + 1 - y'}{8} = \frac{1 - (x - y)/2}{8} = \frac{2 - x + y}{16}$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{(0.0 - 1.0)}{2} = -0.5$$

$$f'(x_n, y_n) = \frac{2.0 - 0.0 + 1.0}{2} = 0.75$$

$$f''(x_n, y_n) = \frac{-2.0 + 0.0 + 1.0}{8} = -0.375$$

$$f'''(x_n, y_n) = \frac{2 - 0.0 + 1.0}{16} = 0.1875$$

وبالتعويض نحصل على:

$$y_1 = 1.0 + 0.25(-0.5 + 0.25(\frac{0.75}{2} + 0.25(\frac{-0.3575}{6} + 0.5\frac{0.1875}{24}))) = 0.8974915$$

ولإيجاد y_2 عند النقطة $(x_1, y_1) = (0.25, 0.897495)$ ، نقوم بحساب ما يلي:

$$f(0.25,0.8974915) = \frac{0.25 - 0.8974915}{2} = -0.3237458$$

$$f'(0.25,0.8974915) = \frac{2 - 0.25 + 0.8974915}{4} = 0.6618729$$

$$f''(0.25,0.8974915) = \frac{-2.0 + 0.25 - 0.8974915}{8} = 0.3309364$$

$$f'''(0.25,0.8974915) = \frac{(2.0 - 0.25 + 0.8974915)}{16} = 01654682$$

وبالتعويض نحصل على:

$$y_2 = 0.8974915 + 0.25(-0.3237458 + 0.25(\frac{0.6618729}{2} + 0.25(\frac{0.1654682}{24})))$$

$$= 0.8364037$$

وهكذا نحصل على بقية القيم والجدول أدناه يوضح القيم المحسوبة عند قيم h المطلوبة:

x_n	y_{n+1}				z_{n+1}
	$h=1$	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8620874
0.50		0.8364258	0.83644037	0.8364024	0.8364023
0.75			0.8118696	0.8118679	0.8118678
1.00	0.8203125	0.8196285	0.8195940	0.8195921	0.8195920
1.50		1.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	1.1036383
2.50		1.3595575	1.3595168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1.6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

جدول 5

3-2 طرائق رانج – كوتا (Runge-Kutta Methods):

تحتاج طريقة أولر إلى خطوة صغيرة (قيمة h يجب أن تكون صغيرة) للحصول على دقة معقولة لذا فإنها لا تستخدم كثيراً في التطبيقات العملية، كذلك فإن طريقة تايلور من المراتب العليا غير مرغوبة كأسلوب عام لحل المعادلات التفاضلية لأنها تتطلب إجراء حسابات كثيرة لإيجاد قيم التابع $f(x,y)$ ومشتقاته، مما يجعلها معقدة ومكلفة زمنياً بالنسبة لكثير من المسائل، أما طرائق رانج – كوتا فتُعد من أهم الطرائق المستخدمة في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية فهي تمكننا من الحصول على دقة عالية مع تجنب الحاجة إلى اشتقاق التابع $y(x)$.

إن الشكل العام للحل التقريبي بطرائق رانج – كوتا هو $y_{i+1} = y_i + \phi h$ حيث ϕ هي مقدار الزيادة أو الميل، ونلاحظ أن $\phi = \phi(x_i, y_i, h)$ ويمكن أن يعبر عنها بالشكل $\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_nk_n$، إذ تمثل عبارة الميل في هذه الحالة المعدل الموزون للميول المقدرة.

4-2 طريقة نقطة المنتصف (Midpoint Method):

يمكن أن ندعوها رانج–كوتا من المرتبة الثانية، يتم إيجاد قيم التقريب بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h \quad ; \ i = 0,1,2,...,n-1 \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \end{aligned} \tag{10}$$

و

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

يوجد أربعة وسطاء ممثلين بالعبارة p_1 , a_2 , a_1 و q_{11} ولدينا:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!}f'(x_i, y_i)h^2$$

نعوض في المعادلة (10) فنجد:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

وبهذا لدينا ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل ، نختار قيمة لأحد المجاهيل ولتكن a_2 ونوجد القيم الأخرى بدلالتها فنجد أن:

$$a_1 = 1 - a_2 \qquad p_1 = \frac{1}{2a_2} \text{ و} \qquad q_{11} = \frac{1}{2a_2} \text{ و}$$

إن خطأ القطع المحلي لطريقة نقطة المنتصف من المرتبة $O(h^2)$ (يُمكن استنتاج ذلك من سلسلة تايلور)

5-2 طريقة أولر المعدلة (Modified Euler's Method):

نحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف بوضع: $a_2 = 1$

وفي هذه الحالة يكون:

$$a_1 = 0 \text{ ، } p_1 = \frac{1}{2} \text{ ، } q_{11} = \frac{1}{2}$$

نعوض فنجد $y_{i+1} = y_i + k_2 h$ (11)

حيث $k_1 = f(x_i, y_i)$ و $k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$

6-2 طريقة هين (Heun's Method):

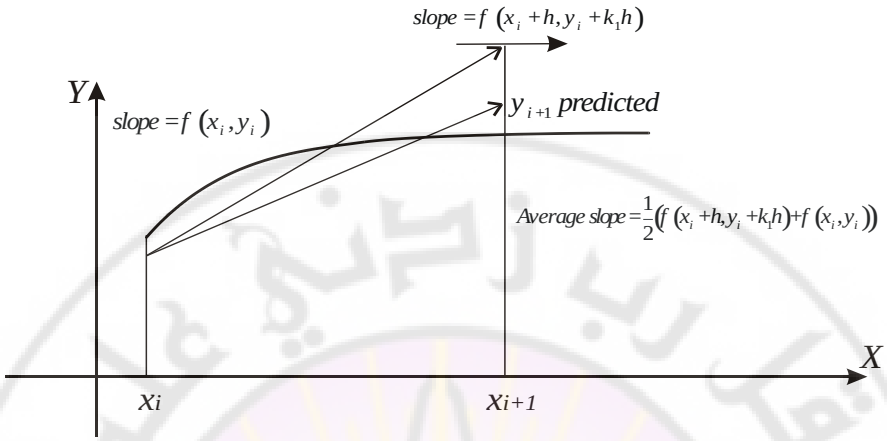
نحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف بوضع: $a_2 = \frac{1}{2}$

وبهذا يكون لدينا: $a_1 = \frac{1}{2}$ ، $p_1 = 1$ ، $q_{11} = 1$

وعليه $y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$ (12)

حيث $k_1 = f(x_i, y_i)$ و $k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$

ويمكن توضيح هذه الطريقة من خلال الشكل التالي:



الشكل 2

مثال (7):

باستخدام طريقة هين أوجد الحل التقريبي لمسالة الشرط الابتدائي:

$$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \qquad h = 0.1$$

الحل:

تعطى معادلات هين بالشكل:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

بتطبيق طريقة هين حيث $f(x,y) = -y + x + 1$ نحصل على القيم المبينة في الجدول التالي:

x_n	y_{n+1}
0	1.00000
0.1	1.005
0.2	1.019025
0.3	1.041217625
0.4	1.070801951
0.5	1.107075765
0.6	1.149403568
0.7	1.197210229
0.8	1.249975257

x_n	y_{n+1}
0.9	1.307227608

جدول6

7-2 طريقة رالستون (Ralston's Method)

نحصل عليها بوضع: $a_2 = \frac{2}{3}$ في طريقة نقطة المنتصف، وعندئذ ينتج: $a_1 = \frac{1}{3}$ ، $p_1 = \frac{3}{4}$ ، $q_{11} = \frac{3}{4}$ ، وبذلك يكون:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h \qquad (13)$$

حيث $k_1 = f(x_i, y_i)$ و $k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$

مثال(8):

باستخدام طريقة رالستون أوجد الحل التقريبي لمسالة القيمة الابتدائية:

$$y' = \frac{(x - y)}{2}; 0 \le x \le 1 \; ; y(0) = 1 \; ; h = 0.1$$

الحل:

انطلاقاً من معادلة رالستون (13) نحصل على القيم التقريبية لحل المعادلة التفاضلية المبينة في الجدول التالي:

x_n	y_{n+1}
0	1.00000
0.1	0.95375
0.2	0.914629688
0.3	0.88229149
0.4	0.85640478
0.5	0.836655047
0.6	0.822743114
0.7	0.814384387
0.8	0.811308148
0.9	0.813256876

جدول7

8-2 طريقة رانج – كوتا من المرتبة الثالثة:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (14)$$

حيث

$$k_1 = f\ (x_i, y_i),\ \ k_2 = f\ (x_i + 0.5h, y_i + 0.5hk_1)$$
$$k_3 = f\ (x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

9-2 طريقة رانج–كوتا من المرتبة الرابعة(Rung–Kutta Order Four):

عموماً لا تستخدم طريقة رانج – كوتا من المرتبة الثالثة، إنما الاستخدام الشائع لها بأن تكون من المرتبة الرابعة، وتُعطى معادلتها كالتالي:

$$y_0 = \alpha$$
$$k_1 = hf\ (x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\ (x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15)$$

الإثبات :

نكتب الشكل العام :

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4$$

حيث :

$$
\begin{aligned}
&y_0 = \alpha,\\
&k_1 = hf\ (x_i, y_i),\\
&k_2 = hf\ (x_i + a_1 h, y_i + b_1 k_1),\\
&k_3 = hf\ (x_i + a_2 h, y_i + b_2 k_1 + b_3 k_2),\\
&k_4 = hf\ (x_i + a_3 h, y_i + b_4 k_1 + b_5 k_2 + b_6 k_3).
\end{aligned}
$$

باستخدام نشر تايلور لـ k_1, k_2, k_3, k_4 للمرتبة $N = 4$، نجد جملة المعادلات التالية:

$$
\begin{aligned}
&b_1 = a_1,\\
&b_2 + b_3 = a_2,\\
&b_4 + b_5 + b_6 = a_3,\\
&w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1,\\
&w_2 a_1 + w_3 a_2 + w_4 a_3 = \frac{1}{2},\\
&w_2 a_1^2 + w_3 a_2^2 + w_4 a_3^2 = \frac{1}{3},\\
&w_2 a_1^3 + w_3 a_2^3 + w_4 a_3^3 = \frac{1}{4},\\
&w_3 a_1 b_3 + w_4 (a_1 b_5 + a_2 b_6) = \frac{1}{6},\\
&w_3 a_1 a_2 b_3 + w_4 a_3 (a_1 b_5 + a_2 b_6) = \frac{1}{8},\\
&w_3 a_1^2 b_3 + w_4 (a_1^2 b_5 + a_2^2 b_6) = \frac{1}{12},\\
&w_4 a_1 b_3 b_6 = \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

ونلاحظ اننا حصلنا على (13) مجهولاً لـ (11) معادلة غير خطية . سنختار $a_1=\frac{1}{2}$, $b_2=0$ ، وعندئذٍ نجد:

$$a_2=\frac{1}{2}, a_3=1, b_1=\frac{1}{2}, b_3=\frac{1}{2}, b_4=0, b_5=0,$$

$$b_6=1, w_1=\frac{1}{6}, w_2=\frac{1}{3}, w_3=\frac{1}{3}, w_4=\frac{1}{6}.$$

ونلاحظ أنَّ خطأ القطع بنشر تايلور من المرتبة الخامسة، وبالتالي فالخطأ بهذه الطريقة من المرتبة الرابعة .

مثال(9):

أوجد الحل التقريبي لمسالة القيمة الأبتدائية باستخدام طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة:

$$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \qquad h = 0.1$$

الحل:

بتطبيق معادلات رانج – كوتا حيث:

$$f(x,y) = -y + x + 1$$

مثلاً عند $n = 0$:

$$k_1 = 0.1(-y_0 + x_0 + 1) = 0$$
$$k_2 = 0.1(-0.95y_n + 0.95x_n + 1) = 0.005$$
$$k_3 = 0.1(-0.9525(x_n - y_n) + 1) = 0.009525$$
$$k_4 = 0.1(-1 - 0.19525) = 0.00525$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة (15)، نحصل على:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1.0048375009$$

هكذا نستطيع أن نحصل على القيم، ويمثل الجدول أدناه بعض القيم المحسوبة (حاول إيجاد بقية القيم) :

x_n	y_{n+1}
0	1.00000
0.1	1.0048375000
0.2	1.0187309014
0.3	1.040818422
0.4	1.070320289
0.5	1.106530934
0.6	1.148811934
0.7	1.196585619
0.8	1.24932929
0.9	1.306569991

جدول8

مثال(10):

الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية $y' = 3x + \frac{y}{2}$ هو:

$$y = 13e^{x/2} - 6x - 12$$

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية من أجل القيمة الابتدائية $y(0) = 1$ ، وبأخذ $h = 0.1$ على المجال $0 \le x \le 1$ ، ثم أثبت أن الدقة تزداد بنقصان المجال.

الحل:

بتطبيق معادلات رانج – كوتا حيث $f(x, y) = 3x + y/2$ تصبح:

$$k_1 = hf\ (x_0, y_0) = hf\ (0,1) = 0.05$$

$$k_2 = hf\ (x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = hf\ (0.05, 1.025) = 0.06625$$

$$k_3 = hf\ (x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = hf\ (0.05, 1.033125) = 0.6665625$$

$$k_4 = hf\ (x_0 + h, y_0 + k_3) = hf\ (0.1, 1.06665625) = 0.0833328$$

وبتعويض هذه القيم في معادلة رانج – كوتا (15)

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(0.05 + 2\times 0.06625 + 2\times 0.6665625 + 0.083328)$$
$$= 1.06652421856$$

وبالمقارنة مع الحل الفعلي $y = 13e^{x/2} - 6x - 12$ نجد القيمة الفعلية للنقطة y_1 ، بتعويض قيمة x_1، هي $y(0.1) = 1.06652424866$، أي تصل الدقة إلى ثمانية أرقام معنوية، بأخذ $h = 0.1$. وبمقارنة قيمة y الناتجة من الحل الفعلي مع قيمة y الناتجة من الحل العددي وذلك بازدياد قيمة h نلاحظ أن قيمة الخطأ تزداد كما هو موضح في الجدول أدناه:

المجال المختارة h	قيمة y من الحل الفعلي	قيمة y بطريقة رانج – كوتا
$h = 0.1$	$\tilde{y}(0.1) = 1.06665242486$	$y(0.1) = 1.06652421856$
$h = 0.2$	$\tilde{y}(0.2) = 1.16722193718$	$y(0.2) = 1.1672208333$
$h = 0.4$	$\tilde{y}(1.4) = 1.47823585939$	$y(0.4) = 1.4782$

جدول9

مثال (11):

استخدم طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{(x-y)}{2}$$

في المجال [0,3]، والشرط الابتدائي y(0)=1 وبقيم $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$، ثم قارن النتيجة بالحل الفعلي $y = 3e^{-x/2} - 2 + x$.

الحل:

باستخدم طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة نحصل على القيم الموضحة في الجدول التالي:

x_n	y_{n+1}				z_{n+1}
	$h=1$	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8620874
0.50		0.8364258	0.83644037	0.8364024	0.8364023
0.75			0.8118696	0.8118679	0.8118678
1.00	0.8203125	0.8196285	0.8195940	0.8195921	0.8195920
1.50		1.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	1.1036383
2.50		1.3595575	1.3595168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1.6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

جدول10

10-2 خطأ التحكم و طريقة رانج – كوتا – فيلبيرغ (وقد نشرت في 1970 من قبل Erwin Fehlberg)

إن معادلة الفروق القياسية لمسألة القيم الابتدائية هي من الشكل:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(x_i, w_i, h_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (16)$$

وتعطى السماحية tolerance كعدد أكبر من الصفر $\varepsilon > 0$ ، يسمح بجعل عدد نقاط الشبكة أصغر ما يمكن من أجل خطأ عام لا يتجاوز قيمة ε عند أي من هذه النقاط.

لكن لا يمكننا تعيين الخطأ العام لطرائق محددة، لذا سنناقشه بالاعتماد على وجود رابط بينه وبين خطأ القطع المحلي Local Error، إذ يمكننا التنبؤ بخطأ القطع المحلي من خلال استخدام طرائق مختلفة المراتب، ومن ثم نحدد حجم الخطوة التي تبقي الخطأ العام Global Error مقيداً (ضمن القيم المسموح بها).

بفرض أنّه لدينا باستخدام طريقة تايلور من المرتبة n الشكل:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i), h) + O(h^{n+1})$$

ومعادلة الفروق لها:

$$w_0 = \alpha$$
$$\tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i + h\phi(x_i, \tilde{w}_i, h_i) \qquad i > 0$$

وخطأ القطع المحلي هو: $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$

وبفرض أننا طبقنا أيضا طريقة تايلور من المرتبة $n+1$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\tilde{\phi}(x_i, y(x_i), h) + O(h^{n+2})$$

ومعادلة الفرق لها:

$$\tilde{w}_0 = \alpha$$
$$\tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i + h\phi(x_i, \tilde{w}_i, h_i) \qquad i > 0$$

وخطأ القطع المحلي هو: $\tilde{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$

فإذا أخذنا في البداية $w_i \approx y(x_i) \approx \tilde{w}_i$ ، و h حجم خطوة ذاتها. عندئذ حسب تعريف خطأ القطع المحلي يكون:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \phi(x_i, y(x_i), h) = \frac{1}{h}\left(y(x_{i+1}) - w_{i+1}\right) \qquad (17)$$

وبالطريقة نفسها:

$$\tilde{\tau}_{i+1}(h) = \frac{1}{h}\left(y(x_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1}\right) \qquad (18)$$

و عليه :

$$\tau_{i+1}(h) = \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}) \qquad (19)$$

لدينا $\tau_{i+1}(h)$ من المرتبة $O(h^n)$ و $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$ من المرتبة $O(h^{n+1})$، و منه نجد: $\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$.

ليس المطلوب هنا تقدير حجم خطأ القطع المحلي فقط، وإنما تقدير طول الخطوة الذي يبقيه ضمن حدود معينة.

نفترض أنه يوجد K مستقل عن h يحقق $\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$ عندها فإنّ خطأ القطع المحلي ذاي المرتبة n، وبطول للخطوة qh، و باستخدام التقريبين $w_{i+1}, \tilde{w}_{i+1}$ يُعطى بالشكل :

$$\tau_{i+1}(qh) = K(qh)^n \approx q^n (Kh)^n \approx \frac{q^n}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}) \tag{19}$$

نختار q بحيث:

$$|\tau_{i+1}(qh)| \approx \frac{q^n}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}| \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad q \le \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/n} \tag{20}$$

توجد طرائق شائعة تستخدم هذه المتراجحة لإدارة الأخطاء ((للتحكم بالأخطاء))، تدعى طريقة رانج – كوتا – فيلبيرغ، وهي تستخدم طريقة رانج – كوتا مع خطأ قطع محلي من المرتبة الخامسة:

$$\tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 - \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \tag{21}$$

وذلك لتقدير الخطأ المحلي في طريقة رانج – كوتا ذات المرتبة الرابعة:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 - \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \tag{22}$$

حيث إن:

$$k_1 = hf(x_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 + \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 + \frac{3544}{2565}k_3 - \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

إيجابية هذه الطريقة أنها تحتاج فقط إلى ست قيم للتابع عند كل خطوة.

وتستخدم طريقتا رانج – كوتا من المرتبة الرابعة والخامسة مع بعضهما، حيث تحتاج طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة لأربع قيم على الأقل عند كل خطوة، ومنه يصبح مجموع القيم المطلوبة عند كل خطوة في طريقة رانج – كوتا – فيلبيرغ عشر قيم على الأقل.

3- الطرائق ذات الخطوات المتعددة:

تعريف(3): طريقة الخطوات المتعدّدة لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x,y)\ ; \qquad \alpha \le x \le b\ , \qquad y(a) = \alpha$$

هي واحدة من معادلات الفروق التي تستخدم لإيجاد التقريب w_{i+1} عند نقطة الشبكة x_{i+1} والتي يمكن تمثيلها بالمعادلة التالية، حيث m عدد صحيح أكبر من الواحد:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + ... + a_0 w_{i+1-m} + \\ &+ h\left[b_m f(x_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, w_i) + ... + b_0 f(x_{i+1-m}, w_{i+1-m})\right] \end{aligned} \tag{23}$$

من أجل $i = m-1, m, ..., N-1$.

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2, ..., w_{m-1} = a_{m-1}$ و $h = \dfrac{b-a}{N}$.

عندما يكون $b_m = 0$، فإن الطرائق تدعى صريحة أو مفتوحة، لأن المعادلة (23) تعطي w_{i+1} صراحة بدلالة قيم معينة سابقاً. و عندما يكون $b_m \neq 0$ تدعى هذه الطرائق ضمنية أو مغلقة، لأن w_{i+1} تظهر في طرفي المعادلة (23) وتتعين بصورة ضمنية فقط.

فمثلاً تُعرف المعادلات التالية (وسيأتي تبيانها تفصيلياً):

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\begin{bmatrix} 55f(x_i, w_i) - 59f(x_{i-1}, w_{i-1}) \\ +37f(x_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, w_{i-3}) \end{bmatrix} \tag{24}$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2$, $w_3 = a_3$ ، ولكل $i = 2, 3, ..., N-1$

طريقة صريحة ذات أربع خطوات وتُدعى باسم طرائق آدمز–بيشفورث من المرتبة

الرابعة fourth-order Adams-Bashforth technique و تُعرف المعادلات:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\begin{bmatrix} 9f\ (x_{i+1}, w_{i+1}) - 19f\ (x_i, w_i) \\ -5f\ (x_{i-1}, w_{i-1}) + f\ (x_{i-2}, w_{i-2}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

حيث $w_3 = a_3$ ، $w_2 = a_2$ ، $w_1 = a_1$ ، $w_0 = a$ ، ولكل $i = 2, 3, ..., N-1$

طريقة ضمنية ذات خطوات ثلاث تدعى طرائق آدمز– مولتون من المرتبة الرابعة fourth-order Adams-Moulton technique .

بفرض $w_0 = a$ يتم توليد القيم الباقية w_1, w_2, w_3 إما بطرائق راونج –كوتا أو بأي طريقة من طرائق الخطوة الواحدة.

لتطبيق طريقة صريحة كما في (23) مباشرة، علينا أن نحل المعادلة الضمنية بالنسبة إلى w_{i+1}. من الواضح أن ذلك غير ممكن بصورة عامة.

للبدء باستنتاج طرائق الخطوات المتعددة، لاحظ أن لحل مسألة القيمة الابتدائية (1) ، عند مكاملتها على المجال $[x_i, x_{i+1}]$ ، الخاصة التالية:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\ (x, y(x))dx$$

ينتج عن ذلك:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\ (x, y(x))dx \quad (26)$$

لما كنا غير قادرين على مكاملة $f\ (x, y(x))$ دون معرفة $y(x)$ (حل المسألة) فإننا نكامل (عوضاً عن ذلك) كثيرة حدود $P(x)$ وتمثل استيفاء للتابع $f\ (x, y(x))$ التي تعينت بمعطيات حصلنا عليها سابقا عند النقاط $(x_0, w_0), (x_1, w_1), ..., (x_i, w_i)$. عندما نفرض (بالإضافة إلى ذلك) أن $y(x_i) \approx w_i$ فإن المعادلة (26) تصبح:

$$y(x_{i+1}) \approx w_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx \quad (27)$$

رغم أنه يمكن استخدام أي طريقة لكثيرة الحدود (المستوفاة)، فإنه من المفضل استخدام طرائق نيوتنا الفروق المقسومة لتراجعية.

لاستنتاج أسلوب آدمز – بشفورث الصريح ذي m خطوة، نُشكل كثيرة حدود $P_{m-1}(x)$ ضمن النقاط:

$$(x_i, f(x_i, y(x_i))), (x_{i-1}, f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))), \ldots\ldots (x_{i+1-m}, f(x_{i+1-m}, y(x_{i+1-m})))$$

لما كانت $P_{m-1}(x)$ كثيرة حدود مستوفاة من الدرجة $m-1$، فإنه يوجد عدد مناسب ξ_i في (x_{i+1-m}, x_i) يحقق:

$$f(x, y(x)) = p_{m-1}(x) + \frac{f^m(\xi_i, y(\xi_i))}{m!}(x - x_i)(x - x_i)\ldots\ldots(x - x_{i+1-m})$$

نجري تغييراً في المتحول $x = x_i + sh$ و $dx = hds$ في $p_{m-1}(x)$ فنجد أن:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_i, y(x_i))dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f^m(\xi_i, y(\xi_i))}{m!}(x - x_i)(x - x_i)\ldots\ldots(x - x_{i+1-m})dx$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k f(x_i, y(x_i)) h (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$$

$$+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1)\ldots\ldots(s+m-1) f^m(\xi_i, y(\xi_i))ds$$

التكاملات $(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$، من أجل مختلف قيم k، سهلة الحساب، فعندما يكون $k = 3$:

$$(-1)^3\int_0^1\binom{-s}{3}ds=-\int_0^1\frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{1.2.3}ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(s^3+3s^2+2s)ds$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{s^4}{4}+s^3+s^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

وعليه ، يمكن كتابة جدولٍ لقيم هذه التكاملات:

k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^3\int_0^1\binom{-s}{3}ds$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$

جدول 11

نتيجة لذلك نجد:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx=h\left[f(x_i,y(x_i))+\frac{1}{2}\nabla f(x_i,y(x_i))+\frac{5}{12}\nabla^2 f(x_i,y(x_i))+...\right]+$$

$$\frac{h^{m+1}}{m!}\int_0^1 s(s+1).....(s+m-1)f^{(m)}(\xi_i,y(\xi_i))ds \qquad (28)$$

لما كان $s(s+1).....(s+m-1)$ لايغير إشارته على $[0,1]$، فإنه يمكن استخدام مبرهنة القيمة الوسطى التكاملية، لكي نستنتج أنه، من أجل عدد مناسب μ_i يحقق $t_{i+1-m}<\mu_i<t_{i+1}$ يصبح حد الخطأ في المعادلة (26)

$$\frac{h^{m+1}}{m!}\int_0^1 s(s+1).....(s+m-1)f^{(m)}(\xi_i,y(\xi_i))ds$$

$$=\frac{h^{m+1}f^{(m)}(\mu_i,y(\mu_i))}{m!}\int_0^1 s(s+1).....(s+m-1)ds$$

أو

$$h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \qquad (29)$$

فإنه يمكن كتابة المعادلة (29) كما يلي:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

و منه نجد :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y(x_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(x_i, y(x_i)) + ... \right] + h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \qquad (30)$$

مثال (12):

لاستنتاج أسلوب آدمز–باشفورت ذي الخطوات الثلاث، نعوض في المعادلة (30) $m = 3$ ، فنجد:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(x_i, y(x_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(x_i, y(x_i)) \right]$$

$$= y(x_i) + h\left[\begin{array}{l} f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}\left[f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) \right] \\ + \frac{5}{12}\left[f(x_i, y(x_i)) - 2f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + f(x_{i-2}, y(x_{i-2})) \right] \end{array} \right]$$

$$= y(x_i) + \frac{h}{12}\left[23 f(x_i, y(x_i)) + 16 f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 5 f(x_{i-2}, y(x_{i-2})) \right]$$

فتكون نتيجة لذلك، طرائق آدمز – باشفورت هي:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}\left[23 f(x_i, w_i) - 16 f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 5 f(x_{i-2}, w_{i-2}) \right] \qquad (31)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2$ ، ولكل $i = 2, 3, ..., N-1$

يمكن استنتاج طرائق الخطوات المتعددة أيضا باستخدام طريقة تايلور.

خطأ القطع المحلي لطرائق الخطوات المتعددة معرف بصورة مشابهة لما ورد في طرائق الخطوة الواحدة.

تعريف(4):

إذا كان $y(x)$ حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x,y)\ ; \qquad a \le x \le b, \qquad y(a) = a$$

و

$$w_{i-1} = a_m w_i + a_{m-1} w_i + a_{m-1} w_{i-1} + ... + a_0 w_{i-m} + h\left[b_{m-1} f\left(x_{i+1}, w_{i+1}\right) + b_m f\left(x_i, w_i\right) + ... + b_0 f\left(x_{i-m}, w_{i-m}\right)\right]$$

هي الخطوة $(i+1)$ في طرائق الخطوات المتعددة، فإن خطأ القطع المحلي عند هذه الخطوة $\tau_{i+1}(h)$ هو:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(x_{i+1}) - a_m y(x_i) - ... - a_0 y(x_{i-m})}{h} - \left[b_{m+1} f(x_{i+1}, y_{i+1}) + ... + b_0 f(x_{i-m}, y_{i-m})\right] \qquad (32)$$

لكل $i = m, m+1, ..., N-1$

مثال (13):

لتعيين خطأ القطع المحلي لطرائق آدمز- باشفورت ذات الخطوات الثلاث المستنتجة في المثال (12)، ننظر في شكل الخطأ الوارد في المعادلة (32):

$$h^4 f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds = \frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))$$

باستخدام الحقيقة $f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) = y^{(4)}(\mu_i)$ ومعادلة الفروق المستنتجة في المثال(12) نجد:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{1}{12}\left[23 f(x_i, y(x_i)) - 16 f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 5 f(x_{i-1}, y(x_{i-2}))\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))\right] = \frac{3h^3}{8} y^{(4)}(\mu_i),$$

حيث إنّ $\mu_i \in (x_{i-2}, x_{i+1})$.

تعطى بعض الطرائق الصريحة المتعددة الخطوات مع القيم الضرورية و خطأ القطع المحلي بأسلوب مشابه لإجرائية المثالين (12)و(13). وذلك كما يلي:

1-3 طريقة آدمز – باشفورت ذات الخطوتين:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[3f(x_i, w_i) - f(x_{i-1}, w_{i-1})\right] \quad (33)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$ ، ولكل $i = 2,3,....,N-1$.

خطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{5}{12}y'''(\mu_i)h^2$ لعدد مناسب $\mu_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

2-3 طريقة آدمز – باشفورت ذات الخطوات الثلاث:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}\left[23f(x_i, w_i) - 16f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, w_{i-2})\right], \quad (34)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2$ ، ولكل $i = 2,3,....,N-1$.

إن خطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{3}{8}y^{(4)}(\mu_i)h$ من أجل عدد مناسب $\mu_i \in (x_{i-2}, xt_{i+1})$.

3-3 طريقة آدمز – باشفورت ذات الخطوات الأربع:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\begin{bmatrix} 55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) \\ +37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3}) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2$, $w_3 = a_3$ ، ولكل $i = 2,3,....,N-1$.

وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$ من أجل عدد مناسب $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$.

4-3 طريقة آدمز – باشفورت ذات الخطوات الخمس:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}\begin{bmatrix} 1901f(x_i, w_i) - 2774f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 2616f(x_{i-2}, w_{i-2}) \\ -1274f(x_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(x_{i-4}, w_{i-4}) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2$, $w_3 = a_3$, $w_4 = a_4$ ، ولكل $i = 2,3,....,N-1$.

وفي هذه الحالة خطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{95}{288}y^{(6)}(\mu_i)h^5$ من أجل عدد

مناسب $\mu_i \in (x_{i-4}, x_{i+1})$.

تستنتج الطرائق الضمنية باستخدام $(x_{i+1}, f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$ كنقط استيفاء إضافية في تقريب التكامل: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$

بعض الطرائق الضمنية الأكثر شيوعا مدرجة فيما يلي:

5-3 طريقة آدمز – مولتون ذات الخطوتين

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}\left[5f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(x_i, w_i) - f(x_{i-1}, w_{i-1})\right], \quad (37)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$ ، ولكل $i = 2, 3, ..., N-1$.

و خطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{-1}{24} y^{(4)}(\mu_i) h^3$ لعدد مناسب $\mu_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

6-3 طريقة آدمز – مولتون ذات الخطوات الثلاث:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\begin{bmatrix} 9f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(x_i, w_i) - \\ 5f(x_{i-1}, w_{i-1}) + f(x_{i-2}, w_{i-2}) \end{bmatrix} \quad (38)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2$ ، ولكل $i = 2, 3, ..., N-1$.

إن خطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{-19}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$ من أجل عدد مناسب $\mu_i \in (x_{i-2}, x_{i+1})$.

7-3 طريقة آدمز – مولتون ذات الخطوات الأربع:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}\begin{bmatrix} 251f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(x_i, w_i) - \\ 264f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 106f(x_{i-2}, w_{i-2}) - 19f(x_{i-3}, w_{i-3}) \end{bmatrix} \quad (39)$$

حيث $w_0 = a$, $w_1 = a_1$, $w_2 = a_2$, $w_3 = a_3$ ، ولكل $i = 2, 3, ..., N-1$.

وفي هذه الحالة خطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h)=\frac{-3}{160}y^{(6)}(\mu_i)h^5$ من أجل عدد مناسب $\mu_i \in (x_{i-3},x_{i+1})$.

من المفيد مقارنة طريقة آدمز– باشفورت الصريحة ذات m خطوة بطريقة آدمز– مولتون الضمنية ذات $m-1$ خطوة. تحوي كل منهما m تقديرا للتابع f في كل خطوة، ويقع لكل منهما، الحد $y^{(m+1)}(\mu_i)h^m$ في خطأ قطعهما المحلي. بصورة عامة، معاملات الحدود التي تحوي f ومعاملات حدود خطأ القطع المحلي في الطرائق الضمنية أصغر مما يقابلها في الطرائق الصريحة، ويؤدي ذلك في الطرائق الضمنية إلى استقرار أكبر وأخطاء تدوير أقل مما في الطرائق الصريحة.

مثال (14):

لننظر في مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'=y-x^2+1 \quad , \quad 0\le x\le 2 \quad , \quad y(0)=0.5,$$

والتقريبين المعطيين من قبل طريقة آدمز– باشفورت ذات الخطوات الأربع وطريقة آدمز– مولتون ذات الخطوات الثلاث، حيث في كل منهما $h=0.2$.

لطريقة آدمز– باشفورت معادلة الفروق:

$$w_{i+1}=w_i+\frac{h}{24}\left[55f(t_i,w_i)-59f(x_{i-1},w_{i-1})+37f(x_{i-2},w_{i-2})-9f(x_{i-3},w_{i-3})\right],$$

من أجل $i=3,4,....,9$، $x_i=0.2i$، وتصبح عند تبسيطها باستخدام $h=0.2$ و $f(x,y)=y-x^2+1$:

$$w_{i+1}=\frac{1}{24}\left[35w_i-11.8w_{i-1}+7.4w_{i-2}-1.8w_{i-3}-0.192i^2-0.192i+4.736\right].$$

لطريقة آدمز– مولتون معادلة الفروق:

$$w_{i+1}=w_i+\frac{h}{24}\left[9f(x_{i+1},w_{i+1})+19f(x_i,w_i)-5f(x_{i-1},w_{i-1})+f(x_{i-2},w_{i-2})\right],$$

من أجل $i=2,3,...,9$ ، وتختزل إلى:

$$w_{i+1}=\frac{1}{24}\left[1.8w_{i+1}+27.8w_i-w_{i-1}+0.2w_{i-2}-0.192i^2-0.192i+4.736\right].$$

لاستخدام هذه الطريقة بصورة صريحة، يمكننا الحل بالنسبة إلى w_{i+1} و هذا يعطي:

$$w_{i+1}=\frac{1}{22.2}\left[27.8w_i-w_{i-1}+0.2w_{i-2}-0.192i^2-0.192i+4.736\right].$$

يبين الجدول رقم (12) نتائج الطريقتين آدمز– باشفورت و آدمز– مولتون لأجل $i=2,3,...,9$ ، والخطأ المرتكب علماً بأن الحل الفعلي $y(x)=(x+1)^2-0.5e^x$.

	آدمز – باشفورت		آدمز – مولتون	
x_i	w_i	الخطأ المرتكب	w_i	الخطأ المرتكب
0.0	0.5000000	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.0000000	0.8292986	0.0000000
0.4	1.2140877	0.0000000	1.2140877	0.0000000
0.6	1.6489406	0.0000000	1.6489341	0.0000065
0.8	2.1273124	0.0000828	2.1272136	0.0000160
1.0	2.6410810	0.0002219	2.6408298	0.0000293
1.2	3.1803480	0.0004065	3.1798937	0.0000478
1.4	3.7330601	0.0006601	3.7323270	0.0000731
1.6	4.2844931	0.0010093	4.2833767	0.0001071
1.8	4.8166575	0.0014812	4.8150236	0.0001527
2.0	5.3075838	0.0021119	5.3052587	0.0002132

جدول 12

في المثال (14)، تعطي طريقة آدمز– مولتون الضمنية نتائج أفضل من نتائج آدمز– باشفورت الصريحة ذات المرتبة ذاتها. مع ملاحظة أنه للطرائق الضمنية مواطن ضعف ناتجة عن ضرورة تحويل الطرائق جبريا إلى تمثيل صريح للمتغير w_{i+1}. وقد يصبح هذا الإجراء صعبا إن لم يكن مستحيلا. فمثلاً في مسألة القيمة الابتدائية البسيطة:

$$y'=e^y \;;\qquad 0\le x\le 0.25\;,\qquad y(0)=1$$

لما كان $f(x,y)=e^y$ فإن لطريقة آدمز– مولتون ذات الخطوات الثلاث معادلة الفروق:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[9e^{w_{i+1}} + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}}\right]$$

وإن هذه المعادلة لايمكن حلها بصورة صريحة بالنسبة إلى المتغير w_{i+1}.

عملياً، إن الطرائق الضمنية ذوات الخطوات المتعددة غير مستخدمة كما بينا من قبل. أو بالأصح، إنها مستخدمة لإدخال تحسينات على تقريبات ناتجة عن طرائق صريحة. إن تركيب طرائق صريحة بأخرى ضمنية يدعى طرائق متنبئة– مصححة predictor-corrector method. تتنبأ الطرائق الصريحة بتقريب، وتصحح الطرائق الضمنية هذا التنبؤ.

لننظر في طرائق المرتبة الرابعة التالية لحل مسألة قيمة ابتدائية. الخطوة الأولى هي حساب القيم w_3, w_2, w_1, w_0 المتعلقة بطرائق آدمز– باشفورت ذات المراجل الأربع. للقيام بذلك، تستخدم طرائق ذات خطوة واحدة من المرتبة الرابعة، وهي طرائق رونج– كوتا من المرتبة الرابعة. الخطوة التالية هي أن نحسب تقريبا $w_4^{(0)}$ لـ $y(x_4)$ باستخدام طرائق آدمز– باشفورت كمتنبئة:

$$w_4^{(0)} = w_3 + \frac{h}{24}\left[55f(x_3, w_3) - 59f(x_2, w_2) + 37f(x_1, w_1) - 9f(x_0, w_0)\right]$$

يحسِّن هذا التقريب بإدخال $w_4^{(0)}$ في الطرف الأيمن من طرائق آدمز– مولتون ذات الخطوات الثلاث واستخدام هذه الطرائق كمصححة:

$$w_4^{(1)} = w_3 + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_4, w_4^{(0)}\right) + 19f(x_3, w_3) - 5f(x_2, w_2) + f(x_1, w_1)\right]$$

تستخدم عندئذ، القيمة $w_4^{(1)}$ كتقريب للمتغير $y(x_4)$ ويتكرر استخدام طرائق آدمز– باشفورت كمتنبئة وطرائق آدمز– مولتون كمصححة، لإيجاد $w_5^{(0)}$ و $w_5^{(1)}$ التقريبين الأولي والنهائي للمتغير $y(x_5)$ وهكذا.

نظريا، يمكن الحصول على تقريبيات $y(x_{i+1})$ المحسنة بتكرار قانون آدمز–مولتون:

$$w_{i+1}^{(k+1)} = w_i + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_{i+1}, w_{i+1}^{(k)}\right) + 19f(x_i, w_i) - 5f(x_{i-1}, w_{i-1}) + f(x_{i-2}, w_{i-2})\right]$$

عملياً، لما كانت المتتالية $\left\{w_{i+1}^{(k+1)}\right\}$ تتقارب من القيمة التقريبية المعطاة من قبل

القانون الضمني بصورة أفضل من التقرب إلى الحل $y(x_{i+1})$، فمن المعتاد استخدام تخفيض في طول الخطوة إذا كان هناك ضرورة لتحسين الدقة.

الخوارزمية التالية بنيت على طريقة آدمز– باشفورت من المرتبة الرابعة كمتنبئة، وتكرار واحد لطريقة آدمز– مولتون كمصححة، بقيم انطلاق ناتجة عن طريقة رانج– كوتا من المرتبة الرابعة.

خوارزمية طريقة آدمز المتنبئة المصححة– ذات المرتبة الرابعة:

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x,y)\ ; \quad a \le x \le b, \qquad y(a) = a$$

عند $(N+1)$ من أعداد المجال $[a,b]$ المتساوية البعد فيما بينهما:

INPUT endpoints a,b; integer N; initial condition α.

OUTPUT approximation w to y at the $(N+1)$ values of x.

Step 1 *Set* $h = (b-a)/N$;

$x_0 = a$;

$w_0 = a$;

OUTPUT (x_0, w_0).

Step 2 *For* $i = 1,2,3,$ *do Steps* $3-5$ (Compute starting values using Runge- Kutta method)

Step 3 *Set* $K_1 = hf(x_{i-1}, w_{i-1})$;

$K_2 = hf(x_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_1/2)$;

$K_3 = hf(x_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_2/2)$;

$K_4 = hf(x_{i-1} + h, w_{i-1} + K_3)$.

Step 4 *Set* $w_i = w_{i-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$;

$x = a + ih$.

Step 5 *OUTPUT* (x_i, w_i).

step 6 *For* $i = 4,..,N$ *do steps* $7-10$

step 7 *Set* $x_i = a + ih$;

$$w = w_3 + h\begin{bmatrix} 55f(x_3, w_3) - 59f(x_2, w_2) + 37f(x_1, w_1) \\ -9f(x_0, w_0) \end{bmatrix} / 24;$$

$$w = w_3 + h\begin{bmatrix} 9f(x, w) + 19f(x_3, w_3) - 5f(x_2, w_2) \\ + f(x_1, w_1) \end{bmatrix} / 24.$$

step 8 $OUTPUT(x, w)$

step 9 *For* $j = 0,1,2$

Set $x_j = x_{j+1}$;

$w_j = w_{j+1}$.

step 10 *Set* $x_3 = x$;

$w_3 = w$.

step 11 *STOP*

مثال (15):

يسجل الجدول رقم (13) النتائج التي حصلنا عليها باستخدام الخوارزمية السابقة في مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = y - x^2 + 1 \quad ; \qquad 0 \le x \le 2 \, , \qquad y(0) = 0.5$$

من أجل $N = 10$.

x_i	w_i	$y_i = y(x_i)$	$y_i - w_i$
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292933	0.8292986	0.0000053
0.4	1.2140762	1.2140877	0.0000114
0.6	1.6489220	1.6489406	0.0000186
0.8	2.1272056	2.1272295	0.0000239
1.0	2.6408286	2.6408591	0.0000305
1.2	3.1799026	3.1799415	0.0000389
1.4	3.7323505	3.7324000	0.0000495

x_i	w_i	$y_i = y(x_i)$	$y_i - w_i$
1.6	4.2834208	4.2834838	0.0000630
1.8	4.8150964	4.8151763	0.0000799
2.0	5.3053707	5.3054720	0.0001013

جدول 13

يمكن استنتاج طرائق أخرى متعددة الخطى، باستخدام تكامل كثيرات حدود مستوفاة على فترة من الشكل $[x_j, x_{i+1}]$ حيث $j \le i-1$ ، لإيجاد تقريب للمتغير $y(x_{i+1})$. تنتج طريقة جديدة عندما نكامل كثيرة حدود نيوتن الفروق التراجعية على $[x_{i-3}, x_{i+1}]$ وهي طرائق صريحة تدعى طرائق مايلن Milne method:

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f(x_i, w_i) - f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, w_{i-2})\right] \quad (40)$$

لهذه الطرائق خطأ قطع محلي $\frac{14}{45}h^4 y^{(5)}(\xi_i)$ حيث $\xi_i \in (x_{i-3}, x_{i+1})$.

تستخدم هذه الطرائق، أحيانا، كمتنبئ من أجل طرائق ضمنية تدعى طريقة سمبسون Simpson's method

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(x_i, w_i) + f(x_{i-1}, w_{i-1})\right] \quad (41)$$

لهذه الطريقة خطأ قطع محلي $\frac{-h^4}{90} y^{(5)}(\xi_i)$ حيث $\xi_i \in (x_{i-3}, x_{i+1})$ ونحصل على ذلك بمكاملة كثيرة حدود نيوتن الفروق التراجعية على $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

رغم أن خطأ القطع المحلي معقد في الطرائق المتنبئة- المصححة المتعلقة بطريقة مايلن- سمبسون، فإنه أقل، عموماً، من ذلك الخطأ المتعلق بطرائق آدمز- مولتون. هذه الطريقة محدودة الاستعمال بسبب مسألة الاستقرار التي لاتظهر مع إجرائية آدمز.

تمارين

1- أوجد $y(0.5)$ بدقة أربعة أرقام بعد الفاصلة مستخدماً طرائق أولر علماً أنّ $h=0.1$ وذلك بحل كل من مسائل القيم الأبتدائية:

(a $y'=2x+y \quad ; y(0)=0$

(b $y'=2x-y \quad ; y(0)=0$

(c $y'=3x-y \quad ; y(0)=0$

(d $y'=2x-2y \quad ; y(0)=0$

(e $y'=3x-2y \quad ; y(0)=0$

2- أوجد $y(0.5)$ بدقة أربعة أرقام بعد الفاصلة وذلك بحل مسألة القيمة الأبتدائية:

$$y'=x-y^2 \quad ; y(0)=1.1$$

مستخدماً طرائق أولر علماً أنّ $h=0.25$.

3- حل كلاً من مسائل القيم الابتدائية التالية على المجال (0,1) باستخدام طريقة رانج–كوتا من المرتبة الثالثة علماً أنّ $h=0.2$:

(a $y'=-2xy^2 \quad ; y(0)=1$

(b $y'=-2xy \quad ; y(0)=1$

(c $y'=2xy^2 \quad ; y(0)=1$

(d $y'=-2x \quad ; y(0)=1$

(e $y'=xy^2 \quad ; y(0)=1$

4- أوجد $y(0.5)$ بدقة أربعة أرقام بعد الفاصلة مستخدماً الطرائق (رانج–كوتا، أولر المعدلة، هين، رالستون) علماً أنّ $h=0.1$. وذلك بحل كل من مسائل القيم الإبتدائية التالية:

(a $y' = 2x + y \quad ; y(0) = 0$

(b $y' = 2x - y \quad ; y(0) = 0$

(c $y' = 3x - y \quad ; y(0) = 0$

(d $y' = 2x - 2y \quad ; y(0) = 0$

(e $y' = 3x - 2y \quad ; y(0) = 0$

5- أوجد $y(0.6)$ بدقة أربعة أرقام بعد الفاصلة مستخدماً طرائق رانج–كوتا علماً أنّ $h = 0.2$. وذلك بحل مسألة القيمة الأبتدائية :

$$5y' = -xy \quad ; y(0) = 1$$

6- أوجد $y(0.6)$ بدقة أربعة أرقام بعد الفاصلة مستخدماً طرائق هين علماً أنّ $h = 0.2$. وذلك بحل مسألة القيمة الأبتدائية:

$$5y' = -xy \quad ; y(0) = 1$$

7- استخدم طرائق أولر لتقريب $y(4)$ من أجل مسألة القيمة الأبتدائية:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy \quad ; y(-1) = -1$$

علماً أنّ $h = 1$.

8- استخدم طرائق أولر لتقريب $y(8)$ من أجل مسألة القيمة الأبتدائية:

$$xy' + y + x = e^x \quad ; y(1) = e + 1$$

علماً أنّ $h = 1$.

9- إذا علمت أنّ $h = 0.05$ فأوجد الحل العددي مسألة القيمة الأبتدائية:

$$y' = xy^2 - 2y \quad ; y(0) = 1$$

على المجال $0 \le x \le 1$ ، وذلك باستخدام طريقة أولر, ثم أوجد الحل الفعلي و قارنه مع الحل العددي .

10-إذا علمت أنّ $h = 0.01$ فأوجد الحل العددي مسألة القيمة الأبتدائية:

$$y' = y - \frac{2 + x}{(1 + x)^2} \quad ; y(0) = 1$$

على المجال $0 \le x \le 1$، وذلك باستخدام طرائق أولر, , ثم قارن الحل الفعلي $y = \frac{1}{1+x}$ مع الحل العددي .

11-استخدم طرائق رانج–كوتا من المرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الأبتدائية:

$$y' = -y + x + 1 \quad ; \begin{cases} y(0) = \frac{1}{3} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

وذلك في كل من الحالات التالية:

a) $h = 0.01$

b) $h = 0.025$

12-أعد حل السؤال السابق باستخدام طريقة هين.

13-حل كلاً من مسائل القيم الأبتدائية باستخدام كل من الطرائق:

a) طريقة أولر

b) طريقة أولر المعدلة

c) طريقة هين

d) طريقة رالستون

ثم قارن بين النتائج.

a) $y' = -5y \quad \begin{cases} y(0) = e \\ 0 \le x \le 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$

b) $y' = -7(y - x) + 1 \quad \begin{cases} y(0) = 3 \\ 0 \le x \le 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$

$$20y + 20\sin x + \cos x \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ 0 \le x \le 1 \\ h = 0.05 \end{cases}$$ (c

14-حل مسألة القيمة الإبتدائية :

$$y' = x + y^2 \; ; \quad y(0) = 1$$

على المجال $[0,0.4]$ باستخدام طريقة رانج–كوتا من المرتبة الثانية علماً أنّ $h = 0.02$.

15-استخدم جميع طرائق آدمز – باشفورت لتقريب حلول مسائل القيمة الإبتدائية التالية. و استخدام في كل حالة طريقة رانج–كوتا من المرتبة الرابعة من أجل القيم الأولى وقارن النتائج مع الحلول الفعلية:

(a $y' = xe^{3x} - 2y \;\; , 0 \le x \le 1$

حيث: $h = 0.2 \; , \; y(0) = 0$

والحل الفعلي: $y(x) = \frac{1}{5}xe^{3x} - \frac{1}{25}e^{3x} + \frac{1}{25}e^{-2x}$

(b $y' = 1 + (x - y)^2 \; , \; 2 \le x \le 3,$

حيث: $h = 0.2, \; y(2) = 1$

والحل الفعلي: $y(x) = x + 1/(1 - x)$

(c $y' = 1 + y/x \;\; , 1 \le x \le 2,$

حيث: $h = 0.2, \; y(1) = 2$

والحل الفعلي: $y(x) = x \;\ln x + 2x$

(d $y' = \cos 2x + \sin 3x \;\; , 0 \le x \le 1$

حيث: $h = 0.2 \;\; , y(0) = 1$

والحل الفعلي: $y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{3}{4}$

16-استخدم جميع طرائق آدمز– مولتون لتقريب حلول التمارين 15(a)، 15(b)، 15(c)، استخدم في كل حالة طريقة رانج– كوتا ذات المرتبة الرابعة من أجل القيم الأولى. قارن النتائج مع الحل الفعلي.

17-استخدم جميع طرائق آدمز– باشفورت لتقريب حلول مسائل القيمة الإبتدائية التالية.واستخدم في كل حالة طريقة رانج– كوتا ذات المرتبة الرابعة من أجل القيم الأولى. ثم قارن النتائج مع الحل الفعلي.

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2, \qquad 1 \le x \le 2,$$

حيث إنّ الحل الفعلي هو: $y(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$ و $h = 0.1$ و $y(1) = 1$

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع

الحل العددي لجمل المعادلات غير الخطية

Numerical Methods for Solving System of Nonlinear Equations

1-مقدمة:

إنّ العديد من الظواهر الفيزيائية و الكيميائية و البيئية تؤول إلى جملة معادلات غير خطية، وتُعد مسألة إيجاد حلول لجملة معادلات غير خطية، من أهم المسائل التي تمكن التحليل العددي من معالجتها، وذلك نظرا لصعوبة إيجاد الحلول تحليلياً، سنستعرض في هذا الفصل بعض الطرائق العددية التي عالجت هذه المسألة.

2- طريقة نيوتن:

2-1 طريقة نيوتن لحل معادلتين غير خطيتين بمجهولين:

سنأخذ في البداية جملة معادلتين بمجهولين لتوضيح طريقة نيوتن في حل جملة معادلات غير خطية. ويكون التمديد إلى جمل معادلات غير خطية العامة واضح مباشرة.

لتكن لدينا جملة المعادلتين غير الخطيتين بمجهولين التالية:

$$f(x,y) = 2x + xy - 1 = 0$$

$$g(x,y) = 2x - xy + 1 = 0$$

يمكن كتابة الشعاع بالشكل:

$$F(z) = 0 \qquad (1)$$

حيث

$$F(z)=\begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} \ , \ z=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

يمكن اعتبارها معادلة وحيدة البعد، نطبق علاقة نيوتن التكرارية فنجد:

$$z_{k+1}=z_k-\frac{F(z_k)}{F'(z_k)} \qquad (2)$$

و السؤال ماإذا تُمثل $F'(z_k)$ و $\frac{1}{F'(z_k)}$ ؟

إنَّ $F'(z_k)$ هي مشتق كلٍّ من f و g بالنسبة للمتحولين xو y ويعرف بالشكل:

$$F'(z)=F'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

بهذا التعريف، نستطيع أن نكتب العلاقة (2) بالشكل

$$z_{k+1}=z_k-F'(z_k)^{-1}F(z_k), \quad k=0,1,2,.. \qquad (3)$$

هذه طريقة نيوتن لمسألة ببعدين.

مثال(1):

حل جملة المعادلات غير الخطية:

$$f(x,y)=2x+xy-1=0$$
$$g(x,y)=2x-xy+1=0$$

بفرض القيمة الابتدائية

$$z_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

لدينا في هذه الجملة

$$F'(z) = F'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+y & x \\ -y & 2-x \end{bmatrix}$$

التكرار الأول:

$$F(z_0) = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\times 0+0\times 0-1 \\ 2\times 0+0\times 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

و

$$F'(z_0) = F'\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حيث

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

التكرار الثاني:

$$F(z_1) = F\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1 \\ 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

و

$$F'(z_1) = F'\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

حيث

$$z_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

ويمكن التحقق مما يلي:

$$z_3 = \begin{bmatrix} 0.875 \\ -0.875 \end{bmatrix} \quad , \quad z_4 = \begin{bmatrix} 0.9325 \\ -0.9325 \end{bmatrix}$$

وتتقارب السلسلة $\{z_k\}$ من $z^* = (1,-1)^T$.

2-2 طريقة نيوتن لحل جملة معادلات غير خطية بعدة مجاهيل:

لتكن لدينا جملة المعادلات غير الخطية التالية:

$$f_1(x_1, x_2, ...x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, ...x_n) = 0$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, ...x_n) = 0$$

حيث كل تابع غير خطي $f_i(x_1, x_2, ...x_n)$ بـ n مجهول $x_1, x_2, ..., x_n$.

يمكن التعبير عن جملة المعادلات ببساطة بالشكل:

$$F(x) = 0$$

حيث $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ... f_n(x))^T$ ، و $x = (x_1, x_2, ...x_n)^T$.

لاستنتاج طريقة نيوتن، لنرى أولاً نشر تايلور للشعاع $F(x)$. لدينا من أجل كل مركبة من $F(x)$:

$$f_1(x) = f_1(x_k) + \left\{ \frac{\partial f_1}{x_1}(x_k)(x - x_k)_1 + \frac{\partial f_1}{x_2}(x_k)(x - x_k)_2 + ... + \frac{\partial f_1}{x_n}(x_k)(x - x_k)_n \right\} + ...$$

$$f_2(x) = f_2(x_k) + \left\{ \frac{\partial f_2}{x_1}(x_k)(x - x_k)_1 + \frac{\partial f_2}{x_2}(x_k)(x - x_k)_2 + ... + \frac{\partial f_2}{x_n}(x_k)(x - x_k)_n \right\} + ...$$

.....

$$f_n(x) = f_n(x_k) + \left\{ \frac{\partial f_n}{x_1}(x_k)(x-x_k)_1 + \frac{\partial f_n}{x_2}(x_k)(x-x_k)_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{x_n}(x_k)(x-x_k)_n \right\} + \ldots$$

لنرمز لمصفوفة يعقوبي F على x بالرمز $F'(x)$ والتي تعطى بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

عندئذٍ يمكن أن نكتب المنشور بالشكل:

$$F(x) = F(x_k) + F'(x_k)(x-x_k) + ..$$

عندها تكون طريقة نيوتن هي استخدام التقريب من الدرجة الأولى للتابع $F(x)$ وهو:

$$F(x_k) + F'(x_k)(x-x_k)$$

لتقريب $F(x)$ نوجد حل المعادلة $F(x)=0$. أي

$$F(x_k) + F'(x_k)(x-x_k) = 0$$

نجد طريقة نيوتن

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k), \quad k = 0,1,2,..$$

عندما تكون مصفوفة يعقوبي $F'(x)$ كبيرة، قد لا يكون كافٍ حساب المقلوب $F'(x)^{-1}$ في كل تكرار. عندئذٍ نستخدم عادة طريقة نيوتن كما يلي:

نقوم من أجل كل $k = 0,1,2,..$ بما يلي:

1. حساب d_k من خلال حل

$$F'(x_k)d_k = -F(x_k)$$

2. نعوض x_{k+1} بالشكل

$$x_{k+1} = x_k + d_k$$

3-2 تقارب طريقة نيوتن:

سندرس في هذه الفقرة تقارب طريقة نيوتن لجملة معادلات غير خطية بشكلٍ عام. لهذا الغرض نحتاج لإدخال بعض النتائج المفيدة.

أولاً المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل:

لتكن F قابلة للاشتقاق في مجموعة مفتوحة $\Omega \subset R^n$ و $x^* \in \Omega$. عندئذٍ يكون من أجل كل $x \in \Omega$ (قريبة بقدرٍ كافٍ من x^*)

$$F(x) - F(x^*) = \int_0^1 F'\left(x^* + t(x - x^*)\right)(x - x^*)dt$$

ثانياً المبرهنة التالية وتدعى عادةً مبرهنة باناخ

لتكن A و B مصفوفتان من البعد $n \times n$ بحيث B هي تقريب لمقلوب A، أي $\|I - BA\| < 1$. عندئذٍ كلٌّ من A و B غير شاذة (أي محدد كلٌّ منهما لايساوي الصفر) و يتحقق

$$\|A^{-1}\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|I - BA\|}, \quad \|B^{-1}\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|I - BA\|}$$

الخطوط العريضة للبرهان. من أجل أي مصفوفة C ذات البعد $n \times n$، إذا كانت $\|C\| < 1$، عندئذٍ تكون $I - C$ عكوسة (invertible) و

$$(I - C)^{-1} = I + C + C^2 + \ldots$$

لذا إذا كان $\|I - BA\| < 1$، نعلم أن $BA = I - (I - BA)$ عكوسة، لذا يكون كلٌّ من A و B عكوسة. وهكذا يمكننا أن نكتب

$$A^{-1} = (BA)^{-1}B = (I - (I - BA))^{-1}B = \{I + (I - BA) + (I - BA)^2 + \ldots\}B$$

وهذا يعني :

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|I-BA\|}$$

والآن يمكننا أن نضع الفرضيات الأساسية على F :

1. يوجد x^* حل للمعادلة $F(x)=0$.
2. يُحقق اليعقوبي $F':\Omega \to R^{n\times n}$ شرط لبتشز، و ثابت لبتشز هو (γ) .
3. المصفوفة $F'(x^*)$ غير شاذة.

لدراسة التقارب، نحتاج لمعرفة النقاط المحيطة بالقرب من x^* . نُعرف

$$B_\delta(x)=\{y\in R^n;\ \|y-x\|<\delta\}$$

ومن ثم تصبح الفرضيات الثلاث بالشكل :

مبرهنة (1) :

من أجل كل $x\in B_\delta(x^*)$ ، يوجد $\delta>0$ ، تحقق ما يلي:

$$\|F'(x)\| \le 2\|F'(x^*)\| \tag{4}$$

$$\left\|F'(x)^{-1}\right\| \le 2\left\|F'(x^*)^{-1}\right\| \tag{5}$$

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\right\|^{-1}\|x-x^*\|/2 \le \|F(x)\| \le 2\|F'(x^*)\|\,\|x-x^*\| \tag{6}$$

البرهان:

لتكن δ صغيرة بقدرٍ كافٍ بحيث $B_\delta(x^*)\subset\Omega$. من أجل كل $x\in B_\delta(x^*)$ لدينا

$$\|F'(x)\| \le \|F'(x^*)\| + \gamma\|x-x^*\|$$

وهو ما يعني تحقق العلاقة (4).

العلاقة(5) تُستنتج بتطبيق مبرهنة باناخ وبملاحظة :

$$\left\| I - F'(x^*)F'(x) \right\| < \frac{1}{2}$$

في الحقيقة، إذا اخترنا δ بشكلٍ مناسب نحصل على

$$\begin{aligned} \left\| I - F'(x^*)F'(x) \right\| &= \left\| F'(x^*)^{-1}\left(F'(x^*) - F'(x)\right) \right\| \\ &\le \gamma \left\| F'(x^*)^{-1} \right\| \left\| x - x^* \right\| \\ &\le \gamma\delta \left\| F'(x^*)^{-1} \right\| < \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (7)$$

لإثبات العلاقة (6)، نلاحظ أنه إذا كان $x \in B_\delta(x^*)$ فإن $x^* + t(x - x^*) \in B_\delta(x^*)$ من أجل كل $0 \le t \le 1$. ثم باستخدام (4) والمبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل، نحصل على

$$\left\| F(x) \right\| \le \int_0^1 \left\| F'\left(x^* + t(x - x^*)\right) \right\| \left\| x - x^* \right\| dt \le 2 \left\| F'(x^*) \right\| \left\| x - x^* \right\|$$

وهو الطرف الأيمن للمتراجحة في العلاقة (6). من أجل الطرف الأيسر نلاحظ أن

$$\begin{aligned} F'(x^*)^{-1} F(x) &= F'(x^*)^{-1} \int_0^1 \left\| F'\left(x^* + t(x - x^*)\right) \right\| \left\| x - x^* \right\| dt \\ &= (x - x^*) - \int_0^1 \left(I - F'(x^*)^{-1} F'\left(x^* + t(x - x^*)\right) \right)(x - x^*) dt \end{aligned}$$

من العلاقة (7) نحصل على

$$\left\| F'(x^*)^{-1} F(x) \right\| \ge \left\| x - x^* \right\| \left(1 - \left\| I - F'(x^*)^{-1} F'\left(x^* + t(x - x^*)\right) \right\| \right) \ge \left\| x - x^* \right\| / 2$$

لذلك

$$\left\| x - x^* \right\| / 2 \le \left\| F'(x^*)^{-1} F(x) \right\| \le \left\| F'(x^*)^{-1} \right\| \left\| F(x) \right\|$$

وهكذا يتم البرهان.

والآن أصبحنا على استعداد لإثبات تقارب طريقة نيوتن:

مبرهنة (2) :

بناءً على الفرضيات السابقة، يوجد $K>0$ و $\delta>0$ بحيث يكون من أجل أي $x_0 \in B_\delta(x^*)$ ، المتتالية $\{x_n\}$ المولدة بطريقة نيوتن تحقق $x_n \in B_\delta(x^*)$ ، و

$$\|x_{n+1}-x^*\| \le K\|x_{n+1}-x^*\|^2, \quad n=0,1,2,...$$

و لذلك فإنَّ طريقة نيوتن تتقارب تربيعياً.

البرهان:

لدينا فرضاً

$$x_{n+1}-x^* = x_{n+1}-x^* - F'(x_n)^{-1}F(x_n)$$
$$= F'(x_n)^{-1}\int_0^1 \Big(F'(x_n)-F'\big(x^*+t(x_n-x^*)\big)\Big)(x_n-x^*)dt$$

باستخدام (4) و(5) نستنتج أنَّ:

$$\|x_{n+1}-x^*\| \le \Big(2\|F'(x^*)^{-1}\|\Big)\gamma\|x_{n+1}-x^*\|^2/2$$

وبهذا يتم البرهان.

3- طريقة تكرار النقطة الثابتة ومبرهنة التطبيق (التقلصي) الانضغاطي:

3-1 مقدمة:

ليكن $y=g(x)$ حيث $x,y \in R^n$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1,\dots,x_n) \end{bmatrix}$$

نفرض أن $g(x)$ تُعرف من أجل $x \in D$ و D مجموعة جزئية من R^n .

هدفنا إيجاد الحل x^* لمعادلة النقطة الثابتة.

$$g(x) = x$$

طريقة إيجاد x^* هي الطريقة التكرارية لمبرهنة النقطة الثابتة:

نأخذ نقطة بدأ تقديرية $x^{(0)} \in D$ ونعرف العلاقة التالية

$$x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

لاحظ أن هذا الحل قد لا يكون متقارباً. ولكن إذا كانت المتتالية $x^{(k)}$ متقاربة، والتابع g مستمراً، عندئذٍ: x^* حل لمعادلة النقطة الثابتة.

2-3 مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (3) :

لتكن $D \subset R^n$ و $g : D \to R^n$ ، وبفرض

1. D مغلقة (بعبارة أخرى تحوي D جميع نقاط المتتالية $x^{(k)}$).
2. $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$.
3. التطبيق g تقلصي في D .: يوجد $\gamma < 1$ بحيث

$$\forall x, y \in D : \ \|g(x) - g(y)\| \le \gamma \|x - y\| \tag{8}$$

عندئذٍ:

1. يوجد $x^* \in D$ وحيد يُحقق: $g(x^*) = x^*$.
2. من أجل أي $x^{(0)} \in D$ يوجد متتالية $x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right)$ تتقارب من x^* عندما $k \to \infty$.
3. تقدير $x^{(k)}$ الخطأ المتعلق بالخطأ الابتدائي:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \tag{9}$$

وتقدير الخطأ المتعلق بالخطأ السابق:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{\gamma}{1-\gamma} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \tag{10}$$

البرهان:

نختار $x^{(0)} \in D$ و نعرف $x^{(k)}$ بالعلاقة:

$$x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right) \qquad k = 0,1,2,...$$

لدينا من الخاصة التقلصية (8)

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| = \left\| g\left(x^{(k)}\right) - g\left(x^{(k-1)}\right) \right\| \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \tag{11}$$

وبالتالي:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \gamma^k \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| \tag{12}$$

بفرض $d = \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$. لدينا من متراجحة المثلث (12)

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k+l)} \right\| \le \left\| x^{(k)} - x^{(k+1)} \right\| + ... + \left\| x^{(k+l-1)} - x^{(k+1)} \right\|$$

$$\le \gamma^k d + ... + \gamma^{k+t-1} d = \gamma^k d \left(1 + \gamma + ... + \gamma^{t-1}\right)$$

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le q^k d \frac{1}{1-q} \tag{13}$$

باستخدام مجموع السلسلة الهندسية $\sum_{j=0}^{l-1} q^j \le \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{(1-q)}$. لاحظ أن العلاقة (13) تعطي المتسلسلة $\sum x^{(k)}$ وهي متسلسلة كوشي. ولذلك يجب أن تتقارب إلى حد $x^* \in R^n$ (حيث إنّ R^n فضاء تام). وبما أن D مغلقة فإن $x^* \in D$. وجدنا $x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right)$، و بالتالي:

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \to \infty} g\left(x^{(k)}\right)$$

لكن التابع g مستمر

$$x^* = \lim_{k \to \infty} g\left(x^{(k)}\right) = g\left(\lim_{k \to \infty} x^{(k)}\right) = g\left(x^*\right)$$

والآن لنثبت أنَّ النقطة الثابتة وحيدة. نفرض أن لدينا نقاط ثابتة $x^* = g\left(x^*\right)$ و $y^* = g\left(y^*\right)$. باستخدام العلاقة (8) نجد :

$$\|x^* - y^*\| = \|g(x^*) - g(y^*)\| \le \gamma \|x^* - y^*\|$$

مما يؤدي $(1-\gamma)\|x^* - y^*\| \le 0$ ولذلك $\|x^* - y^*\| = 0$ بعبارة أخرى $x^* = y^*$.

3-3 إثبات خاصة التقلصية:

ترتبط الخاصة التقلصية باليعقوبي $g'(x)$ ، حيث $g'(x)$ مصفوفة من المرتبة $n \times n$ من أجل كل نقطة $x \in D$. إذا كان معيار المصفوفة يحقق $\|g'(x)\| \le \gamma < 1$ عندئذٍ يجب أن يكون التابع g تقليصاً.

مبرهنة (4)

بفرض المجموعة $D \subset R^n$ محدبة و للتابع $g : D \to R^n$ مشتقات جزئية $(\frac{\partial g_j}{\partial k})$ مستمرة في D . إذا كان $\gamma < 1$ ، $\|g'(x)\|$ تحقق:

$$\forall x \in D : \quad \|g'(x)\| \le \gamma \qquad (14)$$

عندئذٍ التطبيق g تقلصي في D و يحقق العلاقة (8).

البرهان :

ليكن $x, y \in D$. تُحقق مجموعة النقاط على الخط المستقيم من x إلى y العلاقة $x + t(y - x)$ حيث $t \in [0,1]$. وبما أن D محدبة فإن جميع النقاط تقع في D . إذا كان $G(t) := g(x + t(y - x))$ ، فإن $G'(t) := g'(x + t(y - x))(y - x)$ و

$$g(y) - g(x) = G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t)dt = \int_0^1 g'(x + t(y - x))(y - x)dt$$

بملاحظة $\left\|\int_a^b F(t)dt\right\| \le \int_a^b \|F(t)\|dt$ ، نجد:

$$\|g(y) - g(x)\| \le \int_0^1 \|g'(x + t(y - x))(y - x)dt\|$$

$$\le \int_0^1 \underbrace{\|g'(x + t(y - x))\|}_{\le \gamma} \|(y - x)\|dt \le \gamma \|(y - x)\|$$

4-3 تقدير الخطأ :

يفيد تقدير الخطأ (9) و(10) في معرفة عدد التكرارات التي نحتاج إليها من أجل دقة معطاة. ولهذا نحتاج لمعرفة الثابت γ، وعادةً نحصل عليه من (14).

1- التقدير المتعلق بالخطأ الابتدائي: يمكننا الحصول على $x^{(1)}$ من القيمة الابتدائية $x^{(0)}$، ثم نقدر الخطأ من العلاقة:

$$\left\| x^{(k)} - x^* \right\| \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$$

تفيد هذه العلاقة بمعرفة عدد التكرارات اللازمة (k) من أجل دقة معينة معطاة.

2- التقدير المتعلق بالخطأ السابق: بعد أن نحسب $x^{(k)}$ نرغب بتحديد المجموعة التي ينتمي لها الحل الفعلي x^*.

ليكن

$$\delta_k := \frac{\gamma}{1-\gamma} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|, \quad D_k := \left\{ x \;\middle|\; \left\| x - x^{(k)} \right\| \le \delta_k \right\}$$

يبين تقدير الخطأ (2) أن x^* ينتمي للمجموعة D_k. ونلاحظ:

- يمكن تصغير نصف القطر δ_k للمجموعة D_k بواسطة المعامل (γ) مع كل تكرار، حيث $\delta_{k+1} \le \gamma\ \delta_k$.
- المجموعات D_k متداخلة: $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \ldots$.

لإثبات أن $D_k \supset D_{k+1}$ نفرض أن $x \in D_{k+1}$. عندئذٍ

$$\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \underbrace{\left\| x - x^{(k+1)} \right\|}_{\le \delta_{k+1}} + \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} + 1 \right) \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|$$

$$\le \frac{1}{1-\gamma} \gamma \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| = \delta_k \qquad (15)$$

بتطبيق نظيم اللانهاية نجد : $\left\| x^{(k)} - x^* \right\|_\infty \le \delta_k$ ، وهذا يبين أنَّ مركبات $\left(x^*\right)$ تنتمي للمجال

$$x_j^* \in \left[x_j^{(k)} - \delta_k\,, x_j^{(k)} + \delta_k\right]$$

بعبارة أخرى المجموعة D_k هي مربع/أومكعب/أو مكعب زائدي طول حرفه $2\delta_k$ ومركزه $x^{(k)}$.

مثال(2):

أوجد حل جملة المعادلات غير الخطية التالية:

$$x_1 = \frac{1}{10}\left[1 - x_2 - \sin(x_1 + x_2)\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{10}\left[2 + x_1 + \cos(x_1 - x_2)\right]$$

حيث لدينا:

$$g(x) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 - x_2 - \sin(x_1 + x_2) \\ 2 + x_1 + \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

أولا: لنثبت أن g تقلصي باستخدام المبرهنة (4).

نوجد في البداية $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -\cos(x_1 + x_2) & -1 - \cos(x_1 + x_2) \\ 1 - \sin(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

لتكن $A := g'(x)$. لنستخدم نظيم اللانهاية.

$$\|A\|_\infty = \max\left\{|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{21}| + |a_{22}|\right\}$$

نحصل من أجل أي $x_1, x_2 \in R$

$$|a_{11}| = \frac{1}{10}|-\cos(x_1 + x_2)| \le \frac{1}{10}$$

$$|a_{12}| = \frac{1}{10}|-1 - \cos(x_1 + x_2)| \le \frac{1}{10}(1+1)$$

$$|a_{21}| = \frac{1}{10}|1 - \sin(x_1 - x_2)| \le \frac{1}{10}(1+1)$$

$$|a_{22}| = \frac{1}{10}|\sin(x_1 - x_2)| \le \frac{1}{10}$$

لذلك من أجل أي $x \in R^2$ لدينا

$$\|g'(x)\|_\infty \le \frac{3}{10}\gamma < 1$$

وفق المبرهنة(4) نحصل على أن g تقلصي على كل R^2.

والآن نريد استخدام المبرهنة (3) نحتاج لأخذ مجموعة D تحقق الفرضيات الثلاث للمبرهنة. لذا لدينا احتمالات:

الأحتمال الأول $D = R^2$: يمكننا استخدام المجموعة $D = R^2$. هذه المجموعة مغلقة. كما لدينا من أجل أي $x \in R^2$ تابع $g(x) \in R^2$. كما بينا أن g تقلصي على كل R^2. لذلك نحصل عليها من المبرهنة (3) أن لجملة المعادلات غير الخطية $g(x) = x$ حل وحيد x^*في كل R^2.

الأحتمال الثاني $D = [-1,1]\times[-1,1]$: يمكن أن نستخدم D المربع حيث $-1 \le x_1 \le 1$ و $-1 \le x_2 \le 1$. هذه المجموعة مغلقة (يتم تضمين حدود المربع). والآن لدينا للتأكد من أنه لكل $x \in D$ يوجد $y = g(x) \in D$. باستخدام $-1 \le \sin\alpha \le 1$ و $-1 \le \cos\alpha \le 1$

$$-\frac{2}{10} = \frac{1}{10}(1-1-1) \le y_1 = \frac{1}{10}[1 - x_2 - \sin(x_1 + x_2)] \le \frac{1}{10}(1+1+1) = \frac{3}{10}$$

$$0 = \frac{1}{10}(2-1-1) \le y_2 = \frac{1}{10}[2 + x_1 + \cos(x_1 - x_2)] \le \frac{1}{10}(2+1+1) = \frac{4}{10}$$

لذا $y \in D$ والافتراض الثاني من المبرهنة محقق. لقد أظهرنا بالفعل أن g تقلصي على كل R^2، وبالتالي فإن الفرضية الثالثة محققة من أجل $x, y \in D$. نستطيع تطبيق المبرهنة (3) والحصول على حل وحيد x^* لجملة المعادلات غير الخطية في كل المربع $D = [-1,1]\times[-1,1]$.

الحساب العددي: نبدأ مع الحل البدائي $x^{(0)} = (0,0)^T$. بعد كل تكرار نوجد δ_k

والمربع D_k الحاوي على x^* :

k	$x^{(k)}$	δ_k	D_k
1	$(.1,.3)^T$	1.3×10^{-1}	$[-.02857,.2286]\times[.1714,.4286]$
2	$(.03106,.3080)^T$	3.0×10^{-2}	$[.00151,.06060]\times[.2785,.3376]$
3	$(.03594,.2993)^T$	3.7×10^{-3}	$[.03221,.03967]\times[.2956,.3030]$
4	$(.03717,.3001)^T$	5.3×10^{-4}	$[.03664,.03770]\times[.2996,.3007]$
5	$(.03689,.3003)^T$	1.2×10^{-4}	$[.03677,.03701]\times[.3001,.3004]$

ملاحظ:

1. δ_k يتناقص وفق المعامل $\gamma = 0.3$ مع كل تكرار.
2. المجموعات D_k متداخلة: $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \ldots$.

5-3 استخدام مبرهنة النقطة الثابتة دون فرضية $g(D)\subset D$:

يكمن الجزء الصعب باستخدام مبرهنة التطبيق التقلصي في العثور على مجموعة D تحقق الفرضيتين لمبرهنة النقطة الثابتة:

- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- g تقلصي في D.

عادة ما نتمكن من إثبات $\|g'(x)\| \le \gamma < 1$ من أجل x في جزء من المنطقة المحدبة $\tilde{D}$. نعتقد أنه يوجد حل x^* يمثل نقطة ثابته في $\tilde{D}$. ولكن قد لا يكون صحيحاً أن $g(x) \in \tilde{D}$ من أجل كل $x \in \tilde{D}$.

في هذه الحالة قد نستطيع حساب الحل بعدد قليل من التكرارات $x^{(k)}$: نبدأ مع $k = 0$ وبحل ابتدائي $x^{(0)} \in D$. ثم نكرر

- نجعل $k = k+1$ ونحسب $x^{(k)} := g\left(x^{(k+1)}\right)$.
- نحسب $\delta_k := \frac{\gamma}{1-\gamma}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ ، $D_k = \left\{x \mid \left\|x - x^{(k)}\right\| \le \delta_k\right\}$().

حتى نحصل على $D_k \subset \tilde{D}$ أو $x^{(k)} \notin \tilde{D}$.

إذا كان التكرار موجوداً في $\tilde{D}$ لن نستطيع أن نستنتج أي شيء. لكن طالما بقيت النقاط x^* في $\tilde{D}$ لدينا $\delta_{k+1} \le \gamma\, \delta_k$ و $D_{k+1} \subset D_k$. لذا فإننا نتوقع أنه بالنسبة لبعض القيم k سيتحقق الشرط $D_k \subset \tilde{D}$ (إذا كان $x^{(k)}$ يتقارب ... $\tilde{D}$ .. $D_k \subset \tilde{D}$ ....) إذا كانت الحلقة منتهية مع $D_k \subset \tilde{D}$ من أجل $k = K$ لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة (5)

لتكن $\tilde{D} \subset R^n$ ، نفترض أن التابع $g : \tilde{D} \to R^n$ وبحيث من أجل $\gamma < 1$

$$\forall x, y \in \tilde{D} : \ \left\|g(x) - g(y)\right\| \le \gamma \|x - y\|$$

لتكن $x^{(0)} \in \tilde{D}$ و نعرف من أجل $k = 0,1,2,...$

$$x^{(k+1)} := g\left(x^{(k)}\right),\ \delta_k := \frac{\gamma}{1-\gamma}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|,\ D_k := \left\{x \mid \left\|x - x^{(k)}\right\| \le \delta_k\right\}$$

نلاحظ $x^{(k-1)} \in \tilde{D}$ و $D_k \subset \tilde{D}$ إذا:

- للمعادلة $g(x) = x$ حل وحيد x^* في $\tilde{D}$.
- يحقق هذا الحل $x^* \in \tilde{D}$ من أجل كل $k \ge K$.

البرهان:

لتكن $x \in D_k$. نريد اثبات أن $g(x) \in D_k$. بما أن $D_k \subset \tilde{D}$

$$\left\|g(x) - x^{(K)}\right\| \le \gamma \left\|x - x^{(K-1)}\right\| \le \gamma \left\|x - x^{(K)}\right\| + \gamma \left\|x^{(K)} - x^{(K-1)}\right\|$$

$$\le \gamma\delta_K + (1-\gamma)\delta_K = \delta_K$$

بما أن D_k مغلقة و $D_k \subset \tilde{D}$ فإنَّ المجموعة $D := D_k$ تحقق جميع فرضيات

المبرهنة(3). من هنا يوجد حل وحيد $x^* \in D$. ينص تقدير الخطأ في العلاقة (10) على أن $x^* \in D$ من أجل كل تكرار $x^{(k)}$ حيث $k \geq K$. لنفرض أنه يوجد نقطة ثابتة أخرى ، $y^* \in D$ تحقق $g(y^*) = y^*$. عندئذٍ

$$\|y^* - x^*\| = \|g(y^*) - g(x^*)\| \leq \gamma \|y^* - x^*\|$$

بما أن $\gamma < 1$ ينتج لدينا أن $\|x^* - y^*\| = 0$.

<u>ملخص:</u>

- نوجد مجموعة محدبة $\tilde{D}$ التي نتوقع أن $x^* \in \tilde{D}$ حيث نستطيع أن نبين $\|g'(x)\| < \gamma < 1$.
- نأخذ $x^{(0)} \in \tilde{D}$ و نوجد النقطة الثابتة تكرارياً

من أجل كل تكرار:

- نوجد $x^{(k)}$ و D_k .
- إذا كان $x^{(k)} \notin \tilde{D}$: نتوقف (لا نستطيع أن نستنتج أي شيء).
- إذا كان $D_k \subset \tilde{D}$: ننجح في العمل عندما يتحقق $x^* \in \tilde{D}$ ، و يجعل $x^* \in D_k$ من أجل كل التكرارات التالية.

مثال(3)

ليكن

$$g(x) := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_1 - x_1 x_2 + 1 \\ x_2 - x_1 x_2^2 + 1 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ اليعقوبي هو

$$g'(x) := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2^2 & 1 + 2x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

ليكن $\tilde{D} = [0,a] \times [0,a]$ حيث $a \leq 1$ و النظيم هو نظيم اللانهاية. والآن نحصل من أجل $x \in \tilde{D}$ على

$$\|g'(x)\|_\infty \le \frac{1}{3}\max\{1+a, a^2+1+2a^2\}$$

من أجل $a=1$ نحصل على $\|g'(x)\|_\infty \le \frac{4}{3}$ وهي كبيرة جداً. لذا سنجرب $a=0.6$ والتي تعطي $\|g'(x)\|_\infty \le \frac{2.08}{3} = q < 1$. لذلك يكون g تقلصي على $\tilde{D} = [0,0.6]\times[0,0.6]$. نلاحظ أن

$$g\left(\begin{bmatrix}0.6\\0.6\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0.41333\\0.60533\end{bmatrix} \notin \tilde{D}$$

لذا $\tilde{D}$ لا تحقق الفرضيات الثلاث للمبرهنة(3)

من أجل

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

نحصل على

$$x^{(1)} = (.33333, .33333)^T \in \tilde{D}$$

$$D_1 = [-0.42029, 1.08696]\times[-0.42029, 1.08696] \not\subset \tilde{D}$$

$$x^{(2)} = (.40741, .45679)^T \in \tilde{D}$$

$$D_2 = [0.12829, 0.68653]\times[0.17767, 0.73591] \not\subset \tilde{D}$$

$$x^{(3)} = (.40710, .51393)^T \in \tilde{D}$$

$$D_3 = [0.27791, 0.53629]\times[0.38474, 0.64313] \not\subset \tilde{D}$$

$$x^{(3)} = (.39929, .54049)^T \in \tilde{D}$$

$$D_4 = [0.33926, 0.45933]\times[0.48045, 0.60052] \not\subset \tilde{D}$$

$$x^{(5)} = (.39449, .55238)^T \in \tilde{D}$$

$$D_5 = [0.36761, 0.42138]\times[0.52549, 0.57926] \subset \tilde{D}$$

لـــذلك يمكننـــا أن نســـتنتج مـــن المبرهنـــة (3) أن هنـــاك حـــلاً وحيـــداً $x^* \in \tilde{D}[0,0.6]\times[0,0.6]$. يقـع هـذا الحـل x^* فـي مربـع صـغير D_5 . مـن أجـل $k=5,6,7,....$ نحصـل علـى $x^* \in D_k$ حيـث D_k مربـع طـول حرفـه $2\delta_k$. $\delta_k \le \gamma^{k-5}\delta_5 \le \left(\frac{2.08}{3}\right)^{k-5} 0.027$ يمكننـا الحصـول علـى مربعـات صـغيرة تحتـوي على الحل بشكلٍ قسري إذا اخترنا k كبيرة بقدرٍ كافٍ.

تمارين

1- استخدم طريقة النقطة الثابتة لإيجاد حل تقريبي للمسائل التالية:

(a
$$x = g_1(x,y) = x - y^2$$
$$y = g_2(x,y) = -x + 6y$$

(b
$$x = g_1(x,y) = \frac{\left(x^2 - y^2 - x - 3\right)}{3}$$
$$y = g_2(x,y) = \frac{(-x + y - 1)}{3}$$

(c
$$x = g_1(x,y) = \sin(y)$$
$$y = g_2(x,y) = -6x + y$$

(d
$$x = g_1(x,y,z) = 9 - 3y - 2z$$
$$y = g_2(x,y,z) = 2 - x + z$$
$$z = g_3(x,y,z) = -9 + 3x + 4y - z$$

2- أوجد المنطقة اللازمة في المستوي xy بحيث تتقارب فيها طريقة النقطة الثابتة للجملة التالية:

$$x = g_1(x,y) = \frac{\left(x^2 - y^2 - x - 3\right)}{3}$$
$$y = g_2(x,y) = \frac{(x + y + 1)}{3}$$

3- استخدم الشكل المناسب لإيجاد حل تقريبي باستخدام طريقة النقطة الثابتة للجملة التالية:

$$6x + y + z = 1$$
$$x + 4y + z = 2$$
$$x + y + 5z = 0$$

4- لتكن لدينا الفرضيات التالية:

a) جملة المعادلات غير الخطية

$$x = g_1(x,y)$$
$$y = g_2(x,y)$$

b) يوجد $0<\gamma<1$ يحقق:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} g_1(x,y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y)\right| < \gamma$$

و

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} g_2(x,y)\right| < \gamma$$

ذلك $\forall (x,y) \in D = \{(x,y): a<x<b \ , c<y<d\}$

c) وبفرض $a<x_0<b \ , c<y_0<d$ و $r_k = \max\{|e_k|,|E_k|\}$

حيث $e_k = x^* - x_k \ , E_k = y^* - y_k$

d)

$$e_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x} g_1\left(a_k^*, y_k\right) + \frac{\partial}{\partial y} g_1\left(x^*, c_k^*\right)$$

$$E_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x} g_2\left(b_k^*, y_k\right) + \frac{\partial}{\partial y} g_2\left(x^*, d_k^*\right)$$

حيث
$$a<a_k^*<b \ , c<c_k^*<d$$
$$a<b_k^*<b \ , c<d_k^*<d$$

أثبت ما يلي :

(a) (x_k, y_k) متقاربة من (x^*, y^*)

(b) $|e_1| \le \gamma r_0 \ , \ |E_1| \le \gamma r_0$

(c) $|e_2| \le \gamma r_1 \le \gamma^2 r_0 \ , |E_2| \le \gamma r_1 \le \gamma^2 r_0$

(d) $|e_k| \le \gamma r_{k-1} \le \gamma^k r_0 \ , |E_k| \le \gamma r_{k-1} \le \gamma^k r_0$

(e) $\lim_{k\to\infty} x_k = x^* , \lim_{k\to\infty} y_k = y^*$

5- لتكن لدينا جملة المعادلات التالية:

$$0 = x^2 - 2x - y + 0.5$$

$$0 = x^2 + 4y^2 - 4$$

استخدم طريقة نيوتن لإيجاد (x_3, y_3) مبدئياً $(x_0, y_0) = (2, 2.5)$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

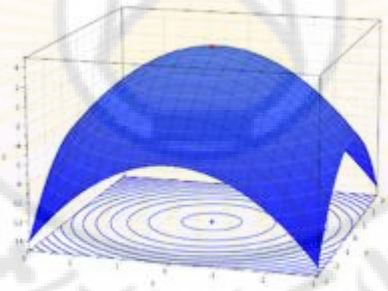
الأمثليات العددية

Numerical Optimization

1- مقدمة:

1-1 ما هي الأمثليات (الحلول المثلى)؟

الأمثليات هي علم تحديد أفضل الحلول لمسألة ما. فهي تعني إيجاد أعظم ربح في عمل ما أو إيجاد أقل تكلفة أو تقدير أصغر خطأ ... .وللأمثليات تطبيقات كثيرة في العلوم والطب والهندسة والاقتصاد وغيرها.



الشكل 1 يبين القيمة العظمى في الفضاء $\Re^3$ و المسقط في الفضاء $\Re^2$

1-2 كيف تطور علم الأمثليات ؟

لقد كانت طرائق الأمثليات العددية قبل عام 1940 قليلة، وبعد هذا العام وحتى 1950 ظهر فرع هام من فروع الأمثليات وهو البرمجة الخطية (أو التنهيج الخطي). وبعد الحرب تطورت الأمثليات من خلال طريقة جديدة تُعرف بطريقة تسلق

التلال. ولكن استخدام تلك الطرائق الجديدة كان صعباً وغير كاف. في العام 1959 قدم دافيدون مقالة يقترح فيها طرائق المتغيرات المترية التي وضحها بعد ذلك فليتشر وباول وبينا كيفية استخدامها وأعطيا تطبيقات لحل مسائل ذات متغيرات متعددة. بعد ذلك توسع موضوع الأمثليات بشكل كبير واكتشفت طرائق مختلفة لحل مسائل متنوعة.

سنشرح في هذا الفصل بشكل مختصر بعض الطرائق الأساسية لتحديد القيمة الحدية لتابع بمتغير أو عدة متغيرات.

2- تحديد القيمة الصغرى لتابع بمتغير واحد:

تعريف (1) :

نقول إنَّ للتابع f قيمة محلية صغرى عند النقطة $x=p$ إذا وجد مجال مفتوح I يحوي القيمة p بحيث يكون:

$$f(p)\le f(x) \qquad \forall x\in I \tag{1}$$

وبشكل مشابه: نقول إنَّ للتابع f قيمة محلية عظمى عند النقطة $x=p$ إذا تحقق

$$f(p)\ge f(x) \qquad \forall x\in I \tag{2}$$

وإذا كان للتابع f قيمة محلية صغرى أو قيمة محلية عظمى عند النقطة $x=p$ فإننا نقول إنَّ للتابع قيمة محلية حدية عند النقطة $x=p$.

تعريف (2):

ليكن التابع $f(x)$ **معرفاً على المجال** I :

1- إذا تحقق $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)<f(x_2)$ من أجل أي نقطتين $x_1,x_2\in I$ ، عندها يكون التابع $f(x)$ متزايداً في المجال I.

2- وإذا تحقق $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)>f(x_2)$ من أجل أي نقطتين $x_1,x_2\in I$ ، عندها يكون التابع $f(x)$ متناقصاً في المجال I.

مبرهنة(1):

بفرض أنَّ التابع $f(x)$ مستمر في المجال $I=[a,b]$ وقابل للاشتقاق في (a,b) فإن:

1- إذا كان $f'(x)>0$ من أجل النقط $x\in(a,b)$, عندها يكون $f(x)$ متزايداً في المجال I.

2- إذا كان $f'(x)<0$ من أجل النقط $x\in(a,b)$, عندها يكون $f(x)$ متناقصاً في المجال I.

مبرهنة(2):

بفرض $f(x)$ تابع معرف على المجال $I=[a,b]$، وبفرض $p\in(a,b)$ قيمة محلية حدية للتابع $f(x)$، فإذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند $x=p$ عندئذٍ $f'(p)=0$.

مبرهنة(3)- إختبار المشتق الأول:

ليكن التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $I=[a,b]$ وبفرض أن المشتق الأول $f'(x)$ معرَف من أجل كل النقط $x\in(a,b)$، (من الممكن استثناء النقطة $x=p$) فإن:

1. إذا كان $f'(x)<0$ على المجال (a,p) وكان $f'(x)>0$ في (p,b) عندها تكون $f(p)$ قيمة محلية صغرى.
2. و إذا كان $f'(x)>0$ على المجال (a,p) وكان $f'(x)<0$ في (p,b) عندها تكون $f(p)$ قيمة محلية عظمى.

مبرهنة (4) – إختبار المشتق الثاني:

ليكن التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $I=[a,b]$ وليكن $f'(x)$ و $f''(x)$ معرفين من أجل كل النقط $x\in(a,b)$، و بفرض أن النقطة $p\in(a,b)$ نقطة حرجة

حيث $f'(p)=0$ فإن:

1. إذا كان $f''(p)>0$ عندها تكون $f(p)$ قيمة محلية صغرى للتابع f .
2. إذا كان $f''(p)<0$ عندها تكون $f(p)$ قيمة محلية عظمى للتابع f .
3. إذا كان $f''(p)=0$ عندها لا نعلم ما هي $f(p)$.

مثال(1):

استخدم المشتق الثاني لتحديد القيمة القصوى للتابع:

$$f(x)=x^3+x^2-x+1$$

في المجال $[-2,2]$.

الحل:

المشتق الأول للتابع هو:

$$f'(x)=3x^2+2x-1$$

المشتق الثاني للتابع هو:

$$f''(x)=6x+2$$

هناك نقطتان تحققان: $f'(x)=0$ هما $\left(x=\frac{1}{3}, x=-1\right)$.

1. من أجل $x=\frac{1}{3}$ ، نجد أن $f'(\frac{1}{3})=0$ و $f''(\frac{1}{3})=4>0$. إذا للتابع f قيمة محلية صغرى عند $x=\frac{1}{3}$.
2. من أجل $x=-1$ ، نجد أن $f'(-1)=0$ و $f''(-1)=-4<0$. إذا للتابع f قيمة محلية صغرى عند $x=-1$.

1-2 طرائق البحث المجالية (Bracketing Search Methods):

للإقتراب أكثر من إيجاد القيمة الدنيا للتابع $f(x)$ ضمن مجال معطى، نقوم بتقدير قيمة التابع عدة مرات ونبحث عن القيمة المحلية الصغرى. وللتقليل من الخطوات التقديرية نحتاج إلى استراتيجية معينة لتحديد أين سنبدأ بتقدير هذا التابع.

هناك طريقتان فعّالتان وهما طريقة "النسبة الذهبية" وطريقة "بحث فيبيناتشي".

تعريف (3):

ندعو التابع $f(x)$ **أحادي التمثيل (unimodal) على المجال** $I=[a,b]$، **إذا وجدت قيمة وحيدة** $p\in I$ **تحقق:**

1- التابع $f(x)$ متناقص على المجال $[a,p]$.

2- التابع $f(x)$ متزايد على المجال $[p,b]$.

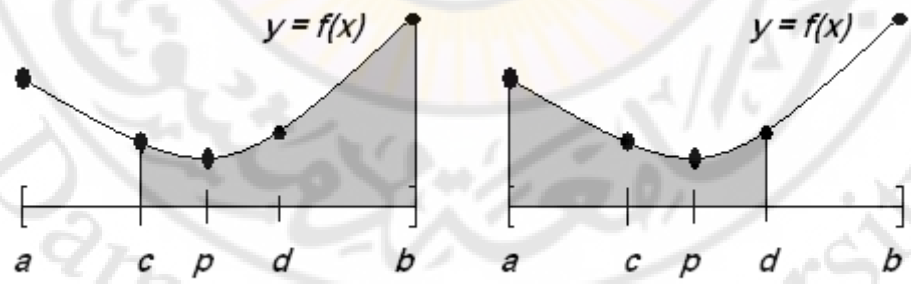
1-1-2 طريقة النسبة الذهبية (Golden Ratio):

بفرض $f(x)$ تابع أحادي التمثيل على المجال $[a,b]$، عندها يمكننا استبدال المجال $[a,b]$ بمجال آخر جزئي منه حيث يأخذ التابع $f(x)$ قيمته الدنيا فيه.

بمقاربة أخرى: بأخذ نقطتين داخليتين $c<d$ حيث $a<c<d<b$، وبحيث:

1- إذا كان $f(c)\le f(d)$ عندها نضغط (squeeze) المجال الأيمن $[a,d]$.

2- إذا كان $f(d)<f(c)$ عندها نأخذ المجال الأيسر $[c,b]$.



(2) (1)

الشكل 2: طريقة الإختيار في النسبة الذهبية القسم (1) الضغط من اليمين، القسم (2) الضغط من اليسار

بالتالي: بما أن التابع $f(x)$ أحادي التمثيل فإنه يضمن لنا وجود القيم $f(c)$, $f(d)$ بحيث تكون أقل من $\max\{f(a),f(b)\}$. (الشكل2).

إذا كان $f(c) \le f(d)$ فإن القيمة الدنيا لابد أن تقع في المجال البديل $[a,d]$، وبالتالي نستبدل النقطة b بالنقطة d ونتابع البحث في المجال البديل الآخر $[a,d]$. وإذا كان $f(d) < f(c)$ فإن القيمة الدنيا لابد أن تقع في المجال $[c,b]$، وبالتالي نستبدل النقطة a بالنقطة c ونتابع البحث ضمن المجال $[c,b]$.

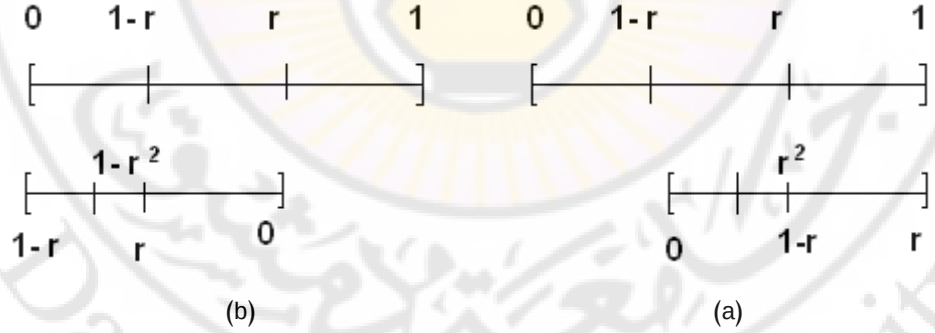
تكون النقطتين الداخليتين c, d محددتين حيث تكون نتائج المجالين $[a,c],[d,b]$ متماثلة أي $d-b=c-a$ حيث:

$$c = a + (1-r)(b-a) = ra + (1-r)b \quad (3)$$

$$d = b + (1-r)(b-a) = (1-r)a + rb \quad (4)$$

ويكون $\frac{1}{2} < r < 1$ (للحفاظ على الترتيب $c < d$).

نحتاج قيمة r لتحديد ثابت لكل مجال بديل. كما أن أحد النقط القديمة الداخلية ستستخدم كنقطة داخلية في المجال البديل الجديد بينما تصبح باقي النقط الداخلية نقط نهاية المجال البديل الجديد. الشكل3.



الشكل 3: الشكل a يبين الضغط من اليمين ويكون المجال الجديد [0,r]

الشكل b يبين الضغط من اليسار ويكون المجال الجديد [1 , 1-r]

هكذا سيتم إيجاد نقطة جديدة واحدة في كل تكرار فقط كما سيتم تقييم تقدير واحد للتابع. إذا كان $f(c) \le f(d)$ ووجد تقدير واحد جديد للتابع، عندها سيكون لدينا:

$$\frac{d-a}{b-a}=\frac{c-a}{d-a}$$
$$\frac{r(b-a)}{b-a}=\frac{(1-r)(b-a)}{r(b-a)}$$
$$\frac{r}{1}=\frac{(1-r)}{r}$$
$$r^2+r-1=0$$
$$r=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad (5)$$

حيث $r=(-1+\sqrt{5})/2$ هي النسبة الذهبية.

وبشكلٍ مشابه نجد أنه إذا كان $f(d)<f(c)$ فإنَّ $r=(-1+\sqrt{5})/2$.

سنبين في المثال التالي كيفية ايجاد جذر تابع باستخدام طريقة البحث بالنسبة الذهبية.

مثال(2):

أوجد القيمة الدنيا للتابع $f(x)$ ذو التمثيل الأحادي حيث $f(x)=x^2-\sin(x)$ على المجال $[0,1]$.

الحل:

لإيجاد حل المعادلة $f'(x)=0$، لدينا $f'(x)=2x-\cos(x)=0$، وبما أنَّ $f'(0)=-1<0$ و $f'(1)=1.4596977>0$ إذاً حسب مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد جذر لـ $f'(x)$ في المجال $[0,1]$. بتطبيق طريقة القاطع عند بداية المجال $p_0=0$ و نهاية المجال $p_1=1$ نحصل على النتائج التالية:

k	p_k	$2p_k-\cos(p_k)$
0	0.0000000	-1.00000000
1	1.0000000	1.45969769
2	0.4065540	-0.10538092
3	0.4465123	-0.00893398
4	0.4502137	0.00007329

k	p_k	$2p_k - \cos(p_k)$
5	0.4501836	-0.00000005

الجدول 1

ومنه

$$f'(0.4501836) = 0$$

المشتق الثاني للتابع $f''(x) = 2 + \sin(x)$ ومنه $f''(0.4501836) = 2.435131 > 0$

ونحصل على القيمة الدنيا للتابع (وفق مبرهنة اختبار المشتق الثاني)

$$f(0.4501836) = -0.2324656$$

الحل باستخدام طريقة البحث الذهبية:

لتكن $a_0 = 0, b_0 = 1$ بتطبيق الصيغ (3) و(4) نجد:

$$c_0 = 0 + (1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(1-0) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38919660$$

$$d_0 = 1 - (1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(1-0) = \frac{-1-+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180340$$

بحساب

$$f(d_0) = -0.19746793\,,\ f(c_0) = -0.22684748$$

وبما أنَّ $f(c_0) < f(d_0)$ فإن المجال البديل $[a_0, d_0] = [0.00000000, 0.6180340]$.

لتكن $a_1 = a_0\,,\ b_1 = d_0\,,\ d_1 = c_0$ ولنستخدم الصيغة(3) لإيجاد c_1:

$$c_1 = a_1 + (1-r)(b_1 - a_1)$$

$$= 0 + (1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(0.6180340 - 0)$$

$$\approx 0.2360680$$

لنحسب ونقارن $f(c_1)\,,\ f(d_1)$ لتحديد المجال البديل الجديد ولنكرر العملية، يبين الجدول التالي بعض الحسابات:

k	a_k	c_k	d_k	b_k
0	0.0000000	0.3819660	0.6180340	1
1	0.0000000	0.2360680	0.3819660	0.6180340

k	a_k	c_k	d_k	b_k
2	0.2360680	0.3819660	0.4721360	0.6180340
3	0.3819660	0.4721360	0.5278640	0.6180340
4	0.3819660	0.4376941	0.4721360	0.5278640
5	0.3819660	0.4164079	0.4376941	0.4721360
6	0.4164079	0.4376941	0.4508497	0.4721360
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
21	0.4501574	0.4501730	0.4501827	0.4501983
22	0.4501730	0.4501827	0.4501886	0.4501983
23	0.4501827	0.4501886	0.4501923	0.4501983

الجدول 2

k	$f(c_k)$	$f(d_k)$
0	-0.22684748	-0.19746793
1	-0.17815339	-0.22684748
2	-0.22684748	-0.23187724
3	-0.23187724	-0.22504882
4	-0.23227594	-0.23187724
5	-0.23108238	-0.23227594
6	-0.23227594	-0.23246503
.	.	.
.	.	.
.	.	.
21	-0.23246558	-0.23246558
22	-0.23246558	-0.23246558
23	-0.23246558	-0.23246558

الجدول 3

لاحظ في التكرار الثالث والعشرين أنَّ المجال البديل قد تقلص إلى: $[a_{23}, b_{23}] = [0.4501827, 0.4501983]$. طول المجال هو 0.0000156 وبحساب قيمة التابع بثماني أرقام عشرية، نجد $f(a_{23}) \approx 0.23246558 \approx f(b_{23})$ إذا الخوارزمية منتهية.

ونلاحظ أنّ طريقة القاطع بخطوات أقل حصلنا على $p_5 = 0.4501836$ ، فهي أسرع

من طريقة البحث بالنسبة الذهبية في هذا المثال. لكن ميزة طريقة البحث بالنسبة الذهبية هي في إمكانية تطبيقها في حالة التابع $f(x)$ غير تفاضلي.

في الحقيقة، سيكون صعوبة في استخدام طرائق البحث في حالة كون التابع مسطحاً بالقرب من القيمة الدنيا.

2-1-2 طريقة فيباناتشي(Fibonacci):

في طريقة بحث النسبة الذهبية قمنا بتقدير دالتين عند التكرار الأول وفي التكرار التالي قمنا بتقدير واحد للتابع. قيمة r ثابتة في كل مجال بديل والبحث ينتهي عند المجال البديل k، وذلك بشرط أن يحقق $|b_k - a_k|$ أو $|f(b_k) - f(a_k)|$ شرط التوقف المطلوب.

تختلف طريقة بحث فيباناتشي عن طريقة النسبة الذهبية بأن قيمة r غير ثابتة في كل مجال بديل. إضافةً لذلك عدد المجالات البديلة (التكرارات) محدد مسبقاً ويرتكز على معيار التوقف المحدد مسبقاً.

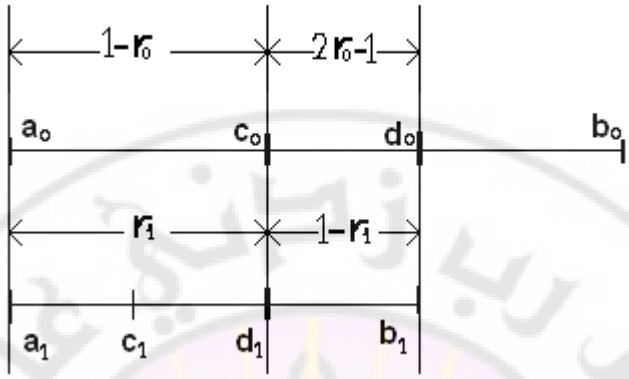
تعتمد طريقة فيباناتشي على متتالية أعداد فيباناتشي $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ والمعرّفة بالمعادلات التالية:

$$F_0 = 0\ ,\ F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ ,\ n = 2,3,... \qquad (6)$$

وهكذا تكون أعداد فيباناتشي $0,1,1,2,3,5,8,13,21,...$.

ليكن التابع $f(x)$ ذو تمثيل أحادي في $[a_0, b_0]$، كما في طريقة النسبة الذهبية قيمة r_0 (حيث $\frac{1}{2} < r_0 < 1$) محددة بحيث c_0, d_0 سيتم استخدامهما في المجال البديل التالي وسيكون لدينا تقدير تابع واحد فقط. دون المساس بعمومية المسألة نفرض $f(c_0) > f(d_0)$. عندئذٍ نجد $a_1 = a_0\ ,\ b_1 = d_0\ ,\ d_1 = c_0$ لاحظ الشكل4.



الشكل 4: مجالات بحث فيباناتشي $[a_1,b_1],[a_0,b_0]$

ثمَّ نحدد r_1 (حيث $½ < r_1 < 1$) من أجل المجال البديل $[a_1,b_1]$ بحيث:

$$d_0 - c_0 = b_1 - d_1$$

$$(2r_0 - 1)(b_0 - a_0) = (1 - r_1)(b_1 - a_1)$$

$$(2r_0 - 1)(b_0 - a_0) = (1 - r_1)(r_0(b_0 - a_0))$$

$$(2r_0 - 1) = (1 - r_1)r_0$$

$$r_1 = \frac{1 - r_0}{r_0}$$

بتبديل $n \geq 4$, $r_0 = F_{n-1} / F_n$ وبالاستفادة من المعادلة(6) في المعادلة الأخيرة نجد:

$$r_1 = \frac{1 - \frac{F_{n-1}}{F_n}}{\frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$$

بالاستقراء نجد أن طريقة بحث فيباناتشي يمكن أن تبدأ بالقيمة

$$r_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n} \tag{7}$$

وهكذا :

$$r_k = \frac{F_{n-1-k}}{F_{n-k}} \ , \ k = 1, 2, ..., n-3 \tag{8}$$

لاحظ أنَّ

$$r_{n-3} = \frac{F_2}{F_3} = \frac{1}{2}$$

حيث لايوجد هناك نقطة جديدة يمكن إضافتها في هذه المرحلة لذا فمجموع الخطوات في هذه العملية: $(n-3)+1 = n-1$.

يمكن الحصول على الـ$k+1$ مجالاً بديلاً بتصغير طول المجال k باستخدام الوسيط $r_k = F_{n-1-k} / F_{n-1-k}$، حيث طول آخر مجال بديل هو:

$$\frac{F_{n-1}F_{n-2}...F_2}{F_nF_{n-1}...F_3}(b_0 - a_0) = \frac{F_2}{F_n}(b_0 - a_0)$$
$$= \frac{1}{F_n}(b_0 - a_0)$$
$$= \frac{b_0 - a_0}{F_n}$$

الإحداثي السيني (على المحور x) للقيمة الدنيا يمكن إيجاده بإحتمال ε، عندها نحتاج لإيجاد أصغر قيمة لـ n حيث:

$$\frac{b_0 - a_0}{F_n} < \varepsilon \qquad \text{أو} \qquad \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_n \qquad (9)$$

نحتاج لإيجاد النقاط الداخلية c_k, d_k للمجال البديل $[a_k, b_k]$ ذي الرقم k باستخدام الصيغ:

$$c_k = a_k + (1 - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}})(b_k - a_k) \qquad (10)$$

$$d_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_k - a_k) \qquad (11)$$

ملاحظة:

يمكن إيجاد قيمة n المستخدمة في الصيغ (10) و(11) من المتراجحة (9).

يتطلب تعيين نقطتين داخليتين جديدتين لكل تكرار. الأولى من التكرار السابق والثانية من خلال الصيغة (10) أو الصيغة (11).

ستقع النقطتين الداخليتين في وسط المجال عندما $r_0 = F_2 / F_3 = ½$. يتم تحديد قيمة ثابتة e لتمييز النقطتين الداخليتين. ويكون المعامل لـ ($b_k - a_k$) عند استخدام الصيغ (10) أو (11) هو: $½ - e$, $½ + e$ على التوالي.

مثال(3):

أوجد القيمة الدنيا للتابع $f(x) = x^2 - \sin(x)$ في المجال $[0,1]$ باستخدام طريقة بحث فيباناتشي، وشرط توقف $\varepsilon = 10^{-4}$ ، والقيمة الثابتة للتمييز $e = 0.01$.

الحل:

إن أصغر عدد فيباناتشي يحقق:

$$F_n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} = \frac{1-0}{10^{-4}} = 10,000$$

هو العدد $F_{21} = 10,946$. حيث $n = 21$, $b_0 = 1$, $a_0 = 0$.

وتصبح الصيغ (10) و (11) :

$$c_0 = 0 + (1 - \frac{F_{20}}{F_{21}})(1-0) \approx 0.3819660$$

$$d_0 = 0 + \frac{F_{20}}{F_{21}}(1-0) \approx 0.618034$$

نضع $a_1 = a_0$, $b_1 = d_0$, $d_1 = c_0$ حيث $f(0.31819660) = -0.2268475$ و $f(0.6180340) = -0.1974679$ ، $f(d_0) \geq f(c_0)$.

المجال البديل الجديد الذي يحوي الإحداثي السيني للقيمة الدنيا للتابع f هو: $[a_1, b_1] = [0 , 0.6180340]$ وباستخدام الصيغة (10) نوجد النقطة الداخلية c_1:

$$c_1 = a_1 + (1 - \frac{F_{21-1-1}}{F_{21-1}})(b_1 - a_1)$$

$$= 0 + (1 - \frac{F_{19}}{F_{20}})(0.6180340_1 - 0)$$

$$\approx 0.2360680$$

والآن نحسب $f(d_1)$ و $f(c_1)$ لتعيين المجال البديل الجديد $[a_2,b_2]$. ونتابع تكرار العمليات. يبين الجدول(4) بعض الحسابات. ونلاحظ أنَّه في التكرار السابع عشر المجال $[a_{17},b_{17}]=[0.4501188\ ,\ 0.4503928]$ صغير بقدرٍ كافٍ، حيث $c_{17}=0.4502101$ و $d_{17}=0.4503105$ و $f(d_{17})\geq f(c_{17})$.

وهكذا $[a_{18},b_{18}]=[0.4501188\ ,\ 0.4503015]$ و $d_{18}=0.4502101$ في هذا الحد يكون $r_{18}=1-F_2/F_3=1-½=½$ ولدينا الثابت $e=0.01$ عندها يمكن حساب c_{18} كما يلي:

$$c_{18}=a_{18}+(0.5-0.01)(b_{18}-a_{18})$$

$$=0.4501188-0.49(0.450315-0.4501188)$$

$$\approx 0.4502083$$

k	a_k	c_k	d_k	b_k
0	0.0000000	0.3819660	0.6180340	1.0000000
1	0.0000000	0.2360680	0.3819660	0.6180340
2	0.2360680	0.3819660	0.4721359	0.6180340
3	0.3819660	0.4721359	0.5278641	0.6180340
4	0.3819660	0.4376941	0.4721359	0.5278641
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
16	0.4499360	0.4501188	0.4502102	0.4503928
17	0.4501188	0.4502101	0.4503015	0.4503928
18	0.4501188	0.4502083	0.4502101	0.4503015

الجدول 4

بمـــا أن $f(d_{18})\geq f(c_{18})$، فالمجـــال البـــديل النهـــائي:

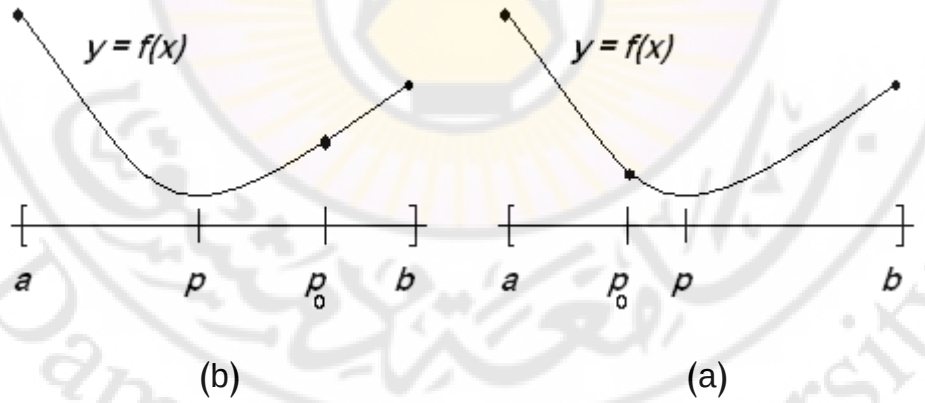
$[a_{19},b_{19}]=[0.4501188\ ,\ 0.4502101]$ وطـول هـذا المجـال 0.0000913، نختـار الإحداثي السيني للقيمة الدنيا كنقطة وسط في هذا المجال. لذا تكون القيمة الدنيا:

$f\ (0.4501645) = -0.23242656$.

نلفت الانتباه إلى أن كلاً من طريقة فيباناتشي والنسبة الذهبية من الممكن تطبيقها إذا كان التابع $f\ (x)$ غير تفاضلي. كما أن طريقة فيباناتشي فعالة أكثر من طريقة النسبة الذهبية عندما تكون n صغيرة. أما في حال كون n كبيرة فإنّ الطريقتين متماثلتان تقريباً.

3-1-2 ايجاد القيمة الدنيا باستخدام المشتق:

ليكن التابع $f\ (x)$ أحادي التمثيل في المجال $[a,b]$ وله القيمة الدنيا الوحيدة عند $x = p$، وليكن المشتق $f'(x)$ معرفاً عند جميع النقاط في (a,b). ولتكن القيمة الإبتدائية p_0 في (a,b)، إذا كان $f'(p_0) < 0$، فإن القيمة الدنيا p توجد على يمين p_0. و إذا كان $f'(p_0) > 0$، فإن القيمة الدنيا p توجد على يسار p_0. لاحظ الشكل5.



الشكل 5: استخدام $f'(x)$ لإيجاد القيمة الدنيا للتابع $f\ (x)$ ذي التمثيل الأحادي على المجال $[a,b]$

الشكل (a) يبين حالة $f'(p_0) < 0$ عندها يكون $p_0 < p$

الشكل (b) يبين حالة $f'(p_0) > 0$ عندها يكون $p_0 > p$

في البداية يجب تحديد مجال القيمة الدنيا وذلك كما يلي :

ايجاد القيم الثلاث الاختيارية:

$$p_0 \cdot p_1 = p_0 + h \qquad \text{و} \qquad p_2 = p_0 + 2h \tag{12}$$

بحيث:

$$f(p_0) > f(p_1) \qquad \text{و} \qquad f(p_1) < f(p_2) \tag{13}$$

بفرض $f'(p_0) < 0$ عندها يكون $p_0 < p$ وبالتالي يجب اختيار h موجبة. مهمة إيجاد h سهلة وبحيث النقاط الثلاث (12) تحقق (13).

لنبدأ بالقيمة $h = 1$ في الصيغة (12) بشرط أن يكون $a+1<b$ فإن لم يتحقق عندها نأخذ $h = ½$ وهكذا..

الحالة (1): إذا تحققت العلاقة (13) نكون قد حققنا المطلوب.

الحالة (2): إذا كان $f(p_0) > f(p_1)$ وكان $f(p_1) > f(p_2)$ عندها يكون $p_2 < p$.

الحالة (3): إذا كان $f(p_0) \le f(p_1)$ نكون قد تجاوزنا p وبالتالي تكون h كبيرة جداً. نحتاج لاختيار قيمة أقرب من p_0 . نقلل طول الخطوة باستخدام المعامل ½ ونكرر العملية.

عندما يكون $f'(p_0) > 0$ فإن طول الخطوة h يجب أن يكون سالباً. وبالتالي لدينا ثلاث حالات مشابهة للحالات السابقة.

4-1-2 التقريب التربيعي لإيجاد P:

وجدنا سابقاً ثلاث نقط (12) تحقق الصيغة (13). سنستخدم استيفاء المعادلة التربيعية لإيجاد القيمة الدنيا $p_{\min}$ ، والتي هي تقدير تقريبي لـ p . إن متراجحة لاغرانج باعتماد قيم الصيغة(12) هي:

$$Q(x) = \frac{y_0(x-p_1)(x-p_2)}{2h^2} - \frac{y_1(x-p_0)(x-p_2)}{h^2} + \frac{y_2(x-p_0)(x-p_1)}{2h^2} \tag{14}$$

حيث $y_i = f(p_i)$ من أجل $i = 0,1,2$. مشتق $Q(x)$ هو:

$$Q'(x) = \frac{y_0(2x - p_1 - p_2)}{2h^2} - \frac{y_1(2x - p_0 - p_2)}{h^2} + \frac{y_2(2x - p_0 - p_1)}{2h^2} \quad (15)$$

بجعل $Q'(x) = 0$ من أجل $Q'(p_0 + h_{\min})$ نجد:

$$Q'(x) = \frac{y_0(2(p_0 + h_{\min}) - p_1 - p_2)}{2h^2} - \frac{y_1(4(p_0 + h_{\min}) - 2p_0 - 2p_2)}{2h^2} + \frac{y_2(2(p_0 + h_{\min}) - p_0 - p_1)}{2h^2} \quad (16)$$

بضرب كل الحدود في الصيغة(16) بالمقدار $2h^2$ ونقل الحدود التي تحوي $h_{\min}$ نجد:

$$-h_{\min}(2y_0 - 4y_1 + 2y_2) = y_0(2p_0 - p_1 - p_2) - y_1(4p_0 - 2p_0 - 2p_2) + y_2(2p_0 - p_0 - p_1)$$
$$= y_0(-3h) - y_1(-4h) + y_2(-h)$$

بالتالي يمكن حساب $h_{\min}$ كما يلي:

$$h_{\min} = \frac{h(4y_1 - 3y_0 - y_2)}{4y_1 - 2y_0 - 2y_2} \quad (17)$$

القيمة $p_{\min} = p_0 + h_{\min}$ هي أفضل تقريب للمقدار p من p_0 . وبالتالي يمكننا استبدال p_0 بالقيمة $p_{\min}$ وتكرار مجمل العمليات السابقة لتحديد قيمة جديدة لكلٍ من h , $h_{\min}$. نتابع التكرار حتى تتحقيق الدقة المطلوبة.

5-1-2 التقريب التكعيبي لإيجاد P:

التقريب البديل يستخدم كلاً من التابع $f(x)$ ومشتقاته الأولى لإيجاد القيمة الدنيا لكثيرة الحدود من الدرجة الثالثة، والتي تستوفي التابع $f(x)$ ومشتقاته عند نقطتين.

ليكن $f(x)$ تابعاً أحادياً التمثيل و قابلا للاشتقاق في $[a,b]$ وبفرض $x = p$

قيمة دنيا وحيدة. ولتكن $p_0 = a$. لاستنتاج قيمة ابتدائية للخطوة بين p_1 و p نستخدام مبرهنة القيمة الوسطى :

$$h_{\min} = \frac{2(f(b) - f(a))}{f'(a)} \tag{18}$$

إذاً $p_1 = p_0 + h$. الآن نستخدم التقريب التكعيبي في لحساب p_2 :

$$P(x) = \frac{\alpha}{h^3}(x - p_2)^3 + \frac{\beta}{h^2}(x - p_2)^2 + f(p_2) \tag{19}$$

لاحظ أنَّ:

$$P'(x) = \frac{3\alpha}{h^3}(x - p_2)^2 + \frac{2\beta}{h^2}(x - p_2) \tag{20}$$

وبحيث :

$$P(p_0) = f(p_0),\ P(p_1) = f(p_1)\ ,\quad P'(p_0) = f'(p_0), P'(p_1) = f'(p_1) \tag{21}$$

لإيجاد p_2 نعرّف:

$$p_2 = p_0 + h\gamma \tag{22}$$

انظر الشكل5 وباستخدم (20) و (21)، نجد أنَّ:

$$F = f(p_1) - f(p_0) = \alpha(3\gamma^2 - 3\gamma + 1) + \beta(1 - 2\gamma) \tag{23}$$

$$G = f'(p_1) - f'(p_0) = \alpha(1 - 2\gamma) + 2\beta \tag{24}$$

$$hf'(p_0) = 3\alpha\gamma^2 - 2\beta\gamma \tag{25}$$

بحل جملة المعادلات (23) و(24) و(25) بالنسبة لـ α :

$$\alpha = G - 2(F - f'(p_0)h \tag{26}$$

وبحذف β من (24) و(25):

$$3\alpha\gamma^2 + (G - 3\alpha)\gamma + hf'(p_0) = 0 \tag{27}$$

إنَّ حل المعادلة (28) هو :

$$\gamma = \frac{-hf'(p_0)}{(G-3\alpha) \pm \sqrt{(G-3\alpha)^2 - 12\alpha hf'(p_0)}} \quad (28)$$

لتفادي حدوث أخطاء الاختصار، نأخذ في المقام الاشارة الموجبة، فيكون:

$$\gamma = \frac{-hf'(p_0)}{(G-3\alpha) + \sqrt{(G-3\alpha)^2 - 12\alpha hf'(p_0)}} \quad (29)$$

نجد قيمة p_2 باستبدال قيمة γ المحسوبة في الصيغة(22).

لمتابعة تكرار العملية نجعل $h = p_1 - p_0$ ونستبدل p_2, p_0 بالقيم p_2, p_1 على التوالي، في الصيغ (22)، (23)، (24)، (26) ، (29). وكمعيار للتوقف من الأفضل اختيار $|f'(p_0)| < \varepsilon$.

مثال(4):

أوجد القيمة الدنيا للتابع $f(x) = x^2 - \sin(x)$ على المجال $[0,1]$. مستخدماً طريقة البحث التكعيبي.

الحل:

مشتق التابع $f(x)$ هو $f'(x) = 2x - \cos(x) = 0$ باستبدال $f(0) = 0, f(1) = 0.582902, f'(0) = -1$ في $h_1 = 2(f(b) - f(a))/f'(a)$ نحصل على $h_1 = -0.3170580$.

وهكذا

$$p_1 = p_0 + h_1 = 0 + (-0.3170580) = -0.3170580$$

$$f(p_0) = f(-0.3170580) = 0.4122984$$

$$f'(p_1) = f'(-0.3170580) = -0.8496310$$

باستبدال $h_1, f(p_0), f(p_1), f'(p_0), f'(p_1)$ في الصيغ(22)، (23)، (24) نحصل على:

$$F = 0.4122984, \quad G = 0.1852484, \quad \alpha = -0.0052323, \quad \gamma = -1.4202625$$

هكذا

$$p_1 = p_0 + h_1\gamma = -0.3170580 + (-0.3170580)(-1.4202625) = 0.4503056$$

الآن نجعل $h_2 = p_2 - p_1 = 0.7673637$ ونستمر في تكرار العملية. فنحصل على النتائج المبينة في الجدول 5 باعتبار معيار التوقف $f'(p_k) < 10^{-7}$. قيمة التابع عند $p_5 = 0.4501836$ هي $f(p_5) = -0.2324656$، وهي القيمة الدنيا التي وجدناها في المثال(2).

k	p_{k-1}	h_k	p_k
1	0.0000000	-0.3170580	-0.3170580
2	-0.3170580	0.7673637	0.4503056
3	0.4503056	0.0001217	0.4501810
4	0.4501810	0.0002433	0.4504272
5	0.4504272	0.0002436	0.4501836

الجدول 5

3-طرائق نيلدر –ميد–بويل Nelder-Mead-Powell:

يمكن تعميم التعاريف في الفقرة (2) من أجل التوابع ذات عدة متغيرات، فبفرض $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ معرف في المنطقة:

$$R = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_N) : \sum_{k=1}^{N} (x_k - p_k)^2 < r^2 \right\} \quad (30)$$

يوجد للتابع $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ قيمة محلية دنيا عند النقطة $(p_1, p_2, ..., p_N)$ وتحقق

$$f(p_1, p_2, ..., p_N) \le f(x_1, x_2, ..., x_N) \quad , \forall (x_1, x_2, ..., x_N) \in R \quad (31)$$

ونقول للتابع $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ قيمة محلية عظمى عند النقطة $(p_1, p_2, ..., p_N)$ إذا تحقق

$$f(p_1, p_2, ..., p_N) \ge f(x_1, x_2, ..., x_N) \quad , \forall (x_1, x_2, ..., x_N) \in R \quad (32)$$

سيتم تبسيط طرائق تحديد الأمثليات للتوابع بعدة متغيرات باستخدام توابع بمتحولين

مستقلين $f(x,y)$. يمكن تمثل التابع لمتحولين هندسياً بسطح. اختبار المشتق الجزئي الثاني لإيجاد القيمة الحدية للتابع $f(x,y)$ هو تعميم للمبرهنة(4).

1-3 – إختبار المشتق الجزئي الثاني:

مبرهنة (5):

لتكن التابع $f(x,y)$ ومشتقاتها الجزئية مستمرة في الحقل R. بفرض $(p,q)\in R$ نقطة حرجة حيث $f_x(p,q)=0$, $f_y(p,q)=0$ تستخدم الدرجة الأعلى للمشتقات الجزئية لتحديد طبيعة النقطة الحرجة.

1. إذا كان $f_{xx}(p,q)f_{yy}(p,q)-f_{xy}^2(p,q)>0$ و $f_{xx}(p,q)>0$ عندئذٍ $f(p,q)$ هي قيمة محلية صغرى.
2. إذا كان $f_{xx}(p,q)f_{yy}(p,q)-f_{xy}^2(p,q)>0$ و $f_{xx}(p\ q\ )<$ عندئذٍ $f(p,q)$ هي قيمة محلية عظمى.
3. إذا كان $f_{xx}(p,q)f_{yy}(p,q)-f_{xy}^2(p,q)<0$ عندئذٍ $f(x,y)$ ليس لها قيمة حدية عند النقطة (p,q).
4. إذا كان $f_{xx}(p,q)f_{yy}(p,q)-f_{xy}^2(p,q)=0$ عندها تكون هذه الطريقة غير حاسمة.

مثال(5):

أوجد القيمة الصغرى للتابع $f(x,y)=x^2-4x+y^2-xy$.

الحل:

المشتق الجزئي الأول للتابع:

$$f_x(x,y)=2x-4-y \ , \ f_y(x,y)=2y-1-x$$

بجعل هذه المشتقات مساوية للصفر نحصل على معادلات خطية:

$$2x-y=4 \ , \ 2y-x=1$$

وبحلها نجد أن $(x,y)=(3,2)$.

المشتق الجزئي الثاني للتابع:

$$f_{xx}(x,y)=2\ ,\ f_{yy}(x,y)=2\ ,f_{xy}(x,y)=-1$$

من السهل ملاحظة أننا أمام الحالة الأولى للمبرهنة(5) حيث:

$$f_{xx}(3,2)\,f_{yy}(3,2)-f_{xy}^{2}(3,2)=3>0$$

و

$$f_{xx}(3,2)=2>0$$

ومن هنا، فإن للتابع $f(x,y)$ قيمة محلية صغرى $f(3,2)=-7$ عند النقطة $(3,2)$.

باستدعاء طريقة بحث النسبة الذهبية وطريقة فيباناتشي نجد أنهما لا تستخدمان مشتق التابع $f(x)$ بشكلٍ مباشر.

في كلا الطريقتين التابع المطلوبة استخدمت لمقارنة قيمتها. البحث المباشر للقيم الصغرى للدوال ذات عدة متغيرات $f(x_1,x_2,...,x_N)$، تتشارك هذه الخاصية.

لا تتعلق هذه الإفتراضات (لا ضمنياً ولا بشكلٍ صريح) بقابلية الاشتقاق للتابع ذات عدة متغيرات. هكذا فإن الطرائق المباشرة مفيدة بشكلٍ خاص للدوال غير الملساء أو غير القابلة للاشتقاق.

2-3 طريقة نيلدر – ميد:

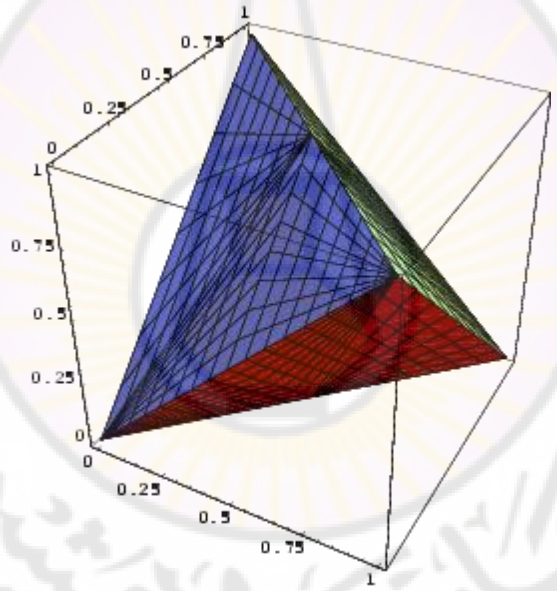
ابتكر نيلد– رميد طريقة بسيطة لإيجاد القيمة المحلية الصغرى لتابع ذات عدة متغيرات. العملية ببساطة هي إيجاد مثلث. فمن أجل متغيرين يعتمد على مقارنة قيم التابع عند رؤوس المثلث الثلاثة. ويستبعد الرأس الأسوء حيث تكون $f(x,y)$ أكبر ويستبدل برأس جديد. وهكذا يتشكل مثلث جديد ويستمر البحث. تولد العملية سلسلة من المثلثات (التي يكون لها أشكالاً مختلفة). وهكذا تصبح قيم التابع أصغر وبالتالي يصغر حجم المثلثات إلى أن نحصل على القيمة الصغرى للتابع.

يتم تعميم المبرهنة باستخدام الحد البسيط (مولد مثلث في N بعد) وبالتالي نجد القيمة الصغرى لتابع ذات Nمتغير. وهو فعال وموثوق حسابياً.

طريقة سمبلكس نيلدر ميلد:

تعريف (4):

يُعرّف **السمبلكس** (Simplex) على أنّه شكل هندسي يتألف في الفضاء الإقليدي $\Re^n$ (من البعد n) من $n+1$ نقطة $\{x_i \;\; ; i=1,\ldots,n+1\}$ ويكون السمبلكس منتظماً إذا كانت المسافة بين رؤوسه متساوية. يمثل السمبلكس المنتظم في الفضاء $\Re^2$ مثلث متساوي الأضلاع ويمثل في الفضاء $\Re^3$ رباعي سطوح منتظم.



الشكل 6 يبين السمبلكس في $\Re^3$

للسهولة والتوضيح سنقوم بتقديم هذه الخوارزمية في الفضاء $\Re^2$ ثمّ نعممها إلى الفضاء $\Re^n$.

بفرض أنّه لدينا النقاط $\{x_h, x_m, x_l\}$ والتّي تمثل الرؤوس الثلاثة لسمبلكس منتظم في الفضاء $\Re^2$ وليكن لدينا التابع $f(x)$ الّذي نهدف إلى إيجاد القيمة الصغرى (الكبرى) له.

إنّ هذه الطريقة تقوم على الخطوات التالية:

1- نقوم في الخطوة الأولى بـ

1-1) نحسب قيمة التابع لكل نقطة من النقاط المعطاة(قيم ابتدائية)

$$f_i = f(x_i)$$

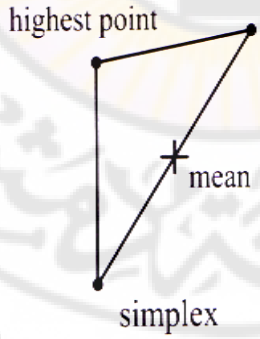
ثمّ نقوم بترتيب هذه النقاط تصاعديا اعتمادا على قيمة التابع عند كل منها وبفرض أنّ قيم النقاط تحقق

$$f_l \le f_m \le f_h$$

1-2) وبعدئذ نقوم بإيجاد انعكاس (reflection) الرأس ذي القيمة الأعلى x_h وذلك وفق الخطوتين الآتيتين:

أ) نوجد منتصف (mean) القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين x_m و x_l ولتكن النقطة

$$x_c = \frac{x_l + x_m}{2}$$



ب) الآن لإيجاد انعكاس الرأس x_h نقوم بتطبيق العلاقة

$$x_r = x_h + 2(x_c - x_h)$$
$$= 2x_c - x_h$$

1-3) لنقم الآن بحساب قيمة التابع عند النقطة x_r (التي تمثل انعكاس x_h) وبفرض أنّ

$$f_r = f(x_r)$$

2- إذا كانت $f_r \le f_l$ (أي النقطة x_r الناتجة عن الانعكاس قيمتها أصغر من قيم النقاط الثلاث الأخرى):

1-2) فإننا نستخدم التمديد للانتقال إلى نقطة أبعد من النقطة x_r على أن يكون التمديد بنفس اتجاه x_r وذلك وفق العلاقة التالية:

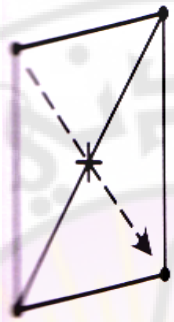
$$x_e = x_r + 2(x_r - x_c)$$
$$= 2x_r - x_c$$

2-2) نقوم بحساب قيمة التابع عند النقطة x_e وبفرض أنّ $f_e = f(x_e)$

3-2) فإذا كانت $f_e < f_r$

فإننا ننشئ سمبلكس جديداً وذلك بعد أن نستبدل x_e (الناتجة عن الانعكاس والتمديد) بـ x_h (أي إنّ السمبلكس الجديد ذراه هي النقاط $\{x_e, x_m, x_l\}$)

وإلا فإننا ننشئ سمبلكس جديداً وذلك بعد ان نستبدل x_r (الناتجة عن الانعكاس فقط) بـ x_h.



2-4) نختبر التقارب فإذا كان محققاً نعود إلى البداية.

3- أمّا إذا كان $f_r < f_m$ (أي إنّ x_r ليست النقطة الموافقة للقيمة الصغرى إلا أنّها أفضل من x_m و x_h) عندئذ فإننا

1-3) ننشئ سمبلكس جديداً وذلك بعد أن نستبدل x_r (الناتجة عن الانعكاس فقط) بـ x_h.

2-3) نختبر التقارب فإذا كان محققاً نعود إلى البداية.

4- وإلا إذا كان $f_h \le f_r$ (أي إنّ x_r أسوأ من x_m و x_l و x_h) عندئذ فإننا:

4-1) نقلص(Shrink) المسافة بين x_r و x_h وذلك باستخدام العلاقة التالية:

$$x_g = x_h + \frac{1}{2}(x_c - x_h)$$
$$= \frac{1}{2}(x_c + x_h)$$

4-2) نقوم بحساب قيمة التابع عند النقطة x_g وبفرض أنّ

$$f_g = f(x_g)$$

وإلا إذا كان $f_s < f_r < f_h$ (أي إنّ x_r أسوأ من x_s وأفضل من x_h) فإننا

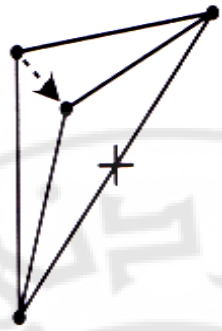
4-3) نقوم بتقليص المسافة بين النقطة x_r (الناتجة عن الانعكاس) والنقطة x_c وذلك وفقاً للتحويل التالي:

$$x_g = x_c + \frac{1}{2}(x_r - x_c)$$
$$= \frac{1}{2}(x_c + x_r)$$

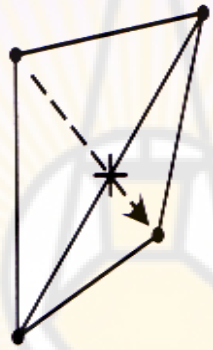
4-4) نقوم بحساب قيمة التابع عند النقطة x_g وبفرض أنّ $f_g = f(x_g)$

4-5) فإذا كانت $f_g < f_h$

فإننا ننشئ سمبلكس جديداً وذلك بعد أن نستبدل x_g (الناتجة عن الانعكاس والتمديد) بـ x_h.



shrink



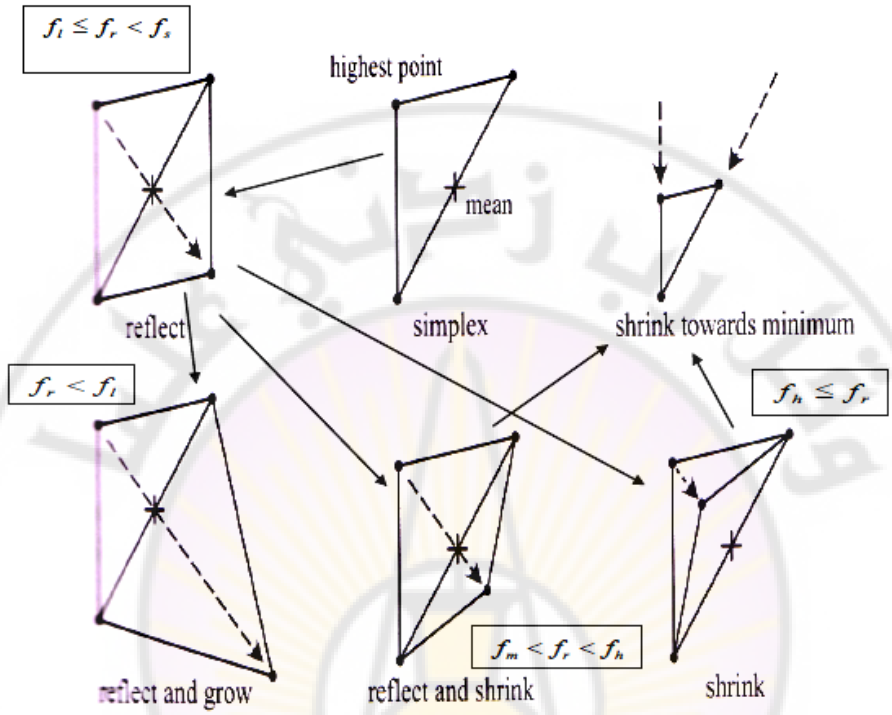
reflect and shrink

وإلا فإننا ننشئ سمبلكس جديداً وذلك باستبدال كل نقطة من النقاط الناتجة من السمبلكس بالنقطة

$$x_i' = \frac{1}{2}(x_i + x_l) \quad ;i = h, m$$

6-4) نختبر شرط التقارب ثم نعود إإلى البداية.

سنوضح الخوارزمية السابقة من خلال الشكل التالي:



الشكل 7 يبين خوارزمية نيلدر– ميد

3-2-1 معيار التقارب:

$$S = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(f_i - \bar{F} \right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

حيثُ: n بعد الفضاء الإقليدي , f_i قيم التابع عند ذرا السمبلكس المفروض , $\bar{F}$ القيمة النقطة الجديدة التي يتم إيجادها في كل خطوة

مثال(6):

ليكن لدينا التابع

$$f : \Re^2 \to \Re$$
$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2$$

وبفرض $(1,0),(1,1),(0,2)$ رؤوس سمبلكس في الفضاء الإقليدي من البعد الثاني والمطلوب استخدم طريقة نيلدر ميلد لإيجاد القيمة الصغرى للتابع المعطى

الحل:

نرتب ذرا السمبلكس تصاعديا اعتماداً على قيم التابع المعطى عند كل نقطة من النقاط المشكلة للسمبلكس

$$X_1 = (1,0) \quad ; f_1 = 2$$
$$X_2 = (1,1) \quad ; f_2 = 3$$
$$X_3 = (0,2) \quad ; f_3 = 4$$

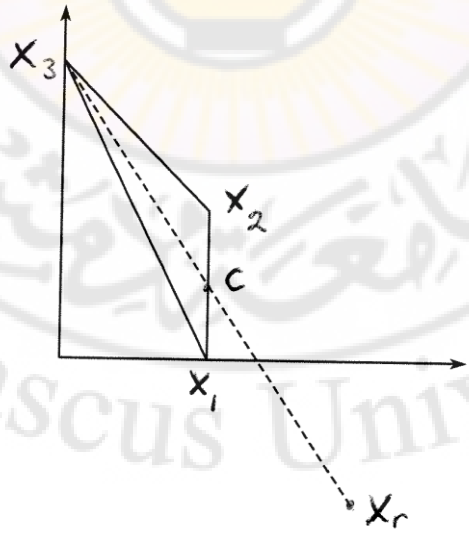
نقوم بإيجاد انعكاس للنقطة X_3

في البداية نوجد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين X_2 و X_1

$$C = \frac{X_1 + X_2}{2} = (1, 0.5)$$

ثمّ نطبق علاقة الانعكاس فنجد

$$X_r = C + 2(C - X_3) = 2C - X_3 = (2, -1)$$

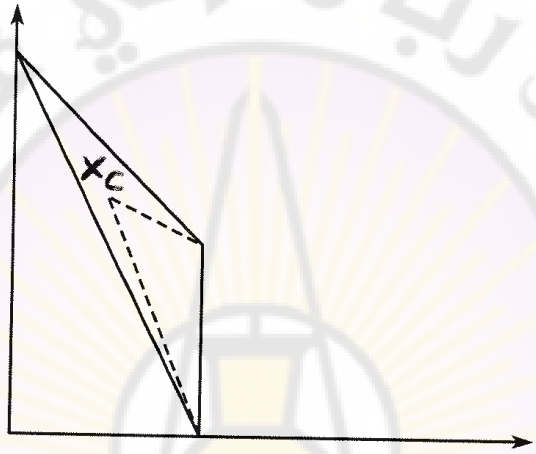


الآن لنقم بحساب قيمة التابع عند النقطة X_r (الناتجة عن انعكاس النقطة X_3):

$$f_r = f(X_r) = 9 > f_3 = 4$$

إذن النقطة X_r أسوأ من جميع النقط المشكلة لرؤوس السمبلكس المفروض وعليه نقلص المسافة بين C و X_3 ومنه

$$X_c = \frac{X_3 + C}{2} = (0.5, 1.25)$$



لنقم الآن بحساب قيمة التابع عند X_c فنجد أنّ

$$f_c = f(X_c) = 2.0625 < \min\{f_r, f_3\}$$

وبناء عليه سنستبدل X_c بـ X_3 ثمّ نعود إلى البداية فنعيد ترتيب الذرا مرة آخرى

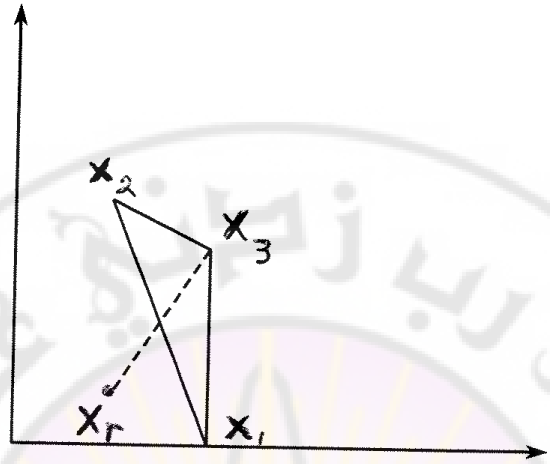
$$X_1 = (1,0) \quad ; f_1 = 2$$
$$X_2 = (0.5,1.25) \quad ; f_2 = 2.0625$$
$$X_3 = (1,1) \quad ; f_3 = 3$$

الآن لنوجد الآن منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين X_1 و X_2 فنجد

$$C = \frac{X_1 + X_2}{2} = (0.75, 0.625)$$

ثمّ لنوجد انعكاس النقطة X_3

$$X_r = C + 2(C - X_3) = 2C - X_3 = (0.5, 0.25)$$

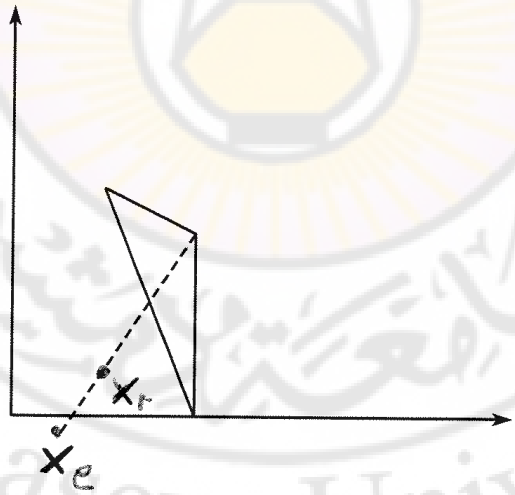


وبحساب قيمة التابع عند النقطة الأخيرة نجد أنّ

$$f_r = f(X_r) = 0.5625 < f_1$$

ومنه فإننا سنقوم بإجراء التمديد

$$X_e = 2X_r - C = (0.25, -0.125)$$



وبحساب قيمة التابع عند النقطة الأخيرة نجد أنّ

$$f_e = f(X_e) = 0.141 < f_r$$

وعليه فإننا سنستبدل X_e بـ X_3 فنحصل على السمبلكس الذي ذراه بعد ترتيبها

تصاعديا تُعطى :

$$X_1 = (0.25, -0.125) \quad ; f_1 = 0.141$$

$$X_2 = (1, 0) \quad ; f_2 = 2$$

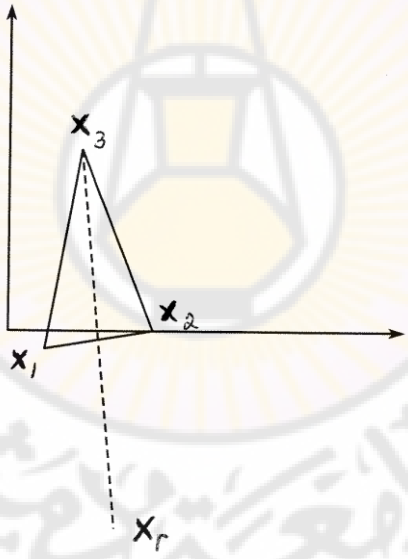
$$X_3 = (0.5, 1.25) \quad ; f_3 = 2.0625$$

نوجد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين X_1 و X_2

$$C = \frac{X_1 + X_2}{2} = (0.625, -0.0625)$$

ثمّ لنوجد انعكاس النقطة X_3

$$X_r = C + 2(C - X_3) = 2C - X_3 = (0.75, -1.375)$$

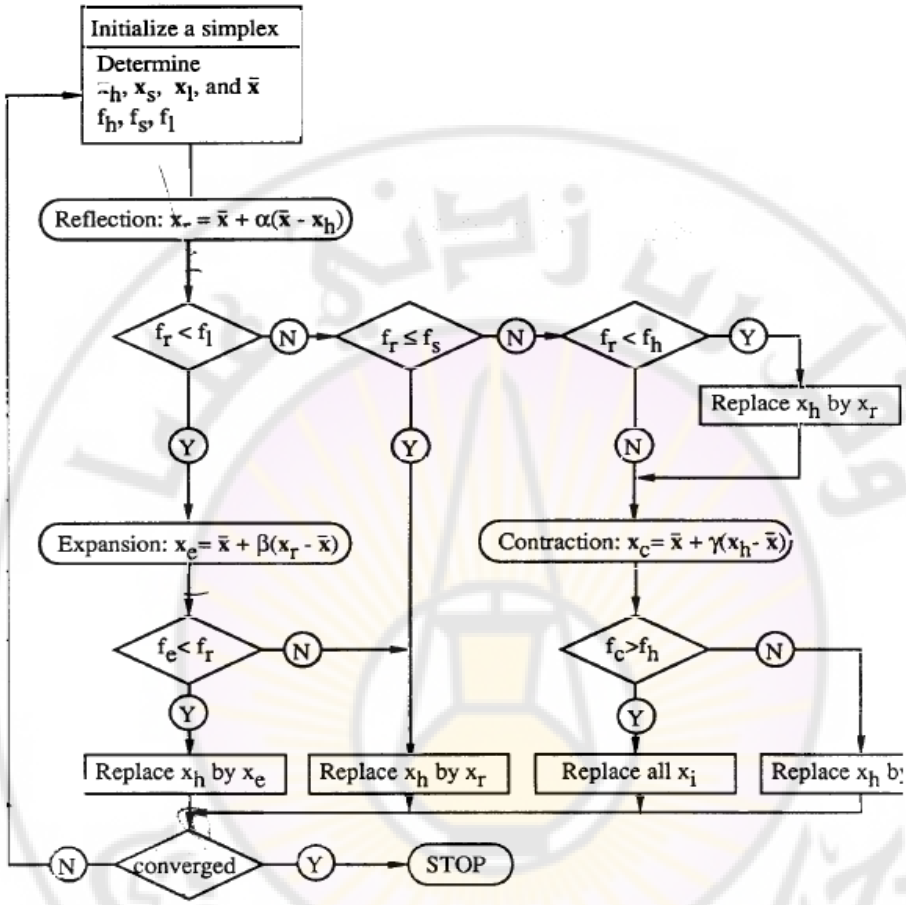


وبحساب قيمة التابع عند النقطة الأخيرة نجد أنّ

$$f_r = f(X_r) = 3.016 > f_3$$

وعليه فإننا سنقوم بالتقليص ويمكننا المتابعة بهذه الطريقة.

يمكننا ملاحظة أنّ القيمة الصغرى تقترب ببطء من مبدأ الإحداثيات.



مثال(7):

أوجد القيمة الصغرى للتابع $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - xy$ باستخدام خوارزمية نيلدر–ميد وابدأ باستخدام الرؤوس $V_1 = (0,0), V_2 = (1.2,0.0), V_3 = (0.0,0.8)$

الحل:

تأخذ التابع $f(x,y)$ القيم:

$$f(0,0) = 0 \ , \ f(1.2,0.0) = -3.36 \ , \ f(0.0,0.8) = -0.16$$

نقارن قيم التابع لتحديد الرؤوس B , G , W:

$$B = (1.2,0.0) \ , \ G = (0.0,0.8) \ , W = (0,0)$$

سيتم استبدال الرأس W. النقاط R و M هي:

$$M = \frac{B+G}{2} = (0.6, 0.4) \quad , \quad R = 2M - W = (1.2, 0.8)$$

قيمة التابع $f(R) = f(1.2, 0.8) = -4.48 < f(G)$

وبما أن $f(R) \leq f(B)$ ننتقل باتجاه اليمين ويتم انشاء الرأس E كما يلي:

$$E = 2R - M = (1.8, 1.2)$$

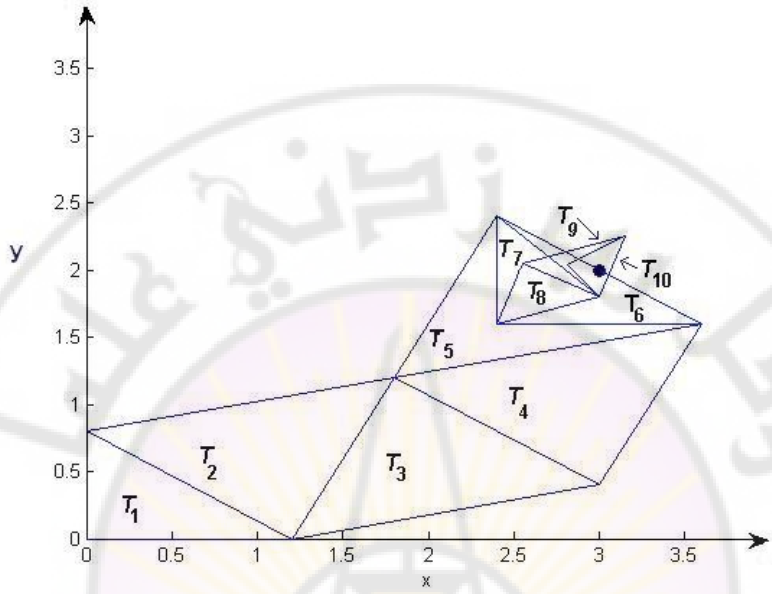
وقيمة التابع عندها:

$$f(E) = f(1.8, 1.2) = -5.88 < f(B)$$

إذاً رؤوس المثلث الجديد:

$$V_1 = (1.8, 1.2) \, , V_2 = (1.2, 0) \, , V_3 = (0, 0.8)$$

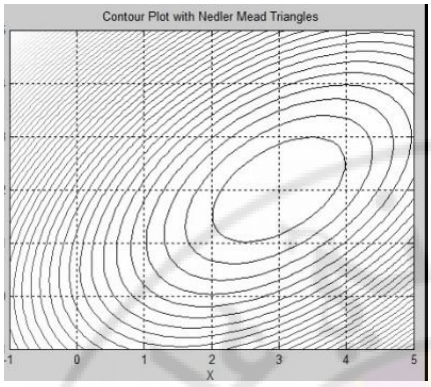
تستمر هذه العملية وتتولد سلسلة من المثلثات والتي تتقاطع باستمرار عند نقطة الحل $(3, 2)$، انظر للشكل6. يبين الجدول 6 التابع عند رؤوس المثلث لعدة خطوات. إن تطبيق الحاسب للخوارزمية استمر حتى الخطوة 33 حيث كان الرأس الأفضل: $B = (2.99996456, 1.99983839)$ و $f(B) = -6.99999998$. وهذه القيم هي تقريب $f(3, 2) = -7$ الموجودة في المثال5. إن سبب انتهاء التكرار قبل $(3, 2)$يكمن في أن التابع يصبح مسطحاً قرب القيمة الصغرى وقد تم التأكد من قيم التابع $f(G)$ ، $f(B)$ ، $f(W)$ (انظر الجدول6) وتبين أنها نفسها (هذا مثال عن خطأ دورة الإيقاف). وأن الخوارزمية قد تمت.

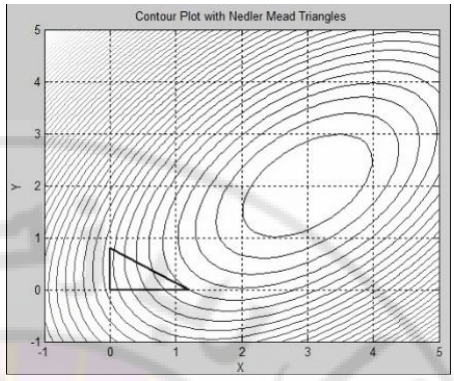


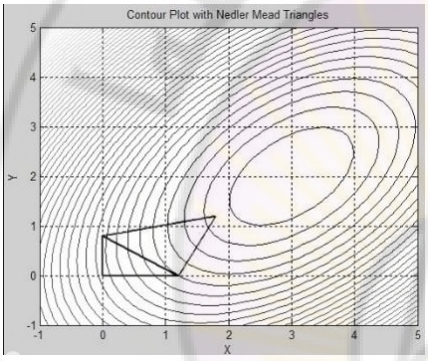
الشكل 8: سلسلة مثلثات $\{M_k\}$ تغطي الوصول إلى النقطة $(3,2)$ بطريقة نيلدر – ميد

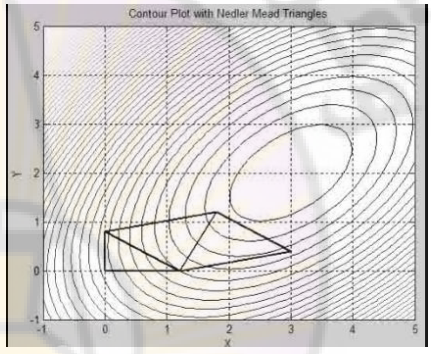
k	Best point	Good point	Worst point
1	f (1.2,0.0)=-3.36	f (0.0,0.8)=-0.16	f (0.0,0.0)=0.00
2	f (1.8,1.2)=-5.88	f (1.2,0.0)=-3.36	f (0.0,0.8)=-0.16
3	f (1.8,1.2)=-5.88	f (3.0,0.4)=-4.44	f (1.2,0.0)=-3.36
4	f (3.6,1.6)=-6.24	f (1.8,1.2)=-5.88	f (3.0,0.4)=-4.44
5	f (3.6,1.6)=-6.24	f (2.4,2.4)=-6.24	f (1.8,1.2)=-5.88
6	f (2.4,1.6)=-6.72	f (3.6,1.6)=-6.24	f (2.4,2.4)=-6.24
7	f (3.0,1.8)=-6.96	f (2.4,1.6)=-6.72	f (2.4,2.4)=-6.24
8	f (3.0,1.8)=-6.96	f (2.55,2.05)= -6.7725	f (2.4,1.6)=-6.72
9	f (3.0,1.8)=-6.96	f (3.15,2.25)= -6.9525	f (2.55,2.05)= -6.7725
10	f (3.0,1.8)=-6.96	f (2.8125,2.0375)= -6.95640625	f (3.15,2.25)= -6.9525

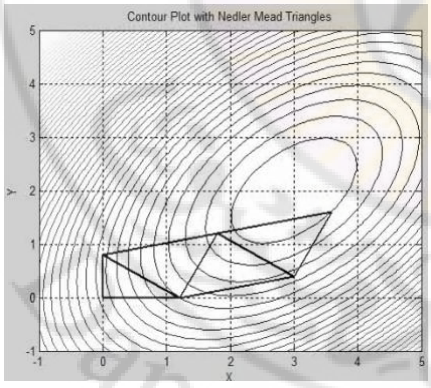
الجدول 6

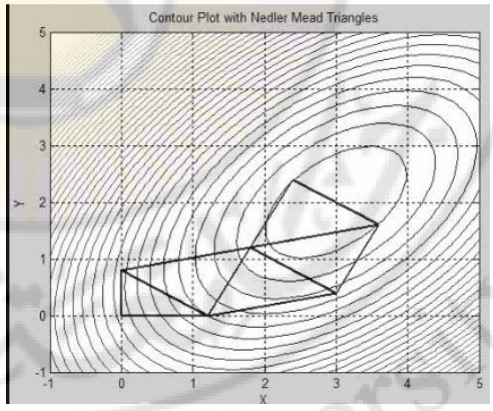

Contour Plot with Nedler Mead Triangles
X

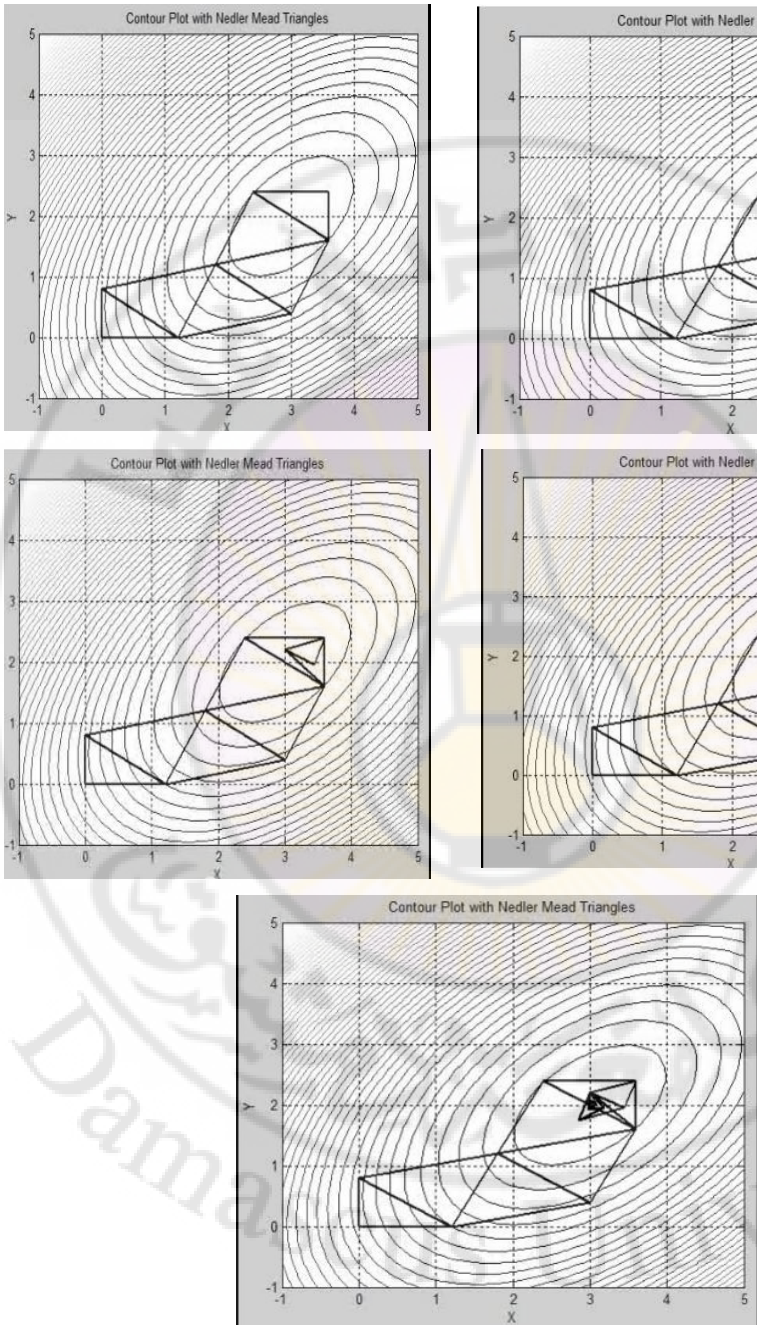

Contour Plot with Nedler Mead Triangles
Y
X


Contour Plot with Nedler Mead Triangles
Y
X


Contour Plot with Nedler Mead Triangles
Y
X


Contour Plot with Nedler Mead Triangles
Y
X


Contour Plot with Nedler Mead Triangles
Y
X



الشكل 9: سلسلة مثلثات $\{M_k\}$ تغطي الوصول إلى النقطة الصغرى المطلوبة بطريقة نيلدر– ميد

3-3 طريقة بويل Powell Method:

تمتاز طريقة بويل (الذي أنجزها العالم بويل في عام 1964) بأنها لا تحتاج إلى استخدام المشتقات لإيجاد القيمة الصغرى للتابع المعطى. و يُعد بويل أول من اكتشف ايجاد القيمة الصغرى عن طريق إدخال مجموعة أشعة مستقلة و التي نفترضها في البدء هي أشعة الواحدة. ثم في المرحلة الثانية نولد سلسلة من النقاط $X_0 = P_0, P_1, ..., P_N$ من خلال العلاقة $P_k = P_{k-1} + \gamma_k U_k$ علماً أنّ γ_k يتم تعيينها بتصغير الدالة $f(P_{k-1} + \gamma_k U_k)$ باستخدام طريقة بحث النسبة الذهبية أو فيبوناتشي على المجال الذي يكون عليه التابع أحادي التمثيل(التابع بمتغير واحد)، نبقي الأشعة كما هي U_j إلا المركبة الأخيرة نقوم بتغييرها استناداً لمفهوم المتوسط الحسابي حيث يفترض $U_N = P_N - P_0$، و هكذا نعيد العملية حتى نحصل على مجموعة أشعة تقترب من الحل الفعلي.

إذا لنفترض X_0 قيمة ابتدائية عند موقع القيمة الصغرى للتابع $Z = f(x_1, x_2, ..., x_N)$. نحاول الإقتراب من القيمة X_1 باستخدام الخوارزمية التالية:

خوارزمية طريقة بويل:

step(1): Set $P_0 = X_i$.

step(2): For $k = 1, 2, ..., N$

find γ_k minimize $f(P_{k-1} + \gamma_k U_k)$ and

set $P_k = P_{k-1} + \gamma_k U_k$

step(3): Set $i = i + 1$.

step(4): Set $U_j = U_{j+1}$ for $j = 1, 2, ..., N-1$

Set $U_N = P_N - P_0$.

step(5): find γ minimize $f(P_0 + \gamma U_k)$.

Set $X_i = P_0 + \gamma U_N$

step(6): Repeat steps (1) to (5) until $|\Delta f| < \varepsilon$.

Then Set $X_i = P_N$

مثال(8):

استخدم خوارزمية بويل لإيجاد X_1 و X_2 من أجل التابع :

$$f(x,y)=\cos(x)+\sin(y)$$

وذلك باعتبار القيمة الابتدائية $X_0=(5.5,2)$.

الحل:

بفرض

$$P_0=X_0=(5.5,2)\ ,\ U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=[U_1,U_2];U_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},U_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

من أجل $i=1$ التابع:

$$f(P_0+\gamma_1U_1)=f((5.5,2)+\gamma_1(1,0))$$
$$=f(5.5+\gamma_1,2)$$
$$=\cos(5.5+\gamma_1)+\sin(2)$$

لها القيمة الصغرى عند $\gamma_1=-2.3584042$ ومنه $P_1=3.1415958$.

من أجل $i=2$ التابع:

$$f(P_1+\gamma_2U_2)=f((3.1415958,2)+\gamma_1(0,1))$$
$$=f(3.1415958,2+\gamma_2)$$
$$=\cos(3.1415958)+\sin(2+\gamma_2)$$

لها القيمة الصغرى عند $\gamma_2=2.7123803$ ومنه $P_2=(3.1415958,4.7123803)$.

لتكن

$$U=\begin{bmatrix}0 & -2.3584042\\ 1 & 2.7123803\end{bmatrix};newU_1:=U_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ newU_2:=P_2-P_0$$

التابع:

$$f(P_0+\gamma U_2)=f((5.5,2)+\gamma(-2.3584042,2.7123803))$$
$$=f(5.5-2.3584042\gamma,2+2.7123803\gamma)$$

$$= \cos(5.5 - 2.3584042\gamma) + \sin(2 + 2.7123803\gamma)$$

لها القيمة الصغرى عند $\gamma = 0.9816697$ ومنه $X_1 = (3.1848261, 4.6626615)$.

نضع $P_0 = X_1$. عندما $i = 1$ التابع:

$$f(P_0 + \gamma_1 U_1) = f((3.1848261, 4.6626615) + \gamma_1(0,1))$$

$$= f(3.1848261, 4.6626615 + \gamma_1)$$

$$= \cos(3.1848261) + \sin(4.6626615 + \gamma_1)$$

لها القيمة الصغرى عند $\gamma_1 = 0.0497117$ ومنه $P_1 = (3.1848261, 4.7123732)$.

عندما $i = 2$ التابع:

$$f(P_1 + \gamma_2 U_2) = f((3.1848261, 4.7123732) + \gamma_2(-2.3584042, 2.7123809))$$

$$= f((3.1848261 - 2.3584042\gamma_2, 4.7123732 + 2.3584042, 2.7123809\gamma_2)$$

$$= \cos(3.1848261 - 2.3584042\gamma_2) + \sin(4.7123732 + 2.3584042, 2.7123809\gamma_2)$$

لها القيمة الصغرى عند $\gamma_1 = 0.0078820$ ومنه $P_2 = (3.1662373, 4.7337521)$.

مرة ثانية نفترض $U_2' = (P_2 - P_0)'$

$$U = \begin{bmatrix} -2.3584042 & -0.0185889 \\ 2.7123803 & 0.0710901 \end{bmatrix}$$

التابع:

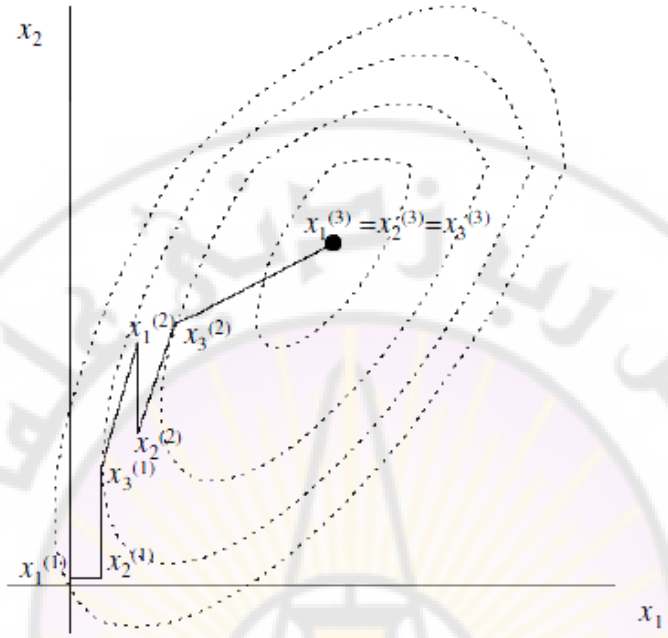
$$f(P_1 + \gamma_2 U_2) = f((3.1848261, 4.6626615) + \gamma(-0.0185889, 0.0710906))$$

$$= f((3.1848261 - 0.0185889\gamma, 4.6626615 + 0.0710906\gamma)$$

$$= \cos(3.1848261 - 0.0185889\gamma) + \sin(4.6626615 + 0.0710906\gamma)$$

لها القيمة الصغرى عند $\gamma = 0.8035684$ ومنه $X_2 = (3.1698887, 4.7197876)$.

التابع $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$ لها قيمة صغرى مرتبطة عند النقطة $P_2 = (\pi, 3\pi/2)$ يوضح الشكل 10 محيط سير العملية للتابع f والمواقع المرتبطة للنقاط X_2, X_1, X_0.



الشكل 10: يبين تنقل التابع f للنقاط المعطاة

4-طريقة التدرج و نيوتن gradient and Newton method:

سنقوم الآن اعتماداً على إيجاد المشتقات الجزئية للتابع $f(X)$ ذو N متغير بإيجاد القيمة الصغرى له. حيث $X=(x_1,x_2,...,x_N)$.

1-4 طريقة التدرج أو الإنحدار الأعظمي Steepest Descent or Gradient Method:

تعريف(5):

بفرض $Z=f(X)$ تابع للمتغير X حيث المشتقات $\partial f(X)/\partial x_k$ موجودة من أجل $k=1,2,...,N$.

يرمز لتدرج التابع f بـ $\nabla f(X)$ وهو الشعاع:

$$\nabla f(X)=\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X)}{\partial x_2},...,\frac{\partial f(X)}{\partial x_N}\right) \quad (33)$$

مثال(9):

أوجد تدرج التابع $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2+2}$ عند النقطة $(-3,-2)$.

الحل:

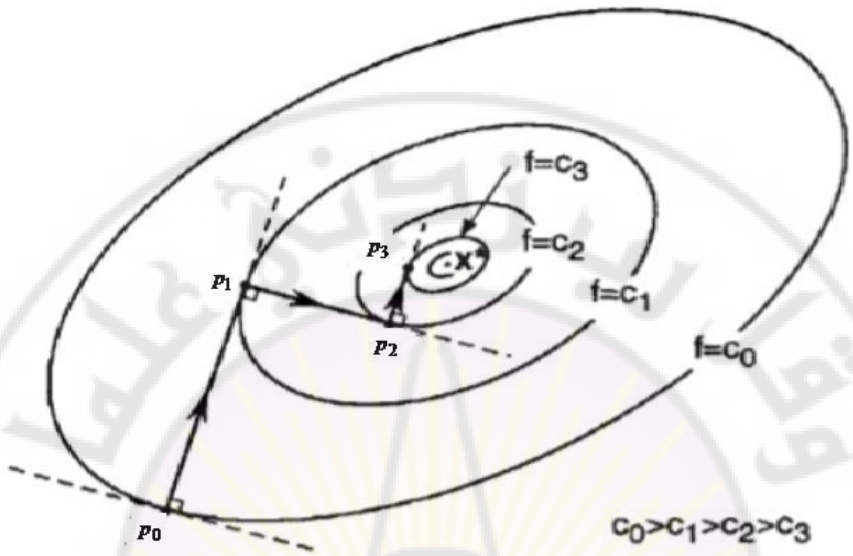
نعوض $x=-3$, $y=-2$ في:

$$f_x=\frac{-x^2+2xy+y^2+2}{(x^2+y^2+2)^2}\ ,\ f_y=\frac{-x^2-2xy+y^2-2}{(x^2+y^2+2)^2}$$

ينتج

$$\nabla f(-3,2)=(f_x(-3,2),f_y(-3,2))=(\frac{9}{225}\ ,\ -\frac{19}{225})$$

لنتذكر أن شعاع التدرج في العلاقة (33) يشير إلى المعدل الأعظمي لتزايد التابع $f(X)$. إذا يشير $-\nabla f(X)$ باتجاه التناقص الأعظمي. إبدأ عند النقطة P_0 وابحث على طول الخط عبر P_0 باتجاه: $S_0=-\nabla f(P_0)/\|-\nabla f(P_0)\|$.لنصل إلى النقطة P_1. حيث تظهر القيمة المحلية الصغرى عند تثبيت النقطة X لتكون على المستقيم $X=P_0+y\,S_0$. بما أن المشتقات الجزئية ممكنة، يجب إجراء تصغير باستخدام طريقة التقريب التربيعي أو التكعيبي. بعد ذلك نحسب $-\nabla f(P_1)$ ونتحرك باتجاه خط البحث $S_1=-\nabla f(P_1)/\|-\nabla f(P_1)\|$. سنصل للنقطة P_2 حيث تظهر القيمة المحلية الصغرى عند تثبت X لتمتد على المستقيم $X=P_1+y\,S_1$. سيولد التكرار سلسلة من النقاط $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$لها الخاصة: $f(P_0)>f(P_1)>...>f(P_k)>...$ إذا كان $\lim_{k\to\infty} f(P_k)=P$ عندئذٍ تكون $f(P)$ القيمة المحلية الصغرى للتابع $f(X)$.



الشكل 11: يبين تنقل التابع f للنقاط المعطاة

الخطوات الرئيسية لطريقة التدرج:

(i) Evaluate $\nabla f\ (P_k)$.

(ii) Compute the search direction

$$S_k = -\nabla f\ (P_k) / \left\| -\nabla f\ (P_k) \right\|$$

(iii) Perform a single parameter minimization of $\Phi(\gamma) = f\ (P_k + \gamma S_k)$ on $[0,b]$ where b is large. This will producte a value $\gamma = h_{\min}$ where a local minimum for $\Phi(\gamma)$ occurs. The relation $\Phi(h_{\min}) = f\ (P_k + h_{\min} S_k)$ shows that this is a minimum for $f\ (x)$ along the search line $X = P_k + h_{\min} S_k$.

(iv) Construct the next point $P_{k+1} = P_k + h_{\min} S_k$.

(v) Perform the termination test for minimization; that is, are the function values $f\ (P_k)$ and $f\ (P_{k+1})$ sufficiently close and the distance $\left\| P_{k+1} - P_k \right\|$ small enough?

(vi) Set $U_N = P_N - P_0$.

(vii) find γ minimize $f(P_0 + \gamma U_k)$. Set $X_i = P_0 + \gamma U_r$

(viii) Repeat the process

مثال(10):

استخدم طريقة التدرج لإيجاد P_1 , P_2 للتابع $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+2}$، و ذلك باعتبار النقطة الابتدائية هي $P_0 = (-3,-2)$.

الحل :

من أجل $P_0 = (-3,-2)$

$$S_0 = \frac{1}{\|(-\nabla f(P_0))\|}(-\nabla f(P_0))$$

$$= \frac{1}{\|(-\nabla f(-3,-2))\|}(-\nabla f(-3,-2))$$

$$= (-0.4280863, 0.9037378)$$

التابع

$$f(P_0 + \gamma S_0) = f((-3,-2) + \gamma(-0.4280863, 0.9037378))$$

$$= f(-3 - 0.4280863\gamma, -2 + 0.9037378\gamma)$$

$$= \frac{(-3 - 0.4280863\gamma) - (-2 + 0.9037378\gamma)}{(-3 - 0.4280863\gamma)^2 + (-2 + 0.9037378\gamma)^2 + 2}$$

له قيمة صغرى عند $\gamma = h_{\min} = 4.8186760$ (باستخدام طريقة التقريب التربيعي).

$$P_1 = P_0 + h_{\min} S_0$$

$$= (-3,-2) + (4.8186760)(-0.4280863, 0.9037378)$$

$$= (-5.0628094, 2.3548199)$$

و من أجل $P_1 = (-5.0628094, 2.3548199)$

$$S_1 = \frac{1}{\|(-\nabla f\ (P_1))\|}(-\nabla f\ (P_1))$$

$$= \frac{1}{\|(-\nabla f\ (-5.0628094, 2.3548199))\|}(-\nabla f\ (-5.0628094, 2.3548199))$$

$$= (0.9991231, -0.0418690)$$

التابع

$$f\ (P_1 + \gamma S_1) = f\ ((-5.0628094, 2.3548199) + \gamma(0.9991231, -0.0418690))$$

$$= f\ (-5.0628094 + 0.9991231\gamma, 2.3548199 - 0.0418690\gamma)$$

$$= \frac{(-5.0628094 + 0.9991231\gamma) - (2.3548199 - 0.0418690\gamma)}{(-5.0628094 + 0.9991231\gamma)^2 + (2.3548199 - 0.0418690\gamma)^2 + 2}$$

له قيمة صغرى عند $\gamma = h_{\min} = 2.7708382$ (باستخدام طريقة التقريب التربيعي).

$$P_2 = P_1 + h_{\min} S_1$$

$$= (-5.0628094, 2.3548199) + (2.7708382)(0.9991231, -0.0418690)$$

$$= (-2.2944111, 2.388080)$$

وباجراء عدة حسابات يبين (الجدول7) أنَّ للتابع $f\ (x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 2}$ قيمة صغرى عند $P = (-1,1)$.

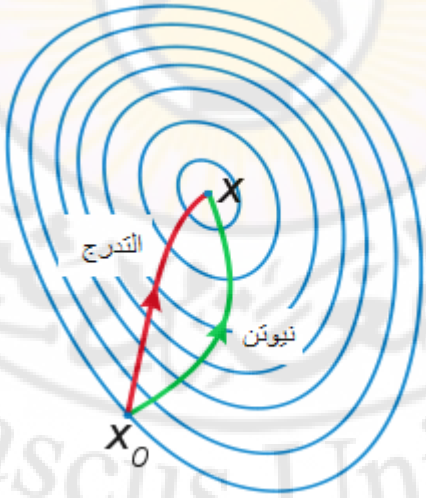
k	x_k	y_k	$f\ (x_k, y_k)$
0	–3.0000000	–2.0000000	–0.0666667
1	–5.0628094	2.3548199	–0.2235760
2	–2.2944111	2.2388080	–0.3692574
3	–1.3879337	1.3859313	–0.4743948
4	–1.0726050	1.0724933	–0.4987762
5	–1.0035351	1.0035334	–0.4999969

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$
6	–1.0000091	1.0000091	–0.5000000
7	–1.0000000	1.0000000	–0.5000000

الجدول 7

2-4 طريقة نيوتن:

وجدنا في تحليل عددي (1)، أنّه يمكن تقريب التوابع بمتغير واحد إلى حدوديات من درجة ثانية (على سبيل المثال باستخدام حدوديات لاغرانج)، استخدم نيوتن مفهوم التقريب لحدوديات الدرجة الثانية بالاعتماد على منشور تايلور، ثم اعتمد على هذا التقريب لإيجاد القيمة الصغرى المحلية، وسيستخدم كلاً من المشتق الجزئي الأول والثاني للتابع المطلوب. ونعلم أن طريقة التدرج تستخدم فقط المشتقات الجزئية الأولى و بالتالي يتوقع أن تكون طريقة نيوتن أكثر فاعلية منها.



الشكل 12: يبين الفرق بين طريقة نيوتن(يوجد تقوس) و طريقة التدرج

تعريف(6):

لتكن $Z = f(X)$ تابع للمتغير X حيث المشتقات $\partial^2 f(X)/\partial x_i \partial x_j$ موجودة من أجل $i, j = 1, 2, ..., N$.

تُعرف مصفوفة هيسيان من البعد $N \times N$ من أجل f عند X ، ونرمز لها $H f(X)$ ، كما يلي:

$$H f(X) = \left[\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{N \times N} \quad (34)$$

وتُعرف مصفوفة هيسيان على أنها المشتق الثاني للتابع f (عندما تكون $N = 1$) من الواضح أن مصفوفة هيسيان للتابع f تساوي جاكوبيان لتدرج f

$$H f(X) = J \nabla f(X) \quad (35)$$

مثال(11):

أوجد مصفوفة هيسيان التابع $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+2}$ عند النقطة $(-3,-2)$.

من المثال(9)

$$f_x(x,y) = \frac{-x^2+2xy+y^2+2}{(x^2+y^2+2)^2} \; , \; f_y(x,y) = \frac{-x^2-2xy+y^2-2}{(x^2+y^2+2)^2}$$

المشتقات الجزئية الثانية:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2(x^3-3x^2y-3x(y^2+2)+y(y^2+2))}{(x^2+y^2+2)^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{2(x^3+3x^2y+x(2-3y^2)-y(y^2+2))}{(x^2+y^2+2)^3}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{2(x^3+3x^2y+x(2-3y^2)-y(y^2+2))}{(x^2+y^2+2)^3}$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{2(2x+x^3-6y-3x^2y-3xy^2+y^3)}{(x^2+y^2+2)^3}$$

نحسب مصفوفة هيسيان

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

عند النقطة $(-3,-2)$

$$Hf(-3,-2)=\frac{1}{3375}\begin{bmatrix} 138 & -78 \\ -78 & -122 \end{bmatrix}$$

تعريف(7):

تعرف كثيرة حدود تايلور من الدرجة الثانية من أجل $f(X)$ عند A كما يلي:

$$Q(X)=f(A)+\nabla f(A)\cdot(X-A)+\frac{1}{2}Hf(A)(X-A)' \qquad (36)$$

مثال(12):

أوجد كثيرة حدود تايلور للتابع $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2+2}$ عند النقطة $A=(-3,-2)$. عالج التدرج للتابع كمصفوفة من البعد 2×1.

كما ورد في المثالين(9) و(10):

$$\nabla f(-3,2)=\left[f_x(-3,2),f_y(-3,2)\right]=\left[\frac{9}{225}\ ,\ -\frac{19}{225}\right]$$

$$Hf(-3,-2)=\frac{1}{3375}\begin{bmatrix} 138 & -78 \\ -78 & -122 \end{bmatrix}$$

هكذا

$$Q(x,y)=-\frac{1}{15}+\frac{1}{255}\begin{bmatrix}9 & -19\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x+3 & y+2\end{bmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x+3 & y+2\end{bmatrix}\left(\frac{1}{3375}\right)\begin{bmatrix} 138 & -78 \\ -78 & -122 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x+3 & y+2\end{bmatrix}'$$
$$=\frac{69x^2-61y^2+393x-763y-481}{3375}$$

تم حذف رموز المصفوفة من المصفوفة ذات الأبعاد 1×1.

ليكن المشتقان الجزئيان الأول والثاني $z=f(x_1,x_2,...,x_N)$ موجودان ومستمران

في الحقل الذي يحوي النقطة P_0، ويوجد نهاية محلية صغرى عند النقطة P.
نستبدل A في الصيغة(36) بالنقطة P_0 فينتج:

$$Q(X) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(X - P_0) + \frac{1}{2}Hf(P_0)(X - P_0)' \quad (37)$$

كثيرة حدود من الدرجة الثانية ذات N متغير، حيث $X = [x_1, x_2, ..., x_N]$. وتظهر القيمة الصغرى له عندما

$$\nabla Q(X) = 0 \quad (38)$$

أو

$$\nabla f(P_0) + (X - P_0)(Hf(P_0))' = 0 \quad (39)$$

إذا كانت P_0 قريبة من P (حيث تظهر القيمة الصغرى للتابع f)، عندئذٍ تكون $H f(P_0)$ لها مقلوب ويمكن إيجاد حل الصيغة(39) بالنسبة للقيمة X.

$$X = P_0 - \nabla f(P_0)((Hf(P_0))^{-1})' \quad (40)$$

وبتعويض X بالقيمة P_1 في الصيغة (40) ينتج

$$P_1 = P_0 - \nabla f(P_0)((Hf(P_0))^{-1})' \quad (41)$$

أما إذا استخدمنا P_k عوضاً عن P_0 في الصيغة (41) عندها نحصل على القانون العام:

$$P_k = P_{k-1} - \nabla f(P_{k-1})((Hf(P_{k-1}))^{-1})' \quad (42)$$

نستخدم مقلوب مصفوفة هيسيان في الصيغة (39) لحلها من أجل X.

مثال(13):

استخدم الصيغة(42) لإيجاد P_1 , P_2 من أجل التابع $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+2}$ مستخدماً النقطة الإبتدائية $P_0 = [-0.3 \quad 0.2]$.

إذا كانت $P_0 = [-0.3 \quad 0.2]$ عندها:

$$\nabla f(P_0) = [0.4033591 \quad -0.4254006]$$

$$Hf(P_0)=\begin{bmatrix} 0.4476594 & -0.1955793 \\ -0.1955793 & 0.3801897 \end{bmatrix}$$

$$(Hf(P_0))'=\begin{bmatrix} 2.8814429 & 1.4822882 \\ 1.4822882 & 3.3927931 \end{bmatrix}$$

بتعويض ما سبق في الصيغة (42) ينتج

$$P_1=\begin{bmatrix}-0.3 & 0.2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.4033591 & -0.4254006\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.8814429 & 1.4822882 \\ 1.4822882 & 3.3927931 \end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{bmatrix}-0.8316899 & 1.0454017\end{bmatrix}$$

إذا كانت $P_1=\begin{bmatrix}-0.8316899 & 1.0454017\end{bmatrix}$ عندئذٍ

$$\nabla f(P_1)=\begin{bmatrix}0.0462373 & 0.0097785\end{bmatrix}$$

$$Hf(P_1)=\begin{bmatrix} 0.3027529 & -0.0212462 \\ -0.0212462 & 0.2513046 \end{bmatrix}$$

$$(Hf(P_0))'=\begin{bmatrix} 3.3227373 & 0.2809163 \\ -0.2808163 & 4.0029851 \end{bmatrix}$$

نعوض ما سبق في الصيغة(42) فينتج

$$P_2=\begin{bmatrix}-0.8316899 & 1.0454017\end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix}0.0462373 & 0.0097785\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3.3227373 & 0.2809163 \\ -0.2809163 & 4.0029851 \end{bmatrix}$$

$$P_2=\begin{bmatrix}-0.9880713 & 0.9932699\end{bmatrix}$$

يبدو واضحاً أن النقاط تتقارب من النقطة $P=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$ حيث القيمة الصغرى للتابع f. والتي نصل إليها بالتكرار الخامس $P_5=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$.

في الواقع يمكن للقارئ التحقق بسهولة من أن طريقة نيوتن تختلف سرعتها حسب القيمة الابتدائية.

يمكن تعديل طريقة نيوتن باستخدام عبارة خط البحث:

$$S_k=-\nabla f(P_{k-1})((Hf(P_{k-1}))^{-1})'$$

نعوض في الصيغة(42). وهذا أحد الأمثلة لاستخدام خط البحث S_k في طريقة

التدرج. وكما جرى تصغير معامل (خط البحث) في طريقة التدرج. فإن هذا التعديل لطريقة نيوتن سيكون أكثر فعالية من طريقة نيوتن.

الخطوات الرئيسية لطريقة نيوتن المعدلة:

بفرض تم الحصول على P_k

(i) Compute the search direction

$$S_k = -\nabla f\,(P_{k-1})((H\,f\,(P_{k-1}))^{-1})'$$

(ii) Perform asingle parameter minimization of $\Phi(\gamma) = f\,(P_k + \gamma S_k)$ on $[0,b]$ where b is large. This will producte a value $\gamma = h_{\min}$ where a local minimum for $\Phi(\gamma)$ occurs. The relation $\Phi(h_{\min}) = f\,(P_k + h_{\min} S_k)$ shows that this is a minimum for $f\,(x)$ along the search line $X = P_k + h_{\min} S_k$.

(iii) Construct the next point $P_{k+1} = P_k + h_{\min} S_k$.

(iv) Perform the termination test for minimization; that is, are the function values $f\,(P_k)$ and $f\,(P_{k+1})$ sufficiently close and the distance $\|P_{k+1} - P_k\|$ small enough.

(v) Repeat the process

تمارين

1- استخدم المبرهنة(1) لتحديد مجال تزايد التوابع التالية وتناقصها:

a) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ b) $f(x)=x/(x-1)$

c) $f(x)=(x+1)/x$ d) $f(x)=x^x$

2- استخدم التعريف(3) لتبين أن التوابع التالية أحادية التمثيل في المجال المعطى

a) $f(x)=x^2-2x+1;[0,4]$ b) $f(x)=\cos(x);[0,4]$

c) $f(x)=x^x;[0.1,10]$ d) $f(x)=-x(3-x)^x;[0,3]$

3- استخدم المبرهنتين(3) و(4) إن أمكن لإيجاد القيم المحلية الصغرى والعظمى من أجل التوابع التالية ضمن المجال المعطى:

a) $f(x)=4x^3-8x^2-11x+5;[1,2]$

b) $f(x)=x+3/x^2;[0.5,3]$

c) $f(x)=(x+2.5)/(4-x^2);[-1.9,1.9]$

d) $f(x)=e^x/x^2;[0.5,3]$

e) $f(x)=-\sin(x)-\sin(3x)/3\ ;\ [0,2]$

f) $f(x)=-2\sin(x)+\sin(2x)-2\sin(3x)/3\ ;\ [1,3]$

4- أوجد النقطة الأقرب من النقطة $(3,1)$ في القطع المكافئ $y=x^2$.

5- أوجد النقطة الأقرب من النقطة $(2,1)$ في المنحني $y=\sin(x)$.

6- أوجد النقطة الأبعد من الوتر $\overline{AB}$ إذا كانت $B(-1,\sqrt{24}),A(3,4)$ في الدائرة $x^2+y^2=25$.

7- استخدم طريقة بحث النسبة الذهبية وبتقريب لخمسة أرقام عشرية لإيجاد $[a_k,b_k]$ من أجل $k=0,1,2$ لكل تابع من التوابع التالية، لاحظ أن كل تابع منها أحادي التمثيل في المجال المذكور

a) $f(x)=e^{x}+2x+\frac{x^{2}}{2};[-2.4,-1.6]$

b) $f(x)=-\sin(x)-x+\frac{x^{2}}{2};[0.8,1.6]$

c) $f(x)=\frac{x^{2}}{2}-4x-x\cos(x);[0.5,2.5]$

d) $f(x)=x^{3}-5x^{2}+23;[1,5]$

8- استخدم طريقة بحث فيباناتشي وبتقريب لخمسة أرقام عشرية لإيجاد $[a_k,b_k]$ من أجل $k=0,1,2$ للدوال الواردة في التمرين(7). بفرض أن F_{10} هو عدد فيباناتشي الأصغر والمحقق للاحتمال ε.

9- استنتج تكرارين لطريقة تقريب المعادلة التربيعية مستخدماً التقريب لخمسة أرقام عشرية للدوال الواردة في التمرين(7).

10- استخدم طريقة بحث التكعيب وبقريب لخمسة أرقام عشرية لإيجاد P_1 , P_2 للدوال الواردة في التمرين(7).

11- حدد عدد الخطوات k للمجال البديل في طريقة بحث النسبة الذهبية المطبقة على تابع من أجل المجالات المعطاة التالية

a) $[0,1]$, $k=4$ b) $[-2.3,-1.6]$, $k=5$

c) $[-4.6,3.5]$, $k=10$

12- أوجد عدد فيباناتشي الأصغر F_r من أجل كل مجال و قيمة ε محققاً المتراجحة (9).

a) $[-0.1,3.4]$, $\varepsilon=10^{-4}$ b) $[-2.1,5.3]$, $\varepsilon=10^{-6}$

c) $[3.33,3.99]$, $\varepsilon=10^{-8}$

13- برهن جبرياً المساواة

$$1-\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}=\frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}$$

14- تُعد طريقة بحث ديتشوتومسكي إحدى طرائق تحديد القيمة الصغرى لتابع أحادي التمثيل ضمن مجال مغلق $[a_0,b_0]$ دون استخدام الاشتقاق. القيم c_0, d_0 تتوضع على مسافة ε متساوية من نقطة الوسط في المجال، $(a_0+b_0)/2$. بالاعتماد على القيم $f(c_0), f(d_0)$ نحصل على مجال بديل جديد. نكرر العملية بتحديد c_1, d_1.
بفرض ε ثابت معرف و tol طول المجال البديل الأخير طالما أن $b_k-a_k\geq tol$ ليكن:

$$c_k=\frac{a_k+b_k}{2}-\varepsilon \quad , \quad d_k=\frac{a_k+b_k}{2}+\varepsilon$$

إذا كان $f(c_k)<f(d_k)$ ولتكن $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=d_k$ وإلا لتكن $a_{k+1}=c_k$, $b_{k+1}=b_k$ ولتكن $k=k+1$ نتابع التكرار.

a) استخدم بحث ديتشوتومسكي وبتقريب لخمسة أرقام عشرية لإيجاد $[a_1,b_1]$ و $[a_2,b_2]$ من أجل التابع $f(x)=e^x+2x+x^2/2$ في المجال $[-2.4,-1.6]$ واستخدم ثابت ديتشوتومسكي $\varepsilon=0.1$.

b) أوجد طول المجال البديل رقم k والذي يعطى بالعلاقة

$$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b_0-a_0)+2\varepsilon(1-\frac{1}{2^k})$$

c) عرف القيمة k للتابع الواردة في الفقرة (a) حيث:

$$\varepsilon=10^{-6} \quad , \quad b_k-a_k<10^{-4}$$

15- طريقة البحث التكعيبي: ليكن التابع f أحادي التمثيل ومختلفة في المجال $[a_0,b_0]$، مرة ثانية، نعتبر أن طريقة البحث المصرح عنها تستخدم f'. نبحث عن الإحداثي السيني للقيمة الصغرى $P_{\min}$ لمكعب كثيرة الحدود والذي يتطابق مع f و f' عند أطراف المجال. لتكن:

$$p(x)=\alpha(x-a_0)^3+\beta(x-a_0)^2+\gamma(x-a_0)+\rho$$

حيث

$$P'(b_0)=f'(b_0)\ ,\ P(b_0)=f(b_0)\ ,P'(a_0)=f'(a_0)\ ,\ P(a_0)=f(a_0)$$

إذا كان $f(p_{\min})$ عندها نجعل $a_1=p_{\min}\ ,\ b_1=b_0$ وإلا نجعل $a_1=a_0\ ,\ b_1=p_{\min}$. نتابع تكرار العملية حتى الحصول على المجال البديل في الخطوة k أصغر من الخطأ المطلوب $b_k-a_k<\varepsilon$. وكما في طريقة البحث التكعيبي الواردة ضمن الفصل، يبقى إيجاد صيغ صريحة للمعاملات α,β,γ,ρ.

a) بين أنَّ $p_{\min}=a_0+\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-3\alpha\gamma}}{3\alpha}$.

b) بين أنَّ $\rho=P(a_0)=f(a_0)\ ,\ \gamma=P'(a_0)=f'(a_0)$

c) بين أنَّ $\alpha=\dfrac{G-2D}{b_0-a_0}$, $\beta=3D-G$ حيث $F=\dfrac{f(b_0)-f(a_0)}{b_0-a_0}$ و $D=\dfrac{F-\gamma}{b_0-a_0}$ و $G=\dfrac{f'(b_0)-f'(a_0)}{b_0-a_0}$.

d) استخدم طريقة البحث التكعيبي وبتقريب لخمسة أرقام عشرية لإيجاد $[a_1,b_1]$ و $[a_2,b_2]$ من أجل التابع $f(x)=e^x+2x+x^2/2$ في المجال $[a_0,b_0]=[-2.4,-1.6]$.

16- استخدم المبرهنتين(5) لإيجاد القيمة المحلية الصغرى للتوابع التالية:

a) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y+5$

b) $f(x,y)=x^2+y^2+x-2y-xy+1$

c) $f(x,y)=x^2y+xy^2-3xy$

d) $f(x,y)=(x-y)/(x^2+y^2+2)$

e) $f(x,y)=100(y-x^2)^2+(1-x)^2$

17- بفرض $W=(5,2),G=(1,1),B=(2,-3)$، أوجد النقاط E,R,M. وارسم

مخطط المثلثات المشاركة في الحل.

18- بفرض $B=(-1,2), G=(-2,-5), W=(3,1)$، أوجد النقاط M, R, E. وارسم مخطط المثلثات المشاركة في الحل.

19- بفرض $B=(0,0,0), G=(1,1,0), P=(0,0,1), W=(1,0,0)$.

a) ارسم رباعي السطوح $BGPW$.

b) أوجد $M=(B+G+P)/3$.

c) أوجد $R=2M-W$ وارسم رباعي السطوح $BGPR$.

d) أوجد $E=2R-M$ وارسم رباعي السطوح $BGPE$.

20- بفرض $B=(0,0,0), G=(0,2,0), P=(0,1,1), W=(2,1,0)$، أوجد حل السؤال السابق.

21- استخدم طريقة بويل في ايجاد X_1 مستخدماً القيمة الابتدائية $P_0=(½,⅓)$ من أجل $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y+5$.

22- أوجد حل السؤال السابق من أجل القيمة الابتدائية $P_0=(½,⅓)$ والتابع $f(x,y)=x^2y+xy^2-3xy$.

23- أوجد شعاعاً يثبت أن $M=(B+G)/2$ يمثل نقطة المركز بين النقطتين B, G.

24- أثبت أن متوسطات أي مثلث تتقاطع عند نقطة ثلثي المسافة من كل رأس إلى نقطة المركز للاتجاه المقابل.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

أولاً: عربي-إنجليزي

	(أ)	
Stopping procedure		إجراء توقف
Relaxation		إرخاء
Basis		أساس
Weak stability		استقرار ضعيف
Strong stability		قوي
Linear independence		استقلال خطي
Interpolation		استيفاء
Exponential		أسي
Numerical differentiation		اشتقاق عددي
Minimax value		أصغر قيمة عظمى
Squares least		المربعات الصغرى
Maximal		أعظمية
Forward		أمامي (تقدمي)
Systems		أنظمة(جملة)
Deflation		انقباض
Euler		أولر
Root Finding		إيجاد جذر

	(ب)	
Numerical software		برامج عددية
Program		برنامج
	(ت)	
Collection		تجميع
Back ward error analysis		تحليل الخطأ التراجعي
Round off		تدوير
Quadratic		تربيعي
Acceleration		تسريع
Similarity		تشابه
Perturbation		تشويش (اضطراب)
Extrapolation		استيفاء خارجي
Back ward substitution		تعويض تراجعي
Convergence		تقارب
Quadratic convergence		تربيعي
Approximating		تقريب
Piecewise polynomial approximation		تقريب كثيرة حدود قطعية (تجزيئية)
Rational approximation		تقريب كسري
Binary search		تقصي ثنائي
Evaluation		تقويم
Integral		تكامل

Double integral		تكامل ثنائي
Iteration		تكرا ر
Functional iteration		تكرا ر دالي
Fixed point iteration		تكرا ر النقطة الثابتة
Cubic		تكعيبي
Binary representation of number		التمثيل الثنائي لعدد
Bisection		تنصيف
Iterative refinement		تهذيب تكراري
Basis functions		توابع أساس
	(ث)	
Asymptotic error constant		ثابت الخطأ المقارب
Triple		ثلاثي
Bilinear		ثنائية الخطية
Piecewise bilinear		ثنائية الخطية القطعية
	(ج)	
Jacobi iterative		جاكوبي التكراري
Algebraic		جبرية
Scalar product		جداء عددي
Root		جذر
	(ح)	
Bound		الحد (محدود)

Remainder term		باق حد
Rounding arithmetic		حساب تدوير
Chopping arithmetic		حساب القطع
Nested arithmetic		تعشيش(متداخل)
Posed well		حسنة الوضع
	(خ)	
Error		خطأ
Local truncation error		القطع المحلي
Strategies		خطط
Multistep		خطوات متعددة
Consistent one step		خطوة واحدة متسقة
Linear		خطية
Piecewise linear		خطية التجزئة (القطعية)
Back ward		تراجعي(تراجعي)
Algorithm		خوارزمية
	(د)	
Accuracy degree		درجة الدقة
Double precision		دقة ثنائية
	(ذ)	
Variable step size		ذات طول الخطوة المتغير
	(ر)	

Computer graphics		رسوم الحاسوب
Machine number		رقم آلة
Finite digit		محدود الأرقام
	(س)	
Composite Simpson's		سمبسون المركبة
	(ش)	
Pseudocode		شبه شفرة
Trapezium		شبه منحرف
Quasi newton		شبه نيوتن
B-splines		شرائح – ب
Root condition		شرط الجذر
Lipschitz condition		ليبشيتز
Quadratic spline		شريحة تربيعية
Cubic spline		شريحة تكعيبية
Natural cubic spline		شريحة طبيعية
Reduced form		شكل مختزل
Floating point form		الفاصلة العائمة
	(ص)	
Explicit		صريحة (ظاهرية)
Minor		صغيرة
Zero		صفر

Zeroth		صفري
	(ض)	
Implicit		ضمنية
	(ط)	
Method		طريقة
Stable A method		طريقة A المستقرة
Bisection method		طريقة التنصيف
Power method		طريقة القوة
Inverse power method		طريقة العكسية
Symmetric power method		طريقة المتناظرة
Neville method		طريقة نيفل
Method of false position		طريقة الوضع الخاطئ
Step size		طول الخطوة
Spectrum		طيف
	(ع)	
Decimal machine number		عدد آلة عشري
Condition number		عدد شرطي
Operation counts		عد العمليات
Instability		عدم استقرار
Nodes		عقد
Inverse		عكسية

Maximal column		عمود أعظمي
Scaled column		عمود مدرج
Finite element		عنصر محدود
Pivot element		عنصر محوري (المرتكز)
	(غ)	
Iterative Gauss Seidel		غاوس سيدل التكرارية
Nonlinear		غير الخطية
Unstable		غير المستقرة
Underflow		غيض (تحت المدى الطبيعي)
	(ف)	
Difference		فرق
Backward difference		فرق تراجعي
Interpolatory divided		الفروق المقسومة للاستيفاء
Finite difference		فرق محدود
Vector space		فضاء متجهات
Super linear		فوق خطي
Overflow		فيض (فوق المستوى الطبيعي)
	(ق)	
Differentiable		قابلة للتفاضل
Secant		قاطع
Least change secant		ذي متغير أصغري

Three eighth rule		قاعدة ثلاث أثمان
Formula		قانون (صيغة)
Quadratic formula		تربيعي
Forward difference formula		الفرق التقدمي
Three point formula		التقاط الثلاث
Five point formula		التقاط الخمس
Shooting		قذف
Linear shooting		خطي
Nonlinear shooting		غير خطي
Truncation		قطع
Inverse power		قوة عكسية
Power		قوى
Symmetric power		تناظرية
Initial value		قيمة ابتدائية
Eigen value		قيمة ذاتية
Average value		قيمة المعدل
Characteristic value		قيمة مميزة
	(ك)	
Complete		كاملة
Polynomial		كثيرة حدود

Piecewise polynomial		تجزيئية (قطعية)
Global		كلي
	(م)	
Operator		مؤثر
Fibonacci sequence		متتالية فيبوناتشي
Vector		متجه
Residual vector		متجه باق
Eigenvector		متجه ذاتي
Nested		متداخلة
Series		متسلسلة
Continuous		مستمر
Orthogonal		متعامدة
Orthonormal		نظامياً
Isotropic		متماثل حرارياً
Centered		متمركز
Corrector predictor		متنبئة مصححة
Trigonometric		مثلثيه
Divided		مجزأ (مقسم)
Orthogonal set		مجموعة متعامدة
Orthonormal set		نظامية
Convex		محدبة
Determinant of matrix		محدد المصفوفة
Local		محلي

Pivoting		محورة (المرتكز)
Control		مراقبة
Order of convergence		مرتبة تقارب
Linearly dependent		مرتبة خطياً
Composite		مركبة
Initial value problem		القيمة الابتدائية
Linear boundary value problem		القيمة الحدية الخطية
Stable		مستقرة
Weakly stable		مستقرة بضعف
Strongly stable		مستقرة بقوة
Matrix		مصفوفة
Symmetric matrix		مصفوفة متناظرة
Dominant matrix		مصفوفة مسيطرة
Positive definite		معرفة ايجابياً
Multiple		مضاعف
Absolute		مطلق
Heat equation		معادلة الحرارة
Linear equation		خطية
Closed		مغلق
Successive over relaxation		مفرط متتابع
Integration		مكاملة
Adaptive quadrature		مكيفة(محسنة)
Osculation		ملاصقة

Clamped		مقيدة
Extended		ممددة
Characteristic		مميزة
Bizier curve		منحني بيزيه
Rational		منطقة (كسري)
Well posed		موضوعة جيد
	(ن)	
Steepest descent		انحدار
Relative		نسبي
Five point		خمس نقاط
Three point		ثلاث نقاط
Midpoint		نقطة المنتصف
Backward Euler theory		نظرية أويلر التراجعية
Modified Euler theory		نظرية أويلر المعدَلة
Exponential growth		نمو أسي
Limit		نهاية
Open Newton Cotes		نيوتن كوتس المفتوح
	(و)	
Description		وصف
False position		وضع خاطئ
Weight		وزن

ثانياً:إنجليزي–عربي

	(A)	
Absolute		مطلق
Deviation Absolute		انحراف مطلق
Accelerating		تسريع
Accuracy degree		درجة الدقة
Adaptive		مكيفة (محسنة)
Algebraic		جبرية
Algorithm		خوارزمية
Approximating		تقريب
Asymptotic error constant		ثابت الخطأ المقارب
Astable method		طريقة A المستقرة
	(B)	
Backward		تراجعي
Difference Backward		فرق تراجعي
Error Backward analysis		تحليل الخطأ التراجعي
Backward Euler		أولر التراجعية
Backward Substitution		تعويض تراجعي
Basis		أساس
Basis Functions		توابع أساس
Bilinear		ثنائية الخطية
Binary digit		رقم ثنائي

Binary Representation of number		تمثيل ثنائي لعدد
Binary Search		تقصي ثنائي
Bisection		تنصيف
Bisection Method		طريقة التنصيف
Bizier curve		منحنى بيزيه
Bound		حد (محدود)
	(C)	
Centered		متمركز
Characteristic		مميزة
Characteristic Value		قيمة مميزة
Chopping arithmetic		حساب القطع
Clamped		مقيدة
Closed		مغلق
Collocation		تجميع
Complete		كاملة
Composite		مركبة
Composite Simpson's		سمبسون المركبة
Condition number		عدد شرطي
Consistent one step		خطوة واحدة متسقة (متماسكة)
Continuous		مستمر
Control		مراقبة
Convergence		تقارب
Convex		محدبة

Cubic		تكعيبي
Cubic Spline		شريحة تكعيبية
	(D)	
Decimal machine number		عدد آلة عشري
Deflation		انقباض
Description		وصف
Determinant Of matrix		محدد مصفوفة
Difference		فرق
Differentiable		قابلة للاشتقاق
Differentiation Numerical		اشتقاق عددي
Distribution of heat .steady state		توزيع الحرارة ’حالة الثبات
Divided		مجزأ (المقسوم)
Double		ثنائي
Double Integral		تكامل ثنائي
Precision Double		دقة ثنائية
Dominant matrix		مصفوفة مسيطرة
	(E)	
Eigen value		قيمة ذاتية
Eigen Vector		متجه ذاتي
Error		خطأ
Evaluation		تقويم
Explicit		صريحة (ظاهرية)

Exponential		أسي
Exponential Growth		نمو أسي
Extended		ممددة
Extrapolation		استيفاء خارجي
	(F)	
False		خاطئ
False Position		الوضع الخاطئ
False Position Method		طريقة الوضع الخاطئ
Fibonacci Sequence		متتالية فيبوناتشي
Finite		محدود(نهائي)
Finite Difference		فرق محدود
Finite Digit		رقم محدود
Finite Element		عنصر محدود
Formula		قانون (صيغة)
Fixed point iteration		تكرار النقطة الثابتة
Floating point form		شكل الفاصلة العائمة
Forward		أمامي (تقدمي)
Forward Difference formula		قانون الفرق التقدمي
Functional iteration		تكرار دالي
	(G)	
Global		كلي

	(H)	
Homotopy		تشوه مستمر
	(I)	
Implicit		ضمنية
Improper		معيب (غير أصلي)
Initial value		قيمة ابتدائية
Initial value Problem		مسألة القيمة الابتدائية
Instability		عدم استقرار
Integral		تكامل
Integration		مكاملة
Interpolation		استيفاء
Interpolatory divided difference		الفرق المقسوم للاستيفاء
Inverse		عكسي
Power		قوة عكسية
Power Method		طريقة القوة العكسية
Isotropic		متماثل حراريا
Iterative Gauss-Seidel theory		نظرية تكرار غاوس سيدل
Refinement		تهذيب تكرار
	(J)	
Jacobi iterative		جاكوبي التكرار
	(L)	
Least change secant		قاطع ذي متغير أصغري

Limit		نهاية
Linear		خطية
Linear Boundary value problem		مسألة القيمة الحدية الخطية
Linear Equation		معادلة خطية
Linear Independence		استقلال خطي
Linearly dependent		مرتبطة خطيا
Linear shooting		قذف خطي
Lipschitz condition		شرط ليبشيتز
Local		محلي (موضعي)
Local truncation		خطأ القطع المحلي
	(M)	
Machine number		رقم آلة
Matrix		مصفوفة
Maxmal		مصفوفة أعظمية
Maximal column		عمود أعظمي
Method		طريقة
Midpoint		نقطة المنتصف
Minim value		أصغر قيمة عظمى
Minor		صغيرة
Modified Euler theory		نظرية أولر المعدلة
Multiple		مضاعف
Multiplicity		تضاعيف

Multisteps		متعدد الخطوات
	(N)	
Natural cubic spline		شريحة تكعيبية طبيعية
Nested		متداخلة
Neville method		طريقة نيفل
Nodes		عقد
Nonlinear		غير الخطية
Nonlinear Shooting		قذف غير الخطي
Numerical software		برامج عددية
	(O)	
Open Newton Cotes		نيوتن كوتس المفتوح
Operation counts		عد العمليات
Operator		مؤثر
Order of convergence		مرتبة تقارب
Orthogonal		متعامدة
Orthogonal Set		مجموعة متعامدة
Orthonormal		متعامدة نظامية
Orthonormal Set		مجموعة متعامدة نظامية
Osculation		ملاصقة
Overflow		فيض (فوق المستوى الطبيعي)
	(P)	
Per symmetric		تناظر ظاهري
Perturbation		تشويش

Piecewise		قطعية (تجزيئية)
Piecewise Bilinear		ثنائية القطعية الخطية
Piecewise Linear		القطعية الخطية
Polynomial approximation		تقريب كثيرة حدود
Pivot element		عنصر مرتكز
Positive definite		معرفة ايجابياً
Pivoting		مرتكزئية
Polynomial		كثيرة حدود
Power		قوى
Power Method		طريقة القوى
Predictor corrector		مصححة متنبئة
Program		برنامج
Pseudo code		شبه شفرة
	(Q)	
Quadratic		تربيعي
Quadratic Convergence		تقارب تربيعي
Quadratic Formula		صيغة تربيعية
Quadratic Spline		شريحة تربيعية
Quasi Newton		شبه نيوتن
	(R)	
Rational Numbers		الأعداد المنطقة
Rational Approximation		تقريب كسري
Reduced form		شكل مختزل

Relative		نسبي
Relaxation		إرخاء
Remainder term		حد باقي
Residual vector		متجه باقي
Root		جذر
Root Condition		شرط الجذ ر
Root Finding		إيجاد الجذر
Round off		تدوير
Rounding arithmetic		حساب التدوير
	(S)	
Scalar product		جداء عددي
Sealed column		عمود مدرج
Secant		قاطع
Series		متسلسلة
Shooting		قذف
Similarity		تشابه
Squares least		أصغر المربعات
Stable		مستقرة
Steepest descent		نزول أحد
Step size		طول الخطوة
Stiff equation		معادلة عنيدة
Stopping procedure		إجراء توقف
Strategies		خطط

Strong stability		استقرار قوي
Strongly stable		مستقرة بقوة
Successive over relaxation		التتالي على الاسترخاء
Spectrum		طيف
Super linear		فوق الخطي
Symmetric matrices		مصفوفات المتناظرة
Symmetric Power		قوى تناظرية
Systems		أنظمة
	(T)	
Three eighth rule		قاعدة ثلاثة أثمان
Three point Formula		نقاط ثلاث
Trapezium		شبه المنحرف
Trigonometric		مثلثيه
Triple		ثلاثي
Truncation		قطع
	(U)	
Underflow		غيض(تحت المدى الطبيعي)
		غير المستقرة
	(V)	
Variable step size		ذات طول الخطوة المتغيرة
Vector		متجه
Vector Space		فضاء متجهات

	(W)	
Weakly stable		مستقرة بضعف
Weak stability		استقرار ضعيف
Wight		وزن
Well posed		موضوعة بشكل جيد
	(Z)	
Zero		صفر
Zeroth		صفري

Damascus University

المراجع

1- A. Kharab and R. B. Guenther, "An Introduction To Numerical Methods – A Matlab Approach", Chapman and Hall/CRC, 2005.

2- G. E. Mullges and F. Uhlig, "Numerical Algorithms with C ", Springer-Verlag, Berlin, 1996.

3- J. H. Mathews and K. D. Fink, "Numerical Methods Using Matlab", Fourth Edition, Pearson Education, 2005.

4- J. Nocedal and s. j. Wright, " Numerical Optimization", Springer Verlag, 1999.

5- R. L. Burden and J. D. Faires, "NumericalAnalysis", 8th edition, Thomsom Brooks/ Cole, 2005.

6- S. C. Chapra, "Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and. Scientist", Second edition, Mc-GrawHill Publishing Co-Ltd, 2008.

7- S.C. Chapra and R.P. Canale, "Numerical Methods for Engineers", 6th Edition, McGraw Hill, 2010.

Damascus University

اللجنة العلمية:

أ.د.محمد صبح

أ.م.د.خليل يحيى

أ.م.د.جمال مللي

المدقق اللغوي:

أ.د.محمد هيثم غرة

حقوق الطبع و الترجمة و النشر محفوظة لمديرية الكتب و المطبوعات الجامعية