الميكانيك التحليلي

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

الميكانيك التحليلي

الدكتور محمد سعيد محاسنه
أستاذ في قسم الفيزياء

جامعة دمشق

1432 – 1433هـ
2011 – 2012 م

5.تطبيقات معادلات لاغرانج في الجمل الكهربائية والكهرميكانيكية 201
5. 1.مقدمة 201
5. 2.الإحداثيات المناسبة 202
5. 3.معادلات الارتباط ودرجات الحرية 202
5. 4.الطاقة الحركية 203
5. 5.الطاقة الكامنة 204
5. 6 .القوى المعممة F_Q 205
5. 7.تابع الاستطاعة 207
5. 8.معادلات لاغرانج في الدارات الكهربائية 207
5. 9.أمثلة توضيحية 207
5. 10.المنظومات الكهرميكانيكية: تابع لاغرانج وتحديد القوى المعممة 211
6.حركة الجسم الصلب 219
6. 1.السرعة الزاوية 219
6. 2.الطاقة الحركية للجسم الصلب 223
6. 3.عزم اندفاع الجسم الصلب 228
6. 4.معادلات حركة الجسم الصلب 232
6. 5.زوايا أولر 236
6. 6.معادلات أولر 242
7.المعادلات القانونية 257
7. 1.معادلات هاملتون 257
7. 2.تابع راوس 264
7. 3.أقواس بواصون 270
7. 4.مبدأ الفعل الأصغري 277
7. 5.الفعل كتابع للإحداثيات 281
7. 6.مبدأ موبيرتييه 285

7. 7.التحويلات القانونية 289
7. 8.معادلة هاملتون-جاكوبي..... 294
7. 9.طريقة فصل المتحولات في معادلة هاملتون-جاكوبي 300
7. 10.حركة النقطة المادية والظاهرة الموجية..... 308
8.ميكانيك النظرية النسبية **317**
8. 1.فعل جسيم في النظرية النسبية 317
8. 2.تابع لاغرانج لجسيم حر 318
8. 3.الاندفاع في الميكانيك النسبي 319
8. 4.الطاقة في النظرية النسبية 319
8. 5.الطاقة السكونية..... 320
8. 6.تابع هاملتون لجسيم حر 322
8. 7.تحويلات لورنتز للطاقة والاندفاع..... 323
8. 8.سرعة مجموعة جسيمات في النظرية النسبية 324
المراجع **331**
دليل المصطلحات العلمية **333**

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المقدمة

يمثل موضع الميكانيك التحليلي بديلاً متطوراً عن ميكانيك نيوتن ولا يتضمن فيزياء جديدة ويعتمد عرضه أيضاً على مبادئ عامة تفاضلية ولا يوجد في مرجعيات الميكانيك تعريف مجدد للميكانيك التحليلي لكن ما يجمع تلك المرجعيات هو عرض موضوع الميكانيك التحليلي باستخدام الإحداثيات المعممة التي تحدد وضع المجموعة المادية وتكون مستقلة فيما بينها.

ويعتمد الميكانيك التحليلي على معادلات الارتباطات (الصلة) لنقاط المجموعة المادية ومفهوم الانتقالات الافتراضية وكذلك مبدأ العمل الافتراضي وطريقة مضاريب لاغرانج المستخدمين في دراسة شرط توازن المجموعات المادية وتحديد مواضع التوازن. وتنتج المعادلات التفاضلية للحركة بشكل رئيسي مع معادلات لاغرانج التي هي الأساس في عرض موضوعات هذا الكتاب. وعولجت قوانين الانحفاظ لكل من الطاقة الكلية والاندفاع وعزم الاندفاع كتطبيقات على معادلات لاغرانج وإيجاد ثوابت التكامل للمعادلات التفاضلية عند تكاملها. والميكانيك التحليلي على صلة مباشرة مع مواضيع الفيزياء النظرية كميكانيك الكم والفيزياء الإحصائية.

ومن المواضيع الأساسية في هذا الكتاب معادلات هاملتون وراوس وأقواس بواسون ومبدأ هاميلتون (مبدأ الفعل الأصغر) والتحويلات القانونية ومعادلة هاملتون جاكوبي. وتعتبر تلك المواضيع الأساس في مناهج الفيزياء النظرية مثل ميكانيك الكم والفيزياء الإحصائية ونظرية النسبية العامة والخاصة وغيرها. ويتضمن هذا الكتاب موجزاً عن أوجه التشابه بين المجموعات المادية والكهربائية والكهروميكانيكية وتطبيق الطرائق التحليلية للميكانيك عليها. ومن السمات الأساسية التي تميز هذا الكتاب احتواؤه على عدد كبير من المسائل والتمارين المحلولة التي تعتبر تطبيقات مباشرة على المفاهيم النظرية المعروضة.

أرجو أن أكون قد وفقت في عرض مواضيع هذا الكتاب بأسلوب واضح وسهل أمام طلابي الأعزاء والقراء المهتمين.

محمد سعيد محاسنة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

1. التوازن التحليلي

1. 1. المجموعات المادية المرتبطة ومفهوم الارتباطات

عند معالجة كثير من مسائل الميكانيك نلجأ إلى حل معادلات الحركة:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_i,...\vec{r}_n\ ,\ \vec{v}_i,...\vec{v}_n\ ,t\ )\ ,\ \ i=1,2,...,n$$

حيث i يرمز إلى رقم النقطة المادية و n عدد نقاط المجموعة.

وتتعين الشروط الابتدائية من قيم أشعة الموضع وسرعات النقاط في لحظة محددة t. تعد القوى في هذه المسائل توابعاً معلومة لأوضاع النقاط وسرعاتها وكذلك للزمن t (للاختصار تدعى هذه القوى بالقوى المفروضة)، والشروط الابتدائية تكون اختيارية لا يفرض عليها أي قيود. لكن يوجد في الميكانيك صنف آخر من المسائل تعالج فيها بالإضافة إلى القوى المفروضة قوى مجهولة لدينا وهي أيضاً توابع لأوضاع النقاط وسرعاتها. يعتمد في حل هذه المسائل على طرائق خاصة في الميكانيك التحليلي عالجها كل من دالامبير ولاغرانج.

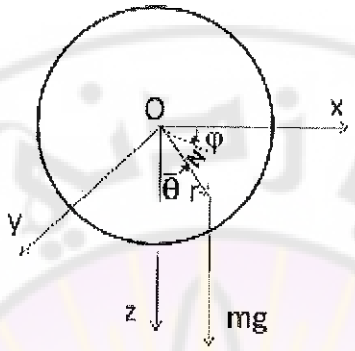
لنتناول كمثال على تلك المسائل النواس الكروي الشكل (1.1). الذي يمثل نقطة مادية m تهتز بالقرب من سطح الأرض, معلقة بخيط غير قابل للاستطالة طوله ℓ، مع إهمال مقاومة الهواء. يؤثر في النقطة القوة المفروضة $m\vec{g}$ وقوة توتر الخيط المجهولة $\vec{N}$. إن معادلة حركة النواس تأخذ الشكل:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N}$$

تحوي هذه العلاقة المجاهيل $\vec{r}(t)$ و $\vec{N}(t)$. ولحلها لا بد من وجود معلومات إضافية: أولها أن النقطة المادية تتحرك في أية لحظة على سطح كروي نصف قطره ℓ (الخيط وهو مشدود) وهذا يعني أن إحداثيات النقطة تحقق الشرط $r^2=\ell^2$. ثانيهما توتر الخيط موجه وفق الخيط (هنا يكتب توتر

الخيط بالشكل $\vec{N} = 2\lambda\vec{r}$ ، حيث λ تابع سلمي مجهول). وهكذا نجد أن شروط المسألة تؤدي إلى جملة المعادلات:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} \ , \ r^2 - \ell^2 = 0$$



الشكل (1.1)

التي تحدد قانون حركة النقطة على كرة وتوتر الخيط اللازم لتلك الحركة أي أن (λ, z, y, x كتوابع للزمن)، والشروط الابتدائية في هذه الحالة غير اختيارية: فالنقطة في البدء ينبغي أن تكون على سطح كرة نصف قطرها ℓ وشعاع السرعة ينبغي أن يقع في مستوٍ مماس للكرة. وهنا يفترض أن طول الخيط يبقى ثابتاً وهذا يعني أن مادة الخيط مطلقة الصلابة.

نرى في هذا المثال أن وضع النقطة وسرعتها تحقق شروطاً معينة لا تنتج من معادلة الحركة. ضمن هذا المعنى يقال عن النقطة إنها مرتبطة أو خاضعة لارتباط.

وبصورة عامة تدعى الشروط التي تفرض قيوداً على حركة نقاط المجموعة المادية **بالارتباطات أو القيود** ويعبر عن هذه الشروط تحليلياً بمعادلات تحوي الإحداثيات وسرعات النقاط وكذلك الزمن. إذا فرضت على مجموعة مادية ارتباطات عددها k وكان $\vec{N}_{\alpha i}$ رد فعل الارتباط α على النقطة ذات الترتيب i, فإن رد فعل الارتباطات k على النقطة i يساوي:

$$\vec{N}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \vec{N}_{\alpha i} \qquad (1.1)$$

نميز أنواعاً متعددة للارتباطات: **الهولونومية واللاهولونومية، المحررة وغير المحررة، الثابتة والمتحولة.** الارتباطات الهولونومية (أو القابلة للتكامل) هي الارتباطات التي معادلاتها يمكن دوماً إرجاعها إلى علاقات من الشكل:

$$f\left(\vec{r}_1,...\vec{r}_n,t\right)=0 \qquad (1.2)$$

حيث f تابع لإحداثيات النقاط والزمن، وتفرض هذه الارتباطات قيوداً ليس فقط على أوضاع النقاط وإنما على سرعاتها وتسارعاتها. وفعلاً إذا اشتققنا العلاقة (1.2) بالنسبة للزمن نحصل على الارتباطات الهولونومية المفروضة على السرعة:

$$\frac{df}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\nabla}_i f\right)\vec{v}_i+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (1.3)$$

وباشتقاق العلاقة (1.3) بالنسبة للزمن نحصل على الشروط المفروضة على التسارع:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\nabla}_i f\right)\vec{a}_i+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_i f\right)\right]\vec{v}_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=0 \qquad (1.4)$$

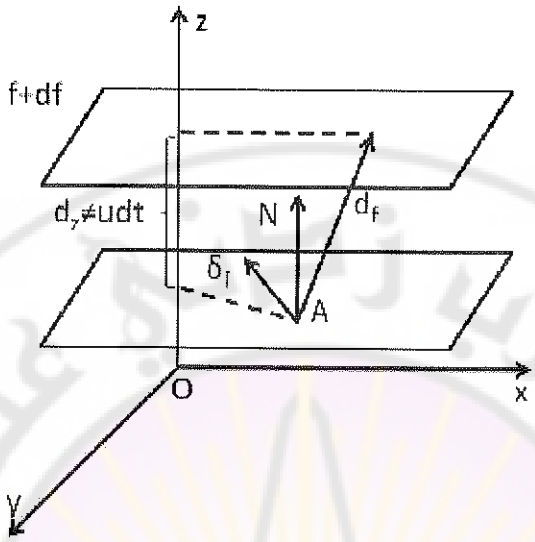
الشيء المميز للارتباطات الهولونومية هو أن الشروط المفروضة على تسارع وسرعة نقاط المجموعة تؤول إلى شروط مفروضة على أوضاع نقاطها. أو بتعبير آخر نقول إن معادلات الارتباطات (1.3) و(1.4) يمكن مكاملتها.

مثالاً على ذلك حركة نقطة على مستو أفقي يتحرك بدوره شاقولياً للأعلى بسرعة ثابتة u. بتوجيه المحور oz وفقاً للشاقول تكون معادلة الارتباط:

$$f=z-ut=0$$

من هنا ينتج أن الارتباط هولونومي والقيود المفروضة على وضع النقطة وسرعتها وتسارعها هي:

$$z=0 \quad , \quad \dot{z}=u \quad , \quad z=ut$$



الشكل (1.2)

الارتباطات اللاهولونومية (اللامتكاملة) هي الارتباطات التي معادلاتها يستحيل أن تؤول إلى معادلات تحوي فقط الإحداثيات والزمن. وأكثر الارتباطات اللاهولونومية المدروسة هي الارتباطات الخطية من المرتبة الأولى بالنسبة للسرعات، أي:

$$\sum_i \vec{a}_i \vec{v}_i + b = 0 \qquad \textbf{(1.5)}$$

حيث $b, \vec{a}_i$ يمكن أن تتعلق بأوضاع النقاط والزمن وسوف لا نتطرق إلى هذا النوع من الارتباطات في دراستنا.

الارتباطات المقيدة: هي الارتباطات التي لا تسمح لنقاط المجموعة بمغادرتها ويعبر عنها بالعلاقات $f_\alpha(x,y,z,t)=0$. أما الارتباطات المحررة فهي تلك التي تسمح للنقاط بمغادرتها ويعبر عنها بمتراجحات من الشكل $f_\alpha(x,y,z,t) \geq 0$.

الارتباطات الثابتة: هي الارتباطات التي لا تتحول مع الزمن والمعادلات التي تمثلها لا تحوي صراحة الزمن t مثل $f_\alpha(x,y,z)=0$. بينما **الارتباطات المتحولة** هي على العكس فمعادلاتها تحوي صراحة الزمن t مثل $f_\alpha(x,y,z,t)=0$.

إن إدخال مفهوم الارتباطات وردود أفعالها يدعو إلى صياغة المسألة الأساسية لميكانيك المجموعات المرتبطة بارتباطات هولونومية كمسألة إيجاد قانون حركة المجموعة وردود أفعال الارتباطات وفقاً للقوى المفروضة $\vec{F}_i$ والارتباطات k. وهذه المسألة تؤدي إلى حل مشترك لمعادلات الحركة ومعادلات الارتباطات:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i + \vec{N}_i \quad , \quad (i=1,2...n) \\ f_\alpha\left(\vec{r}_1,...\vec{r}_n,t\right) &= 0 \quad , \quad (\alpha=1,2,...k) \end{aligned} \tag{1.6}$$

مع شروط ابتدائية مفروضة تتفق مع معادلات الارتباطات. تمثل جملة المعادلات (1.6) إلى $3n+k$ معادلة سلمية تحوي 6n من التوابع المجهولة – مساقط الأشعة $\vec{r}_i(t)$ و $\vec{N}_i(t)$ على المحاور الإحداثية. والحالة الأكثر أهمية هي عندما $k>3n$ وبالفعل إذا كانت $k=3n$ فإن معادلات الارتباطات تعين بشكل كامل حركة المجموعة. من جهة أخرى عندما $k<3n$ نجد حلاً للمسألة المطروحة فقط إذا علم $6n-(3n+k)=3n-k$ من العلاقات المستقلة بين أوضاع النقاط وردود أفعال الارتباطات.

1. 2. الانتقالات الافتراضية والارتباطات المثالية

لنعرف الانتقالات الحقيقية والافتراضية لنقطة مادية خاضعة للارتباط:

$$f(\vec{r}\,,\,t)=0 \tag{1.7}$$

إن **الانتقال الحقيقي** $d\vec{r}$ لنقطة هو انتقال لا متناه في الصغر يتم تحت

تأثير القوى المفروضة ورد فعل الارتباط خلال فاصل زمني dt ويحقق هذا الانتقال معادلتي الحركة والارتباط معاً.

الانتقال الافتراضي $\delta\vec{r}$* لنقطة هو انتقال لا متناه في الصغر وهو تصوري يسمح به الارتباط ويتم في لحظة ثابتة للزمن، وفي هذه اللحظة "يتسمر" الارتباط، أي أن حركة الارتباط مع الزمن تتوقف خيالياً. لا يحدث الانتقال الافتراضي تحت تأثير القوى ويحدث آنياً دون فترة زمنية. ونحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها الانتقالات الافتراضية عن طريق العلاقة (1.7) عند تثبيت الزمن.

$$\delta f = \vec{\nabla} f . \delta\vec{r} = 0 \qquad (1.8)$$

إن التغير يتم عند ثبوت الزمن.

نكتب في حالة الانتقال الحقيقي تفاضل العلاقة (1.7) بالشكل التالي:

$$df = \vec{\nabla} f . d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \qquad (1.9)$$

نرى من العلاقتين (1.8) و(1.9) أن الانتقالات الافتراضية تنطبق على الانتقالات الحقيقية فقط في حالة الارتباطات الثابتة أي عندما $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. ويمكن أن نوضح هذه الفكرة بصورة هندسية. ليكن لدينا نقطة خاضعة للحركة على سطح يتحرك بدوره مع الزمن ولنفرض أنه في اللحظة t كان السطح في الوضع I وكانت النقطة المتحركة في الوضع M الشكل (1.3). في هذه اللحظة يقع أي انتقال افتراضي في المستوي المماس للسطح عند النقطة M، بينما يتم الانتقال الحقيقي $d\vec{r}$ خلال الفاصل الزمني dt الذي ينتقل فيه السطح إلى وضع

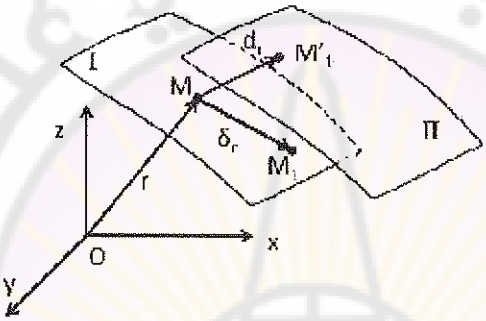
---

* نرمز لتفاضل $\vec{r}$ بـ $d\vec{r}$ أما $\delta\vec{r}$ فنرمز لتغير $\vec{r}$. وكل القواعد المتبعة في حساب التفاضل متبعة في حساب التغير.

آخر II وبالتالي فإن الشعاع $d\vec{r} = \overrightarrow{MM'}$ لا يقع في المستوي المماس السابق ولا يمكن أن ينطبق على أي من الأشعة $\delta\vec{r}$.

ويمكن توضيح العلاقتين (1.8) و(1.9) برجوعنا إلى مثال النقطة المتحركة على مستو أفقي (انظر الشكل (1.2)). في هذه الحالة يكون للانتقالات الحقيقية والافتراضية المعادلتان:

$$dz - udt = 0 \ , \ \delta z = 0$$



الشكل (1.3)

من هنا نرى أيضاً أن الانتقال الحقيقي لا ينطبق على الانتقال الافتراضي في حالة الارتباط المتحول لأن dz و δz لا يحققان العلاقة نفسها.

من السهل الآن تعميم ما ذكر على مجموعة n من النقاط الخاضعة للارتباطات k:

$$f_\alpha\left(\vec{r}_1,...\vec{r}_\alpha,t\right) = 0 \ , \ \left(\alpha = 1,2,...k\right) \qquad \textbf{(1.10)}$$

والحصول على معادلات شبيهة بالمعادلتين (1.8) (1.9)، وبالفعل عندما نأخذ تغير الأطراف اليسرى وتفاضلها من المعادلات (1.10) ومساواتها الصفر يكون:

$$\sum_i \vec{\nabla}_i f_\alpha . \delta\vec{r}_i = 0 \qquad \textbf{(1.11)}$$

$$\sum_i \vec{\nabla}_i f_\alpha . d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \qquad (1.12)$$

إن فكرة الانتقالات الافتراضية تدعو لتعريف نوع هام من الارتباطات. فعندما تكون محصلة عمل قوى رد فعل الارتباط وفقاً لانتقالات افتراضية لنقاط المجموعة مساوية الصفر، أي أن:

$$\delta A = \sum_i \vec{N}_i \delta \vec{r}_i = 0 \qquad (1.13)$$

حيث $\vec{N}_i$ قوة رد فعل الارتباط المؤثرة في النقطة i نسمي ذلك الارتباط **الارتباط المثالي.**

كأمثلة على الارتباطات المثالية نعود مرة أخرى لمثال الشكل (1.2) مع فرض أن المستوي أملس عندئذ يكون رد فعل المستوي على النقطة في أية لحظة عمودياً على المستوي أي أن $N_x = N_y = 0$ بينما $N_z \neq 0$ وبالتالي فإن عمل قوة رد الفعل وفقاً لانتقال افتراضي (العمل الافتراضي) معدوم.

$$\delta A = \vec{N}.\delta\vec{r} = N_z \delta z = 0$$

لأن $\delta z = 0$ وهكذا فإن المستوي الأملس الثابت أو المتحرك يمثل ارتباطاً مثالياً. وبالوقت نفسه نجد أن عمل قوة رد الفعل وفقاً لانتقال حقيقي غير معدوم:

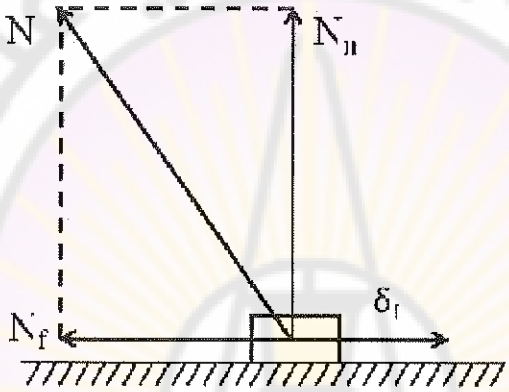
$$dA = \vec{N}.d\vec{r} = N_z dz = N_z u dt \neq 0$$

وهكذا نرى أن مفهوم **العمل الافتراضي** المنجز وفقاً لانتقالات تصورية افتراضية يعكس الخاصة الفيزيائية للسطح.

بالإضافة إلى المستويات الملساء تشكل الأجسام مطلقة الصلابة ارتباطات مثالية. فمن أجل سلك صلب (جسم مطلق الصلابة) يكون مجموع أعمال قوى رد الفعل التي تؤثر فيها بعض نقاط السلك في نقاط أخرى منه مساوياً الصفر. وبالفعل إذا أخذنا نقطتين من جسم صلب وأعطيناهما حركتين انسحابية ودورانية فإن قوى رد الفعل (القوى الداخلية) لا تقوم بأي عمل لأن

العمل الناتج عن انتقال نقطة تأثير إحدى القوتين يساوي ويعاكس بالإشارة العمل الناتج عن انتقال نقطة تأثير القوة الأخرى. وكذلك فإن العمل معدوم عند الانتقال الدوراني لثبوت نقطة تأثير القوة الأولى وتعامد القوة الثانية على اتجاه الانتقال.

إن المستوي الخشن لا يمثل ارتباطاً مثالياً. في هذه الحالة تكون قوة رد فعل المستوي غير ناظمية على المستوي، وبالتالي عمل قوة رد الفعل المماسية وفقاً لانتقال افتراضي لا يساوي الصفر أي أن شرط تعريف الارتباط المثالي لا يتحقق (انظر الشكل (1.4)).



الشكل (1.4)

1. 3. مبدأ العمل الافتراضي

ينص مبدأ العمل الافتراضي لمجموعة ماديه على ما يلي:

الشرط اللازم والكافي لتوازن مجموعة من النقاط خاضعة لارتباطات مثالية وثابتة ومقيدة هو أن يكون مجموع الأعمال الجزئية الافتراضية لكل القوى المؤثرة في المجموعة مساوياً الصفر، أي أن:

$$\sum_{i}^{n} \vec{F}_i . \delta \vec{r}_i = 0 \qquad (1.14)$$

ينتج هذا المبدأ مباشرة من تعريف الارتباطات المثالية، التي من أجلها

يكون مجموع الأعمال الجزئية لردود فعل الارتباطات مساوياً الصفر:

$$\sum_i \vec{N}_i \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1.15)$$

حتى نثبت أن الشرط (1.14) هو شرط لازم نأخذ نقطة ما من المجموعة i تكون محصلة القوى المؤثرة فيها $\vec{F}_i$ ومحصلة ردود الفعل $\vec{N}_i$، فإذا كانت المجموعة في حالة توازن فإن كل نقطة منها i تكون متوازنة وبالتالي ينبغي أن تتحقق العلاقة:

$$\vec{F}_i + \vec{N}_i = 0, (i = 1, 2 ... n) \qquad (1.16)$$

نعطي للنقطة المفروضة انتقالاً افتراضياً $\delta\vec{r}_i$ ونضرب العلاقة (1.16) بـــ $\delta\vec{r}_i$ ثم نأخذ المجموع بالنسبة لكل نقاط المجموعة فيكون:

$$\sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{N}_i \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1.17)$$

وبما أن الارتباطات مثالية $\sum_i \vec{N}_i \delta\vec{r}_i = 0$ ينبغي أن يكون:

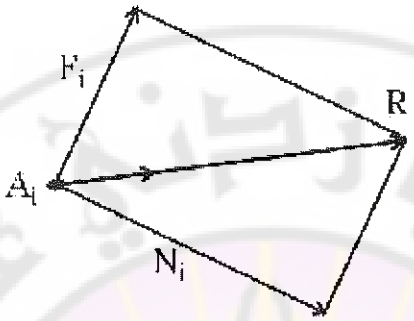
$$\sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1.18)$$

وهكذا نجد أن الشرط (1.18) هو شرط لازم لتوازن المجموعة.

لنبين كفاية الشرط بمعنى أنه لو تحققت العلاقة (1.18) فان المجموعة تكون متوازنة. لهذا الغرض نفرض في البدء وجود مجموعة مادية ساكنة. فعندما تتعرض هذه المجموعة إلى القوى المؤثرة $\vec{F}_i$ المحققة للشرط (1.18) وأدى هذا إلى تحريك نقطة واحدة A_i على الأقل من نقاط المجموعة، عندئذ لا تتحقق العلاقة (1.16) من أجل تلك النقطة ويكون للقوى $\vec{F}_i$ و $\vec{N}_i$ محصلة $\vec{R}_i$ مغايرة للصفر الشكل (1.5). وتحت تأثير هذه المحصلة تقوم النقطة A_i بانتقال حقيقي $d\vec{r}_i$ واتجاه هذا الانتقال هو اتجاه المحصلة $\vec{R}_i$ نفسه لأن الحركة تبدأ من السكون. وبما أن الارتباطات المفروضة هي ثابتة لا تتعلق بشكل

واضح بالزمن، فإن أحد الانتقالات الافتراضية $\delta\vec{r}_i$ ينطبق على $d\vec{r}_i$ ومن أجله يكون:

$$\vec{R}_i\delta\vec{r}_i = \left(\vec{F}_i + \vec{N}_i\right)\delta\vec{r}_i > 0 \qquad \textbf{(1.19)}$$



الشكل (1.5)

وهكذا بدلاً من العلاقة (1.17) نحصل على:

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{N}_i\delta\vec{r}_i\right) > 0 \qquad \textbf{(1.20)}$$

وبما أن الارتباطات مثالية فتؤول المتراجحة السابقة إلى:

$$\sum_i \vec{F}_i\delta\vec{r}_i > 0$$

وهذا يناقض الشرط الذي تحققه القوى $\vec{F}_i$ وذلك مهما كان نوع الانتقالات الافتراضية. والنتيجة هي أن الشرط اللازم (1.18) لتوازن المجموعة لا يتحقق عندما تتحرك نقطة واحدة منها على الأقل. فتحقيق العلاقة (1.14) يعبر فعلاً عن الشرط اللازم والكافي لتوازن المجموعة المادية وبذلك نكون قد توصلنا إلى ما نصبو إليه.

من مزايا مبدأ العمل الافتراضي هو عدم احتوائه قوى رد فعل الارتباطات المثالية. ويستخدم هذا المبدأ بشكل واسع في مسائل الميكانيك، فبالاعتماد عليه يمكن بسهولة حل مسائل توازن الجسم الصلب والمجموعات

وبه يمكن أيضاً تعيين العلاقة بين قيم القوى المفروضة.

إذا لم تكن جميع الارتباطات المفروضة على المجموعة مثالية، فإنه ينبغي إضافة قوى الاحتكاك إلى القوى المفروضة. عندئذ ينبغي أن تكون جميع أعمال القوى المفروضة وعمل قوى الاحتكاك مساوياً الصفر. ولو طلب تعيين قوة رد الفعل من أجل ارتباط مثالي فإنه ينبغي تطبيق مبدأ التحرر (مغادرة) من الارتباط وذلك بطرح الارتباط جانباً واستبدال قوة رد فعله وعند كتابة معادلة التوازن يجب إضافة قوة رد فعل هذا الارتباط إلى القوى المفروضة وهكذا تتعين قوة رد الفعل مباشرة من معادلة التوازن.

1. 4. النظريات العامة الناتجة عن مبدأ العمل الافتراضي

1. 4. 1. الارتباطات تسمح بانسحاب متماسك للمجموعة مواز لمحور:

لنفرض أن الانسحاب يوازي المحور ox مثلاً، فالانتقالات الافتراضية للارتباط تكون:

$$\begin{cases} \delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_i = \ldots = \delta x_n \\ \delta y_1 = \delta y_2 = \ldots = \delta y_i = \ldots = \delta y_n = 0 \\ \delta z_1 = \delta z_2 = \ldots = \delta z_i = \ldots = \delta z_n = 0 \end{cases}$$

وإذا رمزنا بـــ δx لإحدى القيم المتساوية للانتقالات δx_i، غدت المعادلة العامة للتوازن:

$$\left(\sum F_{x_i}\right)\delta x = 0$$

وأصبح شرط التوازن:

$$\sum F_{x_i} = 0$$

حيث F_{x_i} مركبة القوة $\vec{F}_i$ على المحور x.

1. 4. 2. الارتباطات تسمح بدوران متماسك للمجموعة حول محور:

لنفرض أن محور الدوران هو oz، وأن (x_i, y_i, z_i) هي الإحداثيات الديكارتية لنقطة M_i من المجموعة. فإذا رمزنا بـــ(r_i, θ_i, z_i) للإحداثيات الأسطوانية للنقطة M_i، كان:

$$x_i = r_i \cos\theta_i \qquad y_i = r_i \sin\theta_i \qquad z_i = z_i$$

وكانت الانتقالات الافتراضية الموافقة للارتباط هي:

$$\begin{cases} \delta r_i = 0 \ , \ \delta r_2 = 0 \ , \ \dots \ , \ \delta r_n = 0 \\ \delta z_1 = 0 \ , \ \delta z_2 = 0 \ , \ \dots \ , \ \delta z_n = 0 \\ \delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \dots = \delta\theta_i = \dots = \delta\theta_n \end{cases}$$

وإذا أشرنا بـــ$\delta\theta$ لإحدى القيم المتساوية للانتقالات $\delta\theta_i$، كان:

$$\delta x_i = -r_i \sin\theta_i \delta\theta \quad , \quad \delta y_i = r_i \cos\theta_i \delta\theta \quad , \quad \delta z_i = 0$$

أو

$$\delta x_i = -y_i \delta\theta \qquad \delta y_i = x_i \delta\theta \qquad \delta z_i = 0$$

وكان بالتالي العمل الافتراضي للقوى المفروضة هو:

$$\sum\left(F_{x_i}\delta x_i + F_{y_i}\delta y_i + F_{z_i}\delta z_i\right) = \sum\left(-y_i F_{x_i} + x_i F_{y_i}\right)\delta\theta$$

وإذا رمزنا بـــM للعزم الحاصل للقوى المفروضة بالنسبة إلى المحور oz، أصبح العمل الافتراضي للقوى المفروضة هو:

$$\delta A = M.\delta\theta$$

وغدت المعادلة العامة للتوازن:

$$M.\delta\theta = 0$$

فشرط التوازن يكون إذن:

$$M = 0$$

ملاحظة: في حال الارتباطات المحررة تكتب معادلة الارتباط بالشكل:

$$f(x, y, z) \geq 0$$

أو $f(x,y,z) \le 0$

وذلك لأن التحرر يمكن أن يكون خارج السطح أو من داخله وعندئذ يكتب شرط توازن المجموعات وفقاً لمبدأ العمل الافتراضي:

$$\sum \vec{F}_i . \delta \vec{r}_i \ge 0$$

أو $\sum \vec{F}_i . \delta \vec{r}_i \le 0$

مثال 1: تتحرك نقطة ثقيلة A بدون احتكاك على المنحني المعرف بالعلاقات التالية:

$$x = a\cos\theta$$
$$y = a\sin\theta$$
$$z = b\theta$$

وخاضعة لقوة جاذبة من O ومتناسبة طرداً مع البعد عنها:

$$\vec{F} = -m\omega^2 \overrightarrow{OA}$$

حيث $m\omega^2$ ثابت التناسب. أوجد موضع توازن النقطة ورد فعل الارتباط عند ذلك الموضع.

الحل: إن شرط توازن النقطة هو أن يكون العمل الافتراضي للقوى المؤثرة مساوياً الصفر. ولما كانت القوى المؤثرة هي ثقل النقطة $\vec{P} = m\vec{g}$ ورد الفعل $\vec{N}$ والقوة الجاذبة $\vec{F}$، فحسب مبدأ العمل الافتراضي نكتب:

$$\delta A = \left(\vec{P} + \vec{F} + \vec{N}\right)\delta\vec{r} = 0 \qquad (1)$$

لكن $\vec{N}.\delta\vec{r} = 0$ لأن الحركة تتم بدون احتكاك. نعوض عن $\vec{P}$ و $\vec{F}$ في العلاقة (1) ثم نسقطها على المحاور الإحداثية فنحصل على:

$$\delta A = -mg\delta z - m\omega^2\left(x\delta x + y\delta y + z\delta z\right) = 0 \qquad (2)$$

حيث z, y, x مساقط $\overrightarrow{OA}$ على المحاور الإحداثية. و $\delta z, \delta y, \delta x$ هي مساقط الانتقال $\delta\vec{r}$ على المحاور نفسها. لنوجد هذه المساقط الأخيرة عن طريق

أخذ تغير المعادلات التي تحدد المنحني:

$$\delta x = -a\sin\theta.\delta\theta$$
$$\delta y = a\cos\theta.\delta\theta \qquad (3)$$
$$\delta z = b.\delta\theta$$

نعوض (3) في (2) وبعد الاختصار نحصل على:

$$\delta A = -mb(g + \omega^2 b\theta)\delta\theta = 0$$

وبما أن $\delta\theta \neq 0$ فإن:

$$g + \omega^2 b\theta = 0$$

أي أن:

$$\theta = -\frac{g}{b\omega^2}$$

وهي قيمة الزاوية θ عند وضع التوازن. ونحصل على الإحداثيات z, y, x الموافقة لوضع التوازن بتعويض قيمة θ في معادلات المنحي:

$$z = -\frac{g}{\omega^2} \quad , \quad y = -a\sin\frac{g}{b\omega^2} \quad , \quad x = a\cos\frac{g}{b\omega^2}$$

أما قوة رد الفعل عند وضع التوازن فنوجدها بكتابة شرط توازن النقطة (محصلة القوى المؤثرة فيها معدومة):

$$m\vec{g} - m\omega^2.\overrightarrow{OA} + \vec{N} = 0$$

وبالإسقاط على المحاور الإحداثية $0z, 0y, 0x$ نحصل على الترتيب.

$$-m\omega^2 x + N_x = 0$$
$$-m\omega^2 y + N_y = 0$$
$$-mg - m\omega^2 z + N_z = 0$$

ومنه نجد:

$$N_x = m\omega^2 a\cos\frac{g}{b\omega^2}$$

$$N_y = -m\omega^2 a\sin\frac{g}{b\omega^2}$$

$$N_z = mg + m\omega^2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) = 0$$

ملاحظة: اشرنا سابقاً إلى أنه يمكن تعيين رد الفعل من اجل ارتباط مثالي وذلك بتطبيق مبدأ التحرر (مغادرة) من الارتباط – باستبدال الارتباط بقوة رد فعله وعندئذ نفرض النقطة وكأنها حرة غير مرتبطة. باستخدام مبدأ العمل الافتراضي نكتب:

$$\delta A = \left(\vec{P} + \vec{F} + \vec{N}\right)\delta\vec{r} = 0$$

أو

$$\delta A = \left(-m\omega^2 x + N_x\right)\delta x + \left(-m\omega^2 y + N_y\right)\delta y$$
$$+\left(-mg - m\omega^2 z + N_z\right)\delta z = 0$$

وبما أن النقطة تعد طليقة تكون $\delta z, \delta y, \delta x$ متغيرات مستقلة عن بعضها ولكي ينعدم δA ينبغي أن ينعدم أمثال كل من $\delta z, \delta y, \delta x$ أي أن:

$$N_x = +m\omega^2 x = m\omega^2 a\cos\frac{g}{b\omega^2}$$

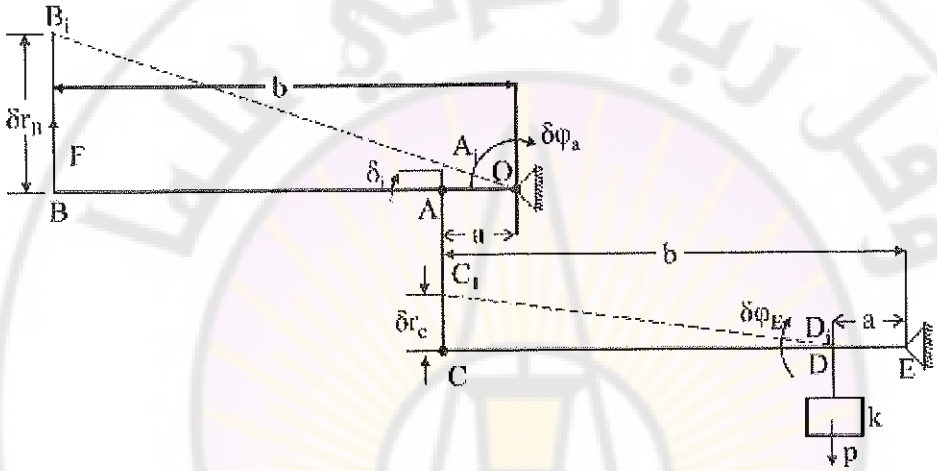
$$N_y = m\omega^2 y = -m\omega^2 a\sin\frac{g}{b\omega^2}$$

$$N_z = mg + m\omega^2 z = mg - mg = 0$$

وهي النتائج السابقة نفسها.

مثال 2: تستخدم مجموعة من العتلات لرفع الثقل $(\vec{p})$ المعلق بالعتلة السفلية في النقطة D الشكل (1.6). تنجز عملية رفع الثقل بوساطة القوة $\vec{F}$ الموجهة شاقولياً إلى الأعلى ونقطة تأثيرها النقطة B من العتلة العلوية. عيّن وزن الثقل المرفوع (p) إذا كانت:

$$\frac{b}{a}=10 \quad , \quad F=10kg_f$$



الشكل (1.6)

لنمثل على الشكل القوى المفروضة $\vec{p}$ و $\vec{F}$ ولنعط النقطة B انتقالاً افتراضياً $\overrightarrow{\delta r_B}=\overrightarrow{BB_1}$ موجهاً شاقولياً نحو الأعلى. عند هذا تدور العتلة العلوية حول المفصل O باتجاه دوران عقارب الساعة وتدور العتلة السفلية بالاتجاه نفسه.

لنوجد العلاقة بين الانتقال الافتراضي: $\overrightarrow{\delta r_D}=\overrightarrow{DD_1}$ للنقطة D و $\overrightarrow{\delta r_B}$ (نمثل على الشكل الأوضاع الجديدة بخطوط منقطة). من تشابه المثلثات المنشأة على العتلة العلوية نجد:

$$\delta r_A=\frac{a}{b}\delta r_B$$

وبما أن AC يمثل محور ارتكاز متماسك فإن:

$$\delta r_C = \delta r_A$$

إذن

$$\delta r_C = \frac{a}{b}\delta r_B$$

ومن تشابه المثلثات المنشأة على العتلة السفلية نحصل على:

$$\delta r_D = \frac{a}{b}\delta r_C$$

وبالتالي فإن:

$$\delta r_D = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \delta r_B \qquad (1)$$

وبتطبيق مبدأ العمل الافتراضي على مجموعة العتلات: مجموع أعمال القوى $\vec{F}$ و $\vec{p}$ وفقاً للانتقالات الافتراضية $\overrightarrow{\delta r_B}$ و $\overrightarrow{\delta r_D}$ لنقاط تأثير القوى B و D يساوي الصفر:

$$F\delta r_B - p\delta r_D = 0 \qquad (2)$$

لنعوض δr_D من (1) في (2) فنحصل على:

$$p = \left(\frac{b}{a}\right)^2 F$$

ومن القيم العددية المعطاة نجد أن $p=1000\ kg_f$

ملاحظة: يمكن حل المسألة بالاعتماد على الانتقال الزاوي $\delta\varphi_o$ بدلاً من الانتقال الخطي δr_B وحساب الانتقال الزاوي $\delta\varphi_E$ بدلالة $\delta\varphi_o$ ولهذا نستخدم الانتقالات الافتراضية للنقاط A و C من المحور المتماسك AC:

$$\delta r_A = a\delta\varphi_o$$

$$\delta r_C = b\delta\varphi_E$$

لكن: $\delta r_A = \delta r_C$ ، إذن:

$$\delta r_E = \frac{a}{b}\delta\varphi_o$$

وبتطبيق مبدأ العمل الافتراضي نجد:

$$m_o\left(\vec{F}\right)\delta\varphi_o + m_E\left(\vec{p}\right)\delta\varphi_E = 0$$

(يرمز m_o إلى العزم حول النقطة o، وجداء العزم في الانتقال الزاوي يعطي عبارة العمل) وبالتالي فإن:

$$F.b.\delta\varphi_o - P.a.\delta\varphi_E = 0$$

ومن هذه العلاقة نجد أن:

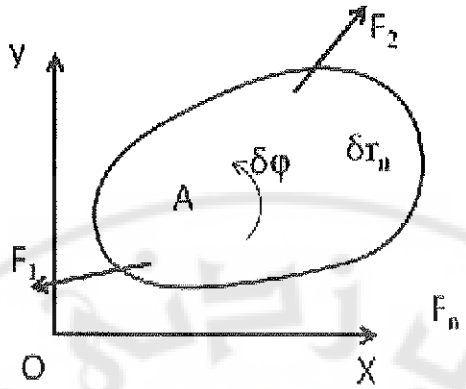
$$F = \frac{b}{a}F\frac{\delta\varphi_o}{\delta\varphi_E}$$

$$P = F\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

وهي النتيجة نفسها بالطريقة الأولى.

مثال 3: أوجد شرط توازن الجسم الصلب الخاضع لتأثير قوى مستوية مستخدماً مبدأ العمل الافتراضي.

الحل: لتكن القوى المؤثرة في المستوي XY هي $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$,.....$\vec{F}_n$ ولنختر النقطة A من الجسم الصلب في مستوي القوى كمركز للدوران الشكل (1.7). إن حركة الجسم بشكل عام يمكن أن تكون انسحابية ودورانية، فيمكن عندئذ أن نحلل الانتقال الافتراضي إلى انتقال انسحابي $\overrightarrow{\delta r}_A$ موافق للنقطة A ودوران نسبي $\delta\varphi$ حول المحور المار من A والعمودي على المستوي XY. بتطبيق مبدأ العمل الافتراضي كشرط لتوازن الجسم الصلب المفروض، يكون لدينا:



الشكل (1.7)

$$\sum_i \vec{F}_i \overrightarrow{\delta r_i} + \sum m_A\left(\vec{F}_i\right)\delta\varphi = 0 \qquad \text{(a)}$$

حيث $m_A\left(\vec{F}_i\right)$ عزم القوة $\vec{F}_i$ بالنسبة لـــA. لنحلل القوى $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2,.....\vec{F}_n$ والانتقال الافتراضي $\overrightarrow{\delta r_i}$ وفقاً للمحاور الإحداثية x و y فنجد:

$$\vec{F}_i = F_{iz}\vec{n}_z + F_{iy}\vec{n}_y \quad (i = 1,2,...n)$$

$$\overrightarrow{\delta r_i} = \delta x_i \vec{n}_x + \delta y_i \vec{n}_y$$

وبالتعويض في العلاقة (a):

$$\sum_i\left(\vec{F}_{ix}\delta x_i + \vec{F}_{iy}\delta y_i\right) + \sum_i m_A\left(\vec{F}_i\right)\delta\varphi = 0$$

لكن عند الانتقال الانسحابي للجسم الصلب يكون:

$$\overrightarrow{\delta r_i} = \overrightarrow{\delta r_A}$$

وبالتالي فإن $\delta\varphi, \delta y_A, \delta x_A$ يمكن إخراجها قبل إشارة المجموع:

$$\delta x_A \sum_i F_{ix} + \delta y_A \sum F_{iy} + \delta\varphi \sum m_A\left(\vec{F}_i\right) = 0 \qquad \text{(b)}$$

وبالإضافة إلى ذلك فإن $\delta\varphi, \delta y_A, \delta x_A$ هي انتقالات مستقل بعضها عن بعض، لهذا فان الطرف الأيسر من العلاقة (b) يساوي الصفر فقط إذا كانت الأمثال:

$$\sum_i F_{ix} \ , \ \sum_i F_{iy} \ , \ \sum m_A\left(\vec{F}_i\right)$$

مساوية الصفر، أي أن:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \ , \ \sum_i F_{iy} = 0 \ , \ \sum m_A\left(\vec{F}_i\right) = 0 \qquad (c)$$

ومن المعلوم أن المعادلات (c) تمثل في علم التوازن معادلات التوازن للجسم الصلب الطليق والخاضع لتأثير أي قوى مستوية مفروضة. وبصورة مشابهة يمكن استخراج معادلات التوازن للجسم الصلب الطليق في حالة وجود مجموعة من القوى الفراغية.

1. 5. دراسة التوازن بطريقة مضاريب لاغرانج

ليكن لدينا مجموعة مؤلفة من n نقطة مادية وخاضعة للارتباطات المثالية:

$$f_\alpha\left(\vec{r}_i\right) = 0, (\alpha = 1,2,...k), (i = 1,2,...n) \qquad (1.21)$$

لنكتب شرط التوازن بطريقة مبدأ العمل الافتراضي:

$$\sum_i \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1.22)$$

وجدنا سابقاً إن تغيرات الإحداثيات تحقق العلاقة (1.11):

$$\sum_i \vec{\nabla}_i f_\alpha . \delta\vec{r}_i = 0 \ , \ (\alpha = 1,2,...k) \qquad (1.23)$$

وبما أنه يوجد 3n من التغيرات $\delta z_i, \delta y_i, \delta x_i$ التي ترتبط بـــ k علاقة فإن عدد التغيرات المستقلة يبقى مساوياً $3n - k = r$ وهو نفسه عدد الإحداثيات المستقلة.

نضرب كلاً من العلاقات (1.23) البالغ عددها k بالعوامل λ_α الموافقة ثم نجمعها مع (1.22) فنحصل على:

$$\sum_i \left[\vec{F}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha\right] . \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1.24)$$

واضح هنا أن عدد المتغيرات المرتبطة هو k لذا نختار العوامل λ_α بحيث تعدم أمثال التغيرات المرتبطة، عندئذ تصبح أمثال التغيرات المستقلة مساوية الصفر أيضاً.

$$\vec{F}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha = 0 \qquad (1.25)$$

أو بالشكل التحليلي وفقاً للمساقط على المحاور الإحداثية:

$$\vec{F}_{ix} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0, \vec{F}_{iy} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} = 0, \vec{F}_{iz} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} = 0 \qquad (1.26)$$

عدد هذه المعادلات هو 3n وبإضافة معادلات الارتباط (1.21) يكون العدد الكلي للمعادلات 3n+k والتي نعين منها أوضاع التوازن للمجموعة z_i, y_i, x_i والعوامل λ_α التي تسمى **بمضاريب لاغرانج**.

1. 6. المعنى الفيزيائي لمضاريب لاغرانج

من شروط الارتباطات المثالية والهولونومية نكتب من جديد:

$$\sum_i \vec{N}_i . \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1.27)$$

$$\sum_i \left(\overrightarrow{\nabla_i f_\alpha}\right) . \delta\vec{r}_i = 0 \ , \ \left(\alpha = 1,2...k\right) \qquad (1.28)$$

بضرب كل علاقة من العلاقات k في (1.28) بالمضاريب $(-\lambda_\alpha)$ الموافقة ثم نجمع الناتج مع الشرط (1.27) فنحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{N}_i - \sum_\alpha . \lambda_\alpha \overrightarrow{\nabla_i f_\alpha} \right] . \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (1.29)$$

وباختيار العوامل λ_α بحيث تعدم أمثال $\delta\vec{r}_i$ المرتبطة نصل إلى:

$$\vec{N}_i = \sum_\alpha . \lambda_\alpha \overrightarrow{\nabla_i f_\alpha} \ , \ \left(i = 1,2...n\right) \qquad (1.30)$$

وهكذا نرى أن ردود فعل الارتباطات المثالية الهولونومية تمثل

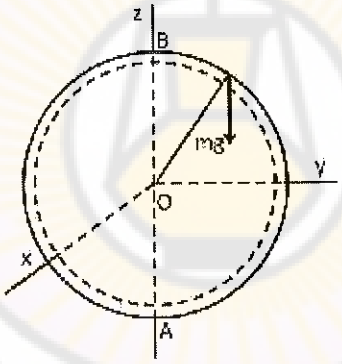
عبارات خطية بالنسبة لتدرجات التوابع $f_\alpha(\alpha=1,...k)$ التي تحدد معادلات الارتباطات.

والنتيجة أن مضاريب لاغرانج λ_α تعين قوى ردود الأفعال للارتباطات الموافقة $f_\alpha(\vec{r}_i)$ وليست هي – أي λ_α – مجرد عوامل سلمية لا معنى لها.

مثال 1: عين أوضاع التوازن لنقطة مادية ثقيلة تتحرك على كرة ملساء نصف قطرها R.

الحل: إن معادلة الارتباط هي: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

مع فرض أن النقطة لا تغادر الكرة الشكل (1.8). نأخذ مبدأ الإحداثيات في مركز الكرة ونوجه المحور z شاقولياً للأعلى.



الشكل (1.8)

والقوى المؤثرة في النقطة هي قوة الثقالة التي مساقطها على المحاور الإحداثية:

$$F_x=0\ ,\ F_y=0\ ,\ F_z=-mg$$

وحسب مبدأ العمل الافتراضي نكتب:

$$-mg\delta z=0 \qquad (a)$$

أما تغيرات الإحداثيات فترتبط حسب (1.23) بالعلاقة:

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0 \qquad (b)$$

نضرب طرفي العلاقة (b) بـــ λ ثم نضيف إليها المعادلة (a) فنحصل على:

$$2\lambda x\delta x + 2\lambda y\delta y + (2\lambda z - mg)\delta z = 0$$

وبجعل كل من أمثال $\delta z, \delta y, \delta x$ مساوياً الصفر نجد أن:

$$2\lambda x = 0 \ , \ 2\lambda y = 0 \ , \ 2\lambda z = mg \qquad (c)$$

ومع معادلة الارتباط نحصل على أربع معادلات يعين منها λ, z, y, x بتربيع المعادلات (c) ثم جمعها معاً نحصل:

$$4\lambda^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = m^2g^2$$

أو:

$$4\lambda^2R^2 = m^2g^2$$

ومنها نجد:

$$\lambda = \pm\frac{mg}{2R}$$

حيث $\lambda \neq 0$، لذلك:

$$x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = \frac{mg}{2\lambda} = \pm R$$

وهكذا فإن النقطة المادية تتوازن في الوضعين $(0,0,R)$ و $(0,0,-R)$ اللذين يقعان في نهايتي القطر الشاقولي للكرة.

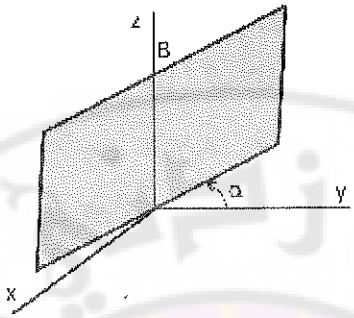
مثال 2: تتحرك نقطة ثقيلة على دائرة ملساء تميل عن الأفق بزاوية α. أوجد أوضاع توازن النقطة باستخدام مضاريب لاغرانج.

الحل: إن الدائرة التي تتحرك عليها النقطة المفروضة هي تقاطع كرة مع مستو مائل أي أن النقطة خاضعة للارتباطين:

$$f_2 = z - y\,tg\alpha = 0 \ , \ f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \qquad (1)$$

حيث مبدأ الإحداثيات هو مركز الكرة والمحور oz موجه شاقولياً للأعلى

ويمر المستوي من مركز الكرة والمحور ox ويميل عن المحور oy بزاوية قدرها α.



الشكل (1.9)

بما أن المنحني أملس يكون:

$$\vec{N}.\vec{\delta r} = 0$$

حيث $\vec{N}$ قوة رد فعل الارتباط. إن شرط توازن النقطة حسب مبدأ العمل الافتراضي هو:

$$\vec{P} = -\overrightarrow{mg} \quad , \quad \vec{P}.\vec{\delta r} = 0$$ ثقل النقطة

بالإسقاط يكون:

$$-mg\delta z = 0 \qquad (2)$$

وترتبط تغيرات الإحداثيات $\delta z, \delta y, \delta x$ بالعلاقات:

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0 \qquad (3)$$

$$\delta z - tg\alpha.\delta y = 0$$

من بين التغيرات $\delta z, \delta y, \delta x$ يوجد تغيران مرتبطان ويبقى تغير مستقل واحد وليكن δx.

نضرب العلاقتين (3) بـ λ_1 و λ_2 على الترتيب ونجمع إليهما (2) فنحصل على:

$$2\lambda_1 x\delta x + (2\lambda_1 y - \lambda_2 tg\alpha)\delta y + (-mg + 2\lambda_1 z + \lambda_2)\delta z = 0$$

لنختر λ_2,λ_1 بحيث تنعدم أمثال δy و δz فعندئذ تكون أمثال δx مساوياً الصفر، أي أن:

$$2\lambda_1 x = 0 \ , \ 2\lambda_1 y = \lambda_2 tg\alpha \ , \ mg = 2\lambda_1 z + \lambda_2 \qquad (4)$$

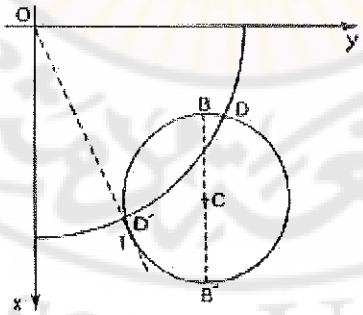
بإضافة معادلتي الارتباط (1) إلى العلاقات (4) نحصل على خمس معادلات بحلها المشترك نوجد كلاً من $\lambda_2,\lambda_1,z,y,x$ الموافقة لوضع التوازن. ونتيجة للحل نجد وضعين للتوازن هما:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \ , \ y = \ell\cos\alpha \ , \ z = \ell\sin\alpha \\ \lambda_1 = \dfrac{mg}{2\ell}\sin\alpha \ , \ \lambda_2 = mg\cos^2\alpha \end{array}\right\}$$

مثال 3: لدينا خيط طوله ثابت وكتلته معدومة (مهملة). يربط أحد طرفي الخيط بنقطة o ويربط الطرف الآخر منه بنقطة مادية ثقيلة M موضوعة على السطح الخارجي لأسطوانة دورانية أفقية ثابتة.

المطلوب تعيين مواضع توازن النقطة M.

الحل: نعتبر النقطة o هي مبدأ الإحداثيات، والمحور ox هو الشاقول الهابط، والمستوي xoy هو مستوي المقطع القائم للاسطوانة (المحور oy يكون إذن أفقياً). لنفرض أن مقطع الأسطوانة بالمستوي xoy هو دائرة واقعة في الزاوية xoy (الشكل (1.10)).



الشكل (1.10)

لنرمز بـــR لنصف قطر هذه الدائرة وبـــ(a,b) لإحداثيي مركزها،

وبـــB لأعلى نقطة من محيطها.

لنفرض أن طول الخيط، وليكن ℓ، محصور بين طول القطعة oB وطول المماس OT المنشأ من o للمقطع المفروض. وبذلك يمكن للنقطة المفروضة الاستناد إلى السطح الخارجي للأسطوانة حين يكون الخيط مشدوداً.

لنفرض أن هاتين الصلتين محققتان، فيكون:

$$\begin{cases} \varphi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \\ \varphi_2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

فالانتقالات الموافقة للصلتين المفروضتين تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = \delta\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \le 0 \\ \delta\varphi_2 = \delta\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

فإذا ضربنا طرفي العلاقة الثانية بـــ(−1)، ورمزنا للسهولة بـــf_1 وf_2 لـــ$\frac{1}{2}\varphi_1$ و $-\frac{1}{2}\varphi_2$ على الترتيب، لكانت علاقتا الارتباط كما يلي:

$$\begin{cases} 2f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \\ 2f_2 = -(x-a)^2 - (y-b)^2 + R^2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

وأصبحت بالتالي العلاقتان (2) ما يلي:

$$\begin{cases} \delta f_1 = x\delta x + y\delta y + z\delta z \le 0 \\ \delta f_2 = -(x-a)\delta x - (y-b)\delta y \le 0 \end{cases} \qquad (4)$$

لنعين مواضع التوازن بطريقتين:

الطريقة الأولى، وتعتمد على الوسطاء المستقلة.

الطريقة الثانية، وتعتمد على مضاريب لاغرانج.

الطريقة الأولى: نرى أن الإحداثيات (x,y,z) لنقطة M ليست مستقلة بعضها

عن بعض، بل مرتبطة بالعلاقتين (3)، فيمكن إذن تعيين هذه الإحداثيات بدلالة وسيط واحد، وليكن z مثلاً.

فإذا حسبنا δx و δy بدلالة δz و δf_1 و δf_2 من مجموعة العلاقتين:

$$\begin{cases} \delta f_1 = x\delta x + y\delta y + z\delta z \\ \delta f_2 = -(x-a)\delta x - (y-b)\delta y \end{cases}$$

أو من المجموعة المكافئة لها، وهي:

$$\begin{cases} x\delta x + y\delta y = \delta f_1 - z\delta z \\ a\delta x + b\delta y = \delta f_1 + \delta f_2 - z\delta z \end{cases}$$

لوجدنا:

$$\begin{cases} (ay-bx)\delta x = y\delta f_2 + (y-b)\delta f_1 + (b-y)z\delta z \\ (bx-ay)\delta y = x\delta f_2 + (x-a)\delta f_1 + (a-x)z\delta z \end{cases} \qquad (5)$$

ونلاحظ أن ثقل النقطة M هو القوة المفروضة الوحيدة المطبقة في النقطة M. فإذا رمزنا بـــm لكتلة M، كان العمل الافتراضي للقوة المفروضة هو:

$$\delta A_D = mg\delta x$$

وكان الشرط اللازم والكافي للتوازن الموافق للمجموعتين (3) و(4) هو:

$$\delta A_D \le 0$$

أو

$$\delta A_D \ge 0$$

هذا ولتعيين مواضع التوازن الموافقة للشروط السابقة، نبدأ أولاً بتعيين مواضع التوازن الموافقة لانتقالات التساوي:

$$\delta f_1 = 0 \qquad \delta f_2 = 0$$

ويتم ذلك بكتابة الشرط:

$$\delta A_D = 0$$

ثم نختار منها المواضع الموافقة لانتقالات التراجح:

$$\delta f_1 \le 0 \qquad \delta f_2 \le 0$$

أي المواضع التي تحقق العلاقة:

$$\delta A_D \le 0$$

إن مواضع التوازن الموافقة لانتقالات التساوي تتعين بالعلاقات:

$$\begin{cases} \delta f_1 = 0 \\ \delta f_2 = 0 \\ \delta A_D = 0 \end{cases}$$

فمن العلاقة الأولى من المجموعة (5)، ينتج بعد التعويض:

$$z(b-y)\delta z = 0$$

أي $z = 0$ أو $b - y = 0$

لندرس هاتين الحالتين:

(1) نفرض أن $z=0$

فإذا عوضنا قيمة z في معادلتي الارتباط، تصبح هاتان المعادلتان:

$$x^2 + y^2 = \ell^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

فنجد موضعين للتوازن D و D'، هما نقطتا تلاقي مقطعي الكرة والأسطوانة بالمستوي الشاقولي xoy (وهما موضعان موافقان لارتباطين ثنائيي الجانب).

لنرمز بـــ(x,y,z) لإحداثيات أحد هذين الموضعين، ولنبحث فيما إذا كان هذا الموضع موافقاً للارتباطات المفروضة (وهي ارتباطات وحيدات الجانب). ويتم ذلك بأن نعطي النقطة M، بدءاً من هذا الموضع، انتقالات معينة

بما يلي:

$$\delta f_1 \le 0 \qquad \delta f_2 \le 0$$

فيجب أن يكون العمل الافتراضي للقوة المفروضة (وهو $mg\delta x$) من أجل هذه الانتقالات، سالباً أو مساوياً للصفر:

$$mg\delta x \le 0$$

فإذا رجعنا إلى العلاقة الأولى من (5) وعوضنا z بالقيمة الموافقة لموضع التوازن (وهي الصفر)، لأضحت هذه العلاقة:

$$(ay - bx)\delta x = (y - b)\delta f_1 + y\delta f_2$$

وقد رأينا أنه يجب أن يكون $\delta x \le 0$

حين يصبح $\delta f_2 \le 0 \qquad \delta f_1 \le 0$

ففي الموضع D، نجد أن:

$$(ay - bx) > 0 \qquad (y - b) > 0 \qquad y > 0$$

فالموضع D يكون إذن موافقاً.

وفي الموضع D' نجد أن:

$$(ay - bx) < 0 \qquad (y - b) < 0 \qquad y > 0$$

ونرى في هذه الحالة أن δx لا يصبح سالباً أو صفراً من أجل جميع القيم السالبة أو المعدومة لـــ δf_1 و δf_2 فعندما يكون مثلاً:

$$\delta f_1 = 0 \qquad \delta f_2 < 0$$

يصبح $\delta x > 0$

فالموضع D' يكون إذن غير موافق. وهذا واضح، لأن النقطة M الموضوعة على سطح الأسطوانة في الموضع D' تنفك عن هذا السطح هابطة إلى الأسفل.

(2) لنفرض الآن أن $b - y = 0$

أو $y = b$

فإذا رجعنا إلى المعادلة الثانية من معادلتي الارتباط (1)، كان:

$$x - a = \pm R$$

فمواضع التوازن (الموافقة لانتقال التساوي):

إما أن تقع على أعلى مولدات الأسطوانة:

$$x = a - R$$

أو أن تقع على أخفض مولداتها:

$$x = a + R$$

نرى، اعتماداً على المعادلة الأولى من (1)، أن هذه المواضع هي نقط تقاطع هذين المولدين مع الكرة التي مركزها o ونصف قطرها ℓ.

ونلاحظ أن الكرة (o,ℓ) تلاقي المولد العلوي $B(x = a - R)$ بنقطتين E و E' ومتناظرتين بالنسبة للمستوي xoy، ولا تلاقي المولد السفلي $B'(x = a + R)$.

لندرس الآن إن كان كل من الموضعين E و E' موافقاً للارتباطين (وحيدي الجانب) المفروضين.

نرى أولاً أن إحداثيات الموضعين E و E' هي:

$$(E) \quad x = a - R \quad y = b \quad z > o$$

$$(E') \quad x = a - R \quad y = b \quad z < o$$

ونعلم أن الموضع الموافق يجب أن يحقق العلاقة:

$$mg\delta x \le 0$$

من أجل جميع الانتقالات المعينة بالعلاقات (4).

فإذا رجعنا إلى العلاقة الأولى من (5)، وعوضنا الإحداثيات (x,y,z)

بقيمها الموافقة للموضع E (أو E') كان:

$$\delta x = \frac{y\delta f_2}{ay - bx} = \frac{\delta f_2}{a - x} = \frac{\delta f_2}{R}$$

و إذا لاحظنا أن العلاقة $\delta x \le 0$

تصبح محققة حين يكون $\delta f_2 \ne 0$

لأدركنا أن موضعي التوازن E و E' يكونان إذن موافقين.

الطريقة الثانية: وهي طريقة مضاريب لاغرانج.

إن مواضع التوازن تتعين في هذه الطريقة بالمعادلات:

$$\begin{cases} X + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

وبالعلاقات التالية:

$$\lambda_1 \le 0 \qquad \lambda_2 \le 0$$

فإذا علم أن $X = P \quad Y = 0 \quad Z = 0$

وأن:

$$\begin{cases} 2f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 \\ 2f_2 = -(x-a)^2 - (y-b)^2 + R^2 \end{cases}$$

لأصبحت المعادلات (7) السابقة كما يلي:

$$\begin{cases} P+\lambda_1 x-\lambda_2(x-a)=0 \\ \lambda_1 y-\lambda_2(y-b)=0 \\ \lambda_1 z \qquad\qquad =0 \end{cases} \qquad (8)$$

فمن العلاقة الأخيرة ينتج:

$$\lambda_1=0 \qquad \text{أو} \qquad z=0$$

(1) فإذا فرضنا أن:

$$z=0$$

لوجدنا موضعين D و D' (كما رأينا سابقاً).

وإذا رجعنا إلى المعادلة الثانية من المجموعة (8):

$$\lambda_1 y=\lambda_2(y-b)$$

ولاحظنا أن:

$y>0$ و $y-b>0$ من أجل الموضع D

و $y>0$ و $y-b<0$ من أجل الموضع D'

لأدركنا أن الموضع D يكون موافقاً، وأن D' غير موافق.

(2) وإذا فرضنا أن:

$$\lambda_1=0$$

لأصبحت المعادلة الثانية من (8) كما يلي:

$$\lambda_2(y-b)=0$$

وإذا لاحظنا أن $\lambda_2\neq 0$ (إذ لو انعدم λ_2 لأصبحت المعادلة الأولى من (8) غير محققة)، كان:

$$P=\lambda_2(x-a)$$

وإذا علمنا أن $x<a$ من اجل الموضعين E و E'، رأينا أن هذين الموضعين موافقان.

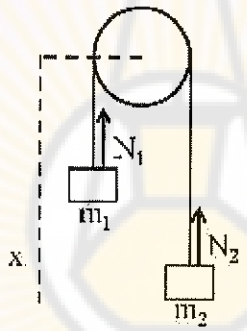
وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين وأمثلة محلولة

مثال 1: يتحرك جسم في المستوي XZ بسرعة ثابتة v_0 باتجاه المحور z نحو الأعلى. احسب مركبات كل من الانتقال الحقيقي $\vec{dr}$ والانتقال الافتراضي $\vec{\delta r}$.

الحل: إن مركبات $\vec{dr}$ هي dx وdz حيث $dz = v_0 dt$، بينما مركبات $\vec{\delta r}$ هي δx فقط لأن $\delta z = 0$ بسبب $\delta t = 0$ وذلك حسب تعريف الانتقال الافتراضي.

مثال 2: بكرة مثبتة يمر عليها خيط غير قابل للاستطالة وفي نهايتي الخيط معلقة الكتلتان m_1 وm_2 الشكل (1.11)، أثبت أن الارتباط هو مثالي.



الشكل (1.11)

الحل: الارتباط هنا هو الخيط الذي طوله ℓ وبفرض أن N_1 وN_2 هي قوى رد فعل الارتباط للكتلتين m_1 وm_2.

فعندما نعطي للكتلة m_2 انتقالاً افتراضياً δx_2 نحو الأسفل، فإن العمل الناتج:

$$\delta A = -N_2 \delta x_2 + N_1 \delta x_1$$

لكن $-N_2 = N_1$

$$\delta A = N_1 \delta(x_1 + x_2)$$

لأن ثابت $x_1 + x_2 = \ell$

فالارتباط مثالي.

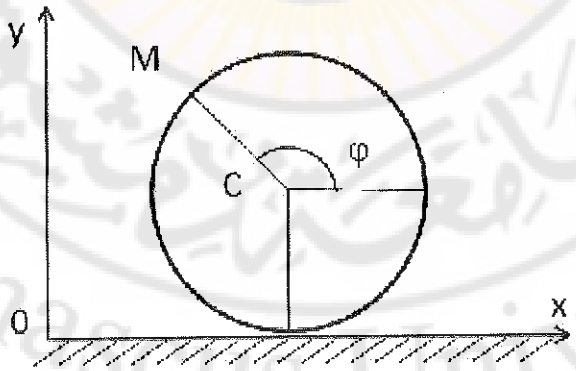
مثال 3: جسم مقيد بنقطة ثابتة O أو بمحور ثابت. أثبت أن الارتباط مثالي.

الحل: عندما يدور الجسم حول النقطة الثابتة O فإن الجسم يمثل المجموعة المادية والارتباط هنا هي النقطة الثابتة O. والانتقال الافتراضي للجسم هو الدوران حول O.

وبما أن نقطة تطبيق قوة رد فعل الارتباط تبقى ثابتة عند دوران الجسم فالعمل الافتراضي لقوة رد فعل الارتباط يساوي الصفر. أي أن الارتباط هو مثالي.

وكذلك الحال عندما يدور الجسم S حول محور ثابت فإن العمل الافتراضي لقوى رد فعل الارتباط (المحور الثابت) يكون معدوماً لأن نقاط تطبيق قوى رد فعل الارتباط تبقى ثابتة حين يدور الجسم.

مثال 4: ادرس أنواع الارتباط في حالة تدحرج عجلة دون انزلاق على مستقيم.



الشكل (1.12)

الحل: بفرض المحاور الإحداثية كما هي ممثلة في الشكل (1.12)، يكون لدينا العلاقة:

$$y_c = R$$

أو

$$y_c - R = 0$$

والتي تمثل ارتباطاً هندسياً ثابتاً.

حيث y_c إحداثي مركز العجلة وR نصف قطرها.

أما سرعة نقطة تماس العجلة مع الطريق الأفقية (المركز الآني للدوران)

$$\dot{X}_c = R\dot{\varphi}$$

أو

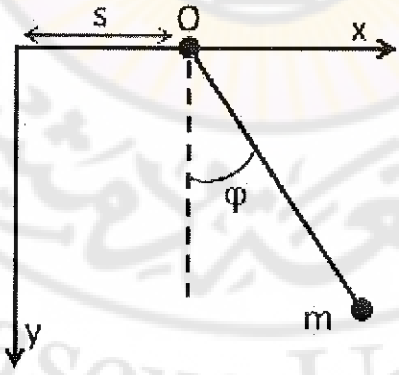
$$\dot{X}_c - R\dot{\varphi} = 0$$

إن هذه العلاقة تمثل ارتباطاً حركياً وثابتاً ويمكن مكاملتها:

$$X_c - R\varphi = const$$

والارتباط أيضاً هو هونولومي قابل للتكامل.

مثال 5: نواس بسيط كتلته m وطول خيط تعليقه ℓ ونقطة تعليقه O (مفصل متحرك) تتحرك على مستقيم وفقاً للعلاقة $s = s(t)$، ادرس أنواع الارتباط.



الشكل (1.13)

الحل: ترسم الكتلة m دائرة مركزها النقطة O ونصف قطرها ℓ.

إن معادلة الدائرة:

$$(x-s)^2+y^2-\ell^2=0$$

تمثل ارتباطاً هندسياً متحولاً لوجود s الذي ترتبط بشكل واضح بالزمن t.

مثال 6: ليكن لدينا الارتباط التالي والمطبق على نقطة مادية:

$$dy-g(z)dx=0 \qquad (1)$$

إذا كان التابع ثابتاً=$g(z)$ فإن معادلة الارتباط قابلة للتكامل أي أنها هولونومية.

أما إذا كان $g(z)\neq 0$، فإن العلاقة (1) تمثل ارتباطاً غير هونولومي ما دامت z, y, x غير معلومة.

مثال 7: أعد المثال (5) وأثبت أن الانتقال الافتراضي لا ينطبق على الانتقال الحقيقي في حالة الارتباطات المتحولة.

الحل: إن معادلة الارتباط في المثال المذكور هي:

$$f(x,y,t)=(x-s)^2+y^2-\ell^2=0 \qquad (1)$$

لنفاضل هذه العلاقة:

$$2(x-s)(dx-ds)+2ydy=0$$

أو

$$(x-s)(dx-\dot{s}dt)+ydy=0 \qquad (2)$$

لنأخذ تغير العلاقة (1):

$$(x-s)\delta x+y\delta y=0 \qquad (3)$$

من الواضح أن الانتقالات الحقيقية dx وdy في العلاقة (2) لا تحقق

العلاقة نفسها (3) في الانتقالات الافتراضية وبالتالي لا تنطبق الانتقالات الافتراضية على الحقيقية.

مثال 8: مجموعة مادية مرتبطة بارتباطات مثالية وخاضعة لقوى كمونية $U(x,y,z)$ أثبت أنه في حالة التوازن يكون ثابت = U.

الحل: نكتب شرط التوازن:

$$\sum_i \left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i\right) = 0$$

ومن العلاقة $\vec{F} = -\overrightarrow{gradU}$

نكتب من جديد:

$$-\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0$$

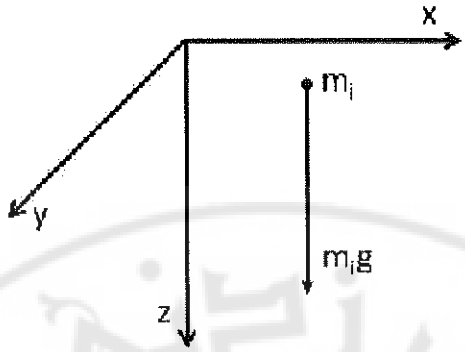
والطرف الأيسر يمثل $dU(x,y,z)$

إذن $dU(x,y,z) = 0$

ثابت $= U(x,y,z)$

مثال 9: مجموعة مادية مؤلفة من n نقطة مادية خاضعة لارتباطات مثالية والقوى المؤثرة فيها هي قوى الثقالة الأرضية $m_i\vec{g}$، حيث m_i كتلة النقطة i و $\vec{g}$ التسارع الأرضي. أثبت أنه في حالة التوازن يكون إحداثيات مركز الكتل للمجموعة ثابتاً وذلك اعتماداً على مبدأ العمل الافتراضي.

الحل: لنفرض أن اتجاه المحور Z باتجاه الشاقول للأسفل الشكل (1.14) ولنعطِ للنقاط انتقالاً افتراضياً δz_i ثم نكتب شرط التوازن وفقاً لمبدأ العمل الافتراضي:



الشكل (1.14)

$$\sum m_i g \delta z_i = 0$$

أو

$$\sum m_i \delta z_i = 0$$

لأن g ثابت يمكن إخراجه خارج إشارة $\sum$ والاختصار عليه.

وحسب تعريف مركز الكتل نكتب:

$$\sum m_i z_i = \mu Z$$

حيث أن μ كتلة المجموعة المادية وZ إحداثي مركز الكتل، وبالتالي:

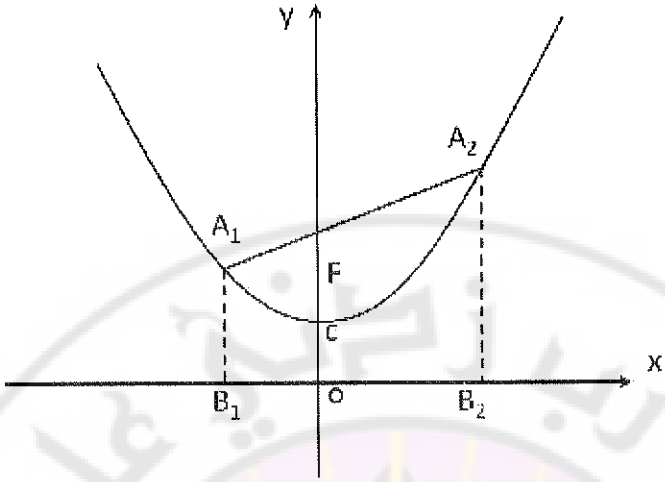
$$\sum m_i \delta z_i = \delta \sum m_i z_i = \mu \delta Z = 0$$

وبما أن $\mu \neq 0$ فإن $\delta Z = 0$

ثابت = Z

مثال 10: A_1A_2 قضيب متجانس، تنزلق نهايتاه بدون احتكاك على قطع مكافئ ثابت مفروض. عيّن أوضاع توازن القضيب إذا علم أن محور القطع شاقولي وأن تقعره متجه إلى الأعلى الشكل (1.15).

الحل: لنفرض محورين إحداثيين ox وoy في مستوي القطع: الأول واقع على دليل القطع والثاني على محوره.



الشكل (1.15)

وجدنا من المثال السابق أن المجموعة المادية الخاضعة لثقلها فقط تتوازن عندما تكون المركبة الشاقولية لإحداثي مركز كتلتها يساوي ثابت $Z = c$ أو $\delta Z = 0$. فلتعيين موضع التوازن هنا نبحث عن الشرط الذي يعطيه $\delta Y = 0$ باعتبار:

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

حيث Y ترتيب مركز ثقل القضيب A_1A_2 و y_1 و y_2 تراتيب نهايتيه A_1 و A_2 على الترتيب.

ومن المعلوم أن معادلة القطع المكافئ المنسوب إلى المحورين المفروضين هي: $x^2 = p(2y - p)$، p وسيط القطع.

فإذا كان $A_1(x_1, y_1)$ و $A_2(x_2, y_2)$ و a طول القضيب

وبما أن A_1 و A_2 نقطتان موجودتان على القطع فهما تحققان معادلته:

$$x_1^2 = p(2y_1 - p)$$

$$x_2^2 = p(2y_2 - p)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2$$

تمثل العلاقات الثلاثة معادلات الارتباط، بينما عدد الإحداثيات هي أربع x_1,y_1 و x_2,y_2 فإذن يكون عدد الإحداثيات المستقلة هنا واحداً فقط وليكن هذا الوسيط مثلاً هو الإحداثي x_1.

إن شرط توازن القضيب حسب مبدأ العمل الافتراضي وبالاعتماد على المثال السابق كما ذكرنا هو:

$$\delta Y = \tfrac{1}{2}\left(\delta y_1 + \delta y_2\right) = 0$$

لنعين δy_1 و δy_2 بدلالة δx_1.

من معادلات الارتباط وبعد إجراء عملية التفاضل ينتج:

$$x_1\delta x_1 = P\delta y_1$$

$$x_2\delta x_2 = P\delta y_2$$

$$\left(x_2 - x_1\right)\left(\delta x_2 - \delta x_1\right) + \left(y_2 - y_1\right)\left(\delta y_2 - \delta y_1\right) = 0$$

فالعلاقة الأخيرة تصبح بدلالة x_1 و x_2 وتفاضلاتها δx_1 و δx_2:

$$\left(x_2 - x_1\right)\left(\delta x_2 - \delta x_1\right) + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2P}\frac{\left(x_2\delta x_2 - x_1\delta x_1\right)}{2P} = 0$$

وبما أن $x_2 \neq x_1$ فالعلاقة السابقة تكتب بعد الاختصار:

$$2P^2\left(\delta x_2 - \delta x_1\right) + \left(x_2 + x_1\right)\left(x_2\delta x_2 - x_1\delta x_1\right) = 0$$

وبعد الإصلاح يكون:

$$\left[2P^2\left(x_2 + x_1\right)x_2\right]\delta x_2 - \left[2P^2\left(x_2 + x_1\right)x_1\right]\delta x_1 = 0$$

فيكون إذن:

$$\delta x_2 = \frac{2P^2 + \left(x_2 + x_1\right)x_1}{2P^2 + \left(x_2 + x_1\right)x_2}\delta x_1$$

وبما أن:

$$\delta y_1 + \delta y_2 = \frac{x_1\delta x_1 + x_2\delta x_2}{P}$$

فنجد (بعد التعويض بقيمة δx_2):

$$\delta y_1 + \delta y_2 = \frac{1}{P}\left[x_1 + x_2\frac{2P^2(x_2+x_1)x_1}{2P^2(x_2+x_1)x_2}\right]\delta x_1$$

ويكون بالتالي:

$$\delta Y = \frac{(x_1+x_2)(P^2+x_1x_2)}{P\left[2P^2+(x_1+x_2)x_2\right]}\delta x_1$$

وإن شرط التوازن $\delta Y = 0$ يؤدي إلى:

$(x_1+x_2)(P^2+x_1x_2)=0$ باعتبار $\delta x_1 \neq 0$

فإما أن يكون $x_2 = -x_1$

فالقضيب A_1A_2 يكون أفقياً

أو أن يكون $x_1x_2 = -P^2$

وفي هذه الحالة يمر القضيب A_1A_2 بمحرق القطع.

فالقضيب يتوازن على القطع المكافئ حين يكون أفقياً أو ماراً بمحرق القطع.

مثال11: قضيب صلب متجانس AB طوله ℓ يستند من طرفيه إلى جدار كرة ملساء قطرها $2a>\ell$ الشكل (1.16). أوجد وضع توازن القضيب بالاعتماد على مبدأ العمل الافتراضي.

الحل: تؤثر في القضيب قوى رد الفعل $\overrightarrow{N_1}$ و $\overrightarrow{N_2}$ وقوة ثقله المطبقة في منتصف القضيب AB.

إن عمل قوى رد الفعل معدومة لأن الكرة ملساء وحسب مبدأ العمل الافتراضي نكتب شرط التوازن:

$$\delta A = m\vec{g}.\delta\overrightarrow{oc} = m\vec{g}.\overrightarrow{cc'} = 0$$

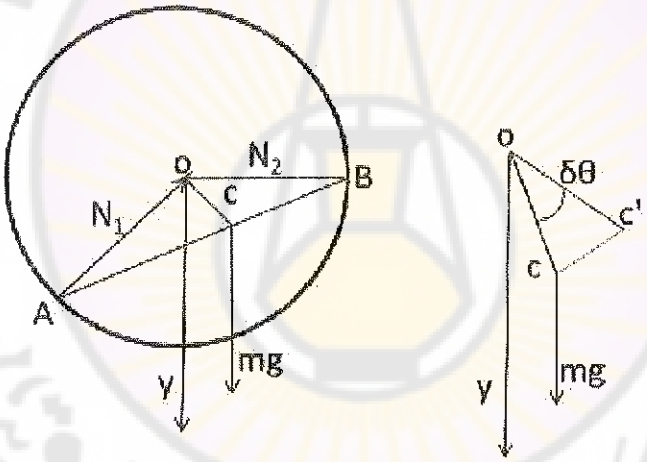
$$= mg.\overline{cc'}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = 0$$

$$= -mg.\overline{cc'}\sin\theta = 0$$

لكن $\overline{cc'} = \overline{oc}.\delta\theta$

$$\overline{cc'} = b.\delta\theta$$

علماً بأن θ هي الزاوية بين $\overline{oc}$ والشاقول وهي متغيرة مع تغير وضع القضيب و $\overline{oc} = b$.



الشكل (1.16)

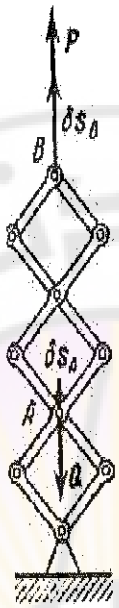
إذن:

$$\delta A = -mgb\sin\theta\delta\theta = 0$$

لكن $\delta\theta \neq 0$، إذن $\sin\theta = 0$

وبالتالي يوافق وضع التوازن الزاوية $\theta = 0$ أي أن القضيب يتوازن بالوضع الأفقي.

المثال 12: أوجد العلاقة بين القوتين P و Q في الآلة المبينة في الشكل وذلك في حالة التوازن الشكل (1.17).



الشكل (1.17)

الحل: بإعطاء المجموعة انتقالاً افتراضياً قدره δS. عندئذ يكون

$$\delta S_A = \delta S \text{ و } \delta S_B = 3\delta S_A$$

وحسب مبدأ العمل الافتراضي نكتب:

$$\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{P}.\overrightarrow{\delta S_B} + \vec{Q}.\overrightarrow{\delta S_A} = 0$$

وبالإسقاط:

$$P\delta S_B - Q\delta S_A = 0$$

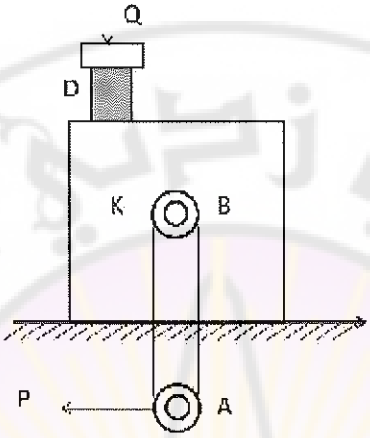
أو

$$(3P - Q)\delta S = 0$$

لكن $\delta S \neq 0$

إذن $Q = 3P$

مثال 13: أوجد العلاقة بين القوتين $\vec{Q}$ و $\vec{P}$ في الآلة الرافعة التي وضعت أجزاؤها في العلبة K، إذا كانت خطوة اللولب D هي h عند دوران الذراع AB دورة كاملة و $AB=\ell$ الشكل (1.18).



الشكل (1.18)

الحل: إن النقطة A ترسم قوساً من دائرة لدى إعطائها انتقالاً افتراضياً قدره δr_A و $\delta r_A = \ell\delta\varphi$ وعندئذ يرتفع الثقل Q مسافة قدرها δS للأعلى وحسب مبدأ العمل الافتراضي نكتب:

$$\vec{P}.\overrightarrow{\delta r_A} + \vec{Q}.\overrightarrow{\delta S} = 0$$

بالإسقاط نحصل على:

$$P.\delta r_A - Q.\delta S = 0$$

$$P\ell\delta\varphi = Q\delta S \qquad (1)$$

وباستخدام خطوة اللولب نوجد العلاقة بين δS و $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi \rightarrow \delta S$$

$$2\pi \qquad h$$

إذن (2)

$$\delta S = h\frac{\delta\varphi}{2\pi}$$

نعوض (2) في (1):

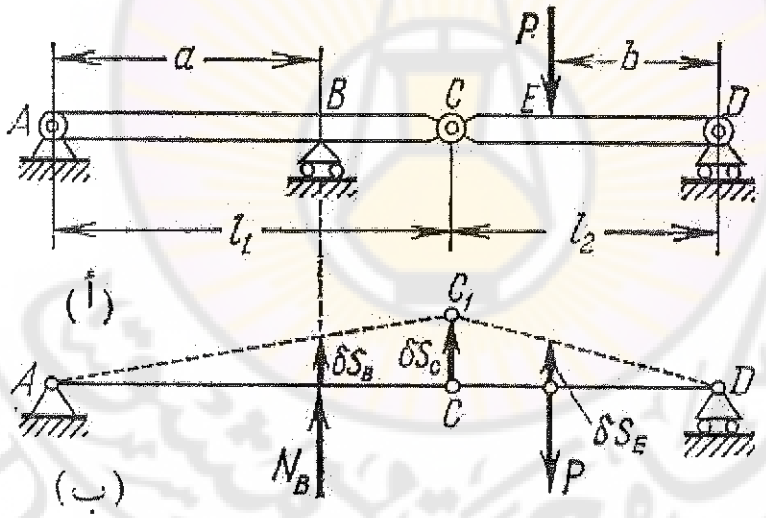
$$P\ell\delta\varphi = \frac{Qh}{2\pi}\delta\varphi$$

وبالاختصار على $\delta\varphi \neq 0$

نوجد المطلوب: $Q = 2\pi\frac{P\ell}{h}$

والجدير بالذكر أنه يمكن رفع ثقل أكبر عند ثبوت القوة P بزيادة ذراع الرافعة ℓ ونقصان خطوة اللولب h.

مثال 14: عارضة تتكون من قضيبين متصلين بمفصلة C، وتحمل العارضة الثقل P. أبعاد العارضة ومواضع قوائم الارتكاز مبينة في الشكل (1.19). أوجد الضغط على قائم الارتكاز B علماً بأن وزن العارضة مهمل.



الشكل (1.19)

الحل: بالاعتماد على بديهية التخلص من الارتباط بعد أخذ قوة رد فعله. نتخلص هنا من قائم الارتكاز B ونأخذ قوة رد فعله N_B الذي يساوي في المقدار الضغط المطلوب كما نراه في الشكل (1.19).

وبإعطاء المجموعة انتقالاً افتراضياً عند نقطة تطبيق القوة $\vec{P}$ قدره δS_E فإن نقطة تطبيق القوة N_B تنزاح بقدر δS_B. وحسب مبدأ العمل الافتراضي نكتب:

$$N_B \delta S_B - P\delta S_E = 0 \qquad (1)$$

وبتعيين العلاقة بين δS_B و δS_E من التناسب:

$$\frac{\delta S_E}{b} = \frac{\delta S_C}{\ell_2} \quad , \quad \delta S_B / a = \frac{\delta S_C}{\ell_1}$$

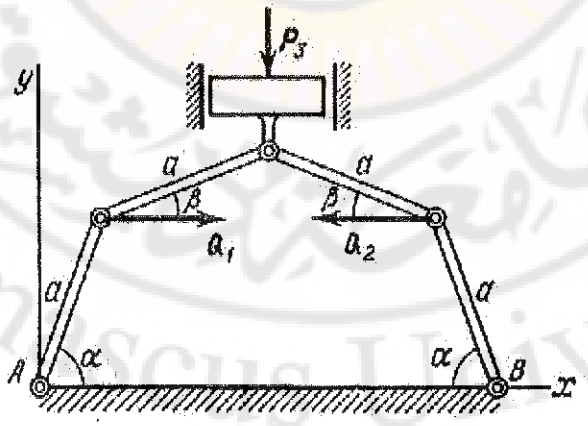
ومنه:

$$\delta S_E = \frac{b\ell_1}{a\ell_2}\delta S_B \qquad (2)$$

نعوض (2) في (1) فنجد أن:

$$N_B = \frac{b\ell_1}{a\ell_2}P$$

مثال 15: في المكبس الممثل في الشكل (1.20)، أوجد العلاقة بين القوى Q_1, Q_2, P_3 في حالة التوازن ($P_3=P$، $Q_1=Q_2$)، إذا كانت الزاويتان α وβ معلومتين مع إهمال أوزان القضبان.



الشكل (1.20)

الحل: من شرط التوازن $\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$

وبعد اختيار مبدأ الإحداثيات في النقطة الثابتة A، وكتابة شرط التوازن وفقاً للمساقط على x و y:

$$Q_{1x}\delta y_1 + Q_{2x}\delta y_2 + P_{3y}\delta y_3 = 0 \qquad (1)$$

وذلك لأن المساقط الأخرى للقوى تساوي صفراً، ولتعيين $\delta x_1, \delta x_2, \delta y_3$ نحسب الإحداثيات x_1, x_2, y_3 لنقط تأثير القوى بالتعبير عنها بدلالة الزاويتين α و β فنحصل إذا رمزنا لطول كل قضيب بالرمز a على:

$$x_1 = a\cos\alpha \quad , \quad x_2 = a\cos\alpha + 2a\cos\beta$$

$$y_3 = a(\sin\beta + \sin\alpha)$$

وبتفاضل هذه العلاقات نوجد $\delta y_3, \delta x_2, \delta x_1$:

$$\delta x_1 = -a\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\delta x_2 = -a(\sin\alpha\delta\alpha + 2\sin\beta\delta\beta)$$

$$\delta y_3 = a(\cos\beta\delta\beta + \cos\alpha\delta\alpha)$$

نعوض في (1) بعد اعتبار $Q_{1x} = Q$ ، $Q_{2x} = -Q$ و $P_{3y} = -P$ فنحصل على:

$$2Q\sin\beta\delta\beta - P(\cos\beta\delta\beta + \cos\alpha\delta\alpha) = 0$$

ولتعيين العلاقة بين $\delta\alpha$ و $\delta\beta$ نعتمد على العلاقة ثابت $= \overline{AB}$ وبالتالي:

$$2a(\cos\alpha + \cos\beta) = const$$

وبتفاضل هذه العلاقة نحصل على:

$$\sin\alpha\delta\alpha + \sin\beta\delta\beta = 0$$

أو

$$\delta\alpha = -\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\delta\beta$$

نعوض في العلاقة (2) فنجد:

$$2Q\sin\beta - P\left(\cos\beta - \cot\alpha\sin\beta\right) = 0$$

ومنها نوجد الضغط P:

$$P = \frac{2Q}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

ويكون الضغط P كبيراً عندما تكون الزاوية β قريبة من α.

مثال 16: نواس بسيط كتلته m وخيط تعليقه غير قابل للاستطالة طوله ℓ يتحرك في المستوي xy. أوجد موضع التوازن بالاعتماد على مضاريب لاغرانج.

الحل: طريقة مضاريب لاغرانج في التوازن تستدعي معرفة معادلة الارتباط f، التي يعبر عنها بالعلاقة:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

وحسب شرط التوازن:

$$\vec{F} + \lambda\overrightarrow{\nabla_r f} = 0$$

التي تكتب بعد إسقاطها:

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

حيث: $\vec{F}(0,P)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$2\lambda x = 0 \ , \ P + 2\lambda y = 0$$

ومن هاتين العلاقتين نكتب:

$$4\lambda^2\left(x^2+y^2\right)=P^2$$

$$\lambda=\pm\frac{P}{2\ell}$$

إذن

$$x=0$$

$$y=\ell$$

وبالتالي يمكن رفض القيمة الموجبة لـــλ.

مثال 17: نقطة مادية M وزنها P تتحرك على سطح الكرة $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ ويؤثر فيها ثلاث قوى جاذبة هي:

$$\vec{F}_1=\frac{P}{a}\overrightarrow{MA}\ ,\ \vec{F}_2=\frac{P}{a}\overrightarrow{MB}\ ,\ \vec{F}_3=\frac{P}{a}\overrightarrow{MC}$$

حيث A وB وC نقاط تقاطع المحاور الإحداثية x وy وz مع سطح الكرة أوجد مواضع توازن النقطة M بالاعتماد على مضاريب لاغرانج.

الحل: $M(x,y,z)\ ,\ A(a,0,0)\ ,\ B(0,a,0)\ ,\ C(0,0,a)$

عندئذ يكون: $\overrightarrow{MA}=(a-x)\vec{n}_x-y\vec{n}_y-z\vec{n}_z$

$$\overrightarrow{MB}=-x\vec{n}_x+(a-y)\vec{n}_y-z\vec{n}_z$$

$$\overrightarrow{MC}=-x\vec{n}_x-y\vec{n}_y+(a-z)\vec{n}_z$$

وباعتبار الشاقول موجهاً للأعلى هو المحور z أي أن $\vec{P}(0,0,-p)$

وبالتالي القوى المؤثرة في النقطة هي:

$$\vec{F}_1=\frac{P}{a}\left[(a-x)\vec{n}_x-y\vec{n}_y-z\vec{n}_z\right]$$

$$\vec{F}_2=\frac{P}{a}\left[-x\vec{n}_x+(a-y)\vec{n}_y-z\vec{n}_z\right]$$

$$\vec{F}_3=\frac{P}{a}\left[-x\vec{n}_x-y\vec{n}_y+(a-z)\vec{n}_z\right]$$

$$\vec{F}_4 = -P\vec{n}_z$$

إن مركبات محصلة القوى المؤثرة في النقطة هي:

$$F_x = \frac{P}{a}(a - 3x)$$

$$F_y = \frac{P}{a}(a - 3y)$$

$$F_z = \frac{P}{a}(a - 3z) - P$$

ومن معادلة الارتباط: $f = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

نجد: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$

وباستخدام شرط التوازن بطريقة مضاريب لاغرانج:

$$\sum F_{ix} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\sum F_{iy} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\sum F_{iz} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

بالتعويض نحصل على العلاقات:

$$\frac{P}{a}(a - 3x) + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{P}{a}(a - y) + 2\lambda y = 0$$

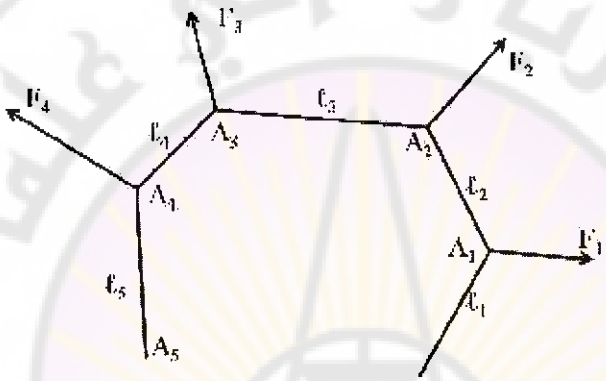
$$\frac{P}{a}(a - z) - P + 2\lambda z = 0$$

من هذه العلاقات الثلاثة ومعادلة الارتباط يمكن إيجاد λ ووضع التوازن للنقطة $M(x,y,z)$

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} \ , \ y = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} \ , \ z = 0$$

مثال 18: ادرس توازن مضلع حبلي مثبت في طرفيه كما هو ممثل في الشكل (1.21) بالاعتماد على مضاريب لاغرانج.

الحل: لنفرض أن $(A_0\ A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5)$ هو مضلع حبلي في الفراغ مثبت في طرفيه A_0 وA_5 وخاضع للقوى المفروضة F_1 وF_2 وF_3 وF_4.



الشكل (1.21)

لنكتب اعتماداً على مضاريب لاغرانج، المعادلات التي تعين أوضاع توازن المضلع من جهة وتعين قوى الارتباط في النقط A_1 وA_2 وA_3 وA_4 من جهة ثانية. لذا نفرض مجموعة محاور إحداثية oxyz قائمة ومباشرة.

لنرمز بـ(x_i, y_i, z_i) لإحداثيات النقطة A_i، وبـ(X_i, Y_i, Z_i) لمركبات القوة F_i، وبـℓ_i لطول القطعة A_iA_{i-1}، وذلك بفرض أن:

$$i = 1, 2, \ldots, 5$$

إن معادلات الارتباط (وعددها 5) هي:

$$\begin{cases} X_i + \lambda_i \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\ell_i} + \lambda_{i+1} \dfrac{x_i - x_{i+1}}{\ell_i + 1} = 0 \\ Y_i + \lambda_i \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\ell_i} + \lambda_{i+1} \dfrac{y_i - y_{i+1}}{\ell_i + 1} = 0 \\ Z_i + \lambda_i \dfrac{z_i - z_{i-1}}{\ell_i} + \lambda_{i+1} \dfrac{z_i - z_{i+1}}{\ell_i + 1} = 0 \end{cases}$$

نرى أن هذه المعادلات، هي العلاقات التي نحصل عليها بتطبيق النظريات العامة للتوازن (أي أن القوى المؤثرة في النقطة A_i، وهي القوة المفروضة وشد كل من الحبلين المنتهيين في النقطة A_i، هي متوازنة).

ونلاحظ من هذه المعادلات:

(1) أن أمثال λ هي جيوب تمام توجيه أضلاع المضلع الحبلي.

(2) أن القيم المطلقة للمضاريب λ هي شدود الحبل.

(3) أن هذه الشدود محمولة على أضلاع المضلع.

(4) أن شدي الحبلين في النقطة A_i مثلاً، هما عموديان على السطحين.

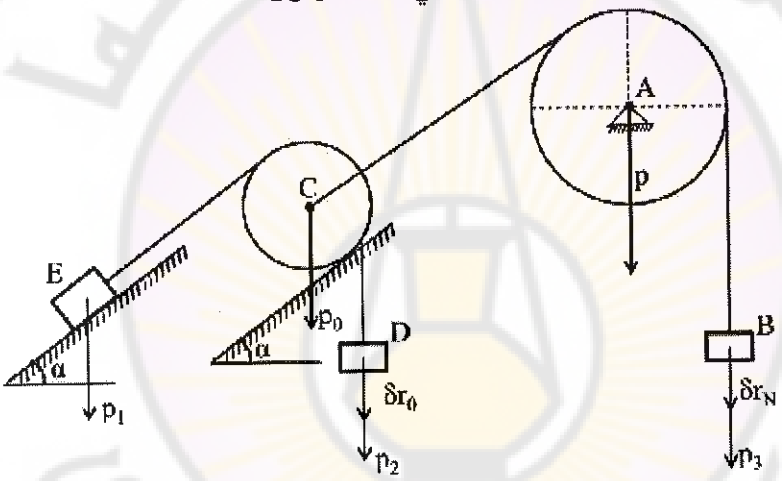
$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} = \ell_i$$

$$\sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2} = \ell_{i+1}$$

بفرض أن الإحداثيات x_i وy_i وz_i هي المتحولات الوحيدة في هاتين المعادلتين) وأن السطحين المذكورين هما كرتان، مراكزهما A_{i-1} وA_{i+1}.

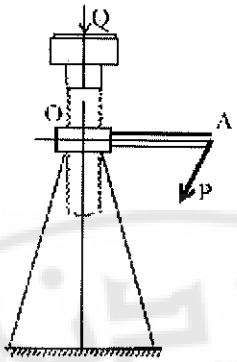
تمارين

1- يتدلى الثقل B من أحد طرفي خيط يمر على بكرة A وزنها p، أما الطرف الثاني للخيط فيتصل بعجل C وزنه P_o وموجود على مستو مائل أملس الشكل (1.22). يمر على هذا العجل خيط آخر يجعل في طرفيه الثقلين D وE وزنهما على الترتيب P_2 وP_1 (يتحرك الثقل E على مستو مائل أملس يوازي المستوي الأول). عين P_3 وزن الثقل B وزاوية ميل المستوي عن الأفق α، عندما تكون المجموعة في حالة توازن.



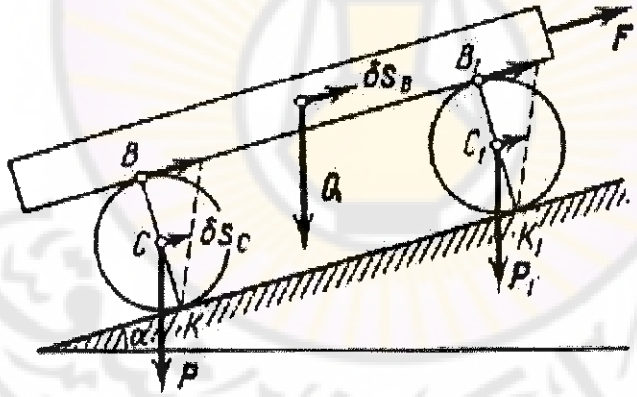
الشكل (1.22)

2- يرفع الثقل Q بوساطة رافعة ذراعها $0A=\ell$، فإذا كانت القوة المطبقة في A عمودية على الذراع وتساوي P الشكل (1.23). عين الثقل Q علماً بأن خطوة لولب الرافعة تساوي h.



الشكل (1.23)

3- يوضع جذع شجرة وزنه Q على عجلين اسطوانيين ثقل كل منهما p الشكل (1.24) عين القوة $\vec{F}$ التي ينبغي التأثير فيها على جذع الشجرة لكي يحتفظ بوضع توازنه على مستو مائل يصنع مع الأفق زاوية α، علماً بأن احتكاك العجلين بالمستوي وجذع الشجرة يكفل عدم الانزلاق وأن مقاومة التدحرج مهملة.



الشكل (1.24)

4- نقطة كتلتها m تتحرك على قطع ناقص أملس بالوضع الشاقولي أوجد موضع التوازن علماً بأن المعادلات الوسيطية للقطع هي $x = a\cos\theta - 1$، $y = b\sin\theta + 1$ حيث a و b ثوابت.

5- قضيب AB طوله ℓ مهمل الكتلة يتحرك داخل كرة ملساء ويحمل في طرفيه كتلتين m_1 وm_2. أوجد وضع التوازن للقضيب بالاعتماد على مبدأ العمل الافتراضي.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

2. معادلات الحركة

2. 1. مبدأ دالامبير

عند دراسة الحركات الخاضعة لتأثير قوى يمكن استخدام مبدأ دالامبير الذي هو من المبادئ الأساسية في الميكانيك. وحسب هذا المبدأ يمكن عد أي وضع للمجموعة المادية أثناء حركتها هو وضع توازن فيما إذا أضفنا إلى القوى المؤثرة قوى العطالة التخيلية.

لتكن النقطة i من المجموعة المادية، حيث $\vec{a}_i, \vec{N}_i, \vec{F}_i$ ترمز إلى محصلة القوى المؤثرة فيها وقوة رد الفعل وتسارعها على الترتيب. وبفرض أن النقطة هي طليقة حسب مبدأ التحرر من الارتباط نكتب معادلة حركة النقطة:

$$\vec{F}_i + \vec{N}_i = m_i \vec{a}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

أو:

$$\vec{F}_i + \vec{J}_i + \vec{N}_i = 0 \qquad (2.1)$$

حيث رمزنا بـــ $\vec{J}_i = -m_i \vec{a}_i$ التي نسميها **قوة العطالة** الموافقة للنقطة i.

وهكذا نستطيع القول إنه في أية لحظة أثناء حركة النقطة تتوازن القوى المؤثرة في كل نقطة من المجموعة وردود الفعل مع قوى العطالة الموافقة.

من أجل جميع نقاط المجموعة نكتب:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i + \vec{J}_i + \vec{N}_i\right) = 0 \qquad (2.2)$$

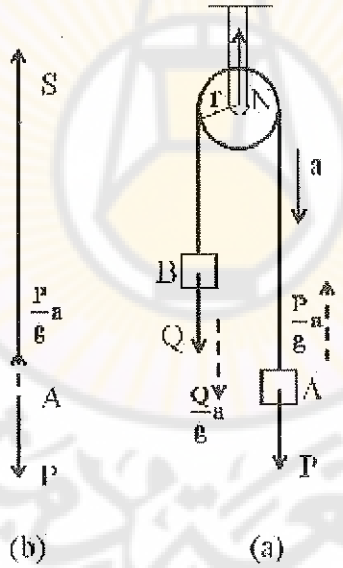
نضرب شعاعياً العلاقة (2.1) بـــ $\vec{r}_i$ ثم نجري عملية جمع الحدود فنجد:

$$\sum_i \left(\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i \wedge \vec{J}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i \wedge \vec{N}_i\right) = 0 \qquad (2.3)$$

تبين العلاقات (2.2) و(2.3) أن القوى الخارجية الفعالة المؤثرة في مجموعة مادية* وقوى ردود الفعل وقوى العطالة في أية لحظة أثناء الحركة تحقق المعادلات الأساسية في التوازن أي أن مجموع تلك القوى يساوي الصفر وكذلك مجموع عزومها بالنسبة لمركز ما معدوم. وهذا بحد ذاته يعبر عن مبدأ دالامبير من أجل مجموعة مادية.

مثال: يمر على بكرة مثبتة خيط غير قابل للاستطالة، يعلق في طرفيه الثقلان P وQ أوجد تسارع المجموعة وتوتر الخيط والضغط على محور البكرة بافتراض أن كتلتي البكرة والخيط مهملتان.

الحل: لنفرض أن $P > Q$ عندئذ تتحرك مجموعة الثقلين بتسارع $\vec{a}$ الشكل (2.1). وبما أن الثقلين يتحركان حركة انسحابية فيمكن عدها كنقاط مادية.



الشكل (2.1)

* القوى الداخلية تفني بعضها بعضاً ومجموع عزومها بالنسبة لنقطة ثابتة يساوي الصفر.

وبإضافة قوى العطالة إلى القوى الفعالة $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ في المجموعة يكون مجموع عزوم كل القوى المؤثرة بالنسبة إلى محور البكرة مساوياً الصفر (حسب دالامبير) وهذا المجموع يساوي بعد الاختصار على r– نصف قطر البكرة:

$$P-\frac{P}{g}a-Q-\frac{Q}{g}a=0$$

من هذه العلاقة نوجد تسارع المجموعة a:

$$a=\frac{P-Q}{P+Q}g$$

ولتعيين توتر الخيط S نتصور بأننا قطعنا الخيط في نقطة ما، فمن شرط التوازن للجزء المتبقي الشكل (b2.1) نحصل على:

$$P-\frac{P}{g}a-S=0$$

وبتعويض قيمة a من العلاقة السابقة نجد أن:

$$S=\frac{2PQ}{P+Q}$$

من الواضح أن قوة الضغط على محور البكرة عند حركة الثقلين (نرمز لها بـــ N_{dy}) تساوي 2S، إذن:

$$N_{dy}=\frac{4PQ}{P+Q}$$

فإذا كان الثقلان ثابتين يكون ضغط البكرة على المحور مساوياً $N_{St}=P+Q$ وبسهولة نجد أن:

$$N_{St}-N_{dy}=\frac{(P-Q)^2}{P+Q}>0$$

وبالتالي $N_{dy}<N_{St}$: أي أن الضغط على المحور في حالة حركة

المجموعة هو أصغر من الضغط في حالة سكونها. وكلما كان الفرق $P-Q$ كبيراً صغر N_{dy}.

2. 2. معادلة دالامبير–لاغرانج

يؤدي استخدام مبدأ دالامبير إلى كتابة معادلة الحركة على شكل معادلات توازن وذلك بإضافة قوى العطالة إلى القوى المؤثرة وقوى رد فعل الارتباطات. ففي حالة مجموعة مادية مؤلفة من n نقطة مقيدة بارتباطات مثالية، نستطيع حسب دالامبير من اجل كل نقطة أن نكتب:

$$\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i + \vec{N}_i = 0 \quad , \quad (i = 1,2,...,n) \qquad (2.4)$$

لنعط إلى نقاط المجموعة انتقالات افتراضية ولنضرب كل معادلة من المعادلات (2.4) بالانتقال الافتراضي $\delta\vec{r}_i$ الموافق للنقطة، ثم نجمع المعادلات الناتجة فنحصل على:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i + \vec{N}_i\right)\delta\vec{r}_i = 0$$

وبما أن الارتباطات مثالية $\sum_i \vec{N}_i.\delta\vec{r}_i = 0$ ينتج:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\delta\vec{r}_i = 0 \qquad (2.5)$$

تجمع هذه العلاقة بين مبدأ دالامبير ومبدأ العمل الافتراضي وتسمى **معادلة دالامبير–لاغرانج.**

تعد هذه المعادلة من أكثر المعادلات شمولاً في الميكانيك ويمكن القول إنها تحوي الميكانيك كله، فمنها يمكن الحصول على النظريات العامة في التحريك وإيجاد معادلات الحركة للجمل الميكانيكية. وسوف ننطلق منها في استخراج معادلات لاغرانج من النوع الثاني.

2. 3. معادلات لاغرانج لمجموعة خاضعة لارتباطات مثالية

ليكن لدينا مجموعة مادية مؤلفة من n نقطة خاضعة للارتباطات المثالية:

$$f_\alpha\left(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_n\right)=0 \qquad (2.6)$$

حيث: $\alpha=1,2,\ldots,k$

إن معادلة حركة كل نقطة من المجموعة تكتب بالشكل:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\vec{N}_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (2.7)$$

حيث $\vec{N}_i,\vec{F}_i$ القوة المؤثرة وقوة رد الفعل في النقطة i.

نعوض العلاقة (1.30) في العلاقة (2.7) فنجد:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\sum_\alpha\lambda_\alpha\vec{\nabla}_i f_\alpha \quad , \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (2.8)$$

تدعى العلاقات (2.8) **بمعادلات لاغرانج من النوع الأول**. والمجهول في المعادلات هو $\vec{r}_i(t)$ والعوامل λ_α. وعدد المعادلات (2.8) و(2.6) هو $3n+k$ بعدد المجاهيل حيث يمكن كتابة (2.8) وفقاً للمركبات على المحاور الإحداثية:

$$\begin{aligned} F_{ix}&=\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=m_i\ddot{x}_i\\ F_{iy}&=\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}=m_i\ddot{y}_i\\ F_{iz}&=\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}=m_i\ddot{z}_i \end{aligned} \qquad (2.9)$$

إن المركبات:

$$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}=N_{ix}$$

$$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i}=N_{iy}$$

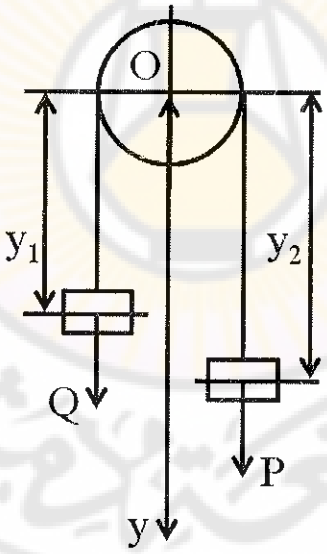
$$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i}=N_{iz}$$

3

تمثل مساقط ردود فعل الارتباطات المفروضة على النقطة i.

كتطبيق على إيجاد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاغرانج من النوع الأول سنتناول المثال السابق الممثل بالشكل (2.1).

إن المجموعة المتحركة هي الثقلان P و Q. بأخذ الشاقول إلى الأسفل محوراً للعينات مبدؤه مركز البكرة الشكل (2.2)، تكون مركبات القوى المؤثرة وفقاً لهذا المحور هي:



الشكل (2.2)

$$F_{2y}=P \quad , \quad F_{1y}=Q \qquad (1)$$

ومعادلة الارتباط – الخيط – هي:

$$f = y_1 + y_2 - \ell = 0 \qquad (2)$$

حيث y_2, y_1 إحداثيات الثقلين على محور العينات، ℓ طول الخيط المتدلي.

تأخذ معادلات لاغرانج من النوع الأول في هذه الحالة الشكل:

$$m_1\ddot{y}_1 = F_{1y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1} \quad , \quad m_2\ddot{y}_2 = F_{2y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y_2} \qquad (3)$$

لكن:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_2} = 1$$

وبالاعتماد على (1) فإن العلاقة (3) تؤول إلى:

$$m_1\ddot{y}_1 = Q + \lambda \quad , \quad m_2\ddot{y}_2 = P + \lambda \qquad (4)$$

من إحدى هاتين العلاقتين نوجد λ:

$$\lambda = m_2\ddot{y}_2 - P \qquad (5)$$

لنعوضها في الأخرى فنحصل على:

$$m_1\ddot{y}_1 = Q + m_2\ddot{y}_2 - P \qquad (6)$$

من معادلة الارتباط (2) نحصل على:

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0 \qquad (7)$$

ومن العلاقتين (6) و(7) نوجد تسارع كل من الثقلين:

$$\ddot{y}_1 = \frac{Q-P}{Q+P}g \quad , \quad \ddot{y}_2 = \frac{P-Q}{P+Q}g \qquad (8)$$

بمكاملة هذه المعادلات التفاضلية بعد استخدام الشروط الابتدائية: عندما $t = 0$:

$$y_{1_0} = \ell_1 \quad , \quad y_{2_0} = \ell_2 \quad , \quad \dot{y}_{1_0} = \dot{y}_{2_0} = 0$$

نحصل في النهاية على معادلات الحركة:

$$y_1 = \frac{Q-P}{Q+P}\frac{gt^2}{2} + \ell_1$$

$$y_2 = \frac{P-Q}{P+Q}\frac{gt^2}{2} + \ell_2$$

لتعيين قوة رد الفعل نحسب λ من (5) بعد تبديل $\ddot{y}_2$ بقيمتها فنجد أن:

$$\lambda = -\frac{2QP}{Q+P}$$

وبما أن:

$$N_{1y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1} \quad , \quad N_{2y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y_2}$$

فيكون:

$$N_{1y} = N_{2y} = -\frac{2QP}{Q+P}$$

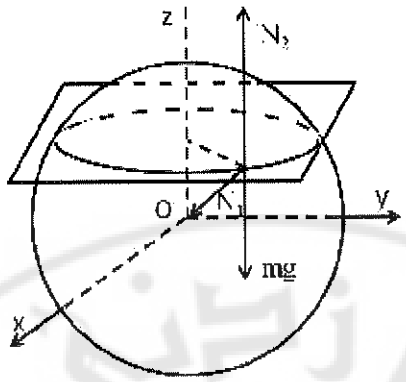
أما الضغط على محور البكرة فيساوي ضعف رد الفعل (ضعف التوتر):

$$N_{dy} = \frac{4QP}{Q+P}$$

وبالتالي نكون قد حصلنا على الأجوبة نفسها في حلنا المسألة بتطبيق مبدأ دالامبير.

مثال: نقطة كتلتها m تتحرك على منحني تقاطع كرة غير متحركة ملساء نصف قطرها a مع مستو أفقي أملس يتحرك شاقولياً وفقاً للقانون $z = a\sin\omega t$. أوجد قانون حركة النقطة وردود أفعال الارتباطات.

الحل: نختار مبدأ الإحداثيات في مركز الكرة ونوجه المحور z شاقولياً للأعلى الشكل (2.3).



الشكل (2.3)

عندئذ نكتب المعادلات (2.6) و(2.8) بالشكل التالي:

$$\begin{cases} f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \\ f_2 = z - a\sin\omega t = 0 \end{cases}$$ معادلات الارتباط

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2$$ معادلة الحركة

للسهولة يمكن استخدام الإحداثيات الاسطوانية z, φ, ρ. وبالنتيجة نحصل على مجموعة المعادلات:

$$\rho^2 + z^2 = a^2$$

$$z = a\sin\omega t$$

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = 2\lambda_1\rho \quad , \quad \frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad , \quad m\ddot{z} = -mg + 2\lambda_1 z + \lambda_2$$

من معادلتي الارتباط والمعادلة الثانية للحركة نوجد التابع $\rho(t)$ و $\dot{\varphi}(t)$:

$$\rho = a\cos\omega t \quad , \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\cos^2\omega t}$$

بفرض انه في لحظة البدء $t_0 = 0$ يكون $\rho = a$.

بمكاملة $\dot{\varphi}(t)$ نحصل على الزاوية φ كتابع للزمن:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} tg\omega t + \varphi_0$$

لتعيين λ_1,λ_2 نستخدم المعادلتين الأولى والثانية للحركة:

$$\lambda_1 = -\frac{m}{2}\left(\omega^2 + \dot{\varphi}^2\right) \quad , \quad \lambda_2 = m\left(g + \dot{\varphi}^2 z\right)$$

ومن العلاقات:

$$\lambda_{2z} = \lambda_2 \quad , \quad N_{1z} = 2\lambda_1 z \quad , \quad N_{1\rho} = 2\lambda_1 \rho$$

نوجد ردود الفعل:

$$N_\rho = N_{1\rho} = -ma\left(\omega^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\cos^4 \omega t}\right)\cos\omega t$$

$$N_z = N_{1z} + N_{2z} = m\left(g - a\omega^2 \sin\omega t\right)$$

2. 4. الإحداثيات المعممة

يتحدد وضع أي نقطة في الفراغ بشعاع الموضع $\vec{r}$ الذي مركباته هي الإحداثيات الديكارتية z,y,x. ولتعيين وضع مجموعة مادية في الفراغ مؤلفة من n نقطة ينبغي إعطاء n شعاع موضع أي $3n$ إحداثياً ديكارتياً التي تسمى **درجات الحرية للمجموعة.**

ليس من الضروري استخدام الإحداثيات الديكارتية في تحديد وضع المجموعة وإنما حسب شروط المسألة يمكن أن يبدو أكثر ملائمة اختيار إحداثيات أخرى.

تسمى $q_1, q_2 \ldots q_s$ التي تعين وضع المجموعة وتكون مستقلة فيما بينها **– الإحداثيات المعممة للمجموعة.**

إن شعاع الموضع $\vec{r}_i$ الذي يحدد وضع النقطة i من المجموعة ذات s درجة حرية يمثل في حالة الارتباطات المتحولة تابعاً للإحداثيات المعممة والزمن:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, \ldots q_j, \ldots, q_s, t\right) \qquad (2.10)$$

حيث $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_s$ الإحداثيات المعممة و $j = 1,2,\ldots s$, $i = 1,2,\ldots n$ n عدد النقاط المادية.

سرعة النقطة i تكتب بالشكل التالي:

$$\vec{v}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad , \quad \left(i = 1,2,\ldots n\right) \qquad (2.11)$$

ويعبر عن الانتقال الافتراضي للنقطة بتغير شعاع الموضع $\vec{r}_i$:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{a} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (2.12)$$

حيث $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ الانتقالات الافتراضية المعممة (تغيرات الإحداثيات المعممة).

لا يعين إعطاء الإحداثيات المعممة "الحالة الميكانيكية" للمجموعة في لحظة معينة وهذا يعني أن الإحداثيات لا تسمح بالتنبؤ عن وضع المجموعة في اللحظات التالية. فعند قيم مفروضة للإحداثيات تستطيع المجموعة أن تأخذ سرعات كيفية. وحسب قيم تلك السرعات يتحدد وضع المجموعة في اللحظة التالية من الزمن.

إن معرفة إحداثيات نقاط المجموعة وسرعاتها في وقت واحد تعين بصورة كاملة وضع المجموعة وتدعو إلى التنبؤ عن حركتها في اللحظة التالية. وهذا يعني من وجهة النظر الرياضية أنه بإعطاء جميع الإحداثيات والسرعات في لحظة معينة تتعين تلقائياً قيم التسارع $\ddot{q}$ في تلك اللحظة*.

تسمى العلاقات التي تربط التسارع مع الإحداثيات والسرعات معادلات

---

* نرمز اختصاراً بـــ q لإحداثيات المجموعة $q_1, q_2, \ldots q_s$ ونرمز بـــ $\dot{q}$ لسرع المجموعة.

الحركة وهي معادلات تفاضلية بالنسبة لـ $q(t)$ من المرتبة الثانية وتتعين التوابع $q(t)$ بمكاملة تلك المعادلات.

2. 5. معادلات لاغرانج من النوع الثاني

سنقوم في هذه الفقرة باستخراج معادلات الحركة لمجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية وذلك بدلالة الإحداثيات المعممة (المستقلة).

ليكن لدينا مجموعة مادية مؤلفة من n نقطة وخاضعة للارتباطات الهولونومية:

$$f_\alpha(x,y,z,t)=0 \quad , \quad (\alpha=1,2,...k) \qquad (2.13)$$

عدد الإحداثيات للمجموعة المفروضة بشكل عام هو 3n لذا فإن عدد الإحداثيات المستقلة هو 3n-k=s، نرمز لتلك الإحداثيات المستقلة بـ $q_1, q_2, ...q_s$ التي أسميناها الإحداثيات المعممة ويكون عدد درجات الحرية للمجموعة مساوياً s.

ننطلق في استنتاجنا لمعادلات الحركة من معادلة دالامبير–لاغرانج:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (2.14)$$

ثم نجري بعض التحويلات المؤدية إلى الإحداثيات المعممة.

إن شعاع الموضع لأية نقطة من المجموعة يكون بشكل عام تابعاً للإحداثيات المعممة والزمن (2.10). وشعاع السرعة (2.11) هو:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_J + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \qquad (2.15)$$

من هنا نرى أن سرعات النقاط المادية هي توابع خطية للمقادير $\dot{q}_J$ التي تسمى **السرعات المعممة**. فإذا اشتققنا العلاقة (2.15) بالنسبة إلى $\dot{q}_J$ نحصل على:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \begin{pmatrix} i = 1,2,...n \\ j = 1,2,...s \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.16)}$$

نعوض (2.12) في معادلة دالامبير–لاغرانج (2.14) مع تغيير ترتيب الجمع فنحصل على:

$$\sum_j \left[\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \qquad \textbf{(2.17)}$$

نأخذ الحد $\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ ونجري عليه بعض التحويلات:

$$\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \qquad \textbf{(2.18)}$$

نستخدم (2.16) في (2.18) ونقوم بتغيير ترتيب التفاضل حسب t و q_j فنجد:

$$\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \qquad \textbf{(2.19)}$$

وبالعودة إلى جميع الحدود التي تحوي التسارع $\ddot{\vec{r}}_i$ (المجموع حسب نقاط المجموعة) من العلاقة (2.17):

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \qquad \textbf{(2.20)}$$

من جهة أخرى ليس صعباً التعبير عن الطاقة الحركية للمجموعة كتابع للسرعات والإحداثيات المعممة (2.11):

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{r}}_i \right)^2 = T\left(q, \dot{q}, t \right) \qquad \textbf{(2.21)}$$

نأخذ مشتقات الطاقة T بالنسبة للسرعات والإحداثيات المعممة فنجد:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \qquad (2.22)$$

من مقارنة العلاقات (2.20) و(2.22) نستطيع أن نكتب:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) \qquad (2.23)$$

نتناول الآن المجموع الآخر في العلاقة (2.17) ونرمز له بـــQ_j:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad (2.24)$$

نلاحظ أن Q_j هو تابع للإحداثيات والسرعات المعممة والزمن، وبالفعل إن جميع القوى $\vec{F}_i$ هي بشكل عام توابع لـــ $\vec{r}_i$ و $\vec{v}_i$ وt. وحسب العلاقات (2.10) و(2.15) تكون $\vec{r}_i$ و $\vec{v}_i$ توابع لـــ $t, \dot{q}, q$.

نعبر عن العمل الافتراضي لجميع القوى المفروضة $\vec{F}_i$ بالعلاقة:

$$\delta A = \sum_i \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_j \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \qquad (2.25)$$

من الواضح أن المقدار Q_j يلعب بالنسبة إلى تغير الإحداثيات المستقلة δq_j الدور نفسه الذي تلعبه القوة $\vec{F}_i$ بالنسبة إلى الانتقال الافتراضي $\delta \vec{r}_i$. لهذا تسمى Q_j **القوة المعممة** الموافقة للإحداثي q_j.

وأخيراً بالرجوع إلى العلاقات (2.17) و(2.23) وتعريف القوة المعممة نحصل على:

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right] \delta q_j = 0 \qquad (2.26)$$

وبما أن المتغيرات δq_j مستقلة بعضها عن بعض فإنه ينبغي أن يكون:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad , \quad (j=1,2,...,s) \qquad (2.27)$$

تشكل المعادلات (2.27) معادلات لاغرانج في الإحداثيات المستقلة (المعممة) وتدعى أيضاً **بمعادلات لاغرانج من النوع الثاني**. وهي المعادلات التفاضلية العامة لحركة مجموعة خاضعة لارتباطات هولونومية ومثالية. إن هذه المعادلات لا تحوي قوى رد الفعل على الرغم أنها توضع في الحسبان بصورة كاملة في حركة المجموعة المادية.

إذا كانت القوى المفروضة قوى كمونية، والطاقة الكامنة للمجموعة هي $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,..\vec{r}_n,t)$ أي أن:

$$\vec{F}_i=-\overrightarrow{\nabla_i U}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,..\vec{r}_n,t) \quad , \quad (i=1,2,...n)$$

وحسب تعريف القوة المعممة نكتب:

$$Q_j=-\sum_i \overrightarrow{\nabla_i U}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad , \quad (j=1,2,...,s) \qquad (2.28)$$

عندئذ تأخذ معادلات لاغرانج الشكل التالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad , \quad (j=1,2,...,s) \qquad (2.29)$$

وعندما تكون قوى التأثير المتبادل U مستقلة عن السرعات المعممة (وهذا الشيء عادي في الميكانيك) فإن $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}=0$. وباستخدام تابع لاغرانج L الذي يساوي الفرق بين الطاقة الحركية والكامنة، نكتب من جديد العلاقة (2.29) بالصيغة النهائية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad , \quad (j=1,2,...,s) \quad (2.30)$$ (معادلات لاغرانج)

حيث $L=T-U$.

مثال 1: أوجد المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية طليقة بالاعتماد على معادلات لاغرانج.

الحل: للنقطة الطليقة ثلاث إحداثيات مستقلة وهي في الإحداثيات الديكارتية z, y, x. تأخذ معادلات لاغرانج الشكل التالي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z$$

لنحسب القوى المعممة Q_z, Q_y, Q_x، نعطي للنقطة المادية الانتقالات المستقلة $\delta z, \delta y, \delta x$. وعند تعيين Q_x نفرض $\delta x \neq 0, \delta y = \delta z = 0$ ونحسب مجموع أعمال القوى المطبقة على النقطة المادية:

$$\delta A = F_x \delta x$$

حيث F_x محصلة مساقط القوى المؤثرة في النقطة على المحور x.

وعليه تكون القوة المعممة الموافقة للإحداثي x هي أمثال δx أي أن $Q_x = F_x$

وبالمثل لباقي المركبات $Q_y = F_y$ و $Q_z = F_z$.

أما الطاقة الحركية فهي:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

وبحساب المشتقات الجزئية للطاقة الحركية حسب $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}$ نجد:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

باشتقاق هذه العلاقات بالنسبة إلى الزمن نحصل على الترتيب على:

$m\ddot{x}$ و $m\ddot{y}$ و $m\ddot{z}$. نعوض في معادلات لاغرانج بعد ملاحظة أن:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

فنحصل على المعادلات التفاضلية لحركة النقطة المادية الطليقة:

$$m\ddot{z} = F_z \quad , \quad m\ddot{y} = F_y \quad , \quad m\ddot{x} = F_x$$

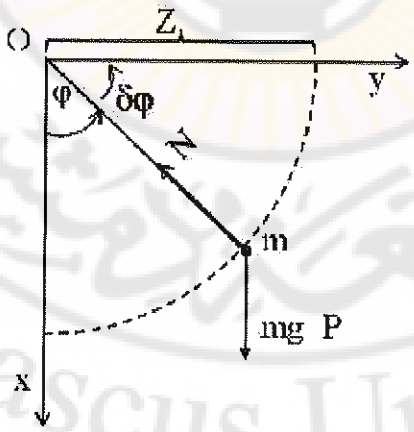
أعد الحل مستخدماً الإحداثيات الاسطوانية.

مثال 2: عين تابع لاغرانج لنواس رياضي ثقله P وطول خيط تعليقه ℓ، ثم أوجد قانون حركته.

الحل: يتعين وضع النواس المفروض بإحداثي واحد وليكن الزاوية φ بين خيط النواس والشاقول.

من الشكل (2.4) نجد:

$$y = \ell \cos\varphi \quad , \quad x = \ell \sin\varphi \qquad (1)$$



الشكل (2.4)

والطاقة الحركية للنواس هي:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) \qquad (2)$$

باشتقاق (1) بالنسبة للزمن والتعويض في (2) نحصل على:

$$T=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 \qquad (3)$$

أما الطاقة الكامنة للنواس فهي الطاقة الكامنة لقوة ثقالته:

$$U=-py=-p\ell\cos\varphi \qquad (4)$$

(بفرض أن المستوي الأفقي المار من المحور x هو مبدأ قياس الطاقة الكامنة) وعليه فإن تابع لاغرانج للنواس الرياضي هو:

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2+p\ell\cos\varphi \qquad (5)$$

معادلة لاغرانج للنواس المفروض هي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0 \qquad (6)$$

نعوض (5) في (6) فنحصل على المعادلة التفاضلية لحركة النواس:

$$m\ell^2\ddot{\varphi}+p\ell\sin\varphi=0$$

من أجل الاهتزازات الصغيرة يمكن تعويض $\sin\varphi\approx\varphi$. عندئذ تؤول المعادلة التفاضلية للحركة إلى:

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0 \quad \text{أو} \quad \ddot{\varphi}+\frac{g}{\ell}\varphi=0$$

وحل هذه المعادلة هو من الشكل:

$$\varphi=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$

وإذا فرضنا أنه في اللحظة $t=0$ كانت $\varphi=0$ و $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$. في هذه الحالة نحصل على $C_1=0$ و $C_2=\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$ ويصبح قانون الحركة:

$$\varphi = A \sin \omega t$$

حيث $A = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$ فالنواس يقوم بحركة اهتزازية توافقية مطالها A وتواترها ω.

2. 6. مبدأ النسبية لغاليله

سنعرض في هذه الفقرة بعض ما هو معروف حول الجمل العطالية وخواصها بالاعتماد على تابع لاغرانج.

من المعلوم أن اختيار جمل المقارنة يلعب دوراً كبيراً في تبسيط شكل القوانين الميكانيكية. ففي بعض جمل المقارنة يكون الفراغ (المكان) غير متجانس وغير متماثل في المناحي وهذا يعني لو أن جسماً لا يتبادل التأثير مع أجسام أخرى فإن أوضاعه واتجاهاته المختلفة تكون غير متكافئة من وجهة النظر الميكانيكية. ويكون الزمن في تلك الجمل غير متجانس أيضاً أي أن اللحظات المختلفة غير متكافئة. وبصورة عامة فإن الصعوبات التي تنشأ من تلك الخواص للمكان والزمن في وصف الظواهر الميكانيكية واضحة وبديهية. فعلى سبيل المثال، الجسم الحر الذي لا يتعرض إلى تأثيرات خارجية لا يمكن أن يبقى ساكناً إذا كانت سرعته في لحظة ما تساوي الصفر لأنه في اللحظة التالية يبدأ الحركة في اتجاه ما.

إن جمل المقارنة التي يكون فيها المكان متجانساً ومتماثل المناحي والزمن متجانساً تدعى **بالجمل العطالية**. ففي تلك الجمل يبقى الجسم الساكن في لحظة ما ساكناً ما دامت لا تؤثر فيه أية قوة خارجية.

نستطيع أن نصل لبعض النتائج حول شكل تابع لاغرانج لنقطة مادية طليقة تتحرك في جمل عطالية. إن تجانس المكان والزمن يعني أن تابع لاغرانج لا يحوي بشكل صريح شعاع الموضع $\vec{r}$ للنقطة والزمن t (لأن L يعكس

الخصائص الميكانيكية)، أي أن L تابع فقط للسرعة $\vec{v}$. ونتيجة لخاصية تماثل المناحي في الجمل العطالية فإن تابع لاغرانج للنقطة المفروضة لا يتعلق باتجاه شعاع السرعة، وبالتالي فإن L يتبع فقط القيمة المطلقة للسرعة، أي يتبع v^2.

$$L = L\left(v^2\right)$$

وبما أن L لا يتبع $\vec{r}$ فإن $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ وحسب معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

يكون $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const$ • لكن $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ تابعاً للسرعة فقط، إذن ينتج:

$$\vec{v} = const$$

وهكذا نصل إلى النتيجة التالية: تتم كل حركة طليقة في الجملة العطالية بسرعة ثابتة المقدار والاتجاه. تمثل هذه النتيجة نص **قانون العطالة**.

لو وجدت بالإضافة للجملة العطالية جملة أخرى تتحرك بالنسبة إلى الأولى حركة مستقيمة منتظمة فإن قوانين الحركة الطليقة بالنسبة إلى الجملة الجديدة تبقى نفسها كما في الجملة العطالية الأولى. وهكذا فإنه يوجد عدد لا نهائي من الجمل العطالية تتحرك نسبة إلى بعضها حركات مستقيمة منتظمة. وتكون قوانين جميع الظواهر الميكانيكية في تلك الجمل العطالية وخواص المكان والزمن متماثلة تماماً، وهذا ما يعبر عن **مبدأ النسبية لغاليله** – أحد المبادئ الهامة في الميكانيك.

• مشتق مقدار سلمي ما بالنسبة لشعاع هو شعاع مركباته تمثل مشتقات ذلك المقدار بالنسبة إلى المركبات الموافقة للشعاع نفسه.

نظراً للخواص الهامة التي تتمتع بها الجمل العطالية، سنعالج الظواهر الميكانيكية دوماً في تلك الجمل إلا إذا ذكرنا خلاف ذلك.

ترتبط أشعة الموضع لنقطة ما $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ في جملتين عطالتين K و K' تتحرك الثانية بالنسبة إلى الأولى بسرعة ثابتة $\vec{V}$ بالعلاقة:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \qquad (2.31)$$

أما الزمن في الجملتين فهو متماثل:

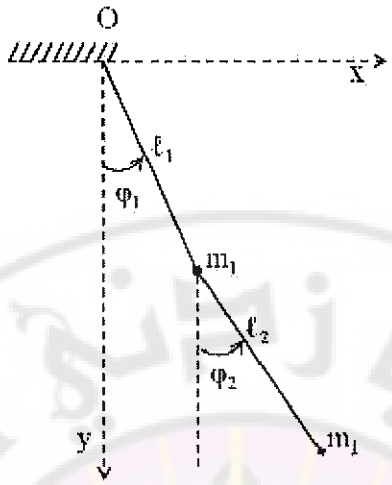
$$t = t' \qquad (2.32)$$

تعد فرضية الزمن المطلق من الأفكار الأساسية في الميكانيك الكلاسيكي (هذا ليس صحيحاً في ميكانيك النظرية النسبية). تدعى العلاقات (2.31) و(2.32) بتحويلات غاليله. ويمكن إضافة مبدأ النسبية لغاليله كشرط لعدم تغيير معادلات الحركة في الميكانيك بالنسبة إلى تلك التحويلات.

مثال 1: أوجد معادلات حركة النواس المزدوج المستوي باستخدام تابع لاغرانج.

الحل: النواس المزدوج هو نواس بسيط يتمفصل معه في الكتلة m_1 نواس آخر يهتز في المستوي نفسه الشكل (2.5).

ليكن φ_1, ℓ_1, m_1 كتلة النواس الأول وطول خيط تعليقه وزاوية انحرافه عن الشاقول على الترتيب. وبالمثل φ_2, ℓ_2, m_2 كتلة النواس الثاني وطول خيط تعليقه وزاوية انحرافه عن الشاقول على الترتيب. إن وضع هذه المجموعة (النواس المزدوج) يتعين تماماً بالوسيطين المتغيرين مع الزمن φ_1 و φ_2. وعليه فإن تابع لاغرانج للنواس الأول هو:



الشكل (2.5)

$$L_1 = \frac{1}{2} m_1 \ell_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 g_1 \ell_1 \cos\varphi_1$$

ولإيجاد عبارات الطاقة الحركية للكتلة m_2 نكتبها بالإحداثيات الديكارتية y_2, x_2 (مبدأ الإحداثيات هي نقطة التعليق o. ومحور العينات باتجاه الشاقول إلى أسفل) وذلك بدلالة φ_2, φ_1:

$$x_2 = \ell_1 \sin\varphi_1 + \ell_2 \sin\varphi_2 \quad , \quad y_2 = \ell_1 \cos\varphi_1 + \ell_2 \cos\varphi_2$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_2}{2}\left[\ell_1^2 \dot{\varphi}_2^2 + \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right]$$

أما الطاقة الكامنة للكتلة m_2 فهي:

$$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g\left(\ell_1 \cos\varphi_1 + \ell_2 \cos\varphi_2\right)$$

وهكذا فإن تابع لاغرانج للنواس الثاني هو $L_2 = T_2 - U_2$، وبالنهاية يكون تابع لاغرانج للنواس المزدوج هو $L = L_1 + L_2$:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \ell_1^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$
$$+ \left(m_1 + m_2\right) g \ell_1 \cos\varphi_1 + m_2 g \ell_2 \cos\varphi_2$$

نستطيع إيجاد معادلة الحركة بالنسبة إلى الإحداثي φ_1 بكتابة معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0$$

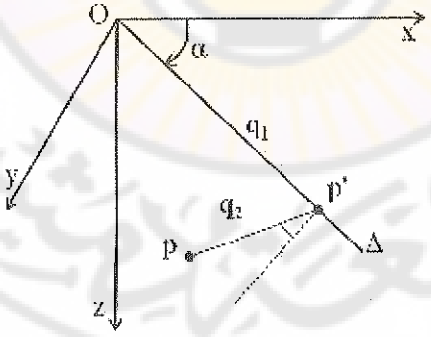
وبحساب $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1},\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}$ والتبديل في المعادلة السابقة نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(m_1+m_2\right)\ell_1^2\dot{\varphi}_1+m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right]$$
$$+m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+\left(m_1+m_2\right)g\ell_1\sin\varphi_1=0$$

وبالطريقة نفسها نوجد معادلة الحركة بالنسبة إلى الإحداثي φ_2.

مثال 2: ادرس حركة نقطة مادية كتلتها m على مستو يتحرك بدوره بسرعة زاوية منتظمة ω حول محور ثابت.

الحل: لتكن الزاوية α بين المحور ox والمحور الثابت Δ الشكل (2.6) الذي يمر من نقطة المبدأ ويقع في المستوي xoz. لنفرض θ الزاوية الثنائية بين المستوي xoz ومستوي الحركة. إن مسقط النقطة المادية P على المحور Δ هو P'.



الشكل (2.6)

كإحداثيات معممة نختار:

$$op' = q_1$$
$$p'p = q_2$$

مع ملاحظة أن $\theta = \omega t$ ، ω السرعة الزاوية للمستوي، فإذا أعطينا للنقطة انتقالاً ما، تنتج الإزاحات التالية:

$$q_2\delta\theta \quad , \quad \delta q_2 \quad , \quad \delta q_1$$

وتكون مركبات السرعة الموافقة لتلك الإزاحات على الترتيب هي:

$$q_2\dot{\theta} \quad , \quad \dot{q}_2 \quad , \quad \dot{q}_1$$

وعليه نستطيع أن نكتب الطاقة الحركية بالشكل:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_2^2\omega^2\right)$$

حيث m– كتلة النقطة المفروضة.

أما الطاقة الكامنة للنقطة فهي عمل قوة الثقالة $\overrightarrow{mg}$:

$$U = -mgz$$

حيث:

$$z = q_1 \sin\alpha + q_2 \cos\omega t \cos\alpha$$

فتابع لاغرانج $L = T - U$ يساوي:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_2^2\omega^2\right) + mg\left(q_1 \sin\alpha + q_2 \cos\omega t \cos\alpha\right)$$

نحسب المشتقات الجزئية لتابع لاغرانج بالنسبة إلى الإحداثيات المعممة والسرعات الموافقة:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = mg\sin\alpha \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m\omega^2 q_2 + mg\cos\omega t\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2$$

نعوض في معادلات لاغرانج فنجد:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{q}_1) = mg\sin\alpha & (1) \\ \frac{d}{dt}(m\dot{q}_2) - mq_2\omega^2 = mg\cos\omega t\cos\alpha & (2) \end{cases}$$

أو:

$$\ddot{q}_1 = g\sin\alpha \qquad (1')$$

$$\ddot{q}_2 - q_2\omega^2 = g\cos\omega t\cos\alpha \qquad (2')$$

يعطي تكامل المعادلة التفاضلية (1') العلاقة:

$$q_1 = \frac{1}{2}g\sin\alpha.t^2 + c_1t + c_2$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت التكامل التي تتعين من الشروط الابتدائية.

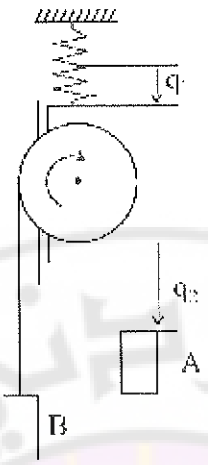
أما المعادلة التفاضلية (2') فنكاملها بدون طرف ثان وذلك لإيجاد الحل العام ثم نوجد الحل الخاص بطرف ثان وبجمعهما نحصل على حل المعادلة:

$$q_2 = c_2e^{\omega t} + c_1e^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}\cos\alpha\cos\omega t$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت تتعين من الشروط الابتدائية.

مثال 3: ادرس حركة مجموعة مادية تتألف من ثقلين A وB كتلتاهما m_1 وm_2 ومربوطين في نهايتي حبل يتحرك على بكرة معلقة بنابض شاقولي عامل مرونته K، مع العلم بأن الحركة تبدأ من السكون (كتلة كل من الخيط والبكرة مهملتان).

الحل: حسب شروط المسألة فإن الثقلين يتحركان بشكل شاقولي ويتعين وضع المجموعة بوسيطين q_1 وq_2 حيث q_1 انزياح محور البكرة عن وضع التوازن وq_2 بعد الثقل A عن أسفل البكرة الشكل (2.7):



الشكل (2.7)

إن عبارة الطاقة الحركية للمجموعة بدلالة q_1 وq_2 تأخذ الشكل التالي:

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)^2$$

من هنا نجد أن:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) + m_2\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) - m_2\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

نعطي للمجموعة انتقالاً افتراضياً تتغير فيه q_1 بقدر δq_1 مع ثبوت q_2، حيث تحسب q_1 بدءاً من وضع التوازن الذي فيه تكون قوة الثقالة $(m_1 + m_2)g$ مساوية قوة مرونة النابض، وعندئذ يكون:

$$\delta A_1 = -Kq_1.\delta q_1$$

وبالتالي فإن: $Q_1 = -Kq_1$

فإذا أعطينا الآن للمجموعة انتقالاً آخر مستقلاً عن الأول تتغير فيه q_2

بقدر δq_2 مع ثبوت q_1 نحصل على:

$$\delta A_2 = (m_1 g - m_2 g)\delta q_2$$

ومنه يكون:

$$Q_2 = m_1 g - m_2 g$$

بكتابة معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

والتعويض فيها ما يلزم نحصل على:

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + (m_1 - m_2)\ddot{q}_2 = -Kq_1 \qquad (a)$$

$$(m_1 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{q}_2 = g(m_1 - m_2) \qquad (b)$$

نحذف $\ddot{q}_2$ من هاتين المعادلتين فنحصل على المعادلة:

$$q_1 + \omega^2 q_1 = -a \qquad (c)$$

حيث رمزنا:

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)K}{4m_1 m_2} \quad , \quad a = \frac{(m_1 - m_2)^2}{4m_1 m_2} g \qquad (d)$$

يعطى حل المعادلة (c) في الشروط الابتدائية: $\dot{q}_1 = 0, q_1 = 0, t = 0$ بالعلاقة:

$$q_1 = -\frac{a}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) \qquad (e)$$

إن محور البكرة يقوم بحركة اهتزازية توافقية تواترها يساوي ω ومطالها:

$$\frac{a}{\omega^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{g}{K}$$

لنكامل المعادلة (b) مرتين ونحسب q_2 من الوضع الابتدائي فنجد:

$$(m_1+m_2)q_2=(m_1-m_2)\frac{gt^2}{2}-(m_1-m_2)q_1$$

نبدل في هذه العلاقة ما تساويه q_1 من (e) فنحصل على:

$$q_2=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{gt^2}{2}+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

تعين هذه المعادلة قانون ابتعاد الثقل A عن محور البكرة. أما من أجل الحركة المطلقة للثقل A فواضح أن:

$$q_{2A}=q_2+q_1$$

وبالمثل للثقل B:

$$q_{2B}=q_2-q_1$$

حيث يحسب q_{2B} من الوضع الابتدائي للثقل نحو الأعلى.

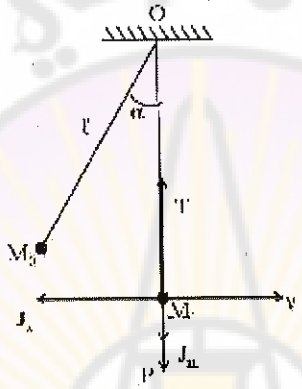
ملاحظة: بما أن القوة المؤثرة في المجموعة هي قوى كمونية، فيمكن كتابة تابع لاغرانج بالصيغة:

$$L=T-U=\frac{m_1}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2+\frac{m_2}{2}(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2-\frac{Kq_1^2}{2}+(m_1-m_2)gq_2$$

وباستخدام معادلات لاغرانج (2.30) نحصل على المعادلات التفاضلية نفسها (a) و(b).

تمارين محلولة

1- علق ثقل وزنه P في نهاية خيط طوله ℓ ثم أزيح الثقل إلى الموقع M_0 فانحرف الخيط عن الشاقول بزاوية φ وكانت حركته بدون سرعة ابتدائية. عين التوتر في الخيط في اللحظة التي يصل فيها الثقل إلى أخفض موضع M_1 الشكل (2.8) بالاعتماد على مبدأ دالامبير.



الشكل (2.8)

الحل:

تؤثر في الثقل القوى $\vec{P}$ و $\vec{T}$ وقوة العطالة $\vec{J}$، إن مركبة قوة العطالة الناظمية هي J_n وهي معاكسة لاتجاه التسارع المركزي المتجه من M_1 إلى O وحسب مبدأ دالامبير:

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{J}=0$$

وبالإسقاط وفقاً للمحور M_1O نجد:

$$T-P-J_n=0$$

$$T=P+J_n=P+m\frac{v^2}{\ell}$$

حيث $\frac{v^2}{\ell}$ التسارع الناظمي.

و v سرعة الثقل في الموضع M_1 ويمكن تعيينها من نظرية الطاقة الحركية:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A_{M_0M}$$

حيث A_{M_0M} هو العمل الذي يقوم به الثقل بين M و M_0 و $v_0=0$ السرعة الابتدائية.

وبحساب العمل نجد أن:

$$A=Ph=P\ell(1-\cos\varphi)$$

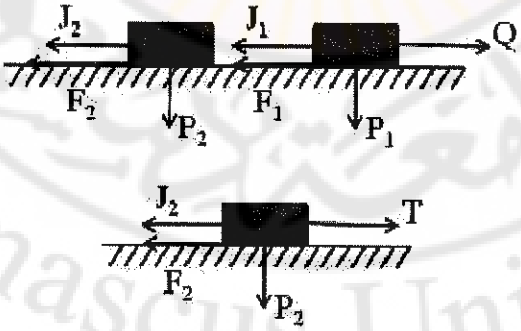
وبعد التعويض نحصل على:

$$T=P(3-2\cos\varphi)$$

والجدير بالإشارة أن المركبة المماسية لقوة العطالة معدومة عند الموضع M_1 لأن السرعة عندها تكون أعظمية أي أن $\frac{dv}{dt}=0$ و $\left(J_\tau=m\frac{dv}{dt}\right)$

2- ثقلان وزنهما P_1 و P_2 يصل بينهما خيط، ويتحرك الثقلان على مستو أفقي خشن تحت تأثير القوة Q المؤثرة في الثقل الأول الشكل (2.9).

فإذا كان معامل الاحتكاك هو f، أوجد تسارع الثقلين والشد في الخيط.



الشكل (2.9)

الحل: إن القيم المطلقة لقوى العطالة المضافة إلى الجسمين الأول والثاني هي على الترتيب.

$$J_2 = \frac{P_2}{g}a \quad , \quad J_1 = \frac{P_1}{g}a$$

حيث a التسارع الذي يتحرك به الثقلان وقوى العطالة ممثلة في الشكل بالإضافة إلى قوى الاحتكاك المعاكسة للحركة.

أما قوى الاحتكاك فحسب تعريفها تساوي على الترتيب:

$$F_2 = f.P_2 \quad , \quad F_1 = f.P_1$$

وحسب مبدأ دالامبير نكتب:

$$\vec{Q} + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{J_1} + \vec{J_2} = 0$$

وبالإسقاط وفقاً للمحور باتجاه الحركة نحصل على:

$$Q - f(P_1 + P_2) - \frac{1}{g}(P_1 + P_2)a = 0$$

من هذه العلاقة نوجد التسارع a:

$$a = \left(\frac{Q}{P_1 + P_2} - f\right)g \qquad (1)$$

وتتحقق حركة الثقلين إذا تحقق الشرط:

$$\frac{Q}{P_1 + P_2} > f$$

لم تظهر قوى شد الخيط باعتبارها قوى داخلية مؤثرة في مجموعة الثقلين تفني بعضها بعضاً. ولتعيين هذا الشد ندرس حركة أحد الثقلين وليكن الثقل الثاني الذي تؤثر فيه القوى P_2 والشد T وقوة الاحتكاك F_2، بالإضافة إلى قوة العطالة J_2 عندئذٍ تكون معادلة التوازن الحركي وفقاً لمبدأ دالامبير باتجاه الحركة:

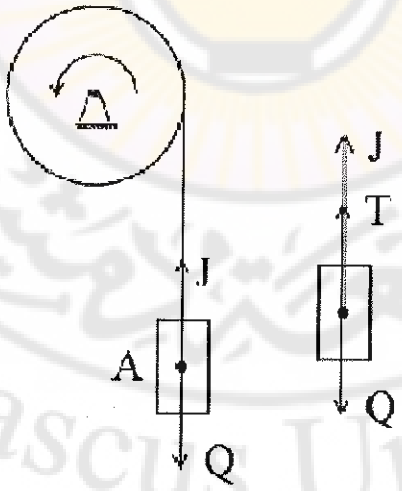
$$T - fP_2 - \frac{P_2}{g}a = 0 \qquad (2)$$

وبعد تعويض قيمة a من العلاقة (1) في (2) نحصل على قوة شد الخيط:

$$T = \frac{QP_2}{P_1 + P_2}$$

ونجد من هذه العلاقة أن الشد في الخيط لا يعتمد على قوة الاحتكاك. وعند تثبيت الوزن الكلي للمجموعة $P_1 + P_2$ فإن الشد T يقل كلما تناقص وزن الثقل الثاني P_2 وفي هذا المجال يكون من الأنفع في قطارات السكك الحديدية مثلاً وصل العربات الثقيلة في المقدمة والأخف في المؤخرة.

3- يمر خيط معلق في طرفه الثقل A وزنه Q على أسطوانة وزنها P ونصف قطرها r الشكل (2.10). بإهمال كتلة الخيط والاحتكاك على محور أسطوانة عين التسارع الزاوي للاسطوانة عندما يتحرك الثقل شاقولياً للاسفل باعتبار أن نصف قطر عزم العطالة (العزم الذاتي) للاسطوانة حول محورها يساوي ρ.



الشكل (2.10)

الحل: نذكر هنا أن عزم اندفاع الاسطوانة حول محورها هو:

$$M_1 = I\omega = \frac{P}{g}\rho^2\omega$$

حيث ω السرعة الزاوية لدوران الاسطوانة.

نعتبر هنا الثقل والاسطوانة مجموعة واحدة ونضيف إلى القوى المؤثرة في الجسيمين قوى العطالة حسب مبدأ دالامبير.

إن الثقل A يتحرك حركة انتقالية وتكون قوة العطالة:

$$J_1 = \frac{Q}{g}a = \frac{Q}{g}r\varepsilon$$

حيث ε التسارع الزاوي.

أما قوة العطالة للاسطوانة فتؤول إلى مزدوجة عزمها حول محورها:

$$\frac{P}{g}\rho^2\varepsilon$$

وهنا نطبق كشرط للتوازن الحركي، محصلة عزوم القوى معدوم:

$$\frac{P}{g}\rho^2\varepsilon + \frac{P}{g}r^2\varepsilon - Qr = 0$$

يمثل الحد الثاني من الطرف الأيسر عزم قوة العطالة، أما الحد الثالث فيمثل عزم القوة الخارجية Q بالنسبة لمركز الأسطوانة. من العلاقة أعلاه نوجد التسارع الزاوي:

$$\varepsilon = \frac{Qgr}{P\rho^2 + Qr^2}$$

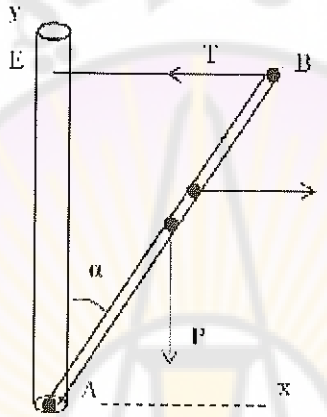
ولإيجاد الشد في الخيط ندرس حركة الثقل A منفرداً علماً بأن القوى المؤثرة هي Q و T بالإضافة إلى قوة العطالة J_1:

$$T + J_1 - Q = 0$$

إذاً:

$$T = Q\left(\frac{1 - r\omega}{g}\right) = \frac{PQ\rho^2}{P\rho^2 + Qr^2}$$

4- قضيب متجانس AB طوله ℓ ووزنه P مثبت بواسطة المفصل A بعمود رأسي يدور بسرعة زاوية ω. عين الشد T في الخيط الأفقي الذي يحفظ القضيب مائلاً على العمود بزاوية α الشكل (2.11).



الشكل (2.11)

الحل: باستخدام مبدأ دالامبير نضيف قوى العطالة إلى القوى الخارجية المؤثرة في القضيب وهي X_A وY_A و T و P وتساوي قوة العطالة النابذة المركزية لكل عنصر من عناصر القضيب كتلته Δm المقدار:

$$\Delta m\omega^2 x$$

حيث x بعد العنصر عن محور الدوران Ay: تمر محصلة هذه القوى المتوازية الموزعة وفقاً لقانون خطي بمركز ثقل المثلث ABE، أي يبعد خط عملها بمسافة $h = \frac{2}{3}\ell\cos\alpha$ عن المحور Ax. وبما أن هذه المحصلة تساوي المتجهة الرئيسة لقوى العطالة فإننا نحصل وفقاً للعلاقة:

$$\vec{J} = -\sum m_i \vec{a}_i = -\mu \vec{a}_c$$

(حيث μ كتلة القضيب، و $\vec{a}_c$ تسارع مركز كتلته) على:

$$J = \mu a_c = \mu\omega^2 x_c = \frac{P}{g}\omega^2 \frac{\ell}{2}\sin\alpha$$

x_c هي إحداثي مركز كتلة القضيب.

ومن معادلة التوازن الحركي: مجموع عزوم القوى بما فيها قوى العطالة يساوي الصفر نكتب:

$$T\ell\cos\alpha - Jh - P\frac{\ell}{2}\sin\alpha = 0$$

حيث h ممثلة في الشكل.

وبتعويض قيمتي h و J نجد أخيراً أن:

$$T = P\left(\frac{\ell\omega^2}{3g}\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\tan\alpha\right)$$

حل آخر:

يمكن حل المثال بحساب مجموع عزوم قوى العطالة حول النقطة A بواسطة التكامل مباشرة. بمد المحور $A\xi$ على امتداد القضيب AB. تؤثر في كل عنصر $d\xi$ من القضيب والذي إحداثيته ξ قوة عطالة تساوي:

$$\omega^2 x dm$$

ويكون عزم هذه االقوة حول المركز A مساوياً $-y\omega^2 x dm$ وعندئذ من معادلة العزوم وفقاً لمبدأ دالامبير يكون:

$$T\ell\cos\alpha - P\frac{\ell}{2}\sin\alpha - \int_0^{\ell}\omega^2 yx dm = 0 \qquad (1)$$

وبالتعبير عن كل المقادير داخل إشارة التكامل بدلالة ξ، نجد أن:

$$x = \xi\sin\alpha \quad , \quad y = \xi\cos\alpha \quad , \quad dm = \frac{\mu}{\ell}d\xi$$

وأخيراً نحصل على:

$$\int_0^{\ell}\omega^2 yxdm=\frac{\mu}{\ell}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\int_0^{\ell}\xi^2 d\xi=\frac{1}{3}\frac{P}{g}\ell^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha \quad (2)$$

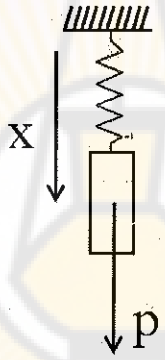
بتعويض (2) في (1) يمكن بسهولة ايجاد قوة الشد في الخيط T والذي حصلنا عليه في الحل السابق للمثال.

5- نابض معلق من أحد طرفيه في سقف ويحمل في طرفه الآخر ثقلاً P. يقوم النابض بحركة اهتزازية وفقاً لمحور التعليق x حسب العلاقة:

$$x=b\sin\omega t$$

b و ω ثوابت.

عين قوة المرونة علماً بأن وزن النابض مهمل ومبدأ المحور x الموجه شاقولياً للأسفل هو وضع التوازن.



الشكل (2.12)

الحل: إن وضع التوازن حسب مبدأ دالامبير يتعين من العلاقة:

$$\vec{P}+\vec{J}+\vec{F}=0 \quad (1)$$

حيث $\vec{J}=m\vec{a}$ قوة العطالة، و $\vec{F}$ قوة المرونة و $\vec{P}$ وزن الكتلة المعلقة في النابض.

باسقاط العلاقة (1) على المحور x:

$$P+J_x+F_x=0 \quad (2)$$

حيث: $J_x=-ma_x=-m\ddot{x}$

$$J_x = mb\omega^2 \sin\omega t = \frac{P}{g} b\omega^2 \sin\omega t$$

وبالتعويض في العلاقة (2) نوجد قوة المرونة:

$$F_x = -\left(P + \frac{P}{g} b\omega^2 \sin\omega t\right)$$

6- تتحرك نقطة مادية كتلتها m على مستو أفقي يهتز شاقولياً وفقاً للقانون:

$$z = a\cos\omega t$$

أوجد كلاً من موضع النقطة ورد الفعل فيها (رد فعل القيد) كتابعين للزمن t، علماً بأن شدة حقل الثقالة الأرضية g وأن الشروط الابتدائية للحركة هي:

$$\vec{v}(0) = \vec{v_0} \quad \text{و} \quad \vec{r}(0) = \vec{r_0}$$

الحل: نستخدم هنا معادلات لاغرانج من النوع الأول:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda\overrightarrow{\nabla f} \qquad (1)$$

حيث f معادلة الارتباط هي:

$$f = z - a\cos\omega t = 0$$

نسقط العلاقة (1) على المحاور الإحداثية:

$$m\ddot{x} = 0 \quad , \quad m\ddot{y} = 0 \quad , \quad m\ddot{z} = -mg + \lambda$$

لكن موضع النقطة بالنسبة للإحداثي z فهو معلوم فرضاً:

$$z = a\cos\omega t$$

أما x(t) و y(t) فيمكن ايجادهما بتكامل بسيط:

$$x(t) = \dot{x}_0 t + x_0$$

$$y(t) = \dot{y}_0 t + y_0$$

و λ هي: $\lambda = m\left(g - a\omega^2 \cos\omega t\right)$

أما قوة رد الفعل فهي $\vec{N} = \lambda\overrightarrow{\nabla f}$

$$N_x = N_y = 0 \quad , \quad N_z = \lambda \nabla_z f = mg - ma\omega^2 \cos\omega t$$

7- نقطة تتحرك في الفراغ على سطح كرة نصف قطرها R حدد الإحداثيات المعممة للنقطة المفروضة.

الحل: إن معادلة الكرة هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

وهي تمثل معادلة الارتباط.

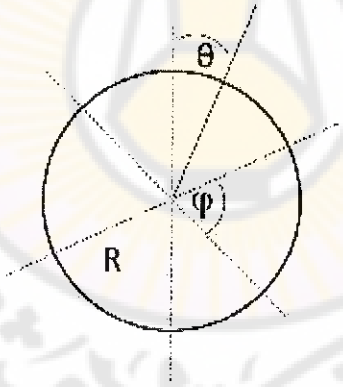
وبالتالي فإن عدد الإحداثيات المعممة هي:

$$S = 3 - 1 = 2$$

وهي في هذه الحالة:

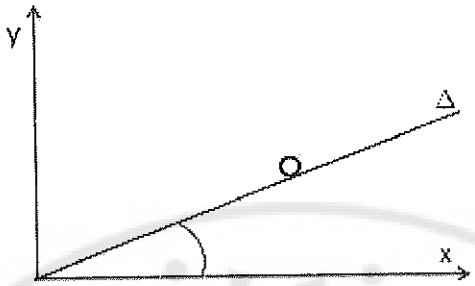
$$q = \theta \quad , \quad q_2 = \varphi$$

كما هو ممثل في الشكل (2.13) (تمثل الإحداثيات هنا الإحداثيات الكروية نفسها.



الشكل (2.13)

8- نقطة تتحرك على مستقيم Δ في المستوي xy الشكل (2.14) ويصنع مع المحور x زاوية θ تتغير مع الزمن وفقاً العلاقة θ=ω.t، ما هي الإحداثيات المعممة.



الشكل (2.14)

الحل: معادلات الارتباط في هذه الحالة هي:

$$\frac{y}{x} = tg\theta$$

وبالتالي عدد الإحداثيات المعممة:

$$S = 3 - 2 = 1$$

وهو بعد النقطة عن مبدأ المحور Δ وليكن $q = r$ بالإضافة إلى الزاوية θ التي عرفت كتابع للزمن من الفرض.

9- مجموعة مادية تتألف من جسيم كتلته M ومن n جسيم متماثل الكتلة وكتلة الواحد منها هو m. أوجد تابع لاغرانج للمجموعة المفروضة دون ادخال حركة مركز عطالتها.

الحل: لنفرض أن $\vec{R}$ شعاع موضع الجسيم ذو الكتلة M و $\vec{R}_i$ شعاع موضع الجسيمات ذات الكتلة m. ولنرمز للبعد بين الجسيم M والجسيمات m بـــ:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R} \quad , \quad (i = 1,2...n) \qquad (1)$$

ليكن مبدأ الإحداثيات هو مركز العطالة لتلك المجموعة فيكون عندئذ:

$$M\vec{R} + m\sum_i \vec{R}_i = 0 \qquad (2)$$

من العلاقتين السابقتين نجد:

$$\vec{R} = -\frac{m}{\mu}\sum_i \vec{r}_i \quad , \quad \vec{R}_i = \vec{R} + \vec{r}_i \qquad (3)$$

حيث $\mu = M + nm$ كتلة المجموعة المفروضة.

الطاقة الحركية للمجموعة:

$$T = \frac{M\dot{R}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum_i \dot{R}_i^2$$

وبفرض أن الطاقة الكامنة لهذه المجموعة هي U، فإن تابع لاغرانج يأخذ الشكل التالي:

$$L = \frac{M\dot{R}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum_i \dot{R}_i^2 - U \qquad (4)$$

نحسب كلاً من $\dot{R}^2$ و $\dot{R}_i^2$ من العلاقات (3)، فنجد أن:

$$\left.\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \frac{m^2}{\mu^2}\left(\sum_i \vec{v}_i\right)^2 \\ \sum_i \dot{R}_i^2 &= \frac{nm^2}{\mu^2}\left(\sum_i \vec{v}_i\right)^2 + \sum_i v_i^2 - \frac{2m}{\mu}\left(\sum_i \vec{v}_i\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

نعوض (5) في (4) فنحصل على:

$$L = \frac{m}{2}\sum_i v_i^2 - \frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_i \vec{v}_i\right)^2 - U$$

حيث:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$$

10- يتحرك جسيم كتلته m بالنسبة إلى محاور متعامدة مرتبطة بالأرض (جملة عطالية بإهمال الحركة الدورانية للأرض) تحت تأثير قوة الثقالة. أوجد المعادلات التفاضلية لحركته.

الحل: نستخدم المعادلات:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z$$

باعتبار أن للجسيم ثلاث احداثيات مستقلة (معممة) هي x و y و z وخاضع فقط لقوة الثقالة mg في الاتجاه السالب للمحور z مع اهمال مقاومة الهواء. وبالتالي تكون:

$$Q_x=Q_y=0$$

$$Q_z=-mg$$

إن الطاقة الحركية للجسيم:

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\ddot{x} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x}=0$$

إذن

$$m\ddot{x}=0$$

وبالمثل

$$m\ddot{y}=0$$

$$m\ddot{z}=Q_z=-mg$$

ملاحظة: يمكن هنا استخدام المعادلات:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

حيث $L=T-U$

$U=mgh=mgz$ (المحور z باتجاه الشاقول للأعلى)

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-mgz$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z}=-mg$$

إذن $m\ddot{z}=-mg$

ويمكن إيجاد قوانين الحركة بتكامل معادلات الحركة.

11- خرزة (كرية bead) كتلتها m تتحرك على سلك صلب أملس على شكل قطع مكافئ (أملس smooth)، معادلته تعطى بالعلاقة $y=bx^2$ ، حيث b ثابت. أوجد المعادلات التفاضلية للحركة.

الحل: إن معادلات الارتباط هي:

$$y=bx^2 \quad , \quad z=c$$

وبالتالي للخرزة إحداثي واحد وليكن x، إن الطاقة الحركية للكرية:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1+4b^2x^2\right)$$

حيث:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\left(1+4b^2x^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}\left(1+4b^2x^2\right)+8mb^2\dot{x}^2x$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4m\dot{x}^2xb^2$$

وبالتعويض في معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

يكون: $m\ddot{x}\left(1+4b^2x^2\right)+4m\dot{x}^2xb^2 = Q_x$

ولحساب Q_x نستخدم عبارة العمل:

$$\delta A = Q_x.\delta x$$

حيث القوة المؤثرة في الخرزة هي قوة الثقالة، وباعتبار المحور y شاقولياً للأعلى. عندما نعطي انزياحاً للخرزة δx يكون:

$$\vec{F}(0,-mg) \quad , \quad \delta y = 2bx\delta x$$

عندئذٍ تأخذ عبارة العمل:

$$\delta A = F_y.\delta y = -mg\left(2bx\delta x\right)$$

$$\delta A = -2mgbx.\delta x = Q_A\delta x$$

إذن القوة المعممة الموافقة للإحداثي x هي:

$$Q_y = -2mgbx$$

وبالتالي فإن معادلة لاغرانج تأخذ الشكل النهائي:

$$m\ddot{x}\left(1+4b^2x^2\right)+4m\dot{x}^2xb^2 = -2mbx$$

ويمكن الحصول على هذه المعادلة التفاضلية للحركة باستخدام:

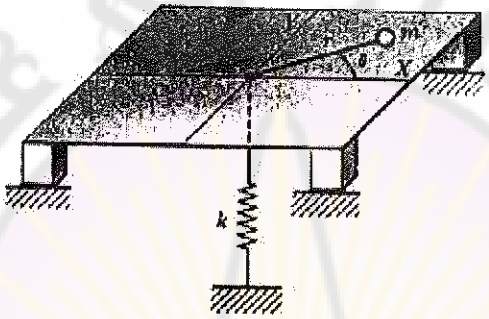
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

حيث $L = T - U$

والطاقة الكامنة للخرزة:

$$U = mgy = mgbx^2$$

12- سلك يتصل بجسيم كتلته m ويمر عبر ثقب في طاولة أفقية ليتصل مع نابض كما في الشكل (2.15). علماً بأن نهاية النابض مثبتة وأن الكتلة m كانت عند الثقب في الحالة الطبيعية للنابض. وK ثابت مرونة النابض. أوجد المعادلات التفاضلية لحركة الكتلة m.



الشكل (2.15)

الحل: للجسيم إحداثيان مستقلان هما r وθ كما هو مبين في الشكل. لذا نستخدم الإحداثيات القطبية في إيجاد الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

إن القوة الوحيدة المؤثرة في الكتلة m هي قوة المرونة $-Kr$ والعمل الناتج لدى الانتقال δr هو:

$$\delta A = -Kr\delta r$$

حيث K ثابت مرونة النابض.

إن عدم وجود قوة مؤثرة في الاتجاه العمودي على r، تؤول معادلات لاغرانج إلى الشكل:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -Kr \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0 \qquad (2)$$

من العلاقة (2) نرى أن ثابت $= mr^2\dot{\theta}=P_\theta$

وبتعويض $\dot{\theta}$ من هذه العلاقة الأخيرة في (1) نحصل على معادلة تحوي $\ddot{r}$ و $\dot{r}$ فقط والتي يمكن مكاملتها بالطرق المعروفة.

يمكن دراسة هذه المسألة في الإحداثيات الديكارتية بكتابتنا:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$$

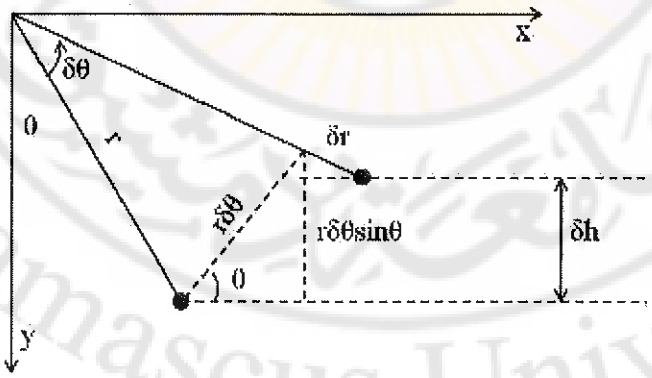
$$\delta A=-K\left(x\delta x+y\delta y\right)=-Kr.\delta r$$

ومن معادلات لاغرانج نجد أن:

$$m\ddot{x}=-Kx \quad , \quad m\ddot{y}=-Ky$$

وهذا يبين أن الحركة مركبة من حركتين هارمونيتين بسيطتين بزوايا مستقيمة ولكل منها الدور نفسه. والمسار في الحالة العامة هو قطع ناقص بمبدأ في مركزه.

13- نواس بسيط كتلته m يهتز في المستوي xy الشكل (2.16) وطول خيط تعليقه قابل للاستطالة (متغير الطول). أوجد الإحداثيات المعممة والقوى المعممة الموافقة ثم استنتج المعادلات التفاضلية للحركة.



الشكل (2.16)

الحل: لكتلة النواس المفروض إحداثيان معممان هما r و θ والطاقة الحركية هي:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

وباستخدام معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

نحصل على:

$$m\ddot{r} - m\dot{r}\dot{\theta}^2 = Q_r$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = Q_\theta$$

لنوجد القوى المعممة بطريقتين مختلفتين زيادة في إيضاح استنتاج القوى المعممة:

عندما يعطى النواس انتقالاً قدره $\delta S = r\delta\theta$ (انظر الشكل (2.16)) بحيث يؤدي إلى تغير موجب لكل من θ و r، فإن العمل الكلي لكل من قوة الثقالة وقوة مرونة الخيط يساوي:

$$\delta A = -mg\delta h - K\left(r - r_0\right)\delta r$$

حيث r_0 و K طول الخيط في وضعه الطبيعي وثابت مرونته على الترتيب. وضعت الإشارة السالبة لأن العمل يكون معاكساً للثقالة والمرونة بحيث يؤدي إلى تزايد r و θ.

من الشكل نرى (نعتمد على تساوي الزوايا ذات الأضلاع المتعامدة):

$$\delta h = r\delta\theta\sin\theta - \delta r\cos\theta$$

وبالتالي فإن:

$$\delta A = -mgr\delta\theta\sin\theta - \left[K\left(r - r_0\right) - mg\cos\theta\right]\delta r$$

وهكذا فإن القوة المعممة الموافقة للإحداثي r هي أمثال العمل الموافق لتغير r أي

أن:

$$Q_r = -\left[K\left(r - r_0\right) - mg\cos\theta\right]$$

وبالمثل فإن:

$$Q_\theta = -mgr\sin\theta$$

لنوجد الآن القوى المعممة بتطبيق العلاقة النظرية مباشرة:

$$Q_r = F_x\frac{\partial x}{\partial r} + F_y\frac{\partial y}{\partial r} + F_z\frac{\partial z}{\partial r}$$

آخذين بعين الاعتبار قوى الثقالة والمرونة للنواس ومساقطها على المحورين x و y:

$$F_x = -K\left(r - r_0\right)\sin\theta$$

$$F_y = mg - K\left(r - r_0\right)\cos\theta$$

ومن العلاقتين:

$$x = r\sin\theta \quad , \quad y = r\cos\theta$$

نوجد:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta$$

وبالتالي فإن:

$$Q_r = F_x\frac{\partial x}{\partial r} + F_y\frac{\partial y}{\partial r}$$

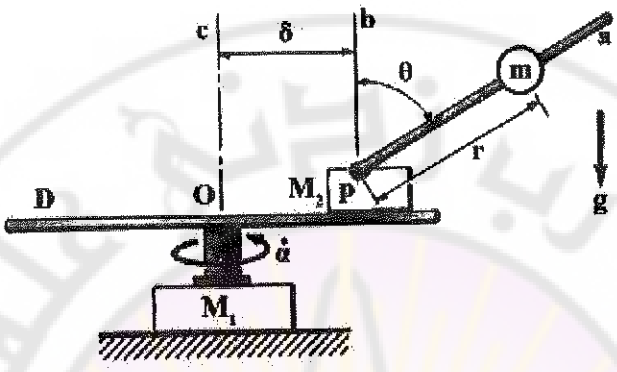
$$Q_r = -K\left(r - r_0\right)\sin^2\theta + \left[mg - K\left(r - r_0\right)\cos\theta\right]\cos\theta$$

$$= -K\left(r - r_0\right) + mg\cos\theta$$

وهي النتيجة نفسها التي سبق إيجادها وبالمثل نوجد القوة Q_θ.

14- تدور الطاولة D بسرعة زاوية ثابتة قدرها $\omega_1 = \dot{\alpha}$ عن طريق المحرك M_1 يوجد على الطاولة الجهاز الميكانيكي M_2 الذي يتمفصل معه القضيب الأملس Pa ويجعله يدور حول محور أفقي يمر من P. يقع القضيب Pa

والخطوط الشاقولية Pb وOC في مستو واحد. تتحرك الخرزة ذات الكتلة m على طول القضيب تحت تأثير قوة الثقالة (انظر الشكل (2.17)). أوجد القوى المعممة ثم استنتج المعادلات التفاضلية للحركة.



الشكل (2.17)

الحل: بفرض أن α وθ توابع معروفة بدلالة الزمن t، فإن للمجموعة إحداثياً معمماً وحيداً هو r (بعد الخرزة عن النقطة P)، ما دامت α وθ معلومة بدلالة الزمن.

إن سرعة الكتلة m ناتجة عن حركتها على طول القضيب $(\dot{r})$ والسرعة الناتجة عن دوران القضيب بالنسبة لـــP ودوران الطاولة نفسها أي أن:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\alpha}^2$$

حيث $\ell = s + r\sin\theta$

إذن:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2\left(s + r\sin\theta\right)^2\right]$$

وباعتبار أن $\theta = \theta_0 \sin\omega_2 t$

وتطبيق معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r$$

نحصل بعد الاشتقاق بالنسبة لـــr و $\dot{r}$ على:

$$m\ddot{r}-m\left\{r\theta_0^2\omega_2^2\cos^2\omega_2 t+\omega_1^2\left[s+r\sin\left(\theta_0\sin\omega_2 t\right)\right]^2\right\}=Q_r$$

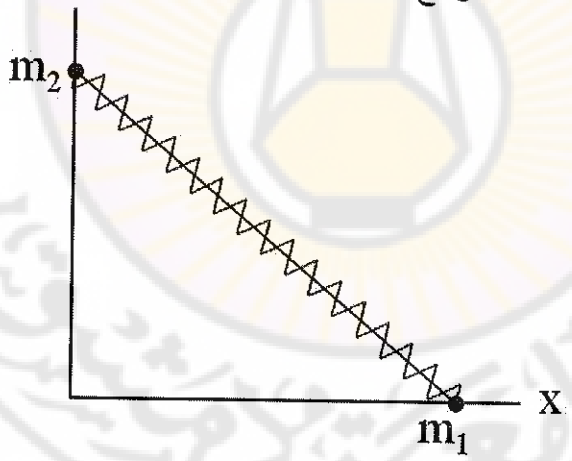
أما لتعيين القوة المعممة Q_r فنعطي فقط للكتلة m انتقالاً δr على منحى القضيب ونحسب العمل الموافق:

$$\delta A=+\overrightarrow{mg}.\overrightarrow{\delta r}=-mg\cos\theta\delta r$$

$$=-mg\cos\left(\theta_0\sin\omega_2 t\right)\delta r$$

أي أن $Q_r=-mg\cos\left(\theta_0\sin\omega_2 t\right)$

15- نابض ثابت مرونته K وطوله الطبيعي ℓ_0 في نهايته الكتلتان m_1 وm_2 تتحركان على ضلعي زاوية قائمة الشكل (2.18). أوجد تابع لاغرانج ثم اكتب معادلات لاغرانج الموافقة.



الشكل (2.18)

الحل: للمجموعة المفروضة إحداثيان معممان هما x و y.

إن تابع لاغرانج $L=T-U$ حيث:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$$

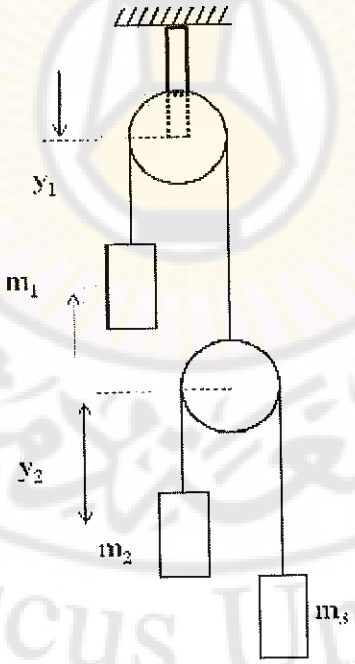
$$U = m_2 g y + \frac{1}{2} K \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell_0\right)^2$$

حيث $\frac{1}{2} K \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell_0\right)^2$ الطاقة الكامنة لقوى المرونة و $\sqrt{x^2 + y^2} - \ell_0$ استطالة النابض و $m_2 g y$ الطاقة الكامنة لقوى الثقالة.

أما معادلات لاغرانج الموافقة فهي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

16- لدينا المجموعة الممثلة في الشكل (2.19)، حيث ℓ_1 طول الخيط الأول وℓ_2 طول الخيط الثاني. احسب القوى المعممة بطريقتين ثم أوجد الطاقة الحركية للمجموعة. استنتج المعادلات التفاضلية للحركة.



الشكل (2.19)

الحل: نفرض أن حركة الكتلة m_1 نحو الأعلى والكتلة m_3 نحو الأسفل.

تتعين المجموعة المادية بمعرفة y_1 بعد الكتلة m_1 عن مركز البكرة الأولى وy_2 بعد الكتلة m_2 عن البكرة الثانية. لنوجد القوى المعممة عن طريق حساب العمل:

نعطي الكتلة m_1 الانتقال δy_1 مع $\delta y_2 = 0$ عندئذ يكون العمل مساوياً:

$$\delta A = -m_1 g \delta y_1 + (m_2 + m_3) g \delta y_1$$

إن أمثال δy_1 هو القوة المعممة الموافقة لـــ y_1، إذن:

$$Q_{y_1} = (m_2 + m_3 - m_1) g$$

وبالمثل لنعط الكتلة m_3 الانتقال δy_2 مع $\delta y_1 = 0$ فيكون العمل:

$$\delta A = m_3 g \delta y_2 - m_2 g \delta y_2$$

إذن:

$$Q_{y_2} = (m_3 - m_2) g$$

ننتقل الآن لحساب القوى المعممة عن طريق حساب الطاقة الكامنة للمجموعة:

$$U = u_1 + u_2 + u_3$$

حيث:

$$u_1 = m_1 g y_1$$
$$u_2 = m_2 g (y_2 - y_1)$$
$$u_3 = -m_3 g (y_1 + y_2)$$

إذن:

$$U = (m_1 - m_2 - m_3) g y_1 + (m_2 - m_3) g y_2$$

علماً بأن:

$$Q_{y_1} = -\frac{\partial U}{\partial y_1} = (m_2 + m_3 - m_1) g$$

و

$$Q_{y_2} = -\frac{\partial U}{\partial y_2} = (m_3 - m_2) g$$

وهي مطابقة للأجوبة نفسها في الطريقة الأولى.

أما الطاقة الحركية للمجموعة المادية فهي:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{y}_1 - \dot{y}_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(\dot{y}_1 + \dot{y}_2\right)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = m_1\dot{y}_1 + m_2\left(\dot{y}_1 - \dot{y}_2\right) + m_3\left(\dot{y}_1 + \dot{y}_2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_1} = 0$$

نطبق معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial T}{\partial y_1} = Q_{y_1}$$

أو

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial T}{\partial y_1} = 0$$

فنحصل بسهولة على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(m_1 + m_2 + m_3\right)\ddot{y}_1 + \left(m_3 - m_2\right)\ddot{y}_2 = \left(m_2 + m_3 - m_1\right)g \qquad (1)$$

وبالمثل نحصل على المعادلة التفاضلية الثانية الموافقة للإحداثي y_2:

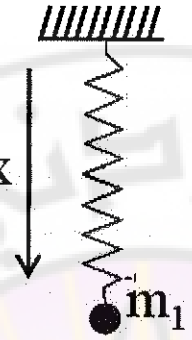
$$\left(m_3 - m_2\right)\ddot{y}_1 + \left(m_2 + m_3\right)\ddot{y}_2 = \left(m_3 - m_2\right)g \qquad (2)$$

وبتكامل (1) و(2) نحصل على قوانين الحركة $y_1(t)$ و$y_2(t)$.

ملاحظة:

يمكن حل المسألة بفرض أن حركة الكتلة m_1 نحو الأسفل والكتلة m_3 نحو الأعلى ونلاحظ في هذه الحالة أنه يتم الحصول على نفس العلاقتين (1) و(2) مع ضرب الطرف الثاني في كل منهما بإشارة ـ.

17- نابض مثبت من أحد طرفيه ويحمل في طرفه الآخر الكتلة m الشكل (2.20). فإذا كان عامل مرونة النابض K. أوجد تابع لاغرانج للمجموعة واستنتج المعادلة التفاضلية للحركة وقانون الحركة.



الشكل (2.20)

الحل: إن تابع لاغرانج هو:

$$L = T - u$$

حيث: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

$$u = \frac{1}{2} Kx^2$$

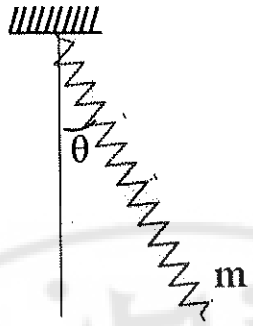
ومن معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

نجد بسهولة:

$$m\ddot{x} = -Kx$$

18- نواس نابضي مثبت من أحد طرفيه وفي نهايته الكتلة m. عامل مرونة النابض K وطوله الطبيعي ℓ_0 الشكل (2.21). أوجد تابع لاغرانج ثم استنتج المعادلات التفاضلية للحركة.



الشكل (2.21)

الحل: يتعين وضع الكتلة m بمعرفة طول النواس x في أية لحظة، فإذا فرضنا أن استطالة النابض x فيكون طوله في أية لحظة هو:

$$\ell_0 + x(t)$$

وكذلك بمعرفة الزاوية $\theta(t)$ مع الشاقول.

إن الطاقة الحركية للكتلة m هي:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + (\ell_0 + x)^2\dot{\theta}^2\right] \qquad (1)$$

أما الطاقة الكامنة للمجموعة فهي:

$$U(x,\theta) = -mg(\ell_0 + x)\cos\theta + \frac{1}{2}Kx^2$$

وبالتالي فإن تابع لاغرانج هو:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + (\ell_0 + x)^2\dot{\theta}^2\right] + mg(\ell_0 + x)\cos\theta - \frac{1}{2}Kx^2$$

إن معادلات لاغرانج الموافقة للإحداثيين x و y هي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = (\ell + x)^2\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - Kx \qquad (1)$$

و

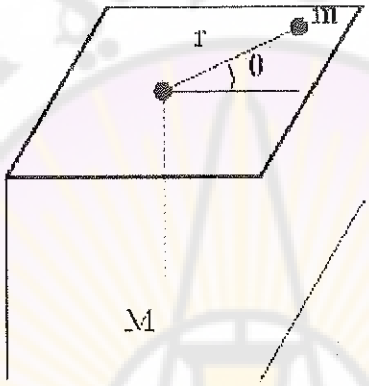
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[m(\ell + x)^2\dot{\theta}\right] = -mg(\ell + x)\sin\theta$$

$$\Rightarrow m(\ell + x)^2\ddot{\theta} + 2m(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} = -mg(\ell + x)\sin\theta$$

$$\Rightarrow m(\ell + x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

تمثل العلاقتان (1) و(2) المعادلات التفاضلية لحركة المجموعة المفروضة.

19- نقطة مادية كتلتها m تتحرك على طاولة أفقية ملساء مربوطة بخيط يمر بفتحة في وسط الطاولة وفي نهاية الخيط تعلق الكتلة M بحيث تتحرك M شاقولياً. أوجد تابع لاغرانج، ثم استنتج المعادلات التفاضلية للحركة.



الشكل (2.22)

الحل: للمجموعة إحداثيان مستقلان هما r و θ كما في الشكل (2.22). بفرض طول الخيط ℓ، فإن الطول الشاقولي للخيط $\ell - r$. والطاقة الحركية للمجموعة هي:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

والطاقة الكامنة هي:

$$U = -Mg(\ell - r)$$

باعتبار مستوى الطاولة هو المستوى الصفري للطاقة، إذن:

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Mg(\ell - r)$$

أما معادلات لاغرانج فهي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

وإن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (M+m)\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 - Mg$$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية الأولى هي:

$$(M+m)\ddot{r} = -Mg + mr\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

وبالمثل نحصل على المعادلة التفاضلية الثانية:

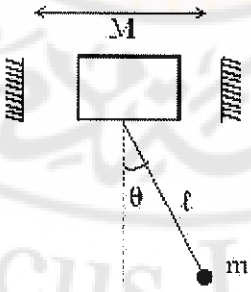
$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (2)$$

تعطي العلاقة (2):

$$mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

وهذا يمثل الاندفاع $P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$.

20- تنزلق الكتلة M على سكة دون احتكاك. وترتبط مع نواس طول خيط تعليقه ℓ وكتلته m الشكل (2.23). أوجد المعادلات التفاضلية للحركة.



الشكل (2.23)

الحل: لنفرض أن x هو إحداثي M وأن θ زاوية انحراف النواس.

عندئذ تكون احداثيات الكتلة m هي:

$$x + \ell \sin\theta = X$$

$$\ell \cos\theta = Y$$

إن مربع سرعة الكتلة m هي:

$$v_m^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

بينما مربع سرعة الكتلة M هي: $\dot{x}^2$

فالطاقة الحركية للمجموعة هي:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

والطاقة الكامنة $U = -mgy = -mg\ell\cos\theta$

إذن: $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mg\ell\cos\theta$$

ومعادلات لاغرانج هي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

وبالتعويض نحصل على:

$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

ويمكن على سبيل المثال مكاملة هاتين المعادلتين التفاضليتين (1) و(2) من أجل الاهتزازات الصغيرة، حيث:

$$\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

و

$$\sin\theta \approx \theta$$

وبالأخذ بالحدود من الرتبة الأولى، نحصل على:

$$(M+m)\ddot{x}+m\ell\ddot{\theta}=0 \qquad (1)'$$

$$\ddot{x}+\ell\ddot{\theta}+g\theta=0 \qquad (2)'$$

بمكاملة $(1)'$ مرتين نحصل على:

$$x=-\left(\frac{m\ell}{M+m}\right)\theta+At+B$$

وبتعويض كلاً من $(1)'$ في $(2)'$ نجد:

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{M+m}{M}\right)\frac{g}{\ell}\theta=0$$

وحل هذه المعادلة الأخيرة هو:

$$\theta(t)=C\cos(\omega t+\phi)$$

حيث:

$$\omega=\sqrt{1+\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

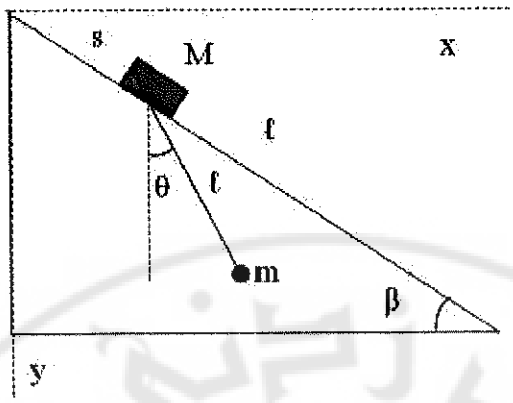
والحل العام من أجل X و θ هو:

$$\theta(t)=C\cos(\omega t+\phi)$$

$$x(t)=-\frac{Cm\ell}{M+m}\cos(\omega t+\phi)+At+B$$

21- نواس كتلته m وطول خيط تعليقه ℓ وزاويته مع الشاقول θ ونقطة تعليقه كتلتها M تتحرك على مستو مائل كما في الشكل (2.24).

أوجد تابع لاغرانج ثم استنتج المعادلات التفاضلية للحركة.



الشكل (2.24)

الحل: إن المجموعة المادية المفروضة تتعين بالإحداثيات المستقلة s وθ، حيث قمة المستوى المائل هي نقطة تقاطع المحورين xy وباعتبار أن الشاقول هو اتجاه المحور y تكون إحداثيات كل من الكتلتين هي:

$$M(x,y)=(s\cos\beta,-s\sin\beta)$$

$$m(x,y)=(s\cos\beta+\ell\sin\theta,-s\sin\beta-\ell\cos\beta)$$

ومن هاتين العبارتين نحصل على مربع كل من سرعتيهما:

$$v_M^2=\dot{s}^2$$

$$v_m^2=\dot{s}^2+\ell^2\dot{\theta}^2+2\ell\dot{s}\dot{\theta}(\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta)$$

والطاقة الكامنة للكتلة M هي:

$$U_M=-Mg\sin\beta$$

بينما الطاقة الكامنة للكتلة m هي:

$$U_m=-mg(s\sin\beta+\ell\cos\theta)$$

وبهذا فإن تابع لاغرانج L يكتب:

$$L=\frac{1}{2}M\dot{s}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2+\ell^2\dot{\theta}^2+2\ell\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta+\beta)\right)$$
$$+Mgs\sin\beta+mg(s\sin\beta+\ell\cos\theta)$$

ومعادلات لاغرانج الموافقة للإحداثيات المستقلة هي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}=\frac{\partial L}{\partial s} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial \theta}$$

وبالتعويض في هاتين العلاقتين نحصل بسهولة على:

$$(M+m)\ddot{s}+m\ell\left[\ddot{\theta}\cos(\theta+\beta)-\dot{\theta}^2\sin(\theta+\beta)\right]=$$
$$(M+m)g\sin\beta$$

و

$$\ell\ddot{\theta}+\ddot{s}\cos(\theta+\beta)=-g\sin\theta$$

22- نواس بسيط كتلته m وطول خيط تعليقه r قابل للاستطالة ويصنع مع الشاقول الزاوية θ.

a) ما هي الإحداثيات المعممة.

b) أوجد طاقته الحركية T.

c) عين تابع لاغرانج L عند الاهتزازات الصغيرة:

$$\cos\theta=\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\ldots\right)$$

d) اكتب معادلات لاغرانج.

e) اكتب المعادلات التفاضلية للحركة.

الحل: نظراً لأن طول خيط التعليق غير ثابت فإن الإحداثيات المعممة هي r و θ وبالتالي فإ طاقته الحركية هي:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$$

أما تابع لاغرانج فهو:

$$L=T-U$$

حيث U الطاقة الكامنة لكتلة النواس:

$$U=-mgh=-mgr\cos\theta$$

إذن:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mgr\cos\theta$$

ومعادلة لاغرانج هي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial \theta}$$

من أجل الاهتزازات الصغيرة يكون تابع لاغرانج:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mgr\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mgr-\frac{mgr\theta^2}{2}$$

ولإيجاد المعادلات التفاضلية للحركة نوجد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=m\dot{\theta}^2r+mg-\frac{mg}{2}\theta^2$$

فالمعادلة الأولى هي:

$$m\ddot{r}=m\dot{\theta}^2r-\frac{mg}{2}\theta^2+mg \qquad (1)$$

ونوجد المعادلة الثانية بحساب:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-mgr\theta$$

إذن:

$$mr^2\ddot{\theta}=-mgr.\theta \qquad (2)$$

23- نقطة كتلتها m تتحرك في مستو أفقي أملس يهتز وفقاً للقانون $z = a\sin\omega t$، حيث a و ω ثوابت.

أوجد المعادلات التفاضلية للحركة، ثم استنتج قوانين الحركة.

الحل: إن للنقطة المفروضة احداثيين معممين x و y باعتبار z معلومة بالفرض، وأن المستوي الأفقي هو المستوي xy والمحور z عمودي عليه وموجه للأعلى.

وبإيجاد الطاقة الحركية للنقطة:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\omega^2\cos^2\omega t\right)$$

والطاقة الكامنة للنقطة هي:

$$U = mgz = mga\sin\omega t$$

ويمكن كتابة معادلات الحركة إما بدلالة الطاقة الحركية T أو تابع لاغرانج L:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

وبالاشتقاق نجد:

$$m\ddot{x} = 0$$

وبالمثل بالنسبة للإحداثي y : $m\ddot{y} = 0$

وبتكامل هاتين العلاقتين نوجد قوانين الحركة بالنسبة للإحداثيين y و x:

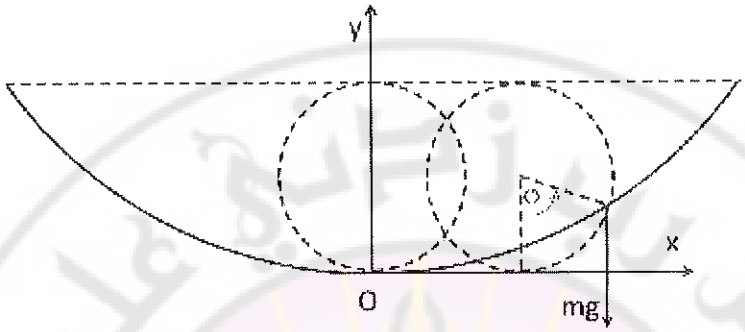
$$x = \dot{x}_0 t + x_0 \quad , \quad y = \dot{y}_0 t + y_0$$

أما z فهي معطاة بالأساس: $z = a\sin\omega t$

24- النواس السيكلوئيدي: تتحرك نقطة كتلتها m في حقل الجاذبية على

سيكلوئيد* أملس يقع في مستو شاقولي الشكل (2.25).

أوجد قانون حركة النقطة المادية، علماً بأن نصف قطر الدائرة المولدة للسيكلوئيد هو R.



الشكل (2.25)

الحل: نختار جملة الإحداثيات الديكارتية بحيث يكون oy موجهاً للأعلى عمودياً على المحور x الأفقي وبحيث يتطابق المستوى xoy مع مستوى السيكلوئيد.

وبما أن الحركة مستوية والنقطة خاضعة لارتباط وحيد فإن عدد الإحداثيات هو واحد وليكن الزاوية φ: زاوية دوران الدائرة محسوبة اعتباراً من المحور oy. عندئذ تكتب المعادلات الوسيطية للارتباط:

$$x = R\left(\varphi + \sin\varphi\right)$$

$$y = R\left(1 - \cos\varphi\right)$$

وباستخدام هاتين العلاقتين في عبارتي الطاقة الحركية والطاقة الكامنة نجد بسهولة:

---

* السيكلوئيد هو المنحني الذي ترسمه نقطة من دائرة تتدحرج بدون احتكاك على مستوٍ أفقي.

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=mR^2\dot{\varphi}^2\left(1+\cos\varphi\right)$$

$$=2mR^2\dot{\varphi}^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$U=mgy=mgR\left(1-\cos\varphi\right)$$

$$=2mgR\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

وبالتعويض بمعادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi=-\frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

نجد:

$$2\ddot{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}-\dot{\varphi}^2\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{g}{R}\sin\frac{\varphi}{2}=0$$

من الواضح أن هذه المعادلة التفاضلية للحركة هي معقدة، ومن المناسب [illegible] إحداثي معمم آخر يرتبط بـــφ.

وحسب عبارتي T وU يتضح أن الإحداثي المناسب استخدامه هو الإحداثي الذي يتناسب مع $\sin\frac{\varphi}{2}$ وهذا الإحداثي هو طول قوس السيكلوئيد محسوباً بدءاً من مبدأ الإحداثيات وحتى موضع النقطة المادية:

$$S=4R\sin\frac{\varphi}{2}$$

عندئذ يكون:

$$T=\frac{m}{2}\dot{S}^2\quad,\quad U=\frac{mg}{8R}S^2$$

بالتعويض في معادلة لاغرانج للإحداثي S:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{S}}-\frac{\partial T}{\partial S}=Q_S=-\frac{\partial U}{\partial S}$$

نتوصل إلى:

$$\ddot{S} + \omega^2 S = 0$$

حيث $\omega^2 = \frac{g}{4R}$

والمعادلة الأخيرة تمثل معادلة تفاضلية سهلة الحل بالنسبة للإحداثي S.

$$S(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$$

حيث α و a تتعينان من القيم الابتدائية للمقادير v_0 و S_0 في لحظة البدء:

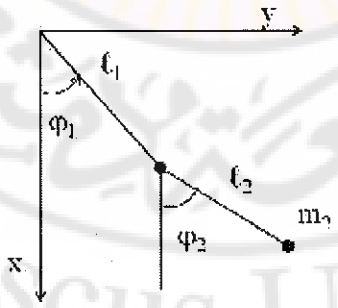
$$a = \left(S_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)^2$$

$$\tan\alpha = -\frac{v_0}{\omega S_0}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $v_0 = 0$ فإن الحل يؤول إلى:

$$S = S_0 \cos\omega t$$

25- نواس مضاعف الشكل (2.26) طول خيطيه ℓ_1 و ℓ_2 وكتلتاه m_1 و m_2 والمطلوب حساب القوى المعممة الموافقة للإحداثيات المعممة ثم إيجاد وضع التوازن بالاعتماد على مبدأ العمل الافتراضي ودراسة أوضاع التوازن وإيجاد شكل التابع الكموني عند كل وضع.



الشكل (2.26)

الحل:

الطريقة الأولى:

نوجد مركبات قوة الثقالة $\overrightarrow{m_1g}$ و $\overrightarrow{m_2g}$ مع نقطتي تطبيقهما:

$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{m_1g}(m_1g,0,0)$$

$$\vec{r}_1(\ell_1\cos\varphi_1,\ell_1\sin\varphi_1,0)$$

$$\vec{F}_2 = \overrightarrow{m_2g}(m_2g,0,0)$$

$$\vec{r}_2(\ell_1\cos\varphi_1+\ell_2\cos\varphi_2,\ell_1\sin\varphi_1+\ell_2\sin\varphi_2,0)$$

نطبق العلاقات النظرية:

$$Q_{\varphi_1} = \sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_{\varphi_1}} = m_1g\frac{\partial x_1}{\partial\varphi_1} + m_2g\frac{\partial x_2}{\partial\varphi_1}$$

$$= m_1g\ell_1\sin\varphi_1 - m_2g\ell_1\sin\varphi_1 = -(m_1+m_2)g\ell_1\sin\varphi_1$$

وبالمثل نجد: $Q_{\varphi_2} = -m_2g\ell_2\sin\varphi_2$

الطريقة الثانية:

نحسب في البدء Q_{φ_2}. تعطي الجملة انزياحاً افتراضياً بحيث تبقى φ_1 ثابتة أما φ_2 فتزداد بمقدار $\delta\varphi_2$

$$\delta A_2 = M_2\delta\varphi_2$$

حيث M_2 عزم القوة m_2g بالنسبة لمحور الدوران:

$$M_2 = -m_2g\ell_2\sin\varphi_2$$

$$\delta A_2 = -m_2g\ell_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2 = Q_{\varphi_2}\delta\varphi_2$$

إذن: $Q_{\varphi_2} = -m_2g\ell_2\sin\varphi_2$

ننتقل إلى حساب Q_{φ_1}. نزيح الجملة انزياحاً افتراضياً بحيث تبقى φ_2 ثابتة، فيكون عمل القوة الأولى مساوياً:

$$-m_1g\ell_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$

إن انزياح m_1 وm_2 هو واحد. لذا نحصل على عمل القوة $m_2\vec{g}$ من نفس العبارة السابقة باستبدال m_1 بـــm_2، أي أن عمل هذه القوة هو $-m_2 g\ell_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1$ وبالتالي يكون العمل الكلي للقوتين نتيجة الانزياح $\delta\varphi_1$ يساوي:

$$\delta A_1 = -(m_1 + m_2) g\ell_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 = Q_{\varphi_1}\delta\varphi_1$$

$$Q_{\varphi_1} = -(m_1 + m_2) g\ell_1 \sin\varphi_1$$

الطريقة الثالثة:

إن $m_1\vec{g}$ و $m_2\vec{g}$ قوتان كمونيتان. لنحسب الطاقة الكامنة للجملة كعمل للقوتين $m_1\vec{g}$ و $m_2\vec{g}$، عند انزياح الجملة عن وضعها إلى الوضع الأفقي (نعتبر المستوي الأفقي المار من النقطة o هو مبدأ قياس الطاقة الكامنة):

$$U = m_1 g\ell_1 \cos\varphi_1 - m_2 g(\ell_1 \cos\varphi_1 + \ell_2 \cos\varphi_2)$$

$$= -(m_1 + m_2) g\ell_1 \cos\varphi_1 - m_2 g\ell_2 \cos\varphi_2$$

نحسب Q_{φ_1} و Q_{φ_2} وفقاً للعلاقة $Q_j = -\dfrac{\partial U}{\partial q_j}$

$$Q_{\varphi_1} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = -(m_1 + m_2) g\ell_1 \sin\varphi_1$$

$$Q_{\varphi_2} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = -m_2 g\ell_2 \sin\varphi_2$$

ب) في حالة التوازن: يكون شرط التوازن حسب مبدأ العمل الافتراضي:

$$\delta A = \sum \vec{F_i}\delta\vec{r_i} = \sum_j Q_j \delta q_j = 0$$

وبما أن δq_j انتقالات افتراضية مستقلة يكون:

$Q_j = 0$ شرط التوازن

إذن: $Q_{\varphi_1} = 0 \quad , \quad Q_{\varphi_2} = 0$

$$(m_1+m_2)g\ell_1\sin\varphi_1=0$$
$$m_2g\ell_2\sin\varphi_2=0$$

وبالتالي: $\sin\varphi_1=\sin\varphi_2=0$

وهذا يتحقق في أربع حالات:

1) $(\varphi_1)_0=(\varphi_2)_0=0$

2) $(\varphi_1)_0=0\ ,\ (\varphi_2)_0=\pi$

3) $(\varphi_1)_0=\pi\ ,\ (\varphi_2)_0=0$

4) $(\varphi_1)_0=(\varphi_2)_0=\pi$

لننشر الطاقة الكامنة حسب سلسلة تايلور بجوار أوضاع التوازن:

$$U_1(\varphi_1,\varphi_2)=-(m_1+m_2)g\ell_1-m_2g\ell_2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)g\ell_1\varphi_1^2+\frac{1}{2}m_2g\ell_2\varphi_2^2$$

$$U_2(\varphi_1,\varphi_2)=-(m_1+m_2)g\ell_1-m_2g\ell_2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)g\ell_1\varphi_1^2-\frac{1}{2}m_2g\ell_2(\pi-\varphi_2)^2$$

$$U_3(\varphi_1,\varphi_2)=(m_1+m_2)g\ell_1-m_2g\ell_2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)g\ell_1(\pi-\varphi_1)^2+\frac{1}{2}m_2g\ell_2\varphi_2^2$$

$$U_4(\varphi_1,\varphi_2)=(m_1+m_2)g\ell_1+m_2g\ell_2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)g\ell_1(\pi-\varphi_1)^2+\frac{1}{2}m_2g\ell_2(\pi-\varphi_2)^2$$

ومنه:

$$M_{11}=-\frac{\partial U_1}{\partial \varphi_1}=-(m_1+m_2)g\ell_1\varphi_1 \ , \ M_{12}=-\frac{\partial U_1}{\partial \varphi_2}=-m_2g\ell_2\varphi_2$$

$$M_{21}=-\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_1}=-(m_1+m_2)g\ell_1\varphi_1 \ , \ M_{22}=-\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_2}=-m_2g\ell_2(\pi-\varphi_2)$$

$$M_{31}=-\frac{\partial U_3}{\partial \varphi_1}=-(m_1+m_2)g\ell_1(\pi-\varphi_1) \ , \ M_{32}=-\frac{\partial U_3}{\partial \varphi_2}=-m_2g\ell_2\varphi_2$$

$$M_{41}=-\frac{\partial U_4}{\partial \varphi_1}=-(m_1+m_2)g\ell_1(\pi-\varphi_1) \ , \ M_{42}=-\frac{\partial U_4}{\partial \varphi_2}=-m_2g\ell_2(\pi-\varphi_2)$$

من الملاحظ أنه مع تزايد φ_1 و φ_2 فإن:

1) M_{11} و φ_1 متعاكسان بالإشارة وكذلك M_{12} و φ_2، إذن يؤثر في كلتا الحالتين عزم إرجاع، لذا فالوضع (0,0) هو وضع توازن مستقر.

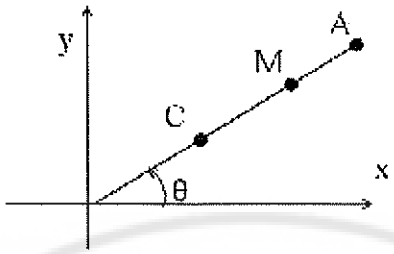
2) M_{21} و φ_1 متعاكسان بالإشارة أما M_{22} و φ_2 لهما نفس الإشارة، وهذا يعني أنه مع تزايد φ_1 وبقاء φ_2 ثابتة يكون وضع التوازن غير مستقر وعليه فوضع التوازن $(0,\pi)$ هو وضع توازن بشكل السرج.

3) نفس الحالة السابقة مع استبدال φ_1 بـــφ_2 وفق φ_1 غير مستقر ووفق φ_2 فمستقر لذا فالوضع $(\pi,0)$ هو وضع توازن بشكل السرج.

4) لـــM_{41} و φ_1 نفس الإشارة وكذلك الحال بالنسبة لـــM_{42} و φ_2 لذا فوضع التوازن (π,π) غير مستقر.

26- ox و oy محوران متعامدان ثابتان في الفراغ، (oy شاقولي صاعد). oA قضيب ثقيل متجانس (كتلته M وطوله 2ℓ) يستطيع الدوران في المستوي oxy حول طرفه الثابت O الشكل (2.27).

M نقطة مادية ثقيلة (كتلتها m) تستطيع الحركة على القضيب بدون احتكاك. اكتب المعادلات التفاضلية التي تعين حركة المجموعة المؤلفة من القضيب والنقطة.



الشكل (2.27)

الحل: إن وضع القضيب في المستوي oxy يتعين بزاوية الدوران حول o، ولتكن θ:

$$\theta = \left(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oA}\right)$$

والنقطة M تتعين على القضيب ببعد M عن o ولنرمز له بـــr.

فالمجموعة المؤلفة من القضيب والنقطة تتعين إذن بوسيطين θ و r:

$$q_1 = \theta \quad , \quad q_2 = r$$

لنحسب الطاقة الحركية للمجموعة S:

نرى أن:

$$T(S) = T(oA) + T(M)$$

وأن

$$2T(oA) = I_o \dot{\theta}^2$$

$$I_o = \frac{4}{3} M\ell^2$$

ثم أن

$$2T(M) = m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

فيكون إذن:

$$2T(S) = \frac{4}{3} M\ell^2\dot{\theta}^2 + m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

لنحسب الآن U(S):

نعلم أن

$$U(S) = U(oA) + U(M)$$

وأن

$$U(oA) = -Mgy(C)$$

بفرض أن C مركز عطالة oA، فيكون:

$$U(oA) = -Mg\ell\sin\theta$$

ثم أن

$$U(M) = -mgr\sin\theta$$

فيكون بالتالي:

$$U(S) = -(M\ell + mr)g\sin\theta$$

لنطبق معادلات لاغرانج بالنسبة للوسيطين r و θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

فنرى أن:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

وأن:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

و

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -mg\sin\theta$$

فمعادلة لاغرانج الأولى (المتعلقة بالوسيط r) تكون:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta$$

ثم إن:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}M\ell^2\dot{\theta} + mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -(M\ell + mr)g\cos\theta$$

فتكون معادلة لاغرانج الثانية (المتعلقة بالوسيط θ):

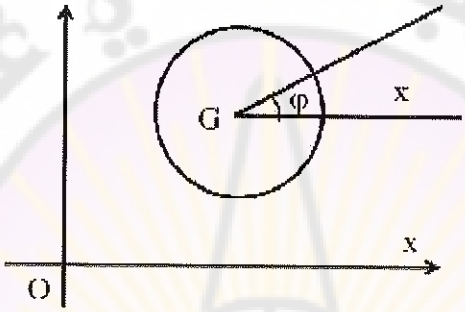
$$\left[\left(\frac{4}{3}M\ell^2 + mr^2\right)\dot{\theta}\right]' = -(M\ell + mr)g\cos\theta$$

27- C قرص دائري رقيق، الشكل (2.28)، ثقيل ومتجانس (كتلته M ونصف قطره a) يستطيع الحركة، بدون احتكاك، في مستو oxy (oy محور شاقولي صاعد ثابت في الفراغ، ox محور أفقي).

اكتب المعادلات التفاضلية التي تعين حركة القرص في الحالتين:

1) المستوي oxy ثابت في الفراغ.

2) المستوي oxy يدور حول المحور oy بدوران منتظم سرعته ω.



الشكل (2.28)

الحل: إن وضع القرص في المستوي يتعين بثلاثة وسطاء: هي الإحداثيان الديكارتيان (η وξ) لمركز العطالة G للقرص، وزاوية الدوران φ للقرص حول مركز عطالته.

لنعين الطاقة الحركية في كل من الحالتين، ثم لنكتب معادلات لاغرانج في الحركة المطلقة للقرص.

(1) إن الطاقة الحركية للقرص تتعين، استناداً إلى علاقة كيونغ، كما يلي:

$$T(C) = T(G) + T_G$$

$$2T(G) = MV^2(G) = M\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2\right)$$

$$2T_G = I_G\dot{\varphi}^2 = M\frac{a^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

فيكون إذن:

$$2T(C)=M\left(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\frac{a^2}{2}\dot{\varphi}^2\right)$$

ونرى أن:

$$U(C)=-Mg\eta$$

فيكون: $\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}=M\dot{\xi} \quad , \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial \xi}=0$

وبذلك تكون معادلة لاغرانج الأولى (بعد الاختصار على M):

$$\ddot{\xi}=0 \quad \Rightarrow \quad \xi=\xi_0+\dot{\xi}_0 t$$

ثم إن: $\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}}=M\dot{\eta}$

وأن: $\frac{\partial(T+U)}{\partial \eta}=-Mg$

فتكون معادلة لاغرانج الثانية:

$$\ddot{\eta}=-g \quad , \quad \eta=-\frac{1}{2}gt^2+\dot{\eta}_0+\eta_0$$

وأخيراً نجد أن: $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=M\frac{a^2}{2}\dot{\varphi}$

و $\frac{\partial(T+U)}{\partial \varphi}=0$

فتكون معادلة لاغرانج الثالثة:

$$\ddot{\varphi}=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi=\varphi_0+\dot{\varphi}_0 t$$

(2)نرى في هذه الحالة أن القرص يتعين في الفراغ بوسائطه الهندسية الثلاثة ξ وη وφ والزمن t.

ونلاحظ أن الطاقة الحركية للقرص تتعين هنا أيضاً، استناداً إلى علاقة كيونغ:

$$T(C)=T(G)+T_G$$

فنجد أن: $2T(G) = MV^2(G)$

ونرى أن: $\vec{V}(G) = \vec{V}_r(G) + \vec{V}_e(G)$

ولما كانت السرعتان النسبية والحدية متعامدتين، فيكون:

$$V^2(G) = V_r^2(G) + V_e^2(G)$$

ويكون بالتالي:

$$2T(G) = M\left[\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2\right) + \omega^2\xi^2\right]$$

ولحساب الطاقة الحركية للقرص في حركته حول مركز عطالته، نلاحظ أن:

$$2T_G = I_G\dot{\varphi}^2 + I_{Gy}\xi^2$$

$$= \frac{Ma^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{ma^2}{2}\omega$$

وبذلك تكون الطاقة الحركية للقرص في حركته المطلقة:

$$2T(C) = M\left[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\omega}^2\xi^2 + \frac{a^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{4}\omega^2\right]$$

وهنا القوى المعطاة هي ثقل القرص، وهو يشتق من تابع القوى:

$$U = -mg\eta$$

فمعادلات لاغرانج بالنسبة للوسطاء ξ وη وφ هي:

$$\left(M\dot{\xi}\right)^{\cdot} = M\omega^2\xi \Rightarrow \ddot{\xi} = \omega^2\xi$$

$$\left(M\dot{\eta}\right)^{\cdot} = -Mg \Rightarrow \ddot{\eta} = -g$$

$$\left(M\frac{a^2}{2}\dot{\varphi}\right)^{\cdot} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

هذا ويمكن أيضاً تطبيق معادلات لاغرانج في الحركة النسبية، أي في حركة القرص بالنسبة إلى المستوي oxy. لنعين هذه المعادلات:

نرى أن: $2T_r(G) = MV_r^2(G) = M\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2\right)$

وأن:
$$2T_{Gr} = I_G\dot{\varphi}^2 = M\frac{a^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

فيكون:
$$2T(C)_r = M\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \frac{a^2}{2}\dot{\varphi}^2\right)$$

لنحسب الآن الأعمال الجزئية للقوى النسبية. نرى أن:
$$\sum \vec{f_r}.\overrightarrow{dM_r} = \sum \vec{f_a}.\overrightarrow{dM_r} - \sum \vec{f_e}.\overrightarrow{dM_r} - \sum \vec{f_C}.\overrightarrow{dM_r}$$

وهنا نلاحظ أن:
$$\sum \vec{f_a}.\overrightarrow{dM_r} = -Mgd\eta$$
$$\sum \vec{f_e}.\overrightarrow{dM_r} = M\omega^2\xi d\xi$$
$$\sum \vec{f_C}.\overrightarrow{dM_r} = 0$$

لأن $\vec{f_C} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$ وأن $\overrightarrow{dM_r} = \vec{V_r}dt$

ويكون بالتالي:
$$\sum \vec{f_r}.\overrightarrow{dM_r} = M\left(-gd\eta + \omega^2\xi d\xi\right)$$

نرى أن القوى النسبية تشتق من تابع قوى هو:
$$U_r = M\left(-g\eta + \frac{\omega^2}{2}\xi^2\right)$$

فمعادلات لاغرانج تصبح في هذه الحركة:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial T_r}{\partial q_i} + \frac{\partial U_r}{\partial q_i}$$

فإذا طبقنا معادلات لاغرانج على الوسطاء ξ وη وφ كان لدينا:
$$\left(M\dot{\xi}\right)^{\cdot} = 0 + M\omega^2\xi \Rightarrow \ddot{\xi} = \omega^2\xi$$
$$\left(M\dot{\eta}\right)^{\cdot} = 0 - Mg \Rightarrow \ddot{\eta} = -g$$
$$\left(M\frac{a^2}{2}\dot{\varphi}\right)^{\cdot} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1- ثقلان وزنهما p_1, p_2 يصل بينهما خيط يتحركان على مستو أفقي خشن تحت تأثير القوة Q المؤثرة في الثقل الأول وفقاً للمستوي الخشن. بالاعتماد على مبدأ دالامبير عيّن تسارع حركة الثقلين وتوتر الخيط، علماً بأن معامل احتكاك الثقلين بالمستو هو f.

2- علق ثقل وزنه p في خيط طوله ℓ، ثم أزيح إلى الموضع M_0 فانحرف الخيط عن الشاقول بزاوية α وكانت سرعته عند ذلك معدومة. عيّن توتر الخيط عندما يصل الثقل إلى أخفض موضع M_1 وذلك بالاعتماد على مبدأ دالامبير.

3- مصعد بداخله مشاهد معزول عن الوسط الخارجي، تعلق في سقف المصعد ربيعة مدرجة تحمل وزناً p. ادرس ملاحظات المشاهد عندما يتحرك المصعد نحو الأعلى بتسارع a ونحو الأسفل بتسارع a ثم بتسارع g.

4- نواس مستو كتلته m_2، نقطة تعليقه (كتلتها m_1) تستطيع أن تتحرك على مستقيم أفقي. أوجد تابع لاغرانج للمجموعة المفروضة ومعادلات الحركة الموافقة.

5- نواس مستو، نقطة تعليقه:

a) تتحرك بانتظام على دائرة شاقولية بتواتر ثابت ω

b) تقوم باهتزازات أفقية وفقاً للعلاقة $a\cos\omega t$

c) تقوم باهتزازات شاقولية وفقاً للعلاقة $a\cos\omega t$

أوجد تابع لاغرانج للنواس في كل من الحالات الثلاث.

6- نقطة مادية تتحرك على مستو أفقي يهتز شاقولياً وفقاً للقانون $z = a\sin\omega t$

أوجد معادلات لاغرانج التفاضلية ومن ثم قوانين الحركة.

7- نقطة ثقيلة كتلتها m تتحرك على سلك مستقيم أملس يدور بسرعة زاوية ثابتة ω حول الشاقول المار من نقطة تثبيت السلك O. فإذا كانت الزاوية بين السلك والشاقول ثابتة وتساوي θ_0. أوجد معادلات لاغرانج.

8- نقطة مادية كتلتها m تتحرك على دائرة شاقولية نصف قطرها a تدور بدورها بسرعة زاوية ثابتة $\vec{\omega}$ حول محور شاقولي يمر من مركز الدائرة. أوجد معادلات لاغرانج لحركة النقطة المفروضة.

Damascus University

الفصل الثالث

3. قوانين الانحفاظ

3. 1. الطاقة

عند حركة مجموعة ميكانيكية لها s درجة حرية فإن القيم q_j و $\dot{q}_j$ حيث $(j=1,2,\ldots s)$ التي تعين وضع المجموعة تتغير مع الزمن t وبالتالي تكون q_j توابع للزمن ولـــ2s من الثوابت. نحصل على تلك التوابع بمكاملة معادلات الحركة (معادلات لاغرانج) وهي – كما شاهدنا – معادلات من المرتبة الثانية بالنسبة لـــ $\dot{q}_j$. تتعين قيم الثوابت من الشروط الابتدائية للحركة، وعليه يمكن أن نكتب:

$$q_j = q_j\left(t, c_1, c_2 \ldots c_{2s}\right) \tag{3.1}$$

حيث $c_1, c_2 \ldots c_{2s}$ ثوابت اختيارية.

أما السرع $\dot{q}_j$ فنحصل عليها باشتقاق (3.1) بالنسبة للزمن:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j\left(t, c_1, c_2 \ldots c_{2s}\right) \tag{3.2}$$

لنفرض أنه يمكن حل جملة المعادلات (3.1) و(3.2) بالنسبة للثوابت المفروضة بدلالة q_j و $\dot{q}_j$ و t عندئذٍ يكون:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1\left(t, q_1, q_2, \ldots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_s\right) \\ c_2 &= c_2\left(t, q_1, q_2, \ldots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_s\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{2s} &= c_{2s}\left(t, q_1, q_2, \ldots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_s\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

تبقى هذه التوابع ثابتة أثناء الحركة وتتعين قيمتها العددية من الشروط الابتدائية، أي أنها تتعين بالقيم المفروضة للإحداثيات q_j والسرع $\dot{q}_j$ في اللحظة

الابتدائية. تسمى التوابع (3.3) **تكاملات الحركة** (تكاملات معادلة الحركة).

لا تلعب جميع تكاملات الحركة دوراً هاماً متماثلاً في الميكانيك، فبعضها يرجع ثباته إلى الخواص الرئيسة للمكان والزمان – التجانس وتماثل المناحي. يكون للقيم التي تبقى ثابتة أثناء الحركة خاصة عامة وهامة هي الخاصة التجميعية، فثابت التكامل من أجل مجموعة ميكانيكية تتبادل أجزاؤها التأثير يساوي مجموع ثوابت التكامل لكل جزء من المجموعة كلاً على حدة.

إن للخاصة التجميعية لتكاملات الحركة (الثوابت) أهمية كبيرة في الميكانيك. فمثلاً إذا تبادل جسمان التأثير خلال فترة زمنية تكون التكاملات التجميعية لمجموعة الجسمين سواء قبل تبادل التأثير أو بعده مساوية مجموع قيم تكاملات الحركة للجسمين كلاً على حدة. واعتماداً على قوانين انحفاظ تلك التكاملات يمكن استنتاج مجموعة من الدلائل عن حالة الأجسام بعد تبادل التأثير وذلك إذا علمت حالة تلك الأجسام قبل تبادل التأثير.

في حالة تجانس الزمن لا ترتبط الخواص الميكانيكية لمجموعة مغلقة بالزمن، وهذا يعني أن الزمن لا يظهر بشكل صريح (واضح) في تابع لاغرانج الذي يصف المجموعة لهذا فإن المشتق التام لتابع لاغرانج بالنسبة للزمن يكتب بالشكل التالي:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

(إذا كان L تابعاً بشكل صريح للزمن ينبغي أن نضيف إلى الطرف الأيمن الحد $\frac{\partial L}{\partial t}$). بتعويض $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ وذلك حسب معادلة لاغرانج بـ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$

نحصل على:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)+\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j =$$

$$=\sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)$$

أو:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L\right)=0$$

ومن هنا نجد أن المقدار:

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L=\text{const}=E \qquad \textbf{(3.4)}$$

يبقى ثابتاً أثناء حركة المجموعة المغلقة، أي أن ذلك المقدار هو أحد تكاملات الحركة ويسمى **طاقة المجموعة**. إن جمع الطاقة ينتج مباشرة من الخاصة التجميعية لتابع لاغرانج L الذي يدخل بشكل خطي في عبارة الطاقة (3.4).

إن قانون انحفاظ الطاقة يبقى صحيحاً من أجل المجموعات الموجودة في حقل خارجي ثابت مستقل عن الزمن كما هو الحال عند المجموعات المغلقة. إذ أن تابع لاغرانج لتلك المجموعات لا يتعلق صراحة بالزمن، وبالتالي تبقى العلاقة (3.4) كما هي. تسمى المجموعات الميكانيكية التي تبقى طاقتها ثابتة **المجموعات المحافظة**.

في حالة المجموعة المغلقة (أو المجموعة الموجودة في حقل ثابت للقوى) يكون تابع لاغرانج من الشكل:

$$L=T(q,\dot{q})-U(q)$$

حيث T تابع لمربع السرعة (وحسب نظرية أولر) بالنسبة للتوابع المتجانسة "مجموع المشتقات الجزئية لتابع متجانس من الدرجة الثانية مضروباً بالمتحولات الموافقة يساوي ضعف قيمة ذلك التابع*"، إذن يكون:

$$\sum_j \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

وبوضع هذه القيمة في العلاقة (3.4) وتعويض L بما يساويه نجد:

$$E = T(q,\dot{q}) + U(q) \qquad (3.5)$$

تكتب الطاقة لمجموعة مادية في الإحداثيات الديكارتية بالشكل:

$$E = \sum_j \frac{m_i v^2}{2} + U\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n\right) \qquad (3.6)$$

بهذا الشكل، يمكن تمثيل طاقة المجموعة على شكل مجموع حدين مختلفين: الطاقة الحركية التابعة للسرعة والطاقة الكامنة التابعة فقط لإحداثيات الجسيمات المكونة للمجموعة.

3. 2. الاندفاع

نعتمد في استنتاج قانون انحفاظ آخر على خاصية تجانس المكان. فحسب هذه الخاصية لا تتغير الخواص الميكانيكية لمجموعة مغلقة عند انتقالها بشكل انسحابي كمجموعة متكاملة في الفراغ. لذا سنعطي لنقاط المجموعة انتقالاً انسحابياً لا متناهياً في الصغر $\vec{\varepsilon}$ ثم نوجد الشروط التي تنتج عن عدم تغير تابع لاغرانج $(\delta L = 0)$.

في هذا الانتقال الانسحابي تنزاح جميع النقاط بقدر $\vec{\varepsilon}$ بحيث يصبح

---

* بسهولة يمكن التحقق من نظرية أولر بوساطة التابع:

$$z = \alpha x^2 + 2bxy + cy^2$$

شعاع الموضع لكل نقطة:

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$$

ونتيجة لتغير شعاع الموضع مع ثبوت سرع نقاط المجموعة يعاني تابع لاغرانج تغيراً يساوي:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = \vec{\varepsilon} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

حيث $\delta \vec{r}_i = \vec{\varepsilon}$ يجري الجمع هنا بالنسبة لكامل نقاط المجموعة.

ونظراً لكون $\vec{\varepsilon} \neq 0$ يكون:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \qquad (3.7)$$

وحسب معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

يكون:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0$$

تعطي هذه العلاقة:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = const$$

وهذا يعني أن المقدار الشعاعي $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$ يبقى ثابتاً عند حركة المجموعة المغلقة. نرمز لهاذ المقدار بالشعاع $\vec{P}$ ونسميه **اندفاع المجموعة:**

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \vec{P} \qquad (3.8)$$

لكن بالرجوع إلى تابع لاغرانج لمجموعة مغلقة:

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - U\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2 ... \vec{r}_n\right)$$

والتعويض في (3.8) نحصل على:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P} \qquad (3.9)$$

تبين هذه العلاقة أن اندفاع المجموعة المادية يساوي مجموع اندفاعات الجسيمات التي تؤلف هذه المجموعة وذلك بصورة مستقلة عن $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ احتمال إهمال تبادل التأثير بينها.

إن قانون انحفاظ الاندفاع وفقاً للمحاور الإحداثية الثلاثة يبقى صحيحاً فقط عند انعدام حقل القوى الخارجي (المجموعة مغلقة). لكن مركبات الاندفاع وفقاً لمحور ما يمكن أن تبقى ثابتة بالرغم من وجود الحقل الخارجي. فمثلاً إذا وجدت المجموعة في حقل منتظم وموجه وفقاً للمحور z فإن مركبات الاندفاع $\vec{P}$ على المحورين x و y تبقى ثابتة، أي أن:

$$P_x = \sum_i m_i v_{ix} = const$$

$$P_y = \sum_i m_i v_{iy} = const$$

فهذه المجموعة المفروضة هي مجموعة مغلقة في المستوي xy وهي ليست كذلك في الاتجاه z لوجود قوى الحقل الخارجي المؤثرة وفقاً للمحور z.

من الجدير بالذكر إظهار المعنى الفيزيائي للعلاقة (3.7). فالمشتق:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

يمثل القوة $\vec{F}_i$ التي تؤثر في الجسيم i، وبالتالي تكتب العلاقة (3.7) بالشكل:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

أي أن محصلة القوى المؤثرة في نقاط المجموعة المغلقة تساوي الصفر. عندما تكون المجموعة مؤلفة من نقطتين ماديتين فقط يكون:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

تمثل هذه العلاقة قانون تساوي الفعل ورد الفعل.

لو وصفت الحركة بدلالة الإحداثيات المعممة q_j فإن مشتقات تابع لاغرانج بالنسبة للسرع المعممة:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad (3.10)$$

تسمى **الاندفاعات المعممة**. تنطبق في الإحداثيات الديكارتية الاندفاعات المعممة مع مركبات الشعاع $\vec{p}_i$. بينما في الحالة العامة تكون المقادير p_j هي توابع خطية متجانسة للسرعات المعممة $\dot{q}_j$ والتي لا تؤدي أبداً إلى جداء الكتلة في السرعة.

3. 3. عزم الاندفاع

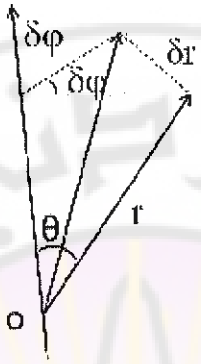
ننتقل إلى استنتاج قانون انحفاظ آخر ينبثق من خاصة تماثل المناحي في الفراغ. وتعني هذه الخاصة أن الخصائص الميكانيكية لمجموعة مغلقة لا تتغير لدى دوران المجموعة ككل في الفراغ. لهذا سندرس دوراناً صغيراً للمجموعة المادية ثم نوجد الشرط اللازم لعدم تغير تابع لاغرانج أثناء ذلك الدوران.

لنعط المجموعة المادية دوراناً صغيراً $\delta\varphi$ الذي يمثل بشعاع ينطبق على محور الدوران. وليكن مبدأ الإحداثيات o نقطة على محور الدوران. يتعرض شعاع الموضع $\vec{r}$ لكل نقطة من المجموعة للتغير $\delta\vec{r}$ الذي قيمته تساوي حسب الشكل (3.1).

$$|\delta\vec{r}| = r.\sin\theta.\delta\varphi$$

إن اتجاه الشعاع $\delta\vec{r}$ يكون عمودياً على المستوي المار من $\delta\vec{\varphi},\vec{r}$ (اتجاه $\delta\vec{\varphi}$ يحقق قاعدة البزال). لهذا نكتب:

$$\delta\vec{r}=\left(\delta\vec{\varphi}\wedge\vec{r}\right)$$



الشكل (3.1)

$$\delta\vec{r}=\left(\delta\vec{\varphi}\wedge\vec{r}\right) \qquad \textbf{(3.11)}$$

عند دوران المجموعة لا يتغير فقط شعاع الموضع وإنما تتغير سرعات جميع نقاطها بحيث تتحول كل الأشعة وفقاً لقانون واحد. لذا نكتب تغير السرعة بالصورة السابقة نفسها:

$$\delta\vec{v}=\left(\delta\vec{\varphi}\wedge\vec{v}\right) \qquad \textbf{(3.12)}$$

فإذا وضعنا شرط عدم تغير تابع لاغرانج أثناء دوران المجموعة، أي $\delta L=0$ نحصل على:

$$\delta L=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}\delta\vec{r}_i+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}_i}\delta\vec{v}_i\right)=0 \qquad \textbf{(3.13)}$$

لكن:

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}=\dot{\vec{p}}_i \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial\vec{v}_i}=\vec{p}_i \qquad \textbf{(3.14)}$$

نعوض (3.11) و(3.12) و(3.14) في العلاقة (3.13) فنجد:

$$\delta L=\sum_i\left[\dot{\vec{p}}_i\left(\delta\vec{\varphi}\wedge\vec{r}_i\right)+\vec{p}_i\left(\delta\varphi\wedge\vec{v}_i\right)\right]=0$$

وحسب خواص الجداء المختلط نستطيع أن نجري عملية التبديل الدوري بين المضاريب بحيث يصبح $\delta\vec{\varphi}$ خارج إشارة المجموع:

$$\delta L = \delta\vec{\varphi}\sum_i\left[\left(\vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i\right)+\left(\vec{v}_i \wedge \vec{p}_i\right)\right]=$$

أو

$$=\delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_i\left(\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i\right)=0$$

وبما أن $\delta\vec{\varphi}$ لا يساوي الصفر ينتج:

$$\frac{d}{dt}\sum_i\left(\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i\right)=0$$

وهذا يعني أن للشعاع:

$$\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

قيمة شعاعية ثابتة نرمز لها بـــ $\vec{M}$:

$$\vec{M}=\sum_i\left(\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i\right)=\text{const} \qquad (3.15)$$

وهكذا نكون قد توصلنا إلى النتيجة التالية: أثناء حركة المجموعة المغلقة يبقى الشعاع $\vec{M}$ ثابتاً ويسمى **عزم اندفاع المجموعة** (أو العزم).

تتضح الخاصة التجميعية للعزم مباشرة من الخاصة التجميعية للاندفاع وهي لا تتعلق بوجود قوى التأثير المتبادل بين جسيمات المجموعة أو بعدم وجودها.

وبهذا نأتي على إتمام دراسة التكاملات التجميعية للحركة. فلكل مجموعة مغلقة سبعة من تلك التكاملات: الطاقة وثلاث مركبات لشعاع الاندفاع وثلاث مركبات لشعاع العزم.

نرى من العلاقة (3.15) أن عزم الاندفاع يرتبط باختيار مبدأ الإحداثيات كونها تتضمن أشعة الموضع $\vec{r}_i$. فإذا كانت $\vec{r}_i$ و $\vec{r}_i'$ أشعة موضع

الجسم i بالنسبة إلى مبدأين للإحداثيات البعد بينهما ثابت b بحيث يكون:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{b}$$

ولهذا فإن عبارة العزم تأخذ الشكل:

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i) = \sum_i (\vec{r}_i' \wedge \vec{p}_i) + (\vec{b} \wedge \sum_i \vec{p}_i)$$

أو:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left(\vec{b} \wedge \vec{P}\right) \qquad (3.16)$$

تبين هذه العلاقة أنه إذا كانت المجموعة المادية ساكنة ككل $\left(\vec{P} = 0\right)$ فإن عزمها مستقل عن اختيار مبدأ الإحداثيات.

نوجد الآن العلاقة بين عزمي الاندفاع في جملتين عطاليتين مختلفتين k', k حيث k' تتحرك بالنسبة للجملة k بسرعة ثابتة $\vec{V}$ وسنقوم بالحساب في اللحظة التي ينطبق عندها مبدأ الجملتين المفروضتين وهذا صحيح لأن عزم الاندفاع ثابت في أية لحظة أثناء الحركة. عندئذ تكون أشعة الموضع في الجملتين واحدة للجسيم نفسه من المجموعة المادية، ترتبط سرعة الجسيم في الجملتين المفروضتين بالعلاقة:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$

لهذا يكون لدينا:

$$\vec{M} = \sum m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i) =$$
$$= \sum_i m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i') + \sum m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{V})$$

يمثل المجموع الأول من الطرف الثاني العزم $\vec{M}'$ في الجملة k' (لأنه اخترنا اللحظة التي يكون فيها $\vec{r}_i = \vec{r}_i'$). أما في المجموع الثاني من الطرف نفسه فسندخل شعاع موضع مركز العطالة $\vec{R}$ فتصبح العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \mu\left(\vec{R} \wedge \vec{V}\right) \qquad (3.17)$$

تعبر هذه العلاقة عن تحويلات عزم الاندفاع عند الانتقال من جملة عطالية إلى جملة عطالية أخرى.

بصورة مماثلة يمكن كتابة علاقة الاندفاع والطاقة الكلية للمجموعة المادية بالنسبة للجملتين k و k':

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i' + \mu\vec{V}$$
$$\vec{P} = \vec{P}' + \mu\vec{V} \qquad (3.18)$$

وكذلك:

$$E = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^2 + U = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{v}_i' + \vec{V})^2 + U$$

$$E = E' + \vec{V}.\vec{P}' + \frac{\mu V^2}{2} \qquad (3.19)$$

إذا كانت المجموعة الميكانيكية ساكنة ككل في الجملة k' $\left(\vec{P}' = 0\right)$، فإن $\vec{V}$ يمثل سرعة مركز عطالة المجموعة، وبالتالي $\overrightarrow{\mu V}$ يمثل الاندفاع الكلي $\vec{P}$ (بالنسبة لـــk). عندئذٍ يكون (3.17)-(3.18):

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left(\vec{R} \wedge \vec{P}\right) \qquad (3.20)$$

أي أن عزم الاندفاع $\vec{M}$ لمجموعة ميكانيكية يتكون من عزمين: "العزم الذاتي" بالنسبة لجملة الإحداثيات التي تكون فيها المجموعة ساكنة وعزم اندفاع المجموعة ككل $\left(\vec{R} \wedge \vec{P}\right)$ الذي يرتبط بحركتها كلية.

في حالة المجموعة المغلقة نستطيع أن نشتق بالنسبة للزمن عبارة عزم الاندفاع (3.15).

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i$$

أو:

$$\dot{\vec{M}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{P}} \quad \text{لأن} \quad \left(\vec{v}_i \wedge \vec{v}\right) = 0$$

لكن تغير الاندفاع $\dot{\vec{P}}_i$ يساوي مجموع القوى الخارجية والداخلية المؤثرة في النقطة i، لهذا نكتب:

$$\dot{\vec{M}} = \sum_i \left[\vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{ex} + \vec{F}_i^{in})\right]$$

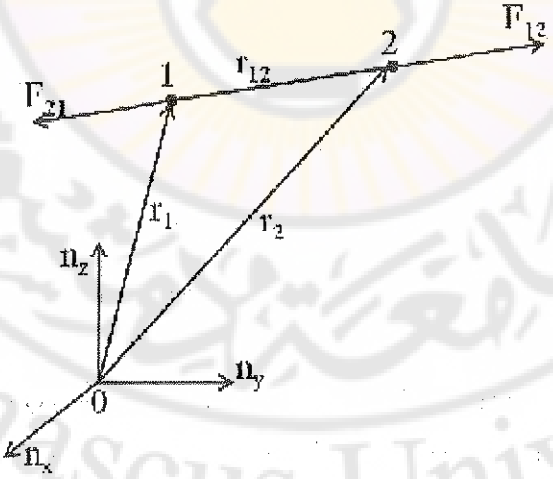
أو:

$$\dot{\vec{M}} = \sum_i \vec{K}_i^{ex} + \sum \vec{K}_i^{in} \qquad (3.21)$$

ويبرهن بسهولة أن مجموع عزوم القوى الداخلية يساوي الصفر. وبالفعل:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i^{in} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i \wedge \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji}\right] = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n}\left[\left(\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}\right) + \left(\vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij}\right)\right]$$

إن كل حد من المجموع الأخير يساوي الصفر في أية جملة للإحداثيات الشكل (3.2).



الشكل (3.2)

$$\left(\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}\right)+\left(\vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij}\right)=\left[\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\vec{F}_{ji}\right]=0$$

وذلك لانطباق شعاع القوة $\vec{F}_{ji}$ على الشعاع $\vec{r}_{ji}=\vec{r}_i-\vec{r}_j$.

وهكذا نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i^{in}=0$$

وبالتالي تصبح العلاقة (3.21) على الشكل التالي:

$$\dot{\vec{M}}=\sum_i \vec{K}_i^{ex} \qquad (3.22)$$

أي أن مشتق عزم اندفاع مجموعة ما يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة في نقاط المجموعة (قانون تغير عزم المجموعة).

على الرغم من أن قانون انحفاظ جميع المركبات الثلاث للعزم (بالنسبة لنقطة اختيارية لمبدأ الإحداثيات) يتحقق فقط من أجل المجموعة المغلقة، فعند شروط معينة يمكن لذلك القانون أن يبقى صحيحاً من أجل مجموعات موجودة في حقل خارجي. فإذا كان مسقط محصلة عزوم القوى الخارجية على محور مفروض في أية لحظة مساوياً الصفر فإن مسقط عزم المجموعة على هذا المحور يبقى ثابتاً. فمثلاً في حالة:

$$K_z=\sum_i\left(\vec{r}_i \wedge \vec{F}\right)_z=0$$

يكون:

$$M_z=\sum_i m_i\left(\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i\right)_z=\text{const}$$

والجدير بالذكر أن مسقط عزم القوة يمكن أن ينعدم دون انعدام القوة نفسها. فعند وجود المجموعة المادية في حقل قوى خارجي ثابت الاتجاه وليكن اتجاه المحور z، ينتج حسب تعريف العزم أن لتلك القوى المفروضة عزماً عمودياً على الاتجاه المفروض – أي في المستوي xy. إذن:

$$K_x \neq 0 \quad , \quad K_y \neq 0 \quad , \quad K_z = 0$$

وبالتالي يكون:

$$M_z = const$$

وهذا يدل على أن مسقط عزم الاندفاع باتجاه الحقل الخارجي يبقى ثابتاً وأن الخواص الميكانيكية للمجموعة لا تتغير عند دورانها وفقاً لأي محور يوازي حقل القوى الخارجية المفروض.

إن أكثر الحالات أهمية هي وجود المجموعة في حقل مركزي متناظر تكون الطاقة الكامنة تابعة فقط لأبعاد نقاط المجموعة عن نقطة معينة في الفراغ (مركز الحقل). عند الحركة في هذا الحقل تبقى مساقط عزم الاندفاع على أي محور يمر من المركز ثابتة (لأن عزوم القوى المؤثرة في نقاط المجموعة بالنسبة لمركز الحقل تساوي الصفر). وبتعبير آخر فإن شعاع العزم $\vec{M}$ يبقى ثابتاً بالنسبة لمركز الحقل الذي نعده مبدأً للإحداثيات.

وكذلك يمكن الإشارة إلى أنه يمكن إيجاد مسقط عزم الاندفاع على محور ما (وليكن المحور z) وذلك بمفاضلة تابع لاغرانج وفقاً للعلاقة:

$$M_z = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \tag{3.23}$$

حيث φ زاوية دوران المجموعة حول المحور z. يمكن التأكد من صحة هذه العلاقة بحساب مباشر:

إن مسقط العزم على المحور z هو:

$$M_z = \sum_i m_i \left(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i \right) \tag{3.24}$$

وباستخدام الإحداثيات الاسطوانية z, φ, ρ علماً بأن:

$$x_i = \rho_i \cos\varphi_i \quad , \quad y_i = \rho_i \sin\varphi_i$$

نحصل بعد التعويض في (3.24) على:

$$M_z = \sum_i m_i \rho_i^2 \dot{\varphi}_i \qquad (3.25)$$

ومن جهة أخرى فإن تابع لاغرانج بدلالة تلك المتحولات يأخذ الشكل التالي:

$$L = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) - U$$

فإذا حسبنا $\partial L / \partial \dot{\varphi}_i$ نجد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = m_i \rho_i^2 \dot{\varphi}_i$$

إذن:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \sum_i m_i \rho_i^2 \dot{\varphi}_i$$

وهذا يساوي m_z (3.25) وبذلك نكون قد أثبتنا صحة العلاقة (3.23).

مثال 1:

أوجد تكامل الحركة (الطاقة) لنواس بسيط كتلته m وطول خيط تعليقه ℓ. استنتج تغير زاوية انحراف النواس مع الزمن t.

الحل:

وجدنا سابقاً أن الطاقة الحركية والكامنة للنواس البسيط هما على الترتيب:

$$U = mg\ell(1 - \cos\varphi) \quad , \quad T = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

حيث φ زاوية ميل خيط التعليق عن الشاقول.

إن الطاقة الكلية للنواس هي:

$$E = T + U = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 + mg\ell(1 - \cos\varphi)$$

تتعين E من الشروط الابتدائية: فإذا كانت زاوية انحراف النواس في لحظة البدء هي φ_0 ثم تركناه يهتز بدون سرعة ابتدائية، فإن عبارة الطاقة

الكلية تكتب بالشكل:

$$E=\frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2+mg\ell\left(1-\cos\varphi\right)=mg\ell\left(1-\cos\varphi_0\right)$$

وبالتالي يكون:

$$E=mg\ell\left(\cos\varphi-\cos\varphi_0\right)=\frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2$$

بفصل المتحولات t,φ نحصل على العلاقة:

$$t=-\sqrt{\ell/2g}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$

وضعنا إشارة الناقص أمام الجذر لأنه في بدء الحركة تتناقص الزاوية φ. من هذه العلاقة نجد أن القانون الذي يخضع له اهتزاز النواس يتوقف على النسبة $\sqrt{\ell/2g}$ وهو مستقل عن كتلة النواس.

مثال 2:

مجموعة مكونة من n نقطة مادية تتحرك في حقل الثقالة المتجانس ذي الشدة $\vec{g}$. فإذا كانت القوى الداخلية للمجموعة هي قوى تجاذب تتناسب طرداً مع كل من البعد بين النقاط وجداء كتل النقاط الموافقة وثابت التناسب هو α، أوجد قانون حركة مركز عطالة المجموعة المفروضة بالنسبة لجملة عطالية S، ثم اكتب المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة بالنسبة لجملة متماسكة S' مع مركز العطالة واستنتج قانون حركة المجموعة بالنسبة لتلك الجملة. أثبت أن عزم الاندفاع يكون غير ثابت في الجملة العطالية S وهو ثابت في الجملة اللاعطالية S'.

الحل:

لإيجاد قانون حركة مركز عطالة المجموعة نكتب (حسب التعريف):

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}{\mu} = \frac{\sum_i \vec{F}_i^{ex}}{\mu} = \frac{1}{\mu}\sum_i m_i \vec{g} = \vec{g} \qquad (1)$$

وهذا يعني أن مركز العطالة يتحرك بتسارع ثابت هو $\vec{g}$. بتكامل المعادلة (1) مرتين نحصل على قانون حركة مركز العطالة $\vec{R}(t)$:

$$\vec{R} = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{V}_o t + \vec{R}_o$$

حيث تتعين ثوابت التكامل $\vec{R}_o$ و $\vec{V}_o$ من الشروط الابتدائية. تبين العلاقة (1) أن الجملة S' المتماسكة مع مركز العطالة هي جملة لا عطالية كونها جملة متسارعة. وأن مسار مركز عطالة المجموعة يكون قطعاً مكافئاً.

إن معادلة حركة نقاط المجموعة المفروضة بالنسبة للجملة العطالية S هي:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{ex} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (2)$$

$\vec{r}_i$ شعاع موضع النقطة i في الجملة S. $\vec{F}_{ji} = \alpha m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ قوة التأثير المتبادل بين i و j.

من أجل كتابة معادلة حركة نقاط المجموعة بالنسبة للجملة اللاعطالية S' ينبغي إضافة قوة العطالة التي تساوي:

$$\vec{F}_i^* = -m_i \vec{g} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

وعليه فإن معادلة حركة نقاط المجموعة في الجملة S' هي:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i' = \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_i m_j (\vec{r}_j' - \vec{r}_i') + m_i \vec{g} - m_i \vec{g}$$

حيث $\vec{r}'$ شعاع الموضع في الجملة S'.

$$\ddot{\vec{r}}_i' = \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_j \left(\vec{r}_j' - \vec{r}_i' \right) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

يمكن كتابة العلاقة (3) بصورة أبسط إذا لاحظنا أن:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_j \left(\vec{r}_j' - \vec{r}_i' \right) = -\mu \vec{r}_i' \tag{4}$$

مع اختيار مركز العطالة هو مبدأ الجملة S'.

نبدل (4) في (3) فنحصل على المعادلة التفاضلية لحركة نقاط المجموعة المفروضة في الجملة S':

$$\ddot{\vec{r}}_i' = -\alpha \mu \vec{r}_i' \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

تبين هذه العلاقة أن كل نقطة من المجموعة تتحرك وكأن قوة جاذبة [illegible]ها من جهة نقطة موجودة في مركز العطالة ولها كتلة مساوية كتلة المجموعة μ.

الحل العام للعلاقات (5) في الإحداثيات الديكارتية يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} x_i' &= a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \\ y_i' &= b_i \cos(\omega t + \beta_i) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \\ z_i' &= c_i \cos(\omega t + \lambda_i) \end{aligned} \tag{6}$$

من العلاقات (6) نرى أن نقاط المجموعة بالنسبة للجملة S' تتحرك على قطوع ناقصة لها مركز عام هو مركز العطالة ودور الحركة متماثل لكل النقاط ويساوي $2\pi / (\alpha\mu)^{1/2}$ (انظر العلاقات 5 و6 حيث $\alpha\mu = \omega^2$).

أما قانون تغير العزم في الجملة العطالية S فهو:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ex} = \mu \vec{R} \wedge \vec{g} \neq 0 \tag{7}$$

أي أن عزم الاندفاع لا يكون ثابتاً في الجملة S.

يمكن إيجاد تغير العزم في الجملة اللاعطالية S' من العلاقة (3.20) التي تربط بين العزمين $\vec{M}$ و $\vec{M}'$ في الجملتين S و S' على الترتيب:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left(\vec{R} \wedge \vec{P}\right) \tag{8}$$

نشتق العلاقة (8) بالنسبة للزمن فنجد:

$$\dot{\vec{M}} = \dot{\vec{M}}' + \left(\dot{\vec{R}} \wedge \vec{P}\right) + \left(\vec{R} \wedge \dot{\vec{P}}\right) = \vec{K}^{ex} \tag{9}$$

حيث $\vec{K}^{ex} = \dot{\vec{M}}$ محصلة عزوم القوى الخارجية المؤثرة في المجموعة، لكن $\dot{\vec{R}} \wedge \vec{P} = 0$، إذن يكون:

$$\dot{\vec{M}}' + \vec{R} \wedge \vec{F}^{ex} = \vec{K}^{ex} \tag{10}$$

حيث:

$$\vec{K}^{ex} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}^{ex} = \sum_i \left(\vec{r}_i' + \vec{R}\right) \wedge \vec{F}_i^{ex}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i^{ex} + \vec{R} \wedge \sum_i \vec{F}_i^{ex} = \left(\vec{K}^{ex}\right)' + \vec{R} \wedge \vec{F}^{ex} \tag{11}$$

نبدل (11) في (10) فنحصل على عبارة تغير العزم في الجملة S'.

$$\dot{\vec{M}}' = \left(\vec{K}^{ex}\right)' = \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{g} \tag{12}$$

$$\dot{\vec{M}}' = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) \wedge \vec{g} = 0$$

أي أن عزم الاندفاع في الجملة اللاعطالية S' يكون محافظاً وهو المطلوب.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1) أوجد دور حركة نقطة مادية تتحرك على منحني السيكلوئيد في حقل الجاذبية وذلك بالاعتماد على الطاقة الكلية E.

2) ثقل A وزنه P_1 يقوم باهتزاز فوق نابض. يعلق في طرفه الآخر الثقل B وزنه P_2 مثبت على مستو أفقي. عيّن قانون اهتزاز الثقل A. علماً بأن قوة رد الفعل الناظمية للمستوي الأفقي هي: $N = P_1 + P_2 + c\cos\omega t$. في لحظة البدء يكون النابض مضغوطاً عن وضع توازن الثقل A بمقدار x ثم يترك بدون سرعة ابتدائية. كتلة النابض مهملة.

3) قرص يدور حول محور ثابت، ويقع مركز كتلة القرص على هذا المحور. بين كيف يتغير الاندفاع الكلي للقرص عندما تتضاعف السرعة الزاوية للقرص.

4) نقطة مادية كتلتها m تتحرك على دائرة بسرعة منتظمة v. عين دفع القوة المحركة للنقطة لدى انتقالها على ربع الدائرة من النقطة A إلى B.

5) ثقل يتحرك للأسفل على مستو مائل خشن يصنع مع الأفق الزاوية α. فإذا كان معامل الاحتكاك f والسرعة الابتدائية للثقل v، أوجد الفترة الزمنية اللازمة لكي تتضاعف فيها سرعة الثقل.

6) أوجد المركبات الديكارتية والقيمة المطلقة لعزم اندفاع جسيم مادي:

أ- في الإحداثيات الاسطوانية z, φ, ρ.

ب–في الإحداثيات الكروية φ,θ,r

7) أوجد قانون ودور اهتزاز نواس بسيط طول خيط تعليقه ℓ وثقله p وزاوية انحرافه عن الشاقول φ و $\dot{\varphi}_0$ السرعة الزاوية الابتدائية للنواس.

8) مجموعتان مغلقتان، كل منهما تتألف من n نقطة مادية تتبادل التأثير فيما بينها. فإذا كانت القوى الداخلية للمجموعة الأولى قوى تجاذب تتناسب مع البعد بين نقاطها وكذلك مع جداء كتل تلك النقاط وثابت التناسب α، بينما تتبادل نقاط المجموعة الثانية التأثير حسب قانون التجاذب الكوني، قارن بين تغير عزم الاندفاع لكل من نقاط المجموعتين.

Damascus University

الفصل الرابع

4. الحركة في الحقل المركزي

4. 1. الحركة وحيدة البعد

تكون الحركة وحيدة البعد إذا كان للمجموعة المتحركة درجة حرية واحدة فقط أو إحداثي معمم واحد. فإذا اخترنا الاحداثي المعمم x فإن تابع لاغرانج لجسيم مادي كتلته m يكتب بالشكل:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) \qquad (4.1)$$

حيث $U(x)$ تابع الطاقة الكامنة للجسيم.

وإذا كتبنا معادلة لاغرانج نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية للمتحول x التي عند مكاملتها نوجد قانون الحركة الذي يربط الإحداثي x بالزمن t. لكن إذا انطلقنا مباشرة من قانون انحفاظ الطاقة:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{ثابت} \qquad (4.2)$$

نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى، ونكاملها بطريقة فصل المتحولات فنجد:

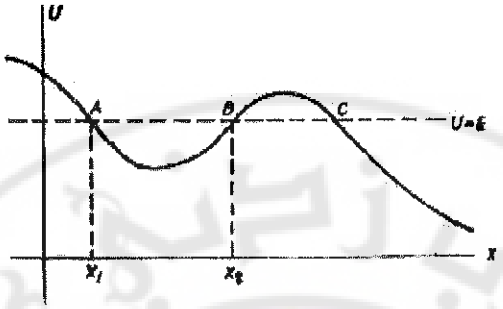
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left[E - U(x)\right]}} + \text{const} \qquad (4.3)$$

حيث ثوابت الحركة هي الطاقة الكلية E وثابت التكامل const. إن الفرق $E - U$ يمثل الطاقة الحركية وهو مقدار موجب وهذا يعني أن الحركة

تتم فقط في المجال من الفراغ حيث $E > U(x)$.

لنفرض مثلاً أن تابع الطاقة الكامنة $U(x)$ لجسيم ما يأخذ الشكل (4.1).



الشكل (4.1)

أما طاقته الكلية فتتمثل بمستقيم أفقي يوافق قيمة مفروضة لتلك الطاقة. فهنا يمكن أن نعين مباشرة مجال الحركة المسموح به. من الشكل نرى أن الحركة محققة $(E > U)$ في المجال B,A وهي محققة على يمين النقطة C. تعين النقاط التي يكون عندها:

$$E = U(x) \qquad (4.4)$$

حدود الحركة التي تعد بمثابة مواقف للحركة تنعدم عندها السرعة. فإذا كان مجال الحركة محدداً بين نقطتين فالحركة عندئذ تحدث في مجال محدود من الفراغ ويكون لها نهاية. أما إذا كان مجال الحركة غير محدد أو محدوداً من جهة واحدة فعندئذ ليس للحركة نهاية والجسيم يبتعد إلى اللانهاية. فالحركة المحدودة ذات البعد الواحد هي حركة جسيم يقوم بحركة دورية تعيد نفسها بين حدين. إن زمن الحركة من x_1 إلى x_2 يساوي زمن الحركة العكسية من x_2 إلى x_1، لهذا فإن دور الاهتزازة T –أي الزمن اللازم كي يجتاز الجسيم المسافة بين x_1 وx_2 وبالعكس يساوي ضعف الزمن اللازم لقطع المسار x_1x_2. وحسب العلاقة (4.3) يكون:

$$T=\sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \qquad (4.5)$$

مثال: عيّن دور اهتزاز نواس رياضي، طول خيط تعليقه ℓ وكتلته النقطية m وذلك بدلالة سعة اهتزازه.

الحل: وجدنا في نهاية الفصل السابق (بالاعتماد على الطاقة الكلية E) أن:

$$dt=\sqrt{\ell/2g}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$

ونحصل على دور النواس كأربعة أمثال الزمن اللازم لانتقال النواس في المجال الزاوي من $\varphi=0$ إلى φ_0 (لأن الزمن اللازم للانتقال في هذا المجال يمثل ربع الدور). إذن:

$$T=4\sqrt{\ell/2g}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$

وهذا يساوي:

$$T=2\sqrt{\ell/g}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2)-\sin^2(\varphi/2)}}$$

$$T=2\sqrt{\ell/g}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}/\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}}$$

وبفرض أن:

$$\sin\theta=\sin\frac{\varphi}{2}/\sin\frac{\varphi_0}{2}$$

يأخذ التكامل السابق الشكل التالي:

$$T=4\sqrt{\ell/g}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\theta}}$$

حيث $K = \sin\frac{\varphi_0}{2}$

وعندما تكون الاهتزازات صغيرة:

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} << 1$$

يمكن نشر التكامل:

$$L(K) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2}K^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}K^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}K^6 + \ldots\right)$$

فإذا عوضنا:

$$K \approx \frac{\varphi_0}{2}$$

فإننا نحصل على:

$$L = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \ldots\right)$$

وأخيراً فإن عبارة الدور تصبح:

$$T = 2\pi\sqrt{\ell / g}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \ldots\right)$$

يعطي الحد الأول من هذا المنشور العلاقة المعروفة لدور النواس.

4. 2. الحركة في الحقل المركزي

من المعلوم أن دراسة حركة جسمين تؤدي إلى دراسة حركة جسيم واحد في حقل خارجي تكون فيه الطاقة الكامنة تابعاً فقط لبعد الجسيم عن نقطة معينة وثابتة (راجع الميكانيك الفيزيائي 2، الفصل الرابع). يسمى هذا الحقل

الحقل المركزي. إن القوة:

$$F = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

المؤثرة في الجسيم في هذه الحالة تكون بالقيمة المطلقة تابعاً للبعد r واتجاهها في كل نقطة ينطبق على شعاع الموضع $\vec{r}$.

وجدنا في ختام الفصل السابق أنه عند حركة مجموعة في حقل مركزي فإن عزم اندفاعها بالنسبة لمركز الحقل يبقى ثابتاً. فمن اجل جسيم واحد يكون:

$$\vec{M} = (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \text{ثابـــت}$$

وبما أن الأشعة $\vec{M}$ و $\vec{r}$ متعامدة، فثبات $\vec{M}$ يعني أنه عند حركة الجسيم فإن شعاع الموضع يبقى دائماً في مستو واحد عمودي على $\vec{M}$.

وهكذا فإن مسار الحركة لجسيم في حقل مركزي يقع بأكمله دوماً في مستو واحد. فإذا استخدمنا الإحداثيات القطبية r و φ نكتب تابع لاغرانج لذلك الجسيم بالشكل التالي:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r) \qquad (4.6)$$

إن هذه العلاقة لا تحوي بشكل صريح الإحداثي φ. وكل إحداثي معمم q_j لا يدخل بشكل صريح في تابع لاغرانج يسمى **الإحداثي الدوري** (المستتر). وعندئذ نكتب معادلة لاغرانج بالنسبة للإحداثي q_j بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (4.7)$$

ويكون الاندفاع الموافق للإحداثي q_j:

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

تكاملاً للحركة.

يؤدي وجود الإحداثيات الدورية إلى تبسيط حقيقي لمسألة تكامل

معادلات الحركة. ففي حالة حركة جسيم في حقل مركزي يكون الاندفاع المعمم للحركة:

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \qquad (4.8)$$

مطابقاً تماماً للعزم $M_z = M$ (انظر العلاقة (3.23). وهكذا نرى أنه قد عدنا إلى قانون انحفاظ العزم:

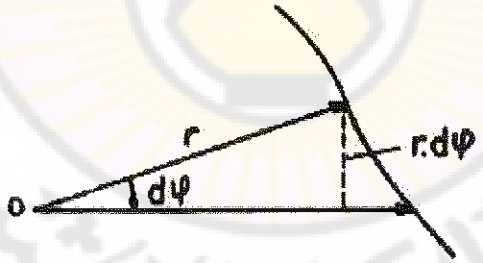
$$M = mr^2\dot{\varphi} = const \qquad (4.9)$$

يمكن هندسياً استنتاج عبارة عزم الاندفاع في الإحداثيات القطبية. فالمقدار:

$$\frac{1}{2}\vec{r}.\vec{r}d\varphi$$

يمثل مساحة القطاع المحصور بين شعاعي الموضع لنقطتين قريبتين من بعضهما قرباً لا متناهياً في الصغر مع عنصر قوس من المسار (الشكل (4.2)). فإذا رمزنا لمساحة ذلك القطاع بـdf عندئذ نستطيع أن نكتب قيمة عزم الجسيم بالشكل:

$$M = 2m\dot{f} \qquad (4.10)$$



الشكل (4.2)

يسمى المشتق $\dot{f}$ **السرعة السطحية** (القطاعية). لهذا فإن ثبات العزم يعني أن السرعة السطحية ثابتة – أي أن شعاع موضع النقطة المتحركة يرسم مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية (**القانون الثاني لكبلر**).

يمكن الحصول بسهولة على الحل الكامل لمسألة حركة جسيم في حقل مركزي وذلك انطلاقاً من قوانين انحفاظ الطاقة والعزم دون التعرض لكتابة معادلات الحركة بالذات:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) \qquad (4.11)$$

نعوض الآن $\dot{\varphi}$ بدلالة العزم M (4.9) فنجد:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \qquad (4.12)$$

من هذه العلاقة نجد أن:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \qquad (4.13)$$

وبعد فصل المتحولات نكامل، فنحصل على:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const \qquad (4.14)$$

ومن العلاقة (4.9) يكون:

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$$

نعوض dt بدلالة $d\varphi$ في العلاقة (4.13) ثم نكامل فنجد:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + const \qquad (4.15)$$

تعطي العلاقات (4.14) و(4.15) الحل العام للمسألة المفروضة. فالعلاقة (4.14) تعين بعد الجسيم المتحرك r عن المركز كتابع للزمن وكذلك فإن المعادلة (4.15) تحدد العلاقة بين r و φ أي أنها تعطي معادلة المسار.

تبين العلاقة (4.12) أنه يمكن عد النصف القطري من الحركة (الحركة بدلالة r) كحركة ذات بعد واحد في حقل خارجي تكون فيه الطاقة الكامنة الفعالة مساوية:

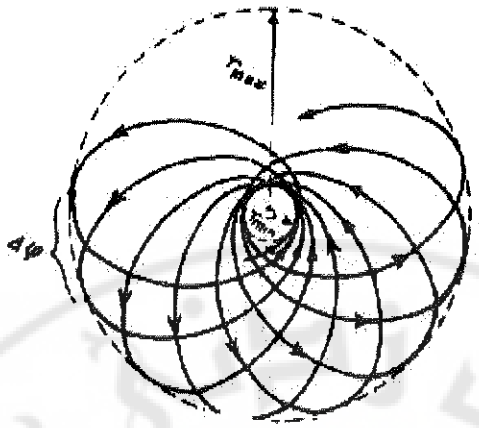
$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad \textbf{(4.16)}$$

يسمى المقدار $\frac{M^2}{2mr^2}$ الطاقة النابذة. ونحصل على قيم r التي تعين حدود مجال الحركة وذلك بالنسبة للبعد عن المركز من العلاقة:

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \qquad \textbf{(4.17)}$$

إن تحقيق العلاقة (4.17) يتم عندما تنعدم السرعة $\dot{r}$ وهذا لا يعني أن الجسيم ساكن (وذلك كما في الحركة الحقيقية ذات البعد الواحد)، لأن السرعة الزاوية $\dot{\varphi}$ لا تساوي الصفر. وتعني المساواة $\dot{r} = 0$ أن المسار عند تلك النقطة يمر بانعطاف وهي النقطة التي ينتقل عندها التابع r(t) من تزايد إلى تناقص أو العكس.

فإذا كان المجال المسموح به لتغير r محدوداً فقط بشرط واحد $r \geq r_{min}$ فإن حركة الجسيم تسمى الحركة **اللامحدودة** ومسارها يقترب نحو المركز من اللانهاية ويبتعد إلى اللانهاية. أما إذا كان مجال تغير r محدوداً من طرفين r_{min} و r_{max} فتكون **الحركة محدودة** ويقع المسار بأكمله ضمن حلقة محدودة بالدوائر $r = r_{max}$ و $r = r_{min}$. لكن هذا لا يعني أن المسار سيكون حتماً منحنياً مغلقاً. فالفترة الزمنية التي خلالها يتغير r من r_{max} إلى r_{min} ومن ثم إلى r_{max} يدور شعاع الموضع $\vec{r}$ زاوية قدرها $\Delta\varphi$ وتساوي حسب العلاقة (4.15):



الشكل (4.3)

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U]-\frac{M^2}{r^2}}} \qquad (4.18)$$

إن شرط انغلاق المسار هو أن تكون الزاوية $\Delta\varphi$ مساوية كسراً عادياً من 2π، أي تساوي $2\pi m/n$، حيث n,m أعداداً صحيحة. فبعد أن يتكرر هذا الدور من الزمن n مرة فإن شعاع الموضع يكون قد أنجز m دورة كاملة ويعود لينطبق على وضعه الأولي، أي أن المسار يصبح مغلقاً.

في الحالة العامة ومن أجل تابع كيفي $U(r)$ لا تكون $\Delta\varphi$ كسراً عادياً من 2π لهذا تكون مسارات الحركة المحدودة غير مغلقة. والجسيم يمر عدداً لا نهائياً من المرات على أبعاد أعظمية وأصغرية من المركز الشكل (4.3)، وخلال زمن لا نهائي سيشغل المسار كل الحلقة المحدودة بالدائرتين r_{min} وr_{max}.

يوجد نوعان فقط من الحقول المركزية تكون فيها مسارات الحركة المحدودة مغلقة، وفي هذه الحقول تتناسب الطاقة الكامنة للجسيم مع $\frac{1}{r}$ أو مع

r^2. سنتناول النوع الأول $\left(U \sim \frac{1}{r}\right)$ في الفقرة التالية. أما النوع الثاني فيوافق ما يسمى بالهزاز الفراغي الذي سوف ندرسه مباشرة في ختام هذه الفقرة.

في نقطة الانعطاف يغير الجذر التربيعي من العلاقة (4.13) إشارته، فلو حسبنا الزاوية φ بدءاً من اتجاه شعاع الموضع المار من نقطة الانعطاف، فإن جزأي المسار اللذين في جهتين مختلفتين من نقطة الانعطاف يتميزان فقط عن بعضهما بإشارة الزاوية φ عند قيم متماثلة لـr وهذا يعني أن المسار متناظر بالنسبة للاتجاه المشار إليه.

إن وجود الطاقة النابذة (أثناء الحركة مع $M \neq 0$) التي تنتهي إلى ∞ عندما $r \to 0$ يؤدي عادة إلى عدم إمكان سقوط الجسيم المتحرك في مركز الحقل حتى ولو كان الحقل يتصف بطابع الجاذبية وبالتالي فإن سقوط الجسيم في مركز الحقل يمكن أن يتم عندما تنتهي الطاقة الكامنة بسرعة كبيرة إلى $-\infty$ من أجل $r \to 0$. فمن المتراجحة:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

أو

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} < Er^2$$

فعندما تنتهي r إلى الصفر ينتج الشرط التالي:

$$r^2 U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{M^2}{2m} \qquad \textbf{(4.19)}$$

وهذا يتطلب من التابع $U(r)$ أن ينتهي إلى $-\infty$، وعندئذ إما أن يكون U من الشكل $-\alpha / r^2$ مع $\alpha > M^2 / 2m$ أو يتناسب مع $-1/r^n$ من أجل $n>2$.

والخلاصة أن الحركة في الحقل المركزي تحدث في مستو ثابت يمر بمركز القوى ويرسم شعاع الموضع للنقطة مساحات متساوية خلال فترات

زمنية متساوية والزاوية φ تتغير مع الزمن دوماً باتجاه واحد، ومسار الحركة متناظر بالنسبة إلى المستقيمات المارة من مركز القوى ونقاط انعطاف المسار أو النقاط التي يمر فيها شعاع الموضع بقيمة حدية. في نقاط الانعطاف يكون $\dot{r}=0$ وعلى طرفي تلك النقاط تتغير إشارة $\dot{r}$، أي تتغير إشارة العبارة التالية:

$$\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U_{eff}\right)}$$

التي تحدد إشارة التكاملات (4.14) و(4.15). فعند حساب φ بدءاً من أحد المحاور نرى أن أجزاء المسار الموجودة في جهات مختلفة من هذا المحور تختلف عن بعضها بإشارة الزاوية φ (وذلك عند قيم متساوية لـr). تدعو خاصة التناظر هذه إلى بناء كل المسار وذلك بمعرفة فقط جزء من المسار بين محورين. يشكل كل ما ذكر ميزات الحركة لجسيم في حقل مركزي متناظر.

بمعرفة التابع $U(r)$ والعودة إلى التكاملين φ وt (العلاقتين (4.14) و(4.15)) نستطيع الحصول على الحل العام لحركة جسيم في الحقل المركزي. لكن قبل إيجاد ذلك الحل العام من المفيد أن نجري التحليل الكيفي له. فيمكن تعيين مجال تغير الإحداثي r للنقطة المتحركة وذلك عندما ترسم المنحني $U_{eff}(r)$. وفعلاً بما أن t,v,r مقادير حقيقية في الميكانيك الكلاسيكي فينبغي أن يكون المقدار $\dot{r}^2$ موجباً. فمن العلاقة (4.12) تنتج المتراجحة:

$$E \geq U_{eff}(r) \qquad \textbf{(4.20)}$$

التي تعين مجال تغير r، بينما تحدد المعادلة:

$$E = U_{eff}(r) \qquad \textbf{(4.21)}$$

حدود المجال المسموح للحركة.

فمثلاً إذا تحركت نقطة مادية في الحقل الكموني:

$$U=\frac{\alpha}{2}r^2 \quad , \quad (\alpha>0)$$

فإن:

$$U_{eff} = \frac{\alpha}{2} r^2 + \frac{M^2}{2mr^2}$$

وفي هذه الحالة تعطينا المعادلة $E = U_{eff}$ نقطتي انعطاف:

$$r^2 = \frac{1}{\alpha}\left[E \pm \left(E^2 - \frac{\alpha}{m} M^2\right)^{1/2}\right]$$

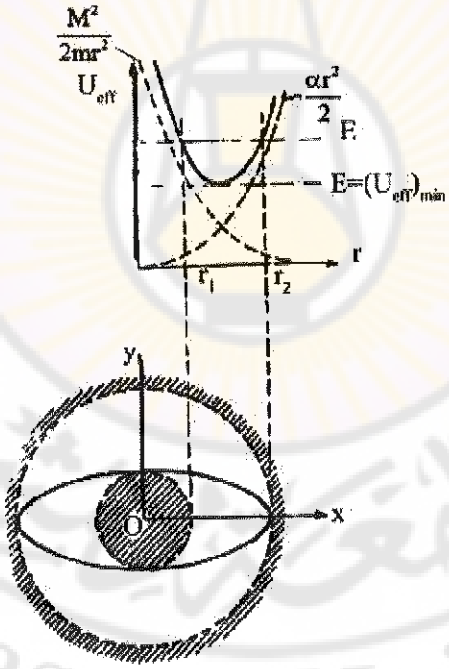
وتعين المتراجحة $E \geq U_{eff}$ المجال:

$$r_1 \leq r \leq r_2$$

وإذا كانت:

$$E = \left(U_{eff}\right)_{min} = M\sqrt{\alpha / m}$$

فإن النقطة تتحرك على دائرة نصف قطرها:



الشكل (4.4)

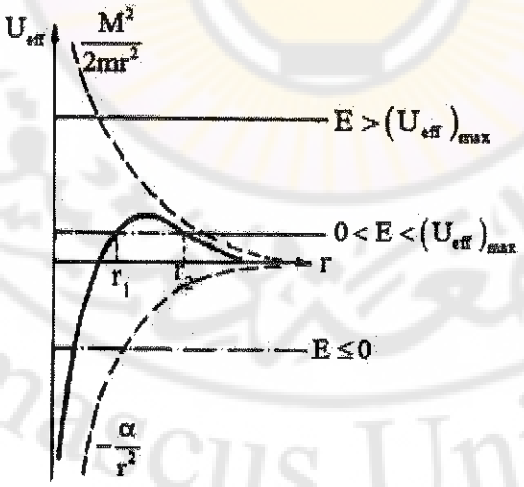
$$r = r_1 = r_2 = \sqrt{E / \alpha}$$

أما مسار النقطة في الحالة العامة عندما $E > (U_{eff})_{min}$ فيعطى بالعلاقة:

$$\varphi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{M}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff})}^{1/2}}$$

وهذه تمثل كما هو معروف قطعاً ناقصاً مركزه مركز القوة ويمس مرتين الدوائر التي أنصاف أقطارها r_1 وr_2 على الترتيب الشكل (4.4).

يدعو تحليل المنحني $U_{eff}(r)$ إلى إيجاد شروط سقوط الجسيم في مركز حقل القوى. ليكن مثلاً $\alpha > 0, U = -\frac{\alpha}{r^5}$. (تستخدم مثل هذه التوابع عند دراسة تبادل التأثير بين الجزيئات). فإذا مثلنا التابع $U_{eff}(r)$ بيانياً الشكل (4.5)، نرى أنه إذا كانت $(U_{eff})_{max} < E$ فإن الحركة تحدث في مجال غير محدود، ويمكن للنقطة أن تسقط في مركز حقل القوى. أما إذا كانت $0 < E \le (U_{eff})_{max}$ فإن الحركة تحدث إما في المجال $r \ge r_2$ أو في المجال $r \le r_1$ الذي فيه تستطيع النقطة أن تصل إلى المركز وعندما يكون $E \le 0$ فإن السقوط يتم أيضاً.



الشكل (4.5)

مثال 1: أوجد تكامل معادلات الحركة لنقطة مادية كتلتها m تتحرك في حقل الجاذبية على سطح كرة نصف قطرها ℓ (النواس الكروي).

الحل: نفرض مبدأ الإحداثيات الكروية هو مركز الكرة (نقطة تعليق النواس) والمحور القطبي باتجاه الشاقول نحو الأسفل. تابع لاغرانج لهذا النواس هو:

$$L = \frac{m\ell^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta.\dot{\varphi}^2\right) + mg\ell\cos\theta$$

حيث θ الزاوية بين خيط التعليق والشاقول.

واضح أن الإحداثي φ دوري، لذلك فإن الاندفاع المعمم p_φ يبقى ثابتاً وينطبق على مركبة العزم على المحور z:

$$m\ell^2\sin^2\theta.\dot{\varphi} = M_z = const \qquad (a)$$

نكتب الطاقة الكلية بالشكل:

$$E = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_Z^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} - mg\ell\cos\theta \qquad (b)$$

ومن هذه العلاقة نوجد $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{m\ell^2}\left(E - U_{eff}\right)} \qquad (c)$$

حيث:

$$U_{eff} = \frac{M_Z^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} - mg\ell\cos\theta$$

بفصل المتحولات من المعادلة (c) نجد:

$$t = \int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}\left(E - U_{eff}\right)}} \qquad (d)$$

من العلاقة (a) نحسب الزاوية φ ونعوض عن تكامل الزمن t بالعلاقة

(d) فيكون:

$$\varphi = \frac{M_z}{\ell\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - U_{eff}(\theta)}}$$

يتعين مجال الحركة حسب الزاوية θ بالشرط $E > U_{eff}$ وحدود ذلك المجال يتعين من المساواة $E = U_{eff}$ وهي معادلة من الدرجة الثالثة في $\cos\theta$ لها جذران في المجال 1+ و1- يعينان وضع دائرتين متوازيتين على الكرة حيث ينحصر بينهما مسار الحركة.

مثال 2: أوجد معادلات الحركة لنقطة مادية تتحرك في حقل الثقالة على سطح مخروط (زاوية رأسه 2α) يتوضع شاقولياً ورأسه للأسفل.

الحل: بفرض مبدأ الإحداثيات الكروية هو رأس المخروط، والمحور القطبي موجه شاقولياً للأعلى، فإن تابع لاغرانج يأخذ الشكل التالي:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha.\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\alpha$$

إن الإحداثي φ هو دوري، لذلك تتحقق من جديد العلاقة:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = M_z = mr^2\sin^2\alpha.\dot{\varphi} = const$$

أما الطاقة فهي:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$$

وبطريقة مشابهة لما جاء في المثال الأول نوجد:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}}$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\sin^2\alpha\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{eff}}}$$

حيث:

$$U_{eff}(r) = \frac{M_Z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$$

يمثل الشرط $E = U_{eff}$ (عند $M_z \neq 0$) معادلة من الدرجة الثالثة في r لها جذران موجبان يحددان وضع دائرتين أفقيتين على سطح المخروط حيث ينحصر بينهما مسار الحركة.

4. 3. مسألة كبلر

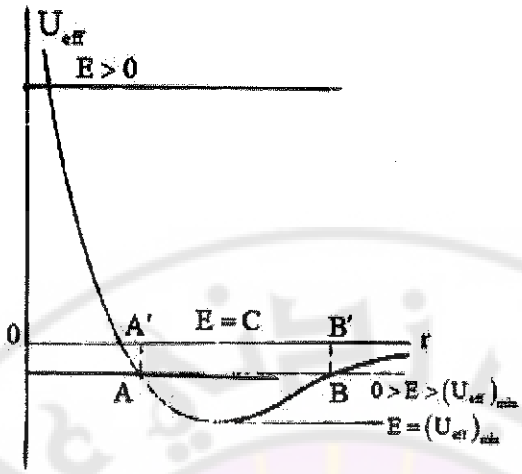
من الحالات الهامة في دراسة الحركة في الحقول المركزية تلك الحقول التي فيها تتناسب الطاقة الكامنة عكساً مع r، وبالتالي فإن القوة تتناسب عكساً مع r^2. كأمثلة على تلك الحقول: حقول نيوتن للجاذبية وحقول كولون في الكهرباء الساكنة. يتميز النوع الأول بطابع الجاذبية أما النوع الآخر فيتميز بطابع الجاذبية والتنافر.

لندرس أولاً حقل الجاذبية الذي يكون فيه:

$$\alpha > 0 \quad , \quad U = -\frac{\alpha}{r} \tag{4.22}$$

نرى في الشكل (4.6) منحني الطاقة الكامنة الفعالة:

$$U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{4.23}$$



الشكل (4.6)

فعندما $r \to 0$ تنتهي الطاقة U_{eff} إلى $+\infty$ وعندما $r \to \infty$ تنتهي الطاقة الكامنة الفعالة إلى الصفر من جهة القيم السالبة. وعند $r = M^2 / m\alpha$ تأخذ الطاقة U_{eff} قيمة أصغرية تساوي:

$$\left(U_{eff}\right)_{min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2} \qquad (4.24)$$

من الشكل نرى أنه عندما $E>0$ تكون حركة الجسيم غير محدودة وعندما $E<0$ تصبح الحركة محدودة (أقصى بعد للجسيم عن مركز القوة يوافق $r_{max} = oB'$ وأدنى بعد يوافق $r_{min} = oA'$).

للحصول على معادلة مسار الحركة نستخدم العلاقة العامة (4.15) مستبدلين $U = -\frac{\alpha}{r}$:

$$\varphi = -\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\left[\frac{2mE}{M^2} + \frac{m\alpha^2}{M^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]^{1/2}} + const$$

وبإدخال ثوابت جديدة بدلاً من E و M:

$$e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad , \quad p=\frac{M^2}{m\alpha} \tag{4.25}$$

نحصل على:

$$\varphi=-\int\frac{d\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}{\left[\frac{e^2}{p^2}-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2\right]^{1/2}}+const \tag{4.26}$$

إن هذا التكامل معروف فهو من الشكل:

$$-\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arccos\frac{u}{a}$$

إذن:

$$\varphi=\arccos\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-1\right)+const$$

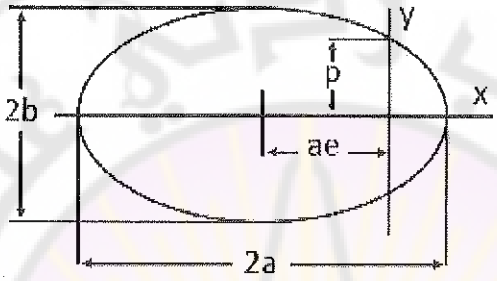
يمكن اختيار مبدأ قياس الزاوية φ بحيث يكون const=0، عندئذ تأخذ معادلة المسار الشكل التالي:

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi} \tag{4.27}$$

وهذه المعادلة تمثل المعادلة القطبية **لقطع مخروطي** يقع محرقه في مبدأ الإحداثيات. يسمى p **وسيط القطع** ويدعى e **بالتباعد المركزي** له. إن اختيارنا لمبدأ قياس الزاوية φ يعني كما نرى من العلاقة (4.27) أن النقطة تكون أقرب ما يمكن من المركز عندما $\varphi=0$.

وكما هو معلوم يكون المسار (4.27) قطعاً ناقصاً إذا كان e<1 ويكون قطعاً زائداً عندما e>1، وقطعاً مكافئاً في حالة e=1، ويكون دائرياً عندما e=0.

من العلاقة (4.25) نرى أنه عندما $E<0$ يكون التباعد المركزي أصغر من الواحد $e<1$، أي أن المدار هو قطع ناقص وتكون الحركة محدودة وهذا يتفق مع ما ذكرناه في بداية هذه الفقرة. وبالاعتماد على بعض العلاقات المعروفة في الهندسة التحليلية، نجد أن أنصاف محاور القطع الناقص تعطى بالعلاقات:



الشكل (4.7)

$$a=\frac{p}{1-e^2} \quad , \quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \tag{4.28}$$

ويمكن أن نكتب كلاً من a و b بدلالة M و E اعتماداً على (4.25):

$$a=\frac{\alpha}{2|E|} \quad , \quad b=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{4.29}$$

من هنا نرى أن طول نصف المحور الكبير للقطع يتبع الطاقة الكلية للجسيم بصورة مستقلة عن قيمة العزم. وفي الحالة الخاصة التي تأخذ عندها الطاقة الكلية أصغر قيمة ممكنة $\left(E=\left(U_{eff}\right)_{main}\right)$ يكون التباعد المركزي معدوماً $e=0$ ويكون لدينا:

$$\dot{r}=0 \quad , \quad r=r_0=a=b \tag{4.30}$$

ويتحول القطع الناقص إلى دائرة. ومن الواضح أنه عند الحركة على دائرة لا تكون الطاقة الكلية فقط ثابتة وإنما أيضاً الطاقة الكامنة والحركية

للجسيم. إن أصغر قيمة وأكبرها لبعد الجسيم عن مركز الحقل (محرق القطع الناقص) يساويان:

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$$
$$r_{max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e) \qquad (4.31)$$

يمكن إيجاد هذه العلاقات مباشرة كجذور للمعادلة $U_{eff}(r) = E$.

أما دور الحركة على القطع الناقص – وهو الزمن اللازم ليتم الجسيم على مداره دورة كاملة يحسب من قانون انحفاظ العزم (4.10) المسمى **تكامل المساحة**.

إذا كاملنا تلك العلاقة بالنسبة للزمن من الصفر حتى T، نحصل على:

$$2mf = T.M$$

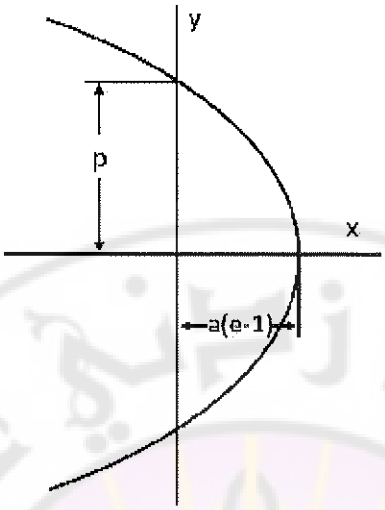
حيث f مساحة المدار وتساوي في حالة القطع الناقص πab.

وباستخدام العلاقتين (4.29) نجد:

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \qquad (4.32)$$

وهكذا نلاحظ أن دور الحركة على مدار إهليليجي يتبع فقط الطاقة الكلية للجسيم (أو يتبع طول نصف المحور الكبير a).

لنبدأ مناقشة الحركة غير المحدودة عندما $E \geq 0$. في حالة $E > 0$ يكون التباعد المركزي $e > 1$، أي أن مسار الحركة هو قطع زائد يحوي مركز الحقل (المحرق) كما هو مبين في الشكل (4.8). ويساوي البعد الأصغري للجسيم عن المركز:



الشكل (4.8)

$$r_{min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1) \qquad (4.33)$$

حيث:

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

يمثل نصف طول محور القطع الزائد.

في الحالة التي يكون عندها E=0 (انظر العلاقة (4.25)) يتحرك الجسيم على قطع مكافئ بعده الأصغري عن المركز يساوي $r_{min} = p/2$. وتتحقق هذه الحالة إذا بدأ الجسيم حركته من السكون في اللانهاية. إن سرعة الجسيم تكون أعظمية عند r_{min} وكلما ابتعد عن مركز القوة فإن سرعته تتناقص وتنتهي إلى الصفر عندما $r \to \infty$، وذلك لأن الطاقة الكامنة تصبح مهملة، وحسب الشرط $E = T + U = 0$ فإن سرعة الجسيم تنتهي إلى الصفر.

يمكن إيجاد العلاقة بين الزمن وإحداثيات الجسيم المتحرك على مداره وذلك من العبارة (4.14) التي سوف نكتبها بشكل وسيطي مبسط.

لنبدأ بالمدار الإهليليجي. بافتراض $E=-|E|$ ومن العلاقات (4.29) نستطيع كتابة التكامل (4.14) بالشكل التالي:

$$t=\sqrt{m/2|E|}\int\frac{dr}{\sqrt{\left(-r^2+2ar-b^2\right)^{1/2}}}+const$$

نعوض في هذا التكامل بدلاً من b^2 ما يساويه من العلاقة:

$$b^2=a^2\left(1-e^2\right)$$

التي تنتج مباشرة من

(4.28)، وكذلك نعوض:

$$|E|=\frac{\alpha}{2a}$$

فنجد:

$$t=\sqrt{ma/\alpha}\int\frac{dr}{\sqrt{\left[a^2e^2-\left(r-a\right)^2\right]^{1/2}}}+const$$

وإذا وضعنا:

$$r-a=-ae\cos\theta$$

فإن التكامل يأخذ الشكل الجديد:

$$t=\sqrt{ma^3/\alpha}\int\left(1-e\cos\theta\right)d\theta$$
$$=\sqrt{ma^3/\alpha}\left(\theta-e\sin\theta\right)+const$$

باختيار مبدأ الزمن عندما $\theta=0$ يصبح الثابت const مساوياً الصفر وعندئذ تكتب معادلات حركة الجسيم على مداره الإهليليجي بشكلها الوسيطي الأخير:

$$r=a\left(1-e\cos\theta\right)\quad,\quad t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\left(\theta-e\sin\theta\right)\qquad(4.34)$$

ومن الملاحظ أن الجسيم في اللحظة t=0 يكون على بعد أصغري من المركز يساوي:

$$r_{min} = a(1-e)$$

وبدلالة الوسيط θ نستطيع أن نعبر عن الإحداثيات الديكارتية للجسيم:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi$$

(يتجه المحوران y,x على الترتيب وفق نصفي المحورين الكبير والصغير للقطع الناقص). ومن العلاقات (4.27) و(4.34) يكون لدينا:

$$e.x = p - r = a(1-e^2) - a(1-e\cos\theta) = ae(\cos\theta - e)$$

أما y فنحسبها من العلاقة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ، وبالنهاية نحصل على:

$$x = a(\cos\theta - e) \quad , \quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin\theta \qquad \textbf{(4.35)}$$

ويتغير الوسيط θ من الصفر حتى 2π عندما تنجز دورة كاملة على القطع الناقص.

وبإجراء حسابات مماثلة، نجد من أجل مسارات القطوع الزائدة:

$$r = a(e\ ch\theta - 1) \quad , \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\ sh\theta - \theta) \qquad \textbf{(4.36)}$$

$$x = a(e - ch\theta) \quad , \quad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,sh\theta$$

حيث الوسيط θ يأخذ القيم من −∞ إلى +∞.

بعد دراستنا للحركة في حقل التجاذب نعود لمعالجتها في حقل التنافر:

$$(a > 0) \quad , \quad U = \frac{\alpha}{r}$$

في هذه الحالة تتناقص الطاقة الكامنة الفعالة:

$$U_{eff} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

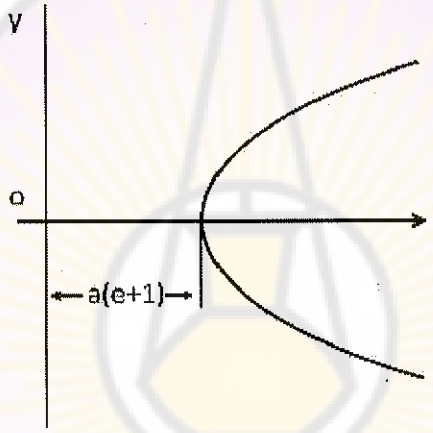
في اتجاه واحد من +∞ حتى الصفر وذلك عندما تتغير r من الصفر

إلى ∞. وبما أن طاقة الجسيم لا يمكن أن تكون إلا موجبة، فإن الحركة دوماً غير محدودة. إن جميع الحسابات الموافقة لهذه الحالة تشبه تماماً ما جرى آنفاً. ويكون منحني الحركة قطعاً زائداً، معادلته:

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \qquad (4.37)$$

(يتعين e,p من المعادلات (4.25)). ويمر المسار على بعد أصغري من مركز الحقل الشكل (4.9)، ويساوي هذا البعد:

$$r_{min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1) \qquad (4.38)$$



الشكل (4.9)

أما قانون الحركة فيعطى بالمعادلات الوسيطية التالية:

$$r = a(e\ ch\theta + 1) \quad , \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\ sh\theta + \theta)$$
$$x = a(ch\theta + e) \quad , \quad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,sh\theta \qquad (4.39)$$

وختاماً لهذه الفقرة فإن معادلة المدار (4.27)، وقانون المساحات (4.10) وعلاقة الدور (4.32) تمثل العبارات الرياضية لقوانين كبلر الثلاثة التي وضعها تجريبياً كبلر بين 1609 و1619 نتيجة لمشاهداته حول حركة

الكواكب. وقد أكدت تلك القوانين على أن كل كوكب يتحرك على قطع ناقص يكون محرقه الشمس (القانون الأول)، وأن السرعة السطحية لكل كوكب بالنسبة للشمس هي ثابتة (القانون الثاني)، والنسبة بين مربع الدور ومكعب طول نصف المحور الكبير للمدار نسبة ثابتة وهي واحدة بالنسبة لكل الكواكب (القانون الثالث).

مثال 1: يتحرك جسيم في الحقل $U=\frac{-\alpha}{r}$ وبطاقة كلية معدومة $E=0$. أوجد العلاقة بين إحداثيات الجسيم والزمن.

الحل: من العلاقة (4.14) نجد:

$$t=\int\frac{rdr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r-\frac{M^2}{m^2}}}$$

وبوضع:

$$r=\frac{M^2}{2m\alpha}\left(1+\theta^2\right)=\frac{p}{2}\left(1+\theta^2\right)$$

نحصل على العبارة الوسيطية للعلاقة المطلوبة:

$$r=\frac{p}{2}\left(1+\theta^2\right)\quad,\quad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{\theta^2}{3}\right)$$

$$x=\frac{p}{2}\left(1-\theta^2\right)\quad,\quad y=p.\theta$$

حيث الوسيط θ يأخذ القيم من $-\infty$ إلى $+\infty$.

مثال 2: تتحرك حول الأرض مركبة فضائية كتلتها m. وفي لحظة ما أطفئ محركها وهي على بعد من مركز الأرض يساوي r_0، وعندئذ كانت الزاوية بين شعاع سرعتها $\vec{v}_0$ و $\vec{r}_0$ هي θ_0 الشكل (4.10). بفرض أن شدة

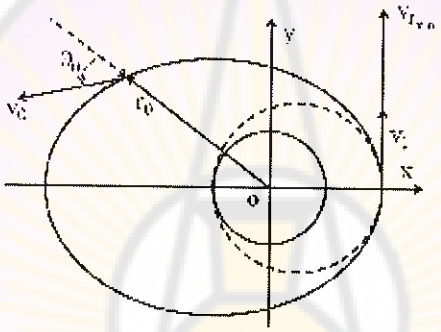
حقل الجاذبية على سطح الأرض هي g ونصف قطر الأرض هو R ومقاومة الوسط الخارجي مهملة، أوجد:

1- عناصر مدار المركبة في مستوي حركتها (وسيط المدار وتباعده المركزي).

2- دور حركة المركبة على مدار إهليليجي.

3- سرعة المركبة عند كل نقطة من المسار.

4- مقدار تغير الطاقة الحركية للمركبة لكي تنتقل إلى مدار آخر يمس سطح الأرض.



الشكل (4.10)

الحل:

نستطيع في هذا المثال أن نطبق الحل العام لمسألة حركة نقطة في الحقل المركزي فيما إذا اعتمدنا فقط قوى التجاذب بين المركبة والأرض وأهملنا تبادل التأثير مع الأجسام الأخرى. لهذا نختار مركز الأرض مبدأ للإحداثيات كونه مركزاً لقوى التجاذب. ونفرض مستوى الحركة هو المستوى xy. أما المحور x فنوجهه إلى أقرب نقطة من المدار عن المركز – نقطة الحضيض.

وهكذا فإن الطاقة الكامنة للمركبة هي:

$$U = -\frac{\alpha}{r} \qquad (1)$$

حيث:

$$\alpha = \gamma mM = mgR^2$$

وبفرض أن لحظة البدء هي اللحظة التي ينطفئ عندها محرك المركبة، تأخذ الطاقة الكلية وعزم الاندفاع للمركبة المقادير التالية:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mgR^2}{r_0} = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0}\right) \qquad (2)$$

$$M = \left|\vec{r}_0 \wedge m\vec{v}_0\right| = mr_0 v_0 \sin\theta_0$$

باستخدام هذه العلاقات والاعتماد على المناقشة النظرية في الفقرة الثالثة، يمكن التحقق من مسار المركبة هو:

قطع زائد عندما:

$$v_0^2 > v_2^2\left(R / r_0\right)$$

قطع مكافئ عندما:

$$v_0^2 = v_2^2\left(R / r_0\right) \qquad (3)$$

وقطع ناقص في حالة:

$$v_0^2 < v_2^2\left(R / r_0\right)$$

ودائرة في حالة:

$$v_0^2 = v_1^2\left(R / r_0\right) \quad , \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

حيث $v_1 = \sqrt{gR}$ السرعة الكونية الأولى.

$v_2 = \sqrt{2gR}$ السرعة الكونية الثانية.

لنحسب وسيط المدار p وتباعده المركزي e بالاعتماد على الشروط الابتدائية للعلاقات (4.25) و(3)، فنجد:

$$p = \frac{r_0^2}{gR^2} v_0^2 \sin^2\theta_0$$

$$e=\left[1+\left(v_0^2-\frac{2gR^2}{r_0}\right)\frac{r_0^2v_0^2\sin^2\theta_0}{g^2R^4}\right]^{1/2} \qquad (4)$$

وبما أن نصفي محوري القطع الناقص يعطيان بالعلاقتين:

$$a=\frac{p}{1-e^2} \quad , \quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

وللقطع الزائد هما:

$$a=\frac{p}{e^2-1} \quad , \quad b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$$

فتكون أنصاف أقطار المدار سواء أكان قطعاً ناقصاً أم زائداً مساوية:

$$a=\frac{gR^2}{\left|\frac{2gR^2}{r_0}-v_0^2\right|} \quad , \quad b=\frac{r_0v_0\sin\theta_0}{\left|\frac{2gR^2}{r_0}-v_0^2\right|^{1/2}} \qquad (5)$$

وأخيراً فإن دور حركة المركبة على القطع الناقص حسب العلاقة (4.32) يساوي:

$$T=\frac{2\pi gR^2}{\left(\frac{2gR^2}{r_0}-v_0^2\right)^{3/2}} \qquad (6)$$

فإذا كان المدار معلوماً، نستطيع أن نعين موضع المركبة في أية لحظة من الزمن بالاعتماد على القوانين (4.34). أما السرعة v فيمكن ايجادها كتابع لـــr من تكامل الطاقة:

$$E=\frac{m}{2}\left(v^2-\frac{2gR^2}{r}\right)=\frac{m}{2}\left(v_0^2-\frac{2gR^2}{r_0}\right)$$

إذن:

$$v^2 = v_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad (7)$$

ويمكن تحديد اتجاه السرعة بإيجاد كل من $\dot{r}$ و $r\dot{\varphi}$ اعتماداً على تكاملات العزم والطاقة:

$$\dot{r} = \left[v_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\theta_0}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$r\dot{\varphi} = \frac{r_0 v_0 \sin\theta_0}{r} \qquad (8)$$

وذلك لأن نسبة هاتين العلاقتين تعطي $tg\theta$ كتابع لـــr.

لنوجد الآن تغير الطاقة الحركية عندما تنتقل المركبة إلى مدار يمس الأرض (الخط المنقط في الشكل). ولنفرض أن هذا التغير يتم في نقطة الحضيض نتيجة لعمل محرك المركبة زمناً قصيراً جداً مع إهمال تغير كتلة المركبة. بما أن مركبة السرعة القطرية عند نقطة الحضيض تساوي الصفر، والبعد عن مركز الأرض يكون بعداً أصغرياً نجد من العلاقة (8):

$$v\big|_{r_{min}} = r\dot{\varphi}\big|_{r_{min}} = \frac{r_0 v_0 \sin\theta_0}{r_{min}} \qquad (9)$$

ولكي تستطيع المركبة أن تتحرك على قطع ناقص يمس سطح الأرض ينبغي تغيير هذه السرعة. إن نصف القطر الكبير للمدار الجديد يساوي:

$$a_1 = \frac{r_{min} + R}{2} \qquad (10)$$

ومن العلاقة (4.29):

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}$$

نجد الطاقة الكلية:

$$|E_1| = \frac{mgR^2}{r_{min} + R} \qquad (11)$$

التي ينبغي على المركبة أن تأخذها في حركتها على المدار الجديد.

وباستخدام قانون انحفاظ الطاقة للمركبة المتحركة على المدار الجديد نحصل على قيمة الطاقة الحركية عند النقطة $r = r_{min}$ على المدار الذي يمس الأرض:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgR^2\left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{min} + R}\right) \qquad (12)$$

وأخيراً نوجد التغير الموافق للطاقة الحركية من العلاقتين (9) و(12):

$$\Delta T = \frac{m}{2}\left\{\frac{r_n^2}{r^2_{min}} v_0^2 \sin^2\theta_0 - 2gR^2\left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{min} + R}\right)\right\} \qquad (13)$$

حيث $r_{min} = \frac{p}{1+e}$، وتتعين p و e من العلاقات (4).

تمارين

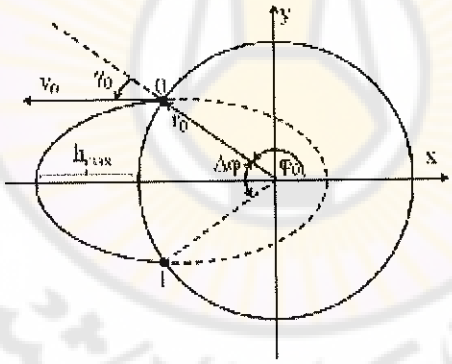
1- أوجد تكامل معادلات الحركة لنقطة مادية في الحقل المركزي $U = -\alpha / r^2$ حيث $\alpha > 0$.

2- ينطلق من سطح الأرض جسم صغير كتلته m بسرعة ابتدائية $v_0 < v_2$ الشكل (4.11) حيث $v_2 = \sqrt{2gR}$ و R نصف قطر الأرض. بإهمال قوى المقاومة مع الوسط الخارجي، أوجد:

1) الارتفاع الأعظمي الذي يمكن أن يصل إليه الجسم المفروض.

2) طول القوس المقطوعة على الأرض والواصلة بين نقطتي الانطلاق والهبوط.

3) زمن تحليق الجسم. (استعن بالمثال المحلول 2).



الشكل (4.11)

3- مركبة فضائية محمولة بصاروخ حتى الارتفاع h فوق الأرض وبعد ذلك تحقق المركبة حركة كبلر بسرعة ابتدائية موجهة بزاوية θ عن الأفق. عيّن قيمة السرعة الابتدائية $v_2 < v_0$ التي عندها يتجاوز مسار المركبة المجال

الأرضي، علماً بأن v_2 هي السرعة الكونية الثانية.

4- تتحرك مركبة تحت تأثير قوة التجاذب الكوني بالقرب من الأرض. في لحظة البدء يكون شعاع الموضع $\vec{r}_0$ والسرعة $\vec{v}_0$. أوجد سرعة المركبة في أية لحظة.

5- قمر صناعي يدور حول الأرض على مسار دائري نصف قطره r_1 ينتقل إلى مسار دائري آخر نصف قطره $r_2 < r_1$ ويتم هذا الانتقال وفقاً لمسار على نصف قطع ناقص يكون لمماسي القطع في نقطتي التماس مع الدائرتين r_1 و r_2 المنحى نفسه. يتم هذا التحليق عن طريق سرعتين لحظيتين: ابتدائية $\overrightarrow{\Delta v_1}$ ونهائية $\overrightarrow{\Delta v_2}$، الأولى باتجاه $\vec{v}_1$ (السرعة عند نقطة تماس الدائرة الأولى مع القطع) والثانية باتجاه $\vec{v}_2$ (السرعة عند تماس الدائرة الثانية مع القطع). عين المقدارين Δv_1 و Δv_2 كتابعين لـ r_1 و r_2.

الفصل الخامس

5. تطبيقات معادلات لاغرانج في الجمل الكهربائية والكهرميكانيكية

5. 1. مقدمة

تطبق معادلات لاغرانج مباشرة على نطاق واسع في المنظومات (الجمل) الكهربائية والكهرميكانيكية. وكما سيوضح لاحقاً بأن لتلك التطبيقات مزايا ايجابية هامة.

إن مفاهيم الإحداثيات المعممة، السرع، الطاقة الحركية، الطاقة الكامنة، تابع الاستطاعة، معادلات الارتباط، درجات الحرية والقوى المعممة معروفة في الميكانيك، ولكل منها ما يقابله في المنظومات الكهربائية. توصف معادلات لاغرانج للمنظومات الكهربائية والكهرميكانيكية من أجل إحداثيات مناسبة وطاقة حركية وكامنة ... إلخ بالعلاقات المعروفة (2.27).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

حيث: T: الطاقة الحركية

q_j: الإحداثيات المعممة

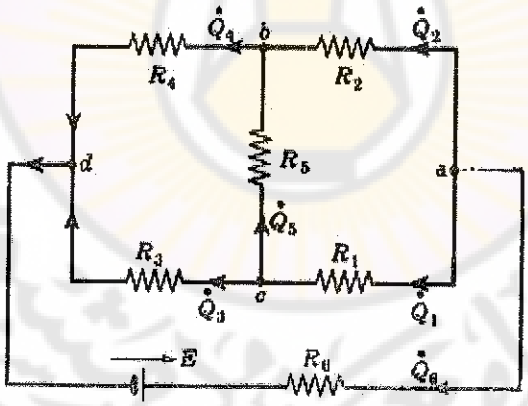
Q_j: القوى المعممة

يقتصر الحديث هنا (في هذا الفصل) على خلاصة لبعض أهم جوانب الموضوع حيث أن المعالجة التفصيلية لكل الحالات الممكنة وفروعها في هذا المجال يحتاج إلى فصول عدة.

سنتناول بعض المصطلحات والتعابير التي تصادفنا في تطبيقات معادلات لاغرانج في الدارات الكهربائية مثل الإحداثيات المعممة المناسبة، الارتباطات، الطاقة الحركية والطاقة الكامنة، القوى المعممة، الاستطاعة ومعادلات لاغرانج في الدارات الكهربائية مع إجراء المقارنة في كل حالة مع تلك المفاهيم في الميكانيك التقليدي.

5. 2. الإحداثيات المناسبة

تشكل الشحنات Q_1، Q_2، ... إلخ المشار إليها في الشكل (5.1) والتي تمر في فروع الشبكة بعد لحظة زمنية مفروضة ولتكن $t=0$ إحداثيات مناسبة يمكن استخدامها. عندئذ يمثل التيار $i = dQ/dt = \dot{Q}$ السرعة وبشكل مشابه يمثل $\ddot{Q}$ التسارع. وكما في المعالجات المعتادة للدارات فإن الجهة الموجبة لتدفق التيار (جهة التيار) يجب أن تعين من أجل كل شحنة كما هو موضح في الشكل (5.1).



الشكل (5.1)

5. 3. معادلات الارتباط ودرجات الحرية

لا تكون كل الشحنات المتدفقة في الشبكة مستقلة عن بعضها. إن

المجموع الجبري للشحنات المارة عند أي عقدة يجب أن يساوي الصفر (قانون كيرشوف). ومن ثم فإن عدد المعادلات المستقلة للعقد تعطي تماماً عدد معادلات الارتباط. فمثلاً، هناك ست شحنات (ستة تيارات) تمر في ستة فروع لجسر واطسطن، الشكل (5.1). عند كل عقدة a,b,c,d يمكن كتابة العلاقات: $\dot{Q}_6 = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ أو $(Q_6 = Q_1 + Q_2)$ ... إلخ ولكن فقط ثلاث من هذه العلاقات مستقلة وهي: $(Q_6 = Q_1 + Q_2)$ و $(Q_4 = Q_2 + Q_5)$ و $(Q_1 = Q_3 + Q_5)$ والمعادلة الرابعة يمكن الحصول عليها من تلك المعادلات الثلاثة. وهكذا فإن للجسر ثلاث درجات للحرية لوجود ست إحداثيات (شحنات) وثلاث معادلات للارتباط.

5. 4. الطاقة الحركية

تعطى الطاقة المغنطيسية ε لملف وحيد ذات ثابت تحريض M بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} M \dot{Q}^2$$

وبالمقارنة مع الطاقة الحركية للجسيمات $T = 1/2mv^2$ نجد أن M يوافق الكتلة m و $\dot{Q}$ توافق السرعة v. وإن طاقة ملفين لهما التحريضان الذاتيان M_{11} وM_{22} وتحريض متبادل M_{12} هي:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(M_{11}\dot{Q}_1^2 + 2M_{12}\dot{Q}_1\dot{Q}_2 + M_{22}\dot{Q}_2^2\right)$$

والتي هي أيضاً ذات صيغة مشابهة للطاقة الحركية. وفي الحالة العامة من أجل شبكة تحوي s ملفاً تعطى الطاقة الحركية الكهربائية بالعلاقة:

$$T_{E\ell} = \frac{1}{2}\sum_{ir}^{s} M_{ir}\dot{Q}_i\dot{Q}_r \qquad (5.1)$$

ملاحظات هامة:

أولاً: لنفرض كمثال، أن ملفين (1) و(2) متحدان في المحور بحيث أن التدفقين

Φ_1 و Φ_2 يتحددان بواسطة التيارين i_1 وi_2. فإذا كان هناك تحريض متبادل بينهما فإن جزءاً من Φ_1 يمر خلال الملف (2) وجزءاً من التدفق Φ_2 يمر خلال الملف (1). من أجل الاتجاه المختار الموجب للتيار i_1 وi_2 وإذا مر التدفق Φ_1 خلال الملف (2) في الاتجاه الذي يمر فيه التدفق Φ_2 خلال الملف (2) (وبشكل مشابه إذا مر التدفق Φ_2 خلال الملف (1) في الاتجاه الذي يمر التدفق Φ_1) عندها يكون M_{12} موجباً وإلا يجب أن يؤخذ سالباً. إذاً M_{ir} إما أن يكون مقداراً سالباً أو موجباً.

ثانياً: في المناقشة التي أدت إلى العلاقة (5.1) فرضنا ضمنياً أن التحريضية ثابتة. ولكن، على سبيل المثال، إذا احتوى الملف على نواة حديدية، عندها تتبع M_{11}, M_{22} التيار بشكل أكثر تعقيداً. في هذه الحالة لا يمكن تطبيق معادلات لاغرانج بشكلها العادي. وأكثر من ذلك إن وجود النواة الحديدية يسبب ظاهرة الضياع بسبب المغنطيسية المتبقية (نزعة المادة الممغنطة إلي البقاء في حالة مغنطيسية). لذلك سنفرض أن التحريضية غير تابعة للتيار. من جهة أخرى، فإن التحريضية المتبادلة قد تكون تابعة لإحداثيات الفراغ.

5. 5. الطاقة الكامنة

يمكن إعادة ترتيب الطاقة الكامنة في الشبكة على أنها مؤلفة من جزأين الأول ناتج من وحدات التغذية (الطاقة) مثل البطاريات، المولدات، ... إلخ والجزء الآخر من الطاقة المختزنة في المكثفات.

فإذا كان فرق الكمون الأعظمي لوحدة التغذية هو E فإن طاقة وحدة التغذية (المصدر) هي EQ للمنظومة، حيث Q الشحنة التي يعطيها المصدر في جهة E. وهكذا يمكننا كتابة الطاقة الكامنة عند النقطة Q=0 بالصيغة $V_{source} = -EQ$ حيث افترض أن Q تتدفق في الاتجاه الموجب لـــE. وهذا

يشبه تماماً العلاقة البسيطة $V=-mgy$ التي تعطي الطاقة الكامنة للكتلة m في حقل الجاذبية بعد أخذ y باتجاه الشاقول للأعلى. وإن العلاقة السابقة المشار إليها تبقى صحيحة حتى في حال تغير E مع الزمن حيث $E=E_0\sin\omega t$ وذلك لأن t تبقى ثابتة عند إيجاد القوى المعممة.

إن طاقة مكثفة مشحونة شحنتها Q وسعتها C تكتب بالشكل $E=\frac{1}{2}Q^2C$ والتي تطابق تماماً طاقة نابض لولبي (حيث 1/C يقابل عامل المرونة k). عندها تعطى الطاقة الكامنة لعدة منابع ومكثفات معزولة بالعلاقة التالية:

$$V_{E\ell}=\frac{1}{2}\sum_{\ell}Q_{\ell}^2/C_{\ell}-\sum_{s}E_sQ_s \qquad (5.2)$$

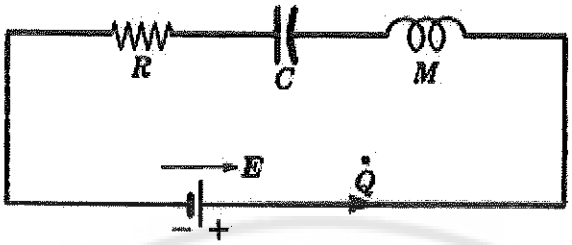
وكما هو الحال في حالة $T_{E\ell}$، يجب حذف الإحداثيات الزائدة (غير الضرورية).

إذا كان للمكثفات في اللحظة t=0 شحنات ابتدائية قدرها Q_{01},Q_{02}...إلخ فإن الطاقة المكافئة تعطى عندئذ بالعلاقة $\frac{1}{2}(Q_1+Q_{01})^2/C_1$... . وإذا كان تدفق التيار $\dot{Q}_s$ عكس الاتجاه الموجب لـــE عندها يجب أن تؤخذ E_sQ_s موجبة.

5. 6. القوى المعممة F_Q

يمكن توضيح القوة الرئيسة التي تطبق على الشبكة الكهربائية من خلال العودة إلى الدارة المبسطة المعروضة في الشكل (5.2). وبتطبيق قوانين كيرشوف يمكن أن نكتب ما يلي:

$$M\ddot{Q}=E-Q/C-R\dot{Q}$$



الشكل (5.2)

ومنه يمكن ملاحظة أن $M\ddot{Q}$ توافق قوة العطالة $(m\ddot{x})$ و Q/C توافق الطاقة المبذولة بواسطة النابض (بالمقارنة مع kx) و E هي القوة المطبقة بواسطة البطارية و $-R\dot{Q}$ تقابل تماماً قوة اللزوجة $(-a\dot{x})$. مع الانتباه بأن $R\dot{Q}$ هي قوة مشتتة (مبددة).

تقابل القوة المعممة الكلية F_{Q_r} القوة Q_r، والتي يمكن إعادة كتابتها للسهولة على أنها مؤلفة من القوى $\left(F_{Q_r}\right)_C$ العائدة لقانون انحفاظ القوى والقوى $\left(F_{Q_r}\right)_R$ العائدة للمقاومات. ومن الواضح أن: $\left(F_{Q_r}\right)_C = -\dfrac{\partial V}{\partial Q_r}$

ويمكن الحصول على التعابير من أجل $\left(F_{Q_r}\right)_R$ كما يلي: عندما تتدفق شحنة δQ_i خلال R_i فالعمل المبذول (طاقة التبديد) هو $\delta A_i = -R_i\dot{Q}_i\delta Q_i$. وبالتالي من أجل منظومة تحوي على عدد من المقاومات يكون العمل:

$$\delta A_{total} = -\left(R_1\dot{Q}_1\delta Q_1 + R_2\dot{Q}_2\delta Q_2 + \ldots\right) \qquad (5.3)$$

بعد حذف التيارات والشحنات غير الضرورية وحساب الحدود، يمكن حساب $\left(F_{Q_r}\right)_R$ مباشرة من (5.3) ويمكن أن تحسب أيضاً هذه القوى من العلاقة أدناه (5.4).

وبالتالي تعطى القوة المعممة الكلية بالعلاقة:

$$F_{Q_r} = -\frac{\partial V}{\partial Q_r} + \left(F_{Q_r}\right)_R$$

5. 7. تابع الاستطاعة

إن كتابة الصيغ التالية للاستطاعة يكون مفيداً في كثير من المسائل:

$$(a)\quad P=-\frac{1}{2}\sum_i R_i\dot{Q}_i^2 \quad , \quad (b)\quad P=-\sum_i \frac{A_i}{b+1}\dot{Q}_i^{b+1} \qquad (5.4)$$

تطبق العلاقة الأولى (هي حالة خاصة من الثانية) على كل الحالات حيث $\delta W=-R\dot{Q}\delta Q$ لكل مقاومة وتطبق العلاقة الثانية عندما يعطى هبوط الجهد (فرق الكمون) في المقاومة بالشكل $E=A\dot{Q}^b$ أي $\delta W=-A\dot{Q}^b\delta Q$ (انظر المثال 2). وفي كلا الحالتين ينبغي حذف التيارات غير الضرورية.0

5. 8. معادلات لاغرانج في الدارات الكهربائية (التي لا تحوي عناصر كهربائية متحركة)

تطبق على المنظومات الكهربائية المؤلفة من عدد محدود من القطع (غير المقسمة): التحريضيات، المكثفات، المقاومات ووحدات التغذية العبارة التالية:

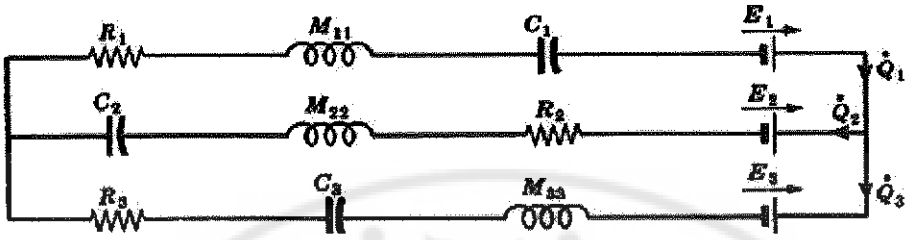
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{E\ell}}{\partial \dot{Q}_r}\right)-\frac{\partial L_{E\ell}}{\partial Q_r}=F_{Q_r} \qquad (5.5)$$

حيث تابع لاغرانج $L_{E\ell}=T_{E\ell}-V_{E\ell}$ و $F_{Q_r}=\left(F_{Q_r}\right)_R$ المحسوبان من (5.3) أو من (5.4) تعودان إلى قوى التبديد فقط. والقوى المحافظة قد ضمنت بشكل تلقائي.

5. 9. أمثلة توضيحية (منظومات كهربائية صرفة، لا تحوي عناصر كهربائية متحركة)

لم تستخدم الواحدات الأساسية في الأمثلة التالية:

مثال 1: لنفرض الدارة البسيطة الممثلة في الشكل (5.3).



الشكل (5.3)

لهذه المنظومة درجتان من الحرية، ومعادلة الارتباط هي:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \tag{1}$$

وبأخذ التحريضية المتبادلة بين كل الملفات، نكتب:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\Big[& M_{11}\dot{Q}_1^2 + M_{22}\dot{Q}_2^2 + M_{33}\dot{Q}_3^2 \\ & +2M_{12}\dot{Q}_1\dot{Q}_2 + 2M_{13}\dot{Q}_1\dot{Q}_3 + 2M_{23}\dot{Q}_2\dot{Q}_3 \Big] \end{aligned} \tag{2}$$

وبحذف $\dot{Q}_3$ من (2) والتعويض في (1)، فإن الصيغة النهائية تكون:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\Big[& M_{11}\dot{Q}_1^2 + M_{22}\dot{Q}_2^2 + M_{33}\left(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2\right)^2 \\ & +2M_{12}\dot{Q}_1\dot{Q}_2 + 2M_{13}\dot{Q}_1\left(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2\right) + 2M_{23}\dot{Q}_2\left(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2\right) \Big] \end{aligned} \tag{3}$$

والطاقة الكامنة تعطى بعد حذف Q_3:

$$U = \frac{1}{2}\left[\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{\left(Q_1 - Q_2\right)^2}{C_3}\right] - E_1Q_1 + E_2Q_2 + E_3\left(Q_1 - Q_2\right) \tag{4}$$

وبتطبيق معادلات لاغرانج بالطريقة التقليدية (العادية)، فإن المعادلات التفاضلية لـQ_1 وQ_2 على الترتيب تكون:

$$\begin{aligned} & \left(M_{11} + M_{33} + 2M_{13}\right)\ddot{Q}_1 + \left(M_{12} - M_{13} - M_{33} + M_{23}\right)\ddot{Q}_2 \\ & + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)Q_1 - \frac{Q_2}{C_3} - E_1 + E_3 = F_{Q_1} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\left(M_{22}+M_{33}-2M_{23}\right)\ddot{Q}_2+\left(M_{12}-M_{33}-M_{13}+M_{23}\right)\ddot{Q}_1$$
$$+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)Q_2-\frac{Q_1}{C_3}+E_2-E_3=F_{Q_2} \qquad (6)$$

ومن الشكل يلاحظ أن العمل:

$$\delta W=-R_1\dot{Q}_1\delta Q_1-R_2\dot{Q}_2\delta Q_2-R_3\dot{Q}_3\delta Q_3$$

وبحذف $\dot{Q}_3$ و δQ_3 من العلاقة (1) تصبح عبارة العمل:

$$\delta W=\left[R_3\dot{Q}_2-\left(R_1+R_3\right)\dot{Q}_1\right]\delta Q_1+\left[R_3\dot{Q}_1-\left(R_2+R_3\right)\dot{Q}_2\right]\delta Q_2 \quad (7)$$

إن أمثال δQ_1 و δQ_2 تمثلان القوى المعممة الموافقة لـــQ_1 وQ_2، إذن:

$$F_{Q_1}=R_3\dot{Q}_2-\left(R_1+R_3\right)\dot{Q}_1$$
$$F_{Q_2}=R_3\dot{Q}_1-\left(R_2+R_3\right)\dot{Q}_2$$

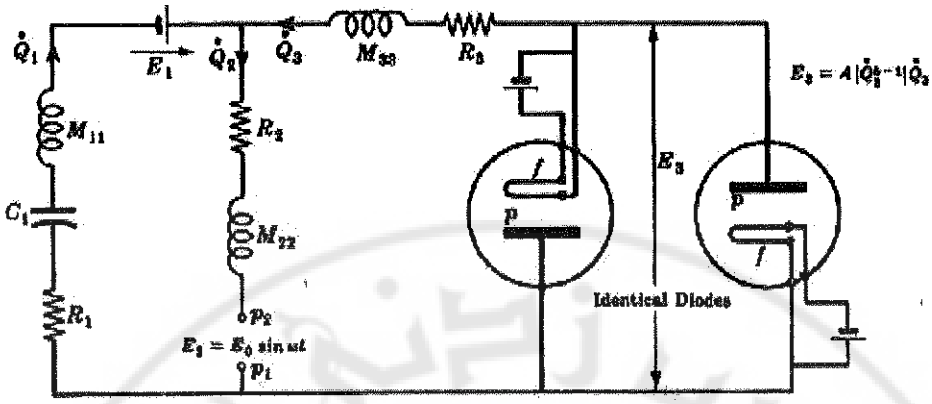
ومن المفيد الإشارة بأنه يمكن الحصول على القوى المعممة من العلاقتين:

$$F_{Q_1}=\frac{\partial P}{\partial \dot{Q}_1} \quad , \quad F_{Q_2}=\frac{\partial P}{\partial \dot{Q}_2}$$

حيث:

$$P=-\frac{1}{2}\left[R_1\dot{Q}_1^2+R_2\dot{Q}_2^2+R_3\left(\dot{Q}_1-\dot{Q}_2\right)^2\right]$$

مثال 2: ليكن لدينا الدارة الممثلة في الشكل والحاوية جهازين متماثلين من ثنائي المسرى موصولين كما هو موضح في الشكل (5.4).



الشكل (5.4)

وسوف نفرض أن E_3 تعطى بالعبارة $A\dot{Q}_3^b$ ، حيث A و b ثوابت، أو:

$$E_3 = A\left|\dot{Q}_3^{b-1}\right|\dot{Q}_3$$

حيث $\left|\dot{Q}_3^{b-1}\right|$ تشير إلى مقادير مطلقة.

وفرق الجهد الخارجي المطبق هو:

$$E_2 = E_0 \sin \omega t$$

وإن تابع لاغرانج للمجموعة بعد حذف Q_3 و $\dot{Q}_3$ هو:

$$L = \frac{1}{2}\Big[M_{11}\dot{Q}_1^2 + M_{22}\dot{Q}_2^2 + M_{33}\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1\right)^2 + 2M_{12}\dot{Q}_1\dot{Q}_2$$
$$+2M_{13}\dot{Q}_1\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1\right) + 2M_{23}\dot{Q}_2\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1\right)\Big]$$
$$-\frac{1}{2}Q_1^2 / C_1 + E_1 Q_1 + Q_2 E_0 \sin \omega t$$

ومن تابع لاغرانج نوجد المعادلات التفاضلية للحركة. أما القوى المعممة فيمكن إيجادها من عبارة العمل:

$$\delta W = -\Big[R_1\dot{Q}_1\delta Q_1 + R_2\dot{Q}_2\delta Q_2 + R_3\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1\right)\left(\delta Q_2 - \delta Q_1\right)$$
$$+A\left|\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1\right)^{b-1}\right|\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1\right)\left(\delta Q_2 - \delta Q_1\right)\Big]$$

ويمكن للقارئ أن يحصل على القوى المعممة بتطبيق مجموع العلاقتين (a5.4) و(b5.4).

5. 10. المنظومات الكهرميكانيكية: تابع لاغرانج وتحديد القوى المعممة

الطاقة التابعة للمنظومة الكهرميكانيكية هي عبارة عن جزء كهربائي وجزء مغنطيسي وجزء ميكانيكي. وكمثال بسيط على تلك المنظومات هو مقياس الغلفاني العادي ذو الملف المتحرك. إن للملف وملحقاته طاقة حركية وميكانيكية. وللملف والدارة الموصولة به طاقة كهربائية. عندما يتحرك الملف فإن العزم المؤثر فيه وسرعته الزاوية وانزياحه وتسارعه كلها ترتبط بكمية كهرباء المنظومة والعكس صحيح. وبسبب هذه العلاقة الداخلية، لا يمكن معالجة الحركة الميكانيكية والأداء الكهربائي بشكل منفصل. لأنه يجب النظر إلى المنظومة كاملة. يكتب تابع لاغرانج من أجل منظومة كهرميكانيكية بالشكل:

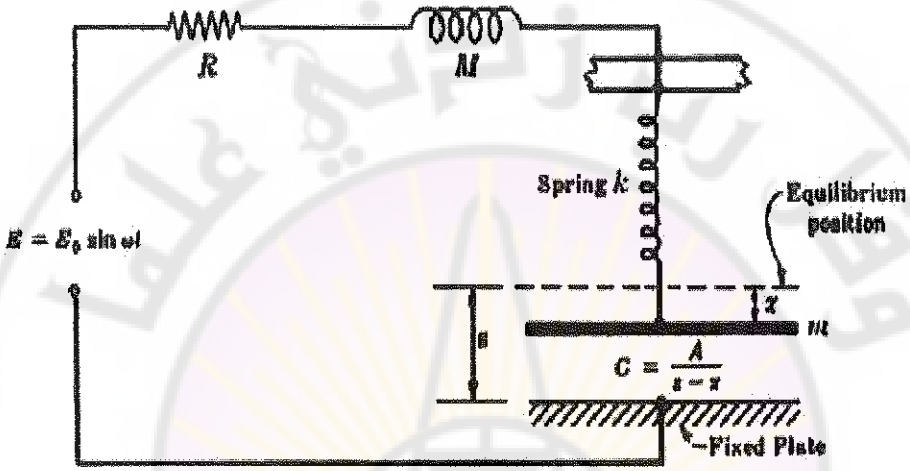
$$L = T_{E\ell} - V_{E\ell} + T_{Me} + V_{Me} \qquad (5.6)$$

حيث $T_{E\ell}$ و $V_{E\ell}$ تعطيان كما في العلاقتين (5.1) و(5.2) و T_{Me} و V_{Me} يمثلان الطاقة الميكانيكية الحركية والكامنة على الترتيب، والمعبر عنهما في أي إحداثيات مكانية معممة $q_1, q_2, \ldots q_{n_1}$. إذا كان بالإضافة للإحداثيات n_1 المكانية هناك n_2 شحنة مستقلة تؤخذ بعين الاعتبار فإن المنظومة سوف تملك $n = n_1 + n_2$ درجة حرية. وان تطبيق معادلات لاغرانج على التابع (5.6) يؤدي مباشرة إلى $n_1 + n_2$ معادلة للحركة.

عند كتابة التابع (5.6) لأية مسألة خاصة، يجب الانتباه عند اختيار الواحدات، بحيث يجب أن يعبر عن كل الحدود في تابع لاغرانج L بنفس واحدات الطاقة. وكما ذكر سابقاً لا يوجد واحدات معينة اعتمدت في هذا الفصل.

وان القوى المعممة (بغض النظر عن حدود الطاقة الكامنة في L) لكل من الإحداثيات الكهربائية والمكانية حسبت بطريقة تقليدية كما سيلاحظ من المثال التالي:

مثال: لتكن الدارة (المجموعة) الممثلة في الشكل (5.5).



الشكل (5.5)

حيث يكون اللبوس العلوي للمكثفة C الكتلة m، المعلقة بملف نابضي ثابت مرونته K. وهو يتحرك بحرية شاقولياً تحت تأثير الثقالة، المرونة والحقل الكهربائي بين اللبوسين.

والميزة غير العادية لهذه المجموعة هي السعة المتغيرة C.

يمثل الخط المنقط وضع توازن اللبوس عندما تكون المكثفة غير مشحونة. ولنفرض أن الهواء موجود بين اللبوسين، عندئذ تكون سعة المكثفة:

$$C = A/(s-x)$$

حيث A ثابت وقيمته ترتبط بمساحة اللبوس وبالواحدات المستخدمة و s المسافة المشار إليها في الشكل.

في هذه المجموعة يكون تابع لاغرانج:

$$L=\frac{1}{2}M\dot{Q}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+QE_0\sin\omega t-\frac{1}{2}Q^2\left(s-x\right)/A-\frac{1}{2}kx^2$$

إن للمجموعة درجتين من الحرية، والاحداثيان هما Q و x.

ومن تابع لاغرانج نوجد المعادلات التفاضلية الموافقة:

$$M\ddot{Q}+Q\left(s-x\right)/A-E_0\sin\omega t=-R\dot{Q}$$

$$m\ddot{x}+kx-\frac{1}{2}Q^2/A=0$$

والجدير بالذكر بأن كلاً من فرق الجهد للتحريضية الذاتية $M\ddot{Q}$ وفرق الجهد عبر المكثفة: $Q\left(s-x\right)/A$ وقوة التنافر بين اللبوسين $\frac{1}{2}Q^2/A$ مأخوذة بالحسبان ضمنياً في معادلات لاغرانج.

تمارين

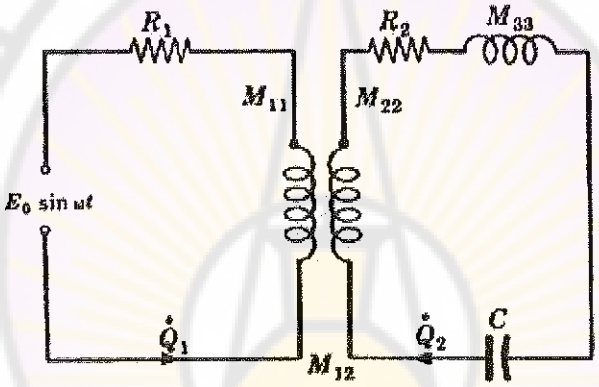
1- برهن أن تابع لاغرانج ومعادلات الحركة للدارة المبينة في الشكل (5.6) هي:

$$L=\frac{1}{2}\left[M_{11}+\dot{Q}_1^2+M_{12}\dot{Q}_1\dot{Q}_2+\left(M_{22}+M_{33}\right)\dot{Q}_2^2\right]$$

$$+Q_1E_0\sin\omega t-\frac{1}{2}Q_2^2/C$$

$$M_{11}\ddot{Q}_1+M_{12}\ddot{Q}_2-E_0\sin\omega t=-R_1\dot{Q}_1$$

$$\left(M_{11}+M_{12}\right)\ddot{Q}_2+M_{12}\ddot{Q}_1+Q_2/C=-R_2\dot{Q}_2$$



الشكل (5.6)

وذلك باعتبار عدم وجود تحريضية تبادلية بين M_{33} والتحريضيات الأخرى في الدارة.

2- يعلق نصف الاسطوانة المجوفة A في وضعية شاقولية الشكل (5.7) بواسطة قضيب مرن رفيع (ثابت فتله k) في النقطة O وذلك وفق محور الاسطوانة A بحيث يمكن للاسطوانة أن تدور داخل B. تعطى سعة المكثفة المتغيرة بالعلاقة:

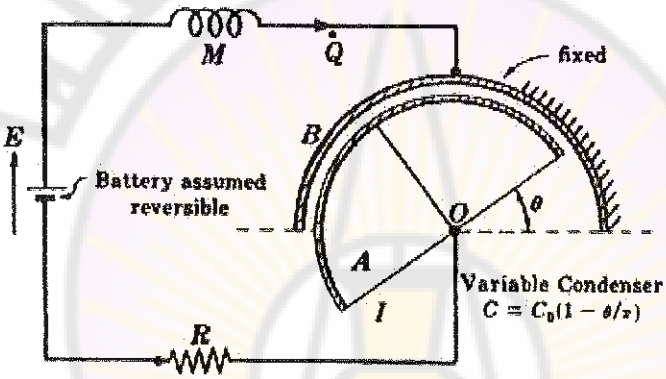
$$C=C_0\left(1-\theta/\pi\right)$$

وباعتبار أن الزاوية $\theta=\theta_1$ توافق وضعية القضيب دون فتل (حالة الاسترخاء). برهن أن تابع لاغرانج ومعادلات الحركة هي من الشكل:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{Q}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+EQ-\frac{Q^2}{2C_0(1-\theta/\pi)}-\frac{1}{2}k(\theta_1-\theta)^2$$

$$\ddot{\theta}+\frac{Q}{C_0(1-\theta/\pi)}-E=-R\dot{Q}$$

$$I\ddot{\theta}+\frac{Q^2}{2\pi C_0(1-\theta/\pi)^2}-k(\theta_1-\theta)=0$$

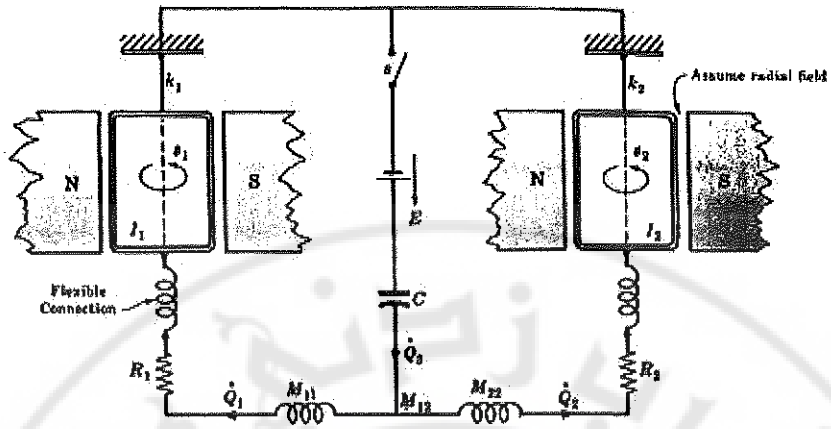


الشكل (5.7)

3- نصل مقياسي غلفاني ذوي مغناطيسسين دائمين كما يبين الشكل (5.8). بيّن أن تابع لاغرانج الذاتي للجملة في حال اعتبار الحقول المغناطيسية القطرية يعطى بالعلاقة:

$$L=\frac{1}{2}\left(M_{11}\dot{Q}_1^2+2M_{12}\dot{Q}_1\dot{Q}_2+M_{22}\dot{Q}_2^2\right)+\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2+N_1\phi_1\dot{Q}_1\theta_1$$
$$+N_2\phi_2\dot{Q}_2\theta_2+(Q_1+Q_2)E_1-\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)^2/C-\frac{1}{2}k_1\theta_1^2-\frac{1}{2}k_2\theta_2^2$$

حيث M_{11}، M_{22} يعبران عن التحريضيتين الذاتيتين لملفات مقياسي الغلفاني 1 و2 على التوالي. ثم اكتب معادلات الحركة.



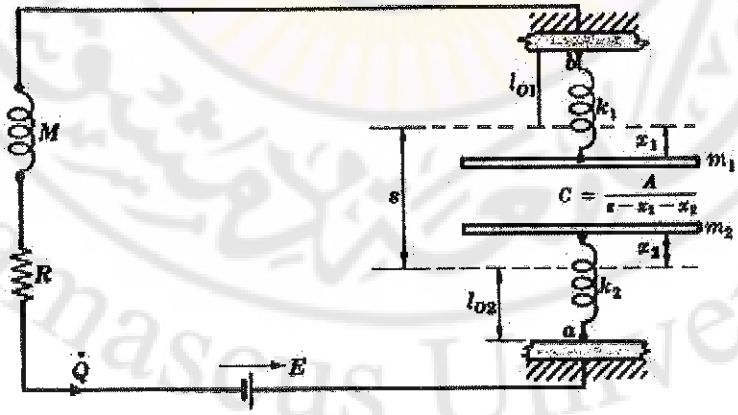
الشكل (5.8)

4- في الشكل (5.9) يستطيع لبوسا المكثف المتغير الحركة بشكل حر على طول الخط ab بدون دوران تحت تأثير نابض والحقل الكهربائي بين اللبوسين. برهن أن تابع لاغرانج للجملة يعطى بالعلاقة:

$$L=\frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2+M\dot{Q}^2\right)-\frac{1}{2}\left(k_1x_1^2+k_2x_2^2\right)$$

$$+EQ-\frac{1}{2}Q^2\left(s-x_1-x_2\right)/A$$

حيث A ثابت. اكتب معادلات الحركة.



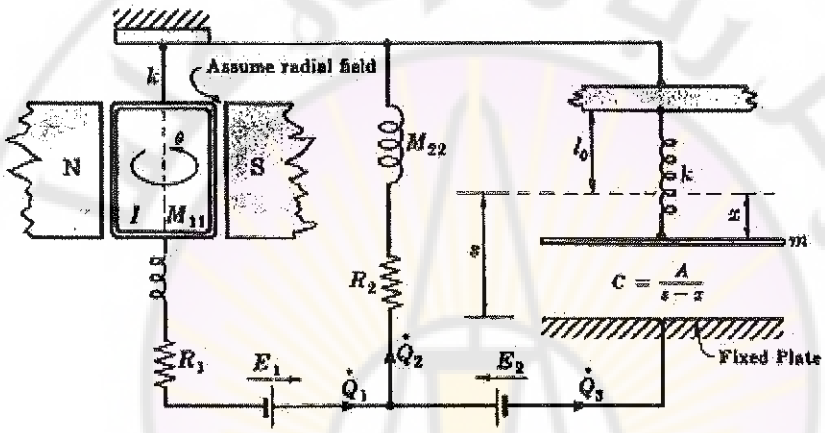
الشكل (5.9)

5- نصل المكثف المتغير ومقياس غلفاني كما في الشكل (5.10). برهن أن تابع لاغرانج للجملة هو:

$$L=\frac{1}{2}\left(I\dot{\theta}^2+m\dot{x}^2+M_{11}\dot{Q}_1^2+M_{22}\dot{Q}_2^2\right)+E_1Q_1-E_2\left(Q_1-Q_2\right)$$

$$+N\phi\dot{Q}_1\theta-\frac{1}{2}\left[kx^2+\left(Q_1-Q_2\right)^2\left(s-x\right)/A+k\theta^2\right]+mgx$$

اكتب معادلات الحركة.



الشكل (5.10)

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

6. حركة الجسم الصلب

6. 1. السرعة الزاوية

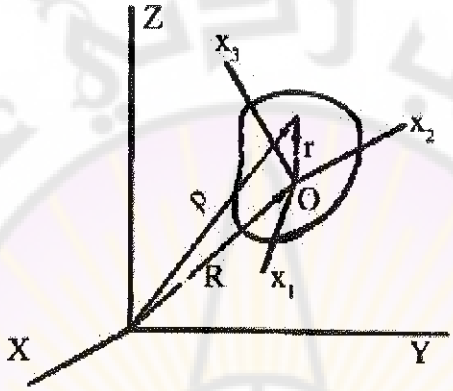
يعرف الجسم الصلب في الميكانيك على أنه مجموعة من النقاط المادية، تبعد بعضها عن بعض مسافات ثابتة. غير أنه يوجد في الطبيعة جسيمات لا تحقق ذلك الشرط إلا بصورة تقريبية. إذ أن أغلب الأجسام الصلبة تغير إلى حد ما شكلها وأبعادها في الشروط العادية. لهذا فعند دراسة قوانين حركة الجسم الصلب يمكن تماماً إهمال تلك التغيرات ويتميز الجسم عند ذلك بالصلابة المطلقة.

من أجل تبسيط بعض النتائج المتعلقة بحركة الجسم الصلب، يفرض في كثير من الحالات كمجموعة منفصلة من النقاط المادية. وهذا بحد ذاته لا يمكن أن يناقض الحالة التي نعد فيها الأجسام الصلبة فعلاً كأجسام مستمرة دون النظر إلى التكوين الداخلي لها. ويتم الانتقال من العلاقات التي تحوي مجموع النقاط المنفصلة إلى علاقات الجسم المستمر وذلك بتبديل كتلة الجسيمات الكتلة ρdV المحصورة في عنصر الحجم dV (ρ كثافة الكتلة)، ثم المكاملة بالنسبة للحجم الكلي للجسم المدروس.

ولوصف حركة الجسم الصلب يفرض وجود جملتين للإحداثيات: "الثابتة" وهي الجملة العطالية XYZ والجملة المتحركة للإحداثيات $x_1 = x$، $x_2 = y$، $x_3 = z$ المتماسكة مع الجسم الصلب والتي تسهم في وصف جميع حركاته. أما مبدأ الجملة المتحركة فمن الملائم اختياره في مركز عطالة الجسم.

يتحدد تماماً وضع الجسم الصلب بالنسبة للجملة الثابتة بمعرفة وضع

الجملة المتحركة. وهذا يتم بمعرفة المركبات الثلاث لشعاع موضع مبدأ الجملة المتحركة $\vec{R}$ الشكل (6.1) وبمعرفة اتجاهات محاورها بالنسبة للجملة الثابتة، وتتعين اتجاهات هذه المحاور بثلاث زوايا مستقلة بعضها عن بعض. في النتيجة نحصل على ستة إحداثيات مستقلة. وهكذا فإن أي جسم صلب هو مجموعة ميكانيكية لها ست درجات من الحرية.



الشكل (6.1)

لندرس انتقالاً كيفياً لا متناهياً في الصغر للجسم الصلب. يمكن تمثيل هذا الانتقال على شكل مجموع انتقالين جزئيين أحدهما انتقال انسحابي صغير للجسم، بنتيجته ينتقل مركز العطالة من وضع أولي إلى وضع نهائي مع عدم تغيير اتجاه المحاور الإحداثية للجملة المتحركة. والانتقال الثاني هو دوران لا متناه في الصغر حول مركز العطالة، بنتيجته يصل الجسم إلى الوضع النهائي.

لنرمز بـــ $\vec{r}$ و $\vec{\rho}$ إلى شعاعي الموضع لأية نقطة من الجسم وذلك بالنسبة للجملتين المتحركة والثابتة على الترتيب. عندئذ فأي انزياح لا متناه في الصغر $\overrightarrow{d\rho}$ للنقطة p من الجسم هو مجموع الانزياح $d\vec{R}$ الموافق لانتقال مركز العطالة والانزياح $\left(d\vec{\varphi}\wedge\vec{r}\right)$ بالنسبة إلى مركز العطالة والموافق لدوران الجسم زاوية لا متناهية في الصغر $d\vec{\varphi}$ انظر العلاقة (3.20):

$$d\vec{\rho}=d\vec{R}+\left(d\vec{\varphi}\wedge\vec{r}\right)$$

بتقسيم هذه العبارة على dt – الفترة الزمنية التي يتم خلالها الانتقال، وبفرض أن:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{v} \quad , \quad \frac{d\vec{R}}{dt}=\vec{V} \quad , \quad \frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\vec{\Omega} \qquad (6.1)$$

نحصل على:

$$\vec{v}=\vec{V}+\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right) \qquad (6.2)$$

يمثل الانزياح $\vec{V}$ سرعة مركز عطالة الجسم الصلب ويسمى أيضاً السرعة الانسحابية للحركة. أما الشعاع $\vec{\Omega}$ فيسمى السرعة الزاوية لدوران الجسم الصلب وينطبق اتجاهه (اتجاه $d\vec{\varphi}$ نفسه) على اتجاه محور الدوران. وهكذا فإن سرعة أي نقطة من الجسم $\vec{v}$ (بالنسبة إلى الجملة الثابتة) يمكن التعبير عنها بدلالة السرعة الانسحابية للجسم والسرعة الزاوية لدورانه.

ومن الملاحظ أننا لم نستخدم عند استنتاج العلاقة (6.2) الميزات المترتبة على اختيارنا مركز العطالة مبدأ لجملة الإحداثيات المتحركة. إذ أن مزايا هذا الاختيار ستتوضح فيما بعد عند حساب الطاقة الحركية للجسم الصلب.

نفرض الآن أن مبدأ الإحداثيات المتماسكة مع الجسم الصلب لا ينطبق على مركز العطالة O وإنما هو نقطة أخرى O' تبعد المسافة $\vec{a}$ عن النقطة O. ونرمز لسرعة انتقال المبدأ O' بـ $\vec{V}'$ وللسرعة الزاوية لدورانها بـ $\vec{\Omega}'$.

واعتماداً على ذلك الفرض لندرس من جديد حركة نقطة ما –p– من الجسم الصلب، حيث نرمز لشعاع موضعها بالنسبة إلى المبدأ O' بـ $\vec{r}'$، عندئذ يكون $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{a}$ وبالتعويض في العلاقة (6.2) نحصل على:

$$\vec{v}=\vec{V}+\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{a}\right)+\left(\vec{\Omega}'\wedge\vec{r}'\right)$$

ومن جهة أخرى – حسب تعريف $\vec{V}'$ و $\vec{\Omega}'$ – ينبغي أن يكون:

$$\vec{v}=\vec{V}'+\left(\vec{\Omega}'\wedge\vec{r}'\right)$$

لهذا نستنتج أن:

$$\vec{V}' = \vec{V} + \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{a}\right) \quad , \quad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega} \qquad (6.3)$$

إن العلاقة الثانية من (6.3) هامة جداً. فنحن نرى أن السرعة الزاوية لجملة الإحداثيات المتماسكة مع الجسم لا تتعلق أبداً بهذه الجملة. فكل هذه الجمل تدور في لحظة زمنية مفروضة حول محاور موازية لبعضها بعضاً بسرعات متساوية بقيمتها المطلقة. واستناداً لهذا نستطيع تسمية $\vec{\Omega}$ السرعة الزاوية لدوران الجسم الصلب نفسه. أما سرعة الحركة الانسحابية فهي لا تتمتع أبداً بذلك الطابع المطلق. وتدل العلاقة الأولى من (6.3) على أنه إذا كان $\vec{V}$ و $\vec{\Omega}$ (في لحظة مفروضة) متعامدين عند أي اختيار لمبدأ الإحداثيات O فهما (أي $\vec{V}'$ و $\vec{\Omega}'$) متعامدين عند تعيينهما بالنسبة إلى أي مبدأ آخر للإحداثيات O'. وفي هذه الحالة نرى من المساواة (6.2) أن السرع $\vec{v}$ لجميع نقاط الجسم تقع في مستو واحد هو المستوي العمودي على $\vec{\Omega}$. عند هذا يمكن دوماً اختيار المبدأ O'* الذي سرعته $\vec{V}'$ معدومة، مما يجعل حركة الجسم الصلب (في اللحظة المفروضة) حركة دورانية فقط حول المحور المار من O'. يسمى هذا المحور **المحور الآني** لدوران الجسم†.

في دراستنا القادمة سوف نفرض دوماً مبدأ الجملة المتحركة للإحداثيات هو مركز عطالة الجسم بحيث يمر محور دوران الجسم من ذلك المركز. وبصورة عامة عند حركة جسم ما فإن القيمة المطلقة لـ $\vec{\Omega}$ تتغير وكذلك يتغير اتجاه محور الدوران.

---

* يمكن أن يقع مبدأ الإحداثيات خارج الجسم.

† في اللحظة العامة عندما لا يكون $\vec{V}$ و $\vec{\Omega}$ متعامدين فإن مبدأ الإحداثيات يمكن اختياره بشكل يصبح فيه $\vec{V}$ و $\vec{\Omega}$ متوازيين، أي أن الحركة (في اللحظة المفروضة) تكون مركبة: دورانية حول محور ما وانسحابية موازية لذلك المحور نفسه.

6. 2. الطاقة الحركية للجسم الصلب

لحساب الطاقة الحركية للجسم الصلب الذي نعتبره مجموعة منفصلة من النقاط حيث يكون: $T=\sum\frac{mv^2}{2}$ ويشمل المجموع هنا كل النقاط المؤلفة للجسم، ونقصد من عدم وضع الرقم الدال على ترتيب النقاط تبسيط كتابة العلاقات. بالعودة إلى عبارة السرعة $\vec{v}$ من العلاقة (6.2) نكتب الطاقة الحركية:

$$T=\sum\frac{m}{2}\left[\vec{V}+\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)\right]^2$$

$$=\sum\frac{m}{2}V^2+\sum\left[m\vec{V}.\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)\right]+\sum\frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)^2$$

إن السرعات $\vec{V}$ و $\vec{\Omega}$ واحدة لجميع نقاط الجسم الصلب. لهذا في الحد الأول سنضع $\frac{V^2}{2}$ خارج إشارة المجموع، وبالإضافة لذلك فإن المجموع $\sum m$ يمثل كتلة الجسم μ. أما الحد الثاني فنكتبه بالشكل:

$$\sum m\vec{V}.\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)=\sum m\vec{r}.\left(\vec{V}\wedge\vec{\Omega}\right)=\left(\vec{V}\wedge\vec{\Omega}\right)\sum m\vec{r}$$

من هنا نرى أنه لو أخذنا مبدأ الإحداثيات في مركز العطالة، فإن هذا الحد ينتهي إلى الصفر لأن $\sum m\vec{r}=0$. وأخيراً لنفك مربع الجداء الشعاعي في الحد الثالث مستخدمين العلاقة الشعاعية:

$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right).\left(\vec{C}\wedge\vec{D}\right)=\left(\vec{A}.\vec{C}\right)\left(\vec{B}.\vec{D}\right)-\left(\vec{A}.\vec{D}\right)\left(\vec{B}.\vec{C}\right)$$

فنجد:

$$\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)^2=\Omega^2r^2-\left(\vec{\Omega}.\vec{r}\right)^2$$

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega^2r^2-\left(\vec{\Omega}.\vec{r}\right)^2\right] \qquad (6.4)$$

وهكذا يمكن تمثيل الطاقة الحركية على شكل مجموع حدين. يمثل الحد الأول في العلاقة (6.4) الطاقة الحركية للحركة الانسحابية وكأن كتلة الجسم متجمعة في مركز عطالته. أما الحد الثاني فهو عبارة عن الطاقة الحركية للحركة الدورانية ذات السرعة الزاوية $\vec{\Omega}$ حول المحور المار من مركز العطالة. والجدير بالذكر أن كتابة الطاقة الحركية على شكل حدين مشروط باختيار مبدأ جملة الإحداثيات، المتماسكة مع الجسم في مركز عطالته.

ننتقل الآن إلى كتابة الطاقة الحركية الدورانية بشكل تنسوري، وذلك باستخدام المركبات x_i و Ω_i للأشعة $\vec{r}$ و $\vec{\Omega}$* فيكون لدينا:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_\ell^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Omega_i \Omega_k \sum m\left(x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right)$$

لقد استخدمنا هنا المتطابقة $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$، δ_{ik} تنسور الواحدة (الذي مركباته تساوي الواحد عندما $i = k$ وتساوي الصفر عندما $i \neq k$). وبإدخال التنسور:

$$I_{ik} = \sum m\left(x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) \qquad \textbf{(6.5)}$$

فإننا نحصل على العلاقة النهائية للطاقة الحركية للجسم الصلب:

---

* في هذا الفصل تعبر الحروف ℓ, k, i عن الأدلة التنسورية التي تأخذ القيم $3,2,1$ وعندئذ تستخدم قاعدة الجمع المعروفة التي وفقها تهمل إشارة الجمع بحيث تدل الأدلة المتكررة لكل حدين على عملية الجمع حسب القيم $3,2,1$ كما يلي:

$$A_i B_i = \vec{A}.\vec{B} \quad , \quad A_\ell^2 = A_\ell . A_\ell = A^2$$

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \qquad (6.6)$$

وللحصول على تابع لاغرانج للجسم الصلب نطرح الطاقة الكامنة من العلاقة السابقة:

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U \qquad (6.7)$$

حيث U تكون بشكل عام تابعاً لستة متحولات تعين وضع الجسم الصلب وهذه المتحولات على سبيل المثال هي إحداثيات مركز العطالة Z,Y,X والزوايا التي تحدد اتجاه المحاور الإحداثية المتحركة بالنسبة للمحاور الثابتة.

نسمي التنسور I_{ik} **تنسور عزوم العطالة** أو ببساطة تنسور العطالة للجسم. وواضح من التعريف (6.5) أن هذا التنسور متناظر، أي أن:

$$I_{ik} = I_{ki} \qquad (6.8)$$

ولكي يتضح لنا تنسور العطالة أكثر نكتب مركباته بشكل مفصل في الجدول التالي:

$$I_{ik} = \begin{Vmatrix} \sum m\left(y^2 + z^2\right) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m\left(x^2 + z^2\right) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m\left(x^2 + y^2\right) \end{Vmatrix} \qquad (6.9)$$

أو بالصورة التالية:

$$I_{ik} = \begin{Vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{Vmatrix}$$

تسمى أحياناً المركبات I_{zz}, I_{yy}, I_{xx} عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الموافقة z,y,x على الترتيب. بينما تسمى المركبات الأخرى جداء عزوم العطالة.

واضح أن تنسور العطالة قابل للتجميع – فعزوم العطالة لجسم ما يساوي مجموع عزوم العطالة لأجزائه.

إذا نظرنا للجسم الصلب كجسم مستمر، فإننا نغير إشارة المجموع في التعريف (6.5) إلى تكامل على حجم الجسم بكامله:

$$I_{ik} = \int_V \rho\left(x_\ell^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)dV \qquad \textbf{(6.10)}$$

وكأي تنسور متناظر من المرتبة الثانية (tensor of second rank)، فإن تنسور العطالة يمكن تحويله إلى شكل قطري عن طريق اختيار مناسب لاتجاه المحاور $x_1 = x$ و $x_2 = y$ و $x_3 = z$ التي تسمى **المحاور الرئيسة للعطالة**. أما القيم الموافقة لمركبات التنسور فتسمى العزوم الرئيسة للعطالة ونرمز لها بـ I_1 و I_2 و I_3 عند هذا الاختيار للمحاور x_1 و x_2 و x_3 يعبر عن الطاقة الحركية الدورانية بشكل مبسط:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) \qquad \textbf{(6.11)}$$

وبالمناسبة فإن أي عزم من العزوم الرئيسة الثلاثة للعطالة لا يمكن أن يكون أكبر من مجموع الاثنين الآخرين. ويتضح ذلك من العلاقة التالية:

$$I_1 + I_2 = \sum m\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2\right) \geq \sum m\left(x_1^2 + x_2^2\right) = I_3 \qquad \textbf{(6.12)}$$

عندما تكون العزوم الرئيسة للعطالة لجسم ما مختلفة فإننا نسمي ذلك الجسم **الدوامة اللامتناظرة** (asymmetric top).

وفي حالة تساوي عزمين رئيسين للعطالة $I_1 = I_2 \neq I_3$، فإن الجسم يسمى الدوامة المتناظرة. وفي هذه الحالة يكون اختيار المحاور الرئيسة كيفياً في المستوي x_2x_1 أما في حالة تساوي العزوم الرئيسة للعطالة فإن الجسم يسمى الدوامة الكروية (spherical top) وهنا يكون اختيار المحاور الثلاثة للعطالة كيفياً ويمكن أخذ أي ثلاثة محاور متعامدة فيما بينها.

يتم إيجاد المحاور الرئيسة للعطالة بسهولة كبيرة إذا كان الجسم الصلب يتصف بخواص تناظرية. فالجسم الذي له مستوي تناظر كالمستوي xy، نستطيع أخذ جميع نقاطه زوجاً زوجاً (خارج المستوي)، فيكون:

$$m = m' \quad , \quad r(x,y,z) \quad , \quad r'(x,y,-z)$$

وبالرجوع إلى تعريف العطالة والعلاقة (6.9)، نستنتج أن مركز العطالة في هذه الحالة يقع في مستوي التناظر. ويقع في المستوي نفسه اثنان من المحاور الرئيسة للعطالة ويكون المحور الثالث عمودياً عليه. كحالة خاصة لذلك النوع من التناظر: وجود مجموعة من الجسيمات في مستو واحد. وهنا نجد علاقة بسيطة بين العزوم الرئيسة الثلاثة. فإذا اخترنا مستوي الجسيمات هو المستوي x_1x_2 فيكون الإحداثي الثالث لكل الجسيمات معدوماً $x_3 = 0$ وعندئذٍ يكون:

$$I_1 = \sum mx_2^2 \quad , \quad I_2 = \sum mx_1^2 \quad , \quad I_3 = \sum m\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

حيث أن:

$$I_3 = I_1 + I_2 \tag{6.13}$$

وإذا كان للجسم محور تناظر كالمحور oz فهذا يعني أن:

$$m = m' \quad , \quad r(x,y,z) \quad , \quad r'(-x,-y,z)$$

ويقع مركز عطالته على ذلك المحور وينطبق أحد المحاور الرئيسة للعطالة على محور التناظر ويكون المحوران الآخران عموديين عليه.

ففي حالة مجموعة جسيمات موجودة على خط مستقيم، يمكن اختيار ذلك المستقيم بمثابة محور العطالة x_3 ويكون لجميع الجسيمات $x_1 = x_2 = 0$، لهذا فإن عزمين رئيسين للعطالة يتساويان بينما ينعدم العزم الثالث:

$$I_1 = I_2 = \sum mx_2^2 \quad , \quad I_3 = 0 \tag{6.14}$$

تسمى هذه المجموعة الدوار (rotator). والصفة المميزة للدوار عن الحالة

العامة لجسم ما هو أن الدوار يتمتع بدرجتين من الحرية توافقان الدوران حول المحورين x_2, x_1، وذلك لأن الحديث عن دوران المستقيم حول نفسه لا يحمل أي معنى.

وأخيراً لنعالج تحويل تنسور العطالة نتيجة لتحويل الإحداثيات المتماسكة مع الجسم الصلب. فبالرغم من تعريفنا لتنسور العطالة بالنسبة لجملة الإحداثيات التي مبدؤها مركز العطالة (عند هذا التعريف فقط تكون العلاقة الأساسية (6.5) صحيحة)، يبدو أحياناً من الملائم حساب تنسور العطالة المشابه:

$$I'_{ik} = m\left(x'^2_\ell \delta_{ik} - x'_i x'_k\right)$$

والمعين بالنسبة لمبدأ آخر O'. فإذا كانت المسافة OO' تعطى بالشعاع $\vec{a}$، فإن:

$$x_i = x'_i + a_i \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

فإذا عوضنا هذا في العلاقة السابقة نجد:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right) - 2\vec{a}\delta_{ik}\sum m\vec{r} + a_k\sum m x_i + a_i\sum$$

ولأن $\sum m\vec{r} = 0$ وذلك حسب تعريف النقطة O، فإن العلاقة الأخيرة تأخذ الشكل:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right) \qquad (6.15)$$

نجد من هذه العلاقة أنه يمكن بسهولة حساب التنسور المباشر I_{ik} بعد معرفة I'_{ik}

6. 3. عزم اندفاع الجسم الصلب

ترتبط قيمة عزم الاندفاع لمجموعة ميكانيكية باختيار النقطة التي نحسب العزم بالنسبة لها. ففي أكثر الحالات في ميكانيك الجسم، نختار تلك النقطة مبدأ للإحداثيات المتحركة – أي في مركز عطالة الجسم. وسنرمز من الآن وصاعداً لعزم الاندفاع المعين بالنسبة لتلك النقطة المختارة بالرمز $\vec{M}$.

وحسب العلاقة (3.16)، نجد عند اختيار مبدأ الإحداثيات في مركز عطالة الجسم أن العزم $\vec{M}$ يطابق (العزم الذاتي) الذي يرتبط فقط بحركة نقاط الجسم بالنسبة إلى مركز العطالة. ويؤدي هذا الاختيار إلى تعويض السرعة $\vec{v}$ بـــ$\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)$، فتصبح عبارة العزم:

$$\vec{M}=\sum m\left(\vec{r}\wedge\vec{v}\right)$$

بالشكل التالي:

$$\vec{M}=\sum m\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right)\right]=\sum m\left[r^2\vec{\Omega}-\vec{r}\left(\vec{r}.\vec{\Omega}\right)\right]$$

وتكتب هذه العبارة باستخدام الرموز التنسورية:

$$M_i=\sum m\left(x_\ell^2\Omega_i-x_ix_k\Omega_k\right)=\Omega_k\sum m\left(x_\ell^2\delta_{ik}-x_ix_k\right)$$

وبالرجوع إلى تعريف تنسور العطالة (6.5)، نحصل بشكل نهائي على العلاقة:

$$M_i=I_{ik}\Omega_k \qquad \textbf{(6.16)}$$

ولو وجهت المحاور x_3,x_2,x_1 باتجاه المحاور الرئيسة للعطالة، فإن العلاقة الأخيرة تعطي:

$$M_1=I_1\Omega_1 \quad , \quad M_2=I_2\Omega_2 \quad , \quad M_3=I_3\Omega_3 \qquad \textbf{(6.17)}$$

في الحالة الخاصة عندما يكون الجسم الصلب دوامة كروية، فإن العزوم الرئيسة للعطالة تكون متساوية، وعندئذ نكتب:

$$\vec{M}=I\vec{\Omega} \qquad \textbf{(6.18)}$$

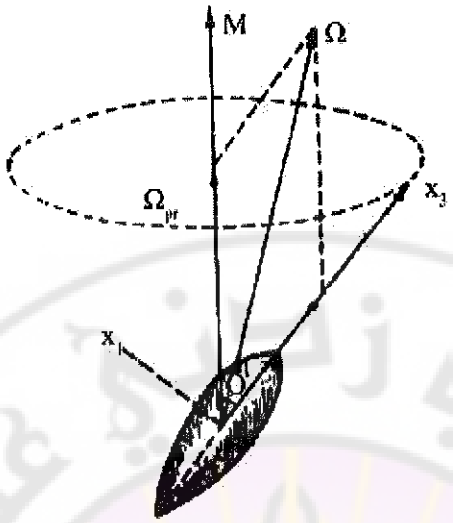
أي أن شعاع العزم يتناسب مع شعاع السرعة الزاوية ويكون لهما الاتجاه نفسه.

في الحالة العامة من أجل جسم ما، فإن الشعاع $\vec{M}$ لا ينطبق على الشعاع $\vec{\Omega}$، ويتم ذلك فقط عندما يدور الجسم حول أي محور من محاوره الرئيسة للعطالة.

لنعالج الآن الحركة الحرة للجسم الصلب الذي لا يخضع لتأثير أي من القوى الخارجية وذلك بدراسة حركته الدورانية فقط دون التعرض لحركته الانسحابية المنتظمة. وكأي مجموعة مغلقة يكون عزم الاندفاع للدوران الحر للجسم الصلب ثابتاً. فمن أجل الدوامة الكروية يؤدي الشرط $\vec{M} = \text{const}$ إلى أن السرعة الزاوية ثابتة $\left(\vec{\Omega} = \text{const}\right)$ وهذا يدل على أنه في الحالة العامة يكون الدوران الحر للدوامة الكروية دوراناً منتظماً حول محور ثابت.

أما في حالة الدوار فيكون $\vec{M} = I\vec{\Omega}$، حيث الشعاع $\vec{\Omega}$ عمودي على محور الدوار، لهذا فإن الدوران الحر للدوار هو دوران منتظم في مستو واحد حول اتجاه عمودي على ذلك المستوي.

إن قانون انحفاظ العزم كاف لتعيين الحركة الدورانية الأكثر تعقيداً في الدوامة المتناظرة. وباختيارنا الكيفي لاتجاهات المحاور الأساسية x_1 و x_2 (العمودية على محور تناظر الدوامة x_3) وذلك بعد أن نأخذ المحور x_2 عمودياً على المستوي المحدد بالشعاع الثابت $\vec{M}$ والوضع الآني للمحور x_3، عندئذ يكون $M_2 = 0$. ومن العلاقات (6.17) نرى أن $\Omega_2 = 0$. وهذا يعني أن الأشعة $\vec{M}$ و $\vec{\Omega}$ ومحور الدوامة في كل لحظة تقع في مستو واحد (الشكل (6.2)). لكن من هنا ينتج أن سرع جميع النقاط $\vec{v} = \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right)$ الموجودة على محور الدوامة في كل لحظة هي عمودية على المستوي المشار إليه، وبتعبير آخر فإن محور الدوامة يدور بانتظام حول الاتجاه $\vec{M}$ راسماً مخروطاً دورانياً (أو ما يسمى بالمبادرة المنتظمة للدوامة (regular precession of top)) وبالوقت نفسه فإن الدوامة بذاتها تدور بانتظام حول محورها الذاتي.



الشكل (6.2)

يمكن بسهولة التعبير عن السرع الزاوية لكل من هاتين الحركتين الدورانيتين بدلالة مقدار العزم M وزاوية انحراف محور الدوامة θ عن الاتجاه $\vec{M}$. فالسرعة الزاوية لدوران الدوامة حول محورها هي المسقط Ω_3 للشعاع $\vec{\Omega}$ على ذلك المحور:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta \qquad (6.19)$$

ولتعيين سرعة المبادرة Ω_{pr} ينبغي تحليل الشعاع $\vec{\Omega}$ حسب قاعدة متوازي الأضلاع إلى مركباته وفقاً للمحور x_3 والشعاع $\vec{M}$. إن المركبة الأولى لا تؤدي إلى أي انتقال لمحور الدوامة نفسه، لذا فإن المركبة الثانية تعطي السرعة الزاوية المباشرة للمبادرة. ومن الشكل (6.2) نرى أن $\Omega_{pr}\sin\theta = \Omega_1$، ولما كانت $\Omega_1 = M_1 / I_1 = M\sin\theta / I_1$ فإننا نجد:

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1} \qquad (6.20)$$

6. 4. معادلات حركة الجسم الصلب

وجدنا أن للجسم الصلب في الحالة العامة ست درجات من الحرية. لهذا ينبغي على المجموعة العامة لمعادلات الحركة أن تحوي ست معادلات مستقلة. ويمكن تمثيل هذه المعادلات على شكل مشتقات بالنسبة للزمن لشعاع الاندفاع ولشعاع عزم اندفاع الجسم. وبسهولة يمكن الحصول على المعادلة الأولى من مجموعة تلك المعادلات وذلك عن طريق أخذ مجموع المعادلة $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ الصحيحة لكل جسيم من الجسيمات المؤلفة للجسم الصلب؛ حيث $\vec{p}$ ترمز إلى اندفاع الجسيم و $\vec{r}$ هي القوة المؤثرة فيه. وبإدخال الاندفاع الكلي للجسم:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \mu \vec{V}$$

والقوة الكلية المؤثرة فيه $\sum \vec{f} = \vec{F}$ ، نحصل على:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \qquad (6.21)$$

وبالرغم من تعريفنا لـــ $\vec{F}$ كمحصلة لكل القوى $\vec{f}$ المؤثرة في كل جسيم بما فيها القوى الداخلية المؤثرة فيه من جهة الجسيمات الأخرى المؤلفة للجسم الصلب، في الواقع يدخل في تلك المحصلة $\vec{F}$ القوى المؤثرة من جهة الحقل الخارجي فقط، وذلك لأن القوى الداخلية (قوى التأثير المتبادل) يفني بعضها بعضاً. فمثلاً عند انعدام القوى الخارجية فإن اندفاع الجسم الصلب – كأي مجموعة مغلقة – ينبغي أن يكون ثابتاً، أي ينبغي أن يكون $\vec{F} = 0$ وبالتالي فإن قوى التبادل الداخلية معدومة.

إذا كانت U الطاقة الكامنة للجسم الصلب في الحقل الخارجي، فإن القوة $\vec{F}$ تتعين بتفاضل الطاقة U بالنسبة لإحداثيات مركز عطالة الجسم:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} \qquad (6.22)$$

وبالفعل عند الانتقال الانسحابي للجسم بقدر $\delta\vec{R}$ فإن أشعة الموضع $\vec{\rho}$

لكل نقطة من نقاط الجسم يتغير بالقدر نفسه ويكون تغير الطاقة الكامنة الموافق:

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} \delta \vec{\rho} = \delta \vec{R} \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} = -\delta \vec{R} \sum \vec{f} = -\vec{F}.\delta \vec{R}$$

ومن المفيد أن نشير إلى أنه يمكن الحصول على العلاقة (6.21) من معادلة لاغرانج بالنسبة لإحداثيات مركز العطالة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

حيث يعطي تابع لاغرانج بالعلاقة (6.7) والذي من أجله يكون:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \mu \vec{V} = \vec{P} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F}$$

ننتقل الآن إلى استنتاج المعادلة الثانية للحركة والتي تعين مشتق عزم الاندفاع $\vec{M}$ بالنسبة للزمن. وللحصول عليها بطريقة سهلة نختار الجملة الثابتة (العطالية) بحيث يكون مركز عطالة الجسم ساكناً بالنسبة لها وذلك في لحظة معينة. فمعادلة الحركة التي سوف نحصل عليها بهذه الصورة تكون حسب مبدأ النسبية لغاليله صحيحة في أية جملة عطالة أخرى.

لدينا:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt}\sum\left(\vec{r} \wedge \vec{p}\right) = \sum\left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{p}\right) + \sum\left(\vec{r} \wedge \dot{\vec{p}}\right)$$

وحسب اختيارنا المذكور لجملة الإحداثيات (التي فيها $\vec{V} = 0$)، يكون $\vec{r}$ في اللحظة المعينة مطابقاً للسرعة $\vec{v} = \dot{\vec{\rho}}$. ولما كان للأشعة $\vec{v}$ و $\vec{p} = m\vec{v}$ اتجاه واحد فإن $\left(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{p}\right) = 0$. وبتبديل $\dot{\vec{p}}$ بالقوة $\vec{f}$ فإننا نحصل بشكل نهائي على العلاقة:

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \vec{K} \qquad \textbf{(6.23)}$$

حيث:

$$\vec{K} = \sum\left(\vec{r} \wedge \vec{f}\right) \qquad \textbf{(6.24)}$$

يسمى الشعاع $\left(\vec{r} \wedge \vec{f}\right)$ عزم القوة $\vec{f}$، وبالتالي يمثل الشعاع $\vec{K}$ مجموع عزوم كل القوى المؤثرة في الجسم. وهنا أيضاً -كما في المحصلة $-\vec{f}$ ينبغي أن نأخذ في المجموع (6.24) القوى الخارجية فقط، إذ أنه حسب قانون انحفاظ العزم، يجب أن يكون مجموع عزوم كل القوى المؤثرة داخل المجموعة المغلقة مساوياً الصفر. ومن الواضح أن عزم القوة كعزم الاندفاع فهو يرتبط بصورة عامة باختيار مبدأ الإحداثيات الذي يتعين العزم بالنسبة له. ففي العلاقات (6.23) و(6.24) تتعين العزوم بالنسبة إلى مركز عطالة الجسم.

عند انسحاب مبدأ الإحداثيات مسافة قدرها $\vec{b}$ فإن أشعة المواضع الجديدة $\vec{r}'$ لنقاط الجسم ترتبط مع أشعة المواضع القديمة $\vec{r}$ بالعلاقة: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{b}$ ولهذا يكون:

$$\vec{K} = \sum\left(\vec{r} \wedge \vec{f}\right) = \sum\left(\vec{r}' \wedge \vec{f}\right) + \sum\left(\vec{b} \wedge \vec{f}\right)$$

أو:

$$\vec{K} = \vec{K}' + \left(\vec{b} \wedge \vec{F}\right) \qquad \textbf{(6.25)}$$

من هنا نرى أن قيمة عزم القوى لا ترتبط باختيار مبدأ الإحداثيات إذا كانت القوة الكلية $\vec{F} = 0$ (في هذه الحالة يقال إن الجسم خاضع لمزدوجة قوى). يمكن النظر إلى المعادلة (6.23) كمعادلة لاغرانج بالنسبة إلى الإحداثيات الدورانية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}}$$

وبالفعل إذا فاضلنا تابع لاغرانج (6.7) بالنسبة إلى مركبات الشعاع $\vec{\Omega}$ ، فإننا نحصل على:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i$$

وعند دوران الجسم زاوية لا متناهية في الصغر $\delta\vec{\varphi}$، فإن الطاقة الكامنة تتغير بالمقدار:

$$\delta U = -\sum \vec{f}.\delta\vec{\rho} = -\sum \vec{f}\left(\delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r}\right) = -\delta\vec{\varphi}\sum\left(\vec{r} \wedge \vec{f}\right)$$
$$= -\vec{K}.\delta\vec{\varphi}$$

ومن هنا نجد:

$$\vec{K} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} \qquad (6.26)$$

حيث أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = \vec{K}$$

وهذا ما أردنا إثباته.

في الحالة الخاصة، عندما يتحرك الجسم الصلب في حقل متجانس للقوى، فإن القوة المؤثرة في نقطة مادية منه تأخذ الشكل $\vec{f} = e\vec{E}$، حيث $\vec{E}$ شعاع ثابت يميز الحقل و e مقدار يميز خواص الجسيم بالنسبة للحقل المفروض*. وفي هذه الحالة يكون:

$$\vec{F} = \vec{E}\sum e \quad , \quad \vec{K} = \left[\sum\left(e\vec{r} \wedge \vec{E}\right)\right]$$

بفرض أن $\sum e \neq 0$ واستخدام شعاع الموضع $\vec{r}_0$ المعرف بالعلاقة:

---

* في الحقل الكهربائي المتجانس يمثل $\vec{E}$ شدة الحقل وتمثل e شحنة الجسيم، أما في حقل الثقالة المتجانس فإن $\vec{E}$ يمثل تسارع قوة الثقالة $\vec{g}$ و e تمثل كتلة الجسيم m.

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum e\vec{r}}{\sum e} \qquad (6.27)$$

نحصل على العلاقة البسيطة التي تعطي العزم الكلي للقوى:

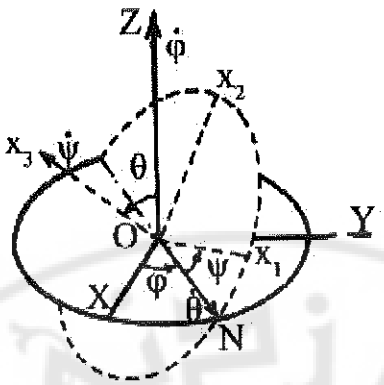
$$\vec{K} = \left(\vec{r}_0 \wedge \vec{F}\right) \qquad (6.28)$$

وهكذا، فعند حركة الجسم الصلب في حقل متجانس يؤول فعل الحقل إلى تأثير قوة وحيدة $\vec{F}$ "مطبقة" في نقطة يتعين شعاع موضعها بالعلاقة (6.27) ويتحدد هذا الموضع كلية من خواص الجسم نفسه، فعلى سبيل المثال تقع تلك النقطة في حقل الثقالة المتجانس في مركز عطالة الجسم.

6. 5. زوايا أولر

لدى معالجتنا وصف حركة الجسم الصلب أشرنا إلى أنه يمكن استخدام الإحداثيات الثلاثة لمركز عطالته وأي ثلاث زوايا تحدد اتجاه محاور الجملة المتحركة x_3, x_2, x_1 بالنسبة إلى الجملة الثابتة XYZ. وبمثابة هذه الزوايا من المناسب اختيار ما يسمى **زوايا أولر**.

وبما أن اهتمامنا الآن سيتركز فقط على الزوايا المحصورة بين المحاور الإحداثية فيمكن اختيار مبدأ الجملتين في نقطة واحدة الشكل (6.3). يقطع المستوي المتحرك x_1x_2 المستوي XY وفقاً للمستقيم ON الذي يسمى خط العقد.



الشكل (6.3)

ومن الواضح أن هذا الخط عمودي على كل من المحورين x_3 وz ونختار اتجاهه الموجب بحيث يتوافق مع اتجاه الجداء الشعاعي $\left(\vec{n}_z \wedge \vec{n}_{x_3}\right)$، علماً بأن $\vec{n}_z$ و $\vec{n}_{x_3}$ هي أشعة الواحدة في اتجاه المحاور z وx_3.

وبمثابة المقادير التي تحدد وضع المحاور x_3, x_2, x_1 بالنسبة إلى المحاور Z, Y, X نأخذ الزوايا التالية: الزاوية θ بين المحورين Zوx_3 والزاوية φ بين المحورين X وN والزاوية ψ بين المحورين N وx_1. تحسب الزوايا φ وψ في الاتجاهات المتعينة بقاعدة البزال حول المحاور Z وx_3 على الترتيب. وتتغير الزاوية θ بين الصفر وπ، أما الزوايا φ وψ فتتغير بين الصفر و2π.

لنعبر عن مركبات شعاع السرعة الزاوية $\vec{\Omega}$ وفقاً للمحاور المتحركة x_3, x_2, x_1 بدلالة زوايا أولر ومشتقاتها. لهذا ينبغي حساب مركبات السرع الزاوية $\dot{\theta}$ و $\dot{\varphi}$ و $\dot{\psi}$ على تلك المحاور. فالسرعة الزاوية $\dot{\theta}$ موجهة وفقاً لخط العقد ON ومركباتها على المحاور x_3, x_2, x_1 تساوي:

$$\dot{\theta}_3 = 0 \quad , \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi \quad , \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$$

أما السرعة $\dot{\varphi}$ فموجهة وفقاً للمحاور Z ومسقطها على المحور x_3 يساوي $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$ بينما مسقطها على المستوي x_1x_2 فيساوي $\dot{\varphi}\cos\theta$.

ومركبات المسقط الأخير على المحاور x_1 وx_2 هي:

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \quad , \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

وأخيراً فإن السرعة الزاوية $\dot{\psi}$ موجهة على المحور x_3، أي أن مركباتها على x_1 وx_2 معدومة. وبجمع كل هذه المركبات وفقاً لمحاور الإسقاط نحصل بشكل نهائي على:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \qquad \textbf{(6.29)}$$

لو اخترنا المحاور x_3, x_2, x_1 باتجاه المحاور الرئيسة للعطالة للجسم الصلب، فإننا نستطيع الحصول على الطاقة الحركية الدورانية معبراً عنها بدلالة زوايا أولر وذلك بتعويض العلاقات (6.29) و(6.11).

فمن أجل الدوامة المتناظرة التي يكون لها $I_1 = I_2 \neq I_3$ نجد بعد حساب بسيط:

$$T_{rot} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 \qquad \textbf{(6.30)}$$

لنلاحظ بأنه يمكن الحصول بسهولة على هذه العبارة لو أخذنا الاختيار الكيفي لاتجاه المحاور الرئيسة للعطالة x_1 وx_2. ولأن المحور x_1 منطبق على محور العقد ON، أي أن $\psi = 0$ يكون لدينا العبارات البسيطة التالية لمركبات السرعة الزاوية:

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \quad , \quad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta \quad , \quad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \qquad \textbf{(6.31)}$$

وكمثال بسيط على استخدام زوايا أولر يمكن تعيين الحركة الحرة للدوامة المتناظرة. فإذا اخترنا المحور Z في اتجاه العزم الثابت $\vec{M}$ للدوامة، والمحور x_3 من الجملة المتحركة في اتجاه محور الدوامة، وبفرض أن المحور x_1 ينطبق في اللحظة المفروضة على محور العقد، عندئذ نحصل على مركبات

العزم $\vec{M}$ وذلك بالاعتماد على العلاقات (6.31):

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta} \quad , \quad M_2 = I_2\Omega_2 = I_2 \sin\theta$$
$$M_3 = I_3\Omega_3 = I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)$$

ومن جهة أخرى، ما دام المحور x_1 (خط العقد) عمودياً على المحور Z، يكون لدينا:

$$M_1 = 0 \quad , \quad M_2 = M\sin\theta \quad , \quad M_3 = M\cos\theta$$

وبالمساواة بين أطراف العلاقات المتماثلة، نحصل على المعادلات التالية:

$$\dot{\theta} = 0 \quad , \quad I_1\dot{\varphi} = M \quad , \quad I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) = M\cos\theta \qquad \textbf{(6.32)}$$

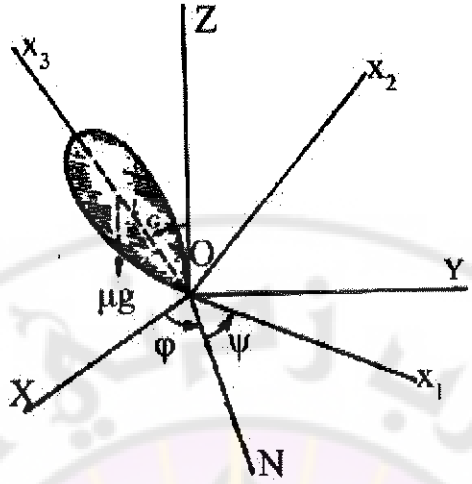
من المعادلة الأولى من (6.32) نجد أن $\dot{\theta} = \text{const}$ أي ثبات زاوية انحراف محور الدوامة عن الشعاع $\vec{M}$. أما المعادلة الثانية فتعين (كما ورد في (6.20) السرعة الزاوية للمبادرة $\dot{\varphi} = M / I_1$. وأخيراً فإن المعادلة الثالثة تعين السرعة الزاوية لدوران الدوامة حول المحور الذاتي $\Omega_3 = M\cos\theta / I_3$.

مثال: ادرس حركة الدوامة المتناظرة في حقل الثقالة المتجانس، علماً بأنها مثبتة في أخفض نقطة منها.

الحل: لنختر مبدأي الجملتين: الثابتة والمتحركة في نقطة تثبيت الدوامة O الشكل (6.4)، ونوجه المحور Z وفقاً للشاقول. سنبحث عن قانون الحركة بالاعتماد على تكاملات الحركة (انظر الفصل الثالث) وذلك بعد أن نوجد تابع لاغرانج للدوامة المفروضة. إن الطاقة الحركية تساوي مجموع الطاقة الحركية الدورانية والطاقة الحركية الناتجة عن حركة مركز عطالة الدوامة (العلاقتان (6.4) و(6.30)):

$$T = \frac{I_1 + \mu\ell^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\dot{\theta}\right)^2$$

حيث μ كتلة الدوامة و ℓ بعد النقطة O عن مركز العطالة.



الشكل (6.4)

أما الطاقة الكامنة للدوامة فتساوي $\mu g \ell \cos\theta$ وعليه فتابع لاغرانج هو:

$$L = \frac{I_1 + \mu\ell^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\dot{\theta}\right)^2 - \mu g \ell \cos\theta$$

ومن الواضح أن ψ وφ هي إحداثيات دورية، لهذا يكون لدينا تكاملان للحركة:

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\dot{\theta}\right) = M_3 = \text{const} \qquad (1)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_1' \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta\right)\dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi}\cos\theta = M_z = \text{const} \qquad (2)$$

حيث $I_1' = I_1 + \mu\ell^2$ وتمثل المقادير P_ψ و P_φ مركبات العزم الدوراني المعين بالنسبة للنقطة O على المحورين x_3 وZ.

وكذلك الأمر بالنسبة لطاقة الدوامة التي تبقى ثابتة أيضاً:

$$E = \frac{I_1'}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\dot{\theta}^2\right) + \mu g \ell \cos\theta \qquad (3)$$

ومن المعادلتين (1) و(2) نوجد:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1' \sin^2\theta} \qquad (4)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos\theta \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1' \sin^2\theta} \qquad (5)$$

وبتعويض $\dot{\varphi}$ و $\dot{\psi}$ من هذه العلاقات في (3) نجد:

$$E' = \frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \qquad (6)$$

حيث:

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g \ell$$

و

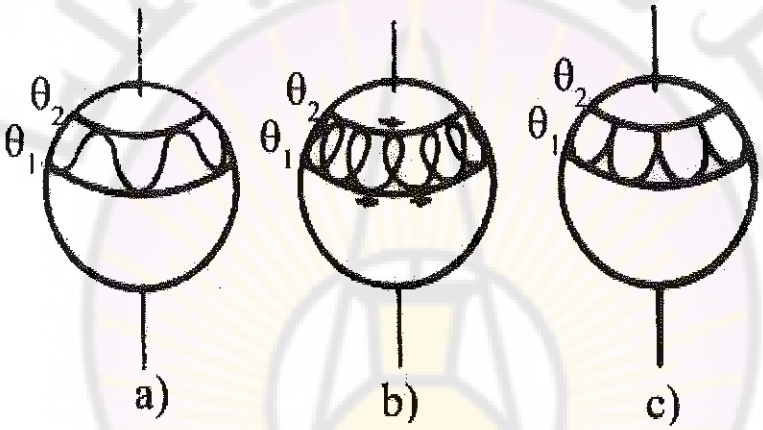
$$U_{eff}(\theta) = \frac{(m_z - m_3 \cos\theta)^2}{I_1' \sin^2\theta} - \mu g \ell (1 - \cos\theta)$$

ومن العلاقة (6) نعين θ عن طريق فصل المتحولات، فنحصل على:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}\left(E' - U_{eff}(\theta)\right)}}$$

وعندئذٍ يمكن التعبير عن الزوايا ψ وφ كتوابع للزاوية θ بالاعتماد على العلاقات (4) و(5). ويتعين مجال تغير الزاوية θ أثناء الحركة من الشرط $E' \geq U_{eff}(\theta)$ وينتهي التابع $U_{eff}(\theta)$ (عندما $m_3 \neq m_z$) إلى $+\infty$ عند القيمتين $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ ويمر بنهاية صغرى في المجال المحصور بينهما. لهذا يكون للمعادلة $E' = U_{eff}(\theta)$ جذران يحددان الزوايا الحدية θ_1 وθ_2 لانحراف محور الدوامة عن الشاقول. وعندما تتغير الزاوية θ من θ_1 إلى θ_2 فإن إشارة المشتق $\dot{\varphi}$ تبقى ثابتة أو تتغير حسب ثبات أو تغير إشارة الفرق $m_z - m_3 \cos\theta$ ضمن المجال المذكور. ففي الحالة الأولى يقوم محور الدوامة بالمبادرة حول الشاقول مهتزاً باطراد (الترنح nutation) نحو الأعلى والأسفل

الشكل (6.5) وتتمثل هذه الحركة بالأثر الذي يرسمه محور الدوامة على سطح كرة مركزها النقطة الثابتة O. وفي الحالة الثانية يكون اتجاه المبادرة في جهتين مختلفتين على دائرتين حديتين بحيث أن محور الدوامة يتحرك حول الشاقول راسماً عرىً كما في الشكل (6.5). وأخيراً لو حققت إحدى القيم θ_1 و θ_2 المعادلة $m_z - m_3 \cos\theta = 0$، فإنه على الدائرة الحدية الموافقة تنتهي القيم $\dot{\varphi}$ و $\dot{\theta}$ معاً إلى الصفر، بحيث أن محور الدوامة يحدد المسار المبين في الشكل (6.5).



الشكل (6.5)

6. 6. معادلات أولر

لقد عالجنا في الفقرة الرابعة من هذا الفصل معادلات حركة الجسم الصلب منسوبة إلى جملة الإحداثيات الثابتة. فالمشتقات $d\vec{P}/dt$ و $d\vec{M}/dt$ في العلاقات (6.21) و(6.23) تمثل تغير الأشعة $\vec{P}$ و $\vec{M}$ بالنسبة لتلك الجملة.

ويمكننا في جملة الإحداثيات المتحركة التي محاورها موجهة وفقاً للمحاور الرئيسة للعطالة إيجاد علاقة بسيطة بين مركبات العزم الدوراني $\vec{M}$ للجسم الصلب ومركبات السرعة الزاوية. وللاستفادة من تلك العلاقة ينبغي أن

نقوم بتحويل معادلات الحركة منسوبة إلى جملة الإحداثيات المتحركة x_3, x_2, x_1.

ليكن $d\vec{A}/dt$ سرعة تغير شعاع ما $\vec{A}$ بالنسبة إلى جملة الإحداثيات الثابتة. فلو أن الشعاع $\vec{A}$ لا يعاني تغيراً بالنسبة إلى الجملة الدورانية فإن تغيره بالنسبة إلى الجملة الثابتة مشروط بالدوران فقط وعندئذ نكتب:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{A}\right)$$

(عد إلى الفقرة الثالثة من الفصل الثالث حيث أشرنا إلى علاقة مشابهة).

في الحالة العامة ينبغي أن نضيف إلى الطرف الأيمن من هذه المساواة سرعة تغير الشعاع $\vec{A}$ في الجملة المتحركة، فإذا رمزنا إلى هذه السرعة بـــ $d'\vec{A}/dt$، عندئذٍ يكون:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{A}\right) \qquad (6.33)$$

بالاعتماد على هذه العلاقة نستطيع مباشرة إعادة كتابة العلاقتين (6.21) و(6.23) بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d'\vec{P}}{dt} + \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{P}\right) &= \vec{F} \\ \frac{d'\vec{M}}{dt} + \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{M}\right) &= \vec{K} \end{aligned}\right\} \qquad (6.34)$$

وبما أن التفاضل بالنسبة إلى الزمن يجري هنا في جملة الإحداثيات المتحركة، نستطيع مباشرة إسقاط هذه المعادلات على محاور الجملة المتحركة وذلك بكتابتنا:

$$\left(\frac{d'\vec{P}}{dt}\right)_1 = \frac{d'\vec{P_1}}{dt} \quad , \quad \left(\frac{d'\vec{M}}{dt}\right)_1 = \frac{d'\vec{M_1}}{dt}$$

تشير الأدلة 1 و2 و3 إلى المركبات على المحاور x_3, x_2, x_1 فإذا عوضنا في المعادلة الأولى من (6.34) $\vec{P}$ بـــ $\mu\vec{V}$ ثم أخذنا المركبات على المحاور x_3, x_2, x_1 فإننا نحصل على:

$$\mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2 V_3-\Omega_3 V_2\right)=F_1$$

$$\mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3 V_1-\Omega_1 V_3\right)=F_2 \qquad (6.35)$$

$$\mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1 V_2-\Omega_2 V_1\right)=F_3$$

وبفرض أن المحاور x_3, x_2, x_1 موجهة حسب المحاور الرئيسة للعطالة، عندئذٍ يمكن أن نكتب في المعادلة الثانية من (6.34) $M_1 = I_1\Omega_1$.... وهكذا. وبالتالي يكون لدينا:

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=K_1$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1=K_2 \qquad (6.36)$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2=K_3$$

تعرف هذه العلاقات **بمعادلات أولر**.

عند الدوران الحر يكون $\vec{K}=0$، وبالتالي فإن معادلات أولر تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{d\Omega_1}{dt}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3=0$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\Omega_3\Omega_1=0 \qquad (6.37)$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2=0$$

وكمثال سنطبق هذه المعادلات على الدوران الحر للدوامة المتناظرة.

فبوضع $I_1=I_2$ نحصل من المعادلة الثالثة على $\dot{\vec{\Omega}}_3=0$ أي $\Omega_3=\text{const}$.

بعد ذلك فإن المعادلتين الأولى والثانية يمكن كتابتها بالشكل:

$$\dot{\Omega}_1=-\omega\Omega_2 \quad , \quad \dot{\Omega}_2=\omega\Omega_1$$

حيث:

$$\omega=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1} \qquad (6.38)$$

نضرب العلاقة الثانية بـــ i ونجمعها مع الأولى، فإننا نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\Omega_1+i\Omega_2\right)=i\omega_1\left(\Omega_1+i\Omega_2\right)$$

وبالتكامل ينتج:

$$\Omega_1+i\Omega_2=Ae^{i\omega t}$$

حيث A ثابت يمكن افتراضه عدداً حقيقياً (ويقتصر هذا على الاختيار المناسب لمبدأ قياس الزمن) وعندئذٍ يكون:

$$\Omega_1=A\cos\omega t \quad , \quad \Omega_2=A\sin\omega t \qquad (6.39)$$

تبين هذه النتيجة أن مسقط السرعة الزاوية في المستوي العمودي على محور الدوامة يدور في هذا المستوي بسرعة زاوية ω، وذلك مع بقاء قيمته ثابتة $\left(A=\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\right)$. وبما أن المسقط Ω_3 على محور الدوامة ثابت

أيضاً، فإننا ننتهي إلى القول أن الشعاع $\vec{\Omega}$ يدور بانتظام بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور الدوامة محافظاً على قيمة ثابتة. ونظراً للعلاقات $M_1 = \Omega_1 I_1$ و $M_2 = \Omega_2 I_2$ و $M_3 = \Omega_3 I_3$ بين مركبات الأشعة $\vec{\Omega}$ و $\vec{M}$ فإن شعاع العزم $\vec{M}$ يقوم بالحركة نفسها.

ومن البديهي أن نتيجة دراستنا هذه تمثل وجهة نظر أخرى للحركة التي عالجناها سابقاً في الفقرتين الثالثة والخامسة بالنسبة إلى جملة الإحداثيات الثابتة. وبصورة خاصة فإن السرعة الزاوية لدوران الشعاع $\vec{M}$ (المحور Z في الشكل (6.4)) حول المحور x_3 تتطابق حسب مصطلحات أولر مع السرعة الزاوية $\dot{\psi}$. فمن العلاقات (6.32) يكون لدينا:

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

أو:

$$-\dot{\psi} = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

وهذا يتفق مع العلاقة (6.38).

مثال 1: اكتب معادلات أولر من أجل كرة متجانسة تتحرك بحرية دون أن يؤثر فيها عزم دوراني.

الحل: في هذه الحالة، يكون:

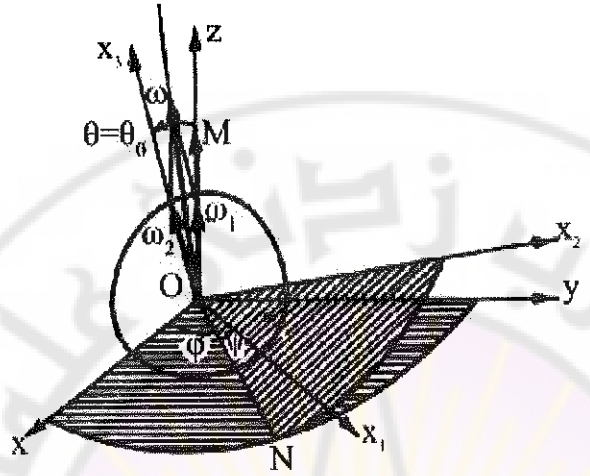
$$I_1 = I_2 = I_3$$

وتأخذ معادلات أولر الشكل:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = K_1 \quad , \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = K_2 \quad , \quad \frac{d\Omega_3}{dt} = K_3$$

وبما أن الحركة حرة، فإن $\vec{K} = 0$ وبالتالي نجد أن شعاع السرعة الزاوية $\vec{\Omega}$ يبقى ثابتاً أثناء الحركة، تعد هذه النتيجة دليلاً مميزاً للكرة التي تدور بحرية.

مثال 2: ادرس حركة جسم صلب، عزماه الرئيسان للعطالة I_1 وI_2 متساويان وخاضع لتأثير ثقله فقط، ومركز عطالته ثابت.



الشكل (6.6)

الحل: إن الجسم الصلب المفروض الشكل (6.6) يتحرك بالعطالة حول نقطة ثابتة O (مركز عطالته) وذلك بتأثير قوة ثقالته وقوة رد فعل نقطة تثبيته O. واضح هنا أن عزم القوى الخارجية معدوم $\vec{K}=0$، وبالتالي فإن شعاع العزم $\vec{K}$ يبقى ثابتاً خلال حركة الجسم المفروض.

نختار مبدأي الجملتين الإحداثيتين الثابتة والمتحركة في النقطة الثابتة O مع توجيه المحور Z وفقاً للشعاع $\vec{M}$ والمحور x_3 وفقاً لمحور الجسم الصلب المفروض. أما المحاور x_1 وx_2 فنوجهها باتجاه المحاور الرئيسة للعطالة في النقطة O.

لنكتب معادلات أولر بالشكل التالي:

$$I_1\dot{\Omega}_1+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=0 \qquad (1)$$

$$I_2\dot{\Omega}_2+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1=0 \qquad (2)$$

$$I_3\dot{\Omega}_3=0 \qquad (3)$$

نضرب كلاً من هذه العلاقات على الترتيب بـ$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ ثم

نجمعها فنحصل على:

$$I_1\dot{\Omega}_1\Omega_1 + I_2\dot{\Omega}_2\Omega_2 + I_3\dot{\Omega}_3\Omega_3 = 0$$

أي أن:

$$\frac{d}{dt}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) = 0$$

وبالتالي يكون:

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = C_1 \qquad (4)$$

حيث C_1 مقدار ثابت.

وبما أن الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب يدور حول نقطة ثابتة هي:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)$$

وحسب التكامل (4) تكون هذه الطاقة الحركية ثابتة.

يمكن الحصول على تكامل آخر بضرب العلاقات الثلاثة (1) و(2) و(3) على الترتيب بـــ $I_3\Omega_3, I_2\Omega_2, I_1\Omega_1$ ثم نجمعها فنحصل على:

$$I_1^2\dot{\Omega}_1\Omega_1 + I_2^2\dot{\Omega}_2\Omega_2 + I_3^2\dot{\Omega}_3\Omega_3 = 0$$

أي أن:

$$\frac{d}{dt}\left(I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2\right) = 0$$

ومن هنا نجد:

$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = C_2 \qquad (5)$$

حيث C_2 مقدار ثابت.

ليس من الصعب بيان أن التكامل (5) يدل على ثبات مقدار عزم اندفاع الجسم بالنسبة للنقطة الثابتة O. وفعلاً بما أن x_3, x_2, x_1 تمثل المحاور الرئيسة للعطالة يكون:

$$M_1 = I_1\Omega_1 \quad , \quad M_2 = I_2\Omega_2 \quad , \quad M_3 = I_3\Omega_3 \qquad (6)$$

وبالتالي:

$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 = C_2$$

أما زوايا أولر فيمكن إيجادها باستخدام العلاقات التالية:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \qquad (7)$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \qquad (8)$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \qquad (9)$$

من المعادلة (3) ينتج مباشرة أن المسقط Ω_3 على محور تناظر الجسم هو ثابت. فلو كان في لحظة البدء $\Omega_3 = \Omega_{30}$، فإنه أثناء الحركة يبقى $\Omega_3 = \Omega_{30}$. وبإسقاط $\vec{M}$ على المحاور المتحركة x_3, x_2, x_1، نجد:

$$M_1 = M\sin\theta\sin\psi \ , \ M_2 = M\sin\theta\cos\psi \ , \ M_3 = M\cos\theta \qquad (10)$$

لكن حسب العلاقات (6) يكون:

$$I_1\Omega_1 = M\sin\theta\sin\psi \qquad (11)$$

$$I_2\Omega_2 = M\sin\theta\cos\psi \qquad (12)$$

$$I_3\Omega_3 = M\cos\theta \qquad (13)$$

ينتج من العلاقة (13) أن الزاوية θ تبقى ثابتة عند حركة الجسم الصلب:

$$\theta = \theta_0 \qquad (14)$$

وبالتالي يكون:

$$\dot{\theta} = 0$$

وهكذا تصبح العلاقات (7) و(8) و(9) على الشكل التالي:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta_0\sin\psi \qquad (15)$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta_0\cos\psi \qquad (16)$$

$$\Omega_{30} = \dot{\varphi}\cos\theta_0 + \dot{\psi} \qquad (17)$$

وبتعويض قيمة كل من Ω_1 و Ω_2 من هذه العلاقات في العلاقتين (11) و(12) على الترتيب، فإننا نحصل على النتيجة التالية:

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{I_1} = \frac{M}{I_2}$$

أي أن $\dot{\varphi}$ ثابتة. (وقد افترضنا هنا أن $\sin\theta_0 \neq 0$، والزاوية ψ يمكن أن تأخذ قيماً مختلفة).

لنرمز بـــ $M / I_1 = M / I_2 = \omega_1$

$$\dot{\varphi} = \omega_1 \qquad (18)$$

وهذا يعني أن السرعة الزاوية للمبادرة هي سرعة ثابتة ω_1. وبتكامل العلاقة (18) نحصل على (من أجل t=0 يكون $\varphi = \varphi_0$):

$$\varphi = \omega_1 t + \varphi_0 \qquad (19)$$

ومن المعادلة (17) نجد:

$$\dot{\psi} = \Omega_{30} - \omega_1 \cos\theta_0$$

وهكذا فإن $\dot{\psi}$ أيضاً ثابتة. فإذا أدخلنا العبارة:

$$\Omega_{30} - \omega_1 \cos\theta_0 = \omega_2$$

نجد:

$$\dot{\psi} = \omega_2 \qquad (20)$$

أي أن الدوران الذاتي للجسم الصلب يتم بسرعة زاوية ثابتة ω_2.

وبتكامل العلاقة (20) نكتب (من أجل t=0 يكون $\psi = \psi_0$):

$$\psi = \omega_2 t + \psi_0$$

والخلاصة فإن الجسم الصلب المتناظر (الدوامة المتناظرة) والخاضع لثقله فقط ومركز ثقله نقطة ثابتة يقوم بحركة تسمى المبادرة المنتظمة. وتتعين هذه الحركة بالمعادلات التالية:

$$\theta = \theta_0 \ , \ \varphi = \omega_1 t + \varphi_0 \ , \ \psi = \omega_2 t + \psi_0$$

إن محور التناظر x_3 يدور بانتظام حول الاتجاه $\overrightarrow{M}$ بسرعة زاوية قدرها ω_1، راسماً مخروطاً دورانياً زاوية رأسه تساوي $2\theta_0$، وبالوقت نفسه فإن الجسم يدور حول محوره التناظري x_3 بسرعة زاوية منتظمة ω_2.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1- أوجد عزوم العطالة لسلك متجانس مستمر طوله ℓ وذلك بالنسبة للمحور AX' العمودي على السلك والمار من نهايته A. ثم أوجد عزم العطالة بالنسبة للمحور OX المار من مركز عطالة السلك O والموازي للمحور AX'.

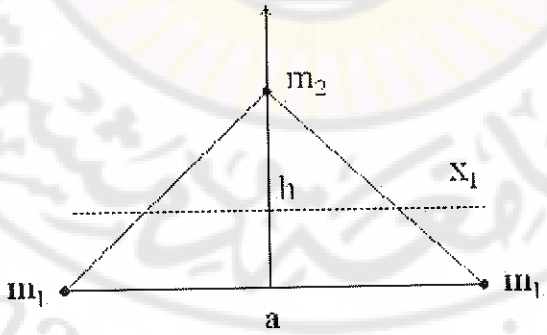
2- عيّن العزوم الرئيسة للعطالة لسلك دقيق غير متجانس طوله ℓ وكتلته m وكثافة كتلته تتناسب طرداً مع بعدها عن أحد طرفيه، علماً بأن ثابت التناسب هو:

$$a = \frac{2m}{\ell^2}$$

3- عيّن العزوم الرئيسة للعطالة لجزيئات تمثل مجموعة من الجسيمات يبعد بعضها عن بعض مسافات ثابتة وذلك في كل من الحالات التالية:

a) جزيء يتألف من عدد من الذرات تتوضع على مستقيم واحد.

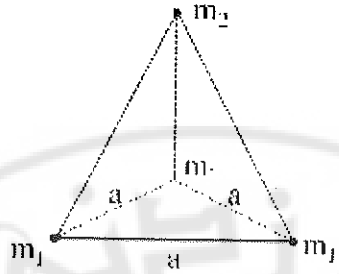
b) جزيء يتألف من ثلاث ذرات تتوضع على رؤوس مثلث متساوي الساقين وفق الشكل (6.7).



الشكل (6.7)

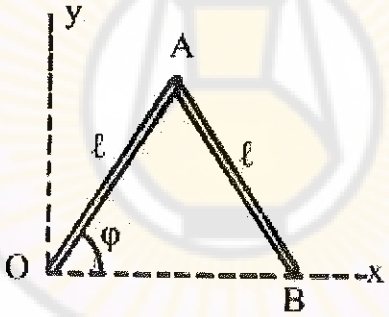
c) جزيء رباعي يتشكل من أربع ذرات تتوضع في رؤوس هرم ثلاثي

منتظم الشكل (6.8)



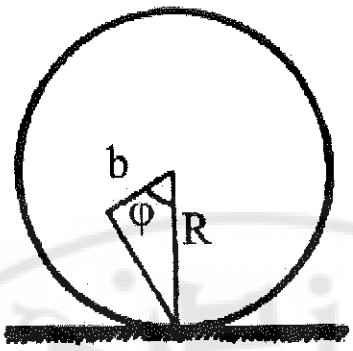
الشكل (6.8)

4- أوجد الطاقة الحركية للمجموعة الممثلة في الشكل (6.9)، حيث OA وAB قضيبان رقيقان ومتجانسان يتمفصلان في النقطة A، وطول كل منهما ℓ، علماً بأن القضيب OA يمكن أن يدور في مستوي الشكل حول النقطة O بينما تنزلق النهاية B للقضيب AB على المحور OX.



الشكل (6.9)

5- أوجد الطاقة الحركية لاسطوانة (نصف قطرها R) تتدحرج على مستو الشكل (6.10) وذلك إذا كانت كتلة الاسطوانة موزعة على الحجم بحيث يكون أحد المحاور الرئيسة للعطالة موازياً لمحور الاسطوانة ويبعد عنه مسافة قدرها b وعزم العطالة بالنسبة للمحور هو I.



الشكل (6.10)

6- جسم صلب حر، عيّن القوى المعممة الموافقة للإحداثيات المستقلة التي تحدد وضع الجسم في الفراغ.

7- المطلوب إيجاد قانون تغير اتجاه كوكب الأرض بالنسبة لجملة الإحداثيات العطالية التي مركزها الأرض ومحاورها موجهة نحو النجوم "الثابتة".

8- دوامة متناظرة ذات نقطة مثبتة يبعد عنها مركز الكتلة مسافة ℓ تتحرك في حقل الثقالة المتجانس. أوجد قانون حركة الدوامة إذا كانت الطاقة الحركية الدورانية حول محور التناظر في لحظة البدء كبيرة بالمقارنة مع الطاقة الكامنة.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع

7. المعادلات القانونية

7. 1. معادلات هاملتون

يعتمد صوغ قوانين الميكانيك المشتقة من تابع لاغرانج (والمعادلات المستنتجة منه) على فرضية مفادها أن وصف الحالة الميكانيكية لمجموعة ما يتم بدلالة الإحداثيات والسرع المعممة. لكن هذا ليس هو الطريق الوحيد الممكن لوصف المجموعة الميكانيكية. فتعيين الحالة الميكانيكية لمجموعة مادية يمكن أن يتم عن طريق اختيار متحولات جديدة هي الإحداثيات والاندفاعات المعممة. يحمل هذا الاختيار كثيراً من المزايا وبخاصة عند معالجة بعض المسائل العامة في الميكانيك. لذلك سنوجد معادلات الحركة المرتبطة بالاختيار الجديد.

يتم الانتقال من مجموعة المتغيرات المجهولة إلى متغيرات أخرى عن طريق تحويلات تعرف في الرياضيات باسم **تحويلات ليجاندر**. وهنا سنوجد تحويلات مماثلة وذلك للانتقال من وصف المجموعة بدلالة q و $\dot{q}$ (الإحداثيات والسرع المعممة) إلى وصف المجموعة بدلالة q و p (الإحداثيات والاندفاعات المعممة).

لنأخذ التفاضل التام لتابع لاغرانج كتابع للإحداثيات والسرع:

$$dL = \sum \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j$$

يمكن أن نكتب هذه العلاقة بالشكل:

$$dL = \sum p_j dq_j + \sum p_j d\dot{q}_j \qquad (7.1)$$

وذلك لأن المشتق $\partial L / \partial \dot{q}_j$ يساوي حسب التعريف الاندفاع المعمم p_j،

وعندئذ من معادلات لاغرانج يكون: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \partial \dot{p}_j$.

لنكتب الحد الثاني من العلاقة (7.1) بالشكل التالي:

$$\sum p_j d\dot{q}_j = d\left(\sum p_j \dot{q}_j\right) - \sum \dot{q}_j dp_j$$

ثم ننقل التفاضل التام $d\left(\sum p_j \dot{q}_j\right)$ إلى الطرف الأيسر من المساواة (7.1)، ونغير إشارات الطرفين فنحصل على:

$$d\left(\sum p_j \dot{q}_j - L\right) = -\sum \dot{p}_j dq_j + \sum \dot{q}_j dp_j \qquad (7.2)$$

يمثل المقدار الموجود أمام إشارة التفاضل طاقة المجموعة (انظر الفقرة الأولى من الفصل الثالث) معبراً عنها بدلالة الإحداثيات والاندفاعات. يسمى هذا المقدار **تابع هاملتون** للمجموعة:

$$H(p,q,t) = \sum p_j \dot{q}_j - L \qquad (7.3)$$

ومن المساواة (7.2)، نكتب:

$$dH = -\sum \dot{p}_j dq_j + \sum \dot{q}_j dp_j \qquad (7.4)$$

لكن:

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j$$

وبالمقارنة تنتج المعادلات التالية:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad , \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (7.5)$$

تمثل هذه العلاقات المعادلات المباشرة للحركة في المتحولات p وq وتسمى **معادلات هاملتون**. وهي تشكل 2s من المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى، وذلك بالنسبة لـ2s من التوابع المجهولة $q(t)$ و $p(t)$, وتكافئ هذه المعادلات s معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بطريقة لاغرانج (معادلات لاغرانج). ونظراً للشكل البسيط والتناظري لتلك المعادلات فإنها تسمى أيضاً

المعادلات القانونية.

إن المشتق التام لتابع هاملتون بالنسبة للزمن هو:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j$$

فإذا عوضنا في هذه العلاقة عن كل من $\dot{q}_j$ و $\dot{p}_j$ من المعادلات (7.5)، فإن حدين من هذه العلاقة يعدمان بعضهما، وبالتالي نحصل على:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (7.6)$$

وفي الحالة الخاصة عندما يكون تابع هاملتون مستقلاً بشكل واضح عن الزمن، ينتج $dH/dt=0$ أي أننا نصل من جديد إلى قانون انحفاظ الطاقة.

بالإضافة إلى المتحولات الحركية $\dot{q},q$ أو p,q، فإن توابع لاغرانج وهاملتون تحتوي على قيم وسيطية مختلفة – تميز خصائص المجموعة الميكانيكية أو تميز الحقل الخارجي المؤثر فيها. ليكن λ ذلك الوسيط الذي ننظر إليه كقيمة متحولة، فعوضاً عن العلاقة (7.1)، يكون لدينا:

$$dL=\sum\dot{p}_j dq_j+\sum p_j d\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial\lambda}d\lambda$$

وبدلاً من العلاقة (7.4) فإننا نحصل على:

$$dH=-\sum\dot{p}_j dq_j+\sum\dot{q}_j dp_j-\frac{\partial L}{\partial\lambda}d\lambda$$

ومن هنا نوجد العلاقة:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right)p,q=-\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)\dot{q},q \qquad (7.7)$$

التي تربط بين المشتقات الجزئية لتوابع هاملتون ولاغرانج بالنسبة للوسيط λ، وتشير الأدلة عند المشتقات إلى أن الاشتقاق يجب أن يتم في الحالة الأولى عند ثبات p,q وفي الأخرى عند ثبات $\dot{q},q$.

يمكن تمثيل هذه النتيجة الأخيرة بشكل آخر. لنفرض أن تابع لاغرانج يأخذ الشكل $L = L_0 + L'$، حيث L' تمثل تزايداً صغيراً للتابع الأسي L_0، عندئذ يرتبط التزايد الموافق في تابع هاملتون $H = H_0 + H'$ مع L' بالعلاقة:

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q} \tag{7.8}$$

وتجدر الإشارة إلى أنه أثناء عملية التحويلات من العلاقات (7.1) إلى (7.4) لم نكتب الحد مع dt، الذي يوضع في الحسبان إذا كان تابع لاغرانج مرتبطاً بشكل صريح بالزمن. والسبب في ذلك أن الزمن في هذه الحالة يلعب دور الوسيط الذي ليس له علاقة بالتحويلات التي أجريناها. فبشكل مشابه العلاقة (7.7)، فإن المشتقات الجزئية بالنسبة للزمن من أجل التوابع L وH ترتبط بالعبارة:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q} \tag{7.9}$$

مثال 1: أوجد تابع هاملتون لنقطة طليقة تتحرك في حقل كموني، وذلك في الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية والكروية.

الحل: للنقطة الطليقة ثلاث درجات حرية، لذلك يأخذ تابع هاملتون الشكل:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_j \dot{q}_j - L$$

في الإحداثيات الديكارتية يأخذ تابع هاملتون الشكل التالي:

$$H = P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z} - L \tag{a}$$

حيث:

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x,y,z)$$

فإذا عوضنا في العلاقة (a) $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ بدلالة P_x, P_y, P_z على الترتيب،

فإننا نحصل على تابع هاملتون في الإحداثيات الديكارتية:

$$H=\frac{1}{2m}\left(P_x^2+P_y^2+P_z^2\right)+U\left(x,y,z\right)$$

في الإحداثيات الأسطوانية، يكون تابع هاملتون:

$$H=P_r\dot{r}+P_\varphi\dot{\varphi}+P_z\dot{z}-L$$

حيث:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-U\left(r,\varphi,z\right)$$

وبتعويض المتحولات $\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z}$ بدلالة الدفوع الموافقة باستخدام تحويلات لاغرانج:

$$P_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

التي تعطي:

$$P_r=m\dot{r}\quad,\quad P_\varphi=mr^2\dot{\varphi}\quad,\quad P_z=m\dot{z}$$

نحصل على العلاقة النهائية لتابع هاملتون:

$$H=\frac{1}{2m}\left(P_r^2+\frac{P_\varphi^2}{r^2}+P_z^2\right)+U\left(r,\varphi,z\right)$$

في الإحداثيات الكروية، نكتب تابع هاملتون:

$$H=P_r\dot{r}+P_\theta\dot{\theta}+P_\varphi\dot{\varphi}-L$$

حيث:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

وبتعويض المتحولات $\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}$ بدلالة الدفوع الموافقة، نحصل على تابع هاملتون المطلوب:

$$H=\frac{1}{2m}\left(P_r^2+\frac{P_\theta^2}{r^2}+\frac{P_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi)$$

مثال 2: أوجد تابع هاملتون لمجموعة مادية تتألف من جسيم كتلته M و n جسيم كتلة الواحد منها m، وذلك دون إدخال حركة مركز العطالة.

الحل: لقد وجدنا أن تابع لاغرانج لهذه المجموعة ضمن نفس الشروط (انظر المثال الخاص بالفقرة الثانية في الفصل الخامس)، يساوي:

$$L=\frac{m}{2}\sum\vec{v}_i^2-\frac{m}{2\mu}\left(\sum\vec{v}_i\right)^2-U \qquad (1)$$

حيث:

$$\mu=M+nm \quad , \quad \vec{v}_i=\dot{\vec{r}}_i$$

نستبدل السرعة بالدفع الموافق وذلك من العلاقة:

$$\vec{p}_i=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}_i}=m\vec{v}_i-\frac{m^2}{\mu}\sum\vec{v}_i \qquad (2)$$

وبالتالي يكون:

$$\sum\vec{p}_i=m\sum\vec{v}_i-\frac{nm^2}{\mu}\sum\vec{v}_i=\frac{mM}{\mu}\sum\vec{v}_i \qquad (3)$$

من العلاقة (2)، نجد:

$$\vec{v}_i=\frac{\vec{p}_i}{m}+\frac{m^2}{\mu}\sum\vec{v}_i \qquad (2')$$

ومن العلاقة (3) نوجد $\sum\vec{v}_i$ ثم نعوضها في (2')، فنحصل على:

$$\vec{v}_i=\frac{\vec{p}_i}{m}+\frac{1}{M}\sum\vec{v}_i \qquad (4)$$

نعوض كلاً من $\vec{v}_i,\sum\vec{v}_i$ في العلاقة (1) وبعد الاختصار ينتج:

$$L=\frac{1}{2m}\sum\vec{p}_i^2+\frac{1}{2M}\left(\sum\vec{p}_i\right)^2-U$$

وبتغيير إشارة U، نحصل على تابع الطاقة الكلية E أو تابع هاملتون:

$$H=\frac{1}{2m}\sum\vec{p}_i^{\,2}+\frac{1}{2M}\left(\sum\vec{p}_i\right)^2+U$$

مثال 3: أوجد معادلات الحركة لنقطة مادية كتلتها m، وخاضعة لتأثير قوى مركزية كمونها U.

الحل: بما أن الحركة مستوية، فنختار بمثابة الإحداثيات المستقلة – الإحداثيات القطبية للنقطة r,φ معتبرين مبدأ المحور (r) هو مركز القوى. عندئذ يأخذ تابع هاملتون الشكل التالي (انظر المثال الأول):

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+U(r) \qquad (1)$$

الإحداثي φ لا يظهر في تابع هاملتون، فهو إحداثي دوري، وهذا يعني أن الدفع الموافق $-p_\varphi$ يمثل أحد تكاملات الحركة:

$$p_\varphi=C_1$$

وبما أن H لا يتعلق بالزمن بصورة واضحة، فيكون التكامل الآخر هو تكامل الطاقة:

$$E=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+U(r)=C_1$$

أو:

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{C_1^2}{r^2}\right)+U(r)=C_2 \qquad (2)$$

نجد من هذه العلاقة أن p_r يتبع فقط r. ونظراً لأن كلاً من p_φ والطاقة E ثوابت (تكاملات الحركة) فإن حل المسألة المفروضة يؤدي إلى تكامل معادلتين تفاضليتين فقط من المرتبة الأولى (بدلاً من أربع):

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r} \quad , \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \tag{3}$$

بتعويض العلاقة (1) في (3)، نجد:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{p_r}{m} \quad , \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{C_1}{mr^2} \tag{4}$$

فمن المعادلة اليسرى نوجد $r(t)$ وذلك بعد حساب $p_r(r)$ من العلاقة (2)، ومن المعادلة الثانية نوجد: $\varphi(t)$.

أما المعادلة التفاضلية للمسار، فنحصل عليها من العلاقات (4):

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r^2 p_r(r)}{C_1}$$

7. 2. تابع راوس

يبدو من المناسب في بعض الحالات عند الانتقال إلى متغيرات جديدة عدم تبديل جميع السرع المعممة بالاندفاعات الموافقة، وإنما البعض منها. والتحويلات اللازمة لذلك تشبه تماماً ما مر معنا في الفقرة السابقة.

فمن أجل الحصول على علاقات بسيطة سنفرض في البدء وجود إحداثيين فقط نرمز لهما بـــ q و ξ، ثم نجري عملية التحويل من المتغيرات $q,\xi,\dot{q},\dot{\xi}$ إلى $q,\xi,p,\dot{\xi}$، حيث p الاندفاع المعمم الموافق للإحداثي q.

إن تفاضل تابع لاغرانج $L(q,\xi,\dot{q},\dot{\xi})$ يساوي:

$$dL=\frac{\partial L}{\partial q}dq+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

$$=\dot{p}dq+pd\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

وبما أن:

$$pd\dot{q}=d(p\dot{q})-\dot{q}dp$$

يكون لدينا:

$$d\left(L-p\dot{q}\right)=\dot{p}dq-\dot{q}dp+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

لندخل التابع (يسمى **تابع راوس**):

$$R=\left(q,p,\xi,\dot{\xi}\right)=p\dot{q}-L \qquad (7.10)$$

الذي يعبر فيه عن السرعة $\dot{q}$ بدلالة الاندفاع p وذلك اعتماداً على المعادلة:

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

وعندئذ يصبح التفاضل السابق بالشكل:

$$dR=-\dot{p}dq+\dot{q}dp-\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi-\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} \qquad (7.11)$$

لكن:

$$dR=\frac{\partial R}{\partial q}dq+\frac{\partial R}{\partial p}dp+\frac{\partial R}{\partial \xi}d\xi-\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

وبالمقارنة نحصل على **معادلات راوس:**

$$\dot{q}=\frac{\partial R}{\partial p} \quad , \quad \dot{p}=-\frac{\partial R}{\partial q} \qquad (7.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}=-\frac{\partial R}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \qquad (7.13)$$

نبدل العلاقات (7.13) في معادلة لاغرانج من أجل الإحداثي ξ، فنحصل على:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}=-\frac{\partial R}{\partial \xi} \qquad (7.14)$$

وهكذا فإن تابع راوس يكون هاملتونياً بالنسبة للإحداثي q (7.12)، ويكون لاغرانجياً بالنسبة للإحداثي ξ (7.14).

وحسب التعريف العام لطاقة المجموعة (4.3)، نكتب:

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L$$

$$= p\dot{q} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L$$

ونحصل على عبارة الطاقة الكلية بدلالة تابع راوس وذلك بالتعويض في العلاقة الأخيرة كل من المعادلات (7.10) و(7.13):

$$E = R - \dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \qquad (7.15)$$

من الواضح أنه يمكن تعميم العلاقات التي حصلنا عليها وذلك عند وجود إحداثيات متعددة من q وξ.

ويبدو من المناسب، استخدام تابع راوس عند وجود الإحداثيات الدورية خصوصاً. فإذا كانت الإحداثيات q دورية، فإنها لا تظهر بشكل واضح في تابع لاغرانج ولهذا لا تظهر أيضاً في تابع راوس* الذي يصبح مرتبطاً فقط بـــp وξ و$\dot{\xi}$.

لكن الاندفاعات p الموافقة للإحداثيات الدورية هي ثابتة (ينتج هذا من العلاقات (7.12). وبعد التعويض بالاندفاعات p قيمتها الثابتة، فإن المعادلات (7.14):

---

* عند استنتاج معادلات هاملتون وراوس وجدنا العلاقات:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial q}$$

فإذا انعدم $\partial L / \partial q$ فإن:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial q} = 0$$

وهذا يعني أن عدم ظهور الإحداثي q في تابع لاغرانج، يؤدي إلى عدم ظهوره في كل من توابع هاملتون وراوس في آن واحد.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R\left(p,\xi,\dot{\xi}\right)}{\partial\dot{\xi}}=\frac{\partial R\left(p,\xi,\dot{\xi}\right)}{\partial\xi}$$

تتحول إلى علاقات تحوي فقط الإحداثيات ξ، حيث أن الإحداثيات الدورية لا تظهر مطلقاً. وبحل تلك المعادلات وذلك بإيجاد التوابع $\xi(t)$، ثم تعويض هذه الأخيرة في الطرف الأيمن من العلاقات:

$$\dot{q}=\frac{\partial R\left(p,\xi,\dot{\xi}\right)}{\partial p}$$

التي بعد مكاملتها، نحصل مباشرة على التوابع $q(t)$.

ملاحظة:

بصورة عامة، نكتب تابع راوس بالشكل التالي:

$$R=R\left(q_\alpha,p_\alpha,\xi_i,\dot{\xi}_i\right)=\sum_{m+1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L$$

حيث:

$$\left(\alpha=m+1,m+2,....s\right),\left(i=1,2,...m\right)$$

ومعادلات راوس هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\xi}_i}\right)=\frac{\partial R}{\partial\xi_i}$$

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha}\quad,\quad\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$$

إذا كانت جميع الإحداثيات $q_\alpha\left(m+1,...s\right)$ دورية، فإن تابع راوس يكتب:

$$R=R\left(\xi_1,...\xi_m,\dot{\xi}_1,...\dot{\xi}_m,p_{m+1},...p_s\right)$$

أي أن:

$$-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=0$$

وبالتالي تكون الاندفاعات الموافقة p_α مقادير ثابتة.

وهكذا فإن معادلات راوس في هذه الحالة، تؤول إلى معادلات لاغرانج، التي بحلها نوجد $\xi_i(t)$، وبتكامل العلاقة:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R\left(\xi_i, \dot{\xi}_i, p_\alpha\right)}{\partial p_\alpha}$$

نحصل على q_α.

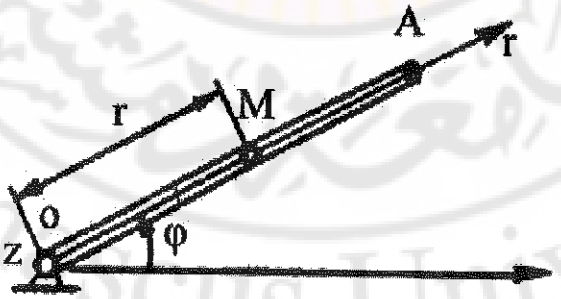
مثال: أنبوبة OA تستطيع أن تدور في مستو أفقي حول محور شاقولي z يمر من نهايتها O. يوجد بداخل الأنبوبة كرة صغيرة M كتلتها m. فإذا كان عزم عطالة الأنبوبة بالنسبة للمحور z يساوي I_z، وبفرض أن الكرة كتلة نقطية وقوى المقاومة مهملة، واتخاذ الإحداثيات القطبية φ, r كإحداثيات معممة أثبت:

1- أن الإحداثي φ هو دوري.

2- أوجد تكاملات الحركة.

3- اكتب بمساعدة تابع راوس معادلة لاغرانج من أجل الإحداثي r.

الحل: للمجموعة المادية المفروضة درجتا حرية، وهي حسب شروط المسألة فإن الإحداثيات القطبية هي r و φ الشكل (7.1).



الشكل (7.1)

الطاقة الحركية للمجموعة تساوي:

$$T = T_1 + T_2 \qquad (1)$$

حيث T_1 الطاقة الحركية للأنبوبة، T_2 الطلقة الحركية للكرة M.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) \qquad (2)$$

نعوض العلاقة (2) في (1)، فنجد:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_z + mr^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \qquad (3)$$

إن القوى المؤثرة في المجموعة هي قوة الثقالة للأنبوبة OA، وقوة الثقالة للكرة M. وبما أن الحركة تتم في مستو أفقي، فالطاقة الكامنة معدومة:

$$U = 0 \qquad (4)$$

وتابع لاغرانج هو:

$$L = \frac{1}{2}\left(I_z + mr^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \qquad (5)$$

ولعدم ظهور الإحداثي φ في تابع لاغرانج فهو إحداثي دوري، وبالتالي فإن أحد تكاملات الحركة هو الاندفاع الموافق:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C_1$$

باستخدام العلاقة (5) في العبارة السابقة، نحصل على:

$$\left(I_z + mr^2\right)\dot{\varphi} = C_1 \qquad (6)$$

يعبر هذا التكامل (6) عن ثبات عزم الاندفاع للمجموعة المادية بالنسبة للمحور $z\left(p_\varphi = M_z\right)$. أما التكامل الآخر للحركة، فيمكن إيجاده بكتابة تكامل الطاقة، إذ أن القوى المؤثرة هي قوى كمونية وتابع الطاقة الحركية (أو تابع لاغرانج) لا يحوي الزمن بشكل صريح:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(I_z + mr^2\right)\dot{\varphi}^2 = C_2$$

نحسب $\dot{\varphi}$ من العلاقة (6) ثم نعوضها في تكامل الطاقة، فنجد:

$$m\dot{r}^2 + \frac{C_1^2}{I_z + mr^2} = C \qquad (7)$$

ونكون بذلك قد حصلنا على تكاملات الحركة (6) و(7).

أخيراً لنكتب معادلة لاغرانج بالنسبة للإحداثي r، باستخدام تابع راوس R:

$$R = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = C_1\dot{\varphi} - L \qquad (8)$$

أو:

$$R = \frac{1}{2}\frac{C_1^2}{I_z + mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \qquad (9)$$

والآن فإن معادلة لاغرانج للإحداثي r، تكتب بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \qquad (10)$$

بحساب $\partial R / \partial r$ و $\partial R / \partial \dot{r}$ من العلاقة (9) ثم التعويض في (10)، نوجد المعادلة التفاضلية للإحداثي r:

$$\ddot{r} - \frac{C_1^2 r}{\left(I_z + mr^2\right)^2} = 0$$

7. 3. أقواس بواصون

ليكن التابع $f(p,q,t)$ الذي متحولاته الإحداثيات والاندفاعات والزمن.

إن المشتق التام بالنسبة للزمن لذلك التابع هو:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)$$

نعوض في هذه العلاقة $\dot{q}_k$ و $\dot{p}_k$ من معادلات هاملتون (7.5)، فنحصل على:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\} \qquad (7.16)$$

حيث رمزنا بـــ:

$$\{Hf\}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \qquad (7.17)$$

تسمى العلاقة (7.17) **أقواس بواصون** للمقادير H وf.

إن توابع المتحولات الحركية التي تبقى أثناء حركة المجموعة الميكانيكية ثابتة تسمى -كما نعرف- تكاملات الحركة. ولكي يكون f تكاملاً للحركة ينبغي أن يتحقق الشرط $df/dt=0$، الذي نكتبه بالشكل:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\}=0 \qquad (7.18)$$

فإذا لم يتعلق تكامل الحركة f بالزمن بشكل واضح، فإن:

$$\{Hf\}=0 \qquad (7.19)$$

أي أن أقواس بواصون مع تابع هاملتون تنتهي إلى الصفر.

فمن أجل أي تابعين f وg للمتغيرات p,q، تكتب أقواس بواصون بصورة مشابهة للعلاقة (7.17):

$$\{fg\}=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) \qquad (7.20)$$

سنذكر بعض خواص أقواس بواصون التي تنتج بسهولة من التعريف (7.17). فإذا بادلنا مواضع التابعين، فإن إشارة الأقواس تتغير، وإذا كان أحد التابعين ثابتاً (c)، فإن القوس ينعدم:

$$\{fg\}=-\{gf\} \qquad (7.21)$$

$$\{fc\} = 0 \qquad (7.22)$$

وكذلك فإن:

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\} \qquad (7.23)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 g\} + f_2 \{f_1 g\} \qquad (7.24)$$

فإذا فاضلنا جزئياً العلاقة (7.20) بالنسبة للزمن، نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \qquad (7.25)$$

وعندما يكون أحد التابعين هو أحد الاندفاعات أو الإحداثيات، فإن أقواس بواصون تؤول ببساطة إلى المشتق الجزئي:

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \qquad (7.26)$$

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \qquad (7.27)$$

فمثلاً نحصل على العلاقة (7.26)، بوضع $g = q_k$ في العلاقة (7.20)، حيث المجموع يؤدي إلى حدٍ واحد وذلك لأن:

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_\ell} = \delta_{k\ell} \quad , \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_\ell} = 0$$

وبوضع التابع f مساوياً q_i وp_i في العلاقات (7.20) و(7.27) نحصل على:

$$\{q_i q_k\} = 0 \quad , \quad \{p_i p_k\} = 0 \quad , \quad \{p_i q_k\} = \delta_{ik} \qquad (7.28)$$

ترتبط أقواس بواصون التي تتألف من ثلاثة توابع بالعلاقة المسماة **متطابقة جاكوب:**

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0 \qquad (7.29)$$

لبرهان هذه المتطابقة نلاحظ حسب التعريف (7.20) أن أقواس بواصون $\{fg\}$ تمثل تابعاً متجانساً خطياً للمشتقات من المرتبة الأولى للمقادير f وg لهذا مثلاً القوس $\{h\{fg\}\}$ يمثل تابعاً خطياً متجانساً للمشتقات من

المرتبة الثانية لـــf وg. فالطرف الأيسر بأجمعه من العلاقة (7.29) هو عبارة عن تابع متجانس للمشتقات الثانية من أجل التوابع الثلاثة f، g، h. لنجمع الحدود الحاوية المشتقات الثانية للتابع f، علماً بأن القوس الأول من (7.29) لا يحوي المشتق الثاني لـــf، وإنما يحوي فقط المشتقات الأولى لـــf. أما مجموع القوس الثاني والثالث فسنكتبه بشكل آخر بدلالة المؤثرات التفاضلية الخطية D_1 وD_2:

$$D_1(\varphi)=\{g\varphi\} \quad , \quad D_2(\varphi)=\{h\varphi\}$$

عندئذ يكون:

$$\{g\{hf\}\}+\{h\{fg\}\}=\{g\{hf\}\}-\{h\{gf\}\}=$$
$$=D_1\big(D_2(f)\big)-D_2\big(D_1(f)\big)=\big(D_1D_2-D_2D_1\big)f$$

ومن السهل إثبات أن هذه المجموعة الخطية من المؤثرات التفاضلية لا يمكن أن تحوي المشتقات الثانية لـــf. من أجل ذلك سنكتب المؤثرات الخطية التفاضلية بشكلها العام:

$$D_1=\sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad , \quad D_2=\sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

حيث ξ_k و $-\eta_k$ توابع للمتحولات x_1، x_2، ... وعندئذ:

$$D_1D_2=\sum_{k,\ell}\xi_k\eta_\ell\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_\ell}+\sum_{k,\ell}\xi_k\frac{\partial\eta_\ell}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

$$D_2D_1=\sum_{k,\ell}\eta_k\xi_\ell\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_\ell}+\sum_{k,\ell}\eta_k\frac{\partial\xi_\ell}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

والفرق بين تلك المشتقات:

$$D_1D_2-D_2D_1=\sum_{k,\ell}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_\ell}{\partial x_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_\ell}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

يمثل مؤثراً جديداً يحوي فقط مشتقات من الدرجة الأولى. وبهذا الشكل

تختصر جميع حدود المشتقات من المرتبة الثانية للتابع f في الطرف الأيسر من المساواة (7.29) وكذلك بالنسبة للتوابع g وh، وهكذا فالطرف الأيسر بأجمعه ينتهي إلى الصفر.

تنحصر الخاصة الهامة لأقواس بواصون بما يلي: إذا كانت f وg تكاملات لمعادلات الحركة، فإن $\{fg\}$ هو أيضاً تكامل لتلك المعادلات، أي أن:

$$\{fg\} = const \qquad (7.30)$$

(تسمى هذه الخاصة **نظرية بواصون**).

إن برهان هذه النظرية سهل للغاية، فحسب الفرض يكون:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{Hg\} = 0$$

والمطلوب إثبات أن:

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \frac{\partial}{\partial t}\{fg\} + \{H\{fg\}\} = 0$$

إذا كان كل من f وg غير تابعين للزمن بشكل واضح، فحسب الفرض يكون:

$$\{Hg\} = 0 \quad , \quad \{Hf\} = 0$$

وبالاعتماد على متطابقة جاكوب بعد تبديل $h = H$:

$$\{H\{fg\}\} + \{f\{gH\}\} + \{g\{Hf\}\} = 0$$

نجد أن $\{H\{fg\}\} = 0$ وبذلك يكون قد ثبت المطلوب.

إذا ارتبطت تكاملات الحركة f وg بالزمن بشكل واضح، فحسب (7.16) نكتب:

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \frac{\partial}{\partial t}\{fg\} + \{H\{fg\}\}$$

وباستخدام الخاصة (7.25)، وتعويض $H\{fg\}$ ما يساويه من متطابقة جاكوب، نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}g\right\}+\left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f\{gH\}\}-\{g\{Hf\}\}$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\{Hg\}\right\}$$

أو:

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{df}{dt}g\right\}+\left\{f\frac{dg}{dt}\right\} \qquad (7.31)$$

وبالتالي $\frac{d}{dt}\{fg\}$ يساوي الصفر لانعدام كل من حدي الطرف الأيمن.

ونكون بذلك قد برهنا صحة نظرية بواصون في الحالة العامة.

وهكذا فنظرية بواصون تكفل الحصول من التكاملين $f(q_k,p_k,t)$ و $g(q_k,p_k,t)$ على تكامل ثالث:

$$\{fg\}=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right)$$

وعلى هذه الحالة يمكن الحصول دوماً على تكاملات جديدة للحركة. فمثلاً من f و $\{fg\}$ نحصل على تكامل جديد وهكذا... وبما أن عدد تكاملات الحركة محدود، فإن التكامل الجديد قد يكون إما مطابقاً للصفر أو أن يكون تابعاً للتكاملات الأولية f وg، وقد يكون بالفعل تكاملاً جديداً للحركة.

مثال 1: أوجد أقواس بواصون المتشكلة من المركبات الديكارتية للاندفاع p وعزم الاندفاع $\vec{M}=\vec{r}\wedge\vec{p}$ لجسيم مادي.

الحل: إن مركبات الاندفاع هي:

$$p_x,p_y,p_z$$

ومركبات العزم:

$$M_x = yp_z - zp_y$$
$$M_y = zp_x - xp_z$$
$$M_z = xp_y - zp_x$$

بتطبيق العلاقة (7.27):

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

بعد استبدال بـــf مركبات العزم على التوالي، وكذلك استبدال بـــp_k مركبات $\vec{p}$ الموافقة، نجد:

$$\{M_x p_x\} = -\frac{\partial M_x}{\partial x} = 0$$
$$\{M_x p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -p_z$$
$$\{M_x p_z\} = -\frac{\partial M_x}{\partial z} = p_y$$

وبالتبديل الدوري للأدلة x,y,z نحصل على الأقواس الباقية.

مثال 2: عين أقواس بواصون المتشكلة من العزم $\vec{M}$.

الحل: من التعريف العام لأقواس بواصون:

$$\{fg\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

نجد أن:

$$\{M_x M_y\} = \sum_k \left(\frac{\partial M_x}{\partial p_k}\frac{\partial M_y}{\partial q_k} - \frac{\partial M_x}{\partial q_k}\frac{\partial M_y}{\partial p_k} \right)$$

حيث:

$$p_k(p_x, p_y, p_z) \quad , \quad q_k(x, y, z)$$

فإذا قمنا بعملية الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتحولات p_x, p_y, p_z, x, y, z الموافقة نجد أن:

$$M_x M_y = \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial M_y}{\partial z} - \frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial M_y}{\partial p_z}$$
$$= yp_x - xp_y = -M_z$$

وبالمثل نحصل على:

$$\{M_y M_z\} = -M_x$$
$$\{M_z M_x\} = -M_y$$

وبما أن الاندفاعات والإحداثيات لجسيمات مختلفة تكون متحولات مستقلة بعضها عن بعضها الآخر، فمن السهل ملاحظة أن العلاقات التي حصلنا عليها في المثال الأول والثاني هي صحيحة من أجل الاندفاع الكلي والعزم الكلي لأية مجموعة من الجسيمات.

7. 4. مبدأ الفعل الأصغري

أكثر الصيغ عموماً لقانون حركة المجموعة الميكانيكية يعطى بمبدأ الفعل الأصغري (أو مبدأ هاملتون) وحسب ذلك المبدأ فإن كل مجموعة ميكانيكية تتميز بتابع معين هو تابع لاغرانج $L(q,\dot{q},t)$ وحركة المجموعة تستوفي الشرط التالي: نفرض أنه في اللحظات $t = t_1$ و $t = t_2$ تشغل المجموعة أوضاعاً معينة تتميز بقيم للإحداثيات هي $q^{(1)}$، $q^{(2)}$ عندئذ تتحرك المجموعة بين الوضعين الموافقين لـ t_1 و t_2 بحيث يأخذ التكامل:

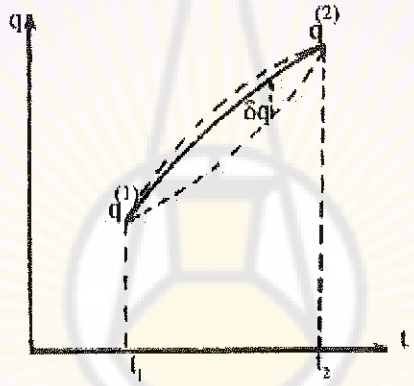
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt \qquad (7.32)$$

أصغر قيمة ممكنة. يسمى S **الفعل**.

ننتقل إلى إيجاد المعادلات التفاضلية التي تعد حلاً لتعيين النهاية الصغرى للتكامل (7.32). ولتبسيط كتابة العلاقات الرياضية نفرض أن للمجموعة الميكانيكية درجة حرية واحدة مما يقتضي تعيين تابع واحد $q(t)$. ليكن $q = q(t)$ التابع الذي من أجله يأخذ S نهاية أصغرية. وهذا يعني أن S يزداد عند استبدال بـــ $q(t)$ أي تابع من الشكل التالي:

$$q(t) + \delta q(t) \qquad (7.33)$$

حيث $\delta q(t)$ تغير التابع $q(t)$ وله قيمة صغيرة في المجال من t_1 إلى t_2. وبما أنه عند $t = t_1$ و $t = t_2$ يأخذ التابع (7.33) القيم $q^{(1)}$، $q^{(2)}$ نفسها فينبغي أن يكون:



الشكل (7.2)

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \qquad (7.34)$$

إن التغير الذي يطرأ على S عند استبدال $q + \delta q$ بـــ q هو:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt$$

يبدأ منشور هذا التابع حسب δq و $\delta \dot{q}$ بحدود من المرتبة الأولى. والشرط اللازم ليكون S اصغرياً (بشكل عام قيمة حدية) هو أن تنتهي مجموعة تلك الحدود إلى الصفر والتي تدعى بالتغير الأول للتكامل. وهكذا فإن مبدأ الفعل

الأصغري يكتب بالشكل:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt = 0 \qquad (7.35)$$

وبإجراء عملية التغير نجد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + L\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt = 0 \qquad (7.36)$$

(يحدث التغير عند ثبوت الزمن) وبملاحظة أن:

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$$

والتعويض في العلاقة (7.36) ثم مكاملة الحد الثاني منها بالتجزئة نحصل على:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt = 0 \qquad (7.37)$$

وحسب الشرط (7.34) ينعدم الحد الأول من هذه العلاقة ويبقى التكامل الذي ينبغي أن ينعدم مهما كان δq وهذا يتم فقط في الحالة التي ينعدم فيها ما تحت إشارة التكامل:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

وعند وجود درجات متعددة من الحرية ينبغي إجراء تفاضلات مستقلة لـــS من التوابع المختلفة $q_j(t)$ وعندئذ نحصل على s معادلة من الشكل:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad (j = 1,2,...S) \qquad (7.38)$$

وهي معادلات لاغرانج نفسها (2.30) الذي سبق وأن استخرجناها في الفصل الثاني.

لنفرض أن المجموعة الميكانيكية مؤلفة من جزءين A وB وتابع

لاغرانج لكل منهما هو L_A وL_B على الترتيب. فإذا أبعدنا الجزءين عن بعضهما لمسافة بعيدة بحيث يمكن إهمال تبادل التأثير بينهما فعندئذ ينتهي تابع لاغرانج للمجموعة كلها إلى الحد:

$$\lim L = L_A + L_B \tag{7.39}$$

تعبر خاصية تجميع توابع لاغرانج للمجموعة عن أن معادلة الحركة لكل من الأجزاء التي لا تتبادل التأثير معاً لا يمكن أن تحوي قيماً تعود إلى أجزاء أخرى من المجموعة.

من الواضح أن ضرب توابع لاغرانج لمجموعة ميكانيكية بثابت كيفي يؤدي إلى عدم تعيينها لأن الثابت لا ينعكس بذاته على معادلات الحركة. فتوابع لاغرانج لمختلف المجموعات المنعزلة يمكن ضربها بثوابت اختيارية مختلفة، لكن خاصة التجميع تزيل عدم التعيين هذا وتسمح فقط بضرب ثوابت لاغرانج لجميع المجموعات بثابت واحد بحيث يؤدي إلى اختيار طبيعي وكيفي لواحدات قياس المقادير الفيزيائية.

ملاحظة: لنفرض أن التابعين:

$$L'(q,\dot{q},t) \quad , \quad L(q,\dot{q},t)$$

المختلفين عن بعضهما بمشتق تام لتابع من الشكل $f(q,t)$، فيكون:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t) \tag{7.40}$$

ويرتبط التكاملان المحسوبان في (7.32) بالنسبة للتابعين L', L بالعلاقة:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\,dt$$
$$= S + f\left(q^{(2)},t_2\right) - f\left(q^{(1)},t_1\right)$$

أي أنهما يختلفان عن بعضهما بوجود حد إضافي يزول عند تغير الفعل حيث أن الشرط $\delta S' = 0$ يطابق الشرط $\delta S = 0$ وبالتالي فإن شكل معادلات

الحركة لا يتغير. وهكذا فإن تابع لاغرانج يتحدد بدقة مشتق تام لتابع للإحداثيات والزمن.

للحصول على تابع لاغرانج بصيغته العامة بدلالة الإحداثيات المعممة نجري التحويلات المناسبة:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, \ldots q_s\right) \quad , \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

نعوض هذه العلاقات في تابع لاغرانج:

$$L = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(q)$$

فنحصل على:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k - U(q) \qquad (7.40)'$$

حيث:

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$ تابع للإحداثيات فقط

7. 5. الفعل كتابع للإحداثيات

درسنا في الفقرة السابقة التكامل:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \qquad (7.41)$$

المأخوذ على المسار بين وضعين معينين $q^{(2)}, q^{(1)}$ تشغلهما الجملة في اللحظات t_2, t_1. وعند تغير الفعل قورنت قيم ذلك التكامل من أجل مسارات متقاربة مع القيم نفسها $q(t_2), q(t_1)$. يشكل أحد تلك المسارات المسار الحقيقي للحركة وهو ذلك المسار الذي من أجله يأخذ التكامل S قيمة أصغرية.

سنعالج هنا مفهوم الفعل من وجهة نظر أخرى. وبالضبط سننظر إلى S كمقدار يصف الحركة وفقاً لمسارات حقيقية، وسنقارن القيم التي يأخذها S من أجل مسارات تشترك بالمبدأ $q(t_1),q^{(1)}$ لكنها في اللحظة t_2 تمر من أوضاع مختلفة. أي أننا سندرس تكامل الفعل للمسارات الحقيقية كتابع لقيم الإحداثيات في الحد العلوي من التكامل.

يعطى تغير الفعل عند الانتقال من أحد المسارات إلى مسار آخر قريب منه (في حالة درجة واحدة من الحرية) بالعلاقة (7.37):

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt$$

وبما أن المسارات الحقيقية للحركة تحقق معادلات لاغرانج، فإن التكامل هنا ينتهي إلى الصفر. أما في الحد الأول، فحسب الفرض يكون $\delta q(t_1) = 0$.

وإذا رمزنا للقيمة $\delta q(t_2)$ بـ δq. ووضعنا الاندفاع p بدلاً من $\partial L / \partial \dot{q}$، فإننا نحصل بشكل نهائي على $\delta S = p\delta q$. وفي الحالة العامة، عند وجود عدد ما من درجات الحرية، يكون:

$$\delta S = \sum p_j \delta q_j \qquad (7.42)$$

ينتج من هذه العلاقة، أن المشتقات الجزئية للفعل بالنسبة للإحداثيات تساوي الاندفاعات الموافقة:

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j \qquad (7.43)$$

وبصورة مشابهة، يمكن عد الفعل كتابع صريح للزمن ودراسة المسارات التي تبدأ في لحظة مفروضة t_1 من الوضع $q^{(1)}$ وتنتهي في وضع معين $q^{(2)}$ في لحظات زمنية مختلفة $t_2 = t$. نفهم من ذلك، أنه يمكن إيجاد المشتق الجزئي $\partial S / \partial t$ وذلك عن طريق تغير التكامل الموافق. لكن الأسهل من ذلك هو

استخدام العلاقة المعروفة (7.34) واتباع الأسلوب التالي:

حسب تعريف الفعل، يكون مشتقه التام بالنسبة للزمن مساوياً:

$$\frac{dS}{dt} = L \qquad (7.44)$$

ومن جهة أخرى، إذا افترضنا أن S تابع للإحداثيات والزمن واستخدمنا العلاقة (7.43) يكون لدينا:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j}\dot{q}_j = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j p_j \dot{q}_j$$

بمقارنة هذه العلاقة مع (7.44)، نجد:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_j p_j \dot{q}_j$$

أو:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \qquad (7.45)$$

ويمكن أن نكتب العلاقتين (7.43) و (7.45) معاً في عبارة واحدة:

$$dS = \sum p_j dq_j - Hdt \qquad (7.46)$$

وذلك من أجل التفاضل التام للفعل كتابع للإحداثيات والزمن عند الحد العلوي للتكامل في (7.41).

للحصول على التفاضل التام للفعل S عندما تتغير كل من إحداثيات (والزمن) بداية الحركة ونهايتها، نكتب العلاقة (7.46) مرتين وذلك عند حدي التكامل ثم نطرحهما من بعض، أي أن:

$$dS = \sum p_j^{(2)} dq_j^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_j^{(1)} dq_j^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)} \qquad (7.47)$$

تبين هذه العلاقة أنه مهما كان الحقل الخارجي المؤثر في المجموعة أثناء حركتها، فإن حالتها النهائية لا يمكن أن تكون تابعاً كيفياً للحالة الابتدائية، وإنما

الممكن تلك الحركات التي يكون فيه الطرف الأيمن من (7.47) تفاضلاً تاماً، وهكذا فإن وجود مبدأ الفعل الأصغري بصورة مستقلة عن الشكل المحدد لتابع لاغرانج يفرض قيوداً معينة على مجموعة الحركات الممكنة. وبصورة خاصة يبدو من الممكن وضع مجموعة من القوانين العامة (لا يتعلق بشكل الحقول الخارجية الموجودة) لحزم الجسيمات المتباعدة من نقاط مفروضة في الفراغ. تشكل دراسة تلك القوانين العناصر الأساسية للضوء الهندسي.

والجدير بالذكر، أنه يمكن استخراج معادلات هاملتون بصورة شكلية من شرط النهاية الصغرى للفعل، وذلك لو كتبنا الفعل بشكل تكامل اعتماداً على (7.46):

$$S = \int(\sum_j p_j dq_j - Hdt) \qquad \textbf{(7.48)}$$

ثم اعتبرنا أن الإحداثيات والاندفاعات كمتحولات مستقلة. وللاختصار نفرض من جديد وجود إحداثي واحد (واندفاع واحد)، وبناء على ذلك، نكتب تغير الفعل بالشكل التالي:

$$\delta S = \int\{\delta p dq + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p dt\}$$

لنكامل الحد الثاني بالتجزئة، فنحصل على:

$$\delta S = \int\delta p(dq - \frac{\partial H}{\partial p}dt) + p\delta q\Big| - \int\delta q(dp - \frac{\partial H}{\partial q}dt)$$

عند حدود التكامل ينبغي أن نضع $\delta q = 0$، بحيث ينعدم الحد المكامل. وتنعدم العبارة الباقية مهما كانت المتحولات المستقلة $\delta q, \delta p$ عندما يكون:

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p}dt \quad , \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q}dt$$

وبتقسيم هذه العلاقات على dt، فإننا نحصل على معادلات هاملتون.

7. 6. مبدأ موبيرتييه

تتعين بصورة تامة حركة المجموعة الميكانيكية بمبدأ الفعل الأصغري: فعن طريق حل معادلات الحركة الناتجة عن ذلك المبدأ، يمكن إيجاد شكل المسار والعلاقة بين وضع إحداثيات المجموعة والزمن.

إذا حددت المسألة في إيجاد معادلة المسار (بحذف الزمن)، يمكن عندئذ استخدام الشكل المبسط لمبدأ الفعل الأصغري.

لنفرض أن كلاً من تابع لاغرانج وتابع هاملتون لا يحوي الزمن بشكل واضح، بحيث تبقى طاقة المجموعة مصونة:

$$H(p,q) = E = const$$

وحسب مبدأ الفعل الأصغري، فإن تغير الفعل من أجل القيم الابتدائية والنهائية المفروضة للإحداثيات والزمن (عند t_0 وt) يساوي الصفر. فإذا غيرنا الزمن النهائي t عند تثبيت الإحداثيات الابتدائية والنهائية يكون لدينا بحسب العلاقة (7.47):

$$\delta S = -H\delta t \qquad (7.49)$$

سنقارن الآن بين الحركات الافتراضية للمجموعة التي تحقق انحفاظ الطاقة. فمن أجل تلك المسارات نستبدل بـــH في (7.49) الثابت E فنحصل على:

$$\delta S + E\delta t = 0 \qquad (7.50)$$

وعندما نكتب الفعل بالشكل (7.48)، ونستعيض من جديد E بـــH، يكون لدينا:

$$S = \int \sum_j p_j dq_j - E(t - t_0) \qquad (7.51)$$

يسمى أحياناً الحد الأول في هذه العبارة **الفعل المختصر**، ويرمز له بـــS_0:

$$S_0 = \int \sum_j p_j dq_j \qquad (7.52)$$

وإذا وضعنا العلاقة (7.51) في (7.50) نجد بسهولة أن:

$$\delta S_0 = 0 \tag{7.53}$$

وهكذا فالفعل المختصر يأخذ نهاية صغرى بالنسبة لجميع المسارات، التي تحقق قانون انحفاظ الطاقة وتمر من النقطة النهائية في أي لحظة ما. لاستخدام ذلك المبدأ التغيري من الضروري أن نعبر عن الاندفاعات وعن العبارة الموجودة ضمن التكامل (7.52) بدلالة الإحداثيات q وتفاضلاتها dq. لهذا ينبغي الاعتماد على المعادلات:

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \tag{7.54}$$

التي تمثل تعريفاً للاندفاع. وكذلك الاعتماد على قانون انحفاظ الطاقة:

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E \tag{7.55}$$

وبحساب التفاضل dt بدلالة q وdq من المعادلة الأخيرة ثم تعويض الناتج في العلاقة (7.54)، نحصل على الاندفاع بدلالة q وdq والطاقة E التي تلعب دور الوسيط. بهذه الصورة، فإن المبدأ التغيري الذي نحصل عليه يحدد مسار المجموعة. يدعى هذا المبدأ **بمبدأ موبيرتييه**.

لنجري العمليات المشار إليها على تابع لاغرانج بشكله العام '(7.40):

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k - U(q)$$

فالاندفاع يكون:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k a_{jk}(q) q_k$$

ومن معادلة الطاقة:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k + U(q)$$

نوجد dt:

$$dt = \sqrt{\frac{\sum a_{jk}\, dq_j\, dq_k}{2(E-U)}} \qquad (7.56)$$

الذي نعوضه في العلاقة:

$$\sum p_j dq_j = \sum_{jk} a_{jk} \frac{dq_k}{dt} dq_j$$

وبالتالي، فإن الفعل المختصر يكتب بالشكل:

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U)\sum_{j,k} a_{jk}\, dq_j\, dq_k} \qquad (7.57)$$

في الحالة الخاصة، من أجل نقطة مادية، تكون الطاقة الحركية:

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2$$

(حيث m كتلة الجسيم و $d\ell$ عنصر من المسار) والمبدأ التغيري لتعيين شكل المسار هو:

$$\delta \int \sqrt{2(E-U)}\, d\ell = 0 \qquad (7.58)$$

حيث نجري التكامل بين نقطتين مفروضتين في الفراغ.

عند الحركة الحرة لجسيم ما $U = 0$، فإن العلاقة (7.58) تعطي النتيجة:

$$\delta \int d\ell = 0$$

أي أن الجسيم يتحرك وفقاً للطريق الأقصر – الخط المستقيم.

لنعد إلى عبارة الفعل (7.51)، ونجر التغير في هذه المرة حسب الوسيط E:

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E - (t - t_0)\delta E - E\delta t$$

نعوض هذه العلاقة في (7.50)، فنجد:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0 \qquad (7.59)$$

لكن معادلات الحركة لا تحافظ مطلقاً على شكلها القانوني لدى التحويلات الكيفية (7.62). لنوجد الشروط التي ينبغي أن تحققها التحويلات لكي تأخذ معادلات الحركة في المتغيرات الجديدة Q,P الشكل التالي:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \quad , \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \qquad (7.63)$$

وذلك مع تابع هاملتون الجديد $H'(P,Q)$. تسمى هذه التحويلات **التحويلات القانونية**.

يمكن الوصول إلى العلاقات المرتبطة بالتحويلات القانونية بالطريقة التي سنأتي على شرحها:

في نهاية الفقرة الخامسة، بينا أنه يمكن استنتاج معادلات هاملتون من مبدأ الفعل الأصغري المكتوب بالصيغة:

$$\delta \int (\sum_j p_j dq_j - Hdt) = 0 \qquad (7.64)$$

ولكي تحقق المتحولات الجديدة P وQ معادلات هاملتون، ينبغي أن يكون مبدأ الفعل الأصغري الموافق لتلك المتحولات صحيحاً أيضاً:

$$\delta \int (\sum_j P_j dQ_j - H'dt) = 0 \qquad (7.65)$$

ويكون المبدآن (7.64) و(7.65) متكافئين فقط عند الشروط التي تجعل العبارات المتكاملة تختلف عن بعضها فقط بالتفاضل التام لتابع F للإحداثيات والاندفاعات والزمن، عندئذ يكون الفرق بين التكاملين عند التغير حداً ثابتاً (الفرق في قيم F عند حدود التكامل) وبهذه الصورة ينبغي أن يكون:

$$\sum p_j dq_j - Hdt = \sum P_j dQ_j - H'dt + dF$$

يتميز كل تحويل قانوني بتابع يخصه F يسمى **التابع المشتق للتحويلات**. فإذا كتبنا العبارة الأخيرة بالشكل:

$$dF = \sum p_j dq_j - \sum P_j dQ_j + -\left(H' - H\right)dt \qquad (7.66)$$

نرى أن:

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad , \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (7.67)$$

وذلك بفرض أن التابع المشتق F تابع للإحداثيات القديمة والجديدة والزمن.

$$F = F\left(q, Q, t\right)$$

تحدد المعادلات (7.67) (من أجل تابع معين F) العلاقة بين المتغيرات القديمة (p,q) والجديدة (P,Q)، وتعطي أيضاً عبارة تابع هاملتون الجديد.

يبدو من الأنسب التعبير عن التابع المشتق F بدلالة الإحداثيات القديمة q والاندفاعات الجديدة P، وذلك بدلاً من المتحولات Q,q. فلإيجاد علاقات التحويلات القانونية في هذه الحالة ينبغي إجراء التحويلات الموافقة حسب ليجاندر* في العلاقة (7.66) التي تكتب عندئذ بالشكل:

$$d\left(F + \sum P_j Q_j\right) = \sum p_j dq_j + \sum Q_j dP_j + \left(H' - H\right)dt$$

إن العبارة الموجودة أمام إشارة التفاضل في الطرف الأيسر من المساواة، والمعبر عنها بدلالة المتحولات p,q تمثل تابعاً جديداً، نرمز له بـ $\Phi\left(q, P, t\right)$، وعندئذ يكون لدينا†:

---

* $\sum PdQ = d\sum PQ - \sum QdP$

† نلاحظ أنه لو أخذنا التابع المشتق على الصورة:

$$\Phi = \sum f_j\left(q, t\right) p_j$$

(حيث f_j توابع كيفية)، فنحصل على التحويل الذي يعبر فيه عن الإحداثيات الجديدة $Q_j = f_j\left(q, t\right)$ بدلالة الإحداثيات القديمة (لا بدلالة الاندفاعات). وهذا يمثل التحويلات النقطية التي تبدو بشكل طبيعي حالة خاصة من التحويلات القانونية.

$$p_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \quad , \quad Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial P_j} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (7.68)$$

وبصورة مشابهة يمكن الانتقال إلى علاقات التحويلات القانونية المعبر عنها بتوابع مشتقة ترتبط بالمتغيرات Q,p أو P,p.

ومن الملاحظ أن العلاقة بين توابع هاملتون القديمة والجديدة تبقى متماثلة، حيث أن الفرق $H' - H$ يساوي المشتق الجزئي للتابع المشتق بالنسبة للزمن. وفي الحالة الخاصة، عندما لا يتعلق التابع المشتق بالزمن، فإن $H' = H$. وبتعبير آخر، للحصول في هذه الحالة على تابع هاملتون الجديد يكفي أن نضع في التابع H القيم q,p دلالة المتحولات الجديدة Q,P.

وأخيراً من الأهمية الإشارة، إلى أن تغير القيم p و q أثناء الحركة، يمكن عده كتحويلات قانونية. وتتوضح هذه العبارة بالشكل التالي: لنفرض أن p : قيم المتغيرات في اللحظة t و $q_{t+\tau}$ و $q_{t+\tau}$: قيم المتغيرات نفسها في اللحظة $t+\tau$ ، حيث تكون القيم الثانية توابع للقيم الأولى (والوسيط τ):

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau) \quad , \quad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau)$$

فإذا افترضنا أن هذه العلاقات تمثل تحويلاً من المتغيرات q_t و p_t إلى المتغيرات $q_{t+\tau}$ و $p_{t+\tau}$، عندئذ يكون هذا التحويل قانونياً. وهذا واضح من العبارة:

$$dS = \left(\sum p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t\right)$$

التي تعطي تفاضل الفعل $S(q_{t+\tau}, q_t)$ من أجل المسار الحقيقي المار من النقاط q_t و $q_{t+\tau}$ في اللحظات الزمنية t و $t+\tau$ (انظر (7.47)). وبمقارنة تلك العبارة مع (7.66) نجد أن S هو التابع المشتق للتحويل.

ملاحظة: في حالة المجموعة الطبيعية، كانت الإحداثيات $q_1, q_2, \ldots q_s$

تحدد وضع المجموعة الميكانيكية بالاشتراك مع الاندفاعات $p_1,\ldots p_s$ فإنها تحدد حالة المجموعة، أي أن أوضاع نقاطها وسرعاتها. وعند التحويلات القانونية من النوع العام تفقد الإحداثيات هذه الخاصية، فلم تعد القيم $Q_1,\ldots Q_S$ تحدد وضع المجموعة وإنما تحدد فقط بالاشتراك مع $P_1,\ldots P_S$ حالة المجموعة. وتحدد المتغيرات $Q_1,\ldots Q_S$ -كما سبق- وضع المجموعة فقط في الحالة الخاصة للتحويل القانوني النقطي، الذي تكون عنده التوابع $Q_j(q,p,t)$ مستقلة في الواقع عن الاندفاعات:

$$Q_j = Q_j(q,t)$$

مثال 1: لدينا مجموعة المتحولات p_j,q_j، والمطلوب إيجاد المتحولات الجديدة Q_j,P_j بدلالة المتحولات القديمة q_j,p_j ثم حساب تابع هاملتون الجديد H' بدلالة التابع القديم H، علماً بأن التابع المشتق F يأخذ الشكل:

$$F = \sum_j q_j Q_j$$

الحل: باستخدام العلاقات (7.67)، نحصل على:

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} = Q_j \quad , \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} = -q_j$$

أي أن المتحولات الجديدة هي:

$$Q_j = p_j \quad , \quad P_j = -q_j$$

حيث $j = 1,2,\ldots s$.

وهكذا ففي مجموعة المتحولات القديمة، تصبح الاندفاعات إحداثيات جديدة والقيم السالبة للإحداثيات القديمة تصبح اندفاعات جديدة.

من الواضح أن التابع المشتق $F = \sum_j q_j Q_j$ لا يتعلق صراحة بالزمن،

لهذا فإن $\partial F / \partial t = 0$ ويكون $H' = H$.

7. 8. معادلة هاملتون–جاكوبي

درسنا في الفقرة الخامسة من هذا الفصل مفهوم الفعل كتابع للإحداثيات والزمن. وبينا أن المشتق الجزئي لذلك التابع $S(q,t)$ بالنسبة للزمن يرتبط مع تابع هاملتون بالعلاقة:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q,p,t) = 0$$

وأن مشتقاته الجزئية بالنسبة للإحداثيات تساوي الاندفاعات الموافقة. فإذا عوضنا في تابع هاملتون المشتقات $\partial S / \partial q$ بالاندفاعات p، فإننا نحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1,\ldots q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0 \qquad (7.69)$$

التي ينبغي أن يحققها التابع $S(q,t)$. تسمى هذه العلاقة **معادلة هاملتون–جاكوبي** وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى.

وبصورة مشابهة لمعادلات لاغرانج والمعادلات القانونية، فإن معادلة هاملتون–جاكوبي تمثل أساساً لطريقة عامة في تكامل معادلات الحركة.

وقبل أن ننتقل إلى دراسة تلك الطريقة، ننوه مبدئياً إلى أن لكل معادلة تفاضلية في المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى حلاً يتعلق بتابع كيفي، يسمى هذا الحل **التكامل العام للمعادلة**. لكن في التطبيقات الميكانيكية لا يلعب التكامل العام لمعادلة هاملتون–جاكوبي دوراً أساسياً، وإنما الهام ما يسمى **التكامل التام** وهو حل المعادلة التفاضلية في المشتقات الجزئية الذي يحوي عدداً من الثوابت الكيفية المستقلة مساوياً عدد المتغيرات المستقلة.

تتمثل المتغيرات المستقلة في معادلة هاملتون–جاكوبي بالإحداثيات

والزمن. لهذا فمن أجل مجموعة تتمتع بـــ s درجة حرية، يحوي التكامل التام لتلك المعادلة $(s+1)$ ثابتاً كيفياً. وبما أن التابع S يدخل في المعادلة فقط عن طريق مشتقاته، فيكون أحد الثوابت الكيفية في التكامل التام كحد منعزل، أي أن التكامل التام لمعادلة هاملتون-جاكوبي يأخذ الشكل:

$$s = f\left(t, q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s\right) + A \qquad (7.70)$$

حيث $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ و A ثوابت كيفية.

سنوضح الآن العلاقة بين التكامل التام لمعادلة هاملتون-جاكوبي وحل معادلات الحركة. من أجل هذا نجري تحويلاً قانونياً من الكميات q، p إلى متغيرات جديدة ونختار التابع $f(t,q,\alpha)$ بمثابة التابع المشتق، ونختار القيم $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ بمثابة الاندفاعات الجديدة. أما الإحداثيات الجديدة فنرمز لها بـــ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. وبما أن التابع المشتق يتعلق بالإحداثيات القديمة والاندفاعات الجديدة، فينبغي علينا الاعتماد على العلاقات (7.68):

$$p_j = \frac{\partial f}{\partial q_j} \quad , \quad \beta_j = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ونظراً لكون التابع f يحقق معادلة هاملتون-جاكوبي، نرى أن التابع الجديد لهاملتون ينتهي إلى الصفر:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

لهذا فإن المعادلات القانونية للمتغيرات الجديدة تأخذ الشكل:

$$\dot{\alpha}_j = 0 \quad , \quad \dot{\beta}_j = 0$$

ومن هنا ينتج، أن:

$$\alpha = \text{const} \quad , \quad \beta_j = \text{const} \qquad (7.71)$$

ومن جهة أخرى، فإن المعادلات:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta_j$$

تعطي إمكان التعبير عن s من الإحداثيات q، وذلك بدلالة الزمن و2s من الثوابت α و β وبذلك نحصل على التكامل العام لمعادلات الحركة.

أخيراً فإن حل مسألة الحركة للمجموعة الميكانيكية بطريقة هاملتون-جاكوبي يتلخص بالعمليات التالية:

1. كتابة معادلة هاملتون-جاكوبي وذلك بعد معرفة تابع هاملتون.
2. إيجاد التكامل التام (7.70) لتلك المعادلة.
3. اشتقاق التكامل التام بالنسبة للثوابت الكيفية α، وعد المشتقات الناتجة مساوية إلى الثوابت الجديدة β، فنحصل على مجموعة تحوي s معادلة جبرية:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j \qquad (7.72)$$

وبحل هذه المعادلات، نوجد الإحداثيات q كتوابع للزمن مع 2s من الثوابت الكيفية. أما علاقة الاندفاعات بالزمن، فيمكن إيجادها من المعادلات $p_j = \partial S / \partial q_j$.

عند وجود تكامل غير تام لمعادلة هاملتون-جاكوبي يرتبط بعدد أقل من العدد s للثوابت الكيفية، فإنه يستحيل إيجاد التكامل العام لمعادلة الحركة، لكن نستطيع أن نبسط لدرجة ما مسألة إيجاده. فإذا علم التابع s الحاوي ثابتاً واحداً α، فإن العلاقة:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const}$$

تعطي معادلة واحدة تتعلق بالإحداثيات $q_1,\ldots,q_s$ والزمن t.

تأخذ معادلة هاملتون-جاكوبي صيغة أبسط في الحالة التي لا يتعلق

التابع H بشكل صريح بالزمن، أي عندما تكون المجموعة محفوظة، وعندئذ تؤدي علاقة الفعل بالزمن إلى الحد Et، (انظر الفقرة السادسة):

$$S = S_0(q) - Et \tag{7.73}$$

نضع هذه العلاقة في (7.69)، فنحصل من أجل الفعل المختصر $S_0(q)$ على معادلة هاملتون-جاكوبي:

$$H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E \tag{7.74}$$

في الختام، نشير إلى أن المسلمات الفيزيائية المتضمنة في أساس المعادلات القانونية (7.5) ومعادلة هاملتون-جاكوبي (7.69) تكون متماثلة. لكن مزية معادلة هاملتون-جاكوبي هي أن الطريقة الرئيسة لحل تلك المعادلة – طريقة فصل المتحولات- تضم كحالة خاصة طريقة الإحداثيات الدورية. بالإضافة لذلك، فعند دراسة معادلة هاملتون-جاكوبي يظهر التشابه العميق بين ميكانيك النقطة والظاهرة الموجية والذي يلعب دوراً هاماً عند معالجة الناحية الموجية لظواهر الميكانيك الكوانتي.

مثال 1: أوجد معادلة هاملتون-جاكوبي لوصف حركة نقطة مادية غير مقيدة وخاضعة لحقل قوة الثقالة.

الحل: نختار الإحداثيات الديكارتية x,y,z, كإحداثيات معممة، فتابع هاملتون للنقطة المفروضة:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + mgz$$

حيث m كتلة النقطة.

وحسب العلاقات (7.43) يكون:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} \quad , \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} \quad , \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}$$

عندئذ يأخذ تابع هاملتون الشكل التالي:

$$H=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+mgz \qquad (1)$$

باستخدام (1) في المعادلة (7.69)، نحصل على معادلة هاملتون-جاكوبي:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=0$$

يمكن كتابة معادلة هاملتون-جاكوبي، بافتراض أن الإحداثيات المعممة هي الإحداثيات الكروية r, φ, θ. فتابع هاملتون هو:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+mgr\ \cos\theta$$

وتكتب الاندفاعات بالشكل:

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial r} \quad , \quad p_\varphi=\frac{\partial S}{\partial \varphi} \quad , \quad p_\theta=\frac{\partial S}{\partial \theta}$$

نعوض هذه العلاقات في العبارة H، فنحصل على المعادلة المباشرة لهاملتون-جاكوبي:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+mgr\ \cos\theta=0$$

مثال 2: أوجد حل معادلة هاملتون-جاكوبي لنقطة طليقة تتحرك بالنسبة لجملة عطالية وذلك في حالة انعدام حقل القوى.

الحل: يمكن في هذا المثال البسيط فصل جميع المتغيرات في معادلة هاملتون-جاكوبي:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]=0$$

عندئذ يأخذ التكامل العام الشكل:

$$S=-Et+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4$$

نعوض هذه العلاقة في معادلة هاملتون-جاكوبي فنوجد العلاقة بين الثوابت:

$$E=\frac{1}{2m}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)$$

إذن التكامل التام هو:

$$S=-\frac{1}{2m}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)t+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4$$

واعتماداً على العلاقة $p_j=\partial S/\partial q_j$، نستطيع أن نتأكد من انحفاظ الاندفاعات المعممة:

$$p_x=\frac{\partial S}{\partial x}=\alpha_1, p_y=\frac{\partial S}{\partial y}=\alpha_2, p_z=\frac{\partial S}{\partial z}=\alpha_3$$

بمساواة المشتقات $\partial S/\partial\alpha$ مع الثوابت الكيفية β (العلاقة (7.72)) نوجد التكاملات الأخرى:

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}=-\frac{\alpha_1}{m}t+x$$

$$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}=-\frac{\alpha_2}{m}t+y$$

$$\beta_3=\frac{\partial S}{\partial\alpha_3}=-\frac{\alpha_3}{m}t+z$$

أخيراً من الشروط الابتدائية وتحويل الثوابت، نحصل على حل المعادلات القانونية:

$$p_x = p_{x_0} \quad , \quad p_y = p_{y_0} \quad , \quad p_z = p_{z_0}$$

$$x = x_0 + \frac{p_{x_0}}{m}(t - t_0), y = y_0 + \frac{p_{y_0}}{m}(t - t_0)$$

$$z = z_0 + \frac{p_{z_0}}{m}(t - t_0)$$

7. 9. طريقة فصل المتحولات في معادلة هاملتون–جاكوبي

إن مكاملة معادلة هاملتون–جاكوبي تمثل صعوبات كبيرة. لكن في بعض الحالات الهامة، يمكن إيجاد التكامل التام لتلك المعادلة بطريقة فصل المتحولات والتي سنعرضها مباشرة.

لنفرض أن أحد الإحداثيات المعممة وليكن q_1 والمشتق الموافق $\partial S / \partial q_1$ يدخلان في معادلة هاملتون–جاكوبي بشكل تركيب $\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ لا يحوي أياً من الإحداثيات (أو الزمن) والمشتقات الأخرى، فعندئذ تأخذ تلك المعادلة الشكل:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left[q_j, t, \frac{\partial S}{\partial q_j}, \varphi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right] = 0 \qquad (7.75)$$

حيث q_j يرمز إلى مجموعة كل الإحداثيات باستثناء q_1.

سنبحث عن حل هذه المعادلة المفروضة وفقاً للشكل:

$$S = S'(q_j, t) + S_1(q_1) \qquad (7.76)$$

نضع هذه العبارة في العلاقة (7.75) فنحصل على:

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H\left[q_j, t, \frac{\partial S'}{\partial q_j}, \varphi_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right] = 0 \qquad (7.77)$$

وبفرض أننا أوجدنا الحل (7.76)، فبعد وضعه في المعادلة (7.77)، ينبغي أن تنتهي هذه الأخيرة إلى متطابقة صحيحة من أجل أي قيمة لـــq_1. لكن عند تغيير q_1، فإن التابع φ_1 فقط يستطيع أن يتغير، ولكي تكون المعادلة (7.77) متطابقة ينبغي أن يكون التابع φ_1 نفسه ثابتاً. وهكذا فإنه يمكن كتابة العلاقة (7.77) وفقاً للمعادلتين:

$$\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \qquad \textbf{(7.78)}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H\left[q_j, t, \frac{\partial S'}{\partial q_j}, \alpha_1\right] = 0 \qquad \textbf{(7.79)}$$

حيث α_1 ثابت كيفي. تمثل العلاقة الأولى معادلة تفاضلية عادية يمكن مكاملتها بسهولة وبالتالي إيجاد $S_1(q_1)$. أما المعادلة (7.79) فتبقى معادلة تفاضلية في المشتقات الجزئية، لكن عدد المتحولات المستقلة فيها أقل بواحد مما في المعادلة المفروضة (7.75).

وبصورة مماثلة، لو أن معادلة هاملتون-جاكوبي حوت m زوجاً من المتحولات q_i و $\partial S / \partial q_i$ المترافقة بشكل تراكيب وفقاً للعلاقات التالية:

$$\varphi_i = \varphi_i\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)$$

حيث $i = 1, 2, ... m$. في هذه الحالة يمكن فصل المتحولات في التابع S الذي نكتبه بالشكل:

$$S = S'(q_j, t) + S_1(q_1) + S_1(q_2) + ... + S_m(q_m) \qquad \textbf{(7.80)}$$

حيث $j = m+1, m+2, ... s$ وعندئذ تؤول معادلة هاملتون-جاكوبي إلى معادلة تفاضلية عادية:

$$\varphi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \varphi_2\left(q_2, \frac{dS_2}{dq_2}\right) = \alpha_2, ...$$

$$,...\varphi_m\left(q_m,\frac{dS_m}{dq_m}\right)=\alpha_m \qquad (7.81)$$

وإلى معادلة تفاضلية واحدة فقط في المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial S'}{\partial t}+H\left(q_j,t,\frac{\partial S'}{\partial q_j},\alpha_i\right)=0 \qquad (7.82)$$

حيث:

$$j=m+1,m+2,...s \quad , \quad i=1,2,...m$$

إن تكامل هذه المعادلة هو أسهل من تكامل المعادلة الأساسية (معادلة هاملتون جاكوبي):

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_j,t,\frac{\partial S}{\partial q_j}\right)=0$$

التي تحوي $s+1$ متحولاً: $q_1,q_2,...,q_s,t$. أما المعادلة (7.82) فتحوي $s+1-m$ متحولاً: $q_{m+1},q_{m+2},...,q_s,t$ ويكون بذلك عدد متحولاتها المستقلة أقل مما في المعادلة الأساسية بـــm متحولاً.

تستخدم طريقة فصل المتحولات بصورة ملائمة عند وجود الإحداثيات الدورية فالإحداثي الدوري q_1 لا يدخل مطلقاً بصورة صريحة في تابع هاملتون، ولذلك فإنه لا يدخل في معادلة هاملتون–جاكوبي. وفي هذه الحالة يؤول التابع:

$$\varphi_1\left(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$$

إلى الشكل البسيط $\partial S/\partial q_1$. ومن العلاقة (7.78) نحصل بسهولة على $S_1=\alpha_1 q_1$ مما يؤدي إلى:

$$S=S'(q_j,t)+\alpha_1 q_1 \qquad (7.83)$$

يعبر الثابت α_1 هنا عن قيمة الاندفاع $p_1=\partial S/\partial q_1$ الموافق

للإحداثي الدوري. وبصورة أعم، فعند وجود m إحداثياً دورياً $q_1, q_2, \ldots, q_m$ $(m < s)$، نحصل على:

$$S = S'(q_j, t) + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_m q_m$$
$$(j = m+1, m+2, \ldots, s)$$

ولتعيين S'، ينبغي حل معادلة هاملتون جاكوبي:

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H\left(q_{m+1}, \ldots, q_s, t, \frac{\partial S'}{\partial q_{m+1}}, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right) = 0$$

التي تحوي $s+1-m$ متحولاً، أي أن عدد المتغيرات ينقص بقدر عدد الإحداثيات الدورية m.

إذا كانت المجموعة الميكانيكية محفوظة، فعندئذ يتطلب فقط فصل s من المتحولات في المعادلة (7.74)، وعند الفصل التام يأخذ التكامل المباشر الشكل التالي:

$$S = \sum_k S_k(q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)t \qquad (7.84)$$

علماً بأن كل تابع من S_k يتعلق فقط بإحداثي واحد وتكون الطاقة E تابعاً للثوابت الكيفية $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$، ونحصل عليها بوضع $S_0 = \sum S_k$ في المعادلة (7.74). وعندما تكون المجموعة محفوظة وجميع الإحداثيات المعممة دورية باستثناء q_s، فإن:

$$S = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_{s-1} q_{s-1} + S'(q_s) - Et \qquad (7.85)$$

وتتحول عندئذ المعادلة التفاضلية في المشتقات الجزئية إلى معادلة تفاضلية عادية:

$$H\left(q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \frac{dS'}{dq_s}\right) = E$$

حيث E– الطاقة الكلية للمجموعة الميكانيكية.

وأخيراً فإن جميع الحالات السابقة – عولجت من أجل تبسيط تكامل معادلات الحركة والتي تعتمد على استخدام الإحداثيات الدورية – تدخل ضمن طريقة فصل المتحولات في معادلة هاملتون–جاكوبي. وبالإضافة لتلك الحالات هناك بعض المسائل التي يمكن فيها فصل المتحولات بالرغم من أن الإحداثيات لا تكون دورية، وكل هذا يجعل طريقة هاملتون–جاكوبي قادرة على إيجاد التكامل العام لمعادلات الحركة.

مثال 1: أوجد قانون الحركة لهزاز له درجة حرية واحدة، معتمداً على معادلة هاملتون–جاكوبي.

الحل: تابع هاملتون لهذا الهزاز هو:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}$$

وبذلك فإن:

$$\varphi_1(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}$$

عندئذ تأخذ معادلة هاملتون–جاكوبي (7.74) الصورة التالية:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dq}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = E$$

نفرض أن $E = \alpha$ ، عند ذلك يكون:

$$S = -\alpha t + \int\sqrt{2m\alpha - mcq^2}\,dq$$

ومن المعادلات:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j$$

نوجد الاندفاع:

$$p=\sqrt{2m\alpha-mcq^2}$$

وكذلك معادلة الحركة:

$$-t+\frac{1}{\omega}\int\frac{dq}{\sqrt{A^2-q^2}}=\beta$$

حيث:

$$A^2=\frac{2\alpha}{c}\quad,\quad \omega^2=\frac{c}{m}$$

وبمكاملة معادلة الحركة نحصل على:

$$q=A\sin\omega(t+\beta)$$

مثال 2: أوجد قانون الاهتزازات الصغيرة لنواس رياضي بالاعتماد على معادلة هاملتون-جاكوبي.

الحل: تابع الطاقة الكلية لذلك النواس هو:

$$E=\frac{m\ell^2}{2}\dot{\varphi}^2+mg\ell(1-\cos\varphi)$$

بنشر $\cos\varphi$ وفقاً للعلاقة:

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\dots$$

وبما أن الاهتزازات صغيرة، فإننا سنهمل حدود المراتب العليا، أي أن:

$$\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$$

وعليه فتابع الطاقة يكتب من جديد بالصيغة:

$$E=\frac{m\ell^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{mg\ell}{2}\varphi^2 \qquad (1)$$

وبتبديل $\dot{\varphi}$ في (1) بدلالة الاندفاع الموافق $p_\varphi=m\ell^2\dot{\varphi}$، نحصل على

تابع هاملتون:

$$H = \frac{1}{2m\ell^2} p_\varphi^2 + \frac{mg\ell}{2}\varphi^2 \qquad (2)$$

إن حل المسألة من أجل تعيين التكاملات الأولى للمعادلات القانونية بمساعدة معادلة هاملتون–جاكوبي يؤول إلى البحث عن التابع المشتق s. ويعطي هذا التابع إمكان إجراء التحويلات القانونية من المتحولات القديمة للإحداثيات والاندفاعات المعممة إلى إحداثيات واندفاعات جديدة ثابتة. وفي مسألتنا تمثل φ و p_φ الإحداثيات والاندفاعات القديمة وتوافقها الثوابت الجديدة المجهولة α و β. ويكتب التابع S في هذه الحالة بالشكل:

$$S = -Et + S_0(\varphi, E) \qquad (3)$$

حيث $-E$ الطاقة الميكانيكية الكلية، وبالتالي $\alpha = E$.

لحساب التابع S_0، نستخدم معادلة هاملتون–جاكوبي:

$$H\left(\varphi, \frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right) = E \qquad (4)$$

ثم نبدل في العلاقة (2) $\partial S_0 / \partial \varphi$ بـــ p_φ، فنحصل على معادلة هاملتون–جاكوبي بالشكل التالي:

$$\frac{1}{2m\ell^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{mg\ell}{2}\varphi^2 = E$$

وبما أن S_0 تابع للمتحول φ فقط، فإن:

$$\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} = \frac{dS_0}{d\varphi}$$

وبالتالي نكتب:

$$\frac{1}{2m\ell^2}\left(\frac{dS_0}{d\varphi}\right)^2 + \frac{mg\ell}{2}\varphi^2 = E \qquad (5)$$

وهكذا فإن معادلة هاملتون–جاكوبي في المشتقات الجزئية تؤدي إلى معادلة تفاضلية عادية (5)، حلها بالنسبة لـــ $dS_0 / d\varphi$ يعطي:

$$\frac{dS_0}{d\varphi} = \ell\sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{mg\ell}{2}\varphi^2}$$

وبعد فصل المتحولات والمكاملة نجد:

$$S_0 = \ell\sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{mg\ell}{2}\varphi^2}\,d\varphi \qquad (6)$$

بتبديل S_0 في عبارة التابع المشتق (3)، يكون لدينا:

$$S = -Et + \ell\sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{mg\ell}{2}\varphi^2}\,d\varphi \qquad (7)$$

والآن ليس صعباً استخدام العلاقات النظرية:

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} \quad , \quad p_\varphi = \frac{\partial S_0}{\partial \varphi}$$

فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= -\ell\sqrt{2m}\int \frac{mg\ell\varphi d\varphi}{2\sqrt{E - \frac{mg\ell}{2}\varphi^2}} \\ \beta &= -t + \ell\sqrt{2m}\int \frac{d\varphi}{2\sqrt{E - \frac{mg\ell}{2}\varphi^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

بإجراء عملية التكامل في (8) نجد:

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= \ell\sqrt{2m\left(E - \frac{mg\ell}{2}\varphi^2\right)} \\ \beta &= -t + \sqrt{\ell / g}\,\arcsin\sqrt{\frac{mg\ell}{2E}}\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

لتعيين E و β نستخدم الشروط الابتدائية لحركة النواس: عندما $t = 0$

يكون $\varphi = \varphi_0$ و $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$، وبالتالي فإن $p_\varphi = p_{\varphi 0} = 0$. وتؤول العلاقات (9) إلى:

$$E = \frac{mg\ell}{2}\varphi_0^2 \quad , \quad \beta = \sqrt{\ell / g}\arcsin\sqrt{\frac{mg\ell}{2E}}\varphi_0 \qquad (10)$$

وبتعويض هذه العلاقات من جديد في (9)، نجد:

$$p_\varphi = m\ell\sqrt{g\ell\left(\varphi_0^2 - \varphi^2\right)} \quad , \quad \varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{g / \ell}\, t$$

ومن الطبيعي، يمكن بسهولة الحصول على المعادلة:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{g / \ell}\, t$$

باستخدام المعادلة التفاضلية للدوران حول محور ثابت:

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi$$

ومن ثم نضع $\sin\varphi \approx \varphi$ وبعدها نكامل. ولكن حل المسألة بطريقة هاملتون–جاكوبي يسمح لنا بتوضيح المعنى الفيزيائي للثوابت القانونية الجديدة E و t. إن هذه النتيجة تلعب دوراً أساسياً في الميكانيك الكوانتي.

7. 10. حركة النقطة المادية والظاهرة الموجية

أشرنا آنفاً إلى التشابه الذي يمكن إجراؤه بين ميكانيك النقطة ونظرية الظاهرة الموجية. سنحلل هذا التشابه من خلال دراسة حركة النقطة المادية الطليقة المتحركة في حقل كموني $U(\vec{r})$ مستقل عن الزمن وحركة الموجة وحيدة اللون المنتشرة في وسط ضوئي غير متجانس. إن حركة النقطة المادية تحقق معادلة هاملتون–جاكوبي:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U(\vec{r}) = 0 \qquad (7.86)$$

حيث S– تابع لـــ $\vec{r}$ و t. وبما أن التابع الكموني مستقل عن الزمن، فإن تابع هاملتون H يبقى ثابتاً ويساوي الطاقة الكلية E، وبالتالي سنبحث عن التابع

S وفقاً للشكل:

$$S = -Et + S_0(\vec{r}) \qquad (7.87)$$

بتعويض العلاقة (7.87) في (7.86)، نحصل على معادلة الفعل المختصر:

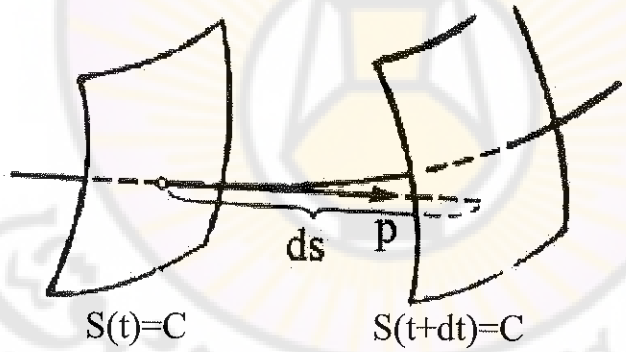
$$(\nabla S_0)^2 = 2m\left[E - U(\vec{r})\right] \qquad (7.88)$$

والجدير بالذكر أن السطوح $S_0 = const$ هي مستقرة، طالما أن S_0 لا يتعلق بصورة صريحة بالزمن، والسطوح متساوية الفعل:

$$S = -Et + S_0(\vec{r}) = const \qquad (7.89)$$

تتحرك، وفي لحظة ما ينطبق أي سطح متساوي الفعل S على سطح معين للفعل المختصر. فمثلاً في اللحظة t ينطبق السطح $S = C$ على السطح $S_0 = C_1$، وذلك إذا كان وسيط مجموعة تلك السطوح C_1 مساوياً $C + Et$. وفي اللحظة $t + dt$ ينطبق السطح $S = C$ على سطح آخر $S_0 = C_1 + Edt$.

$$S_0 = C_1 = C + Et \qquad S_0 = C_1 + Edt$$



الشكل (7.3)

يمكن إيجاد عبارة السرعة u التي يتحرك بها سطح متساوي الفعل. وتساوي هذه السرعة في نقطة معينة من السطح $ds/dt : S = C$ حيث ds المسافة التي يجتازها السطح خلال الفترة dt في الاتجاه العمودي عليه من النقطة المفروضة. ينتج مما ذكر أن التغير dS_0 عند انتقال السطح S=C خلال الفترة dt يساوي Edt. ومن جهة أخرى، نعلم أن:

$$dS_0 = |\nabla S_0| ds$$

ومنه يكون (انظر العلاقة (7.88)):

$$u = \frac{E}{|\nabla S_0|} = \frac{E}{\sqrt{2mT}} = \frac{E}{mv} \qquad (7.90)$$

حيث v– عامل سرعة النقطة المادية.

مع حركة السطح متساوي الفعل S، وبالوقت نفسه تتحرك النقطة المادية على مسار عمودي على السطح S وكذلك على السطح S_0، وذلك لأن اندفاع النقطة $\vec{p}$ حسب العلاقات:

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial S_0}{\partial q_j} = p_j$$

يساوي:

$$\vec{p} = \overrightarrow{\nabla S} = \overrightarrow{\nabla S_0} \qquad (7.91)$$

ويتعين مسار النقطة بالعلاقة (7.88) التي شكلياً تطابق معادلة الايكونال في الضوء الهندسي:

$$(\nabla \ell)^2 = n^2(\vec{r}) \qquad (7.92)$$

حيث يسمى ℓ الايكونال و n قرينة الانكسار التي تساوي النسبة بين سرعة الضوء c في الخلاء وسرعته في الوسط المفروض، $\vec{r}$– شعاع موضع النقطة في الفراغ.

يمكن الحصول على معادلة الايكونال من المعادلة الموجية:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (7.93)$$

حيث φ أي مركبة من مركبات شدة الحقل الكهربائي أو الحقل المغنطيسي. فإذا افترضنا n ثابتاً، فإن أحد حلول المعادلة (7.93) هو:

$$\varphi = ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad (7.94)$$

حيث: a– السعة الثابتة و ω– التواتر المفروض.

$\vec{k}$– الشعاع الموجي الموجه وفقاً للناظم على السطح الموجي (القيمة المطلقة للشعاع الموجي $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{n\omega}{c}$ حيث λ طول الموجة). وعندما تتغير n بصورة بطيئة مع $\vec{r}$، فإنه من الطبيعي البحث عن حل المعادلة (7.93) بالشكل:

$$\varphi = a(\vec{r})e^{i\left[k_0\ell(\vec{r})-\omega t\right]} \qquad (7.95)$$

حيث $k_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}=\frac{\omega}{c}$– العدد الموجي في الخلاء، ℓ– الايكونال، بتعويض العلاقة (7.95) في (7.93) وجعل الأجزاء الحقيقية والتخيلية للعبارة الناتجة مساوية الصفر، عندئذ نحصل على معادلتين من اجل السعة a والايكونال ℓ:

$$\nabla^2 a + ak_0^2\left[n^2-(\nabla\ell)^2\right]=0 \qquad (7.96)$$

$$a\nabla^2\ell + 2(\nabla a)(\nabla\ell)=0 \qquad (7.97)$$

وبفرض أن تغير قرينة الانكسار n على مسافة من رتبة طول الموجة مهمل (تكافىء هذه الفرضية أن طول الموجة صغير بالمقارنة مع البعد الخطي للوسط غير المتجانس)، فإننا نحقق في المعادلة (7.96) الانتقال الحدي $k_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}\to\infty$. وعندئذ نحصل على المعادلة الأساسية في الضوء الهندسي (7.92)*. وفي هذه الحالة الحدية، تكون السطوح:

---

* في هذه الحالة نهمل الحد الأول من العلاقة (7.96)، مما يؤدي إلى الشرط:

$$\nabla^2 a << a\left(4\pi^2/\lambda_0^2\right)$$

الذي يميز التغير الضئيل للسعة على مسافة من رتبة طول الموجة. أما ما يتعلق بالمعادلة (7.97)، فإنها تمثل –بدقة مضروب ثابت– قانون انحفاظ الطاقة للموجة المدروسة، ويمكن التأكد من ذلك بكتابتنا للعلاقة

$$k_0\ell(\vec{r}) - \omega t = const \qquad (7.98)$$

سطوحاً متساوية الطور وتعين صدر الموجة، والأشعة الضوئية عمودية على صدر الموجة وموجهة وفق الشعاع الموجي $\vec{k}$ الذي يساوي (انظر تعاريف $\vec{k}$ وk_0 في العلاقات (7.94) و(7.95):

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\nabla\vec{\ell}}{|\nabla\ell|} = k_0\nabla\vec{\ell} \qquad (7.99)$$

وبمقارنة العلاقات (7.89) و(7.98) و(7.91) و(7.99) و(7.88) و(7.92)، نصل إلى التشابه بين المقادير التالية:

$$\begin{aligned} &S \sim k_0\ell - \omega t \quad , \quad S \sim k_0\ell \quad , \quad E \sim \omega \\ &\vec{p} \sim \vec{k} \quad , \quad 2m(E-U) \sim n^2 \end{aligned} \qquad (7.100)$$

وهكذا نجد أن السطح متساوي الفعل يمثل صدر الموجة، ويلعب الفعل المختصر S_0 دور الايكونال، ويمكن مقارنة اندفاع النقطة المادية بالشعاع الموجي، وتلعب مسارات النقطة دور الأشعة الضوئية، ويشبه المقدار $\left[2m(E-U)\right]^{1/2}$ قرينة الانكسار n^*.

وحول التشابه المشار إليه، يمكن طرح مسألة إيجاد المعادلة الميكانيكية الموافقة للمعادلة الموجية، وذلك في مجال الأمواج الطويلة وليس في مجال الأمواج القصيرة فقط. لكن هذه المسألة تخرج عن إطار منهاجنا، حيث أنها تعالج في الميكانيك الكوانتي.

(7.97) بالشكل $\nabla\left(a^2\nabla\ell\right) = 0$ وعد تدفق الطاقة في الموجة موجه وفقاً للشعاع $\vec{k}$ $\vec{\nabla}\ell$ وقيمة هذا التدفق تتناسب طرداً مع a^2.

* من اجل مجموعة نقاط مادية، يمكن الإشارة إلى التشابه نفسه، بأخذ الفراغ ذو s– بعداً بدلاً من الفراغ الثلاثي.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1- أوجد تابع هاملتون وتكامل المعادلات القانونية في مسألة جسمين كتلتيهما m_1 وm_2، بافتراض أن مبدأ الإحداثيات لا ينطبق على مركز عطالة الجسمين.

2- أوجد معادلات الحركة لنيوتن من أجل نقطة طليقة كتلتها m وتتحرك في حقل كموني للقوى، وذلك بالاعتماد على معادلات هاملتون.

3- يتحرك ثقل كتلته m على قضيب أفقي يدور حول محور رأسي، فإذا كان كمون القوة المؤثرة في القضيب هو $U(r)$، حيث r بعد الثقل عن محور الدوران، اكتب تابع راوس ومعادلات الحركة لذلك القضيب.

4- اكتب معادلة هاملتون-جاكوبي لوصف حركة نواس فيزيائي ثقله p وعزم عطالته بالنسبة لمحور التعليق هو I_z والمسافة بين نقطة التعليق ومركز ثقله هي a.

5- نقطة مادية كتلتها m تتحرك على قضيب أملس صلب يدور بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور شاقولي يمر من نقطة تثبيت القضيب O. فإذا كانت الزاوية بين الشاقول والقضيب θ، أوجد معادلات الحركة بطريقة هاملتون-جاكوبي.

6- استنتج معادلات الحركة ومعادلة المسار لنقطة مادية تتحرك في مستو تحت

تأثير قوة مركزية كمونها $U=U(r)$، حيث r المسافة بين النقطة المادية ومركز الحقل. استخدم في الحل معادلة هاملتون-جاكوبي في الإحداثيات القطبية.

7- تتحرك نقطة كتلتها m في حقل الثقالة المتجانس $\vec{g}$. احسب قرينة انكسار الوسط الضوئي الذي يتحرك فيه الشعاع الضوئي على منحن ينطبق على مسار النقطة المادية في حقل الثقالة.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن

8. ميكانيك النظرية النسبية

مقدمة: لن نتطرق هنا إلى فرضيات النظرية النسبية والنتائج التي تمخضت عنها. لكن سنكمل بعض المفاهيم التي لم نتطرق إليها في كتاب الميكانيك الفيزيائي (2). ومن المفيد الرجوع إلى ذلك الكتاب فيما يتعلق بالنظرية النسبية.

8. 1. فعل جسيم في النظرية النسبية

يحقق الميكانيك النيوتني مبدأ النسبية لغاليله الذي يصلح من أجل السرعات الصغيرة $v << 0$. لذا من الضروري إيجاد معادلات الميكانيك بحيث تكون لا متغيرة بالنسبة لتحويلات لورنتز.

وجدنا سابقاً أنه يمكن استنتاج قوانين الميكانيك انطلاقاً من مبدأ الفعل الأصغري الذي تنتج منه معادلات لاغرانج. وقد رأينا أن تابع لاغرانج لجسيم حر يتعلق بمربع السرعة فقط، حيث تابع لاغرانج مستقل عن اتجاه السرعة، إذ لا توجد اتجاهات متميزة في الفراغ عند انعدام الحقل الخارجي. والفعل S هو لا متغير بالنسبة لتحويلات غاليله وبالواقع إن تابع لاغرانج L' في الجملة العطالية K' التي تتحرك بالنسبة للجملة العطالية K بسرعة محدودة $\vec{V}$ هو:

$$L' = \frac{m}{2}v'^2 = \frac{m}{2}\left(\vec{v} + \vec{V}\right)^2 = \frac{m}{2}v^2 + m\vec{v}.\vec{V} + \frac{m}{2}V^2$$

حيث $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ سرعتا الجسيم في الجملتين K و K' على الترتيب. يمكن كتابة L' بالشكل:

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(m\vec{r}.\vec{v} + \frac{m}{2}V^2 t \right)$$

إن الحد الثاني في الطرف الأيمن مشتق تام للإحداثيات والزمن فيمكن حذفه لأنه لا يغير معادلات الحركة (راجع مبدأ الفعل الأصغري).

نستخدم في الميكانيك النسبي ومن أجل تعيين تابع لاغرانج لجسيم حر تابع الفعل من الشكل:

$$S = \int \alpha ds = \int \alpha c\sqrt{1 - v^2 / c^2}\, dt \qquad \textbf{(8.1)}$$

إن هذا التابع يحقق كون أن L تابع لمربع السرعة وكذلك يحقق شرط أن الفعل غير متغير بالنسبة لتحويلات لورنتز لأنه عبر عن الفعل S بدلالة المجال فقط. لا يمكن تكوين كميات أخرى لا متغيرة من $d\ell$ وdt سوى المجال ds، مما يدل على أنه ليس هناك إلا اختيار واحد للفعل S حسب العلاقة (8.1).

8. 2. تابع لاغرانج لجسيم حر

لكي نعين الثابت α، سندرس الصيغة الحدية للعلاقة (8.1) من أجل سرعة صغيرة للجسيم. فإذا كان $v << c$، ينتج:

$$\sqrt{1 - v^2 / c^2} \approx 1 - v^2 / 2c^2 \qquad \textbf{(8.2)}$$

ومن تعريف الفعل:

$$S = \int L dt$$

نوجد تابع لاغرانج:

$$L = \alpha c\sqrt{1 - v^2 / c^2} \approx \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}$$

إن الحد الأول في هذه المعادلة ثابت ويمكن حذفه نظراً لعدم ظهوره في معادلات لاغرانج. أما الحد الثاني فينبغي أن يقارن مع تابع لاغرانج لجسيم حر

في الميكانيك النيوتني:

$$L = \frac{mv^2}{2}$$

فنجد:

$$\alpha = -mc \qquad (8.3)$$

حيث m هي كتلة الجسيم مقيسة في جملة إحداثيات يكون الجسيم فيها ساكناً. إذن، فالمقدار m لا متغير من حيث النسبية حسب تعريفه بالذات. ونحصل أخيراً على تابع لاغرانج بالشكل التالي:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (8.4)$$

8. 3. الاندفاع في الميكانيك النسبي

اعتماداً على العلاقة بين الاندفاع وتابع لاغرانج، نحصل مباشرة على عبارة الاندفاع في النظرية النسبية:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (8.5)$$

وعند السرع الصغيرة للجسيمات تؤول هذه المعادلة إلى العبارة الكلاسيكية $\vec{p} = m\vec{v}$. يدعى أحياناً المقدار $\frac{m}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$ (أي عامل التناسب بين السرعة والاندفاع) بالكتلة الحركية للجسيم لتمييزها عن الكتلة السكونية m. ونشير هنا أن كلمة الكتلة تعني المقدار m الذي هو بالتعريف لا متغير نسبياً.

8. 4. الطاقة في النظرية النسبية

حسب التعريف العام للطاقة في العلاقة (3.4) يمكن تعيين طاقة جسيم:

$$E = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + mc^2\sqrt{1 - v^2 / c^2}$$
$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (8.6)$$

ونستطيع كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$E = m(v)c^2 \qquad (8.7)$$

حيث:

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (8.8)$$

تعين العلاقة (8.8) الصفة الحدية المميز لسرعة الضوء. فعندما تنتهي سرعة جسيم ما إلى سرعة الضوء تنتهي كتلته الحركية m(v) إلى اللانهاية وكذلك اندفاعه وطاقته، ولا يستثنى من ذلك إلا الجسيم الذي كتلته معدومة وهذا يؤدي إلى عدم تعيين من الشكل % في عبارة الكتلة (8.8).

8. 5. الطاقة السكونية

تدل العلاقة (8.6)، على أن طاقة الجسيم الساكن تساوي mc^2. لنطبق تلك العلاقة على جسيم مركب قابل للتفكك تلقائياً إلى جسيمين أو ثلاثة. فهناك بعض الجسيمات غير المستقرة (الميزونات) تملك قابلية التفكك هذه. وعند التفكك ينبغي أن يتحقق قانون انحفاظ الطاقة:

$$E = E_1 + E_2 \qquad (8.9)$$

ذلك أن التفكك يحدث تلقائياً بوساطة حركة داخلية ما في الجسيم المركب دون أي مؤثر خارجي.

إن تابع لاغرانج في هذه الحالة ليس معروفاً بشكل قاطع ولكنه على كل حال لا يحوي الزمن، لذلك فطاقة جسيم مركب قبل التفكك تساوي مجموع

طاقتي الجسيمين المتكونين بعد التفكك، طالما لا يوجد أي تأثير متبادل بينهما.

يعبر عن طاقة جميع هذه الجسيمات وفقاً للمعادلة (8.6)، فهي تطبق على كل الجسيمات الحرة سواء أكانت بسيطة أم مركبة. إن الصيغة الوحيدة الممكنة لتابع لاغرانج في هذه الحالة هي العبارة (8.4) التي تنتج منها علاقة الطاقة (8.6). وبتعويض (8.6) في (8.9)، نحصل على العلاقة:

$$mc^2 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} \qquad \textbf{(8.10)}$$

التي تعطي المتراجحة التالية:

$$m \geq m_1 + m_2 \qquad \textbf{(8.11)}$$

أي أن كتلة جسيم مركب قابل للتفكك تلقائياً هي أكبر من مجموع جسيماته الأولية.

بينما نجد في الميكانيك النيوتني، أن الكتلة التي تميز حركة المجموعة المادية ككل تساوي مجموع كتل جسيماتها.

إذا عرفنا الطاقة الحركية لجسيم ما بالعلاقة:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \qquad \textbf{(8.12)}$$

التي تؤول إلى $T = mv^2/2$ في حالة السرع الصغيرة) وسمينا mc^2 الطاقة السكونية يمكن عندئذ أن نرى من قانون انحفاظ الطاقة (8.10) أن جزءاً من الطاقة السكونية لجسيم مركب يتحول إلى طاقة حركية لجسيماته الأساسية، وأن جزءاً آخر يتحول إلى طاقة سكونية لها. إن مجموع الطاقات الكلية فقط هو الذي يحقق قانون الانحفاظ، وليس الطاقة الحركية T، لأن الطاقة الحركية للجسيم المركب تساوي الصفر قبل التفكك، ولا يمكن لها أن تساوي مجموع الطاقات الحركية (الموجبة أساساً) لنتاج التفكك.

إن الكتلة السكونية بالذات هي أفضل ما يستخدم لوصف التفاعلات

النووية، ذلك لأن التغير في الكتلة السكونية يعيّن الطاقة التي يمكن أن تتولد نتيجة للتفاعل (بشكل طاقة حركية لنتاج التفكك أو بشكل طاقة إشعاعية).

8. 6. تابع هاملتون لجسيم حر

وجدنا في الفصل السابع أنه يمكن الحصول على تابع هاملتون من عبارة الطاقة بعد تعويض الاندفاع بالسرعة. فحسب العلاقة (8.6) يكون تابع الطاقة لجسيم وحيد هو:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (8.13)$$

فإذا حسبنا الآن v^2 بدلالة الاندفاع (8.5) ثم عوضناه في (8.13) فإننا نحصل على عبارة تابع هاملتون:

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2c^2 + p^2}}}$$

أو بصورة أبسط، نكتب:

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \qquad (8.14)$$

في الحالة العامة التي يكون فيها $p >> mc$، فإن تابع هاملتون لجسيم حر يصبح:

$$H \approx pc \qquad (8.15)$$

وتسمى الحركة بهذا الاندفاع الكبير الذي عنده تكون العلاقة (8.15) صحيحة **النسبية الفائقة**. وعندما لا يكون للجسيم كتلة سكونية $(m = 0)$ فإن العلاقة التقريبية (8.15) تصبح علاقة صحيحة تماماً:

$$H = pc \qquad (8.16)$$

8. 7. تحويلات لورنتز للطاقة والاندفاع

لنكتب الآن عبارات الاندفاع والطاقة حسب تحويلات لورنتز. فمن العلاقة (8.5) نحصل على:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mdx}{dt\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc\frac{dx}{ds}$$

$$p_y = mc\frac{dy}{ds} \quad , \quad p_z = mc\frac{dz}{ds} \tag{8.17}$$

وكذلك تكتب الطاقة بالشكل:

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2dt}{dt\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^3\frac{dt}{ds}$$

إن المقادير ds, c, m لا متغيرة. وعلى هذا تتحول المركبات p_z,p_y,p_x على غرار dz,dy,dx أي على غرار z,y,x. ووفقاً للمعادلة الأخيرة تتحول الطاقة كتحول الزمن، وعندئذ يمكننا أن نجري المقارنات التالية:

$$p_x \sim x \quad , \quad p_y \sim y \quad , \quad p_z \sim z \quad , \quad E \sim c^2 t$$

إذا عوضنا الآن عن الاندفاع والطاقة في تحويلات لورنتز المعروفة:

$$z' = z \quad , \quad y' = y \quad , \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

نحصل على:

$$p'_x = \frac{p_x - Ev/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{8.18}$$

$$p'_y = p_y \quad , \quad p'_z = p_z \tag{8.19}$$

$$E' = \frac{E - p_x v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (8.20)$$

ونلاحظ أنه يمكن الانتقال من العلاقة (8.18) إلى العلاقة المعروفة في الميكانيك الكلاسيكي بين الاندفاعين p_x و p'_x إذا عوضنا E بالطاقة السكونية mc^2، حينئذٍ يكون $p'_x = p_x - mv$ (أي $u'_x = u_x - v$) وهذا يتفق مع قانون غاليله في جمع السرع.

8. 8. سرعة مجموعة جسيمات في النظرية النسبية

لتكن مجموعة مؤلفة من جسيمين، ترتبط سرعة كل منهما مع اندفاعه وطاقته بالعلاقة التالية:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} \qquad (8.21)$$

نحصل على هذه المعادلة بتقسيم العلاقة (8.5) على (8.6)، كما يمكن الحصول عليها بطريقة مختلفة إلى حد ما. فمن المعادلة (8.18) نستطيع تعيين السرعة v لجملة الإحداثيات التي يكون فيها اندفاع الجسيم معدوماً وذلك بوضع $p'_x = 0$، فنجد: $v = p_x c^2 / E$.

وفي الحالة العامة إذا لم تكن السرعة باتجاه المحور x، يكون حسب (8.21):

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{E} = \vec{u} \qquad (8.22)$$

وهذه نتيجة واضحة، إذ أن سرعة الجسيم $\vec{u}$ تساوي تماماً $\vec{v}$: سرعة جملة الإحداثيات لأن الجسيم ساكن بالنسبة لها. إن السرعة $\vec{v}$ لجملة الإحداثيات التي ينعدم بالنسبة لها اندفاع مجموعة ميكانيكية ما ليست هي إلا سرعة مركز عطالة المجموعة.

نطبق الآن المعادلة (8.18) على جسيمين وذلك لإيجاد سرعة جملة

الإحداثيات التي فيها ينعدم الاندفاع الكلي للجسيمين. ونظراً لكون طاقة واندفاع الجسيمات تتصف بالخاصة التجميعية وتحويل لورنتز خطياً ومتجانساً فإن صيغة الأخير من أجل مجموع كميتين هي صيغته نفسها لكل من الكميتين. لذلك نحصل مباشرة على معادلة شبيهة بـــ(8.22):

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{E} = \frac{c^2\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{E_1 + E_2} \qquad (8.23)$$

ولكي نحصل من هذه المعادلة على الانتقال الحدي لسرعة مركز العطالة حسب الميكانيك النيوتني ينبغي أن نأخذ $E_1 = m_1c^2$ ، $E_2 = m_2c^2$ ، $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ ، $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$.

وأخيراً نشير إلى أنه خلافاً للميكانيك الكلاسيكي، يستحيل في الميكانيك النسبي تمثيل سرعة مركز العطالة كمشتق تام لاحداثيات مركز العطالة بالنسبة للزمن:

$$V \neq \frac{d\vec{R}}{dt}$$

وبالفعل فإن المقدار $\frac{pc^2}{E}$ بشكل عام لا يمكن كتابته بصورة مشتق تام لأي مقدار بالنسبة للزمن.

مثال: أوجد العلاقة بين سرعة صاروخ وكتلة المادة المحترقة المنطلقة منه مع العلم أن الكتلة الابتدائية للصاروخ هي M_0 وسرع جسيمات المادة المنطلقة بالنسبة للصاروخ هي v.

الحل: لنفرض أن السرعة المباشرة للصاروخ V وكتلته الابتدائية M_0 وكتلته اللحظية M. فإذا كانت كتلة المادة المنطلقة منه dm فإن قانون انحفاظ الاندفاع بالنسبة لجملة غير متحركة يكتب بالشكل التالي:

$$d\left(\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{v'dm}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

حيث ترمز v' إلى سرعة المادة المنطلقة بالنسبة للجملة الثابتة وهي تساوي:

$$v'=\frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}$$

وذلك بافتراض أن السرع v' و V متعاكسة في الاتجاه. لنعوض v' في معادلة انحفاظ الاندفاع، فنحصل على:

$$d\left(\frac{MV}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{(v-V)dm}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

أما قانون انحفاظ الطاقة فمن المناسب كتابته في الجملة المرتبطة بالصاروخ:

$$c^2dM=-\frac{c^2dm}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

بحذف dm وإجراء الاختصارات الضرورية، نحصل على:

$$\frac{dM}{M}=-\frac{dV}{v\left(1-V^2/c^2\right)}$$

وباستخدام التكامل التالي:

$$\int\frac{ax}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|$$

عندما $b^2>4ac$ (هذا الشرط محقق في تكاملنا المفروض)، فإننا نحصل مباشرة على:

$$\frac{M}{M_0}=\frac{(1-V/c)^{c/2v}}{(1+V/c)^{c/2v}}$$

إذا تلاشت بشكل تام المادة والجسيمات المتطايرة (الفوتونات) في

الصاروخ، فإن:

$$\frac{M}{M_0} = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$$

وعندما يكون $V << c$ ، فإن العلاقة السابقة تصبح بالشكل التالي:

$$\frac{M}{M_0} = e^{-V/v}$$

Damascus University

تمارين

1- يتحرك جسيمان.بسرعتين متساويتين $v = 0.75c$ على مستقيم واحد ليسقطا في الهدف، يسقط أحد الجسيمين في الهدف متأخراً عن الثاني بزمن قدره 10^{-8} ثانية. أوجد البعد بين الجسيمين في مسارهما وذلك بالنسبة لجملة مرتبطة معهما.

2- يتحرك ميزون بسرعة $v = 0.99c$ ، فيقطع مسافة من موضع نشوئه حتى موضع تفككه تساوي $\ell = 3km$. عيّن:

أ. الزمن الخاص لحياة هذا الميزون.

ب. المسافة التي يقطعها بالنسبة لجملة مرتبطة معه.

3- تواتر تيار كهربائي في هوائي الباعث يساوي v_0. ما هو تواتر التيارات التي تحملها الأمواج اللاسلكية في هوائي المستقبل في كل من الحالتين:

أ. المستقبل ساكن والباعث يتحرك مقترباً منه بسرعة v.

ب. الباعث ساكن والمستقبل يتحرك مقترباً باتجاهه بسرعة v.

ناقش النتائج التي تحصل عليها.

4- زوجان من الميقاتيات، أحدهما (B',A') يتحرك بالنسبة للآخر (B,A) بسرعة v. توضع الميقاتيتان A وB على مسافة ثابتة بواسطة تدريج يرتبط معهما بتماسك وكذلك الحال مع الميقاتيتين A' و B' بالنسبة لجملتهما. علماً بأن لحظة بدء الزمن هي لحظة تقابل الميقاتية B' الميقاتية A. عيّن:

أ. الزمن الذي تشير إليه كل من B و B' عندما تتقابلان (من وجهة نظر المشاهد المرتبط مع الميقاتية B).

ب. الزمن الذي تشير إليه كل من A و A' لحظة تقابلهما (من وجهة نظر المشاهد المرتبط مع الميقاتية A).

5- بين أن عنصر الحجم ذي الأبعاد الأربعة $d_x\ d_y\ d_z\ dt$ يكون لا متغيراً بالنسبة إلى تحويل لورنتز.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المراجع

1. L. D. Landau and E. M. Lifshits, Mechanics, NAUKA, Moscow, (1973).
2. A. S. Kompaneyets, Theoretical Physics, MIR, Moscow (1972).
3. I. I. Olkhovskee, Course of Physical Mechanics for Physicists, NAUKA, Moscow, (1978).
4. M. I. Bat and G. U. Janeledz, A. C. Kelzon, Theoretical Mechanics, volume II, III, NAUKA, Moscow (1966).
5. C. E. Khaiken, Physical Principles of Mechanics, NAUKA, Moscow (1971).
6. V. G. Levege, Course of Theoretical Physics, volume I, NAUKA, Moscow (1969).
7. G. A. Zesman and O. M. Todes, Course of General Physics, volume III, NAUKA, Moscow (1972).
8. F. Gantmakher, Lectures in Analytical Mechanics, MIR, Moscow (1970).
9. Max Born, Einstein's Theory of Relativity, INC, New York (1962).
10. Denis – Papin Maurice, Mecanique – Physique generale DUNOD, Paris, (1968).
11. A. Foch, Mecanique, MASSON & Cie, Paris (1967).
12. N. N. Bukhgolts. Principal Course of Theoretical Mechanics, NAUKA, Moscow (1972).
13. S. M. Targ, Short Course of Theoretical Mechanics, NAUKA, Moscow, (1971).

14. W. Nolting, Classical Mechanics. Germany University Mumster. 1990.

15. W. MCCRA, Theory and Problem of Lagrangian Dynamics by Darea. Wells ph.D, Hill Book Company 1967.

16. David Morin, W. MCCRA, Introduction to Classical Mechanics. Hill Book Company 2004.

17. الميكانيك الفيزيائي، محمد سعيد محاسنة، مطبوعات جامعة دمشق 1992.

18. الميكانيك الفيزيائي (2)، محمد سعيد محاسنة، مطبوعات جامعة دمشق، 2010-2011.

19. موجز الميكانيك الجزء الثاني، وجيه القدسي، جامعة دمشق 1974.

20. الميكانيك (5)، وجيه القدسي، جامعة دمشق 1982.

Damascus University

دليل المصطلحات العلمية

عربي -إنكليزي

أ

إحداثيات ديكارتية	Cartesian coordinates
إحداثيات قطبية	Polar coordinates
إحداثيات اسطوانية	Cylindrical coordinates
إحداثيات كروية	Spherical coordinates
إحداثيات مستقلة	Independent coordinates
إحداثيات معممة	Generalized coordinates
ارتباط ثابت	Fixed constraint
ارتباط هندسي	Geometric constraint
ارتباط هولونومي	Holonomic constraint
ارتباط غير هولونومي	Nonholonomic constraint
ارتباط مثالي	Ideal constraint
ارتباط متحول	Moving constraint
انتقال افتراضي	Virtual displacement
انعطاف	Inflexion

ت

تابع كموني	Potencial function
تابع هاملتون	Hamilton's function
تابع موجي	Wave function
تحويلات لورنتز	Lorentz transformations
تسارع	Acceleration
تغير	Variation

Tensor of inertia	تنسور العطالة

ج-ح

Product	جداء
Product of inertia	جداء العطالة
Addition	جمع
Free	حر

د-ذ-ز

Degree of freedom	درجة الحرية
Arm	ذراع
Angle	زاوية
Angle of nutation	زاوية التأرجح
Angle of presession	زاوية الترنح
Angle of rotation	زاوية الدوران

س

Velocity	سرعة
Generalized velocity	سرعة معممة

ط

Energy	طاقة
Kinetic energy	طاقة حركية
Potencial energy	طاقة كامنة
Total energy	طاقة كلية

ع-غ

Inertia	عطالة
Moment of inertia	عزم العطالة
Work	عمل

Indefinite	غير محدود

ق

Conservation laws	قوانين الانحفاظ
Force	قوة
Attractive force	قوة جاذبة
External force	قوة خارجية
Internal force	قوة داخلية
Lost force	قوة ضائعة
Applied force	قوة مطبقة
Generalized force	قوة معممة

م

Energy conservation principle	مبدأ انحفاظ الطاقة
Principle of relativity	مبدأ النسبية
Virtual work principle	مبدأ العمل الافتراضي
Principle of least action	مبدأ الفعل الأصغري
D'Alembert's principle	مبدأ دالامبير
Variable	متحول
Independent variable	متحولات مستقلة
Interval	مجال
Material system	مجموعة مادية
Balanced system	مجموعة متوازنة
Conservative system	مجموعة محافظة
Closed system	مجموعة مغلقة
Mechanical system	مجموعة ميكانيكية
Axis	محور

Axis of symmetry	محور التناظر
Axis of rotation	محور الدوران
Instantaneous axis of rotation	محور آني للدوران
Axis of inertia	محور العطالة
Principal axes of inertia	محاور أساسية للعطالة
Center of gravity	مركز الثقالة
Center of mass	مركز الكتل
Center of inertia	مركز العطالة
Components	مركبات
Path	مساو
Lagrange's multipliers	مضاريب لاغرانج
Amplutude	مطال
Constraint equation	معادلة الارتباط
D'Alembert - Lagrange's equation	معادلة دالامبير_لاغرانج
Lagrange's equations of first kind	معادلات لاغرانج من النوع الأول
Lagrange's equations of second kind	معادلات لاغرانج من النوع الثاني
Hamilton's equations	معادلات هاملتون
Application	مطبقة

ن–و

Simple pendulum	نواس بسيط
Compound pendulum	نواس مركب
Parameter	وسيط

دليل المصطلحات العلمية

إنكليزي – عربي

- A -

Absolute	مطلق
Acceleration	تسارع
anguler ~	تسارع زاوي
free fall ~	تسارع السقوط الحر
gravitational ~	تسارع قوة الثقالة
uniform ~	تسارع منتظم
Action	فعل
direct ~	فعل مباشر
least ~	فعل أصغري
Addition	جمع، إضافة
Amplitude	مطال، سعة
root - mean - square ~	القيمة الفعالة للمطال
scattering ~	مطال الانتثار
wave ~	سعة موجية
Analysis	تحليل
Angle	زاوية
~ Of nutarion	زاوية التأرجح
~ of presession	زاوية الترنح
~ of rotation	زاوية الدوران
scattering ~	زاوية الانتثار
Angular	زاوي

Application	مطبقة
Axis	محور

- B -

Balance	توازن
~ of forces	توازن القوى
Balanced system	مجموعة متوازنة

- C -

Cartisian coordinates	إحداثيات ديكارتية
Center of gravity	مركز الثقالة
~ of inertia	مركز العطالة
~ of mass	مركز الكتل
Closed system	مجموعة مغلقة
Collision Of particles	تصادم الجسيمات
Components	مركبات
Compound pendulum	نواس مركب
Conservative system	مجموعة محافظة
Conservation laws	قوانين الانحفاظ
Constraint	ارتباط
fixed ~	ارتباط ثابت
geometric ~	ارتباط هندسي
holonomic ~	ارتباط هولونومي
nonholonomtc ~	ارتباط غير هولونومي
ideal ~	ارتباط مثالي
moving ~	ارتباط متحول
Contraction of the length scale	تقلص سلم الطول

- D -

D'Alembert's - lagrange's equation	معادلة دالامبير – لاغرانج
D'Alembert's principle	مبدأ دالامبير
Decomposition	تحليل – تفريق
force ~	تفريق القوى
Degree of freedom	درجة الحرية
Doppler effect	ظاهرة دوبلر

- E -

Eulerian angles	زوايا أولر
Eulerian equations	معادلات أولر
Effective cross - section	مقطع فعال
Energy	طاقة
kinetic ~	طاقة كامنة
mechanical ~	طاقة ميكانيكية
potencial ~	طاقة كامنة
total ~	طاقة كلية

- F -

Force	قوة
apparent ~	قوة العطالة
applied ~	قوة مطبقة
attractive ~	قوة جاذبة
central ~	قوة مركزية
constant ~	قوة ثابتة
constraint ~	قوة الارتباط
external ~	قوة خارجية

internal ~	قوة داخلية
inertial ~	قوة عطالية
generalized ~	قوة معممة

- G -

Generalization	تعميم
Generalized	معمم
~ coordinates	إحداثيات معممة
~ momentum	اندفاع معمم
~ velocity	سرعة معممة

- H -

Hamilton's function	تابع هاملتون
~ equations	معادلات هاملتون
Holonomical constraint	ارتباط هولونومي
~ system	مجموعة هولونومية

- I -

Independent variables	متحولات مستقلة
Inertia	عطالة
~ moment	عزم عطالة
~ product	جداء عطالة
~ principal axes	محاور أساسية للعطالة
Interval	مجال

- K - L -

Kepler's problem	مسألة كبلر
Lagrange's equations of first kind	معادلات لاغرانج من النوع الأول
~ of second kind	معادلات لاغرانج من النوع الثاني

Lagrange's multipliers	مضاريب لاغرانج
Lost force	قوة ضائعة

- M -

Material	مادي
~ point	نقطة مادية
~ system	مجموعة مادية
Mass	كتلة
Mechanical system	مجموعة ميكانيكية
Michelson's experiment	تجربة مايكلسون
Moment	عزم
~ of couple	عزم المزدوجة
~ of forces	عزم القوى
~ of inertia	عزم العطالة
Momentum	اندفاع
angular ~	عزم الاندفاع
Motion	حركة
absolute ~	حركة مطلقة
accelerated ~	حركة متسارعة
actual ~	حركة فعلية
angular ~	حركة دورانية

- P -

Parameter	وسيط
Path	مسار
Pendulum	نواس
Principle of virtual work	مبدأ العمل الافتراضي

Proper time	زمن خاص

- R - S -

Relativity	نسبية
~ principle	مبدأ النسبية
Rutherford's formula	علاقة رذرفورد
Scattering	انتثار
Special theory of relativity	النظرية النسبية الخاصة

- T -

Tensor of inertia	تنسور العطالة
Transformations	تحويلات
Galilean ~	تحويلات غاليله
Lorentz ~	تحويلات لورنتز

- V -

Variable	متحول
Variation	تغير
Velocity	سرعة
Virtual displacement	انتقال افتراضي

- W -

Wave function	تابع موجي
Work	عمل

* * *

اللجنة العلمية

د. فوزي عوض

د. محمد الكوسا

د. كنج الشوفي

المدقق اللغوي

د. محمود سالم محمد

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University