منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

الجبر الخطي (2)

لطلبة الإحصاء

الدكتور

إيلي قدسي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

1427 – 1428هـ

2006 – 2007م

الجبر الخطي (2)

لطلبة الإحصاء

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

الجبر الخطي (2)

لطلبة الإحصاء

الدكتور

إيلي قدسي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

1427 – 1428هـ

2006 – 2007م

الجبر الخطي (2)– لطلبة الإحصاء

الفهرس

الفصل الثاني

الاختزال القانوني لمصفوفات مربعة

الفصل الثالث

الصيغ ثنائية الخطية والتربيعية

الفصل الرابع

اختزال الصيغ التربيعية الحقيقية

الفصل الخامس

فضاءات الجداء الداخلي

مقدمة

من غير المعقول أن أوضح هنا الأهمية البالغة لعلم الجبر الخطي، إذ إن هذه الحقيقة أصبحت بديهية، وأصبح هذا العلم يُشبه تلك المدينة الكبيرة التي فيها من التناسق والجمال والإبداع الشيء الكثير الذي يشد إليه كل المهتمين بفروع العلوم المختلفة.

ولا شك أن تلك الأبنية الشاهقة المطلّة في مدينة الجبر الخطي تحتاج إلى همة وعزم كثيرين في الوصول إليها.

وانطلاقاً من هذا المبدأ، وبسبب حيوية الموضوع وأهميته البالغة، لقد قمت بتأليف هذا الكتاب المسمى ⪡**الجبر الخطي (2)**⪢ وهو مُعَد لطلاب الإحصاء في السنة الأولى، ويُعَد أيضاً مرجعاً أساسياً في الجبر الخطي لاختصاصات أخرى.

لقد حاولت جاهداً أثناء عرض هذا الكتاب أن أتوخى البساطة والوضوح وسلاسة اللغة وأن أُقدم أساسيات الجبر الخطي بأكثر الطرق وضوحاً، وإغناء الفقرات وإيضاح الأفكار الرياضية بالتمارين المتنوعة الهادفة المحلولة.

وتماشياً مع المنهاج المقرر، يتضمن الفصل الأول مفهوم الدوال المميّزة والصغرى لمصفوفة مربعة، الجذور المميّزة لمصفوفة مربعة ومبرهنة كيلي هاميلتون، وسنرى أن المصفوفات هي الأداة الرئيسة لكل ذلك.

أما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة المصفوفات المتعامدة، والناظمية، والواحدية ومصفوفات جوردان وطرق اختزالها قانونياً. والفصل الثالث يُعالج الصيغ الثنائية الخطية، والهرميتية والتربيعية.

ويتناول الفصل الرابع دراسة الصيغ التربيعية التي تكون معاملاتها أعداداً حقيقية، وسنشير إلى مثل هذه الصيغ بالصيغ التربيعية الحقيقية وفي نهاية هذا الفصل سنقدم طريقة غاوس في اختزال صيغة تربيعية حقيقية.

أما الفصل الأخير، فيتعلق بدراسة فضاءات الجداء الداخلي والمؤثرات الخطية على الفضاءات الواحدية والإقليدية.

هذا، ورغبة في مساعدة القارئ عند اللجوء إلى المصادر الأجنبية فقد أوردت في نهاية الكتاب ثبتاً بالمصطلحات العلمية، وقائمة بأهم المراجع المعينة في وضع الكتاب.

وإن كنت قد وفقت إلى تقديم شيء مفيد للقارئ العربي فآمل أن يفي هذا الكتاب بالغرض المنشود، ويقدم لأبناء وطننا ما نرجوه من الفائدة العلمية.

والله ولي التوفيق

المؤلف

الفصل الأول

الدّوال المميَّزة والدوال المميزَّة المختزلة لمصفوفة

1– الدالة المميَّزة لمصفوفة:

تعريف (1–1):

لتكن $A=(a_{ij})$ $(i\,,j\;=1,2,....,n)$ مصفوفة مربّعة بعناصر من حقل K .

إذا كان λ عدداً سُلَّمياً من الحقل K، فتدعى المصفوفة $A-\lambda I$ (I هي المصفوفة الواحدية من المرتبة n) المصفوفة المميَّزة لِـ A، ويدعى المحدد $\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|$ **المحدّد المميز** أو **الدالّة المميّزة** لِـA .

المعادلة $\Delta(\lambda)=0$ تدعى **المعادلة المميّزة لـ** A، وجذور $\Delta(\lambda)=0$ تدعى **الجذور المميّزة**، أو **القيم الذاتية** لِـA .

تُعد المعادلة المميّزة لمصفوفة A واحدةً من أهم المعادلات في الجبر الحديث.

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+....+\alpha_n$$

إن منشور هذا المحدد هو حدودية في λ، كما نلاحظ أن الحد الثابت في $\Delta(\lambda)$ هو:

$$\Delta(0)=\alpha_n=(-1)^n\det(A)$$

بالإضافة إلى ذلك، نستنتج أن:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=trace(A)$$

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(A)$$

وعليه فإن الدالة المميزة لِـA تأخذ الشكل التالي:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n-(\sum_{i=1}^{n}a_{ii})\lambda^{n-1}+....+(-1)^n\det A$$

توضيح: إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&-2\\4&2&-2\\-2&-2&-1\end{bmatrix}$$

فلدينا:

$$\Delta(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-4&2\\-4&\lambda-2&2\\2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-6)-20(\lambda+2)$$

$$=(\lambda+2)^2(\lambda-7)$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-24\lambda-28$$

يترتب على هذا أن $\lambda=-2$ جذر مميز مضاعف لِـA و $\lambda=7$ جذرٌ بسيطٌ.

تمرين (1-2):

حدِّد الجذور المميّزة لكلٍ من المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$$

الحل:

1- إن المعادلة المميزة للمصفوفة الأولى:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-1\\2&\lambda-1&0\\2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)+2(\lambda-1)=0$$

وبالحسابات البسيطة نرى أن:

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

وبالتالي $1,2,3$ هي الجذور المميزة للمصفوفة A.

2- إن المعادلة الذاتية للمصفوفة الثانية:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1)-20(\lambda+1)=0$$

بناءً على هذا يمكننا أن نرى بأن المعادلة المميزة للمصفوفة A هي:

$$(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0$$

وبالتالي نجد أن $\lambda = 8$ جذر مميّز بسيط للمصفوفة A بينما $\lambda = -1$ جذر مميّز مكرر مرتين لِـA.

تمرين (1–3):

أوجد الجذور المميّزة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

من السهل أن نرى أن المعادلة المميّزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

لذا يجب على القيم الذاتية للمصفوفة A أن تحقق معادلة من الدرجة الثالثة المذكورة أعلاه. لحل هذه المعادلة، نبدأ بالبحث عن حلول من الأعداد الصحيحة. يمكن تبسيط هذه المهمة كثيراً وذلك بالاستفادة من حقيقة أن كل الحلول التي هي أعداد صحيحة (إذا وجد أي منها) لمعادلة كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة:

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n = 0$$

يجب أن تكون قواسم الحد الثابت c_n. فالحلول الوحيدة الممكنة من الأعداد الصحيحة للمعادلة المنشودة $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$ هي قواسم للعدد -4، أي $\pm1, \pm2, \pm4$.

ويتضح من التعويض المتتابع لهذه القيم أن $\lambda = 4$ حل من الأعداد الصحيحة. ونتيجة لذلك، فإن $\lambda - 4$ يجب أن تكون عاملاً للمعادلة المذكورة، وبالحسابات الفعلية نجد:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

ومنه:

$$\lambda = 4 \quad , \quad \lambda = 2 + \sqrt{3} \quad , \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

هي القيم الذاتية (الجذور المميزة) للمصفوفة A.

من جهة ثانية، يُبرهن ما يلي:

مبرهنة $(1-4)$:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها من حقل K. إذا رمزنا بِ σ_m لمجموع كل المحددات المصغّرة الأساسية ذات الـ m صفّاً من A، فالدالة المميزة لِ A هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r \lambda^{n-r}$$

حيث: $\sigma_0 = 1$

توضيح: أوجد الدالة المميّزة للمصفوفة المربعة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

لدينا بموجب المبرهنة الأخيرة:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - \sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda - |A|$$

وبملاحظة أن:

$$\sigma_1 = 5$$

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8$$

$$\sigma_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

يتضح أن:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

وكنتيجة للمبرهنة السابقة نجد:

نتيجة (1–5):

إذا كان 0 جذراً مميّزاً مضاعفاً v مرة لمصفوفة مربّعة $A_{n\times n}$، فإن رتبة A لا يمكن أن تكون أقل من $n-v$.

ذلك لأنه إذا كانت رتبة A أصغر من $n-v$ فسيكون لدينا $\sigma_{n-v} = \sigma_{n-v+1} = \ldots = \sigma_n = 0$ وبالتالي فإن:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} - \ldots (-1)^{n-v-1}\sigma_{n-v-1}\lambda^{v+1}$$

قابل للقسمة على λ^{v+1} وهذا بدوره يعني أن الصفر هو جذر مضاعف $v+1$ مرة على الأقل. وفي بعض الحالات يمكن أن تكون رتبة A أكبر من $n-v$، فمثلاً إذا كان $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. وهنا $n = 2$، $v = 2$ في حين أن $r = 1$.

ونبرهن الآن المبرهنة التالية:

مبرهنة $(1-6)$:

إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ الجذور المميّزة لمصفوفة مربّعة $A_{n\times n}$ وكان k عدداً سلمياً فإن الجذور المميّزة للمصفوفة $A-kI$ هي $.\alpha_n - k, ..., \alpha_2 - k, \alpha_1 - k$

ذلك لأنه إذا كانت الدالة المميّزة لِـA هي:

$$(\lambda I - A) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)....(\lambda - \alpha_n)$$

فعندئذ تكون الدالة المميّزة لِـ $A-kI$ هي:

$$\begin{aligned}|\lambda I - (A - KI)| &= |(\lambda + k)I - A| \\ &= (\lambda + k - \alpha_1)(\lambda + k - \alpha_2)....(\lambda + k - \alpha_n)\end{aligned}$$

وصحة المبرهنة تصبح عندئذ واضحة.

نبرهن أيضاً:

مبرهنة $(1-7)$:

إذا كان k عدداً سلّمياً فإن الجذور المميّزة لِـ kA هي جداء k في الجذور المميّزة لِـA .

البرهان:

في الواقع، أن المبرهنة صحيحة إذا كان $k=0$، ذلك لأن الجذور المميّزة للمصفوفة صفر جميعها أصفار. إذا كان $k \neq 0$ فيمكن كتابة الدالة المميّزة $F(\mu)$ لِـ kA على الشكل $|\mu I - kA| = k^n \left|\frac{\mu}{k} I - A\right|$،

وبالتالي $F(\mu)$ومنه الجذور المميّزة لـ kAِ هي من النمط $k\,\lambda$.

ملاحظة:

لكل مصفوفة مربعة دالة مميّزة وحيدة، لكن ربما تكون لمصفوفتين مختلفتين الدالة المميّزة ذاتها.

توضيح: إذا أخذنا المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

فنجد أن الدالة المميّزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2+2(\lambda-2)$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

كذلك إن الدالة المميّزة للمصفوفة B هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda-4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 2) + 12(\lambda - 2)$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$
$$= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

أي أن للمصفوفتين A, B الدالة المميّزة ذاتها والجذور المميّزة نفسها رغم أن $A \neq B$.

تعريف (1–8):

تكون المصفوفتان $A, C \in \mathrm{M}_n(K)$ **متشابهتين** إذا أمكن إيجاد مصفوفة غير شاذة $P \in \mathrm{M}_n(K)$ بحيث يكون $A = P^{-1}CP$.

ملاحظة:

إن المصفوفات المتشابهة لهم الدالة المميّزة ذاتها.

مبرهنة (1–9):

تتطابق الدالة المميّزة لمصفوفة مربعة A مع الدالة المميّزة لأية مصفوفة مشابهة لها.

البرهان:

بما أن المصفوفتين A, C متشابهتان فهنالك مصفوفة غير شاذة P بحيث $A = P^{-1}CP$.

وبملاحظة أن:

$$\lambda I = \lambda P^{-1}P = P^{-1}(\lambda I)P$$

نجد:

$$\lambda I - A = P^{-1}(\lambda I - C)P$$

وبالتالي، بأخذ محدد الطرفين للمعادلة المصفوفية الأخيرة، يتضح أن:

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det(P^{-1}).\det(\lambda I - C).\det(P) \\
&= \det(\lambda I - C).\det(P^{-1}).\det(P) \\
&= \det(\lambda I - C).\det(I) \\
&= \det(\lambda I - C)
\end{aligned}
$$

وذلك باعتبار أن المحدّدين $\det(P^{-1})$ و $\det(\lambda I - C)$ في المعادلة الأخيرة يتصفان بالإبدالية باعتبارهما عددين سلّمين.

ولدينا إذن النتيجة التالية:

نتيجة (1−10):

للمصفوفتين المتشابهتين الجذور المميّزة نفسها (القيم الذاتية).

2−المصفوفات المتناظرة، مائلة التناظر والهرميتية:

تعريف (2−1):

يُقال إنّ **مصفوفة** A **متناظرة** إذا كانت مساوية لمنقولها، أي إذا كانت $A = A'$ أو $a_{ij} = a_{ji}\,(i, j = 1, 2, ..., n)$. ويقال إن A **مائلة التناظر** إذا كانت مساوية لجداء منقولها بِ -1، أي $A = -A'$، أو $a_{ij} = -a_{ji}$، $a_{ii} = 0$، $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

ملاحظة:

يُرمز أيضاً لمنقول مصفوفة A بالرمز A^T.

وعلى سبيل المثال، المصفوفة صفر والمصفوفة المحايدة I، متناظرتان، وكذلك المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

بينما المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

مائلتا التناظر.

تعريف (2-2):

يُقال إن المصفوفة A **هرميتية** إذا كانت مساوية لمرافق منقولها. أي إذا كان $A^* = A$، أو $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. والمصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة إلا أنّ المصفوفات المركّبة (غير الحقيقية) المتناظرة لا يمكن أن تكون هرميتية.

وهكذا فإن:

$$\begin{bmatrix} 1+i & 2-i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

ليست هرميتية.

ملاحظة:

من الواضح أن المصفوفات المتناظرة أو مائلة التناظر أو الهرميتية هي حُكْماً مصفوفات مربّعة. وفضلاً عن ذلك فإن عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة مائلة التناظر هي حُكْماً أصفار، في حين أن عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة هرميتية هي حُكْماً حقيقية.

ونستنتج مباشرة المبرهنات التالية:

مبرهنة (2–3):

إذا كانت A متناظرة (أو مائلة التناظر) و k أي عدد سلّمي، فعندئذ تكون kA متناظرة (أو مائلة التناظر).

ذلك لأنه إذا كان $a_{ji} = \pm a_{ij}$ فعندئذ يكون $ka_{ji} = \pm ka_{ij}$.

مبرهنة (2–4):

إذا كانت A هرميتية و k أي عدد حقيقي فإن kA هرميتية أيضاً.

ذلك لأنه إذا كان $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ وكان k حقيقيّاً فعندئذ $k\overline{a_{ji}} = k\overline{a_{ij}} = (\overline{ka_{ij}})$.

مبرهنة (2–5):

إذا كانت A مصفوفة مربعة و k أي عدد سلّمي فعندئذ تكون $S = k(A + A')$ متناظرة و $T = k(A - A')$ مائلة التناظر.

ذلك بملاحظة أن $S' = k(A' + A) = S$ وأن $T' = k(A' - A) = -T$.

مبرهنة (2–6):

إذا كانت A مصفوفة مربّعة، حقيقية أو مركّبة، وكان k أي عدد حقيقي فعندئذ تكون $H = k(A + A^*)$ هرميتية.

مبرهنة (2–7):

إذا كانت A مصفوفة مربّعة $m \times m$ متناظرة (أو مائلة التناظر) وكانت P أي مصفوفة $m \times n$، فعندئذ تكون $P'AP$ متناظرة (أو مائلة التناظر) وإذا كانت A هرميتية فعندئذ تكون P^*AP هرميتية.

ذلك لأنه إذا كان $B = P'AP$، فعندئذ $B' = P'A'P = B$ أو $-B$ وفقاً لما إذا كان $A' = A$ أو $-A$. وأيضاً إذا كان $C = P^*AP$ و $A^* = A$، فعندئذ $C^* = C$.

ولدينا إذن النتيجة:

نتيجة (2–8):

إذا كانت P أي مصفوفة $m \times n$ فإن $P'P$ متناظرة و P^*P هرميتية.

إن هذه النتيجة تنتج على الفور من المبرهنة (2–7) بأخذ $A = I$.

مبرهنة (2–9):

يمكن التعبير بصورة وحيدة عن كل مصفوفة مربّعة A كمجموع مصفوفة متناظرة S ومصفوفة مائلة التناظر T.

في الحقيقة، إذا كانت $S=\frac{1}{2}(A+A')$ و $T=\frac{1}{2}(A-A')$، فمن المبرهنة (2−5) نجد أن S متناظرة و T مائلة التناظر، وفضلاً عن ذلك، $A=S+T$.

وعلى العكس، إذا كان $A=S+T$، حيث S متناظرة و T مائلة التناظر، فعندئذ $A'=S-T$، وبالتالي فإن $S=\frac{1}{2}(A+A')$ و $T=\frac{1}{2}(A-A')$.

مبرهنة (2−10):

يمكن التعبير، بصورة وحيدة، عن أي مصفوفة مربّعة A على الشكل $A=P+iQ$ حيث إن المصفوفتين P,Q هرميتيتان.

في الحقيقة، إذا أخذنا:

$$P=\frac{1}{2}(A+A^*) \qquad , \qquad Q=\frac{1}{2i}(A-A^*)$$

فمن السهل أن نبيّن أن P,Q هرميتيتان، ومن الواضح أن $A=P+iQ$.

وتُبرهن الوحدانية كما في المبرهنة السابقة.

تعريف (2−11): المصفوفة القرينة لمصفوفة مربعة:

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n\times n$، عناصرها من الحقل K.

إذا رمزنا بِ α_{ij} للعامل المرافق لِ a_{ij} في المحدد $|A|$، فعندئذ تدعى المصفوفة المربعة:

$$adjA=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

بالمصفوفة القرينة لِـ A.

ملاحظة:

ينبغي ملاحظة أنه بينما يوجد لكل مصفوفة مربّعة A مصفوفة قرينة، فإنه يوجد معكوس لمصفوفة مربعة غير شاذة فقط.

زد على ذلك، لدينا الخواص الأساسية:

$$A.(adjA)=(adjA).A=|A|.I \qquad (2-11-1)$$

وبصورة خاصة، إذا كانت A مصفوفة شاذة فإن:

$$A.(adjA)=(adjA).A=0 \qquad (2-11-2)$$

ونبرهن الآن المبرهنة التالية:

مبرهنة (2–12)**:**

إذا كانت المصفوفة المربّعة $A_{n\times n}$ غير شاذة، فعندئذ تكون مصفوفتها القرينة غير شاذة و $|adjA|=|A|^{n-1}$. بالإضافة لذلك، إذا كانت رتبة A أصغر من $n-1$ فإن $adjA=0$، أما إذا كانت رتبة A مساوية لِ $n-1$ فإن رتبة $adjA$ هي الواحد.

البرهان:

في الحقيقة، نستنتج العبارة الأولى للمبرهنة من الخاصة الأساسية الأولى الواردة أعلاه، وذلك بأخذ محدّدات كل من الطرفين، فنجد:

$$|A|.|adjA|=|A|^n$$

ومنه باعتبار أن $|A|\neq 0$، نجد $|adjA|=|A|^{n-1}$.

وتنتج العبارة الثانية من حقيقة أنه إذا كانت رتبة A أقل من $n-1$ فإن كل $\alpha_{ij}=0$، بحيث يكون $adjA=0$.

ولبرهان العبارة الأخيرة نلاحظ أن a_{ij} واحدة، على الأقل، ستختلف عن الصفر باعتبار أن رتبة A هي $n-1$، وهذا يعني أن رتبة $adjA$ هي على الأقل واحد. وفضلاً عن ذلك، وبالاستفادة من الخاصة الأساسية الثانية يتضح أن رتبة $adjA$ هي على الأكثر واحد. ولذلك فإن الرتبة يجب أن تساوي الواحد بالضبط.

مبرهنة (2–13):

المصفوفة القرينة لمصفوفة متناظرة هي بدورها متناظرة.

ذلك لأنه إذا كان $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$، حيث M_{ij} هي المصفوفة المصغرة ذات الـ $(n-1)$ صفّاً التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j من A. فلدينا أيضاً $\alpha_{ji}=(-1)^{i+j}\left|M_{ji}\right|$ حيث نحصل على M_{ji} بحذف الصف j والعمود i من A أو الصف i والعمود j من A'. وبما أن $A=A'$ فإن $M_{ij}=M_{ji}$ و $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$.

مبرهنة (2–14):

لتكن A مصفوفة مائلة التناظر من المرتبة n. فتكون عندئذ $adjA$ متناظرة أو مائلة التناظر وفقاً لما إذا كان n فردياً أو زوجياً.

باستخدام رموز المبرهنة السابقة، $\left|M_{ji}\right|$ هو محدد المصفوفة ذات الـ $(n-1)$ صفاً التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j من $A'=-A$. ومنه:

$$\left|M_{ji}\right|=(-1)^{n-1}\left|M_{ij}\right|$$

وبالتالي $\alpha_{ji}=(-1)^{n-1}\alpha_{ij}$.

مبرهنة (2–15):

قرينة مصفوفة هرميتية هي بدورها مصفوفة هرميتية.

تعريف (2–16):

يُشار غالباً إلى المعادلة المميّزة لمصفوفة حقيقية متناظرة **بالمعادلة القَرْنية** (secular)، باعتبار أن أول من استخدمها هو لابلاس وذلك عند تحديده للاضطرابات القَرْنية في الحركات المدارية للكواكب(1772).

نورد أخيراً النتيجة التالية تاركين إثباتها للقارئ:

نتيجة (2–17):

إذا كان k عدداً سلمياً فإن الجذور المميّزة لِـ kA هي جداء k في الجذور المميّزة لِـ A.

3–المتجهات الذاتية لمصفوفة والفضاءات الذاتية:

مفهوم الارتباط الخطي:

نقصد **بمتّجه** X **ذي** n **بُعداً فوق حقل** K، مجموعة مرتبة من n من عناصر K، وبذلك نكتب:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

ويمكن أن يكون المتّجه X إما متّجه صف، ونشير إليه بأقواس مستديرة، أو متّجه عمود، ونشير إليه بأقواس مربّعة، $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$.

وسنجد من المريح أن نعدّ متّجه الصف كمصفوفة $1\times n$، ومتجه العمود كمصفوفة $n\times 1$.

لنعدّ الآن m من المتّجهات ذات الـ n بُعداً فوق الحقل K،

$$X_1=(x_{11},x_{12},....,x_{1n})$$
$$X_2=(x_{21},x_{22},....,x_{2n})$$
$$................................$$
$$X_m=(x_{m1},x_{m2},....,x_{mn})$$

فُيقال إن هذه المتّجهات **مرتبطة خطياً بالنسبة إلى** K إذا وجدت m من العناصر $k_1,k_2,.....,k_m$ من K، ليست جميعها أصفاراً، بحيث إن:

$$k_1X_1+k_2X_2+.....+k_mX_m=0$$

وإذا لم توجد مثل هذه المجموعة من العناصر، أي إذا كانت العلاقة السابقة تتضمن كون $k_1=k_2=.....=k_m=0$ فنقول عندئذ إن المتجهات الـ m **مستقلة خطياً**.

تعريف (3–1):

تدعى المصفوفة $M_{m\times n}$ التي تتألف صفوفها المتتالية من مركبات المتّجهات $X_1,X_2,.....,X_m$، **مصفوفة المتجهات**.

وبدلالة المفاهيم التي عرفناها لتوّنا نعرض المبرهنة التالية:

مبرهنة (3–2):

الشرط اللازم والكافي لتكون الـ m من المتّجهات $X_1, X_2, ..., X_m$ ، وكل منها ذو n بُعداً، مرتبطة خطياً هو أن تكون رتبة مصفوفة المتجهات أصغر من m.

تعريف (3–3):

يُقال إن المتجهين ذوي الـ n بُعداً $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, ..., y_n]$ **متعامدان** إذا كان جداؤهما الداخلي صفراً، أي إذا كان $x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$ أو بدلالة المصفوفات إذا كان $Y'X = X'Y = 0$.

اصطلاحات:

لنعتبر نظاماً من m من المعادلات الخطية المتجانسة في المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0$$

وإذا رمزنا بِـ $A = (a_{ij})$ لمصفوفة المعاملات $m \times n$ و X مصفوفة من عمود واحد أو متجه عمود، فيمكن كتابة نظام المعادلات الخطية المتجانسة بدلالة المصفوفات على الشكل:

$$AX = 0$$

ولهذه المعادلة المصفوفية حل واضح هو المتّجه الصفري، وسندعو هذا الحل بالحل التافه. ونتساءل الآن تحت أية شروط توجد حلولاً أخرى، كما نسعى لتوفير طرق لإيجاد جميع الحلول في حال وجودها.

وقبل كل شيء نبرهن المبرهنة:

مبرهنة (3–4):
تؤلف مجموعة كل متجهات الحل لنظام المعادلات الخطية المتجانسة فضاء متّجهات خطي.

البرهان:
إذا كان X متجهاً يحقق المعادلة المصفوفية، و c عدداً سلمياً، فلدينا:

$$A(cX) = cAX = 0$$

وفضلاً عن ذلك، إذا كان Y متجهاً ثانياً بحيث إن $AY = 0$، فعندئذ:

$$A(X+Y) = AX + AY = 0$$

وهو المطلوب إثباته.

إذا نظرنا إلى المتجهات التي تحقق $AX = 0$ كأعمدة في مصفوفة، فإن بُعد فضاء الحلول Γ لنظام المعادلات الخطية المتجانسة الآنفة الذكر هو بالضبط العدد الأعظمي للأعمدة المستقلة خطياً في المصفوفة المذكورة.
ويُبرهن على أنه، إذا كانت رتبة A هي r، فإن العدد الأعظمي هو $n-r$.

لنورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (3–5):

ليكن نظام من m من المعادلات الخطية المتجانسة في n من المجاهيل، ولنفرض أن رتبة مصفوفة المعادلات هي r. عندئذ:

أ –إذا كان $r = n$ فإن نظام المعادلات يمتلك فقط الحل التافه $(0,0,....,0)$.

ب – إذا كان $r < n$، فنستطيع إيجاد $n - r$ من الحلول المستقلة خطياً للنظام.

ويمكننا الآن أن نعرض مباشرةً النتائج التالية:

نتيجة (3–6):

يكون لنظام من m من المعادلات الخطية المتجانسة في n من المجاهيل حل غير الحل التافه $(0,0,.....,0)$ إذا وفقط إذا، كانت رتبة مصفوفة المعاملات أقل من n.

نتيجة (3–7):

يكون لنظام n من المعادلات الخطيَّة المتجانسة في n من المجاهيل حل آخر غير الحل التافه $(0,0,.....,0)$ إذا وفقط إذا كان محدّد المعاملات معدوماً.

تعريف (3–8)**: المتجهات الذاتية لمصفوفة مربعة:**

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n \times n$ بعناصر من حقل K، وليكن λ جذراً مميّزاً لِ A. يُقال عن المتّجه غير الصفري ذا n بعداً $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ على الحقل K إنه متجهاً ذاتياً للمصفوفة A إذا تحققت المعادلة المصفوفية:

$$AX = \lambda X$$

وتكافئ المعادلة المصفوفية نظام n من المعادلات الخطية المتجانسة في n من المجاهيل، والتي يمكن كتابتها، بعد نقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر، على الشكل:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0
\end{aligned}$$

ومصفوفة هذا النظام من المعادلات هي $A-\lambda I$ وبالتالي محدد النظام ينعدم مما يعني أن رتبة المصفوفة $A-\lambda I$ أصغر أو تساوي $n-1$.

لنفرض أن رتبة المصفوفة $A-\lambda I$ مساوية لِـ r فيوجد تماماً $n-r$ من الحلول المستقلة خطياً لنظام المعادلات. وبالتالي نحصل على فضاء متجهات خطي ذي $n-r$ بُعداً.

تعريف (3–9): **الفضاءات الذاتية:**

إن مجموعة كل المتجهات X للمصفوفة المربعة A من الرتبة n المقابلة للقيمة الذاتية λ والمعينة بمصفوفة أعمدة، بحيث يكون $AX = \lambda X$ تؤلف وفقاً للمبرهنة (3–4) فضاءً متجهياً خطياً ندعوه **الفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية** λ وسنرمز له بِـ E_λ.

كذلك نسمي مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة A **بطيف** هذه المصفوفة وسنرمز له بِـ $Spec(A)$.

ملاحظة:

إن كل قيمة ذاتية للمصفوفة A يقابلها بصورة عامة متجهاً ذاتياً، وهذه المتجهات الذاتية إما أن تكون حقيقية أو تخيلية، وذلك حسب كون القيم الخاصة لها حقيقية أو تخيلية.

إذا كان X متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مقابلاً للقيمة الذاتية λ أيضاً فإن المتجه βX متجهاً ذاتياً لهذه المصفوفة باعتبار أنه يحقق المعادلة المصفوفية.

تمرين (3–10):

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن القيم الذاتية لهذه المصفوفة معينة بالمعادلة المميّزة:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0$$

أي المعادلة $(\lambda-5)^2(\lambda-1) = 0$. يترتب مباشرةً أن الجذور المميّزة (الذاتية) للمصفوفة A هي $\lambda = 5, \lambda = 1$.

لإيجاد المتجهات الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية λ.

في الحقيقة، لنفرض أن $X = [x_1, x_2, x_3] \neq 0$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة A موافقاً للقيمة الذاتية λ، عندئذ يحقق المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

من أجل الجذر المميّز $\lambda = 5$، فإن المعادلة المصفوفية تصبح:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبملاحظة أن رتبة المصفوفة $A - 5I$ هي الواحد، فعندئذ وفقاً للنتائج التي أوردناها لتوّنا، يوجد حلان مستقلان خطياً لنظام المعادلات الخطية المتجانسة:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 \text{ اختياري}$$

وبالتالي نحصل على فضاء متجهات خطية (فضاء ذاتي) بعده 2.

ولإيجاد الحلول المستقلة خطياً، لدينا:

$$X = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي إن المتجهين:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

غير مرتبطين خطياً، وبالتالي يشكلان أساساً للفضاء الذاتي الموافق للمتجه الذاتي $\lambda = 5$.

أما من أجل الجذر المميّز $\lambda = 1$، فإن المعادلة المصفوفية (✶) تصبح:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبملاحظة أن رتبة $A - I$ هي 2، فيوجد عندئذ حلٌ واحدٌ مستقلٌ خطياً، وبالتالي هنالك فضاء ذاتي موافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ وحيد البعد. وعليه يمكننا أن نكتب:

$$X = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن المتجه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ أساساً للفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

وأخيراً، الفضاءات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية هي:

$$E_{\lambda=5} = \{\alpha(-1,1,0) + \beta(0,0,1) : \alpha, \beta \in R\}$$

$$E_{\lambda=1} = \{\alpha'(1,1,0); \alpha' \in R\}$$

تمرين (3−11):

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة الحقيقية المربعة:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

الحل:

من السهل على القارئ أن يرى قبل كل شيء أن المعادلة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ -2 & \lambda-2 & 1\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

يترتب على ذلك مباشرة أن $\lambda=1$ قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة A وأن $\lambda=2$ قيمة ذاتية مكررة مرتين لِـA .

ولإيجاد المتجهات الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية λ نتبع خط النقاش ذاته المتبع في التمرينات السابقة.

في الواقع، إذا كان $X=[x_1,x_2,x_3]\neq 0$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة A موافقاً للقيمة الذاتية λ ، عندئذ نجد المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

من أجل الجذر المميّز $\lambda=1$ ، إن رتبة المصفوفة:

$$A-I=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

تساوي 2، وبالتالي يوجد حل وحيد مستقل خطياً لنظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX=X$، ومنه $X=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ يكون متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية $\lambda=1$ (تحقق من ذلك)، بالإضافة لذلك، لدينا:

$$E_{\lambda=1}=\{\alpha(1,0,2):\alpha\in R\}$$

وأخيراً، من أجل القيمة الذاتية $\lambda=2$، إن المصفوفة:

$$A-2I=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

رتبتها تساوي 2، وبالتالي هناك حلٌ وحيدٌ مستقلٌ خطياً للمعادلة المصفوفية $AX=2X$، وعليه $X=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية $\lambda=2$، زد على ذلك،

$$E_{\lambda=2}=\{\beta(1,1,2):\beta\in R\}$$

الخواص الأساسية للمتجهات الذاتية:

مبرهنة (3–12):

لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$ عناصرها من حقل K. إذا كانت $\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_n$ جذور مميّزة متمايزة لِـA، فعندئذ المتجهات الذاتية المقابلة لتلك القيم الذاتية تكون مستقلة خطياً.

البرهان:

لنفرض أن $v_1,v_2,....,v_n$ على الترتيب المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_n$. وكل ما نحتاج القيام به هو أن نبيّن أنها مستقلة خطياً.

لنفرض جدلاً أن المتجهات مرتبطة خطياً، ولنفرض أن أكبر عدد للمتجهات الذاتية المستقلة خطياً هو $m(1\le m\le n)$، ولتكن هذه المتجهات هي $v_1,v_2,....,v_m$، فعندئذ تكون المتجهات الذاتية $v_1,v_2,....,v_m,v_{m+1}$ مرتبطة خطياً أي أنها تحقق العلاقة:

$$\beta_1v_1+\beta_2v_2+....+\beta_mv_m+\beta_{m+1}v_{m+1}=0 \qquad (1)$$

بينما $\beta_{m+1}\neq 0$.

لنضرب طرفي المعادلة (1) من اليسار بالمصفوفة A، نجد:

$$\beta_1Av_1+\beta_2Av_2+....+\beta_mAv_m+\beta_{m+1}Av_{m+1}=0 \qquad (2)$$

ووفقاً لمفهوم القيمة الذاتية لمصفوفة مربعة ينتج لدينا:

$$\beta_1\lambda_1v_1+\beta_2\lambda_2v_2+....+\beta_m\lambda_mv_m+\beta_{m+1}\lambda_{m+1}v_{m+1}=0 \qquad (3)$$

بعد ذلك، إذا ضربنا طرفي المعادلة (1) بِـ λ_{m+1} وطرحناها من (3)، نجد على الفور أن:

$$\beta_1(\lambda_1-\lambda_{m+1})v_1+\beta_2(\lambda_2-\lambda_{m+1})v_2+....+\beta_m(\lambda_m-\lambda_{m+1})v_m=0$$

وبما أن $\lambda_i-\lambda_{m+1}\neq 0$ من أجل $(i=1,2,....,m)$، وباعتبار أن المتجهات $v_1,v_2,....,v_m$ مستقلة خطياً بالفرض، يتضح أن:

$$\beta_1=\beta_2=....=\beta_m=0$$

ومنه نجد $\beta_{m+1}=0$ ، وهذا يقودنا إلى تناقض. إذن المتجهات الذاتية $v_1,v_2,....,v_m$ مستقلة خطياً، وبالتالي يتم إثبات المبرهنة.

يمكن تطبيق النتائج الأخيرة على المصفوفات الخاصة الواردة في الفقرة (2).

لدينا أولاً المبرهنة التالية:

مبرهنة (3–13):

الجذور المميّزة لمصفوفة متناظرة أعداد حقيقية.

البرهان:

لنفرض أن $\lambda=\alpha+i\,\beta \quad , \quad (\alpha,\beta\in R)$ ، جذر مميّز عقدي للمصفوفة المربعة المتناظرة A ، ولنرمز بـ $X=U+iV$ للمتجه الذاتي الموافق لـ λ ، حيث إن U,V مصفوفتا عمود في R . فعندئذ لدينا:

$$A(U+iV)=(\alpha+i\beta)(U+iV) \qquad (1)$$

نفك الأقواس ونكتب التساوي بين القسمين الحقيقي والتخيلي في العلاقة الأخيرة، باعتبار أن طرفيها متجها عمود $n\times1$ ، فنجد:

$$AU=\alpha U-\beta V \qquad (2)$$

$$AV=\alpha V+\beta U \qquad (3)$$

نضرب من اليسار طرفي (2) بـ V' ، وطرفي (3) بـ U' فينتج:

$$V'AU=\alpha V'U-\beta V'V \qquad (4)$$

$$U'AV=\alpha U'V+\beta U'U \qquad (5)$$

بأخذ المنقول لطرفي (4) وبالاستفادة من كون المصفوفة A متناظرة، نجد:

$$\beta(U'U+V'V)=0 \qquad (6)$$

وبما أن $U'U+V'V$ مصفوفة 1×1 غير صفرية، يتضح على الفور من العلاقة الأخيرة أن $\beta=0$ ، أي أن الجذر المميّز λ للمصفوفة المتناظرة A هو عدد حقيقي، وبذا يتم إثبات المبرهنة.

تمرين (3–14):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

1 -بين أن A مصفوفة متناظرة ثم احسب قيمها الذاتية ومتجهاتها الذاتية.

2 -تحقق أن المتجهات الذاتية مستقلة خطياً وأنها متعامدة مثنى مثنى.

الحل:

(1) نجد أولاً أن:

$$A'=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

والمصفوفة متناظرة لأن $A'=A$.

القيم الذاتية هي جذور المعادلة المميّزة:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$$

أي جذور المعادلة:

$$(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)=0$$

والقيم الذاتية إذن:

$$\lambda=2 \qquad , \qquad \lambda=2\pm\sqrt{2}$$

لإيجاد المتجهات الذاتية:

لنفرض أن $X=[x_1,x_2,x_3]\neq 0$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة المتناظرة A موافقاً للقيمة الذاتية λ، عندئذ:

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من أجل الجذر المميّز $\lambda=2$، نحل المعادلتين الخطيتين المتجانستين $x_1+x_3=0$ و $x_2=0$ ونحصل على المتجه الذاتي الوحيد:

$$X_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أما من أجل القيمة الذاتية البسيطة $\lambda=2+\sqrt{2}$، بحل المعادلتين الخطيتين:

$$x_1+\sqrt{2}x_2+x_3=0$$

$$x_2+\sqrt{2}x_3=0$$

نحصل على فضاء ذاتي بعده 1 مقابل الجذر المميّز البسيط $\lambda=2+\sqrt{2}$، وبالتالي يكون لدينا متجه ذاتي وحيد، يتحدّد كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s \\ -\sqrt{2}s \\ s \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda} = \{s(1,-\sqrt{2},1) : s \in R\}$$

والمتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية λ هو:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومن أجل الجذر $\lambda = 2-\sqrt{2}$، نحل المعادلتين الخطيتين:

$$x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

ونحصل على المتجه الذاتي الوحيد:

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) لنتحقق من أن المتجهات الذاتية X_1, X_2, X_3 مستقلة خطياً أي أن:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$$

محققة فقط من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$، ولذلك يكفي أن نبرهن أن المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

غير شاذة.

يُلاحظ بسهولة أن:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} \neq 0$$

كذلك لنحسب الجداء الداخلي لكل متجهين ذاتيين:

$$X_1{}' X_2 = [-1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$X_1{}' X_3 = [-1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$X_2{}' X_3 = [1 \quad -\sqrt{2} \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - \sqrt{2}.\sqrt{2} + 1 = 0$$

والمتجهات الذاتية متعامدة مثنى.

تمرين (3–15):

استخدم العلاقة $\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r \lambda^{n-r}$ في إيجاد الدالة

المميّزة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&-4&-1&-4\\2&0&5&-4\\-1&1&-2&3\\-1&4&-1&6\end{bmatrix}$$

الحل:

في الواقع، بالاستناد إلى النتائج التي أثبتناها فإن الدالة المميّزة للمصفوفة A تعطى بالصيغة:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^4-\sum_{i=1}^{4}a_{ii}\lambda^3+\sigma_2\lambda^2-\sigma_3\lambda+|A|$$

حيث يرمز $\sigma_r\,(r=2,3)$ لمجموع كل المحدّدات المصغرة الأساسية ذات الـ r صفاً من A .

يُلاحظ أولاً بالحسابات الفعلية أن:

$$\sigma_2=\begin{vmatrix}1&-4\\2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-4\\-1&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&5\\1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-4\\4&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&3\\-1&6\end{vmatrix}$$

$$=8-3+2-5+16-9=9$$

$$\sigma_3=\begin{vmatrix}1&-4&-1\\2&0&5\\-1&1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-4&-4\\2&0&-4\\-1&4&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1&-4\\-1&-2&3\\-1&-1&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&5&-4\\1&-2&3\\4&-1&6\end{vmatrix}$$

$$=-3+16-8+2=7$$

كذلك وفقاً للخواص الأساسية للمحدّدات، نرى أن:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -4 & -1 & -4\\ 2 & 0 & 5 & -4\\ -1 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 4 & -1 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -4 & -1 & -4\\ 0 & 8 & 7 & 4\\ 0 & -3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=2$$

ومنه الدالة المميّزة لـ A هي:

$$|\lambda I-A|=\lambda^4-5\lambda^3+9\lambda^2-7\lambda+2$$

تمرين (3–16):

أوجد الجذور المميّزة والفضاءات الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ \frac{1}{a} & 1 & a\\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1\end{bmatrix}\quad ;\quad a\in R^*$$

الحل:

نحدد قبل كل شيء الدالة المميّزة لِـA :

لدينا:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a^2\\ -\frac{1}{a} & \lambda-1 & -a\\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda = \lambda^2(\lambda-3)$$

والجذور المميزة، $\lambda = 0$ مكرر مرتين، $\lambda = 3$ بسيط.

إذا أخذنا الجذر المضاعف $\lambda = 0$، نجد أن رتبة المصفوفة A هي الواحد.

ولإيجاد متّجهات ذاتية $X = (x_1, x_2, x_3)$ موافقة للجذر المضاعف $\lambda = 0$، علينا حل المعادلة الوحيدة:

$$x_1 + ax_2 + a^2x_3 = 0$$

يّلاحظ أن:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^2\beta \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولدينا إذن فضاء ذاتي $E_{\lambda=0} = \{\alpha V_1 + \beta V_2 : \alpha, \beta \in R\}$ ذو بعدين مقابلاً للقيمة الذاتية $\lambda = 0$، ولإيجاد أساس لِ $E_{\lambda=0}$ نجد حلّين مستقلين مثلاً $(-a,1,0), (-a^2,0,1)$.

من أجل الجذر المميّز $\lambda = 3$، نحدد رتبة المصفوفة $A - 3I$:

$$A - 3I \sim \begin{bmatrix} 2 & -a & -a^2 \\ \boxed{1} & -2a & a^2 \\ 1 & a & -2a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -3a & 3a^2 \\ 1 & -2a & a^2 \\ 0 & -3a & 3a^2 \end{bmatrix}$$

إن رتبة المصفوفة $A - 3I$ هي 2، ولإيجاد متجهات ذاتية $X = (x_1, x_2, x_3)$ موافقة للجذر المميّز $\lambda = 3$، علينا إيجاد حلول لنظام المعادلات الخطية:

$$x_1 - 2ax_2 + a^2x_3 = 0$$

$$x_2 - ax_3 = 0$$

لدينا:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يوجد تماماً حل وحيدٌ مستقل خطياً لنظام المعادلات، مثلاً $(a^2, a, 1)$ وفضلاً عن ذلك، نحصل على فضاء ذاتي وحيد البعد موافق للقيمة الذاتية $\lambda = 3$،

$$E_{\lambda=3} = \{\mu(a^2, a, 1) : \mu \in R\}$$

نورد الآن المبرهنة التالية:

مبرهنة $(3-17)$:

يكون المتجهان الذاتيان لمصفوفة متناظرة A الناشئان عن جذرين مميّزين مختلفين متعامدين.

ذلك لأنه إذا فرضنا أن:

$$AX = \alpha_1 X \quad , \quad AY = \alpha_2 Y, (\alpha_1 \neq \alpha_2)$$

فعندئذ لدينا:

$$Y'AX = \alpha_1 Y'X \quad , \quad X'AY = \alpha_2 X'Y$$

وبأخذ المنقول لطرفي المعادلة الأخيرة نجد باعتبار أن A متناظرة:

$$Y'AX = \alpha_2 Y'X$$

ومنه $\alpha_1 Y'X = \alpha_2 Y'X$، وبالتالي فإن $Y'X = 0$ باعتبار أن $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

ونبرهن أيضاً المبرهنة الأساسية التالية:

مبرهنة (3–18):

الجذور المميّزة لمصفوفة هرميتية جميعها أعداد حقيقية.

البرهان:

إذا كان λ جذراً مميّزاً للمصفوفة الهرميتية A ، فيوجد عندئذ متجه عمودي مغاير للصفر $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ بحيث إن:

$$AX = \lambda X \qquad (1)$$

وإذا ضربنا طرفي المعادلة المصفوفية (1) من اليسار بمتجه الصف أو المصفوفة $X^*_{1\times n}$ ، نحصل باعتبار أن طرفي المعادلة هما مصفوفتان أو متجها عمود $n\times 1$، على المعادلة:

$$X^*AX = \lambda X^*X \qquad (2)$$

إن العنصر X^*X هو بوضوح حقيقي وغير الصفر، وبما أن $A^* = A$ ، فإننا إذا أخذنا مرافق المنقول للطرفين في (2) نجد:

$$X^*AX = \overline{\lambda}X^*X$$

ومنه:

$$(\lambda - \overline{\lambda})X^*X = 0$$

وبما أن $X^*X \neq 0$ فلدينا $\overline{\lambda} = \lambda$، أي أن λ عدد حقيقي.

كذلك نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (3–19):

جميع الجذور المميّزة لمصفوفة حقيقية مائلة التناظر هي إما أعداد تخيلية بحتة أو صفر.

البرهان:

ينبغي قبل كل شيء أن يرى القارئ أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية ومائلة التناظر، فإن iA تكون مصفوفة هرميتية.

وعليه بالرجوع إلى المبرهنة ($3-18$)، يتضح أن جميع الجذور المميّزة للمصفوفة الهرميتية iA أعداد حقيقية.

نستنتج مما سبق ووفقاً للمبرهنة ($2-17$)، أن الجذور المميّزة لِ A تكون جداء $(\frac{1}{i}=-i)$ في جذور المصفوفة الأخيرة، وصحة المبرهنة تصبح عندئذ واضحة.

مبرهنة ($3-20$):

المصفوفة مائلة التناظر من مرتبة فردية هي مصفوفة شاذة.

البرهان:

لنفرض أن A مصفوفة مائلة التناظر من مرتبة n، ولنرمز بِ $|A| = \Delta$.

بما أن $A' = -A = -IA$ يكون لدينا ما يلي:

$$|A'| = \Delta = |-I|.|A| = (-1)^n \Delta$$

وإذا كانت n فردية فلدينا $\Delta = -\Delta$ أي $2\Delta = 0$ ومنه $\Delta = 0$.

4- مبرهنة كَيْلي – هاميلتون (Cayley - Hamilton)

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربّعة $n\times n$ عناصرها في K. لنرمز بِ $\Delta(\lambda)$ للدالة المميّزة $|\lambda I-A|$ لِ A. وإذا رمزنا الآن بِ $adj(\lambda I-A)$ للمصفوفة القرينة لِ$(\lambda I-A)$.

يتضح أن $adj(\lambda I-A)$ هي كثيرة حدود في λ أكبرها λ^{n-1}، ومعاملاتها مصفوفات مربعة $n\times n$، أي:

$$adj(\lambda I-A)=c_0+c_1\lambda^1+c_2\lambda^2+....+c_{n-1}\lambda^{n-1}$$

كذلك نعلم وفقاً للخاصة(2−11−1) أن:

$$(\lambda I-A).adj(\lambda I-A)=adj(\lambda I-A).(\lambda I-A)=\Delta(\lambda).I$$

ومن العلاقة الأخيرة نرى أن كثيرة الحدود السلّمية $\Delta(\lambda)I$ قابلة للقسمة على $\lambda I-A$، وبالتالي فإن $\Delta(A)=0$. وهكذا نكون قد برهنا المبرهنة:

مبرهنة (4−1): Cayley - Hamilton

لتكن A مصفوفة مربعة عناصرها في حقل K. إذا كانت $\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|$ الدالة المميّزة لِA، فعندئذ $\Delta(A)=0$. أي أن كل مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميّزة.

تدعى المبرهنة الأخيرة بـ≻ مبرهنة Cayley – Hamilton ≺ وهي واحدة من أشهر المبرهنات في بحث المصفوفات، ونرغب في تبيان أن Cayley محام ورياضي إنكليزي (1821 − 1895) بينما Hamilton رياضي وفلكي إيرلندي (1805 − 1865).

توضيح:

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ، فعندئذ $\Delta(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+11$ ومنه:

$$\Delta(A)=A^2-6A+11I$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -18 & 24 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تطبيقات مبرهنة Cayley – Hamilton – حساب مقلوب مصفوفة مربعة –

لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$ غير شاذة، ولنفرض أن:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+....+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n$$

المعادلة المميّزة لِـ A.

فعندئذ بالرجوع إلى المبرهنة Cayley – Hamilton ، يكون:

$$A^n+\alpha_1A^{n-1}+....+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI=0$$

باعتبار أن $\alpha_n\neq 0$، " لأن عكس ذلك يعني أن $\lambda=0$ جذراً لـ $\Delta(\lambda)=0$، وبالتالي $|A|=0$". بعد ذلك، بنقل α_nI إلى الطرف الأيمن وقسمة الطرفين على $-\alpha_n$، نرى أن:

$$I=-\frac{1}{\alpha_n}[A^{n-1}+\alpha_1A^{n-2}+...+\alpha_{n-1}I]A$$

وأخيراً، بضرب طرفي هذه المعادلة بِـ A^{-1} نجد:

$$A^{-1}=-\frac{1}{\alpha_n}[A^{n-1}+\alpha_1A^{n-2}+...+\alpha_{n-1}I]$$

بهذه اللغة يمكننا إيجاد المقلوب A^{-1} لمصفوفة مربعة غير شاذة A بدلالة قوى هذه المصفوفة.

تمرين (4–2):

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 5 & 5\\ -5 & 6 & 5\\ -5 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

1 –برهن أن A تحقق المعادلة $A^3-8A^2+13A-6I=0$

2 –حَدّد A^{-1}

الحل:

إن الدالة المميّزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -5 & -5\\ 5 & \lambda-6 & -5\\ 5 & -5 & \lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+4)(\lambda-1)(\lambda-11)+50(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-6)=\lambda^3-8\lambda^2+13\lambda-6$$

بما أن كل مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميّزة (مبرهنة Cayley – Hamilton)، نجد:

$$A^3-8A^2+13A-6I=0$$

لإيجاد المقلوب، نضرب طرفي العلاقة المصفوفية الأخيرة بـ A^{-1} بعد نقل $-6I$ إلى الطرف الأيمن نحصل على:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}(A^2-8A+13I)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\begin{bmatrix}-34 & 35 & 35\\ -35 & 36 & 35\\ -35 & 35 & 36\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}-4 & 5 & 5\\ -5 & 6 & 5\\ -5 & 5 & 6\end{bmatrix}+13\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}11 & -5 & -5\\ 5 & 1 & -5\\ 5 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

تمرين (4–3):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

اكتب $adj(\lambda I - A)$ على الشكل:

$$adj(\lambda I - A) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2$$

الحل:

إن المصفوفة القرينة لـ$(\lambda I - A)$ هي:

$$adj(\lambda I - A)=\begin{bmatrix}\lambda^2-1 & 2\lambda-2 & 0\\ 2\lambda-2 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2-5\end{bmatrix}$$

والتي يمكن كتابتها ككثيرة حدود من الدرجة الثانية ومعاملاتها مصفوفات مربعة من الرتبة الثالثة كما يلي:

$$adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2$$

5-الدالة المميّزة المختزلة لمصفوفة:

نعلم سابقاً أن كل مصفوفة مربعة A تحقق دالتها المميّزة $\Delta(\lambda) = \lambda I - A$ (Cayley – Hamilton)، ولكن غالباً ما تكون الأخيرة ليست المعادلة السلّمية ذات الدرجة الأدنى التي تحققها A.

تعريف (5–1) الدالة المميّزة المختزلة (الدالة الصغرى) لمصفوفة مربعة:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها في K.

نُعرّف **الدالة المميّزة المختزلة (الدالة الصغرى)** لِ A بأنها الدالة السلّمية الواحدية $m(\lambda)$ ذات الدرجة الأدنى التي تقبل A صفراً لها.

وسندعو من الآن وصاعداً $m(\lambda) = 0$ بالمعادلة المميّزة المختزلة أو المعادلة الصغرى لِ A.

مبرهنات تتعلق بالدالة المميّزة المختزلة:

نبرهن أولاً المبرهنة التالية:

مبرهنة (5–2):

إذا كانت $\psi(\lambda) = 0$ أي معادلة سلّمية تحققها A، فعندئذ تكون $\psi(\lambda)$ قابلة للقسمة على الدالة المميّزة المختزلة $m(\lambda)$.

البرهان:

لنفرض أن $\psi(\lambda)=0$ المعادلة السلمية التي تقبل A صفراً لها، وفقاً لمفهوم الدوال المميزة المختزلة يمكن كتابة:

$$\psi(\lambda)=m(\lambda).q(\lambda)+R(\lambda) \qquad (1-2-5)$$

حيث $R(\lambda)$ هي من درجة أقل من $m(\lambda)$، إن لم تكن صفراً.

وبتعويض λ بـ A في $(1-2-5)$، نجد على الفور أن $R(A)=0$.

ولما كانت $m(\lambda)=0$ هي المعادلة ذات الحد الأدنى التي تحققها A، فإن هذا يقودنا إلى رفض $\deg R(\lambda)<\deg m(\lambda)$. وبالتالي نجد:

$\psi(\lambda)=m(\lambda)q(\lambda)$ أي أن الدالة $m(\lambda)$ تقسم $\psi(\lambda)$. وبذا يتم إثبات المبرهنة.

مبرهنة (5–3):

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n\times n$ عناصرها من K، ودالتها المميّزة:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}.(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}......(\lambda-\lambda_m)^{\alpha_m}$$

حيث: $\alpha_i=ord(\lambda_i) \quad ;(1\le i\le m)$

فعندئذ الدالة المميّزة المختزلة لِـA تعطى بالصيغة:

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\beta_1}.(\lambda-\lambda_2)^{\beta_2}......(\lambda-\lambda_m)^{\beta_m}$$

وحيث إن $(1\le i\le m)$; $1\le\beta_i\le\alpha_i$.

البرهان:

في الحقيقة، بالاستناد إلى المبرهنة الأخيرة، يمكننا أن نكتب:

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\beta_1}.(\lambda-\lambda_2)^{\beta_2}......(\lambda-\lambda_m)^{\beta_m}$$

حيث $0\le\beta_i\le\alpha_i$ باعتبار $(1\le i\le m)$.

لإتمام المطلوب، علينا تبيان أن $\beta_i\ge 1$ وذلك مهما يكن $(i=1,2,...,m)$.

في الواقع، بما أن λ_i جذر مميّز لِ A، فيوجد متجه غير صفري v بحيث $Av = \lambda_i v$ ويترتب على ذلك وفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي أن $A^k v = \lambda_i^k v$ وذلك مهما يكن k عدداً صحيحاً، وبالتالي $(R(A))v = R(\lambda_i)v$، وذلك من أجل أية دالة سلّمية $R(\lambda)$.

وبصورة خاصة، يمكننا أن نكتب:

$$(m(A))v = m(\lambda_i)v$$

من جهة ثانية، نعلم أن كل مصفوفة مربّعة تحقق معادلتها المميّزة المختزلة أي $m(A) = 0$ وبالتالي $m(\lambda_i)v = 0$ ومنه $m(\lambda_i) = 0$ باعتبار أن $v \neq 0$.

يتضح مما سبق أن $\beta_i = ord(\lambda_i) \geq 1$ وذلك أياً كان $(i = 1, 2, ..., m)$.

وهكذا لا نكون قد برهنا المبرهنة المفروضة فقط ولكن أيضاً النتيجة التالية:

نتيجة (5–4):

الدالة المميّزة والدالة المميّزة المختزلة لهما الجذور المميّزة نفسها عدا رتب تضاعف هذه الجذور.

إن هذه النتيجة تقودنا إلى عرض مفهوم المصفوفات المتردية وغير المتردية.

تعريف (5–5): **المصفوفة المتردّية وغير المتردّية:**

نقول إن مصفوفة **غير متردية** إذا تطابقت درجة الدالة المميّزة المختزلة مع درجة الدالة المميّزة أما إذا كانت درجة الدالة المميّزة المختزلة أقل من درجة الدالة المميّزة فإن المصفوفة تسمى **متردية**.

وفقاً لمفهوم الدالة الأصغرية لمصفوفة مربّعة، وبالرجوع إلى المبرهنات والنتائج التي أوردناها لتوّنا، يمكننا استنتاج أسلوب (وهو ليس الوحيد) لإيجاد الدالة الأصغرية لمصفوفة مربعة.

تمرين (5–6):

أوجد الدالة المميّزة والدالة الأصغرية للمصفوفة المربعة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

الحل:

إن الدالة المميّزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)[(\lambda-3)(\lambda-1)+1]$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

نعلم وفقاً للمبرهنة (5–2)، بأن الدالة الأصغرية $m(\lambda)$ تقسم الدالة المميّزة $\Delta(\lambda)$ وأن للدالتين الجذور نفسها ما عدا رتب التضاعف (نتيجة (5–4))، وبالتالي $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$(\lambda-1)(\lambda-2) \quad , \quad (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

وبملاحظة أن:

$$(A-I)(A-2I)=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

يتضح أن الدالة $(\lambda-1)(\lambda-2)$ تقبل A صفراً لها، وعليه فالدالة الأصغرية لِـA هي: $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$ والمصفوفة A متردية.

ولدينا أيضاً المبرهنة:

مبرهنة (5–7):

للمصفوفات المتشابهة دالة مميّزة مختزلة واحدة.

البرهان:

إذا كانت A,B مصفوفتين مربّعتين $n\times n$ متشابهتين عناصرهما في حقل K ،

ولنفرض أن الدالة المميّزة لِـA من النمط:

$$m_1(\lambda)=\lambda^r+c_1\lambda^{r-1}+....+c_{r-1}\lambda+c_r \qquad (r\le n)$$

وأن الدالة المميّزة المختزلة لِـB هي:

$$m_2(\lambda)=\lambda^m+d_1\lambda^{m-1}+...+d_{m-1}\lambda+d_m \qquad (m\le n)$$

ونهدف إلى تبيان أن:

$$m_1(\lambda)=m_2(\lambda)$$

في الواقع، بما أن A,B مصفوفتان متشابهتان فيمكننا إيجاد مصفوفة غير شاذة P عناصرها في K وبحيث يكون $A=P^{-1}BP$.

ولكي نبرهن المبرهنة نحتاج قبل كل شيء إلى إثبات أن $A^s = P^{-1}B^sP$. مهما يكن $s \in Z$.

إن العلاقة صحيحة وضوحاً من أجل $s = 1$ ، وكأساس لمبدأ الاستقراء الرياضي نفترض أنها صحيحة من أجل $s \in Z^+$ ولنبرهن على صحتها من أجل $s+1$.

لدينا:

$$A^{s+1} = A^s.A = (P^{-1}B^sP).(P^{-1}BP)$$
$$= P^{-1}(B^sB)P = P^{-1}B^{s+1}P$$

ومنه العلاقة المفروضة صحيحة من أجل عدد صحيح موجب s ، وبطريقة مماثلة يبرهن على صحتها من أجل أي عدد صحيح سالب.

من جهة ثانية، باعتبار أن $m_1(A) = 0$ ووفقاً للعلاقة الآنفة الذكر نجد:

$$\begin{aligned} 0 &= A^r + c_1A^{r-1} + ... + c_{r-1}A + c_rI \\ &= P^{-1}B^rP + c_1P^{-1}B^{r-1}P + ... + c_{r-1}P^{-1}BP + c_rP^{-1}P \\ &= P^{-1}(B^r + c_1B^{r-1} + ... + c_{r-1}B + c_rI)P \\ &= P^{-1}m_1(B)P \end{aligned}$$

وهذا يعني أن المصفوفة B هي صفر للدالة السلّمية $m_1(\lambda)$ أو بعبارة مكافئة، $m_1(\lambda) = 0$ هي معادلة سلّميّة تحققها B ، فعندئذ وفقاً للمبرهنة ($2-5$) تكون $m_1(\lambda)$ قابلة للقسمة على $m_2(\lambda)$ أي:

$$\deg m_2(\lambda) \le \deg m_1(\lambda) \qquad (1)$$

كذلك، من أجل الدالة المميزة المختزلة $m_2(\lambda)$ التي تحققها B ، فإذا اتبعنا خط النقاش نفسه المتبع أعلاه نجد ما يلي:

$$0 = B^m + d_1B^{m-1} + ... + d_{m-1}B + d_mI$$

$$= PA^m P^{-1} + d_1 PA^{m-1} P^{-1} + ... + d_{m-1} PAP^{-1} + d_m PP^{-1}$$
$$= Pm_2(A)P^{-1}$$

وهذا يعني أن $m_2(\lambda) = 0$ هي معادلة سلّمية تحققها المصفوفة A، وبالتالي:

$$\deg m_1(\lambda) \le \deg m_2(\lambda) \qquad (2)$$

يتضح من (1) و(2)، وباعتبار أن الدالة المميّزة المختزلة دالة واحدية، أن:

$$\deg m_1(\lambda) = \deg m_2(\lambda)$$

وهكذا نكون قد برهنا المبرهنة.

مبرهنة (5–8):

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها في حقل K، دالتها المميّزة المختزلة $m(\lambda)$. فعندئذ لمنقولها A' الدالة المميّزة المختزلة نفسها.

البرهان:

لنفرض أن الدالة المميزة المختزلة لـِ A تأخذ الشكل:

$$m(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1 \lambda^{r-1} + ... + \alpha_{r-1}\lambda + \alpha_r \qquad (r \le n)$$

وأن الدالة المميّزة المختزلة لـِ A' من النمط:

$$\Phi(\lambda) = \lambda^s + \beta_1 \lambda^{s-1} + ... + \beta_{s-1}\lambda + \beta_s \qquad (s \le n)$$

فعندئذ نرى أن $m(A) = 0$ وكذلك $\Phi(A') = 0$

وبالتالي:

$$m(A') = (A')^r + \alpha_1 (A')^{r-1} + ... + \alpha_{r-1} A' + \alpha_r I$$
$$= (A^r + \alpha_1 A^{r-1} + ... + \alpha_{r-1} A + \alpha_r I)' = 0$$

نستنتج هذا من حقائق أُرسيت في الجبر الابتدائي تقول: إن منقول جداء مصفوفات يساوي جداء منقولهم بترتيب معاكس، وأن منقول مجموع مصفوفات يساوي مجموع منقولهم.

يتضح من ذلك، أن $m(\lambda)=0$ معادلة سلّمية تحققها A'، ومنه $m(\lambda)$ قابلة للقسمة على $\Phi(\lambda)$، أو بتعبير مكافئ $m(\lambda)$ تقسم $\Phi(\lambda)$.

من ناحية أخرى، باتباع أسلوب مماثل تماماً لما ورد أعلاه، من السهل على القارئ رؤية أن الدالة السلّمية $\Phi(\lambda)$ تقسم الدالة السلّمية $m(\lambda)$.

وأخيراً، بملاحظة أن الدالتين السلّميتين واحديتين، يتضح أن $m(\lambda)=\Phi(\lambda)$ وبذلك يتم إثبات المطلوب.

تطبيق الدالة المميّزة المختزلة لحساب مقلوب مصفوفة مربعة:

مبرهنة (5–9):

لتكن A مصفوفة غير شاذة عناصرها في K. إذا كانت $m(\lambda)$ الدالة المميّزة المختزلة لـِ A من الدرجة r، فيمكن التعبير عن معكوس A أي A^{-1} على شكل كثيرة حدود سلّمية من الدرجة $r-1$ في A.

البرهان:

في الواقع، إذا كتبنا:

$$m(\lambda)=\lambda^r+\alpha_1\lambda^{r-1}+\alpha_2\lambda^{r-2}+\ldots+\alpha_{r-1}\lambda+\alpha_r$$

فعندئذ $\alpha_r \neq 0$، باعتبار أنه، فيما عدا ذلك، يمكن أن يكون $\lambda=0$ جذراً للمعادلة $m(\lambda)=0$ وبالتالي للمعادلة $\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=0$ وهذا تناقض مع كون A غير شاذة.

من ناحية أخرى، وفقاً للمبرهنة (4–1) لدينا:

$$A^r+\alpha_1A^{r-1}+\alpha_2A^{r-2}+\ldots+\alpha_{r-1}A+\alpha_rI=0$$

وبالتالي بنقل $\alpha_r I$ إلى الطرف الأيمن وقسمة الطرفين على $-\alpha_r$، نجد:

$$-\frac{1}{\alpha_r}[A^{r-1}+\alpha_1 A^{r-2}+\alpha_2 A^{r-3}+\ldots+\alpha_{r-1}I]A=I$$

ومنه:

$$A^{-1}=-\frac{1}{\alpha_r}[A^{r-1}+\alpha_1 A^{r-2}+\alpha_2 A^{r-3}+\ldots+\alpha_{r-1}I]$$

تمرين (5–10):

أوجد الدالة المميّزة والدالة المميّزة المختزلة لكل من المصفوفات A التالية، ومن أجل كل مصفوفة غير شاذة A أوجد A^{-1} ككثيرة حدود سلّميّة من درجة أصغرية في A.

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\quad ,\qquad 2)\quad A=\begin{bmatrix}3&0&-1\\1&4&1\\1&0&5\end{bmatrix}$$

الحل:

(1) إن الدالة المميزة للمصفوفة الأولى A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

ولإيجاد الدالة الصغرى $m(\lambda)$، نعلم وفقاً للحقائق التي أثبتناها أن كل مصفوفة تحقق دالتها المميّزة ودالتها المميّزة المختزلة، وأن الدالتين لهما الجذور نفسها عدا

رتب تضاعف هذه الجذور، وبالإضافة لذلك، إن الدالة المميّزة $\Delta(\lambda)$ قابلة للقسمة على الدالة المميّزة المختزلة $m(\lambda)$، وعليه $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$(\lambda-1)(\lambda-2) \quad , \quad (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

وإذا لاحظنا أن:

$$(A-I)(A-2I)=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

يتضح أن الدالة المميّزة المختزلة لِـA هي $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ ومنه المصفوفة A غير متردية.

إن الحد الثابت في الدالة المميّزة مغاير للصفر وبالتالي A قلوبة ولإيجاد A^{-1} لدينا:

$$A^3-4A^2+5A-2I=0$$

وبضرب طرفي هذه المساواة بـA^{-1} نحصل على:

$$A^{-1}(A^3-4A^2+5A-2I)=0$$

ومنه نجد:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A^2-4A+5I)$$

وبالحسابات الفعلية نرى أن:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(2) إن الدالة المميّزة للمصفوفة الثانية A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-4 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)+(\lambda-4)$$

$$=(\lambda-4)^3$$

ولإيجاد الدالة الصغرى $m(\lambda)$ للمصفوفة المربعة A، نتبع خط النقاش المتبع من أجل المصفوفة الأولى، يتضح أن $m(\lambda)$ هي إحدى الحدوديات:

$$\lambda-4 \quad , \quad (\lambda-4)^2 \quad , \quad (\lambda-4)^3$$

يُلاحظ أن $A-4I\neq 0$ وبالتالي لا يمكن أن تكون $\lambda-4$ الدالة الأصغرية لـ A.

بينما:

$$(A-4I)^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي الدالة الصغرى للمصفوفة A تكون:

$$m(\lambda)=(\lambda-4)^2$$

إن الحد الثابت في الدالة المميزة مغاير للصفر وبالتالي A غير شاذة،

ولإيجاد A^{-1} وفقاً للمبرهنة (5−9) التي أثبتناها لتوّنا نجد أن:

$$A^2-8A+16I=0$$

ومنه:

$$A^{-1} = -\frac{1}{16}(A-8I) = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

6- أساليب بناء الدالة المميّزة المختزلة (الدالة الصغرى):

إن الطريقة التي ناقشناها في الفقرة (5)، لتحديد الدالة المميّزة المختزلة لمصفوفة مربعة A تتركز على معرفة الدالة المميّزة $\Delta(\lambda) = |\lambda I - A|$ لِـ A.

ومن الملائم الآن أن نقدم أساليب أخرى لبناء الدالة الصغرى.

إن الأسلوب الأول يعتمد على المصفوفة القرينة لـ $\lambda I - A$ باعتبار أن λ متغير سلمي، أما الأسلوب الآخر فسوف يتركز على مفهوم الارتباط الخطي لمتتالية القوى للمصفوفة A.

أولاً: الأسلوب الأول:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها من حقل K،

ولتكن $\Delta(\lambda) = |\lambda I - A|$ الدالة المميّزة لِـ A.

لنرمز بِـ $adj(\lambda I - A)$ للمصفوفة القرينة لِـ $\lambda I - A$، فلدينا من الخواص الأساسية:

$$(\lambda I - A).adj(\lambda I - A) = adj(\lambda I - A).(\lambda I - A) = \Delta(\lambda).I \qquad (1)$$

إذا رمزنا الآن بِـ $\theta(\lambda)$ للقاسم المشترك الأعظم، لجميع المحدّدات المصغّرة ذات الـ$(n-1)$ صفاً في المصفوفة $\lambda I - A$، فنجد بسهولة أن $\theta(\lambda)$ هو عامل من

عوامل $\Delta(\lambda)$، باعتباره عاملاً لجميع المحددات المصغّرة ذات الـ $(n-1)$ صفاً في $\lambda I - A$.

ونبرهن أولاً المبرهنة التالية:

مبرهنة (6–1):

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها من حقل K، دالتها المميّزة $\Delta(\lambda) = \left|\lambda I - A\right|$. إذا كان $\theta(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لجميع المحدّدات المصغّرة ذات الـ $(n-1)$ صفاً في $(\lambda I - A)$. ولنفرض أن $m(\lambda) = \Delta(\lambda) / \theta(\lambda)$. فعندئذ $m(A) = 0$.

البرهان:

في الواقع، بموجب الحقيقة المذكورة آنفاً، أن $\theta(\lambda)$ عاملٌ من عوامل $\Delta(\lambda)$ ومنه يكون $m(\lambda)$ كثير حدود.

من ناحية ثانية، باعتبار أن المحدّدات المصغّرة ذات الـ $(n-1)$ صفاً من $\lambda I - A$ هي باستثناء ما قد يتعلق بالإشارة عناصر من $adj(\lambda I - A)$، فيتضح أن $\dfrac{adj(\lambda I - A)}{\theta(\lambda)}$ مصفوفة عناصرها كثيرات حدود في λ وبالتالي يمكن كتابتها على شكل كثير حدود في λ معاملاتها مصفوفات.

لدينا الآن بموجب العلاقة (1) الآنفة الذكر أن:

$$(\lambda I - A)\frac{adj(\lambda I - A)}{\theta(\lambda)} = \frac{\Delta(\lambda)}{\theta(\lambda)} I = m(\lambda) I$$

ومنه نجد أن كثيرة الحدود السلّمية $m(\lambda)I$ قابلة للقسمة على $\lambda I - A$ وبالتالي $m(A) = 0$ ونكون بذلك قد أثبتنا المبرهنة.

ويمكننا الآن الذهاب إلى أبعد من ذلك، في الحقيقة، سنورد دون برهان المبرهنة الهامة التالية:

مبرهنة (6–2):

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ على حقل K، دالتها المميّزة $\Delta(\lambda) = |\lambda I - A|$، ولتكن الدالة السلمية $m(\lambda) = \Delta(\lambda) / \theta(\lambda)$ حيث $\theta(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لجميع المحدّدات المصغّرة ذات الـ $(n-1)$ صفاً في $(\lambda I - A)$ فعندئذ:

$m(\lambda) = 0$ هي المعادلة السلمية ذات الدرجة الأدنى التي تحققها A، أكثر من ذلك، إذا كانت $\psi(\lambda) = 0$ أي معادلة سلمية تحققها A، فعندئذ تكون $\psi(\lambda)$ قابلة للقسمة على $m(\lambda)$.

إن المبرهنات السابقة تقودنا إلى أسلوب آخر لتحديد الدالة المميّزة المختزلة لمصفوفة مربّعة.

تمرين (6–3):

أوجد الدالة المميّزة والدالة الصغرى للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$$

الحل:

نحسب أولاً المصفوفة القرينة لـِ $\lambda I-A$

من الملاحظ أولاً أن:

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-5 & 6 & 6\\ 1 & \lambda-4 & -2\\ -3 & 6 & \lambda+4\end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$adj(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}(\lambda-2)(\lambda+2) & 6(\lambda-2) & -6(\lambda-2)\\ -(\lambda-2) & (\lambda-2)(\lambda+1) & 2(\lambda-2)\\ 3(\lambda-2) & -6(\lambda-2) & (\lambda-2)(\lambda-7)\end{bmatrix}$$

وبما أن $\theta(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم، لجميع المحدّدات المصغّرة ذات 2− صفاً في $\lambda I-A$. يتضح أن $\theta(\lambda)=\lambda-2$.

من ناحية ثانية، لنبحث عن الدالة المميّزة للمصفوفة A ،

لدينا:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 6 & 6\\ 1 & \lambda-4 & -2\\ -3 & 6 & \lambda+4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)(\lambda^2-4)+12(\lambda-2)$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

نستنتج استناداً إلى النظريتين (6−1) و(6−2) أن الدالة الصغرى للمصفوفة A هي $m(\lambda)=\dfrac{\Delta(\lambda)}{\theta(\lambda)}=(\lambda-1)(\lambda-2)$.

تمرين (6−4):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ \dfrac{1}{a} & 1 & a \\ \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad (a\in R^*)$$

1 −أوجد الدالة المميّزة المختزلة لِ A ثم تحقق بأن A تحقق معادلتها المميّزة المختزلة.

2 −أوجد في حال الإمكان A^{-1} ككثيرة حدود سلمية من درجة أصغرية في A .

الحل:

1− رأينا سابقاً أن الدالة المميّزة لِ A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-3)$$

من ناحية ثانية، إن المحدّدات المصغرة ذات 2− صفاً للمصفوفة:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -a & -a^2 \\ -\dfrac{1}{a} & \lambda - 1 & -a \\ -\dfrac{1}{a^2} & -\dfrac{1}{a} & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

هم بالضبط عناصر المصفوفة القرينة $adj(\lambda I - A)$، وبالحسابات نجد:

$$adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda - 2) & a\lambda & a^2\lambda \\ \dfrac{1}{a}\lambda & \lambda(\lambda - 2) & a\lambda \\ \dfrac{1}{a^2}\lambda & \dfrac{1}{a}\lambda & \lambda(\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

وبالتالي القاسم المشترك الأعظم لجميع المحددات المصغّرة ذات $2-$ صفاً في $\lambda I - A$ هي $\theta(\lambda) = \lambda$ وعليه الدالة المميّزة المختزلة:

$$m(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)$$

لنبين من خلال الحسابات الفعلية الحقيقة التالية:

كل مصفوفة مربعة تكون صفراً لدالتها المميّزة المختزلة.

لدينا:

$$m(A)=A(A-3I)=\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ \frac{1}{a} & 1 & a\\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-2 & a & a^2\\ \frac{1}{a} & -2 & a\\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2- في الحقيقة، لا يمكن التعبير عن A^{-1} معكوس المصفوفة A على شكل كثيرة حدود سلّمية من درجة أصغرية في A، وفقاً للمبرهنة (5-8)، وذلك لأن المصفوفة A شاذة (بيّن ذلك).

تمرين (5-6):

ليكن λ متغيراً سلّمياً، ولنعتبر المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda^2+1 & 2\lambda+1 & 3\lambda^2+4\lambda-1\\ \lambda^3+2 & 3\lambda^2 & \lambda-1\\ \lambda-1 & 3\lambda^2-\lambda+7 & \lambda^2+\lambda+1\end{bmatrix}$$

اكتب المصفوفة A على شكل كثيرة حدود في λ حيث المعاملات هي مصفوفات.

الحل:

نبيّن بسهولة أن:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\lambda^3+\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\lambda^2+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

ويجدر بنا الإشارة إلى أن كل مصفوفة تكتب على شكل كثيرة حدود معاملاتها مصفوفات تدعى غالباً بـ $\lambda-$ **مصفوفة.**

تمرين (6–6):

إذا أعطيت:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

استخدم حقيقة أن A تحقق معادلتها المميّزة لحساب A^3 وكذلك A^{-1} .

الحل:

إن المعادلة المميّزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -3 & \lambda-1 & -1 \\ -2 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2-7\lambda-11=0$$

وبالتالي نجد بوضوح أن:

$$A^3=3A^2+7A+11I$$

$$=3\begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix}+7\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}+11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix}$$

يُلاحظ بوضوح أن A غير شاذة، ومنه وفقاً لـ (Cayley Hamilton) نجد:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}(A^2 - 3A - 7I)$$

$$= \frac{1}{11}\left\{\begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ثانياً: الأسلوب الثاني:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ غير صفرية عناصرها من الحقل K، ولنعتبر $I, A, A^2, A^3, ...$ متتالية القوى لِـ A.

لنفرض الآن أن m أصغر عدد صحيح موجب بحيث الجملة $\{I, A, A^2, ..., A^m\}$ تكون مرتبطة خطياً بينما $\{I, A, A^2, ..., A^{m-1}\}$ مستقلة خطياً.

فعندئذ، وفقاً لمفاهيم أساسية، يمكننا التعبير عن المصفوفة A^m كتركيب خطي وحيد بدلالة عناصر الجملة $I, A, A^2, ..., A^{m-1}$. بتعبير مكافئ، هناك عناصر $c_1, c_2, c_3, ..., c_m$ من K ليست جميعها أصفار وبحيث إن:

$$A^m = c_1 A^{m-1} + c_2 A^{m-2} + ... + c_{m-1} A + c_m I$$

ويتضح بالتالي أن:

$$A^m - c_1 A^{m-1} - c_2 A^{m-2} - .... - c_{m-1} A - c_m I = 0$$

وهذا يسمح لنا، ببناء دالة واحدية سلمية ذات درجة صغرى وتقبل A صفراً لها.

$$m(\lambda) = \lambda^m - c_1 \lambda^{m-1} - c_2 \lambda^{m-2} - ... - c_{m-1}\lambda - c_m$$

ومن الطبيعي أن نوضح الأسلوب من خلال الأمثلة التالية:

تمرين (6–7):

أوجد الدالة المميّزة المختزلة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

بما أن $I \neq 0$ نستنتج أن المجموعة $\{I\}$ مستقلة خطياً. بالإضافة إلى ذلك، فإن المجموعة $\{I, A\}$ مستقلة خطياً لأن $(\forall \alpha \in R) A \neq \alpha I$ وضوحاً. نأخذ الآن المجموعة $\{I, A, A^2\}$ حيث:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

وندرس الارتباط الخطي لها، أي نبحث عن $\alpha, \beta \in R$ بحيث يكون $A^2 = \alpha A + \beta I$

لدينا:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد $\alpha = 4, \beta = 5$، وعليه فالمجموعة $\{I, A, A^2\}$ مرتبطة خطياً وعلاقة الارتباط هي $A^2 = 4A + 5I$ أي أن $A^2 - 4A - 5I = 0$ ومنه الدالة المميّزة المختزلة لِ A هي $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

تمرين (6–8):

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد الدالة المميّزة لِ A ثم أوجد A^{-1} ككثيرة حدود سلّمية من درجة أصغرية في A.

الحل:

من السهل أن نرى أن $\{I\}$ مستقلة خطياً وكذلك المجموعة $\{I, A\}$، نأخذ المجموعة $\{I, A, A^2\}$، حيث:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وندرس الارتباط الخطي لها، أي لنبحث عن أعداد حقيقية α, β ليست جميعها أصفاراً وبحيث يكون:

$$A^2 = \alpha A + \beta I$$

إن المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تؤول إلى معادلتين خطيتين بمجهولين:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha \quad &= 2 \end{aligned}$$

وبالتالي نجد $\alpha = 2, \beta = -1$ وعليه المجموعة $\{I, A, A^2\}$ تكون مرتبطة خطياً، وعلاقة الارتباط $A^2 - 2A + I = 0$ ومنه الدالة المميّزة المختزلة لِ A هي $m(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$.

يُلاحظ أن المصفوفة A غير شاذة، لإيجاد A^{-1}، لدينا وفقاً للمبرهنة (5−8)، أن:

$$A^2 - 2A + I = 0$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7- الجذور المميّزة لمصفوفات خاصة:

تعريف (7–1)**: المصفوفات معدومة القوى:**

لتكن N مصفوفة مربعة عناصرها في حقل K. إذا كان يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إن $N^m = 0$، فيقال: إن N **معدومة القوى** . وإذا كانت m أصغر عدد صحيح موجب بحيث إن $N^m = 0$ فيقال: إن N **معدومة القوى دليلها** m.

توضيح: إن المصفوفة:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

معدومة القوى ودليلها $m = 2$ وذلك بملاحظة أن $N^2 = 0$.

ومن الطبيعي أن يتساءل القارئ عن طبيعة الدوال المميّزة المختزلة لهذا الصنف الهام من المصفوفات وللإجابة على هذا التساؤل، نورد المبرهنة:

مبرهنة (7–2)**:**

لتكن N مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها في حقل K. فالشرط اللازم والكافي لتكون N معدومة القوى هو أن تكون جميع الجذور المميّزة لِـ N مساوية للصفر.

البرهان:

لتكن N معدومة القوى دليلها m. فعندئذ تحقق N المعادلة السلّمية $\lambda^m = 0$.

ومنه وبالاستناد إلى المبرهنة (6−2)، تكون الدالة المميّزة المختزلة $\Phi(\lambda)$ لِـ N عاملاً من عوامل λ^m، وبما أن $N^k \neq 0$ $(k < m)$ فيجب أن يكون $\Phi(\lambda) = \lambda^m$. وهكذا فإن جميع جذور المعادلة المميّزة المختزلة، وبالتالي واستناداً إلى المبرهنة (6−2)، لِـN تكون مساويةً للصفر. وعلى العكس، لنفرض أن الجذور المميّزة لِـ N جميعها أصفار، فالمعادلة المميّزة لِـ N هي $\lambda^m = 0$ إذن، ومن مبرهنة كايلي هاميلتون(Cayley Hamilton) يكون $N^m = 0$.

وهكذا نكون قد برهنا المبرهنة.

تمرين (7−3):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

فأوجد الدالة المميّزة والدالة المميّزة المختزلة لِـ A ثم بين أن A معدومة القوى دليلها 2.

الحل:

الدالة المميّزة لـA هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ -3 & -3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) + \lambda = \lambda^3$$

وبالتجربة نجد أن $m(\lambda) = \lambda^2$، ومنه A معدومة القوى ودليلها 2.

وكتَوضيح أخير، للمصفوفات معدومة القوى وغير المتردية، نورد:

تمرين (7–4):

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

فبيّن أن A معدومة القوى وغير متردية.

الحل:

إن الدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -3 & \lambda+3 & -3\\ -1 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3$$

ومنه استناداً إلى المبرهنة (5–3)، تكون الدالة المميّزة المختزلة لِـ A عاملاً من عوامل λ^3، وبما أن $A^2\neq 0$ فيجب أن يكون $m(\lambda)=\lambda^3$.

وهكذا فإن المصفوفة A غير متردية، كذلك، بما أن الجذور المميّزة لِـ A جميعها أصفار، وبالتالي A معدومة القوى ودليلها 3.

نتيجة (7–5):

لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$ عناصرها في حقل K، ولنفرض أن الدالة المميّزة المختزلة لِـA هي $(\lambda-a)^n$، حيث تقع a في K. فيمكننا عندئذ، كتابة:

$$A=aI+N$$

حيث N معدومة القوى دليلها n، وغالباً ما تدعى N **بالمصفوفة المعدومة القوى الرئيسة الموافقة لمصفوفة معينة.**

<u>توضيح1</u>:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

فالدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + (\lambda-1) = (\lambda-1)^3$$

وبحسابات بسيطة نجد أن $m(\lambda) = (\lambda-1)^3$، ومنه A غير متردّية. بالإضافة لذلك، وفقاً للملاحظة الواردة أعلاه، نرى أن المصفوفة المعدومة القوى الرئيسة لِـA هي:

$$N = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ومهمة القارئ تكمن في تبيان أن $N^3 = 0$.

<u>توضيح2</u>:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$.

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha\end{bmatrix} \qquad ;\alpha\in R$$

من السهل أن نرى وفقاً للمبرهنات الأساسية المتعلقة بالمحددات بأن الدالة المميّزة المختزلة لِـA هي:

$$m(\lambda)=(\lambda-\alpha)^n$$

أي أن لِـA جذر مميّز وحيد α.

كذلك، أن المصفوفة المعدومة القوى الرئيسة المستخلصة من A هي:

$$N=A-\alpha I=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وعلى القارئ، أن يرى أن $N^n=0$.

تعريف (7–6): مصفوفات جوردان:

ليكن a عدداً سلّمياً من حقل K، فسندعو المصفوفة المربعة $n\times n$،

$$J_a = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$

التي تحوي λ في كل مكان من القطر الرئيسي، و 1 في القطر الذي يعلوه مباشرةً، **بمصفوفة جوردان** . ⮚ ماري كاميليا جوردان، رياضية فرنسية (1838 – 1922)⮘.

وعلى سبيل المثال،

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مصفوفة جوردان مصفوفة جوردان

إن الدالة المميّزة لِـ J_a هي $\Delta(\lambda) = |\lambda I - J_a| = (\lambda - a)^n$، بينما قيمة المحدّد المصغّر ذي الـ $(n-1)$ صفاً والناتج عن حذف الصف الأخير والعمود الأول هو الواحد. وبالتالي فإن القاسم المشترك الأعظم لجميع المحدّدات الصغرى من $|\lambda I - J_a|$ ذات الـ $(n-1)$ صفاً هو الواحد.

يمكن استخدام المصفوفات المعدومة القوى التي ناقشناها في الفقرة السابقة أيضاً، لتشكيل عبارة مريحة ومفيدة من أجل J_a . وفي الحقيقة، يمكننا أن نكتب:

$$J_a = aI_n + H$$

حيث I_n هي المصفوفة الواحدية $n \times n$ أما H فهي مصفوفة عديمة القوى دليلها n وتأخذ الشكل:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

يجدر بنا الإشارة إلى أن جداء المصفوفة H بنفسها، يعني، على وجه الدقة، انسحاب المستقيم المائل الذي يحتوي على الواحدات في المصفوفة H إلى الأعلى.

توضيح: لنأخذ مصفوفة جوردان المربعة 4×4 :

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

وفي الحقيقة، يمكننا أن نكتب $J = 5I_4 + H$ مع ملاحظة أن:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H^4 = 0$$

وينتج من الخاصة التي تحققها المصفوفة عديمة القوى H أن:

$$J_a^2 = (aI + H)^2 = a^2 I + 2aH + H^2$$

$$J_a^3 = a^3 I + 3a^2 H + 3aH^2 + H^3$$

....

....

$$J_a^m = a^m I + ma^{m-1} H + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2} H^2 + ... + maH^{m-1} + H^m$$

وهكذا يمكننا إيجاد J^3 لمصفوفة جوردان:

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

في الحقيقة، لدينا:

$$J^3 = H^3 + 15H^2 + 75H + 125I$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 125 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 125 & 75 & 15 & 0 \\ 0 & 125 & 75 & 15 \\ 0 & 0 & 125 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 125 \end{bmatrix}$$

بالإضافة لذلك، إذا كان $a \neq 0$ فإن مصفوفة جوردان J_a غير شاذة، وبالتالي المصفوفة المعاكسة J_a^{-1} تكون مصفوفة مثلثية وليست مصفوفة جوردان إلا في الحالة الخاصة التي تكون فيها مصفوفة جوردان من المرتبة الثانية.

تمرين (7–7):

أوجد الجذور المميّزة والمتجهات الذاتية لمصفوفة جوردان 3×3 التالية:

$$J=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

الحل:

تأخذ المعادلة المميّزة لمصفوفة جوردان J الشكل:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-3)^4=0$$

وهذا يعني أن $\lambda=3$ جذر مضاعف أربع مرات للمعادلة المميّزة.

ويوافق الجذر المضاعف 3 المصفوفة $J-3I$ ورتبتها 3، ونحصل على المتجه المستقل الوحيد:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

من ناحية ثانية، بما أن القاسم المشترك الأعظم، لجميع المحدّدات المصغّرة ذات الـ 3– صفاً في المصفوفة $\lambda I-J$ هو الواحد، فيتضح على الفور أن $m(\lambda)=\Delta(\lambda)$ وبالتالي J مصفوفة غير متردّية.

تعريف (7–8): **المصفوفات الدوريّة:**

يُقال عن مصفوفة مربعة A عناصرها من حقل K، إنها **دورّية** إذا وجد عدداً صحيحاً موجباً m بحيث يكون $A^{m+1}=A$. وبصورة خاصة، إذا كان $m=1$ نجد $A^2=A$ فسندعو المصفوفة المربعة A عندئذ **بالمصفوفة متساوية القوى**.

وعلى سبيل المثال، المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

متساوية القوى، وذلك لأن $A^2 = A$.

ومن الطبيعي أن يتساءل القارئ عن طبيعة الجذور المميّزة لهذا الصنف الهام من المصفوفات.

في الحقيقة، إذا كانت A مصفوفة دورية، فإن A تحقق المعادلة السلّمية $\lambda(\lambda^m - 1) = 0$ وبالتالي لا تملك المعادلة السلمية لمصفوفة دورية أية جذور مكررة.

من ناحية ثانية، إن الدالة المميّزة المختزلة لِ A عامل من عوامل $\lambda(\lambda^m - 1)$ فيتضح بأن المعادلة المميّزة المختزلة $m(\lambda) = 0$ لِـ A لا تملك أي جذرٍ مكررٍ.

وعليه نكون قد برهنا المبرهنة التالية:

مبرهنة (7–9):

إذا كانت A مصفوفة دورية ودورها m، فإن الجذور المميّزة لِ A هي **أصفار** أو **جذور للواحد** من المرتبة m .

وبصورة خاصة، لدينا أيضاً النتيجة المباشرة:

نتيجة (7–10):

إذا كانت A مصفوفة غير شاذة 3×3، بحيث إن $A^3 = A$ فإن $m(\lambda)=\lambda^2-1$ هي الدالة المميّزة المختزلة لِ A. وجذور A المميّزة هي±1.

وكتوضيح لهذه النتيجة، لنأخذ المصفوفة المربعة3×3،

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

من السهل رؤية أن A غير شاذة، وفضلاً عن ذلك، لدينا:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد $A^3 = A$ وعليه، وفقاً للنتيجة آنفة الذكر، تكون الدالة المميّزة المختزلة لِA هي$m(\lambda)=\lambda^2-1$.

يمكن تحديد الدالة المميّزة المختزلة لِA وفق ما يلي:

إن الدالة المميّزة لِA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ -3 & \lambda+2 & -3\\ -2 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

وبملاحظة أن:

$$(A-I)(A+I)=A^2-I=0$$

يتضح لنا أن:

$$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

تمرين (7−11):

أوجد الجذور المميّزة والدالة المميّزة المختزلة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن المصفوفة A متساوية القوى باعتبار أن $A^2 = A$. كذلك، نرى أن:

$$\Delta(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)+2\lambda=\lambda^2(\lambda-1)$$

وبالتالي الجذور المميّزة هي الصفر والواحد، وهذا ما تؤكده المبرهنة (7−9).

أما الدالة المميّزة المختزلة لِـA تكون من النمط $m(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$.

8−الدوال المميّزة والمميّزة المختزلة لمؤثر خطي:

إذا كان E فضاءً متجهياً على حقل K، وليكن f مؤثراً خطياً على E.

تعريف (8−1):

ندعو العدد السلمي $\lambda \in K$ **جذراً مميزاً (قيمة ذاتية) للمؤثر** f إذا وفقط إذا وجد متجه $0 \neq v \in E$ بحيث $f(v)=\lambda v$. ويسمى عندئذ v **بالمتجه الذاتي الموافق للقيمة الذاتية** λ.

يتضح من ذلك، أن المتجه الذاتي v لا يمكن أن يقابله سوى قيمة ذاتية واحدة.

لأنه لو كانت λ_1, λ_2 قيمتين ذاتيتين للمؤثر f وكان v المتجه الذاتي المقابل لهما، فيمكن أن نرى أن:

$$f(v) = \lambda_1 v \quad , \quad f(v) = \lambda_2 v$$

وبالتالي $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$ ومنه نجد $\lambda_1 = \lambda_2$ باعتبار أن $v \neq 0$.

زد على ذلك، أن المتجه الذاتي v غير وحيد.

في الواقع، إذا كان α عدداً سلّمياً من K، فإن αv متجه ذاتي للمؤثر f مقابلاً للقيمة الذاتية λ، وذلك بملاحظة أن:

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$$

سندعو من الآن وصاعداً، لمجموعة القيم الذاتية للمؤثر الخطي f على الفضاء المتجهي E **بطيف هذا المؤثر** f ويُرمز له بِ $Spec(f)$.

تعريف (8–2):

ليكن f مؤثراً خطياً على E. إذا كان يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إن $f^m = 0$، فيقال إن f **مؤثر عديم القوى**. وإذا كانت m أصغر عدد صحيح موجب بحيث إن $f^m = 0$، فيقال إن f **مؤثر عديم القوى ودليله** m.

تعريف (8–3): **الفضاءات الذاتية:**

إذا كان f مؤثراً خطياً على الفضاء المتجهي E، ولتكن $\lambda \in K$ قيمة ذاتية لِ f.

ندعو **فضاءً ذاتياً للمؤثر الخطي** f المقابل للقيمة الذاتية λ ويرمز له بـ E_λ مجموعة المتجهات الذاتية للمؤثر f بما في ذلك المتجه صفر.

يُلاحظ أن الفضاء الذاتي E_λ يحوي دوماً متجهاً ذاتياً لا يساوي الصفر (واحداً على الأقل) وبالتالي فإن $\dim E_\lambda \geq 1$. ولدينا أيضاً المبرهنة:

مبرهنة (8–4):

إن الفضاء E_λ للمؤثر الخطي f على الفضاء E هو فضاء جزئي من E.

البرهان:

ليكن v_1, v_2 متجهين ذاتيين يقابلان القيمة الذاتية λ، وليكن α عدداً سلّمياً من K، فعندئذ يكون:

$$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2=\lambda(v_1+v_2)$$

$$f(\alpha v_1)=\alpha f(v_1)=\alpha(\lambda v_1)=\lambda(\alpha v_1)$$

وبالتالي $v_1+v_2, \alpha v_1 \in E_\lambda$. إذن E_λ فضاء ذاتي جزئي من E.

الدالة المميّزة لمؤثر خطي:

تعريف (8–5):

ليكن E فضاءً متجهياً منتهيَ البعد على الحقل K وليكن f مؤثراً خطياً على E. ولنرمز بِ A لمصفوفة هذا المؤثر بالنسبة لقاعدة مرتبة $\mathrm{B}=\{e_i\}_{i=1}^{n}$ في هذا الفضاء فتدعى المصفوفة $\lambda I_n - A$ (λ عدداً سلّمياً) **مصفوفة المؤثر الخطي** $\lambda I - f$، ويدعى المحدّد $\Delta(\lambda)=\left|\lambda I_n - A\right|$ **المحدّد المميّز** أو **الدالة المميّزة لـِ** f. من ناحية ثانية، المعادلة $\Delta(\lambda)=0$ تدعى **المعادلة المميّزة لـِ** f، وجذور $\Delta(\lambda)=0$ تدعى **الجذور المميّزة**، أو **القيم الذاتية لـِ** f.

ملاحظة:

إن إيجاد الدالة المميّزة لمؤثر خطي يؤول إلى إيجاد الدالة المميّزة لأية مصفوفة لهذا المؤثر.

ويمكننا إذن دراسة المعادلة المميّزة لمؤثر خطي f عن طريق دراسة المعادلة المميّزة لأية مصفوفة A بالنسبة لِقاعدة مرتبة في هذا الفضاء.

وسنجد من المفيد إيراد الأمثلة والتوضيحات التالية:

تمرين (8–6):

أوجد المعادلة المميّزة والجذور المميّزة للمؤثر الخطي $f \in Hom(R^3, R^3)$

المعرف بالصيغة:

$$f(x,y,z) = (x, x+2y-z, x+z)$$

الحل:

من الواضح أن مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 هي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمعادلة المميّزة لـ f هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

وبالتالي الجذور المميّزة لِـ f هي $1,1,2$.

ملاحظة:

من الممكن ألا يكون لمؤثر خطي على فضاء متجهي E أية قيمة ذاتية.

ويكفي أن نعطي توضيحاً بسيطاً. فإذا كان f مؤثراً خطياً على R^2 الذي مصفوفته بالنسبة للقاعدة القانونية في هذا الفضاء هي:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

يُلاحظ أن الدالة المميّزة لِ A هي λ^2+1 وهي غير قابلة للاختزال ضمن حقل الأعداد الحقيقية وبالتالي ليس للمؤثر f قيماً ذاتية.

تمرين (8–7):

أوجد القيم الذاتية وأساسيات الفضاءات الذاتية للمؤثر الخطي

$f: R_2[X]\to R_2[X]$ المعرف بالصيغة:

$$f(a+bx+cx^2)=(3a-2b)+(-2a+3b)x+5cx^2$$

حيث $R_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو تساوي 2.

الحل:

إن مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للقاعدة القانونية $\mathrm{B}=\{1,x,x^2\}$ في الفضاء $R_2[X]$ تعطى بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

إن القيم الذاتية للمؤثر f هي القيم الذاتية للمصفوفة A، أي جذور المعادلة المميّزة:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)^2=0$$

أي أن $\lambda=1,\lambda=5$.

من ناحية أخرى، إن الفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda = 5$ له الأساس $\{U_1, U_2\}$ والفضاء الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$ له الأساس $\{U_3\}$ حيث:

$$U_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفات هي مصفوفات الإحداثيات بالنسبة إلى B المكون من:

$$P_1(x) = -1 + x \quad , \quad P_2(x) = x^2 \quad , \quad P_3(x) = 1 + x$$

يتضح مما سبق أن $\{-1 + x, x^2\}$ هو أساس الفضاء الذاتي للمؤثر f المناظر للقيمة $\lambda = 5$ ويكون $\{1 + x\}$ أساساً للفضاء الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$.

مبرهنة (8-8):

إذا كان f مؤثراً خطياً على فضاء متجهي E، ولتكن $v_1, v_2, ..., v_m$ المتجهات الذاتية للمؤثر f الناشئة عن الجذور المميّزة المتمايزة $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

فعندئذ تكون المجموعة $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ مستقلة خطياً.

البرهان:

نلاحظ أولاً أنه من أجل $m = 1$ نحصل على المجموعة $\{v_1\}$ المستقلة خطياً، باعتبار أن $v_1 \neq 0$ متجه ذاتي. ولكي نمضي وفقاً لطريقة الاستقراء الرياضي، افترض أن المتجهات $v_1, v_2, ..., v_{m-1}$ مستقلة خطيّاً ثم نبيّن أن المتجهات $v_1, v_2, ..., v_{m-1}, v_m$ مستقلة خطياً.

لنفرض أنه توجد أعداد سلّمية $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ بحيث إن:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0 \qquad (1)$$

نضرب طرفي المعادلة (1) بـ λ_m. فنجد عندئذ،

$$\alpha_1\lambda_m v_1+\alpha_2\lambda_m v_2+....+\alpha_m\lambda_m v_m=0 \qquad (2)$$

من ناحية ثانية، لدينا:

$$f(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+....+\alpha_m v_m)=$$
$$=\lambda_1 f(v_1)+\lambda_2 f(v_2)+.....+\lambda_m f(v_m)=0$$

وبما أن f مؤثر خطي، وباعتبار أن v_i متجه ذاتي موافق للجذر المميّز $\lambda_i (i=1,2,....,m)$ نجد أن:

$$\alpha_1\lambda_1 v_1+\alpha_2\lambda_2 v_2+....+\alpha_m\lambda_m v_m=0 \qquad (3)$$

بطرح (2) من (3) نرى أن:

$$\alpha_1(\lambda_m-\lambda_1)v_1+\alpha_2(\lambda_m-\lambda_2)v_2+....+\alpha_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})v_{m-1}=0$$

وبما أن $\lambda_m-\lambda_i\neq 0$ من أجل $i\neq m$ وأن المتجهات $v_1,v_2,....,v_{m-1}$ مستقلة خطياً بالفرض، فلدينا:

$$\alpha_1=\alpha_2=....=\alpha_{m-1}=0$$

ووفقاً لِ (1) نستنتج عندئذ أن $\alpha_m v_m=0$ وبالتالي $\alpha_m=0$.

ومنه، وطالما أن المتجهات $v_1,v_2,....,v_{m-1}$ مستقلة خطيّاً، نجد $\alpha_1=\alpha_2=....=\alpha_m=0$.

وهذا يعني أن العلاقة (1) تصّح فقط إذا كانت جميع المقادير α_i أصفاراً، أي أن المتجهات مستقلة خطياً، وبذا يتم إثبات المبرهنة.

ونجد مباشرةً النتيجة المهمة التالية:

نتيجة (8-9):

ليكن f مؤثراً خطيّاً على فضاء متجهي E منتهي البعد n.

إذا كانت $v_1, v_2, ..., v_n$ المتجهات الذاتية الناشئة عن الجذور المميّزة المختلفة مثنى مثنى $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. فإن المتجهات الـ n تكون مستقلة خطياً وتشكل قاعدة لِ E.

وسندعو هذه القاعدة **بالقاعدة الذاتية** للفضاء E.

توضيح:

ليكن المؤثر الخطي $f \in Hom(R^3, R^3)$ المعرف بالصيغة:

$$f(x, y, z) = (-x + 3y - 2z, 3x - y - 2z, 6z)$$

أوجد قاعدة ذاتية للفضاء R^3.

الحل:

إن مصفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 هي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميّزة للمؤثر f هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 6)(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$$

وبالتالي للمؤثر الخطي f ثلاث جذور مميّزة مختلفة

$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 2$ وتوافق على الترتيب المتجهات الذاتية:

$$(1,1,-2) \quad , \quad (1,-1,0) \quad , \quad (1,1,0)$$

وهي مستقلة خطياً لأنها تقابل ثلاث جذور مميزة مختلفة وبالتالي المؤثر الخطي f يعين قاعدة ذاتية للفضاء R^3.

ملاحظة: لا تتغير الدالة المميّزة لمؤثر خطي على فضاء متجهي منتهي البعد بتغير القاعدة في هذا الفضاء، وأن إيجادها يؤول إلى إيجاد الدالة المميّزة لأية مصفوفة لهذا المؤثر.

تعريف (8–10):

نعرف **الدالة المميّزة المختزلة** (الدالة الصغرى) **لمؤثر خطي** f **على فضاء متجهي** E بأنها الدالة المميّزة المختزلة (الدالة الصغرى) لمصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة لقاعدة مرتبة.

العلاقة بين الدالتين المميّزة والأصغرية لمؤثر خطي:

مبرهنة (8–11)**: كايلي هاميلتون:**

إذا كان E فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقل K، فإن الدالة الأصغرية لأي مؤثر خطي $f \in Hom(E,E)$ تقسم الدالة المميّزة له.

توضيح:

ليكن $f \in Hom(R^2,R^2)$ حيث: $f(x,y)=(2x,x+y)$

أوجد الدالة المميّزة لِ f، ثم حقق أن $\Delta(f)=0$.

الحل:

إن مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للقاعدة القانونية في R^2 هي:

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

والدالة المميّزة لِ f إذن:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

وسوف نبين الآن أن:

$$\Delta(f) = f^2 - 3f + 2I = 0$$

لدينا:

$$\begin{aligned}(f^2 - 3f + 2I)(x,y) &= (4x, 3x+y) - 3(2x, x+y) + 2(x,y) \\ &= (0,0) \quad ; \quad \forall (x,y) \in R^2\end{aligned}$$

أي أن $f^2 - 3f + 2I = 0$.

مبرهنة (8–12):

إذا كان f مؤثراً خطياً على فضاء متجهي E، ليكن $\Delta(x), m(x)$ الدالتين المميّزة والمميّزة المختزلة لِ f . فإن جذور المعادلة المميّزة $\Delta(x) = 0$ هم بالضبط جذور المعادلة المميّزة المختزلة $m(x) = 0$.

البرهان:

لنبرهن أولاً أن كل جذر لِ $m(x) = 0$ هو جذر لِ $\Delta(x) = 0$.

في الحقيقة، لنفرض أن λ جذرٌ للمعادلة السلمية $m(x) = 0$ فعندئذ $m(x)$ تقبل القسمة على $(x - \lambda)$ وبالتالي يكون:

$$m(x) = (x - \lambda)R(x) \qquad (1)$$

حيث $R(x)$ حدودية من درجة أقل من $m(x)$.

لكن $m(x)=0$ هي المعادلة السلمية ذات الدرجة الأدنى التي يحققها المؤثر f ، إذن $R(f)\neq 0$ ، ولنفرض أن $u\in E$ متجه بحيث $v=R(f)(u)\neq 0$.

الآن، إذا عوضنا x بـ f في المعادلة (1) نجد على الفور $(f-\lambda I)v=0$ وبالتالي $f(v)=\lambda v$ ومنه λ جذر مميز لِ $\Delta(x)=0$ ويكون v المتجه الذاتي المقابل للجذر المميز λ .

العكس، لنبرهن أن كل جذر لِ $\Delta(x)=0$ هو جذر لِ $m(x)=0$.

لتكن $m(x)=x^r+\alpha_1 x^{r-1}+\alpha_2 x^{r-2}+...+\alpha_{r-1}x+\alpha_r$

الدالة المميّزة المختزلة للمؤثر الخطي f ، ولنفرض أن λ جذر مميز لـ f وأن $v\neq 0$ المتجه الذاتي المقابل له. فعندئذ من السهل أن نرى أن:

$$f(v)=\lambda v \quad , \quad f^2(v)=\lambda^2 v \quad , \quad .... \quad f^m(v)=\lambda^m v$$

وبالتالي نجد أن:

$$\begin{aligned} m(f)v &= (f^r+\alpha_1 f^{r-1}+\alpha_2 f^{r-2}+...+\alpha_{r-1}f+\alpha_r I)v \\ &= \lambda^r+\alpha_1\lambda^{r-1}+\alpha_2\lambda^{r-2}+...+\alpha_{r-1}\lambda+\alpha_r)v \\ &= m(\lambda)v \end{aligned}$$

وبملاحظة أن $m(f)=0$ و $v\neq 0$ يتضح أن $m(\lambda)=0$ ومنه λ جذراً للمعادلة المميّزة المختزلة $m(x)=0$ وبذا يتم إثبات المبرهنة.

والآن يمكننا عرض النتيجة التالية:

نتيجة (8–13):

للدالتين المميّزة والأصغرية لمؤثر خطي f الجذور نفسها عدا رتب تضاعف هذه الجذور.

نتائج وملاحظات:

إذا كان $f \in Hom(E,E)$ مؤثراً خطياً، فإن:

1 - إذا كان λ جذراً مميزاً ذات تعددية m للمؤثر الخطي f فإن عدد المتجهات الذاتية المختلفة المقابلة لِ λ لا يتجاوز m.

2 - إن الفضاء الذاتي E_λ هو فضاء جزئي من الفضاء E (مبرهنة (9-4)) مولد بالمتجهات الذاتية المقابلة للجذر المميز λ، بالإضافة لذلك

$$\dim E_\lambda \le ord(\lambda)$$

3 - إذا عين المؤثر الخطي f قاعدة ذاتية $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ للفضاء E مقابلة للجذور الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ $(r \le n)$ فإن:

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ...... \oplus E_{\lambda_r}$$

تمرين (8-14):

ليكن المؤثر الخطي $f \in Hom(R^3, R^3)$ حيث:

$$f(x,y,z) = (3x+2y+2z, x+2y+2z, -x-y)$$

أوجد القيم الذاتية للمؤثر f ثم أوجد الفضاءات الذاتية، هل الفضاء R^3 مجموع مباشر لهذه الفضاءات الذاتية.

الحل:

إن مصفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 هي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

والمعادلة المميّزة لِ f هي $\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$ أي:

$$(\lambda-3)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

والجذور المميّزة $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 2$ مكرر. ولإيجاد الفضاءات الذاتية $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ ، المقابلة لِ λ_1, λ_2 ، علينا أولاً إيجاد المتجهات الذاتية الناشئة عن الجذور المميّزة λ_1, λ_2 .

إذا كان $v = (x, y, z)$ متجهاً ذاتياً للمؤثر الخطي f ، فنجد:

$$f(v) = \lambda v$$

وهذه العلاقة تؤول إلى جملة من المعادلات الخطية المتجانسة:

$$(\star) \quad \begin{cases} (\lambda - 3) x - 2 y - 2 z = 0 \\ - x + (\lambda - 2) y - 2 z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

من أجل الجذر المميّز $\lambda = 1$ ، الجملة $(\star)$ تصبح كما يلي:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

ولدينا إذن فضاء ذاتي وحيد البعد $E_{\lambda_1} = \{\alpha(1, -1, 0) : \alpha \in R\}$.

وكل متجه منه هو متجه ذاتي يحقق المعادلة $f(v) = v$.

كذلك، من أجل الجذر المضاعف $\lambda = 2$ ، نرى أن الجملة $(\star)$ تصبح:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ولدينا إذن فضاء ذاتي وحيد البعد $E_{\lambda_2} = \{\beta(-2, 0, 1) : \beta \in R\}$ وكل متجه منه هو متجه ذاتي يحقق المعادلة $f(v) = 2v$.

يتضح لنا مما سبق أن:

$$R^3 \neq E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \quad : \quad \dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$$

تمرين (8–15):

ليكن المؤثر الخطي $f \in Hom(R^3, R^3)$ المعرف بالصيغة:

$$f(x,y,z) = (0,x,y)$$

أوجد الدالة المميّزة لكلٍ من المؤثرات الخطية f, f^2, f^3 .

الحل:

يُلاحظ قبل كل شيء أن مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 هي:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لنرمز بِ N^2, N^3 لمصفوفتا المؤثرين الخطيين f^2, f^3 على الترتيب، فنرى بسهولة أن:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N^3 = 0$$

وعليه نجد:

$$\Delta_1(\lambda) = |\lambda I - N| = \lambda^3$$

$$\Delta_2(\lambda) = |\lambda I - N^2| = \lambda^3$$

$$\Delta_3(\lambda) = |\lambda I - N^3| = \lambda^3$$

9- تمرينات محلولة:

تمرين (9–1):

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

فبيّن أن لِـ A أربعة جذور متميّزة بعضها عن بعضها الآخر. ثم حدّد المتجهات الذاتية v_1, v_2, v_3, v_4 الموافقة لِـ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

الحل:

إن الدالة المميّزة $\Delta(\lambda)$ لِـ A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-7 & -4 \\ 12 & \lambda+7 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \lambda+6 & 12 \\ -6 & \lambda-11 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^2-49+48)(\lambda^2-5\lambda-66+72)$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

فالجذور المميّزة المتمايزة على التتالي $-1,+1,2,3$

إذا أخذنا $\lambda=-1$ نجد أن رتبة المصفوفة

$$A-\lambda_1 I=A+I=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -5 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

هي الثلاثة، ولإيجاد متجهات ذاتية $v=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ موافقة للجذر المميّز $\lambda=-1$، علينا حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ \quad + x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 0 \\ \quad + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

يُلاحظ أن:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ولدينا إذن فضاء متجهات وحيد البعد، وكل متجه منه هو متجه يحقق المعادلة $Av = -v$ ولإيجاد أساس E_{λ_1}، نجد متجه مستقل:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وأي متّجه من الفضاء الذاتي المتولد عن هذا المتجه هو متجه أيضاً موافق للجذر المميّز $\lambda = -1$.

وبطريقة مشابهة إذا استخدمنا الجذر المميّز $\lambda = 1$ للمعادلة المميّزة $\Delta(\lambda) = 0$، نجد جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 20x_1 + 11x_2 - 7x_3 - 12x_4 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

يُلاحظ أن:

$$v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\alpha'\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\0\end{bmatrix}$$

ولدينا كذلك فضاء ذاتي وحيد البعد، وكل متجه منه هو متجه يحقق المعادلة $Av=v$ ، ولإيجاد أساس E_{λ_2} نجد مثلاً متجهاً مستقلاً:

$$v_2=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\0\end{bmatrix}$$

وأي متّجه من الفضاء الذاتي E_{λ_2} المتولد عن هذا المتجه هو متجهٌ أيضاً موافق للجذر المميّز $\lambda=1$.

وأخيراً، يمكن للقارئ أن يرى أن:

$v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\-2\end{bmatrix}$ متجه ذاتي يوافق الجذر المميّز $\lambda=2$

$v_4=\begin{bmatrix}0\\0\\4\\-3\end{bmatrix}$ متجه ذاتي يوافق الجذر المميّز $\lambda=3$

تمرين (9–2):

أوجد الجذور المميّزة للمصفوفة المربعة:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&d\\0&0&c&0\\0&b&0&0\\a&0&0&0\end{bmatrix} \quad ; \quad (a,b,c,d\in R^*)$$

ثم حدد المتجهات المميّزة والفضاءات الذاتية الموافقة، وذلك عندما $ad=bc$.

الحل:

إن الدالة المميّزة لـِA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&0&0&-d\\0&\lambda&-c&0\\0&-b&\lambda&0\\-a&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-c&0\\-b&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}+$$

$$+d\begin{vmatrix}0&\lambda&-c\\0&-b&\lambda\\-a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2(\lambda^2-bc)-ad(\lambda^2-bc)$$

$$=(\lambda^2-ad)(\lambda^2-bc)$$

فتنشأ حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان $ad\neq bc$ فيتكون لدينا أربعة جذور مميزة مختلفة فيما بينها $\sqrt{ad},-\sqrt{ad},\sqrt{bc},-\sqrt{bc}$

الحالة الثانية: إذا كان $ad=bc$ فنجد عندئذ جذرين مميزين مضاعفين $\lambda_1=\sqrt{bc},\lambda_2=-\sqrt{bc}$ رتبة تضاعف كلٍ منها 2.

إيجاد المتجهات الذاتية والفضاءات الذاتية:

إذا أخذنا الجذر المكرر $\lambda_1 = \sqrt{bc}$ باعتبار أن $ad = bc$،

لنفرض الآن أن $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ متجه ذاتي لـِ A مقابلٌ للجذر المميّز λ_1،

فعندئذ نجد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ومنه علينا حل المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$x_3 = \sqrt{\frac{b}{c}} x_2$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{a}{d}} x_1$$

يُلاحظ أن:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sqrt{\frac{b}{c}}\beta \\ \sqrt{\frac{a}{d}}\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{a}{d}} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{\frac{b}{c}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولدينا إذن فضاء متجهات خطي ذو بعدين، وكل متجه منه هو متّجه يحقق المعادلة $AX = \sqrt{bc}\, X$.

ولإيجاد أساس للفضاء الذاتي E_{λ_1}، نجد حلين مستقلين للجملة المذكورة، من الشكل:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{a}{d}} \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{\frac{b}{c}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وأي متجه من الفضاء الخطي المتولد عن هذين المتجهين هو متجه ذاتي موافق للجذر $\lambda_1 = +\sqrt{bc}$

وبطريقة مماثلة إذا استخدمنا الجذر $\lambda_2 = -\sqrt{bc}$، نحصل على المتجهين الذاتيين المستقلين:

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{a}{d}} \end{bmatrix} \quad , \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{\frac{b}{c}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$E_{\lambda_1} = \{\alpha X_1 + \beta X_2 : \alpha, \beta \in R\}$$
$$E_{\lambda_2} = \{\alpha' X_3 + \beta' X_4 : \alpha, \beta \in R\}$$

ونجد:

$$\dim E_{\lambda_1} = ord(\lambda_1) = 2$$
$$ordE_{\lambda_2} = ord(\lambda_2) = 2$$

تمرين (9–3):

أوجد الجذور المميّزة والفضاءات الذاتية الموافقة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن المعادلة المميّزة لـِA ، هي $(\lambda-1)^3(\lambda-2)=0$ وجذورها $1,1,1,2$.

إذا أخذنا الجذر المميز $\lambda=1$، نجد أن رتبة المصفوفة $A-I$ هي الثلاث وذلك بملاحظة أن:

$$A-I=\begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولإيجاد متجهات ذاتية $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ موافقة للجذر 1، علينا حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad\quad 5x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

ولدينا إذن فضاء متجهات ذاتي $E_{\lambda=1}$ وحيد البعد،

$$E_\lambda = \{\alpha(3,6,-4,-5) : \alpha \in R\}$$

وكل متجه منه هو متجه يحقق المعادلة $AX = X$.

وبطريقة مشابهة إذا استخدمنا الجذر $\lambda = 2$ للمعادلة $\Delta(\lambda) = 0$، نجد أن رتبة المصفوفة:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تكون ثلاثاً ويكون بعد فضائها الذاتي الواحد، ويتولد الفضاء الذاتي الموافق لِـ $\lambda = 2$ بالمتجه:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

تمرين (4–9):

لتكن A, B مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ عناصرهما في حقل K. إذا لم تكن كل من A, B شاذتين فعندئذ تكون AB, BA متشابهتين، وذلك لأنه إذا كان $|A| \neq 0$ فإن $A^{-1}(AB)A = BA$

وبالتالي فإنه ليس لها فقط الدالة المميّزة نفسها، ولكن أيضاً الدالة المميّزة المختزلة نفسها.

ملاحظة: إذا كانت A, B شاذتين، يكون لِـ BA, AB الدالة المميّزة نفسها، ولكن ليس بالضرورة الدالة المميّزة المختزلة نفسها.

توضيح: لكي نبيّن أنه إذا كانت كل من A, B شاذتين فليس من الضروري أن يكون للمصفوفتين AB, BA الدالة المميّزة المختزلة نفسها، ويكفي أن نعطي توضيحاً بسيطاً.

فإذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

فعندئذ:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad BA = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والدالتان المميّزتان المختزلتان للمصفوفتين الأخيرتين هما λ, λ^2 على الترتيب.

تمرين (9–5):

أوجد الدالة المميّزة والدالة المميّزة المختزلة لِـAB ولِـBA باعتبار أن:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

يُلاحظ أن:

$$BA=\begin{bmatrix}-8 & -8 & -8\\ 4 & 4 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix} \quad , \quad AB=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وفضلاً عن ذلك، من السهل أن نبين أن الدالتين المميّزتين المختزلتين للمصفوفتين الأخيرتين هما λ^2, λ^3 على الترتيب. ولكن لِـ AB, BA الدالة المميّزة نفسها وهي $\Delta(\lambda) = \lambda^3$.

تمارين

(1) أثبت أنه إذا كانت λ جذراً مميّزاً للمصفوفة A ، فإن λ^n جذر مميّز للمصفوفة A^n حيث n عدد صحيح.

(2) برهن أن الجذور المميّزة لمصفوفة مثلثية هي عناصر القطر الرئيسي.

(3) إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

فتبيّن أن: $A^2-11A+10I=0$

(4) إذا كان α جذراً مميّزاً لمصفوفة غير شاذة A ، فعندئذ $\dfrac{|A|}{\alpha}$ هو جذر مميّز لِـ $adjA$.

(5) بيّن أنه إذا كان α جذراً بسيطاً للمعادلة المميّزة لمصفوفة مربعة $A_{n\times n}$ فعندئذ تكون رتبة $A-\alpha I$ هي $n-1$.

(6) من أجل كل من المصفوفات التالية A :

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & b & 2 \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} 3 & a & b \\ a & 2 & c \\ c & b & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

حدّد الثوابت a,b,c كي تقبل $\Delta(\lambda)=0$ المعادلة المميّزة لِـA :

1 – ثلاثة جذور متساوية

2 – جذر بسيط وآخر مضاعف

3 – ثلاثة جذور مختلفة

(7) برهن أن المتجهات الذاتية X_1, X_2, X_3 لمصفوفة مربعة A الناشئة عن جذور مميّزة متباينة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ تكون مستقلة خطياً.

(8) برهن أن للمصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

الجذور نفسها المميّزة ولكنهما غير متشابهتين.

(9) أوجد الدالة المميّزة والدالة المميّزة المختزلة لكل من المصفوفات A التالية، ومن أجل كل مصفوفة غير شاذة A أوجد A^{-1} ككثيرة حدود سلّمية من درجة أصغرية في A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(10) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

1 – بين أن $\Delta(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)$ هي الدالة المميّزة لِـA .

2 – أوجد المتجهات الذاتية الموافقة للمصفوفة A

3 – بين أن A مصفوفة غير متردّية

(11) من أجل كل من المصفوفات التالية A ، أوجد القاسم المشترك الأعظم لجميع المحدّدات المصغّرة ذات 2– صفاً في المصفوفة $\lambda I - A$. ثم عين الدالة المميّزة المختزلة لِـA .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \; , \; A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; , \; A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(12) إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة 2، أثبت أن المعادلة المميّزة لِـ A هي $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$، حيث $tr(A)$ هو أثر المصفوفة A.

(13) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

فبيّن أن $A^2 = I$، بيّن أيضاً أن الجذور المميّزة لِـ A هي $+1, -1$.

(14) برهن أنه إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين $n \times n$ وكانت A غير شاذة. فإن لِـ $A^{-1}B, BA^{-1}$ الجذور المميّزة الخاصة ذاتها.

(15) من أجل الأزواج التالية من المصفوفات A, B، أوجد الدالة المميّزة والدالة المميّزة المختزلة لِـ AB ولِـ BA.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

(16) إذا كانت A, B, C مصفوفات مربعة $n \times n$، فبيّن أن لكل من المصفوفات ABC, BCA, CAB الدالة المميّزة نفسها.

(17) إذا كانت λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي f على الفضاء المتجهي E فبيّن أن λ^n قيمة ذاتية للمؤثر f^n .

(18) ليكن المؤثر الخطي $f \in Hom(R^4, R^4)$ معرفاً بالصيغة:

$$f(x,y,z,t) = (x-y+z-t, -x+y+z-t, 2z, -x-y+z+t)$$

أوجد القيم الذاتية للمؤثر f ثم أوجد الفضاءات الذاتية المقابلة لها، وأثبت أن الفضاء R^4 هو مجموع مباشر للفضاءات الذاتية.

(19) أوجد الجذور المميّزة للمصفوفة A^9 حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(20) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad : \quad \alpha \in R^*$$

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

الفصل الثاني

الاختزال القانوني لمصفوفات مربعة

1- اختزال مصفوفة مربعة إلى شكل قطري:

تعريف (1-1): المصفوفات القطرية:

تدعى مصفوفة مربعة D من المرتبة n، جميع عناصرها غير الواقعة في القطر الرئيسي أصفاراً **بالمصفوفة القطرية**.

توضيح:

المصفوفة الواحدية والمصفوفة الصفرية هما مصفوفتان قطريتان، وكذلك المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

وفي أغلب الأحيان، تُمثل أية مصفوفة قطرية D عناصرها القطرية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ بالرمز: $D=diag(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n)$

وعليه نكتب:

$$A=diag(1,-1,3) \quad , \quad B=diag(1,0,4)$$

مبرهنة (1–2):

الجذور المميَّزة لمصفوفة قطرية $D = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ هي بالضبط العناصر الموجودة في القطر الرئيسي.

البرهان:

في الحقيقة، إن الدالة المميَّزة للمصفوفة القطرية D هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - D| = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)....(\lambda - \alpha_n)$$

وبالتالي، تقودنا جذور المعادلة المميَّزة $\Delta(\lambda) = 0$، إلى الجذور المميَّزة لِ D وصحة المبرهنة تصبح عندئذ واضحة.

من ناحية ثانية، إن المصفوفة القطرية D الواردة أعلاه تمتلك n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ ,....., \ v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن: $Dv_i = \alpha_i v_i$ لأجل $(i = 1, 2, ..., n)$.

تعريف (1–3): المصفوفات المتشابهة:

يُقال إن المصفوفة المربعة A من المرتبة n مشابهة للمصفوفة المربعة B من المرتبة n إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P بحيث إن $P^{-1}AP = B$.

مثال (1–4):

إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين 2×2 حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

فبيّن أن A, B متشابهتان.

الحل:

في الواقع، نوجد مصفوفة حقيقية غير شاذة، $P=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ بحيث

يكون $AP = PB$ ، وذلك بحل معادلات خطية متجانسة معينة $b+d=0$،

$a-c=0$ ومنه: $P=\begin{bmatrix}a & b\\ a & -b\end{bmatrix}$

من جهة ثانية، بما أن P مصفوفة غير شاذة، نجد أن $ab \neq 0$، وعليه يمكن

إيجاد مصفوفة حقيقية غير شاذة $P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ بحيث $AP = PB$

والمصفوفتان A, B متشابهتان.

نتيجة (1–5):

إذا كان $B = P^{-1}AP$ فإن $B^m = P^{-1}A^m P$ وذلك أياً كان m عدداً صحيحاً موجباً.

تعريف (1–6):

يُقال عن المصفوفة المربعة A من المرتبة $n\times n$ إنها مشابهة لمصفوفة قطرية $D_{n\times n} = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ ، إذا أمكن إيجاد مصفوفة غير شاذة P وبحيث يكون:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$$

ومسألتنا هي أن نحدد الشروط اللازمة بالنسبة لمصفوفة مربعة A من المرتبة $n\times n$ لكي تكون مشابهة لمصفوفة قطرية $D_{n\times n}$، وإعطاء طريقة لإيجاد المصفوفة غير الشاذة P المرغوبة (في حال وجودها)، وبحيث تحقق $P^{-1}AP=D_{n\times n}$.

لنعتبر الآن A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$، بالاستناد إلى النتائج التي أوردناها سابقاً، فإن جذور المعادلة المميَّزة $\Delta(\lambda)=|\lambda I_n-A|=0$، تدعى الجذور المميَّزة أو القيم الذاتية لِـ A. أما المتجهات الناشئة عن الجذور المميَّزة $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$ فتتعين وفق المعادلات المصفوفية التالية:

$$(A-\lambda_1 I_n)v_1=0\ \ ,\ \ (A-\lambda_2 I_n)v_2=0\ \ ,\ \ ...\ \ ,\ \ (A-\lambda_n I_n)v_n=0$$

ونورد المبرهنات التالية:

مبرهنة (7-1):

ليكن $B=P^{-1}AP$ وليكن V متجهاً ذاتياً لِـ B موافقاً للجذر المميَّز λ فعندئذ يكون $W=PV$ متجهاً ذاتياً لِـA موافقاً للجذر λ نفسه.

البرهان:

لدينا بالفرض أن $BV=\lambda V$، وباعتبار أن $AP=PB$ يتضح أن:

$$AW = APV = PBV = P(\lambda V) = \lambda W$$

إن هذه المبرهنة تقودنا إلى برهان المبرهنة التالية:

مبرهنة (1–8):

إن أية مصفوفة A ، مشابهة لمصفوفة قطرية $D_{n\times n}$ ، تملك n من المتجهات الذاتية المستقلة خطيّاً، زد على ذلك، إذا كانت C مصفوفة غير شاذة بحيث إن $C^{-1}DC = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ فإن أعمدة C تكون متجهات ذاتية لـِ A .

البرهان:

نلاحظ أولاً أن $C^{-1}AC = D_{n\times n}$ ، من ناحية ثانية، وفقاً للحقيقة الواردة في الفقرة الأخيرة، فإن المصفوفة القطرية $D_{n\times n}$ تمتلك n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً من الشكل:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \;, ..., \; v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالرجوع إلى المبرهنة الأخيرة، تكون $CV_i \;\; (i = 1, 2, ..., n)$ ، متجهات ذاتية لـِ A ناشئة عن الجذور المميَّزة، وبما أن C مصفوفة غير شاذة فإن هذه المتجهات الـ n هي بوضوح مستقلة خطياً.

مبرهنة (1–9):

إذا كان لمصفوفة مربعة $A_{n\times n}$ ، n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً فعندئذ تكون A مشابهة لمصفوفة قطرية $D_{n\times n}$.

البرهان:

لنفرض أن A تمتلك n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ الناشئة عن الجذور المميَّزة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ على الترتيب، بحيث إن:

$$AV_i = \alpha_i V_i \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n)$$

لنشكل الآن المصفوفة C غير الشاذة التي تتألف أعمدتها من المتجهات الذاتية v_i، فعندئذٍ وفقاً للمعادلات المذكورة لتوّنا، فإن أعمدة المصفوفة AC هي بالضبط، المتجهات $\alpha_i v_i$. وفضلاً عن ذلك، إذا كان $D = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$، فمن الواضح أن متجهات العمود للمصفوفة CD هي أيضاً $\alpha_i v_i$ وبالتالي $AC = CD$، وهذا يعني أن $C^{-1}AC = D$ ومنه A مشابهة لمصفوفة قطرية، وبذا يتم إثبات المبرهنة.

وبدمج النظريتين الأخيرتين نجد:

مبرهنة (1−10):

تكون مصفوفة مربعة $A_{n\times n}$ مشابهة لمصفوفة قطرية (قطورة) إذا، وفقط إذا، كان لها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطيّاً.

ملاحظة هامة:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$، ولنفرض أنها تملك n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً. فعندئذ، وفقاً للحقائق الواردة أعلاه، فإن المصفوفة P التي أعمدتها متجهات ذاتية لـِ A تحقق الخاصة الهامة:

$$P^{-1}AP = D_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ هي الجذور المميَزة لـِ A. إن الخاصة المذكورة تعني تحويل (اختزال) المصفوفة المربعة A إلى الشكل القطري.

ويجدر بنا الإشارة إلى أنه:

ليس من الضروري أن تكون كل مصفوفة مربعة $n \times n$ تملك n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً، وبالتالي ليست كل المصفوفات مشابهة لمصفوفة قطرية.

تمرين (11−1):

حدِّد فيما إذا كانت المصفوفة A التالية مشابهة لمصفوفة قطرية، وأوجد المصفوفة C غير شاذة (إن وجدت)، بحيث تكون $C^{-1}AC$ قطرية.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن الدالة المميَّزة لـِ A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)[(\lambda-3)^2-4]$$
$$=(\lambda-5)^2(\lambda-1)$$

وبالتالي $\lambda=5$ جذر مميَّز مضاعف مرتين و $\lambda=1$ جذر مميَّز بسيط.

لنبحث عن المتجهات الذاتية الموافقة لتلك الجذور المميَّزة.

في الواقع، لنفرض أن $v=(x,y,z)$ متجهاً ذاتياً ناشئاً عن $\lambda=1$، فعندئذ المعادلة المصفوفية $Av=v$ تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$x-y=0\ ,\ z=0$ وبالتالي المتجه الذاتي $v_{\lambda=1}$ الموافق يعطى بالصيغة:

$$V=\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\\ 0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$ ، (α ثابت اختياري مغاير للصفر)

أما من أجل الجذر المكرر $\lambda=5$، فالمعادلة المصفوفية $Av=5v$ تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين $x+y=0\ ,\ 0z=z$ وبالتالي المتجه الذاتي $v_{\lambda=5}$ الموافق يعطى بالصيغة:

$$V=\beta\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

وعليه، إن المتجهين:

$$v_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\quad ,\quad v_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

يكونان أساساً للفضاء الذاتي $E_{\lambda=5}$ المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 5$،

كذلك $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، يكون أساساً للفضاء الذاتي $E_{\lambda=1}$ المناظر للقيمة $\lambda = 1$.

الآن، يمكن أن نتحقق من أن $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطياً، لذلك فإن المصفوفة:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تحول A إلى الشكل القطري.

وأخيراً، بحسابات بسيطة نترك للقارئ متعة التأكد من أن:

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه المصفوفة المربعة A قابلة للتحويل (للاختزال) إلى الشكل القطري، وسندعو المصفوفة P التي أعمدتها المتجهات الذاتية المستقلة خطياً تُحوّل (تختزل) A إلى الشكل القطري.

ملاحظة (12-1):

إن المصفوفة المربعة A من المرتبة $n \times n$ قابلة للاختزال إلى الشكل القطري إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P أعمدتها مؤلفة من المتجهات الذاتية لِ A وبحيث يكون:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

يجدر بنا الإشارة إلى أن ورود الجذور المميّزة في المصفوفة القطرية تتعلق بورود المتجهات الذاتية في المصفوفة المحوّلة P.

خطوات اختزال مصفوفة مربعة إلى الشكل القطري:

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ قابلة للاختزال إلى الشكل القطري، فلإيجاد المصفوفة القطورة غير الشاذة P نتبع الخطوات الآتية:

1 –نوجد القيم الذاتية (الجذور المميَّزة) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ للمصفوفة A، ثم نحدّد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً الموافقة لِ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

2 –نكّون المصفوفة P التي تتألف أعمدتها من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً لِ A.

3 –يمكن التحقق من صحة العلاقة المصفوفية:

$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

تمرين (1–13):

بيّن فيما إذا كانت المصفوفة التالية قطورة:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن المعادلة المميّزة لِـA هي:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0$$

إذن $\lambda = -1$، هي القيمة الذاتية الوحيدة للمصفوفة A، أما المتجهات الذاتية الناشئة عن λ فتتحدّد من خلال حلول المعادلة المصفوفية $(-I - A)v = 0$ التي تؤول على الفور إلى المعادلة الخطية المتجانسة: $x - y = 0$ وحلولها:

$$V = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (\alpha \in R^*)$$

ومنه، نحصل على المتجه الذاتي الوحيد $(1,1)$، وعليه الفضاء الذاتي المرتبط E_λ وحيد البعد.

إذن من المتعثر إيجاد متجهين ذاتيين مستقلين خطياً لِـ A، وهذا يعني أن المصفوفة A غير قابلة للاختزال إلى الشكل القطري (غير قطورة).

مبرهنة $(1-14)$:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ جذورها المميَّزة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_s$ مضاعفة $v_1, v_2, v_3, ..., v_s$، على الترتيب. فالشرط اللازم والكافي لتكون A مشابهة لمصفوفة قطرية هو أن تكون رتبة المصفوفة $A - \alpha_j I$ هي $n - v_j$ وذلك من أجل أي جذر α_j.

تمرين $(1-15)$:

حدِّد أياً من المصفوفتين التاليتين مشابهة لمصفوفة قطرية D وأوجد C بحيث إن $C^{-1}AC = D$، في حال وجود C.

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad A_2=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

الحل:

1− المعادلة المميَّزة لِـ A_1 هي:

$$|\lambda I - A_1| = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$$

وبالتالي، هناك جذر مميَّز بسيط $\lambda=-1$، وجذر مكرر مضاعف $\lambda=1$. يوافق الجذر المضاعف$\lambda=1$ المصفوفة:

$$A_1 - I = \begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

ورتبتها وضوحاً الواحد، ونحصل على متجهين ذاتيين مستقلين خطياً بحل المعادلة$x+y+z=0$ وفق ما يأتي:

$$V=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \quad ; \quad v_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \quad , \quad v_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

أما الجذر البسيط$\lambda=-1$ فتوافقه المصفوفة:

$$A_1 + I = \begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

ورتبتها 2، ونحصل على المتجه الذاتي الوحيد الموافق لِـ$\lambda=-1$ وفق ما يلي:

$$V=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\gamma\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\quad ;\quad v_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

إذا أخذنا المصفوفة C التي أعمدتها المتجهات الذاتية:

$$C=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

فعندئذ يكون $C^{-1}A_1C=diag(1,1,-1)$.

2− المعادلة المميَّزة لِـ A_2 هي:

$$\left|\lambda I-A_2\right|=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$$

وجذورها هي $1,1,3$. ويوافق الجذر المضاعف $\lambda=1$، المصفوفة:

$$A_2-I=\begin{bmatrix}1&-1&1\\3&2&-2\\4&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1\\3&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ورتبتها وضوحاً 2. ومنه بالرجوع للمبرهنة (1−14)، يتضح أنه لا يمكن للمصفوفة A_2 أن تكون مشابهة لمصفوفة قطرية.

نورد المبرهنة الهامة التالية:

مبرهنة (1−16):

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n عناصرها في الحقل K، جذورها المميّزة $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ المضاعفة $m_1,m_2,\dots,m_k$ مرة على الترتيب $(\sum\lambda_i=n)$.

فالشرط اللازم والكافي كي تكون A مشابهة لمصفوفة قطرية هو أن تكون الدالة المميّزة مفرقة على K أي:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} .....(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

وحيث إنّ $\dim E_i = m_i = ord(\lambda_i)$ ، $(i = 1, 2, ..., n)$.

2-المصفوفات المتعامدة:

تعريف (2-1):

تكون مصفوفة مربعة P من المرتبة n متعامدة إذا كان معكوسها ومنقولها متساويين، أي إذا كان $P^{-1} = P^T$.

نستنتج مباشرةً أن المصفوفة المتعامدة P تحقق العلاقة: $P.P^T = P^T.P = I_n$

بالإضافة إلى ذلك، يُبرهن:

مبرهنة (2-2):

تكون المصفوفة المربعة P متعامدة إذا وفقط إذا كان مجموع مربّعات عناصر أي صف مساوياً للواحد، ويكون الجداء الداخلي لأي متجهي صف متميّزين مساوياً للصفر.

ملاحظة (2-3):

يتضح من المبرهنة الأخيرة أن المصفوفة المتعامدة P تتميز بأن المتجهات الممثلة بأعمدتها متعامدة مثنى وأطوال هذه المتجهات يساوي الواحد. ونُعبر عن هذه الخاصة بِ ≺**خاصة التعامد للأعمدة**≻.

توضيح:

إن المصفوفات التالية مصفوفات متعامدة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (2–4):

إن معكوس مصفوفة متعامدة P هو مصفوفة متعامدة.

في الحقيقة، إذا كان $Q = P^{-1}$، فعندئذ نجد: $Q^T = (P^T)^T = P = Q^{-1}$

أيضاً، لدينا:

مبرهنة (2–5):

جداء مصفوفتين متعامدتين من مرتبة n تكون مصفوفة متعامدة.

ذلك لأنه إذا كان P,Q مصفوفتين متعامدتين، فعندئذ وفقاً لحقائق أساسية في المصفوفات نكتب:

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}.P^{-1} = Q^T P^T = (PQ)^T$$

مبرهنة (2–6):

إذا كانت P مصفوفة متعامدة، فإن $\det P = \pm 1$.

إن هذه الحقيقة تنتج على الفور من كون $PP^T = I$ وذلك بأخذ محدّدات الطرفين.

مبرهنة (2−7):

الجذور المميّزة لمصفوفة متعامدة حقيقية لها قيمة مطلقة تساوي الواحد.

البرهان:

إذا كان λ جذراً مميزاً لمصفوفة متعامدة حقيقية P، فيوجد متجه عمود $v \neq 0$ بحيث إن:

$$PV = \lambda V \qquad (1)$$

وبأخذ مرافق المنقول لطرفي المعادلة المصفوفية الأخيرة نجد:

$$V^* P^T = \bar{\lambda} V^* \qquad (2)$$

بتشكيل جداء المصفوفتين في (1) و(2) طرفاً لطرف نرى أن:

$$V^* P^T PV = \lambda \bar{\lambda} V^* V$$

وبالاستفادة من كون P عمودية، يمكن أن نكتب:

$$(1 - \lambda \bar{\lambda}) V^* V = 0$$

وأخيراً، بما أن V^*V مصفوفة 1×1 غير صفرية، يتضح أن:

$$|\lambda| = \lambda \bar{\lambda} = 1$$

نتيجة (2−8):

إن أية مصفوفة متعامدة حقيقية لا تملك جذوراً مميزةً حقيقيةً سوى ± 1.

3− الاختزال العمودي لمصفوفة متناظرة حقيقية إلى شكل قطري:

تعريف (3−1):

يُقال عن المصفوفة المربعة $A_{n\times n}$ إنها قابلة للتحويل العمودي (الاختزال العمودي) إلى شكل قطري إذا وجدت مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^T AP$ قطرية. وفي هذه الحالة، يُقال إن المصفوفة P تحول عمودياً المصفوفة A إلى الشكل القطري. لدينا سؤلان يؤخذان بعين الاعتبار. **الأول،** أي المصفوفات تكون قابلة للتحويل العمودي إلى الصيغة القطرية؟ **والثاني،** كيف نجد مصفوفة متعامدة P لتجرى من خلالها التحويل العمودي إلى الشكل القطري لمصفوفة قابلة لهذا التحويل؟

مبرهنة (3–2):

إن أية مصفوفة $A_{n\times n}$ قابلة للتحويل العمودي إلى شكل قطري، تملك n من المتجهات الذاتية المتعامدة المنظمة.

البرهان:

بما أن A مصفوفة قابلة للتحويل العمودي إلى الشكل القطري، فتوجد مصفوفة متعامدة P من المرتبة n بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

زد على ذلك، أن أعمدة P تتألف من n المتجهات الذاتية للمصفوفة A، وباعتبار أن P متعامدة، فالمتجهات الذاتية تكون متعامدة منظمة. وبذلك يتم إثبات المبرهنة.

مبرهنة (3–3):

إذا كان لمصفوفة مربعة $A_{n\times n}$، n من المتجهات الذاتية المتعامدة المنظمة فعندئذ تكون A قابلة للتحويل العمودي إلى الشكل القطري.

البرهان:

لبرهان هذه المبرهنة، نفرض أن A تمتلك n من المتجهات الذاتية المتعامدة المنظمة $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ الناشئة عن الجذور المميّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ على

الترتيب، فعندئذ وفقاً للمبرهنة (3−2)، فإن المصفوفة P التي أعمدتها المتجهات X_i تحول المصفوفة A إلى الشكل القطري.

وإذا لاحظنا أن المتجهات الذاتية التي تشكل أعمدة المصفوفة P متعامدة منظمة، فتكون P عمودية، وعليه المصفوفة A قابلة للتحويل العمودي إلى الشكل القطري.

وبدمج المبرهنتين الأخيرتين نحصل على المبرهنة:

مبرهنة (3−4):

تكون مصفوفة مربعة $A_{n\times n}$ قابلة للتحويل العمودي إلى الشكل القطري إذا وفقط إذا كان لها n من المتجهات الذاتية المتعامدة المنظمة.

مبرهنة (3−5):

إن أية مصفوفة $A_{n\times n}$ قابلة للتحويل العمودي إلى الشكل القطري تكون متناظرة.

البرهان:

في الحقيقة، بما أن A قابلة للتحويل العمودي إلى الشكل القطري، فعندئذ بالرجوع إلى المبرهنة (3−3)، توجد مصفوفة P متعامدة وأعمدتها مؤلفة من المتجهات الذاتية المتعامدة المنظمة لِـ A وبحيث إن $P^T AP = D$ أي $PDP^T = A$ ومنه نجد:

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^T P^T = PDP^T = A$$

وهذا يعني أن A متناظرة.

نورد دون برهان المبرهنة التالية:

مبرهنة (3–6):

إذا كانت A مصفوفة متناظرة حقيقية مربعة $n \times n$ جذورها المميّزة $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$، فتوجد مصفوفة متعامدة حقيقية P بحيث إنّ $P^T AP = diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

لن نتطرق إلى برهان المبرهنة، لأنه يحتاج إلى مفاهيم إضافية خارج نطاق هذا الكتاب، ولكن يكفي الإشارة إلى أن البرهان يتم وفقاً لطريقة الاستقراء الرياضي.

بناء مصفوفة متعامدة حقيقية:

نورد قبل كل شيء التمهيدية التالية:

تمهيدية (3–7):

يكون المتجهان الذاتيان لمصفوفة متناظرة حقيقية $A_{n\times n}$ الناشئان عن جذرين مميّزين متميزين متعامدين.

البرهان:

ليكن λ, μ جذرين مميّزين $(\lambda \neq \mu)$ لِـ A ولنفرض أن المتجهين الذاتيين الموافقين لِـ λ, μ هما على الترتيب:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

فعندئذ، يكون لدينا:

$$Av = \lambda v \quad , \quad Aw = \mu w \quad (\lambda \neq \mu)$$

وبالتالي نجد:

$$w^T Av = \lambda w^T v \qquad (1)$$

$$v^T Aw = \lambda v^T w \qquad (2)$$

نأخذ الآن منقول طرفي المعادلة (2)، وبالاستفادة من كون A متناظرة، نجد:

$$(\lambda - \mu) w^T v = 0$$

وباعتبار أن $\lambda \neq \mu$ يتضح أن $w^T v = 0$.

إذا كانت A مصفوفة متناظرة حقيقية مربعة $n \times n$. فوفقاً للمبرهنة $(3-6)$، توجد مصفوفة متعامدة حقيقية P تختزل A إلى الصيغة القطرية.

في الحقيقة، أنّ إيجاد المصفوفة المتعامدة P التي تحول مصفوفة حقيقية متناظرة A من المرتبة n إلى الصيغة القطرية أمراً ممكناً، ولكن يحتاج لحقائق إضافية خارج نطاق هذا الكتاب.

وعلى أية حال، سنكتفي هنا بتحديد المصفوفات المتعامدة الحقيقية P من أجل المصفوفات المتناظرة الحقيقية A ذات المرتبة الثانية والثالثة فقط.

أولاً:

إذا كانت A مصفوفة متناظرة مربعة 2×2 جذورها المميّزة λ_1, λ_2 مع اعتبار أن $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$، ولنفرض أن المتجهات الذاتية الموافقة لها V_1, V_2، وبالتالي فإنه وفقاً للتمهيدية $(3-7)$ يجب أن يكونا متعامدين.

لنرد المتجهات الذاتية المتعامدة V_1, V_2 إلى الصيغة الناظمية، ثم نأخذ المتجهات التي حصلنا عليها كأعمدة للمصفوفة غير شاذة P، وينبغي ملاحظة أن $P^T AP$ مصفوفة قطرية.

ثانياًً:

إذا كانت A مصفوفة متناظرة حقيقية مربعة 3×3 جذورها المميّزة المتمايزة $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. فنجد باتباع مناقشة مماثلة للحالة الأولى على متجهات متعامدة فيما بينها والناشئة عن الجذور $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. تُستخدم هذه المتجهات بعد ردّها إلى الصيغة الناظمية، كأعمدة للمصفوفة المتعامدة P المرغوبة وبحيث تكون $P^T AP$ قطرية.

ثالثاً:

إذا كانت A مصفوفة متناظرة حقيقية مربعة 3×3 وجذورها المميّزة λ,μ مع اعتبار أن $ord(\lambda)=1 \ , \ ord(\mu)=2$. ونهدف إلى إيجاد مصفوفة متعامدة P بحيث $P^T AP$ قطرية.

لنفرض أنه من أجل الجذر المميّز البسيط λ، لدينا المتجه الذاتي الموافق $U=(x_1,x_2,x_3)$

أما من أجل الجذر المميّز μ المضاعف مرتين، فإنه وفقاً للمبرهنة (1–14)، يجب أن تكون رتبة المصفوفة $A-\mu I$ تساوي الواحد. وبالتالي جملة المعادلات الخطية المتجانسة تؤول إلى معادلة خطية، ولنفرض أن $V=(y_1,y_2,y_3)$ متجهاً ذاتياً مغايراً للصفر موافقاً للجذر المميّز μ. وينبغي على القارئ رؤية أن المتجهين الذاتيين U,V متعامدان.

الآن، للحصول على المتجه الثالث $W=(z_1,z_2,z_3)$. نلحق بالمعادلة الخطية المذكورة المعادلة الإضافية:

$$y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3=0$$

وهكذا نحصل من المعادلتين الخطيتين المتجانستين الأخيرتين على متجه ذاتي وحيد متعامد مع المتجهين U,V.

وأخيراً، نرد المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية، ونستخدمها بالتالي كأعمدة للمصفوفة المتعامدة P التي تكون من أجلها $P^T AP$ مصفوفة قطرية.

تمرين (3–8):

إذا كانت A مصفوفة حقيقية متناظرة،

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^T AP$ قطرية.

الحل:

إن الدالة المميّزة لمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= -2(\lambda-2)^2 + (\lambda-2)^2(\lambda-6) = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

وبالتالي الجذور المميّزة لِـA هي: $\lambda = 2$ مضاعف، $\lambda = 8$ بسيط.

من أجل الجذر البسيط $\lambda = 8$، فإن المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$x + y - 2z = 0 \quad , \quad x - 2y + z = 0$$

ومجموعة الحلول عندئذ:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ،$$ (α ثابت اختياري)

وبالتالي نحصل على المتجه الوحيد $U = (1,1,1)$ الموافق للجذر البسيط $\lambda = 8$.

من أجل الجذر المميّز المضاعف $\lambda = 2$، أن المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تكافئ المعادلة الخطية المتجانسة:

$$x + y + z = 0 \qquad (1)$$

وبالتالي نحصل على متجه ذاتي $V = (-1,1,0)$ متعامد مع U.

من أجل الحصول على متجه ثانٍ متعامد مع V، نلحق بالمعادلة (1) المعادلة:

$$-x + y = 0 \qquad (2)$$

ومنه نرى أن $W = (-1,-1,2)$ متجه ذاتي متعامد مع كلٍ من V, W.

أخيراً، نردُّ المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية فنحصل على المصفوفة المتعامدة:

$$P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

التي تحقق المعادلة المصفوفية $P^T AP = diag(2,2,8)$ (تأكد من ذلك).

تمرين (3–9):

لتكن المصفوفة الحقيقية المتناظرة:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^T AP$ قطرية.

الحل:

إن الدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

والجذور المميّزة لِـA هي: $\lambda=-2$ مضاعف، $\lambda=4$ بسيط.

من أجل الجذر البسيط $\lambda=4$، فإن المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$x - 2y - 5z = 0 \quad , \quad y - 2z = 0$$

ومجموعة الحلول للجملة الخطية:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ، (α ثابت اختياري)

وبالتالي نحصل على المتجه الذاتي الوحيد $U = (1,-2,1)$ الموافق للجذر المميز $\lambda = 4$.

من أجل الجذر المكرر المضاعف $\lambda = -2$، فإن المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تكافئ المعادلة الخطية،

$$x - 2y + z = 0 \qquad (1)$$

ومجموعة الحلول:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ، (α, β ثوابت اختيارية)

وبالتجربة نجد أن $V=(1,1,1)$ هو متجه ذاتي متعامد مع U. وللحصول على متجه ثان متعامد مع V، نلحق بالمعادلة الأخيرة المعادلة التالية:

$$x+y+z=0 \qquad (2)$$

يتضح من (1) و (2) أنَّ $W=(1,0,-1)$ متجه متعامد مع V,W.

وأخيراً، نرد المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية فنحصل على المصفوفة المتعامدة:

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

التي تحقق المعادلة المصفوفية $P^T AP = diag(4,-2,-2)$.

4- اختزال مصفوفة مربعة إلى شكل مثلثي:

تعريف (4-1): المصفوفات المثلثية:

تدعى المصفوفة المربعة الموجودة عناصرها فوق (أو تحت) القطر الرئيسي أصفاراً **بالمصفوفة المثلثية.**

توضيح:

إن المصفوفة الواحدية والمصفوفة القطرية هما مصفوفتان مثلثيتان. كذلك المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 1+i & 5 & 0 \\ -2i & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ومن الملائم مع أنه غير ضروري أن نشير للمصفوفات التي تقع جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي (فوق القطر الرئيسي) أصفاراً، بالمصفوفة المثلثية من الأعلى (المثلثية من الأدنى).

تعريف (4−2):

يُقال عن المصفوفة المربعة A من المرتبة $n\times n$ إنها **مشابهة لمصفوفة مثلثية** $T_{n\times n}$، إذا أمكن إيجاد مصفوفة غير شاذة Q بحيث يكون $Q^{-1}AQ=T$.

ومن الطبيعي أن يتساءل القارئ عن طبيعة المصفوفات المشابهة لمصفوفات مثلثية.

رأينا أن عملية اختزال مصفوفة مربعة $A_{n\times n}$ إلى الصورة القطرية (تقطير مصفوفة) ليست ممكنة دوماً. فقد وجدنا أن الشرط اللازم والكافي لذلك هو أن تكون الدالة المميّزة لِـ A مفرقة على الحقل K وأن يكون:

$$\dim E_{\lambda_i} = ord(\lambda_i); \quad (i=1,2,...,n)$$

وبصورة مماثلة نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (4−3):

إن كل مصفوفة مربعة $A_{n\times n}$ على حقل K تكون مشابهة دوماً لمصفوفة مثلثية، إذا وفقط إذا كانت دالتها المميّزة مفرقة على الحقل K.

يقدم التمرين التالي شرحاً مفصلاً للمبرهنة السابقة.

تمرين (4-4):

لتكن المصفوفة الحقيقية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

هل A مشابهة لمصفوفة مثلثية (ثلوثة)، هل A مشابهة لمصفوفة قطرية (قطورة).

الحل:

إن الدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)^2+(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

وبما أن الدالة المميزة لِـA فروقة على R يتضح أن A ثلوثة.

من ناحية أخرى، إن الدالة المميّزة الصغرى لِـA هي:

$$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

وذلك بملاحظة أن $(A-I)(A-2I)\neq 0$ وهذا يعني أن المصفوفة A ليست قطورة.

تمرين (4–5):

لتكن المصفوفة $A\in M_3(K)$، حيث:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هل A مصفوفة ثلوثة (قطورة)، ناقش ذلك.

الحل:

إن الدالة المميّزة لـِ A هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

يُلاحظ أن الدالة المميّزة غير فروقة على R وبالتالي فهي ليست ثلوثة وليست قطورة. بينما أن الدالة المميّزة فروقة على C وذلك بملاحظة أن:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-i)(\lambda+i)$$

وبالتالي A ثلوثة، ويمكن للقارئ من جهة أخرى أن يبين أنها قطورة.

مبرهنة (4–6):

إن كل مصفوفة مربعة A من المرتبة n تشابه مصفوفة مثلثية تكون عناصر قطرها الرئيسي هي الجذور المميّزة لـِ A.

البرهان:

ليكن للمصفوفة A من المرتبة n الجذور المميّزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

بما أن λ_1 جذرٌ مميّزٌ لِـ A فيوجد عندئذ متّجه عمود $X \neq 0$ بحيث إن $AX = \lambda_1 X$ ونستخدم المتجه المذكور كأول عمود من مصفوفة غير شاذة Q_1، ويمكن ملء الأعمدة الباقية بعدة طرق بشرط أن يكون $|Q_1| \neq 0$.

وبالتالي يكون العمود الأول من AQ_1 هو بدقة المتجه $\lambda_1 X_1$ ومن السهل أن تبيّن أن العمود الأول من المصفوفة $Q_1^{-1}AQ_1$ هو $[\lambda_1, 0, 0, \ldots.., 0]$، أي أن:

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_1 & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

حيث تشير النجوم في الصف الأول إلى عناصر ليست بالضرورة جميعها أصفاراً، أما A_1 فهي مصفوفة من المرتبة $n-1$. وإذا لاحظنا أن:

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - Q_1^{-1}AQ_1| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$$

نستنتج أن الجذور المميزة للمصفوفة المربعة A_1 ذات الـ $(n-1)$ صفاً هي بالضبط $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ونكرر تماماً ما ذكر أعلاه، بالنسبة للمصفوفة المربعة A_1، فنحصل على مصفوفة من الشكل:

$$Q_2^{-1}A_1Q_2=\left[\begin{array}{c|cccc}\lambda_2 & * & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_2 & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

حيث A_2 مصفوفة من المرتبة $n-2$. وبصورة خاصة، ينبغي ملاحظة كحالة خاصة أنه إذا كان $n=3$ فإن $A_2=[\lambda_3]$. نكرر هذه الطريقة $(n-1)$ خطوة على الأكثر.

وإذا كتبنا:

$$Q=Q_1.\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix}.....\begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

نجد أن $Q^{-1}AQ$ مثلثية عناصر قطرها هي الجذور المميّزة لـِA.

إن برهان المبرهنة الأخيرة تقودنا إلى طريقة عملية للتثليث (ليست الوحيدة).

سنوضح هذه الطريقة من خلال التمرين التالي:

تمرين (4–7):

اختزل المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

إلى مصفوفة مثلثية T وأوجد المصفوفة Q بحيث يكون $T=Q^{-1}AQ$.

الحل:

إن الدالة المميّزة لِـ A هي $\Delta(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

وجذور المعادلة المميزة $\Delta(\lambda)=0$ هي $2,1,1$.

يوافق الجذر المميز البسيط 2 المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

التي تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$x+y-z=0 \quad , \quad 2y-z=0$$

وبالتالي نحصل على المتجه الذاتي $V_1=[1,1,2]$ الموافق للجذر المميز $\lambda=2$.

نستخدمه كأول عمود من مصفوفة غير شاذة Q_1 ويمكن بناء الأعمدة الباقية بطرق اختيارية شرط أن يكون $|Q_1|\neq 0$. فنجد:

$$Q_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبحسابات بسيطة، نرى أن:

$$Q_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_1^{-1}AQ_1=\left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & -4 \\ \hline 0 & -5 & 9 \\ 0 & -4 & 7 \end{array}\right]$$

إن A_1 هي مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية، ومن السهل أن نبيّن – وفقاً لما ورد في المبرهنة الأخيرة– أن الجذور المميّزة لِـ A هي $\lambda_2=1$ ، $\lambda_3=1$

لنأخذ الآن المصفوفة المستخلصة $A_2=\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$.

في الحقيقة، يوافق الجذر المميّز $\lambda_2=1$ المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

التي تؤول بسهولة إلى المعادلة الخطية الوحيدة:

$$2x - 3y = 0$$

وبالتالي نحصل على متجه ذاتي $V_2 = [3,2]$ الموافق للجذر المميّز $\lambda = 1$، وتماماً كما ورد أعلاه، نستخدم V_2 كأول عمود من مصفوفة Q_2. ويمكن ملء الأعمدة الباقية بحيث $|Q_2| \neq 0$، ولنعتبر:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وبحسابات بسيطة، نرى أن:

$$Q_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_2^{-1} A_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نبحث الآن عن المصفوفة Q التي تحول المصفوفة A إلى الصورة المثلثية من خلال المعادلة المصفوفية:

$$Q = Q_1 . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وفضلاً عن ذلك، نجد:

$$Q^{-1}AQ=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0&0\\-1&1&0\\-4&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&3&-4\\-6&-2&5\\4&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&3&0\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}21&9&-12\\-13&-5&9\\-4&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&3&0\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&-4\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=T$$

وبصورة مشابهة نبرهن:

مبرهنة (4–8):

إذا كانت A مصفوفة حقيقية مربعة $n\times n$، جذورها المميّزة حقيقية، فتوجد مصفوفة متعامدة حقيقية P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية وعناصر القطر الرئيسي هي الجذور المميزة لِـA.

البرهان:

ليكن للمصفوفة الحقيقية من المرتبة n الجذور المميّزة $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.

بما أن λ_1 جذر مميّز حقيقي لِـ A، وبالتالي يوجد متجه حقيقي $X_1\neq 0$ بحيث إن:

$$AX_1=\lambda_1 X_1$$

ونستخدمه كأول عمود من مصفوفة متعامدة حقيقية Q_1 ويمكن إقامة الأعمدة الباقية بطرق كثيرة شرط أن تكون Q_1 متعامدة، نُعيد بعد ذلك، أعمدة المصفوفة إلى الشكل الناظمي، فنحصل على المصفوفة المتعامدة المنظمة P_1، أي:

$$P_1^{-1}AP_1=\left[\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

حيث A_1 مصفوفة من المرتبة $(n-1)$ وجذورها المميّزة $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$.

بعد ذلك، ننطلق من Q_2 المصفوفة التي يتكون عمودها الأول من متجه ذاتي لِ A_1 يناظر الجذر المميّز λ_2، وتستخدم مرة أخرى طريقة غرام – شميدت للحصول على مصفوفة متعامدة منظمة P_2، أي:

$$P_2^{-1}A_1P_2=\left[\begin{array}{c|ccc}\lambda_2 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

حيث A_2 مصفوفة مربعة من المرتبة $(n-2)$ وجذورها المميزة $\lambda_3,\lambda_4,\ldots,\lambda_n$.

وبعد عدد كاف من الخطوات نحصل على المصفوفة المتعامدة:

$$P=P_1.\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\ldots\ldots\begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

والتي يكون لها $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميّزة لِـ A.

تمرين (4–9):

لتكن المصفوفة الحقيقية المربعة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

فأوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مثلثية عناصر قطرها الجذور المميّزة لـِA .

الحل:

إن الدالة المميّزة لـِ A هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4)-3(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$$

وبالتالي الجذور المميّزة لـِ A هي $1,1,5$.

يوافق الجذر المميز $\lambda=1$ الحلين المستقلين خطياً $(0,-1,2),(1,0,-1)$

نختار المتجه $V_1=(1,0,-1)$ ونشكل المصفوفة المتعامدة:

$Q_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، ونحول متجهات الأعمدة إلى الشكل الناظمي، فنجد:

$$P_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

ويمكن أن نبيّن من خلال حسابات سهلة أن:

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & \sqrt{2}\\ 0 & 2\sqrt{2} & 3\end{bmatrix}$$

إن الجذور المميّزة لـِ $A_1=\begin{bmatrix}3 & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 3\end{bmatrix}$ هي $1,5$، والمعادلة المصفوفية لـِ A_1 الموافقة لـ$\lambda_2=1$ تؤول إلى معادلة خطية وحيدة $2x+\sqrt{2}y=0$ وبالتالي نحصل على متجه ذاتي $V_2=(1,-\sqrt{2})$ موافق للجذر المميز $\lambda_2=1$ للمصفوفة A_1 نستخدمه كأول عمود من مصفوفة متعامدة حقيقية Q_2، ويمكن بناء العمود الثاني بحيث يكون عمودياً على الأول، أي أن:

$$Q_2=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{bmatrix} \quad , \quad P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

ومنه، إذا كتبنا:

$$P = P_1 . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

فنجد أنها متعامدة، أكثر من ذلك، تحقق:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

تاركين للقارئ متعة التحقق من ذلك.

5- المصفوفات الواحدية والناظمية:

تعريف (5-1):

يقال عن مصفوفة مربعة $U_{n\times n}$ تقع عناصرها في حقل الأعداد المركّبة إنها **واحدية** إذا كان معكوسها مساوياً لمرافق منقولها، أي إذا كان $U^* = U^{-1}$.

بتعبير مكافئ، تكون المصفوفة المربعة $U_{n\times n}$ واحدية إذا وفقط إذا تحقق:

$$U^*U = UU^* = I_n$$

توضيح:

إن المصفوفتين:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -i \\ -i\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

واحديتان (بيّن ذلك)، ومن السهل فضلاً عن ذلك، أن نتحقق من أن:

نتيجة (5–2)

إن جداء مصفوفتين واحديتين من المرتبة n يكون مصفوفة واحدية.

نتيجة (5–3):

إن المصفوفة المرافقة لمصفوفة واحدية تكون بدورها واحدية.

وإن منقول (مرافق منقول) مصفوفة واحدية يكون مصفوفة واحدية.

نتيجة (5–4):

إذا كانت U مصفوفة واحدية فإن $|\det U| = 1$

البرهان:

بما أن U واحدية فعندئذ يكون $UU^* = I$ ومنه نجد:

$$\det U . \det U^* = (\det U)(\overline{\det U}) = 1$$

وذلك استناداً إلى حقائق أرسيت في جبر المصفوفات تقول:

إن محدد مرافق مصفوفة مربعة عناصرها في حقل الأعداد المركبة يساوي مرافق المحدد، وأن محدد مصفوفة مربعة يساوي محدد منقولها.

يتضح مما سبق أن$|\det U| = 1$.

ويُبرهن وفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي:

مبرهنة (5–5):

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها من حقل الأعداد المركبة، فتوجد مصفوفة واحدية V بحيث تكون $V^* AV$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميّزة لِ A.

ومن الطبيعي أن يتساءل القارئ عن كيفية بناء المصفوفة الواحدية V.
لتكن $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ الجذور المميّزة لِ A. من أجل الجذر المميّز λ_1 يوجد متجه عمود $X = [x_1, x_2, ...x_n]$ بحيث إن $AX = \lambda_1 X$، ثم نرد هذا المتجه إلى الصيغة الناظمية ونستخدم المتجه الناتج كأول عمود من المصفوفة الواحدية.
ويمكن ملء الأعمدة الباقية وفقاً للحقيقة التالية:
تكون مصفوفة $U_{n \times n}$ واحدية إذا وفقط إذا كانت المتجهات الممثلة بأعمدتها متعامدة منظمة.
وعليه، كي يكون المتجه الثاني العمود متعامداً مع المتجه الأول يجب أن نختار حلاً حقيقياً $(y_1, y_2, ..., y_n)$ غير صفري بحيث يكون:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = 0$$

ثم نرد هذا الحل إلى الصيغة الناظمية ونستخدمه كعمود ثانٍ، ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة حتى نحصل على $(n-1)$ عموداً من المصفوفة الواحدية V. أما العمود الأخير فيتم تحديده من خلال $(n-1)$ من المعادلات الخطية المتجانسة، وهكذا يتم بناء مصفوفة واحدية V من المرتبة n التي تحقق فضلاً عن ذلك المعادلة المصفوفية:

$$V^*AV=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن الجذور المميّزة للمصفوفة المثلثية V^*AV هي العناصر القطرية $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ التي هي بالضبط الجذور المميّزة لِـA.

تمرين (5–6):

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2-i & 0 & i\\ 0 & 1+i & 0\\ i & 0 & 2-i\end{bmatrix}$$

فأوجد مصفوفة واحدية U بحيث تكون U^*AU مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميّزة لِـA.

الحل:

من السهل أن نبيّن أن الجذور لِـA هي $2,1+i,2-2i$.

إذا أخذنا الجذر المميز $\lambda=2$ نحصل على المتجه الذاتي الوحيد $(1,0,1)$، نرده مباشرةً إلى الصيغة الناظمية ونستخدمه كعمود أول في المصفوفة الواحدية المرغوبة.

وبالتجربة نجد أن $(-1,0,1)$ هو حل. وللحصول على حل ثالث متعامد مع الأول والثاني، نحل المعادلتين الخطيتين $x+z=0 \quad , \quad -x+z=0$

فنجد $(0,1,0)$ نرد المتجهين الأخيرين أيضاً إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة الواحدية، فنحصل على المصفوفة الواحدية:

$$V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$$

فمن السهل رؤية أن:

$$V^*AV=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-i & 0 & i\\ 0 & 1+i & 0\\ i & 0 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2}(i-1) & 0 & \sqrt{2}(1-i)\\ 0 & 1+i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2-2i & 0\\ 0 & 0 & 1+i\end{bmatrix}$$

تعريف (5–7): المصفوفات الناظمية:

نقول إن مصفوفة مربعة $A_{n\times n}$، عناصرها تقع في حقل الأعداد المركبة، إنها **مصفوفة ناظمية** إذا اتصفت بخاصية الإبدال مع مرافق منقولها، أي إذا كان $AA^* = A^* A$.

وعلى سبيل المثال، المصفوفة الهرميتية ناظمية لأنها تحقق العلاقة $AA^* = A^* A = A^2$. كذلك المصفوفة الواحدية ناظمية لأن $AA^* = A^* A = I$ والمصفوفة القطرية تحقق العلاقة $DD^* = D^* D$ فهي ناظمية.

تمرين (5–8):

إن المصفوفتين:

$$\begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

ناظميتان.

مبرهنة (5–9):

إذا كانت A مصفوفة ناظمية و U مصفوفة واحدية، فعندئذ تكون $B = U^* AU$ ناظمية.

البرهان:

في الواقع، لدينا:

$$\begin{aligned} B^* B &= U^* A^* U . U^* AU = U^* A^* AU \\ &= U^* AA^* U = U^* AUU^* A^* U = BB^* \end{aligned}$$

نتيجة $(5-10)$:

لتكن A مصفوفة ناظمية. إذا كان V متجهاً ذاتياً موافقاً للجذر المميّز λ فإن V متجه ذاتي موافق للجذر المميز $\bar{\lambda}$.

تمرين $(5-11)$:

احسب الجذور المميّزة والمتجهات المميّزة للمصفوفة الناظمية،

$$A=\begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

حدّد الجذور المميزة والمتجهات المميّزة لِ A^* وحقق صحة النتيجة الأخيرة.

الحل:

إن الدالة المميّزة لِA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -i \\ -i & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2+1$$

وبالتالي الجذور المميّزة لِ A تكون $\lambda=2\pm i$ ومن السهل رؤية أن المتجهات الذاتية المقابلة لها هي $(1,1),(1,-1)$.

من جهة أخرى، إن الدالة المميّزة لِ A^* تعطى بالصيغة $\Delta'(\lambda)=(\lambda-2-i)(\lambda-2+i)$ وبالتالي الجذور المميّزة لِ A^* تكون $\lambda=2\pm i$ والمتجهات الذاتية المقابلة هي على الترتيب $(1,1),(1,-1)$.

نلاحظ وفقاً للنتائج المذكورة آنفاً، أن $v=(1,1)$ متجه ذاتي لِ A مقابل الجذر المميّز $\lambda_1=2+i$ وهو أيضاً متجه ذاتي لِ A^* مقابل للجذر المميّز $\overline{\lambda_1}=2-i$. كذلك، فإن $(1,-1)$ متجه ذاتي لِ A مقابل للجذر المميّز $\lambda_2=2-i$ وهو أيضاً متجه ذاتي لِ A^* مقابل للجذر المميّز $\overline{\lambda_2}=2+i$.

مبرهنة (5–12):

لتكن $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة عناصرها من حقل الأعداد المركبة. فعندئذ تكون A ناظمية إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة واحدية U بحيث إن U^*AU قطرية.

توضيح:

إن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

الواردة في المثال (5–6) ناظمية.

في الحقيقة، من الواضح أن:

$$U^*=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة 3×3 واحدية. وفضلاً عن ذلك، نرى أن:

$$U^*AU=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

6- مصفوفات جوردان (Jordan) القانونية:

نعلم أنه تكون مصفوفة مربعة $A_{n\times n}$ مشابهة لمصفوفة قطرية إذا وفقط إذا كان لها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً. فعندئذ توجد مصفوفة غير شاذة P أعمدتها متجهات ذاتية مستقلة خطياً لِ A بحيث إن $P^{-1}AP = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$.

إن مجموعة كل المصفوفات $P^{-1}AP$ تؤلف فصلاً من المصفوفات المشابهة قطرياً لِ A.

ومن الطبيعي أن يتبادر إلى ذهن القارئ السؤال التالي:
إذا لم تكن للمصفوفة $A_{n\times n}$ عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً، فهل يمكن تحويل المصفوفة A إلى شكل بسيط.

في الحقيقة، يوجد صنف خاص وهام من المصفوفات المشابهة لِ A تكون أبسط من حيث تركيبها من المصفوفات الأخرى وتُعرف هذه المصفوفات بِ **مصفوفات جوردان القانونية** لِ A.

تعريف (6-1): مصفوفات جوردان القانونية لمصفوفة مربعة:
لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$ عناصرها من حقل K، ولنفرض أن لِ A جذور مميّزة متميّزة $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ مكررة $n_1, n_2, ..., n_s$ على الترتيب. تعرف **مصفوفة جوردان القانونية** J لِ A بأنها مصفوفة تحوي قوالب على طول القطر، أي:

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix}$$

حيث J_i مصفوفة مربعة $n_i \times n_i$ تحوي λ_i في كل مكان من القطر الرئيسي و 1 في القطر العلوي الأول وأصفار فيما عدا ذلك، وتكتب بالشكل:

$$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (n_i>1)$$

بينما إذا كان $n_i=1$ نحصل على العنصر القطري $J_i=(\lambda_i)$. وكمسألة رموز، سندعو المصفوفة المذكورة أعلاه J والتي تتألف من قوالب قطرية منفصلة تماماً عن بعضها $J_1, J_2, ..., J_s$ بالمجموع المباشر للمصفوفات J_i وسنكتب:

$$J=J_1 \dotplus J_2 \dotplus ... \dotplus J_s$$

يجدر بنا الإشارة إلى القارئ أن أية مصفوفة قطرية هي مصفوفة جوردان القانونية.

مثال (6–2):

$$J=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{5}&\cdot&&\cdot\\\cdot&\boxed{5}&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\boxed{-1}&\cdot\\\cdot&&\cdot&\boxed{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$$

تمرين (6–3):

إن مصفوفة جوردان القانونية لمصفوفة $A_{5\times5}$ هي:

$$J=\left[\begin{array}{cc:ccc}5&1&&&\\0&5&&&\\\hdashline&&0&1&0\\&&0&0&1\\&&0&0&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}J_1&0\\0&J_2\end{bmatrix}$$

حيث العناصر خارج القوالب القطرية هي أصفار، يُلاحظ أن الجذر المميَّز 0 مكرر ثلاث مرات وعدد قوالب جوردان الموافقة للصفر قالب واحد.

وكتوضيح ثانٍ، لنأخذ مصفوفة جوردان القانونية للمصفوفة $A_{5\times5}$ التالية:

$$J=\left[\begin{array}{ccc|c|cc} -2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -2 & & & \\ \hline & & & -2 & & \\ \hline & & & & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 4 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} J_1 & & \square \\ & J_2 & \\ \square & & J_3 \end{bmatrix}$$

يُلاحظ أن الجذر المميَّز $\lambda=-2$ مكرر أربع مرات وعدد قوالب جوردان الموافقة له هو قالبان فقط.

ملاحظة:

يجدر بنا تنبيه القارئ إلى أن معرفتنا لعدد مرات تكرار جذر مميَّز معين لا يُمكننا معرفة عدد قوالب جوردان وتعداد كل قالب، وهذا ما يجعلنا ندقق في الأمر في حالة جذور مميَّزة.

وعلى أية حال، إن إيجاد عدد قوالب جوردان الموافقة لجذر مميّز λ مكرر k مرة وإيجاد تعددية كل قالب، فيتم وفق الخطوات التالية:

أولاً: نبحث عن رتب المصفوفات:

$$(\lambda I-A),(\lambda I-A)^2,.....,(\lambda I-A)^k$$

التي نرمز لها على الترتيب بـِ $R_1,R_2,...,R_k$.

ثانياً : نوجد عدد قوالب جوردان من المرتبة الأولى الموافقة للجذر المميَّز λ بموجب العلاقة: $b_1=n-2R_1+R_2$ كذلك نوجد عدد قوالب جوردان من المرتبة m الموافقة للجذر λ استناداً للعلاقة:

$$b_m=R_{m+1}-2R_m+R_{m-1} \qquad ;m\geq 2$$

ثالثاً : نكرر الخطوتين السابقتين من أجل كل جذر مميز مكرر آخر للمعادلة المميَّزة لِـA ثم نكتب مصفوفة جوردان القانونية J التي تؤول إليها المصفوفة A.

تمرين (6–4):

أوجد مصفوفة جوردان القانونية الموافقة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

الحل:

الدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-\lambda&-\lambda&\lambda(\lambda-2)\\0&\lambda&0&-\lambda\\0&0&\lambda&-\lambda\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3\begin{vmatrix}-1&-1&\lambda-2\\1&0&-1\\0&1&-1\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-4)$$

ولهذه المصفوفة جذر مميّز مكرر $\lambda=0$ وجذر مميّز بسيط $\lambda=4$،

لحساب تعددية قوالب جوردان الموافقة للجذر المميّز $\lambda=0$.

في الواقع، من السهل أن نرى وفقاً للطريقة التي ناقشناها لتوّنا أن رتب المصفوفات A, A^2, A^3 هي، على وجه الدقة:

$$R_1 = rank(A) = 1$$

$$R_2 = rank\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

$$R_3 = rank\begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = 1$$

وعليه، يكون:

$$b_1 = n - R_1 + R_2 = 3$$

$$b_2 = R_3 - 2R_2 + R_1 = 0$$

ومنه هناك ثلاثة قوالب لجوردان من المرتبة الأولى موافقة للجذر المميّز $\lambda = 0$ وبالتالي مصفوفة جوردان القانونية الموافقة لـِA تأخذ الشكل:

$$J=\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{bmatrix}$$

تمرين (6–5):

أوجد مصفوفة جوردان القانونية الموافقة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

المعادلة المميَّزة لِـA هي: $0=(\lambda-5)(\lambda-1)^2$ وجذورها $1,5$.

لحساب أبعاد قوالب جوردان الموافقة للجذر المميّز المضاعف $\lambda=1$

من الواضح قبل كل شيء أن:

$$R_1=rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}=1$$

$$R_2=rank\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}=1 \quad ; \quad R_3=R_4=....=1$$

وبالتالي فإن:

$$b_1=2 \quad , \quad b_2=0 \quad , \quad ....$$

وهكذا فإنه يوجد قالبان من المرتبة الأولى، وعليه فإن مصفوفة جوردان القانونية لِـA تعطى بالصيغة:

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

فرضنا حتى الآن أن لِـ A على الأقل جذرين مميّزين مختلفين: لنورد الحالة الخاصة التالية:

نتيجة (6–6):

إذا كان لِـ A جذر مميّز وحيد α، بحيث الدالة المميّزة المختزلة لِـ A من النمط $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)^n$. فمصفوفة جوردان القانونية لِـA عندئذ تأخذ الشكل:

$$J=\begin{bmatrix}\alpha&1&0&\cdots&0&0\\ &\ddots&\ddots&\ddots&&\\0&\alpha&1&\cdots&0&0\\ &&\ddots&\ddots&&\\0&0&\alpha&&0&0\\ &&&\ddots&&\\ &&&&\ddots&\ddots\\0&0&0&\cdots&\alpha&1\\ &&&&&\ddots\\0&0&0&\cdots&0&\alpha\end{bmatrix}$$

توضيح:

أوجد مصفوفة جوردان القانونية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-3\\0&1&3\end{bmatrix}$$

في الحقيقة أن المعادلة المميّزة لِ A هي $(\lambda-1)^3=0$ وبالتالي $\lambda=1$ جذر مميّز مكرر ثلاث مرات. من ناحية ثانية، وإذا لاحظنا أن $(I-A)^2\neq 0$ يتضح على الفور، أن الدالة المميّزة المختزلة لِ A تعطى بالصيغة $m(\lambda)=(\lambda-1)^3$.

وبالتالي بموجب النتيجة الواردة أعلاه، نجد أن مصفوفة جوردان القانونية لِ A هي:

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

حالة خاصة:

إذا كانت الجذور المميزة المتميّزة للمصفوفة المربعة $A_{n\times n}$ هي $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ عندئذ تختصر مصفوفة جوردان القانونية إلى مصفوفة تكون القوالب القطرية فيها هي عناصر 1×1، أي إلى مصفوفة قطرية. إذن، فإن مصفوفة جوردان القانونية لِ A تكتب بالصيغة $J=diag(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n)$.

شكل جوردان لمصفوفات مربعة من المرتبة الثانية والثالثة:

لتكن A مصفوفة مربعة 2×2 جذورها المميّزة λ,μ. فعندئذ تنشأ حالتان:

- إذا كان $\lambda\neq\mu$، تؤول مصفوفة جوردان القانونية في هذه الحالة إلى الشكل: $\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{bmatrix}$

- إذا كان $\mu = \lambda$، تؤول مصفوفة جوردان القانونية إلى أحد الشكلين:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$ ، (نترك البرهان للقارئ)

لنفرض الآن أن A مصفوفة مربعة 3×3 جذورها المميّزة λ, μ, w فعندئذ نميز ما يلي:

1- إذا كان λ, μ, w مختلفة مثنى مثنى، فإن مصفوفة جوردان لِ A تؤول إلى:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix}$$

2- إذا كان $\lambda = \mu \neq w$، فإن مصفوفة جوردان القانونية لِ A في هذه الحالة تؤول إلى أحد الشكلين:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix} \quad or \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix}$$

3- إذا كان $\lambda = \mu = w$، فعندئذ مصفوفة جوردان القانونية الموافقة لِ A تؤول إلى أحد الأشكال:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

7- اختزال مصفوفة مربعة إلى صيغة جوردان القانونية:

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ جذورها المميّزة $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$، ليست مختلفة بالضرورة.

أولاً: إذا كانت الجذور المميّزة $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ متميّزة، فعندئذ وفقاً للمناقشة التي استخدمت في الفقرة الأخيرة، تختصر مصفوفة جوردان القانونية إلى مصفوفة تكون القوالب القطرية فيها هي عناصر 1×1، أي إلى مصفوفة قطرية من الشكل:

$$J = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

وفضلاً عن ذلك، إن A تمتلك n من المتجهات المميّزة (الذاتية) المستقلة خطياً، $v_1, v_2, ..., v_n$ الناشئة عن الجذور $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ على الترتيب.

وبالتالي، فإنها تكون وفقاً للمبرهنة $(1-10)$، مشابهة لمصفوفة قطرية، وهذا يعني وجود مصفوفة غير شاذة M أعمدتها متجهات ذاتية لِـ A وبحيث $M^{-1}AM = J$.

ثانياً: لنفرض أن λ_i جذر مميّز لِـA مضاعف m مرة. فتنشأ حالتين:

<u>حالة (1)</u>: إذا نشأ عن الجذر المميّز المضاعف λ_i، مجموعة m من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً، فعندئذ تكون A في هذه الحالة مشابهة لمصفوفة قطرية وأكثر من ذلك، المصفوفة M التي أعمدتها المتجهات الذاتية المستقلة خطياً تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية.

<u>حالة (2)</u>: إذا لم ينشأ عن الجذر المميّز λ_i مجموعة m من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً، في هذه الحالة، تُختزل المصفوفة المربعة A إلى مصفوفة جوردان القانونية، وليس إلى المصفوفة القطرية.

في هذه الفقرة، سنعطي طريقة لإختزال مصفوفة مربعة A إلى مصفوفة جوردان القانونية (الاختزال الجورداني لِ A) وبتعبير مكافئ، سنسعى إلى إيجاد مصفوفة غير شاذة M مؤلفة من n من المتجهات المستقلة خطياً (بعضها متجهات ذاتية لِA)، وبحيث تكون $M^{-1}AM$ مصفوفة جوردان القانونية الموافقة لِA.

في الحقيقة أن مصفوفة التحويل M المكونة من n من المتجهات المستقلة خطياً، نحصل عليها وفقاً لطبيعة مصفوفة جوردان القانونية J الموافقة لِA، كما يلي:

1 - إذا كان قالب جوردان الموافق للجذر المميّز λ_i من المرتبة k فعندئذ، تعطى المتجهات المستقلة خطياً $v_1, v_2, \ldots, v_k$ بالعلاقات:

$$(A-\lambda I)v_1 = 0$$
$$(A-\lambda I)v_2 = v_1$$
$$(A-\lambda I)v_3 = v_2$$
$$\vdots$$
$$(A-\lambda I)v_k = v_{k-1}$$

2 - إذا كان قالب جوردان الموافق للجذر المميّز λ من المرتبة 1×1، فعندئذ نحصل على متجه ذاتي وحيد v موافق للجذر λ وفقاً للعلاقة $Av = \lambda v$.

وهكذا نرتب جميع المتجهات التي حصلنا عليها للحصول على المصفوفة M.

تمرين (7–1):

اختزل المصفوفة المربعة A إلى مصفوفة جوردان القانونية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن المعادلة المميّزة لِ A هي $(\lambda-1)^3=0$، وبالعودة إلى التوضيح الوارد في الفقرة السابقة، نرى أن مصفوفة جوردان القانونية لِA تتألف من قالب واحد موافق للجذر $\lambda=1$ من المرتبة 3×3 أي:

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

من ناحية ثانية، إن مصفوفة التحويل M التي ترد المصفوفة A إلى مصفوفة جوردان القانونية – وفقاً لما ورد أعلاه– مؤلفة من المتجهات المستقلة خطياً V_1,V_2,V_3 والتي تحقق المعادلات:

$$(A-I)v_1=0 \qquad (1)$$

$$(A-I)v_2=v_1 \qquad (2)$$

$$(A-I)v_3=v_2 \qquad (3)$$

في الواقع أن المعادلة الأولى تكتب بلغة المصفوفات كما يلي:

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&-3\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

والتي تؤول إلى المعادلتين الخطيتين $y+2z=0 \quad , \quad x-z=0$

وبالتالي نجد $V_1=[1,-2,1]$، نعوض الآن V_1 في المعادلة (2)، فنحصل من جديد على المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&-3\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

التي تؤول إلى المعادلتين الخطيتين $y+2z=1 \quad , \quad x-z=-1$

وبالتالي نجد $V_2=[-1,1,0]$. وباتباع سلوك مماثل، نحصل على المتجهات المستقلة خطياً:

$$V_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \quad , \quad V_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \quad , \quad V_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

وتأخذ المصفوفة M الشكل:

$$M=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

من ناحية أخرى، من السهل على القارئ تبيان أن:

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

أيضاً، من السهل التحقق من أن:

$$M^{-1}.A.M=J$$

وهكذا، تم اختزال المصفوفة A إلى مصفوفة جوردان القانونية J.

تمارين محلولة:

تمرين (1):

أوجد مصفوفة جوردان القانونية ومصفوفة التحويل M للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن الدالة المميّزة لـِA هي:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2-4\lambda+3)+4(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

وجذور المعادلة المميّزة $\Delta(\lambda)=0$ هي $1,-1,2$.

إيجاد مصفوفة جوردان القانونية لـِA.

نحدد أبعاد قوالب جوردان الموافقة للجذر المضاعف $\lambda=2$،

في الواقع، من السهل على القارئ تبيان أن:

$$R_1=rank(A-2I)$$

$$=rank\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}=3=rank\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2=rank(A-2I)^2$$

$$=rank\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=2=rank\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = rank(A-2I)^3$$

$$= rank\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 = rank\begin{bmatrix} -8 & 4 & -8 & 4 \\ 12 & -12 & 12 & -12 \\ -6 & 9 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$b_1 = n - 2R_1 + R_2 = 0$$
$$b_2 = R_3 - 2R_2 + R_1 = 1$$
$$b_3 = R_4 - 2R_3 + R_2 = 0$$

ومنه يوجد قالب واحد لجوردان من المرتبة الثانية موافق للجذر المميز $\lambda = 2$.

وتكتب مصفوفة جوردان القانونية الموافقة بالشكل:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

- **إيجاد مصفوفة التحويل M:**

في الحقيقة، من السهل رؤية، أن المتجه $U = [4,0,-3,1]$ هو المتجه الذاتي الوحيد الموافق لقالب جوردان من المرتبة 1×1 الناشئ عن الجذر المميّز البسيط $\lambda = 1$ ، وأن المتجه $V = [-4,8,-5,1]$ هو أيضاً المتجه الذاتي الوحيد

الموافق لقالب جوردان من المرتبة 1×1 الناشئ عن الجذر المميز البسيط $\lambda=-1$.

الآن، من أجل قالب جوردان من المرتبة الثانية الناشئ عن الجذر المضاعف $\lambda=2$، يتم الحصول على المتجهات المستقلة خطياً $W=[x,y,z,t]$، $W'=[x',y',z',t']$ من المعادلات المصفوفية:

$$(A-2I)W=0 \quad , \quad (A-2I)W'=W$$

من السهل على القارئ أن يبين أولاً وفقاً للتحويلات الأولية على المصفوفات بأن المعادلة المصفوفية الأولى تؤول إلى جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad -2t &= 0 \\ y \quad +t &= 0 \\ z \quad +2t &= 0 \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن $W=[2,-1,-2,1]$.

بصورة مماثلة تماماً، على القارئ رؤية أن المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تؤول إلى جملة من المعادلات الخطية، وبالتالي نرى أن $W'=[-1,0,1,0]$.

ينبغي ملاحظة أن المتجهين W,W' مستقلان خطياً، وأن مصفوفة التحويل M تأخذ الصورة:

$$M=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4 & -4\\ -1 & 0 & 0 & 8\\ -2 & 1 & -3 & -5\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

وتماماً كما سبق آنفاً نبيّن بسهولة أن:

$$M^{-1}=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}8 & 10 & 8 & -8\\ -6 & -12 & -24 & -48\\ -9 & -9 & -9 & -9\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

وفضلاً على ذلك، بحسابات بسيطة نرى أن:

$$M^{-1}.A.M=$$

$$=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}8 & 10 & 8 & -8\\ -6 & -12 & -24 & -48\\ -9 & -9 & -9 & -9\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 4 & -4\\ -1 & 0 & 0 & 8\\ -2 & 1 & -3 & -5\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}10 & 8 & -8 & -64\\ -12 & -24 & -48 & -96\\ -9 & -9 & -9 & -9\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 4 & -4\\ -1 & 0 & 0 & 8\\ -2 & 1 & -3 & -5\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -36 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} = J$$

تمرين (2):

لتكن المصفوفة:

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

1 –بين أن المصفوفة M تمتلك أربعة جذور مميّزة مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ وبحيث $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4$. ثم حدّد المتجهات الذاتية الموافقة لها.

2 –حدّد فيما إذا كانت المصفوفة M مشابهة لمصفوفة قطرية D، أوجد P بحيث تكون $P^{-1}MP$ قطرية (وذلك في حال وجود P).

3 –أثبت صحة المعادلة المصفوفية:

$$M^n = \lambda_1^n M_1 + \lambda_2^n M_2 + \lambda_3^n M_3 + \lambda_4^n M_4 \qquad (\forall n \in N)$$

حيث M_1, M_2, M_3, M_4 مصفوفات مستقلة عن n.

4 –احسب M^0.

الحل:

1– إن الدالة المميَّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -4 \\ 12 & \lambda + 7 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda + 6 & 12 \\ -6 & \lambda - 11 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

وبالتالي الجذور المميّزة لِـA هي:

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = 2 \quad , \quad \lambda_4 = 3$$

المتجهات الذاتية الناشئة عن الجذور المميّزة.

في الحقيقة، إذا كان $V = (x, y, z, t)$ متجهاً ذاتياً موافقاً للجذر المميّز λ فعندئذ نجد $MV = \lambda V$.

من أجل الجذر المميّز $\lambda = -1$، فالمعادلة المصفوفية $MV = -V$ تؤول إلى جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{array}{lllll} 2x & +y & & & = 0 \\ 20x & +11y & -5z & -12t & = 0 \\ 2x & +y & -z & -2t & = 0 \end{array}$$

وبالتالي نجد أن $V_1 = (1, -2, 2, -1)$ متجهاً ذاتياً موافقاً لِـ$\lambda = -1$.

أيضاً، من أجل الجذر المميّز $\lambda = 1$، نحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{array}{lllll} 3x & +2y & & & = 0 \\ 20x & +11y & -7z & -12t & = 0 \\ 6x & +3y & -3z & -5t & = 0 \end{array}$$

ومنه نجد أن $V_2 = (2, -3, 1, 0)$ متجه ذاتي موافق للجذر المميّز $\lambda = 1$.

وبصورة مماثلة، من أجل الجذر المميّز $\lambda = 2$ فإن المعادلة المصفوفية $MV = 2V$ تكافئ جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{array}{lllll} 5x & +4y & & & = 0 \\ 12x & +9y & & & = 0 \\ 20x & +11y & -8z & -12t & = 0 \end{array}$$

وعليه فإن $V_3=(0,0,3,-2)$ هو متجه ذاتي موافق للجذر المميز $\lambda=2$، كما تبين بعض الحسابات السهلة.

وأخيراً، بالحل المشترك لجملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{aligned} x \quad +y \quad\quad\quad\quad\quad &= 0 \\ 6x \quad +5y \quad\quad\quad\quad\quad &= 0 \\ 20x \quad +11y \quad -9z \quad -12t &= 0 \end{aligned}$$

نحصل على المتجه الذاتي $V_4=(0,0,4,-3)$ الموافق للجذر المميّز $\lambda=3$ والذي يحقق المعادلة المصفوفية $AV=3V$.

2- في الحقيقة أن المصفوفة M قطورة، وذلك وفقاً للمبرهنة (1-9)، وبالتالي هناك مصفوفة غير شاذة P أعمدتها هي المتجهات الذاتية للمصفوفة M وبحيث $P^{-1}MP=D$.

أي:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

3- في الحقيقة، لدينا $M^n=PD^nP^{-1}$ وذلك $\forall n\in Z$ ومنه نجد:

$$M^n=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 2^n & \\ 0 & & & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

فمن السهل على القارئ أن يرى أن:

$$M^n = \begin{bmatrix} -3(-1)^n + 4 & -2(-1)^n + 2 & 0 & 0 \\ 6(-1)^n - 6 & 4(-1)^n - 3 & 0 & 0 \\ -6(-1)^n + 2 + 4.3^n & -4(-1)^n + 1 + 3.2^n & 9.2^n - 8.3^n & 12.2^n - 12.3^n \\ 3(-1)^n - 3.3^n & 2(-1)^n - 2.2^n & -6.2^n + 6.3^n & -8.2^n + 9.3^n \end{bmatrix}$$

وإذا وضعنا:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{bmatrix} \quad , \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & -12 \\ -3 & 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

يتضح مباشرةً أن:

$$M^n = (-1)^n M_1 + M_2 + 2^n M_3 + 3^n M_4$$

4− وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $n = 0$ نجد:

$$M^0 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = I$$

تمرين (3):

إذا كانت A مصفوفة متناظرة حقيقية،

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

فأوجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث تكون $P^T AP$ قطرية.

الحل:

الخطوة الأولى: من السهل على القارئ وبحسابات بسيطة أن يرى أن الدالة المميّزة لِـA،

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-7 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-7 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-10 \end{vmatrix}=(\lambda-12)(\lambda-6)^2$$

فالجذور المميّزة لِـA تكون $12,6,6$.

من أجل الجذر المميّز المضاعف $\lambda=6$، فإن المعادلة المصفوفية:

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=6\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تؤول إلى معادلة خطية وحيدة $x-y-2z=0$ وبالتالي نحصل على الحلين المستقلين خطياً: $[1,1,0]$, $[0,2,-1]$

ويوافق الجذر المميّز البسيط $\lambda=12$ المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$\begin{aligned} x \quad +y \qquad &=0 \\ x \quad -y \quad +z &=0 \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن $[-1,1,2]$ متجه ذاتي موافق للجذر المميّز $\lambda=12$.

الخطوة الثانية: إن المتجهات الذاتية الثلاث:

$$V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ليست متعامدة مثنى مثنى، فيجب إخضاع بعض الأعمدة إلى معادلات. لنطبق التحويل الإضافي:

$$W = V_3 - \frac{y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} V_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وعليه نجد أن V_1, V_2, W متجهات متعامدة مثنى مثنى.

<u>الخطوة الثالثة</u> : نرد المتجهات الثلاثة المذكورة إلى الشكل الناظمي ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة P، أي:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ويمكن للقارئ أن يبيّن من خلال حسابات سهلة أن المصفوفة المتعامدة P تحقق المعادلة:

$$P^T A P = diag(12, 6, 6)$$

تمرين (4):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad a\in R^*$$

بيّن أن A مشابهة لمصفوفة قطرية D، ثم أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P^{-1}AP=D$.

أثبت أن $A^n=3^{n-1}A$ وذلك مهما يكن $n\in N^*$.

الحل:

وجدنا سابقاً أن الدالة المميّزة لِ A هي $\Delta(\lambda)=\lambda^2(\lambda-3)$ فيوجد عندئذ جذر بسيط $\lambda=3$ وجذر مميّز مكرر $\lambda=0$.

من أجل الجذر البسيط $\lambda=3$، فإن المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$\begin{aligned} x \quad -a^2z &= 0 \\ y \quad -az &= 0 \end{aligned}$$

وبالتالي نجد:

$$V=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}a^2\\a\\1\end{bmatrix}$$

والفضاء الذاتي الناشئ عن الجذر المميّز البسيط $\lambda=3$ هو:

$$E_{\lambda=3}=\{\alpha(a^2,a,1):\alpha\in R\}$$

أما من أجل الجذر المميّز المكرر $\lambda=0$، فالمعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ \frac{1}{a} & 1 & a\\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$$

تؤول إلى معادلة خطية وحيدة $x+ay+a^2z=0$ وبالتالي نجد:

$$V=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\alpha'\begin{bmatrix}-a\\1\\0\end{bmatrix}+\beta'\begin{bmatrix}-a^2\\0\\1\end{bmatrix}$$

والفضاء الذاتي الناشئ عن الجذر المميّز $\lambda=0$ هو:

$$E_{\lambda=0}=\{\alpha'(-a,1,0)+\beta'(-a^2,0,1):\alpha,\beta\in R\}$$

إن المتجهات الذاتية مستقلة خطياً، وبملاحظة أن:

$$\dim E_{\lambda=0} = ord(\lambda=0) \quad , \quad \dim E_{\lambda=3} = ord(\lambda=3)$$

يتضح أن المصفوفة A مشابهة لمصفوفة قطرية.

وبالتالي هناك مصفوفة غير شاذة P أعمدتها هي المتجهات الذاتية لِـA، أي:

$$P = \begin{bmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{3a^2}\begin{bmatrix} -a & 2a^2 & -a^3 \\ -1 & -a & 2a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

وبالإضافة لذلك، لدينا:

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3a^2}\begin{bmatrix} -a & 2a^2 & -a^3 \\ -1 & -a & 2a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

لدينا $P^{-1}AP = D$ أي $A = PDP^{-1}$

وباستقراء بسيط نرى أن $A^n = PD^nP^{-1}$

وبملاحظة أن:

$$D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} = 3^{n-1}D$$

يكون:

$$A^n = 3^{n-1}PDP^{-1} = 3^{n-1}A$$

تمرينات الفصل

1- حدّد فيما إذا كانت كل من المصفوفات A التالية مشابهة لمصفوفة قطرية (قابلة للاختزال إلى الشكل القطري)، واحسب C بحيث تكون $C^{-1}AC$ قطرية وذلك في حال وجود C.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 5\\ -1 & -4 & -5\end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

2- برهن أن للمصفوفتين:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & -2 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

الجذور المميّزة نفسها، ولكنهما غير متشابهتين.

3- بيّن بواسطة مثال، أنه لا يكفي أن يكون لمصفوفتين مربعتين A, B الدالة المميّزة ذاتها كي يكونا متشابهتين.

4- برهن أن المصفوفة الحقيقية $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ مشابهة لمصفوفة قطرية D

وأوجد المصفوفة المحوّلة P بحيث إن $P^{-1}AP = D$ واستنتج A^n .

5- أوجد الجذور المميّزة والفضاءات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(R)$$

هل A مشابهة لمصفوفة قطرية.

6- من أجل كل من المصفوفات المتناظرة الحقيقية A التالية، أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7- عين المصفوفة المثلثية T المشابهة للمصفوفة المربعة:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8- برهن أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

غير مشابهة لمصفوفة قطرية. اختزلها إلى الشكل المثلثي، وأوجد المصفوفة P التي تحقق $P^{-1}AP=T$.

9- برهن أن كلاً من المصفوفات التالية واحدية:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & i & 1-i\\ i\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\\ 1 & i & -1+i\end{bmatrix} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}2 & -i\\ -i & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

10- اختزل عمودياً المصفوفة المتناظرة الحقيقية:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

وحقق صحة العلاقة $P^{T}AP=D$.

11- إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -i\\ -i\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ i & 0 & 3\end{bmatrix}$$

فأوجد مصفوفة واحدية U بحيث يكون U^*AU مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميّزة لـِ A.

12- أوجد مصفوفة واحدية U بحيث تكون $U^{-1}AU$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميّزة لـِ A علماً بأن:

$$A=\begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

13- لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 14 & -8 & 7 \\ 18 & -11 & 11 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) بين أن الدالة المميّزة لـِ A تعطى بالصيغة $\Delta(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)^2$.

(2) أثبت أن A غير قابلة للاختزال إلى الشكل القطري.

(3) أوجد مصفوفة جوردان القانونية J الموافقة لـِ A.

(4) اختزل المصفوفة A إلى صيغة جوردان القانونية، أي أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث إن $P^{-1}AP=J$.

14- اختزل المصفوفة A التالية إلى صيغة جوردان القانونية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

15- أوجد مصفوفة غير شاذة Q بحيث تكون المصفوفة $Q^{-1}AQ$ مثلثية علماً بأن:

$$A=\begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

16- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية وغير شاذة فإن A^{-1} تكون كذلك.

17- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن A تكون مشابهة لـ A^T.

18- أوجد مصفوفة جوردان الموافقة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

19- أوجد مصفوفة جوردان القانونية ومصفوفة التحويل M لكل من المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

20− احسب A^n علماً بأن:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶

الفصل الثالث

الصيغ ثنائية الخطية والتربيعية

Bilinear and Quadratic forms

1- الأشكال ثنائية الخطية:

تعريف (1-1):

ليكن E فضاء متجهات ذا بعد منته على حقل K. يُعرف **الشكل ثنائي الخطية** على E بأنه تطبيق $f : E \times E \to K$ يحقق الشرطين التاليين:

$$(i) \quad f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u,w) + \beta f(v,w)$$

$$(ii) \quad f(u', \alpha v' + \beta w') = \alpha f(u',v') + \beta f(u',w')$$

وذلك أياً كانت u, v, w, u', v', w' عناصر من E ومهما يكن α, β من K.

الشرط (i) يعني أن f خطي بالنسبة للمتغير الأول، كما يعبر الشرط (ii) عن أن f خطي بالنسبة للمتغير الثاني.

توضيح:

نعرف على فضاء المتجهات $E = R^n$ التطبيق $f : R^n \to R$ كما يلي:

$$f(u,v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

حيث $u=(x_1,x_2,...,x_n), v=(y_1,y_2,...,y_n)$ فعندئذ يكون f شكلاً ثنائي الخطية على E ندعوه بالجداء الداخلي على R^n ويُرمز له بِـ$\langle u,v\rangle$.

ليكن f شكلاً ثنائيَّ الخطية على فضاء المتجهات E ذا بعد منته n، ولتكن $B=\{e_1,e_2,....,e_n\}$ قاعدة لِـE ولنفرض أن $u,v\in E$ فعندئذ:

$$u=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+....+\alpha_ne_n \quad , \quad v=\beta_1e_1+\beta_2e_2+....+\beta_ne_n$$

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+....+\alpha_ne_n, \beta_1e_1+\beta_2e_2+....+\beta_ne_n) \\ &= \alpha_1\beta_1 f(e_1,e_1)+\alpha_1\beta_2 f(e_1,e_2)+....+\alpha_1\beta_n f(e_1,e_n)+ \\ &\quad +\alpha_2\beta_1 f(e_2,e_1)+\alpha_2\beta_2 f(e_2,e_2)+....+\alpha_2\beta_n f(e_2,e_n)+ \\ &\quad +........+\alpha_n\beta_n f(e_n,e_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j f(e_i,e_j) \end{aligned}$$

وهكذا، فإن الشكل ثنائي الخطية f يتعين تماماً بالقيم $f(e_i,e_j)$ التي عددها n^2.

إذا اعتبرنا مصفوفتي العمود $n\times 1$،

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

وإذا رمزنا بِـ $f(e_i,e_j)=a_{ij}$، $(i,j=1,2,...,n)$ فعندئذ يمكننا إعادة صياغة مفهوم الشكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ كمصفوفة 1×1 كما يلي:

$$f(u,v)=[x_1 \quad x_2 \quad .... \quad x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=X^T AY$$

تدعى $A=(a_{ij})$ حيث $a_{ij}=f(e_i,e_j)$ ، $(i,j=1,2,....,n)$. مصفوفة الشكل ثنائي الخطية f بالنسبة للأساس $\{e_i\}_{i=1}^n$ أو **التمثيل المصفوفي** لِ f بالنسبة للأساس $\{e_i\}_{i=1}^n$.

توضيح:

الشكل ثنائي الخطية المعرف على فضاء المتجهات $E=R^3$ بِـ:

$$f(u,v)=x_1y_1+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

$u=(x_1,x_2,x_3),v=(y_1,y_2,y_3)$ يكتب بلغة المصفوفات:

$$f(u,v)=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=X^T AY$$

أثر تغيير القاعدة على شكل ثنائي الخطية:

إذا كان E فضاء متجهات على الحقل K ذا بعد منته n.

لتكن $B=\{e_i\}_{i=1}^n, B'=\{e'_i\}_{i=1}^n$ قاعدتين في E ولنفرض أن P مصفوفة الانتقال من القاعدة B' إلى القاعدة B.

لنعتبر الآن الشكل ثنائي الخطية: $f(u,v)=X^T AT$

ولنأخذ التحويلين الخطيين: $Y=PY'$ ، $X=PX'$

حيث X',Y' متجها عمود في كل منهما n مركبة في المتغيرات الجديدة، نجد:

$$f(u,v)=(PX')^T.A.(PY')=X'^T(P^TAP)Y'=X'^TA'Y'$$

ومنه ينتج أن $A'=P^TAP$ وهي علاقة تربط بين المصفوفتين A,A' وبالتالي نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (1−2):

ان التحويلين الخطيين $X=PX',Y=PY'$ يردّان الشكل ثنائي الخطية X^TAY الذي مصفوفته A إلى شكل ثنائي الخطية مصفوفته P^TAP.

تمرين (1−3):

لنعرف على $E=R^2$ الشكل ثنائي الخطية:

$$f(u,v)=x_1y_1+4x_2y_1-3x_2y_2\,,\quad u=(x_1,x_2)\quad v=(y_1,y_2)$$

1 −أوجد A مصفوفة الشكل الثنائي الخطية f بالنسبة للأساس $B=\{e_1=(-1,1),e_2=(1,0)\}$

2 −أوجد A' مصفوفة الشكل ثنائي الخطية f بالنسبة للأساس $B'=\{e'_1=(2,-1),e'_2=(1,1)\}$

3 −حدّد مصفوفة الانتقال P من الأساس B إلى الأساس B' وحقق صحة العلاقة $A'=P^TAP$

الحل:

يلاحظ أن:

$$a_{11}=f(e_1,e_1)=f((-1,1),(-1,1))=-6$$
$$a_{12}=f(e_1,e_2)=f((-1,1),(1,0))=3$$
$$a_{21}=f(e_2,e_1)=f((1,0),(-1,1))=-1$$

$$a_{22} = f(e_2, e_2) = f((1,0),(1,0)) = 1$$

ومنه نجد:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

بطريقة مشابهة، نرى أن:

$$a'_{11} = f(e'_1, e'_1) = f((2,-1),(2,-1)) = -7$$
$$a'_{12} = f(e'_1, e'_2) = f((2,-1),(1,1)) = 1$$
$$a'_{21} = f(e'_2, e'_1) = f((1,1),(2,-1)) = 13$$
$$a'_{22} = f(e'_2, e'_2) = f((1,1),(1,1)) = 2$$

وبالتالي:

$$A' = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$$

3− نبحث الآن عن P مصفوفة الانتقال من القاعدة B' إلى القاعدة B.

لدينا: $e'_1 = (2,-1) = \alpha e_1 + \beta e_2 = (-\alpha, \alpha) + (\beta, 0)$

أي: $e'_1 = -e_1 + e_2$

كذلك: $e'_2 = (1,1) = \alpha e_1 + \beta e_2 = (-\alpha, \alpha) + (\beta, 0)$

أي: $e'_2 = e_1 + 2e_2$

ومنه:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وأخيراً، من السهل على القارئ أن يبين أن: $P^T A P = A'$.

تعريف (1−4):

تُعرف **رتبة شكل ثنائي الخطية** f على فضاء متجهات E ذي بعد منته n بأنها رتبة أي تمثيل مصفوفي لِـ f ويرمز لها بـِ $rank(f)$. ويُقال عن الشكل ثنائي الخطية f إنه **متردٍ** إذا كان $rank(f) < n$ وإنه **غير متردٍ** إذا كان $rank(f) = n$.

تمرين (1–5):

عين رتبة الشكل ثنائي الخطية المعرف على $E = R^3$ بالصيغة:

$$f(u,v) = f((x_1, x_2),(y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 7x_3y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + \\ +3x_1y_3 + x_3y_1 + 4x_2y_3 + x_3y_3$$

الحل:

إن مصفوفة الشكل ثنائي الخطية f بالنسبة للأساس القانوني في هذا الفضاء هي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

وبملاحظة أن $\det A = 0$ يتضح على الفور أن $rank(f) < n$ وبالتالي الشكل ثنائي الخطية مترد.

2- الأشكال ثنائية الخطية المتناظرة والأشكال التربيعية الخاصة:

تعريف (2–1):

يُقال عن شكل ثنائي الخطية f على فضاء متجهات E إنه **متناظر** إذا كان:

$$f(u,v) = f(v,u) \quad , \quad \forall (u,v) \in E^2$$

وإنه **متناظر متخالف** عندما $f(u,v) = -f(v,u)$.

لنعتبر الآن الشكل ثنائي الخطية $f(u,v) = X^T AY$ الذي مصفوفته A ، فعندئذ:

$$f(u,v) = X^T AY = (X^T AY)^T = Y^T A^T X$$

وذلك لأن $X^T AY$ مصفوفة وحيدة العنصر. وبالتالي نميز ما يلي:

حالة <u>1:</u> إذا كان $f(u,v)$ شكلاً ثنائي الخطية متناظراً (متناظراً متخالفاً) فعندئذ نجد:

$$Y^T A^T X = Y^T AX \quad , \quad (Y^T A^T X = -Y^T AX)$$

ومنه $A^T = A$ $(A^T = -A)$ ومصفوفة الشكل ثنائي الخطية f تكون متناظرة (متناظرة متخالفة).

حالة <u>2:</u> إذا كانت المصفوفة A متناظرة، فلدينا:

$$f(u,v) = Y^T A^T X = Y^T AX = f(v,u)$$

فالشكل ثنائي الخطية f يكون متناظراً.

أما إذا كانت المصفوفة A متناظرة متخالفة، فنرى أيضاً أن:

$$f(u,v) = -Y^T AX = -f(v,u)$$

والشكل ثنائي الخطية f يكون متناظراً متخالفاً.

وبالتالي نكون قد برهنا المبرهنة التالية:

مبرهنة (2-2):

يكون الشكل ثنائي الخطية على فضاء المتجهات E المنتهي البعد متناظراً (متناظراً متخالفاً) إذا وفقط إذا كانت مصفوفته بالنسبة لقاعدة مرتبة في هذا الفضاء متناظرة (متناظرة متخالفة).

تمرين (2–3):

اكتب الشكل ثنائي الخطية المتناظر على الفضاء R^3 والتي مصفوفته بالنسبة للأساس القانوني في هذا الفضاء هي:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

بما أن المصفوفة A متناظرة، فالشكل ثنائي الخطية على R^3 المقابل لها متناظراً ويعطى بالصيغة:

$$f(u,v)=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_1y_2 - x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_3$$

تعريف (2–4):

يُقال عن شكل ثنائي الخطية f على E إنه **متناوب** إذا كان:

$$f(v,v)=0 \quad ; \quad \forall v \in E \qquad (1)$$

يتضح على الفور، أنه إذا كان f شكلاً ثنائي الخطية متناوباً على E فإن:

$$0 = f(u+v,u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$$

وبالتالي نجد:

$$f(u,v) = -f(v,u) \qquad (2)$$

وكحالة خاصة : إذا كان مميز الحقل K لا يساوي 2، فإن الشرط (2) يؤول إلى $f(v,v) = -f(v,v)$ وبالتالي $f(v,v) = 0$ وعليه نورد النتيجة التالية:

نتيجة (2–5):

يوجد تكافؤ بين الأشكال **ثنائية الخطية المتناوبة** والأشكل **ثنائية الخطية المتناظرة المتخالفة** على فضاء متجهات E على حقل K مميزه لا يساوي 2.

تعريف (2–6): **الأشكال التربيعية الخاصة:**

إذا كان f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً على فضاء متجهات E ذا بعد منته E،

نعرف **الشكل التربيعي** q على E بأنه تطبيق من النمط:

$$q : v ----\rightarrow q(v) = f(u,u)$$

إذا اعتبرنا أن A مصفوفة f بالنسبة لقاعدة مرتبة في هذا الفضاء، فعندئذ:

$$q(v) = f(v,v) = X^T AX$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$$

إن كثيرة الحدود التربيعية بالمتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ المذكورة لتوَّنا الموافقة للمصفوفة المتناظرة A تدعى **الشكل التربيعي الخاص المناظر للشكل ثنائي الخطية المتناظر** f .

وبصورة خاصة، إذا كانت المصفوفة A قطرية فإنه يوجد للشكل التربيعي الخاص الموافق $q(v)$ التمثيل القطري:

$$q(v) = X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2$$

وهذا يعني أن كثيرة الحدود التربيعية الممثلة لِـ q لا تحتوي على حدود ناتجة عن ضرب عناصر مختلفة الدليل.

من ناحية أخرى، يمكن بمعرفة الشكل التربيعي الخاص q إيجاد الشكل ثنائي الخطية المتناظر f من خلال المطابقة التالية والمسماة **بالشكل القطبي للشكل التربيعي** q.

مبرهنة (2–7):

إذا كان q شكلاً تربيعياً على فضاء متجهات E على حقل K $(\aleph(K) \neq 2)$، فإن الشكل القطبي لِـ q يعطى بالصيغة:

$$f(u,v) = \frac{1}{2}[q(u+v) - q(u) - q(v)]$$

البرهان:

في الواقع، لدينا:

$$\begin{aligned} q(u+v)-q(u)-q(v) &= f(u+v,u+v)-f(u,u)-f(v,v) \\ &= f(u,u)+f(u,v)+f(v,u)+f(v,v)-f(u,u)-f(v,v) \\ &= 2f(u,v) \end{aligned}$$

بما أن مميز الحقل لا يساوي 2، فمن الممكن القسمة على 2 والحصول على المتطابقة الواردة لتوّنا.

تمرين (2–8):

أوجد المصفوفات المتناظرة المرتبطة بالأشكال التربيعية التالية:

$$q(x)=q(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_1x_2+6x_2^2$$

$$q_1(x)=q_1(x_1,x_2)=8x_1x_2+4x_2^2$$

$$q_2(x)=q_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+x_2x_3+7x_3^2$$

$$q_3(x)=q_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_4+x_3^2+x_4^2$$

الحل:

إذا رمزنا بِ M_q لمصفوفة الشكل التربيعي q بالنسبة للقاعدة القانونية في الفضاء $E=R^n$، فعندئذ وفقاً للعلاقة المصفوفية:

$$q(v)=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نجد:

$$M_q=\begin{bmatrix}2 & 3/2\\ 3/2 & 6\end{bmatrix} \quad , \quad M_{q_1}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

$$M_{q_2}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1/2\\ 2 & 1/2 & 7\end{bmatrix} \quad , \quad M_{q_4}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

تمرين (2−9):

ليكن q شكلاً تربيعياً على R^3 معرفاً بِـ:

$$q(v)=q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3$$

أوجد الشكل القطبي لِـ q، حدّد المصفوفة المتناظرة للشكل ثنائي الخطية المتناظر الناتج.

الحل:

نعلم وفقاً للمتطابقة المذكورة في المبرهنة (2−7) أن:

$$f(u,v)=\frac{1}{2}[q(u+v)-q(u)-q(v)]$$

إذا اعتبرنا $u=(x_1,x_2,x_3), v=(y_1,y_2,y_3)$ فعندئذ يكون لدينا:

$$q(u+v)=(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2-$$
$$-(x_1+y_1)(x_2+y_2)-(x_2+y_2)(x_3+y_3)$$

$$q(u)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3$$

$$q(v)=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_1y_2-y_2y_3$$

وبحسابات بسيطة نرى بسهولة أن:

$$f(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \\ -\frac{1}{2}x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2$$

وعليه، فإن المصفوفة المتناظرة الموافقة للشكل ثنائي الخطية $f(u,v)$ بالنسبة للقاعدة القانونية في الفضاء R^3 هي:

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين (2–10):

ليكن q شكلاً تربيعياً على R^3 معرفاً بالصيغة:

$$q(v) = q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1\cos\lambda + x_2\sin\lambda) \quad ;\lambda \in R$$

أوجد الشكل القطبي f لِـ q ثم مصفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية في الفضاء R^3. وبين أن f غير متردٍّ.

الحل:

ليكن $u = (x_1,x_2,x_3), v = (y_1,y_2,y_3)$ فعندئذ نجد:

$$q(u+v) = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \\ +2(x_3+y_3)((x_1+y_1)\cos\lambda + (x_2+y_2)\sin\lambda)$$

$$q(u) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1\cos\lambda + x_2\sin\lambda)$$

$$q(v) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3(y_1 \cos\lambda + y_2 \sin\lambda)$$

وبحسابات فعلية يمكن رؤية أن:

$$q(u+v) - q(u) - q(v) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 +$$
$$+2x_3y_1\cos\lambda + 2x_3y_2\sin\lambda + 2y_3x_1\cos\lambda + 2y_3x_2\sin\lambda$$

وبالتالي يكون:

$$f(u,v) = x_1y_1 + x_1y_3\cos\lambda + x_2y_2 + x_2y_3\sin\lambda + x_3y_1\cos\lambda +$$
$$+x_3y_2\sin\lambda$$

ومصفوفة الشكل التربيعي الأخير هي:

$$M_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\lambda \\ 0 & 1 & \sin\lambda \\ \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad (\lambda \in R)$$

وإذا لاحظنا أن $\det M_q = -\sin^2\lambda - \cos^2\lambda = -1$

يتضح أن f شكل ثنائي الخطية متناظر وغير متردٍّ.

تمرين (2–11):

ليكن الشكل التربيعي المعرف على الفضاء المتجهي R^4 وفق الصيغة:

$$q(v) = q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\mu x_1x_2$$
$$(\lambda, \mu \in R)$$

أوجد $rank(f)$ رتبة الشكل ثنائي الخطية المتناظر f المتعلق بِـ q.

الحل:

إذا كان $u = (x_1, x_2, x_3, x_4), v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ فعندئذ يمكن أن نجد بسهولة أن:

$$f(u,v)=\frac{1}{2}[q(u+v)-q(u)-q(v)]$$
$$=x_1y_1-3x_2y_2-4x_3y_3+\lambda x_4y_4+\mu(x_1y_2+y_1x_2)$$

وبالتالي نجد:

$$M_f=\begin{bmatrix}1&\mu&0&0\\ \mu&-3&0&0\\ 0&0&-4&0\\ 0&0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

من ناحية أخرى، نبين بسهولة أن:

$$\det(M_f)=4\lambda(\mu^2+3)$$

وبالتالي $rank(f)=4$ من أجل $\lambda\neq 0$. أما إذا كان $\lambda=0$ فعندئذ نجد بوضوح أن $rank(f)=3$.

تمرين (2–12):

ليكن $E=R_2[X]$ الفضاء المتجهي للحدوديات من الدرجة أصغر أو تساوي 2، ولنعرف على هذا الفضاء الشكل ثنائي الخطية التالي:

$$\phi(p(x),q(x))=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx \qquad \forall p(x),q(x)\in R_2[X]$$

أوجد مصفوفة ϕ بالنسبة للقاعدة القانونية $\{1,x,x^2\}$ في الفضاء $E=R_2[X]$، بين أن ϕ غير مترداً.

الحل:

$$\phi(1,1)=\int_{-1}^{1}1dx=2$$

$$\phi(1,x)=\phi(x,1)=\int_{-1}^{1}xdx=0$$

$$\phi(1,x^2)=\phi(x^2,1)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$\phi(x,x)=\frac{2}{3}\ \ ,\ \ \phi(x^2,x^2)=\frac{2}{5}\ \ ,\ \ \phi(x,x^2)=0$$

وبالتالي مصفوفة الشكل ثنائي الخطية ϕ بالنسبة للقاعدة القانونية في $R_2[X]$ هي:

$$M_\phi=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2/3\\ 0 & 2/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 2/5\end{bmatrix}\ \ ,\ \ \det(M_\phi)=\frac{2}{3}(\frac{4}{5}-\frac{4}{9})\neq 0$$

يتضح أن $rank(\phi)=3$ والشكل ثنائي الخطية ϕ غير متردٍّ.

تمرين (2–13):

ليكن E فضاء متجهياً على حقل K ($\aleph(K)\neq 2$)، إذا كان q شكلاً تربيعياً على E فبيّن أن $q(\lambda v)=\lambda^2q(v)$ وذلك مهما يكن $v\in E$ ومهما يكن $\lambda\in K$.

الحل:

لدينا:

$$q(\lambda v)=f_q(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2 f_q(v,v)=\lambda^2q(v)$$

حيث f_q الشكل ثنائي الخطية المتناظر المستنتج من q.

تمرين (2–14):

ليكن E فضاء متجهياً على حقل K، إذا كان f شكلاً تربيعياً على E، q الشكل التربيعي المرتبط بِـ f، بيّن أن:

$$q(u+v)+q(u-v)=2q(u)+2q(v)$$
$$q(u+v)-q(u-v)=2f(u,v)+2f(v,u)$$

الحل:

لدينا:

$$q(u+v)=q(u)+q(v)+[f(u,v)+f(v,u)]$$
$$q(u-v)=q(u)+q(-v)+[f(u,-v)+f(-v,u)]$$

ولما كان $f(-v,u)=-f(v,u)$، $f(u,-v)=-f(u,v)$، $q(-v)=q(v)$

نستنتج أن: $q(u+v)+q(u-v)=2q(u)+2q(v)$

وكذلك أن: $q(u+v)-q(u-v)=2f(u,v)+2f(v,u)$

3– الصيغ التربيعية العامة:

تعريف (3–1):

الصيغة التربيعية بِـ n من المتغيرات $x_1,x_2,....,x_n$ تُعرف بالعبارة:

$$q(x)=q(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ ;\quad (a_{ij}=a_{ji})$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+....+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+....$$
$$...+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+......+a_{nn}x_n^2$$

حيث المعاملات a_{ij} هي عناصر من حقل الأعداد الحقيقية أو حقل الأعداد المركبة، ففي الحالة الأولى يُقال **صيغة تربيعية مركبة** وفي الحالة الثانية نتكلم عن f **كصيغة تربيعية حقيقية**.

إذا أخذنا: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ كمصفوفة عمود واحد، فعندئذ يمكن كتابة الصيغة $q(x)$ كمصفوفة مؤلفة من عنصر واحد كما يلي:

$$q(x) = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T A X$$

تعريف (3–2):

تدعى المصفوفة المتناظرة $A = (a_{ij})$ للصيغة التربيعية $q(x)$ **بمصفوفة الصيغة** . وتدعى رتبة A **برتبة الصيغة التربيعية** ويرمز لها بِ $rank(q)$ أو اختصاراً بِ r.

يُقال عن الصيغة التربيعية إنها **شاذة** إذا كان $r < n$ وفي الحالة المعاكسة تدعى **غير شاذة**.

الآن، إذا طبقنا على المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ تحويلاً مصفوفته C من النمط $X = CY$ فإننا نحصل مباشرةً على الصيغة التربيعية المحوَّلة:

$$(CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y$$

التي تحوي المتغيرات $y_1, y_2, ..., y_n$ ولها المصفوفة المتناظرة $C^T AC$

وهكذا نجد النتيجة التالية:

نتيجة (3–3):

إن **التحويل الخطي** $X = CY$ ذا المصفوفة C المطبق على صيغة تربيعية $q(x)$ مصفوفتها A، يقودنا إلى صيغة تربيعية جديدة مصفوفتها $C^T AC$.

تعريف (3–4):

يُقال إن صيغتين تربيعيتين $q(x), h(y)$ بـ n من المتغيرات **متكافئتان حقيقياً**، إذا وجد تحويل خطي غير شاذ $X = CY$ بوساطته يتم تحويل الصيغة $q(x)$ إلى الصيغة $h(y)$.

إن تشابه المصفوفتين $A, C^T AC$ يقودنا إلى النتائج التالية:

نتيجة (3–5):

لصيغتين تربيعيتين متكافئتين حقيقياً الرتبة ذاتها.

نتيجة (3–6):

تكون صيغتان تربيعيتان متكافئتان حقيقياً إذا كانت مصفوفتاهما متشابهتين.

4- مبرهنة سيلفستر للتمثيل القانوني لصيغ تربيعية – دليل وتوقيع صيغة تربيعية:

مبرهنة سيلفستر (4-1):

إذا كانت $q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ صيغة تربيعية رتبتها r ومعاملاتها a_{ij} أعداداً حقيقية أو مركبة، فيمكن عندئذ إيجاد تحويل غير شاذ معاملاته أعداد حقيقية أو مركبة بحيث يتحول $q(x)$ إلى عبارة $c_1y_1^2+c_2y_2^2+....+c_ry_r^2$ حيث تختلف المعاملات c_i جميعها عن الصفر.

اصطلاح:

من الملائم أن ندعو العبارة $c_1y_1^2+c_2y_2^2+....+c_ry_r^2$ **بالصيغة القانونية.**

سنهتم في سياق دراستنا **بالصيغ التربيعية الحقيقية** ➢ الصيغ التربيعية التي تكون معاملاتها أعداداً حقيقية➢ لأهميتها الرئيسة في **الهندسة التحليلية** وفي **الإحصاء.**

تعريف (4-2):

نُعرف دليل صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ ويرمز له بِ μ بأنه عدد المعاملات الموجبة في الصيغة القانونية لِ $q(x)$.

ويبرهن على أن رتبة صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ بأنها عدد الجذور المغايرة للصفر للمعادلة المميّزة $|\lambda I - A| = 0$.

أما الدليل μ هو بدقة عدد الجذور الموجبة للمعادلة المميّزة لِ A. ووفقاً لكون جميع جذور المعادلة المميزة أعداداً حقيقية، فإن عدد الجذور الموجبة هو بدقة عدد تغيرات الإشارة في الدالة المميّزة $|\lambda I - A|$ للمصفوفة A، وتُعرف هذه الحقيقة **بقاعدة ديكارت للإشارات.**

توضيح:

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 7z^2 - 4xy + 8xz$$

والتي تكتب:

$$q(x,y,z) = [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة الشكل التربيعي هي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad ;(r = 3)$$

وإذا لاحظنا أن الدالة المميّزة لِA تكتب بالمعادلة:

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 39\lambda + 18$$

يتضح وفقاً لقاعدة ديكارت للإشارات أن $\mu = 2$ باعتبار أن عدد تغيرات الإشارة في الدالة المميّزة لِA يساوي 2.

لنختزل الآن الصيغة التربيعية الحقيقية بموجب **مبرهنة سيلفستر** إلى الصيغة القانونية:

$$c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_3^2$$

في الواقع، نشكل أولاً مصفوفة القوالب $(A:I)$، ثم نطبق عليها متتالية من تحويلات الصفوف ومثيلاتها من تحويلاتها الأعمدة، وفق ما يلي:

$$[A:I]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -23 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

وذلك بتطبيق العمليتين الصَّفيّتين $2R_1 + R_2$ ، $-4R_1 + R_3$ على المصفوفة $[A:I]$. نطبق بعد ذلك العملية العمودية $4C_2 + C_3$ والعملية الصفية $4R_2 + R_3$ على الترتيب فنجد:

$$[A:I] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$=[D:C^T]$$

وبذلك نكون قد جعلنا A قطرية. لنضع الآن:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولنعتبر التحويل الخطي غير الشاذ:

$$X = CY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

أي التحويل:

$$\begin{aligned} x &= x' + 2y' + 4z' \\ y &= y' + 4z' \\ z &= z' \end{aligned}$$

بالتعويض نرى أن التحويل الوارد أعلاه يردّ الصيغة التربيعية المعطاة إلى الصيغة القانونية:

$$q(x', y', z') = x'^2 - 2y'^2 + 9z'^2$$

ووفقاً للمفاهيم الأساسية الواردة أعلاه، نعرض المبرهنة التالية الخاصة بالصيغ التربيعية المتكافئة حقيقياً.

مبرهنة (4–3):

تكون صيغتان تربيعيتان حقيقيتين بـ n من المتغيرات $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ، $h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x'_i x'_j$ متكافئتين إذا كان لهما الرتبة ذاتها والدليل نفسه.

تمرين (4–4):

برهن أن الصيغتين التربيعيتين الحقيقيتين التاليتين غير متكافئتين حقيقياً:

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 8z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$$

$$f(x_1, y_1, z_1) = 2x_1^2 + 2y_1^2 - z_1^2 + 8x_1 y_1 - 4x_1 z_1 - 4y_1 z_1$$

الحل:

إن مصفوفتي الصيغتين هما على الترتيب:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & 4 & -8\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ 4 & 2 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

نوجد أولاً الدالة المميّزة لِـ A ،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-1 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+8\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda^2+7\lambda-24)+4(-2\lambda+2)$$

$$= \lambda^3+3\lambda^2+60\lambda+100$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+10)$$

وبما أن رتبة صيغة تربيعية هي تماماً عدد الجذور التي لا تساوي الصفر في المعادلة المميّزة لمصفوفة الصيغة A ، وأن دليل صيغة تربيعية حقيقية هو بدقة عدد الجذور الموجبة للمعادلة المميّزة لِـ A المعرف أيضاً وفقاً لقاعدة ديكارت للإشارات على أنه عدد تغيرات الإشارة في الدالة المميّزة $|\lambda I - A|$ للمصفوفة A ، فيتضح عندئذ أن $(r=3 \quad , \quad \mu=2)$.

بصورة مماثلة، نجد أن الدالة المميّزة لِـ B هي:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -4 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-2) - 20(\lambda+2)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2 - 5\lambda - 14)$$
$$= (\lambda+2)^2(\lambda-7)$$

إذن تكون رتبة الصيغة h التي تساوي عدد الجذور المغايرة للصفر في المعادلة المميّزة لِـ B هي $r=3$ كما أن دليل الصيغة الذي هو بدقة عدد الجذور الموجبة للمعادلة المميّزة لِـ B هو $\mu = 1$.

يتضح أن لهاتين الصيغتين الرتبة نفسها، ولكن بدليلين مختلفين وبالتالي أن الصيغتين غير متكافئتين حقيقياً.

تمرين (4–5):

بين أن الصيغتين التربيعيتين الحقيقيتين:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2x_3$$
$$h(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2$$

متكافئتان.

الحل:

إن مصفوفتي الصيغتين هما على الترتيب:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ونجد بسهولة أن الدالتين المميّزتين لـِ A, B هما:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

$$|\lambda I - B| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

وبالتالي استناداً إلى المفاهيم التي وردت في التمرين السابق يتضح للقارئ أن الصيغتين التربيعيتين الحقيقيتين متكافئتان.

توقيع صيغة تربيعية:

لتكن $q(x)$ صيغة تربيعية حقيقية رتبتها r بـِ n من المتغيرات. فوفقاً لمبرهنة **سيلفستر** فإن الصيغة $q(x)$ تختزل بوساطة تحويل حقيقي غير شاذ إلى الصيغة القانونية $c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + ... + c_r y_r^2$ حيث $c_i \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., r)$.

تعريف (4–6):

نعرف **توقيع الصيغة** $q(x)$ ونرمز له بـِ $Sig(q)$ بأنه الفرق بين عدد المعاملات الموجبة μ في الصيغة القانونية وعدد المعاملات السالبة ω.

أي: $(Sig(q) = \mu - \omega)$.

إن المبرهنة (4–3)، تقودنا إلى النتيجة التالية:

نتيجة (4–7):

الشرط اللازم والكافي لتكون صيغتان تربيعيتان حقيقيتين $q(x), h(x)$ بـِ n من المتغيرات متكافئتان حقيقياً هو أن يكون لهما الرتبة ذاتها والتوقيع نفسه.

تمرين (4−8):

ردّ الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_2^2-x_3^2+2x_1x_3+4x_2x_3$$

إلى الصيغة القانونية باستخدام **مبرهنة سيلفستر**. وأوجد أيضاً توقيع الصيغة.

الحل:

إن مصفوفة الصيغة التربيعية هي:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

لإيجاد مصفوفة التحويل C التي بوساطتها تردّ الصيغة التربيعية الحقيقية المعطاة إلى الصيغة القانونية:

نشكل مصفوفة القوالب $[A:I]$ ونطبق عليها متتالية من تحويلات الصفوف ومثيلاتها من تحويلات الأعمدة وفق الرموز المشار لها في أسفل المصفوفة فنجد:

$$[A:I]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$R_1\leftrightarrow R_3 \qquad\qquad C_1\leftrightarrow C_3$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

ثم نطبق العمليتين الصفيتين $R_1+R_3 \quad , \quad 2R_1+R_2$ ثم العمليتين العموديتين $2C_1+C_2 \quad , \quad C_1+C_3$ فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ ومن ثم } \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

لنطبق الآن العملية الصفية $-3R_2+2R_3$ ثم العملية العمودية $-3C_2+2C_3$ فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right] \text{ ثم } \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right]$$

وبذا نكون قد جعلنا A قطرية. لنأخذ الآن:

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ولنعتبر التحويل الخطي:

$$X=CY=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

فينتج أن: $P^T AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$ بالإضافة لذلك، نرى أن التحويل المذكور يردّ الصيغة التربيعية الحقيقية المعطاة إلى الصيغة القانونية $-y_1^2 + 2y_2^2 - 14y_3^2$.

وأخيراً، إن التوقيع $Sig(q)$ للصيغة التربيعية هو الفرق:

$$Sig(q) = \mu - \omega = -1$$

5- الأشكال الهرميتية (الأشكال المرافقة لنفسها):

تعريف (5-1):

ليكن E فضاء متجهات ذا بعد منته على حقل الأعداد المركبة C، ندعو التطبيق:

$$f : E \times E \to C$$

$$(u,v) \mapsto f(u,v)$$

شكلاً هرميتياً (شكلاً مرافقاً لنفسه) على E، إذا حقق الشرطين:

$$(i) \quad f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u,w) + \beta f(v,w)$$

$$(ii) \quad f(u,v) = \overline{f(v,u)} \quad , \quad \forall u,v,w \in E, \ \ \forall \alpha, \beta \in C$$

نستنتج مباشرةً أن الشكل المرافق لنفسه على E يحقق الشرط:

$$(iii) \quad f(u, \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha} f(u,v) + \overline{\beta} f(u,w)$$

في الواقع، لدينا:

$$f(u, \alpha v + \beta w) = \overline{f(\alpha v + \beta w, u)} = \overline{\alpha f(v,u) + \beta f(w,u)}$$
$$= \overline{\alpha}.\overline{f(v,u)} + \overline{\beta}.\overline{f(w,u)} = \overline{\alpha} f(u,v) + \overline{\beta} f(u,w)$$

يُعبر عن الشرط (i) بقولنا إن f خطي بالنسبة للمتغير الأول، وكذلك نعبر عن الشرط (ii) بالقول أن f خطي مرافق (نصف خطي) بالنسبة للمتغير الثاني.
بالإضافة لذلك، بما أن $f(v,v)=\overline{f(v,v)}$ يتضح أن $f(v,v)$ عدد حقيقي، مهما يكن $v\in E$.

لنعتبر الآن أن E ذو بعد منته n وبفرض $\{e_i\}_{i=1}^n$ قاعدة مرتبة في هذا الفضاء، فإن:

$$u=a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n \quad , \quad v=b_1e_1+b_2e_2+\ldots.+b_ne_n$$

ولنحسب الشكل المرافق لنفسه (الهرميتي)،

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i,\sum_{j=1}^{n} b_je_j\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\,f(e_i,e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\,h_{ij} \end{aligned}$$

$$=[a_1 \quad a_2 \quad ..... \quad a_n]\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{bmatrix}=X^T H\overline{Y}$$

وذلك باعتبار أن: $X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ مصفوفتا عمود إحداثيات u, v بالنسبة للقاعدة المرتبة $\{e_i\}_{i=1}^n$ في الفضاء E.

تعريف (5–2):

سندعو المصفوفة $H = (h_{ij})$ **التمثيل المصفوفي للشكل الهرميتي** f بالنسبة للقاعدة المرتبة المذكورة، وبملاحظة أن $\overline{f(e_i, e_j)} = f(e_j, e_i)$، نرى أن $H = H^*$ وبالتالي H هرميتية.

وبذلك نكون قد برهنا النتيجة:

نتيجة (5–3):

إن $H = (f(e_i, e_j))$ مصفوفة شكل هرميتي f بالنسبة لقاعدة مرتبة $\{e_i\}_{i=1}^n$ تكون هرميتية وبالإضافة لذلك، نورد النتيجة التالية:

نتيجة (5–4):

إذا كانت H مصفوفة هرميتية فإن التطبيق $f : C^n \times C^n \to C$ المعرف بالصيغة $f(X, Y) = X^T H Y$ يكون شكلاً هرميتياً على C^n.

البرهان:

أياً كان $\alpha, \beta \in C$ وأياً كانت $X, Y, Z \in C^n$، فعندئذ وفقاً لمفاهيم أولية في مبرهنة المصفوفات نرى أن:

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y, Z) &= (\alpha X + \beta Y)^T H \overline{Z} \\ &= (\alpha X^T + \beta Y^T) H \overline{Z} \\ &= \alpha X^T H \overline{Z} + \beta Y^T H \overline{Z} \\ &= \alpha f(X, Z) + \beta f(Y, Z) \end{aligned}$$

من جهة أخرى، يُلاحظ أن:

$$\begin{aligned} \overline{f(X,Y)} = \overline{X^T A \overline{Y}} = \overline{(X^T A \overline{Y})^T} &= \overline{\overline{Y}^T A^T X} = \\ &= Y^T A^* \overline{X} = Y^T A \overline{X} = f(Y, X) \end{aligned}$$

وذلك بالاستفادة من حقيقة أن المصفوفة $X^T A \overline{Y}$ وحيدة العنصر، إذن f شكل هرميتي على C^n.

6- الأشكال الهرميتية التربيعية الخاصة وتمثيلها القانوني:

تعريف (6-1):

إذا كان f شكلاً هرميتياً على فضاء متجهات E ذا بعد منته n، نعرف **الشكل الهرميتي التربيعي (الشكل التربيعي المرافق لنفسه)** المرتبط بِ f بأنه تطبيق من الصيغة:

$$q : v \to q(v) = f(v, v)$$

ويمكن التعبير عن الشكل الهرميتي التربيعي المرتبط بالشكل الهرميتي f وفق ما يلي:

$$h(v) = f(v,v) = X^T H \overline{X}$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad ..... \quad x_n] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = X^T H \overline{X}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i \overline{x_j}$$

تمرين (2–6):

اكتب الشكل الهرميتي ثم الهرميتي التربيعي على C^3 والذي مصفوفته:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \\ 0 & 3+i & -4 \end{bmatrix}$$

الحل:

إذا كانت $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ عناصر من C^3.

ولنحسب $f(u,v)$.

في الواقع، لدينا:

$$f(u,v) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \\ 0 & 3+i & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \overline{y_3} \end{bmatrix}$$
$$= 2x_1\overline{y_1} + (3-i)x_2\overline{y_3} + (3+i)x_3\overline{y_2} - 4x_3\overline{y_3}$$

أما الشكل الهرميتي التربيعي فهو:

$$h(v) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \\ 0 & 3+i & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix}$$
$$= 2x_1\overline{x_1} + (3-i)x_2\overline{x_3} + (3+i)x_3\overline{x_2} - 4x_3\overline{x_3}$$
$$= 2|x_1|^2 + (3-i)x_2\overline{x_3} + (3+i)x_3\overline{x_2} - 4|x_3|^2$$

كذلك، يمكن الحصول على الشكل الهرميتي f من q من المطابقة التالية المسماة **بالشكل القطبي لـِ** q.

مبرهنة (6–3):

إذا كان q شكلاً هرميتياً تربيعياً على فضاء متجهات E، فإن الشكل القطبي لـِ q يعطى بالصيغة:

$$f(u,v) = \frac{1}{4}[q(u+v) - q(u-v)] + \frac{i}{4}[q(u+iv) - q(u-iv)]$$

البرهان:

في الحقيقة، لدينا:

$$q(u+v) = f(u+v,u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$$
$$q(u-v) = f(u-v,u-v) = f(u,u) - f(u,v) - f(v,u) + f(v,v)$$

وبالطرح ينتج:

$$q(u+v)-q(u-v)=2f(u,v)+2f(v,u) \qquad (1)$$

بطريقة مشابهة، لدينا أيضاً:

$$q(u+iv)=f(u+iv,u+iv)=f(u,u)-if(u,v)+if(v,u)+f(v,v)$$

$$q(u-iv)=f(u-iv,u-iv)=f(u,u)+if(u,v)-if(v,u)+f(v,v)$$

وبالطرح ينتج:

$$q(u+iv)-q(u-iv)=2if(v,u)-2if(u,v) \qquad (2)$$

نضرب المعادلة الثانية بـ i ونجمعها مع الأولى فنجد:

$$q(u+v)-q(u-v)+i[q(u+iv)+q(u-iv)]=4f(u,v)$$

أي أن:

$$f(u,v)=\frac{1}{4}[q(u+v)-q(u-v)]+\frac{i}{4}[q(u+iv)-q(u-iv)]$$

التمثيل القانوني للأشكال الهرميتية التربيعية:

تعريف (6–4): المصفوفات المتشابهة هرميتياً:

نقول عن مصفوفتين A,B ، مربعتين هرميتيتين من الدرجة n ، إنهما متشابهتان هرميتياً فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $B=P^*AP$.

يُقال عن شكلين هرميتين تربعيين بالمتغيرات $x_1,x_2,....,x_n$ ، إنهما متكافئان إذا وجد تحويل خطي غير شاذ $X=PY$ يحول أحد هذين الشكلين إلى الآخر.

نتيجة (6–5):

يكون شكلان هرميتيان متكافئين إذا كانت مصفوفتاهما متشابهتين هرميتياً.

مبرهنة (6–6):

يمكن تحويل شكل هرميتي تربيعي رتبته r ،

$$q(v) = X^T H \overline{X} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i \overline{x_j}$$

إلى الصيغة القانونية $c_1 y_1 \overline{y_1} + c_2 y_2 \overline{y_2} + ... + c_r y_r \overline{y_r}$ حيث c_i أعداد حقيقية مغايرة للصفر بوساطة تحويل خطي غير شاذ $X = PY$.

نتيجة (6–7):

يكون شكلان هرميتيان بالمتغيرات $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ متكافئين، إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة ذاتها والدليل ذاته.

تعرف (6–8):**توقيع شكل هرميتي تربيعي:**

نعرف توقيع شكل هرميتي تربيعي ونرمز له بِ $Sig(q)$ بأنه الفرق بين عدد المعاملات الموجبة μ في الصيغة القانونية وعدد المعاملات السالبة ω أي $Sig(q) = \mu - \omega$.

تمرين (6–9):

رد الشكل التربيعي الهرميتي $q(v) = X^T \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \overline{X}$ إلى الصيغة القانونية وأوجد توقيعه.

الحل:

لنشكل أولاً مصفوفة القوالب $[H : I]$

$$[H:I]=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & i & 1 & 0\\ -i & 2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

لنطبق على الترتيب العمليتين iR_1+R_2 ثم $-iC_1+C_2$ فنحصل على المصفوفة المكافئة

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & i & 1\end{array}\right]=[D:P^T]$$

وبالتالي $P=\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

لنضع: $X=PY$ وتكون معاملات التحويل:

$$x_1=y_1+iy_2$$
$$x_2=\quad y_2$$

وهكذا يتحول الشكل التربيعي الهرميتي $q(v)=X^T H\overline{X}$ إلى الصيغة القانونية $y_1\overline{y_1}+y_2\overline{y_2}$ وبالتالي توقيع الصيغة $q(v)$ هو $Sig(q)=2$.

تمرين (6–10):

رد الشكل التربيعي الهرميتي:

$$q(v)=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T\begin{bmatrix}1 & 1+i & 2i\\ 1-i & 4 & 2-3i\\ -2i & 2+3i & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \overline{x_3}\end{bmatrix}$$

إلى الصيغة القانونية وأوجد توقيعه.

الحل:

لنشكل أولاً مصفوفة القوالب $[H:I]$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1+i & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 4 & 2-3i & 0 & 1 & 0 \\ -2i & 2+3i & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نطبق العمليتين الصفيتين $(-1+i)R_1 + R_2$ ، $2iR_1 + R_3$ على المصفوفة $[H : I]$ ثم العمليتين العموديتين المرافقتين لنفسهما المتناظرتين $(-1-i)C_1 + C_2$ ، $-2iC_1 + C_3$ على H فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1+i & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5i & -1+i & 1 & 0 \\ 0 & 5i & 3 & 2i & 0 & 1 \end{array}\right]$$ ثم

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5i & -1+i & 1 & 0 \\ 0 & 5i & 3 & 2i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ثم نطبق بعدئذ العملية الصفية $-5iR_2 + 2R_3$ والعملية العمودية المرافقة لنفسها المناظرة $-5iC_2 + 2C_3$ فنحصل على:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5i & -1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 5+9i & -5i & 2 \end{array}\right]$$ ومن ثم

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -38 & 5+9i & -5i & 2 \end{array}\right]$$

وبذا نكون قد جعلنا H قطرية، لنأخذ:

$$P=\begin{bmatrix}1 & -1+i & 5+9i\\ 0 & 1 & -5i\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

عندئذ، أن معاملات التحويل:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1+(-1+i)y_2+(5+9i)y_3\\ x_2 &= \qquad\qquad y_2-5iy_3\\ x_3 &= \qquad\qquad\quad 2y_3\end{aligned}$$

ترد الشكل التربيعي المعطى $q(v)=X^T H\overline{X}$ إلى الصيغة القانونية $y_1\overline{y_1}+2y_2\overline{y_2}-38y_3\overline{y_3}$ (تأكد من ذلك). وأخيراً يلاحظ أن توقيع الصيغة التربيعية الهرميتية q هو $Sig(q)=2-1=1$.

7–تمرينات محلولة:

تمرين (7–1):

برهن أن الصيغتين التربيعيتين:

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3$$
$$q(x_1,x_2,x_3)=9x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2-6x_1x_3-8x_2x_3$$

متكافئتان.

الحل:

من السهل أن نرى أن مصفوفتي الصيغتين هما على الترتيب:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&-4\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}9&3&-3\\3&2&-4\\-3&-4&2\end{bmatrix}$$

إن الدالة المميزة لـِA هي:

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda-8)=\lambda^3+2\lambda^2-11\lambda+8$$

إن دليل الصيغة $q(v)=X^TAX$ هو بدقة عدد الجذور الموجبة للمعادلة المميّزة لـِA المعرف أيضاً وفقاً لقاعدة ديكارت للإشارات على أنه عدد تغيرات الإشارة في الدالة المميزة لـِA، وبالتالي $\mu=2$.

من جهة أخرى، يمكن للقارئ أن يرى أن الدالة المميّزة لـB تعطى بـ:

$$\begin{aligned}|\lambda I-B|&=(\lambda-9)(\lambda^2-4\lambda-12)-18(\lambda+2)\\&=(\lambda+2)(\lambda-12)(\lambda-3)\\&=\lambda^3-13\lambda^2+6\lambda+72\end{aligned}$$

وبالتالي $\mu=2$.

يتضح مما سبق أن الصيغتين متكافئتان حقيقياً لأن لهما الرتبة ذاتها (بين ذلك) والدليل ذاته.

تمرين (7–2):

رد الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(v)=[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&5&-4\\-3&-4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

إلى الصيغة القانونية.

الحل:

لنشكل مصفوفة القوالب $[A:I]$ ثم نطبق عليها العمليتين $-3R_1+R_3$ ، $-2R_1+R_2$ ثم العمليتين المتناظرتين $3C_1+C_3$ ، $-2C_1+C_2$ فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right] \text{ ثم } \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]$$

نطبق بعد ذلك العملية $-2R_2+R_3$ ثم العملية المناظرة $-2C_1+C_3$ فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1\end{array}\right] \text{ ثم } \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1\end{array}\right]$$

وبذلك نكون قد جعلنا A قطرية. لنضع:

$$P=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

فنستنتج بواسطة التحويل الخطي:

$$X=PY=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

إن الصيغة المفروضة ترد إلى الصيغة القانونية $y_1^2+y_2^2-5y_3^2$.

تمرين (7–3):

رد الشكل التربيعي الهرميتي:

$$q(v)=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & i & 2+i \\ -i & 2 & 1-i \\ 2-i & 1+i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix}$$

إلى الصيغة القانونية، ثم حدّد الرتبة والتوقيع.

الحل:

نشكل مصفوفة القوالب $[H : I]$ ثم نجري على الأسطر والأعمدة متتالية من العمليات الأولية:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2+i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 2 & 1-i & 0 & 1 & 0 \\ 2-i & 1+i & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$iR_1 + R_2$

$(i-2)R_1 + R_3$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & -i & -3 & i-2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & i-3 & i & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & i-3 & i & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & i-3 & i & 1 \end{array}\right]$$

لنأخذ

$$P = \begin{bmatrix} 1 & i & i-3 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فنجد بعمليات حسابية أن الشكل الهرميتي التربيعي المعطى يُرد إلى الصيغة القانونية $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$ بوساطة التحويل الخطي $X = PY$.

يلاحظ أن $r = 3$ ، $Sig(q) = 1$.

تمرينات الفصل

1- أوجد المصفوفة المتناظرة المرافقة لكلٍ من الصيغ التربيعية الحقيقية التالية:

$$q(x,y)=4x^2-6xy-7y^2$$

$$q(x,y,z)=3x^2+4xy-y^2+8xz-6yz+z^2$$

2- لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية المعرفة على فضاء المتجهات $E=R^3$ بـِ:

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3$$

حدد الشكل القطبي f_q المرتبط بالشكل التربيعي q. ثم أوجد مصفوفة الصيغة التربيعية بالنسبة للقاعدة القانونية في هذا الفضاء.

3- اكتب الصيغ التربيعية التالية باستخدام المصفوفات:

$$q(x,y)=-3x^2+5xy-2y^2$$

$$q(x,y,z)=3x^2+xy-2xz+y^2-4yz+2z^2$$

4- رد الصيغة التربيعية:

$$q(v)=X^T\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&8\\2&8&4\end{bmatrix}X$$

إلى الصيغة القانونية $c_1y_1^2+c_2y_2^2+c_3y_3^2$.

5− اكتب الأشكال الهرميتية المقابلة للمصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2+i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \\ 0 & 3+i & -4 \end{bmatrix}$$

6− رد الشكل الهرميتي التربيعي إلى الصيغة القانونية

$$q(v)=[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix}$$

7− برهن أن للصيغتين التربيعيتين:

$$x^T\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}X \quad , \quad X^T\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}X$$

رتبتان مختلفتان.

★★★★★★★★★★★★★★★★★★

الفصل الرابع

اختزال الصيغ التربيعية الحقيقية

الصيغة التربيعية الحقيقية بـn من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ تُعرف بالعبارة:

$$q(x) = q(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$$

حيث المعاملات a_{ij} أعداداً حقيقية.

إذا اعتبرنا: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ مصفوفة من عمود واحد، فيمكن عندئذ كتابة الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)$ على النحو الآتي:

$$q(x) = [x_1 \quad x_2 \quad ..... \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T AX$$

حيث $A = (a_{ij})$ مصفوفة متناظرة تدعى **مصفوفة الصيغة التربيعية الحقيقية** .

ورتبة المصفوفة تدعى **رتبة الصيغة.**

1- اختزال صيغة تربيعية حقيقية إلى الشكل الناظمي:

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)=X^TAX$، ولنفترض أن الجذور المميّزة لمصفوفة الصيغة A هي $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$، فعندئذ وفقاً لمفاهيم أثبتناها في الفقرة (3) من الفصل الثاني، توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث إنّ $P^TAP=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$.

إذا طبقنا على المتغيرات $x_1,x_2,...,x_n$ تحويلاً مصفوفته P، أي إذا وضعنا $X=PY$ فنحصل على صيغة تربيعية حقيقية تحوي حدوداً مربعة فقط من النمط $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+....+\lambda_ny_n^2$ مصفوفتها P^TAP وتدعى **الصيغة الناظمية لـِ** $q(x)$.

من الملائم تسمية التحويل الوارد أعلاه والذي مصفوفته P متعامدة **بالتحويل المتعامد**.

وبالتالي نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (1-1):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)=X^TAX$ مصفوفتها A، ولتكن $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$ الجذور المميّزة لـِ A، فيوجد تحويل حقيقي متعامد $X=PY$ تتحول بوساطته $q(x)$ إلى الصيغة الناظمية $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+....+\lambda_ny_n^2$.

تعريف (1-2):

يُقال عن التحويل المتعامد $X=PY$ للإحداثيات بِـ **دوران للمحاور الإحداثية**

عندما يكون $|P| = 1$. ويشار عندئذ للإحداثيات الجديدة بِ **الإحداثيات الناظمية**.

تعريف (1–3): دليل القصور الذاتي:

يدعى عدد المعاملات الموجبة في الصيغة الناظمية **دليل القصور الذاتي** للصيغة أو فقط دليل الصيغة.

توضيح:

إن صيغة تربيعية حقيقية رتبتها r يمكن أن تختزل للشكل:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_r y_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0)$$

تمرين (1–4):

اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_3^2$$

إلى عبارة تحوي حدوداً مربعة فقط (الصيغة الناظمية).

الحل:

إن مصفوفة الصيغة التربيعية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

والدالة المميّزة لِـ A هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

والجذور المميّزة تكون: $\lambda = 2$ (مكرر)، $\lambda = 8$ (بسيط).
لنبحث عن المتجهات الذاتية الناشئة عن الجذور المميّزة.

في الواقع، يكون $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ متجهاً ذاتياً لِـ A مناظراً للجذر المميز λ إذا وفقط إذا كان $AX = \lambda X$.

من أجل الجذر المميز $\lambda = 2$. إن المعادلة المصفوفية $AX = \lambda X$ تصبح:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التي تؤول إلى معادلة خطية وحيدة $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
ومنه وفقاً لمفاهيم أُرسيت سابقاً، نجد متجهين ذاتيين متعامدين:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

واللذين يكوّنان أساساً للفضاء الذاتي المناظر للجذر المميز $\lambda = 2$.

من ناحية ثانية، من السهل على القارئ رؤية أن المتجه $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متعامد مع كلٍّ من X_1, X_2 .

نرد الآن المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة الحقيقية، فنجد:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

بالإضافة لذلك، من السهل على القارئ إثبات أن $P^T AP = diag(2,2,4)$.

(2) نأخذ الآن التحويل الحقيقي المتعامد:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \end{aligned}$$

فنرى من خلال حسابات فعلية أن التحويل المتعامد المذكور يحول الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)$ إلى الصيغة القانونية $2y_1^2+2y_2^2+8y_3^2$.

ملاحظة:

يجدر بنا تنبيه القارئ إلى أن التحويل الحقيقي المتعامد الذي بوساطته تحوّل الصيغة التربيعية إلى الصيغة القانونية لا ينطبق بالضرورة على صيغ تربيعية معاملاتها أعداداً مركبة.

تمرين (1–5):

اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x,y,z)=4x^2+3y^2-z^2-12xy+4xz-8yz$$

إلى الصيغة الناظمية $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$ $(\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3)$ وذلك بتدوير المحاور الإحداثية، واكتب معاملات تدوير هذه المحاور.

الحل:

نكتب الصيغة التربيعية بالصورة:

$$q(x,y,z)=[x\quad y\quad z]\begin{bmatrix}4&-6&2\\-6&3&-4\\2&-4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

ثم نبحث عن الجذور المميّزة لمصفوفة الصيغة A.

في الواقع أن الدالة المميّزة لـِ A هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 6 & -2\\ 6 & \lambda-3 & 4\\ -2 & 4 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda-11)$$

ومنه الجذور المميّزة لِـA تكون: $\lambda_3=-4$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_1=11$

المتجهات الذاتية الناشئة عن الجذور المميّزة:

يكون $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ متجهاً ذاتياً لِـ A موافقاً للجذر المميّز λ إذا وفقط إذا كان $AX=\lambda X$.

من أجل الجذر المميّز $\lambda=1$، فإن المعادلة المصفوفية تصبح:

$$\begin{bmatrix}-7 & -6 & 2\\ -6 & -8 & -4\\ 2 & -4 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

والتي تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$7x+6y-2z=0 \quad , \quad 3x+4y+2z=0$$

ومنه نحصل على متجه ذاتي $\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$ موافق للجذر المميّز $\lambda_1=11$.

كذلك، بصورة مماثلة نرى أن $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ متجهان ذاتيان موافقان على الترتيب للجذرين المميّزين $-1, -4$.

نردّ المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة الحقيقية:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ولما كان $|P| = 1$ (بيّن ذلك)، فنجد أن التحويل العمودي للإحداثيات $X = PY$ يكون دوراناً. زد على ذلك، أن معادلات تدوير المحاور الإحداثية تعطى بالمعادلات:

$$x = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z')$$

$$y = \frac{1}{3}(-2x' + y' + 2z')$$

$$z = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z')$$

وأخيراً، يتضح من خلال حسابات بسيطة أن الصيغة الناظمية التربيعية المعطاة هي $11x'^2 - y'^2 - 4z'^2$.

2-الصيغ التربيعية الحقيقية المحددّة الموجبة:

تعريف (2-1):

يُقال عن صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ حيث $(|A| \neq 0)$ بِـ n من المتغيرات، إنها **محدّدة موجبة** إذا كانت رتبتها ودليلها متساويان.

وهكذا يمكن اختزال أية صيغة تربيعية محدّدة موجبة إلى الشكل القانوني $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2$.

توضيح:

بين أن الصيغة التربيعية الحقيقية: $q(x) = q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ محددة موجبة.

في الواقع، إذا طبقنا على المتغيرات تحويلاً خطياً $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $X = PY$ ،

فعندئذ ترد الصيغة $q(x)$ إلى الشكل القانوني: $(y_1 - 3y_2)^2 + y_2^2$

أي: $(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2$

وبملاحظة أن $q(x) \geq 0$ وأن $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ يتضح أن الصيغة التربيعية الحقيقية المعطاة محدّدة موجبة.

تعريف (2-2):

يُقال عن صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ حيث $(|A| = 0)$ إنها **شبه محدّدة موجبة** فيما إذا كانت الرتبة والدليل متساويين.

وهكذا يمكن اختزال أية صيغة تربيعية شبه محددة موجبة إلى الشكل القانوني $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_r^2$.

توضيح:

بين أن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

شبه محدّدة موجبة.

في الواقع أن الصيغة التربيعية ترد إلى الشكل التالي $(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$ وذلك بتطبيق تحويل خطي على المتغيرات كما ورد في التوضيح الأخير أو باتباع طريقة لاجرانج التي تتركز بشكل أساسي على تكرار عملية الإتمام إلى مربع كامل.

ونرى أن $q(x) \geq 0$ ولكن $q(x) = 0$ من أجل $x_1 = x_2 = x_3 = 2$

إذن $\mu = r = 2$ فالصيغة التربيعية المفروضة شبه محددة موجبة.

تعريف (2–3):

يُقال عن مصفوفة صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ إنها **محدّدة موجبة (شبه محدّدة موجبة**) إذا كانت الصيغة بحد ذاتها محدّدة موجبة (شبه محدّدة موجبة).

نورد دون برهان المبرهنات التالية:

مبرهنة (2–4):

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ محددّة موجبة هو أن تكون جميع الجذور المميّزة لِـA موجبة تماماً.

مبرهنة (2–5):

تكون الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ محدّدة موجبة إذا وفقط إذا كان $ac - b^2 > 0 \quad , \quad a > 0$.

ملاحظة:

إن المحددات الصغرى الرئيسة لمصفوفة صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ هي المحدّدات الناتجة عن حذف بعض الصفوف والأعمدة ذوات الأرقام المتماثلة.

وهكذا، فإن العناصر القطرية لمحدد أصغري رئيسي هي عناصر قطرية في A ذاتها.

مبرهنة (2–6):

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ محدّدة موجبة هو أن تكون جميع المحددات الصغرى الرئيسة لِـA موجبة تماماً.

أي:

$$a_{11} > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad ,...., \quad detA > 0$$

تمرين (2–7):

بين أن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

محدّدة موجبة.

الحل:

إن مصفوفة الصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والدالة المميّزة لِـA تكون:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 5\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

ومنه الجذور المميّزة لِـA هي $1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$

وبما أن الجذور المميّزة جميعها موجبة تماماً، يتضح أن الصيغة المعطاة محدّدة موجبة.

تمرين (2–8):

حدّد دليل الصيغة التربيعية الحقيقية ورتبته:

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 4yz$$

الحل:

إن مصفوفة الصيغة المعطاة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

والدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

والصيغة القانونية لِـ$q(v)$ هي: $4x'^2+y'^2-2z'^2$

ومنه $r=3$ ، وأن دليل الصيغة $\mu=2$.

3- تطبيقات الاختزال الناظمي في معادلات منحنيات الدرجة الثانية وسطوحها:

أولاً: منحنيات الدرجة الثانية:

تعريف (3-1):

إن المعادلة العامة **لمنحنيات الدرجة الثانية:**

$$F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

حيث المعاملات ليست جميعها أصفاراً، والعبارة $ax^2+2bxy+cy^2$ تدعى **الصيغة التربيعية المرافقة للمعادلة العامة.**

توضيح:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة المنحني:

$$3x^2+5xy-7y^2+2x+7=0$$

هي $3x^2+5xy-7y^2$

أما الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة المنحني $xy+y=0$ هي xy.

كذلك فإن الصيغة التربيعية $h(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ تكتب:

$$ax^2+2bxy+cy^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=X^T HX$$

حيث H مصفوفة متناظرة، وبالتالي يمكن اختزالها إلى الصيغة الناظمية، أي توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P_1 بحيث يكون $P_1^T HP_1=diag(\lambda_1,\lambda_2)$ باعتبار أن λ_1,λ_2 الجذور المميّزة لِ H. بالإضافة لذلك، المصفوفة المتعامدة P_1 تمثّل دوراناً إذا كان $\det P_1=1$.

إن معادلات دوران المحاور الإحداثية معينة بالمعادلة:

$$X=P_1X'\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$x=p_{11}x'+p_{12}y' \quad , \quad y=p_{21}x'+p_{22}y'$$

وعندها تأخذ المعادلة العامة لمنحني الدرجة الثانية الشكل:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2d'x'+2e'y'+f=0$$

أي:

$$[x' \quad y' \quad 1]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & d' \\ 0 & \lambda_2 & e' \\ d' & e' & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

ووفقاً لمفاهيم أُرسيت في الهندسة التحليلية، أن التمثيل البياني لمنحنيات الدرجة الثانية تكون قطوعاً مخروطية وأهمها قطوع ناقصة، زائدة، ومكافئة. وعلى أي حال، فإننا نهدف في هذه الفقرة من خلال دوران لجملة المحاور الإحداثية إلى التعرف على نوعية القطوع المخروطية.

إن المناقشة المذكورة تقودنا إلى عرض المبرهنة التالية:

مبرهنة (3–2):

إذا كانت $h(x,y) = X^T HX = ax^2 + 2bxy + cy^2$ الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة القطع المخروطي

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. فعندئذ بوساطة دوران لجملة المحاور الإحداثية $X' = PX$ تُختزل معادلة القطع إلى الصورة

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2dx' + 2ey' + f = 0$ حيث λ_1, λ_2 الجذور المميّزة لِـ H.

تمرين (3–3):

اختزل معادلة القطع المخروطي $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ إلى الصيغة الناظمية، عين نوعه.

الحل:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة القطع المخروطي:

$$h(x,y)=5x^2-4xy-8y^2=[x \quad y]\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=X^THX$$

والدالة المميّزة لِـ H هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 2\\ 2 & \lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-4)$$

وبالتالي الجذور المميّزة $4,9$.

المتجهات الذاتية الموافقة للجذر المميّز $\lambda=4$ هي الحلول غير الصفرية لجملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

التي تؤول إلى معادلة خطية وحيدة $x-2y=0$ وعليه نجد:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

وعليه $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ متجه ذاتي موافق للجذر المميّز $\lambda=4$.

بصورة مشابهة، نبين أن $\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$ متجه ذاتي موافق للجذر المميّز $\lambda=9$.

نرد المتجهين الذاتيين إلى الصيغة الناظمية فنحصل على المصفوفة المتعامدة الحقيقية:

$$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

بالإضافة لذلك، يُلاحظ بعمليات حسابية أن $P^T HP = diag(4,9)$

وأن $|P| = 1$ وبالتالي التحويل العمودي $X = PX'$ يكون دوراناً.

وبالتعويض في معادلة القطع المخروطي نجد:

$$(PX')^T H(PX') - 36 = 0$$

أي:

$$X'^T(P^T HP)X' - 36 = 0$$

وهذا يعني أن:

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} - 36 = 0$$

إذن معادلة القطع المخروطي تختزل إلى الصيغة الناظمية:

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

أي إلى الصيغة:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

والتي تمثل قطعاً ناقصاً.

ثانياً: سطوح الدرجة الثانية:

تعريف (3–4):

إن المعادلة العامة **لسطوح تربيعية** هي معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرات

من النمط: x, y, z

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+2gx+2hy+2Iz+j=0$$

حيث المعاملات أعداداً حقيقية ليست جميعها أصفاراً.

والصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح:

$$q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$$

$$=[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=X^T AX$$

حيث A مصفوفة متناظرة، وبالتالي توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث إن $P^T AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ حيث $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ الجذور المميّزة لِ A، بالإضافة إلى ذلك، إن المصفوفة المتعامدة P تمثل دوراناً إذا كان $\det P=1$.

إذا استخدمنا الآن معادلات دوران المحاور الإحداثية $X=PX'$ تصبح عندئذ معادلة السطح بعد الدوران:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2g'x'+2h'y'+2I'z'+j=0$$

ومنه نجد المبرهنة:

مبرهنة (5–3):

إذا كانت:

$$q(x,y,z)=X^T AX=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$$

الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح:

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+2gx+2hy+2Iz+j=0$$

فعندئذ بوساطة دوران المحاور الإحداثية $X=PX'$ تختزل معادلة السطح إلى الصورة $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2g'x'+2h'y'+2i'z'+j=0$ حيث $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ الجذور المميّزة لِـ A.

تمرين (3–6):

اختزل معادلة السطح:

$$4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz-3=0$$

إلى الصيغة الناظمية وبين نوعه.

الحل:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح المعطى:

$$q(x,y,z)=4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz$$

$$=[x\quad y\quad z]\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=X^TAX$$

ومن الواضح فضلاً عن ذلك، أن الجذور المميّزة لِـ A هي $\lambda_1=2$ ، $\lambda_2=8$.

من ناحية ثانية، إن المصفوفة المتعامدة:

$$P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

تختزل عمودياً المصفوفة A إلى الصورة القطرية $P^T AP = diag(2,2,8)$.
وإن محددها يساوي الواحد. إذا عوضنا الآن معادلات دوران المحاور
الإحداثية $X = PX'$ في معادلة السطح التربيعي نجد:

$$(PX')^T A(PX') - 3 = 0$$

أي:

$$X'^T (P^T AP) X' - 3 = 0$$

وهذا يعني:

$$[x' \quad y' \quad z']\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

ومنه:

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

والمساواة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة:

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

والتي تمثل معادلة سطح ناقص.

تمرين (3−7):

اختزل معادلة السطح:

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x + 6y + 6z - 1 = 0$$

إلى الصيغة الناظمية وبين نوعه وعين عناصره التناظرية واكتب معادلات تغيير المحاور الإحداثية.

الحل:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح هي:

$$q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$$

$$= [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

الدالة المميّزة لِـA تعطى بالصورة:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)$$

وبالتالي الجذور المميّزة $\lambda = 1, -2, 4$.

من جهة أخرى، إن المتجهات الذاتية الموافقة للجذور المميّزة

$\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = 4$ هي على الترتيب:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نرد المتجهات الثلاثة الأخيرة إلى الصيغة الناظمية فنحصل على المصفوفة المتعامدة:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

التي محددها يساوي الواحد، وتحقق $P^T AP = diag(1,-2,4)$ ، وعندئذ يكون التحويل الخطي المطبق والذي هو دوران:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

ومنه نجد:

$$x = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z')$$

$$y=\frac{1}{3}(-2x'+y'+2z')$$
$$z=\frac{1}{3}(x'-2y'+2z')$$

إذن معادلة السطح المعطاة تختزل إلى الصيغة الناظمية:

$$4x'^2+y'^2-2z'^2+4(2x'+2y'+z')+$$
$$+2(-2x'+y'+2z')+2(x'-2y'+2z')-1=0$$

أو:

$$4x'^2+y'^2-2z'^2+6x'+12z'-1=0$$

والتي تكتب أيضاً بالشكل التالي:

$$4(x'+\frac{3}{4})^2+(y'+3)^2-2(z'-3)^2=-\frac{23}{4}$$

نجري الآن انسحاباً للمحاور الإحداثية:

$$x'+\frac{3}{4}=X \quad , \quad y'+3=Y \quad , \quad z'-3=Z$$

ومعادلة السطح عندئذ بالنسبة للإحداثيات XYZ هي:

$$4X^2+Y^2-2Z^2=-\frac{23}{4}$$

وتمثل قطعاً زائداً ذا فرعين، له مركز تناظر هو:

$$x'=-\frac{3}{4} \quad , \quad y'=-3 \quad , \quad z'=3$$

أي أن مركز التناظر بالنسبة للإحداثيات x,y,z هو:

$$(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{15}{4})$$

4- طريقة غاوس (GAUSS) في اختزال صيغة تربيعية حقيقية:

في هذه الفقرة سنقدم طريقة تعود إلى غاوس لاختزال صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ إلى مجاميع مربعة مستقلة خطياً.

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية بـn من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ ، رتبتها r.

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^T AX$$

الحالة الأولى:

لنفترض أن $q(x)$ تحوي على الأقل حداً تربيعياً مختلفاً عن الصفر، أي أن المصفوفة A تحوي على الأقل عنصراً قطرياً واحداً مختلفاً عن الصفر، ولنعتبره a_{11}، فعندئذ تحت هذا الافتراض نحاول إعادة صياغة $q(x)$ بالشكل:

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + (2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)x_i + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

$$= a_{11}^{-1}[a_{11}^2 x_1^2 + (2a_{11}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j)x_1] + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

وإذا لاحظنا أن الحد الموجود ضمن القوس المربع يكتب:

$$(a_{11}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 - (\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)^2 - (\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2$$

وهكذا يمكن كتابة الصيغة التربيعية الحقيقية على الشكل:

$$q(x) = a_{11}^{-1}(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)^2 + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j - a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

نشتق الآن الصيغة التربيعية بالنسبة للمتغير x_1 ،

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j = 2\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$$

ثم نضع:

$$q_1(x) = q(x) - a_{11}^{-1}[\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1}]^2 = q(x) - a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2$$

$$= 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j - a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

$$= 2\sum_{2\le i<j\le n} (a_{ij} - a_{11}^{-1}a_{1j}a_{ij})x_i x_j + \sum_{j=2}^{n} a_{jj} - a_{11}^{-1}a_{1j})^2 x_j^2$$

فنحصل على صيغة تربيعية حقيقية جديدة لا تحوي المتغير x_1 طالما أن $\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 0$. بالإضافة إلى ذلك، تتصف الصيغة التربيعية الناتجة بأنها مطابقة للصفر أو أنها صيغة تربيعية في $(n-1)$ من المتغيرات $x_2, x_3, ..., x_n$ على الأكثر. ففي الحالة الأولى يكون اختزال الصيغة التربيعية المعطاة تاماً. وفي الحالة الأخيرة، وعلى فرض أن معامل حد تربيعي واحد على الأقل في $q_1(x)$ مختلف عن الصفر، فيمكن، بتكرار ما ورد أعلاه من أجل الصيغة التربيعية $q_1(x)$ للحصول على صيغة تربيعية جديدة $q_2(x)$ حيث تكون إما مطابقة للصفر، أو أنها صيغة في $(n-2)$ من المتغيرات على الأكثر. ويمكن أن تستمر هذه الطريقة في فصل الحدود المرتبة طالما احتوى الباقي $q_r(x)$ حداً مربعاً واحداً على الأقل معاملة غير الصفر، وربما حصلنا، بعد فصل r من الحدود المربعة، على باقٍ يطابق الصفر.

وبالإضافة إلى ذلك، فإن المناقشة تبيّن أننا برهنا:

مبرهنة (4–1):

كل صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ رتبتها r وبِـ n من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ ، تختزل إلى عبارة تحوي حدوداً مربعة فقط من الشكل:

$$a_{11}(L_1(x))^2 + a_{22}^{-1}(L_2(x))^2 + ... + a_{rr}^{-1}(L_r(x))^2, \quad (a_{ii} \neq 0)$$

ملاحظة:

من الملائم أن ندعو من الآن وصاعداً الصيغة:

$$a_{11}(L_1(x))^2 + a_{22}^{-1}(L_2(x))^2 + ... + a_{rr}^{-1}(L_r(x))^2$$

بالصيغة القانونية.

بالإضافة لذلك، نورد النتيجة التالية:

نتيجة (4–2):

إن الأشكال الخطية $L_1, L_2, ..., L_r$ مستقلة خطياً.

تمرين (4–3):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

أوجد A مصفوفة الصيغة، ثم رد الصيغة باستخدام طريقة غاوس إلى صيغة قانونية.

الحل:

يُلاحظ أن:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad rank(q)=3$$

بما أن $a_{11}=-1\neq 0$، باتباع المناقشة المذكورة لتوّنا، نحصل على:

$$L_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1}=-x_1-2x_2+x_3$$

$$q_1(x)=q(x)-a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2=q(x)+(-x_1-2x_2+x_3)^2=6x_2^2-8x_2x_3$$

ولما كان $q_1(x)$ صيغة تربيعية حقيقية لا تطابق الصفر بِـ المتغيرات x_2,x_3، وطالما أن $a_{22}=6\neq 0$ نجد بطريقة مماثلة أن:

$$L_2(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial q_1}{\partial x_2}=6x_2-4x_3$$

$$q_2(x)=q_1(x)-a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2=-\frac{8}{3}x_3^2$$

حيث $q_2(x)$ صيغة تربيعية حقيقية لا تحوي المتغيرات x_1,x_2. وأخيراً بدمج النتائج الواردة أعلاه، يتضح:

$$q(x)=a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2+a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2-\frac{8}{3}x_3^2$$

$$=(x_1+2x_2-x_3)^2+\frac{1}{6}(6x_2-4x_3)^2-\frac{8}{3}x_3^2$$

الحالة الثانية:

لنعتبر أن الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)$ لا تحوي أي حد تربيعي $a_{ii}=0$ $(1 \le i \le n)$ أي:

$$q(x) = 2\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

ولنفترض ان $a_{12} \ne 0$ ولنعد إلى الصيغة الأصلية $q(x)$ ونكتبها كما يلي:

$$q(x) = 2a_{12}x_1x_2 + (2\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j)x_1 + (2\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j)x_2 + 2\sum_{3 \le i < j \le n}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

ولنفرض الآن:

$$\varphi(x) = \sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j \text{ ، } \psi(x) = \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j \text{ ، } \theta(x) = 2\sum_{3 \le i < j \le n}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

فعندئذ تأخذ $q(x)$ الصيغة:

$$\begin{aligned} q(x) &= 2a_{12}x_1x_2 + 2x_1\varphi(x) + 2x_2\psi(x) + \theta(x) \\ &= 2a_{12}^{-1}[a_{12}^2x_1x_2 + (a_{12}\varphi(x))x_1 + (a_{12}\psi(x))x_2] + \theta(x) \\ &= 2a_{12}^{-1}[(a_{12}x_1 + \psi(x))(a_{12}x_2 + \varphi(x)) - \varphi(x)\psi(x)] + \theta(x) \\ &= 2a_{12}^{-1}(a_{12}x_1 + \psi(x))(a_{12}x_2 + \varphi(x)) - 2a_{12}^{-1}\varphi(x)\psi(x) + \theta(x) \end{aligned}$$

من جهة أخرى، باعتبار أن:

$$L_1(x) = a_{12}x_1 + \psi(x) \quad , \quad L_2(x) = a_{12}x_2 + \varphi(x)$$

$$q_1(x) = -2a_{12}^{-1}\varphi(x)\psi(x) + \theta(x)$$

فعندئذ نستنتج أن:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_2} \quad , \quad L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1}$$

وأن كليهما شكل خطي على الفضاء $E = R^n$.

وبالإضافة لذلك، نرى أن:

$$q_1(x) = 2\sum_{3\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j - 2a_{12}^{-1}(\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j)(\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j)$$

$$= 2\sum_{3\le i<j\le n} (a_{ij} - a_{12}^{-1}a_{1j}a_{2j})x_ix_j - 2a_{12}^{2}(\sum_{j=3}^{n} a_{1j}a_{2j}x_j)$$

وبالتالي $q_1(x)$ كثير حدود متجانس من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغيرات $x_3, x_4, ..., x_n$ وبمعاملات من حقل الأعداد الحقيقية، أي $q_1(x)$ صيغة تربيعية حقيقية لا تحوي المتغيرات x_1, x_2 على الإطلاق. وعليه الصيغة $q(x)$ تتحول بموجب ما ذكر أعلاه إلى الصورة:

$$q(x) = 2a_{12}^{-1}L_1(x)L_2(x) + q_1(x)$$

وطالما أن الصيغة التربيعية الناتجة $q_1(x)$ تُختزل بموجب المبرهنة (4−1) إلى عبارة تحوي حدود مربعة مستقلة خطياً، يتضح عندئذ:

$$q(x) = 2a_{12}^{-1}L_1(x)L_2(x) + \alpha_1 L_1'^2 + \alpha_2 L_2'^2 + ... + \alpha_m L_m'^2$$

ومن الواضح أن يرى القارئ أن:

$$2L_1L_2 = \frac{1}{2}[(L_1 + L_2)^2 - (L_1 - L_2)^2] = \frac{1}{2}(L'^2 - L''^2)$$

وعليه، $q(x)$ تكتب بالصورة:

$$q(x) = a_{12}^{-1}L'^2 - a_{12}^{-1}L''^2 + \alpha_1 L_1'^2 + \alpha_2 L_2'^2 + ... + \alpha_m L_m'^2$$

بالإضافة لذلك $L', L'', L_1', L_2', ..., L_m'$، أشكال خطية على R^n مستقلة خطياً.

في الواقع، إذا كانت $\beta', \beta'', \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ عناصر حقيقية بحيث إن:

$$\beta' L' + \beta'' L'' + \beta_1 L_1' + \beta_2 L_2' + ... + \beta_m L_m' = 0$$

فعندئذ نجد:

$$(\beta' + \beta'')L_1 + (\beta' - \beta'')L_2 + \beta_1 L_1' + \beta_2 L_2' + ... + \beta_m L_m' = 0$$

وعليه يكون:

$$\beta' + \beta'' = \beta' - \beta'' = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$$

وذلك لأن الجملة $L_1, L_2, L'_1, L'_2, ..., L'_m$ مستقلة خطياً.

وهكذا، فإننا نكون قد برهنا المبرهنة التالية:

مبرهنة (4–4):

كل صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ بـ n من المتغيرات ورتبتها r، تُختزل إلى الصيغة القانونية $c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + ... + c_r y_r^2$ حيث المعاملات الحقيقية c_i جميعها تختلف عن الصفر، وأن $y_1, y_2, ..., y_r$ أشكال خطية مستقلة خطياً.

تمرين (4–5):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - x_2x_3 + 5x_1x_3$$

طبق طريقة غاوس في اختزال $q(x)$ إلى الصيغة القانونية.

الحل:

يُلاحظ أن كل $a_{ii} = 0$ ولكن $a_{13} = \frac{5}{2} \neq 0$. عندئذ وفقاً لما ورد في برهان المبرهنة الأخيرة، نعتبر:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_3} = \frac{1}{2}(5x_1 - x_2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(5x_3 + 2x_2)$$

$$q_1(x) = q(x) - 2a_{13}^{-1}L_1(x)L_2(x)$$

$$= 5x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_1x_2 - \frac{1}{5}[(L_1 + L_3)^2 - (L_1 - L_3)^2] = \frac{2}{5}x_2^2$$

وبالتالي نجد:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{5}[(L_1+L_3)^2-(L_1-L_3)^2]+\frac{2}{5}x_2^2 \\
&= \frac{1}{20}[(5x_1+x_2+5x_3)^2-(5x_1-3x_2-5x_3)^2]+\frac{2}{5}x_2^2 \\
&= \frac{5}{4}(x_1+\frac{1}{5}x_2+x_3)^2-\frac{5}{4}(x_1-\frac{3}{5}x_2-x_3)^2+\frac{2}{5}x_2^2 \\
&= \frac{5}{4}[L_1'(x)]^2-\frac{5}{4}[L_2'(x)]^2+\frac{2}{5}[L_3'(x)]^2
\end{aligned}
$$

وبالتالي تم اختزال الصيغة التربيعية الحقيقية إلى الصيغة القانونية.

5- تمارين محلولة:

تمرين (5-1):

اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x)=q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$$

إلى الصيغة القانونية واستنتج أن الصيغة التربيعية $q(x)$ محددة موجبة.

الحل:

من الملاحظ أن $a_{22}=1\neq 0$ ونشير إلى القارئ أنه من الملائم مع أنه غير ضروري أن ننطلق من المعامل غير الصفري a_{22}، وبالتالي وفقاً للمبرهنة (4-4)، لنعتبر:

$$L_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_2}=\frac{1}{2}[2x_1+2x_2+2x_3]=x_1+x_2+x_3$$

$$q_1(x)=q(x)-a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2=q(x)-(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_3^2$$

وبالتالي نحصل على صيغة تربيعية حقيقية بالمتغيرين x_1, x_3 ،

من ناحية ثانية، طالما أن $a_{11} = 1 \neq 0$ نطبق الأسلوب السابق فنجد:

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1} = x_1$$

$$q_2(x) = q_1(x) - x_1^2 = x_3^2$$

ومنه نجد:

$$q(x) = a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2 + a_{11}^{-1}[L_2(x)]^2 + x_3^2$$

أي:

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2$$

وأخيراً، بما أن دليل الصيغة التربيعية μ يساوي عدد المعاملات الموجبة بالصيغة القانونية يتضح أن $\mu = 3$. إذن إن الصيغة التربيعية محددة موجبة لأن رتبتها ودليلها متساويان $(\mu = r = 3)$.

تمرين (5–2):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

حدّد توقيع الصيغة $Sig(q)$ واستنتج أن الصيغة التربيعية محدّدة موجبة.

الحل:

نختزل قبل كل شيء الصيغة التربيعية المعطاة إلى الصيغة القانونية بموجب غاوس.في الحقيقة، بما أن $a_{11} = 2 \neq 0$ ، فعندئذ:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$q_1(x) = q(x) - a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2$$

$$= q(x) - \frac{1}{2}(2x_1 + x_2 - x_3)^2$$

$$= -\frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + 7x_2x_3$$

كذلك، بما أن $a_{22} = -\frac{3}{2} \neq 0$، نضع:

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(-3x_2 + 7x_3)$$

$$q_2(x) = q_1(x) - a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2$$

$$= q_1(x) + \frac{1}{6}(9x_2^2 + 49x_3^2 - 42x_2x_3)$$

$$= \frac{23}{3}x_3^2$$

ومنه نجد:

$$q(x) = a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2 + a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2 + \frac{3}{23}[L_3(x)]^2$$

حيث اعتبرنا $L_3(x) = \frac{23}{3}x_3$

نستنتج مما ورد أعلاه:

$$|A| \neq \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad \begin{matrix} rank(q) = 3 \\ Sig(q) = (3,0) \end{matrix}$$

فالصيغة التربيعية عندئذ محددة موجبة.

تمرين (3–5):

أوجد قيمة الوسيط λ كي تكون الصيغة التربيعية محددة موجبة:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

الحل:

يُلاحظ أن $a_{22} = 2 \neq 0$ ، وبالتالي نجد:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_2} = 2(x_1 + x_2)$$

$$\begin{aligned} q_1(x) &= q(x) - a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2 = q(x) - 2(x_1 + x_2)^2 \\ &= q(x) - 2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) \\ &= (\lambda - 2)x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \end{aligned}$$

من ناحية أخرى، بما أن $a_{33} = 1 \neq 0$ نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned} q_2(x) &= q_1(x) - a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2 \\ &= q_1(x) - [\frac{1}{2}\frac{\partial q_1}{\partial x_3}]^2 \\ &= q_1(x) - (x_1 + x_3)^2 \\ &= q_1(x) - (x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) \\ &= (\lambda - 3)x_3^2 \end{aligned}$$

وهكذا تختزل الصيغة التربيعية المعطاة إلى الصيغة القانونية:

$$q(x) = a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2 + a_{33}^{-1}[L_2(x)]^2 + (\lambda - 3)x_1^2$$

$$q(x) = 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (\lambda - 3)x_1^2$$

يتضح أن الصيغة المفروضة محددة موجبة إذا كان $\lambda > 3$.

تمرينات الفصل

1− اختزل باستخدام طريقة غاوس كلاً من الصيغ التربيعية الحقيقية التي نذكر مصفوفاتها فيما يلي إلى عبارة تحوي مجاميع مربعة مستقلة خطياً.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2− بين فيما إذا كانت المصفوفات التالية محددة موجبة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3− اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية إلى عبارة تحوي مجاميع مربعة مستقلة خطياً (غاوس).

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1 \cos\lambda + x_2 \sin\lambda), \quad \lambda \in R$$

4- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة صيغة تربيعية حقيقية محدّدة موجبة فإن A^2 تكون كذلك.

5- أوجد رتبة الصيغة التربيعية ودليلها:

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

6- اختزل الصيغ التربيعية الآتية إلى الشكل الناظمي، وذلك بتدوير المحاور الإحداثية، واكتب معادلات دوران هذه المحاور في كل حالة.

$$q(x,y,z) = 3x^2 - 3y^2 - 5z^2 - 2xy - 6xz - 6yz$$

$$q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

7- اختزل معادلة كل من السطوح التالية إلى الشكل الناظمي وبين نوع السطح وعين مركزه:

$$2x^2 + 4yz + 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 + 8xy - 4xz - 4yz - 2 = 0$$

★★★★★★★★★★★★★★★★★★

الفصل الرابع

اختزال الصيغ التربيعية الحقيقية

الصيغة التربيعية الحقيقية بـn من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ تُعرف بالعبارة:

$$q(x) = q(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$$

حيث المعاملات a_{ij} أعداداً حقيقية.

إذا اعتبرنا: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ مصفوفة من عمود واحد، فيمكن عندئذ كتابة الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)$ على النحو الآتي:

$$q(x) = [x_1 \quad x_2 \quad ..... \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T AX$$

حيث $A = (a_{ij})$ مصفوفة متناظرة تدعى **مصفوفة الصيغة التربيعية الحقيقية** .

ورتبة المصفوفة تدعى **رتبة الصيغة.**

1- اختزال صيغة تربيعية حقيقية إلى الشكل الناظمي:

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x) = X^T AX$، ولنفترض أن الجذور المميّزة لمصفوفة الصيغة A هي $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$، فعندئذ وفقاً لمفاهيم أثبتناها في الفقرة (3) من الفصل الثاني، توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث إنّ $P^T AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

إذا طبقنا على المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ تحويلاً مصفوفته P، أي إذا وضعنا $X = PY$ فنحصل على صيغة تربيعية حقيقية تحوي حدوداً مربعة فقط من النمط $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$ مصفوفتها $P^T AP$ وتدعى **الصيغة الناظمية لـِ** $q(x)$.

من الملائم تسمية التحويل الوارد أعلاه والذي مصفوفته P متعامدة **بالتحويل المتعامد**.

وبالتالي نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (1-1):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x) = X^T AX$ مصفوفتها A، ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ الجذور المميّزة لـِ A، فيوجد تحويل حقيقي متعامد $X = PY$ تتحول بوساطته $q(x)$ إلى الصيغة الناظمية $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$.

تعريف (1-2):

يُقال عن التحويل المتعامد $X = PY$ للإحداثيات بـِ **دوران للمحاور الإحداثية**

عندما يكون $|P|=1$. ويشار عندئذ للإحداثيات الجديدة بِ **الإحداثيات الناظمية**.

تعريف (1–3)**: دليل القصور الذاتي:**

يدعى عدد المعاملات الموجبة في الصيغة الناظمية **دليل القصور الذاتي** للصيغة أو فقط دليل الصيغة.

توضيح:

إن صيغة تربيعية حقيقية رتبتها r يمكن أن تختزل للشكل:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_r y_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0)$$

تمرين (1–4)**:**

اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_3^2$$

إلى عبارة تحوي حدوداً مربعة فقط (الصيغة الناظمية).

الحل:

إن مصفوفة الصيغة التربيعية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

والدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

والجذور المميّزة تكون: $\lambda = 2$ (مكرر)، $\lambda = 8$ (بسيط).

لنبحث عن المتجهات الذاتية الناشئة عن الجذور المميّزة.

في الواقع، يكون $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ متجهاً ذاتياً لِـ A مناظراً للجذر المميز λ إذا وفقط إذا كان $AX = \lambda X$.

من أجل الجذر المميز $\lambda = 2$. إن المعادلة المصفوفية $AX = \lambda X$ تصبح:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التي تؤول إلى معادلة خطية وحيدة $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

ومنه وفقاً لمفاهيم أُرسيت سابقاً، نجد متجهين ذاتيين متعامدين:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

واللذين يكوّنان أساساً للفضاء الذاتي المناظر للجذر المميز $\lambda = 2$.

من ناحية ثانية، من السهل على القارئ رؤية أن المتجه $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متعامد مع كلٍّ من X_1, X_2 .

نرد الآن المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة الحقيقية، فنجد:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

بالإضافة لذلك، من السهل على القارئ إثبات أن $P^T AP = diag(2,2,4)$.

(2) نأخذ الآن التحويل الحقيقي المتعامد:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \end{aligned}$$

فنرى من خلال حسابات فعلية أن التحويل المتعامد المذكور يحول الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)$ إلى الصيغة القانونية $2y_1^2+2y_2^2+8y_3^2$.

ملاحظة:

يجدر بنا تنبيه القارئ إلى أن التحويل الحقيقي المتعامد الذي بوساطته تحوّل الصيغة التربيعية إلى الصيغة القانونية لا ينطبق بالضرورة على صيغ تربيعية معاملاتها أعداداً مركبة.

تمرين (1–5):

اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x,y,z)=4x^2+3y^2-z^2-12xy+4xz-8yz$$

إلى الصيغة الناظمية $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$ $(\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3)$ وذلك بتدوير المحاور الإحداثية، واكتب معاملات تدوير هذه المحاور.

الحل:

نكتب الصيغة التربيعية بالصورة:

$$q(x,y,z)=[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ثم نبحث عن الجذور المميّزة لمصفوفة الصيغة A .

في الواقع أن الدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 6 & -2 \\ 6 & \lambda-3 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda-11)$$

ومنه الجذور المميّزة لِـA تكون: $\lambda_1 = 11 \quad , \quad \lambda_2 = -1 \quad , \quad \lambda_3 = -4$

المتجهات الذاتية الناشئة عن الجذور المميّزة:

يكون $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ متجهاً ذاتياً لِـ A موافقاً للجذر المميّز λ إذا وفقط إذا كان $AX = \lambda X$.

من أجل الجذر المميّز $\lambda = 1$، فإن المعادلة المصفوفية تصبح:

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والتي تؤول إلى المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$7x + 6y - 2z = 0 \quad , \quad 3x + 4y + 2z = 0$$

ومنه نحصل على متجه ذاتي $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ موافق للجذر المميّز $\lambda_1 = 11$.

كذلك، بصورة مماثلة نرى أن $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ متجهان ذاتيان موافقان على الترتيب للجذرين المميّزين $-1, -4$.

نردّ المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة الحقيقية:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ولما كان $|P| = 1$ (بيّن ذلك)، فنجد أن التحويل العمودي للإحداثيات $X = PY$ يكون دوراناً. زد على ذلك، أن معادلات تدوير المحاور الإحداثية تعطى بالمعادلات:

$$x = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z')$$
$$y = \frac{1}{3}(-2x' + y' + 2z')$$
$$z = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z')$$

وأخيراً، يتضح من خلال حسابات بسيطة أن الصيغة الناظمية التربيعية المعطاة هي $11x'^2 - y'^2 - 4z'^2$.

2- الصيغ التربيعية الحقيقية المحدّدة الموجبة:

تعريف (2-1):

يُقال عن صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ حيث $(|A| \neq 0)$ بِـ n من المتغيرات، إنها **محدّدة موجبة** إذا كانت رتبتها ودليلها متساويان.

وهكذا يمكن اختزال أية صيغة تربيعية محدّدة موجبة إلى الشكل القانوني $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2$.

توضيح:

بين أن الصيغة التربيعية الحقيقية: $q(x) = q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ محددة موجبة.

في الواقع، إذا طبقنا على المتغيرات تحويلاً خطياً $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $X = PY$،

فعندئذ ترد الصيغة $q(x)$ إلى الشكل القانوني: $(y_1 - 3y_2)^2 + y_2^2$

أي: $(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2$

وبملاحظة أن $q(x) \geq 0$ وأن $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ يتضح أن الصيغة التربيعية الحقيقية المعطاة محدّدة موجبة.

تعريف (2-2):

يُقال عن صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ حيث $(|A| = 0)$ إنها **شبه محدّدة موجبة** فيما إذا كانت الرتبة والدليل متساويين.

وهكذا يمكن اختزال أية صيغة تربيعية شبه محددة موجبة إلى الشكل القانوني $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2$.

توضيح:

بين أن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

شبه محددّة موجبة.

في الواقع أن الصيغة التربيعية ترد إلى الشكل التالي $(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$ وذلك بتطبيق تحويل خطي على المتغيرات كما ورد في التوضيح الأخير أو باتباع طريقة لاجرانج التي تتركز بشكل أساسي على تكرار عملية الإتمام إلى مربع كامل.

ونرى أن $q(x) \geq 0$ ولكن $q(x) = 0$ من أجل $x_1 = x_2 = x_3 = 2$

إذن $\mu = r = 2$ فالصيغة التربيعية المفروضة شبه محددة موجبة.

تعريف (2–3):

يُقال عن مصفوفة صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ إنها **محددّة موجبة (شبه محددّة موجبة**) إذا كانت الصيغة بحد ذاتها محددّة موجبة (شبه محددّة موجبة).

نورد دون برهان المبرهنات التالية:

مبرهنة (2–4):

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ محدّدة موجبة هو أن تكون جميع الجذور المميّزة لِـA موجبة تماماً.

مبرهنة (2–5):

تكون الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ محدّدة موجبة إذا وفقط إذا كان $ac - b^2 > 0 \quad , \quad a > 0$.

ملاحظة:

إن المحددات الصغرى الرئيسة لمصفوفة صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ هي المحدّدات الناتجة عن حذف بعض الصفوف والأعمدة ذوات الأرقام المتماثلة.

وهكذا، فإن العناصر القطرية لمحدد أصغري رئيسي هي عناصر قطرية في A ذاتها.

مبرهنة (2–6):

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون صيغة تربيعية حقيقية $q(x) = X^T AX$ محدّدة موجبة هو أن تكون جميع المحددات الصغرى الرئيسة لِـA موجبة تماماً.

أي:

$$a_{11} > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad ,...., \quad detA > 0$$

تمرين (2–7):

بين أن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

محدّدة موجبة.

الحل:

إن مصفوفة الصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والدالة المميّزة لـِA تكون:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 5\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

ومنه الجذور المميّزة لـِA هي $1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$

وبما أن الجذور المميّزة جميعها موجبة تماماً، يتضح أن الصيغة المعطاة محدّدة موجبة.

تمرين (2–8):

حدّد دليل الصيغة التربيعية الحقيقية ورتبته:

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 4yz$$

الحل:

إن مصفوفة الصيغة المعطاة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

والدالة المميّزة لِـ A هي:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

والصيغة القانونية لِـ $q(v)$ هي: $4x'^2 + y'^2 - 2z'^2$

ومنه $r = 3$ ، وأن دليل الصيغة $\mu = 2$.

3- تطبيقات الاختزال الناظمي في معادلات منحنيات الدرجة الثانية وسطوحها:

أولاً: منحنيات الدرجة الثانية:

تعريف (3-1):

إن المعادلة العامة **لمنحنيات الدرجة الثانية:**

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

حيث المعاملات ليست جميعها أصفاراً، والعبارة $ax^2 + 2bxy + cy^2$ تدعى **الصيغة التربيعية المرافقة للمعادلة العامة.**

توضيح:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة المنحني:

$$3x^2+5xy-7y^2+2x+7=0$$

هي $3x^2+5xy-7y^2$

أما الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة المنحني $xy+y=0$ هي xy.

كذلك فإن الصيغة التربيعية $h(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ تكتب:

$$ax^2+2bxy+cy^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=X^T HX$$

حيث H مصفوفة متناظرة، وبالتالي يمكن اختزالها إلى الصيغة الناظمية، أي توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P_1 بحيث يكون $P_1^T HP_1=diag(\lambda_1,\lambda_2)$ باعتبار أن λ_1,λ_2 الجذور المميّزة لِ H. بالإضافة لذلك، المصفوفة المتعامدة P_1 تمثّل دوراناً إذا كان $\det P_1=1$.

إن معادلات دوران المحاور الإحداثية معينة بالمعادلة:

$$X=P_1X'\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$x=p_{11}x'+p_{12}y' \quad , \quad y=p_{21}x'+p_{22}y'$$

وعندها تأخذ المعادلة العامة لمنحني الدرجة الثانية الشكل:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2d'x'+2e'y'+f=0$$

أي:

$$[x' \quad y' \quad 1]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & d' \\ 0 & \lambda_2 & e' \\ d' & e' & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

ووفقاً لمفاهيم أُرسيت في الهندسة التحليلية، أن التمثيل البياني لمنحنيات الدرجة الثانية تكون قطوعاً مخروطية وأهمها قطوع ناقصة، زائدة، ومكافئة. وعلى أي حال، فإننا نهدف في هذه الفقرة من خلال دوران لجملة المحاور الإحداثية إلى التعرف على نوعية القطوع المخروطية.

إن المناقشة المذكورة تقودنا إلى عرض المبرهنة التالية:

مبرهنة (3–2):

إذا كانت $h(x,y) = X^T HX = ax^2 + 2bxy + cy^2$ الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة القطع المخروطي $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. فعندئذ بوساطة دوران لجملة المحاور الإحداثية $X' = PX$ تُختزل معادلة القطع إلى الصورة $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2dx' + 2ey' + f = 0$ حيث λ_1, λ_2 الجذور المميّزة لِـ H.

تمرين (3–3):

اختزل معادلة القطع المخروطي $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ إلى الصيغة الناظمية، عين نوعه.

الحل:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة القطع المخروطي:

$$h(x,y)=5x^2-4xy-8y^2=[x\quad y]\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=X^T HX$$

والدالة المميّزة لِـ H هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 2\\ 2 & \lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-4)$$

وبالتالي الجذور المميّزة $4,9$.

المتجهات الذاتية الموافقة للجذر المميّز $\lambda=4$ هي الحلول غير الصفرية لجملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

التي تؤول إلى معادلة خطية وحيدة $x-2y=0$ وعليه نجد:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

وعليه $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ متجه ذاتي موافق للجذر المميّز $\lambda=4$.

بصورة مشابهة، نبين أن $\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$ متجه ذاتي موافق للجذر المميّز $\lambda=9$.

نرد المتجهين الذاتيين إلى الصيغة الناظمية فنحصل على المصفوفة المتعامدة الحقيقية:

$$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

بالإضافة لذلك، يُلاحظ بعمليات حسابية أن $P^T HP = diag(4,9)$

وأن $|P| = 1$ وبالتالي التحويل العمودي $X = PX'$ يكون دوراناً.

وبالتعويض في معادلة القطع المخروطي نجد:

$$(PX')^T H(PX') - 36 = 0$$

أي:

$$X'^T (P^T HP)X' - 36 = 0$$

وهذا يعني أن:

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} - 36 = 0$$

إذن معادلة القطع المخروطي تختزل إلى الصيغة الناظمية:

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

أي إلى الصيغة:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

والتي تمثل قطعاً ناقصاً.

ثانياً: سطوح الدرجة الثانية:

تعريف (3–4):

إن المعادلة العامة **لسطوح تربيعية** هي معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرات

من النمط: x, y, z

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+2gx+2hy+2Iz+j=0$$

حيث المعاملات أعداداً حقيقية ليست جميعها أصفاراً.

والصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح:

$$q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$$

$$=[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=X^T AX$$

حيث A مصفوفة متناظرة، وبالتالي توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث إن $P^T AP = diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ حيث $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ الجذور المميّزة لِ A ، بالإضافة إلى ذلك، إن المصفوفة المتعامدة P تمثل دوراناً إذا كان $\det P = 1$.

إذا استخدمنا الآن معادلات دوران المحاور الإحداثية $X = PX'$ تصبح عندئذ معادلة السطح بعد الدوران:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2g'x'+2h'y'+2I'z'+j=0$$

ومنه نجد المبرهنة:

مبرهنة (3−5):

إذا كانت:

$$q(x,y,z)=X^T AX=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$$

الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح:

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+2gx+2hy+2Iz+j=0$$

فعندئذ بوساطة دوران المحاور الإحداثية $X=PX'$ تختزل معادلة السطح إلى الصورة $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2g'x'+2h'y'+2i'z'+j=0$ حيث $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ الجذور المميّزة لِـA.

تمرين (6–3):

اختزل معادلة السطح:

$$4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz-3=0$$

إلى الصيغة الناظمية وبين نوعه.

الحل:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح المعطى:

$$q(x,y,z)=4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz$$

$$=[x\quad y\quad z]\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=X^TAX$$

ومن الواضح فضلاً عن ذلك، أن الجذور المميّزة لِـA هي $\lambda_1=2$، $\lambda_2=8$.

من ناحية ثانية، إن المصفوفة المتعامدة:

$$P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

تختزل عمودياً المصفوفة A إلى الصورة القطرية $P^T AP = diag(2,2,8)$.

وإن محددها يساوي الواحد. إذا عوضنا الآن معادلات دوران المحاور الإحداثية $X = PX'$ في معادلة السطح التربيعي نجد:

$$(PX')^T A(PX') - 3 = 0$$

أي:

$$X'^T (P^T AP) X' - 3 = 0$$

وهذا يعني:

$$[x' \quad y' \quad z'] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

ومنه:

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

والمساواة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة:

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

والتي تمثل معادلة سطح ناقص.

تمرين (3–7):

اختزل معادلة السطح:

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x + 6y + 6z - 1 = 0$$

إلى الصيغة الناظمية وبين نوعه وعين عناصره التناظرية واكتب معادلات تغيير المحاور الإحداثية.

الحل:

إن الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة السطح هي:

$$q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$$

$$= [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

الدالة المميّزة لـِ A تعطى بالصورة:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 4)$$

وبالتالي الجذور المميّزة $\lambda = 1, -2, 4$.

من جهة أخرى، إن المتجهات الذاتية الموافقة للجذور المميّزة $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = 4$ هي على الترتيب:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نرد المتجهات الثلاثة الأخيرة إلى الصيغة الناظمية فنحصل على المصفوفة المتعامدة:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

التي محددها يساوي الواحد، وتحقق $P^T AP = diag(1,-2,4)$ ، وعندئذ يكون التحويل الخطي المطبق والذي هو دوران:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

ومنه نجد:

$$x = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z')$$

$$y = \frac{1}{3}(-2x' + y' + 2z')$$
$$z = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z')$$

إذن معادلة السطح المعطاة تختزل إلى الصيغة الناظمية:

$$4x'^2 + y'^2 - 2z'^2 + 4(2x' + 2y' + z') +$$
$$+2(-2x' + y' + 2z') + 2(x' - 2y' + 2z') - 1 = 0$$

أو:

$$4x'^2 + y'^2 - 2z'^2 + 6x' + 12z' - 1 = 0$$

والتي تكتب أيضاً بالشكل التالي:

$$4(x' + \frac{3}{4})^2 + (y' + 3)^2 - 2(z' - 3)^2 = -\frac{23}{4}$$

نجري الآن انسحاباً للمحاور الإحداثية:

$$x' + \frac{3}{4} = X \quad , \quad y' + 3 = Y \quad , \quad z' - 3 = Z$$

ومعادلة السطح عندئذ بالنسبة للإحداثيات XYZ هي:

$$4X^2 + Y^2 - 2Z^2 = -\frac{23}{4}$$

وتمثل قطعاً زائداً ذا فرعين، له مركز تناظر هو:

$$x' = -\frac{3}{4} \quad , \quad y' = -3 \quad , \quad z' = 3$$

أي أن مركز التناظر بالنسبة للإحداثيات x, y, z هو:

$$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{15}{4})$$

4- طريقة غاوس (GAUSS) في اختزال صيغة تربيعية حقيقية:

في هذه الفقرة سنقدم طريقة تعود إلى غاوس لاختزال صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ إلى مجاميع مربعة مستقلة خطياً.

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية بِـn من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$، رتبتها r.

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^T AX$$

الحالة الأولى:

لنفترض أن $q(x)$ تحوي على الأقل حداً تربيعياً مختلفاً عن الصفر، أي أن المصفوفة A تحوي على الأقل عنصراً قطرياً واحداً مختلفاً عن الصفر، ولنعتبره a_{11}، فعندئذ تحت هذا الافتراض نحاول إعادة صياغة $q(x)$ بالشكل:

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + (2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)x_i + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

$$= a_{11}^{-1}[a_{11}^2x_1^2 + (2a_{11}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j)x_1] + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

وإذا لاحظنا أن الحد الموجود ضمن القوس المربع يكتب:

$$(a_{11}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 - (\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)^2 - (\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2$$

وهكذا يمكن كتابة الصيغة التربيعية الحقيقية على الشكل:

$$q(x) = a_{11}^{-1}(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)^2 + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j - a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

نشتق الآن الصيغة التربيعية بالنسبة للمتغير x_1،

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j = 2\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$$

ثم نضع:

$$q_1(x) = q(x) - a_{11}^{-1}[\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1}]^2 = q(x) - a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2$$

$$= 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j - a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2$$

$$= 2\sum_{2\le i<j\le n} (a_{ij} - a_{11}^{-1}a_{1j}a_{ij})x_i x_j + \sum_{j=2}^{n} a_{jj} - a_{11}^{-1}a_{1j})^2 x_j^2$$

فنحصل على صيغة تربيعية حقيقية جديدة لا تحوي المتغير x_1 طالما أن $\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 0$. بالإضافة إلى ذلك، تتصف الصيغة التربيعية الناتجة بأنها مطابقة للصفر أو أنها صيغة تربيعية في $(n-1)$ من المتغيرات $x_2, x_3, ..., x_n$ على الأكثر. ففي الحالة الأولى يكون اختزال الصيغة التربيعية المعطاة تاماً. وفي الحالة الأخيرة، وعلى فرض أن معامل حد تربيعي واحد على الأقل في $q_1(x)$ مختلف عن الصفر، فيمكن، بتكرار ما ورد أعلاه من أجل الصيغة التربيعية $q_1(x)$ للحصول على صيغة تربيعية جديدة $q_2(x)$ حيث تكون إما مطابقة للصفر، أو أنها صيغة في $(n-2)$ من المتغيرات على الأكثر. ويمكن أن تستمر هذه الطريقة في فصل الحدود المرتبة طالما احتوى الباقي $q_r(x)$ حداً مربعاً واحداً على الأقل معاملة غير الصفر، وربما حصلنا، بعد فصل r من الحدود المربعة، على باقٍ يطابق الصفر.

وبالإضافة إلى ذلك، فإن المناقشة تبيّن أننا برهنا:

مبرهنة (4–1):

كل صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ رتبتها r وبِـ n من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ ، تختزل إلى عبارة تحوي حدوداً مربعة فقط من الشكل:

$$a_{11}(L_1(x))^2 + a_{22}^{-1}(L_2(x))^2 + ... + a_{rr}^{-1}(L_r(x))^2, \quad (a_{ii} \neq 0)$$

ملاحظة:

من الملائم أن ندعو من الآن وصاعداً الصيغة:

$$a_{11}(L_1(x))^2 + a_{22}^{-1}(L_2(x))^2 + ... + a_{rr}^{-1}(L_r(x))^2$$

بالصيغة القانونية.

بالإضافة لذلك، نورد النتيجة التالية:

نتيجة (4–2):

إن الأشكال الخطية $L_1, L_2, ..., L_r$ مستقلة خطياً.

تمرين (4–3):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

أوجد A مصفوفة الصيغة، ثم رد الصيغة باستخدام طريقة غاوس إلى صيغة قانونية.

الحل:

يُلاحظ أن:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad rank(q)=3$$

بما أن $a_{11}=-1\neq 0$، باتباع المناقشة المذكورة لتوّنا، نحصل على:

$$L_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1}=-x_1-2x_2+x_3$$

$$q_1(x)=q(x)-a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2=q(x)+(-x_1-2x_2+x_3)^2=6x_2^2-8x_2x_3$$

ولما كان $q_1(x)$ صيغة تربيعية حقيقية لا تطابق الصفر بِ المتغيرات x_2,x_3، وطالما أن $a_{22}=6\neq 0$ نجد بطريقة مماثلة أن:

$$L_2(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial q_1}{\partial x_2}=6x_2-4x_3$$

$$q_2(x)=q_1(x)-a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2=-\frac{8}{3}x_3^2$$

حيث $q_2(x)$ صيغة تربيعية حقيقية لا تحوي المتغيرات x_1,x_2. وأخيراً بدمج النتائج الواردة أعلاه، يتضح:

$$\begin{aligned} q(x)&=a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2+a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2-\frac{8}{3}x_3^2 \\ &=(x_1+2x_2-x_3)^2+\frac{1}{6}(6x_2-4x_3)^2-\frac{8}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

الحالة الثانية:

لنعتبر أن الصيغة التربيعية الحقيقية $q(x)$ لا تحوي أي حد تربيعي $a_{ii}=0$
أي: $(1 \le i \le n)$

$$q(x) = 2\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

ولنفترض ان $a_{12} \neq 0$ ولنعد إلى الصيغة الأصلية $q(x)$ ونكتبها كما يلي:

$$q(x) = 2a_{12}x_1x_2 + (2\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j)x_1 + (2\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j)x_2 + 2\sum_{3 \le i < j \le n}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

ولنفرض الآن:

$$\varphi(x) = \sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j \text{ ، } \psi(x) = \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j \text{ ، } \theta(x) = 2\sum_{3 \le i < j \le n}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

فعندئذ تأخذ $q(x)$ الصيغة:

$$\begin{aligned}
q(x) &= 2a_{12}x_1x_2 + 2x_1\varphi(x) + 2x_2\psi(x) + \theta(x) \\
&= 2a_{12}^{-1}[a_{12}^2 x_1x_2 + (a_{12}\varphi(x))x_1 + (a_{12}\psi(x))x_2] + \theta(x) \\
&= 2a_{12}^{-1}[(a_{12}x_1 + \psi(x))(a_{12}x_2 + \varphi(x)) - \varphi(x)\psi(x)] + \theta(x) \\
&= 2a_{12}^{-1}(a_{12}x_1 + \psi(x))(a_{12}x_2 + \varphi(x)) - 2a_{12}^{-1}\varphi(x)\psi(x) + \theta(x)
\end{aligned}$$

من جهة أخرى، باعتبار أن:

$$L_1(x) = a_{12}x_1 + \psi(x) \quad , \quad L_2(x) = a_{12}x_2 + \varphi(x)$$

$$q_1(x) = -2a_{12}^{-1}\varphi(x)\psi(x) + \theta(x)$$

فعندئذ نستنتج أن:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_2} \quad , \quad L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1}$$

وأن كليهما شكل خطي على الفضاء $E = R^n$.

وبالإضافة لذلك، نرى أن:

$$q_1(x) = 2\sum_{3\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j - 2a_{12}^{-1}(\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j)(\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j)$$

$$= 2\sum_{3\le i<j\le n} (a_{ij} - a_{12}^{-1}a_{1j}a_{2j})x_i x_j - 2a_{12}^{2}(\sum_{j=3}^{n} a_{1j}a_{2j}x_j)$$

وبالتالي $q_1(x)$ كثير حدود متجانس من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغيرات $x_3, x_4, ..., x_n$ وبمعاملات من حقل الأعداد الحقيقية، أي $q_1(x)$ صيغة تربيعية حقيقية لا تحوي المتغيرات x_1, x_2 على الإطلاق. وعليه الصيغة $q(x)$ تتحول بموجب ما ذكر أعلاه إلى الصورة:

$$q(x) = 2a_{12}^{-1}L_1(x)L_2(x) + q_1(x)$$

وطالما أن الصيغة التربيعية الناتجة $q_1(x)$ تُختزل بموجب المبرهنة (4−1) إلى عبارة تحوي حدود مربعة مستقلة خطياً، يتضح عندئذ:

$$q(x) = 2a_{12}^{-1}L_1(x)L_2(x) + \alpha_1 L_1'^2 + \alpha_2 L_2'^2 + ... + \alpha_m L_m'^2$$

ومن الواضح أن يرى القارئ أن:

$$2L_1L_2 = \frac{1}{2}[(L_1 + L_2)^2 - (L_1 - L_2)^2] = \frac{1}{2}(L'^2 - L''^2)$$

وعليه، $q(x)$ تكتب بالصورة:

$$q(x) = a_{12}^{-1}L'^2 - a_{12}^{-1}L''^2 + \alpha_1 L_1'^2 + \alpha_2 L_2'^2 + ... + \alpha_m L_m'^2$$

بالإضافة لذلك $L', L'', L_1', L_2', ..., L_m'$، أشكال خطية على R^n مستقلة خطياً.

في الواقع، إذا كانت $\beta', \beta'', \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ عناصر حقيقية بحيث إن:

$$\beta' L' + \beta'' L'' + \beta_1 L_1' + \beta_2 L_2' + ... + \beta_m L_m' = 0$$

فعندئذ نجد:

$$(\beta' + \beta'')L_1 + (\beta' - \beta'')L_2 + \beta_1 L_1' + \beta_2 L_2' + ... + \beta_m L_m' = 0$$

وعليه يكون:

$$\beta' + \beta'' = \beta' - \beta'' = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$$

وذلك لأن الجملة $L_1, L_2, L_1', L_2', ..., L_m'$ مستقلة خطياً.

وهكذا، فإننا نكون قد برهنا المبرهنة التالية:

مبرهنة (4–4):

كل صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ بـ n من المتغيرات ورتبتها r، تُختزل إلى الصيغة القانونية $c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + ... + c_r y_r^2$ حيث المعاملات الحقيقية c_i جميعها تختلف عن الصفر، وأن $y_1, y_2, ..., y_r$ أشكال خطية مستقلة خطياً.

تمرين (4–5):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - x_2x_3 + 5x_1x_3$$

طبق طريقة غاوس في اختزال $q(x)$ إلى الصيغة القانونية.

الحل:

يُلاحظ أن كل $a_{ii} = 0$ ولكن $a_{13} = \frac{5}{2} \neq 0$. عندئذ وفقاً لما ورد في برهان المبرهنة الأخيرة، نعتبر:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_3} = \frac{1}{2}(5x_1 - x_2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(5x_3 + 2x_2)$$

$$q_1(x) = q(x) - 2a_{13}^{-1}L_1(x)L_2(x)$$

$$= 5x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_1x_2 - \frac{1}{5}[(L_1 + L_3)^2 - (L_1 - L_3)^2] = \frac{2}{5}x_2^2$$

وبالتالي نجد:

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{5}[(L_1+L_3)^2-(L_1-L_3)^2]+\frac{2}{5}x_2^2 \\
&= \frac{1}{20}[(5x_1+x_2+5x_3)^2-(5x_1-3x_2-5x_3)^2]+\frac{2}{5}x_2^2 \\
&= \frac{5}{4}(x_1+\frac{1}{5}x_2+x_3)^2-\frac{5}{4}(x_1-\frac{3}{5}x_2-x_3)^2+\frac{2}{5}x_2^2 \\
&= \frac{5}{4}[L_1'(x)]^2-\frac{5}{4}[L_2'(x)]^2+\frac{2}{5}[L_3'(x)]^2
\end{aligned}$$

وبالتالي تم اختزال الصيغة التربيعية الحقيقية إلى الصيغة القانونية.

5- تمارين محلولة:

تمرين (5-1):

اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x)=q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$$

إلى الصيغة القانونية واستنتج أن الصيغة التربيعية $q(x)$ محددة موجبة.

الحل:

من الملاحظ أن $a_{22}=1\neq 0$ ونشير إلى القارئ أنه من الملائم مع أنه غير ضروري أن ننطلق من المعامل غير الصفري a_{22}، وبالتالي وفقاً للمبرهنة (4-4)، لنعتبر:

$$L_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_2}=\frac{1}{2}[2x_1+2x_2+2x_3]=x_1+x_2+x_3$$

$$q_1(x)=q(x)-a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2=q(x)-(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_3^2$$

وبالتالي نحصل على صيغة تربيعية حقيقية بالمتغيرين x_1, x_3 ،

من ناحية ثانية، طالما أن $a_{11} = 1 \neq 0$ نطبق الأسلوب السابق فنجد:

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1} = x_1$$

$$q_2(x) = q_1(x) - x_1^2 = x_3^2$$

ومنه نجد:

$$q(x) = a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2 + a_{11}^{-1}[L_2(x)]^2 + x_3^2$$

أي:

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2$$

وأخيراً، بما أن دليل الصيغة التربيعية μ يساوي عدد المعاملات الموجبة بالصيغة القانونية يتضح أن $\mu = 3$. إذن إن الصيغة التربيعية محددة موجبة لأن رتبتها ودليلها متساويان $(\mu = r = 3)$.

تمرين (5–2):

لتكن الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

حدّد توقيع الصيغة $Sig(q)$ واستنتج أن الصيغة التربيعية محدّدة موجبة.

الحل:

نختزل قبل كل شيء الصيغة التربيعية المعطاة إلى الصيغة القانونية بموجب غاوس.في الحقيقة، بما أن $a_{11} = 2 \neq 0$ ، فعندئذ:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$q_1(x) = q(x) - a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2$$

$$= q(x) - \frac{1}{2}(2x_1 + x_2 - x_3)^2$$
$$= -\frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + 7x_2x_3$$

كذلك، بما أن $a_{22} = -\frac{3}{2} \neq 0$، نضع:

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(-3x_2 + 7x_3)$$
$$q_2(x) = q_1(x) - a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2$$
$$= q_1(x) + \frac{1}{6}(9x_2^2 + 49x_3^2 - 42x_2x_3)$$
$$= \frac{23}{3}x_3^2$$

ومنه نجد:

$$q(x) = a_{11}^{-1}[L_1(x)]^2 + a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2 + \frac{3}{23}[L_3(x)]^2$$

حيث اعتبرنا $L_3(x) = \frac{23}{3}x_3$

نستنتج مما ورد أعلاه:

$$|A| \neq \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad \begin{matrix} rank(q) = 3 \\ Sig(q) = (3,0) \end{matrix}$$

فالصيغة التربيعية عندئذ محددة موجبة.

تمرين (3–5):

أوجد قيمة الوسيط λ كي تكون الصيغة التربيعية محددة موجبة:

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

الحل:

يُلاحظ أن $a_{22} = 2 \neq 0$، وبالتالي نجد:

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_2} = 2(x_1 + x_2)$$

$$\begin{aligned} q_1(x) &= q(x) - a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2 = q(x) - 2(x_1 + x_2)^2 \\ &= q(x) - 2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) \\ &= (\lambda - 2)x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \end{aligned}$$

من ناحية أخرى، بما أن $a_{33} = 1 \neq 0$ نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned} q_2(x) &= q_1(x) - a_{22}^{-1}[L_2(x)]^2 \\ &= q_1(x) - [\frac{1}{2}\frac{\partial q_1}{\partial x_3}]^2 \\ &= q_1(x) - (x_1 + x_3)^2 \\ &= q_1(x) - (x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) \\ &= (\lambda - 3)x_3^2 \end{aligned}$$

وهكذا تختزل الصيغة التربيعية المعطاة إلى الصيغة القانونية:

$$q(x) = a_{22}^{-1}[L_1(x)]^2 + a_{33}^{-1}[L_2(x)]^2 + (\lambda - 3)x_1^2$$

$$q(x) = 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (\lambda - 3)x_1^2$$

يتضح أن الصيغة المفروضة محددة موجبة إذا كان $\lambda > 3$.

تمرينات الفصل

1- اختزل باستخدام طريقة غاوس كلاً من الصيغ التربيعية الحقيقية التي نذكر مصفوفاتها فيما يلي إلى عبارة تحوي مجاميع مربعة مستقلة خطياً.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2- بين فيما إذا كانت المصفوفات التالية محددة موجبة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3- اختزل الصيغة التربيعية الحقيقية إلى عبارة تحوي مجاميع مربعة مستقلة خطياً (غاوس).

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1 \cos\lambda + x_2 \sin\lambda), \quad \lambda \in R$$

4− برهن أنه إذا كانت A مصفوفة صيغة تربيعية حقيقية محدّدة موجبة فإن A^2 تكون كذلك.

5− أوجد رتبة الصيغة التربيعية ودليلها:

$$q(x)=x_1^2+2x_2^2+\frac{1}{3}x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

6− اختزل الصيغ التربيعية الآتية إلى الشكل الناظمي، وذلك بتدوير المحاور الإحداثية، واكتب معادلات دوران هذه المحاور في كل حالة.

$$q(x,y,z)=3x^2-3y^2-5z^2-2xy-6xz-6yz$$
$$q(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$$

7− اختزل معادلة كل من السطوح التالية إلى الشكل الناظمي وبين نوع السطح وعين مركزه:

$$2x^2+4yz+6x+2y-4z+5=0$$
$$2x^2+2y^2-z^2+8xy-4xz-4yz-2=0$$

✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶✶

الفصل الخامس

فضاءات الجداء الداخلي

Inner Product Spaces

1- فضاءات الجداء الداخلي العقدية والحقيقية:

ليكن E فضاء متجهات على حقل K، سندرس في هذا الفصل فضاءات ذوات **الجداء الداخلي**، وتحظى حالتان خاصتان بالاهتمام:

(1) عندما يكون K حقل جميع الأعداد الحقيقية، نتكلّم في هذه الحالة عن فضاء جداء داخلي حقيقي.

(2) عندما يكون K حقل جميع الأعداد المركبة، نشير في هذه الحالة لهذا النمط من الفضاءات بِ **فضاءات هرميتية** أو بِ **فضاءات واحدية**.

تعريف (1-1):

الجداء الداخلي على فضاء متجهي E على حقل $K = C, R$ هو تطبيق:

$$\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to C \ \text{،}\ (u,v) \mapsto \langle u,v \rangle$$

بحيث إن:

1. $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$
2. $\langle u+u',v \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u',v \rangle$
3. $\langle \lambda u,v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$
4. $\langle u,u \rangle \geq 0 \quad and \quad \langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

وذلك مهما تكن u,u',v متجهات من E وأياً كان $\lambda \in C$.

يتضح على الفور، أن $\langle u,v \rangle$ عددٌ حقيقيٌ أو عددٌ عقديٌ.

في الحالة الأولى، نجد الخواص الإضافية التالية:

- $\langle u,v+v' \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,v' \rangle$
- $\langle u,\lambda v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$

وعليه، فإن الجداء الداخلي على فضاء متجهات E هو شكل ثنائي الخطية متناظر ومحدد موجب ويحقق الخاصة: $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad , \quad \forall u \in E$

والثنائية عندئذ $(E,\langle \ , \ \rangle)$ تدعى **فضاء جداء داخلي**.

أما في الحالة الثانية، يمكن إعادة صياغة تعريف الجداء الداخلي على E بأنه شكل مرافق لنفسه (هرميتي) محدد موجب ويحقق الخاصة:

$\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ونشير إلى الثنائية $(E,\langle \ , \ \rangle)$ بِ **فضاء واحدي**.

مثال $(2-1)$:

لنأخذ جداء الضرب القياسي على $E = C^n$ التالي:

$$\langle u,v \rangle = u.v = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \ldots + u_n\overline{v_n}$$

حيث: $u = (u_1,u_2,....,u_n) \quad , \quad v = (v_1,v_2,....,v_n)$

لدينا:

$$\overline{\langle u,v \rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v_i}} = \sum_{i=1}^{n} v_i\overline{u_i} = \langle v,u \rangle$$

كذلك،

$$\langle u+u',v \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u_i + u_i')\overline{v_i} = \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v_i} + \sum_{i=1}^{n} u_i'\overline{v_i} = \langle u,v \rangle + \langle u',v \rangle$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i)\overline{v_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} = \lambda \langle u, v\rangle$$

ونجد أيضاً أن:

$$\langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{u_i} = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \geq 0$$

وأنه:

$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow |u_i|^2 = 0 \quad (\forall i = 1, 2, ..., n) \Leftrightarrow u_i = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

وعليه $(C^n, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاءٌ واحديٌّ (هرميتي).

بصورة خاصة، إن جداء الضرب القياسي على $E = R^n$ المعرف بالصيغة:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

هو أيضاً جداء داخلي على R^n، ندعوه أحياناً بِ **الجداء الداخلي القياسي**، ونشير إلى الفضاء R^n المزود بجداء الداخلي القياسي بِ **الفضاء الإقليدي ذي البعد** n.

مثال (3–1):

إذا كان $u = (u_1, u_2) \ , \ v = (v_1, v_2)$ متجهين في R^2 فإن:

$$\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$$

يعرف جداء داخلي.

الحل:

من السهل أن نرى أولاً أن: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

إذا كان $w = (w_1, w_2)$، فعندئذ نجد:

$$\langle u + v, w\rangle = 2(u_1 + v_1)w_1 + 3(u_2 + v_2)w_2$$

$$= (2u_1w_1 + 3u_2w_2) + (2v_1w_1 + 3v_2w_2)$$
$$= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

أيضاً،

$$\langle \lambda u, v\rangle = 2(\lambda u_1)v_1 + 3(\lambda u_2)v_2$$
$$= \lambda(2u_1v_1 + 3u_2v_2) = \lambda\langle u, v\rangle$$

وأخيراً، يُلاحظ أن:

$$\langle u, u\rangle = 2u_1u_1 + 3u_2u_2 = 2u_1^2 + 3u_2^2$$

وواضح أن: $\langle u,u\rangle = 2u_1^2 + 3u_2^2 \geq 0$ ، وبالإضافة لذلك، $\langle u,u\rangle = 2u_1^2 + 3u_2^2 = 0$ إذا وفقط إذا كان $u_1 = u_2 = 0$ أي إذا وفقط إذا كان $u = (u_1, u_2) = 0$. لذلك، فإن الخواص الأربع الواردة أعلاه محققة وبالتالي $\langle\ ,\ \rangle$ جداء داخلي على $E = R^2$.

تمرين (4-1):

ليكن فضاء المتجهات $E = R^3$، ولنعتبر الصيغة التربيعية الحقيقية:

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 \quad , \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

1- أوجد مصفوفة الصيغة بالنسبة لقاعدة قانونية في هذا الفضاء.

2- اختزل $q(x)$ إلى الصيغة القانونية وفقاً لِ غاوس، واستنتج أن (E, q) فضاءٌ إقليديٌّ.

الحل:

إن مصفوفة الصيغة التربيعية المعطاة هي:

$$M_q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \ , \ \left|M_q\right| \neq 0 \ , \ n = r = 3$$

من ناحية ثانية، من السهل على القارئ أن يبين استناداً إلى المفاهيم التي أُرسيت في الفصل السابق أن الصيغة التربيعية الحقيقية تختزل قانونياً وفقاً لِ غاوس إلى العبارة:

$$q(x) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{1}{3}(\frac{3}{2}x_2 - x_3)^2 + \frac{2}{3}x_3^2$$

إن توقيع صيغة تربيعية حقيقية $q(x)$ ويرمز له بـ $Sig(q(x))$ هو ثنائية (μ,ω) حيث μ عدد المعاملات الموجبة في الصيغة القانونية (دليل الصيغة). أما ω عدد المعاملات السالبة في الصيغة القانونية، ينتج أن $Sig(q(x)) = (3,0)$ وبالتالي $q(x)$ صيغة تربيعية محددة موجبة وتحقق الخاصة "$q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$".

يتضح مما ورد أن الشكل ثنائي الخطية المناظر للصيغة التربيعية الحقيقية يكون جداءً داخلياً على $E = R^3$ وبالتالي (E,q) يكون فضاءً إقليدياً.

تمرين (1–5):

ليكن $E = R_2[X]$ الفضاء المتجهي للحدوديات من الدرجة أصغر أو يساوي 2، ولنعرف على هذا الفضاء التطبيق $\langle \ , \ \rangle : E \times E \to R$ بالصيغة:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx \quad ; \quad \forall p(x), q(x) \in R_2[X]$$

بيّن أن $(R_2[X], \langle \ , \ \rangle)$ فضاءٌ اقليديٌّ.

الحل:

يُلاحظ وضوحاً أن:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{+1} q(x)p(x)dx = \langle q(x), p(x) \rangle$$

كذلك، لدينا:

$$\langle p(x)+q(x), h(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} (p(x)+q(x)h(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} p(x)h(x)dx + \int_{-1}^{+1} q(x)h(x)dx$$

$$= \langle p(x), h(x) \rangle + \langle q(x), h(x) \rangle \quad , \quad \forall p(x), q(x), h(x) \in R_2[X]$$

$$\langle \lambda p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} \lambda p(x)q(x)dx$$

$$= \lambda \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx = \lambda \langle p(x), q(x) \rangle$$

وأخيراً، لنفرض أن $p(x)$ حدودية من $R_2[X]$ فإن $p^2(x) \geq 0$ وبالتالي:

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} p^2(x)dx \geq 0$$

بالإضافة إلى ذلك، بما أن الدالة $x \to (p(x))^2$ دالة موجبة ومستمرة على المجال $[-1,+1]$ فإن:

$$\langle p(x), p(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{+1} (p(x))^2\, dx = 0 \Leftrightarrow p^2(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$$

وبالتالي $(R_2[X], \langle\ ,\ \rangle)$ فضاءٌ اقليديٌّ.

تمرين (1–6):

ليكن E الفضاء المتجهي على R المعرف بالصيغة:

$$E = \{ p(x) \in R_n[X] \;\; ; \;\; p(0) = p(1) = 0 \}$$

ولنعرف التطبيق: $\Phi : E \times E \to R$ كما يلي:

$$\Phi(P(x), Q(x)) = -\int_0^1 [P(x).Q''(x) + P''(x).Q(x)]dx$$

وذلك مهما يكن $P(x), Q(x)$ من E.

بين أن (E, Φ) فضاء جداء داخلي.

الحل:

من الواضح أن التطبيق Φ هو شكل ثنائي الخطية متناظر على E.

وإن الشكل التربيعي المرتبط به:

$$\Phi(P(x), P(x)) = -2\int_0^1 P(x)P''(x)dx$$

لنبرهن الآن أن $\Phi(P(x), P(x)) \geq 0$.

في الواقع، لنفرض أن $U = P(x)$، $dV = P''(x)dx$ ونكامل بالتجزئة فنجد:

$$\Phi(P(x), P(x)) = 2\int_0^1 [P'(x)]^2\, dx$$

وذلك باعتبار أن $[P(x)P'(x)]_0^1 = 0$ لأن $P(0) = P(1) = 0$

نستنتج أن $\Phi(P(x),P(x)) \geq 0$ وذلك لأن $[P'(x)]^2$ دالة مستمرة وغير سالبة على المجال $[0,1]$.

وأخيراً، لنفرض أن $\Phi(P(x),P(x)) = \int_0^1 (P'(x))dx = 0$

بما أن $x \to [P'(x)]^2$ دالة مستمرة وموجبة على المجال $[0,1]$ وتكاملها معدوم على المجال ذاته ينتج أن $P'(x) = 0$ ، $\forall x \in [0,1]$ وهذا يعني أن الحدودية $P'(x)$ تقبل عدد غير منته من الجذور، إذن $P(x)$ تكون حدودية ثابتة وبالتالي $P(x) = 0$ وذلك لأن $P(0) = P(1) = 0$ نستنتج من ذلك أن (E,Φ) فضاء جداء داخلي.

2- الأطوال في فضاء جداء داخلي:

تعريف (2-1):

إذا كان $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي (حقيقي أو عقدي)، وليكن v متجهاً في هذا الفضاء يُعرف **النظيم** لهذا المتجه بِـ $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

ينتج أن:

1. $\|v\| \geq 0$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| . \|v\|$

في الواقع، لدينا:

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle = |\lambda|^2 . \|v\|^2$$

ومنه نجد: $\|\lambda v\| = |\lambda| . \|v\|$

تعريف $(2-2)$:

إذا كان $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي (حقيقي أو عقدي)، فإن **المسافة بين متجهين** u,v يرمز لها بـ$d(u,v)$ وتعرف بالصيغة: $d(u,v)=\|u-v\|$

توضيح:

لنأخذ الفضاءَ الإقليديَّ ذا n بعداً $(R^n,\langle\ ,\ \rangle)$ حيث $\langle\ ,\ \rangle$ تطبيق الجداء الداخلي القياس المذكور في المثال $(2-1)$، وليكن $u=(u_1,u_2,....,u_n)$ ، $v=(v_1,v_2,....,v_n)$ متجهين في R^n. عندئذ نجد:

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+...+u_n^2}$$

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{\langle u-v,u-v\rangle}$$

$$=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+...+(u_n-v_n)^2}$$

مبرهنة $(2-3)$: **متباينة كوشي – شفارتز:**

إذا كان $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي (حقيقي أو عقدي)، فإن:

$$|\langle u,v\rangle|\le\|u\|.\|v\|\quad,\quad\forall u,v\in E$$

البرهان:

إن المتباينة صحيحة إذا كان أحد المتجهين يساوي الصفر. لنفرض أن $u\neq 0$، $v\neq 0$ ونبرهن صحة المتباينة.

في الواقع، بما أن: $\langle u+\lambda v,u+\lambda v\rangle\ge 0$

يتضح أن:

$$\langle u,u\rangle+\lambda\langle u,v\rangle+\lambda\langle v,u\rangle+\lambda^2\langle v,v\rangle\geq 0$$

وبالتالي نجد المعادلة:

$$\lambda^2\|v\|^2+2\lambda\langle u,v\rangle+\|u\|^2\geq 0$$

وتكون الأخيرة صحيحة عندما: $\Delta=\langle u,v\rangle^2-\|u\|^2.\|v\|^2\leq 0$

إذن:

$$\langle u,v\rangle^2\leq\|u\|^2.\|v\|^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي نرى أن:

$$|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|.\|v\|$$

مبرهنة (2-4): متباينة المثلث:

إذا كان $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي (حقيقي أو عقدي)، فإن:

$$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|\quad,\quad\forall u,v\in E$$

البرهان:

في الحقيقة، استناداً لمتباينة كوشي شفارتز نرى أن:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2&=\langle u+v,u+v\rangle\\&=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle\\&\leq\langle u,u\rangle+2|\langle u,v\rangle|+\langle v,v\rangle\\&\leq\langle u,u\rangle+2\|u\|.\|v\|+\langle v,v\rangle\\&=\|u\|^2+2\|u\|.\|v\|+\|v\|^2\\&=(\|u\|+\|v\|)^2\end{aligned}$$

بأخذ الجذر التربيعي نجد: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

تعريف (2–5):

إذا كان u,v متجهين غير صفريين في فضاء جداء داخلي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، فعندئذ يمكننا إعادة صياغة متباينة **كوشي – شفارتز** على الصورة:

$$\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|.\|v\|}\right)^2 \le 1$$

أو بصيغة مكافئة:

$$-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|.\|v\|} \le 1$$

ونتيجة لهذه الحقيقة، توجد زاوية وحيدة θ بحيث يكون:

$$0 \le \theta \le \pi \qquad , \qquad \cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|.\|v\|}$$

وتعرف θ بأنها الزاوية بين المتجهين u,v.

مثال (2–6):

أوجد تجيب الزاوية θ بين المتجهين:

$$u=(4,3,1,-2) \quad , \quad v=(-2,1,2,3)$$

في فضاء الجداء الداخلي الإقليدي $(R^4,\langle\ ,\ \rangle)$.

الحل:

من الواضح أن نرى أن:

$$\langle u,v\rangle = -9 \quad , \quad \|u\| = \sqrt{30} \quad , \quad \|v\| = \sqrt{18}$$

وبالتالي:

$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{30}\sqrt{2}}$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن المناقشة الواردة تقودنا إلى عرض المبرهنة التالية:

مبرهنة (2–7):

إذا كان $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي، فإن النظيم $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

والمسافة $d(u,v) = \|u-v\|$ يحققان الخواص الهامة التالية:

1. $\|u\| \geq 0$	1. $d(u,v) \geq 0$
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$	2. $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $\|\lambda u\| = \|\lambda\|.\|u\|$	3. $d(u,v) = d(v,u)$
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$	4. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

وذلك مهما تكن u,v,w عناصر من E.

3–التعامد في فضاءات الجداء الداخلي وطريقة غرام – شميث:

أولاً: التعامد في فضاءات الجداء الداخلي:

تعريف (3–1):

إذا كان $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي حقيقي أو عقدي، يُقال عن

المتجهين $u,v \in E$ إنهما **متعامدان** إذا كان $\langle u,v\rangle = 0$.

ويُقال عن متجه $v \in E$ إنه **متناح** إذا كان $\langle v,v \rangle = 0$. بتعبير مكافئ، إن المتجه المتناح هو المتجه المتعامد مع ذاته.

يتضح أن المتجه الصفري هو المتجه الوحيد المتعامد على ذاته **(المتناح).**

مبرهنة (3–2): تعميم مبرهنة فيثاغورث:

إذا كان u,v متجهين متعامدين في فضاء جداء داخلي $(E,\langle \ , \ \rangle)$ فإن:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

البرهان:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2$$

تعريف (3–3):

نقول عن جماعة من المتجهات $\{u_i\}$ من فضاء الجداء الداخلي $(E,\langle \ , \ \rangle)$ إنها **متعامدة** إذا كانت عناصرها المختلفة متعامدة أي إذا كان $\langle u_i,u_j \rangle = 0$ عندما $i \neq j$، ونقول عن الجماعة $\{u_i\}$ إنها **متعامدة منظمة** إذا كانت متعامدة ونظيم كل متجه منها يساوي الواحد، أي إذا كان:

$$\langle u_i,u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

مثال (3–4):

ليكن الفضاء الإقليدي $(R^3,\langle \ , \ \rangle)$، إن الجماعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ حيث:

$$v_1 = (0,1,0) \quad , \quad v_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad , \quad v_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

متعامدة منظمة، إذ إن:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

وأيضاً:

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$$

من ناحية أخرى، يمكن للقارئ أن يبيّن بطريقة مماثلة أن الجماعة:

$$v_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), v_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), v_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

متعامدة منظمة.

مثال (3–5):

ليكن $(R^2[X], \langle\ ,\ \rangle)$ الفضاء الإقليدي، باعتبار أن:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx$$

يُلاحظ أن:

$$\|p(x)\| = \sqrt{\langle p(x), p(x) \rangle} = \left[\int_{-1}^{+1} x^2 dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|q(x)\| = \sqrt{\langle q(x), q(x) \rangle} = \left[\int_{-1}^{+1} x^4 dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$

إن المتجهين $p(x) = x, q(x) = x^2$ متعامدان بالنسبة إلى الجداء الداخلي المعطى، وذلك لأن $\langle p(x), q(x) \rangle = 0$.

مبرهنة (3−6):

إذا كان $S=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ أساساً متعامداً منظماً لِ فضاء جداء داخلي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ وكان u أي متجه من E، فإن:

$$u=\langle u,v_1\rangle v_1+\langle u,v_2\rangle v_2+...+\langle u,v_n\rangle v_n$$

البرهان:

حيث إن $S=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ أساساً، فإن المتجه u يمكن التعبير عنه بالصيغة:

$$u=k_1v_1+k_2v_2+...+k_nv_n$$

ولإتمام المطلوب ما علينا سوى تبيان أن $k_i=\langle u,v_i\rangle$ من أجل $(i=1,2,...,n)$.

في الواقع،

$$\begin{aligned}\langle u,v_i\rangle &=\langle k_1v_1+k_2v_2+....+k_nv_n,v_i\rangle\\ &=k_1\langle v_1,v_i\rangle+k_2\langle v_2,v_i\rangle+....+k_n\langle v_n,v_i\rangle\end{aligned}$$

وبما أن $S=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ متعامدة منظمة، يكون:

$$\langle v_i,v_j\rangle=0\ \ ,\ \ i\neq j\ \ and\ \ \langle v_i,v_i\rangle=\|v_i\|^2=1$$

وبالتالي نجد $\langle u,v_i\rangle=k_i$ وبذا يتم إثبات المبرهنة.

مبرهنة (3−7):

إذا كانت $S=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ جماعة من المتجهات غير الصفرية المتعامدة في فضاء جداء داخلي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، عندئذ S تكون مستقلة خطياً.

البرهان:

لنفرض أنه توجد أعداد سلّمية $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بحيث إن:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0 \qquad (1)$$

ينتج أنه من أجل كل $v_i \in S$ فإن:

$$\left\langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n , v_i \right\rangle = 0$$

وبالتالي يكون:

$$c_1 \left\langle v_1, v_i \right\rangle + c_2 \left\langle v_2, v_i \right\rangle + \ldots. + c_n \left\langle v_n, v_i \right\rangle = 0$$

وبما أن المتجهات في S متعامدة بالفرض، فالمعادلة الأخيرة تؤول إلى:

$$c_i \left\langle v_i, v_i \right\rangle = 0$$

وطالما أن $\left\langle v_i, v_i \right\rangle \neq 0$ لأن المتجهات v_i في S غير صفرية، يتضح أن:

$$c_i = 0 \qquad (\forall i = 1, 2, \ldots., n)$$

وهذا يعني أن العلاقة (1) تصبح فقط إذا كانت جميع المقادير c_i أصفاراً، أي أن المتجهات مستقلة خطياً.

ثانياً: طريقة غرام – شميت في التعامد:(Gram-Smith orthogonalization)

سنبحث في هذه الفقرة كيفية بناء قاعدة متعامدة منظمة لفضاء جداء داخلي منتهي البعد، وذلك انطلاقاً من قاعدة ما في هذا الفضاء.

مبرهنة (3–8)**:**

كل فضاء جداء داخلي غير صفري ذو بعد منتهي n له قاعدة متعامدة منظمة.

البرهان:

ليكن $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي غير صفري بعده n، ولنفرض أن $S=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ قاعدة في هذا الفضاء. ستنتج المتتابعة التالية من الخطوات قاعدة متعامدة منظمة $\{v'_1,v'_2,...,v'_n\}$ للفضاء $(E,\langle\ ,\ \rangle)$.

يُلاحظ قبل كل شيء أنه إذا كان v متجهاً غير صفري في فضاء جداء داخلي فإن المتجه $\frac{v}{\|v\|}$ له نظيم يساوي الواحد.

لنأخذ المتجهات:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

....

....

$$v_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle u_j, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} v_k$$

....

$$v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} v_k$$

إن $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$ وذلك مهما يكن $i=1,2,....,n-1$ وذلك لأن عكس ذلك يعني أن $v_i=0$ وبالتالي نستنتج أن:

$$u_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle u_i , v_k \rangle}{\langle v_k , v_k \rangle} v_k$$

أي أن المتجهات $\{u_1, u_2, ..., u_i\}$ مرتبطة خطياً ومنه المتجهات $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ مرتبطة خطياً كذلك، وهذا يناقض كون $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ قاعدة لِ $(E, \langle \ , \ \rangle)$ وبالتالي لا يمكن أن يكون $\langle v_i , v_i \rangle = 0$.

من ناحية ثانية، يُبرهن وفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي أن المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ متعامدة مثنى مثنى.

وأخيراً، لكي نحصل على قاعدة متعامدة منظمة، فإننا نقسم كلاً من v_i على نظيمه فنحصل على الجملة المتعامدة المنظمة:

$$v'_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad , \quad v'_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \quad ,\ldots\ldots, \quad v'_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

نستنتج مما سبق أن المتجهات $\{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ متعامدة منظمة وبالتالي فهي مستقلة خطياً، وبما أن $\dim E = n$ فعندئذ الجملة $\{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ تشكل قاعدة متعامدة منظمة لفضاء الجداء الداخلي $(E, \langle \ , \ \rangle)$.

تمرين (3–9):

أوجد قاعدة متعامدة منظمة للفضاء الإقليدي R^3 المزود بتطبيق الجداء الداخلي القياسي المألوف، وذلك انطلاقاً من القاعدة:

$$S = \{u_1 = (1,1,1) \ \ , \ \ u_2 = (0,1,1) \ \ , \ \ u_3 = (0,0,1)\}$$

الحل:

نتبع طريقة غرام – شميت في إيجاد قاعدة متعامدة منظمة.

في الواقع، ومن خلال المناقشة التي استخدمت في برهان المبرهنة الأخيرة، فإن المتجهات:

$v_1 = u_1$
$v_2 = u_2 + \alpha v_1$
$v_3 = u_3 + \beta v_1 + \gamma v_2$

تشكل قاعدة متعامدة لفضاء الجداء الداخلي R^3 ، وحيث المقادير α, β, γ هي عناصر من الحقل R ، ونهدف إلى إيجاد المقادير المذكورة، وذلك بوضع:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

بما أن $v_1 = (1,1,1) \quad , \quad v_2 = (\alpha, \alpha+1, \alpha+1)$ فعندئذ نجد:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$$

وبالتالي $v_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ متجهاً عمودياً على v_1.

لبناء متجه v_3 بحيث يكون عمودياً على v_1 وعمودياً على v_2 أيضاً، يلاحظ أن:

$$v_1 \perp v_3 = (-\frac{2}{3}\beta + \gamma, \frac{1}{3}\beta + \gamma, 1 + \frac{1}{3}\beta + \gamma)$$
$$\Rightarrow 3\gamma + 1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3}$$

كذلك، نجد:

$$v_2 \perp v_3 = (-\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3})$$
$$\Rightarrow 4\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

والقاعدة المتعامدة في هذا الفضاء هي إذن:

$$v_1 = (1,1,1) \quad , \quad v_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \quad , \quad v_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

والآن لكي نحصل على قاعدة متعامدة منظمة فإننا نقسم كلاً من v_i على نظيمه فنحصل على الجملة المتعامدة المنظمة:

$$\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1),(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

تمرين (3–10):

ليكن الفضاء الإقليدي $E = R_2[X]$ المزود بالجداء الداخلي:

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)(1+x^2)dx$$

أوجد قاعدة متعامدة منظمة لهذا الفضاء.

الحل:

إن القاعدة القانونية $\{e_0 = 1 \;,\; e_1 = x \;,\; e_2 = x^2\}$ في هذا الفضاء ليست متعامدة لأنه مثلاً:

$$\langle 1,x^2\rangle = \int_{-1}^{+1} x^2(x^2+1)dx = \frac{16}{15} \neq 0$$

أي أن $1, x^2$ غير متعامدين.

إذا انطلقنا من هذه القاعدة، فاستناداً لطريقة غرام – شميت نستطيع أولاً تحديد قاعدة متعامدة لهذا الفضاء وفقاً للمعادلات:

$$P_0(x) = e_0$$
$$P_1(x) = e_1 + \alpha P_0(x)$$
$$P_2(x) = e_2 + \beta P_1(x) + \gamma P_0(x)$$

في الواقع،

$$\langle P_0,P_1\rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{+1}(x+\alpha)(1+x^2)dx = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha + \frac{2}{3}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

أيضاً، نجد:

$$\langle P_0, P_2 \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} (x^2 + \beta x + \gamma)(1 + x^2)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{16}{15} + \frac{8}{3}\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{2}{5}$$

كذلك، نرى أن:

$$\langle P_1, P_2 \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} x(x^2 + \beta x + \gamma)(1 + x^2)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{5}\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

وبالتالي فجملة الحدوديات $\{1, x, x^2 - \frac{2}{5}\}$ تشكل قاعدة متعامدة لِـ $R_2[X]$.

وأخيراً، كي نحصل على قاعدة متعامدة منظمة للفضاء الإقليدي $R_2[X]$ فإننا نقسم كلاً من P_0, P_1, P_2 على نظيمه فنحصل على الجملة المتعامدة المنظمة:

$$\left\{ \frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1}{\|P_1\|}, \frac{P_2}{\|P_2\|} \right\}$$

يُلاحظ أن:

$$\|P_0\|^2 = \langle P_0, P_0 \rangle = \int_{-1}^{+1} (1 + x^2)\,dx = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\|P_1\|^2 = \langle P_1, P_1 \rangle = \int_{-1}^{+1} x^2(1 + x^2)\,dx = \int_{-1}^{+1} x^2\,dx + \int_{-1}^{+1} x^4\,dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

$$\|P_2\|^2 = \langle P_2, P_2 \rangle = \int_{-1}^{+1} (x^2 - \frac{2}{5})^2 (1 + x^2)\,dx = \frac{136}{525}$$

إذن الجملة:

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{4}x, \frac{5\sqrt{21}}{2\sqrt{34}}(x^2-\frac{2}{5})\right\}$$

تشكل قاعدة متعامدة منظمة.

4- المؤثرات الخطية على الفضاءات الواحدية والإقليدية:

أ- المؤثرات المرافقة:

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي منتهي البعد (فضاءً واحدياً)، وليكن T مؤثراً خطياً (تداكلاً) على E، عندئذ يوجد مؤثر خطي على E يرمز له بِ T^* بحيث يحقق:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle \quad ; \quad \forall u, v \in E$$

وبالتالي نورد الحقيقة التالية:

تعريف (4-1):

كل مؤثر خطي T على فضاء جداء داخلي منتهي البعد $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ له مؤثر خطي وحيد T^* يحقق $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$ ندعوه **المؤثر الخطي المرافق (القرين)** لِ T.

إذا رمزنا بِ $M(T)$ و $M(T^*)$ للمصفوفتين الممثلتين لِ T و T^* بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ في الفضاء $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فعندئذ:

مبرهنة (4-2):

إن مصفوفة المؤثر الخطي القرين T^* بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي منتهي البعد $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ تساوي مرافق منقول مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للقاعدة ذاتها، أي $[M(T)]^* = M(T^*)$.

تمرين (4-3):

ليكن T مؤثراً خطياً على الفضاء الواحدي C^3 معرفاً كما يلي:

$$T(x,y,z) = (2x+iy,\ y-5iz,\ x+(1-i)y+3z)$$

احسب T^* المؤثر الخطي القرين للمؤثر T.

الحل:

نحسب أولاً مصفوفة التداكل T بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في الفضاء C^3 ولتكن القاعدة القانونية فنجد:

$$T(e_1) = T(1,0,0) = (2,0,1) = 2e_1 + 0e_2 + 1e_3$$

$$T(e_2) = T(0,1,0) = (i,1,1-i) = ie_1 + e_2 + (1-i)e_3$$

$$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,-5i,3) = 0e_1 - 5ie_2 + 3e_3$$

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & -5i \\ 1 & 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا:

$$(M(T))^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 5i & 3 \end{bmatrix}$$

ووفقاً للمبرهنة الأخيرة، بما أن $(M(T))^* = M(T^*)$ بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في فضاء واحدي، يتضح أن:

$$T^*(x,y,z) = (2x+z, -ix+y+(1+i)z, 5iy+3z)$$

مبرهنة (4-4):

إذا كان T مؤثراً خطياً على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فإن:

$$1.\ \ (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* \quad , \quad (\lambda \in C)$$

$$2.\ \ (T^*)^* = T$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned} \langle (\lambda T)^* u, v \rangle &= \langle u, (\lambda T) v \rangle = \langle u, \lambda T(v) \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle u, T(v) \rangle = \bar{\lambda} \langle T^*(u), v \rangle \\ &= \langle (\bar{\lambda} T^*) u, v \rangle \end{aligned}$$

وذلك مهما تكن u,v من E، إذن $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

كذلك،

$$\begin{aligned} \langle T^*(u), v \rangle &= \overline{\langle v, T^*(u) \rangle} = \overline{\langle T(v), u \rangle} \\ &= \langle u, T(v) \rangle \quad ; \quad \forall u,v \in E \end{aligned}$$

يتضح أن $T^{**} = T$.

نتيجة (4–5):

إذا كانت A مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فإن:

$$(A^*)^* = A$$

<u>بصورة خاصة</u> : إذا كانت المصفوفة A حقيقية فإن المعادلة المصفوفية الأخيرة تصبح $(A^T)^T = A$، أي أن منقول المنقول لمصفوفة حقيقية يساوي هذه المصفوفة.

مبرهنة (4–6):

إذا كان S,T مؤثرين خطيين على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فإن:

$$1.\ \ (S+T)^* = S^* + T^* \quad , \quad 2.\ \ (S\circ T)^* = T^* \circ S^*$$

البرهان:

في الواقع، أياً كانت u,v من E فإن:

$$\begin{aligned}\left\langle (S+T)^*(u),v\right\rangle &= \left\langle u,(S+T)(v)\right\rangle \\ &= \left\langle u,S(v)\right\rangle + \left\langle u,T(v)\right\rangle = \left\langle S^*(u),v\right\rangle + \left\langle T^*(u),v\right\rangle \\ &= \left\langle (S^*+T^*)(u),v\right\rangle\end{aligned}$$

كذلك، يُلاحظ أن:

$$\begin{aligned}\left\langle (S\circ T)^*(u),v\right\rangle &= \left\langle u,(S\circ T)(v)\right\rangle \\ &= \left\langle u,S(T(v))\right\rangle = \left\langle S^*(u),T(v)\right\rangle = \left\langle T^*\circ S^*(u),v\right\rangle\end{aligned}$$

وبذلك يتم إثبات المبرهنة.

نتيجة (4−7):

إذا كانت P,Q مصفوفتي المؤثرين الخطيين S,T بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في الفضاء $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، يكون لدينا:

1. $(P+Q)^* = P^* + Q^*$
2. $(\lambda P)^* = \overline{\lambda} P^*$
3. $(P.Q)^* = Q^* P^*$

ب− المؤثرات الهرميتية والهرميتية المتخالفة:

تعريف (4−8):

يكون المؤثر الخطي T على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ **هرميتياً** إذا كان $T^* = T$ وبعبارة مكافئة إذا كان:

$$\forall u,v \in E \quad , \quad \langle u,T(v)\rangle = \langle T(u),v\rangle$$

يكون المؤثر الخطي T على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ **هرميتياً متخالفاً** إذا كان $T^* = -T$ وبعبارة مكافئة إذا كان:

$$\forall u,v \in E \quad , \quad \langle u,T(v)\rangle = -\langle T(u),v\rangle$$

مبرهنة (4−9):

إذا كان T مؤثراً خطياً على فضاء جداء داخلي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، ولتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر T، عندئذ:

(1) إذا كان $T^* = T^{-1}$ فإن $|\lambda| = 1$

(2) إذا كان $T^* = T$ فإن $\lambda \in R$

(3) إذا كان $T^* = -T$ فإن λ تخيلية بحتة

(4) إذا كان $T = S^*S$ (S مؤثراً خطياً غير شاذ)، فإن λ حقيقية موجبة.

البرهان:

ليكن v متجهاً ذاتياً غير صفري للمؤثر الخطي T موافقاً للقيمة الذاتية λ، أي أن $T(v) = \lambda v$ حيث $(v \neq 0)$.

لإثبات (1): يُلاحظ أن:

$$\langle v,v\rangle = \langle v,(T^* \circ T)(v)\rangle = \langle T(v),T(v)\rangle$$
$$= \langle \lambda v,\lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle$$

وبالتالي $(1-\lambda\overline{\lambda})\langle v,v\rangle = 0$، وباعتبار أن $\langle v,v\rangle \neq 0$ نستنتج أن $|\lambda| = \lambda\overline{\lambda} = 1$.

(2) لدينا:

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle T(v),v\rangle = \langle v,T^*(v)\rangle$$
$$= \langle v,T(v)\rangle = \langle v,\lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v,v\rangle$$

إذن $(\lambda-\overline{\lambda})\langle v,v\rangle = 0$ وبالتالي $\lambda = \overline{\lambda}$ لأن $\langle v,v\rangle \neq 0$ ومنه $\lambda \in R$.

(3) لإثبات (3) نتبع الأسلوب ذاته الوارد في برهان (2).

في الواقع،

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle Tv,v\rangle = \langle v,T^*v\rangle$$
$$= \langle v,-T(v)\rangle = \langle v,-\lambda v\rangle = -\overline{\lambda}\langle v,v\rangle$$

لكن $\langle v,v\rangle \neq 0$ إذن $\lambda+\overline{\lambda}=0$ أي أن λ تخيلية بحتة.

(4) وأخيراًُ، إذا كان $T=S^{*}S$ حيث S غير شاذة فنجد:

$$\lambda\langle v,v\rangle=\langle Tv,v\rangle=\langle S^{*}S(v),v\rangle=\langle Sv,Sv\rangle$$

بما أن $\langle v,v\rangle>0$، وكذلك $\langle Sv,Sv\rangle>0$ لأن $S(v)\neq 0$ كون S مؤثراً خطياً غير شاذ يتضح مباشرةً أن λ قيمة ذاتية موجبة.

مبرهنة (4−10):

يكون المؤثر الخطي T على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ هرميتياً (هرميتياً متخالفاً) إذا وفقط إذا كانت مصفوفته بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في E هرميتية (هرميتية متخالفة).

البرهان:

في الحقيقة، إذا افترضنا أن $M(T),M(T^{*})$ للمصفوفتين الممثلتين لـ T,T^{*} بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$.

إذا كانت $M(T)$ مصفوفة هرميتية، فعندئذ يكون:

$$M(T^{*})=(M(T))^{*}=M(T)$$

وبالتالي $T^{*}=T$ والمؤثر T إذن هرميتي.

العكس، إذا كان المؤثر T هرميتياً، فعندئذ نجد:

$$M(T)=M(T^{*})=(M(T))^{*}$$

والمصفوفة هرميتية.

نتيجة (4–11):

يكون المؤثر الخطي T على الفضاء الإقليدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ متناظراً (متناظراً متخالفاً) إذا كانت مصفوفته بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في هذا الفضاء متناظرة (متناظرة متخالفة).

تعريف (4–12): **المؤثرات الخطية الموجبة:**

يُقال عن مؤثر خطي T على فضاء جداء داخلي منتهي البعد $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ إنه **موجب** إذا كان $T = S^*S$ من أجل مؤثر خطي ما S.

يتضح من ذلك، أن كل مؤثر خطي موجب يكون مؤثراً هرميتياً، وذلك لأن: $T^* = (S^*S)^* = S^*S = T$ ويكون أيضاً:

$$\langle T(v),v\rangle = \langle S^*(S(v)),v\rangle = \langle S(v),S(v)\rangle \geq 0$$

بالإضافة إلى ذلك، نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (4–13):

إذا كان T مؤثراً خطياً على فضاء جداء داخلي منتهي البعد $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، فإن الشروط التالية متكافئة:

(1) T مؤثر موجب على E

(2) T مؤثر هرميتي كما أن $\langle T(v),v\rangle \geq 0$ أياً كان $v \in E$

مبرهنة (4–14):

يكون مؤثر متناظر T على فضاء إقليدي $(E, \langle \ , \ \rangle)$ بعده n موجباً إذا وفقط إذا كانت جذوره المميّزة (قيمه الذاتية) موجبة أو أصفار.

البرهان:

لنفرض أن T مؤثر متناظر على فضاء إقليدي E، ولتكن λ قيمة ذاتية لِـ T وليكن $x \neq 0$ متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية λ، فنجد:

$$\langle T(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \geq 0$$

وبما أن $\langle x, x \rangle > 0$ فعندئذ $\lambda \geq 0$.

العكس، إذا كان T مؤثراً متناظراً على فضاء إقليدي E، ولنفرض أن جذوره المميّزة موجبة أو معدومة، فثمة قاعدة متعامدة منظمة $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ مؤلفة من المتجهات الذاتية للمؤثر T.

لنفترض أن $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ هي القيم الذاتية الناشئة عن تلك المتجهات، فعندئذ:

$$\forall x \in E \quad , \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

وبالتالي:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e_i$$

ومنه:

$$\langle T(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0$$

إذن T مؤثر موجب.

تمرين (4–15):

ليكن المؤثر الخطي T على الفضاء الإقليدي R^3 والذي تكون مصفوفتُهُ بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في هذا الفضاء هي:

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$$

أوجد قيم الوسيط a التي تجعل المؤثر T موجباً.

الحل:

إن الدالة المميّزة لِـA هي:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a\\ -a & \lambda-1 & -a\\ -a & -a & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1+a)[\lambda^2-(2+a)\lambda-(2a^2-a-1)]$$

$$=(\lambda-1+a)(\lambda-2a-1)(\lambda-1+a)$$

$$=(\lambda-1+a)^2(\lambda-2a-1)$$

والجذور المميّزة هي: $2a+1\quad,\quad 1-a$

وبالرجوع إلى المبرهنة الأخيرة، وباعتبار أن T مؤثر متناظر على R^3 نرى أن T موجب إذا وفقط إذا كانت القيم الذاتية أكبر أو تساوي الصفر، إذن:

$$-\frac{1}{2}\le a\le 1$$

تمرين (4–16):

برهن أن المؤثر الخطي المعرف على فضاء الجداء الداخلي $(C^3,\langle\ ,\ \rangle)$ بالصيغة:

$$T(x,y,z)=(2x+5iy,-5ix-3y+2z,2y+z)$$

هرميتياً.

الحل:

نبحث عن مصفوفة هذا المؤثر بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في الفضاء المذكور ولتكن القاعدة القانونية:

$T(1,0,0)=(2,-5i,0)$

$T(0,1,0)=(5i,-3,2)$

$T(0,0,1)=(0,2,1)$

وبالتالي:

$$M(T)=\begin{bmatrix} 2 & 5i & 0 \\ -5i & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن $M(T)$ هرميتية، يتضح وفقاً للمبرهنة (4−10)، أن T مؤثر هرميتي.

تمرين (4−17):

برهن أن المؤثر الخطي U_a المعرف على الفضاء الإقليدي $(R^3,\langle\ ,\ \rangle)$ بالصيغة:

$$(\forall a\in R)\qquad U_a(x,y,z)=(ax+y+z,x+ay+z,x+y+az)$$

متناظرٌ، وحدّد الجذور المميزة له.

مبرهنة (4−18):

إذا كان T مؤثراً هرميتياً على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فإن المتجهات الذاتية المناظرة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة.

البرهان:

في الواقع، لنفرض أن λ, μ قيمتان ذاتيتان مختلفتان للمؤثر الهرميتي T ولتكن v, w المتجهين الذاتيين المقابلين لهما، فعندئذ نكتب:

$$T(v) = \lambda v \quad , \quad T(w) = \mu w$$

وبالتالي نجد:

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \Rightarrow (\lambda - \overline{\mu}) \langle v, w \rangle = 0$$

وبملاحظة أن μ حقيقي وأن $\lambda \neq \mu$ نستنتج أن $\langle v, w \rangle = 0$ ومنه v, w متعامدان.

نتيجة (4–19):

- إن المتجهات الذاتية لمؤثر تناظري على فضاء إقليدي والمقابلة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة.
- إن المتجهات الذاتية لمصفوفة حقيقية متناظرة والمقابلة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة.

تمرين (4–20):

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة الهرميتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-2i \\ 1+2i & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

من السهل رؤية أن الدالة المميّزة لِـ A هي $|\lambda I - A| = \lambda^2 - 9$ وبالتالي القيم الذاتية لِـA تكون $3, -3$.

إن المتجهات الذاتية لِـA تعطى بالمعادلتين المتجانستين:

$$(\lambda-2)x+(2i-1)y=0$$
$$(1+2i)x+(\lambda+2)y=0$$

وبالتالي نجد:

$$v_1=(5,1+2i) \quad , \quad v_2=(1-2i,-5)$$

وأخيراً، يُلاحظ أن:

$$\langle v_1,v_2\rangle=5(1+2i)-5(1+2i)=0$$

أي أن المتجهين الذاتيين متعامدان.

5- طيف المؤثرات الواحدية والناظمية:

أولاً: المؤثرات الواحدية:

تعريف (5-1):

يُقال عن المؤثر الخطي T على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ أنه **واحديٌ** إذا كان يحافظ على تطبيق الجداء الداخلي، أي:

$$\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle \qquad \forall u,v\in E$$

<u>وبصورة خاصة</u> ، إذا كان $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء جداء داخلي معرف على حقل الأعداد الحقيقية R ، فندعو المؤثر الخطي الذي يحفظ تطبيق الجداء الداخلي بِ **مؤثر عمودي.**

إن كل مؤثر واحدي T على الفضاء $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ يحفظ الأطوال أي:

$$\|Tv\| = \|v\| \quad , \quad \forall v \in E$$

كذلك، إن أي مؤثر واحدي (عمودي) T يكون تشاكلاً تقابلياً.

في الواقع،

$$v \in KerT \Rightarrow T(v) = 0 \Rightarrow \|T(v)\| = 0 \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$$

بالإضافة لذلك، نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (5–2):

إذا كان T مؤثراً خطياً على فضاء واحدي $(E, \langle \ , \ \rangle)$ فإن الشروط التالية تكون متكافئة:

(1) T مؤثر واحدي

(2) $T^*T = TT^* = id_E$

(3) $\|T(v)\| = \|v\|$ وذلك مهما يكن v من E ➢ T يحفظ الأطوال➣

البرهان:

(1)⇦(2): لدينا بحسب الفرض:

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*T(x), y \rangle = \langle x, y \rangle; \quad \forall x, y \in E$$

أي أن: $\langle (T^* \circ T)(x) - x, y \rangle = 0$، وهذا يعني أن المتجه $(T^* \circ T)(x) - x$ عمودي على أي متجه $y \in E$ ، وبالتالي $(T^* \circ T)(x) - x = 0$ لأن المتجه الصفري هو المتجه المتناحي الوحيد.

ومنه $(T^* \circ T)(x) = x$ إذن $T^* \circ T = id_E$

وبطريقة مماثلة تماماً، نبين أن $T \circ T^* = id_E$

(2)⇦(3): لدينا:

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle (T^* \circ T)(x), x\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle = \|x\| \quad ; \quad \forall x \in E$$

وبالتالي $\|T(x)\| = \|x\|$ أي أن المؤثر T يحفظ الأطوال.

$(3) \Leftarrow (1)$: ليكن: $u, v \in E$. من الواضح أن:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right] + \frac{i}{4}\left[\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2\right]$$

وإذا لاحظنا وفقاً للفرض أن:

$$\|u+v\|^2 = \|T(u+v)\|^2 = \|T(u)+T(v)\|^2$$
$$\|u-v\|^2 = \|T(u-v)\|^2 = \|T(u)-T(v)\|^2$$
$$\|u+iv\|^2 = \|T(u)+iT(v)\|^2$$
$$\|u-iv\|^2 = \|T(u)-iT(v)\|^2$$

ينتج أن: $\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$

وهذا يعني أن T مؤثر واحدي. وبذا يتم إثبات المبرهنة بكاملها.

مبرهنة (5–3):

ليكن T مؤثراً خطياً على فضاء واحدي $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ بعده منتهي n،
ولتكن $\{e_i\}_{i=1}^n$ قاعدة متعامدة منظمة في E. عندئذ:

T واحدي إذا وفقط إذا كانت $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$ قاعدة متعامدة منظمة في الفضاء E

البرهان:

إذا كان المؤثر T واحدياً يكون:

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad ; \quad \forall u, v \in E$$

وبصورة خاصة، نجد:

$$\left\langle T(e_i), T(e_j) \right\rangle = \left\langle e_i, e_j \right\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

وبالتالي المتجهات $\{T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)\}$ متعامدة منظمة.

لنبرهن الآن أنها مستقلة خطياً:

في الواقع، لنفرض أنه توجد أعداد سلّمية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ بحيث إن:

$$\lambda_1 T(e_1) + \lambda_2 T(e_2) + ... + \lambda_n T(e_n) = 0 \qquad .... \qquad (1)$$

عندئذ يكون:

$$T(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = 0$$

وبالاستفادة من كون T تشاكلاً تقابلياً كونه T مؤثراً واحدياً نجد:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0 \qquad .... \qquad (2)$$

طالما أن المتجهات المذكورة في المعادلة الأخيرة مستقلة خطياً، نجد:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

وهذا يعني أن العلاقة (1) تصح فقط إذا كانت جميع المقادير λ_i أصفاراً، أي أن المتجهات $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$ مستقلة خطياً، إذن $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$ تشكل قاعدة متعامدة منظمة لِ E.

العكس، لنفرض أن $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$ قاعدة متعامدة منظمة لِ E. ليكن $x \in E$، فعندئذ:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \qquad , \qquad T(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(e_i)$$

ومنه نستطيع أن نكتب:

$$\left\langle x, x \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_1} + \lambda_2 \overline{\lambda_2} + ... + \lambda_n \overline{\lambda_n} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

كذلك بصورة مماثلة، نرى أن:

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

يتضح مما سبق أن: $\langle x, x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle \quad , \quad \forall x \in E$

أي: $\|x\| = \|T(x)\|$ ومنه T واحدي.

مبرهنة (5−4):

يكون المؤثر الخطي T على الفضاء الواحدي (الإقليدي) $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ واحدياً (عمودياً) إذا وفقط إذا كانت مصفوفته بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة واحدية (عمودية).

البرهان:

أولاً: إذا كان المؤثر واحدياً (عمودياً) فإن $T^* = T^{-1}$، وبفرض A مصفوفة T بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في هذا الفضاء، فإن:

$$M(T^*) = M(T^{-1}) \Rightarrow (M(T))^* = (M(T))^{-1} \Rightarrow$$

$$A^* = A^{-1} \Rightarrow AA^* = A^*A = I$$

ثانياً: إذا كانت المصفوفة A واحدية فإن $A^* = A^{-1}$، وبالتالي نجد:

$$M(T^*) = (M(T))^* = A^* = A^{-1} = (M(T))^{-1} = M(T^{-1})$$

ومنه: $T^* = T^{-1}$ أي أن T واحدي (عمودي).

مبرهنة (5−5):

ليكن T مؤثراً واحدياً على الفضاء الواحدي $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. إذا كانت λ قيمة ذاتية لِـ T فإن $|\lambda| = 1$.

البرهان:

في الواقع، بما أن T مؤثر واحدي على E فإن $T^* = T^{-1}$.

ليكن v متجهاً ذاتياً مناظراً للقيمة الذاتية λ عندئذ يكون $T(v)=\lambda v$، وبالتالي:

$\langle T(v),T(v)\rangle=\langle v,v\rangle$ لأن T واحدي. وعليه نكتب: $\lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle=\langle v,v\rangle$

أي: $(\lambda\bar{\lambda}-1)\langle v,v\rangle=0$

وطالما أن $v\neq 0$ يتضح أن $\lambda\bar{\lambda}-1=0$ ومنه $|\lambda|=1$.

مبرهنة (5–6):

إذا كانت A مصفوفة واحدية، فإن $|\det A|=1$.

البرهان:

في الواقع، إذا كانت A مصفوفة واحدية، فعندئذ نجد:

$$\begin{aligned}
AA^{*}=I_n &\Rightarrow \det(A.A^{*})=\det(I_n)=1\\
&\Rightarrow \det(A).\det(A^{*})=1\\
&\Rightarrow \det(A).\det(\overline{A})=1\\
&\Rightarrow \det(A).\overline{\det(A)}=1\\
&\Rightarrow |\det A|^{2}=1\\
&\Rightarrow \det A=1
\end{aligned}$$

نتيجة (5–7):

إذا كانت A مصفوفة عمودية، فإن $\det A=\pm 1$.

ذلك لأن:

$$\det(A).\det(A)=1$$

نتيجة (5–8):

إذا كانت A, B مصفوفتين واحديتين (عموديتين) فإن $\overline{A}, A^T, A^{-1}, A^*, AB$ واحدية (عمودية) أيضاً.

نتيجة (5–9):

إن مجموعة المصفوفات الواحدية من المرتبة (n, n) تشكل زمرة، نرمز لها بِـ$U(n)$ بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات ندعوها بِـ **الزمرة الواحدية** بالنسبة للعدد الطبيعي n.

أما إذا كان الفضاء E إقليدياً، فإن زمرة المصفوفات الواحدية من المرتبة (n, n) والتي نرمز لها بِـ$O(n)$ تسمى **الزمرة العمودية** بالنسبة للعدد الطبيعي n.

ثانياً: المؤثرات الناظمية:

تعريف (5–10):

يُقال عن مؤثر خطي T على فضاء واحدي $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ إنه **ناظمي** إذا كان تبادلياً مع مرافقه، أي إذا حقق: $T^*T = TT^*$

يتضح على الفور أنه إذا كان T مؤثراً ناظمياً فإن T^* يكون كذلك.

لنفرض أن $A = M(T)$ مصفوفة المؤثر الناظمي T بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في الفضاء $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فإن A تحقق العلاقة: $AA^* = A^*A$.

توضيح:

إن المصفوفة الهرميتية $A = A^*$ ناظمية، لأن $AA^* = A^*A = A^2$

كذلك، المصفوفة الواحدية A ناظمية، لأنها تحقق العلاقة $AA^* = A^*A = I$

أيضاً، تعتبر المصفوفات القطرية مثالاً هاماً على المصفوفات الناظمية، وذلك بملاحظة أن $DD^* = D^*D$.

مبرهنة (5−11):

يكون المؤثر الخطي T على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ ناظمياً إذا وفقط إذا كان:

$$\langle T(u),T(v)\rangle = \langle T^*(u),T^*(v)\rangle, \quad \forall u,v \in E$$

البرهان:

إذا كان u,v متجهين من E، فعندئذ نجد:

$$\langle T(u),T(v)\rangle = \langle u,(T^* \circ T)(v)\rangle$$

وكذلك، لدينا:

$$\langle T^*(u),T^*(v)\rangle = \langle u,(T^{**} \circ T^*)(v)\rangle = \langle u,(T \circ T^*)(v)\rangle$$

وعليه، يتضح أن T ناظمي إذا وفقط إذا كان:

$$\langle T(u),T(v)\rangle = \langle T^*(u),T^*(v)\rangle$$

وبذا يتم إثبات المبرهنة.

مبرهنة (5−12):

إذا كان T مؤثراً ناظمياً على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$. إذا كان v متجهاً ذاتياً لِ T مناظراً للقيمة الذاتية λ فإن v يكون متجهاً ذاتياً لِ T^* مناظراً للقيمة الذاتية $\overline{\lambda}$.

البرهان:

ليكن $v \neq 0$ متجهاً ذاتياً للمؤثر الناظمي T مناظراً للقيمة الذاتية λ، فعندئذ نجد $T(v)-\lambda v=0$ وبالتالي $\langle T(v)-\lambda v, T(v)-\lambda v\rangle = 0$

وهذا يعني أن:

$$\langle T(v),T(v)\rangle - \lambda\langle v,T(v)\rangle - \overline{\lambda}\langle T(v),v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle = 0$$

وهذا يكافئ القول وفقاً للفرض أن:

$$\langle T^*(v),T^*(v)\rangle - \overline{\lambda}\langle v,T^*(v)\rangle - \lambda\langle T^*(v),v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle = 0$$

ومنه:

$$\langle T^*(v)-\overline{\lambda}v, T^*(v)-\overline{\lambda}v\rangle = 0 \text{ إذن } T^*(v)=\overline{\lambda}v$$

وهذا يدل على أن $v \neq 0$ متجه ذاتي للمؤثر T^* مناظرٌ للقيمة الذاتية $\overline{\lambda}$.

نتيجة (5–13):

إن المؤثرين الناظميين T, T^* على فضاء واحدي $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ لهما المتجهات الذاتية نفسها.

نتيجة (5–14):

إذا كان v متجهاً ذاتياً للمصفوفة الناظمية A مقابلاً للقيمة الذاتية λ فإن v متجه ذاتي لـ A^* مقابل للقيمة الذاتية $\overline{\lambda}$.

تمرين (5–15):

تحقق من أن $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & 2+i\end{bmatrix}$ ناظمية، أوجد قيمها الذاتية ومتجهاتها الذاتية، حدّد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لـِ A^*.

الحل:

في الواقع،

$$AA^*=\begin{bmatrix}2 & i\\ i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -i\\ -i & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^*A=\begin{bmatrix}2 & -i\\ -i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & i\\ i & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

وبما أن $AA^*=A^*A$ فإن المصفوفة A ناظمية.

المعادلة المميّزة لـِ A هي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -i\\ -i & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2+1=0\Rightarrow\lambda=2\pm i$$

المتجهات الذاتية:

إن المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية $\lambda_1=2+i$ تتعين من خلال المعادلة الخطية $ix-iy=0$ وبالتالي نحصل على المتجه الذاتي $(1,1)$.

من ناحية أخرى، من أجل القيمة الذاتية $\lambda_2=2-i$ نجد المتجه الذاتي $(1,-1)$ المناظر لتلك القيمة الذاتية وفقاً للمبرهنة (5−12)، إن $v_1=(1,1)$ متجه ذاتي للمصفوفة A^* المناظرة للقيمة الذاتية $\overline{\lambda_1}=2-i$ كذلك، فإن $v_2=(1,-1)$ متجه ذاتي للمصفوفة A^* المناظر للقيمة الذاتية $\overline{\lambda_2}=2+i$.

مبرهنة (5−16):

إذا كان T مؤثراً ناظمياً على فضاء واحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، فإن المتجهين الذاتيين لِـ T والمقابلين لقيمتين ذاتيتين مختلفتين متعامدان.

البرهان:

في الواقع، إذا كان $T(v) = \lambda v$ وكان $T(w) = \mu w$ حيث $\lambda \neq \mu$ فعندئذ نجد:

$$\begin{aligned}\lambda \langle v, w\rangle &= \langle \lambda v, w\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle \\ &= \langle v, \overline{\mu} w\rangle = \mu \langle v, w\rangle\end{aligned}$$

لكن $\mu \neq \lambda$ إذن $\langle v, w\rangle = 0$

مبرهنة (5–17):

إذا كان T مؤثراً ناظمياً على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فإن المؤثر $T-\lambda I$ يكون كذلك.

البرهان:

سنبين أن $T-\lambda I$ قابل للمبادلة مع مرافقه.

في الواقع، لدينا:

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* &= (T-\lambda I)(T^* - \overline{\lambda} I) \\ &= TT^* - \lambda T^* - \overline{\lambda} T + \lambda \overline{\lambda} I \\ &= T^*T - \overline{\lambda} T - \lambda T^* + \overline{\lambda}\lambda I \\ &= (T^* - \overline{\lambda} I)(T-\lambda I) \\ &= (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\end{aligned}$$

إذن $T-\lambda I$ ناظمي.

6- اختزال المؤثرات الخطية على الفضاءات الواحدية:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ تقع عناصرها في حقل الأعداد المركبة.

نذكر القارئ بأن A تدعى **مصفوفة واحدية** إذا كان معكوسها مساوياً لمرافق منقولها، أي إذا كان $A^* = A^{-1}$.

أو بشكل مكافئ إذا كان:

$$AA^* = A^* A = I_n$$

ومن الواضح كما رأينا آنفاً أن مصفوفة واحدية حقيقية هي مصفوفة متعامدة وأن مصفوفة متعامدة تخيلية لا تكون مصفوفة واحدية.

علاوة على ذلك، إذا كانت A واحدية، فإن $|\det A| = 1$ وذلك لأن:

$$\det(A.A^*) = \det A.\det A^* = (\det A).\overline{(\det A)} = 1$$

أ- اختزال المؤثرات الخطية إلى الصيغة القطرية في الزمرة العمودية:

إن المؤثرات الناظمية وبصورة خاصة الواحدية والهرميتية لها أهمية خاصة في مبرهنة المصفوفات.

مبرهنة (6–1):

إذا كان f مؤثراً ناظمياً على فضاء واحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، عندئذ يوجد قاعدة متعامدة منظمة في E مؤلفة من المتجهات الذاتية لـِ f .

لن نقدم برهاناً لهذه المبرهنة، ولكن نكتفي بالإشارة إلى أن البرهان يتم وفقاً لمفهوم الاستقراء الرياضي بالنسبة لبعد الفضاء E. علاوة على ذلك، وبما أن المؤثرات الواحدية والهرميتية مؤثرات ناظمية، فعندئذ نورد النتائج التالية:

نتيجة (6–2):

إن المؤثرات الهرميتية والواحدية على فضاء واحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ بعده n قابلة للتقطير في الزمرة الواحدية $U(n)$.

نتيجة (6–3):

إن المؤثرات المتناظرة والعمودية على فضاء إقليدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ بعده n قابلة للتقطير في الزمرة العمودية $O(n)$.

نتيجة (6–4):

إن المصفوفات الهرميتية والواحدية من المرتبة n مشابهة لمصفوفة قطرية في الزمرة الواحدية $U(n)$.

نتيجة (6–5):

إن المصفوفات المتناظرة الحقيقية والعمودية من المرتبة n مشابهة لمصفوفة قطرية في الزمرة العمودية $O(n)$.

نتيجة (6–6):

من أجل كل قيمة ذاتية λ لمصفوفة هرميتية أو واحدية A يكون:

$$\dim E_{\lambda} = ord(\lambda)$$

تمرين (6–7):

قطّر المصفوفة المتناظرة الحقيقية التالية في الزمرة العمودية:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

وحقق صحة العلاقة $D = P^T AP$ حيث $P \in O(n)$.

الحل:

إن الدالة المميّزة لِـA هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-1) - 8(\lambda+3)$$
$$= (\lambda+3)^2(\lambda-3)$$

إن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي: $\lambda = 3$ **(بسيط)**، $\lambda = -3$ **(مكررة مرتين).**

من أجل الجذر البسيط $\lambda = 3$. نحل المعادلتين الخطيتين المتجانستين:

$$2x - 4y + 2z = 0$$
$$2x + 2y - 4z = 0$$

فنحصل على المتجه الذاتي $v_1 = (1,1,1)$ المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 3$.

أما من أجل الجذر المضاعف $\lambda = -3$ نحل المعادلة الوحيدة:

$$x + y + z = 0$$

فنرى أن $v_2 = (1,-1,0)$ متجه ذاتي مقابل لِ $\lambda = -3$ وللحصول على متجه آخر $v_3 = (x, y, z)$ متعامد مع v_1, v_2. نلحق بالمعادلة:

$$x + y + z = 0 \ldots\ldots \ (1)$$

المعادلة

$$x - y = 0 \ldots\ldots \ (2)$$

فنحصل على الحل $(1,1,-2)$

نرد الآن المتجهات الثلاثة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية فنحصل على قاعدة متعامدة منظمة:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \quad , \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \quad , \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

وهكذا إذا أخذنا المصفوفة:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

من السهل أن نرى أن المصفوفة P عمودية، إذن $P \in O(3)$
كذلك يمكن التحقق من أن:

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = diag(3,-3,-3)$$

ب- اختزال المؤثرات الخطية إلى الصيغة المثلثية في الزمرة الواحدية:

رأينا أنه يكون التداكل f على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ خزولاً إلى الشكل المثلثي إذا أمكن إيجاد قاعدة في هذا الفضاء بحيث تكون مصفوفة هذا التداكل بالنسبة لتلك القاعدة مصفوفة مثلثية.

إن المبرهنة التالية تبيّن أن كل تداكل على فضاء واحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ خزول إلى الشكل المثلثي في الزمرة الواحدية $U(n)$.

مبرهنة (6–8):

إذا كان f تداكلاً على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فعندئذ يوجد قاعدة متعامدة منظمة في E بحيث تكون مصفوفة f بالنسبة لها مصفوفة مثلثية من الأعلى.

نتيجة (6–9):

كل مصفوفة $A \in M_n(C)$ ثلولة في الزمرة الواحدية $U(n)$.

تمرين (6–10):

اختزل المصفوفة التالية A إلى الشكل المثلثي T في الزمرة الواحدية $U(2)$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

وأوجد المصفوفة $P\in U(2)$ بحيث يكون $P^{-1}AP=T$.

الحل:

إن الدالة المميّزة لـِA هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2+4=(\lambda-1-2i)(\lambda-1+2i)$$

وبالتالي القيم الذاتية لـِA هي $\lambda=1\pm 2i$.

من أجل القيمة الذاتية $\lambda=1+2i$ ، نحل المعادلة الخطية المتجانسة $-2ix+y=0$ فنحصل على المتجه الذاتي $v_1=(1,2i)$. وبالتجربة نجد أن $(2i,1)$ هو حل آخر متعامد مع الأول.

نردُّ المتجهات التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة P المرغوبة. وهكذا إذا أخذنا:

$$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2i\\ 2i & 1\end{bmatrix}$$

فمن السهل التحقق من أن:

$$P^*AP=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2i\\ 2i & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2i & -3\\ 0 & 1-2i\end{bmatrix}=T$$

7- تمرينات محلولة:

تمرين (7-1):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -i & 0 & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & -i\\ 0 & 0 & 0 & i & a\end{bmatrix} \quad ; \quad (a\in R^* - \{\pm 1\})$$

(1) بين أن A هرميتية.

(2) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لِـ A .

(3) عين قاعدة متعامدة منظمة للفضاء C^5 متجهاتها هي المتجهات الذاتية لِـ A .

(4) اختزل A إلى الصيغة القطرية.

الحل:

من السهل على القارئ أن يرى أن $A^* = A$ وبالتالي A مصفوفة هرميتية.

- إيجاد القيم الذاتية للمصفوفة الهرميتية A :

إن الدالة المميّزة للمصفوفة الهرميتية A هي:

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I - A|=\begin{vmatrix}\lambda & i & 0 & 0 & 0\\ -i & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a & i\\ 0 & 0 & 0 & -i & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda & i\\ -i & \lambda\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda-a & i\\ 0 & -i & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 1)$$

وبالتالي الجذور المميّزة (القيم الذاتية) لِـ A هي: $0, -1, 1, a+1, a-1$

- إيجاد المتجهات الذاتية للمصفوفة الهرميتية A :

من أجل الجذر المميّز $\lambda = 0$ نحل جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$-iy = 0$$
$$ix = 0$$
$$ar - is = 0$$
$$ir + as = 0$$

ونحصل على المتجه الذاتي:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من أجل الجذر المميّز $\lambda = 1$ نحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$x + iy = 0$$
$$ix - y = 0$$
$$z = 0$$
$$(1-a)r - is = 0$$
$$ir + (a-1)s = 0$$

التي تؤول إلى:

$$x + iy = 0$$
$$z = r = s = 0$$

وبالتالي نحصل على المتجه الذاتي: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

بطريقة مماثلة نحصل على المتجهات الذاتية التالية الناشئة عن القيم الذاتية $-1, a+1, a-1$

$$v_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v_{a+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \quad , \quad v_{a-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

نرد الآن المتجهات الخمسة التي حصلنا عليها إلى الصيغة الناظمية، أي نوجد القاعدة المتعامدة المنظمة، وذلك بجعل نظيم كل متجه يساوي الواحد، نستخدم هذه المتجهات كأعمدة للمصفوفة P.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & O & \\ & & -1 & & \\ & O & & a+1 & \\ & & & & a-1 \end{bmatrix}$$

تمرين (7–2):

إذا كان T مؤثراً خطياً على الفضاء الإقليدي $(R^3, \langle \ , \ \rangle)$ المعين بـ:

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+y+5z, x+5y+z)$$

أوجد القيم الذاتية لـِ T، وبرهن فقط على وجود قاعدة متعامدة منظمة (v_1, v_2, v_3) لـ R^3 مؤلفة من المتجهات الذاتية لـِ T.

الحل:

إن مصفوفة المؤثر الخطي (التداكل) T بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة وهي القاعدة القانونية في هذا الفضاء هي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

إن التداكل متناظر، لأن مصفوفة هذا التداكل بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة في هذا الفضاء مصفوفة متناظرة.

إن القيم الذاتية لـِ A هي جذور المعادلة المميّزة $|\lambda I - A| = 0$ أي جذور المعادلة $(\lambda+4)(\lambda^2 - 7\lambda + 4) = 0$ ومنه القيم الذاتية لـِ A هي:

$$\lambda_1 = -4 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{7+\sqrt{33}}{2} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{7-\sqrt{33}}{2}$$

وأخيراً، وفقاً للقسم النظري، بما أن T مؤثر متناظر، فهناك قاعدة متعامدة منظمة (v_1, v_2, v_3) مؤلفة من المتجهات الذاتية لـِ T.

تمرين (7–3):

إذا كان u مؤثراً ناظمياً على الفضاء الواحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$، فعندئذ:

1. $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|, \quad \forall x \in E$

2. $Keru = Keru^*$

الحل:

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x),u(x)\rangle = \langle u^*(x),u^*(x)\rangle = \|u^*(x)\|$$

كذلك، يلاحظ أن:

$$x \in Keru \Leftrightarrow u(x)=0 \Leftrightarrow \|u(x)\|=0 \Leftrightarrow \|u^*(x)\|=0$$
$$\Leftrightarrow u^*(x)=0 \Leftrightarrow x \in Keru^*$$

تمرين (7–4):

لتكن $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد مصفوفة متعامدة (حقيقية) P تكون من أجلها $P^T AP$ قطرية.

الحل:

إن الدالة المميّزة لـِ A هي:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

وبالتالي، فإن القيمتين الذاتيتين لـِ A هما $-1,3$.

من أجل الجذر المميّز $\lambda=3$ نحل المعادلة المتجانسة $2x-2y=0$ ونحصل على المتجه الذاتي $v_1=(1,1)$، ومن أجل الجذر المميّز الآخر $\lambda=-1$ نحل المعادلة الوحيدة $-2x-2y=0$ فنحصل على متجه ذاتي $v_2=(1,-1)$.

نرد المتجهين الذاتيين اللذين حصلنا عليهما إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة P المرغوبة.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad P^T AP=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تمرين (7–5):

عين المصفوفة الناظمية مما يلي:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$$

الحل:

من الواضح أن:

$$AA^*=\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^*A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

وبما أن $AA^* \neq A^*A$ فإن المصفوفة A ناظمية.

أيضاً، يمكن أن نرى بسهولة أن:

$$BB^*=\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^*B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{bmatrix}$$

وبما أن $BB^* = B^*B$ فإن المصفوفة B ناظمية.

تمرينات الفصل

1) ليكن المؤثر $T: C^3 \to C^3$ معرف بالصيغة:

$$T(x,y,z) = [ix + (2+3i)y, 3x + (3-i)z, (2-5i)y + iz]$$

أوجد $T^*(x,y,z)$.

2) إذا كان f مؤثراً ناظمياً على الفضاء الواحدي $(E, \langle \ , \ \rangle)$ برهن أن:

أ- f هرميتي إذا وفقط إذا كانت قيمته الذاتية حقيقية.

ب- f واحدي إذا وفقط إذا كانت القيم المطلقة لقيمه الذاتية مساوية الواحد.

3) برهن أنه يكون التداكل f على فضاء واحدي $(E, \langle \ , \ \rangle)$ هرميتياً إذا وفقط إذا كانت قيمه الذاتية أعداداً حقيقيةً.

4) إذا كان f مؤثراً ناظمياً برهن أن $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^*$

5) إذا كان f مؤثراً ناظمياً على الفضاء الواحدي $(E, \langle \ , \ \rangle)$ برهن أن $Kerf = Kerf^*$

6) برهن أنه يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي $(E, \langle \ , \ \rangle)$ هرميتياً إذا وفقط إذا كان if هرميتياً متخالفاً.

7) من أجل كل من المصفوفات المتناظرة الحقيقية A التالية، أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^T AP$ قطرية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

8) أوجد مصفوفة مثلثية T مشابهة في الزمرة الواحدية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -i \\ -i\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9) قطّر المصفوفة التالية في الزمرة العمودية:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10) اختزل المصفوفة التالية إلى الشكل المثلثي في الزمرة الواحدية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

11) ليكن T مؤثراً ناظمياً. برهن أن:

أ- يكون $T(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $T^*(x)=0$.

ب- المؤثر $T-\lambda I$ مؤثر ناظمي أيضاً.

12) بيّن أنه أياً كان المؤثر الخطي T فإن $T+T^*$ هرميتياً كما أن $T-T^*$ هرميتياً متخالفاً.

13) إذا كان T مؤثراً ناظمياً على فضاء واحدي $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ فإن T,T^* لهما الفضاءات الذاتية نفسها.

14) لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3i & 0 \\ -3i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

أ- بين أن A هرميتية.

ب- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لِـA .

حـ- عين قاعدة متعامدة منظمة للفضاء C^3 متجهاتها هي المتجهات الذاتية لِـA .

★★★★★★★★★★★★★★★★★★

~~تمرينات الفصل~~

~~1- اختزل~~

ثبت المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة بالمصطلحات العربية المستخدمة في هذا الكتاب مرتّبة وفق حروف الهجاء العربية، مع مقابل كلٍ منها باللغة الإنكليزية:

– أ –

إبدالي	Commutative
أثر	Trace
أساس فضاء متجهات خطي	Basis of linear vector space
أساس متعامد	Orthogonal base
أساس متعامد منظم	Orthonormal basis
أساس معتاد	Standard basis
أساسي – جوهري	Fundamental
الأعداد المرافقة	Conjugate number
أنماط	Types
إيجابي	Positive Pair
اختزال شكل تربيعي (صيغة تربيعية)	Reduction of quadratic form
الاستقراء	Induction
استقلال خطي	Linear independence

– ب –

بُعد	Dimension

Finite dimension	بعد نهائي
– ت –	
Transformation	تحويل
Linear transformation	تحويل خطي
Elementary transformations	التحويلات الأولية
Quadratic	تربيعي
Linear combination	التركيب الخطي
Classification of quadratic	تصنيف الصيغ التربيعية
Congruence	تطابق
Applications	تطبيقات
Orthogonality	التعامد
Multiplicity	تعدد
Diagonalization of linear operator	تقطير مؤثر خطي
Signature	توقيع
– ج –	
Jacobi	جاكوبي
Root	جذر
Jordan	جوردان
– ح –	
Scalar product	حاصل الضرب القياسي
Squared terms	حدود مربّعة
Field	حقل
Field of complex numbers	حقل الأعداد المركبة

Real	حقيقي
Solution	حل
Trivial solution	حل تافه
Nontrivial solution	حل غير تافه
Ring	حلقة

– خ –

Characteristic	خاصة مميّزة
Linear	خطي

– د –

Circle	دائرة
Function	دالة
Alternating function	دالة متناوبة
Index	دليل
Rotation	دوران
Rotation of axes	دوران المحاور

– ذ –

Eigen	ذاتي

– ر –

Principal	رئيسي
Rank	رتبة
Rank of a quadratic form	رتبة صيغة تربيعية

– س –

Surface	سطح

Quadratic surfaces	سطوح تربيعية
Scalar	سلّمي
Smith	سميث
Sylvester	سيلفستر

– ش –

Singular	شاذ
Symmetric bilinear form	شكل ثنائي الخطية متناظر
Skow symmetric bilinear form	شكل ثنائي الخطية متناظر متخالف
Polar form	شكل قطبي

– ص –

Nullity	صفرية
Form	صيغة
General form	الصيغة العامة
Normal form	الصيغة الناظمية
Quadratic	صيغة تربيعية
Bilinear form	صيغة ثنائية الخطية

– ط –

Gauss method	طريقة غاوس
Schmidt orthogonalization –Gram process	طريقة غرام – شميت للتعامد
Spectra of linear operators	طيف المؤثرات الخطية
Spectral	طيفي

– غ –

Non - singular	غير شاذ
Irreducible	غير قابلة للاختزال
Non - derogatory	غير متردٍّ
Indefinite	غير محدّد

– ف –

Space	فضاء
Eucledean space	فضاء إقليدي
Product space	فضاء الجداء
Space of polynominals	فضاء الحدوديات
Solution space	فضاء الحل
Inner product space	فضاء الضرب الداخلي
Dual space	فضاء ثنوي
Real inner product space	فضاء ذو جداء داخلي حقيقي
Complex inner product space	فضاء ذو جداء داخلي عقدي
Vector - space	فضاء متجه
Finite space	فضاء منته
Super - diagonal	فوق القطري

– ق –

Leader	القائد
Diagonalizable	قابلة للاختزال القطري
Orthonormal base	قاعدة متعامدة منظمة
Block	قالب

Canonical	قانوني
Minimum	قيمة صغرى
Inertia	قصور ذاتي (عطالة)
Main diagonal	قطر رئيسي
Principal diagonal	قطر رئيسي
Diagonal	قطري
Hyperbola	قطع زائد
Parabola	قطع مكافئ
Ellipse	قطع ناقص
Proper value	قيمة خاصة (قيمة ذاتية)
Eigen value	قيمة ذاتية
Characteristic value	قيمة مميّزة (قيمة ذاتية)

– ك –

Polynominal	كثيرة حدود
Elementary polynominal	كثيرة حدود ابتدائية
Monic polynominal	كثيرة حدود واحدية
Gramer	كرامير
Cayley	كيّلي

– ل –

Infinite	لا نهائي

– م –

Linear operator	مؤثر خطي
Orthogonal operator	مؤثر عمودي

Normal operator	مؤثر ناظمي
Hermitian operator	مؤثر هرميتي
Unitary operator	مؤثر واحدي
Skew - symmetric	مائلة التناظر
Inequality	متباينة
Honogeneous	متجانس
Vector	متجه
Eigen vector	متجه خاص (متجه مميز)
Row vector	متجه صف
Column vector	متجه عمود
Triangle inequality	متراجحة المثلث
Schawars inequality	متراجحة شفارتز
Degenerate	مترد
Derogatory	متردٍّ
Matric power series	متسلسلة قوى مصفوفية
Orthogonal	متعامد
Normalization	متعامد منظم
Variable	متغيّر
Real equivalent	متكافئان حقيقياً
Algebraic complement	متمم جبري
Symmetric	متناظر
Alternative	متناوب
Set	مجموعة

Solution set	مجموعة الحلول
Determinant	محدّد
Negative definite	محدد سالب
Definite	محدّدة
Reduced	مختزل
Adjoint	مرافق
Conjugate	مرافق
Composents	مركبات
Minor	مصغر
Principal minor	مصغر رئيسي
Inversible matrices	المصفوفات القابلة للقلب
Block matrices	مصفوفات القوالب
Quassi commutative matrices	مصفوفات شبه إبدالية
Similar matrices	مصفوفات متشابهة
Equivalent matrices	مصفوفات متكافئة
Matrix	مصفوفة
Unit matrix	مصفوفة أحادية
Row matrix	مصفوفة السطر
Adjoint matrix	المصفوفة المرافقة
Coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
Transition matrix	مصفوفة انتقال
Matrix of bilinear form	مصفوفة شكل ثنائي الخطية
Zero matrix	مصفوفة صفرية

Column matrix	مصفوفة عمود
Orthogonal matrix	مصفوفة عمودية
Canonical matrix	مصفوفة قانونية
Triangular matrix	مصفوفة مثلثية
Identity matrix	مصفوفة محايدة
Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية
Unitary matrix	مصفوفة واحدية
Linear equation	معادلات خطية
Minimum equation	معادلة صغرى
Homogeneous equation	معادلة متجانسة
Expansion	مفكوك
Conic section	مقطع مخروطي
Transpose	منقول
Positive semi definite	موجبة شبه محدّدة

– ن –

System	نظام
Finite	نهائي

– هـ –

Hamilton	هاميلتون

ثبت المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة بالمصطلحات العلمية الإنكليزية المستخدمة في هذا الكتاب، مع مقابل كلٍ منها باللغةالعربية:

– A –

Adjoint	مرافق
Adjoint matrix	المصفوفة المرافقة
Algebraic complement	متمم جبري
Alternating function	دالة متناوبة
Alternative	متناوب
Application	تطبيقات

– B –

Basis of linear vector space	أساس فضاء متجهات خطي
Bilinear form	صيغة ثنائية الخطية
Block	قالب
Block matrices	مصفوفات القوالب

– C –

Canonical	قانوني
Canonical matrix	مصفوفة قانونية
Cayley	كيّلي

Characteristic	خاصة مميّزة
Characteristic value	قيمة مميّزة (قيمة ذاتية)
Circle	دائرة
Classification of quadratic	تصنيف الصيغ التربيعية
Coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
Column matrix	مصفوفة عمود
Column vector	متجه عمود
Commutative	إبدالي
Complex inner product space	فضاء ذو جداء داخلي عقدي
Composents	مركبات
Congruence	تطابق
Conic section	مقطع مخروطي
Conjugate	مرافق
Conjugate number	الأعداد المرافقة

– D –

Definite	محدّدة
Degenerate	مترد
Derogatory	متردٍّ
Determinant	محدّد
Diagonal	قطري
Diagonalizable	قابلة للاختزال القطري
Diagonalization of linear operator	تقطير مؤثر خطي
Dimension	بُعد

Dual space	فضاء ثنوي

– E –

Eigen	ذاتي
Eigen value	قيمة ذاتية
Eigen vector	متجه خاص (متجه مميز)
Elementary polynominal	كثيرة حدود ابتدائية
Elementary transformations	التحويلات الأولية
Ellipse	قطع ناقص
Equivalent matrices	مصفوفات متكافئة
Eucledean space	فضاء إقليدي
Expansion	مفكوك

– F –

Field	حقل
Field of complex numbers	حقل الأعداد المركبة
Finite	نهائي
Finite dimension	بعد نهائي
Finite space	فضاء منته
Form	صيغة
Function	دالة
Fundamental	أساسي – جوهري

– G –

Gauss method	طريقة غاوس
General form	الصيغة العامة

Gram- Schmidt orthogonalization process	طريقة غرام – شميت للتعامد
Gramer	كرامير

–H –

Hamilton	هاميلتون
Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية
Hermitian operator	مؤثر هرميتي
Homogeneous equation	معادلة متجانسة
Honogeneous	متجانس
Hyperbola	قطع زائد

– I –

Identity matrix	مصفوفة محايدة
Indefinite	غير محدّد
Index	دليل
Induction	الاستقراء
Inequality	متباينة
Inertia	قصور ذاتي (عطالة)
Infinite	لا نهائي
Inner product space	فضاء الضرب الداخلي
Inversible matrices	المصفوفات القابلة للقلب
Irreducible	غير قابلة للاختزال

– J –

Jacobi	جاكوبي

Jordan	جوردان

– L –

Leader	القائد
Linear	خطي
Linear combination	التركيب الخطي
Linear equation	معادلات خطية
Linear independence	استقلال خطي
Linear operator	مؤثر خطي
Linear transformation	تحويل خطي

– M –

Main diagonal	قطر رئيسي
Metric power series	متسلسلة قوى مصفوفية
Matrix	مصفوفة
Matrix of bilinear form	مصفوفة شكل ثنائي الخطية
Minimum	قيمة صغرى
Minimum equation	معادلة صغرى
Minor	مصغر
Manic polynomial	كثيرة حدود واحدية
Multiplicity	تعدد

– N –

Negative definite	محدد سالب
Non - derogatory	غير متردٍّ
Non - singular	غير شاذ

Nondegenerate	غير مترد
Nontrivial solution	حل غير تافه
Normal form	الصيغة الناظمية
Normal operator	مؤثر ناظمي
Normalization	متعامد منظم
Nullity	صفرية

– O –

Orthogonal base	أساس متعامد
Orthogonal	متعامد
Orthogonal basis	أساس متعامد منظم
Orthogonal matrix	مصفوفة عمودية
Orthogonal operator	مؤثر عمودي
Orthogonality	التعامد
Orthonormal base	قاعدة متعامدة منظمة

– P –

Parabola	قطع مكافئ
Polar form	شكل قطبي
Polynomial	كثيرة حدود
Positive Pair	إيجابي
Positive semi definite	موجبة شبه محدّدة
Principal	رئيسي
Principal diagonal	قطر رئيسي
Principal minor	مصغر رئيسي

Product space	فضاء الجداء
Proper value	قيمة خاصة (قيمة ذاتية)

– Q –

Quadratic	تربيعي
Quadratic	صيغة تربيعية
Quadratic surfaces	سطوح تربيعية
Quassi commutative matrices	مصفوفات شبه إبدالية

– R –

Rank	رتبة
Rank of a quadratic form	رتبة صيغة تربيعية
Real	حقيقي
Real equivalent	متكافئان حقيقياً
Real inner product space	فضاء ذو جداء داخلي حقيقي
Reduced	مختزل
Reduction of quadratic form	اختزال شكل تربيعي (صيغة تربيعية)
Ring	حلقة
Root	جذر
Rotation	دوران
Rotation of axes	دوران المحاور
Row matrix	مصفوفة السطر
Row vector	متجه صف

– S –

Scalar	سلّمي

Scalar product	حاصل الضرب القياسي
Schawars inequality	متراجحة شفارتز
Set	مجموعة
Signature	توقيع
Similar matrices	مصفوفات متشابهة
Singular	شاذ
Skew - symmetric	مائلة التناظر
Skow symmetric bilinear form	شكل ثنائي الخطية متناظر متخالف
Smith	سميث
Solution	حل
Solution set	مجموعة الحلول
Solution space	فضاء الحل
Space	فضاء
Space of polynominals	فضاء الحدوديات
Spectra of linear operators	طيف المؤثرات الخطية
Spectral	طيفي
Squared terms	حدود مربّعة
Standard basis	أساس معتاد
Super - diagonal	فوق القطري
Surface	سطح
Sylvester	سيلفستر
Symmetric	متناظر
Symmetric bilinear form	شكل ثنائي الخطية متناظر

System	نظام

– T –

Trace	أثر
Transformation	تحويل
Transition matrix	مصفوفة انتقال
Transpose	منقول
Triangle inequality	متراجحة المثلث
Triangular matrix	مصفوفة مثلثية
Trivial solution	حل تافه
Types	أنماط

– U –

Unit matrix	مصفوفة أحادية
Unitary matrix	مصفوفة واحدية
Unitary operator	مؤثر واحدي

– V –

Variable	متغيّر
Vector	متجه
Vector - space	فضاء متجه

– Z –

Zero matrix	مصفوفة صفرية

المراجع العلمية

1. Burton, Linear algebra, Holden – day, 1973.
2. Chevalet et Morel, Algèbre Linéaire 1 et 2, Armand Colin – 1974.
3. Doneddu, Espaces euclidiens et Hermitiens – Tome(3), Vuibert – 1980.
4. J.H. Coates Michaelmas, Quadratic Forms Term 1996.
5. J.Peter, Linear Algebra 15; Applications and conclusion. November 2006.
6. Larrieu, Principe d' Algèbre Linéaire, Dunod 1965.
7. Nering ⮜Linear algebra, Matrix Theory⮞ 1980.
8. Serge Lang, ⮜Linear algebra⮞, 1977.

1- كنجو أنيس & السلمان سلمان (مترجم)، مدخل إلى نظرية المحددات والمصفوفات – جامعة الملك سعود، السعودية – 1987.

2- حمصي الهام، الجبر (4) – منشورات جامعة دمشق، سوريا- 1992.

اللجنة العلمية

أ. د. خالد خنيفس

أ. م. د. عدنان عمورة

أ. م. د. يوسف الوادي

المدقق اللغوي

د. فخري بوش

قسم اللغة العربية وآدابها – جامعة دمشق –