المعادلات التفاضلية (٢)
العادية والجزئية

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

المعادلات التفاضلية (٢)
العادية والجزئية

تأليف

الدكتور
محمد مناف الحمد
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

الدكتور
نضال شمعون
باحث رئيسي في المعهد العالي للعلوم التطبيقية
والتكنولوجيا بدمشق

جامعة دمشق

الفهرس

الموضوع	رقم الصفحة
المقدمة	١٣

الفصل صفر

لمحة سريعة عن المعادلات التفاضلية العادية

٠-١- مقدمة	١٧
٠-٢- طرق مكاملة المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة للمشتق	١٨
٠-٣- تغاير البارامترات	٢٣
٠-٤- تمارين محلولة	٢٣
٠-٥- تعريف المؤثر التفاضلية L	٢٧
٠-٦- المؤثر $L^{-1}(D)$	٢٨

الفصل الأول

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الخطية

١-١- مقدمة	٣١
١-٢- تعريف تحويل لابلاس	٣١
١-٣- مبرهنة (١)	٣٢
١-٤- تعريف الرتبة الأسية	٣٣
١-٥- تعريف الاستمرار المقطعي	٣٣
١-٦- مبرهنة (٢)	٣٤
١-٧- ملاحظة	٣٥
١-٨- تحويلات لابلاس للدوال الأساسية الشهيرة	٣٥

١-٩-	خواص تحويلات لابلاس	٤٠
١-١٠-	تعريف	٥١
١-١١-	تحويل لابلاس العكسي	٥١
١-١٢-	ملاحظة	٥٢
١-١٣-	تمارين محلولة	٥٢
١-١٤-	**حل المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام تحويلات لابلاس**	٦٤
١-١٥-	تمارين محلولة	٦٤
١-١٧-	تمارين غير محلولة	٦٦

الفصل الثاني

حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة متسلسلات القوى

٢-١-	مقدمة في متسلسلات القوى الحقيقية	٦٩
٢-٢-	أمثلة محلولة	٧٠
٢-٣-	تعريف	٧٤
٢-٤-	مقدمة عن حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة المتسلسلات	٧٤
٢-٥-	النقط العادية والشاذة	٧٥
٢-٦-	دراسة الحل بجوار نقطة عادية	٧٥
٢-٧-	تمارين محلولة	٨٠
٢-٨-	معادلة هيرمت التفاضلية	٨٨
٢-٩-	النقطة الشاذة المنتظمة	٨٩
٢-١٠-	مبرهنة الوجود	٩٠

٢-١١-	أمثلة محلولة	٩٤
٢-١٢-	معادلة بسل التفاضلية من المرتبة υ	١٠٣
٢-١٣-	معادلة غوص فوق الهندسية التفاضلية	١٠٦
٢-١٤-	تمارين غير محلولة	١٠٩

الفصل الثالث

جمل المعادلات التفاضلية العادية

٣-١-	تعاريف أساسية	١١٣
٣-٢-	حل الجملة النظامية	١١٥
٣-٣-	تمارين محلولة	١١٦
٣-٤-	مبرهنة الوجود والوحدانية	١٢٢
٣-٥-	مبرهنة بيكار	١٢٣
٣-٦-	أمثلة محلولة	١٢٥
٣-٧-	استقلال مجموعة دوال	١٢٧
٣-٨-	مبرهنة	١٢٧
٣-٩-	نتيجة (١)	١٢٨
٣-١٠-	نتيجة (٢)	١٢٨
٣-١١-	التكامل العام لجملة نظامية	١٢٨
٣-١٢-	تمرين محلول	١٢٩
٣-١٣-	الشكل التناظري لجملة معادلات تفاضلية	١٣١
٣-١٤-	طريقة المضاريب	١٣١
٣-١٥-	تمارين محلولة	١٣٢
٣-١٦-	حل جملة تفاضلية بطريقة الحذف	١٣٥

٣-١٧-	تمارين محلولة	١٣٩
٣-١٨-	جمل المعادلات التفاضلية الخطية	١٤١
٣-١٩-	جملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة	١٤٣
٣-١٩-١	مبرهنة (١)	١٤٤
٣-١٩-٢	مبرهنة (٢)	١٤٤
٣-١٩-٣	مبرهنة (٣)	١٤٤
٣-١٩-٤	مبرهنة (٤)	١٤٥
٣-١٩-٥	الاستقلال والارتباط الخطي لجملة حلول	١٤٦
٣-١٩-٦	مبرهنة (٥)	١٤٧
٣-١٩-٧	مبرهنة (٦)	١٤٩
٣-١٩-٨	تمارين محلولة	١٥٠
٣-٢٠-	جملة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة	١٥١
٣-٢٠-١	مبرهنة (١)	١٥٢
٣-٢٠-٢	مبرهنة (٢)	١٥٢
٣-٢٠-٣	مبرهنة (٣)	١٥٢
٣-٢٠-٤	ملاحظة	١٥٣
٣-٢٠-٥	مبرهنة (٤)	١٥٣
٣-٢١-	طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج)	١٥٥
٣-٢١-١	تمارين محلولة	١٥٧
٣-٢٢-	جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة	١٥٩
٣-٢٢-١	تمارين محلولة	١٦٣
٣-٢٣-	الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة	١٦٨
٣-٢٣-١	مثال محلول	١٦٩

٣-٢٤-	**جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة وغير النظامية**	١٧١
٣-٢٤-١	أمثلة محلولة	١٧٢
٣-٢٥-	**حل مجموعة معادلات تفاضلية خطية باستخدام تحويلات لابلاس**	١٧٩
٣-٢٦-	**مثال محلول**	١٨٠
٣-٢٧-	تمارين غير محلولة	١٨١

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الكلية

٤-١-	تعاريف أساسية	١٨٥
٤-٢-	تمارين محلولة	١٨٩
٤-٣-	طريقة مكاملة معادلة كلية كمولة	١٩٠
٤-٤-	أمثلة محلولة	١٩١
٤-٥-	الشرط اللازم والكافي لكمولية معادلة بفاف	١٩٣
٤-٥-١	مبرهنة (١)	١٩٣
٤-٥-٢	مبرهنة (٢)	١٩٤
٤-٥-٣	مثال محلول	١٩٨
٤-٥-٤	ملاحظة (١)	٢٠٠
٤-٥-٥	ملاحظة (٢)	٢٠٠
٤-٦-	مبرهنة (٣)	٢٠١
٤-٧-	دراسة بعض الحالات الخاصة	٢٠٢
٤-٧-١	تمارين محلولة	٢٠٥
٤-٨-	ملاحظة	٢٠٨
٤-٨-١	مثال محلول	٢٠٩

٤-٩-	التفسير الهندسي لقابلية المكاملة لمعادلة تفاضلية كلية	٢١٠
٤-٩-١	مثال محلول	٢١٢
٤-١٠-	الحل المشترك لجملة معادلتين تفاضليتين كليتين	٢١٣
٤-١٠-١	تمارين محلولة	٢١٤
٤-١١	تمارين غير محلولة	٢٢٠

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية الجزئية

٥-١-	بعض التعاريف المتضمنة معادلات تفاضلية جزئية	٢٢٣
٥-٢-	منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية	٢٢٥
٥-٢-١	حذف الثوابت الاختيارية	٢٢٥
٥-٢-٢	حذف الدوال الاختيارية	٢٢٥
٥-٢-٣	تمارين محلولة	٢٢٧
٥-٣-	المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعالج كمعادلات تفاضلية عادية	٢٣١
٥-٤-	المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى	٢٣١
٥-٤-١	مبرهنة (١)	٢٣٢
٥-٤-٢	مبرهنة (٢)	٢٣٣
٥-٤-٣	أمثلة محلولة	٢٣٤
٥-٥-	السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية المار بمنحن معلوم	٢٣٦
٥-٥-١	مثال محلول (١)	٢٣٧
٥-٥-٢	مثال محلول (٢)	٢٣٧
٥-٦-	تعيين السطوح المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة	٢٣٨
٥-٦-١	مثال محلول	٢٤٠

٥-٧-	المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى وغير الخطية	٢٤١
٥-٧-١	تعاريف ومفاهيم أولية	٢٤١
٥-٧-٢	التكامل التام للمعادلة	٢٤٢
٥-٧-٣	إيجاد التكامل التام للمعادلة في حالات بسيطة	٢٤٣
٥-٧-٤	أمثلة محلولة	٢٤٤
٥-٨-	التكامل الشاذ – التكامل العام – التكاملات الخاصة	٢٤٦
٥-٨-١	أمثلة محلولة	٢٤٨
٥-٩-	المميزات	٢٥٠
٥-٩-١	مثال محلول	٢٥١
٥-١٠-	التكامل العام لمعادلة لاغرانج	٢٥١
٥-١١-	طريقتا شارب وجاكوبي في مكاملة معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى	٢٥٣
٥-١١-١	طريقة شارب	٢٥٣
٥-١١-٢	تمارين محلولة	٢٥٦
٥-١١-٣	طريقة جاكوبي	٢٥٩
٥-١١-٤	أمثلة محلولة	٢٦٢
٥-١٢-	المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية	٢٦٥
٥-١٢-١	تعاريف ومفاهيم أساسية	٢٦٥
٥-١٢-٢	تصنيف المعادلات الخطية من المرتبة الثانية	٢٦٧
٥-١٢-٣	أمثلة محلولة	٢٦٧
٥-١٣-	التحويل الإحداثي	٢٦٨
٥-١٣-١	مبرهنة (١)	٢٦٩
٥-١٣-٢	المميزات (المنحنيات المميزة)	٢٧١

٥-١٣-٣	مبرهنة (٢)	٢٧٣
٥-١٣-٤	تمرين محلول	٢٧٧
٥-١٣-٥	مبرهنة (٣)	٢٧٨
٥-١٣-٦	مثال محلول	٢٧٩
٥-١٣-٧	مبرهنة (٤)	٢٧٩
٥-١٣-٨	مثال محلول	٢٨١
٥-١٣-٩	ملاحظة	٢٨٢
٥-١٣-١٠	مبرهنة (٥)	٢٨٢
٥-١٣-١١	مثال محلول	٢٨٤
٥-١٣-١٢	مبرهنة (٦)	٢٨٤
٥-١٤-	الأشكال القانونية للمعادلات	٢٨٥
٥-١٥-	تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية الجزئية	٢٨٥
٥-١٥-١	أمثلة محلولة	٢٨٩
٥-١٦-	تمارين غير محلولة	٢٩٢
	ثبت المصطلحات	٢٩٧
	المصادر	٣٠٣

مُقَدِّمَة

يعد هذا الكتاب (المعادلات التفاضلية (٢)) تتمة لكتاب المعادلات التفاضلية (١) لطلاب السنة الثانية، رياضيات، في كلية العلوم بجامعة دمشق وقد تم إعداده بحيث يكون منسجما مع منهاج هذا المقرر كما أقره مجلس التعليم العالي.

وهذا الكتاب هو نتيجة للمحاضرات التي ألقيت في مقرر المعادلات التفاضلية (٢) على طلاب السنة الثانية في كلية العلوم بجامعة دمشق خلال السنوات الأخيرة. وقد بذلنا جهدا كي يكون هذا الكتاب واضحا للطالب، حيث تضمنت جميع الفقرات عددا كبيرا من الأمثلة والتمارين المحلولة التي تساعد الطالب على ترسيخ المفاهيم النظرية في ذهنه. ووضعت في نهاية كل فصل مجموعة من التمارين غير المحلولة، لتفسح المجال أمام كل الطلاب للعمل بشكل مستقل، والاستفادة أكثر ما يمكن، بهدف اختبار القدرة الذاتية على الحل وتنميتها.
يحوي هذا الكتاب لمحة سريعة عن المعادلات التفاضلية العادية وخمسة فصول رئيسية موسعة. يبدأ الفصل الأول من هذا الكتاب بدراسة طرائق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية العادية، والفصل الثاني يحتوي دراسة حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الأمثال المتحولة، وقد بينا كيف يتم حل مثل هذه المعادلات بوساطة متسلسلات القوى، بجوار نقطة عادية وبجوار نقطة شاذة منتظمة، وقدمنا كأمثلة على ذلك معادلات شهيرة مثل معادلة هيرميت ومعادلة بسل ومعادلة غوص. وفي الفصل الثالث قمنا بدراسة حل جملة معادلات تفاضلية بشكلها العام وبخاصة الخطية منها، وكذلك حل جملة معادلات خطية ذات أمثال ثابتة واستخدام تحويلات لابلاس في حلها. أما

في الفصل الرابع فيجد الدارس طرائق حل معادلات بفاف التفاضلية والتي تسمى المعادلات التفاضلية الكلية، وكذلك الحل المشترك لجملة معادلتين تفاضليتين كليتين. وحيث أن المعادلات التفاضلية الجزئية تتصف بأهمية خاصة، فقد خصصنا لها الفصل الأخير، فقدمنا في البداية المفاهيم العامة والتعاريف الأساسية، ثم درسنا المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية وغير الخطية، مع طريقة إيجاد التكامل العام والتكامل الشاذ، والتكاملات الخاصة والمنحنيات المميزة للمعادلة، وطريقة شارب وجاكوبي في حل النمطين السابقين من المعادلات، وأخيراً قمنا بتصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية وإرجاعها إلى الشكل القانوني.

وقد راعينا في تأليف هذا الكتاب التسلسل المنطقي للأبحاث الواردة في المنهاج، وحاولنا جاهدين عرض مضمونه بلغة عربية سليمة و أسلوب علمي مبسط.

نرجو أن نكون قد وفقنا في عرض مضمون هذا الكتاب، ليكون عوناً نافعاً لأبنائنا الطلاب.ونرجو من الزملاء تزويدنا بملاحظاتهم القيمة حول هذا الكتاب إسهاما منهم في تطويره وتحسينه.

والله ولي التوفيق

المؤلفان

د. محمد مناف الحمد & د. نضال شمعون

منهج مقرر المعادلات التفاضلية (٢)

"العادية والجزئية"

٠- لمحة سريعة عن المعادلات التفاضلية العادية.

١- تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الخطية.

٢- دراسة حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة متسلسلات القوى.

٣- جملة المعادلات التفاضلية العادية والخطية.

٤- المعادلات التفاضلية الكلية (معادلة بفاف).

٥- المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى ومن مراتب عليا، تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية الخطية.

الفصل صفر

لمحة سريعة عن المعادلات التفاضلية العادية

٠-١- مقدمة:

نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تحقق علاقة بين المتحول المستقل x والدالة المجهولة $y = f(x)$ ومشتقاتها المتتالية $y'(x), y''(x),..., y^{(n)}(x)$ ونعبر عن هذه المعادلة التفاضلية رمزاً بالشكل التالي:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x),..., y^{(n)}(x)) = 0$$

ونسمي معادلة من هذا الشكل بمعادلة تفاضلية عادية، حيث الدالة المجهولة $y(x)$ تابعة إلى متحول مستقل واحد x.

وعليه نبدأ بمراجعة بعض الحقائق حول المعادلات التفاضلية العادية وحلولها. ونهتم أساساً بالمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبتين الأولى والثانية، كما يتضح من المعادلتين التاليتين.

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + f(x) \qquad (١)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \qquad (٢)$$

وإذا كانت الدالة $f(x)$ في كلتا المعادلتين تساوي الصفر، فإن المعادلة تكون متجانسة. (اختيار آخر: إذا كانت الدالة الثابتة $y(x) \equiv 0$ حلاً، فإن المعادلة متجانسة).

وأهم ما يميز المعادلة الخطية المتجانسة هو أن مجموع المضاعفات الثابتة للحلول تكون أيضاً حلاً. وبناءً عليه إذا كان $y_1(x), y_2(x)$ حلين لمعادلة خطية

متجانسة فإن $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ يكون حلاً أيضاً لأي اختيار للثابتين c_1, c_2 (يسمى مجموع المضاعفات الثابتة لدالتين أو أكثر بالتركيب الخطي للدالتين أو الدوال). ويحتوي الحل العام لمعادلة تفاضلية عادية على بارامترات اختيارية بعدد يساوي مرتبة المعادلة.

ويتكون الحل العام لمعادلة تفاضلية غير متجانسة من مجموع حل خاص (أي أنه أي حل) للمعادلة غير المتجانسة والحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة (التي تنتج باستبدال $f(x)$ بصفر).

ويعطى في كل من الفقرات المرقمة أسفله، معادلة تفاضلية وحلها، وستكون لهذه المعادلات أهمية خاصة لبقية الكتاب.

خلال هذه الفقرة سنستعمل x, y كمتغيرين دالة ومستقل.

٠-٢- طرق مكاملة المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة للمشتق:

(أ) إن المعادلة:
$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$
يكون حلها:
$$y=\int f(x)dx+c$$

ويمكن اعتبار هذه المعادلة أبسط المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق. وفي الحقيقة إن تعريف التكامل اللامحدود في الحل هو أنه دالة مشتقتها هي $f(x)$. فمثلاً المعادلة التفاضلية:
$$y'=\frac{dy}{dx}=\sin x$$
يكون حلها هو $y(x)=-\cos x+c$ لأن مشتقة $-\cos x$ هي $\sin x$ وهناك صيغة أخرى لكتابة $y(x)$ هي:
$$y(x)=c'+(1-\cos x)$$

حيث عن مشتقة $1-\cos x$ هي أيضاً $\sin x$. وبالطبع يجب أن يختلف الثابتان c, c' بواحد صحيح حتى تكون للدالة $y(x)$ نفس القيمة.

(ب) إن المعادلة:
$$\frac{dy}{dx} = Ky$$
تقبل حلاً من الشكل:
$$y(x) = ce^{kx}$$
من السهل التحقق من أن الدالة الواردة تحقق بالفعل، هذه المعادلة التفاضلية، والثابت c يمكن أن يكون أي عدد. ويقترب الحل $y(x)$ من الصفر عندما يتزايد x بشرط أن يكون K ثابتاً سالباً.

وفي الحالة العكسية، عندما يكون K موجباً، يتزايد الحل في قيمته كلما تزايد x (هذا النمو الأسي يكون عادة سبباً لنكبات في الحالات الفيزيائية، حيث أنه لا يمكن مداومته إلى الأبد).

(ج) لتكن المعادلة:
$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(x)$$
إن الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالصيغة:
$$y = c_2 + c_1 x + \int\left(\int g(x)dx\right)dx$$
وفي هذا النوع الأبسط من المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية، نلاحظ أن عملية تكامل واحدة لكلا الطرفين للمعادلة تؤدي إلى:
$$\frac{dy}{dx} = c_1 + G(x)$$
حيث $G(x)$ هي التكامل اللامحدود للدالة $g(x)$. وهذه المعادلة تتفق وصورة معادلة رقم (أ) بالطرف الأيمن $f(x) = c_1 + G(x)$ ونلاحظ هنا أن حل المعادلة التفاضلية يتضمن عمليتي تكامل ممّا يُظهر ثابتين اختياريين.

(د) لتكن المعادلة: $$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y = 0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة المتجانسة هو:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

وتكمن إحدى الطرق المفيدة لحل المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة في افتراض حل من الشكل:

$$y(x) = e^{mx}$$

وبالتالي:

$$y'(x) = me^{mx} \qquad y''(x) = m^2 e^{mx}$$

ويؤدي التعويض عن y, y', y'' في المعادلة التفاضلية المفروضة واختصار العامل المشترك e^{mx} من كل الحدود إلى معادلة كثيرة حدود تسمى **بالمعادلة المميزة** لتعيين m وفي الحالة الواردة أعلاه، نفرض $y(x) = e^{mx}$ عندها نحصل على:

$$m^2 - \lambda^2 = 0$$

وبالتالي فإن $m = -\lambda, m = +\lambda$ هما القيمتان المميزتان ومن ثم فإن $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = e^{-\lambda x}$ حلين خاصين للمعادلة المفروضة. وحيث أن المعادلة خطية متجانسة فإن أي تركيب خطي (مجموع المضاعفات الثابتة) لهذين الحلين هو أيضاً حل. وبهذه الطريقة نصل إلى الحل المبيّن في البداية.

ومن المفيد أحياناً كتابة حل هذه المعادلة التفاضلية بصيغة أخرى.

ويعرف الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي، بأنهما:

$$\sinh A = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A}), \cosh A = \frac{1}{2}(e^A + e^{-A})$$

إذن فكل من $\sinh \lambda x, \cosh \lambda x$ لكونه تركيباً خطياً من $e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}$ هو حل لهذه المعادلة التفاضلية، ولذا يمكننا كتابة الحل العام على الشكل:

$$y(x) = b_1 \cosh \lambda x + b_2 \sinh \lambda x$$

(ذ) لتكن المعادلة: $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة:

$$y(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$$

وهذه المعادلة التفاضلية خطية ومتجانسة وذات معاملات ثابتة. ولو حاولنا إيجاد الحل بالتعويض $y(x) = e^{mx}$ كما هو مقترح بالمثال السابق، نجد أن $m^2 + \lambda^2 = 0$ هي المعادلة المميزة. وبما أن الجذرين $m = \mp i\lambda$ (حيث $i^2 = -1$) نتوصل إلى اعتبار الدالتين الأسيتين المركبتين $e^{i\lambda x}, e^{-i\lambda x}$ حلين للمعادلة. ولكي نجد صيغة حقيقية مناسبة للحل، نستعين بعلاقة أولر:

$$e^{i\lambda x} = \cos A + i \sin A$$

التي تربط الدالة الأسية التخيلية بدالتي الجيب وجيب التمام الحقيقيتين. ويمكن التحقق عندئذ من صحة المعادلتين:

$$\frac{1}{2}(e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}) = \cos \lambda x$$

$$\frac{1}{2}(e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}) = \sin \lambda x$$

والدالتان المثلثيتان – لكونهما تركيبين خطيين للحلين تكونان حلين للمعادلة (ويمكن بالطبع التحقق من ذلك على حدة).

(ر) لتكن المعادلة: $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - \lambda^2 y = 0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$y = c_1 x^{\lambda} + c_2 x^{-\lambda}$$

هذه المعادلة خاصة ولكنها هامة، فهي حالة خاصة من معادلة كوشي – أولر من المرتبة الثانية:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + py = 0$$

حيث b, p ثابتان. ويمكن التعرف على معادلة كوشي – أولر من المرتبة n من حقائق أنها خطية وأن معامل المشتقة من المرتبة k هو مضاعف ثابت من x^k.

وتكمن طريقة حل معادلة كوشي – أولر في افتراض $y(x) = x^m$ والتعويض في المعادلة التفاضلية لتعيين m كثابت مناسبة مقبول. وباتباع هذا الاقتراح للمعادلة:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - \lambda^2 y = 0$$

نصل إلى المعادلة:

$$x^2 m(m-1) x^{m-2} + xmx^{m-1} - \lambda^2 x^m = 0$$

التي تصبح بعد اختصار العامل المشترك x^m:

$$m(m-1) + m - \lambda^2 = 0$$

أي أن:

$$m^2 - \lambda^2 = 0$$

ومن الواضح أن $m = \mp\lambda$ هما قيمتا m الوحيدتان اللتان تجعلان من x^m حلاً للمعادلة التفاضلية. والحل المعطى في البداية هو تركيب خطي من $x^{\lambda}, x^{-\lambda}$، وفي تلك الحالات التي يكون فيها m مركباً (عقدياً)، من المناسب عندئذ الاستعانة بالمتطابقة:

$$x^m = \exp(m \ln x)$$

مع علاقة أولر الواردة في المثال الخامس من هذه الفقرة للحصول على حلـول حقيقية.

٠-٣- تغاير البارامترات:

يعتبر تغاير البارامترات أداة لإيجاد حلول إضافية لمعادلة تفاضلية خطيـة، إذا علم أحد حلولها. ويمكن أيضاً الاستعانة بطريقة تغاير البارامترات لتعيين حـل المعادلة غير المتجانسة إذا كان الحل العام للمعادلة المتجانسـة المنـاظرة لهـا معلوماً.

٠-٤- تمارين محلولة:

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

(أ) $y' = ky + f(x)$

إن المعادلة المتجانسة المناظرة لها هي: $y' = ky$

وهذه المعادلة تقبل الحل $y = e^{kx}$ ولنفرض أن حل المعادلة غيـر المتجانسـة يكون على الشكل:

$$y(x) = V(x)e^{kx}$$

ويؤدي التعويض في المعادلة التفاضلية إلى:

$$\frac{dV}{dx}e^{kx} + kV(x)e^{kx} = kV(x)e^{kx} + f(x)$$

أي أن:

$$\frac{dV}{dx} = e^{-kx}f(x)$$

ويمكن حل هذه المعادلة بعملية تكامل واحدة لنصل إلى:

$$V(x) = \int e^{-kx}f(x)dx + c$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الأصلية هو:

$$y(x) = (\int e^{-kx} f(x)dx + c)e^{kx}$$

(ب) الحل الثاني للمعادلة: $y'' + b(x)y' + P(x)y = 0$

نفترض أن أحد حلول هذه المعادلة التفاضلية وليكن $y_1(x)$ معلوماً، وبعد ذلك نبحث عن الحل الثاني في الشكل:

$$y(x) = V(x)y_1(x)$$

بالاشتقاق نجد:

$$y'(x) = V(x)y_1'(x) + V'(x)y_1(x)$$

$$y''(x) - V''(x)y_1(x) + 2V'(x)y_1'(x) + V(x)y_1''(x)$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة نجد:

$$V''(x)y_1(x) + 2V'(x)y_1'(x) + V(x)y_1''(x) + b(x)V(x)y_1'(x) +$$
$$+ b(x)V'(x)y_1(x) + p(x)V(x)y_1(x) = 0$$

ويكون مجموع الحدود الثلاثة المضروبة في الدالة $V(x)$ مساوياً للصفر، لأنها الحدود الثلاثة للمعادلة المتجانسة التي يكون y_1 حلاً لها. والحدود الباقية يجب أن يكون مجموعها مساوياً أيضاً الصفر، وبالتالي فإن:

$$V''y_1 + 2V'y_1' + bV'y_1 = 0$$

أو:

$$V'' + V'(b + 2\frac{1}{y_1}y_1') = 0$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي معادلة من المرتبة الأولى في $\frac{dV}{dx}$.

وتؤدي الخطوات القياسية للحل إلى:

$$\frac{dV}{dx} = \exp[-\int b + 2\frac{1}{y_1} y_1')dx]$$
$$= y_1^{-2} \exp(-\int b(x)dx)$$

وبعملية تكامل أخرى نتوصل إلى الدالة $V(x)$ وبذلك نصل إلى حل ثاني مستقل $y(x) = V(x)y_1(x)$.

وسيساعدنا المثال التالي لتوضيح هذه العملية. لنفترض أننا نحاول حل هذه المعادلة: $x^2y'' - xy' + y = 0$

التي يكون $y_1(x) = x$ أحد حلولها. وعلى الرغم من أن هذه المعادلة من نوع كوشي – أولر، فإن الطريقة المقترحة سابقاً في المثال (ر) من الفقرة (٠-٢) تعطينا فقط هذا الحل الواحد. وإذا بحثنا عن حل ثانٍ في الشكل $y(x) = xV(x)$ لوجدنا أن $V(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$V'' + (\frac{2}{x} - \frac{1}{x})V' = 0$$

بالمكاملة نحصل على: $V' = \frac{c_1}{x}$

بالمكاملة مرة ثانية نحصل على: $V(x) = c_1 \ln x + c_2$

وبذلك فإن الحل الثاني للمعادلة هو: $y(x) = (c_1 \ln x + c_2)x$

ويمكن، على وجه الخصوص، اعتبار الحل الثاني هو $y(x) = x \ln x$.

(ج) لنحل المعادلة: $y'' + b(x)y' + p(x)y = f(x)$

عندما يكون حلان مستقلان، ولنقل $y_1(x), y_2(x)$ حلان للمعادلة المتجانسة:

$$y'' + b(x)y' + p(x)y = 0$$

معلومين، نستطيع إيجاد حل للمعادلة غير المتجانسة المعطاة، وذلك بافتراض y على الشكل التالي:

$$y(x) = V_1(x)y_1(x) + V_2(x)y_2(x)$$

وهنا، علينا إيجاد $V_1(x), V_2(x)$ وذلك بالتعويض عن $y(x)$ بهذه الصيغة في المعادلة التفاضلية الأصلية فنحصل على معادلة معقدة في الدالتين المجهولتين V_1, V_2 وإذا طلبنا بالإضافة إلى ذلك، أن تحقق V_1, V_2 المعادلة:

$$\frac{dV_1}{dx}y_1 + \frac{dV_2}{dx}y_2 = 0 \qquad (١)$$

فإن المعادلة المعقدة الممثلة للمعادلة التفاضلية الأصلية ستؤول إلى الشكل:

$$\frac{dV_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dV_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} = f(x) \qquad (٢)$$

وهناك أسباب معقولة لفرض الشرط (١). أحدها أننا الآن قد حصلنا على معادلتين جبريتين خطيتين في كل منهما $\frac{dV_1}{dx}, \frac{dV_2}{dx}$ مجهولتان. وعلاوة على ذلك فإن المحدد المكون من معادلات مجموعة المعادلتين هذه (ويسمى بمحدد رونسكي **wronskian** للدالتين y_1, y_2) لا يساوي الصفر بشرط أن تكون y_1, y_2 مستقلتين فيما بينها. وعليه فإن المعادلتين الآتيتين (١) و(٢) يمكن حلهما جبرياً لتعيين $\frac{dV_1}{dx}, \frac{dV_2}{dx}$ بدلالة الدالتين المعلومتين في x وبعدها تعين V_1, V_2 بالمكاملة.

وكمثال على ذلك، لنفرض أننا نحاول حل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة التالية:

$$x^2y'' - xy' + y = x$$

لقد وجدنا في المثال السابق أن الحلين المستقلين للمعادلة المتجانسة:

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

هما:

$$y_1(x) = x \quad , \quad y_2(x) = x\ln x$$

وبذلك نبحث عن حل للمعادلة غير المتجانسة في الصيغة:

$$y(x) = V_1(x)x + V_2(x)x\ln x$$

وتصبح المعادلتان (١) و(٢) في هذه الحالة الخاصة:

$$\frac{dV_1}{dx}x + \frac{dV_2}{dx}x\ln x = 0$$

$$\frac{dV_1}{dx} + \frac{dV_2}{dx}(1+\ln x) = \frac{1}{x}$$

(لاحظ أن $f(x) = \frac{1}{x}$ وليس x وذلك بعد كتابة المعادلة التفاضلية بحيث يكون معامل الحد ذي المرتبة الأعلى هو الواحد الصحيح). وعندما تحل هاتان المعادلتان لتعيين $\frac{dV_1}{dx}, \frac{dV_2}{dx}$ نجد أن:

$$\frac{dV_1}{dx} = -\frac{\ln x}{x} \quad , \quad \frac{dV_2}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبالمكاملة نحصل على:

$$V_1(x) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c_1 \quad , \quad V_2(x) = \ln x + c_2$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y(x) = (c_1 - \frac{1}{2}(\ln x)^2)x + (\ln x + c_2)x\ln x$$

$$y(x) = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + c_1x + c_2x\ln x$$

٠-٥- تعريف المؤثر التفاضلية L:

لتكن α_i أعداد حقيقية و n, i, j, k أعداداً صحيحة غير سالبة و u دالة مناسبة كيفية (أي تقبل الاشتقاق من مرتبة لا تقل عن درجة المؤثر L الذي يؤثر

عليه). إن الحدودي من الدرجة n في D يكتب بالشكل:

$$L(D)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k}D^{k}$$

معرف جيداً بالشكل:

$$L(D)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k}D^{k}u=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k}u^{(k)}$$

والجدير بالذكر أن $L(D)$ خطي، أي أن:

$$L(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)=\alpha_1L(u_1)+\alpha_2L(u_2)\quad ;\forall\alpha_1,\alpha_2\in R$$

ومن الواضح أن العمليات الخطية التي تجري على الحدوديات الحقيقية تنطبق أيضاً على الحدوديات في D. ولنذكر الآن نواتج تأثير $L(D)$ على بعض الدوال الهامة:

$$L(D)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}L(\lambda) \qquad (١)$$

$$L(D)[e^{\lambda x}V(x)]=e^{\lambda x}L(D+\lambda)V(x) \qquad (٢)$$

$$L(D^2)\cos\lambda x=L(-\lambda^2)\cos\lambda x \qquad (٣)$$

$$L(D^2)\sin\lambda x=L(-\lambda^2)\sin\lambda x$$

٠-٦- المؤثر $L^{1}(D)$:

لنعتبر المعادلة التفاضلية ذات الأمثال الثابتة $L(y)=Q(x)$. إذا كان y_1 حلاً خاصاً للمعادلة فإنه يتعلق بعبارة $L(D)$ وبالدالة $Q(x)$، ونتوقع أن نحصل عليه من تأثير مؤثر في $Q(x)$، نرمز له بـ $\frac{1}{L(D)}$ أو بالرمز $L^{-1}(D)$ ودون أن نعني بذلك أنه مقلوب المؤثر $L(D)$، وبناءً على ذلك نكتب:

$$y_1=\frac{1}{L(D)}Q(x)=L^{-1}(D)Q(x)$$

وبما أن y_1 يحقق المعادلة، إذاً:

$$L(D)[\frac{1}{L(D)}]Q(x) = Q(x)$$

نتخذ العلاقة الأخيرة تعريفاً لـ $\frac{1}{L(D)}$ ، حيث نعرفه بأنه المؤثر الذي يحقق العلاقة الأخيرة من أجل كل دالة مستمرة $Q(x)$، ويكون لدينا:

$$L(D)[\frac{1}{L(D)}] = 1$$

حيث 1 هو المؤثر المطابق.

لنعتبر المعادلة التفاضلية $D^2 y = 12(x+1)^2$

إن الحل العام للمعادلة المختزلة هو: $y_0 = c_1 + c_2 x$

ونجد حلاً خاصاً y_1 للمعادلة بمكاملة طرفها الثاني مرتين، أي أن:

$$y_1 = \frac{1}{D^2}[12(x+1)^2] = \int dx \int 12(x+1)^2 dx$$
$$= \int 4[(x+1)^3 + c_2']dx = (x+1)^4 + c_2' x + c_1'$$

حيث c_1', c_2' ثوابت كيفية.

وبوضع المسألة ثانية في إطارها العام، نجد أنه إذا كان $y_1 = L^{-1}Q$ حلاً خاصاً للمعادلة الخطية وكان u حلاً خاصاً للمعادلة المختزلة فإن:

$$L(\frac{1}{L}Q + u) = Q + Lu = Q$$

أي أن $(\frac{1}{L})Q + u$ يكون حلاً خاصاً للمعادلة.

ومن الخواص التي يحققها المؤثر $L^{-1}(D)$ نذكر منها:

$$L^{-1}(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) = \alpha_1 L^{-1}(Q_1) + \alpha_2 L^{-1}(Q_2) \qquad (١)$$

$$(L_1 L_2)^{-1} Q = L_1^{-1}(L_2^{-1} Q) \qquad (٢)$$

$$L_1^{-1} L_2^{-1} Q = L_2^{-1} L_1^{-1} Q \qquad (٣)$$

أي أن L_1^{-1}, L_2^{-1} يقبلان التبديل، وتنتج صحة هذه الخاصة من كون L_1, L_2 يقبلان التبديل.

وأخيراً تجدر الإشارة أنه يمكن تعيين عبارة $L^{-1}(Q)$ في حالات خاصة تبعاً لشكل الدالة $Q(x)$.

الفصل الأول

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الخطية

١-١- مقدمة:

سنستعرض في هذا الفصل تحويلات لابلاس، في حل المعادلات التفاضلية، ودساتيرها، ثم نقوم باستخدام تحويلات لابلاس في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية، وفي حل مجموعة معادلات تفاضلية خطية.

١-٢- تعريف تحويل لابلاس:

إن التحويلات التكاملية واحدة من أهم الوسائل المفيدة في حل المعادلات التفاضلية الخطية والتحويل التكاملي عبارة عن علاقة من الشكل:

$$F(s)=\int_{\alpha}^{\beta}K(s,t)f(t)dt$$

حيث حُولت الدالة المعطاة $f(t)$ إلى دالة أخرى F بواسطة التكامل. ويُقال للدالة F تحويل f، وتسمى الدالة $K(s,t)$ بنواة التحويل. والخطة العامة هي استعمال العلاقة السابقة لتحويل المشكلة التي تحوي الدالة f إلى مشكلة أبسط تحوي F. ويمكن دائماً تبسيط مشكلة تحوي معادلة تفاضلية تبسيطاً جوهرياً باختيار مناسب للنواة $K(s,t)$ ولحدود التكامل α,β. وهناك عدد من التحويلات التكاملية التي تستعمل بكثرة ولكن كل واحد منها يناسب نوعاً معيناً من التمارين.

في هذا الفصل سندرس خواصاً وبعضاً من تطبيقات تحويل لابلاس ويعرف هذا التحويل بالطريقة التالية: لتكن الدالة $f(t)$ دالة معرّفة من أجل القيم $t \geq 0$، وقابلة للتكامل موضعياً (أي $\int_a^b f(t)dt$ معرّف مهما يكن العددين الموجبين a,b).

إذا ضربنا هذه الدالة بالمقدار e^{-st} وكاملنا طرفيها بالنسبة للمتحول t من الصفر إلى ∞ فنحصل شريطة أن يكون التكامل متقارباً على دالة ندعوها تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ ونرمز له بالرمز $L[f(t)]$ أو $F(s)$ كما يلي:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (١)$$

وهذا التحويل يستخدم النواة $K(s,t) = e^{-st}$، والتي لها ارتباط خاص بالمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة. ولأن تحويل لابلاس معرف كتكامل على الفترة من صفر إلى مالانهاية، فمن المفيد أولاً ذكر بعض الحقائق الأساسية عن مثل هذه التكاملات. ففي المقام الأول، التكامل على فترة غير محدودة يسمى تكاملاً معتلاً، ويعرف كنهاية تكاملات على فترات محدودة. أي أنّ:

$$\int_\alpha^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_\alpha^A f(t)dt$$

فإذا كان التكامل من α إلى A موجوداً لكل قيم A,α، وإذا كانت النهاية عندما $A \to \infty$ موجودة ومحدودة، فيقال للتكامل المعتل إنه متقارب إلى قيمة منتهية، وإلا فيقال إن التكامل غير متقارب (متباعد).

١-٣- مبرهنة (١):

إذا كان التكامل $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ متقارباً بالإطلاق من أجل $s = s_0$ فهو متقارباً بالإطلاق من أجل جميع قيم s التي تكبر s_0 $(s > s_0)$.

البرهان:

بما أن $\left|e^{-st}f(t)\right| \le \left|e^{-s_0t}f(t)\right|; \forall s > s_0$ وحيث أن تكامل الطرف الأيمن موجود، أي أن التكامل: $\int_0^\infty \left|e^{-s_0t}f(t)\right|dt$ موجود حسب الفرض، فيكون تكامل الطرف الأيسر موجوداً، وهذا يعني أن التكامل المفروض يكون متقارباً بالإطلاق.

١-٤- تعريف الرتبة الأسية:

يقال للدالة $f(t)$ إنها ذات رتبة أسية لقيم $t > T$ إذا أمكن إيجاد ثابتين α, μ بحيث يكون: $\left|f(t)\right| \le \mu e^{\alpha t}$ لقيم $t > T$.

من المبرهنة (١)، نرى أن تحويل لابلاس موجود من أجل التوابع المعدومة على $\mathbb{R}_-^*$ والقابلة للتكامل موضعياً والتي تقبل مرتبة أسّية. في الحقيقة إذا عرّفنا فاصلة تزايد التابع f بالمقدار $\sigma(f) = \inf_{\zeta \in R}(\zeta \in R : t > \zeta$ *f ذات رتبة أسية لقيم*

فإن $F(s)$ معرّف على المنطقة: $P_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$.

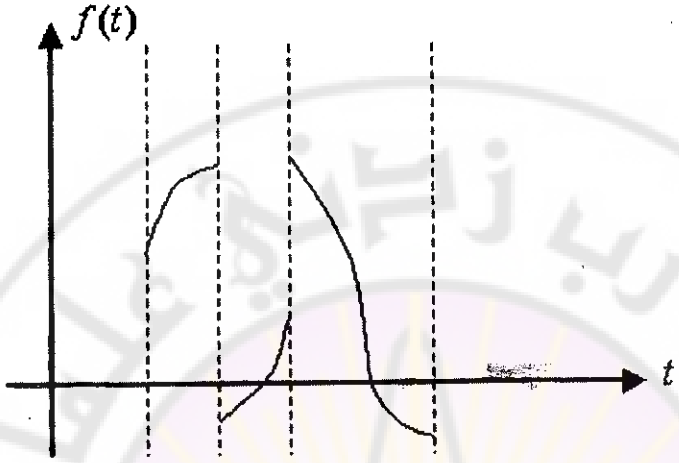
١-٥- تعريف الاستمرار المقطعي:

لتكن $f(t)$ دالة معرفة على الفترة I التي طرفاها هما a, b $(a < b)$. نقول عن الدالة $f(t)$ إنها مستمرة قطعياً (مقطعياً) في الفترة I إذا وجدت مجموعة جزئية $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ من نقاط I تحقق:

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

وبحيث يكون مقصور الدالة $f(t)$ على كل الفترات الجزئية $]t_{i-1}, t_i[$ مستمراً وكذلك النهايتان $\lim_{t \to t_i^<} f(t)$ و $\lim_{t \to t_i^>} f(t)$ موجودتان ومحدودتان.

ومثل هذه الدوال يكون لها عادة فقط عدد منته من نقاط الانقطاع. ويبين الشكل التالي الرسم البياني لدالة لها استمرار مقطعي.



الشكل (١)

١-٦- مبرهنة (٢):

إذا كانت $f(t)$ مستمرة مقطعياً في كل الفترة $[0,T]$ وأياً كانت $T<\infty$، وإذا كانت الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية لقيم $t>T$، عندئذ يكون تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ موجوداً.

البرهان:

بما أن الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية فيمكن إيجاد ثابتين μ_1 و α بحيث يكون:

$$|f(t)|\le \mu_1 e^{\alpha t},\quad t>T$$

بما أن $f(t)$ مستمر مقطعياً على $0\le t\le T$، يكون $e^{-\alpha t}f(t)$ مستمر مقطعياً كذلك. إذن يوجد μ_2 بحيث $|e^{-\alpha t}f(t)|\le \mu_2,\quad 0\le t\le T$. إذا أخذنا $\mu=Max(\mu_1,\mu_2)$ نجد $\forall t\ge 0, |f(t)\le \mu e^{\alpha t}|$. لنأخذ الآن دالة الجداء $e^{-st}\cdot f(t)$، فنرى أن:

$$|e^{-st}f(t)|\le \mu e^{-(s-\alpha)t};t\ge T$$

وبالتالي يكون:

$$\left|\int_T^\infty f(t)e^{-st}\right| \le \int_T^\infty \left|f(t)\cdot e^{-st}\right|dt \le \mu\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt$$

وبما أن:

$$\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \left[-\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{(s-\alpha)}\right]_T^\infty$$

وبفرض $s > \alpha$ نجد أن:

$$\int_T^\infty \left|f(t)\cdot e^{-st}\right|dt < K\cdot\frac{1}{s-\alpha} = \frac{K}{s-\alpha}$$

وبالتالي فالتكامل موجود من أجل $\alpha < s$، وبالتالي فإن تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ يكون موجوداً.

١-٧- ملاحظة:

يجب أن نؤكد أن الشروط الواردة أعلاه في المبرهنة (٢) هي كافية فقط (وليست ضرورية). أي أنه إذا لم تتحقق هذه الشروط فإنه من الممكن أن يوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t)$، فمثلاً $L[t^{-\frac{1}{2}}]$ موجودة رغم أن $t^{-\frac{1}{2}}$ ليست مستمرة مقطعياً على الفترة $0 \le t \le T$.

١-٨- تحويلات لابلاس للدوال الأساسية الشهيرة:

سوف نقوم الآن بإيجاد تحويلات لابلاس للدوال الأساسية الشهيرة بالاعتماد على تعريف تحويل لابلاس (١) وذلك بفرض أن التكامل موجود.

١- إذا كانت $f(t) = 1$ فإن:

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

حيث أن: $e^{-st} \to 0$ عندما $t \to \infty$ وعليه يكون:

$$L[1]=\frac{1}{s}=F(s) \qquad (٢)$$

٢- أما إذا كانت $f(t)=t$ فإن $L[t]=\int_0^\infty e^{-st}tdt$ ولنكامل بالتجزئة:

$$t=u \Rightarrow dt=du$$

$$e^{-st}dt=dv \Rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

وبالتالي:

$$L[t]=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt \qquad (٣)$$

$$=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$

٣- من أجل الدالة $f(t)=t^2$ عندئذ يكون $L[t^2]=\int_0^\infty e^{-st}t^2dt$

نكامل بالتجزئة:

$$t^2=u \Rightarrow 2tdt=du$$

$$e^{-st}dt=dv \Rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

وبالتالي:

$$L[t^2]=\left[-\frac{1}{s}t^2e^{-st}\right]_0^\infty+\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}tdt$$

$$=\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}tdt=\frac{2}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt\right\}$$

$$=\frac{2}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^\infty\right\}=\frac{2}{s}\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{2}{s^3}$$

وهذا يعني أن:

$$L[t^2]=\frac{2}{s^3}=F(s) \qquad (٤)$$

٤- من أجل الدالة $f(t)=t^3$ عندئذ وبشكل مشابه يكون:

$$L[t^3] = \frac{3!}{s^4} = F(s) \qquad (٥)$$

٥- من أجل الدالة $f(t) = t^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب يكون

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} = F(s) \qquad (٦)$$

وهي العلاقة المعممة ومنها يمكن الوصول إلى (٢)،(٣)،(٤)،(٥).

٦- من أجل الدالة $f(t) = t^\beta$ ، عندئذ يكون:

$$L[t^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}; \beta > -1; s > 0$$

حيث أن: $\Gamma(\beta+1) = \int_0^\infty e^{-st} t^\beta dt$

لنضع $st = u$ ولنلاحظ أنه لكي يتقارب التكامل يجب أن يكون $s > 0$ وعلى ذلك فالتكامل يساوي إلى:

$$\frac{1}{s^{\beta+1}} \int_0^\infty u^\beta e^{-u} du = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}$$

الشرط أن $\beta > -1$ لازم لأن التكامل الذي يعرف دالة غاما يتقارب إذا وفقط إذا كانت $\beta > -1$. وهكذا نجد أن:

$$L[t^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}} = F(s); \beta > -1; s > 0 \qquad (٧)$$

٧- من أجل الدالة $f(t) = \sin t$ عندئذ يكون:

$$L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

في الواقع لدينا $L[\sin t] = \int_0^\infty e^{-st} \sin t dt$

نكامل بالتجزئة $\sin t = u \Rightarrow \cos t dt = du$

$$e^{-st} dt = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

وبالتالي يكون: $\int_0^\infty e^{-st} \sin t dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin t \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt$

$$=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin t\right]_0^\infty+\left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\cos t\right]_0^\infty-\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt$$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt$$

أي أن:

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt+\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s^2}$$

وبالتالي:

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s^2+1}$$

وهكذا يكون:

$$L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}=F(s) \qquad (٨)$$

وبشكل عام فإن:

$$L[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}=F(s) \qquad (٩)$$

٨- من أجل الدالة $f(t)=\cos t$ عندئذ يكون:

$$L[\cos t]=\frac{s}{s^2+1}=F(s)$$

وبشكل عام فإن:

$$L[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}=F(s) \qquad (١٠)$$

٩- من أجل الدالة $f(t)=e^t$ يكون:

$$L[e^t]=\frac{1}{s-1}=F(s) \qquad (١١)$$

في الواقع نرى أن:

$$L[e^t]=\int_0^\infty e^{-st}e^t dt=\int_0^\infty e^{-t(s-1)}dt=\left[-\frac{1}{s-1}e^{-t(s-1)}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-1}$$

وهكذا نجد أن:

$$L[e^{t}]=\frac{1}{s-1}=F(s) \qquad (١٢)$$

وبشكل عام فإن:

$$L[e^{at}]=\frac{1}{s-a}=F(s);s>a \qquad (١٣)$$

وكذلك من أجل الدالة $f(t)=e^{iat}$ فعندئذ يكون:

$$L[e^{iat}]=\frac{1}{s-ia}=F(s);s>a \qquad (١٤)$$

١٠- من أجل الدالة $f(t)=shat$ يكون: $L[shat]=\frac{a}{s^2-a^2}$

بما أن: $shat=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$ عندئذ يكون:

$$L[shat]=L\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right]=\frac{1}{2}L[e^{at}]-\frac{1}{2}L[e^{-at}]$$

وذلك حسب الخاصة الخطية لتحويلات لابلاس والتي سنجدها في الفقرة القادمة (١-٩). وحسب (١٣) يكون:

$$L[shat]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+a}\right) \qquad (١٥)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{s^2-a^2}\right]=\frac{a}{s^2-a^2}$$

وهكذا نجد:

$$L[shat]=\frac{a}{s^2-a^2}=F(s)$$

وبشكل خاص من أجل $a=1$ يكون:

$$L[sht]=\frac{1}{s^2-1}=F(s) \qquad (١٦)$$

١١- من أجل الدالة $f(t) = chat$ يكون: $L[chat] = \frac{s}{s^2 - a^2}$

بما أن: $chat = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ عندئذ يكون:

$$L[chat] = \frac{1}{2} L[e^{at}] + \frac{1}{2} L[e^{-at}]$$

وذلك حسب الخاصة الخطية لتحويلات لابلاس وهي الخاصة الأولى من هـذه الخواص والتي سنجدها في الفقرة القادمة (١-٩). وحسب (١٣) نجد أن:

$$L[chat] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2-a^2}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}$$

وهكذا نجد:

$$L[chat] = \frac{s}{s^2 - a^2} = F(s) \qquad (١٧)$$

وبشكل خاص من أجل $a=1$ يكون:

$$L[cht] = \frac{s}{s^2 - 1} = F(s) \qquad (١٨)$$

١-٩- خواص تحويلات لابلاس:

إن من أكثر الخواص فائدة من خواص تحويلات لابلاس هي خاصـة الخطيـة وهي الخاصة التالية (وسوف نفترض أن جميع الدوال تحقـق شـرط الوجـود لتحويل لابلاس).

١- الخاصة الأولى (خاصة الخطية):

بفرض أن a و b ثابتين كيفيين عندئذ يكون:

$$L[af(t)+bg(t)]=aL[f(t)]+bL[g(t)]$$

البرهان:

حسب تعريف لابلاس (١) نجد:

$$\begin{aligned}L[af(t)+bg(t)]&=\int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]dt\\&=\int_0^\infty e^{-st}af(t)dt+\int_0^\infty e^{-st}bg(t)dt\\&=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt\\&=aL[f(t)]+bL[g(t)]\end{aligned}$$

٢- الخاصة الثانية (خاصة إخراج الثابت):

بفرض أن a ثابت كيفي عندئذ يكون:

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad (٢٠)$$

البرهان:

حسب تعريف تحويل لابلاس (١) يكون:

$$L[f(at)]=\int_0^\infty e^{-st}f(at)dt \qquad (٢١)$$

نفرض أن $at-u$ عندئذ نجد: $adt=du$ بالتعويض في (٢١)، نحصل على:

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(\frac{s}{a})u}f(u)du=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

٣- الخاصة الثالثة (خاصة المفاضلة من المرتبة الأولى):

بفرض أن $f(t)$ دالة مستمرة ولها مشتقة $f'(t)$ ذات استمرار مقطعي في كل فترة محدودة $0\le t\le T$.

نفرض أيضاً أن $f(t)$ ذات رتبة أسية لقيم $t > T$، وعلى ذلك يكون:

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0) \qquad (٢٢)$$

البرهان:

حسب تعريف تحويل لابلاس (١) يكون: $L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$

بالمكاملة بالتجزئة نجد أن:

$$L[f'(t)] = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = 0 - f(0) + sF(s)$$

وعليه يكون: $L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

٤- الخاصة الرابعة (خاصة المفاضلة من المرتبة الثانية):

نفرض أن $f(t)$ دالة مستمرة وحيث مشتقها $f'(t)$ أيضاً دالة مستمرة، بينما $f''(t)$ دالة مستمرة استمراراً مقطعياً في كل فترة محدودة $0 \le t \le T$.

نفرض أيضاً أن $f'(t)$، $f(t)$ ذات رتبة أسية لقيم $t > T$. وعلى ذلك يكون:

$$L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \qquad (٢٣)$$

البرهان:

حسب تعريف تحويل لابلاس (١) وبالاستفادة من الخاصة (٢٢) نجد:

$$\begin{aligned} L[f''(t)] &= L\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = L\left[\frac{d}{dt}\left[\frac{df}{dt}\right]\right] \\ &= sL\left[\frac{df}{dt}\right] - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} \\ &= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

٥- الخاصة الخامسة (خاصة المفاضلة من المرتبة n):

نفرض أن $f(t)$ دالة مستمرة، وحيث مشتقها $f^{(n-1)}(t)$ دالة مستمرة أيضاً، بينما $f^{(n)}(t)$ مستمرة استمراراً مقطعياً في كل فترة محدودة $0 \le t \le T$. نفرض أيضاً أن: $f(t), f'(t), f''(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ ذات رتبة أسية لقيم $t > T$. وعلى ذلك يكون:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \\ - s^{n-3} f''(0) - ..... - f^{(n-1)}(0) \\ = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \\ - s^{n-3} f''(0) - ..... - f^{(n-1)}(0) \qquad (٢٤)$$

البرهان:

من أجل البرهان على صحة هذه العلاقة نتبع طريقة البرهان بالتدريج وذلك بأن نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n = k$ ولنبرهن على صحتها من أجل $n = k+1$ (وذلك حسب مبدأ الاستقراء الرياضي).

بما أن:

$$L[f^{(k+1)}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t) dt \\ = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^{(k+1)} f(t)}{dt^{k+1}} dt$$

بالمكاملة بالتجزئة نجد أن:

$$L[f^{(k+1)}(t)] = \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} e^{-st} \right]_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty \frac{d^k f(t)}{dt^k} e^{-st} dt \\ = -\frac{d^k f(t)}{dt^k} + sL\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right] \\ = -f^{(k)}(t) + sL[f^{(k)}(t)]$$

وبما أن العلاقة (٢٤) صحيحة من أجل $n = k$ فيكون:

$$L\left[f^{(k)}(t)\right]=s^kF(s)-s^{k-1}f(0)-s^{k-2}f'(0)-$$
$$-s^{k-3}f''(0)-\dots\dots\dots\dots\dots-f^{(k-1)}(0)$$

نعوض عن $L\left[f^{(k)}(t)\right]$ بما يساويها فنجد:

$$L\left[f^{(k+1)}(t)\right]=-f^{(k)}(t)+s[s^kF(s)-s^{k-1}f(0)-s^{k-2}f'(0)-$$
$$-s^{k-3}f''(0)-\dots\dots\dots\dots-f^{(k-1)}(0)\ .$$

أو:

$$L\left[f^{(k+1)}(t)\right]=s^{k+1}F(s)-s^kf(0)-s^{k-1}f'(0)-$$
$$-s^{k-2}f''(0)-\dots\dots\dots\dots-f^{(k)}(0)$$

وهو المطلوب.

٦- الخاصة السادسة (خاصة المكاملة):

إذا كان $L\left[f(t)\right]=F(s)$

فإن: $$L\left[\int f(u)du\right]=\frac{F(s)}{s} \qquad (٢٥)$$

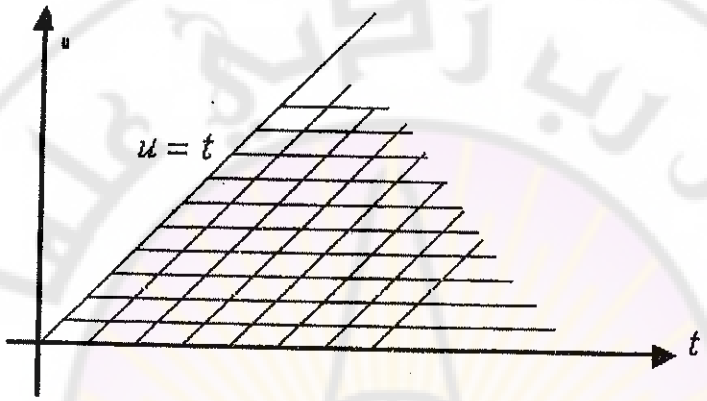
البرهان:

بما أن:

$$L\left[\int f(u)du\right]=\int_0^\infty e^{-st}[\int_0 f(u)du]dt$$
$$=\int_0^\infty f(u)[\int_{t=u}^{t=\infty}e^{-st}dt]du$$
$$=\int_0^\infty f(u)\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=u}^{t=\infty}du$$
$$=\int_0^\infty f(u)\left[\frac{1}{s}e^{-su}\right]du$$
$$=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$

$$= \frac{F(s)}{s}$$

حيث قمنا بتبديل دور كل من متحوليه بالمتحول الآخر في التكامل الثنائي. انظر الشكل (٢). وذلك بفرض أن التكامل موجود.



الشكل (٢)

٧- الخاصة السابعة (خاصة القسمة على t):

إذا كان $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ موجودة، وكان $L[f(t)] = F(s)$ فإن:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)du \qquad (٢٦)$$

البرهان:

بما أن: $$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{t}dt$$

ولكن $$\frac{e^{-st}}{t} = \int_s^\infty e^{-ut}du = \left[\frac{e^{-ut}}{-t}\right]_{u=s}^{u=\infty}$$

وهكذا نجد أن: $L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^\infty f(t)\cdot\left[\int_t^\infty e^{-tu}du\right]dt$

$$= \int_t^\infty [\int_0^\infty e^{-tu} f(t)dt]du$$

$$= \int_t^\infty F(u)du$$

٨- الخاصة الثامنة (خاصة الضرب في t):

إذا كان $L[f(t)] = F(s)$ ، فعندئذ يكون:

$$L[t\cdot f(t)] = (-1)\frac{dF}{ds} = (-1)F^{(1)}(s) \qquad (٢٧)$$

البرهان:

حسب (١) يكون: $L[t\cdot f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} tf(t)dt$

$$= -\int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}(e^{-st})dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$= (-1)F^{(1)}(s)$$

٩- الخاصة التاسعة (خاصة الضرب في t^2):

إذا كان $L[f(t)] = F(s)$ ، فعندئذ يكون:

$$L[t^2\cdot f(t)] = (-1)^2\frac{d^2F}{ds^2} = (-1)^2F^{(2)}(s) \qquad (٢٧)$$

البرهان:

بما أن $L[t^2\cdot f(t)] = L[t\cdot(tf(t))] = -\frac{d}{ds}(L[tf(t)]) =$

$$= -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}F(s)\right] = (-1)^2\frac{d^2F}{ds^2} =$$
$$= (-1)^2 F^{(2)}(s)$$

١٠- الخاصة العاشرة (خاصة الضرب في t^n):

إذا كان $L[f(t)] = F(s)$، فعندئذ يكون:

$$L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{d^nF}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad (٢٩)$$

البرهان:

لنستخدم الآن مبدأ الاستقراء الرياضي. لنفترض الآن أن الدستور (٢٩) صحيح من أجل $n = k$ ولنبرهن صحته من أجل $n = k+1$. في الواقع نرى أن:

$$L[t^{k+1}f(t)] = L[t\cdot(t^k f(t))] = -\frac{d}{ds}\left[(-1)^k\frac{d^kF(s)}{ds^k}\right]$$
$$= (-1)^{k+1}\frac{d^{k+1}F(s)}{ds^{k+1}}$$

وهو المطلوب.

١١- الخاصة الحادية عشر (نظرية الدوال الدورية):

إذا كان للدالة $f(t)$ دور $p > 0$ أي إذا كان $f(t+p) = f(t)$ فإن:

$$L[f(t)] = \frac{\int_0^p e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sp}} \qquad (٣٠)$$

البرهان:

لدينا

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^p e^{-st}f(t)dt + \int_p^{2p} e^{-st}f(t)dt + \dots\dots\dots + .$$

$$+\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)dt + \dots\dots\dots\dots$$

لنفرض أن: $I_n = \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)dt$ ولنجري التحويل: $t = np + y$ في I_n فنجد:

$$I_n = \int_0^p e^{-s(np+y)} f(np+y)dy$$

وبما أن $f(t)$ دورية فيكون: $f(np+y) = f(y)$

فعندئذ يكون:

$$I_n = e^{-snp} \int_0^p e^{-sy} f(y)dy$$

وهكذا نجد أن:

$$I_n = \int_0^p e^{-st} f(t)dt = \int_0^p e^{-sy} f(y)dy$$

ومنه:

$$I_1 = \int_p^{2p} e^{-st} f(t)dt = e^{-sp} \int_0^p e^{-sy} f(y)dy$$

$$I_2 = \int_{2p}^{3p} e^{-st} f(t)dt = e^{-2sp} \int_0^p e^{-sy} f(y)dy$$

$$I_3 = \int_{3p}^{4p} e^{-st} f(t)dt = e^{-3sp} \int_0^p e^{-sy} f(y)dy$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

نعوض، فنجد:

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= (1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + e^{-3sp} + \dots\dots\dots) \int_0^p e^{-sy} f(y)dy$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt; s > 0$$

وهو المطلوب.

١٢- الخاصة الثانية عشر (النظرية الانتقالية الأولى):

إذا كان $L[f(t)] = F(s)$ ، فعندئذ يكون:

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a) \qquad (٣١)$$

البرهان:

حسب تعريف تحويل لابلاس نجد:

$$L[e^{at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-t(s-a)} f(t)dt \ = F(s-a)$$

وهو المطلوب.

١٣- الخاصة الثالثة عشر (النظرية الانتقالية الثانية):

إذا كان $L[f(t)] = F(s)$ ، فعندئذ يكون:

$$L[u(t-a) f(t-a)] = e^{-as} F(s) \qquad (٣٢)$$

حيث أن:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & if \quad t < a \\ 1 & if \quad t > a \quad ; a > 0 \end{cases} \qquad (٣٣)$$

وهي دالة غير معرفة عندما $t = a$.

البرهان:

حسب تعريف تحويل لابلاس نجد:

$$L[u(t-a) f(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a) f(t-a)dt$$
$$= \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$
$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

نجري التحويل: $t-a=u$

عندئذ نجد أن:

$$L[u(t-a)f(t-a)]=\int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du$$

$$=e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du=e^{-as}F(s)$$

وهو المطلوب.

١٤- الخاصة الرابعة عشر (نظرية الالتفاف) (نظرية التلاف):

إذا كان $L[f(t)]=F(s)$, $L[g(t)]=G(s)$

فإن: $$L[\int_0^t f(u)g(t-u)du]=F(s).G(s) \qquad (٣٤)$$

البرهان:

حسب تعريف تحويل لابلاس يكون:

$$L[\int_0^t f(u)g(t-u)du]=\int_0^\infty e^{-st}dt[\int_0^t f(u)g(t-u)du]$$

$$=\int_0^\infty f(u)[\int_{t=u}^{t=\infty} e^{-st}g(t-u)dt]du$$

لنحسب الآن التكامل الداخلي لذا نجري التحويل: $t-u=x$

فيكون: $dt=dx$.

وبالتالي نجد أن:

$$=\int_0^\infty f(u)[\int_0^\infty e^{-s(x+u)}g(x)dx]du$$

$$=\int_0^\infty f(u)e^{-su}[\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx]du$$

$$=F(s).G(s)$$

وهو المطلوب.

١-١٠ – تعريف:

يسمى التكامل $\int_0^t f(u)g(t-u)du$ بالتفاف الدالتين g, f ويكتب:

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

وبسهولة يمكن إثبات أن:

$$f * g = g * f$$
$$f * (g + h) = f * g + f * h$$
$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

١-١١ – تحويل لابلاس العكسي:

نحتاج كما سنرى في تطبيق تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الخطية إلى معرفة المسألة العكسية أي إلى تعيين الدالة إذا علمنا تحويل لابلاس لها. فإذا كان تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ هو $F(s)$، عندئذ نقول إن $f(t)$ هو **التحويل العكسي اللابلاسي للدالة** $F(s)$، وحسب تعريف تحويل لابلاس يكون تحويل لابلاس العكسي موجوداً فقط من أجل $t \geq 0$، ونرمز للتحويل العكسي بالرمز $L^{-1}[F(s)]$. أي إذا كان $L[f(t)] = F(s)$ فنكتب:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

ولتعيين التحويل العكسي لدالة $F(s)$ علينا أن نعين الدالة $f(t)$ التي تحقق المعادلة التكاملية:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

وليس من الضروري أن يكون لهذه المعادلة حل، فإذا كان لها حل وحيد، قلنا إن تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ موجود ويساوي $f(t)$.

ومن الواضح أنه عندما يوجد تحويل لابلاس فإنه يكون وحيداً بينما نفس الشيء ليس صحيحاً لتحويل لابلاس العكسي.

أخيراً، يمكن إثبات صحة خاصة الخطية لتحويلات لابلاس العكسية، بالاعتماد على خطية تحويلات لابلاس.

١-١٢- ملاحظة:

من الممكن العودة إلى الفقرة (١-٨) وإيجاد قوانين تحويلات لابلاس العكسية بالاعتماد على القوانين الموجودة لتحويلات لابلاس. فمثلاً:

$$L^{-1}[\frac{1}{s-a}] = e^{at}$$

$$L^{-1}[\frac{n!}{s^{n+1}}] = t^n \quad ; \text{عدد صحيح موجب}$$

$$L^{-1}[\frac{s}{s^2-a^2}] = chat$$

$$L^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}] = \cos at$$

وهكذا.....

١-١٣- تمارين محلولة:

١) أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية:

$$3e^{-4t},\ \ 2t^2,\ \ 4\cos 5t,\ \ \sin \pi t,\ \ \frac{-3}{\sqrt{t}}$$

الحل

$$L[3e^{-4t}] = 3L[e^{-4t}] = \frac{3}{s-(-4)} = \frac{3}{s+4} \quad ; \quad s > -4$$

$$L[2t^2] = 2L[t^2] = 2\frac{\Gamma(3)}{s^3} = \frac{2.2!}{s^3} = \frac{4}{s^3} \quad ; \quad s > 0$$

$$L[4\cos 5t] = 4L[\cos 5t] = 4.\frac{s}{s^2+25} = \frac{4s}{s^2+25} \quad ; \quad s > 0$$

$$L[\sin \pi t] = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} \quad ; \quad s > 0$$

$$L[\frac{-3}{\sqrt{t}}] = -3L[\frac{1}{\sqrt{t}}] = -3L[t^{\frac{1}{2}}] = \frac{-3\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = -3\sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad ; \quad s > 0$$

٢) أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية:

$$3t^4 - 2t^{\frac{3}{2}} + 6 \quad , \quad 5\sin 2t - 3\cos 2t \quad , \quad 3\sqrt[3]{t} + 4e^{2t} \quad , \quad \frac{1}{t^2}$$

الحل:

$$L[3t^4 - 2t^{\frac{3}{2}} + 6] = 3L[t^4] - 2L[t^{\frac{3}{2}}] + 6L[1]$$

$$= \frac{3\Gamma(5)}{s^5} - \frac{2.(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{6}{5}$$

$$= \frac{72}{s^5} - \frac{3\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{5}{2}}} + \frac{6}{5}$$

$$L[5\sin 2t - 3\cos 2t] = 5L[\sin 2t] - 3L[\cos 2t]$$

$$= \frac{5.2}{s^2+4} - \frac{3.s}{s^2+4} = \frac{10-3s}{s^2+4}$$

$$L[3\sqrt[3]{t} + 4e^{2t}] = 3L[t^{\frac{1}{3}}] + 4L[e^{2t}]$$

$$= \frac{3\Gamma(\frac{4}{3})}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{4}{s-2}$$

$$= \frac{3.(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{4}{s-2}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{4}{s-2}$$

$$L[\frac{1}{t^2}] = \int_0^\infty e^{-st} t^{-2} dt$$

وبما أن التكامل لا يتقارب فإن تحويل لابلاس غير موجود.

٣) بفرض أن:

$$f(t) = \begin{cases} 3 & if \quad 0 < t < 2 \\ -1 & if \quad 2 < t < 4 \\ 0 & if \quad t \geq 4 \end{cases}$$

أوجد $L[f(t)]$.

الحل:

لدينا:

$$L[f(t)] = \int_0^2 e^{-st} f(t)dt + \int_2^4 e^{-st} f(t)dt + \int_4^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^2 e^{-st}(3)dt + \int_2^4 e^{-st}(-1)dt + \int_4^\infty e^{-st}(0)dt$$

$$= 3\int_0^2 e^{-st}dt - \int_2^4 e^{-st}dt$$

$$= 3[\frac{e^{-st}}{-s}]_0^2 - [\frac{e^{-st}}{-s}]_2^4$$

$$= \frac{3(1-e^{-2s})}{s} + \frac{e^{-4s} - e^{-2s}}{s}$$

$$= \frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s}$$

٤) أوجد $L[\sin t \cos t]$.

الحل:

نعلم أن: $\sin 2t = 2\sin t \cos t$

وعلى ذلك فإن: $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$

وبالتالي: $L[\sin t \cos t] = \frac{1}{2}L[\sin 2t] = \frac{1}{2}.\frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4}$

٥) برهن أن $L[\frac{e^{2t}}{t+4}]$ موجود.

الحل:

في أي فترة محدودة، فإن الدالة $f(t) = \frac{e^{2t}}{t+4}$ مستمرة (وعلى ذلك فهي قطعاً مستمرة استمراراً مقطعياً) أيضاً لجميع قيم $t \geq 0$. كذلك نلاحظ أن:

$$\frac{e^{2t}}{t+4} < \frac{e^{2t}}{4}$$

وبذلك تكون $f(t) = \frac{e^{2t}}{t+4}$ ذات رتبة أسية، وعلى ذلك فمن الفقرة (١-٦) المبرهنة (٢) يتضح أن تحويل لابلاس موجود.

٦) باستخدام خواص تحويلات لابلاس أوجد ما يلي:

$$L[e^{3t}\sin 4t], L[t^2 e^{-2t}], L[\frac{e^t}{\sqrt{t}}], L[t\sin 2t], L[t^2\sin 2t], L[\frac{1-e^{-t}}{t}]$$

الحل:

$$L[e^{3t}\sin 4t] = \frac{4}{(s-3)^2+16} = \frac{4}{s^2-6s+25}$$

بما أن: $L[t^2] = \frac{2!}{s^3}$ فإن $L[t^2 e^{-2t}] = \frac{2!}{(s+2)^3}$

بما أن: $L[\frac{1}{\sqrt{t}}] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ فإن $L[\frac{e^t}{\sqrt{t}}] = \sqrt{\frac{\pi}{s-1}}$

بما أن $L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}$ فإن

$$L[t\sin 2t] = -\frac{d}{ds}(\frac{2}{s^2+4}) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$L[t^2\sin 2t] = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{2}{s^2+4}) = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

باستخدام قاعدة أوبيتال لدينا أن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}}{1} = 1$$

وحيث أن $1-e^{-t}$ دالة مستمرة وذات رتبة أسية، فإن شروط خاصة القسمة على t تكون قد تحققت. وبما أن:

$$L[1-e^{-t}]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

فإنه ينتج:

$$\begin{aligned}
L[\frac{1-e^{-t}}{t}] &= \int_s^{\infty}(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1})du \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_s^{k}(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1})du \\
&= \lim_{k\to\infty}[\ln u-\ln(u+1)]_s^k \\
&= \lim_{k\to\infty}[\ln(1+\frac{1}{s})-\ln(1+\frac{1}{k})] \\
&= \ln(1+\frac{1}{s})
\end{aligned}$$

٧) بفرض أن:

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & if \quad t<\pi \\ t & if \quad t>\pi\end{cases}$$

أوجد $L[f(t)]$.

الحل:

لدينا:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin t+\begin{cases}0 & if \quad t<\pi \\ t-\sin t & if \quad t>\pi\end{cases} \\
&= \sin t+(t-\sin t)u(t-\pi) \\
&= \sin t+[\pi+(t-\pi)+\sin(t-\pi)]u(t-\pi)
\end{aligned}$$

باستخدام النظرية الانتقالية الثانية نجد:

$$L[f(t)] = L[\sin t] + L\{[\pi + (t-\pi) + \sin(t-\pi)]u(t-\pi)\}$$
$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}[\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}]$$

٨) إذا علم أن: $L[\frac{\sin t}{t}] = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$

أوجد $L[\frac{\sin at}{t}]$.

الحل:

باستخدام الخاصة الثانية من خواص تحويلات لابلاس (خاصة إخراج الثابت) نجد:

$$L[\frac{\sin at}{at}] = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s/a}\right)$$

أي أن:

$$L[\frac{\sin at}{t}] = \tan^{-1}(\frac{a}{s})$$

٩) باستخدام نظرية الدوال الدورية أوجد تحويل لابلاس للدالة التي دورها 2π والتي تعطى في الفترة $0 \le t \le 2\pi$ بالعلاقة التالية:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & if \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & if \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

الحل:

لدينا:

$$\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}(\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}) = \frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$$

١٠) أوجد ما يلي:

(١) $$L^{-1}[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}]=L^{-1}[\frac{2(s-1)+5}{(s-1)^2+4}]$$

$$=2L^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}]+\frac{5}{2}L^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2+4}]$$

وبما أن:

$$L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]=\cos 2t \quad ; \quad L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]=\sin 2t$$

وحسب النظرية الانتقالية الأولى يكون:

$$L^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}]=e^t\cos 2t \quad ; \quad L^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2+4}]=e^t\sin 2t$$

وعليه يكون:

$$L^{-1}[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}]=2e^t\cos 2t+\frac{5}{2}e^t\sin 2t$$

$$=\frac{1}{2}e^t(4\cos 2t+5\sin 2t)$$

(٢) $$L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s+3}}]=\frac{e^{-3t}t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

(٣) $$L^{-1}[\frac{3s-4}{(2s-3)^5}]=\frac{1}{2^5}L^{-1}[\frac{3s-4}{(s-\frac{3}{2})^5}]$$

$$=\frac{1}{32}L^{-1}[\frac{3(s-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}}{(s-\frac{3}{2})^5}]$$

$$=\frac{3}{32}L^{-1}[\frac{1}{(s-\frac{3}{2})^4}]+\frac{1}{64}L^{-1}[\frac{1}{(s-\frac{3}{2})^5}]$$

$$=\frac{3}{32}.\frac{t^3}{3!}e^{\frac{3t}{2}}+\frac{1}{64}.\frac{t^4}{4!}e^{\frac{3t}{2}}=\frac{t^3(t+8)e^{\frac{3t}{2}}}{1536}$$

١١) أوجد

(أ) $L^{-1}[\frac{se^{-2s}}{s^2+16}]$ (ب) $L^{-1}[\frac{e^{-5s}}{\sqrt{s-2}}]$

(ج) $L^{-1}[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}]$ (د) $L^{-1}[Ln(1+\frac{1}{s})]$

الحل:

(أ) بما أن: $L^{-1}[\frac{s}{s^2+16}]=\cos 4t$ ومن النظرية الانتقالية الثانية فإن:

$$L^{-1}[\frac{se^{-2s}}{s^2+16}]=u(t-2)\cos 4(t-2)=\begin{cases}0 & if \quad t<2\\ \cos 4(t-2) & if \quad t>2\end{cases}$$

(ب) بما أن $L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s-2}}]=\frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{2t}}{\sqrt{\pi}}$, $L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}]=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$

وحسب النظرية الانتقالية الثانية يكون:

$$L^{-1}[\frac{e^{-5s}}{\sqrt{s-2}}]=u(t-5)\frac{(t-5)^{-\frac{1}{2}}e^{2(t-5)}}{\sqrt{\pi}}$$

$$=\begin{cases}0 & if \quad t<5\\ \frac{(t-5)^{-\frac{1}{2}}e^{2(t-5)}}{\sqrt{\pi}} & if \quad t>5\end{cases}$$

(ج) بما أن: $L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s+1}}] = \frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}}{\sqrt{\pi}}$ فعندئذ حسب خاصة التكامل يكون:

$$L^{-1}[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}] = \int_0^t \frac{u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}}{\sqrt{\pi}}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\upsilon^2}d\upsilon$$

وذلك بوضع $u = \upsilon^2$.

(د) نفرض أن: $F(s) = Ln(1+\frac{1}{s})$ وعلى ذلك فإن: $F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}$

وحسب خاصة الضرب في t يكون لدينا:

$$L^{-1}[F'(s)] = -tL^{-1}[Ln(1+\frac{1}{s})]$$

أو:

$$L^{-1}[Ln(1+\frac{1}{s})] = -\frac{1}{t}L^{-1}[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}] = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

١٢) استخدم نظرية الالتفاف في إيجاد $L^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}]$.

الحل:

نفرض أن $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+a^2}$ وعلى ذلك فإن

$$f(t) = g(t) = \frac{\sin at}{a}$$

وباستخدام نظرية الالتفاف يكون:

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}] = \int_0^t \frac{\sin au}{a}.\frac{\sin a(t-u)}{a}du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^t \sin au \sin a(t-u)du$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^t [\cos a(2u-t) - \cos at]du$$

$$= \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$$

١٣) استخدم الكسور الجزئية في إيجاد تحويلات لابلاس العكسية التالية:

(أ) $L^{-1}[\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}]$ (ب) $L^{-1}[\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}]$

(ج) $L^{-1}[\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}]$ (د) $L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+4)}]$

الحل

(أ)
$$\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-3}$$

أي أن:

$$2s^2 - 4 = A(s+1)(s-3) + B(s-2)(s-3) + C(s-2)(s+1)$$

وهذه يجب أن تكون متطابقة وعلى ذلك يجب أن تتحقق لجميع قيم s.

بوضع $s = 2,-1,3$ على التوالي نجد أن: $A = -\frac{4}{3}; B = -\frac{1}{2}; C = \frac{7}{2}$

وبذلك يكون:

$$L^{-1}[\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}] = L^{-1}[\frac{-4/3}{s-2} + \frac{-1/6}{s+1} + \frac{7/2}{s-3}]$$

$$= -\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{7}{3}e^{3t}$$

(ب)
$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

بالتخلص من الكسور نجد: $3s+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)$

بوضع $s=1$ نجد أن $A=2$ وبوضع $s=2$ نجد أن $A-C=1$ وعلى ذلك فإن $C=1$ وبوضع s تساوي أي عدد آخر ولتكن -1 نجد أن $B=-2$ وهكذا فإن:

$$L^{-1}[\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}]=L^{-1}[\frac{2}{s-1}]+L^{-1}[\frac{-2s+1}{s^2+1}]$$
$$=2e^{t}-2\cos t+\sin t$$

(ج) $$\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2}$$

بالتخلص من الكسور نجد أن:

$$5s^2-15s+7=A(s-2)^3+B(s+1)+C(s+1)(s-2)+$$
$$+D(s-2)^3(s+1)$$

بوضع $s=-1$ نجد أن $A=-1$ وبوضع $s=2$ نجد أن $B=-1$ وبوضع s تساوي أي عددين آخرين مثلاً 1 و 0 نجد أن:

$-2C+4D=0,-2C++2D=-2$ ومنهما نجد أن $D=1,C=2$

وعلى ذلك فإن:

$$L^{-1}[\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}]=L^{-1}[\frac{-1}{s+1}+\frac{-1}{(s-2)^3}+\frac{2}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-2}]$$
$$=-e^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{2t}+2te^{2t}+e^{2t}$$

(د) $$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4s}-\frac{s}{s(s^2+4)}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+4)}]=\frac{1}{4}L^{-1}[\frac{1}{s}]-\frac{1}{4}L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]$$
$$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4}\cos 2t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

١-١٤- حل المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام تحويلات لابلاس:

إن طريقة تحويلات لابلاس ذات أهمية خاصة في حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة مع الشروط الابتدائية المرافقة. وسوف نقوم في هذه الفقرة باستخدام تحويلات لابلاس في حل هذه المعادلات وذلك عن طريق أخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية المفروضة مع الاستفادة من الشروط الابتدائية مستخدمين بذلك قوانين تحويلات لابلاس للمشتقات، فنحصل على معادلة فيها المجهول هي الدالة $F(s)$ حيث نقوم بعزل الدالة المجهولة $F(s)$ في طرف والمقادير الأخرى في الطرف الثاني، ثم نستعمل تحويل لابلاس العكسي للطرفين، فنجد حل هذه المعادلة هو الدالة $f(t)$ مباشرة.

١-١٥- تمارين محلولة:

(أ) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - 2y' + y = 4$$

والتي تحقق الشروط الابتدائية: $y(0) = 4, y'(0) = 2$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة:

$$L[y''] - 2L[y'] + L[y] = L[4]$$

نعوض عن كل حد بما يساويه حسب قوانين تحويلات لابلاس:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{4}{s}$$

حيث $L[y(t)] = Y(s)$ بالاستفادة من الشروط الابتدائية المعطاة:

$$s^2Y(s) - 4s - 2 - 2sY(s) + 8 + Y(s) = \frac{4}{s}$$

أو

$$Y(s)[s^2 - 2s + 1] = 4s - 6 + \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{4s^2 - 6s + 4}{s(s^2 - 2s + 1)} = \frac{2(2s^2 - 3s + 2)}{s(s-1)^2}$$

وبتفريق الكسر إلى كسوره البسيطة نجد:

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$$

لنأخذ الآن تحويل لابلاس العكسي للطرفين:

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2}] + L^{-1}[\frac{4}{s}]$$

أي أن: $y(t) = 2te^t + 4$

وهو المطلوب.

(ب) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = \sin t$$

والتي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y(0) = 1; y'(0) = -2; y''(0) = 3; y'''(0) = 0$$

الحل:

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية المعطاة واستخدام الشروط الابتدائية نحصل على:

$$[s^4Y(s)-s^3(1)-s^2(-2)-s(3)-0]+2[s^2Y(s)-s(1)-(-2)]+$$
$$+Y(s)=\frac{1}{1+s^2}$$

وهذه يمكن كتابتها في الشكل:

$$(s^4+2s^2+1)Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+s^3-2s^2+5s-4$$

أو:

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)^3}+\frac{s^3-2s^2+5s-4}{(s^2+1)^3}$$
$$=\frac{1}{(s^2+1)^3}+\frac{(s^3+s)-2(s^2+1)+4s-2}{(s^2+1)^2}$$
$$=\frac{1}{(s^2+1)^3}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}+\frac{4s-2}{(s^2+1)^3}$$

والآن باستخدام النظريات الخاصة بتحويلات لابلاس:

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^3}]=\frac{3}{8}\sin t-\frac{3}{8}t\cos t-\frac{1}{8}t^2\sin t$$
$$L^{-1}[\frac{4s-2}{(s^2+1)^3}]=2t\sin t-\sin t+t\cos t$$

وبالتالي فإن الحل المطلوب هو:

$$y(t)=(1+\frac{5}{8}t)\cos t-(\frac{21}{8}-2t+\frac{1}{8}t^2)\sin t$$

١-١٧- تمارين غير محلولة:

١) أوجد تحويلات لابلاس لكل من الدوال التالية:

$$4e^{\frac{2t}{3}},6t-3,(t+1)^2,2\sin 3t+5\cos 3t,8\sin^2 3t,\sin 2t\cos 2t$$

$(\sqrt{t}+1)(2-\sqrt{t})/\sqrt{t}, (e^{3t}-e^{-3t})^2, 5\sinh 2t - 5\cosh 2t, t^3 e^{-5t}$
$(\sqrt[3]{t^2} - 1/\sqrt[3]{t})^2, 10\sin 3t\cos 5t, e^{-t}\cos 2t, \sqrt{t}e^{4t}, e^{-3t}/\sqrt{t}, t^2\cos 2t$
$t\sin 3t, te^{t}\sin t, (e^{-3t}-e^{-5t})/t, (\cos 2t - \cos 3t)/t, (\sin t)/t$
$(1-\cos t)/t^2$.

٢) أثبت أن الدالة $f(t) = e^{t^2}$ ليس لها تحويل لابلاس.

٣) بين هل للدالة $f(t) = \sin t^2$ تحويل لابلاس ولماذا؟

٤) أوجد $L[f(t)]$ لكل من الحالات التالية:

(١) $$f(t) = \begin{cases} -1 & if \quad 0 \le t \le 4 \\ 1 & if \quad t > 4 \end{cases}$$

(٢) $$f(t) = \begin{cases} t+1 & if \quad 0 \le t < 3 \\ 0 & if \quad t \ge 3 \end{cases}$$

(٣) $$f(t) = \begin{cases} 0 & if \quad 0 \le t < 2 \\ 1 & if \quad 2 \le t < 4 \\ 0 & if \quad t \ge 4 \end{cases}$$

(٤) $$f(t) = \begin{cases} 1 & if \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & if \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

إذا علمت أنه دوري ودوره يساوي 2.

٥) أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال التالية:

$$\frac{2}{s-3}, \frac{1}{3s+5}, \frac{4s}{s^2+16}, \frac{1}{4s^2+9}, \frac{2s-8}{s^2+36}, \frac{s^3-s^2+s-1}{s^5}, \frac{e^{-5s}}{8}$$
$$\frac{2-s}{s^{\frac{3}{2}}}, \frac{3s-16}{s^2-64}, \frac{(2s+1)^2}{s^5}, \frac{s}{(s+3)(s+5)}, \frac{s^2+2}{(s^2+10)(s^2+20)}$$
$$\frac{2e^{-s}-e^{-2s}}{8}, \frac{3s+9}{s^2+2s+10}, \frac{s}{(s-5)^3}, \frac{1}{\sqrt{4s-1}}, \frac{1}{(s-5)^3}, \frac{e^{-3s}}{s^2+\pi^2}$$

$$\frac{1}{s^2-4}, Ln(\frac{s+6}{s+2}), \frac{s^2}{(s^2+1)^2}, \frac{1}{(s^2+1)^3}, \frac{4s-2}{(s^2+1)^2}$$

٦) برهن أن L^{-1} مؤثر خطي.

٧) حل المعادلات التفاضلية التالية باستعمال تحويلات لابلاس:

(١) $y'' + 5y' - y = te^{-t} \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 1$

(٢) $y'' + y = 1 \quad ; \quad y(0) = 1; y'(0) = 0$

(٣) $y'' + 16y = 32t \quad ; \quad y(0) = 3; y'(0) = -2$

(٤) $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2t} \quad ; \quad y(0) = -2; y'(0) = -8$

(٥) $y'' + 2y' + 2y = \sin t \quad ; \quad y(0) = 1; y'(0) = 0$

(٦) $y''' - 9y'' + 24y' - 16y = 0; y(0) = 0; y'(0) = -11; y''(0) = 61$

(٧) $y''' + 8y = 32t^3 - 16t \quad ; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

(٨) $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0 \quad ; \quad y(0) = y''(0) = 2; y'(0) = 1$

★★★★★★★★★★★★★★★★

الفصل الثاني

حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة متسلسلات القوى

٢-١- مقدمة في متسلسلات القوى الحقيقية:

لقد أعطتنا نظرية وجود الحلول لمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى من الشكل: $y' = f(x, y)$ شرطاً كافياً لوجود الحل.

عند تحقيق f لبعض الشروط النظامية حول النقطة (x_0, y_0) فيمكن البرهان عندها أن الحل الوحيد $y(x)$ لهذه المعادلة التفاضلية الذي يمر بالنقطة (x_0, y_0)، أي الذي يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$، تحليليّ في جوار لـ x_0 (سنعرّف لاحقاً معنى كون التابع تحليلياً) وبالتالي يمكن كتابته صورياً على شكل متسلسلة تايلور:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots\dots + a_n(x - x_0)^n + \dots\dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

إن هذه المتسلسلة تحقق المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ وتأخذ القيمة $y = y_0$ عندما $x = x_0$ وكذلك فهي متقاربة لجميع قيم x القريبة بقدر كاف من $x = x_0$.

نسمي العوامل $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ **أمثال متسلسلة القوى** ونسمي $x_0 \in R$ **مركز المتسلسلة**.

فللحصول على حل وحيد للمعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ يحقق الشرط $y = y_0$ عند $x = x_0$ ودون أن نمس عمومية المسألة سنفرض أن $x_0 = 0$، وبالتالي سيكون شكل الحل هو:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

حيث $a_0 = y_0$.

نعوض المتسلسلة المفروضة في المعادلة التفاضلية المعطاة وبإجراء الحسابات والمطابقة نحصل على المعادلات التي تمكنا من الحصول على a_n أمثال متسلسلة الحل ولعل الأمثلة التالية توضح ذلك.

٢-٢- أمثلة محلولة:

$$y' = x^2 + y \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad (١)$$

الحل:

بما أن $f(x, y) = x^2 + y$ دالة وحيدة القيمة ومستمرة وكذلك $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ مستمرة على أي مستطيل للقيم (x, y) يحتوي على النقطة $(0, y_0)$ فإن شروط نظرية الوجود محققة وبإمكاننا أن نفرض الحل من الشكل:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

ويمكننا الآن ضمن منطقة التقارب، أن نشتق هذه المتسلسلة حداً حداً لنحصل على متسلسلة تتقارب إلى y' إذن:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots$$

ومنه:

$$y' - x^2 - y = (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2 - 1)x^2 + \\ + (4a_4 - a_5)x^5 + \ldots\ldots + (n a_n - a_{n-1})x^{n-1} + \ldots\ldots = 0$$

وكي تنعدم هذه المتسلسلة لجميع قيم x في منطقة ما حول $x=0$ فإنه يلزم ويكفي أن تنعدم معاملات كل قوة لـــ x أي:

$$a_1 - a_0 = 0$$
$$2a_2 - a_1 = 0$$
$$3a_3 - a_2 - 1 = 0$$
$$4a_4 - a_5 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$na_n - a_{n-1} = 0$$

ومنه:

$$a_1 = a_0 = y_0, a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}y_0, a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y_0$$
$$a_4 = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}y_0, \dots, a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}$$

يمكن استخدام العلاقة الأخيرة $a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}$، والتي تسمى **صيغة تراجع (أو علاقة تدرّج)**، لحساب معاملات إضافية، هكذا

$$n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{5}a_4 = \frac{1}{5}(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}y_0) = \frac{1}{60} + \frac{1}{120}y_0$$
$$n=6 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{6}a_5 = \frac{1}{6}(\frac{1}{60} + \frac{1}{120}y_0) = \frac{1}{360} + \frac{1}{720}y_0$$

كذلك يمكن الحصول على المعاملات كما يلي:

بما أن: $a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}$ و $a_{n-1} = \frac{1}{n-1}a_{n-2}$

فإن: $$a_n = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2}$$

ولكن:
$$a_{n-2} = \frac{1}{n-2} a_{n-3}$$

إذن:
$$a_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} a_{n-3}$$

وبالتالي:
$$a_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)....4} a_3$$
$$= \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)....4.3}(1+\frac{1}{2}a_0)$$
$$= \frac{1}{n!}(2+y_0) \qquad ; \quad n \geq 3$$

وبتعويض القيم التي حصلنا عليها للمعاملات في المتسلسلة المفروضة نجد:

$$y = y_0 + y_0 x + \frac{1}{2} y_0 x^2 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{6} y_0) x^3 + (\frac{1}{12} + \frac{1}{24} y_0) x^4 +$$
$$+ ..... + \frac{1}{n!}(2+y_0) x^n + ...$$

$$y = (y_0 + 2)(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...) - x^2 - 2x - 2$$
$$= (y_0 + 2)e^x - x^2 - 2x - 2$$

$$y' = \frac{2x - y}{1 - x} \qquad ; y(0) = y_0 \qquad (٢)$$

الحل:

نبحث عن حل للمعادلة المعطاة من الشكل:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...$$

حيث $a_0 = y_0$. عندئذ يكون:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1} + ...$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المفروضة نجد:

$$(1-x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+.....+na_nx^{n-1}+.....)-2x+$$
$$+(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+.....+a_nx^n+.....)=0$$

أو:

$$(a_1+a_0)+(2a_2-2)x+(3a_3-a_2)x^2+(4a_4-2a_3)x^3+.....+$$
$$+....+[(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n]x^n+.....=0$$

وبمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر نجد:

$$a_1+a_0=0$$
$$2a_2-2=0$$
$$3a_3-a_2=0$$
$$4a_4-2a_3=0$$
$$.....$$
$$(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n=0$$

أي أن:

$$a_1=-a_0, a_2=1, a_3=\frac{1}{3}, a_4=\frac{1}{6},....,a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n \quad ;n\geq 2$$

وهكذا يكون:

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}a_{n-3}$$
$$=.....=\frac{(n-2)(n-3)(n-4).....2.1}{n(n-1)(n-2)(n-3).....4.3}a_2$$

أي أن:

$$a_n=\frac{2}{n(n-1)} \qquad ;n\geq 2$$

وبالتالي:

$$y = y_0(1-x) + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \ldots + \frac{2}{n(n-1)}x^n + \ldots$$

$$y = y_0(1-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n$$

وباستخدام اختبار النسبة نجد أن هذه المتسلسلة متقاربة عندما $|x| < 1$.

٢-٣- تعريف:

نقول إن الدالة $f(x)$ **تحليلية في النقطة** x_0، إذا أمكن نشر الدالة $f(x)$ في مجال مركزه x. على شكل متسلسلة تايلور أي بقوى $(x - x_0)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

وبفرض أن متسلسلة القوى متقاربة في المجال $|x - x_0| < R$، فإن الدالة $f(x)$ تكون قابلة للاشتقاق في هذا المجال.

٢-٤- مقدمة عن حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة المتسلسلات:

لقد درسنا في المعادلات التفاضلية (١) طرقاً خاصة في مكاملة المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية، وربما لاحظ القارئ أن الطرق المدروسة تعالج أشكالاً مختلفة من هذه المعادلات. ندرس الآن طريقة إيجاد حل معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية:

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

حيث $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ دوال تحليلية على شكل متسلسلة قوى في x.

وتعتبر هذه الطريقة من أنجع الطرق وذلك لأنها الطريقة الوحيدة في إيجاد

حلول صفوف هامة من المعادلات. وبالحقيقة فإن معظم المعادلات الأساسية في الفيزياء الرياضية يمكن حلها فقط بهذه الطريقة.

هذا ويمكن تعميم طريقة الحل بالمتسلسلات إلى معادلات خطية متجانسة من رتب أعلى من المرتبة الثانية.

٢-٥- النقط العادية والشاذة:

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية الخطية:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (١)$$

حيث $P(x) = \dfrac{P_1(x)}{p_0(x)}, q(x) = \dfrac{P_2(x)}{p_0(x)}$

نقول عن نقطة $x = x_0$ إنها نقطة **عادية** للمعادلة التفاضلية (١) إذا كان كل من $P(x), q(x)$ تحليلياً عند تلك النقطة. ونقول عن كل نقطة **غير عادية** إنها نقطة **شاذة** للمعادلة. يكون لدينا إذن: $x_0 \Leftarrow 0 \neq P_0(x_0)$ نقطة عادية. فإذا نظرنا مثلاً في المعادلة:

$$y'' + \frac{x+2}{x-1}y' + \frac{x}{(x+1)^2}y = 0$$

فإننا نرى أن النقطتين $x = -1, x = 1$ شاذتان لهذه المعادلة، وكل نقطة غير هاتين النقطتين هي نقطة عادية للمعادلة.

٢-٦- دراسة الحل بجوار نقطة عادية:

لنفرض فيما يلي أن $P(x), q(x)$ في المعادلة (١) تحليليان في النقطة x_0 وأن نشرها بمتسلسلة تايلور في قوى $x - x_0$ متقاربان في المجال $|x - x_0| < R$.

عندئذ هنالك حلان مستقلان للمعادلة (١) كل منهما على شكل متسلسلة تـــايلور في قوى $x - x_0$ متقاربة في مجال ضمن المجال R .

البرهان

لننشر الدالتين $P(x), q(x)$ بمتسلسلة قوى $x - x_0$ وذلك لأن x_0 نقطة عاديـــة على الشكل:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x - x_0)^n$$

المتقاربتين من أجل $|x - x_0| < R$ حيث R هو أصغر نصفي قطـــري تقـــارب المتسلسلتين.

لنفرض أن المعادلة (١) تقبل حلاً على شكل متسلسلة قوى في $x - x_0$ أي:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad (٢)$$

ويتم البرهان إذا استطعنا تعيين الثوابت c_n بدلالة معطيات المعادلة وأثبتنا تقارب هذه المتسلسلة.

باشتقاق العلاقة (٢) مرتين متتاليتين نجد:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2}$$

نعوض في المعادلة (١) فنجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}\right] +$$

$$+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n\right] = 0$$

وهذا يتحقق إذا كانت جميع الأمثال في المتسلسلة اللانهائية في الطرف الأول مساوية للصفر.

وبفك الأقواس والمطابقة بين أمثال القوى المختلفة لـ $x-x_0$ نحصل على العلاقات التالية:

$$
\begin{aligned}
-2c_2 &= c_1\alpha_0 + c_0\beta_0 \\
-2.3c_3 &= 2c_2\alpha_0 + c_1\alpha_1 + c_1\beta_0 + c_0\beta_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-(n-1)nc_n &= (n-1)c_{n-1}\alpha_0 + (n-2)c_{n-2}\alpha_1 + \dots + c_1\alpha_{n-2} \\
&\quad + c_{n-2}\beta_0 + c_{n-3}\beta_1 + \dots + c_0\beta_{n-2}
\end{aligned}
\qquad (٣)
$$

العلاقات (٣) تعين الثوابت $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ وهي معادلات خطية في الثوابت المجهولة $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$.

من المعادلة الأولى يمكن حساب c_2 وبشكل وحيد بدلالة c_0, c_1 ومن المعادلة الثانية نجد c_3 بدلالة c_0, c_1 وهكذا ومن المعادلة الأخيرة نجد c_n بدلالة c_0, c_1.

نستنتج مما سبق على أن الدالة y يمكن أن تكتب على الشكل:

$$y(x) = c_0\varphi(x) + c_1\psi(x)$$

من هذه العلاقة والتي تمثل حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية (١) ومنها يمكن الحصول على حلين خاصين مستقلين خطياً للمعادلة (١).

لبرهان تقارب المتسلسلة (٢) يمكن أن نبرهن أن حدود هذه المتسلسلة أصغر من حدود متسلسلة متقاربة. طالما أن $p(x), q(x)$ قابلان للنشر في جوار النقطة $x = a$ وفق متسلسلة تايلور وبالتالي من أجل $|x-a| = r < R$ يمكن إيجاد عدد M بحيث: $|p(x)| \le M$

و $|x-x_0|.|q(x)| \le M$

أو: $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|.|x-x_0|^n \le M$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n||x-x_0|^{n+1} \le M$$

وبما أن مجموع أعداد موجبة أكبر من أي عدد موجب منها فتؤدي العلاقتان السابقتان إلى أن:

$$\alpha_n \le \frac{M}{r^n} \quad , \quad \beta_n \le \frac{M}{r^{n+1}}$$

إذا كتبنا $\lambda_0 = |c_0|$ و $\lambda_1 = |c_1|$ فنجد من العلاقات (٣) أن: $|c_2| \le \lambda_2$

حيث:

$$2\lambda_2 = (2\lambda_1 + \frac{\lambda_0}{r})M$$

و

$$|c_3| \le \lambda_3$$

حيث:

$$2.3\lambda_3 = (2\lambda_2 + \frac{2\lambda_1}{r} + \frac{\lambda_0}{r^2})M$$

.....

و

$$|c_{n-1}| \le \lambda_{n-1}$$

و

$$|c_n| \le \lambda_n$$

حيث:

$$(n-2)(n-1)\lambda_{n-1} = [(n-2)\lambda_{n-2} + \frac{(n-2)}{r}\lambda_{n-3} + ... + \frac{\lambda_0}{r^{n-2}}]M$$

$$(n-1)n\lambda_n = [(n-1)\lambda_{n-1} + \frac{n-1}{r}\lambda_{n-2} + ... + \frac{\lambda_0}{r^{n-1}}]M$$

بتقسيم طرفي العلاقة ما قبل الأخيرة على r وطرحها من العلاقة الأخيرة نجد:

$$(n-1)n\lambda_n = [(n-1)M\lambda_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{r}\lambda_{n-1} + \frac{\lambda_{n-2}M}{r}]$$

إذا سمّينا $x_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$ يكون لدينا: $x_n = \frac{M}{n} + \frac{n-2}{n}\frac{1}{r} + \frac{1}{x_{n-1}}\frac{M}{rn(n-1)}$

وبالتالي $x_n > \frac{M}{n} + \frac{n-2}{n}\frac{1}{r}$ وبما أن نهاية الطرف اليميني عندما $n \to \infty$

هي $\frac{1}{r}$، إذن $\exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow x_n > \frac{1}{2r}$

أي $\exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow 2r > \frac{1}{x_n}$

إذن $\frac{1}{x_{n-1}} \frac{M}{rn(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ومنه نجد أن $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{n-2}{r.n} + \frac{M}{n}) = \frac{1}{r}$

ينتج عن ذلك أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x - x_0)^n$ متقاربة في جوار النقطة x_0 ونصف قطر تقاربها r. وبمقارنة النتائج السابقة نجد أن حدود متسلسلة القيم المطلقة للمتسلسلة (٢) أصغر من الحدود المقابلة لها في المتسلسلة المتقاربة أعلاه فهي إذن متقاربة وبالتالي فإن المتسلسلة (٢) متقاربة ونصف قطر تقاربها r وحيث $r \le R$ وبذلك يتم المطلوب.

ملاحظة هامة:

نستنتج من المبرهنة السابقة أنه لإيجاد حل المعادلة (١) في جوار النقطة العادية $x = x_0$، نضع الحل على شكل متسلسلة قوى (٢) ثم نعين الثوابت الكيفية بدلالة ثابتين c_0, c_1 فقط.

أما إذا كان المطلوب إيجاد حل للمعادلة (١) محقق لشروط بدء معينة:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

نعين قيمة c_0, c_1 الموافقة لهذه الشروط.

ولإيجاد حل للمعادلة (١) يحقق شروط بدء معينة يمكن اختيار شكل مناسب للمتسلسلة (٢) مباشرة ومحققة لشروط البدء المفروضة.

إن مجال تقارب المتسلسلة يصل حتى أقرب نقطة شاذة في المجال R إلا أنه قد يحدث أن يكون الحل تحليلياً في تلك النقطة الشاذة وبالتالي يكون التقارب في مجال يحوي نقاطاً شاذة وقد يكون فعلاً التقارب على كامل المحور ox. ولعل الأمثلة التالية توضح ذلك.

٢-٧- تمارين محلولة:

(١) أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$(x-1)(x-k)y'' + (x-2k+1)y' - y = 0 \qquad ; k \neq 0$$

على شكل متسلسلة في قوى x (أي في جوار النقطة $x = 0$).

الحل:

نلاحظ أن $x = 0$ نقطة عادية للمعادلة المعطاة لأن:

$$p(x) = \frac{x-2k+1}{(x-1)(x-k)} \Rightarrow p(0) = \frac{-2k+1}{k}$$

$$q(x) = \frac{-1}{(x-1)(x-k)} \Rightarrow q(0) = \frac{-1}{k}$$

من هنا نستنتج أن $p(0), q(0)$ دالتان تحليليتان عند النقطة $x = 0$. لذا نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

باشتقاق هذه العلاقة نجد:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة المعطاة نجد:

$$(x-1)(x-k)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + (x-2k+1)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+(n-1)]c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}[(1-2k)n-(k+1)n(n-1)]c_n x^{n-1} +$$

$$+k\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = 0$$

لإيجاد صيغة تراجعية (قانون تدريجي لحساب c_n) نوحد أدلة $\sum$ وذلك بوضع كل n بـ $n+1$ في المجموع الثاني وكل n بـ $n+2$ في المجموع الثالث فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+(n-1)]c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}[(1-2k)(n+1)-(k+1)n(n+1)]c_{n+1} x^n$$

$$+k\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)]c_{n+2} x^n = 0$$

بالمطابقة بين قوى x المختلفة نجد العلاقة التالية:

$$[-c_0 + (1-2k)c_1 + 2kc_2] = 0$$

$$[2(1-2k)-2(k+1)]c_2 + 6kc_3 = 0$$

$$3c_2 + [3(1-2k)-6(k+1)]c_3 + 12kc_4 = 0$$

.....

$$[n(n-1)+(n-1)]c_n + [(1-2k)(n+1)-(k+1)n(n+1)]c_{n+1} +$$

$$+k(n+1)(n+2)c_{n+2} = 0$$

من هنا نجد أن:

$$c_2 = \frac{1}{2k}c_0 + \frac{2k-1}{2k}c_1$$

$$c_3 = c_2 = \frac{1}{2k}c_0 + \frac{2k-1}{2k}c_1$$

$$c_4 = c_3 = c_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_n = c_2$$

وبالتالي فإن القانون التدريجي يمكن كتابته بالشكل:

$$c_{n+2} = \frac{(1-n^2)c_n - [1-(3n+2)k - n^2(k+1)]c_{n+1}}{k(n+1)(n+2)}$$

وذلك $\forall n \geq 0$.

وهكذا نجد أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة المعطاة يكتب بالشكل التالي:

$$y = c_0(1 + \frac{1}{2k}x^2 + \frac{1}{2k}x^3 + \dots\dots) + c_1(x + \frac{2k-1}{2k}x^2 + \\ + \frac{2k-1}{2k}x^3 + \dots)$$

حيث c_1, c_0 ثابتان اختياريان.

ملاحظة:

لإيجاد حل للمعادلة (١) يحقق شروط بدء معينة يمكن اختيار شكل مناسب للمتسلسلة (٢) مباشرة ومحقق لشروط البدء المفروضة. فمثلاً في المثال السابق إذا طلب إيجاد الحل الموافق للشروط الابتدائية $y(0) = y'(0) = 1$، فمن الواضح أن اختيار المتسلسلة يكون من الشكل:

$$y = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

وهي تحقق شروط البدء المفروضة. وبتعيين $c_2, c_3, \dots$ كما سبق نحصل على أن:

$$c_2 = c_3 = \dots\dots = c_n = 1$$

وبالتالي فإن الحل المطلوب هو:

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

وهذه المتسلسلة متقاربة من أجل $|x| < 1$ وهو الحل الخاص للمعادلة المعطاة. أو ممكن استنتاج هذا الحل الخاص من عبارة الحل العام وذلك بالاعتماد على شروط البدء المفروضة.

(٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$$

في جوار النقطة $x = 0$.

الحل:

من الواضح أن $x = 0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية لذا تقبل المعادلة المعطاة حلاً من الشكل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

ولنعين الثوابت c_n. نشتق y مرتين:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n^2-1)c_n] x^n = 0$$

وبمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر نجد:

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0, c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{8}c_0, \ldots, c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}c_n$$

ويتضح من العلاقة $c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2} c_n$ أن: $c_3 = c_5 = c_7 = ... = 0$

ومنه فإن $c_{n+2} = 0$ إذا كان n عدداً فردياً. أما إذا كان n عدداً زوجياً $(n = 2k)$ فإن:

$$c_{2k} = -\frac{2k-3}{2k} c_{2k-2} = \frac{(2k-3)(2k-5)}{2k(2k-2)} c_{2k-4}$$

$$= ..... = (-1)^{k+1} \frac{1.3.5...(2k-3)}{2^k k!} c_0$$

وهكذا يكون الحل الكامل هو:

$$y = c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + ...) + c_1 x$$

$$y = c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{1.3.5....(2k-3)}{2^k k!} x^{2k}) + c_1 x$$

$$y = c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k} \frac{1.3.5....(2k-3)}{2^k k!} x^{2k}) + c_1 x$$

وبإجراء اختبار النسبة نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_n x^n}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2} = x^2$$

والمتسلسلة متقاربة عندما $|x| < 1$.

(٣) أوجد حل المعادلة التفاضلية: $y'' + y = 0$

في جوار $x = 0$.

الحل:

واضح أن $x = 0$ نقطة عادية. نبحث عن حل من الشكل $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

باشتقاق y مرتين والتعويض في المعادلة نجد:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

لإيجاد القانون التدريجي لحساب c_n نوحد أدلة $\sum$ وذلك بوضع كل n بـ $n+2$ في المجموع الأول ويبتدئ المجموع من الصفر بدلاً من 2 فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n] x^n = 0$$

ولكي تتحقق هذه المعادلة لجميع قيم x، فمن الضروري أن يكون معامل كل قوة من قوى x المختلفة مساوياً للصفر، ولذا نستنتج أن:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالقانون التدريجي (صيغة تراجعية) وهكذا نحصل على:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2.1} = -\frac{c_0}{2!}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{2.3} = -\frac{c_1}{3!}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4.3} = \frac{c_0}{4!}$$

$$c_5 = -\frac{c_3}{5.4} = \frac{c_0}{5!}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{6.5} = -\frac{c_0}{6!}$$

$$c_7 = -\frac{c_5}{7.6} = -\frac{c_1}{7!}$$

وعموماً إذا كانت $n = 2k+1$، فإن:

$$c_n = c_{2k+1} = -\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_1 \quad ; \quad k = 1,2,3,....$$

وبالتالي فإن الحل يأخذ الشكل:

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2!}x^2 - \frac{c_1}{3!}x^3 + \frac{c_0}{4!}x^4 + \frac{c_1}{5!}x^5 + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{(-1)^n c_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n c_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots\ldots$$

$$y = c_0[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots.] +$$

$$+ c_1[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.. + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots.]$$

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$y = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

(٤) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' - xy = 0$

في جوار النقطة $x = 1$.

الحل:

واضح أن $x = 1$ نقطة عادية، ولذا نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$$

ومن ثم فإن:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-1)^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} (x-1)^n$$

بالتعويض عن y'', y', y في المعادلة المعطاة ينتج أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} (x-1)^n - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n = 0$$

ولمساواة معاملات قوى $x-1$ المتناظرة، يجب أن نعبر عن x، معامل y في المعادلة المفروضة بدلالة قوى $x-1$، أي نكتب: $x=1+(x-1)$، لاحظ أن هذا هو بالضبط متسلسلة تايلور للدالة x حول النقطة $x=1$، وهكذا فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الصيغة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n-[1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n=0$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^{n+1}$$

وبإزاحة ترقيم الجمع في المتسلسلة الثانية في الطرف الأيمن ينتج أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}(x-1)^n$$

وبمساواة معاملات $x-1$ المتناظرة نحصل على:

$$2c_2=c_0\text{،}\ 3.2c_3=c_1+c_0\text{،}\ 4.3c_4=c_2+c_1\text{،}\ 5.4c_5=c_3+c_2\text{،}\ldots$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}=c_n+c_{n-1}\quad;\quad n\geq 1$$

وهكذا يكون:

$$c_2=\frac{c_0}{2}\text{،}\quad c_3=\frac{c_1}{6}+\frac{c_0}{6}\text{،}\quad c_4=\frac{c_2}{12}+\frac{c_1}{12}=\frac{c_0}{24}+\frac{c_1}{12}$$

$$c_5=\frac{c_3}{20}+\frac{c_2}{20}=\frac{c_0}{30}+\frac{c_1}{120}\text{،}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وبالتالي فإن:

$$y=c_0[1+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{24}+\frac{(x-1)^5}{30}+\ldots..]+$$

$$+c_1[(x-1)+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{12}+\frac{(x-1)^5}{120}+\ldots..]$$

أو:

$$y = c_0 y_1(x) + c_1 y_1(x)$$

وهما حلان مستقلان خطياً للمعادلة المفروضة.

٢-٨- معادلة هيرمت التفاضلية:

إن الشكل العام لمعادلة هيرمت التفاضلية يعطى كما يلي:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

حيث λ عدد ثابت. ولهذه المعادلة أهمية كبيرة في فروع كثيرة فروع الفيزياء الرياضية. فمثلاً في الميكانيكا الكمية تظهر معادلة هيرمت في دراسة معادلة شرودنجر (١٨٨٧-١٩٦١) لهزّاز توافقي.

لإيجاد حل للمعادلة المعطاة في جوار النقطة العادية $x = 0$ نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

بالاشتقاق والتعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أو:

$$(2c_2 + \lambda c_0) + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n]x^n = 0$$

من هنا ينتج $c_2 = -\dfrac{\lambda c_0}{2}$، ويكون القانون التدريجي:

$$c_{n+2} = -\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}c_n \quad ; \quad n \geq 1$$

لاحظ أن القانون التدريجي يحتوي في الحقيقة على النتيجة $c_2 = -\dfrac{\lambda c_0}{2}$ المقابلة لقيمة $n = 0$. وواضح من القانون أن c_0 تعين c_2، والتي بدورها تعين c_4، وهكذا دواليك.

وبنفس الطريقة نجد أن معاملات القوى الفردية للمتغير x تعين بدلالة c_1.

ويكون حل معادلة هيرمت المتسلسل على الشكل:

$$y = c_0[1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - .....] +$$
$$+ c_1[x + \frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 +$$
$$+ \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + ...]$$

$$y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

إن هاتين المتسلسلتان تتقاربان لجميع قيم x. وإذا كانت λ عدداً زوجياً غير سالب فإن إحدى المتسلسلتين الأنفي الذكر تكون منتهية. وكحالة خاصة عندما $\lambda = 0,2,4,6$ على التوالي فإن أحد حلول معادلة هيرمت هو:

$$1 \quad , \quad x, \quad 1-2x^2 \quad , \quad \frac{x-2x^3}{3}$$

على التوالي، والحل الحدودي الذي يقابل $\lambda = 2n$ بعد ضربه بثابت مناسب يعرف بحدودي هيرمت ويرمز له بالرمز $H_n(x)$.

٢-٩- النقطة الشاذة المنتظمة:

إذا أمكن كتابة المعادلة:

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

بالشكل:

$$(١) \qquad (x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$$

حيث $q(x), p(x)$ تحليليان عند النقطة x_0، فنقول إن النقطة x_0 نقطة **شاذة منتظمة** للمعادلة.

بناءً على هذا التعريف تكون x_0 نقطة شاذة منتظمة للمعادلة:

$$y'' + r(x)y' + s(x)y = 0$$

إذا كانت الدالتان $p(x) = (x - x_0)r(x) \quad , \quad q(x) = (x - x_0)^2 s(x)$ تحليليتين عند النقطة x_0.

٢-١٠- مبرهنة الوجود:

يوجد حل واحد على الأقل للمعادلة التفاضلية (١) في جوار النقطة الشاذة المنتظمة $x = x_0$، قابل للنشر على شكل متسلسلة معممة:

$$y = |x - x_0|^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

بحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ متقاربة على الأقل في مجال $0 < |x - x_0| < h$.

البرهان:

يمكننا تبسيط الحسابات ودون أن نمس عمومية المسألة أن نأخذ $x_0 = 0$. إذن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

ولنبرهن أن الحل من أجل $x > 0$ هو من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} \quad ; \quad c_0 \neq 0 \qquad (٢)$$

سنسلك في البرهان طريقة فروبينيوس. نشتق المعادلة (٢) مرتين:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) c_n x^{n+\lambda-2}$$

وبما أن الدالتين $q(x), p(x)$ تحليليتين في النقطة $x = 0$ فيمكن كتابتهما على الشكل:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \quad , \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$$

وهاتان المتسلسلتان متقاربتان في المجال $|x| < R$ و $R > 0$.

نعوض في المعادلة: $x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$ (٣)

عن كل حد بقيمته فنجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^n + [\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^n][\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n] +$$
$$+[\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n][\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n] = 0$$

بعد إجراء جداء المتسلسلات نكتب المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n]x^n + \sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{j=0}^{n}(j+\lambda)c_j\alpha_{n-j}]x^n +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{j=0}^{n}c_j\beta_{n-j}]x^n = 0$$

وبمساواة أمثال مختلف قوى x بالصفر نجد ما يلي:

(٤) أمثال x^0 : $[\lambda(\lambda-1)+\lambda\alpha_0+\beta_0]c_0 = 0 \;\; ; \;\; c_0 \neq 0$

(٥) أمثال x^n : $[(n+\lambda)(n+\lambda-1)+\alpha_0(n+\lambda)+\beta_0]c_n +$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}[(j+\lambda)\alpha_{n-j}+\beta_{n-j}]c_j = 0 \;\; ; \;\; n \geq 1$$

بما أن $c_0 \neq 0$ فنجد من (٤) أن:

(٦) $$I(\lambda) = \lambda(\lambda-1)+\lambda\alpha_0+\beta_0 = 0$$

لاحظ أن أمثال c_n في (٥) تنتج من $I(\lambda)$ بتعويض كل λ بـ $\lambda+n$، أي أنها $I(\lambda+n)$. وبناءً على ذلك نكتب المعادلة (٥) بالشكل:

(٧) $$I(\lambda+n)c_n + \sum_{j=0}^{n-1}[(j+\lambda)\alpha_{n-j}+\beta_{n-j}]c_j = 0 \;\; ; \;\; n \geq 1$$

تسمى المعادلة (٦) بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية، وفيها α_0 و β_0 الحدان الثابتان في منشوري q, p . أي أن: $\beta_0 = q(0)$ و $\alpha_0 = p(0)$

ولذلك يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$I(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda p(0) + q(0) = 0 \qquad (٦)$$

ويمكن الحصول على المعادلة المميزة مباشرة من المعادلة (٣) وبالتالي أيضاً الحصول على $I(\lambda + n)$. إن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية، هي معادلة من الدرجة الثانية في λ، ونرمز لجذريها بـ λ_1, λ_2.

نقتصر على دراسة الحالة التي يكون فيها جذرا المعادلة المميزة حقيقيين، ونفرض أن $\lambda_1 \geq \lambda_2$ وسنبرهن أنه يوجد دائماً للمعادلة (٣) حل في جوار النقطة $x = 0$ له شكل المتسلسلة المعممة يوافق λ_1 وذلك سواءً كان λ_1 أكبر تماماً من λ_2 أو يساويه.

من المعادلة (٧) وبالتعويض من أجل λ بـ λ_1 نجد أن أمثال c_n هو:

$$I(\lambda_1 + n) = (\lambda_1 + n)(\lambda_1 + n - 1) + \alpha_0(\lambda_1 + n) + \beta_0 \quad ; \quad n \geq 1$$

وبما أن: $\lambda_1 + n > \lambda_1$ فلا يمكن أن يكون $\lambda_1 + n$ جذراً للمعادلة المميزة (التي لها جذران أكبر هما λ_1)، وينتج أن $I(\lambda_1 + n) \neq 0$، وبالتالي يمكن استعمال علاقة التدرج (٧) لتعيين قيم مختلف الأمثال c_n، ولتكن a_n، ونحصل على الحل:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda_1}$$

ويمكن تبيان أن نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة h غير معدوم. من أجل $x < 0$ نستبدل $|x|^{\lambda_1}$ بـ x^{λ_1}، وتجري المحاكمات السابقة بشكل مماثل ونجد:

$$y_1 = |x|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

إذن يوجد لدينا وكما تنص النظرية حل واحد على الأقل في جوار النقطة الشاذة المنتظمة $x = 0$.

إيجاد الحل الآخر:

يتوقف شكل الحل الآخر على الفرق $\lambda_1 - \lambda_2$، ونميز الحالات التالية:

(١) $\lambda_1 - \lambda_2$ ليس عدداً صحيحاً.

بتعويض λ بـــ λ_2 في العلاقة (٧) نجد أن أمثال c_n هـــو $I(\lambda_2 + n)$، وهـــو لا ينعدم من أجل أية قيمة لـــ n، وبالحقيقة ولو فرضنا جدلاً أن $I(\lambda_2 + n)$ ينعـــدم من أجل القيمة n لكان إذاً $\lambda_2 + n$ هو الجـــذر الأكبـــر λ_1 للمعادلـــة المميـــزة. ولكن $\lambda_2 + n = \lambda_1$ تعني أن $\lambda_1 - \lambda_2 = n$، وهو خلاف الفرض بأن $\lambda_1 - \lambda_2$ ليس عدداً صحيحاً.

يمكن إذاً استخدام علاقة التدرج (٧) لتعيين قيم الأمثال c_n كافـــة، ولـــتكن b_n، ونحصل بالتالي على حل آخر y_2 في جوار أيمن للنقطة $x = 0$. وباستبدال $|x|^{\lambda_2}$ بـــ x^{λ_2} في عبارة y_2 نحصل على:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

وهي عبارة الحل y_2 في جوار $0 < |x| < h$ للنقطة الشاذة المنتظمة $x = 0$.

(٢) $\lambda_1 = \lambda_2$ (للمعادلة المميزة جذر مضاعف)

يوجد كما رأينا، حل y_1 بشكل متسلسلة معممة، وأما الحل الآخر y_2 فلـــيس لـــه شكل المتسلسلة المعممة، وإنما y_2 يعطى كما يلي:

$$y_2 = y_1 \ln|x| + |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

(٣) $\lambda_1 - \lambda_2$ عدد صحيح

يوجد كما رأينا، حل y_1 بشكل متسلسلة معممة، وأما الحـــل الآخـــر y_2 يعطـــى بالشكل التالي:

$$y_2(x) = c.y_1(x) \ln|x| + |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

حيث $b_0 = 1$، والثابتة c تكون أحياناً مساوية للصفر.

نشرح الآن من خلال الأمثلة المحلولة المختلفة كيفية إيجاد الحل العام لمعادلـــة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية مستخدمين طريقة فروبينيوس.

٢-١١- أمثلة محلولة:

(١) بين طبيعة النقطة $x = 0$ للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2 y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0$$

الحل:

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة:

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

نجد أن:

$$p(x) = \frac{3}{2} \quad ; \quad q(x) = -\frac{(1+x^2)}{2}$$

وهما دالتان تحليليتان على R. وبما أن $x = 0$ تعدم أمثال y'' فهي إذاً نقطة شاذة منتظمة للمعادلة المفروضة.

(٢) أعد نفس السؤال من أجل المعادلة:

$$2(x-2)^2 xy'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

الحل:

بقسمة هذه المعادلة على $2(x-2)^2 x$ ينتج:

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2} y' + \frac{1}{2(x-2)x} y = 0$$

وبالتالي نجد:

$$p(x) = \frac{3}{2(x-2)^2 x} \quad ; \quad q(x) = \frac{1}{2(x-2)x}$$

واضح أن $x = 0$ هي نقطة شاذة.

لنلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{3}{2(x-2)^2 x} = \frac{3}{12}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{1}{2(x-2)x} = 0$$

وبما أن هاتين النهايتين محدودتان فإن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

ملاحظة:

يوجد في هذا المثال $x = 2$ نقطة شاذة لكن يمكن ملاحظة أن:

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p(x) = \lim_{x\to 2}(x-2).\frac{3}{2(x-2)^2 x}$$

وهي غير موجودة، لذا فإن $x = 2$ نقطة شاذة غير منتظمة.

(٣) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2 y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0$$

في جوار النقطة $x = 0$.

الحل:

واضح أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة. نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} \qquad ; c_0 \neq 0$$

نشتق y مرتين فنجد:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda+1}-$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\lambda+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\lambda}=0$$

أو:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n}=0$$

أي أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+\lambda)+1]c_n x^{n+1}=0$$

نستبدل $n-1$ بـــ n في المتسلسلة الثانية فتبدأ عندئذ هذه المتسلسلة بـــ $n=1$، وتكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$[2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1]c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n-$$
$$-[2(n+\lambda-1)+1]c_{n-1}\}x^{n}=0$$

وبالمطابقة نجد:

$$[2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1]c_0=0 \qquad ;c_0\neq 0 \qquad (٨)$$

$$[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n-[2(n+\lambda-1)+1]c_{n-1}=0 \qquad (٩)$$

من المعادلة المميزة (٨) نجد:

$$2\lambda^2+\lambda-1=0$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن $\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_1=-1$ هما جـذرا المعادلـة المميـزة ونلاحظ أن $\lambda_1-\lambda_2\notin Z$ (ليس عدداً صحيحاً) فيوجد للمعادلة المعطاة حـلان مستقلان خطياً لكل منهما شكل المتسلسلة المعممة.

من المعادلة (٩) نستطيع الآن إيجاد الدستور التدريجي:

$$[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n=[2(n+\lambda)-1]c_{n-1} \quad ;n\geq 1$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$c_n=\frac{2(n+\lambda)-1}{2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1}c_{n-1} \qquad (١٠)$$

وبوضع $\lambda=\lambda_1=-1$ نجد:

$$c_n=\frac{2n+2(-1)-1}{2(n-1)(n-2)+3(n-1)-1}c_{n-1}=\frac{2n-3}{n(2n-3)}c_{n-1}$$

$$c_n=\frac{1}{n}c_{n-1} \quad ;n\geq 1$$

وهكذا فإن:

$$c_1=c_0$$

$$c_2=\frac{1}{2}c_1=\frac{1}{2}c_0$$

$$c_3=\frac{1}{3}c_2=\frac{1}{3.2}c_0$$

.....

$$c_n=\frac{1}{n!}c_0$$

ومنه نجد الحل الخاص الأول للمعادلة وهو:

$$y_1=|x|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^{-1}[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+.....]$$

$$=\frac{1}{x}[c_0+c_0x+\frac{1}{2!}c_0x^2+\frac{1}{3!}c_0x^3+.....]$$

$$y_1=\frac{1}{x}e^x \qquad ;c_0=1$$

وبأخذ الجذر الآخر $\lambda_2=\frac{1}{2}$ نجد:

$$c_n=\frac{2}{2n+3}c_{n-1} \quad ;n\geq 1$$

وهكذا فإن:

$$c_1 = \frac{2}{5} c_0$$

$$c_2 = \frac{4}{5.7} c_0$$

$$c_3 = \frac{8}{5.7.9} c_0$$

.....

وتكون العبارة:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - x^{\frac{1}{2}} [c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...]$$

$$= c_0 x^{\frac{1}{2}} [1 + \frac{2x}{5} + \frac{(2x)^2}{5.7} + \frac{(2x)^3}{5.7.9} + ...]$$

هي الحل الخاص الثاني للمعادلة. والحل العام للمعادلة المفروضة هو:

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

(٤) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x(x+1)y'' + (1+x)y' - y = 0$$

في جوار النقطة $x = 0$.

الحل:

بما أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda}$$

نشتق y مرتين فنجد:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda-2}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بـــ x وبالتعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda+1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\lambda+1} = 0 \qquad (١١)$$

لتعيين المعادلة المميزة، نجعل أمثال أقل قوة في x عندما $n=0$ (أمثـــال الحـــد الثابت) مساوٍ للصفر، فنحصل على:

$$\lambda(\lambda-1)c_0 + \lambda c_0 = 0$$

$$[\lambda(\lambda-1)+\lambda]c_0 = 0 \qquad ; c_0 \neq 0$$

ومنه:

$$\lambda^2 = 0$$

وجذور هذه المعادلة $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ونلاحظ أن $\lambda_1 - \lambda_2 \in Z$ وبالتـــالي لإيجـــاد الحل العام للمعادلة المعطاة، يجب أن نجد حلاً خاصاً من الشكل:

$$y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ولإيجاد القانون التدريجي العام: نجعل أمثال $x^{n+\lambda+1}$ مساوياً للصفر في العلاقـــة (١١) وذلك بعد تبديل كل n بـــ $n+1$ في المتسلسلتين الثانية والثالثة من العلاقة (١١)، فنحصل على:

$$c_{n+1} = \frac{-(n+\lambda)^2+1}{(n+\lambda+1)^2}c_n \qquad ; n \geq 0$$

لنبدل كل λ بـــ $\lambda_1 = 0$ فنجد:

$$c_{n+1} = \frac{1-n^2}{(1+n)^2}c_n \qquad ; n \geq 0$$

أو:

$$c_{n+1} = \frac{1-n}{1+n} c_n \qquad ; n \geq 0$$

وهكذا فإن:

$$c_1 = c_0 \qquad ; c_0 \neq 0$$
$$c_2 = 0$$
$$c_3 = -\frac{1}{3} c_2 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

وبالتالي فإن:

$$c_2 = c_3 = c_4 = \dots\dots = c_n = 0$$

ومنه نجد أن الحل الخاص من أجل $\lambda_1 = 0$ هو:

$$y_1 = c_0 + c_1 x$$
$$y_1 = 1 + x \qquad ; c_0 = 1$$

نجري التحويل:

$$y = y_1 . z \qquad (١٢)$$
$$y = (1+x).z \qquad (١٣)$$

نشتق العلاقة (١٣) ونبدل في المعادلة المفروضة فنحصل على معادلة جديدة تحوي الدالة المجهولة z:

$$x(1+x)z'' + (3x+1)z' = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد:

$$z = e_1 [\ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}] + e_2$$

نبدل في العلاقة (١٢) نحصل على الحل العام المطلوب للمعادلة المفروضة:

$$y=(1+x)\left\{e_1[\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}]+e_2\right\}$$

حيث e_1, e_2 ثابتان اختياريان.

(٥) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2(1-x)^2y''+x(1-x)(1-2x)y'-y=0$$

في جوار النقطة $x=1$.

الحل:

نجري التحويل $x-1=t$ ونلاحظ أن:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d^2y}{dt^2}$$

فتأخذ المعادلة التفاضلية الشكل:

$$t^2(t+1)^2\frac{d^2y}{dt^2}+t(t+1)(1+2t)\frac{dy}{dt}-y=0$$

إن النقطة $t=0$ نقطة شاذة منتظمة لهذه المعادلة، ولذلك فللمعادلة حل من الشكل:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{n+\lambda}$$

بالتعويض نجد:

$$+1)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_nt^n+(2t^2+3t+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_nt^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n=0$$

وبالمطابقة نجد:

$$[\lambda(\lambda-1)+\lambda-1]c_0=0$$

$$(\lambda+1)\lambda c_1+2\lambda(\lambda-1)c_0+(\lambda+1)c_1+3\lambda c_0-c_1=0$$

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n+2(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)c_{n-1}+$$
$$(\lambda+n-2)(\lambda+n-3)c_{n-2}+(\lambda+n)c_n+3(\lambda+n-1)c_{n-1}+$$
$$+2(\lambda+n-2)c_{n-2}-c_n=0 \quad ;n\geq 2$$

والمعادلة المميزة هي:

$$(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

ولها جذران هما $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ و ، والفرق بينهما عدد صحيح.

إن الجذر الأول يعطينا حلاً من الشكل المفروض، في حين قد يخفق الجذر الثاني. ولكن إذا لم يخفق الجذر الثاني فعندئذ يعطينا الحل العام دفعة واحدة.

وعلى هذا فإننا نجرب أولاً $\lambda=-1$ فنجد بالتعويض في المعادلات الأخيرة:

$$c_0-c_1=0$$

$$n(n-2)c_n+(n-2)(2n-3)c_{n-1}+(n-2)(n-3)c_{n-2}=0 \quad ;n\geq 2$$

فإذا وضعنا في المعادلة الأخيرة $n=2$ نجد:

$$0c_2+0c_1+0c_0=0$$

وهذا يعني أن c_2 اختيارية، وبذلك يكون لدينا ثابتان اختياريان هما c_2, c_0.

إذا وضعنا $n=3$ نحصل على: $c_3=-c_2$

ونجد كذلك:

$$c_4=c_2; c_5=-c_2, c_6=c_2, \ldots\ldots\ldots$$

والحل العام هو:

$$w=t^{-1}[c_0+c_0t+c_2t^2-c_2t^3+c_2t^4-c_2t^5+c_2t^6+\ldots]$$
$$=c_0\frac{1+t}{t}+c_2t(1-t+t^2-t^3+t^4-\ldots\ldots)$$
$$=c_0\frac{1+t}{t}+c_2\frac{t}{1+t}=c_0\frac{x}{x-1}+c_2\frac{x-1}{x}$$

٢-١٢- معادلة بسل التفاضلية من المرتبة υ:

سنعالج في هذه الفقرة واحدة من أهم المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية، ذات التطبيقات العملية الواسعة، ولا سيما في مجـــال الفيزيـــاء، وهي معادلة بسل التفاضلية:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \upsilon^2)y = 0 \qquad (١)$$

وحيث أن υ عدد ثابت، تسمى حلول هذه المعادلة التفاضلية بدوال بسل وهـــي ذات أهمية كبيرة في الرياضيات التطبيقية.

بما أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة فإننا نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} \qquad ; c_0 \neq 0$$

بالتعويض في (١) نجد:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) - \upsilon^2]c_n + c_{n-2}\}x^n +$$

$$+[\lambda(\lambda-1) + \lambda - \upsilon^2]c_0 + [(1+\lambda)\lambda + (1+\lambda) - \upsilon^2]c_1 x = 0$$

وبالمطابقة نجد:

$$\begin{aligned} &[\lambda(\lambda-1) + \lambda - \upsilon^2]c_0 = 0 \\ &[\lambda(\lambda+1) + (\lambda+1) - \upsilon^2]c_1 = 0 \\ &[(\lambda+n)(\lambda+n-1) + (\lambda+n) - \upsilon^2]c_n = -c_{n-2} \end{aligned} \qquad (٢)$$

فالمعادلة الدليلية هي:

$$\lambda^2 - \upsilon^2 = 0$$

وجذرا هذه المعادلة هما: $\lambda_1 = +\upsilon, \lambda_2 = -\upsilon$

ومن المعادلة الثانية في (٢) نلاحظ أنه إذا كانت $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ فعندئذ $c_1 = 0$.

ولأجل $\lambda_1 = +\upsilon$ (حيث υ ليس عدداً صحيحاً سالباً) يكون:

$$c_n = -\frac{1}{n(n+2\upsilon)} c_{n-2} \qquad ;n \geq 1$$

ومن هنا نستنتج أن:

$$c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = ... = 0$$

وكذلك:

$$c_{2n} = -\frac{1}{4n(n+\upsilon)} c_{2n-2} \qquad ;n \geq 1$$

وهكذا نجد:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(4)^n (n!)(1+\upsilon)(2+\upsilon)\cdots(n+\upsilon)} c_0$$

ولنختار الثابت c_0 بالشكل:

$$c_0 = \frac{1}{2^\upsilon \Gamma(\upsilon+1)}$$

حيث:

$$\Gamma(\upsilon) = \int_0^\infty x^{\upsilon-1} e^{-x} dx \qquad (\upsilon > 0)$$

وبهذا الاختيار للثابت c_0، يسمى الحل الأول دالة بسل من النوع الأول من المرتبة υ ويرمز له بالرمز $J_\upsilon(x)$.

وإذا استخدمنا المطابقة التالية والمعروفة بالنسبة للتابع $\Gamma(\upsilon)$:

$$\Gamma(n+\upsilon+1) = (n+\upsilon)(n+\upsilon-1).....(\upsilon+2)(\upsilon+1)\Gamma(\upsilon+1)$$

نجد الشكل التالي لدالة بسل من النوع الأول من المرتبة υ:

$$y_1 = J_\upsilon(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)} \qquad (٣)$$

وبتطبيق قاعدة النسبة للتقارب نجد أن هذه المتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x.

وأما الحل الثاني فيسمى دالة بسل من النوع الأول من المرتبة $(-\upsilon)$، ولنختار الثابتة c_0 بالشكل التالي:

$$c_0 = \frac{1}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}$$

والحل الثاني المستقل خطياً $y_2(x)$ (من أجل υ ليس عدداً صحيحاً أو صفراً) للمعادلة التفاضلية يمكن الحصول عليه بسهولة بتعويض υ بـ $-\upsilon$ في صيغة الحل الأول هذا يعني أن $J_{-\upsilon}(x)$ هو الحل الثاني ويكون لدينا:

$$y_2 = J_{-\upsilon}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\upsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!\Gamma(n-\upsilon+1)} \qquad (٤)$$

وبالتالي فإن الحل العام لمعادلة بسل التفاضلية إذا لم يكن υ عدداً صحيحاً أو صفراً، هو:

$$y = AJ_{\upsilon}(x) + BJ_{-\upsilon}(x)$$

لنلاحظ أولاً الحالة التي يكون فيها $\upsilon = 0$. في هذه الحالة يكون لمعادلة بسل التفاضلية الشكل:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

وتعرف العلاقتان (٣) و(٤) الحل الخاص نفسه $J_0(x)$ ويكون:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

أو:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - .. + ... \qquad (٥)$$

واستناداً إلى اختبار دالامبير في تقارب المتسلسلات الصحيحة نجد أن المتسلسلة في الطرف الأيمن من العلاقة (٥) تتقارب من أجل جميع قيم x.

أما إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن حلاً واحداً فقط يعبر عنه كمتسلسلة معممة $J_o(x)$ وهو دالة بسل من النوع الأول أما الحل الثاني فيحتوي على $\ln x$ ويسمى بدالة بسل من النوع الثاني.

أخيراً تجدر الإشارة إلى أنه عندما $x=0$ فإن $J_0(x)=1$ ، أي أن: $J_0(0)=1$

٢-١٣- معادلة غوص فوق الهندسية التفاضلية:

إن الشكل العام لمعادلة غوص هو:

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y=0$$

حيث α,β,γ ثوابت.

لنفرض أن γ لا يساوي الصفر أو أي عدد صحيح سالب.

نلاحظ أنه توجد لهذه المعادلة نقطتان شاذتان منتظمتان هما 1,0. للحصول على الحل العام لهذه المعادلة في جوار الصفر نضع:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\lambda} \qquad ,c_0\neq 0$$

بالتعويض في معادلة غوص نجد:

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^n+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x].$$

$$.\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^n-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}=0$$

نحصل على المعادلة المميزة بجوار الصفر بأن نعطي $n=0$ وبالتالي نحصل على أمثال الحد الثابت أي أن:

$$[\lambda(\lambda-1)+\gamma\lambda]c_0=0 \qquad ;c_0\neq 0$$

هذا يعني أن: $\lambda_2=1-\gamma,\lambda_1=0$ هما جذرا المعادلة المميزة.

لنأخذ الآن أمثال x^n في الطرفين فيكون:

$$(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n-(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)c_{n-1}+$$

$$+\gamma(n+\lambda)c_n-(\alpha+\beta+1)(n+\lambda-1)c_{n-1}-\alpha\beta c_{n-1}=0$$

أو:

$$[(n+\lambda)(n+\lambda-1+\gamma)]c_n=[(n+\lambda-1)(n+\lambda-1+\alpha+\beta)+\alpha\beta]c_{n-1}$$

أي أن:

$$c_n=\frac{(n+\lambda-1+\alpha)(n+\lambda-1+\beta)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1+\gamma)}c_{n-1} \qquad ;n\geq 1$$

لأجل الجذر الأول $\lambda_1=0$ يكون:

$$c_n=\frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)}{n(n+\gamma-1)}c_{n-1}$$

وبالتالي فإن:

$$c_n=\frac{1}{n!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2).....(\gamma+n-1)}[\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)..$$

$$.....(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n-1)]c_0$$

أو:

$$c_n=\frac{(\alpha)_n.(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}c_0$$

وذلك بفرض أن:

$$(\gamma)_n=\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)...(\gamma+n-1)$$

وباختيار $c_0=1$ نجد الحل التالي الموافق لـ $\lambda_1=0$:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n.(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n$$

ومنه:

$$y_1=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+.....+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n-1)}{2!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2).....(\lambda+n-1)}x^n+.....$$

وتسمى المتسلسلة الأخيرة متسلسلة فوق الهندسية ويرمز لها بالرمز التالي $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ويكون:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n-1)}{2!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2).....(\lambda+n-1)}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

ومتقاربة من أجل $|x|<1$. وهذا ينسجم مع وجود نقطة شاذة للمعادلة في الموضع $x=1$.

ولأجل الجذر الثاني $\lambda_2=1-\gamma$. سنستخدم طريقة تغيير المتحول لذلك نفرض أن: $y_2=x^{1-\gamma}u$

بالتعويض في معادلة غوص نجد:

$$x(x-1)u''+[(\alpha+\beta+3-2\gamma)x+\gamma-2]u'+$$
$$+[(1-\gamma)(1+\alpha+\beta-\gamma)+\alpha\beta]u=0$$

بالمقارنة مع الشكل النموذجي لمعادلة غوص:

$$x(x-1)u''+[-\gamma'+(1+\alpha'+\beta')x]u'-\alpha'\beta u=0$$

نجد أن:

$$\gamma'=2-\gamma$$
$$\alpha'=1+\alpha-\gamma$$
$$\beta'=1+\beta-\gamma$$

وبالتالي نجد:

$$U=F(\alpha',\beta',\gamma',x)=F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,x)$$

وعلى هذا فإن الحل الثاني للمعادلة فوق الهندسية بفرض أن γ لا يساوي أي عدد صحيح موجب أكبر من 2، هو:

$$y_2=x^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,x)$$

والحل العام، بفرض أن γ لا يساوي أي عدد صحيح، هو:

$$y = A_1 F(\alpha,\beta,\gamma,x) + A_2 x^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma, x)$$

٢-١٤- تمارين غير محلولة:

(١) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'x^2 - e^y = 0$ الذي يحقق الشرط $y = 0$ عندما $x = 0$.

(٢) أوجد حل المعادلة $y' = x^2 - 4x + y + 1$ الذي يحقق الشرط $y = 3$ عندما $x = 2$.

إرشاد: افرض التحويل $z = x - 2$ ثم أوجد حل للمعادلة الجديدة: $\frac{dy}{dz} = z^2 + y - 3$ يحقق الشرط $y = 3$ عندما $z = 0$.

(٣) أوجد حل المعادلة $(1-x)y' = x^2 - y$ على شكل متسلسلة قوى في x.

(٤) أوجد حل المعادلة $xy' - y - x - 1 = 0$ على شكل متسلسلة قوى في $x - 1$.

(٥) عين طبيعة النقطة $x = 0$ لكل من المعادلات التالية ثم أوجد حلها العام في جوار الصفر.

(1) $(1-x^2)y'' + 2xy' + y = 0$

(2) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$; n عدد صحيح

(3) $(2+x^2)y'' + xy' + (1+x)y = 0$

(4) $x^2 y'' + x(x - \frac{1}{2})y' + \frac{1}{2}y = 0$

(5) $x(1-x)y'' + (1-5x)y' - 4y = 0$

(6) $(x^2 - x)y'' + xy' - y = 0$

(7) $(x^3 + 2x)y'' - y' - 6xy = 0$

(8) $x(1-x)y'' - (1+3x)y' - y = 0$

$$(9)\quad 4x^2(x^2-1)y''+8x^3y'-y=0$$

$$(10)\quad x(1+x+x^2)y''+3x^2y'-2y=0$$

(٦) أوجد في جوار $x=1$ الحل العام للمعادلة:

$$(x^2-2x)y''+6(x-1)y'+6y=0$$

(٧) برهن أنه يمكن تحويل معادلة لوجاندر التفاضلية:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad ; \quad n \text{ عدد صحيح}$$

إلى معادلة غوص باستخدام التحويل $x=1-2t$.

(٨) أوجد الحل العام لمعادلة غوص في جوار $z=1$.

(٩) برهن أن الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0 \qquad ; p>0$$

بجوار $x=1$ هو من الشكل:

$$y=A_1F(p,-p,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2})+$$
$$+A_2(\frac{1-x}{2})^{\frac{1}{2}}F(p+\frac{1}{2},-p+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1-x}{2})$$

(١٠) أثبت صحة ما يلي:

$$(1)\quad \frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\alpha.\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$

$$(2)\quad \frac{1}{x}arctgx=F(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2)$$

$$(3)\quad xF(1,1,2,-x)=\ln(1+x)$$

$$(4)\quad \Delta[J_\upsilon(x),J_{-\upsilon}(x)]=-\frac{2\sin\upsilon\pi}{\pi x}$$

$$(5)\quad J_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{A}{\sqrt{x}}\sin x \qquad ; A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$(6)\quad \frac{d}{dx}x^{\upsilon}.J_{\upsilon}(x)=x^{\upsilon}.J_{\upsilon-1}(x) \quad ; \quad \text{عدد صحيح موجب } \upsilon$$

★★★★★★★★★★★★★★★

الفصل الثالث

جمل المعادلات التفاضلية العادية

٣-١- تعاريف أساسية:

نسمي مجموعة المعادلات التفاضلية:

$$\begin{aligned} &\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ &\psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \end{aligned} \qquad (١)$$

حيث $y_1, y_2, \ldots, y_n$ دوال مجهولة في المتحول x، جملة معادلات تفاضلية عادية من المرتبة الأولى.

إذا كانت الجملة (١) قابلة للحل بالنسبة لمشتقات الدوال المجهولة $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ فعندئذ يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = h_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\frac{dy_2}{dx} = h_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dx} = h_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \qquad (٢)$$

إن الجملة(٢) تسمى جملة تفاضلية نظامية من المرتبة n.

يمكن أيضاً كتابة الجملة النظامية بالشكل:

$$\frac{dy_i}{dx} = h_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad ; i = \overline{1, n} \tag{٣}$$

أي أن:

$$\frac{dy_1}{h_1} = \frac{dy_2}{h_2} = ... = \frac{dy_n}{h_n} = dx \tag{٤}$$

وسوف نهتم فقط في هذا الفصل بدراسة الجمل التفاضلية النظامية لكثرة ورودها من جهة ولأنه كما سنبين من خلال بعض الأمثلة المحلولة، أن أي جملة تفاضلية غير نظامية من الشكل (١) يمكن ردها إلى جملة تفاضلية نظامية وذلك باختيارنا لعدد من الدوال المناسبة.

لنعرف المتجهين:

$$Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$
$$H = (h_1, h_2, ..., h_n)$$

عندئذ يمكن كتابة الجملة (٣) بالشكل:

$$\frac{dY}{dx} = H(x, Y) \tag{٥}$$

الآن إذا كانت الجملة (١) نظامية وخطية فإن الدوال h_i تكون خطية في الدوال y_i ونكتب (٣) بالشكل التالي:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) y_j + g_i(x) \qquad ; i = (\overline{1, n}) \tag{٦}$$

وهذه مجموعة معادلات خطية. وتكتب بشكل مفصل كما يلي:

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha_{11}(x) y_1 + \alpha_{12}(x) y_2 + ... + \alpha_{1n}(x) y_n + g_1(x)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \alpha_{21}(x) y_1 + \alpha_{22}(x) y_2 + ... + \alpha_{2n}(x) y_n + g_2(x)$$
$$.....$$

$$\frac{dy_n}{dx} = \alpha_{n1}(x)y_1 + \alpha_{n2}(x)y_2 + \ldots\ldots + \alpha_{nn}(x)y_n + g_n(x)$$

٣-٢- حل الجملة النظامية:

نقول عن مجموعة الدوال:

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots\ldots\ldots, y_n = y_n(x) \qquad (٧)$$

إنها حل للجملة النظامية (٣) في فترة ما، إذا كانت مستمرة وقابلة للاشتقاق في فترة ما، وإذا انقلبت مجموعة المعادلات إلى مجموعة مطابقات من أجل هـذه الدوال (٧) ومن أجل جميع قيم x من المجال المذكورة. هذا يعني أن:

$$\frac{dy_i}{dx} \equiv h_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)) \qquad ; i = (\overline{1,n})$$

ويكافئ هذا أن:

$$\frac{dy_i}{h_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x))} = dx \qquad ; (i = \overline{1,n})$$

أو:

$$\frac{dy_1}{h_1(x, y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x))} =$$

$$= \frac{dy_2}{h_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x))} =$$

$$= \ldots\ldots = \frac{dy_n}{h_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x))} = dx$$

وهنا نلاحظ أن كل حل للجملة التفاضلية له شكل دالة متجهية:

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x))$$

ويدل هذا على أن كل حل للجملة يمثل منحنياً في الفضاء النوني $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ يلعب فيه المتحول x دور الوسيط.

يعني إذن حل الجملة (٣) إيجاد كل المنحنيات في R^n التي تمس في كل نقطة منها متجه الحقل $H = (h_1(x), h_2(x), \ldots\ldots, h_n(x))$ في تلك النقطة. وبالنسبة إلى الحقل فإن هذه المنحنيات هي خطوط الحقل، وهي بالنسبة للجملة التفاضلية منحنياتها التكاملية.

يمكن تفسير الحل (٧) للجملة بشكل آخر. بالنظر إلى $(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ كنقطة كيفية من فضاء بعده $(n+1)$ فإن المعادلات (٧) تمثل n سطحاً أسطوانياً في هذا الفضاء، وتتقاطع هذه السطوح في منحنٍ تكاملي للجملة.

سنقدم فيما يلي أمثلة نشرح فيها كيف نجد الحل أو التكامل العام لجملة معادلتين، ونمهد فيها لمفهوم التكامل الأولي للجملة التفاضلية.

٣-٣- تمارين محلولة:

(١) لنعتبر جملة المعادلتَين التفاضليتين:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + 2y_2 \end{aligned} \qquad (٨)$$

(أ) لحل هذه الجملة نحذف أحد الدالتين ومشتقها، ولتكن مثلاً لنحذف الدالة y_2 ومشتقها y_2' ، عندئذ من الجملة ومن المعادلة الأولى نجد:

$$y_2 = y_1' - 2y_1 \qquad (٩)$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة نجد:

$$y_1'' - 2y_1' = y_1 + 2(y_1' - 2y_1)$$

$$y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية متجانسة وحلها العام يعطى بالشكل:

$$y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$$

وبالتعويض من أجل y_1 في (٩) نجد:

$$y_2 = c_1 e^{3x} - c_2 e^{x}$$

إذن:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} \\ y_2 &= c_1 e^{3x} - c_2 e^{x} \end{aligned} \qquad (١٠)$$

تعين المعادلتان (١٠) الحل العام للجملة، وتحوي عبارته كما نرى على ثابتين كيفيين اثنين، وهو ما يساوي رتبة الجملة.

تمثل المعادلتان (١٠) أسرة ذات وسيطين c_1, c_2 من المنحنيات في الفراغ الثلاثي (x, y_1, y_2)، وهي المنحنيات التكاملية للجملة، وتنشأ هذه المنحنيات من تقاطع أسرتي السطوح (١٠). من أجل كل قيمة للثنائية (c_1, c_2) نحصل على حل خاص للجملة ومثلاً من أجل $(c_1, c_2) = (0,1)$ نحصل على الحل الخاص $(y_1, y_2) = (e^x, -e^x)$ وهو يمثل منحنياً معيناً بالسطحين $y_1 = e^x, y_2 = -e^x$ في الفضاء R^3.

(ب) هل يمر من كل نقطة من الفضاء R^3 منحنٍ تكاملي للجملة؟

للإجابة على هذا السؤال نرى أن المعادلتين (١٠) خطيتان في c_1, c_2 وأن معين الأمثال هو:

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(c_1, c_2)} = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{x} \\ e^{3x} & -e^{x} \end{vmatrix} = -2e^{4x} \neq 0$$

وتقبل بالتالي المعادلتان (١٠) دوماً الحل بالنسبة إلى c_1, c_2، ويكون:

$$c_1 = -\frac{1}{2}e^{-4x}\begin{vmatrix} y_1 & e^x \\ y_2 & -e^x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{3x}(y_1 + y_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}e^{-x}(y_1 - y_2)$$

نستنتج إذن مهما تكن النقطة $(x, y_1, y_2) = (\alpha, \beta, \gamma)$ فتوجد قيمة وحيدة لـ c_1, c_2 وهي:

$$c_1 = (\frac{1}{2})e^{-3\alpha}(\beta + \gamma)$$

(١١)

$$c_2 = (\frac{1}{2})e^{-\alpha}(\beta - \gamma)$$

يكون من أجلها الحل (١٠) ماراً من النقطة (α, β, γ) وبالفعل وبتعويض (c_1, c_2) من(١١) في (١٠) نجد حلاً خاصاً، وبوضع $x = \alpha$ فيه نجد أن:

$$y_1\big|_{x=\alpha} = \frac{1}{2}e^{-3\alpha}(\beta + \gamma)e^{3\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}(\beta - \gamma) = \beta$$

$$y_2\big|_{x=\alpha} = \frac{1}{2}e^{-3\alpha}(\beta + \gamma)e^{3\alpha} - \frac{1}{2}e^{-\alpha}(\beta - \gamma) = \gamma$$

إذن يمر من كل نقطة من R^3 منحنٍ تكاملي وحيد للجملة المعطاة.

(ج) طريقة أخرى في حل الجملة:

نجمع المعادلتين (٨) فنجد:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_1 + y_2 + 2y_2$$

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{dx} = 3(y_1 + y_2)$$

أي أن:

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{y_1 + y_2} - 3dx = 0 \qquad (١٢)$$

هذا يعني بالمكاملة أن:

$$(y_1 + y_2)e^{-3x} = e_1 \quad ; \quad e_1 \text{ ثابت كيفي} \qquad (١٢)$$

وبطرح المعادلتين (٨) نجد:

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = y_1 - y_2$$

وبالمكاملة نجد:

$$(y_1 - y_2)e^{-x} = e_2 \quad ; \quad e_2 \text{ ثابت كيفي} \qquad (١٣)$$

إذن:

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)e^{-3x} &= e_1 \\ (y_1 - y_2)e^{-x} &= e_2 \end{aligned} \qquad (١٤)$$

تعين المعادلتان (١٤) التكامل العام للجملة، ويمكن منهما الوصول بسهولة إلى العبارة الصريحة (١٠) للحل العام.

وبالفعل وبحساب y_1, y_2 من هاتين المعادلتين، وباختيار $(e_1, e_2) = (2c_1, 2c_2)$ نجد العبارة (١٠). ويمثل كل من المعادلتين (١٤) أسرة وحيدة الوسيط من السطوح ويسمى كل سطح منها سطحاً تكاملياً للجملة. نستنتج إذن أن للجملة المعطاة وهي من الرتبة الثانية أسرتين من السطوح التكاملية:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y_1, y_2) &\equiv (y_1 + y_2)e^{-3x} = e_1 \\ \varphi_2(x, y_1, y_2) &\equiv (y_1 - y_2)e^{-x} = e_2 \end{aligned} \qquad (١٥)$$

ويتقاطع كل سطح من الأسرة الأولى مع كل سطح من الأسرة الثانية في منحن تكاملي (حل خاص) للجملة، وتكون كل المنحنيات التكاملية للجملة معطاة بالمعادلتين (١٥). إذا كانت (α, β, γ) نقطة كيفية من الفراغ فإنه يمر منها سطح تكاملي وحيد من الأسرة الأولى وسطح تكاملي وحيد من الأسرة الثانية، وهما:

$$\varphi_1(x, y_1, y_2) = \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) = e_3$$
$$\varphi_2(x, y_1, y_2) = \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) = e_4$$

ويؤلف تقاطع هذين السطحين منحنياً تكاملياً للجملة واقعاً في كل منهما. نستنتج إذن أن كل سطح تكاملي للجملة مؤلف من منحنيات تكاملية لهـا. ومـن أجـل النقطة $(e_1, e_2) = (0,2)$ مثلاً، نجد أن السطحين التكاملين:

$$y_1 - y_2 = 2e^x$$
$$y_1 + y_2 = 0$$

وهما يتقاطعان في المنحني التكاملي $(y_1, y_2) = (e^x, -e^x)$.

يسمى كل من المعادلتين (١٥) تكاملاً أولياً للجملة، ويسمى الطرف الأول فـي كل منهما تكاملاً للجملة. ويتميز كل تكامل للجملة بالخاصة التالية: إنـه ثابـت على أي منحن تكاملي للجملة. أي أنه إذا كانت $M(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة كيفية مـن الفراغ فإنها تنتمي إلى أحد سطوح الأسرة الأولـى (والثانيـة أيضـاً) ولـيكن السطح $\varphi_1(x, y_1, y_2) = e_3$ مثلاً. وبما أن المنحني المار من M يقع كلياً فـي السطح $\varphi_1 = e_3$ إذن فالدالة $\varphi_1(x, y_1, y_2)$ ثابتة على طـول هـذا المنحنـي التكاملي. ويمكن الوصول إلى النتيجة نفسها بشكل آخر. نعلم أنه من أجل انتقال عنصري كيفي بدءاً من النقطة M يكون:

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{dy_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_1}{dy_2} dy_2 + \frac{\partial \varphi_1}{dx} dx \\ &= e^{-3x} dy_1 + e^{-3x} dy_2 - 3(y_1 + y_2) e^{-3x} dx \\ &= [d(y_1 + y_2) - 3(y_1 + y_2) dx] e^{-3x} \end{aligned}$$

وهذا المقدار غير معدوم بشكل عام. أما إذا كان هذا الانتقال على منحن تكاملي للجملة، فإن الجملة تكون محققة به، وتكون العلاقة (١٢) محققة والكميـة بـين القوسين المتوسطين معدومة. وينتج في هذه الحالة أن: $d\varphi_1 = 0$

أي أن: $\varphi_1 = cons\tan t$ (على طول المنحني التكاملي)

(٢) لتكن الجملة:

$$\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dz}{dx}=1$$

بالمكاملة نجد الحل العام وهو:

$$y=x+c_1$$

$$z=x+c_2$$

وهو يمثل أسرة مستقيمات ذات وسيطين. ويمكن تعيين (c_1,c_2) حيث يمر مستقيم من هذه الأسرة من نقطة كيفية معطاة (x_0,y_0,z_0). وبالفعل فإن الحل:

$$y=x-x_0+y_0$$

$$z=x-x_0+z_0$$

يمر من هذه النقطة. لاحظ أنه يمكن كتابة جملة المعادلتين السابقتين بالشكل:

$$dx=dy=dz$$

(٣) لتكن الجملة:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{dz}{dx}=0$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$xdx+ydy=0$$

بالمكاملة نجد:

$$x^2+y^2=c_1^2$$

إن كل حل للجملة يحقق كلاً من معادلتيها، وبالتالي فهو يحقق العلاقة الأخيرة، التي تؤلف تكاملاً أولياً للجملة.

ومن المعادلة الثانية نجد أنَّ: $z = c_2$

تكامل أولي ثانٍ للجملة. ويكون الحل العام معطى بالمعادلتين:

$$x^2 + y^2 = c_1$$

$$z = c_2$$

وهو يمثل أسرة الدوائر الموازية للمستوي xoy التي تقع مراكزها على المحور z. تنشأ هذه الأسرة من تقاطع أسرة الأسطوانات التي محورها المشترك oz مع أسرة المستويات الموازية للمستوي xoy. لاحظ أنه يمكن كتابة الجملة السابقة بالشكل:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{dx} \quad , \quad dz = 0$$

أو بالشكل:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{0}$$

٣-٤- مبرهنة الوجود والوحدانية:

لتكن لدينا الجملة التفاضلية العادية من المرتبة n:

$$\frac{dy_i}{dx} = h_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad ; i = \overline{(1, n)} \tag{١٦}$$

ولتكن $M(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ نقطة ما من الفضاء R^{n+1}.

والسؤال المطروح هو: تحت أية شروط يوجد منحن تكاملي:

$$y_i = y_i(x) \tag{١٧}$$

للجملة يمر من النقطة M؟ وبصيغة أخرى هل يوجد حل(١٧) لـ(١٦) يحقق شرط البدء:

$$y_i(\alpha) = \beta_i \qquad ; i = \overline{1, n} \tag{١٨}$$

٣-٥- مبرهنة بيكار:

لتكن D فترة مغلقة محدودة من R^{n+1}، ولتكن M نقطة داخل D. إذا كان:

١) الدوال f_i حيث $i=\overline{(1,n)}$، وحيدة التعيين ومستمرة في D.

٢) مشتقاتها الجزئية $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ حيث $i,j=\overline{(1,n)}$، مستمرة في D.

عندئذ يوجد جوار I في R للنقطة $x=\alpha$ تقبل فيه الجملة (١٦) حلاً وحيداً (١٧) يحقق شرط البدء المعطى.

(تقبل هذه المبرهنة بدون برهان).

إن النقطة $M(\alpha,\beta_1,\beta_2,....,\beta_n)$ كيفية، ويمكن تغيير القيم β_i في شرط البدء (١٨) ويكون الحل عند القيمة $x=\alpha$ نفسها محققاً لشرط البدء الجديد. نستنتج من هذا أن الحل العام للجملة يحوي n ثابتاً كيفياً، أي أن له الشكل:

$$y_i=y_i(x,c_1,c_2,....,c_n) \qquad ;i=\overline{(1,n)} \qquad (١٩)$$

ومقابل كل شرط بدء $y_i(\alpha)=\beta_i$ يوجد حل خاص وحيد يحققه، أي أنه مقابل كل مجموعة قيم معطاة للدوال y_i توجد مجموعة قيم وحيدة للثوابت c_i، نحصل عليها بحل الجملة الجبرية (١٩):

$$c_i=\varphi_i(x,y_1,y_2,....,y_n) \qquad ;i=\overline{(1,n)} \qquad (٢٠)$$

وتشكل المعادلات (٢٠) عبارة أخرى للحل العام، إذ أنه بحل الجملة الجبرية (٢٠) من أجل y_i نحصل على (١٩).

يسمى كلاً من المعادلات (٢٠) تكاملاً أولياً للجملة التفاضلية. وإذا توفر لدينا n تكاملاً أولياً لجملة تفاضلية من المرتبة n فإنه يمكن الحصول على حلها العام إذا أمكن حل جملة المعادلات الجبرية هذه بالنسبة إلى $y_1,y_2,....,y_n$ (وسنرى أن هذا يكون ممكناً إذا كانت هذه التكاملات غير مرتبطة).

بإعطاء الثوابت الكيفية c_i قيماً معينة، ولتكن c_i'، نحصل على حل خاص للجملة. ومن ناحية هندسية ينشأ المنحني التكاملي الممثل لهذا الحل الخاص من تقاطع السطوح $\varphi_i = c_i'$ ونسميها سطوح تكاملية للجملة. يمثل إذن كل تكامل أولي للجملة أسرة ذات وسيط واحد من السطوح التكاملية للجملة. ومن الواضح هندسياً أيضاً أن كل سطح تكاملي مؤلف من منحنيات تكاملية. نسمي الطرف الأيمن من كل علاقة من (٢٠) تكاملاً للجملة. هذا وتكون دالة ما $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ تكاملاً للجملة إذا كان كل سطح $\psi = c$ سطحاً تكاملياً لها، ويكافئ هذا القول أن كل سطح $\psi = c$ مؤلف من منحنيات تكاملية للجملة، ويكافئ هذا بدوره أن $d\psi = 0$ على طول كل منحن تكاملي للجملة. إن:

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

ومن أجل انتقال $(dx, dy_1, dy_2, \ldots, dy_n)$ على طول منحن تكاملي (ونسميه انتقالاً وفق الجملة) يكون:

$$dy_i = h_i dx$$

وبالتالي فإن:

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} h_i dx + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

وهذا المقدار غير معدوم بشكل عام. لكن إذا كان ψ تكاملاً للجملة فإن $d\psi = 0$ وبما أن $dx \neq 0$ إذن:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} h_i + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (٢١)$$

يحقق كل تكامل للجملة العلاقة الأخيرة. وبالعكس إذا حققت دالة ψ العلاقة الأخيرة فنجد بعد ضربها بـ dx أن $d\psi = 0$ على طول كل منحن تكاملي للجملة، وبالتالي فهو تكامل لها.

لاحظ أنه إذا كانت $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ تكاملات للجملة فإن كل دالة فيها قابلة للاشتقاق بالنسبة لها تكون تكاملاً للجملة. وبالفعل إذا كان $g = g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ مثل هذه الدالة فإن تفاضل الدالة g وفق الجملة يكون:

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \varphi_i} d\varphi_i = 0$$

وذلك لأن: $d\varphi_1 = d\varphi_2 = \ldots = d\varphi_n = 0$ وفق الجملة.

٣-٦- أمثلة محلولة:

(١) في المثال (١) من الفقرة ٣-٣ لدينا:

$$h_1 = 2y_1 + y_2$$
$$h_2 = y_1 + 2y_2$$

وقد وجدنا أن:

$$\varphi_1 = (y_1 + y_2)e^{-3x}$$
$$\varphi_2 = (y_1 - y_2)e^{-x}$$

تكاملان للجملة، نتحقق الآن أن هاتين الدالتين يحققان (٢١). بالفعل ومن أجل φ_1 لدينا:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} h_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} h_2 = 3e^{-x}(y_1 + y_2) +$$
$$+ e^{-3x}[(2y_1 + y_2) + (y_1 + 2y_2)] = 0$$

ونتحقق بالمثل من أجل φ_2. يمكن أن نتحقق أيضاً أن الدالة:

$$g = e^{-3x}(y_1 + y_2) + e^{-2x}(y_1 - y_2)^2$$

يحقق (٢١) أيضاً، أي أنه تكامل للجملة المعطاة في ذلك المثال، ولكن هذا التكامل ليس مستقلاً عن سابقيه لأن $g = \varphi_2^2 + \varphi_1$، وهو بالتأكيد ثابت على طول أي منحن تكاملي للجملة ما دام φ_1, φ_2 ثابتين عليه لكونهما تكاملين للجملة.

(٢) لتكن الجملة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad ; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

إن التكامل العام هو لأولى المعادلتين هو: $xy = a$

ولثانيها: $xz = b$

وبما أن كل حل للجملة يحقق كلاً من معادلتيها، فإنه يحقق أيضاً المعادلتين الأخيرتين التي تؤلف كل منها تكاملاً أولياً للجملة.

يعطى إذن التكامل العام للجملة بالمعادلتين:

$$xy = a \quad , \quad xz = b \qquad (٢٢)$$

من السهل التحقق أن كلاً من الدوال:

$$\varphi_1 = x(y - z)$$

$$\varphi_2 = \frac{y}{z}$$

$$\varphi_3 = x^2(y^2 + z^2)$$

تكاملاً للجملة. ومن أجل φ_3 نجد $\varphi_3 = a^2 + b^2$، أي أن φ_3 ثابت على طول كل منحن تكاملي للجملة. إن التكاملات الأخيرة ليست مستقلة عن التكاملين (٢٢) للجملة، وبالفعل لدينا

$$\varphi_2 = \frac{a}{b} \quad , \quad \varphi_3 = a^2 + b^2 \quad , \quad \varphi_1 = a - b$$

كما أن التكاملات الأخيرة ليست مستقلة عن بعضها، فلدينا

$$\varphi_3(\varphi_2-1)^2=\varphi_1^2(1+\varphi_2^2)$$

يمكن أن نختار تكاملين مستقلين للجملة ونضع كلاً منهما مساوياً لثابت كيفي، ليؤلفا معاً التكامل العام للجملة، وكمثال على ذلك $(\varphi_1=c_1;\varphi_2=c_2)$ أو $(xy=a,\frac{y}{z}=c)$ أو.....

٣-٧- استقلال مجموعة دوال:

نقول عن مجموعة دوال $\{h_1,h_2,....,h_n\}$ أنها **مرتبطة** إذا وجدت دالة $g\neq 0$ بحيث يكون: $g(h_1,h_2,....,h_n)=0$

ونقول عنها إنها **مستقلة** إذا لم تكن مرتبطة، أي إذا لم يوجد أي دالة $g\neq 0$ تحقق العلاقة السابقة.

ويجب الانتباه هنا إلى أن الاستقلال ليس باستقلال خطي.

٣-٨- مبرهنة:

لنفرض أن الدوال $h_i=h_i(x_1,x_2,....,x_n)$ وحيث $i=(\overline{1,n})$ من الصنف c^1.

تكون الدوال h_i مستقلة عن بعضها إذا وفقط إذا كانت رتبة المصفوفة ذات البعد $(n\times m)$:

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)\qquad (i=\overline{1,n}),(j=\overline{1,m})$$

تساوي n.

(تقبل هذه المبرهنة دون برهان)

٣-٩- نتيجة (١):

إذا كان عدد الدوال h_i وهو n، أكبر من عدد متحولاتها، وهو m (أي $n > m$) فإن رتبة المصفوفة أصغر حتماً من n، ومجموعة الدوال مرتبطة.

٣-١٠- نتيجة (٢):

تكون مجموعة الدوال $\{h_i\}$ مستقلة إذا كان عددها أقل من عدد متحولاتها أو يساويه $(n \le m)$ وكانت رتبة المصفوفة المذكورة تساوي n.

٣-١١- التكامل العام لجملة نظامية:

نسمي كل مجموعة من n تكاملاً أولياً مستقلاً للجملة النظامية (٣)

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c_i \qquad ;(i = \overline{1, n}) \tag{٢٣}$$

بالتكامل العام للجملة.

في أغلب التمارين تكون مسألة استقلاليات التكاملات الأولية سهلة الإجابة وعندما لا تكون الاستقلالية واضحة فعلينا أن نثبت أن:

$$rank\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = n \tag{٢٤}$$

ويتحقق هذا بإثبات أن معين إحدى المصفوفات الجزئية وذات البعد $n \times n$ لا يطابق الصفر.

إذا كان $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right| \neq 0$ فيمكن حل (٢٣) بالنسبة إلى $y_1, y_2, \ldots, y_n$ وبدلالة x

لنجد الشكل (١٩) للحل العام.

٣-١٢- تمرين محلول:

(أ) عين فيما يلي مجموعات الدوال المرتبطة وذلك بإيجاد علاقة الارتباط:

(1) $\varphi_1 = e^x \quad , \quad \varphi_2 = \sin x$

(2) $\varphi_1 = e^x \quad , \quad \varphi_2 = e^t \quad , \quad \varphi_3 = e^{-x-t}$

(3) $\varphi_1 = \sin(x+y) \quad , \quad \varphi_2 = \tan(x+y)$

(4) $\varphi_1 = x \quad , \quad \varphi_2 = y$

(5) $\varphi_1 = x+y \quad , \quad \varphi_2 = x-y$

(6) $\varphi_1 = x \quad , \quad \varphi_2 = y \quad , \quad \varphi_3 = z$

(7) $\varphi_1 = xy \quad , \quad \varphi_2 = xz$

(8) $\varphi_1 = x^2 + y^2 \quad , \quad \varphi_2 = z$

(9) $\varphi_1 = x^2 - y^2 - z^2 \quad , \quad \varphi_2 = 2xy - z^2$

الحل:

إن مجموعات الدوال المرتبطة هي (١) و(٢) و(٣) وعلاقات الارتباط هي:

(1) $\varphi_2 = \sin \ln|\varphi_1|$

(2) $\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 = 1$

(3) $(1+\varphi_2^2)(1-\varphi_1^2) = 1$

وأما المجموعات المتبقية فهي مستقلة.

(ب) أوجد الجمل التفاضلية التي تقبل المجموعات المستقلة في (أ) تكاملات عامة لها.

(٤) يمثل التكامل العام $y = b, x = a$ أسرة مستقيمات في الفضاء (x, y, t) والجملة المطلوبة هي:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

(٥) يكافئ التكاملان الأوليان $x+y=a, x-y=b$ التكاملين الأوليين $x=a, y=b$ والجملة المطلوبة هي نفسها التي وجدت في (٤).

(٦) $$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt}=0$$

(٧) لنعتبر x مثلاً متحولاً مستقلاً فنشتق بالنسبة له التكاملين الأوليين $xz=b, xy=a$ فنجد:

$$xz'+z=0, xy'+y=0$$

ومنها نجد الجملة التفاضلية:

$$y'=-\frac{y}{x}; z'=-\frac{z}{x}$$

(٨) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}; \frac{dz}{dx}=0$$

(٩) بالاشتقاق بالنسبة إلى أحد المتحولات، وليكن z مثلاً، نجد جملة جبرية من معادلتين خطيتين في x', y':

$$xx'-yy'=z; yx'+xy'=z$$

نحل هذه الجملة بالنسبة لـ x', y'، بطريقة كرامر مثلاً:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_1=\begin{vmatrix} z & -y \\ z & x \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_2=\begin{vmatrix} x & z \\ y & z \end{vmatrix}$$

ويكون:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{z(x+y)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{z(x-y)}{x^2+y^2}$$

ويمكن كتابة هذه الجملة بالشكل:

$$\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2+y^2}$$

٣-١٣- الشكل التناظري لجملة المعادلات التفاضلية:

لتكن الجملة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=\overline{Q}(x,y,z)\quad ;\quad \frac{dz}{dx}=\overline{R}(x,y,z) \qquad (٢٥)$$

يمكن كتابة هذه الجملة بالشكل التناظري:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (٢٦)$$

حيث:

$$\overline{R}=\frac{R}{P}\quad ;\quad \overline{Q}=\frac{Q}{P}$$

إذا استطعنا مكاملة كل من معادلتي الجملة نحصل على تكاملها العام.

٣-١٤- طريقة المضاريب:

حسب خواص التناسب يساوي كل من نسب (٢٦) النسبة:

$$\frac{g_1dx+g_2dy+g_3dz}{g_1P+g_2Q+g_3R} \qquad (٢٧)$$

حيث g_1,g_2,g_3 دوال في x,y,z ويمكن الاستفادة من هذا في حالات منها:

١) $g_1P+g_2Q+g_3R=0$ ، ويكون عندئذ:

$$g_1dx+g_2dy+g_3dz=0$$

إذا كانت الكمية الأخيرة تفاضلاً تاماً لدالة φ فإن $\varphi=a$ تكامل أولي للجملة.

٢) إذا كان الكسر (٢٧) تفاضلاً تاماً لدالة ψ، وكانت إحدى النسب في (٢٦) (أو في كسر مماثل للكسر (٢٧)) تفاضلاً تاماً لدالة φ فيكون $d\psi = d\varphi$ وبالتالي فإن: $\psi - \varphi = b$

تكامل أولي للجملة.

٣-١٥- تمارين محلولة:

(١)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{xz}{y}$$

نكتب هذه الجملة بشكل تناسب:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{xz}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد: $xdx + ydy = 0$

أي أن: $x^2 + y^2 = a$ تكامل أولي للجملة.

من النسبتين الثانية والثالثة نجد: $xzdy + xdz = 0$

أو: $dy + \frac{dz}{z} = 0$

بالمكاملة: $ze^y = b$

تكاملاً أولياً آخر للجملة. ويعطى التكامل العام للجملة بمجموعة تكامليها الأوليين المستقلين:

$$x^2 + y^2 = a \quad , \quad ze^y = b$$

(٢)

$$\frac{dx}{1+z} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{2xz}$$

بما أن $dy = 0$ فإن $y = a$ هو تكامل أولي للجملة.

ومن النسبتين الأولى والثالثة نجد:

$$2xdx - (\frac{1}{z} + 1)dz = 0$$

بالمكاملة نجد: $\frac{1}{z}e^{x^2-z} = b$

وهو يمثل تكاملاً أولياً آخر للجملة.

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2+y^2} \qquad (٣)$$

يساوي كل من هذه النسب النسبة التالية:

$$\frac{xdx - ydy - zdz}{xz(x+y) - yz(x-y) - z(x^2+y^2)} = \frac{xdx - ydy - zdz}{0}$$

إذن:

$$xdx - ydy - zdz = 0$$

بالمكاملة: $x^2 - y^2 - z^2 = a$

هو تكامل أولي للجملة. من النسبتين الأولى والثانية نجد:

$$(x-y)dx = (x+y)dy$$

ومنه فإن: $x^2 - y^2 - 2xy = b$

تكامل أولي للجملة مستقلاً عن الأول.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{1+y} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{1+y} \qquad (٤)$$

إن هذه الجملة تكتب بالشكل:

$$\frac{dx}{1+y}=\frac{dy}{1+x}=\frac{dz}{z}$$

وهذه بدورها تكافئ:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx+dy}{2+x+y}=\frac{dx-dy}{y-x}$$

وكلاً من هذه النسب تفاضل تام، ويكون التكامل العام للجملة:

$$z=a(2+x+y)=\frac{b}{x-y}$$

ومن الواضح تماماً أن التكاملين الأوليين المحسوبين مستقلان:

$$\frac{dx}{1}=-\frac{dy}{2}=\frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)} \qquad (٥)$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد: $y+2x=a$

وبتعويض هذا في النسبة الثالثة نجد:

$$dx=\frac{dz}{3x^2\sin a}$$

ومنه فإن: $z-x^3\sin a=b$

وبتعويض a بقيمتها نجد التكامل الأولي الثاني: $z-x^3\sin(y+2x)=b$

وهو مستقل عن الأول.

$$\frac{dx}{z}=-\frac{dy}{z}=\frac{dz}{z^2+(x+y)^2} \qquad (٦)$$

واضح أن: $x+y=a$

هو تكامل أولي. وبتعويض هذا في النسبة الثالثة نجد: $dx=\frac{zdz}{z^2+a^2}$

ومنه فإن: $2x - \ln(a^2 + z^2) = b$

أي أن: $2x - \ln[(x+y)^2 + z^2] = b$

تكامل أولي آخر للجملة.

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xyz - 2x^2} \qquad (٧)$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد: $x = ay$

وبتعويض هذا في النسبة الثالثة نجد: $dy = \dfrac{dz}{az - 2a^2}$

وتكاملها العام هو: $(z - 2a)e^{-ay} = b$

وبتعويض a بقيمتها نجد التكامل الأولي:

$$(z - 2\frac{x}{y})e^{-x} = b$$

وهو مستقل عن التكامل الآخر.

٣-١٦- حل جملة تفاضلية بطريقة الحذف:

تقوم هذه الطريقة على تشكيل معادلة تفاضلية عادية من المرتبة n في أحد الدوال المجهولة في الجملة:

$$y_i' = h_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad ;(i = \overline{1,n}) \qquad (٢٨)$$

ولنقل الدالة y_1، فإذا أمكن مكاملة المعادلة الناتجة ووجدنا الحل العام $y_1 = y_1(x)$ فيمكن بعد ذلك حساب باقي الدوال المجهولة.

وبالعودة إلى المسألة في إطارها العام فلنفرض الآن أن الدوال h_i قابلة للاشتقاق $(n-1)$ مرة، أي لنشتق المعادلة (٢٨) باعتبارها معادلة واحدة رتبتها i وذلك $(n-1)$ مرة متتالية بالنسبة للمتحول x مع ملاحظة أن

الدوال y_i هي دوال للمتحول x أيضاً. ولنشتق الآن ونعوض عن مشتقات هذه الدوال بما يساويها فنجد:

$$y_i'' = \frac{\partial h_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j} . y_j'$$

$$= \frac{\partial h_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j} . h_j = \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$

(٢٩)

$$y_i''' = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_j} . y_j'$$

$$= \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_j} . h_j = \psi_3(x, y_1, \ldots, y_n)$$

.....

$$y_i^{(n)} = \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_j} . y_j'$$

$$= \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_j} . h_j = \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

وعندئذ يكون لدينا:

(٣٠)

$$y_i' = h_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$y_i'' = \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$

.....

$$y_i^{(n)} = \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad ; (i = \overline{1, n})$$

فإذا فرضنا أن المعين التابعي التالي:

$$\frac{\partial(h_i, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)} \neq 0$$

عندئذ تكون مجموعة المعادلات السابقة (٣٠) قابلة للحل بالنسبة لـ $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ أي يمكن حساب هذه المقادير

بدلالة $x, y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}$ وبتعويض هذه المقادير بقيمتها في المعادلة الأخيرة من (٣٠) نجد:

$$y_i^{(n)} = h(x, y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}) \qquad (٣١)$$

ومن الواضح أنه إذا كانت $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلاً لمجموعة المعادلات (٢٨) فإن الدالة y_i تكون حلاً للمعادلة التفاضلية(٣١).

بالعكس لنبرهن أنه إذا كان y_i حلاً للمعادلة (٣١) وكانت الدوال $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ هي الدوال المعينة من مجموعة المعادلات (٣٠)، فإن الدوال $y_1, y_2, \ldots, y_n$ تكون حلاً لمجموعة المعادلات (٢٨). في الحقيقة إن الدوال $y_1, y_2, \ldots, y_n$ تحقق المعادلة i في المجموعة (٢٨) أي تحقق المطابقة:

$$y_i' = h_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

وبملاحظة أن $h_i = y_i'$ وبإجراء عملية طرح القسم الثاني من الأول في المعادلات (٢٩) نجد:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(y_j' - h_j) = 0 \\ &\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_j}(y_j' - h_j) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_j}(y_j' - h_j) = 0 \end{aligned} \qquad (٣٢)$$

حيث أنه من أجل الحد $j = i$ يكون: $h_i = y_i'$

ويمكن اعتبار مجموعة المعادلات (٣٢) معادلات جبرية متجانسة في المجاهيل:

$$(y_1' - h_1), \ldots, (y_{i-1}' - h_{i-1}), (y_{i+1}' - h_{i+1}), \ldots, (y_n' - h_n)$$

ومعين أمثال هذه المجموعة:

$$\frac{\partial(h_i,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_n)}\neq 0$$

وبالتالي فإن لها الحل الصفري أي أن:

$$y_1'=h_1,\ldots,y_{i-1}'=h_{i-1},y_{i+1}'=h_{i+1},\ldots,y_n'=h_n$$

وهذا ما يبرهن أن الدوال $y_1,y_2,\ldots,y_n$ هي حل لمجموعة المعادلات (٢٨).

وهكذا نرى أن الطريقة السابقة تتلخص بحذف جميع الـدوال $y_1,y_2,\ldots,y_n$ باستثناء أحدها وهو y_i بفرض أن المعين الموافق غير معدوم أي أن:

$$\frac{\partial(h_i,\psi_2,\psi_3,\ldots,\psi_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_n)}\neq 0$$

فإذا كان هذا الشرط غير محقق فنستخدم الطريقة نفسها من أجل دالة أخرى y_m حيث $m\neq i$.

الآن بالعكس. إذ كان لدينا معادلة تفاضلية من المرتبة n بالشكل التالي:

$$y^{(n)}=h(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \qquad (٣٣)$$

لنفرض أن:

$$y_1=y \quad ; \quad y_2=y' \quad , \quad y_3=y'' \quad , \quad y_4=y''' \quad \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad y_n=y^{(n-1)}$$

وعليه نجد:

$$y_1'=y'=y_2$$
$$y_2'=y''=y_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{n-1}'=y^{(n-1)}=y_n$$
$$y_n'=y^{(n)}=h(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=h(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

وهذا يعني أن الدوال $y_1,y_2,\ldots,y_n$ تحقق مجموعة المعادلات:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{n-1}' = y_n$$
$$y_n' = h(x, y, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

وسنسمي مجموعة المعادلات التفاضلية هذه بمجموعة المعادلات التفاضلية النظامية المكافئة للمعادلة التفاضلية (٣٣).

ومن السهل أيضاً تعميم هذه الطريقة لرد جملة من معادلتين تفاضليتين عاديتين محلولتين بالنسبة للمشتق ذي المرتبة العليا إلى الجملة التفاضلية النظامية المكافئة، وتكون رتبتها تساوي مجموع رتبتي المعادلتين.

٣-١٧- تمارين محلولة:

(أ) حل جملة المعادلتين بطريقة الحذف:

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 2z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2y - z$$

الحل:

باشتقاق المعادلة الأولى نجد:

$$\frac{d^2y}{dx} = 3\frac{dy}{dx} - 2\frac{dz}{dx}$$

أو: $y'' = 3y' - 2z'$

وبالتعويض من أجل y', z' من الجملة نجد: $y'' = 5y - 4z$

ومن المعادلة الأولى نجد: $z - \frac{1}{2}(3y - y')$

أي أن: $y'' = 5y - 4(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y')$

أو: $y'' = -y + 2y'$

هذا يعني: $y'' - 2y' + +y = 0$

والحل العام لهذه المعادلة هو: $y = (ax + b)e^x$

وبالتعويض من أجل y في عبارة z نحصل على:

$$z = (ax + b - \frac{a}{2})e^x$$

(ب) أوجد حل جملة المعادلتين:

$$\frac{dy}{dx} = z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -y$$

الحل:

بمفاضلة المعادلة الأولى بالنسبة لـــ x نجد أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

نبدل في المعادلة الثانية، فنجد:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

أو: $y'' + y = 0$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة، والحل العام لها:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

نبدل قيمة y في المعادلة الأولى نجد:

$$z = \frac{dy}{dx} = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

وبالتالي فإن الحل العام للجملة المعطاة هو:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$z = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

(ج) حل بطريقة الحذف الجملة التالية:

$$\frac{dy}{dx} = z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = u + z - y + x - 1$$

الحل:

نشتق المعادلة الأولى بالنسبة لـ x فنجد: $y'' = z' = u$

وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ x نجد:

$$y''' = z'' = u' = u + z - y + +x - 1$$

هذا يعني أن: $y''' = y'' + y' - y + x - 1$

أو: $y''' - y'' - y' + y = x - 1$

والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$y = (Ax + B)e^x + ce^{-x} + x$$

$$z = (Ax + B)e^x + Ae^x - ce^{-x} + 1$$

$$u - (Ax + B)e^x + 2Ae^x + ce^{-x}$$

٣-١٨- جمل المعادلات التفاضلية الخطية:

إذا كانت الدوال $h_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$; $(i = \overline{1,n})$ في جملة المعادلات التفاضلية (٣) دوالاً في المتغيرات التابعة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ فنقول إن جملة المعادلات التفاضلية **جملة خطية**. ويمكن كتابتها بشكل عام:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) y_j + q_i(x) \quad ; (i = \overline{1,n}) \qquad (٣٤)$$

حيث $\alpha_{ij}(x), q_i(x)$ دوال في المتغير x فقط.

ونقول إن الجملة الخطية **متجانسة** إذا كانت من الشكل:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x)y_j \quad ;(i=\overline{1,n}) \tag{٣٥}$$

لنرمز بـ $Y(x)$ لدالة متجهية من الفضاء R^n مركباتها هي مجموعة الدوال العددية $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ وكذلك لنرمز بـ A للمصفوفة التي عناصرها α_{ij}, $Q(x)$ للدالة المتجهية من R^n مركباتها $q_1(x),q_2(x),...,q_n(x)$ فيمكن كتابة جملة المعادلات التفاضلية الخطية على الشكل المتجهي:

$$\frac{dY}{dx}=A.Y+Q \tag{٣٦}$$

وجملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الشكل:

$$\frac{dY}{dx}=A.Y \tag{٣٧}$$

حيث:

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{dY}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

إذا كانت جميع الدوال $q_i(x),\alpha_{ij}(x)$ في المعادلات (٣٤) مستمرة في فترة ما $a\le x\le b$ فمن أجل جوار صغير مناسب لكل نقطة $(\alpha,\beta_1,\beta_2,....,\beta_n)$

حيث $a \le \alpha \le b$ تكون شروط وجود ووحدانية الحل لجملة المعادلات التفاضلية الخطية محققة وبالتالي يوجد حل وحيد للجملة التفاضلية محققاً الشرط الابتدائي: $y_1(\alpha) = \beta_1, \ldots, y_n(\alpha) = \beta_n$

ويمكن الحصول على مثل هذا الحل باتباع طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيكارد).

لنعرف المؤثر الخطي L بالشكل التالي:

$$L(Y) = \frac{dY}{dx} - AY$$

وعندها يمكن كتابة جملتي المعادلات الخطية والخطية المتجانسة (٣٦) و(٣٧) على التتالي بالشكل:

$$L[Y] = Q \qquad (٣٦)$$

$$L[Y] = 0 \qquad (٣٧)$$

استناداً إلى تعريف المؤثر الخطي L فهو يحقق الخواص التالية:

(١) $L[cY] = cL[Y]$ وذلك مهما يكن العدد الثابت c المخالف للصفر

(٢) $L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]$

وكنتيجة لهاتين الخاصتين يمكن أن نكتب من أجل c_i ثوابت عددية:

$$L[\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i] = \sum_{i=1}^{n} c_i L[Y_i]$$

والتي نسميها الخاصة المعممة.

٣-١٩- جملة المعادلات الخطية التفاضلية المتجانسة:

سنهتم في هذه الفقرة بدراسة حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة $L[Y] = 0$ ولهذا الغرض نقدم المبرهنات التالية:

٣-١٩-١- مبرهنة (١):

إذا كان Y حلاً لجملة المعادلات الخطية المتجانسة (٣٧)` فإن cY حيث c ثابت كيفي، هو أيضاً حل لها.

البرهان:

بما أن Y هو حل لجملة المعادلات الخطية المتجانسة (٣٧)` فيكون $L[Y]=0$

والمطلوب هو إثبات أن $L[cY]=0$:

بما أن: $L[cY]=cL[Y]$

فحسب الخاصة الأولى، ينتج المطلوب $L[cY]=0$.

٣-١٩-٢- مبرهنة (٢):

إذا كان Y_1,Y_2 حلين لجملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (٣٧)` فإن المجموع Y_1+Y_2 هو أيضاً حلاً لها.

البرهان:

بما أن كلاً من Y_1,Y_2 حلاً لجملة المعادلات الخطية المتجانسة $L[Y]=0$

فيكون: $L[Y_2]=0 \quad , \quad L[Y_1]=0$

والمطلوب إثبات أن: $L[Y_1+Y_2]=0$

حسب الخاصة الثانية من خواص المؤثر الخطي L يكون:

$$L[Y_1+Y_2]=L[Y_1]+L[Y_2]$$

٣-١٩-٣- مبرهنة (٣):

إذا كان $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ حلولاً لجملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (٣٧)` وإذا كانت $c_1,c_2,\dots,c_n$ ثوابت عددية كيفية فإن:

$$c_1Y_1 + Y_2c_2 + \dots, Y_nc_n = \sum_{i=1}^{n} c_iY_i$$

حلاً لجملة المعادلات الخطية المتجانسة(٣٧)َ.

يتم البرهان بشكل مشابه للمبرهنة (٢).

٣-١٩-٤- مبرهنة (٤):

إذا قبلت المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (٣٧)` حلاً عقدياً $Y = u + iv$ وإذا كانت الأمثال $\alpha_{ij}(x)$ دوال حقيقية فيكون القسم الحقيقي والقسم التخيلي:

$$u = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{bmatrix}$$

هما حلان للجملة (٣٧)`.

البرهان:

حسب الفرض لدينا: $L[u + iv] = 0$

وسوف نثبت أن: $L[u] = 0, L[v] = 0$

حسب خواص المؤثر الخطي L يكون:

$$L[u + iv] = L[u] + L[iv] = L[u] + iL[v]$$

وهذا يعني أن كلاً من القسم الحقيقي والقسم التخيلي يطابق الصفر، أي أن:

$$L[u] = 0, L[v] = 0$$

٣-١٩-٥- الاستقلال والارتباط الخطيان لجملة حلول:

نقول بأن المتجهات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ حيث:

$$Y_i(x) = \begin{bmatrix} y_{1i}(x) \\ y_{2i}(x) \\ \vdots \\ y_{ni}(x) \end{bmatrix}$$

مرتبطة خطياً على الفترة $a \le x \le b$ إذا وجدت ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ليست جميعها أصفاراً وبحيث تتحقق العلاقة:

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_n Y_n = 0 \qquad (٣٨)$$

من أجل جميع قيم x في الفترة $[a,b]$.

ونقول بأن مجموعة المتجهات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ إنها **مستقلة خطياً** إذا كانت العلاقة (٣٨) محققة فقط في الحالة التي تكون فيها الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ جميعها مساوية للصفر.

ولنلاحظ أن:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i = 0 \Leftrightarrow c_1 \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن الدليل j في y_{ij} يرمز إلى رقم الحل بينما الدليل i فيرمز إلى رقم المركبة في المتجه الذي يمثل الحل. وبالتالي يكون:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i Y_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i Y_{ni} \end{bmatrix} \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i Y_{1i} \equiv 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i Y_{2i} \equiv 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i Y_{ni} \equiv 0 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المتجهات $Y_i;(i=\overline{1,n})$ مرتبطة خطياً فيوجد لمجموعة المعادلات (٣٩) التي يمكن اعتبارها جملة معادلات جبرية خطية متجانسة في المجاهيل $c_1,c_2,...,c_n$ حل بالنسبة لـ $c_1,c_2,...,c_n$ غير الحل الصفري وهذا يكافئ أن معين الأمثال:

$$W=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (٤٠)$$

وذلك من أجل جميع قيم x من الفترة $[a,b]$، ويسمى هذا المعين (٤٠) **بمعين رونسكي** لمجموعة المتجهات Y_i حيث $(i=\overline{1,n})$.

٣-١٩-٦- مبرهنة (٥):

إذا كان معين رونسكي W لمجموعة الحلول $Y_1,Y_2,...,Y_n$ لجملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (٣٧) ذات الأمثال $\alpha_{ij}(x)$ المستمرة على الفترة $[a,b]$ مساوياً للصفر في نقطة واحدة على الأقل $x=x_0$ من الفترة $[a,b]$ فإن

مجموعة الحلول $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ مرتبطة خطياً على الفترة $[a,b]$ ويكون $W \equiv 0$ على كامل الفترة.

البرهان:

تحقق جملة المعادلات التفاضلية الخطية (٣٧)` شروط وجود حل لأن الأمثال $\alpha_{ij}(x)$ مستمرة وحيث $(i, j = \overline{1,n})$.

يعين إذن الشرط الابتدائي $Y(x_0)$ والمكافئ لـ

$$y_1(x_0) = 0, y_2(x_0) = 0, ..., y_n(x_0) = 0$$

حلاً وحيداً للجملة (٣٧)`.

ومن الواضح أن هذا الحل هو الحل التافه (الصفري) $Y(x) \equiv 0$ أو بعبارة ثانية:

$$Y_1(x) \equiv 0, Y_2(x) \equiv 0, ..., Y_n(x) \equiv 0$$

وبما أن $W(x_0) \equiv 0$:، فتوجد مجموعة من الثوابت $c_1, c_2, ..., c_n$ ليست جميعها مساوية الصفر وتحقق العلاقة:

$$c_1 Y_1(x_0) + c_2 Y_2(x_0) + ... + c_n Y_n(x_0) = 0$$

وحيث أن هذه المعادلة المتجهية الوحيدة تكافئ مجموعة مؤلفة من n معادلة خطية متجانسة بالنسبة للمجاهيل $c_1, c_2, ..., c_n$ ذات المعين الصفري لأمثالها (أي معين الأمثال فيها صفر) وهي بالشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_{1i}(x_0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_{2i}(x_0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_{ni}(x_0) = 0$$

يمكن حل هذه المجموعة من المعادلات والحصول على قيم مجموعة الثوابت $c_1, c_2, ..., c_n$ التي ليست جميعها مساوية للصفر وبأخذ هذه المجموعة من القيم للثوابت تكون الدالة المتجهية:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x)$$

حلاً لجملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (٣٧)` ومحققة للشرط الابتدائي $Y(x_0) = 0$ وبسبب وحدانية الحل الموافق لشرط ابتدائي مفروض فإن $Y(x)$ مطابقة للحل الصفري أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x) \equiv 0$$

وبالتالي فإن مجموعة الحلول $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ مرتبطة خطياً على الفترة $[a,b]$ ويكون كذلك $W(x) \equiv 0$ على الفترة $[a,b]$.

٣-١٩-٧- مبرهنة (٦):

إذا كانت $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ مجموعة من الحلول المستقلة خطياً لجملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة $L[Y] = 0$ ذات الأمثال $\alpha_{ij}(x)$ المستمرة على الفترة $[a,b]$. فعندئذ يعطى الحل العام لمجموعة المعادلات $L[Y] = 0$ بالتركيب الخطي التالي: $\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x) \equiv 0$

وحيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت كيفية.

يمكن استنتاج صحة المبرهنة من كون شروط وجود حل للجملة المتجانسة وموافق شرط ابتدائي مفروض محققة إلى جانب إمكانية تعيين الثوابت c_i وحيث $(i = \overline{1,n})$ من اجل أي شرط ابتدائي.

نسمي هذه المجموعة من الحلول المستقلة خطياً والتي عددها يساوي مرتبة الجملة التفاضلية جملةَ حلولٍ أساسية للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة.

٣-١٩-٨- تمارين محلولة:

(أ) أوجد الحل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\frac{dy}{dx} = z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -y$$

الحل:

من الواضح أن:

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix}$$

$$Y_2(x) = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

حلان مستقلان للجملة التفاضلية لأن:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

تمثل $Y_1(x), Y_2(x)$ جملة حلول أساسية للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة ويكون الحل العام للجملة هو: $Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

أي أن:

$$Y(x) = \begin{cases} y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ z(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{cases}$$

(ب)

$$\frac{dy}{dx} = 2y + z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2y + 3z$$

الحل:

يمكن التحقق أن الدالتين:

$$Y_1(x) = \begin{cases} y_1(x) = e^x \\ z_1(x) = -e^x \end{cases}$$

$$Y_2(x) = \begin{cases} y_2(x) = e^{4x} \\ z_2(x) = 2e^{4x} \end{cases}$$

حلان مستقلان خطياً للجملة التفاضلية المتجانسة المفروضة.

عندها يكون الحل العام لهذه الجملة التفاضلية هو:

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان، أي من الشكل:

$$Y(x) = \begin{cases} y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} \\ z(x) = -c_1 e^x + 2c_2 e^{4x} \end{cases}$$

وهو المطلوب.

٣-٢٠- جملة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

سندرس في هذه الفقرة طريقة إيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الشكل $L[Y] = Q$.

٣-٢٠-١- مبرهنة (١):

إذا كانت $\overline{Y}$ حلاً للجملة الخطية غير المتجانسة $L[Y]=Q$ وإذا كانت $\overline{\overline{Y}}$ حلاً للجملة الخطية المتجانسة $L[Y]=0$ فإن $\overline{Y}+\overline{\overline{Y}}$ هو أيضاً حل للجملة الخطية غير المتجانسة $L[Y]=Q$.

البرهان:

بما أن: $L[\overline{\overline{Y}}]=0 \quad , \quad L[\overline{Y}]=Q$

وحسب الخاصة الثانية للمؤثر الخطي L يكون:

$$L[\overline{Y}+\overline{\overline{Y}}]=L[\overline{Y}]+L[\overline{\overline{Y}}]=Q+0=Q$$

وهذا يعني أن: $\overline{Y}+\overline{\overline{Y}}$ هو حل للجملة غير المتجانسة.

٣-٢٠-٢- مبرهنة (٢):

إذا كانت الأمثال $\alpha_{ij}(x)$ وكذلك الدوال $q_i(x)$ في الجملة الخطية غير المتجانسة (٣٤) دوالاً مستمرة على الفترة $[a,b]$، فإن الحل العام للجملة هو مجموع حل خاص لها $\overline{Y}$ والحل العام $\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x)$ للجملة الخطية المتجانسة الموافقة $L[Y]=0$، حيث أن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ هي حلول خاصة للمعادلة $L[Y]=0$ ومستقلة خطياً.

(يترك البرهان للقارئ).

٣-٢٠-٣- مبرهنة (٣):

إن حل جملة المعادلات الخطية غير المتجانسة:

$$L[Y]=\sum_{i=1}^{m}Q_i \quad , \quad Q_i=\begin{bmatrix} q_{1i}(x) \\ q_{2i}(x) \\ \vdots \\ q_{ni}(x) \end{bmatrix}$$

هو مجموع $\sum_{i=1}^{m}Y_i$ للحلول Y_i لجملة المعادلات الخطية غير المتجانسة:

$$L[Y]=Q_i \quad , \quad (i=\overline{1,m})$$

البرهان:

حسب الخاصة الثانية للمؤثر L المعممة يكون:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}Y_i\right]=\sum_{i=1}^{m}L[Y_i]=\sum_{i=1}^{m}Q_i$$

٣-٢٠-٤- ملاحظة:

يمكن تعميم المبرهنة (٣) إلى الحالة عندما $m\to\infty$ بدون أي تغيير في البرهان، وذلك إذا كانت المتسلسلة $\sum_{i=1}^{m}Y_i$ متقاربة وتسمح بالمفاضلة حداً حداً.

٣-٢٠-٥- مبرهنة (٤):

إذا كانت جملة المعادلات التفاضلية الخطية:

$$L[Y]=U+iV$$

حيث أن:

$$U=\begin{bmatrix}U_1(x)\\U_2(x)\\\vdots\\U_n(x)\end{bmatrix}\quad;\quad V=\begin{bmatrix}V_1(x)\\V_2(x)\\\vdots\\V_n(x)\end{bmatrix}$$

وحيث الأمثال $(i,j=\overline{1,n}),U_i(x),V_i(x),\alpha_{ij}(x)$ دوال حقيقية، وإذا قبلت حلاً عقدياً من الشكل: $L[Y]=\overline{U}+i\overline{V}$

حيث أن:

$$\overline{U}=\begin{bmatrix}\overline{U_1}(x)\\\overline{U_2}(x)\\\vdots\\\overline{U_n}(x)\end{bmatrix}\quad;\quad \overline{V}=\begin{bmatrix}\overline{V_1}(x)\\\overline{V_2}(x)\\\vdots\\\overline{V_n}(x)\end{bmatrix}$$

فعندئذ يكون القسم الحقيقي من الحل $\overline{U}$ هو حل لجملة المعادلات: $L[Y]=U$

ويكون القسم التخيلي من الحل $\overline{V}$ هو حل لمجموعة المعادلات: $L[Y]=V$

البرهان:

بما أن: $L[\overline{U}+i\overline{V}]=U+iV$

وبالتالي: $L[\overline{U}]+iL[\overline{V}]=U+iV$

وهذا يعني أن:

$$L[\overline{U}]\equiv U\quad,\quad L[\overline{V}]\equiv V$$

أي أن $\overline{U}$ هو حل للمعادلة $L[Y]=U$ وكذلك V هو حل للمعادلة $L[Y]=V$.

٣-٢١- طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج):

وجدنا أن الحل العام للجملة التفاضلية غير المتجانسة هو مجموع حل عام للجملة التفاضلية المتجانسة وحل خاص للجملة التفاضلية غير المتجانسة. إذا تعذر معرفة حل خاص للجملة التفاضلية غير المتجانسة فيمكن استنتاجه من الحل العام للجملة التفاضلية المتجانسة باتباع طريقة تحويل الثوابت وهي تشبه إلى حد بعيد طريقة تحويل الثوابت المتبعة في حل المعادلات الخطية العادية.

وتتلخص هذه الطريقة بأن نعتبر الثوابت في شكل الحل العام لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة هي دوال للمتحول المستقل x ومن ثم نقوم بتعيين هذه الدوال بحيث يكون الشكل الناتج حلاً لمجموعة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة.

لنفرض أن الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة $L[Y]=0$ معطىً بالشكل التالي:

$$Y=\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i \qquad c_i \text{ ثوابت اختيارية}$$

وبما أن:

$$L[Y]=\frac{dY}{dx}-AY=0$$

فعندئذ تكون Y_i هي حلول خاصة مستقلة خطياً لمجموعة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة الموافقة.

لنفرض الآن أن الحل لمجموعة المعادلات التفاضلية غير المتجانسة $\frac{dY}{dx}-AY=Q$ يعطى بالشكل التالي:

$$Y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x) Y_i \qquad c_i(x) \text{ دوال جديدة مجهولة}$$

نشتق هذه العلاقة:

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)Y_i+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)Y_i'$$

نعوض في مجموعة المعادلات غير المتجانسة فنجد:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)Y_i+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\frac{dY_i}{dx}-A\sum_{i=1}^{n}c_i(x).Y_i=Q$$

وبما أن:

$$\frac{dY_i}{dx}=AY_i$$

فنجد بعد الاختصار أن:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)Y_i=Q$$

وهذه المعادلة المتجهية تكافئ مجموعة المعادلات الجبرية التالية والتي عددها n معادلة:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)Y_{1i}=q_1(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)Y_{2i}=q_2(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)Y_{ni}=q_n(x)$$

من هنا نستنتج أن معين رونسكي من أجل الحلول المستقلة خطياً $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ لا يساوي الصفر. إذن تقبل هذه المجموعة من المعادلات الجبرية حلاً وحيداً من الشكل:

$$c_i'(x)=r_i(x)\qquad ;(i=\overline{1,n})$$

ومنه بالتكامل نحصل على الدوال $c_i(x)$:

$c_i(x)=\int r_i(x)dx+\overline{c_i}$ ثوابت كيفية c_i

بالتعويض في الحل المفترض نحصل على الحل العام لجملة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة، وبجعل $\overline{c_i} = 0$ من أجل $(i = \overline{1,n})$ نحصل على حل خاص لجملة المعادلات الخطية غير المتجانسة.

٣-٢١-١- تمارين محلولة:

(أ) أوجد الحل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 1 - y$$

الحل:

لقد رأينا في المثال (ب) من الفقرة (٣-١٧) أن الحل العام للمجموعة المتجانسة المناظرة هو:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
$$z = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

بالتعويض بتلك القيم في المعادلات المعطاة، باعتبار c_1, c_2 دوال مجهولة في x نحصل على الجملة:

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = \cos x$$
$$-c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = 1$$

بحل هاتين المعادلتين، حيث فيهما المجهولان $c_1'(x), c_2'(x)$ نجد:

$$c_1'(x) = \cos^2 x - \sin x$$
$$c_2'(x) = \cos x + \sin x \cos x$$

وبمكاملتهما نجد:

$$c_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x \cos x + \cos x + \overline{c_1}$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \sin x + \overline{c_2}$$

حيث $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ ثوابت اختيارية.

بالتعويض بالقيم الموجودة لـ c_1, c_2 في صيغ y, z نحصل على الحل العام للجملة غير المتجانسة المعطاة:

$$y = \overline{c_1}\cos x + \overline{c_2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x + 1$$

$$z = -\overline{c_1}\sin x + \overline{c_2}\cos x - \frac{x}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos x$$

(ب) $\frac{dz}{dx} = 2y + 3z - x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 2y + z + x$

لقد رأينا في المثال (ب) من الفقرة (٣-١٩-٨) أن الحل العام للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة من هذه الجملة هو:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$
$$z(x) = -c_1 e^x + 2c_2 e^{4x}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

لإيجاد الحل العام للجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة نفرض أن c_1, c_2 دالتان في المتغير x وبالتعويض بتلك القيم في المعادلات المعطاة نحصل على الجملة:

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{4x} = 0$$
$$-c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{4x} = -x$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$c_1'(x) = xe^{-x}$$
$$c_2'(x) = 0$$

بالمكاملة نجد أن:

$$c_1(x) = -(x+1)e^{-x} + \overline{c_1}$$
$$c_2(x) = \overline{c_2}$$

حيث $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ ثابتان اختياريان.

بالتعويض في الحل العام للجملة المتجانسة نحصل على الحل العام للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة المفروضة من الشكل:

$$y(x) = \overline{c_1}e^{x} + \overline{c_2}e^{4x} - x - 1$$
$$z(x) = -\overline{c_1}e^{x} + 2\overline{c_2}e^{4x} + x + 1$$

٣-٢٢- جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة:

إذا كانت الأمثال في الجملة الخطية غير المتجانسة أعداداً ثابتة فإننا ندعوها جملة معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة وذات أمثال ثابتة ونكتب:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j + q_i(x) \qquad ; \quad (i = \overline{1,n})$$

أو بشكل متجهي:

$$\frac{dY}{dx} = AY + Q \qquad (٤١)$$

حيث أن:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \; ; \; A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \; ; \; Q = \begin{bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{bmatrix}$$

وتكون جملة المعادلات:

$$\frac{dY}{dx} = AY \qquad (٤٢)$$

جملة تفاضلية متجانسة ذات أمثال ثابتة.

لإيجاد الحل العام للجملة الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة، يمكن اتباع طريقة الحذف وردها إلى حل معادلة تفاضلية عادية من مرتبة عادية. غير أنه يمكن إتباع طريقة مشابهة للطريقة التي اتبعناها في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات الأمثال الثابتة وهي أن نبحث عن حلول من الشكل:

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma_1 e^{\lambda x} \\ y_2 &= \gamma_2 e^{\lambda x} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \gamma_n e^{\lambda x} \end{aligned} \qquad (٤٣)$$

حيث أن $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ثوابت يجب تعيينها.

لنكتب المعادلات (٤٢) تفصيلياً كما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{22}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned} \qquad (٤٤)$$

لنعوض الآن (٤٣) في (٤٤) فنجد:

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\gamma_n = 0 \\
&a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\gamma_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots\ldots + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0
\end{aligned}
\qquad (٤٥)
$$

والتي تكتب بشكل مصفوفي كما يلي:

$$
(A-\lambda I)\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = 0
$$

حيث I مصفوفة الوحدة من المرتبة n.

إن الشرط اللازم والكافي كي تقبل مجموعة المعادلات (٤٥) حلاً وحيداً غير الحل الصفري بالنسبة لـ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هو أن يكون معين الأمثال مساوياً للصفر أي أن يكون:

$$
|A-\lambda I| = 0 \qquad (٤٦)
$$

أو:

$$
D(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (٤٦)
$$

والمعادلة (٤٦) تمثل معادلة جبرية من الدرجة n في λ نسميها **المعادلة المميزة** وهي تقبل بشكل عام n جذراً $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ وبالتالي نحصل على حلاً من الشكل (٤٣).

وهنا نميز الحالات الثلاث التالية:

الحالة الأولى: جميع جذور المعادلة المميزة $D(\lambda)=0$ حقيقية ومختلفة جميعها. لنفرض أن هذه الجذور هي $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ففي هذه الحالة نحصل على n حلاً مستقلاً للجملة الخطية المتجانسة (٤٤):

$$Y_1(x)=\lambda_{11}e^{\lambda_1 x},\lambda_{21}e^{\lambda_1 x},....,\lambda_{n1}e^{\lambda_1 x}$$
$$Y_2(x)=\lambda_{12}e^{\lambda_2 x},\lambda_{22}e^{\lambda_2 x},....,\lambda_{n2}e^{\lambda_2 x}$$
$$.....$$
$$Y_n(x)=\lambda_{1n}e^{\lambda_n x},\lambda_{2n}e^{\lambda_n x},....,\lambda_{nn}e^{\lambda_n x}$$

وعندها يعطى الحل العام للجملة بالعبارة المتجهية التالية:

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iY_i(x)$$

حيث $c_1,c_2,...,c_n$ ثوابت اختيارية.

الحالة الثانية: يوجد بعض الجذور للمعادلة المميزة (٤٦) جذور مركبة. فإذا كان مثلاً $p+iq$ حيث $i=\sqrt{-1}$ هو جذر مركب للمعادلة المميزة (٤٦) وبما أن معاملات الجملة التفاضلية أعداداً حقيقية فإن العدد العقدي المرافق $p-iq$ هو أيضاً جذر للمعادلة المميزة.

يقابل هذين الجذرين الحلان الخاصان للجملة التفاضلية وهما:

$$Y_1=\alpha e^{(p+iq)x}$$
$$Y_2=\beta e^{(p-iq)x}$$

حيث α,β متجهتان ثابتتان عقديتان نحصل على مركبات كل منها بحل المعادلات (٤٥) الموافقة لجذر المعادلة المميزة المقابل.

من الحلين Y_1,Y_2 يمكن الحصول على حلّ من الشكل المركب:

$$Y=e^{px}[A_1\cos qx+B_1\sin qx]+i[A_2\cos qx+B_2\sin qx] \quad (٤٧)$$

حيث A_1, B_1, A_2, B_2 متجهات ثابتة حقيقية. بما أن معاملات الجملة التفاضلية حقيقية فإن القسم الحقيقي من (٤٧) هو حل للجملة التفاضلية وكذلك القسم التخيّلي. أي يوجد في هذه الحالة حلان حقيقيان للجملة التفاضلية من الشكل:

$$Y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx) \qquad (٤٨)$$

حيث A, B متجهتان ثابتتان حقيقيتان يمكن تعيينهما باشتقاق (٤٨) والتعويض في الجملة التفاضلية المفروضة مباشرة.

الحالة الثالثة: يوجد للمعادلة المميزة بعض الجذور المكررة. لنفرض أن λ هو جذر مضاعف m مرة للمعادلة المميزة. يبرهن في مثل هذه الحالة أنه يوجد للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة m حل خاص من الشكل:

$$Y = (A_1 + xA_2 + x^2A_3 + \ldots + x^{m-1}A_m)e^{\lambda x} \qquad (٤٩)$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_m$ جميعها متجهات ثابتة تتعين مركبات كل منهما بالتعويض في الجملة التفاضلية.

٣-٢٢-١- تمارين محلولة:

(أ)

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + 5y_3 \quad , \quad \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \quad , \quad \frac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 - 4y_3$$

الحل:

إن المعادلة المميزة لهذه الجملة التفاضلية:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 5 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

والتي تأخذ الشكل:

$$\lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2 = 0$$

تقبل هذه المعادلة جذور حقيقية متباينة هي:

$$\lambda_1 = 1 \;\; ; \;\; \lambda_2 = -1 \;\; ; \;\; \lambda_3 = -2$$

من أجل الجذر الأول $\lambda_1 = 1$ فالمعادلات (٤٥) تأخذ الشكل:

$$-\gamma_2 + 5\gamma 3 = 0$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$-\gamma_1 + \gamma_2 - 5\gamma_3 = 0$$

ومنها نجد أن: $\gamma_1 = 0 \;\; , \;\; \gamma_2 = 5\gamma_3$

نختار $\gamma_3 = 1$ نحصل على حل خاص للجملة التفاضلية المفروضة:

$$Y_1(x) = (0, 5e^x, e^x)$$

من أجل الجذر الثاني $\lambda_2 = -1$ تأخذ المعادلات (٤٥) الشكل:

$$2\gamma_1 - \gamma_2 + 5\gamma_3 = 0$$

$$\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0$$

$$-\gamma_1 + \gamma_2 - 3\gamma_3 = 0$$

من هنا نجد أن: $\gamma_1 = -2\gamma_2 \;\; , \;\; \gamma_3 = \gamma_2$

بأخذ $\gamma_2 = 1$ نحصل على حل خاص ثان للجملة التفاضلية:

$$Y_2(x) = (-2e^{-x}, e^{-x}, e^{-x})$$

من أجل الجذر الثالث $\lambda_3 = -2$ تأخذ المعادلات (٤٥) الشكل:

$$3\gamma_1 - \gamma_2 + 5\gamma_3 = 0$$

$$\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0$$

$$-\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0$$

وبالتالي فإن: $\gamma_1 = -3\gamma_2 \;\; , \;\; \gamma_3 = 2\gamma_2$

بأخذ $\gamma_2 = 1$ نحصل على حل خاص ثالث للجملة التفاضلية هو:

$$Y_3(x) = (-3e^{-x}, e^{-2x}, 2e^{-2x})$$

ويكون الحل العام للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة المفروضة هو:

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثلاثة ثوابت اختيارية. أي أن:

$$Y = \begin{cases} Y_1 = -2c_2e^{-x} - 3c_3e^{-2x} \\ Y_2 = 5c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} \\ Y_3 = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + 2c_3e^{-2x} \end{cases}$$

(ب) $\dfrac{dy}{dx} = y + z \quad , \quad \dfrac{dz}{dx} = -2y + 3z$

الحل:

تأخذ المعادلة المميزة لهذه الجملة التفاضلية الشكل:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

تقبل هذه المعادلة جذرين مركبين هما: $\lambda_1 = 2 + i \quad ; \quad \lambda_2 = 2 - i$

يوجد إذن حلان للجملة التفاضلية يأخذان الشكل:

$$Y = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$$

أي من الشكل:

$$Y = \begin{cases} y = e^{2x}(a_1\cos x + b_1\sin x) \\ z = e^{2x}(a_2\cos x + b_2\sin x) \end{cases}$$

حيث: $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$

لتعيين هاتين المتجهتين الثابتتين الحقيقيتين نشتق المعادلتين الأخيرتين فنجد:

$$y' = e^{2x}[(2a_1 + b_1)\cos x + (-a_1 + 2b_1)\sin x]$$

$$z' = e^{2x}[(2a_2 + b_2)\cos x + (-a_2 + 2b_2)\sin x]$$

نعوض في الجملة التفاضلية المفروضة فنحصل على أربع علاقات:

$$a_1 + b_1 = a_2$$
$$-a_1 + b_1 = b_2$$
$$-2a_1 + a_2 = b_2$$
$$-2b_1 + b_2 = -a_2$$

من الواضح أن العلاقتين الأخيرتين مرتبطتان بالعلاقتين الأولى والثانية إذن لدينا بين الثوابت الأربع a_1, a_2, b_1, b_2 فقط العلاقتان المستقلتان:

$$a_1 + b_1 = a_2 \quad , \quad -a_1 + b_1 = b_2$$

فمن أجل اختيار أول $a_1 = 0, b_1 = 1$ نجد أن $a_2 = b_2 = 1$ ونجد حلاً خاصاً أولاً هو:

$$Y_1(x) = \begin{cases} y_1 = e^{2x} \sin x \\ z_1 = e^{2x}(\cos x - \sin x) \end{cases}$$

ومن أجل اختيار ثاني $a_1 = 1, b_1 = 0$ نجد أن $a_2 = 1, b_2 = -1$.

ونجد حلاً خاصاً ثانياً ومستقلاً عن الأول هو:

$$Y_2(x) = \begin{cases} y_2 = e^{2x} \cos x \\ z_2 = e^{2x}(\cos x - \sin x) \end{cases}$$

ويكون الحل العام للجملة التفاضلية المفروضة هو:

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

أو:

$$Y = \begin{cases} y = e^{2x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \\ z = e^{2x}[(c_1 + c_2)\cos x + (c_1 - c_2)\sin x] \end{cases}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

ملاحظة هامة:

إن حل الجملة التفاضلية المفروضة في المثال (ب) بطريقة الحذف ورد الجملة التفاضلية إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية هو أبسط وأسرع بكثير في مثل هذه الحالة.

فيمكن حساب z من المعادلة الأولى في الجملة التفاضلية: $z = y' - y$

ومنه: $z' = y'' - y'$

بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة التفاضلية نحصل على:

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة معادلتها المميزة هي نفس المعادلة المميزة للجملة: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

وحلها العام هو: $y = e^{2x}(c_1 \sin x - c_2 \cos x)$

بالتعويض نجد z وبالتالي نحصل على الحل العام للجملة التفاضلية المفروضة.

(ج) $$\frac{dy}{dx} = y - z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = y + 3z$$

الحل:

المعادلة المميزة هي:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

تقبل جذراً مضاعفاً لها $\lambda = 2$.

نبحث عن حل للجملة من الشكل (٤٩) أي:

$$Y(x) = \begin{cases} y(x) = (a_1 + b_1 x)e^{2x} \\ z(x) = (a_2 + b_2 x)e^{2x} \end{cases}$$

نشتق هاتين المعادلتين:

$$y' = (2a_1 + b_1 + 2b_1 x)e^{2x}$$
$$z' = (2a_2 + b_2 + 2b_2 x)e^{2x}$$

بالتعويض في الجملة التفاضلية المفروضة نحصل فقط على علاقتين مستقلتين بالثوابت a_1, b_1, a_2, b_2 هما: $b_2 = -b_1, a_2 = -a_1 - b_1$

إذا اعتبرنا $c_2 = b_1, c_1 = a_1$ ثابتين اختياريين نحصل على الحل العام للجملة بالشكل:

$$Y(x) = \begin{cases} y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} \\ z = -(c_1 + c_2 + c_2 x)e^{2x} \end{cases}$$

٣-٢٣- الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة:

درسنا في الفقرة(٣-٢٢) الحل العام للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة ولإيجاد الحل العام للجملة التفاضلية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة (٤١) يمكن اتباع طريقة تحويل الثوابت التي شرحناها في الفقرة(٣-٢١) أو نعين استناداً إلى الفقرة (٣-٢٠-١) مبرهنة (١) حلاً خاصاً للجملة التفاضلية (٤١) ويكون الحل العام للجملة التفاضلية (٤١) المتجانسة هو مجموع حل خاص لها والحل العام للجملة التفاضلية (٤٢) المتجانسة. يمكن تعيين شكل الحل الخاص للجملة التفاضلية (٤١) في حالات خاصة تشبه تلك التي درسناها من أجل معادلة تفاضلية خطية واحدة ذات أمثال ثابتة.

نذكر هنا على **سبيل المثال** بعض الحالات:

أولاً: $R(x) - e^{\alpha x} P_m(x)$

حيث $P_m(x)$ دالة متجهية مركباتها كثيرات حدود أعلى درجة فيها m.

(أ) إذا كانت α ليست جذراً للمعادلة المميزة (٤٦) فيكون الحل الخاص من الشكل: $y(x) = e^{\alpha x} q_m(x)$

حيث مركبات $q_m(x)$ هي كثيرات حدود من الدرجة m.

(ب) إذا كانت α جذراً مضاعفاً k مرة للمعادلة المميزة (٤٦) فيكون الحل الخاص من الشكل: $y(x) = e^{\alpha x} q_{m+k}(x)$

حيث q_{m+k} مركبات هي كثيرات حدود من الدرجة $m+k$.

ثانياً: $R(x) = \cos \alpha x P_m(x)$

أو $\sin \alpha x$ بدلاً من $\cos \alpha x$ أو عبارة خطية فيهما.

يوجد في هذه الحالة حل خاص من الشكل:

$$y(x) = \cos \alpha x \mu(x) + \sin \alpha x \eta(x)$$

حيث $\mu(x), \eta(x)$ مركبات كثيرات حدود من الدرجة m إذا كان $i\alpha$ ليس جذراً للمعادلة المميزة وتكون كثيرات حدود من الدرجة $m+k$ إذا كان $i\alpha$ جذراً مضاعفاً k مرة.

٣-٢٣-١- مثال محلول:

عين حلاً خاصاً للجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$\frac{dy_1}{dx} - -2y_1 - y_2 + y_3 + x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 - 2y_3 + x^2$$

$$\frac{dy_3}{dx} = -2y_1 + y_2 - 2y_3 + x + 1$$

الحل:

لدينا هنا:

$$R(x) = P_2(x) = \begin{vmatrix} x \\ x^2 \\ x+1 \end{vmatrix}$$

نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$Y(x) = q_2(x) = \begin{cases} y_1 = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1 \\ y_2 = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2 \\ y_3 = \alpha_3 x^2 + \beta_3 x + \gamma_3 \end{cases}$$

من أجل حساب $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ نشتق هذه العلاقات فنجد:

$$Y'(x) = \begin{cases} y_1' = 2\alpha_1 x + \beta_1 \\ y_2' = 2\alpha_2 x + \beta_2 \\ y_3' = 2\alpha_3 x + \beta_3 \end{cases}$$

بالتعويض في الجملة التفاضلية المفروضة والمطابقة نحصل بعد الاختصارات على المعاملات ويكون الحل الخاص هو:

$$Y(x) = \begin{cases} y_1 = -x^2 + 5x + -8 \\ y_2 = 6x^2 - 31x + 61 \\ y_3 = 4x^2 - 24x + 50 \end{cases}$$

٣-٢٤- جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة وغير النظامية:

يمكن معالجة طريقة الحذف في جملة معادلات تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة وغير نظامية باستخدام طريقة المعينات في حل جملة معادلات جبرية وذلك باستخدام الرمز $D=\frac{d}{dx}$.

ولنوضح هذه المعالجة بجملة ثلاث معادلات غير نظامية:

$$\begin{aligned} f_1(D)y+f_2(D)z+f_3(D)w&=R_1(x)\\ g_1(D)y+g_2(D)z+g_3(D)w&=R_2(x)\\ h_1(D)y+h_2(D)z+h_3(D)w&=R_3(x) \end{aligned} \qquad (٥٠)$$

حيث $f_1(D), f_2(D),\ldots\ldots, h_1(D), h_2(D), h_3(D)$ كثيرات حدود في D.

يمكن حل حملة المعادلات (٥٠) بالنسبة لـ z, y, w بطريقة المعينات (طريقة كرامر) فيكون:

$$\Delta(D)y=\begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) & f_3(D)\\ g_1(D) & g_2(D) & g_3(D)\\ h_1(D) & h_2(D) & h_3(D) \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} R_1 & f_2 & f_3\\ R_2 & g_2 & g_3\\ R_3 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}=\Delta_y(D)$$

(٥١)

$$\Delta(D)z=\begin{vmatrix} f_1 & R_1 & f_3\\ g_1 & R_2 & g_3\\ h_1 & R_3 & h_3 \end{vmatrix} z=\Delta_z(D)$$

$$\Delta(D)w=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & R_1\\ g_1 & g_2 & R_2\\ h_1 & h_2 & R_3 \end{vmatrix} w=\Delta_w(D)$$

ونكتب الحل (٥١) بالشكل الرمزي:

$$\Delta(D).y = \Delta_y(D)$$
$$\Delta(D).z = \Delta_z(D) \qquad (٥٢)$$
$$\Delta(D).w = \Delta_w(D)$$

تشكل كل منهما معادلة تفاضلية خطية عادية على أن ننظر حين فك المعين في الطرف الأيمن من كل منهما أن كل دالة مضروبة بالمؤثر D^m هو عملية اشتقاق بالنسبة لـ x من المرتبة m وحيث $m = 1,2,....,$.

إن كل حل لجملة المعادلات (٥٠) يحقق المعادلات (٥٢) إلا أن كل حل للمعادلات (٥٢) ليس بالضرورة حلاً لجملة المعادلات(٥٠) غير أنه بالتبديل في الجملة (٥٠) نحصل على الشروط التي يجب أن تحققها الثوابت في حل المعادلات (٥٢) ليكون حلاً للجملة التفاضلية (٥٠).

إذا كان $\Delta(D) = 0$ وإذا كان أحد المعينات على الأقل في الطرف الأيمن من (٥٢) مخالفاً للصفر فلا يمكن أن تتحقق المعادلات (٥٢) وبالتالي لا يوجد حل للجملة (٥٠).

٣-٢٤-١- أمثلة محلولة:

أوجد الحل العام لجمل المعادلات التفاضلية التالية:

(أ) $y'' + z' - y - z = 1 \quad , \quad z'' + y' + y + z = x$

الحل:

يمكن كتابة هذه الجملة باستعمال رمز المؤثر التفاضلي $D = \dfrac{d}{dx}$ بالشكل التالي:

$$(D^2 - 1)y + (D - 1)z = 1$$
$$(D^2 + 1)z + (D + 1)y = x$$

نحل جملة المعادلتين بالنسبة لـ y, z حسب قاعدة كرامر فنجد:

$$\Delta(D)y = \begin{vmatrix} D^2-1 & D-1 \\ D+1 & D^2+1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 1 & D-1 \\ x & D^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(D)z = \begin{vmatrix} D^2-1 & D-1 \\ D+1 & D^2+1 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} D^2-1 & 1 \\ D+1 & x \end{vmatrix}$$

أو:

$$D^2(D^2-1)y = x$$

$$D^2(D^2-1)z = -(x+1)$$

إن الحل العام لكل من هاتين المعادلتين:

$$y = a + bx + ce^x + de^{-x} - \frac{x^3}{6}$$

$$z = \alpha + \beta x + \gamma e^x + \delta e^{-x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

للحصول على العلاقات بين الثوابت a,b,c,d والثوابت $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ حتى تمثل المعادلتان الأخيرتان الحل العام للجملة التفاضلية المفروضة نعوض في الجملة الأصلية فنجد:

$$(\beta - a - \alpha - 1) - (b+\beta)x - 2\delta e^{-x} \equiv 0$$

$$(a+b+\alpha+1) + (b+\beta)x + 2(c+\gamma)e^x + 2\delta e^{-x} \equiv 0$$

وتتحقق هاتان المطابقتان إذا كانت المعاملات جميعها أصفاراً وبالتالي نجد:

$$\alpha = -(a+b+1)$$

$$\beta = -b$$

$$\gamma = -c$$

$$\delta = 0$$

ويكون الحل العام للجملة المفروضة هو:

$$y = a + bx + ce^{x} + de^{-x} - \frac{x^3}{6}$$

$$z = -(a+b+1) - bx - ce^{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

حيث a, b, c, d ثوابت كيفية.

(ب) $y' = y + z + x \quad , \quad z' = -2y - z + e^{x}$

الحل:

يمكن أن نكتب هذه الجملة بالشكل:

$$(D-1)y - z = x$$
$$2y + (D+1)z = e^{x}$$

ومنه:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ 2 & D+1 \end{vmatrix} = D^2 + 1$$

$$\Delta_y(D) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ e^{x} & D+1 \end{vmatrix} = (D+1)x + e^{x} = x + 1 + e^{x}$$

$$\Delta_z(D) = \begin{vmatrix} D-1 & x \\ 2 & e^{x} \end{vmatrix} = (D-1)e^{x} - 2x = -2x$$

ويكون:

$$y = \frac{1}{D^2+1}(x + 1 + e^{x})$$

$$= \frac{1}{D^2+1}(x+1) + \frac{1}{D^2+1}e^x$$

$$= (1 - D^2 + ...)(x+1) + \frac{1}{2}e^x$$

$$= x + 1 + \frac{1}{2}e^x$$

وذلك استناداً لخواص المؤثر التفاضلي العكسي وكذلك نجد أيضاً أن:

$$z = \frac{1}{D^2+1}(-2x) = -2x$$

ويكون الحل الخاص للجملة المفروضة من الشكل:

$$Y(x) = \begin{cases} y = x + 1 + \frac{1}{2}e^x \\ z = -2x \end{cases}$$

(ج)

$$2y' + z' - 4y - z - e^x = 0$$
$$y' + 3y + z = 0$$

الحل:

يمكن كتابة هذه الجملة بالشكل:

$$2(D-2)y + (D-1)z = e^x$$
$$(D+3)y + z = 0$$

ونرى أن:

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix}2(D-2) & D-1\\ D+3 & 1\end{vmatrix}=-(D^2+1)$$

$$\Delta_y(D)=\begin{vmatrix}e^x & D-1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=e^x$$

$$\Delta_z(D)=\begin{vmatrix}2(D-2) & e^x\\ D+3 & 0\end{vmatrix}=-(D+3)e^x=-4e^x$$

وعليه فيكون:

$$y=-\frac{e^x}{D^2+1}\quad,\quad z=\frac{4e^x}{D^2+1}$$

أي أن:

$$y''+y=-e^x$$
$$z''+z=4e^x$$

وهما معادلتان تفاضليتان خطيتان من المرتبة الثانية وبحل المعادلتين نجد الحل العام لجملة المعادلات المفروضة بالشكل التالي:

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}e^x$$
$$z=c_3\cos x+c_4\sin x+2e^x$$

ولكن عدد الثوابت يجب أن يساوي ثابتين فقط. وعليه فلا بد من وجود علاقة بين هذه الثوابت، ولكن إذا عوضنا في المعادلة الثانية من جملة المعادلات المفروضة نجد أن:

$$(c_2+3c_1+c_3)\cos x+(3c_2-c_1+c_4)\sin x=0$$

وذلك من أجل كل قيمة لـ x وعليه فيكون:

$$c_4=c_1-3c_2$$
$$c_3=-(3c_1+c_2)$$

وبالتالي يعطى الحل العام بالشكل التالي:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} e^x$$

$$z = -(3c_1 + c_2)\cos x + (c_1 - 3c_2)\sin x + 2e^x$$

(د)

$$y'' + y' + y + z'' - z' + z = x^2$$
$$y' + y + z' - z = e^x$$

الحل:

يمكن كتابة هذه الجملة بالشكل:

$$(D^2 + D + 1)y + (D^2 - D + 1)z = x^2$$
$$(D+1)y + (D-1)z = e^x$$

ونرى أن:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D^2 + D + 1 & D^2 & D+1 \\ D+1 & & D-1 \end{vmatrix} = -2$$

وعليه فالحل يحوي ثوابت اختيارية. ونرى أن:

$$\Delta_y(D) = \begin{vmatrix} x^2 & D^2 - D + 1 \\ e^x & D-1 \end{vmatrix} = 2x - x^2 - e^x + e^x - e^x$$

وبالتالي يكون:

$$y = \frac{1}{2}[x^2 - 2x + e^x]$$

وكذلك نرى أن:

$$\Delta_z(D) = \begin{vmatrix} D^2 + D + 1 & x^2 \\ D+1 & e^x \end{vmatrix} = 3e^x - 2x - x^2$$

وبالتالي يكون: $z = \frac{1}{2}[x^2 + 2x - 3e^x]$

(هـ)

$$(D^2+1)y + (D^2+1)z = \sin x$$
$$(D^6+7)y + (D^6+7)z = \cos x$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} (D^2+1) & (D^2+1) \\ (D^6+7) & (D^6+7) \end{vmatrix} = 0$$

وبما أن:

$$\Delta_y(D) = \begin{vmatrix} \sin x & (D^2+1) \\ \cos x & (D^6+7) \end{vmatrix} = 6\sin x \neq 0$$

فالجملة المفروضة مستحيلة الحل.

(و)

$$(D^2+D+1)y + (D^2+1)z = e^x$$
$$(D^2+D)y + D^2 z = \cos x$$

الحل:

بطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد:

$$z + y = e^x - \cos x$$

وتكتب المعادلة الثانية بالشكل:

$$D[(D+1)y + Dz] = \cos x$$

ومنها نجد بالمكاملة:

$$(D+1)y + Dz = \sin x + c$$

أي أن:

$$D(y+z) + y = \sin x + c$$

وبملاحظة أن:

$$y + z = e^x - \cos x$$

فنجد:

$$D(e^x - \cos x) + y = \sin x + c$$

أي أن:

$$e^x + \sin x + y = \sin x + c$$

هذا يعني أن: $y = c - e^x$

وبالتالي فإن:

$$z = -y + e^x - \cos x$$

$$z = -c + e^x + e^x - \cos x$$

$$z = 2e^x - \cos x - c$$

٣-٢٥- حل مجموعة معادلات تفاضلية خطية باستخدام تحويلات لابلاس:

سنستعرض في هذه الفقرة حل مجموعة معادلات تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة باستعمال تحويلات لابلاس، وتتلخص فكرة الحل بأخذ تحويل لابلاس لكل معادلة من المعادلات المعطاة، فنجد بعد ذلك مجموعة معادلات جبرية بالمجاهيل $Y(s), Z(s),.....$، فنقوم بحلها بالنسبة لهذه المجاهيل، ثم نأخذ تحويل لابلاس العكسي لكل منها فنجد الحل $y(t), z(t),.....$.

٣-٢٦- مثال محلول:

حل مجموعة المعادلتين التفاضليتين باستخدام تحويلات لابلاس:

$$y' - 2y - 4z = \cos t$$

$$z' + y + 2z = \sin t$$

ضمن الشروط الابتدائية: $y(0) = z(0) = 0$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس لكل من المعادلتين التفاضليتين، فنجد:

$$L[y'] - 2L[y] - 4L[z] = L[\cos t]$$

$$L[z'] + L[y] + 2L[z] = L[\sin t]$$

بالتعويض:

$$(s-2)Y(s) - 4Z(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) + (2+s)Z(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة للمجهولين $Y(s), Z(s)$ باستعمال طريقة المعينات نجد:

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}$$

$$Z(s) = -\frac{2}{s^2(s^2+1)}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$y(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t$$

$$z(t) = -2t + 2\sin t$$

٣-٢٧- تمارين غير محلولة:

١) أوجد التكامل العام لكل من جمل المعادلات التفاضلية التالية:

(1) $\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{xy}$

(2) $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{x+z}=\dfrac{dz}{x+y}$

(3) $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$

(4) $\dfrac{dx}{x^3-ny^3-mz^3}=\dfrac{dy}{(n+1)x^2y}=\dfrac{dz}{(m+1)x^2z}$

(5) $\dfrac{dx}{xz(z^2+xy)}=\dfrac{dy}{-yz(z^2+xy)}=\dfrac{dz}{x^4}$

(6) $\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{z}\quad,\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{y-x}$

(7) $(z-y)^2\dfrac{dy}{dx}=z\quad,\quad (z-y)^2\dfrac{dz}{dx}-y$

(8) $\dfrac{dy}{dx}=y^2-z^2-t^2\quad,\quad \dfrac{dz}{dx}=2yz\quad,\quad \dfrac{dt}{dx}=2yt$

(9) $\dfrac{dy}{dx}=3x+4y-z\quad,\quad \dfrac{dz}{dx}=x^3+y+2z$

(10) $x\dfrac{dy}{dx}=y+z-\dfrac{1}{x}\quad,\quad x\dfrac{dz}{dx}=-3y+5z+2\ln|x|$

(11) $\dfrac{dy}{dx}=e^x+3y+2z\quad,\quad \dfrac{dz}{dx}=x-5y+2z$

(12) $\dfrac{dy}{dx}=2y+z+w+e^x$

$$\frac{dz}{dx} = 2y + 3z - w + x$$

$$\frac{dw}{dx} = y - w + 1$$

(13) $-xy' + x^2 z'' - 2y - 4z = 4x \quad , \quad xy' + xz' + 3y + 7z = 0$

(14) $x\dfrac{dy}{dx} = -6y + 5z + 3w + \dfrac{1}{x}$

$$x\frac{dz}{dx} = -8y + 7z + 4w - \frac{1}{x}$$

$$x\frac{dw}{dx} = -2y + z + w + \frac{2}{x}$$

(15) $(D^2 + 1)z + y = 5x + 4\cos x$

$$-4z + (D^2 - 3)y = -3e^x$$

(16) $(D - 3)y + 2(D + 2)z = 2\sin x$

$$2(D + 1)y + (D - 1)z = \cos x$$

(17) $(D^2 + 4)y + z = \sin^2 x$

$$(D^2 + 1)z - 2y = \cos^2 x$$

(18) $2Dy + (D + 1)z = x$

$$(D - 1)y + Dz = x^2$$

(19) $y' + z' + y = e^x$

$$z' + y + 4z = x$$

(20) $(D - 1)y + (D + 2)z = 1 + e^x$

$$(D + 2)z + (D + 1)t = 2 + e^x$$

$$(D - 1)y + (D + 1)t = 3 + e^x$$

(21) $(D^2 + 16)y - 6Dz = 0$

$$6Dy + (D^2 + 16)z = 0$$

(22) $y' - 2z' + y + z = 4e^x$
$-3y' + 6z' + y - 3z = 8$

(23) $y' - 2z' + y + z = 2e^x$
$-3y' + 6z' - 3y - 3z = -6e^x$

(24) $\frac{dy}{dx} = y + 2z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 4y + 3z$

(25) $(D-2)y + 9z = 0 \quad , \quad -y + (D-8)z = 0$

(26) $y' + z' + z = 1, y' - t' + 2y + t = 1, z' + t' + z + 2t - 0$

(27) $\frac{dy}{dx} = y - 5z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2y - z$

(28) $\frac{dy}{dx} = y - z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = y + 3z$

(29) $\frac{dy}{dx} = 3y - 2z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2y - z$

(30) $\frac{dy}{dx} = -y + z + t, \frac{dz}{dx} = y - z + t, \frac{dt}{dx} = y + z - t$

وذلك بالطريقة التي تراها مناسبة.

٢) حل مجموعة المعادلات التفاضلية التالية باستعمال تحويلات لابلاس:

(١) $\left.\begin{array}{l} y' = y - z \\ z' = -2y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y(0) = 2 \\ z(0) = z'(0) = 1 \end{array}$

(٢) $\left.\begin{array}{l} y' - z' - z = 0 \\ z' + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{array}$

(٣) $$\left.\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -2y - 3z - 9w \\ w' &= 2z + 6w \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y(0) &= -2 \\ z(0) &= -5 \\ w(0) &= 0 \end{aligned}$$

(٤) $$\left.\begin{aligned} y' &= 3y + 5z - w \\ z' &= -2z + w \\ w' &= y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y(0) &= -17 \\ z(0) &= 1 \\ w(0) &= -5 \end{aligned}$$

(٥) $$\left.\begin{aligned} y'' - 2y' + 3y + 4z &= 0 \\ z'' + y' - y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y(0) = 2; y'(0) = 0 \\ &z(0) = -1; z'(0) = 0 \end{aligned}$$

★★★★★★★★★★★★★

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الكلية

٤-١- تعاريف أساسية:

نسمي كل معادلة من الشكل:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (١)$$

حيث P, Q, R هي دوال معلومة في المتغيرات x, y, z وجميعها لا تطابق الصفر وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة في منطقة معينة D من R^3.

بمعادلة تفاضلية كلية (أو معادلة بفاف التفاضلية).

يمكن كتابة المعادلة (١) بالشكل المختصر: $F.dr = 0$

حيث أن:

$$dr = (dx, dy, dz), F = (P, Q, R)$$

من المعلوم أن الجملة التفاضلية:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (٢)$$

تعبر عن أن المماس لمنحن في كل نقطة (x, y, z) منه يكون موازياً للحقل F عند تلك النقطة. ونذكر بأن أمثال توجيه المماس لمنحن عند نقطة تتناسب مع مركبات متجه الانتقال اللامتناهي في الصغر (dx, dy, dz) على المنحني عند تلك النقطة. تعني مكاملة (٢) إيجاد كافة المنحنيات

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= a \\ \psi(x,y,z) &= b \end{aligned} \qquad (٣)$$

التي تمس في كل نقطة منها الحقل F ، ونسمي هذه المنحنيات بخطوط الحقل.

تعبر المعادلة الكلية (١) على أن الحقل F يتعامد في كل نقطة منه مع المماس لمنحن ما، وبناءً على ذلك فإن مكاملة المعادلة (١) تعني إيجاد كافة المنحنيات المتعامدة مع خطوط الحقل F ، وقد يصدف أن توجد أسرة من السطوح:

$$u(x, y, z) = c \qquad (٤)$$

تتصف بأنها عمودية على حزمة المنحنيات (٣)، ويحدث هذا عندما يمكن إنشاء أسرة ذات وسيط واحد من السطوح (مثل الأسرة (٤)) تتعامد مع أسرة ذات وسيطين من المنحنيات (مثل الأسرة (٣)).

إذا تحققت الحالة المذكورة أخيراً، أي إذا شكّلت منحنيات الحلّ سطوحاً، نقول إن المعادلة (٢) كمولة، ويكون الحقل F عمودياً على السطوح $u = c$ في كل نقطة.

لنعرف المؤثر التفاضلي ∇ بالشكل التالي:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

فإذا كان لدينا الدالة $u = u(x, y, z)$ المعرفة والمستمرة والقابلة للاشتقاق في منطقة معينة D من R^3 ، فإن ∇u يعرف بالشكل التالي:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

ويسمى ∇u تدرج الدالة u ويرمز لها بالرمز: $\nabla u = gradu$

من جهة ثانية، فإن $rotF$ متجه الدوران يعرف بالشكل التالي:

$$rotF = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})i+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})k$$

وذلك بفرض أن المشتقات الجزئية مستمرة موجودة، فتكون عندئذ المشتقات الجزئية المختلطة متساوية ويكون لدينا:

$$rot \quad gradu=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

تجدر الإشارة أن حقل التدرج ∇u يوازي في كل نقطة شعاع الحقل F في تلك النقطة، ويتحقق هذا إذا وفقط إذا وجد عامل تناسب μ بين مركبات ∇u ومركبات F.

إن μ يتغير من نقطة لأخرى، أي أنه دالة في x, y, z وبناءً على ذلك فإن المعادلة (١) تكون كمولة إذا وفقط إذا وجدت دالة سلمية $u(x, y, z)$ حيث أن:

$$\nabla u=\mu(x, y, z)(P, Q, R)=\mu F \qquad (٥)$$

أي أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu P, \frac{\partial u}{\partial y}=\mu Q, \frac{\partial u}{\partial z}=\mu R \qquad (٦)$$

بضرب طرفي بـ dr نجد:

$$du=\mu F \bullet dr \qquad (٧)$$

ونرى أن المعادلة (١) تكون كمولة إذا وجدت دالة سلمية تحقق (٧). لاحظ أن وجود μ يكافئ وجود u، وبالتالي فإن (١) تكون كمولة إذا وفقط إذا وجد عامل تكميل μ لها، وفي هذه الحالة تحقق أسرة السطوح (٤) المعادلة (١).

وبالفعل بمفاضلة طرفي العلاقة $u = c$ وبالاستفادة من العلاقة (٧) نجد أن:

$$\mu F dr = 0$$

أي أن:

$$F dr = 0$$

والمعادلة (١) محققة بأسرة السطوح $u = c$. تسمى أسرة السطوح هذه السطوح التكاملية للمعادلة الكلية (١)، وهي تؤلف التكامل العام للمعادلة.

ثمة حالة خاصة هامة، وهي تلك التي يمكن أن نأخذ فيها $\mu = 1$، وفي هذه الحالة يكون الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية (١) تفاضلاً كلياً لدالة u، ويتم إيجاد هذه الدالة، وبالتالي الحل العام $u = c$، بالتحري والمحاولة. وفي الحالات المعقدة يتم إيجاد u بحساب التكامل المنحني للحقل F على منحن كيفي في D من نقطة ثابتة كيفية (x_0, y_0, z_0) إلى نقطة كيفية (x, y, z). توصف المعادلة الكلية (١) في هذه الحالة الخاصة بأنها معادلة تامة، أي تكون المعادلة (١) تامّة عندما يكون طرفها الأيسر تفاضلاً تاماً لتابع ما U: $dU = Pdx + Qdy + Rdz$، وعندها تُعطى السطوح التكاملية بالمعادلات: $U = c$. يكافئ كون المعادلة تامّة انعدامَ قيمة دوران الحقل F:

(١) تامّة $\Leftarrow rotF = 0$.

في الحالة التي لا تكون فيها المعادلة (١) تامة، نلجأ للبحث **عن عامل تكميل**، وقد لا يوجد مثل هذا العامل. سنجد عما قريب الشرط اللازم **والكافي** لكمولية المعادلة (١) وهو طبعاً الشرط اللازم والكافي نفسه لوجود عامل **تكميل** μ. بالحقيقة حتى عندما تكون المعادلة (١) كمولة فإن إيجاد μ ليس دائماً **سهلاً** ولهذا السبب نلجأ إلى طرق أخرى في حل (١). أما إذا أمكن إيجاد μ بسهولة فإن المعادلة (١) تصبح تامة بعد ضربها بـ μ، ويمكن بالتالي إيجاد حلها العام $u = c$ بالطرق المعتادة في مكاملة معادلة تامة. عندما يكون μ غير موجود نقول أن (١) غير كمولة، وفي هذه الحالة لا توجد أسرة سطوح $u = c$

متعامدة مع أسرة المنحنيات (٣)، ولكن توجد أسرة منحنيات تتعامد مع أسرة المنحنيات (٣)، ونقول في هذه الحالة إن المعادلة غير الكمولة (١) كمولة بعلاقتين.

٤-٢- تمارين محلولة:

(أ) لتكن المعادلة الكلية: $dx + dy + dz = 0$

هذه المعادلة تامة وسطوحها التكاملية: $x + y + z = c$

وهي أسرة منحنيات ناظمها المشترك $(1,1,1)$. أما المنحنيات التكاملية للجملة:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1}$$

فهي أسرة المستقيمات المتوازية: $x - x_0 = y - y_0 = z$

ومن الواضح أن هذه المستقيمات متعامدة مع السطوح $x + y + z = c$.

(ب) لنعتبر المعادلة الكلية: $xdx + ydy = 0$

هذه المعادلة تامة وحلها العام: $x^2 + y^2 = c$

أما المنحنيات التكاملية للجملة: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$

فهي أسرة المستقيمات: $y = mx \quad , \quad z = z_0$

المتعامدة مع المحور oz، وبالتالي فهي متعامدة مع السطوح الأسطوانية الدورانية ذات المحور المشترك oz الممثلة بالمعادلة $x^2 + y^2 = c$.

(ج) لتكن المعادلة الكلية: $zdx - xdz = 0$

إن هذه المعادلة غير تامة لأن $z_{,z} = 1 \neq -1 = (-x)_{,x}$ وبالتالي $rotF \neq 0$ ولكنها كمولة، وبالفعل بفصل المتحولات نكتب هذه المعادلة بالشكل:

$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{z}=0$$

وحلها العام هو:

$$\frac{x}{z}=c$$

٤-٣- طريقة مكاملة معادلة كلية كمولة:

عندما تكون معادلة كلية كمولة ولكن يصعب حلها بالتحري المباشر، فإننا نبحث عن حل معتبرين أحد المتحولات، ولنقل z ثابتاً.

وبناءً على ذلك نضع $dz=0$ في المعادلة ونعتبر z وسيطاً حكمه في عمليات المكاملة حكم الثابت، ثم ندرس بعد ذلك أثر إعادة الاعتبار إلى z كمتحول. وسنبين في الشرح التالي أن معاملة z في البدء كثابت ثم إعادته إلى طبيعته كمتحول أمر مشروع.

إذا كان $u=c$ التكامل العام للمعادلة (١) فإن Fdr معدوم من أجل كل انتقال dr واقع في سطح تكاملي $u=c_0$، وهو معدوم بصورة خاصة عندما يتم الانتقال dr على المنحني $(u=c_0 \quad ,z=const)$ الواقع في السطح التكاملي $u=c_0$. على هذا المنحني يكون $dz=0$ وتأخذ المعادلة (١) الشكل:

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy=0$$

والمسماة المعادلة المختزلة.

إذا كانت الدالة $\frac{P}{Q}$ تحقق شروط نظرية الوجود والوحدانية فإن المعادلة الأخيرة تقبل المكاملة، وليكن:

$$V(x,y,z)-\rho=0 \qquad (٨)$$

حيث ρ ثابت المكاملة، تكاملها العام.

بما أن z وسيط في المعادلة فثابت المكاملة متعلق به، أي أن $\rho=\rho(z)$.

يكون $U = c$ حلاً للمعادلة (١) إذا وفقط إذا تحقق التناسب:

$$\frac{U_x}{P} = \frac{U_y}{Q} = \frac{U_z}{R}$$

هذا على حين تحقق حلول المعادلة المختزلة التناسب $\frac{U_x}{P} = \frac{U_y}{Q}$.

وبناءً عليه فإن كل حل لـ (١) هو حل للمعادلة المختزلة، ونستنتج من هذا أن مجموعة حلول (١) هي مجموعة جزئية من مجموعة الحلول (٨) للمعادلة المختزلة، ويجب بالتالي البحث عن حلول المعادلة الكلية (١) ضمن الحلول(٨). لكي يكون حل من الشكل (٨) للمعادلة المختزلة حلاً للمعادلة (١) يلزم تحقق ما يلي:

$$\frac{V_x}{P} = \frac{V_y}{Q} = \frac{V_z - \frac{d\rho}{dz}}{R}$$

إن التناسب الأول الناتج من المساواة بين النسبتين الأولى والثانية محقق حتماً. ومن النسبة الثالثة وإحدى النسبتين الأولى أو الثانية نحاول تعيين ρ. إذا استطعنا تعيين ρ فإن:

$$V(x, y, z) - \rho(z) = c \qquad (٩)$$

يكون التكامل العام للمعادلة الكلية (١).

٤-٤- أمثلة محلولة:

(أ) عين الحل العام للمعادلة الكلية الكمولة:

$$yzdx + 2xzdy - 3xydz = 0$$

الحل:

نعتبر z وسيطاً، فنجد المعادلة المختزلة: $ydx + 2xdy = 0$

وحلها العام هو: $xy^2 = \rho$

حيث $\rho = \rho(z)$ فقط. ويكون:

$$d(xy^2 - \rho) = y^2dx + 2xydy - \frac{d\rho}{dz}dz$$

وتنطبق هذه المعادلة مع المعادلة الكلية المعطاة، إذا كان:

$$\frac{y^2}{yz} = \frac{2xy}{2xz} = \frac{-\rho'_z}{-3xy}$$

وبالتالي نجد أن: $\frac{d\rho}{dz} = \frac{3xy^2}{z}$

وبما أن: $\rho = xy^2$

فإننا نجد: $\frac{d\rho}{dz} = \frac{3\rho}{z}$

بالمكاملة: $\rho = cz^3$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو: $xy^2z^{-3} = c$

(ب) كامل المعادلة التفاضلية الكلية علماً أنها كمولة:

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0$$

الحل:

نعتبر x وسيطاً فنجد المعادلة المختزلة: $dy + 2zdz = 0$

ويكون: $y + z^2 = \rho(x)$

أي أن:

$$\frac{-\frac{d\rho}{dx}}{2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1} = 1$$

أو:
$$\frac{d\rho}{dx}+2x\rho=-2x^2-1$$

وهي معادلة تفاضلية عادية خطية من المرتبة الأولى حلها العام:

$$\rho=ce^{-x^2}-x$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة:

$$(x+y+z^2)e^{x^2}=c$$

٤-٥- الشرط اللازم والكافي لكمولية معادلة بفاف:

٤-٥-١- مبرهنة (١):

لتكن F دالة متجهية في الفضاء R^3 تحقق العلاقة: $F.rotF=0$

ولتكن $\mu=\mu(x,y,z)$ دالة في المتغيرات x,y,z، عندئذ يكون:

$$(\mu.F).rot(\mu.F)=0$$

البرهان:

بما أن: $F=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$

عندئذ يكون:

$$\mu.F.roy(\mu.F)=(\mu P)i\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu P & \mu Q & \mu R \end{vmatrix}+$$

$$+(\mu Q)j\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu P & \mu Q & \mu R \end{vmatrix}+(\mu R)k.\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu P & \mu Q & \mu R \end{vmatrix}$$

$$= \mu P\left[\frac{\partial(\mu R)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z}\right] + \mu Q\left[\frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}\right] +$$

$$+ \mu R\left[\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}\right]$$

$$= \mu P\left[\frac{\partial \mu}{\partial y}R + \mu\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}Q - \mu\frac{\partial Q}{\partial z}\right] +$$

$$+ \mu Q\left[\frac{\partial \mu}{\partial z}P + \mu\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial x}R - \mu\frac{\partial R}{\partial x}\right] +$$

$$+ \mu R\left[\frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y}P - \mu\frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

$$= \mu^2\left[P(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + Q(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + R(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\right]$$

$$= \mu^2[F.rotF] = 0$$

٤-٥-٢- مبرهنة (٢):

تكون معادلة بفاف كمولة إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$F.rotF = 0 \qquad (١٠)$$

البرهان:

١- **لزوم الشرط:** إذا كانت المعادلة (١) كمولة فيوجد دالة سلمية u حيث أن:

$$du(x,y,z) = \mu F \cdot dr = 0$$

حيث $\mu = \mu(x,y,z)$ عامل تكميل للمعادلة:

$$du = \mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz = 0 \qquad (١١)$$

وبما أن:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

وبالمقارنة نجد:

$$\mu P = \frac{\partial u}{\partial x}; \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \mu R = \frac{\partial u}{\partial z} \qquad (١١)$$

وباشتقاق كل من هذه العلاقات بالنسبة للمتغيرين الآخرين، نحصل على العلاقات الثلاث التالية:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}$$

وذلك بعد الاستفادة من تساوي المشتقات الجزئية المختلطة.

وهذا يعني أن:

$$\mu(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\mu(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}) = P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}) = R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}$$

نضرب المعادلة الأولى بـــ R والثانية بـــ Q والثالثة بـــ P ثم بالجمع فنجد:

$$\mu[P(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}) + Q(\frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial P}{\partial z}) + R(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})] = 0$$

أي أن: $-\mu.F.rotF = 0$

من هنا نجد: $F.rotF = 0$

وذلك لأن $\mu \neq 0$.

٢- **كفاية الشرط:** لنفرض أن الشـرط: $F.rotF = 0$ محقـق. سـنبرهن أن المعادلة التفاضلية (١) كمولة. لنعتبر z ثابت ولنأخذ المعادلة المختزلة:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = 0 \qquad (١٢)$$

التي نفرض بخصوصها أن الدالة $\frac{P(x,y,z)}{Q(x,y,z)}$ تحقق شروط نظرية بيكار من أجل جميع قيم z، فتكون المعادلة المختزلة (١٢) كمولة من أجل جميع قيم z، ولنفرض أن الحل العام لهذه المعادلة هو من الشكل:

$$V(x,y,z) = \rho_1(z)$$

فيكون:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \mu P; \frac{\partial V}{\partial y} = \mu Q \qquad (١٣)$$

بالاستفادة من (١١) و(١٣) نجد:

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \mu R dz = 0$$

أي أن:

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz - \frac{\partial V}{\partial z}dz + \mu R dz = 0 \qquad (١٤)$$

وبما أن:

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV$$

عندئذ تصبح (١٤) بالشكل:

$$dV + (\mu R - \frac{\partial V}{\partial z})dz = 0 \qquad (١٥)$$

لنضع:

$$K = \mu R - \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (١٦)$$

عندئذ تصبح (١٥) بالشكل :

$$dV + Kdz = 0 \qquad (١٧)$$

وحسب الفرض أن الشرط $F.rotF = 0$ محقق وهذا يعني حسب المبرهنة (١) أن: $\mu.F.rot\mu F = 0$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}
&\mu F - (\mu Pi + \mu Qj + \mu Rk) \\
&= \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + (K + \frac{\partial V}{\partial z})k \\
&= gradV + Kk \\
&= gradV + (0,0,K)
\end{aligned}$$

وبأخذ دوار الطرفين نجد:

$$\begin{aligned}
rot(\mu F) &= rot(gradV) + rot(0,0,K) \\
&= 0 + \frac{\partial K}{\partial y} i - \frac{\partial K}{\partial x} j
\end{aligned}$$

وعليه حسب المبرهنة (١) يكون:

$$\mu.F.rot(\mu F) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial(V,K)}{\partial(x,y)} = 0$$

وهذا يعني أنه توجد علاقة تربط بين V, K مستقلة عن x, y إلا أنها غير مستقلة بالضرورة عن z، وهذا يعني أنه من الممكن التعبير عن K كدالة في z, V فقط أي أن: $K = K(V,z)$

وبالتالي تصبح المعادلة (١٧) بالشكل:

$$dV + K(V,z)dz = 0 \qquad (١٨)$$

فإذا فرضنا أن الحل العام للمعادلة (١٨) هو: $H(V,z) = \rho_2$

حيث ρ_2 ثابت اختياري، فعندئذ بتعويض V بدلالة x, y, z نحصل على مجموعة الدوال:

$$H(V(x,y,z),z) = U(x,y,z) = c$$

التي تحقق العلاقة:

$$dU = \mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz$$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية (١) كمولة ومجموعة الدوال $U(x,y,z) = c$ تمثل مجموعة السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية (١). وهكذا نرى أن طريقة الحل لمعادلة بفاف التفاضلية تعطى بأسلوب البرهان في كفاية الشرط.

٤-٥-٣- مثال محلول:

أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(yz + y^2)dx + (z^2 + xz)dy + (y^2 - xy)dz = 0$$

الحل:

لنتحقق أولاً أنها كمولة، فنرى أن:

$$F = (yz + y^2)i + (z^2 + xz)j + (y^2 - xy)k$$

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + y^2 & z^2 + xz & y^2 - xy \end{vmatrix}$$

$$= (2y - 2x - 2z)i + 2yj + (-2y)k$$

وبالتالي يكون:

$$F.rotF = 2(y - x - z)(yz + y^2) + 2y(z^2 + xz) + \\ +(-2y)(y^2 - xy) = 0$$

إذن الشرط محقق، وبالتالي فإن المعادلة المفروضة كمولة.

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة نعد z ثابت فنحصل على المعادلة المختزلة التالية:

$$(yz+y^2)dx+(z^2+xz)dy=0$$

أو:

$$y(y+z)dx+z(z+x)dy=0$$

وهي معادلة متغيرات قابلة للفصل من الشكل:

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{zdy}{y(y+z)}=0$$

أو:

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy}{y+z}=0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة المختزلة هو من الشكل:

$$V(x,y,z)=\frac{y(x+z)}{y+z}=\rho_1(z)$$

لدينا هنا:

$$\mu=\frac{1}{P}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{y(y+z)}.\frac{y}{y+z}=\frac{1}{(y+z)^2}$$

$$K=\mu R-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{1}{(y+z)^2}.(y^2-xy)-\frac{y}{y+z}+\frac{y(x+z)}{(y+z)^2}$$

$$=\frac{y(y-x)}{(y+z)^2}-\frac{y(y+z)+y(x+z)}{(y+z)^2}=0$$

وعندها تأخذ المعادلة (١٨) الشكل: $dV=0$

وحلها العام هو:

$$V(x,y,z)=\rho_2$$

وتكون مجموعة السطوح التكاملية للمعادلة المفروضة هي من الشكل:

$$y(x+z)=\rho_2(y+z)$$

حيث ρ_2 ثابت عددي اختياري.

٤-٥-٤- ملاحظة (١):

إن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (١) والقابلة للمكاملة يتعين بمجرد معرفة الدالة $\rho_1(z)$ المناسبة في المعادلة: $V(x,y,z)=\rho_1(z)$

يمكن الحصول على ذلك مباشرة بأخذ التفاضل الكلي لهذه المعادلة والتي يجب أن تكون فيها معاملات التفاضلات dx,dy,dz متناسبة مع معاملات التفاضلات في المعادلة التفاضلية (١) وبملاحظة المعادلة (١٦) يكون:

$$\rho_1'=K=\mu R-\frac{\partial V}{\partial z}$$

فمن أجل المثال المحلول يكون: $-\rho_1'=K=0$

أي أن: $\rho_1=\rho$

حيث ρ ثابتاً عددياً اختيارياً.

٤-٥-٥- ملاحظة (٢):

إن ضرب طرفي المعادلة التفاضلية (١) بالدالة μ قد يفقدها بعض الحلول، هي تلك التي تجعل $\mu=0$ أو $\frac{1}{\mu}=0$ فيجب مناقشة ذلك فمن أجل المثال المحلول يجب أن نشترط: $y+z\neq 0$

حيث أنه يمكن التحقق من أن السطح $y+z=0$ يحقق المعادلة التفاضلية المفروضة فهو سطح تكاملي لها. لذا يجب إضافته لمجموعة السطوح التكاملية

الناتجة. يتعين أي سطح تكاملي من هذه السطوح التكاملية بمعرفة منحنٍ تكاملي للمعادلة التفاضلية واقع في ذلك السطح التكاملي. ويتم ذلك بمعرفة قيمة الثابت الموافق لذلك. فمثلاً لإيجاد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية المحلولة بالمثال السابق والمار بالمنحني المعين بالمعادلتين:

$$x = 1; z = 0$$

يجب أولاً أن نتحقق من أن هذا المنحن هو منحن تكاملي للمعادلة التفاضلية الأمر الذي يمكن تبيان صحته بالتعويض في المعادلة التفاضلية المفروضة:

$$x = 1; z = 0$$

بالتعويض أيضاً في معادلة الحل العام للمعادلة التفاضلية المذكورة نجد أن:

$$\rho_2 = 1$$

وبالتالي فإن السطح التكاملي المطلوب هو: $xy + yz - y - z = 0$

٤-٦- مبرهنة (٣):

إذا وجد عامل تكميل μ للمعادلة التفاضلية (١) فيوجد عدد غير منته من عوامل التكميل لتلك المعادلة التفاضلية.

البرهان:

إذا كان μ عامل تكميل للمعادلة التفاضلية (١) فتوجد دالة $U(x, y, z)$ تحقق العلاقة: $dU = \mu(Pdx + Qdy + Rdz)$

إذا كان $\psi(U)$ دالة كيفية في U فيمكن كتابة المعادلة (١) بالشكل:

$$\mu \frac{d\psi}{dU}(Pdx + Qdy + Rdz) = 0$$

استناداً للمعادلات (١١) تأخذ المعادلة الأخيرة الشكل المكافئ:

$$\frac{d\psi}{dU}\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = 0$$

أو:
$$d\psi = \frac{d\psi}{dU} dU = 0$$

نستنتج مما سبق أن $\mu \frac{d\psi}{dU}$ هو عامل تكميل للمعادلة التفاضلية الكلية (١).

بما أن ψ دالة كيفية في U فإن $\frac{d\psi}{dU}$ هي أيضاً دالة كيفية في U وبالتالي نحصل على عدد غير منته من عوامل التكميل معطاة بـ: $\mu\psi_1[U(x,y,z)]$ حيث ψ_1 دالة كيفية في U.

٤-٧- دراسة بعض الحالات الخاصة:

(١) نقول عن معادلة بفاف إنها **ذات متحولات قابلة للفصل**، أو إنها **فصولة**، إذا أمكن كتابتها بالشكل:

$$f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz = 0 \qquad (١٩)$$

ومن الواضح أن هذه المعادلة تامة $(rotF = 0)$ نستنتج إذن أن معادلة بفاف الفصولة تكون كمولة. وبكتابتها بالشكل (١٩) تصبح تامة وحلها العام:

$$U = \int f(x)dx + \int g(y)dy + \int h(z)dz = c$$

(٢) نقول أن أحد المتحولات، ولنقل z، إنه **فصول** إذا أمكن كتابة معادلة بفاف بالشكل:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(z)dz = 0 \qquad (٢٠)$$

ويكون لدينا هنا:

$$F = (P(x,y), Q(x,y), R(z))$$
$$rotF = (0,0,\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

وبالتالي فإن:

$$F.rotF = 0 \Leftrightarrow R.(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = 0$$

وبما أن $R \neq 0$ إذن:

$$F.rotF = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (٢١)$$

ولكن $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ هو شرط لازم وكاف لتكون المعادلة

$$Pdx + Qdy = 0 \qquad (٢٢)$$

تامة، وبما أن:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow rotF = 0$$

فإنه أيضاً شرط لازم وكاف لكي تكون المعادلة (٢٠) تامة.

نستنتج إذن أن المعادلة (٢٠) إما أن تكون غير كمولة بتاتاً أو أن تكون تامة بشكلها المعطى. إذا فرضنا أن (٢٠) كمولة أي أن: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

فإن حلها العام هو:

$$V(x, y) + \int R(z)dz = c$$

حيث $V(x, y) = c_1$ التكامل العام للمعادلة التامة (٢٢). نستنتج مما سبق أنه إذا لم تكن (٢٢) تامة فلا جدوى من البحث عن عامل تكميل للمعادلة (٢٠) لأنه غير موجود.

(٣) المعادلات المتجانسة:

نقول عن معادلة كلية إنها **متجانسة** إذا كانت الدوال P, Q, R متجانسة من الدرجة نفسها. إذا كانت المعادلة (١) متجانسة من الدرجة n فإن:

$$P(x,y,z)=z^{n}P(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1)$$

$$Q(x,y,z)=z^{n}Q(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1) \qquad (٢٣)$$

$$R(x,y,z)=z^{n}R(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1)$$

وبوضع:

$$x=uz,\ y=vz \qquad (٢٤)$$

عندئذ نكتب (٢٣) بالشكل:

$$P(x,y,z)=z^{n}f(u,v)$$

$$Q(x,y,z)=z^{n}g(u,v) \qquad (٢٥)$$

$$R(x,y,z)=z^{n}h(u,v)$$

وبحسب (٢٤) فإن:

$$dx=udz+zdu$$

$$dy=vdz+zdv \qquad (٢٦)$$

وبالتعويض في المعادلة (١) من (٢٦) و(٢٥) نجد:

$$z^{n}\lfloor f(udz+zdu)+g(vdz+zdv)+hdz\rfloor=0$$

وبضرب هذه المعادلة بـــ z^{-n} والإصلاح نجد:

$$z(fdu+gdv)+(fu+gv+h)dz=0$$

وبفصل المتحولات نحصل على:

$$\frac{dz}{z}+\frac{fdu+gdv}{fu+gv+h}=0 \qquad (٢٧)$$

إذا كانت المعادلة (١) بالأصل كمولة فإن المعادلة الأخيرة تكون تامة (بحســب الحالة الخاصة السابقة) وحلها العام:

$$\ln|z| + V(u,v) = c$$

حيث: $V(u,v) = c'$

هو الحل العام للمعادلة التامة:

$$\frac{fdu + gdv}{fu + gv + h} = 0$$

ملاحظة:

إن تغيير المتحولات في معادلة كلية لا يغير من كموليتها أو عدمها، ولقد حصلنا على المعادلة (٢٧) بدءاً من (١) بتغيير المتحولات وفق (٢٤) ثم ضرب المعادلة بالعامل:

$$\begin{aligned}\mu &= z^{-(n+1)}(fu + gv + h)^{-1} \\ &= [(zu)(z^n f) + (zv)(z^n g) + z(z^n h)]^{-1} \\ &= [xP + yQ + zR]^{-1}\end{aligned}$$

الذي يؤلف عامل تكميل للمعادلة الكلية المتجانسة في حال كونها كمولة أصلاً.

٤-٧-١- تمارين محلولة:

(أ) أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية:

$$2y^2z^2dx + 3x^2z^2dy + x^2y^2dz = 0$$

الحل:

إذا قسمنا طرفي المعادلة على $x^2y^2z^2 \neq 0$ نحصل على معادلة ذات متحولات منفصلة:

$$2\frac{dx}{x^2} + 3\frac{dy}{y^2} + \frac{dz}{z^2} = 0$$

وبالمكاملة نحصل على مجموعة السطوح التكاملية:

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=c$$

حيث c ثابت اختياري بالإضافة إلى السطوح الثلاثة الممثلة بالمعادلة $xyz=0$.

(ب) تحقق من أن المعادلة التفاضلية التالية كمولة ثم أوجد حلها العام.

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-z^2)dy-z(y^2-1)dz=0$$

الحل:

نقسم طرفي المعادلة على $(y^2-1)(x^2-z^2)\neq 0$ فتصبح:

$$\frac{xdx-zdz}{x^2-z^2}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$$

وهي تحوي المتحول y منفصلاً. وهنا نلاحظ أن المعادلة كمولة لأن الشرط (٢١) محقق، ويمكن كتابة المعادلة على الشكل:

$$\frac{1}{2}d\ln\left|x^2-z^2\right|+\frac{1}{2}d\ln\left|y^2-1\right|=0$$

ونجد السطوح التكاملية: $(y^2-1)(x^2-z^2)=c$

حيث c ثابت اختياري.

يجب الانتباه إلى أن c الناتج من عملية المكاملة يجب أن يكون مخالفاً للصفر، غير أننا نعده هنا قابلاً لأن يأخذ قيمة الصفر وذلك ليشمل الحل $(y^2-1)(x^2-z^2)=0$.

(ج) أوجد حل المعادلة:

$$(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=0$$

الحل:

هذه المعادلة متجانسة ويمكن التحقق أنها كمولة وبالتالي فإن الدالة:

$$\mu = \frac{1}{xP + yQ + Rz} = \frac{1}{2(xy + yz + xz)}$$

هي عامل تكميل لها. فهي تصبح بعد ضرب طرفيها بعامل التكميل μ بالشكل:

$$\frac{(y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz}{2(xy + yz + xz)} = 0$$

ونجد أن البسط هو نصف تفاضل المقام:

$$\frac{1}{2}\frac{d(xy + yz + xz)}{xy + yz + xz} = 0$$

ومنه نجد السطوح التكاملية: $xy + yz + xz = c$

حيث c ثابت اختياري يأخذ القيم بما فيها الصفر.

ملاحظة:

إذا أجرينا التحويل: $y = xu; z = xv$

فنعيد المعادلة التفاضلية المفروضة إلى معادلة تفاضلية كلية يكون فيها المتحول x منفصلاً وعندها يمكن معالجتها كما في مثال الحالة الثانية.

(د) هل المعادلة التالية كمولة أم لا. وعين في تلك الحالة تكاملها العام.

$$\frac{dx}{x} + z^2 dy + 2yzdz = 0$$

الحل:

المتحول x فصول، وبما أن المعادلة: $z^2 dy + 2yzdz = 0$

تامة فالمعادلة المفروضة كمولة وحلها العام هو: $\ln|x| + yz^2 = c$

(هـ) أعد نفس السؤال من اجل المعادلة:

$$\frac{y}{z}dx + \frac{z}{x}dy + \frac{x}{y}dz = 0$$

نلاحظ أن المعادلة المفروضة متجانسة وهي غير كمولة لأن: $F.rotF \neq 0$

٤-٨- ملاحظة:

يمكن أيضاً حل المعادلة التفاضلية الكلية الكمولة بأسلوب مستمد من الطريقة العامة المشروحة في كفاية الشرط في المبرهنة السابقة وهو كما يلي:

نفترض أحد المتغيرات وليكن z ثابتاً فنجد المعادلة التفاضلية المختزلة التالية:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية في المتغيرين x, y فإذا كان حل هذه المعادلة من الشكل:

$$u(x,y,z) = c_1$$

حيث c_1 ثابت كيفي، فإن حل المعادلة التفاضلية الكلية (١) يأخذ الشكل:

$$F(u,z) = c_2$$

حيث c_2 ثابت كيفي. يمكن وضع هذا الحل على الشكل:

$$u(x,y,z) = \varphi(z) \qquad (٢٨)$$

ولنعين الدالة $\varphi(z)$. إذا أعطينا x قيمة ثابتة ولتكن α فإن:

$$u(\alpha,y,z) = \varphi(z) \qquad (٢٩)$$

هو حل للمعادلة التفاضلية المختزلة:

$$Q(\alpha,y,z)dy + R(\alpha,y,z)dz = 0 \qquad (٣٠)$$

فإذا كان حل هذه المعادلة من الشكل:

$$\mu(y,z) = c \qquad (٣١)$$

فتمثل كل من (٣١) و(٢٩) حلاً عاماً لنفس المعادلة التفاضلية (٣٠) وإستناداً لكون الحل العام لمعادلة تفاضلية عادية وحيداً فإن (٢٩) و(٣١) يجب أن تكونا متكافئتين وإن حذف y بينهما تعطينا الدالة $\varphi(z)$ المطلوبة بتعويضها في المعادلة (٢٨) نحصل على حل المعادلة التفاضلية الكلية (١). إن اختيار قيمة

مناسبة α مثل الصفر أو الواحد يسهل في الغالب إيجاد حل المعادلة التفاضلية (٣٠).

٤-٨-١- مثال محلول:

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$z(z+y^2)dx + z(z+x^2)dy - xy(x+y)dz = 0$$

الحل:

يمكن التحقق أولاً أن المعادلة المفروضة فعلاً كمولة. نفترض هنا y ثابتاً وبالتالي $dy = 0$ وتأخذ المعادلة الشكل:

$$z(z+y^2)dx - xy(x+y)dz = 0$$

والتي يمكن أن نكتبها على شكل معادلة ذات متحولات منفصلة في x, z:

$$(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y})dx + (\frac{1}{z+y^2} - \frac{1}{z})dz = 0$$

حيث: $xyz(x+y)(z+y^2) \neq 0$

يأخذ حلها العام الشكل:

$$\frac{x(z+y^2)}{z(x+y)} = f(y) \qquad (٣٢)$$

لتعيين الدالة $f(y)$ نأخذ قيمة ثابتة للمتغير z ولتكن $z = 1$ فيأخذ الحل السابق الشكل:

$$\frac{x(y^2+1)}{x+y} = f(y) \qquad (٣٣)$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية الأصلية الشكل:

$$\frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1} = 0$$

والتي حلها العام هو: $\arctan x + \arctan y = c_1$

واستناداً للعلاقة: $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$

فإن الحل العام يكتب على الشكل:

$$\frac{1-xy}{x+y} = c \qquad (٣٤)$$

حيث c ثابت اختياري.

إن هذا الحل يكافئ الحل المعطى بـ (٣٣).

بحذف x بين المعادلتين (٣٣)و(٣٤) نجد أن: $f(y) = 1 - cy$

بتعويض هذه الدالة في المعادلة (٣٢) نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية وهو:

$$y(y^2 + z) = z(x+y)(1-cy)$$

بالإضافة إلى أن $z(x+y) = 0$ هو أيضاً حل للمعادلة التفاضلية المفروضة.

٤-٩- التفسير الهندسي لقابلية المكاملة لمعادلة تفاضلية كلية:

لتكن لدينا المعادلة (١) وبفرض أن (x_0, y_0, z_0) نقطة ما في الفراغ لا تنعدم عندها جميع:

$$P_0 = P(x_0, y_0, z_0) \text{ و } Q_0 = Q(x_0, y_0, z_0) \text{ و } R_0 = R(x_0, y_0, z_0)$$

في آنٍ واحد.

لنفرض كذلك أن الدوال P, Q, R دوال وحيدة القيمة.

ولنعتبر أن (P_0, Q_0, R_0) أعداد توجيه مستقيم وحيد مار بالنقطة. عندئذ يمكن اعتبار المعادلة التفاضلية المفروضة على أنها تعرّف عند كل نقطة (x_0, y_0, z_0) مستقيماً:

$$\frac{x-x_0}{P_0}=\frac{y-y_0}{Q_0}=\frac{z-z_0}{R_0}$$

ومستوياً معادلته: $P_0(x-x_0)+Q_0(y-y_0)+R_0(z-z_0)=0$

عمودياً على المستقيم.

ثم إن الحل $u(x,y,z)=c$ للمعادلة التفاضلية المفروضة يمثل مجموعةً من السطوح يمرّ بكل نقطة (x_0,y_0,z_0) من الفراغ واحدٌ منها فقط S_0.

إن معادلة المستوي المماس π_0 لهذا السطح عند النقطة المفروضة هي:

$$(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial u}{\partial y_0}+(z-z_0)\frac{\partial u}{\partial z_0}=0$$

وكذلك فإن معادلتا المستقيم العمودي L_0 هما:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial u}{\partial x_0}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial u}{\partial y_0}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial u}{\partial z_0}}$$

وأخيراً فإن حل المعادلة التفاضلية الكلية الكمولة في ثلاثة متغيرات يتكون من مجموعة من السطوح ينطبق المستوي المماس لها والمستقيم العمودي عند كل نقطة على المستوي والمستقيم اللذين تعرفهما المعادلة التفاضلية عند تلك النقطة.

أما إذا كانت المعادلة (١) غير كمولة فيوجد حلول لها وفقاً للمفهوم التالي: تحدد المعادلة (١) على سطح معطى بالمعادلة:

$$G(x,y,z)=0 \qquad (٣٥)$$

مجموعة منحنيات تابعة لوسيط واحد. و هذا يتضح كما يلي:

نحذف أحد المتغيرات وليكن z من المعادلتين (١) و(٣٥) فنحصل على معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى وليكن حلها $\varphi(x,y,c)=0$ تمثل هذه المعادلة في الفضاء الثلاثي (x,y,z) مجموعة أسطوانات تابعة لوسيط واحد مولداتها توازي المحور oz. إن تقاطع هذه المجموعة من الاسطوانات مع

السطح S هي منحنيات تكاملية للمعادلة التفاضلية (١) واقعة على السطح الممثل بالمعادلة (٣٥).

٤-٩-١- مثال محلول:

برهن أن المعادلة التفاضلية الكلية:

$$ydx - xdy + dz = 0$$

غير كمولة ثم أوجد مجموعة منحنياتها التكاملية الواقعة على السطح $y = xz$.

الحل:

نلاحظ أن $F.rotF = -2$ وبالتالي فإن المعادلة المفروضة غير كمولة.

من معادلة السطح المفروض لدينا: $y = xz$

$$dy = xdz + zdx$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة نحصل على المعادلة التفاضلية العادية في المتغيرين x, z بالشكل: $(1-x^2)dz = 0$

وحل هذه المعادلة يكون:

(أ) $0 = 1 - x^2$ أو $x = \mp 1$

(ب) $dz = 0$ ومنه $z = c$

حيث c ثابت اختياري.

وعندها تكون مجموعة المنحنيات التكاملية المطلوبة ممثلة بـ:

$$z = c \quad , \quad y = xz$$

وبالإضافة إلى:

$$x = \mp 1 \quad , \quad y = xz$$

٤-١٠- الحل المشترك لجملة معادلتين تفاضليتين كليتين:

لتكن لدينا المعادلتان التفاضليتان الكليتان:

$$\begin{aligned} P_1(x,y,z)dx + Q_1(x,y,z)dy + R_1(x,y,z)dz = 0 \\ P_2(x,y,z)dx + Q_2(x,y,z)dy + R_2(x,y,z)dz = 0 \end{aligned} \qquad (٣٦)$$

لإيجاد حل مشترك لهاتين المعادلتين نميز الحالات التالية:

(i) إذا كانت كلتا المعادلتين كمولتين وكان:

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z) = c_1 \\ u_2(x,y,z) = c_2 \end{aligned} \qquad (٣٧)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان، تكامليهما العامين على الترتيب، فإن حل الجملة هو أسرة المنحنيات التكاملية (٣٧). تنتج هذه المنحنيات من تقاطع مجموعتي السطوح (٣٧).

(ii) إذا كانت معادلة واحدة فقط من الجملة، ولنقل الأولى، كمولة وكان تكاملها العام $u_1 = c_1$، فنحذف أحد المتحولات وتفاضله بين $u_1 = c_1$ والجملة لنجد مثلاً معادلة من الشكل:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (٣٨)$$

وبمكاملة هذه المعادلة نجد: $V(x,y) = c$

ويكون حل الجملة:

$$\begin{aligned} v(x,y) = c \\ u_1(x,y,z) = c_1 \end{aligned}$$

(iii) إذا كانت كلتا معادلتي الجملة غير كمولتين فقد تقبل أو لا تقبل الجملة حلاً وإذا صدف واستطعنا حذف z, dz مثلاً من هاتين المعادلتين لنجد معادلة من الشكل (٣٨) فنكامل هذه المعادلة لنجد $v(x,y) = c$.

ونستفيد من هذه العلاقة في إحدى معادلتي الجملة لنحصل على معادلة تفاضلية عادية تحوي x, z وتفاضليهما (أو y, z وتفاضليهما)، فنقوم بمكاملتها لنجد $w(x, z) = c'$. ويكون الحل العام للجملة:

$$v(x, y) = c$$

$$w(x, z) = c'$$

وقد يمكن أيضاً أن نحصل من المعادلتين غير الكمولتين (٣٦) على معادلة كمولة وذلك بضرب هاتين المعادلتين بعوامل مناسبة والجمع فإذا أمكن ذلك وحصلنا على معادلة كمولة فنستفيد منها ومن تكاملها العام $u(x, y, z) = c$ لحذف أحد المتحولات وتفاضله بينها وبين إحدى المعادلتين فنجد معادلة من الشكل (٣٨) تكاملها العام $v(x, z) = c'$ ، ويكون الحل العام للجملة من الشكل:

$$v(x, y) = c$$

$$w(x, y, z) = 0$$

٤-١٠-١- تمارين محلولة:

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين التفاضليتين الكليتين في كل من المجموعات التالية:

(أ)

$$(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$$

$$(x + z)dx + ydy + xdz = 0$$

الحل:

نلاحظ أن كلاً من المعادلتين كمولتين، ويمكن كتابة المعادلة الأولى بالشكل:

$$(ydx + xdy) + (zdy + ydz) + (xdz + zdx) = 0$$

وتكاملها العام هو: $xy + yz + xz = c_1$

أما المعادلة الثانية فتكتب بالشكل:

$$xdx + ydy + (zdx + xdz) = 0$$

وتكاملها العام هو: $x^2 + y^2 + 2xz = c_2$

وهكذا نجد أن:

$$xy + yz + xz = c_1$$
$$x^2 + y^2 + 2xz = c_2$$

تشكل الحل العام.

ويمر بكل نقطة في الفراغ سطح وحيد من كل من المجموعتين. وبما أن كل سطحين من هاتين المجموعتين يشتركان في نقطة، لهما منحنياً مشتركاً فإن الحل العام لجملة من المعادلات التفاضلية يتكون من مجموعة من المنحنيات. ويمكن تمثيل هذه المجموعة من المنحنيات بمعادلتي أية مجموعتين من السطوح مارتين بمجموعة المنحنيات المذكورة. فمثلاً:

$$xy + yz + xz = c_1$$
$$x^2 + y^2 + 2(c_1 - xy - yz) = c_2$$

يمكن أن تمثل التكامل العام.

(ب)

$$(e_1) \qquad yzdx + xzdy + xydz = 0$$
$$(e_2) \qquad z^2(dx + dy) + (xz + yz - xy)dz = 0$$

الحل:

المعادلة (e_1) كمولة وتكاملها العام:

$$(e_3) \qquad xyz = c_1$$

أما المعادلة الثانية فهي ليست كمولة.

لنضرب (e_1) بـ z و (e_2) بـ y ثم نطرح فنحصل على:

$$(e_4) \qquad z^2(y - x)dy + y^2(z - x)dz = 0$$

لنضرب المعادلة (e_4) بـ yz ولنعوض من (e_3) فنجد:

$$z^2(y^2z - c_1)dy + y^2(yz^2 - c_1)dz = 0$$

أو:

$$zdy + ydz - c_1(\frac{dy}{y^2} + \frac{dz}{z^2}) = 0$$

وتكاملها العام هو:

$$(e_5) \qquad yz + c_1(\frac{y+z}{yz}) = c_2$$

يتكون الحل العام إذن من $(e_3),(e_5)$، غير أنه يمكن استبدال (e_5) بمعادلة أبسط هي المعادلة: $xy + yz + xz = c_2$

نحصل عليها من (e_5) بتعويض عن c_1 بقيمته.

(ج)

$$(2x + z)dx + dy = 0$$
$$zdx + dz = 0$$

الحل:

المعادلة الأولى غير كمولة أما المعادلة الثانية فهي كمولة وتكاملها العام هو $z = ae^{-x}$، وبالتعويض من أجل z في المعادلة الأولى نجد:

$$(2x + ae^{-x})dx + dy = 0$$

وتكاملها العام هو: $x^2 - ae^{-x} + y = b$

ويكون الحل المشترك للجملة معطى بالمعادلتين:

$$ze^x = a$$
$$x^2 - z - y = b$$

(د)

$$ydx + zdy + xdz = 0$$
$$y^2dx + xdy + ydz = 0$$

الحل:

نلاحظ أن هاتين المعادلتان غير كمولتين. وبما أنه لا يمكن حذف z, dz بينهما (كذلك لا يمكن حذف y, dy أو x, dx) فليس لهذه الجملة حل مشترك.

(هـ)

$$(z-y)dx + dy + dz = 0$$
$$(z-y)dx - dy + dz = 0$$

الحل:

هاتان المعادلتان غير كمولتين. وبالطرح نجد أن: $dy = 0$

أي أن: $y = a$

وبالتعويض في المعادلة الأولى والمكاملة نجد: $x + \ln|z-a| = b$

ويكون الحل المشترك للمعادلتين هو أسرة المنحنيات الناتجة من تقاطع الأسرة الأخيرة مع المستوي $y = a$.

(ق) $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{-z}$$

ثم أوجد معادلات المنحنيات التكاملية المارة بالنقطة $(1,1,1)$.

الحل:

لننظر في المعادلتين: $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{-z}$ و $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z}$

إن المعادلة الأولى كمولة وحلها العام هو: $xz = c_1$

أما المعادلة الثانية ليست كمولة ولكن يمكن بالتعويض $z = \frac{c_1}{x}$ أن تـرد إلـى الشكل:

$$dy = (1 + \frac{c_1}{x^2})dx$$

وبالمكاملة نجد: $y = x - \frac{c_1}{x} + c_2$

وبتعويض $c_1 = xz$ نحصل على: $y = x - z + c_2$

أي أن: $y - x + z = c_2$

وهكذا فإن الحل العام يتكون من:

$$xz = c_1$$
$$y - x + z = c_2$$

أما المنحني التكاملي الذي يمر بالنقطة $(1,1,1)$ فهو تقاطع الأسطوانة الزائدية المقطع $xz = 1$ مع المستوي $y - x + z = 1$.

(و) لنناقش الآن هندسياً الحل العام لـ:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

فلنفرض للسهولة، أننا حصلنا بحل الجملة المفروضة على جملة من المعادلات الكمولة هما:

$$P_1dx + Q_1dy + R_1dz = 0$$
$$P_2dx + Q_2dy + R_2dz = 0$$

اللذين تكاملهما العام على الترتيب هو:

$$g(x, y, z) = c_1$$
$$h(x, y, z) = c_2$$

يمر بكل نقطة (x_0, y_0, z_0) من الفراغ زوج من السطوح (واحد من كل مجموعة) يتقطعان في منحني c_0 هو المنحني التكاملي للمجموعة المفروضة التي تمر بالنقطة. إن المستويين المماسين للسطحين عند (x_0, y_0, z_0) عموديان على الاتجاهين (P_1, Q_1, R_1) و (P_2, Q_2, R_2) المحسوبين عند النقطة، وأن الخط المشترك L_0 لهذين المستويين عمودي على هذين الاتجاهين.

لنفرض (X, Y, Z) أعداد توجيه L_0 فتكون:

$$X = \lambda \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix}$$

$$Y = \lambda \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix}$$

$$Z = \lambda \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix}$$

متناسبة مع P, Q, R (جميع المقادير محسوبة عند النقطة المفروضة). إن L_0 مماس لـ c_0 عند (x_0, y_0, z_0). لاحظ أن المماس لمنحني فراغي عند إحدى النقاط يقع في المستوي المماس عند هذه النقطة لأي سطح يحوي هذا المنحني وعلى هذا فإن المنحنيات التكاملية للجملة $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ تتكون من مجموعة مضاعفة غير منتهية من المنحنيات تتميز بكون المماس عند أية نقطة (x_0, y_0, z_0) من المنحني الذي يمر بها له (P_0, Q_0, R_0) أعداد توجيه له.

والجير بالذكر أن حزمتي السطوح التكاملية لـ $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ ولـ $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ متعامدتان.

٤-١١- تمارين غير محلولة:

(أ) تحقق أن المعادلات التالية كمولة ثم أوجد الحل العام إن كان الأمر ممكناً:

(1) $(2xyz + z^2)dx + x^2 zdy + (xz + 1)dz = 0$

(2) $zy^2 dx + zx^2 dy - x^2 y^2 dz = 0$

(3) $ydx + xdy + \dfrac{xy}{1-z} dz = 0$

(4) $2xz(y - z)dx - z(x^2 + 2z)dy + y(x^2 + 2y)dz = 0$

(5) $x^2 dx - z^2 dy - xydz = 0$

(6) $(\cos x + e^x y)dx + (e^x + e^y z)dy + e^y dz = 0$

(7) $xdx + ydy + (x^2 + y^2 + z^2 + 1)zdz = 0$

(8) $yz \ln zdx - zx \ln zdy + xydz = 0$

(ب) عين الدالة $f(y)$ التي تجعل المعادلة التفاضلية الكلية:

$$f(y)dx + xzdy + xy \ln|y|dz = 0$$

كمولة ثم أوجد حلها العام.

(ج) عين المنحنيات التكاملية للمعادلة:

$$(z + y)dx + ydy + zdz = 0$$

والواقعة على السطح:

(i) $\quad yz = 1$

(ii) $\quad x = y^2 + z^2$

(iii) $\quad x + y + z = 0$

(د) أوجد منحنيات المعادلة التفاضلية الكلية:

$$ydx - xdy + dz = 0$$

والواقعة على السطح $y = xz$.

(هـ) أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين التفاضليتين الكليتين في كل من الجمل التالية:

(i) $$dx + dy + (x - y)dz = 0$$
$$dx - dy + (x - y)dz = 0$$

(ii) $$xydx + zxdy + xydz = 0$$
$$z^2(dx + dy) + (xz + yz - xy)dz = 0$$

(iii) $$(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$$
$$(x + z)dx + ydy + xdz = 0$$

(IV) $$\frac{x^2dx}{y^2} = \frac{y^2dy}{x^2} = \frac{dz}{z}$$

(V) $$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{2x - 3y}$$

★★★★★★★★★★★★★

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية الجزئية

٥-١- بعض التعاريف المتضمنة معادلات تفاضلية جزئية:

إذا كانت الدالة $u = u(x, y)$ تابعة لمتغيرين مستقلين x, y (أو أكثر) فإننا نسمي مشتقات الدالة u بالنسبة لـ x أو لـ y **بالمشتقات الجزئية**. ونكتب:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

نسمي كل معادلة تربط بين الدالة ومتغيراتها المستقلة ومشتقاتها الجزئية بمعادلة تفاضلية جزئية ويكون لها الشكل:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, ...) = 0$$

نسمي **مرتبة المعادلة التفاضلية الجزئية** هي أعلى مرتبة مشتق جزئي تحويه المعادلة التفاضلية الجزئية. فمثلاً:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$$

هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية. وكذلك فإن المعادلة:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

هي من المرتبة الأولى.

سنقتصر في دراستنا على المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى وتصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية.

تأخذ المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الشكل العام:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (١)$$

كما تأخذ المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية الشكل العام.

$$H(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}) = 0 \qquad (٢)$$

نقول إن الدالة $u = u(x, y)$ في المتغيرين المستقلين x, y حل للمعادلة التفاضلية الجزئية إذا قلبت المعادلة التفاضلية بعد التعويض متطابقة.

الحل العام:

هو حل يحتوي على عدد من الدوال المستقلة الاختيارية يساوي مرتبة المعادلة.

الحل الخاص:

هو حل يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للدالة الاختيارية.

الحل الشاذ:

هو حل لا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للدوال الاختيارية.

أخيراً، تجدر الإشارة أن حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الناحية الهندسية يمثل من الناحية الهندسية سطحاً ندعوه سطحاً تكاملياً للمعادلة التفاضلية الجزئية. فالمعادلة التفاضلية الجزئية ليست إلا تعبيراً عن صفة هندسية معينة يتمتع بها هذا السطح التكاملي. فحل المعادلة التفاضلية الجزئية هو إذن إيجاد مجموعة السطوح التكاملية لها. ويمكن الحصول على المعادلات التفاضلية الجزئية من حذف الثوابت الاختيارية من علاقات مفروضة بين المتغيرات أو من حذف دوال اختيارية لهذه المتغيرات.

كما أنه يمكن أن تنشأ هذه المعادلات في المسائل الهندسية والفيزيائية.

٥-٢- منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية:

٥-٢-١- حذف الثوابت الاختيارية:

لنفرض أن u دالة في المتغيرين المستقلين x, y ومعرفة بالعلاقة:

$$g(x, y, u, a, b) = 0 \qquad (٣)$$

حيث a, b ثابتان اختياريان. باشتقاق العلاقة (٣) جزئياً بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + p\frac{\partial g}{\partial u} = 0 \qquad (٤)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + q\frac{\partial g}{\partial u} = 0 \qquad (٥)$$

حيث:

$$q = \frac{\partial u}{\partial y}, p = \frac{\partial u}{\partial x}$$

نحذف الثابتين الاختياريين من (٣) و(٤) و(٥) فنحصل على معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى:

$$f(x, y, u, p, q) = 0$$

٥-٢-٢- حذف الدوال الاختيارية:

ليكن $V_1 = V_1(x, y, u), V_2 = V_2(x, y, u)$ دالتين مستقلتين في المتغيرات x, y, u ولتكن:

$$\phi(V_1, V_2) = 0 \qquad (٧)$$

أية علاقة اختيارية بينهما. فإذا افترضنا u متغيراً غير مستقل واشتققنا بالنسبة لـ x, y جزئياً فنجد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+p\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}+p\frac{\partial V_2}{\partial u}\right)=0 \qquad (٨)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial V_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}+q\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial y}+q\frac{\partial V_2}{\partial u}\right)=0 \qquad (٩)$$

وبحذف $\frac{\partial \phi}{\partial V_1}, \frac{\partial \phi}{\partial V_2}$ من (٨) و(٩) (أي بما أنهما ليسا الحلّ التافه) ينتج:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x}+p\frac{\partial V_1}{\partial u} & \frac{\partial V_2}{\partial x}+p\frac{\partial V_2}{\partial u} \\ \frac{\partial V_1}{\partial y}+q\frac{\partial V_1}{\partial u} & \frac{\partial V_2}{\partial y}+q\frac{\partial V_2}{\partial u} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+p\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial y}+q\frac{\partial V_2}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}+p\frac{\partial V_2}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}+q\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial V_1}{\partial x}\frac{\partial V_2}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial y}+p\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V_2}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)+$$

$$+q\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\frac{\partial V_2}{\partial u}-\frac{\partial V_2}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)+pq\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V_2}{\partial u}-\frac{\partial V_2}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial u}\right)=0$$

وإذا كتبنا:

$$\lambda R=\frac{\partial V_1}{\partial x}\frac{\partial V_2}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial y}$$

$$\lambda Q=-\frac{\partial V_1}{\partial x}\frac{\partial V_2}{\partial u}+\frac{\partial V_2}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial u}$$

$$\lambda P=-\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_2}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial y}$$

فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل: $pP + qQ = R$

وهي معادلة تفاضلية جزئية خطية في p, q وخالية من الدوال الاختيارية.

٥-٢-٣- تمارين محلولة:

(أ) احذف الثابتين الاختياريين a, b من المعادلة:

$$u = ax^2 + by^2 + ab$$

الحل:

نشتق جزئياً بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = 2ax$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q = 2by$$

وبحساب a, b من هاتين المعادلتين والتعويض في العلاقة المفروضة نجد:

$$u = (\frac{1}{2}\frac{p}{x})x^2 + (\frac{1}{2}\frac{q}{y})y^2 + (\frac{1}{2}\frac{p}{x})(\frac{1}{2}\frac{q}{y})$$

أو:

$$pq + 2px^2y + 2qxy^2 = 4xyu$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى.

ملاحظة:

إذا كانت u دالة في x, y ومعرفة بعلاقة تحوي ثابتاً اختيارياً واحداً فإنه من الممكن عادةً الحصول على معادلتين تفاضليتين جزئيتين مختلفتين من المرتبة الأولى نتيجة لحذف الثابت.

(ب) احذف الثابت a من المعادلة $u = a(x+y)$

الحل:

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نحصل على $p = a$ وعلى المعادلة التفاضلية الجزئية $u = p(x+y)$.

أما إذا اشتققنا بالنسبة لـ y فإننا نحصل على $q = a$ وعلى المعادلة التفاضلية الجزئية $u = q(x+y)$.

إذا كان عدد الثوابت الاختيارية المطلوب حذفها يزيد عن عدد المتغيرات المستقلة فإن مرتبة المعادلة (أو المعادلات) التفاضلية الجزئية الناتجة أعلى، عادةً، من المرتبة الأولى.

(ج) احذف a, b, c من المعادلة $u = ax + by + cxy$.

الحل:

بالاشتقاق بالنسبة لـ x, y نجد:

$$(i) \qquad p = a + cy$$

$$(ii) \qquad q = b + cx$$

ولكن هاتين المعادلتين بالإضافة إلى المعادلة المفروضة غير كافية لحذف الثوابت لذلك نشتق المعادلة (i) جزئياً بالنسبة لـ x فنجد:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r = 0$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية. وإذا اشتققنا (ii) جزئياً بالنسبة لـ y فإننا نجد:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t = 0$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية. أما إذا اشتققنا (i) جزئياً بالنسبة لـــ y أو (ii) بالنسبة لـــ x فإننا نحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=s=c$$

وبالعودة إلى (i) نجد: $p=a+sy$

ومنه: $a=p-sy$

وإلى المعادلة (ii) فنجد: $b=q-sx$

وبالتعويض عن a,b,c في العلاقة المفروضة نجد:

$$u=(p-sy)x+(q-sx)y+sxy$$
$$u=px+qy-sxy$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية.

وهكذا نكون قد حصلنا على ثلاث معادلات تفاضلية جزئية:

$$r=0 \quad , \quad t=0 \quad , \quad u=px+qy-sxy$$

من نفس المرتبة (وهي أصغر مرتبة) ويمكن الحصول عليها ابتداءً من العلاقة المفروضة.

(ء) أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية التي تنشأ عن $\phi(\frac{u}{x^3},\frac{y}{x})=0$ حيث ϕ دالة اختيارية للمتغيرات.

الحل:

لنكتب العلاقة الدالية المفروضة بالشكل $\phi(V_1,V_2)=0$ حيث $V_1=\frac{u}{x^3},V_2=\frac{y}{x}$ ثم نشتق جزئياً بالنسبة لـــ x,y فنجد:

$$\frac{\partial\phi}{\partial V_1}\left(\frac{p}{x^3}-\frac{3u}{x^4}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial V_2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial V_1}\left(\frac{q}{x^3}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial V_2}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

وبحذف $\frac{\partial\phi}{\partial V_1},\frac{\partial\phi}{\partial V_2}$ ينتج:

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{x^3}-\frac{3u}{x^4} & -\frac{y}{x^2} \\ \frac{q}{x^3} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=\frac{p}{x^4}-\frac{3u}{x^5}+\frac{yq}{x^5}=0$$

أو بالشكل:

$$px+qy=3u$$

نلاحظ أنه يمكن كتابة العلاقة الدالية المفروضة بالشكل: $\frac{u}{x^3}=f(\frac{y}{x})$

أو بالشكل:

$$u=x^3 f(\frac{y}{x})$$

حيث f دالة اختيارية لمتغيرها. فإذا وضعنا $V=\frac{y}{x}$ ثم اشتققنا $u=x^3 f(V)$ بالنسبة لـ x,y نجد:

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2 f(V)+x^3\frac{df}{dV}\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$=3x^2 f(V)-xyf''(V)$$
$$q=\frac{\partial u}{\partial y}=x^3\frac{df}{dV}\frac{\partial V}{\partial y}=x^3\frac{df}{dV}\frac{1}{x}=x^2 f'(V)$$

وبحذف $f'(V)$ من هاتين العلاقتين ينتج:

$$px+qy=3x^3 f(V)=3u$$

تماماً كما حصلنا قبل قليل على العلاقة نفسها.

(هـ) احذف الدالة الاختيارية $\phi(x+y)$ من $u=\phi(x+y)$.

لنضع $x+y=u$ فتأخذ العلاقة المفروضة الشكل: $u=\phi(u)$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ x, y ينتج:

$$p=\frac{\partial\phi}{\partial u}=\phi'(u)$$

$$q=\phi'(u)$$

والمعادلة $p=q$ هي المعادلة التفاضلية الناتجة.

٥-٣- المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعالج كمعادلات تفاضلية عادية:

١- إذا كانت المعادلات التفاضلية الجزئية لا تحوي سوى المشتقات الجزئية بالنسبة لأحد المتغيرين فيمكن اعتبار المتغير الآخر وسيطاً ثابتاً وتكون ثوابت التكامل دوالاً كيفية في هذا الوسيط.

٢- يمكن معالجة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية بعملية تكامل بالنسبة لأحد المتغيرين أولاً ثم بعملية تكامل بالنسبة للمتغير الثاني على أن نأخذ في كل حالة ثابت تكامل هو دالة كيفية في المتغير الآخر.

٥-٤- المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى:

نقول عن معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى إنها خطية إذا كانت من الدرجة الأولى في المشتقين الجزئيين أي من الشكل:

$$P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=R(x,y,z) \qquad (١٠)$$

حيث: $p=\dfrac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لاغرانج.

علينا أن ننتبه إلى أن قولنا إن المعادلة (١٠) خطية يعني أنها من الدرجة الأولى في المشتقين الجزئيين فقط ويختلف هذا التعريف عن تعريف المعادلات التفاضلية العادية الخطية. نسمي الجملة

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (١١)$$

الجملة الملحقة أو الجملة المساعدة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (١٠).

٥-٤-١- مبرهنة (١):

الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية:

$$Pp+Qq=R$$

هو:

$$F(V_1,V_2)=0 \qquad (١٢)$$

حيث F دالة كيفية في الدالتين V_1,V_2 وحيث:

$$V_1(x,y,z)=c_1, V_2(x,y,z)=c_2$$

تكاملان أوليان مستقلان للجملة المساعدة.

البرهان:

إذا كان $V_1(x,y,z)=c_1$ تكاملاً أولياً للجملة التفاضلية (١١) فنستنتج من العلاقة:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}dx+\frac{\partial V_1}{\partial y}dy+\frac{\partial V_1}{\partial z}dz=0$$

أن:

$$P\frac{\partial V_1}{\partial x}+Q\frac{\partial V_1}{\partial y}+R\frac{\partial V_1}{\partial z}=0 \qquad (١٣)$$

كذلك إذا كان $V_2(x,y,z)=c_2$ تكاملاً أولياً للجملة (١١) ومستقلاً خطياً عن الأول فنجد بشكل مشابه لما سبق أن:

$$P\frac{\partial V_2}{\partial x}+Q\frac{\partial V_2}{\partial y}+R\frac{\partial V_2}{\partial z}=0 \qquad (١٤)$$

بحل المعادلتين (١٣) و(١٤) بالنسبة لـ P,Q,R نحصل على التناسب:

$$\frac{P}{\dfrac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(y,z)}}=\frac{Q}{\dfrac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(z,x)}}=\frac{R}{\dfrac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(x,y)}} \qquad (١٥)$$

لقد وجدنا في تشكيل المعادلات التفاضلية الجزئية أن العلاقة الجبرية $F(V_1,V_2)=0$ حيث F دالة كيفية، تقود إلى المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية:

$$p\frac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(y,z)}+q\frac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(z,x)}=\frac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(x,y)} \qquad (١٦)$$

إذا عوضنا المعينات الدالية محسوبة من (١٥) في (١٦) فتأخذ المعادلة (١٦) صيغة المعادلة (١٠) وهذا يعني أن الدالة المعطاة بالمعادلة (١٢) هي حل للمعادلة التفاضلية (١٠) وعندها تكون الدالتان V_1 و V_2 تكاملين أوليين مستقلين للجملة التفاضلية (١١).

٥-٤-٢- مبرهنة (٢):

إذا كانت $\psi_i(x_1,x_2,.....,x_n,z)=c_i \quad ,(i=\overline{1,n})$ تكاملات أولية مستقلة للجملة التفاضلية:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=.....=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R}$$

الملحقة بالمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية:

$$p_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+p_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+.....+p_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R$$

فإن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية يعطى بالعلاقة:

$$\varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots, \psi_n) = 0$$

حيث φ دالة كيفية.

(تقبل دون برهان).

٥-٤-٣- أمثلة محلولة:

(أ) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)z$$

الحل:

إن مولدات السطوح التكاملية لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية هي المنحنيات التكاملية للجملة التفاضلية:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

من النسبة الأولى والثانية نحصل على تكامل أولي أول:

$$V_1(x, y, z) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1$$

بطرح النسبة الثانية من الأولى نجد:

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

والتي تعطينا تكاملاً أولياً ثانياً ومستقلاً عن الأول:

$$V_2(x, y, z) = \frac{x - y}{z} = c_2$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المفروضة هو:

$$F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{x-y}{z}\right)=0$$

حيث F دالة كيفية.

(ب) إذا كانت u دالة في المتغيرات المستقلة x, y, z وتحقق المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(y-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

فبرهن أن u يحتوي x, y, z كدالة في التركيبين:

$$x^2+y^2+z^2, x+y+z$$

الحل:

إن الجملة الملحقة بالمعادلة التفاضلية الجزئية المفروضة هي:

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{du}{0}$$

ونجد أن أول تكامل أولي للجملة ينتج من $du=0$ أي أن: $u=c_1$

بجمع النسب الثلاث الأولى نحصل على النسبة: $\frac{dx+dy+dz}{0}$

أي أن: $dx+dy+dz=0$

ونحصل على تكامل أولي ثانٍ هو: $x+y+z=c_2$

بضرب بسط النسبة الأولى ومقامها بـ x والثانية بـ y والثالثة بـ z وجمع النسب الثلاث الناتجة نحصل على:

$$xdx+ydy+zdz=0$$

والتي تؤدي إلى تكامل أولي ثالث هو:

$$x^2+y^2+z^2=c_3$$

إن التكاملات الأولية الثلاثة مستقلة خطياً فهي تمثل الحل العام للجملة الملحقة وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة هو:

$$F(u, x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$$

حيث F دالة كيفية.

٥-٥- السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية المار بمنحن معلوم:

إذا كان:

$$V_1(x,y,z)=c_1$$
$$V_2(x,y,z)=c_2$$

الحل العام للجملة الملحقة فإن الحل العام كما برهنا للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية هو: $F(V_1,V_2)=0$

إن المسألة الآن هي تعيين الدالة F للحصول على السطح التكاملي المار بمنحن مفروض Γ.

لتكن المعادلات الوسيطية لـ Γ هي:

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$$

حيث t هو وسيط متحول. بما أن السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة الملحقة فعندها يكون السطح محققاً لـ:

$$V_1[x(t),y(t),z(t)]=c_1$$
$$V_2[x(t),y(t),z(t)]=c_2$$

بحذف t بين هاتين المعادلتين نحصل على الدالة F التي تربط بين c_1, c_2 $(F(c_1,c_2)=0)$، أي التي تربط بين V_1, V_2 الموافقة للسطح التكاملي المطلوب.

٥-٥-١- مثال محلول (١):

أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$x(y^2+z)p-y(x^2+z)q=(x^2-y^2)z$$

والمار بالمستقيم المعين بـ: $x+y=0 \quad ; \quad z=1$

الحل:

إن الجملة الملحقة بهذه المعادلة التفاضلية الجزئية هي:

$$\frac{dx}{x(y^2+z)}=\frac{dy}{-y(x^2+z)}=\frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

تقبل هذه الجملة التكاملين الأوليين المستقلين:

$$xyz=c_1 \quad , \quad x^2+y^2-2z=c_2$$

يمكن تمثيل المستقيم وسيطياً بالشكل:

$$x=t \quad ; \quad y=-t \quad ; \quad z=1$$

بالتبديل في التكاملين الأوليين نجد:

$$-t^2=c_1 \quad ; \quad 2t^2-2=c_2$$

بحذف t بين هاتين المعادلتين نحصل على:

$$2c_1+c_2+2=0$$

بتبديل c_1, c_2 في هذه العلاقة نحصل على السطح التكاملي المطلوب:

$$x^2+y^2+2xyz-2z+2=0$$

٥-٥-٢- مثال محلول (٢):

أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$xy^3p+x^2z^2q=y^3z$$

والمار من المنحني: $y=z^2 \quad , \quad x=-z^3$

الحل:

إن الجملة المساعدة بهذه المعادلة التفاضلية الجزئية هي:

$$\frac{dx}{xy^3} = \frac{dy}{x^2z^2} = \frac{dz}{y^3z}$$

من النسبتين الأولى والثالثة نحصل على:

$$\frac{x}{z} = c_1 \qquad \text{(i)}$$

وبالاستفادة من ذلك في النسبتين الثانية والثالثة نجد أن:

$$y^3dy = c_1^2z^3dz$$

وبالمكاملة نجد: $y^4 - c_1^2z^4 = c_2$

وبالتعويض بقيمة c_1 نحصل على: $y^4 - x^2z^2 = c_2$ (ii)

نحذف الآن الإحداثيات بين معادلتي المنحني و(i) و(ii) فنجد $c_2 = 0$، ويكون السطح المطلوب هو: $y^4 = x^2z^2$

٥-٦- تعيين السطوح المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة:

لنفرض لدينا أسرة من السطوح التابعة لوسيط واحد والمعطاة بالمعادلة:

$$\psi(x, y, z) = c \qquad (١٧)$$

ونريد أن نجد جميع السطوح التي تتعامد مع الأسرة السابقة أي التي تقطع كل سطح من هذه السطوح وفق زاوية قائمة.

إن أمثال توجيه الناظم في النقطة (x, y, z) لسطح من الأسرة (١٧) تعطى بـ:

$$(P, Q, R) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

إذا كان السطح المعين بالمعادلة:

$$z = \phi(x, y) \qquad (١٨)$$

متعامداً مع كل سطح من المجموعة المفروضة فإن ناظمه في النقطة (x, y, z) والذي أمثال توجيهه هي: $(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)$ عمودي على اتجاه الناظم (P, Q, R) لسطح الأسرة (١٧) في تلك النقطة. وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

أي أن:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (١٩)$$

وهي التي تعين السطح (١٨).

وبالعكس، إن أي حل للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (١٩) عمودي على سطح من سطوح الأسرة المعينة بالمعادلة (١٧) لأن المعادلة (١٩) تعبر عن تعامد ناظم أي حل لها مع ناظم الأسرة (١٧) المار بالنقطة ذاتها.

نستنتج مما سبق أن مجموعة السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (١٩) هي مجموعة السطوح المتعامدة مع الأسرة (١٧). وبعبارة ثانية، تكون السطوح المتعامدة مع أسرة سطوح المعادلة (١٧) هي السطوح المولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة التفاضلية:

$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}$$

الملحقة بالمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (١٩).

٥-٦-١- مثال محلول:

أوجد السطح المتعامد مع أسرة السطوح المعينة بالمعادلة:

$$z(x+y)=c(3z+1)$$

والمار بالدائرة المعينة بالمعادلتين:

$$x^2+y^2=1 \quad ; \quad z=1$$

الحل:

تأخذ المعادلة (١٧) في هذه الحالة الشكل:

$$\psi(x,y,z)=\frac{z(x+y)}{3z+1}=c$$

إن السطوح المتعامدة مع هذه الأسرة هي السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (١٩) أي السطوح المولدة بالمنحنيات للجملة المساعدة:

$$\frac{dx}{z(3z+1)}=\frac{dy}{z(3z+1)}=\frac{dz}{x+y}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد تكاملاً أولياً لهذه الجملة هو: $x-y=c_1$

نضرب بسط النسبة الأولى ومقامها بـ x والثانية بـ y والثالثة بـ $-z(3z+1)$ ونجمع الناتج فنحصل على النسبة:

$$\frac{xdx+ydy-z(3z+1)dz}{0}$$

ومنها نجد تكاملاً أولياً ثانياً هو: $x^2+y^2-z^2-2z^3=c_2$

ومنه فإن معادلة أي سطح عمودي على أسرة السطوح المفروضة تأخذ الشكل:

$$x^2+y^2-2z^3-z^2=\phi(x,y)$$

ونلاحظ أن الدالة ϕ الموافقة للسطح المار بالدائرة المعينة بالمعادلتين $x^2+y^2=1$ ، $z=1$ هي $\phi=2$ وبالتالي يتعين السطح المفروض بالمعادلة:

$$x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = 2$$

٥-٧- المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى وغير الخطية:

سنبحث في هذه الفقرة مسألة أكثر تعقيداً من سابقتها وهي البحث عن حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية.

٥-٧-١- تعاريف ومفاهيم أولية:

نقول عن معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى:

$$f(x, y, z; p, q) = 0 \qquad (٢٠)$$

حيث

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

إنها غير خطية إذا كانت الدالة f غير خطية في p, q.

يعرف كل حل $z = z(x, y)$ للمعادلة (٢٠) سطحاً في الفضاء نسميه سطحاً تكاملياً للمعادلة. إذا كان $z = z(x, y)$ سطحاً تكاملياً للمعادلة فتكون أمثال توجيه ناظمه عند نقطة $M(x, y, z)$ هي $(p, q, -1)$ وإذا عوضنا في المعادلة (٢٠) بعبارات p, q, z فإنها تكون محققة مطابقة.

عند نقطة مثبتة ولكنها كيفية $M(x, y, z)$ من الفضاء تعرف المعادلة (٢٠) علاقة $\phi(p, q) = 0$ بين p, q، ويمكن كتابة هذه العلاقة بأحد الشكلين $p = \psi(q)$ أو $q = \varphi(p)$.

وبناءً على ذلك، فإنه يمر من كل نقطة M من الفضاء أسرة من السطوح التكاملية للمعادلة أمثال توجيه نواظمها $(p, \varphi(p), -1)$ وبإعطاء p قيمة معينة يتعين ناظم أحد السطوح التكاملية عند النقطة M ويكافئ ذلك أن سطحاً تكاملياً قد تعين موضعياً في جوار لا متناه في الصغر حول النقطة M (في هذا الجوار

يمكن أن نلبس العنصر المماسي للسطح بعنصر السطح). إن معادلة المستقيم الناظم لأحد السطوح التكاملية المارة من M هي:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{\varphi(p)}=\frac{Z-z}{-1} \qquad (٢١)$$

حيث (X,Y,Z) هي إحداثيات النقطة الدارجة على المستقيم. عندما تأخذ p كل قيمها الممكنة يولد المستقيم الناظم (٢١) مخروطاً رأسه M، ونجد معادلته بحذف p بين المعادلتين (٢١) لنحصل على:

$$\frac{Y-y}{Z-z}+\varphi(\frac{X-x}{Z-z})=0$$

يسمى هذا المخروط مخروط النواظم عند النقطة M. ولكي يكون عنصر من سطح ما عنصراً تكاملياً للمعادلة عند M فيجب أن يقع ناظمه على مخروط النواظم عند M. إن النقطة M كيفية، ويوجد بالتالي مخروط نواظم عند كل نقطة (x,y,z) من ساحة تغير المتحولات الإحداثية. يعني إذن حل المعادلة (٢٠) إيجاد كل السطوح $z=z(x,y)$ التي تقع نواظمها في كل نقطة (x,y,z) على مخروط النواظم في تلك النقطة.

٥-٧-٢- التكامل التام للمعادلة:

نسمي كل تكامل للمعادلة (٢٠) يحتوي ثابتين كيفيين تكاملاً تاماً أو حلاً تاماً لها، وبحسب تعريفه فإن للتكامل التام الشكل:

$$u(x,y,z,a,b)=0 \qquad (٢٢)$$

يمثل التكامل التام للمعادلة (٢٠) أسرة سطوح ذات وسيطين. ومقابل كل قيمتين خاصتين لـ a,b نحصل على سطح تكاملي للمعادلة.

سندرس أولاً كيف نجد تكاملاً تاماً للمعادلة (٢٠)، ونتعلم بعدئذ كيف نجد منه الحل الشاذ (إن وجد) والحل العام والحلول الخاصة للمعادلة.

٥-٧-٣- إيجاد تكامل تام للمعادلة في حالات بسيطة:

ندرس الآن حالات خاصة يكون فيها إيجاد تكامل تـام للمعادلـة (٢٠) مسـألة سهلة، وأما الطريقة العامة في إيجاد التكامل التام فنؤجلها إلـى حـين دراسـة طريقتي شارب وجاكوبي.

١) تحوي المعادلة p,q فقط:

إذا كان للمعادلة الشكل $f(p,q)=0$ ، وأمكن كتابتهـا بالشـكل $q=\varphi(p)$ ، فنجد بوضع $p=a$ حيث a ثابت كيفي أن:

$$dz = pdx + qdy = adx + \varphi(a)dy$$

وبالمكاملة نجد التكامل التام:

$$z = ax + \varphi(a)y + b$$

حيث b ثابت كيفي آخر.

٢) إذا كان للمعادلة الشكل: $g(x,p)=h(y,q)$

فنضع: $g(x,p)=a=h(y,q)$

ونحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى p,q وليكن:

$$p=\xi(x,a) \quad , \quad q=\eta(y,a)$$

وبالتالي فإن: $dz=\xi(x,a)dx+\eta(y,a)dy$

وبالمكاملة نجد: $z=\int\xi(x,a)dx+\int\eta(y,a)dy+b$

حيث a,b ثابتان كيفيان، والعبارة الأخيرة تمثل تكاملاً تاماً للمعادلة.

٣) لا تحوي المعادلة المتحولين المستقلين:

إذا كان للمعادلة الشكل: $f(z,p,q)=0$

فنضع $z=z(u)$ ، حيث $u=x+ay$ و a ثابت كيفي، ويكون:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du} \quad , \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{dz}{du}$$

وتأخذ المعادلة الشكل:

$$f(z,\frac{dz}{du},a\frac{dz}{du})=0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى، وبمكاملتها نجد:

$$z=\phi(u,a,b)=\phi(x+ay,a,b)$$

حيث b ثابت المكاملة. وباحتواء هذا التكامل على ثابتين كيفيين فإنه يكون تكاملاً تاماً للمعادلة.

٤) للمعادلة شكل معادلة كليرو: $z=xp+yq+h(p,q)$

نضع $p=a, q=b$ حيث أن a,b ثابتان كيفيان فنجد: $z=ax+by+c$

أي أن $dz=adx+bdy$

ونرى أن المعادلة تتحقق بالدالة z إذا كان $c=h(a,b)$.

وبناءً على ذلك ولإيجاد تكامل تام لمعادلة تفاضلية جزئية لها شكل معادلة كليرو نعوض p,q فيها بثابتين كيفيين.

٥-٧-٤- أمثلة محلولة:

١- أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة: $q+4p^2=0$

الحل:

بأخذ $p=a$ فنجد $q=-4a^2$، وبالتالي فإن: $dz=adx-4a^2dy$

وبالمكاملة نجد التكامل التام: $z=ax-4a^2y+b$

٢- أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة: $2x^2-y-p+q^2=0$

الحل:

نكتب المعادلة بالشكل: $p-3x^2=q^2-y$

ولنضع: $p-3x^2=a=q^2-y$

أي أن: $p=a+3x^2 \quad , \quad q=\sqrt{a+y}$

ويكون: $dz=(a+3x^2)dx+\sqrt{a+y}dy$

وبالمكاملة نجد:

$$z=ax+x^3+\frac{2}{3}(a+y)^{\frac{3}{2}}+b$$

هذا يعني أن: $4(a+y)^3=9(z-ax-x^3-b)^2$

ملاحظة:

إن عملية التربيع الأخيرة تجعلنا نستغني عن أخذ $q=-\sqrt{a+y}$.

٣- أوجد تكاملاً للمعادلة: $z^2(p^2z^2+q^2)=1$

الحل:

ليكن a ثابتاً كيفياً ولنضع $z=z(u)$ حيث $u=x+ay$، فيكون:

$$p=\frac{dz}{du} \quad , \quad q=a\frac{dz}{du}$$

وتصبح المعادلة بالشكل: $z^2(\frac{dz}{du})^2(z^2+a^2)=1$

أي أن: $\frac{du}{dz}=z\sqrt{z^2+a^2}$

وبالمكاملة نجد: $u+b=\frac{1}{3}(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$

وبالتعويض بعبارة u والتربيع نجد التكامل التام:

$$9(x+ay+b)^2=(z^2+a^2)^3$$

٤- أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة:

$$z=px+qy+p^2+q^2$$

الحل:

نضع في المعادلة $p=a, q=b$ فنجد التكامل التام:

$$z=ax+by+a^2+b^2$$

٥-٨- التكامل الشاذ - التكامل العام - التكاملات الخاصة:

باعتبار x, y, z وسطاء و p, q متحولين، تكون المعادلة:

$$f(x,y,z,p,q)=0 \qquad (٢٣)$$

معادلة جبرية في p, q، وتفرض بالتالي شرطاً على اتجاه النواظم للسطوح التكاملية في كل نقطة من ساحة تحول (x, y, z). ويكون كل سطح يقع ناظمه على مخروط النواظم في كل نقطة (x, y, z) سطحاً تكاملياً للمعادلة (٢٣).

الآن إذا وجد مغلف لأسرة السطوح (٢٢) فإنه يمس في كل نقطة منه أحد السطوح التكاملية في الأسرة (٢٢)، وبالتالي فإن ناظمه في كل نقطة منه يكون منطبقاً مع ناظم أحد السطوح التكاملية في الأسرة (٢٢). فهو إذن حل للمعادلة (٢٣).

إذا وجد مغلف الأسرة ذات الوسيطين (٢٢) من السطوح التكاملية، وهو كما رأينا حل للمعادلة (٢٣) فنسميه تكاملاً شاذاً أو حلاً شاذاً للمعادلة، نحصل عليه بحذف a, b بين المعادلات:

$$u=0 \;;\; \frac{\partial u}{\partial a}=0 \;;\; \frac{\partial u}{\partial b}=0 \qquad (٢٤)$$

وبناءً على ذلك، ولإيجاد التكامل الشاذ للمعادلة (٢٣) نحذف a,b بين المعادلات (٢٤) ثم نتحقق أن الناتج يحقق المعادلة (٢٣).

يمكن أن نحصل من أسرة السطوح التكاملية ذات الوسيطين (٢٢) على أسرة سطوح تكاملية ذات وسيط واحد، وذلك بربط الثابتين الكيفيين a,b في (٢٢) بعلاقة من الشكل $b = g(a)$، حيث أن g دالة من الصنف c^1.

إن الدالة g كيفية، ومقابل كل اختيار لها نجد أسرة سطوح تكاملية ذات وسيط واحد:

$$u(x,y,z,a,g(a)) = 0 \qquad (٢٥)$$

إذا وجد مغلف الأسرة (٢٥)، حيث إن g دالة كيفية مختارة، وليكن:

$$V_g(x,y,z) = 0 \qquad (٢٦)$$

كان تكاملاً للمعادلة (٢٣) ونسميه تكاملاً خاصاً، أو حلاً خاصاً لها. نسمي مجموعة التكاملات الخاصة للمعادلة تكاملها العام أو حلها العام. وبناء على ذلك فالتكامل العام لـ (٢٣) هو مجموعة الحلول (٢٦) حيث إن g فيها كيفي (سوى أنه من c^1)، وهو بالتالي مجموعة مغلفات أسر السطوح التكاملية ذات الوسيط الواحد (٢٥) والناتجة بأية طريقة ممكنة من الأسرة (٢٢).

إذا وجد مغلف الأسرة (٢٥) فإنه يعطى آنئذ بحذف a بين المعادلتين:

$$u(x,y,z,a,g(a)) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial a} = 0 \qquad (٢٧)$$

أي بحذف a بين المعادلتين:

$$u = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial g}.\frac{dg}{da} = 0 \qquad (٢٧)$$

وبالطبع ما دام g كيفياً فمن المستحيل غالباً إجراء عملية حذف بين المعادلتين (٢٧) والوصول إلى عبارة صريحة للحل العام. لكن يمكن دوماً الحصول على

حلول خاصة للمعادلة وذلك بإعطاء g صيغاً معينة وحذف a في كل مرة بين المعادلتين (٢٧).

٥-٨-١- أمثلة محلولة:

(أ) لنعتبر معادلة كليرو:

$$z = xp + yq + p^2 + q^2 \qquad (٢٨)$$

إن التكامل التام لهذه المعادلة هو:

$$z = ax + by + a^2 + b^2 \qquad (٢٩)$$

وباشتقاق (٢٩) جزئياً بالنسبة لـ a,b نجد:

$$x + 2a = 0 \quad ; \quad y + 2b = 0 \qquad (٣٠)$$

وبحذف a,b بين المعادلتين (٢٩) و(٣٠) نحصل على مغلف أسرة المستويات (٢٩) وهو مجسم القطع المكافئ الدوراني:

$$z = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2) \qquad (٣١)$$

ونتحقق بسهولة أن (٣١) يحقق معادلة كليرو وبالتالي فهو حلها الشاذ.

إذا ربطنا الثابتين الكيفيين في التكامل التام (٢٩) بعلاقة معينة $b = g(a)$ فنحصل على أسرة السطوح التكاملية ذات الوسيط الواحد:

$$z = ax + g(a)y + a^2 + g^2(a) \qquad (٣٢)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ a نجد:

$$x + g'(a)y + 2a + 2g(a).g'(a) = 0 \qquad (٣٣)$$

وبحذف a بين المعادلتين الأخيرتين نجد حلاً خاصاً للمعادلة (g معين). إذا أخذنا في (٣٢) و(٣٣)، $g(a) = 0$ ويكافئ ذلك أن نأخذ من أصل أسرة

المستويات (٢٩)الممثلة بالتكامل التام تلك التي تعامد المستوي $y=0$ (أي الأسرة $z=ax+a^2$)، فتصبح (٣٢)و (٣٣) كما يلي:

$$x+2a=0 \quad , \quad z=ax+a^2 \qquad (٣٤)$$

وبحذف a بين المعادلتين الأخيرتين نجد الحل الخاص: $z=-\frac{1}{4}x^2$

وهو يمثل أسطوانة قطعية مكافئية يوازي مولدها المحور y.

إذا أخذنا من أصل (٢٩) أسرة المستويات المارة من النقطة $(0,0,1)$ فنجد من (٢٩) أن $a^2+b^2=1$ وتأخذ (٣٢) الشكل:

$$z=ax+\varepsilon y\sqrt{1-a^2}+1$$

ومغلفها هو المخروط الدائري القائم ذو الرأس $(0,0,1)$:

$$(z-1)^2=x^2+y^2$$

وهو حل خاص لمعادلة كليرو.

إذا تركنا $g(a)$ في (٣٢) و(٣٣) كيفياً فإن التكامل الناشئ عن عملية حذف a هو التكامل العام للمعادلة (٢٨).

(ب) وجدنا في المثال (٣) من البند السابق أن التكامل التام للمعادلة:

$$z^2(z^2p^2+q^2)=1$$

هو:

$$9(x+ay+b)^2=(z^2+a^2)^3 \qquad (٣٥)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ a,b نجد:

$$18y(x+ay+b)=6a(z^2+a^2)^2 \qquad (٣٦)$$

$$x+ay+b=0 \qquad (٣٧)$$

وبتعويض (٣٧) في (٣٦) و(٣٥) نجد أن $a=0, z=0$.

ولكن $z=0$ لا يحقق المعادلة وبالتالي فهو ليس حلاً شاذاً لها.

٥-٩- المميزات:

نسمي مميزاً أو منحنياً مميزاً للمعادلة (٢٠) كل منحن ناتج من تقاطع سطحين متتاليين من أية أسرة من السطوح التكاملية ذات الوسيط الواحد، أي أسرة من الشكل $u(x, y, z, a, g(a))$، بناءً على ذلك تعطى المميزات بالمعادلتين:

$$u(x, y, z, a, g(a)) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial g}\frac{dg}{da} = 0 \qquad (٣٨)$$

من أجل دالة مختارة g وقيمة معينة لـ a نحصل في (٣٨) على سطحين يؤلف تقاطعهما منحنياً مميزاً للمعادلة. إذا أعطينا g صيغة معينة وتركنا a كيفياً فإن المعادلتين (٣٨) تمثلان معاً أسرة ذات وسيط واحد من المنحنيات المميزة. وبحذف a بين المعادلتين (٣٨) نحصل على السطح المولد بهذه الأسرة من المميزات وهو مغلف أسرة السطوح $u(x, y, z, a, g(a)) = 0$ نفسه، أي أنه حل خاص للمعادلة نستنتج إذن أن كل حل خاص للمعادلة يتولد بأسرة ذات وسيط واحد من المنحنيات المميزة. تمثل مجموعة كل السطوح المولدة بكل أسرة المنحنيات المميزة ذات الوسيط الواحد التكامل العام للمعادلة.

تمثل المعادلتان (٣٨) أسرة منحنيات ثلاثية اللاتناهي، وبمعنى أنه توجد ثلاث درجات من الحرية توافق قيماً كيفية للثلاثية $(a, g'(a), g(a))$. وبالفعل يمكن أن نعطي الثلاثية الأخيرة أي قيمة نختارها فمن أجل قيمة كيفية لـ a تكون قيمة $g'(a)$ كيفية ومستقلة عن قيمة a لأن g' كيفي، وتكون قيمة $g(a) = \int g'(a)da + c$ كيفية ومستقلة عن قيمتي $a, g'(a)$ لأن c كيفي. ويمكن أن نقول أيضاً:

إن المعادلتين (٣٨) تمثل أسرة بثلاثة وسطاء.

إذا وجد حل شاذ للمعادلة فإن كل السطوح التكاملية تمسه بالتالي يجب أن تكون نقاط التماس لسطحين متتاليين من الأسرة (٢٥) منتمية إليه. إذن يجب أن يمسه كل منحن مميز، ويجب أن تمسه من ثم كل السطوح المولدة بأية مجموعة جزئية منها والممثلة بالمعادلة (٣٨).

٥-٩-١- مثال محلول:

تعطى مميزات معادلة كليرو بالمعادلتين (٣٢) و(٣٣) وهي أسرة المستقيمات ثلاثية اللاتناهي التي يمس كل منها السطح (٣١) الممثل للحل الشاذ. إذا أخذنا من أصل هذه الأسرة المميزات المعامدة للمستوي $y = 0$، أي الأسرة (٣٤)، فيكون السطح المولد بها وهو الأسطوانة المكافئية $z = -\frac{1}{4}x^2$ تكاملاً خاصاً للمعادلة.

وإذا أخذنا أسرة المميزات المارة من النقطة $(0,0,1)$، أي الأسرة:

$$z = ax + \varepsilon y\sqrt{1-a^2} + 1 \quad ; \quad 0 = x\sqrt{1-a^2} - \varepsilon ay$$

فإنها تولد المخروط:

$$(z-1)^2 = x^2 + y^2$$

وهو تكامل خاص للمعادلة. ونتحقق دون صعوبة أن كلاً من الأسطوانة المكافئية والمخروط يمس المجسم المكافئي الدوراني (٣١) والممثل للتكامل الشاذ.

٥-١٠- التكامل العام لمعادلة لاغرانج:

إن معادلة لاغرانج الخطية هي حالة خاصة من المعادلة (٢٠).

ولهذا يمكن مكاملتها وفق المنهج المدروس أعلاه.

ليكن $\psi = c_1, \phi = c_2$ تكاملين أوليين للجملة المساعدة المرتبطة بمعادلة لاغرانج فيكون:

$$\psi + a\phi + b = 0 \qquad (٣٩)$$

تكاملاً أولياً أيضاً، وباحتوائه على ثابتين كيفيين فإنه يؤلف تكاملاً تاماً لمعادلة لاغرانج. ويكون التكامل العام لمعادلة لاغرانج، وفق المنهج المدروس أعلاه، هو ناتج حذف a بين المعادلتين:

$$\psi + a\phi + g(a) = 0 \qquad (٤٠)$$

$$\phi + g'(a) = 0 \qquad (٤١)$$

تدل المعادلة (٤١) على أن a دالة في ϕ فقط، وبالتعويض في (٤٠) نجد أن ψ دالة في ϕ، وليكن $\psi = h(\phi)$، ويكافئ ذلك أن $f(\psi, \phi) = 0$، وهو التكامل العام الذي وجدناه لدى دراسة معادلة لاغرانج.

إن معادلة لاغرانج فريدة من حيث كون تكاملها التام (٣٩) حالة خاصة من تكاملها العام. ومن خصوصيات هذه المعادلة أيضاً أن منحنياتها المميزة، وهي هنا المنحنيات التكاملية للجملة المساعدة المرتبطة بها، تؤلف أسرة ذات وسيطين، هذا على حين تحوي أسرة مميزات المعادلة غير الخطية (٢٠) على ثلاثة وسطاء.

وبشكل عام يمر من كل نقطة مميز واحد لمعادلة لاغرانج، هذا على حين قد يمر من نقطة مجموعة غير منتهية من مميزات المعادلة غير الخطية (٢٠) مشكلةً سطحاً.

٥-١١- طريقتا شارب وجاكوبي في مكاملة معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى:

ندرس في هذه الفقرة طريقتين عامتين في مكاملة معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى ليست بالضرورة خطية. تعالج طريقة شارب معادلات من هذا النوع بمتحولين فقط، وأما طريقة جاكوبي فتعالج معادلات من النوع المذكور بأي عدد من المتحولات.

وسنرى أن طريقة جاكوبي تقود بشكل طبيعي إلى مكاملة جملة معادلات تفاضلية جزئية.

٥-١١-١- طريقة شارب:

قمنا في البند ٥-٧-٣ بمكاملة المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية:

$$h(x,p)=g(y,q) \qquad (٤٢)$$

وذلك باستعمال معادلة إضافية:

$$h(x,p)=a \qquad (٤٣)$$

وبحل المعادلتين:

$$h(x,p)=a=g(y,q) \qquad (٤٤)$$

بالنسبة إلى p,q نجد:

$$p=\xi(x,a);q=\eta(y,a)$$

وبالتعويض في المعادلة الكلية $dz=pdx+qdy$ نجد معادلة كلية كمولة لأنها ذات متحولات منفصلة. وبعد المكاملة نجد التكامل التام للمعادلة (٤٢).

سنطبق الآن طريقة مماثلة لمكاملة معادلة من المرتبة الأولى في متحولين x,y وليست بالضرورة خطية:

$$f(x,y,z,p,q)=0 \qquad (٤٥)$$

ويجب أن نجد معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى:

$$g(x,y,z,p,q)=0 \qquad (٤٦)$$

نسميها المعادلة الإضافية، وبشكل يمكن فيه حساب p,q من (٤٥) و(٤٦) بدلالة x,y,z فنجد:

$$p=\xi(x,y,z) \quad , \quad q=\eta(x,y,z) \qquad (٤٧)$$

وحيث تصبح المعادلة الكلية كمولة.

إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة الكلية كمولة هو: $F.rotF=0$

حيث إن $F=(p,q,-1)$. وبما أن:

$$rotF=(-\frac{\partial q}{\partial z},\frac{\partial p}{\partial z},\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})$$

إذن فالشرط اللازم والكافي لكمولية المعادلة الكلية هو:

$$p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (٤٨)$$

وباشتقاق (٤٥) و(٤٦) جزئياً بالنسبة لـ x معتبرين p,q، وكما تدل عليه العلاقتان (٤٧)، دالتين في x,y,z فنجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

نحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى $\frac{\partial q}{\partial x}$، ولذلك نضرب المعادلة الأولى بـ $\frac{\partial g}{\partial p}$ والثانية بـ $\frac{\partial f}{\partial p}$ ونطرح الثانية من الأولى فنجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}+(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q})\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (٤٩)$$

وبوضع:

$$J=\frac{\partial(f,g)}{\partial(p,q)} \qquad (٥٠)$$

نكتب المعادلة (٤٩) بالشكل:

$$J\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,p)} \qquad (٥١)$$

نلفت الانتباه إلى أن $J\neq 0$ لأنه افترضنا أنه يمكن حل (٤٥) و(٤٦) بالنسبة إلى p,q .

وبشكل مماثل نجد:

$$J\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,p)};J\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,q)};J\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,q)} \qquad (٥٢)$$

وبضرب المعادلة (٤٨) بـــ J والتعويض فيها بقيم

$$J\frac{\partial q}{\partial x},J\frac{\partial q}{\partial z},J\frac{\partial p}{\partial y},J\frac{\partial p}{\partial z}$$

محسوبة بالعلاقات (٥٢) و (٥١) نجد:

$$p(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial z})+q(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial z})+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}=0$$

أي أن:

$$-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y}-(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q})\frac{\partial g}{\partial z}+ \qquad (٥٣)$$
$$+(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z})\frac{\partial g}{\partial p}+(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z})\frac{\partial g}{\partial q}=0$$

إن المعادلة (٥٣) معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى، الدالة المجهولة فيها هي g، ومتحولاتها المستقلة هي x, y, z, p, q.

وتكون الجملة التفاضلية المساعدة المرتبطة فيها:

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dg}{0} \qquad (٥٤)$$

إذا استطعنا إيجاد أي تكامل أولي لهذه الجملة يحوي p أو q أو كليهما معاً، فيمكن أخذه بمثابة المعادلة التفاضلية الإضافية (٤٦)، التي بحلها مع (٤٥) نجد p, q اللتين تجعلان المعادلة الكلية كمولة.

بعد إيجاد التكامل التام للمعادلة (٤٥) يمكن بالطرق المعتادة إيجاد التكاملات العامة والتكامل الشاذ.

٥-١١-١- تمارين محلولة:

طبق طريقة شارب لإيجاد تكاملات تامة للمعادلات التالية:

$$2xz - px^2 - 2qxy + pq = 0 \qquad (١)$$

الحل:

لنأخذ الطرف الأيسر في المعادلة (١) على أنه الدالة f ونعوض في الجملة المساعدة (٥٤) فنجد:

$$\frac{dx}{x^2 - q} = \frac{dy}{2xy - p} = \frac{dz}{px^2 + 2xyq - 2pq} =$$

$$= \frac{dp}{2z-2qy} = \frac{dq}{0} = \frac{dg}{0}$$

ومن النسبة ما قبل الأخيرة نجد أن $q = a$ تكامل أولي للجملة المساعدة.

من المعادلة الأخيرة والمعادلة المعطاة نحسب p فنجد:

$$p = 2x\frac{z-ay}{x^2-a}$$

ويكون: $$dz = pdx + qdy = 2x\frac{z-ay}{x^2-a}dx + ady$$

أي أن: $$\frac{dz-ady}{z-ay} = \frac{2xdx}{x^2-a}$$

بالمكاملة نحصل على: $z = ay + b(x^2-a)$

وهو تكامل تام للمعادلة المفروضة.

لإيجاد التكامل الشاذ للمعادلة نحذف a,b بين التكامل التام والمعادلتين:

$$y-b=0 \quad , \quad x^2-a=0$$

والناتجتين منه بالاشتقاق الجزئي بالنسبة إلى a,b على الترتيب وبنتيجة الحذف نجد التكامل الشاذ $yx^2 = z$.

$$2z + p^2 + qy + 2y^2 = 0 \qquad (٢)$$

الحل:

إن الجملة المساعدة هي:

$$\frac{dx}{-2p} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-2p^2-qy} = \frac{dp}{2p} = \frac{dq}{2q+4y} = \frac{dg}{0}$$

ومن النسبتين الثانية والرابعة نجد التكامل الأولي: $py^2 = a$.

وبالاستفادة من النتيجة الأخيرة والمعادلة الأصلية نجد:

$$dz = pdx + qdy = \frac{a}{y^2}dx - (\frac{2z}{y} + \frac{a^2}{y^5} + 2y)dy$$

أي أن:
$$y^2dz + 2yzdy = adx - (\frac{a^2}{y^3} + 2y^3)dy$$

بالمكاملة نجد:
$$y^2z = ax + \frac{a^2}{2}\frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}y^4 + b$$

أو خذ النسبتين الأولى والرابعة لتجد تكاملاً تاماً آخر:
$$y^2[(x+a)^2 + y^2 + 2z] = b$$

(٣) $yzp^2 = q$

الحل:

الجملة المساعدة هي:
$$\frac{dx}{-2pyz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2p^2yz + q} = \frac{dp}{yp^3} = \frac{dq}{zp^2 + qyp^2} = \frac{dg}{0}$$

بتعويض q من المعادلة المعطاة في النسبة الثالثة نجد:
$$\frac{dz}{-p^2yz} = \frac{dp}{yp^2}$$

أي أن:
$$\frac{dz}{z} + \frac{dp}{p} = 0$$

بالمكاملة نحصل على:
$$zp = a$$

ومن هذا التكامل الأولى والمعادلة الأصلية نجد: $q = \frac{a^2y}{z}$

وبالتالي:
$$dz = pdx + qdy = \frac{a}{z}dx + \frac{a^2y}{z}dy$$

بالمكاملة نجد:
$$z^2 = 2ax + a^2y^2 + b$$

٥-١١-٣- طريقة جاكوبي:

بمقدورنا وفق طريقة جاكوبي معالجة معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى بأكثر من متحولين.

لنعتبر المعادلة الجزئية:

$$f(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0 \qquad (٥٥)$$

حيث لا تظهر الدالة المجهولة z إلا عبر مشتقاتها الجزئية:

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad ; \quad (i = 1,2,3)$$

تتلخص طريقة جاكوبي في إيجاد معادلتين إضافيتين:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_1 \qquad (٥٦)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_2 \qquad (٥٧)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان كيفيان. وبشكل يمكن فيه حل المعادلات(٥٥) و(٥٦) و(٥٧) من أجل p_1, p_2, p_3 بالشكل:

$$p_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) \quad ; \quad (i = 1,2,3) \qquad (٥٨)$$

وحيث تصبح المعادلة:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \qquad (٥٩)$$

كمولة. ولنفرض على p_1, p_2, p_3 الشروط التالية:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \; ; \; \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \; ; \; \frac{\partial p_2}{\partial x_3} = \frac{\partial p_3}{\partial x_2} \qquad (٦٠)$$

وهذه الشروط تجعل المعادلة (٥٩) كمولة حتماً، لأنها تكافئ:

$$rot(p_1, p_2, p_3) = 0$$

وباشتقاق (٥٥) و(٥٦) بالنسبة إلى x_1 نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0$$

نحذف $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$ بين هاتين المعادلتين فنجد:

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_2,p_1)}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_3,p_1)}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0$$

وبشكل مشابه نجد:

$$(٦١)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_1,p_2)}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_3,p_2)}\dfrac{\partial p_3}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_3,p_3)}+\dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_1,p_3)}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_2,p_3)}\dfrac{\partial p_2}{\partial x_3}=0 \end{cases}$$

وبحسب (٦٠) فإن مجموع الحد الثاني من أولى المعادلات (٦١) مع الحد الثاني في الثانية معدوم، كما ينعدم مجموع الحدين الثالث في الأولى والثاني في الثالثة، وكذلك ينعدم مجموع الحدين الأخيرين في الثانية والثالثة. ومثلاً فإن مجموع الحدين الأخيرين في الثانية والثالثة هو:

$$(٦٢)\qquad \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_3,p_1)}\left(\frac{\partial p_3}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_3}\right)=0$$

وذلك بحسب (٦٠). ونتيجة جمع المعادلات (٦١) نجد:

$$(٦٣)\qquad \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_3,p_3)}=0$$

أي أنه:

$$(٦٤-أ)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial p_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_1}{\partial p_2}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial f_1}{\partial p_3}$$
$$-\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)=0$$

وتكتب هذه المعادلة اختصاراً بشكل معترضة بواصون معدومة للـــدالتين f, f_1 كما يلي:

$$\{f, f_1\} = 0 \qquad (٦٤-أ)$$

وبشكل مشابه نجد:

$$\{f, f_2\} = 0 \qquad (٦٤-ب)$$

$$\{f, f_3\} = 0 \qquad (٦٤-ج)$$

إن المعادلات (٦٤) معادلات تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى، وعليـــه فيجب إيجاد f_1, f_2 يحققان المعادلات (٦٤).

بكتابة الجملة المساعدة لـــ (٦٤- أ) نجد:

$$\frac{dx_1}{-\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \frac{dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{dx_2}{-\frac{\partial f}{\partial p_2}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial f}{\partial p_3}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial f}{\partial x_3}} \qquad (٦٥)$$

إذا وجد تكاملان أوليان مستقلان للجملة الأخيرة:

$$f_1 = a_1 \quad ; \quad f_2 = a_2 \qquad (٦٦)$$

فإن المعادلتين (٦٤- أ) و(٦٤- ب) تتحققان وضوحاً بهذين التكاملين، ولكـــي نستطيع تطبيق طريقة جاكوبي يجب أن يحقق هذان التكاملان (٦٤- ج) أيضاً.

فإذا تحققت المعادلات الثلاث (٦٤) بهذين التكاملين (٦٦) فنحسب p_1, p_2, p_3 من المعادلات:

$$f = f_1 - a_1 = f_2 - a_2 = 0 \qquad (٦٧)$$

ونعوض في (٥٨) ثم نكامل المعادلة الكلية:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$$

فنحصل على المطلوب.

٥-١١-٤- أمثلة محلولة:

(أ) كامل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$2p_1x_1x_3 + 3p_2x_3^2 + p_2^2p_3 = 0$$

الحل:

بحسب طريقة جاكوبي تكون الجملة المساعدة:

$$(e_1) \qquad \frac{dx_1}{-2x_1x_3} = \frac{dp_1}{2p_1x_3} = \frac{dx_2}{3x_3^2 - 2p_1p_3} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dx_3}{-p_2^2} = \frac{dp_3}{2p_1x_1 + 6p_2x_3}$$

ونجد منها التكاملين الأوليين المستقلين:

$$(e_2) \qquad f_1 = x_1p_1 = a_1$$

$$(e_3) \qquad f_2 = p_2 = a_2$$

ثم إن:

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right) = 0$$

إذن يمكن أخذ (e_2) و (e_3) بمثابة المعادلتين الإضافيتين في طريقة جاكوبي.

وبحل (e_1) و (e_2) و (e_3) بالنسبة إلى p_1, p_2, p_3 نجد:

$$p_1 = a_1x_1^{-1} \quad , \quad p_2 = a_2 \quad , \quad p_3 = -a_2^{-2}(2a_1x_3 + 3a_2x_3^2)$$

$$dz = a_1x_1^{-1}dx_1 + a_2dx_2 - a_2^{-2}(2a_1x_3 + 3a_2x_3^2)dx_3$$

وبالمكاملة نجد التكامل التام:

$$z = a_1\ln|x_1| + a_2x_2 - a_2^{-2}(a_1x_3^2 + a_2x_3^3 + a_3$$

(ب) كامل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$(x_3 + x_2)(p_3 + p_2)^2 + zp_1 = 0$$

الحل:

نلاحظ أن هذه المعادلة تحوي على الدالة المجهولة z، ولهذا لا يمكن تطبيق طريقة جاكوبي عليها مباشرة.

لنضع $z = x_4$، وليكن: $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$

تكاملاً للمعادلة المعطاة، فيكون: $\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = 0$

أي أن:

$$p_1 = \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_4}}$$

لنضع $q_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ فنجد:

$$p_1 = -\frac{q_1}{q_4}, p_2 = -\frac{q_2}{q_4}, p_3 = -\frac{q_3}{q_4}$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية المعطاة الشكل:

$$(e_1) \qquad (x_2 + x_3)(q_2 + q_3)^2 - x_4 q_1 q_4 = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى لا تحوي الدالة المجهولة u، ويمكن بالتالي تطبيق طريقة جاكوبي عليها. إن الجملة المساعدة المرتبطة بالمعادلة الأخيرة هي:

$$\frac{dx_1}{-x_4 q_4} = \frac{dq_1}{0} = \frac{dx_2}{-2(q_2+q_3)(x_2+x_3)} = \frac{dq_2}{(q_2+q_3)^2} =$$

$$= \frac{dx_3}{-2(q_2+q_3)(x_2+x_3)} = \frac{dq_3}{(q_2+q_3)^2} = \frac{dx_4}{x_4 q_1} = \frac{dq_4}{-q_1 q_4}$$

ومن التكاملات الأولية لهذه الجملة:

$$(e_2) \qquad f_1 = q_1 = a_1$$

$$(e_3) \qquad f_2 = q_2 - q_3 = a_2$$

$$(e_4) \qquad f_3 = x_4 q_4 = a_3$$

وهذه التكاملات مستقلة. وفي هذه المرحلة يجب أن نتحقق أن:

$$\{f_1, f_2\} = \{f_2, f_3\} = \{f_3, f_1\} = 0$$

وعملية التحقق سهلة ومباشرة. وبحل المعادلات (e_1)، (e_2)، (e_3)، (e_4) بالنسبة إلى q_1, q_2, q_3, q_4 نجد:

$$q_1 = a_1, q_4 = a_3 x_4^{-1}, q_2 = \frac{1}{2}(a_2 + \sqrt{\frac{a_1 a_3}{x_2 + x_3}}), q_3 = q_2 - a_2$$

وعليه فإن:

$$dU = a_1 dx_1 + a_3 x_4^{-1} dx_4 + \frac{1}{2} a_2 (dx_2 - dx_3) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1 a_3}{x_2 + x_3}}(dx_2 + dx_3)$$

وبالمكاملة نجد:

$$U = a_1 x_1 + a_3 \ln|x_4| + \frac{1}{2} a_2 (x_2 - x_3) + \sqrt{a_1 a_3 (x_2 + x_3)} + a_4$$

وبما أن $U = 0$ فنجد التكامل التام:

$$\ln|z| + b_1 x_1 + b_2 (x_2 - x_3) + \sqrt{b_1 (x_2 + x_3)} + b_3 = 0$$

حيث وضعنا:

$$b_1 = \frac{a_1}{a_3} \quad , \quad b_2 = \frac{a_2}{2a_3} \quad , \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3}$$

٥-١٢- المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية:

٥-١٢-١- تعاريف ومفاهيم أساسية:

إن الشكل العام لمعادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية في الدالة المجهولة z والمتحولين المستقلين x, y يعطى كما يلي:

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (١)$$

حيث إن:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ونقول عن المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية إنها نصف (شبه) خطية على مجموعة نقطية M من المستوي R^2 إذا أمكن كتابتها على الشكل:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \phi(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \qquad (٢)$$

حيث A, B, C دوال في المتغيرين x, y معرفة على M وأن $A^2 + B^2 + C^2$ لا ينعدم من أجل جميع نقاط M و ϕ دالة ما في المتغيرات المذكورة فمثلاً إن المعادلة:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} - e^{xy}\sin z = 0$$

هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية شبه خطية على R^2.

وكذلك نقول إن المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية خطية على المجموعة النقطية M إذا أمكن كتابتها على الشكل:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz + G = 0 \qquad (٣)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G دوال في المتغيرين x, y معرفة على M وأن $A^2 + B^2 + C^2$ مخالف الصفر دوماً. فمثلاً إن المعادلة:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + z = 1$$

معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية خطية على R^2.

وكما نلاحظ أن المعادلة (٣) حالة خاصة من المعادلة (٢) وبالتالي فإن كل نتيجة صحيحة من أجل (٢) هي صحيحة من أجل (٣).

نقول إن الدالة $z = f(x, y)$ حل للمعادلة التفاضلية (٢) على المجموعة النقطية M إذا كانت الدالة $f(x, y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق حتى المرتبة الثانية على الأقل (أو نقول إن $f(x, y) \in C^2$) وإذا كانت هي ومشتقاتها الجزئية تحقق المعادلة (٢) أي تقلبها إلى مطابقة. ويمكن بسهولة التحقق من أن الدالة:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

هي حل للمعادلة الجزئية من المرتبة الثانية الخطية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

وكذلك فإن المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (٤)$$

تقبل عدة حلول على R^2 مثل:

$$f(x, y) = (x + y)^2$$
$$f(x, y) = \sin(x - y)$$
$$f(x, y) = (x + y)^5 + (x - y)^2 e^{x-y}$$

وبشكل عام يمكن التحقق وبالحساب المباشر إن الدالة:

$$f(x,y) = f_1(x+y) + f_2(x-y)$$

حيث f_1, f_2 دالتان اختياريتان من الصنف C^2 هي حل للمعادلة (٤) على R^2.

أخيراً تجدر الإشارة إلى أنه في حالات خاصة تكون مكاملة المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية سهلة، إذ يمكن في هذه الحالات إرجاع المعادلة (٣) إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى، عادية أو جزئية، أو إرجاعها إلى معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية.

٥-١٢-٢- تصنيف المعادلات الخطية من المرتبة الثانية:

تصنف المعادلات الخطية من المرتبة الثانية تبعاً لـ A, B, C.

تسمى الكمية $B^2 - 4AC$ مميز المعادلة، ونقول إن المعادلة (٣):

أ- زائدية إذا كان $B^2 - 4AC > 0$

ب-ناقصية إذا كان $B^2 - 4AC < 0$

ت-مكافئية إذا كان $B^2 - 4AC = 0$

يشبه هذا التصنيف، تصنيف منحنيات الدرجة الثانية في الهندسة التحليلية في المستوي:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ; A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

حيث يكون المنحني الممثل في هذه المعادلة:

أ- قطعاً زائداً إذا كان $B^2 - 4AC > 0$

ب-قطعاً ناقصاً إذا كان $B^2 - 4AC < 0$

ت-قطعاً مكافئاً إذا كان $B^2 - 4AC = 0$

٥-١٢-٣- أمثلة محلولة:

(أ) إن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

هي معادلة زائدية على R^2 لأن $B^2-4AC=4$ موجب.

(ب) إن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}+e^{xy}=0$$

معادلة مكافئية على R^2 لأن $B^2-4AC=0$.

(جـ) إن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$$

معادلة ناقصية على R^2 لأن $B^2-4AC=-4$ سالب.

٥-١٣- التحويل الإحداثي:

إذا كانت A,B,C ثوابت كما في المعادلات السابقة فإن المعادلة محددة النمط من أجل جميع قيم x,y في ساحة تحولها. وفي الحالة العامة تكون A,B,C في (٣) دوال في x,y ويوجد بالتالي منحن:

$$\Delta(x,y)=B^2(x,y)-4A(x,y)C(x,y)$$

في المستوي xoy تكون المعادلة عليه مكافئية وتتغير عبره من نمط زائدي إلى نمط ناقصي أو بالعكس. وبعبارة أخرى (وعلى فرض أن المنحني $\Delta=0$ بسيطٌ) يقسم المنحني $\Delta=0$ المستوي إلى ثلاثة مناطق، أولاهما هي مجموعة النقاط $\Delta=0$، والثانية المنطقة $\Delta<0$ والثالثة المنطقة $\Delta>0$. تكون المعادلة (٣) في المنطقة الأولى مكافئية وفي الثانية زائدية وفي الثالثة ناقصية.

وكمثال على هذا التغير في نمط المعادلة (٣) ما يحدث في ميكانيك الغازات حيث يقابل الانتقال من جريان تحت صوتي إلى جريان فوق صوتي تغيراً في نمط المعادلة من زائدي إلى ناقصي مروراً بالنمط المكافئي.

لنفرض أنه أجرينا تغييراً في المتحولات المستقلة:

$$\xi = \xi(x, y) \quad ; \quad \eta = \eta(x, y) \tag{٥}$$

حيث $\xi, \eta \in C^2$ وحيث معين جاكوبي غير معدوم:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{٦}$$

يسمى التحويل السابق تحويلاً إحداثياً أو نقطياً. إذا كان نمط المعادلة يتغير بهذا التحويل فإن قيمة التصنيف السابق ضئيلة أو معدومة.

ولكن سنبرهن الآن أن نمط المعادلة (٣) صفة ملازمة لها ولا يتعلق بجملة الإحداثيات.

٥-١٣-١- مبرهنة (١):

إن نمط المعادلة (٣) لا متغير تحت أي تحويلٍ إحداثي من النمط (٥) محقّقٍ لـ(٦).

البرهان:

بحسب العلاقات (٥) تكون z دالة في x, y عبر ξ, η ويكون:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+$$
$$+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (٣) نجد أيضاً معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية بالشكل:

$$\overline{A}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\overline{B}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}+\overline{C}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\overline{D}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\overline{E}\frac{\partial z}{\partial \eta}+\overline{F}z=\overline{G}$$

حيث:

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$\overline{B} = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

$$\overline{D} = A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \xi}{\partial x} + E\frac{\partial \xi}{\partial y} \qquad (٧)$$

$$\overline{E} = A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial \eta}{\partial x} + E\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\overline{F}(\xi,\eta) = F[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$$

$$\overline{G}(\xi,\eta) = G[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$$

ونتحقق بشكل مباشر أن:

$$\overline{B}^2 - 4\overline{A}\ \ \overline{C} = (B^2 - 4AC)J^2$$

وبما أن J^2 موجب إذن فإشارة $\overline{B}^2 - 4\overline{A}\ \ \overline{C}$ من إشارة $B^2 - 4AC$.

ونستنتج أن نمط المعادلة (٣) لا يتعلق بجملة الإحداثيات.

٥-١٣-٢- المميزات (المنحنيات المميزة):

نسمي المعادلة:

$$A(dy)^2 - B(dx)(dy) + C(dx)^2 = 0 \qquad (٨)$$

بالمعادلة التفاضلية المميزة المرافقة للمعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية (٢). كما نسمي حلول المعادلة التفاضلية المميزة المرافقة (٨)، بالمنحنيات المميزة أو المميزات المرافقة للمعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية (٢).

فمثلاً إن المنحنيات المميزة المرافقة للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

تتعين بحل المعادلة التفاضلية المرافقة: $(dy)^2-(dx)^2=0$

أو المكافئة:
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$$

أو:
$$\left(\frac{dy}{dx}-1\right)\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=0$$

وبالتالي فإن المنحنيات المميزة هي:

$$y=x+c_1$$
$$y=-x+c_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

ملاحظة:

إذا رمزنا بـــ $\frac{dy}{dx}=-\lambda$ فتأخذ المعادلة التفاضلية المميزة الشكل:

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0 \qquad (٩)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية غير معدومة. يوجد جذران λ_1, λ_2 لها من الشكل:

$$\lambda_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}, \lambda_2=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

ويكون هذان الجذران حسب إشارة مميز المعادلة (٩):

أ- إذا كان $B^2-4AC>0$ فإن الجذرين λ_1, λ_2 حقيقيان ومختلفان.

ب-إذا كان $B^2-4AC=0$ فإن الجذرين λ_1, λ_2 حقيقيان ومتساويان.

ت-إذا كان $B^2 - 4AC < 0$ فإن الجذرين λ_1, λ_2 مركبان ومترافقان.

٥-١٣-٣- مبرهنة (٢):

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المفروضة:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz + G = 0 \qquad (١٠)$$

حيث A, B, C, D, E, F ثوابت و G دالة حقيقية في المتغيرين x, y معرفة على مجموعة نقطية M في المستوي R^2 وكذلك $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

إذا كانت المعادلة (١٠) زائدية على المجموعة M فيوجد تحويل إحداثي من الشكل:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \beta_1 y \\ \eta &= \alpha_2 x + \beta_2 y \end{aligned} \qquad (١١)$$

يحول المعادلة (١٠) إلى معادلة من الشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = D_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + F_1 z + G_1(\xi, \eta) \qquad (١٢)$$

حيث D_1, E_1, F_1 ثوابت و G_1 دالة حقيقية في المتغيرين ξ, η.

البرهان:

لنبدأ في تعيين $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ أي لنبرهن على وجود تحويل إحداثي من الشكل (١١) يحول المعادلة (١٠) الزائدية إلى معادلة من الشكل (١٢) في النظام الإحداثي الجديد، أي بالنسبة لـ ξ, η وبحيث تكون المنحنيات المميزة للمعادلة (١٠) من الشكل: $\xi = c_1 \quad , \quad \eta = c_2$

حيث c_1, c_2 ثابتان. وبفرض أن A, B, C مغايرة للصفر، فيمكن إيجاد مميزات المعادلة (١٠) بفرض:

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda_2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda_1$$

وبما أن المعادلة (١٠) زائدية فيكون $B^2 - 4AC > 0$، وبالتالي فإن λ_1, λ_2 هما حقيقيان ومختلفان، وبالتالي يكون لدينا:

$$y = \lambda_1 x + c_1 \quad , \quad y = -\lambda_2 x + c_2$$

حيث أن c_1, c_2 ثابتان اختياريان. وبما أن $\xi = c_1, \eta = c_2$ فنجد:

$$\xi = y + \lambda_1 x$$
$$\eta = y + \lambda_2 x$$

أو:

$$\xi = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x + y$$
$$\eta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x + y \qquad (١٣)$$

وهو التحويل الإحداثي المطلوب، حيث أن:

$$\alpha_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \alpha_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$$

وبذلك يكون قد تم إثبات وجود التحويل الإحداثي المطلوب.

ويبقى علينا الآن إثبات أن المعادلة (١٠) تتحول إلى الشكل (١٢) بوساطة التحويل (١٣). وحسب (٧) يكون:

$$\overline{A} = \overline{C} = 0, \overline{B} = \frac{B^2 - 4AC}{-A}, \overline{D} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} D + E$$

$$\overline{E}=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}D+E,\overline{F}=F,\overline{G}=G$$

وعندئذ نجد أن المعادلة (١٠) تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{B^2-4AC}{-A}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}D+E\right)\frac{\partial z}{\partial\xi}+$$

$$+\left(\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}D+E\right)\frac{\partial z}{\partial\eta}+\overline{F}z+\overline{G}=0$$

والتي يمكن كتابتها مع ملاحظة أن $A\neq 0$ و $B^2-4AC\neq 0$ بالشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\equiv D_1\frac{\partial z}{\partial\xi}+E_1\frac{\partial z}{\partial\eta}+F_1 z+G_1(\xi,\eta)$$

حيث:

$$D_1=\frac{(-B+\sqrt{B^2-4AC})D+2EA}{2(B^2-4AC)}$$

$$E_1=\frac{(-B-\sqrt{B^2-4AC})D+2EA}{2(B^2-4AC)}$$

$$F_1=\frac{\overline{F}A}{B^2-4AC}\ ,\ G_1=\frac{\overline{G}A}{B^2-4AC}$$

وبذا نحصل على المعادلة المطلوبة وذلك ضمن شرط أن جميع الثوابت A,B,C مخالفة للصفر.

نفترض الآن الحالة التي ينعدم فيها ثابت واحد من الثوابت الثلاثة هذه.

إذا كان $B=0$ أو $C=0$ فإن المناقشة السابقة لا تتغير والمبرهنة صحيحة.

أما إذا كان $A=0$ ، فعندها تكون المعادلة التفاضلية للمميزات هي:

$$-Bdydx+C(dx)^2=0$$

وإذا رمزنا بالرمز $\frac{dx}{dy} = -\lambda$ فتأخذ المعادلة التفاضلية للمميزات الشكل التالي:

$$B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

والتي تقبل الجذرين: $\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{B}{C}$

والتي تقود بدورها إلى أن معادلات المميزات تأخذ الشكل التالي:

$$x = c_1$$

$$x - \frac{B}{C} y = c_2$$

ويكون التحويل الإحداثي المعرف بالمعادلتين التاليتين:

$$\xi = x$$

$$\eta = x - \frac{B}{C} y \qquad (١٤)$$

هو التحويل الملائم الذي يجعل المنحنيات المميزة للمعادلة التفاضلية الجزئية (١٠) هي الخطوط الإحداثية في النظام الإحداثي $\xi\eta$.

وبمقارنة التحويل (١٤) مع التحويل (١١) نجد أن:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \quad , \quad \beta_1 = 0 \quad , \quad \beta_2 = -\frac{B}{C}$$

وتعطي كذلك المعادلات (٧):

$$\overline{A} = \overline{C} = 0 \quad , \quad \overline{B} = -\frac{B^2}{C} \quad , \quad \overline{D} = D \quad , \quad \overline{E} = D - \frac{BE}{C}$$

$$\overline{F} = F \quad , \quad \overline{G} = G$$

وتأخذ المعادلة (١٠) في النظام الإحداثي $\xi\eta$ الشكل التالي:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{DC}{B^2}\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{(DC - DE)}{B^2}\frac{\partial z}{\partial\eta} + \frac{\overline{F}C}{B^2} z + \frac{\overline{G}C}{B^2}$$

وهو من الشكل المطلوب.

وأخيراً نناقش حالة انعدام ثابتين من A, B, C . فإذا كان $B = C = 0$ فإن مميز المعادلة (١٠) يكون صفراً فالمعادلة ليست زائدية وبالتالي لا ترد مثل هذه الحالة. ونجد بشكل مشابه أن الحالة التي يكون فيها $A = B = 0$ لا ترد أيضاً. وبالتالي يتم إثبات صحة المبرهنة في جميع الحالات.

٥-١٣-٤- تمرين محلول:

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية التالية المعرفة على R^2:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

لدينا: $A = 1, B = -5, C = 0$

إن $B^2 - 4AC = 25 > 0$ وبالتالي فالمعادلة من النمط الزائدي. ويكون التحويل الإحداثي المناسب هو المعطى بالمعادلتين:

$$\xi = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x + y$$

$$\eta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x + y$$

والذي يأخذ الشكل:

$$\xi = 2x + y$$

$$\eta = y$$

وبواسطته تأخذ المعادلة المفروضة في النظام الإحداثي $\xi\eta$ الشكل التالي:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{4}{25}\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{1}{25}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

٥-١٣-٥- مبرهنة (٣):

لتكن المعادلة (١٠) كما في المبرهنة (٢). إذا كانت المعادلة (١٠) زائدية فيوجد تحويل إحداثي، بجاكوبي غير معدوم $J \neq 0$، من الشكل:

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y$$
$$\eta = \alpha_2 x + \beta_2 y$$

وبحيث تأخذ المعادلة التفاضلية (١٠) في النظام الإحداثي $\xi\eta$ الشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = D_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + F_1 z + G_1 \qquad (١٥)$$

حيث D_1, E_1, F_1 ثوابت و G_1 دالة حقيقية في المتغيرين ξ, η.

البرهان:

استناداً إلى المبرهنة (٢) يوجد تحويل إحداثي من الشكل:

$$x^* = \alpha_1^* x + \beta_1^* y$$
$$y^* = \alpha_2^* x + \beta_2^* y \qquad (١٦)$$

والذي يحول المعادلة (١٠) في النظام الإحداثي $x^* y^*$ إلى الشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^* \partial y^*} = D^* \frac{\partial z}{\partial x^*} + E^* \frac{\partial z}{\partial y^*} + F^* z + G^* \qquad (١٧)$$

وبحسابات مبسطة نجد أن التحويل المعطى بـــ:

$$\xi = x^* + y^*$$
$$\eta = x^* - y^* \qquad (١٨)$$

يجعل المعادلة (١٧) تأخذ في النظام الإحداثي $\xi\eta$ الشكل المطلوب (١٥).

استناداً إلى أن $\alpha_1^* \beta_2^* - \alpha_2^* \beta_1^* \neq 0$ فيمكن تركيب التحويلين الإحداثيين(١٦) و(١٨) بتحويل إحداثي من الشكل:

$$\xi = (\alpha_1^* + \alpha_2^*)x + (\beta_1^* + \beta_2^*)y$$
$$\eta = (\alpha_1^* - \alpha_2^*)x + (\beta_1^* - \beta_2^*)y$$

يعيد هذا التحويل المعادلة (١٠) في النظام الإحداثي $\xi\eta$ إلى الشكل (١٥).

٥-١٣-٦- مثال محلول:

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

بالرجوع إلى المثال السابق نستنتج أن التحويل الإحداثي الذي يعيد هذه المعادلة إلى الشكل (١٥) هو:

$$\xi=5x+2y$$
$$\eta=5x$$

وبإجراء الحسابات تأخذ المعادلة المفروضة الشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{3}{25}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{1}{5}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

٥-١٣-٧- مبرهنة (٤):

لتكن المعادلة التفاضلية (١٠) كما في المبرهنة (٢). إذا كانت المعادلة التفاضلية (١٠) ناقصية فيوجد تحويل إحداثي من الشكل:

$$\xi=\alpha_1 x+\beta_1 y$$
$$\eta=\alpha_2 x+\beta_2 y$$

يجعل المعادلة (١٠) تأخذ في النظام الإحداثي $\xi\eta$ الشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=D_1\frac{\partial z}{\partial \xi}+E_1\frac{\partial z}{\partial \eta}+F_1 z+G_1 \qquad (١٩)$$

حيث D_1, E_1, F_1 ثوابت و G_1 دالة حقيقية في المتغيرين ξ,η.

البرهان:

بما أن المعادلة التفاضلية ناقصية فيكون $B^2 - 4AC < 0$ وهـذا يسـتلزم أن تكون كل من A, C مخالفة للصفر. وينتج من المعادلة التفاضلية المميـزة (٨) أنه لا يوجد منحنيات مميزة للمعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية في المسـتوي الحقيقي، وذلك لأن λ_1, λ_2 عددان مركبان مترافقان. وبالتالي فـإن الأسـلوب المتبع في إثبات المبرهنتين السابقتين لا يصلح هنا لذا نتبع الأسلوب التالي:

ليكن λ_1, λ_2 الجذرين المركبين المترافقين المعطيين بالشكل:

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ولتكامل المعادلتين:

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda_1, \frac{dy}{dx} = -\lambda_2$$

بغض النظر عن كون λ_1, λ_2 عددين مركبين نجد المنحنيات المميزة من الشكل:

$$y + \lambda_1 x = \mu_1 \quad , \quad y + \lambda_2 x = \mu_2$$

بما أن λ_1, λ_2 عددان مركبان فندع μ_1, μ_2 ليكونا أيضاً مركبين وبوضع:

$$\mu_1 = c_1 + ic_2 \quad , \quad \mu_2 = c_1 - ic_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان حقيقيان اختياريان وعندئذ يكون:

$$y + \lambda_1 x = c_1 + ic_2 \quad , \quad y + \lambda_2 x - c_1 - ic_2$$

وإذا وضعنا كما في المبرهنة (٢):

$$\xi = c_1 \quad , \quad \eta = c_2$$

فتأخذ المعادلتين السابقتين الشكل:

$$y + \lambda_1 x = \xi + i\eta \quad , \quad y + \lambda_2 x = \xi - i\eta$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى ξ, η نحصل على التحويل الإحداثي:

$$\begin{cases} \xi = -\dfrac{B}{2A}x + y \\ \eta = \dfrac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}x \end{cases} \qquad (٢٠)$$

الذي يرجع المعادلة (١٠) في النظام الإحداثي $\xi\eta$ إلى الشكل (١٩).

٥-١٣-٨- مثال محلول:

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية المعرفة على R^2:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - z = 0$$

لدينا هنا $A = B = C = 1$

ومنه $B^2 - 4AC = -3$ سالب

وبالتالي فإن المعادلة ناقصية. إن التحويل الإحداثي (٢٠) يأخذ من أجل هذه المعادلة الشكل:

$$\xi = -\frac{1}{2}x + y$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

ويرجع هذا التحويل الإحداثي المعادلة التفاضلية المفروضة إلى المعادلة التالية في النظام الإحداثي $\xi\eta$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{3}{4}z$$

٥-١٣-٩- ملاحظة:

لنناقش الآن الحالة الأخيرة وهي الحالة عندما تكون المعادلةُ التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية والخطية وذات الأمثال الثابتة معادلةً مكافئية، أي عندما يكون $B^2 - 4AC = 0$.

إذا كان $A = 0$ فإن $B^2 - 4AC = 0$ يقود إلى أن $B = 0$ وعندها فإن الشرط $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ يكافئ $C \neq 0$. وهكذا فإن صنف المعادلات المكافئية من أجل $A \neq 0$ أو $C \neq 0$ أو كليهما يتضمن جميع المعادلات المكافئية. وبالتالي لا نحتاج إلى اعتبار سوى الحالات $A \neq 0$ أو $C \neq 0$.

٥-١٣-١٠- مبرهنة (٥):

لتكن المعادلة التفاضلية (١٠) كما في المبرهنة (٢). إذا كانت المعادلة (١٠) مكافئية فيوجد تحويل إحداثي من الشكل:

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y$$
$$\eta = \alpha_2 x + \beta_2 y$$

يحول المعادلة (١٠) في النظام الإحداثي $\xi\eta$ إلى الشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = D_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + F_1 z + G_1 \qquad (٢١)$$

حيث D_1, E_1, F_1 ثوابت و G_1 دالة حقيقية في المتغيرين ξ, η.

البرهان:

إذا كان $B^2 - 4AC = 0$ فنحصل من أجل المعادلة التفاضلية للمميزات على:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{B}{2A} \qquad (٢٢)$$

ويكون مميز واحد معادلته:

$$y-\frac{B}{2A}x=c_2$$

ويكون من المناسب، كما في مناقشة المبرهنة (٢)، أن نضع:

$$\eta=-\frac{B}{2A}x+y$$

وإن الشرط الوحيد على المعاملين α_1,β_1 من أجل: $\xi=\alpha_1 x+\beta_1 y$ هو أن يكون يعقوبي التحويل مخالفاً للصفر، أي أنه يمكن انتقاء α_1,β_1 بشكل اختياري شريطة أن يتحقق فقط:

$$\alpha_1+\frac{B}{2A}\beta_1\neq 0 \qquad (٢٣)$$

وهذا يكافئ إذا كان $\beta_1\neq 0$ إلى أن $\frac{\alpha_1}{\beta_1}\neq\lambda_1$.

ولكن بالنسبة لـ λ_1 إما أن يكون صفراً أو أنه مخالف للصفر.

إذا كان $\lambda_1=0$ فمن المعادلة (٢٢) ينتج أن $B=0$.

إن $A\neq 0$ و $B=0$ و $B^2-4AC=0$ يؤدي إلى أن $C=0$ وعندها تكون المعادلة (١٠) هي من الشكل المطلوب (٢١) ولا يوجد شيء للبرهان. إذن نفرض أن $\lambda_1\neq 0$ وعندها يمكن أن نضع $\alpha_1=-\lambda_1,\beta_1=1$ وتكون (٢٣) محققة ويكون التحويل الإحداثي الناتج هو:

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{B}{2A}x+y\\ \eta&=-\frac{B}{2A}x+y\end{aligned} \qquad (٢٤)$$

والذي يعيد المعادلة (١٠) إلى النظام الإحداثي $\xi\eta$ إلى الشكل (٢١).

٥-١٣-١١- مثال محلول:

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية المعرفة على R^2:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

لدينا هنا $A=1, B=4, C=4$ ومنها $B^2-4AC=0$ وبالتالي فالمعادلة التفاضلية من النمط المكافئي. بأخذ التحويل الإحداثي (٢٤)، الذي يعيد المعادلة المفروضة إلى الشكل (٢١) في النظام الإحداثي $\xi\eta$، الشكلَ التالي:

$$\xi=2x+y$$

$$\eta=-2x+y$$

فإنه يعيد المعادلة المفروضة إلى الشكل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=-\frac{1}{8}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{1}{8}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

٥-١٣-١٢- مبرهنة (٦):

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية (١٠) كما في المبرهنة (٢) إذا كانت المعادلة (١٠) مكافئية فيوجد تحويل إحداثي من النظام الإحداثي xy إلى النظام الإحداثي $\xi\eta$ يجعل المعادلة في النظام الإحداثي الجديد تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=D_1\frac{\partial z}{\partial \xi}+E_1\frac{\partial z}{\partial \eta}+F_1 z+G_1 \qquad (٢٥)$$

حيث D_1, E_1, F_1 ثوابت و G_1 دالة حقيقية في المتغيرين ξ, η.

إن إثبات صحة المبرهنة يمكن تحقيقه بأسلوب مشابه لبرهان المبرهنة (٥). وذلك بمبادلة إشارة الناقص من الحد الأول في المعادلة الثانية إلى الحد الأول في المعادلة الأولى في التحويل (٢٤).

٥-١٤- الأشكال القانونية للمعادلات:

نسمي المعادلات (١٢) و(١٥) و(١٩) و(٢١) و(٢٥) بالمعادلات القانونية للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية ذات الأمثال الثابتة وبما أن الشكلين (١٢) و(١٥) متكافئان وأن الشكلين (١٢) و(١٩) متكافئان وأن الشكلين (٢١) و(٢٥) يختلفان فقط بتسمية المتغير فيمكن تطوير النظرية كاملة بالأخذ بعين الاعتبار فقط الأشكال القانونية الثلاثة التالية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=D_1\frac{\partial z}{\partial x}+E_1\frac{\partial z}{\partial y}+F_1 z+G_1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=D_1\frac{\partial z}{\partial x}+E_1\frac{\partial z}{\partial y}+F_1 z+G_1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=D_1\frac{\partial z}{\partial x}+E_1\frac{\partial z}{\partial y}+F_1 z+G_1$$

وهي على التسلسل المعادلات الزائدية والناقصية والمكافئية.

٥-١٥-تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية الجزئية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz+G=0 \qquad (١)$$

حيث أن الدوال A,B,C,D,E,F,G دوال في المتغيرين x,y معرفة على M وأن $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

لننتقل الآن من المتغيرين المستقلين x, y إلى متغيـــرين ξ, η جديـــدين وفـــق التحويل المعرف بالعلاقتين التاليتين:

$$\xi = \xi(x, y)$$
$$\eta = \eta(x, y) \qquad (٢)$$

ولنفرض أن التحويل المعرف بـــ(٢) هو تطبيق تقابل، يطبق المنطقة M على المنطقة $\overline{M}$ في المستوي (ξ, η).

ولنفرض أن الدالتين ξ, η مستمرتان وقابلتان للاشتقاق حتى المرتبة الثانية على الأقل، ولنفرض أن:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

في جميع نقاط المنطقة M، عندئذ يكون:

$$x = x_1(\xi, \eta)$$
$$y = y_1(\xi, \eta)$$

وبالتالي فإن: $z = z_1(\xi, \eta)$

أو يمكن كتابتها بالشكل:

$$z = z_1[(\xi(x, y), \eta(x, y)]$$

لنحسب الآن جميع المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = z_\xi . \xi_x + z_\eta . \eta_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = z_\xi . \xi_y + z_\eta . \eta_y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_\xi . \xi_{xx} + (z_{\xi\xi} . \xi_z + z_{\xi\eta} . \eta_x)\xi_x + z_\eta \eta_{xx} + (z_{\xi\eta} . \xi_x + z_{\eta\eta} . \eta_x)\eta_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{\xi\xi}.(\xi_x)^2 + 2z_{\xi\eta}.\eta_x.\xi_x + z_{\eta\eta}.(\eta_x)^2 + z_\xi \xi_{xx} + z_\eta \eta_{xx}$$

وبشكل مشابه نجد أن:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_\xi.\xi_{xy} + (z_{\xi\xi}.\xi_y + z_{\xi\eta}.\eta_y)\xi_x + z_\eta \eta_{xy} + (z_{\xi\eta}.\xi_y + z_{\eta\eta}.\eta_y)\eta_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{\xi\xi}.\xi_x.\xi_y + z_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + z_{\eta\eta}\eta_x \eta_y + z_\xi.\xi_{xy} + z_\eta.\eta_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{\xi\xi}.(\xi_y)^2 + 2z_{\xi\eta}.\eta_y.\xi_y + z_{\eta\eta}.(\eta_y)^2 + z_\xi \xi_{yy} + z_\eta \eta_{yy}$$

لنعوض الآن عن كل $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ بقيمته في المعادلة (١) فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$(١) \quad \overline{A}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \overline{B}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \overline{D}\frac{\partial z}{\partial \xi} + \overline{E}\frac{\partial z}{\partial \eta}\overline{F}z + \overline{G} = 0$$

حيث:

$$\overline{A} = A(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + B(\frac{\partial \xi}{\partial x})(\frac{\partial \xi}{\partial y}) + C(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2$$

$$\overline{C} = C(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + B(\frac{\partial \eta}{\partial x})(\frac{\partial \eta}{\partial y}) + C(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2$$

لنضع الآن:

$$\overline{A} = 0 \quad ; \quad \overline{C} = 0$$

وبالتالي فإن:

$$(٣) \qquad A(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + B(\frac{\partial \xi}{\partial x})(\frac{\partial \xi}{\partial y}) + C(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 = 0$$

وهنا نلاحظ أن المعادلة $\overline{C}$ من نفس الشكل للمعادلة $\overline{A}$، لذلك لنكتب المعادلة (٣) بالشكل التالي:

$$A(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + B(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial u}{\partial y}) + C(\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0 \qquad (٤)$$

وهذه يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$(A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y}).(A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \qquad (٥)$$

ولنناقش الآن الحالتين التاليتين:

(١) لنفرض أن: $\frac{B_1}{A_1} \neq \frac{B_2}{A_2}$

وكانت المعادلة (٤) من الشكل (٥). ولنفرض أن الدالة ξ حلاً للمعادلة

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ولنعتبر كذلك أن الدالة η تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية:

$$A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

فعندئذ فإن المعادلة (١) تؤول إلى الشكل (١) مع اعتبار أن $\overline{A} = \overline{C} = 0$، ونسمي المعادلة (٤) بالمعادلة المساعدة.

(٢) لنفرض أن $\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2}$ فعندئذ يكون للمعادلة التفاضلية (٤) الشكل التالي:

$$A(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + B(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial u}{\partial y}) + C(\frac{\partial u}{\partial y})^2 = K(A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y})^2$$

وبالتالي فإن الدالة $u = u(x, y)$ تشكل حلاً للمعادلة $A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ، وعندها نأخذ $\eta = y$ وبالتالي تأخذ المعادلة (١) شكلاً مختصراً. ولعل الأمثلة التالية توضح ذلك.

٥-١٥-١- أمثلة محلولة:

حل المعادلات التفاضلية الجزئية التالية مستخدماً تحويل لابلاس:

(١)

$$x^2(y-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x(y^2-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y(y-1)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + xy\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

لنكتب المعادلة (٤) بالشكل الآتي:

$$x^2(y-1)(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - x(y^2-1)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + y(y-1)(\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل التالي بعد اختصار الطرفين على $y-1$:

$$x^2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - x(y+1)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + y(\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0$$

وهذه المعادلة يمكن تفريقها على شكل جداء قوسين كما يلي:

$$(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y})(x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

لنختار الآن $u = \xi = x.y$ يحقق المعادلة:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

وكذلك لنختار الدالة $v = \eta = x.e^y$ تحقق المعادلة:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

وبسهولة يمكن التحقق من أن هذين الحلين يحققان المعادلة التفاضلية المفروضة، وعليه فيعطى الحل المطلوب بالشكل:

$$z = \psi_1(x.y) + \psi_2(x.e^y)$$

(٢)

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x\frac{\partial z}{\partial x} + 3z\frac{\partial z}{\partial y} = 8\frac{y}{x}$$

لنشكل المعادلة (٤) كما يلي:

$$x^2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 2xy\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + y^2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 = (x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0$$

من هنا ينتج أن:

$$(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0$$

وبما أن المضروبين متساويان:

$$(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y})(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

فنحصل فقط على $u = x.y$. لنضع الآن $\xi = x.y$ ونأخذ $\eta = y$ فنحصل على:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2x \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المفروضة عن كل حد بقيمته فنجد:

$$\eta^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 3\eta \frac{\partial z}{\partial \eta} = 8 \frac{\eta^2}{\xi}$$

وهنا نلاحظ أن η يمثل عاملاً تكاملياً وبالتالي فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \eta^3 = 2 \frac{\eta^4}{\xi} + \psi(\xi)$$

أي أن:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{2\eta}{\xi} + \frac{1}{\eta^3} \psi(\xi)$$

بالمكاملة نحصل على:

$$z = \frac{\eta^2}{\xi} - \frac{1}{2\eta^2} \psi(\xi) + \psi_1(\xi)$$

$$z = \frac{\eta^2}{\xi} + \frac{1}{\eta^2} \overline{\psi}(\xi) + \psi_1(\xi)$$

$$z = \psi_1(x.y) + \frac{1}{y^2} \overline{\psi}(x.y) + \frac{y^2}{x.y}$$

أو بالشكل:

$$z = \psi_1(x.y) + \frac{1}{y^2} \overline{\psi}(x.y) + \frac{y}{x}$$

أي أن:

$$z = \psi_1(x.y) - x^2 \psi_2(x.y) + \frac{y}{x}$$

حيث أن:

$$\overline{\psi}(x.y) = x^2 y^2 \psi_2(x.y)$$

٥-١٦- تمارين غير محلولة:

١- أوجد الحل العام لمعادلات لاغرانج التالية:

(1) $y^2 zp + x^2 zq = x + y$

(2) $yzp - xzq = e^z$

(3) $p\sin^2 x + q\tan x = \cos^2 z$

(4) $(y-z)^2 + xzq = xy$

(5) $(xz + y)p + (x + yz)q = 1 - z^2$

٢- عين السطوح التكاملية لمعادلات لاغرانج التالية والمارة من المنحنيات Γ المعطاة بجوارها:

(1) $xp - yq = z^2(x - 3y) \qquad \Gamma : x = 1; yz + 1 = 0$

(2) $xp + yq = z - x^2 - y^2 \qquad \Gamma : y = -2; z = x - x^2$

(3) $zp + (z^2 - x^2)q + x = 0 \qquad \Gamma : y = x^2; z = 2x$

(4) $(y - z)p + (z - x)q = x - y \qquad \Gamma : z = y = -x$

(5) $(y + 2z^2)p - 2x^2 zq = x^2 \qquad \Gamma : z = x; y = x^2$

٣- برهن أنه إذا كانت المعادلة الكلية:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

كمولة فإن سطوحها التكاملية تتعامد مع السطوح التكاملية لمعادلة لاغرانج:

$$pP + qQ = R$$

٤- تحقق أن السطوح التكاملية للمعادلة الكلية:

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

متعامدة مع السطوح الكلية لمعادلة لاغرانج $xp + yq = z$.

٥- عين السطوح المتعامدة مع أسر السطوح الكروية:

$$\psi = x^2 + y^2 + z^2 = c$$

٦- عين السطوح المتعامدة مع أسرة السطوح الكروية المعطاة في المثال السابق والمارة من القطع المكافئ:

$$\Gamma : y = 2x^2 \quad ; \quad z = 1$$

٧- عين تكاملاً تاماً لكل من المعادلات التالية:

(1) $p^2 - q^2 = 4$

(2) $q = 2p^2 + 1$

(3) $pq = p + q$

(4) $z^2 = 1 + p^2 + q^2$

(5) $p^3 + q^3 = 27z$

(6) $q^2 = zp$

(7) $q(z + q) + p = 0$

(8) $p(q - \cos y) = \cos x$

(9) $xq = 2xy + \ln|p|$

(10) $z = px + qy + \sin(pq)$

(11) $z = px + qy + p^2q^3$

(12) $p^2 = q^2z^2(1 - q^2)$

٨- أوجد السطح المولد بمميزات المعادلة:

$$z = px + qy + p^2 + q^2 + pq$$

الموازية للمحور x، ثم تأكد أنه يحقق المعادلة التفاضلية، وأنه يمس السطح الممثل بالحل الشاذ.

٩- برهن أن $z^2 = 4xy$ تكامل للمعادلة:

$$z = px + qy + \ln pq$$

يمثل مغلف أسرة المستويات المحتواة في التكامل العام والمارة عبر المبدأ.

١٠- طبق طريقة شارب لإيجاد تكاملات تامة للمعادلات التالية:

(1) $q = 3p^2$

(2) $z^2(p^2z^2 + q^2) = 1$

(3) $2x(z^2q^2 + 1) = pz$

(4) $p - 3x^2 = q^2 - y$

(5) $pxy + pq + qy = yz$

(6) $z = px + qy + p^2 + q^2$

١١- طبق طريقة جاكوبي لإيجاد تكامل تام لكل مما يلي:

(1) $p_1^2 + p_2^2 + p_3 = 1$

(2) $x_3^2 p_1^2 p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_2^2 - p_3^2 = 0$

(3) $p_1 p_2 p_3 + p_4^3 x_1 x_2 x_3 x_4^3 = 0$

(4) $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_3^2$

(5) $p_1 p_2 p_3 = z^3 x_1 x_2 x_3$

(6) $p_1^2 + p_2 p_3 - z(p_2 + p_3) = 0$

١٢- صنف المعادلات التالية حسب كونها زائدية أو مكافئية أو ناقصية:

(1) $2r - 6s + 4t + 7xp - yq + e^x z = x^2 + y^2$

(2) $2r + 8s + 8t + xyp - e^x q + x^2 z = y$

(3) $3r + s + t - x^2 q - z = 0$

(4) $(x+1)r - 2s + (1-x)t = e^x z$

(5) $2xr - 2(x-1)s - t + yp = 0$

(6) $r + 2(x-y)s - 2y(x-y)t + z = x$

١٣- أوجد معادلات المنحنيات المميزة لكل من المعادلات التالية:

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(4) $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3\dfrac{\partial z}{\partial y} + 4z + e^{xy} = 0$

١٤- أرجع المعادلات التالية إلى شكلها القانوني:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+7=0$$

$$(2)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+7\frac{\partial z}{\partial x}-8\frac{\partial z}{\partial y}+e^{xy}=0$$

$$(3)\quad 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$(4)\quad 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}-e^{xy}=1$$

$$(5)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+7\frac{\partial z}{\partial x}-8\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$(6)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}-e^{xy}=1$$

$$(7)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}-x^2=0$$

$$(8)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

★★★★★★★★★★

ثبت المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات المستعملة في هذا الكتاب مرتبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل منها باللغة الإنكليزية.

اجتماع	Union
إحداثيات أسطوانية	Cylindrical coordinates
اختياري (عشوائي، كيفي)	Arbitrary
الأشكال القانونية	Canonical forms
بعد	Dimension
تحويل	Transformation
تحويل خطي	Linear transformation
تحويل لابلاس	Laplace transform
تحويل لابلاس العكسي	Inverse Laplace transform
تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية الخطية	Classification of second order linear p.d.e
تفاضل تام	Exact differential
تكامل (حل) تام	The complete integral (solution)
تكامل (حل) عام	General integral (solution)
تكامل (فريد) شاذ	Singular integral
ثابت اختياري	An arbitrary constant
جملة معادلات تفاضلية	A system of differential equations

A system of linear differential equations	جملة معادلات تفاضلية خطية
An ordinary system of differential equations	جملة معادلات تفاضلية عادية
The auxiliary system of differential equations	جملة معادلات تفاضلية المساعدة (الملحقة)
Neighborhood	جوار
Solution	حل
Solution of differential equation	حل معادلة تفاضلية
Series solution of differential equation	حل معادلة تفاضلية بواسطة المتسلسلات
Solution about a regular singular point of d.e	الحل في جوار نقطة شاذة منتظمة لمعادلة تفاضلية
Solution about an ordinary point of d.e	الحل في جوار نقطة عادية لمعادلة تفاضلية
Reduction of order	خفض المرتبة
Function	دالة
Bessel function	دالة بيسل
A real- valued function	دالة حقيقية
Analytic function	دالة تحليلية
An arbitrary function	دالة كيفية
Degree	درجة
Integral surface	سطح تكاملي
A power series	سلسلة قوى

Convergent series	سلسلة متقاربة
Quasi-linear	شبه خطي
An integral strip	شريط تكاملي
A characteristic strip	شريط مميز
Pfaffian differential form	صيغة بفاف التفاضلية
Charpits method	طريقة شارب
The method of undetermined coefficients	طريقة المعادلات غير المعينة
The method of Frobenius	طريقة فروبينيوس
Elimination method	طريقة الحذف
Integrating factor	عامل التكميل
An integral element	عنصر تكاملي
A plane element	عنصر مستوي
A tangent element of a surface	عنصر مماسي لسطح
Linear operator	مؤثر خطي
Linear differential operator	مؤثر تفاضلي خطي
Existence and uniqueness theorem	مبرهنة الوجود والوحدانية
Variable	متغير (متحول)
Exponential order	مرتبة أسية
Linearly dependent	مرتبطة خطياً
Initial – value problem	مسألة القيمة الابتدائية
Boundary value problem	مسألة القيمة الحدية
Linearly independent	مستقلة خطياً
Continuous	مستمر

Piecewise continuous	مستمر قطعياً (مقطعياً)
Determinant	معين
Wronskian determinant	معين رونسكي
Equation	معادلة
Partial differential equation (p.d.e)	معادلة تفاضلية جزئية
An ordinary differential equation (d.e)	معادلة تفاضلية عادية
Pfaffian (total) differential equation	معادلة تفاضلية بفاف (كلية)
Bessel equation	معادلة بيسل
Linear differential equation	معادلة تفاضلية خطية
Linear p.d.e of first order	معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى خطية
Non- linear p.d.e of first order	معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى غير خطية
Hyper geometric d.e	معادلة تفاضلية فوق الهندسية
Quasi- linear p.d.e	معادلة تفاضلية جزئية نصف خطية
Hyperbolic p.d.e	معادلة تفاضلية جزئية زائدية
Parabolic p.d.e	معادلة تفاضلية جزئية مكافئية
Elliptic p.d.e	معادلة تفاضلية جزئية ناقصية
Integrable d.e	معادلة تفاضلية كمولة
Homogenous d.e	معادلة تفاضلية متجانسة
Non homogenous d.e	معادلة تفاضلية غير متجانسة
Separable d.e	معادلة تفاضلية قابلة للفصل
Clairaut p.d.e of first order	معادلة كليرو التفاضلية الجزئية من

المرتبة الأولى

Legendres equation	معادلة ليجندر
Indicial equation	المعادلة المميزة (المعادلة الأسية)
Charpits auxiliary equations	معادلات شارب المساعدة
characteristic equations	المعادلة المميزة
Discriminant of linear p.d.e of second order	مميز المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية
Characteristic curves	المنحنيات المميزة
Origin of p.d.e	منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية
Operator	مؤثر
A coordinate system	نظام إحداثي
A singular point	نقطة شاذة
A regular singular point	نقطة شاذة منتظمة
An ordinary point	نقطة عادية
Unique	وحيد

المصادر

١- سمير نوف، دروس في الرياضيات العالية،ترجمة: و. قدسي، ص. أحمد، م. دعبول، خ. أحمد، أ. كنجو، وزارة التعليم العالي، سوريا، ١٩٧٢.

٢- د. موفق دعبول، د. عادل سودان، مسائل وتمارين في المعادلات التفاضلية، الطبعة الثانية. دمشق ١٩٧١.

٣- د. محمد سعيد البرني، المعادلات التفاضلية (٢)، منشورات جامعة دمشق، ١٩٨٤.

٤- د. عمران قوبا، المعادلات التفاضلية، منشورات جامعة دمشق، ٢٠٠٠

٥- د. أحمد الدرويش، المعادلات التفاضلية (٢)، منشورات جامعة دمشق – الطبعة الثانية، ٢٠٠٣.

٦- قيصر فيازمينسكي، المعادلات التفاضلية (١) و(٢)، المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر بدمشق، ١٩٩٥.

٧- د. عزت قاسم، د. محمد مناف الحمد، المعادلات التفاضلية (١)، منشورات جامعة دمشق، ١٩٩٩.

٨- د. كثرة مخول، المعادلات التفاضلية (٢)، منشورات جامعة البعث، ١٩٩٢.

٩- ماتفييف ن. م، المعادلات التفاضلية. دار العلم، موسكو، ١٩٨٨.

١٠- ماتفييف ن. م، مسائل وتمارين في المعادلات التفاضلية، مينسك، ١٩٦٧.

١١- إيلكولتس إل. ي، المعادلات التفاضلية وحساب التحولات، دار العلم، موسكو، ١٩٦٩.

١٢- فيليبوف آ. ف، مسائل في المعادلات التفاضلية، دار العلـم، موسـكو، ١٩٧٣.

13- Angek. Fundamentals of differential equations, Addison 1996.

14- Bateman. H, Partial differential equations of mathematical physics, Newyork 1969.

15- Epstein. B. Partial differential equations, MCGRAW Hill, 1962.

16- Friedman, Avner, partial differential equations, Holt, Rine hart and winston, 1969.

17- Frits John. Partial differential equations thirdedittion, springer-verlag. Newyork, Heideberg, Berlin.

18-Hellwig. G, Partial differential equations, Newyork. Blaisdell, 1964.

19- Kopchenova. N. V, MARON. I. A, Computational mathematics, Moscow, 1975.

20- Miller. F. H, Partial differential equations, Newyork, 1969.

21- Polyanin. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. Chapman, 2002.

22- Somasundarn.D, ordinary differential equations, Isbn, 2001.

23- Snider A.D. partial differential equations prentice hall, 1999.

24- Wloka. J. Partial differential equations Cambridge university, press, 1987.

25- Wylie. C. R, differential equations, Mcgraw Hill company, 1979.

المقومون العلميّون

أ. د. دعد الحسيني

أ.د. محي الدين بحبوح

د. محمد الشيخ

المدقق اللغوي

د. عبد اللطيف عمران