منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

التحليل العددي (1)

الدكتورة
برلنت صبري مطيط
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

رشا بعاج
قائمة بالأعمال في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المحتويات

مقدمة 7

الفصل الأول 9

مفاهيم أولية في التحليل العددي..... 9

1- مقدمة عامة 9

2- تمهيد رياضي 12

3- تمثيل الأعداد في أجهزة الحاسوب الرقمية 20

4- أنواع الأخطاء ومصادرها 27

5- تزايد الأخطاء في العمليات الحسابية 31

6- خطأ التوابع واستقراريتها 36

7-استقرارية الطرائق العددية 40

تمارين..... 43

الفصل الثاني..... 49

حل المعادلات غير الخطية..... 49

1- مقدمة..... 49

2- الطريقة البيانية 49

3- الطرائق المجالية 50

4- طريقة إيتكن في تسريع تقارب القيم التكرارية 91

5- رتبة تقارب الصيغ التكرارية 93

6- إيجاد جذور المسائل ذات الوضع السيئ 95

7- جذور الحدوديات 103

تمارين..... 111

الفصل الثالث 119
الاستيفاء بكثيرات الحدود 119
1- مفهوم الاستيفاء..... 119
2- حدوديات الاستيفاء 119
3- حدوديات استيفاء لاغرانج..... 120
4- حدوديات استيفاء نيوتن– الفروق المقسومة 131
5-استيفاء هرميت 166
6- الاستيفاء باستخدام جذور تشيبتشيف..... 178
قضية للمناقشة 184
7-استيفاء سبلين 185
تمارين..... 207
الفصل الرابع 225
التفاضل والتكامل العددي..... 225
1- الطرائق العددية للحساب التفاضلي 225
2- التكامل العددي 242
تمارين..... 283
المصطلحات..... 289
المراجع 299

Damascus University

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

يُعد علم التحليل العددي من العلوم المشتركة بين علوم الرياضيات و الهندسة والإحصاء حيث يبين كيفية بناء خوارزمية لحل مسائل رياضية، وذلك ضمن شروط رياضية تضمن وجود الحل ووحدانيته وشروط هندسية تتحقق فيها الخوارزمية بأقل كلفة ممكنة.

يعرض هذا الكتاب بعض الطرائق العددية و عدد من الخوارزميات لأهم المسائل الرياضية، بحيث يستطيع الطالب برمجتها بأية لغة برمجية مناسبة له، و قد أدرجنا العديد من الأمثلة المتنوعة، ليتمكّن طالبنا العزيز من استيعاب الطرائق فتتشكل عنده قاعدة علمية قوية ومتينة نستطيع عليها أن نبني باحثاً، ولذلك ننصح طلابنا بحل الأمثلة و التأكد من الأجوبة من الكتاب ثم الانتقال إلى حل التمارين غير المحلولة، وبذلك يكتسب الطالب مرونة وسرعة في الحل. وبرغم أن الاهتمام يتركز على الخورزميات، إلا أننا لم نتردد من وضع الأسس النظرية في بناء هذه الخورزميات

يشلف الكتاب من أربعة فصول :

- يتضمن الفصل الأول مفاهيم أولية في التحليل العددي، ثم دراسة في كيفية تمثيل الأعداد في الحاسوب و مفهوم الأخطاء ومصادرها وخطأ التوابع واستقراريتها. وحاولنا أن نبين للطالب أنه إذا ظهرت معه نتيجة مخالفة للحل الفعلي، إن كان موجوداً، أو للمنطق الإحصائي أو الهندسي فالسبب ليس دائماً هو في إنشاء خوارزميته كما يظن أغلب الطلاب ولكن قد يعود لمصادر أخرى وضِّحَت في هذا الفصل .
- يتصدى الفصل الثاني لدراسة حل المعادلات غير الخطية التي تُعد من أهم

الأبحاث التي عالجها التحليل العددي حيث بينا الطرائق البيانية و الطرائق المجالية، ثم تطرّقنا إلى مرتبة تقارب الصيغ التكرارية وكيفية إيجاد جذور المسائل ذات الوضع السيئ، وبما أن للحدوديات ميزات كثيرة فقد خصصنا لها باباً بعنوان جذور الحدوديات.

- و يعالج الفصل الثالث دراسة الاستيفاء العددي، والذي يُعد العمود الفقري للتحليل العددي، وطرائقه و مساوئ كل طريقة ابتداء بلاغرانج ثم نيوتن وهرميت وأخيراً باستيفاء الشرائح(سبلين).
- أخيراً يدرس الفصل الرابع بعض طرائق التفاضل و التكامل العددي وكيفية معالجة التكاملات الشاذة.

و يتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمارين، تهدف إلى مساعدة القارئ من استيعاب المفاهيم المدروسة.

نرجو من زملائنا و طلابنا الأعزاء ألا يبخلوا بأية ملاحظة أو اقتراح حول الكتاب.

ختاماً نأمل أن يفي هذا الكتاب بالغرض المنشود.

والله من وراء القصد.

المؤلفان

Damascus University

الفصل الأول

مفاهيم أولية في التحليل العددي

Numerical Analysis preliminaries

1- مقدمة عامة:

1-1 ما هو التحليل العددي ؟

التحليل العددي هو ذلك الفرع من الرياضيات الذي يدرس إنشاء الخوارزميات وتحليلها من أجل إيجاد حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها بالطرائق التحليلية المعتادة، وتتولد مثل هذه المسائل من التطبيقات الإحصائية الفيزيائية والهندسية و العلوم الطبيعية والطبية وإدارة الأعمال. حيث تحتوي هذه المسائل على متغيرات نستطيع التحكم بقيمها و تغييرها باستمرار.

وخلال نصف القرن الماضي تطور الفرع سريعاً تزامناً مع تطور أجهزة الحاسوب.

1-2 كيف تطور علم التحليل العددي ؟

بدأت فكرة الخوارزميات العددية منذ بداية الحضارة الإنسانية ففي عام 1650 قبل الميلاد وصف ريند بابيروس في مصر القديمة خوارزمية إيجاد الحل لمعادلة خطية. وقد استنتج أرخميدس(287-212 BC) الكثير من الطرائق الرياضية التي تعالج حساب الأطوال والمساحات والحجوم للأشكال الهندسية واستخدمها في إيجاد مفهوم التقريب الذي يعُد إلهاماً قوياً لفكرة التكامل العددي، كما اعُتبرت طرائقه مصدراً للعالمين إسحاق نيوتن وليبنتز للإسهام في تطوير مبدأ الحساب، وقد كانت الطرائق الحسابية لنيوتن وليبنتز من أسباب تطور علم التحليل العددي ودافع كبير لبناء النماذج العددية لحل المسائل الفيزيائية والهندسية وأخيراً مسائل في الطب و الإدارة.

و نرى اليوم اسم نيوتن في كثير من الطرائق العددية كطريقة نيوتن في إيجاد جذور حدوديات غير خطية وطريقة نيوتن في استيفاء الحدوديات. أما السبب القوي الذي أدى لتطور هذا الفرع هو اختراع اللوغاريتمات للعالم نيبر(1614) الذي أدى إلى إعطاء شكل مبسط ومفهوم للعمليات الحسابية (الضرب، القسمة، الأس).

في القرن الثامن عشر و التاسع غشر تتابعت مساهمات العلماء في إيجاد الحلول العددية للمسائل الرياضية وفي مقدمتهم :

ليونارد أولر(1707-1783) و جوزيف لويس لاغرانج(1736-1813) والعالم كارل فريدريك غاوس(1777-1855) .

وفي مؤتمر لعلماء الرياضيات الذي أقيم عام 1900 في باريس، صاغ العالم هلبرت بحثاً (بإشراف مدرسة Gottingen) ساعد في توحيد اتجاهين للدراسات الرياضية؛ الاتجاه الأول دراسة العلاقات الرياضية بالعالم الخارجي الحقيقي (أي العلاقات القابلة للتطبيق في الطبيعة). أما الاتجاه الآخر فهو دراسة حول النتائج الناشئة من مبرهنة كانتور للمجموعات ومن المبرهنات الأساسية للأعداد.

في الواقع، حاول هلبرت أن يثبت أنه يمكن تحويل الرياضيات إلى خوارزميات، وكانت فكرته كما يلي: تحويل الانتباه من العناصر الرياضية التقليدية (التوابع- الأعداد- المجموعات) إلى رموز تستخدم للإشارة عن هذه العناصر الرياضية، فكل الأعمال الإدارية يمكن تمثيلها بأعداد منتهية وخوارزميات، وبذلك أراد الهروب من المفاهيم الرياضية المعقدة التي ظهرت في زمنه (كمفهوم المجموعات غير المنتهية).

فيما بعد بين مجموعة علماء (غودل – تشارتش – كلبين – بوست – تيورينغ) استحالة تحقق بحث هلبرت. وعلى أية حال فإن النتائج التي برهنت هذه الاستحالة أظهرت رونق فكرة الخوارزميات وجمالها.

ويُعد ذلك واحداً من الطرائف الكبرى لتاريخ الرياضيات (كما نوَّه عنها باريوس) والأساس لمسار جديد يربط بين الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية

وذلك من بحث غير متوقع (تروسديل) .

يُعد الآن التطور الحديث للرياضيات العددية إلى حد ما اشتقاق لهذا المسار الجديد، ثم أبدى العالمان نيومان وتيورينغ اهتمامهما في العمل العددي (حيث عملا معاً في المخبر الوطني للفيزياء في لندن عام 1945).

أثناء ذلك وخلال الحرب العالمية الثانية خاض العالم ويلي ويلكينسون الحرب في قسم البحث للقوات الحربية، فدرس الانشطار الخارجي للقذائف، والانفجارات الديناميكية التي تطلَّبت حل جملة معادلات مؤلفة من اثنتا عشرة معادلة خطية، وللوهلة الأولى شعر ويلكينسون بالسرور لإحساسه بإمكانية حل هذه الجملة، وما لبث أن تبخرت ثقته إذ وجد أمامه 144 ثنائية (كبيرة جداً أكثر مما بدت عليه من النظرة الأولى).

بعد الحرب العالمية الثانية، بدأ الاهتمام أكثر لحل المسائل العددية في الفضاء متعدد الأبعاد، ويُعد البحث الذي قدَّمه العالمان نيومان وجولدستن بعنوان (إيجاد مقلوب مصفوفات من مراتب عليا عددياً) المساهمة الأولى لتوضيح أسئلة تتعلق بالحل العددي لمسائل ذات أبعاد عليا، وقد جذب هذا البحث انتباه العديد من الرياضيين مثل غاوس و لاغرانج، ومن المحتمل أن يكون لاغرانج أول من قدم عبارة **التحليل العددي "numerical Analysis".**

لقد كان حجم المسائل هو المصدر الرئيسي للحيرة لدى الرياضيين وذلك بسبب تزايد الخطأ المرتكب، كما أنها عُدت الباعث الرئيسي لتفحص المسائل بدقة، فكان السؤال لديهم: كم عدد العمليات الحسابية الكافية (الضرورية) لحل المسألة الجبرية عددياً ؟. وفي أواخر الخمسينات اقترح جيفنس الفكرة الأساسية لتحليل الخطأ التراجعي التي طُوِّرت من قبل ويلكينسون (الذي حلل خطأ حل جملة معادلات خطية باستخدام الحذف لغاوس)، ويقترح فيها أن نتساءل عند كل مسألة سؤالين:

الأول: ما هي المسألة المعدّلة (الجديدة) التي تكون فيها النتائج التقريبية التي حصلنا عليها (باستخدام الخوارزميات) هي قيم فعلية.

الثاني: ما هو التباين للمسألة الجديدة مع المسألة القديمة. وعلى نقيض هذه الفكرة ظهر مبدأ تحليل الخطأ التقدمي الذي نتساءل فيه عن تباين النتائج التي ظهرت معنا عن تلك التي يجب أن تكون فعلياً.

منذ ذلك الوقت أصبح سلوك الخطأ هو المعيار القياسي لقبول خوارزمية حل أي مسألة في الحواسيب الرقمية ، ولذلك فإننا نجد أن إيمان هلبرت بإيجاد خوارزمية حسابية مثالية خالية من الأخطاء تتعارض مع ملاحظة فورسيث (1967) حول حل المعادلات البسيطة مثل حل معادلة الدرجة الثانية باستخدام الحاسوب (فمن الصعب لأي شخص أن يعرف حل المعادلات في الحاسوب دون أن يقدر الخطأ بالزيادة أو النقصان).

ولم يتطور علم الجبر العددي حتى 1950 أو 1960 من قبل العالمين أوستروسكي(1954) وموتزكين(1955) اللذين قدما نتائج حول عدد الخوارزميات المطلوبة في حساب الحدوديات. وقد تبع ذلك خوارزمية ستراسن(1969) المتعلقة بضرب المصفوفات و وينوجريد(1969) الذي أوجد عدد العمليات المطلوبة في حساب دوال خاصة.

2- تمهيد رياضي:

نقدم فيما يلي بعض المفاهيم والمبرهنات اللازمة في دراسة مواضيع التحليل العددي .

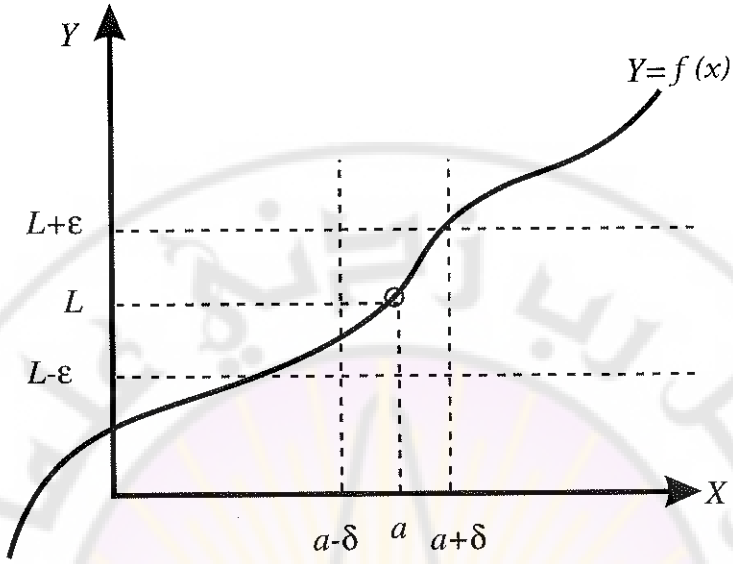
2-1 تعريف النهاية limit:

لتكن $D \subseteq \Re$ ، حيث $\Re$ فضاء الأعداد الحقيقية و $f : D \to \Re$ عندئذٍ نقول إن للتابع f نهاية في x_0 ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

إذا تحقق:

إنه مهما يكن $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $x \in D$ و $|x - a| < \delta$ فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$. وبشكل رياضي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \ ; \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$



الشكل 1

2-2 تعريف الاستمرار Continuous:

لتكن $f : D \to \Re$ و $x_0 \in D$ ، عندئذٍ نقول إن التابع f مستمر في x_0 ونكتب:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

إذا تحقق:

إنه مهما يكن $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $x \in D$ و $|x - x_0| < \delta$ عندئذٍ: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

إذا كان التابع f مستمراً في كل النقاط $x_0 \in D$ عندئذٍ نقول إن التابع f مستمرعلى D.

3-2 تعريف:

لتكن $f : D \to \Re$ نقول إن التابع f محدود في D إذا كان $f(D)$ محدوداً، أي أن:

$$\exists k < \infty : \forall x \in D : \quad |f(x)| \le k$$

4-2 تعريف:

لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية من الأعداد الحقيقية (العقدية). نقول إن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نحو x_0 ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ إذا تحقق:

مهما يكن $\varepsilon > 0$، يوجد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث إذا كان $n > N(\varepsilon)$ فإن $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

5-2 مبرهنة(1):

ليكن لدينا التابع $f : D \to \Re$ بحيث $D \subseteq \Re$ ، $x^* \in D$ عندئذٍ تكون القضايا التالية متكافئة:

1. f تابع مستمر في x^*
2. إذا كان لدينا $\{x_n\}_{n\ge1}$ متتالية في D و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ عندئذٍ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$$

6-2 تعريف الاشتقاق Derivative:

بفرض f تابع معرف على مجال مفتوح $]a,b[$ و $x_0 \in]a,b[$ عندئذٍ نقول إن التابع f قابل للاشتقاق في x_0 إذا كانت النهاية:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجودة.

إذا كان التابع f قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من مجموعة جزئية $S \subset]a,b[$ عندئذٍ نقول إن التابع f قابل للاشتقاق على S.

7-2 مبرهنة(2):

إذا كان f تابعاً قابلاً للاشتقاق في x_0، فإن f مستمر في x_0. لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

8-2 تعريف:

نقدم تعاريف بعض الرموز التي تم استخدامها والمتعارف عليها رياضياً:

$C(D)$: مجموعة كل التوابع المستمرة في D.

$C^1(D)$: مجموعة كل التوابع f التي مشتقها f' موجود و مستمر في D.

$C^n(D)$: مجموعة كل التوابع f التي مشتقاتها حتى $f^{(n)}$ موجودة ومستمرة في D.

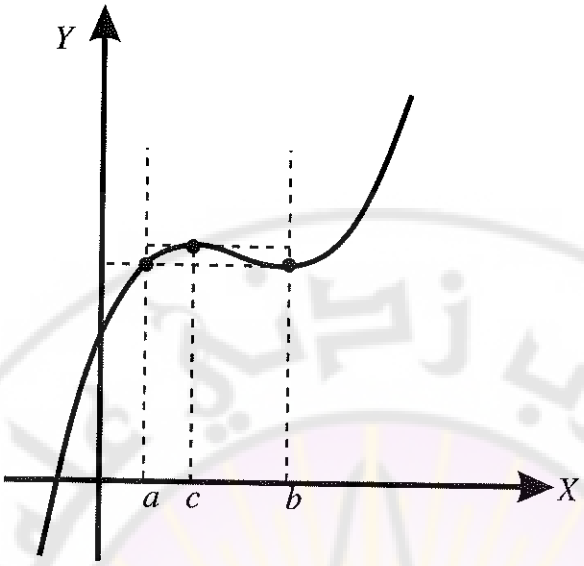
$C^\infty(D)$: مجموعة كل التوابع f التي مشتقاتها مستمرة.

$C^n[a,b]$: مجموعة كل التوابع f المعرفة على $[a,b]$ بحيث المشتقات حتى $f^{(n)}$ موجودة ومستمرة في $[a,b]$.

9-2 مبرهنة رول Rolle's Theorem (3):

تُنسب هذه المبرهنة للعالم الرياضي الفرنسي (Michel Rolle 1652-1719)

ليكن f تابعاً مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$. إذا تحقق $f(a)=f(b)$ عندئذٍ توجد نقطة واحدة على الأقل $c\in]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$



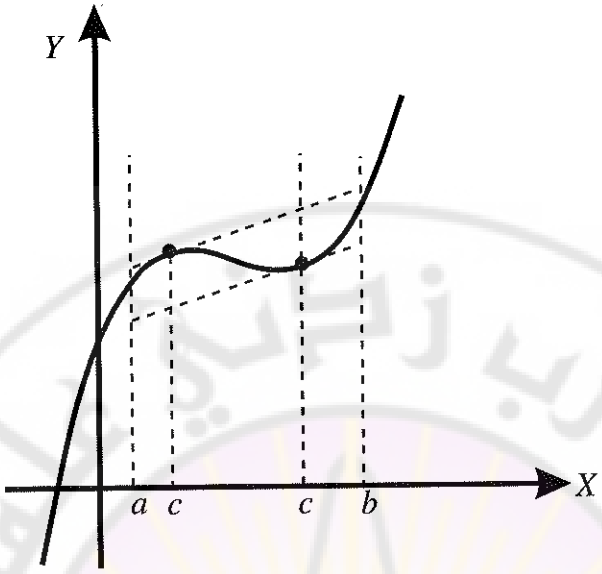
الشكل 2

10-2 مبرهنة القيمة الوسطى Mean Value Theorem(4):

ليكن f تابعاً مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ عندئذٍ توجد نقطة واحدة على الأقل $c \in]a,b[$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Damascus University



الشكل 3

نلاحظ أن مبرهنة القيمة الوسطى تُعد تعميماً لمبرهنة رول. وقد طورها لاغرانـــــج وتستخدم لحل العديد من المسائل الرياضية.

وتتطلب مبرهنة القيمة الوسطى وجود نقطة، بحيث يكون المماس للتابع في هذه النقطة يوازي المستقيم الواصل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

11-2 مبرهنة القيمة المتوسطة Intermediate Value Theorem (5):

لتكن $f \in C[a,b]$ و u عدداً يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ عندئذٍ يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $f(c) = u$.

و يحقق: $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$

باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى نجد:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - x_0)^n dx$$

حيث $\xi = \xi(x)$ ، وتحقق $x_0 \le \xi \le x$.

بإجراء عملية المكاملة نجد:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

تدعى الحدودية $P_n(x)$ حدودية تايلور للتابع $f(x)$.

ويدعى $R_n(x)$ الحد الباقي remainder term (Trunction error)

و تدعى السلسلة اللانهائية $\lim_{n\to\infty} P_n$ بسلسلة تايلور للتابع $f(x)$.

<u>حالة خاصة:</u> عندما $x_0 = 0$ تدعى حدودية تايلور بحدودية ماك لوران Maclaurin Polynomial. وفيما يلي حدوديات ماك لوران لبعض التوابع الشهيرة .

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots , \ |x| < 1$$

3- تمثيل الأعداد في أجهزة الحاسوب الرقمية:

تختلف الطريقة التي يقوم بها الإنسان في إنجاز العمليات الحسابية عن الطريقة التي تُنجز من خلالها المعالجات الصِّغَرية لعمليات تخزين الأعداد والعمليات الحسابية. حيث نستخدم نظام العد العشري في الوقت الذي تستخدم فيه المعالجات

الصغرية نظام العد الثنائي لإجراء الحسابات الداخلية. سندرس فيما يلي تمثيل الأعداد في الحواسيب بما في ذلك الأخطاء المتضمنة.

1-3 طريقة النقطة العائمة:

لفهم السبب الرئيسي في الأخطاء المتضمنة في الحلول العددية نحتاج إلى دراسة الطريقة التي تُخَزَّن بها الأعداد في الحواسيب. وبما أن الأعداد الممثلة في الحواسيب هي فقط الأعداد ذات الأرقام المنتهية، تُستَخدم النقطة العائمة لتمثيل الأعداد الحقيقية.

يُمَثَّل العدد x بطريقة النقطة العائمة باستخدام الأساس β بالشكل

$$x = \pm(b_1 b_2 .. b_k) \times \beta^e \qquad (1)$$

حيث $\beta, b_1, ..., b_k$ أعداد صحيحة، $\beta \geq 2$، و $0 \leq b_i \leq \beta - 1$. يُدعى $(b_1 b_2 .. b_k)$ الجزء الكسري (mantissa) و e الأس (exponent). بفرض تحقق أحد الشرطين $b_1 \neq 0$، أو $b_1 = b_2 = .. b_k = 0$ عندئذٍ يدعى هذا التمثيل باستخدام أعداد النقطة العائمة قياسياً(normalized).

يختلف الأساس β من حاسب إلى آخر، لكن معظم الحواسب تستخدم النظام الثنائي $\beta = 2$، نعبر عن الشكل الثنائي القياسي بالشكل:

$$x = \pm(.1 b_2 .. b_k) \times 2^e \qquad (2)$$

حيث يُعبّر عن الجزء الكسري كسلسلة من الأصفار والوحدان.

24 خانة للجزء الكسري	7 خانات للأس	خانة للإشارة

الشكل 6: التمثيل الداخلي في معالج صغري طول كلمته 32 خانة

بشكل مختصر، يُدعى عادةً الرقمين الثنائيين الصفر والواحد خانات، ويُدعى بشكلٍ عام الطول الثابت لمجموعة الخانات الثنائية كلمة الحاسب. على سبيل المثال، لنعتبر نظام العد ذو النقطة العائمة في معالج صغري طول كلمته اثنتان وثلاثون خانة. يعرض الشكل السابق التمثيل الداخلي لكلمة. تُستَخدم الخانة في أقصى اليسار لإشارة

الكسر، حيث تُقابل الخانة صفر الإشارة الموجبة، و تُقابل الخانة واحد الإشارة السالبة. تُستَخدم الخانات السبع التالية لتمثيل الأس الخانة الأولى منها تمثل إشارة الأس. أما الخانات الأربع والعشرون المتبقية تُستخدم لتمثيل الكسر القياسي بحيث يكون $b_1 = 1$.

مثال(1):

يُمَثل عدد في آلة بالشكل:

1	0000010	11010000000000000000000

يكون العدد سالباً؛ لأن قيمة الخانة في أقصى اليسار هي الواحد. الأس موجب وقيمته تساوي

$$0\times2^0+1\times2^1+0\times2^2+0\times2^3+0\times2^4+0\times2^5=(2)_{10}$$

تُشير الخانات الأربع وعشرون المتبقية إلى الكسر القياسي وهو:

$$1\times2^{-1}+1\times2^{-2}+1\times2^{-4}=(0.8125)_{10}$$

وهكذا يكون العدد الذي جرى تمثيله بهذه الآلة في النظام العشري هو:

$$-0.8125\times2^2=(-3.25)_{10}$$

مثال(2):

أوجد التمثيل الثنائي القياسي للعدد 42.78125في النظام العشري؟

لدينا

$$(42.)_{10}=(101010.)_2\ ;\ (.78125)_{10}=(.110010)_2$$

ومنه

$$(42..78125)_{10}=(101010.110010)_2=(0.101010110010)_2\times2^6$$

وبما أن $(6)_{10}=(110)_2$ يكون تمثيل العدد 42.78125 بالشكل الثنائي القياسي هو:

$$(00000110101010110010000000000000)_2$$

أكبر عدد موجب يمكن تمثيله في الآلة هو

$$0 \qquad 0111111 \qquad 11111111111111111111111 \approx 2^{63} \approx 10^{18}$$

وبالتالي فإن مجال القيم التي يمكن تخزينها يقع بين 10^{-19}و 10^{18}. وتُدعى الأعداد التي تقع خارج المجال السابق والتي يمكن أن تنتج عن بعض الحسابات نقصان في الأس (underflow) أو زيادة في الأس (overflow).

يوجد تمثيل آخر للأعداد وهو الأكثر شيوعاً في جميع الحواسب هو التمثيل القياسي IEEE (معهد الالكترون والهندسة الالكترونية) لحسابات النقطة العائمة الثنائية. يستخدم هذا التمثيل دقة مفردة اثنتان وثلاثون خانة كما يلي:

$$x = (-1)^s \times (1.f)_2 \times (2^{c-127})_{10} \qquad (3)$$

تُحجز الخانة الأولى للإشارة حيث تُشير $s = 0$ للإشارة الموجبة و $s = 1$ للإشارة السالبة. وخُصصت الخانات الثمان التالية للأس c. حيث أن مجال قيم c $(00000000)_2 = (0)_{10}$ و $(11111111)_2 = (255)_{10}$. وأخيراً تُستخدم الخانات الثلاث والعشرين المتبقية للكسر. لاحظ أن الكسر فقط يُرمز له بواسطة f لأن الخانة الأولى من الكسر عادةً تساوي الواحد، لذا لاداعي لتخزين هذه الخانة. يُوضح الشكل التالي تمثيل IEEE لاثنتان وثلاثون خانة.

23 خانة للجزء الكسري	8 خانات لانحياز الأس c	s

الشكل 7: تمثيل IEEE في معالج صغري طول كلمته 32 خانة

مثال(3):

أوجد التمثيل القياسي IEEE للعدد 45.8125–في النظام العشري؟

لدينا

$$(-45.)_{10} = (-101101)_2 \ ; \ (.8125)_{10} = (.110100)_2$$

ومنه

$$(-45.8125)_{10} = (-101101.110100)_2 = (-1.011011101)_2 \times 2^5$$

نلاحظ قيمة $c = 127 + 5 = (132)_{10}$ تُمثل بثمان خانات بالشكل $(10000100)_2$ و $s = 1$ للدلالة على الإشارة السالبة ومنه فإن الشكل القياسي للعدد 45.8125–

بتمثيل IEEE هو:

1 1000 0100 0110 1110 1000 0000 0000 000

يمكن الحصول على أكبر عدد موجب يمكن تمثيله في تمثيل IEEE عندما تأخذ كل خانة من خانات الكسر $(1.f)$ القيمة واحد والأس

$$c=(1111\,1110)_2=(254)_{10}$$

وبذلك تكون قيمة هذا العدد هي $(2-2^{-23})2^{127}\approx 3\times 10^{38}$. وأصغر قيمة هي $2^{-126}\approx 10^{-38}$.

يستخدم تمثيل IEEE ذو الدقة المضاعفة أربع وستون خانة. تُخصص الخانة الأولى للإشارة ثم يجعل الأحد عشر خانة التالية لحجز الأس واثنتان وخمسون للجزء الكسري. ويفضل استخدام التمثيل ذو الدقة المضاعفة لتمثيل الأعداد بشكلٍ دقيق، في الوقت الذي يكون استخدام التمثيل ذو الدقة المفردة الأفضل عند الحاجة لحجم أقل في التخزين (الأمر الذي يحتل أهمية كبرى في تخزين البيانات الضخمة). وبما أن سرعة الأجزاء المادية للحاسب تكون نفسها بالنسبة للتمثيلين، فإن التمثيل ذو الدقة المضاعفة هو الأكثر استخداماً في التطبيق. كما أن معالج Intel يحوي تمثيل موسع بثمانين خانة والذي يُستخدم في وحدة الحساب المادية للحاسب، لكنها غير متاحة عادةً للمبرمج.

2-3 تدوير الأخطاء:

يوجد طريقتين تُستَخدمان لتمثيل عدد حقيقي مُعطى x باستخدام طريقة النقطة العائمة للآلة ويرمز له بالشكل $fl(x)$ هاتين الطريقتين هما التدوير والاقتطاع.

بفرض x عدد حقيقي موجب يُعطى بالشكل العشري القياسي:

$$x=(0b_1b_2..b_kb_{k+1}...)_{10}\times 10^e \qquad (4)$$

يمكننا القول إنه تم اقتطاع k رقم من العدد x عندما يتم التخلص من جميع الأرقام التي تلي الرقم ذو المنزلة k، بعبارة أخرى جرى اقتطاع الأرقام $b_{k+1}b_{k+2}...$ من النتيجة.

$$fl(x) = (0.b_1 b_2 .. b_k)_{10} \times 10^e \qquad (5)$$

بالمقابل يتم تدوير x إلى k رقم عندما نحصل على $fl(x)$ باختيار $fl(x)$ الأقرب للعدد x. حيث يُضاف واحد للرقم b_k إذا كان $b_{k+1} \geq 5$، وتُقتطع جميع الأرقام k الأولى إذا كان $b_{k+1} < 5$.

مثال(4):

بفرض العدد e يعطى في النظام العشري بالشكل:

$$e = 0.2718281828...\times 10^1$$

من أجل $k = 7$ يُعطي التدوير عندئذٍ:

$$fl(e) = (0.2718281 + 0.0000001)\times 10^1 = 0.2718282$$

من جهة أخرى، يُعطى الاقتطاع للعدد

$$fl(e) = 0.2718281\times 10^1 = 0.2718281$$

يُدعى الخطأ الناتج عن استبدال عدد x بتمثيله بطريقة النقطة العائمة $fl(x)$ خطأ التدوير. ويساوي الفرق بين x و $fl(x)$. ويعتمد خطأ التدوير على x ويكون بناءً عليه قبول قيمة x التقريبية.

3-3 تعريف الخطأ المطلق والخطأ النسبي

:Absolute Error and Relative Error

ليكن $x \neq 0$ نعرف الخطأ المطلق بالشكل: $|x - fl(x)|$ والخطأ النسبي بالشكل: $\dfrac{|x - fl(x)|}{|x|}$.

على سبيل المثال، لنوجد الخطأ النسبي لتمثيل الآلة للعدد x،عند الاقتطاع باستخدام k رقم.

2. غالباً ما تُهمل التفاعلات الكيميائية غير الهامة عند دراسة نموذج كيميائي معقد بغرض الوصول إلى النموذج الرياضي.
3. الأخطاء في البيانات المدخلة: فعلى سبيل المثال القياسات الفيزيائية لا تبلغ دقة كاملة (وإنما هي تقريبية).
4. أخطاء التقريب (Approximation Errors) : تنشأ مثل هذه الأخطاء عند استخدام الصيغة التقريبية عوضاً عن التابع الحقيقي في الحساب وهناك نوعين لأخطاء التقريب.

أ- أخطاء التقطيع (Discretization errors): وتظهر نتيجة تقطيع التوابع المستمرة في الطرائق العددية كالاستيفاء والاشتقاق والتكامل العددي.

ب- أخطاء التقارب (Convergence Errors): و تنشأ عادة في الطرائق العددية التكرارية (Iterative Method). فمثلاً عندما تستخدم الطرائق التكرارية لإيجاد جذور معادلة غير خطية،غالباً ما نضع شرط توقف يمثل عدد التكرارات الأعظم وذلك قبل الوصول إلى الحل الدقيق.

5. أخطاء تقريب سلاسل غير منتهية: نعتمد فيها على مبرهنة تايلور .

مثال(5):

أوجد قيمة التابع $f(x)=\cos x$ في النقطة (0.01) باستخدام مبرهنة تايلور وذلك في الحالتين:

$$x_0=0\ ,\ n=2$$
$$x_0=0\ ,\ n=3$$

ماذا تستنتج؟

الحل: من أجل الحالة الأولى ، $n=2$:

$$f(x)=\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\sin\xi$$

حيث $0<\xi<x$

$$\cos(0.01)=1-\frac{1}{2}(0.01)^2+\frac{1}{6}(0.01)^3\sin\xi$$

$$=0.99995+\frac{1}{6}\times10^{-6}\sin\xi$$

حيث $0<\xi<0.01$

لما كان $|\sin\xi|<1$ ، فإن عبارة الخطأ تكون:

$$|\cos(0.01)-0.99995|\le\frac{1}{6}\times10^{-6}\approx0.167\times10^{-6}$$

وهذا يعني أن التقريب 0.99995 يقترب من قيمة $\cos(0.01)$ بالأرقام الخمسة الأولى على الأقل.

أما في الحالة الثانية، $n=3$:

$$f(x)=\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\cos\xi$$

حيث $0<\xi<0.01$

و لما كان $|\cos\xi|<1$ تكون عبارة الخطأ:

$$|\cos(0.01)-0.99995|\le\frac{1}{24}(0.01)^4\approx0.42\times10^{-6}$$

إذاً التقريب يقترب من قيمة $\cos(0.01)$ بالأرقام الثمانية الأولى على الأقل عندما يتم حسابه إلى دقة أحد عشر رقماً و عليه نجد:

$$\cos(0.01)=0.9999500042$$

يبين لنا التمرين السابق أمرين أولهما: كيفية إيجاد التقريب باستخدام مبرهنة تايلور، أما الثاني فأهمية تحديد دقة التقريب للحصول على نتيجة أفضل.

مثال(6):

أوجد حدودية تايلور من المرتبة الأولى، من **أجل** $x_0=a$ للتابع $f(x)=e^x$ وحدد

الحد الباقي.

$$e^x = e^a + (x-a)e^a + \frac{(x-a)^2}{2!}e^c$$

$$P_1(x) = e^a + (x-a)e^a$$

$$R_2(x) = \frac{(x-a)^2}{2!}e^c$$

مثال(7):

أثبت أن $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ لسلسلة تايلور للتابع $f(x) = e^x$ في جوار الصفر.

الحل :إن سلسلة تايلور للتابع $f(x) = e^x$ في جوار الصفر

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

حيث $0 < c < x$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

و الحد الباقي هو $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$

لنثبت أن $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

إذا كانت $x < 0$ فإن $e^c < 1$، وإذا كانت $x \geq 1$ فإن $e^c < e^x$ (حيث $c < x$)

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\max(e^x, 1) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

مثال(8):

أوجد القيمة التقريبية للعددين $\ln(2)$ و $\ln(1.5)$ و بحيث لا يتجاوز خطأ القطع $(10)^{-8}$ للتابع $f(x) = \ln(x)$ المعرف في المجال $[1,2]$، وبفرض $x_0 = 1$.

الحل:

بما أن:

$$f'''(x)=2x^{-3}\ ،\ f''(x)=-x^{-2}\ ،\ f'(x)=x^{-1}$$
$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$$

فإنه حسب مبرهنة تايلور:

$$\ln(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^{k}+\frac{(-1)^{n}}{n+1}\xi^{-(n+1)}(x-1)^{n+1}$$

حيث $1\le x\le 2$ و $1<\xi<x$. وعندئذ:

$$|R_n|=\frac{1}{n+1}\xi^{-(n+1)}(x-1)^{n+1}\le\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

لدينا $1<\xi$ نستنتج $\xi^{-(n+1)}<1$.

ولحساب تقدير لقيمة $\ln(2)$ و $\ln(1.5)$ بحيث لا يتجاوز الخطأ $(10)^{-8}$، نقوم بما يلي:

من أجل $\ln(2)$ تكون عبارة الحد الباقي بالشكل:

$$|R_n|\le\frac{1}{n+1}\le 10^{-8}$$
$$n\ge 10^{8}-1$$

من أجل $\ln(1.5)$ فتكون عبارة الحد الباقي

$$|R_n|\le\frac{1}{n+1}(\frac{1}{2})^{n+1}\le 10^{-8}$$

ويكون ذلك من أجل $n\ge 26$

5-تزايد الأخطاء في العمليات الحسابية:

Propagation in Arithmetic Operations

تحدثنا في الفقرة السابقة عن آثار أخطاء التدوير بعملية طرح عددين قريبين من بعضهما، نقدم الآن في هذه الفقرة دراسة تأثير عمليات التدوير أو الأقتطاع على العمليات الحسابية الأربعة $(\times,+,-,\div)$ عموماً.

لتكن x_T , y_T القيمتان الفعليتان للعددين x ، y ، و x_A , y_A القيمتان التقريبيتان لهذين العددين (ناتجتان عن عملية تدوير أو قطع للعددين) بحيث $x_A \approx x_T$ و $y_A \approx y_T$. ولتكن ω هي إحدى العمليات $(\times,+,-,\div)$، و ω^* هي العملية المقابلة التي أجريت في الحاسوب التي تتضمن عمليات التدوير والاقتطاع. عندئذ يكون:

$$x_T \omega y_T - x_A \omega^* y_A = [x_T \omega y_T - x_A \omega y_A] + [x_A \omega y_A - x_A \omega^* y_A] \qquad (10)$$
$$= \quad E \quad + \quad E'$$

حيث إنّ الحدّ الأول E من الطرف الأيمن هو الخطأ المتزايد ، أمّا الحدّ الثاني E' فهو الخطأ الناتج عن حساب $x_A \omega y_A$ ، فإذا أجرينا العمليات الحسابية بالنقطة العائمة كانت:

$$x_A \omega^* y_A = fl(x_A \omega y_A) \qquad (11)$$

وهذا يعني أنه يتم حساب القيمة الفعلية للمقدار $x_A \omega y_A$ ، وبعد ذلك يتم إيجاد قيمة تقريبية لها باستخدام عملية التدوير أو الاقتطاع لتلائم تمثيل النقطة العائمة المستخدمة في الحاسوب.

لكن $fl(x_A \omega y_A) = (1+\varepsilon)(x_A \omega y_A)$ حيث إنّ ε هي دقّة الآلة.

بالتعويض في العلاقة (11) نجد أنّ:

$$(x_A \omega y_A) - (x_A \omega^* y_A) = -\varepsilon (x_A \omega y_A)$$

ومنه:

$$\frac{(x_A \omega y_A) - (x_A \omega^* y_A)}{(x_A \omega y_A)} = -\varepsilon$$

وبهذا نجد أنّ عمليتي التدوير والاقتطاع تؤديان إلى خطأ في حساب $x_A \omega^* y_A$ صغير نسبياً مقارنةً مع $x_A \omega y_A$.

ننتقل الآن لتقدير قيمة الخطأ المتزايد *(propagated error)* $E = (x_T \omega y_T) - (x_A \omega y_A)$ نتيجة العمليات الحسابية الأربع.

إن التقنية الأولى المستخدمة في تقدير مثل هذا الخطأ تُعرف باسم (الحساب المجالي) *(interval arithmetic)* وتعتمد على إيجاد مجال يحوي القيمة

الفعلية $(x_T w y_T)$ اعتماداً على القيم:

$$(x_T - x_A)\text{ ،}(y_T - y_A)\text{ ،}(x_A w y_A)$$

مثال(9):

لتكن: $x_A = 3.14$ و $y_A = 2.651$ القيمتين الناتجتين عن تدوير x_T و y_T على الترتيب بحيث يكون:

$$|x_A - x_T| \le 0.005 \quad \text{،} \quad |y_A - y_T| \le 0.0005$$

أي:

$$3.135 \le x_T \le 3.145 \quad \text{،} \quad 2.6505 \le y_T \le 2.6515 \qquad (12)$$

بناء على ما سبق يمكن أن نحدد مجالاً يحوي القيمة الفعلية لتزايد الخطأ الناتج عن عمليتي جمع المقدارين x_A و y_A وقسمتهما كما يلي:

حالة الجمع:

$$x_A + y_A = 5.791$$

وبالاستفادة من (12) نجد أنّ:

$$3.135 + 2.6505 \le x_T + y_T \le 3.145 + 2.6515$$
$$5.7855 \le x_T + y_T \le 5.7965$$

ومنه نجد:

$$-0.0055 \le (x_T + y_T) - (x_A + y_A) \le 0.0055$$

حالة القسمة:

$$\frac{x_A}{y_A} = \frac{3.14}{2.651} = 1.184459$$

وكذلك:

$$\frac{3.135}{2.6515} \le \frac{x_T}{y_T} \le \frac{3.145}{2.6505}$$

بحساب قيمة الكسرين وتدوير الناتج إلى سبعة أرقام معنوية نجد أنّ:

$$1.182350 \le \frac{x_T}{y_T} \le 1.186569$$

نستنتج:

$$-0.002109 \le \frac{x_T}{y_T} - \frac{x_A}{y_A} \le 0.002110$$

تُعد هذه الطريقة مفيدة جداً في تحديد مجال يحوي القيمة الفعلية للخطأ، وقد تم استخدمها في الحواسيب، لكنها تحتاج إلى عناية خاصة عند تمديدها من أجل التوابع الأخرى، وإلا فقد نتوصل إلى قيم حدية للخطأ بعيدة جداً عن قيمته الفعلية، لذا يمكن دراسة تزايد الخطأ في العمليات الحسابية الأربعة كما يلي:

1-5 تزايد الأخطاء في عملية الضرب:

نستطيع المقارنة بين القيمتين $x_T y_T$ و $x_A y_A$ من خلال الخطأ النسبي:

$$\mathrm{R}(x_A y_A) = \frac{x_T y_T - x_A y_A}{x_T y_T}$$

فإذا كانت: $x_T = x_A + \varepsilon,\ y_T = y_A + \eta$ عندئذٍ:

$$\mathrm{R}(x_A y_A) = \frac{x_T y_T - (x_T - \varepsilon)(y_T - \eta)}{x_T y_T}$$

$$= \frac{\eta x_T + \varepsilon y_T - \varepsilon\eta}{x_T y_T}$$

$$= \frac{\varepsilon}{x_T} + \frac{\eta}{y_T} - (\frac{\varepsilon}{x_T})(\frac{\eta}{y_T})$$

$$= \mathrm{R}(x_A) + \mathrm{R}(y_A) - \mathrm{R}(x_A)\mathrm{R}(y_A)$$

فإذا كانت $\mathrm{R}(x_A)، \mathrm{R}(y_A) << 1$ فإنّ:

$$\mathrm{R}(x_A y_A) \approx \mathrm{R}(x_A) + \mathrm{R}(y_A)$$

وهذا يوضح أن الأخطاء النسبية في حالة الجداء تتزايد ببطء كما هو مرغوب.

2-5 تزايد الأخطاء في عملية القسمة:

يمكن وبأسلوب مماثل لحالة الجداء، إثبات صحة العلاقة:

$$R(\frac{x_A}{y_A}) = \frac{R(x_A) - R(y_A)}{1 - R(y_A)}$$

ومن أجل $R(y_A) << 1$ يكون:

$$R(\frac{x_A}{y_A}) \approx R(x_A) - R(y_A)$$

نلاحظ هنا أيضاً أن الأخطاء النسبية في حالة القسمة تتزايد تزايداً بسيطاً.

3-5 تزايد الأخطاء في عمليتي الجمع والطرح:

يتحقق في حالتي الجمع والطرح:

$$[x_T \pm y_T] - [x_A \pm y_A] = [x_T - x_A] \pm [y_T - y_A] \qquad (13)$$

أي أنّ تزايد الخطأ الناتج عن عملية جمع العددين x_A, y_A يساوي مجموع الأخطاء الناتجة عن عمليتي تقريب القيمتين x_T, y_T، وبالمثل فإنّ الخطأ الناتج عن عملية طرح العددين x_A, y_A يساوي إلى حاصل طرح الأخطاء الناتجة عن عمليتي تقريب القيمتين x_T, y_T.

أمّا الخطأ النسبي:

$$R(x_A \pm y_A) = \frac{(x_T \pm y_T) - (x_A \pm y_A)}{x_T \pm y_T}$$

$$= \frac{(x_T \pm y_T) - ((x_T - \varepsilon) \pm (y_T - \eta))}{x_T \pm y_T}$$

$$= \frac{\varepsilon \pm \eta}{x_T \pm y_T}$$

وهذا يشير إلى أنّ الخطأ النسبي يزداد ببطء في حالة الجمع، إلا أنّه في حالة الطرح يزداد بشكل أسرع كلما كانت القيمتان x_T, y_T قريبتين من بعضهما أكثر. (وهذا ماتمّت دراسته في الفقرة (4-1-1)). وبالمقابل من الممكن أن تكون قيمتا الخطأين النسبيين $R(y_A)$،$R(x_A)$ صغيرتين في حين تكون قيمة $R(x_A - y_A)$ أكبر بكثير، نقدم مثالاً يوضح ذلك:

تُعطى جذور الحدودية $f(x)=x^2-26x+1=0$ بالعلاقة:

$$r_T^{(1)}=13-\sqrt{168} \qquad \text{و} \qquad r_T^{(2)}=13+\sqrt{168}$$

وبما أنّ القيمة التقريبية للجذر $\sqrt{168}$ باستخدام خمسة أرقام معنوية هي:

$$\sqrt{168}=12.961$$

فإنه يمكن أن نعد الجذر الأول هو حاصل طرح مقدارين هما:

$$x_T=x_A=13$$

و

$$y_T=\sqrt{168}\ , \qquad y_A=13$$

ومن الواضح أنّ: $\mathrm{R}(x_A)=0$ و $\mathrm{R}(y_A)=0.0000371$

أمّا: $\mathrm{R}(x_A-y_A)=-0.0125$

ومن الواضح أنّ هذا الخطأ كبير جداً بالمقارنة مع $\mathrm{R}(y_A)$ و $\mathrm{R}(x_A)$.

6- خطأ التوابع واستقراريتها:

1-6 الخطأ المطلق والنسبي في حساب قيمة تابع:

إذا أردنا حساب قيمة التابع $f(x)$ باستخدام الآلة، عندئذٍ لن نحصل على قيمة $f(x)$ بالضبط بل هي قيمة تقريبية نرمز لها بالرمز $\tilde{f}(x)$.

فإذا كانت $x_A \approx x_T$ وأوجدنا $\tilde{f}(x_A)$ عوضاً عن $f(x_T)$، فما الخطأ الذي سينتج عن هذه العملية وكيف يمكننا تقديره؟

$$f(x_T)-\tilde{f}(x_A)=[f(x_T)-f(x_A)]+[f(x_A)-\tilde{f}(x_A)] \tag{14}$$

يمثل الحدّ $[f(x_A)-\tilde{f}(x_A)]$ الاضطراب (*noise*) الناتج عن حساب قيمة $f(x_A)$ باستخدام الحاسوب، أمّا الحدّ الثاني $[f(x_T)-f(x_A)]$ فهو الخطأ المتزايد، فإذا فرضنا أنّ مشتق التابع f موجود ومستمر على المجال $[a,b]$ عندئذٍ يمكن أن نكتب باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى:

$$f(x_T)-f(x_A)\approx f'(c)(x_T-x_A)$$

حيث إنّ c قيمة محصورة بين x_A و x_T، لكنه ونظراً للتقارب الكبير بين x_A و x_T

نستطيع أن نكتب:

$$f(x_T)-f(x_A)\approx f'(x_T)(x_T-x_A)\approx f'(x_A)(x_T-x_A)$$

أمّا الخطأ النسبي فهو:

$$\mathrm{R}(f(x_A))\approx\frac{f'(x_T)}{f(x_T)}(x_T-x_A)=\frac{f'(x_T)}{f(x_T)}x_T\,\mathrm{R}(x_A) \qquad (15)$$

مثال(10):

ليكن $f(x)=a^x$ حيث a عدد حقيقي موجب، أوجد الخطأ النسبي.

الحل:

بالاستفادة من (15) يمكن أن نكتب:

$$a^{x_T}-a^{x_A}\approx(\log a)\,a^{x_T}(x_T\text{-}x_A)$$

$$\mathrm{R}(a^{x_A})\approx x_T(\log a)\,\frac{(x_T\text{-}x_A)}{x_T}$$

$$=x_T(\log a)\,R(x_A)$$

$$=K\,R(x_A)$$

إذا كان المقدار $K=x_T(\log a)$ كبيراً عندئذ سيكون الخطأ النسبي $\mathrm{R}(a^{x_A})$ أكبر بكثير من الخطأ النسبي $R(x_A)$، فلو كان $R(x_A)=10^{-7}$ و $K=10^4$ مثلاً عندئذٍ يكون $\mathrm{R}(a^{x_A})=10^{-3}$ وهذا الخطأ يُعد كبيراً إذا ما قورن بالخطأ $R(x_A)$، ندعو هذا العدد K الذي يربط الدقة النسبية لبيانات المسألة (x_A) بالدقة النسبية لمخرجاتها (a^{x_A}) بالعدد الشرطي.

2-6 تعريف العدد الشرطي (Condition Number):

نحتاج قبل البدء في حل أي مسألة رياضية إلى التأكد من وجود الحل، وإثبات أن هذه المسألة لن تتأثر إذا تغيرت مدخلاتها تغيراً طفيفاً، وبذلك جاءت أهمية العدد الشرطي.

يُعطى العدد الشرطي للتابع f في النقطة $x=c$ بالعلاقة:

$$\left|\frac{f'(c)}{f(c)}.c\right| \qquad (16)$$

فإذا كان العدد الشرطي لتابع أصغر من الصفر كان التابع جيد الحساسية *well-conditioned* وفي خلاف ذلك يكون سيء الحساسية *ill- conditioned* (ذو حساسية عالية).

أمثلة:

العدد الشرطي للتابع $f(x)=\sqrt{x}$ هو:

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}.x\right|=\frac{1}{2}<1$$

لذا فهو جيد الحساسية.

العدد الشرطي للتابع $f(x)=\frac{10}{1-x^2}$ هو: $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}.x\right|=\frac{2x^2}{|1-x^2|}$ وعموماً يُعرف العدد الشرطي بالشكل:

الخطأ النسبي في مخرجات المسألة الرياضية = العدد الشرطي x الخطأ النسبي لبيانات المسألة (أي مدخلاتها).

ومن أجل $x\approx 1$ يكون العدد الشرطي كبيراً جداً، وبهذا يكون التابع f في هذه الحالة سيء الحساسية.

3-6 تعريف (عدم الاستقرارية في حساب قيمة تابع):

(Instability in Evaluating a Function)

بفرض أننا نحتاج إلى n خطوة لحساب قيمة التابع $f(x)$، عندئذ نصف إجرائية حساب قيمة هذا التابع بأنها غير مستقرة إذا كانت واحدة على الأقل من الخطوات اللازمة لحسابها سيئة الحساسية. أما إذا كانت الخطوات n جميعها جيدة الحساسية قلنا عن الإجرائية إنها مستقرة.

مثال(11):

ليكن التابع $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

من أجل x كبيرة شكل كافٍ نجد أن العدد الشرطي:

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}.x\right|=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\approx\frac{1}{2}$$

ويُعد هذا العدد الشرطي جيداً.

إذا حسبنا قيمة $f(12345)$ مدوّرة إلى ستة أرقام معنوية وجدنا أنّ:

$$f(12345)=0.005$$

في حين أنّ قيمتها الفعليّة هي: $f(12345)=0.0045000326262775$

وهذا يعني أنّه تمّ حساب القيمة التقريبية بخطأ نسبته 10%.

والسؤال الهام: ما الإجرائية اللازمة لحساب $f(12345)$ ؟؟

يمكن توضيح هذه الإجرائية بالمخطط التالي:

$x_0=12345$
$x_1=x_0+1$
$x_2=\sqrt{x_1}$
$x_3=\sqrt{x_0}$
$x_4=x_2-x_3$

من أجل الخطوة الأخيرة:

$$f_4(t)=x_2-t$$

يكون العدد الشرطي المقابل لها:

$$\left|\frac{t}{x_2-t}\right|$$

من أجل $x_2\approx t$ يكون العدد الشرطي كبيراً، وعندئذٍ تكون هذه الخطوة سيئة الحساسية، و إجرائية حساب $f(x)$ غير مستقرة.

لنعيد الآن كتابة التابع $f(x)$ بالشكل التالي:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

عندئذ نجد أن قيمة $f(12345)$ مدوّرة إلى ستة أرقام معنوية هي:

$$f(12345)=\frac{1}{\sqrt{12346}+\sqrt{12345}}=0.0045002$$

أي أن نسبة الخطأ هي: 0.0003%.

أمّا عن الإجرائية المتّبعة فهي الآتية:

$x_0=12345$
$x_1=x_0+1$
$x_2=\sqrt{x_1}$
$x_3=\sqrt{x_0}$
$x_4=x_2+x_3$
$x_5=1/x_4$

وهنا تُعرّف الخطوة الأخيرة بالعلاقة:

$$f_3(t)=\frac{1}{(x_2+t)}$$

وعليه فإنه من أجل $x_2\approx t$ (القيمة نفسها التي كان لأجلها التابع السابق غير مستقر) يكون العدد الشرطي هو:

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}.x\right|=\left|\frac{t}{x_2+t}\right|\approx\frac{1}{2}$$

لذا فإنّ $f(x)$ المعرّف بالشكل الجديد جيد الحساسية، و الإجرائية المتّبعة لحسابه مستقرة.

7- استقرارية الطرائق العددية Numerical Stability:

غالباً ما تتكرر في التحليل العددي فكرة التمييز بين نوعين من الخوارزميات العددية وهما:

- الخوارزميات المستقرة عددياً
- الخوارزميات غير المستقرة عددياً

تُوصف عموماً الإجرائية العددية أنَّها غير مستقرة إذا أدت الأخطاء المرتكبة في إحدى خطوات الخوارزمية إلى أخطاء أكبر في الخطوات التالية لها، وتؤدي إلى خفض الدقة الناتجة عن العمليات الحسابية.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1- أوجد أوسع مجال يجب على p^* أن يقع فيه، لتقريب p بخطأ نسبي لا يزيد على 10^{-4}، إذا كان p:

a) π b) e c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[3]{7}$

2- بفرض $\sin(x) \approx x$ من أجل x صغير بقدرٍ ما.أوجد المجال للمتحول x بحيث لا يتجاوز الخطأ النسبي المقدار $\frac{1}{2}\times 10^{-14}$؟

3- احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في التقريبات التالية لـ p بـ $p*$:

a) $p=\pi$ ، $p^*=\frac{22}{7}$ b) $p=\pi$ ، $p^*=3.1416$

c) $p=e$ ، $p^*=2.718$ d) $p=\sqrt{2}$ ، $p^*=1.414$

e) $p=e^{10}$، $p^*=22000$ f) $p=10^{\pi}$ ، $p^*=1400$

g) $p=8!$ ، $p^*=39900$ h) $p=9!$ ، $p^*=\sqrt{18\pi}\,(9/e)^9$

4- أنجز الحسابات التالية:

1) تماما. 2) باستخدام حساب قطع بثلاثة أرقام. 3) باستخدام حساب تدوير إلى ثلاثة أرقام. 4) احسب الخطأ النسبي في الجزأين (2) و(3).

a) $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)*\left(\frac{4}{5}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{11}\right)+\frac{3}{20}$ d) $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{11}\right)-\frac{3}{20}$

5- باستخدام حساب التدوير إلى ثلاثة أرقام، انجز الحسابات التالية: بالقيم الحقيقية المعينة بما لايقل عن خمسة أرقام، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

a) $133+0.921$ b) $133-0.499$

c) $(121-0.327)-119$ d) $(121-119)-0.327$

16- ليكن $f(x)=e^{x}$، ولتكن لدينا الصيغتان التاليتان لإيجاد تقريب لـ e^{-5} بحساب قطع لثلاثة أرقام:

a) $$e^{-5}\approx\sum_{i=0}^{9}\frac{(-5)^{i}}{i\,!}=\sum_{i=0}^{9}\frac{(-1)^{i}\,5^{i}}{i\,!}$$

b) $$e^{-5}=\frac{1}{e^{5}}\approx\frac{1}{\sum_{i=0}^{9}\frac{5^{i}}{i\,!}}$$

فإذا علمت أن القيمة الفعلية لـ e^{-5} بثلاثة أرقام هي 6.74×10^{-3} ، أيٌّ من القانونين (a) ، (b) يعطي دقة أكبر ولماذا؟

17- أوجد تقدير لـ e^{-5} باستخدام الصيغتين التاليتن:

a) $$e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$$

b) $$e^{-x}=\frac{1}{e^{x}}=\frac{1}{1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots}$$

وقارنها بالقيمة الفعلية لـ e^{-5} وهي 6.737947×10^{-3} ، استخدم خمسة حدود من كل سلسلة لحساب الخطأ الفعلي والنسبي.

18- عين عدد الحدود اللازم لتقريب $\cos(x)$ إلى ثمانية أرقام معنوية باستخدام سلسلة ماك لوران

$$\cos(x)=1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\frac{x^{8}}{8!}-\ldots$$

احسب تقريب $\cos(0.3\pi)$. ثم أوجد الخطأ المطلق والنسبي.

19- بفرض أن $fl(y)$ تقريب تدوير بـ k مرتبة لـ y ، برهن أن:

$$\left|\frac{y-fl(y)}{y}\right|\le 0.5\times10^{-k+1}$$

[إرشاد: إذا كان $d_{k+1}<5$ فإن $fl(y)=0.d_1d_2..d_k\times10^{n}$.

وإذا كان $d_{k+1}\ge 5$ فإن $fl(y)=0.d_1d_2..d_k\times10^{n}+10^{n-k}$]

20- تُعطى معاملات ثنائي الحد:

$$\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}$$

عدد طرائق اختيار مجموعة جزئية مكونة من k شيئا من أصل مجموعة ذات m شيئا.

a) بفرض للأعداد العشرية لآلة الشكل:

$$\pm 0.d_1d_2d_3d_4\times 10^n,\quad 1\le d_i\le 9,\qquad -15\le n\le 15$$

ما أكبر قيمة لـ m بحيث يمكن من أجلها حساب المعامل $\binom{m}{3}$ وفق التعريف دون حدوث زيادة في الأس؟.

b) برهن أنه يمكن حساب $\binom{m}{k}$ أيضا بالشكل:

$$\binom{m}{k}=\binom{m}{k}\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k+1}{1}\right)$$

c) ما أكبر قيمة لـ m بحيث يمكن حساب معامل ثنائي الحد $\binom{m}{3}$ بالقانون الوارد في (b) دون حدوث زيادة في الأس؟

21- ليكن $f\in c[a,b]$ تابعاً مشتقه f' موجود على (a,b). وبفرض أننا نريد حساب f في x_0 من (a,b)، إلا أنه عوضاً عن حساب القيمة الفعلية $f(x_0)$ حُسبت القيمة التقريبية $\tilde{f}(x_0)$ التي هي القيمة الفعلية لـ f في $x_0+\varepsilon$ أي $\tilde{f}(x_0)=f(x_0+\varepsilon)$.

a) استخدم مبرهنة القيمة الوسطى لتقدير الخطأ المطلق $\left|f(x_0)-\tilde{f}(x_0)\right|$ والخطأ النسبي $\frac{\left|f(x_0)-\tilde{f}(x_0)\right|}{f(x_0)}$، بفرض $f(x_0)\neq 0$.

b) إذا كان $\varepsilon = 5\times10^{-6}$ و $x_0 = 1$ أوجد حدا لكل من الخطأ المطلق والخطأ النسبي إذا كان:

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \sin x$

c) أعد الجزء (b) بفرض $\varepsilon = \left(5\times10^{-6}\right)x_0$ و $x_0 = 10$.

22- ليكن لدينا:

$$y_1(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 0.35$$
$$y_2(x) = ((x-7)x + 8)x - 0.35$$

a) أثبت أن $y_1(x) = y_2(x)$.

b) أوجد $y_1(1.37)$ و $y_2(1.37)$، علماً أننا استخدمنا القطع لثلاثة أرقام عشرية.

c) أوجد الخطأ النسبي المئوي.لكلا الحالتين، ماذا تستنتج؟

23- أوجد جذور الحدودية

$$x^2 - 5000.002x + 10$$

وذلك باستخدام القطع لخمسة أرقام عشرية.

24- أوجد العدد الشرطي لكلٍ من الحالات التالية:

a) $f(x) = \sqrt{|x-1|} + 1$ من أجل $x = 1.00001$

b) $f(x) = e^x$ من أجل $x = 10$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ من أجل $x = 300$

d) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ من أجل $x = 0.001$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ من أجل $x = 1.0001\pi$

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

Solution Of Non-Linear Equations

1-مقدمة

إن إيجاد حلول معادلة من الشكل:

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

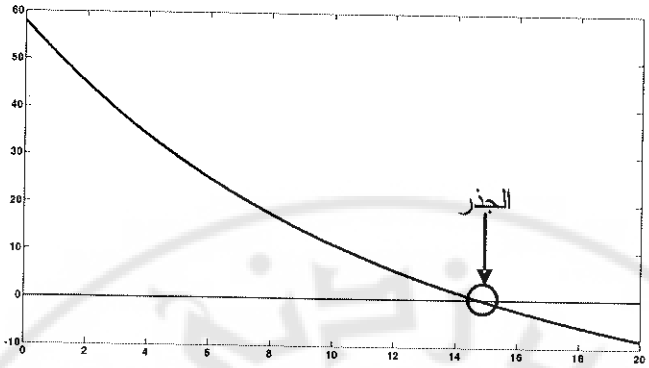
هو مسألة معروفة في الرياضيات التطبيقية. و غالباً لا توجد حلول تحليلية صريحة لهذه المسألة، سنستعرض بعض الطرائق العددية البسيطة لحل هذه المعادلة وكذلك سنبحث في بعض الصعوبات التي قد تواجهنا.

2- الطريقة البيانية Graphical Method:

تُعد هذه الطريقة من أبسط طرائق تحديد حلول المعادلة $f(x)=0$، وتتم الإجرائية كما يلي:

1. رسم التابع $f(x)$.
2. ملاحظة تقاطع الخط البياني للتابع مع المحور ox، حيث تمثل نقطة التقاطع جذراً للتابع $f(x)$.

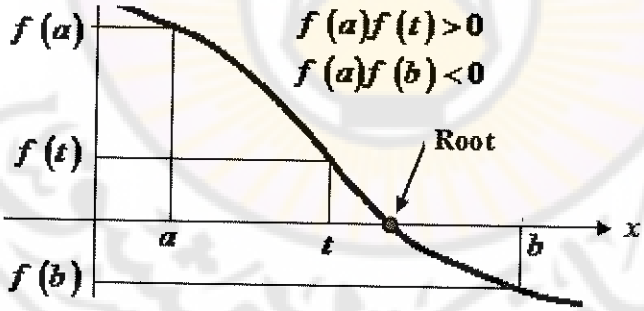
يُلاحظ أنَّ هذه الطريقة لا تحدد لنا الجذر بدقة كافية. و مع ذلك تُفيدنا بمعرفة تغيرات التابع $f(x)$ عند الجذور البسيطة، كما أنه يمكن اعتبار هذه القيمة هي قيمة ابتدائية جيدة للطرائق العددية التكرارية.



الشكل 1: يوضح الطريقة البيانية

3- الطرائق المجالية Bracketing Methods:

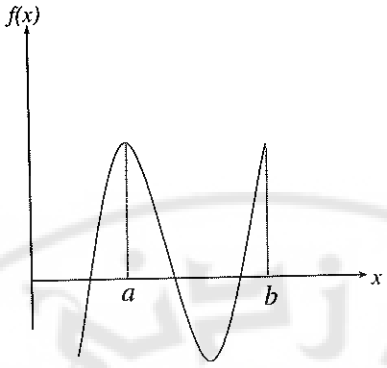
تعتمد هذه الطريقة على مبرهنة القيمة المتوسطة حيث نفترض أن $f:[a,b]\to\Re$ تابع حقيقي مستمر على المجال $[a,b]$، وأن $f(a)\cdot f(b)<0$: عندها فإن $f(x)$ يغير إشارته في المجال $[a,b]$، وعليه فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل واحد على الأقل في هذا المجال(الشكل 2).



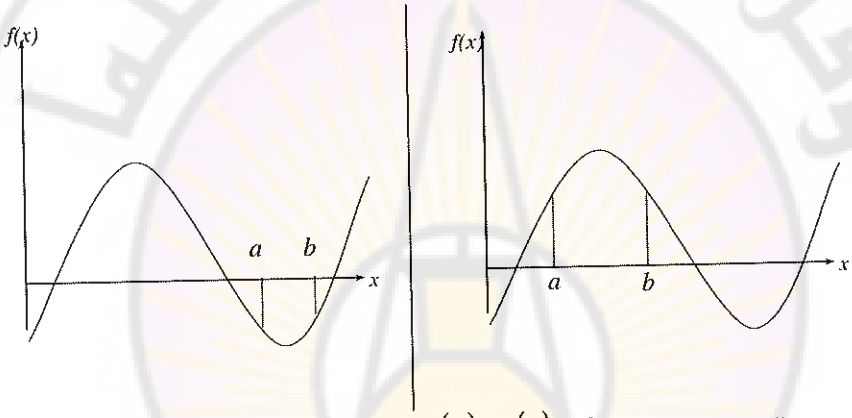
الشكل 2: يوضح مبرهنة القيمة المتوسطة

<u>ملاحظة هامة:</u>

إذا تحققت العلاقة $f(a)\cdot f(b)>0$ فإنه قد يكون للتابع $f(x)$ جذور وقد لا يكون كما يوضح الشكل 3 و 4:



الشكل 3: يبين تحقق $f(a)\cdot f(b)>0$ و وعلى رغم من وجود جذور ضمن المجال $[a,b]$



الشكل 4: يبين تحقق $f(a)\cdot f(b)>0$ و عدم وجود جذور ضمن المجال $[a,b]$

<u>قاعدة عامة(1) :</u>

إذا كان التابع f مستمراً على المجال $[a,b]$ عندئذ نميز ما يلي:

$f(a)\cdot f(b)>0$ إمّا ألاّ يوجد جذور للتابع f بين النقطتين a ، b .

و إمّا يوجد عدد زوجي من الجذور بين النقطتين a ، b .

$f(a)\cdot f(b)<0$ يوجد عدد فردي من الجذور للتابع f بين النقطتين a ، b .

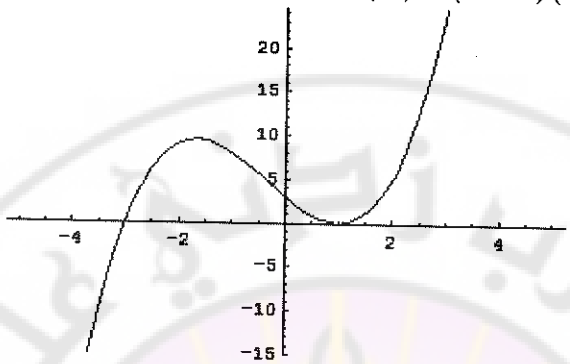
<u>ملاحظة هامة:</u>

نستثني من القاعدة السابقة:

a. الجذور المضاعفة:

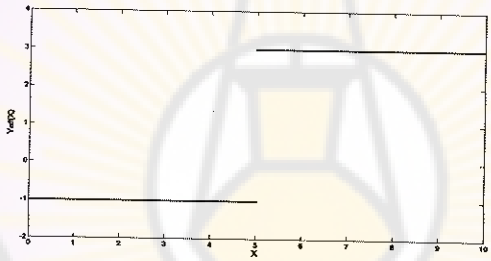
مثال(1):

$$f(x)=x^3+x^2-5x+3 \Leftrightarrow f(x)=(x+3)(x-1)^2$$



الشكل 5: يبين الجذور المضاعفة

b. التوابع غير المستمرة:



الشكل 6: يبين التابع غير المستمر

قاعدة عامة (2) :

معايير التوقف في الخوارزمية العددية convergence criteria:

توجد عدة معايير لتوقف الخوارزمية العددية في الحاسب يمكن استخدامها جميعاً أو الاكتفاء بأحدها استناداً للدقة المطلوبة، فيما يلي نعرض بعضها، علماً أننا سنعرض في بعض الطرائق أنسب تقدير للخطأ المتعلق بالطريقة المتبعة:

1- تقارب الأعداد المتتالية (وغالباً ما تدعى دقة precision للأرقام).

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon_x$$

2- تقارب الدالة المطلوب إيجاد جذورها.

$$|f(x_n)| < \varepsilon_f$$

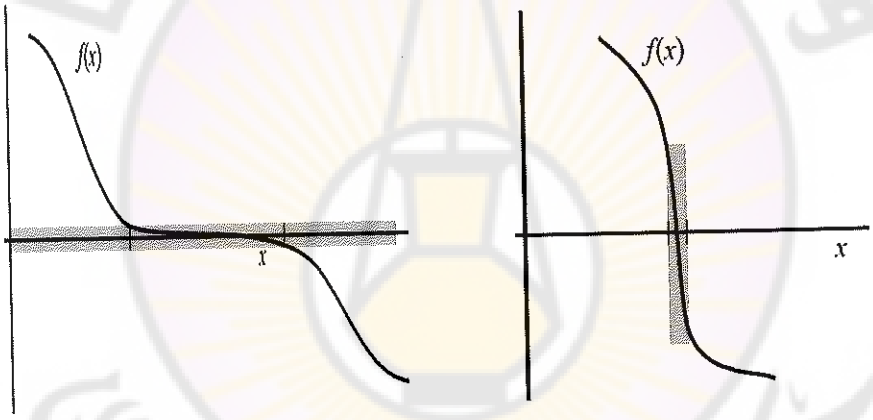
3- تقارب خطأ الطريقة المتبعة

$$\max Erorr_{method} < \varepsilon$$

4- العدد الأعظمي للتكرارات المطلوبة

ملاحظة:

يجب اختيار المعيار المناسب للدالة فعلى سبيل المثال من الخطأ استخدام المعيار(2) عندما يكون $f'(x)$ صغيراً أو كبيراً بقرب الجذر كما يوضح الشكل التالي:



(a): لاحظ $f'(x)$ كبير بقرب الجذر (b): لاحظ $f'(x)$ صغير بقرب الجذر

الشكل 7

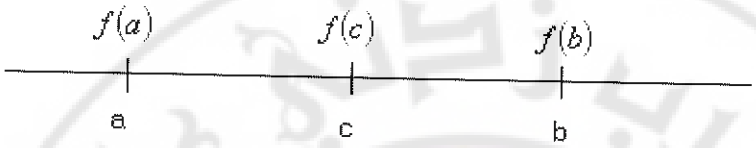
1-3 طريقة تنصيف المجال Bisection Method:

ليكن $f:[a,b] \to \Re$ تابعاً يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عندئذ يوجد جذر واحد على الأقل لهذا التابع في المجال $[a,b]$.

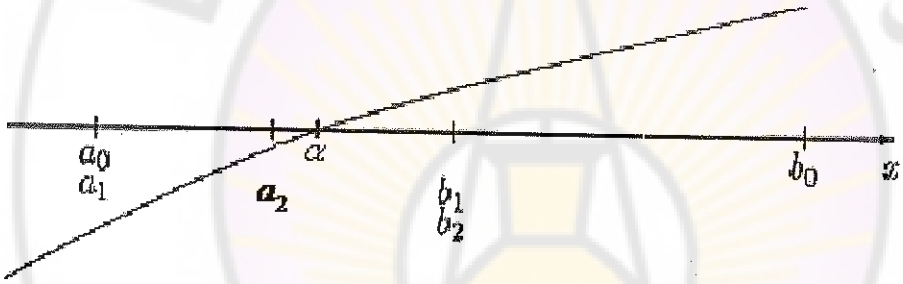
سنفترض في دراستنا أنّ هذا الجذر وحيد وليكن (α)، أمّا القيمة التقريبية له بطريقة تنصيف المجال فنختارها القيمة المتوسطة للنقطتين a,b ولتكن c أي أن:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

فإذا تحقق أن $f(a)\cdot f(c)<0$ عندئذ (α) ينتمي إلى المجال $[a,c]$ وإلا فهو ينتمي إلى المجال $[c,b]$ الشكل 9.



الشكل 8: يبين موضع النقطة c



الشكل 9: يبين طريقة تنصيف المجال

نكرر هذه العملية حتى نحصل على الدقة المطلوبة (ε) وذلك حسب معايير التوقف.

<u>خوارزمية طريقة تنصيف المجال:</u>

Assume $f(a)<0$, $f(b)>0$

Step 0 Input a,b, and the stopping tolerance parameter ε ,say $\varepsilon = 10^{-8}$. Set $a_1 = a$, $b_1 = b$

Step 1 if $\left| f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\right| \le \varepsilon$,stop.set root is $c = \frac{a_1+b_1}{2}$.

if $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$ .set $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

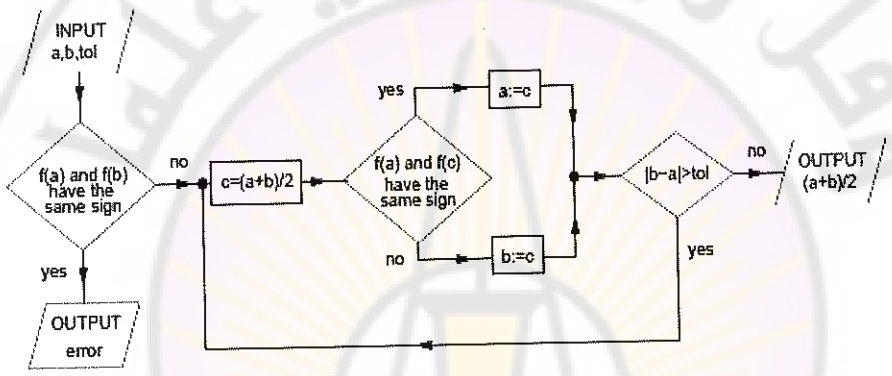
GO TO Step 2.

if $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$ .set $a_1=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_1=b_1$.

GO TO Step 2.

Step 2 Set $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ .if $|b_1-a_1|<\varepsilon$,stop, then. $c=x_1$

Otherwise, GO TO Step 1



مثال(2):

أوجد جذراً للتابع $f(x)=x^2-3$ في المجال $[1, 2]$ بطريقة تنصيف المجال بدقة $\varepsilon(f)=0.01$:

الحل:

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	update	$\lvert b-c\rvert$
1	1.0	2.0	-2.0	1.0	1.5	-0.75	a = c	0.5
2	1.5	2.0	-0.75	1.0	1.75	0.062	b = c	0.25
3	1.5	1.75	-0.75	0.0625	1.625	-0.359	a = c	0.125
4	1.625	1.75	-0.3594	0.0625	1.6875	-0.1523	a = c	0.0625
5	1.6875	1.75	-0.1523	0.0625	1.7188	-0.0457	a = c	0.0313
6	1.7188	1.75	-0.0457	0.0625	1.7344	0.0081	b = c	0.0156

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	update	$\lvert b-c \rvert$
7	1.71988/td>	1.7344	-0.0457	0.0081	1.7266	-0.0189	a = c	0.0078

الجدول 1: تطبيق طريقة تنصيف المجال على التابع $f(x)=x^2-3$

ونلاحظ أن $\lvert f(1.7344) \rvert < 0.01$ لذا نتوقف وعليه فإن $\alpha=1.7344$ هو الجذر المطلوب.

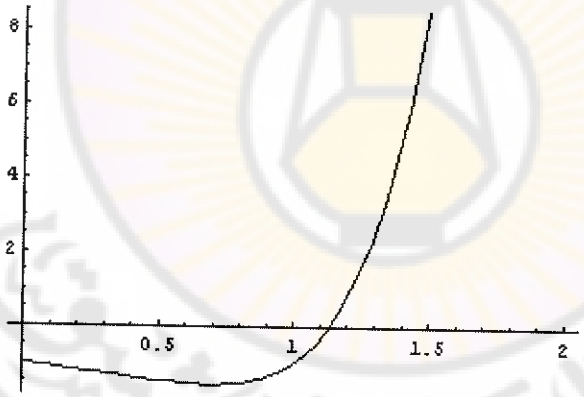
مثال(3):

أوجد أكبر جذر للتابع $f(x)=x^6-x-1$ بدقة $\varepsilon=0.001$.

الحل:

برسم المنحني نلاحظ أن $1<\alpha<2$ الشكل 9. لذا نأخذ $a=1\,,\ b=2$ فيكون $f(a)=-1$ و $f(b)=61$ ، نستنتج أن مبرهنة القيمة المتوسطة محققة.

يبين الجدول 2 نتائج تطبيق خوارزمية طريقة تنصيف المجال. إذ تشير n إلى تسلسل التكرار في الحلقة.



الشكل 10: التابع $f(x)=x^6-x-1$

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	update	$\lvert b-c \rvert$
1	1	2	-1	61	1.5	8.890625	c=b	0.5
2	1	1.5	-1	8.890625	1.25	1.564697	c=b	0.25
3	1	1.25	-1	1.564697	1.125	-0.09771	c=a	0.125

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	update	$\lvert b-c \rvert$
4	1.125	1.25	-0.097713	1.564697	1.1875	0.616653	c=b	0.0625
5	1.125	1.1875	-0.097713	0.616653	1.15625	0.233269	c=b	0.03125
6	1.125	1.15625	-0.097713	0.233269	1.140625	0.061578	c=b	0.015625
7	1.125	1.140625	-0.097713	0.061578	1.132813	-0.01958	c=a	0.007813
8	1.132813	1.140625	-0.019576	0.061578	1.136719	0.020619	c=b	0.003906
9	1.132813	1.136719	-0.019576	0.020619	1.134766	0.000427	c=b	0.001953
10	1.132813	1.134766	-0.019576	0.000427	1.133789	-0.0096	c=a	0.000977

الجدول 2: تطبيق طريقة تنصيف المجال على التابع $f(x)=x^6-x-1$

1-1-3 الحد الأعلى للخطأ المرتكب بطريقة تنصيف المجال:

لتكن a_n، b_n، c_n هي القيم المحسوبة للمتحولات a,b,c على الترتيب في الخطوة n عندها نحصل بسهولة على:

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{(b_n-a_n)}{2} \qquad (2)$$

وبطريقة مباشرة نستنتج أن:

$$b_n-a_n=\frac{(b-a)}{2^{n-1}}\ ; \qquad n\geq 1 \qquad (3)$$

حيث إنّ $|b-a|$ هو طول المجال الأساسي الذي بدأنا به. و الجذر α يكون إما في المجال $[a_n,c_n]$ وإمّا في المجال $[c_n,b_n]$:

$$|\alpha-c_n|\leq c_n-a_n=b_n-c_n=\frac{(b_n-a_n)}{2} \qquad (4)$$

وهو حدّ الخطأ للقيمة c_n المستخدمة في الخطوة الثانية من الخوارزمية السابقة. بدمج هذه المعادلة مع (3) نحصل على الحدّ التالي:

$$|\alpha-c_n|\leq\frac{(b-a)}{2^n} \qquad (5)$$

وهذا يبين أن المتحول التكراري c_n يتقارب من α عندما تسعى n إلى اللانهاية.

لمعرفة عدد التكرارات التي نحتاج إليها نفترض أن: $|\alpha-c_n|\leq\varepsilon$

1-2-3 تحليل الخطأ:

مبرهنة (1):

ليكن التابع $f \in C^2[a,b]$، حيث $[a,b] \subset R$ ويحقق: $f(\alpha)=0;\ \alpha \in [a,b]$.

فإذا كانت $x_n \in [a,b]$ و $x_n = b_n - \left(\dfrac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}\right) f(b_n)$، عندئذٍ

$$\alpha - x_n = \lambda(\alpha - x_{n-1}) \tag{8}$$

حيث

$$\lambda = \frac{\beta f''(\alpha)}{2f'(\alpha) + \beta f''(\alpha)}\ ;\ \beta = \begin{cases} a_n - \alpha & a_n \text{ remains fixed} \\ b_n - \alpha & b_n \text{ remains fixed} \end{cases}$$

و اذا تحقق $|\lambda| < 1$ فان طريقة الوضع الخاطئ متقاربة.

الإثبات:

باستخدام مبرهنة تايلور ننشر التابع f في جوار النقطة $x = x_0$ أي:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0)$$

من أجل $x = a_n$, $x_0 = \alpha$ وبما أن $f(\alpha) = 0$ نجد أن:

$$f(a_n) = (\alpha - a_n) f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha - a_n)^2 f''(\alpha)$$

وبشكل مشابه من أجل $x = b_n$ نجد

$$f(b_n) = (\alpha - b_n) f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha - b_n)^2 f''(\alpha)$$

اذاً

$$f(b_n) - f(a_n) = (b_n - a_n) f'(\alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)\left[(\alpha - b_n)^2 - (\alpha - a_n)^2\right]$$

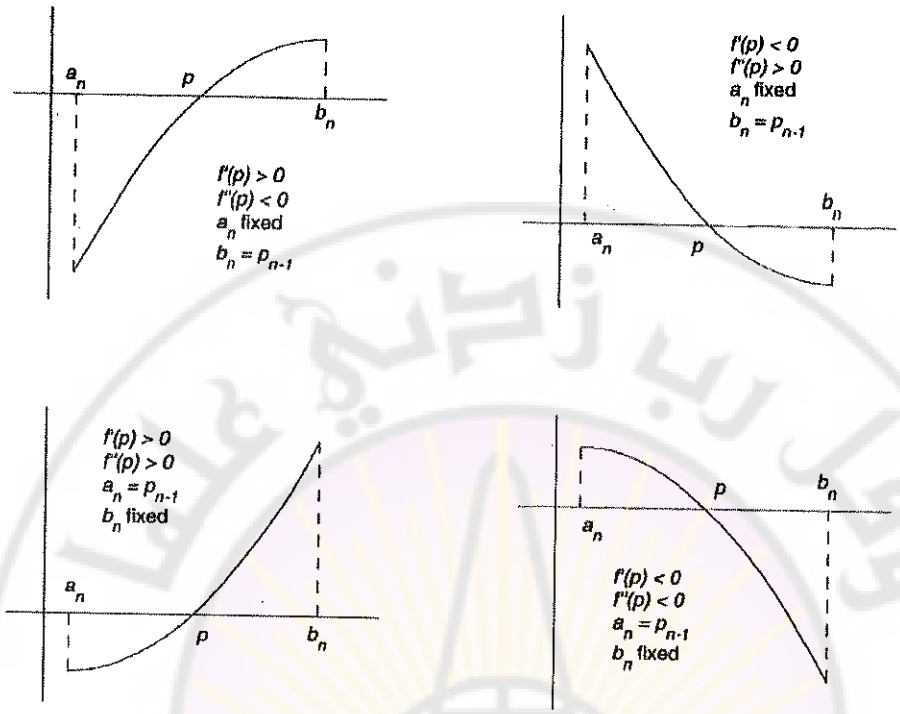
$$= (b_n - a_n)\left[f'(\alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(b_n + a_n - 2\alpha)\right] \qquad (9)$$

مرة ثانية نستخدم مبرهنة تايلور للتابعان $f(a_n)$ و $f(b_n)$ والتعويض في العلاقة (9) نجد:

$$x_n - \alpha \simeq (b_n - \alpha)\left[1 - \frac{f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(b_n - \alpha)}{f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(b_n + a_n - 2\alpha)}\right]$$

$$\simeq (b_n - \alpha)(a_n - \alpha)\left[\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha) + f''(\alpha)(b_n + a_n - 2\alpha)}\right] \qquad (10)$$

وقد لاحظنا أن أحد أطراف المجال بطريقة الوضع الخاطئ بعد عدد معين من التكرارات يصبح ثابتاً (ليس ضرورياً أن يحدث ذلك في باقي الطرائق التكرارية)، كما توضح الأشكال التالية:



الشكل 14: يوضح ثبات أحد أطراف المجال مع تغير شكل التابع $f(x)$

نفترض ان b_n هو الطرف الثابت، عندئذٍ :

$$E_{n-1} = x_{n-1} - \alpha = b_n - \alpha$$

و نعوض في العلاقة (10) فنجد:

$$E_n = E_{n-1}(a_n - \alpha)\left[\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha) + f''(\alpha)(e_{n-1} + a_n - \alpha)}\right] \qquad (11)$$

بفرض

$$\lambda = \frac{\beta f''(\alpha)}{2f'(\alpha) + \beta f''(\alpha)} \; ; \; \beta = \begin{cases} a_n - \alpha & a_n \text{ remains fixed} \\ b_n - \alpha & b_n \text{ remains fixed} \end{cases}$$

نجد:

$$E_n = \lambda E_{n-1}$$

اذا أردنا أن تتقارب $E_n = x_n - \alpha$ من الصفر ، فإنه يجب أن يتحقق $|\lambda| < 1$،

كي نثبت ذلك نفترض أن a_n هو الطرف الثابت، عندئذٍ $\beta = a_n - \alpha$.

لدينا أربع حالات ، نناقش واحدة و الباقي يترك تمريناً للطلاب:

ليكن $\beta = a_n - \alpha < 0$ و $f''(\alpha) < 0$ عندئذٍ $(a_n - \alpha)f''(\alpha) > 0$، وبما أنَّ $f'(\alpha) > 0$ ، إذاً $2f'(\alpha) + (a_n - \alpha)f''(\alpha) > (a_n - \alpha)f''(\alpha)$

و هكذا نجد : $0 < \dfrac{(a_n - \alpha)f''(\alpha)}{2f'(\alpha) + (a_n - \alpha)f''(\alpha)} = \lambda < 1$ ، وطريقة الوضع الخاطئ متقاربة دوماً.

2-2-3 تقدير الخطأ:

عند حساب جذر تابع، نقوم عملياً بحساب سلسلة من القيم التقريبية x_n، لذا فإننا نرغب في تقدير دقتها لنحدد الخطوة من الخوارزمية التي سنتوقف عندها عن التكرار.

بفرض

$$\begin{aligned} E_n &= x_n - \alpha \\ &= x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - \alpha \\ &= x_n - x_{n-1} + E_{n-1} \end{aligned}$$

ولدينا فرضاً $E_n = \lambda E_{n-1}$ حيث λ هي المذكورة في نص المبرهنة (1)، أو بشكل آخر

$$E_{n-1} = \frac{E_n}{\lambda} \tag{12}$$

$$E_n \approx \left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| |x_n - x_{n-1}| \tag{13}$$

لكن عبارة λ تحوي مشتقاً $f(x)$ ، لذلك لنعتبر

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{(x_n - \alpha) - (x_{n-1} - \alpha)}{(x_{n-1} - \alpha) - (x_{n-2} - \alpha)}$$

$$= \frac{E_n - E_{n-1}}{E_{n-1} - E_{n-2}} \qquad (14)$$

$$= \frac{(\lambda - 1)E_{n-1}}{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)E_{n-1}} = \lambda$$

من المعادلتين (13)و(14) يتم تقدير الخطأ بطريقة الوضع الخاطئ، فمن أجل دقة معينة ε نفترض $\left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$، حيث نقدر قيمة λ من المعادلة (14)

مثال(5):

أوجد باستخدام طريقة الوضع الخاطئ جذراً للتابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ المعرف $[1, 2]$ وبدقة $\varepsilon = 0.005$.

الحل:

n	x_n	$f(x_n)$	$\left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	ملاحظات
0	1	-1	0	قيمة ابتدائية
1	2	9	0	قيمة ابتدائية
2	1.1	-0.5489999	0	
3	1.151743638	-0.2744007	0	
4	1.176840909	-0.1307425	0.02363823	التقدير الأول للخطأ
5	1.1886276732	-0.0608758	0.01043745	
6	1.1940789112	-0.0280409	0.00469037	تحققت الدقة المطلوبة
7	1.1965820882	-0.0128522		

الجدول 4: تطبيق طريقة الوضع الخاطئ على التابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

3-3 طريقة نيوتن Newton's Method:

ليكن $y = f(x)$ الخط البياني للتابع $f(x)$ المبين في الشكل 1. إن الجذر α للتابع $f(x)$ يوافق نقطة تقاطع الخط البياني مع المحور x. فإذا أخذنا x_n قيمة تقريبية ابتدائية للجذر α، ورسمنا المستقيم المماس للمنحني عند النقطة $(x_n, f(x_n))$ كانت x_{n+1} فاصلة نقطة تقاطع هذا المماس مع المحور ox تقريباً جيداً للجذر α، ويمكن إيجاد عبارة x_{n+1} بطريقتين:

1-3-3 الطريقة الهندسية:

تُعطى معادلة المستقيم المماس لمنحني التابع $y = f(x)$ والمار بالنقطة x_n بالعلاقة:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

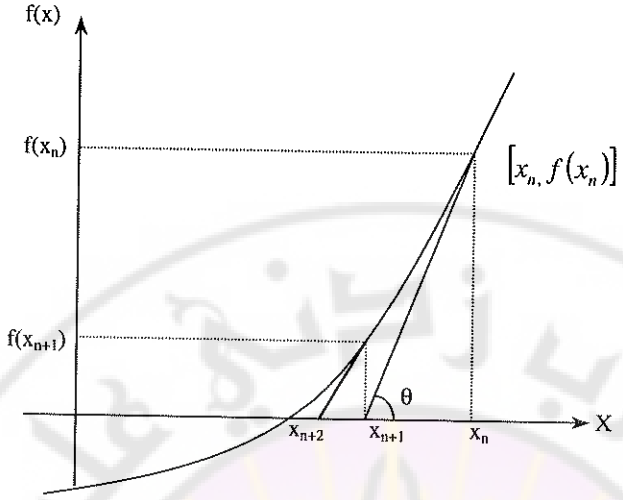
وباعتبار x_{n+1} نقطة تقاطع المماس مع المحور ox هي القيمة التقريبية الجديدة للجذر يكون:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

ومنه:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (15)$$

وبهذا يمكننا من أجل x_n قيمة ابتدائية اختيارية للجذر إيجاد قيم تقريبية أخرى باستخدام العبارة (15) حتى نصل إلى الدّقة المطلوبة (الشكل 14).



الشكل 14: يوضح الشكل المعنى الهندسي لطريقة نيوتن

2-3-3 الطريقة التحليلية:

بفرض $x_n \approx \alpha$ ، نقوم بتطبيق مبرهنة تايلور للتابع f بجوار x_n :

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi_n)$$

حيث إن ξ_n قيمة واقعة بين x و x_n .

نجعل $f(x) = 0$ فنجد أنّ قيمة x :

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(x - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \qquad (16)$$

نُعرّف الآن x_{n+1} بأنّها القيمة الناتجة عن (16) بعد حذف حدّ الباقي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

مثال(6):

أوجد باستخدام طريقة نيوتن جذراً للتابع $f(x) = x^6 - x - 1$ بدقة $\varepsilon = (10)^{-8}$.

الحل:

من الواضح أنّ: $f'(x) = 6x^5 - 1$ ، إذاً العلاقة التكرارية هي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,6} - x_n - 1}{6x_n^{\,5} - 1} \qquad n \geq 0$$

سنستخدم قيمة ابتدائية تقريبية للجذر $x_0 = 1.5$ ، يبين الجدول 5 النتائج الحسابية. إن العمود ذا الترويسة "$(x_n - x_{n-1})$"هو تقدير للخطأ "$(\alpha - x_{n-1})$" وسنبرهن على هذا فيما بعد.

n	x_n	$f(x_n)$	$(x_n - x_{n-1})$	$(\alpha - x_{n-1})$
0	1.5	8.89		
1	1.30049088	2.54	-2.00×10^{-1}	-3.65×10^{-1}
2	1.18148042	5.38×10^{-1}	-1.19×10^{-1}	-1.66×10^{-1}
3	1.13945559	4.92×10^{-2}	-4.20×10^{-2}	-4.68×10^{-2}
4	1.13477763	5.50×10^{-4}	-4.68×10^{-3}	-4.73×10^{-3}
5	1.13472415	6.80×10^{-8}	-5.35×10^{-5}	-5.35×10^{-5}
6	1.13472414	-4.00×10^{-9}	-1.00×10^{-8}	-6.91×10^{-9}

الجدول 5: تطبيق طريقة نيوتن على التابع $f(x) = x^6 - x - 1$

إن القيمة الحقيقية للجذر هي $\alpha = 1.134724138$ و x_6 تساوي قيمة α بدقة 9 مراتب معنوية. بمقارنة هذا مع القيم السابقة المبينة في الجدول 2 لطريقة تنصيف المجال نلاحظ أن طريقة نيوتن قد تتقارب ببطء في البداية ولكن مع اقتراب القيم التكرارية من الجذر فإن سرعة التقارب تزداد كما هو واضح في الجدول 5.

<u>خوارزمية طريقة نيوتن:</u>

1. INPUT: intial value x_0 ، toletance ε ، maximum number of iteration m

   Set i=1
2. While $i \leq m$ Do
   a. $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
   b. if $|x - x_0| < \varepsilon$ then OUTPUT(x)

      Stop.
   c. i=i+1.

Set $x_0 = x$

3. OUTPUT('Method failed after m iteration، m=' ، m);
   Stop.

3-3-3 مساوئ طريقة نيوتن:

1. إنّ اختيار القيمة الابتدائية للجذر في جوار نقطة الانعطاف للتابع يؤدي إلى تباعد القيم التكرارية عن الجذر.

مثال(7):

ليكن $f(x) = (x-1)^3 + 0.512$ ، أوجد جذور التابع باستخدام طريقة نيوتن من أجل $x_0 = 5$.

عدد التكرارات	x_n
0	5.0000
1	3.6560
2	2.7465
3	2.1084
4	1.6000
5	0.92589
6	–30.119
7	–19.746
8	–12.831
9	–8.2217
10	–5.1498
11	–3.1044
12	–1.7464
13	–0.85356
14	–0.28538
15	0.039784
16	0.17475
17	0.19924
18	0.2

الجدول 6: تباعد طريقة نيوتن عند نقطة الانعطاف $f(x) = (x-1)^3 + 0.512$

2. بما أنّ العلاقة التكرارية في طريقة نيوتن هي: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

فإنه إذا كانت $f'(x_n) \cong 0$ فهذا يعني أننا أمام حالة قسمة عدد على صفر أو على عدد قريب منه، هذا ما يجعل القيمة الجديدة x_{n+1} كبيرة جداً بالمقارنة مع x_n.

مثال(8):

من أجل $f(x) = x^3 - 0.03x^2 + 2.4\times10^{-6}$ تكون $f'(x) = 3x^2 - 0.06x$ ومن أجل $x_0 = 0.01999$ نجد أن الجذر لن يتقارب حتى بعد التكرار التاسع، إذاً فطريقة نيوتن متباعدة هنا.

عدد التكرارات	x_n	$f(x_n)$	$\lvert\varepsilon\rvert = \left\lvert\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right\rvert \times 100$
0	0.019990	-1.6000 x 10-6	
1	-2.6480	-18.778	100.75
2	-1.7620	-5.5638	50.282
3	-1.1714	-1.6485	50.422
4	-0.77765	-0.48842	50.632
5	-0.51518	-0.14470	50.946
6	-0.34025	-0.042862	51.413
7	-0.22369	-0.012692	52.107
8	-0.14608	-0.0037553	53.127
9	-0.094490	-0.0011091	54.602

الجدول 7: تطبيق طريقة على التابع $f(x) = x^3 - 0.03x^2 + 2.4\times10^{-6}$

إذا كان التابع متأرجحاً وله عدة جذور، عندئذ يمكن أن نحصل من أجل قيمة ابتدائية قريبة من جذر معين على قيم تكرارية متقاربة من جذر آخر.

مثال(9):

عند إيجاد حل للمعادلة $\sin x = 0$، نأخذ قيمة ابتدائية $x_0 = 2.4\pi = (7.539822)$ فنلاحظ تقارب طريقة نيوتن من الجذر $x = 0$، على الرغم من أن الجذر الأقرب إلى القيمة الابتدائية المختارة هو $x = 2\pi = 6.2831853$.

عدد التكرارات	x_n	$f(x_n)$	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	7.539822	0.951	
1	4.461	-0.969	68.973
2	0.5499	0.5226	711.44
3	-0.06303	-0.06303	971.91
4	$6.376\text{x}10^{-4}$	8.375x10-4	$7.54\text{x}10^{4}$
5	$-1.95861\text{x}10^{-13}$	-1.95861x10-13	4.27x1010

الجدول 8: تطبيق طريقة نيوتن من أجل إيجاد جذر للمعادلة $\sin x = 0$

من الممكن للقيم التكرارية الناتجة عن استخدام طريقة نيوتن أن تتأرجح عند قيم قريبة من النهايات المحلية للتابع دون أن تقترب من الجذر، بل قد تقترب من النهايات المحلية لا الجذر.

مثال(10):

ليس للمعادلة $f(x) = x^2 + 2 = 0$ جذرٌ حقيقيٌّ، وعند تطبيق طريقة نيوتن نجد أنّ القيم التكرارية تتأرجح عند قيم النّهاية المحلية الدنيا للتابع كما يوضح الجدول 9.

عدد التكرارات	x_n	$f(x_n)$	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	-1.0000	3.00	
1	0.5	2.25	300.00
2	-1.75	5.062	128.571
3	-.30357	2.092	476.47
4	3.1423	11.874	109.66
5	1.2529	3.57	150.80
6	-.17166	2.029	829.88
7	5.7395	34.942	102.99
8	2.6955	9.268	112.927
9	0.9770	2.954	175.96

الجدول 9: تطبيق طريقة نيوتن من أجل إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = x^2 + 2 = 0$

مثال(11):

كانت الحواسيب فيما سبق مزودة بقطع إلكترونية لحساب عمليات الجمع والطرح والضرب فقط، أما عملية القسمة فكانت تُنفّذ بتعليمات برمجية. فالتكرار المبين في العلاقة (11) مثلاً لايزال مستخدماً في بعض الحواسب العملاقة حتى يومنا هذا.

فبفرض أننا نريد حساب $\frac{a}{b}$ عندئذ يمكن حسابها من خلال الجداء $a\times\frac{1}{b}$، وهذا يتطلّب بدوره حساب المقلوب $\frac{1}{b}$، ويمكن حساب الأخير بشكل تقريبي باستخدام طريقة نيوتن، إذ إنَّ المقلوب يمثل جذراً للمعادلة:

$$f(x)=b-\frac{1}{x}=0 \quad ; \quad b>0 \tag{17}$$

ومشتق هذا التابع هو: $f'(x)=\frac{1}{x^2}$. ومنه فالعلاقة التكرارية في طريقة نيوتن هي:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{b-\frac{1}{x_n}}{\frac{1}{x_n^{\,2}}}$$

وهذه بدورها تُكتب بالشكل:

$$x_{n+1}=x_n(2-bx_n) \quad ; \quad n\geq 0 \tag{18}$$

وهنا نحتاج إلى عمليتي الضرب والطرح فقط، وعليه ليس هناك أي عائق أمام تنفيذها في الحواسب المذكورة آنفاً، أما القيمة التقريبية الابتدائية x_0 فيجب أن تكون أكبر من الصفر، وبالنسبة إلى الخطأ فإنه يمكن إثبات أن:

$$\mathrm{R}(x_{n+1})=\left[\mathrm{R}(x_n)\right]^2 \quad ; \quad n\geq 0 \tag{19}$$

حيث: $\mathrm{R}(x_n)=\frac{\alpha-x_n}{\alpha}$ هو الخطأ النسبي عندما نعدُ x_n قيمة تقريبية لـ $\alpha=\frac{1}{b}$.

نستنتج من (12) أنه يجب أن يتحقق: $\mathrm{R}(x_0)<1$ وإلا فإن الخطأ في x_n لن يقترب من الصفر مع ازدياد قيمة n. ويعني هذا الشرط:

التكرارية التالية يتناقص بسرعة كبيرة، ويمكن استخدام المعادلة (22) أيضاً للبرهان رياضياً على تقارب طريقة نيوتن.

مثال(12):

نجد في المثال(6) أنّ $f''(x)=30x^4$ ونلاحظ أنه في جوار الجذر α:

$$\frac{-f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \approx \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} = \frac{-30\alpha^4}{2(6\alpha^5-1)} = -2.42$$

ومنه فإن الخطأ في (15) يحقق:

$$\alpha - x_{n+1} \approx -2.42(\alpha - x_n)^2 \qquad (24)$$

هذا ما يسوّغ التقارب السريع في القيم التكرارية الأخيرة في الجدول 5. فمن أجل $n=3$ مثلاً وجدنا أنّ: $\alpha - x_3 = -4.73\times10^{-3}$، ويمكن التنبؤ من العلاقة (24) بأن: $\alpha - x_4 = -2.42(4.73\times10^{-3})^2 = -5.42\times10^{-5}$ وهي قيمة قريبة جداً من الخطأ الحقيقي: $\alpha - x_4 = -5.35\times10^{-5}$.

إذا افترضنا أن القيمة التكرارية x_n قريبة من الجذر α فإن الجداء في الطرف الأيمن من العلاقة (23) يمكن أن يكتب كما يلي:

$$\frac{-f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \approx \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} = M \qquad (25)$$

نستنتج :

$$\alpha - x_{n+1} \approx M(\alpha - x_n)^2; \qquad n \geq 0 \qquad (26)$$

بضرب الطرفين بـ M نحصل على:

$$M(\alpha - x_{n+1}) \approx [M(\alpha - x_n)]^2; \qquad n \geq 0 \qquad (27)$$

وبفرض أن جميع القيم التكرارية قريبة من α عندها يمكن أن نبين أن:

$$M(\alpha - x_{n+1}) \approx [M(\alpha - x_0)]^{2^n}$$

وبما أننا نريد أن يتقارب $(\alpha - x_n)$ من الصفر، فإنه يجب أن يكون:

$$|M(\alpha - x_0)| < 1$$

أي:
$$|(\alpha - x_0)| < \frac{1}{|M|} = \left|\frac{2f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\right| \qquad (28)$$

فإذا كانت القيمة $|M|$ كبيرة جداً فإنه يجب اختيار x_0 قريبة جداً من α كي نحصل على التقارب. وفي مثل هذه الحالات قد تكون طريقة تنصيف المجال أسهل في الاستخدام.

كما أن اختيار x_0 هام جداً للتحديد فيما إذا كانت طريقة نيوتن ستتقارب أم لا. لسوء الحظ لاتوجد استراتيجية واحدة تكون فعالة في جميع الحالات لاختيار x_0، إلا أنه وفي معظم الحالات تكون قيمة x_0 معرّفة بشكل طبيعي من المشكلة الأساسية التي قادت إلى حساب الجذر. وقد نحتاج في حالات أخرى إلى رسم الخط البياني $y = f(x)$ كما أنه قد نستخدم بعض الخطوات التكرارية من طريقة تنصيف المجال كي نقترب من الجذر.

5-3-3 تقدير الخطأ:

لتقدير الفرق $(x_n - \alpha)$ نلاحظ أن $f(\alpha) = 0$ وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطى:

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = f'(\xi_n)(x_n - \alpha)$$

وذلك من أجل ξ_n قيمة بين x_n وα، بحل هذه المعادلة وبفرض أن x_n قريبة جداً من α بحيث يكون $f'(x_n) \approx f'(\xi_n)$ نجد :

$$\alpha - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(\xi_n)} \approx \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وباستخدام العلاقة (8) نكتب:

$$\alpha - x_n \approx x_{n+1} - x_n \qquad (29)$$

لذا يمكن استخدام المقدار $|x_n - x_{n-1}|$ لتقدير الخطأ في طريقة نيوتن، وهي عادةً دقيقة بشكل كافٍ، أي نتوقف في طريقة نيوتن عندما يكون:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \qquad (30)$$

لكن وبما أنه من الممكن أن يكون $|x_n - x_{n-1}|$ صغيراً جداً في وقتٍ لا تزال فيه x_n

بعيدة عن الجذر (وهذا يتحقق عندما تكون $f'(x_n)$ كبيرة جداً بالمقارنة مع $f(x_n)$) فإننا نستعيض عن شرط التوقف $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ بالشرط الآتي:

$$|f(x_n)| + |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$$

ولكن هذا غير صحيح إذا كان $f'(\alpha) = 0$ ، وهذا ماسنناقشه في الفقرة (1-5) من هذا الفصل.

مثال(13):

بأخذ الخطأ في السطر الموافق لـ x_3 من الجدول 5 نجد:

$$\alpha - x_3 = -4.73 * 10^{-3}$$
$$x_4 - x_3 = -4.68 * 10^{-3} \qquad (31)$$

وهذا يبين مدى دقة العلاقة (29) في هذه الحالة.

4-3 طريقة القاطع The Secant Method:

من العيوب التي تؤخذ على طريقة نيوتن هي أن الصيغة التكرارية المستخدمة لحساب القيمة التقريبية للجذر تتطلب حساب قيمة مشتق التابع عند القيمة التي قبلها، لذا اعتمدت طريقة القاطع على المبدأ التالي:

نفترض أن هناك قيمتين تقريبيتين ابتدائيتين معروفتين للجذر α، ولنرمز لهما x_0 و x_1 . يمكن أن تكون هاتان القيمتان على جانبين مختلفين من α كما في الشكل 15 أو على الجانب نفسه من α كما في الشكل 16. تحدد النقطتان $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ من المنحني البياني $y = f(x)$ خطاً مستقيماً يدعى الخط القاطع. يمثل هذا الخط المستقيم تقريباً للمنحني $y = f(x)$ ونقطة تقاطعه مع محور السينات x_2 هي تقريب للجذر α.

ولاستنتاج معادلة لحساب x_2 نستخدم أسلوباً مشابهاً للأسلوب الذي استخدم في طريقة نيوتن: فنكتب معادلة المستقيم ، ثم نوجد جذر هذه المعادلة x_2. إن معادلة المستقيم المار بالنقطتين الابتدائيتين هي:

$$y = p(x) = f(x_1) + (x - x_1).\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

وبحل المعادلة $p\left(x_2\right) = 0$ نحصل على:

$$x_2 = x_1 - f(x_1).\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

بعد الحصول على x_2 يمكن أن نعيد الحساب من أجل x_1 و x_2 فنحصل على قيمة تقريبية أفضل للجذر x_3 ونتابع بهذا الشكل، فيكون:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n).\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad ; \quad n \geq 1 \qquad (32)$$

تعتمد طريقة القاطع على نقطتين؛ لأننا نحتاج عند البدء إلى قيمتين تقريبيتين كي نحصل على قيمة تقريبية أفضل، وكنا قد رأينا سابقاً أن طريقة تنصيف المجال أيضاً طريقة تعتمد على نقطتين ولكن طريقة القاطع ستتقارب في معظم الحالات بشكل أسرع من طريقة تنصيف المجال.

مثال(14):

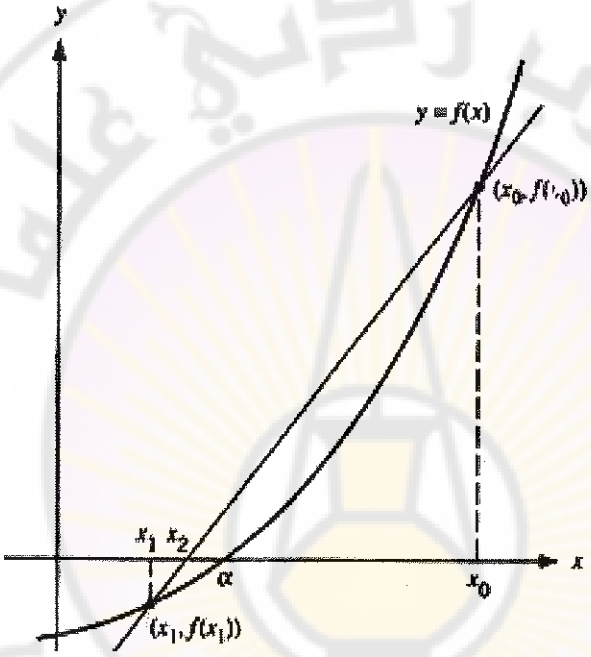
لنعاود حل المعادلة : $f(x) = x^6 - x - 1$ باستخدام طريقة القاطع.

يبين الجدول 10 النتائج بما فيها القيمة $(x_n - x_{n-1})$ كتقدير لـ $\alpha - x_{n-1}$. إن القيمة التكرارية x_8 تساوي α مقربة إلى تسعة أرقام معنوية. وكما هي الحال في طريقة نيوتن (الجدول 5) فإن القيم التكرارية لا تتقارب بسرعة في البداية، ولكن تتزايد سرعة التقارب مع اقتراب القيم التكرارية من α.

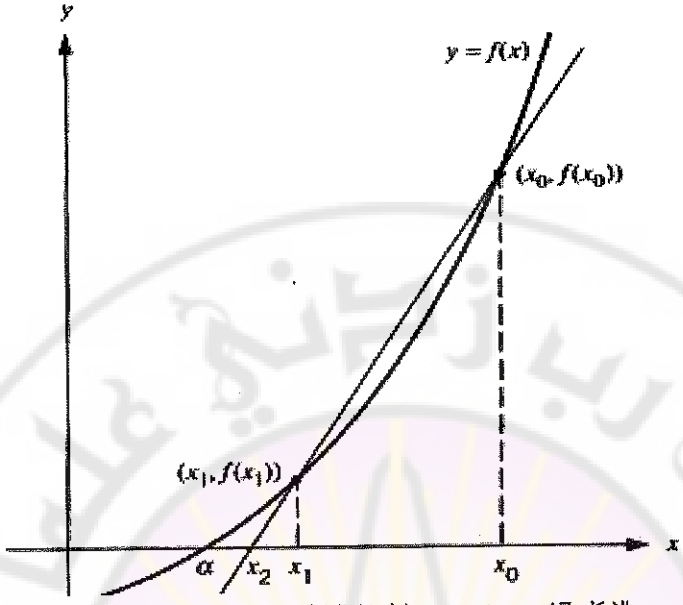
n	x_n	$f(x_n)$	$(x_n - x_{n-1})$	$\alpha - x_{n-1}$
0	2.0	- 61.0	.	.
1	1.0	-1.0	-1.0	.
2	1.01612903	-9.15×10^{-1}	1.161×10^{-2}	1.35×10^{-1}
3	1.19057777	6.57×10^{-1}	1.74×10^{-1}	1.19×10^{-1}
4	1.11765583	-1.68×10^{-1}	-7.29×10^{-2}	-5.59×10^{-2}
5	1.13253155	-2.24×10^{-2}	1.49×10^{-2}	1.71×10^{-2}

n	x_n	$f(x_n)$	$(x_n - x_{n-1})$	$\alpha - x_{n-1}$
6	1.13481681	9.54×10^{-4}	2.29×10^{-3}	2.19×10^{-3}
7	1.13472365	-5.07×10^{-6}	-9.32×10^{-5}	-9.27×10^{-5}
8	1.13472414	-4.00×10^{-9}	4.92×10^{-7}	4.92×10^{-7}

الجدول 10: طريقة القاطع من أجل إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = x^6 - x - 1 = 0$



الشكل 16: رسم توضيحي لطريقة القاطع في الحالة $x_1 < \alpha < x_0$



الشكل 17: رسم توضيحي لطريقة القاطع في الحالة $\alpha < x_1 < x_0$

1-4-3 تحليل الخطأ:

انطلاقاً من العلاقة (32) نجد أنّ:

$$\alpha - x_{n+1} = \alpha - x_n + f(x_n).\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \; ; \qquad n \geq 1$$

بإجراء بعض العمليات على الطرف الثاني من العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(\alpha - x_n)(\alpha - x_{n-1})\frac{f''(\xi_n)}{f'(\zeta_n)} \qquad (33)$$

حيث إن: $\min\{\alpha, x_n, x_{n-1}\} \leq \zeta_n, \xi_n \leq \max\{\alpha, x_n, x_{n-1}\}$. وكما هو واضح إن صيغة الخطأ في طريقة القاطع تشبه صيغة الخطأ في طريقة نيوتن المبينة في العلاقة (23). وهذا متوقع لأن طريقة القاطع يمكن أن تُعد تقريباً لطريقة نيوتن يتم فيها أخذ:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \qquad (34)$$

.3

$$|\alpha - x_n| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1| \quad ; \quad n \ge 0 \tag{42}$$

.4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha) \tag{43}$$

إذا كانت x_n قريبة من α فهي تحقق:

$$\alpha - x_{n+1} \approx g'(\alpha)(\alpha - x_n) \tag{44}$$

البرهان:

نلاحظ أنّ الفرضية التي يحققها g تسمح لنا باستخدام المبرهنة (4) لتأكيد وجود حل واحد على الأقل للمعادلة $g(x) = x$. بالإضافة إلى ذلك، فإنه استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى نجد أنه:

$$\forall \omega, z \in [a,b]: \quad g(\omega) - g(z) = g'(c)(\omega - z)$$

حيث إنّ cقيمة محصورة بين ω و z، وبالاستفادة من(41) نجد أنّ:

$$|g(\omega) - g(z)| = |g'(c)||\omega - z| \le \lambda|\omega - z| \quad ; a \le \omega, z \le b \tag{45}$$

نتابع الآن خطوات البرهان:

لنفرض جدلاً وجود حلين مختلفين α و βللمعادلة $g(x) = x$ عندها يكون:

$$g(\alpha) = \alpha \quad , \quad g(\beta) = \beta$$

ومنه نجد:

$$\alpha - \beta = g(\alpha) - g(\beta)$$

وبأخذ القيمة المطلقة واستخدام (38) نكتب:

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \le \lambda|\alpha - \beta|$$

$$(1-\lambda)|\alpha - \beta| \le 0$$

وبما أن λ مقدار موجب أصغر تماماً من الواحد فاستناداً إلى العلاقة السابقة يجب أن يكون $\alpha = \beta$، نستنتج أن للمعادلة $g(x) = x$ حل وحيد في المجال $[a,b]$.

و بما أن التابع يحقق (40) فإنه من أجل أي قيمة ابتدائية $x_0 \in [a,b]$ يتحقق ما يلي:

$$x_0 \in [a,b] \Rightarrow x_1 = g(x_0) \in [a,b] \Rightarrow$$
$$x_2 = g(x_1) \in [a,b] \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n) \in [a,b]$$

ولبرهان أن التكرار متقارب نقوم بطرح $x_{n+1} = g(x_n)$ من $g(\alpha) = \alpha$ لنحصل على:

$$\alpha - x_{n+1} = g(\alpha) - g(x_n) = g'(c_n)(\alpha - x_n) \tag{46}$$

من أجل قيمة ما c_n بين α و x_n. وباستخدام العلاقة (34) نحصل على:

$$|\alpha - x_{n+1}| \le \lambda |\alpha - x_n| \quad ; \quad n \ge 0 \tag{47}$$

ويمكن أن نبين بالاستقراء أنّ:

$$|\alpha - x_n| \le \lambda^n |\alpha - x_0| \quad ; \quad n \ge 0 \tag{48}$$

وبما أن $0 < \lambda < 1$ فإن الطرف الأيمن من العلاقة(41) يتناهى إلى الصفر عندما $n \to \infty$، وهذا يبين أنّ $x_n \to \alpha$ عندما $n \to \infty$.

بالاستفادة من خواص القيمة المطلقة ومن العلاقة (47) نجد أنّ:

$$\begin{aligned} |\alpha - x_0| &\le |\alpha - x_1| + |x_1 - x_0| \\ &\le \lambda |\alpha - x_0| + |x_1 - x_0| \\ (1-\lambda)|\alpha - x_0| &\le |x_1 - x_0| \\ |\alpha - x_0| &\le \frac{1}{(1-\lambda)} |x_1 - x_0| \end{aligned} \tag{49}$$

نعوض (49) في (48) فنحصل على المتراجحة المطلوبة:

$$|\alpha - x_n| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1| \quad ; \quad n \ge 0$$

استناداً إلى العلاقة (39) نكتب: $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n\to\infty} g'(c_n)$ حيث إنّ c_n قيمة بين α و x_n.

لكن نجد من(48) أنّ $x_n \to \alpha$،إذاً $c_n \to \alpha$، وبما أنّ g' تابع مستمر فرضاً،

فإننا نستنتج صحة(50):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n\to\infty} g'(c_n) = g'(\alpha) \qquad (50)$$

تعريف(1):

نقول إنّ المتتالية $\{x_n\}_{n\geq 0}$ متقاربة من α برتبة تقارب $p \geq 1$ إذا تحقق:

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p \; ; \qquad n \geq 0$$

وذلك من أجل $c \geq 0$.

إذا كانت $p=1$ أو $p=2$ أو $p=3$ عندئذ نقول عن التقارب إنه تقارب خطي أو تربيعي أو تكعيبي على الترتيب. وكما رأينا سابقاً يكون تقارب طريقة نيوتن عادة تربيعياً، وتكون رتبة تقارب طريقة القاطع $p=(1+\sqrt{5})/2$. أمّا في التقارب الخطي فإنّنا نضع شرطاً إضافياً ألا وهو أن تكون $c<1$ ، لأنه في خلاف ذلك لن يسعى الخطأ $\alpha - x_n$ إلى للصفر.

<u>ملاحظة:</u>

إذا كان $|g'(\alpha)|<1$ في المبرهنة (5) عندها تبين المعادلة (47) أن القيم التكرارية x_n تتقارب خطياً. إلا أنّه ومن الناحية العملية نادراً ما نستخدم المبرهنة (5) ، وذلك لأنه من الصعب إيجاد مجال $[a,b]$ يكون فيه الشرط (40) محققاً. لذا تتم الاستعانة بـ (46) التي تبين كيفية تغير الخطأ عندما تكون القيم التكرارية x_n بجوار الجذر α.

مبرهنة (6):

بفرض أن g, g' تابعان مستمران على المجال $]c,d[$ ، وبفرض α نقطة ثابتة للتابع g في المجال السّابق تحقق:

$$|g'(\alpha)|<1 \qquad (51)$$

عندئذٍ تتقارب الطريقة التكرارية $x_{n+1} = g(x_n)$ من الجذر α أيّاً كانت القيمة التقريبية الابتدائية x_0 ويكون:

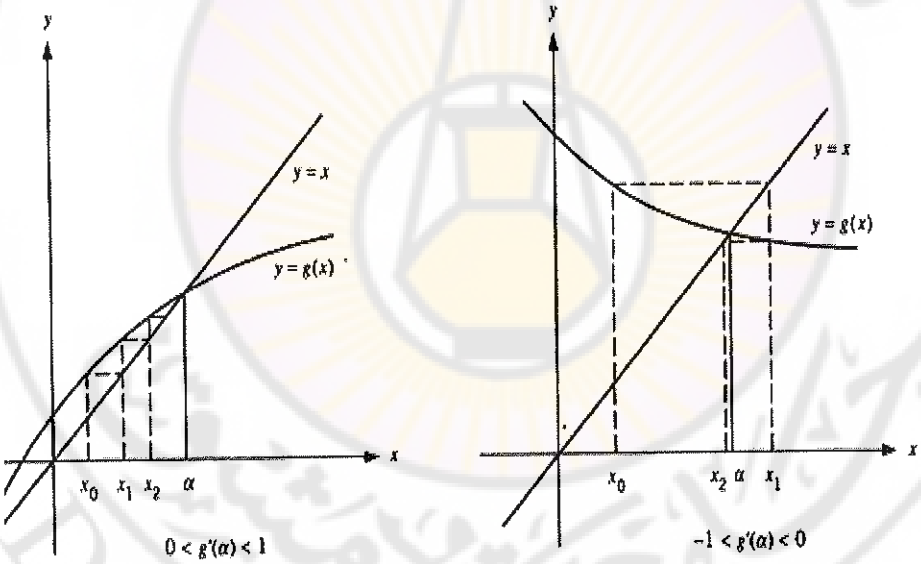
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha)$$

ومن أجل أي قيمة $\lambda < 1$ تتحقق المتراجحة:

$$|\alpha - x_n| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1| \quad ; \quad n \ge 0$$

<u>ملاحظة:</u>

لا تتقارب الطريقة التكرارية $x_{n+1} = g(x_n)$ من الجذر α في الحالة التي تكون فيها $|g'(\alpha)| > 1$، أمّا عندما تكون $|g'(\alpha)| = 1$ عندئذٍ لا يمكن أن نجزم بعدم تقارب الطريقة التكرارية، إذ إنّه من الممكن أن تتقارب إلا أنها حتى لو تقاربت فإن تقاربها سيكون بطيئاً جداً وعليه لن تكون الطريقة التكرارية عملية آنذاك، ويوضح الشكل 19 أربع حالات مختلفة لمشتق التابع g.



$$\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \qquad (54)$$

ولتبيان أن هذا التقدير لقيمة λ سيزداد دقة عندما $n \to \infty$ نكتب باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى:

$$\lambda_n = \frac{g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} = g'(c_n)$$

حيث إنّ: $\min\{x_{n-1} - x_{n-2}\} \le c_n \le \max\{x_{n-1} - x_{n-2}\}$، وبما أن $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ فإن $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$، لكن g' مستمر إذاً $\lim_{n\to\infty} g'(c_n) = g'(\alpha)$. وعليه فإن

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$$

بدمج (53) مع (54) نحصل على:

$$\alpha \approx x_n + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1}) \qquad (55)$$

وتدعى هذه العلاقة "صيغة إيتكن للاستيفاء". ويمكننا أن نكتب بشكل مكافئ:

$$\alpha - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1}) \qquad (56)$$

وهذا هو "تقدير إيتكن للخطأ"، ويمكن استخدام هذه العلاقة لتقدير الخطأ في القيم التكرارية الأصلية $\{x_n\}$ أو يمكن استخدام المعادلة (55) للحصول على متتالية متقاربة بشكل أسرع.

مثال(18):

نكرر مثال 17 من أجل العلاقة التكرارية I_3، فنأخذ الفروقات $|x_n - x_{n-1}|$والنسب λ_n كما نحسب القيمة التقديرية للخطأ من العلاقة (56) كما هو موضح في العمود الأخير من الجدول 13.

تأمل الجدول 13 ثم قارن العمود الأخير فيه مع عمود الخطأ في الجدول 12

n	x_n	$x_n - x_{n-1}$	λ_n	$\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1})$
0	2.5			
1	2.25	-2.50×10^{-1}		
2	2.2375	-1.25×10^{-2}	0.0500	-6.58×10^{-4}
3	2.2362188	-1.28×10^{-3}	0.1025	-1.46×10^{-4}
4	2.2360839	-1.35×10^{-4}	0.1053	-1.59×10^{-5}
5	2.2360697	-1.42×10^{-5}	0.1055	-1.68×10^{-6}
6	2.2360682	-1.50×10^{-6}	0.1056	-1.77×10^{-7}
7	2.236068	-1.59×10^{-7}	0.1056	-1.87×10^{-8}

الجدول 13: حسابات العلاقة التكرارية $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{5}x_n^2$ وتقدير آيتكن للخطأ

5-رتبة تقارب الصيغ التكرارية:

يمكن أن تكون رتبة تقارب الطرائق التكرارية خطية أو تربيعية أو تكعيبية أوحتى من مراتب أعلى، ولكن السؤال ما هي الشروط التي يجب أن تحققها الطرائق التكرارية ليكون لها رتبة تقارب معينة؟ إن الإجابة في المبرهنة التالية:

مبرهنة (7):

ليكن لدينا تكرار النقطة الثابتة التالي: $x_{n+1} = g(x_n)$، حيث إنّ g تابع قابل للاشتقاق باستمرار حتى المرتبة p ، ويحقق أنّ $\alpha = g(\alpha)$، عندئذٍ إذا كان:

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{و} \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

فإنّ المتتالية التكرارية $x_{n+1} = g(x_n)$ تتقارب من أجل أية قيمة ابتدائية x_0قريبة بشكلٍ كافٍ من الجذر α، وتكون رتبة تقاربها تساوي p ، بل وتحقق أيضاً:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1}\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!} \qquad (57)$$

البرهان:

بما أنّ $g'(\alpha)=0<1$ فهذا يعني أن التكرار سيتقارب بشكلٍ كافٍ من الجذر حسب المبرهنة(5)، وعليه لم يتبقَ سوى تحديد رتبة التقارب. نستخدم مبرهنة تايلور للتابع g في جوار النقطة α فنجد:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n) \\ &= g(\alpha)+(x_n-\alpha)g'(\alpha)+\ldots+\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n) \\ &= \alpha+0+\ldots+0+\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n) \end{aligned}$$

حيث ξ_n قيمة محصورة بين x_n و α أي:

$$\alpha-x_{n+1}=-\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n)$$

وعليه يكون:

$$|\alpha-x_{n+1}|\le(-1)^{p-1}c|x_n-\alpha|^p$$

حيث:

$$c=\max_{x\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]}\frac{\left|g^{(p)}(\alpha)\right|}{p!}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-x_{n+1}}{(\alpha-x_n)^p}=(-1)^{p-1}\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

مثال(19):

من الممكن أن نبيّن اعتماداً على المبرهنة السابقة الشروط التي يكون لأجلها تقارب طريقة نيوتن تربيعياً:

نعلم أنّ:

$$x_{n+1}=g(x_n),\quad g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{58}$$

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

ومنه:

$$=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

فإذا كان $f'(\alpha) \neq 0$ فإنّ: $g'(\alpha) = 0$.

وبالمثل نجد: إذا كان $f''(\alpha) \neq 0$ فإنّ: $g''(\alpha) \neq 0$.

من هنا نجد أنّ رتبة تقارب طريقة نيوتن تكون تربيعية عندما يكون:

$f'(\alpha) \neq 0$ و $f''(\alpha) \neq 0$.

6- إيجاد جذور المسائل ذات الوضع السيئ:

افترضنا خلال دراستنا السابقة أنّ $f'(\alpha) \neq 0$ ، وكانت سرعة تقارب كل من طريقتي نيوتن والقاطع تعتمد على هذه الفرضية، لكن ما الذي سيحدث إن لم يكن هذا الشرط محققاً، هذا ما سنقوم بعرضه في هذه الفقرة، إذ نلاحظ من خلالها أن كلاً من طريقتي نيوتن والقاطع ستحافظ على تقاربها من الجذر لكن ليس بالسرعة المتوقعة نفسها .

6-1. مسائل إيجاد جذور مضاعفة:

تعريف (2):

نقول عن α إنّه جذر مضاعف من المرتبة m للتابع f إذا حقق:

$$f(x) = (x - \alpha)^m . h(x) \qquad (59)$$

حيث إنّ h تابع مستمر عند $x = \alpha$ وتحقق $h(\alpha) \neq 0$ ، و m عدد صحيح موجب.

فإذا كان التابع f قابلاً للاشتقاق عدداً كافياً من المرات في جوار $x = \alpha$ عندئذٍ يكون التعريف السابق مكافئاً لما يلي:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = ... = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \qquad (60)$$

فإذا كانت $m = 1$ دعونا الجذر عندئذٍ جذراً بسيطاً.

مثال(20):

التابع	الجذر	مرتبة الجذر
$f(x) = (x-1)^2(x+2)$	$\alpha = 1$	$m = 2$
	$\alpha = -2$	$m = 1$

2-6.استقرار الجذور:

في معظم التوابع عندما نرتكب خطأ صغيراً في حساب قيمة التابع فإن الجذر سيتغير بمقدار صغير، إلا أنّ هناك عدداً من التوابع التي لا تحقق هذه الخاصة، أي قد نصادف بعض التوابع التي يؤدي فيها الخطأ الصغير الناتج عن حساب قيمة التابع $f(x)$ إلى تغير كبير في قيمة جذر هذا التابع، لذا ندعو عملية إيجاد جذور مثل هذه التوابع بالمسألة غير المستقرة، وسنعطي مثالاً مشهوراً على هذه التوابع ثم نعود لتحليل مسائل إيجاد الجذور غير المستقرة.

مثال(23):

ليكن:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5x)(x-6)(x-7) \\ &= x^7 - 28x^6 + 322x^5 - 1960x^4 + 6769x^3 - 13132x^2 \\ &\quad + 13068x - 5040 \end{aligned} \tag{65}$$

نجري تغييراً بسيطاً في أمثال x^6 لتصبح -28.002 عوضاً عن -28 وندعو التابع الجديد $F(x)$. إن هذا التغيير في المعامل صغير نسبياً إذ إنَّ:

$$|R(28.002)| = \frac{0.002}{28} = 7.14\times10^{-5} \tag{66}$$

إن جذور $f(x)$ هي $\{1,2,3...,7\}$. يبين الجدول 15 جذور التابع $F(x)$ بعد التدوير إلى ثماني مراتب معنوية. نلاحظ أنّ بعض هذه الجذور بعيدة عن جذر $f(x)$ الموافق لها مع أن التغيير من $f(x)$ إلى $F(x)$ كان صغيراً نسبياً، كذلك إن إجراء أي تغيير مشابه لمعاملات $f(x)$ سينتج عنه نفس الاعتلال في الجذور.

جذر $f(x)$	جذر $F(x)$	الخطأ
1	1.0000028	-2.8×10^{-6}
2	1.9989382	1.1×10^{-3}
3	3.0331253	-3.3×10^{-2}
4	3.8195692	0.18

جذر $f(x)$	جذر $F(x)$	الخطأ
5	5.4586758+0.54012578i	-0.46-0.54i
6	5.4586758-0.54012578i	0.54+0.54i
7	7.2330128	-0.23

الجدول 15: جذور f(x) و F(x).

من أجل مناقشة تقريب حساب قيم التابع $f(x)$ لنعرّف التابع المشوش (المضطرب) perturbed

$$F_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\, g(x) \tag{67}$$

حيث إنّ $g(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق، و ε عدد صغير نسبياً، ومن أجل α صغيرة يكون التابعان $F_\varepsilon(x)$ و $f(x)$ متطابقين تقريباً.

مثال(24):

إنّ المثال السابق فيه:

$$F_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\, g(x)$$

حيث: $\varepsilon = -0.002, \quad g(x) = x^6$ (68)

إن جذور التابع $F_\varepsilon(x)$ تعتمد على قيمة ε وسنرمز للجذر بـ $\alpha(\varepsilon)$، وعندئذٍ فإن الجذر الأصلي للتابع $f(x)$ هو $\alpha(0)$. لتبسيط المناقشة سنفترض أن $\alpha(0)$ هو جذر بسيط للتابع $f(x)$، ومنه $f'(\alpha(0)) \neq 0$، باستخدام هذه الفرضيات يمكن استخدام تقريب تايلور لتقدير قيمة $\alpha(\varepsilon)$ من أجل ε صغير نسبياً.

$$\alpha(\varepsilon) \approx \alpha(0) + \varepsilon\, \alpha'(0) \tag{69}$$

ونلاحظ أننا بحاجة إلى حساب $\alpha'(0)$.

بما أن $\alpha(\varepsilon)$ هو جذر للتابع $F_\varepsilon(x)$ فإنه من أجل قيم صغيرة لـ ε يكون:

$$f(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon\, g(\alpha(\varepsilon)) = 0 \tag{70}$$

باشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة إلى ε نجد:

$$f'(\alpha(\varepsilon))\, \alpha'(\varepsilon) + g(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon\, g'(\alpha(\varepsilon))\, \alpha'(\varepsilon) = 0 \tag{71}$$

نعوض $\varepsilon = 0$ فنحصل على:

$$f'(\alpha(0))\,\alpha'(0) + g(\alpha(0)) = 0$$

وبحلّ هذه المعادلة بالنسبة إلى $\alpha'(0)$ نجد:

$$\alpha'(0) = -\frac{g(\alpha(0))}{f'(\alpha(0))} \tag{72}$$

نعوض هذه القيمة في (69) فنحصل، من أجل ε صغيرة نسبياً، على:

$$\alpha(\varepsilon) \approx \alpha(0) - \varepsilon\,\frac{g(\alpha(0))}{f'(\alpha(0))} \tag{73}$$

فإذا كان المشتق $\alpha'(0)$ كبيراً جداً عندها سيتم تضخيم تأثير أي تغير صغير ε على الجذر.

مثال(25):

لنأخذ الجذر $\alpha(0) = 4$ للحدودية $f(x)$ المعطاة بالعلاقة (65). عندئذ نجد باستخدام تعريف $F_\varepsilon(x)$ المبين في (69) أنّ:

$$\begin{aligned} &f'(4) = (4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)(4-7) = -36 \\ &g(4) = 4^6 = 4096 \\ &\alpha'(0) = -\frac{4096}{-36} = 114 \\ &\alpha(\varepsilon) \approx 4 + 114\varepsilon \end{aligned} \tag{74}$$

وهذا يبين أن أي تغير صغير ε يؤثر في الجذر $\alpha(0) = 4$ بشكل كبير. ومن أجل ε المعطى في المثال في (23) يكون:

$$\alpha(\varepsilon) \approx 4 + 114(-0.002) = 3.772$$

و تساوي هذه القيمة تقريباً الجذر (3.820) الموجود في الجدول 15، لكن هذا لايمكن أن يكون صحيحاً من أجل جميع النتائج، فمثلاً القيم الموافقة للجذرين $x = 5$ و $x = 6$ والواردة في الجدول 15.

إن إيجاد جذور حدودية مثل العلاقة (65) هي مسألة غير مستقرة، ولا يوجد ما يمكن فعله بخصوص هذه المسألة سوى استخدام حسابات أعلى دقة، فالصعوبة الأساسية تكمن في الصيغة الأصلية للمعادلة التي نرغب بحلها. وغالباً يوجد أسلوب

آخر لمقاربة المسألة المدروسة يتجنب السلوك غير المستقر لها.

7- جذور الحدوديات Roots of polynpmials:

تُعطى الحدودية $p(x)$ من الدّرجة n بالشكل:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (75)$$

فإذا أردنا حساب قيمة الحدودية:

$$p_5(x) = 4x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 9$$

بالطريقة المألوفة عند $x = 3$ مثلاً، فإننا نقوم بحساب جميع الجداءات $(4.(3)^5$ و $3.(3)^4$ و...) ومن ثمّ نقوم بجمع المقادير الناتجة، ويؤخذ على هذه الطريقة أنه يتوجّب علينا فيها عند حساب أي قوة لـx أن نمر بجميع القوى السابقة مما يجعل عدد العمليات الحسابية اللازمة كبيراً جداً.

نعرض فيما يلي طريقة هورنر التي استطاعت التغلب على هذه المشكلة من خلال حساب قوى x بطريقة تعاودية يتم فيها حساب x^n بالشكل: $x^n = x.x^{n-1}$ ونقدم في الفقرة التالية شرحاً أكثر تفصيلاً لهذه الطريقة.

7-1. طريقة هورنر :

تُعد طريقة هورنر تقنية حسابية تستخدم في إيجاد قيمة حدودية ماعند قيم محددة، وتعتمد هذه الطريقة بشكل رئيسي على كتابة الحدودية على شكل سلسلة من الجداءات المتداخلة، فيمكن كتابة الحدودية من الدرجة n بالشكل الآتي:

$$p_n(x) = ((\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0 \qquad (76)$$

يتطلب حساب قيمة الحدودية $p_n(x)$ باستخدام هذه الصيغة n عملية جمع و n عملية ضرب، في حين أن حساب قيمتها باستخدام الصيغة (75) يستلزم n عملية جمع و $2n-1$ عملية ضرب، وتفيد الصيغة (76) في تخفيض عدد العمليات الحسابية اللازمة وعليه في تخفيض كلفة الخوارزمية المتبعة.

مبرهنة(8): (طريقة هورنر في حساب الحدوديات):

بفرض $p(x)$ حدودية من الدرجة n معرفة بالعلاقة (75)، وبفرض $x = c$ هي النقطة المراد حساب قيمة الحدودية عندها. إذا أخذنا $b_n = a_n$ وأوجدنا القيم التالية:

$$b_k = a_k + cb_{k+1}\,; \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0 \tag{77}$$

كانت $b_0 = p(c)$ بل وأكثر من ذلك إذا عرّفنا $Q_0(x)$ بالشكل الآتي:

$$Q_0(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1 \tag{78}$$

فإنه يكون:

$$p(x) = (x-c)Q_0(x) + R_0 \tag{79}$$

حيث إن $Q_0(x)$ هي حدودية من الدرجة $n-1$ وتدعى خارج القسمة، أما باقي القسمة فهو: $R_0 = b_0 = p(c)$.

البرهان:

نأخذ العلاقة (79) فنعوّض $Q_0(x)$ بما يساويها من العلاقة (78) كما نبدّل b_0 بـ R_0 فنجد أنّ:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1) + b_0 \\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - cb_n) x^{n-1} + \ldots \\ &\quad + (b_2 - cb_3) x^2 + (b_1 - cb_2) x + (b_0 - cb_1) \end{aligned} \tag{80}$$

وهكذا يمكن تحديد الأعداد b_k من خلال المقارنة بين المعاملات في العلاقتين(80) و (75) كما يوضح الجدول التالي:

b_k	المقارنة بين(80) و (75)	x^k
$b_n = a_n$	$a_n = b_n$	x^n
$b_{n-1} = a_{n-1} + cb_n$	$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_n$	x^{n-1}

b_k	المقارنة بين(80) و (75)	x^k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$b_k = a_k + cb_{k+1}$	$a_k = b_k - cb_{k+1}$	x^k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$b_0 = a_0 + cb_1$	$a_0 = b_0 - cb_1$	x^0

أما $p(c) = b_0$ فيمكن الحصول عليها مباشرة من خلال تعويض $x = c$ و $R_0 = b_0$ في العلاقة (79): $p(c) = (c-c)Q_0(c) + R_0 = b_0$

<u>خوارزمية طريقة هورنر:</u>

يمكن استخدام الحاسوب في إيجاد القيم b_k المعطاة بالعلاقة (77) من خلال الخوارزمية التالية:

$$
\begin{aligned}
& b(n) = a(n); \\
& for\ \ k = n-1:-1:0 \\
& \quad b(k) = a(k) + c * b(k+1); \\
& end
\end{aligned}
$$

أمّا عند إنجاز طريقة هورنر يدوياً فإنه من الأفضل ترتيب القيم a_k و b_k كما يلي:

$\Rightarrow c$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_k	$\dots$	a_2	a_1	a_0
		cb_n	cb_{n-1}	$\dots$	cb_{k+1}	$\dots$	cb_3	cb_2	cb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_k	$\dots$	b_2	b_1	$b_0 = p(c) \Rightarrow$

مثال(26):

استخدم طريقة هورنر لإيجاد $p(3)$ من أجل الحدودية:

$$p(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

$\Rightarrow$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$c = 3$	1	-6	8	8	4	-40
		3	-9	-3	15	57
	1	-3	-1	5	19	$17 = p(3) = b_0$
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	$\Rightarrow$

ملاحظة: نجد من العلاقة (79) أنه حتى يكون $x = c$ جذراً للمعادلة $p(x) = 0$ يجب أن يتحقق: $b_0 = 0$.

مثال(27):

أوجد جذور المعادلة: $p(x) = x^3 - 19x + 30 = 0$.

الحل:

إن الجذور الحقيقية المتوقعة لهذه المعادلة هي قواسم العدد 30 أي:

$$\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 5, \mp 10, \mp 15, \mp 30$$

لذا نبحث عن هذا الجذر بطريقة هورنر:

	1	0	-19	30
$x = 1$		1	1	-18
	1	1	-18	$b_0 = 12$
				$x = 1$ ليست جذراً

	1	0	-19	30
$x = -1$		-1	1	18
	1	-1	-18	$b_0 = 48$
				$x = -1$ ليست جذراً

	1	0	-19	30
$x = 2$		2	4	-30
	1	2	-15	$b_0 = 0$
معاملات $Q_0(x)$				$x_1 = 2$ الجذر الأول

ومنه: $p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 15)$

نوجد الآن الجذور الأخرى التي هي جذور الحدودية التربيعية $Q_0(x)$:

$$x_2 = x_3 = -1 \mp \sqrt{1 + 15} = -1 \mp 4$$

ومنه: $p(x)=(x-2)(x-3)(x+5)$

<u>تطبيق طريقة نيوتن في إيجاد جذور الحدوديات:</u>

وجدنا أنه عند إيجاد جذور تابع باستخدام طريقة نيوتن لابدّ من حساب قيمة هذا التابع ومشتقه الأول عند نقطة البدء، لذا نبحث انطلاقاً من العلاقة (79) عن مشتق الحدودية فنجد أنّ:

$$p'(x)=(x-c)Q_0'(x)+Q_0(x)$$

ومنه:

$$p'(c)=Q_0(c)$$

يمكن حساب جذور الحدودية بطريقة نيوتن باستخدام الخوارزمية التالية التي تمكننا من حساب قيمتي $p(x_0)$ و $p'(x_0)$ حيث x_0 هي القيمة التقريبية الابتدائية للجذر.

<u>خوارزمية طريقة هورنر في حساب الجذر:</u>

INPUT coeff's$(a_0,a_1,\ldots,a_n)$;x_0 and degree(m)

STEP 1 $y=a_n, z=a_n$

STEP 2 *for* $j=n-1,n-2,\ldots,1$

$y=x_0y+a_j$

$z=x_0z+y$

STEP 3 Set $y=x_0y+a_0$

STEP 4 output(x,y)

STEP 5 End.

مثال(28):

أوجد قيمة تقريبية لإحدى جذور الحدودية:

$$p(x) = 4x^4 + 13x^3 - x + 8$$

الحل:

$x_1 = -3.1951$	4	13	0	-1	8
		−12.7805	-0.7013	2.2408	-3.9646
	4	0.2195	-0.7013	1.2408	$p(x_1) = 4.0354$
		−12.7805	40.1339	-125.9921	
	4	−12.5610	39.4326	$-124.7513 = Q_0(x_1) = p'(x_1)$	

إذاً:

$$p(-3.1951) \approx 4.0354, \qquad p'(-3.1951) \approx -124.7513$$

وبتطبيق طريقة نيوتن نجد أنّ:

$$x_2 = -3.1951 - \frac{4.0354}{-124.7513} \approx -3.1628$$

نستمر بهذه الطريقة إلى أن نصل إلى قيمة تقريبية للجذر الأول بخمسة أرقام معنوية: $\hat{x}_1 = -3.16171$.

نلاحظ أن الحدودية $Q_0(x)$ تعتمد على التقريب المستخدم ، وتتغير من تكرار إلى آخر.

فإذا كان $\hat{x}_1 = x_N$ هو القيمة التقريبية لجذر الحدودية الأول الناتج عن استخدام طريقة نيوتن عندئذٍ تكون:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \hat{x}_1)Q_1(x) + b_0 = (x - \hat{x}_1)Q_1(x) + p(x_N) \\ &\approx (x - \hat{x}_1)Q_1(x) \end{aligned}$$

نستطيع حساب القيمة التقريبية للجذر الثاني من خلال تطبيق طريقة نيوتن على $Q_1(x)$. فإذا كانت $p(x)$ حدودية من الدرجة n لها n جذرٌ حقيقيٌ عندئذٍ يمكن تكرار طريقة هورنر باستخدام طريقة نيوتن $(n-2)$ مرة للحصول على قيم تقريبية للجذور $(n-2)$الأولى والعامل $Q_{n-2}(x)$ للحدودية $p(x)$. أما جذور الحدودية $Q_{n-2}(x)$ التي تمثل جذوراً تقريبية للحدودية $p(x)$ فيمكن إيجادها من

خلال إيجاد جذري الحدودية التربيعية $Q_{n-2}(x)$ بالطريقة المألوفة، لكنه وعلى الرغم من استخدام هذه الطريقة لإيجاد قيمة تقريبية لجميع الجذور، إلا أنها قد تؤدي إلى نتائج غير دقيقة تماماً؛ لأن عملية إيجاد أي جذر تعتمد على قيم تقريبية ناتجة عن حساب الجذر الذي قبله.

تعرف هذه الإجرائية باسم (التقليص deflation)، ويعود سبب عدم دقة الجذور في هذه الطريقة إلى أنه لدى إيجادنا جذور الحدودية $p(x)$ نستخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذور الحدودية الناتجة $Q_k(x)$ وهذا يعني أن:

$$P(x) \approx (x-\hat{x}_1)(x-\hat{x}_2)\ldots(x-\hat{x}_k)Q_k(x)$$

ومنه فالجذر التقريبي $\hat{x}_{k+1}$ للحدودية $Q_k(x)$ لن يكون جذراً للحدودية $p(x)=0$، وإن الخطأ في حساب هذا الجذر سيزداد مع ازدياد قيمة k، ولكي ننقص من هذا الخطأ الناتج ما علينا سوى أن نوجد القيم التقريبية $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_k$ لجذور الحدودية $P(x)$ ومن ثم نقوم بتحسين هذه القيم من خلال تطبيق طريقة نيوتن على الحدودية $P(x)$ نفسها.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل بدقة 10^{-4} للمسائل التالية:

a) $x^3-2x^2-5=0,\quad [1,4]$ b) $x^3+3x^2-1=0,\quad [-3,-2]$

c) $x-\cos x=0,\quad [0,\pi/2]$ d) $x-0.8-0.2\sin x=0,\quad [0,\pi/2]$

2- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل بدقة 10^{-5} للمسائل التالية:

a) $e^x+2^{-x}+2\cos x-6=0$ ، $1\le x\le 2$

b) $\ln(x-1)+\cos(x-1)=0$ ، $1.2\le x\le 2$

c) $2x\cos 2x-(x-2)^2=0$ ، $(2\le x\le 3)\wedge(3\le x\le 4)$

d) $(x-2)^2-\ln x=0$ ، $(1\le x\le 2)\wedge(e\le x\le 4)$

e) $e^x-3x^2=0$ ، $(0\le x\le 1)\wedge(3\le x\le 5)$

f) $\sin x-e^{-x}=0$ ، $(0\le x\le 1)\wedge(3\le x\le 4)\wedge(6\le x\le 7)$

3- أعد التمرين (1) مستخدما:

a) طريقة القاطع.

b) طريقة الوضع الخاطئ.

4- أعد التمرين (2) مستخدما:

a) طريقة القاطع.

b) طريقة الوضع الخاطئ.

5- استخدم طريقة نيوتن لتقريب بدقة 10^{-4}، قيمة x التي تعين النقطة الواقعة على خط بيان $y=x^2$ والأكثر قربا من النقطة $(1,0)$[أوجد النهاية الصغرى لـ $[d(x)]^2$ حيث $d(x)$ يمثل البعد بين النقطتين (x,x^2) و $(1,0)$].

6- استخدم طريقة نيوتن لتقرب بدقة 10^{-4}، قيمة x التي تعين النقطة الواقعة على خط بيان $y=\frac{1}{x}$ والأكثر قرباً من النقطة $(1,2)$.

7- استخدم طريقة نيوتن لحل المعادلة:

$$0=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2-x\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x \quad ، \quad x_0=\frac{\pi}{2}$$

كرر استخدام طريقة نيوتن حتى تحصل على الدقة 10^{-5}. فسر لماذا تظهر النتائج غير مألوفة بالنسبة لطريقة نيوتن. حل أيضاً المعادلة بفرض $x_0=5\pi$ وبفرض $x_0=10\pi$.

8- لكثيرة الحدود من الدرجة الرابعة:

$$f(x)=230x^4+18x^3+9x^2-221x-9$$

جذران حقيقيان يقع أحدهما في المجال $(-1,0)$ ويقع الثاني في المجال $(0,1)$. حاول تقريب هذين الجذرين بدقة 10^{-6} مستخدماً:

a) طريقة الوضع الخاطئ.

b) طريقة القاطع.

c) طريقة نيوتن.

استخدم طرفي كل مجال كتقريب أولي في (a) و(b) والنقطة المنصفة كتقريب أولى في (c).

9- للتابع $f(x)=\tan \pi x-6$ جذر عند $(1/\pi)arc\tan 6\approx 0.447431543$. افرض $x_0=0$ و $x_1=0.48$ واستخدم عشرة تكرارات لكل من الطرائق التالية لتقريب هذا الجذر. أيُّ طريقة من هذه الطرائق أكثر نجاحاً ولماذا؟

a) طريقة التنصيف.

b) طريقة الوضع الخاطئ.

c) طريقة القاطع.

10- استخدم جميع الطرائق القابلة للتطبيق لإيجاد جميع حلول المعادلة:

$$x^2 + 10\cos x = 0$$

بدقة 10^{-5}

11- استخدم جميع الطرائق القابلة للتطبيق لإيجاد أربعة حلول بدقة 10^{-5} للمعادلة:

$$4x\cos 2x - (x-2)^2 = 0 \quad \text{عند} \quad 0 \le x \le 8$$

12- للتابع المعرفة بالعلاقة $f(x) = \ln(x^2+1) - e^{0.4x}\cos \pi x$ عدد غير منته من الأصفار.

a) أوجد بدقة 10^{-6} الجذر السالب الوحيد.

b) أوجد بدقة 10^{-6} أصغر أربعة أصفار موجبة.

c) عين تقريباً أولياً معقولاً لإيجاد الصفر الموجب لـ $f(x)$ ذي الترتيب n في الصغر (إرشاد: ارسم خطاً بيانياً تقريبياً لـ $f(x)$).

d) استخدم الجزء (c) لتعيين الصفر الموجب لـ $f(x)$ ذي الترتيب 25 في الصغر.

13- أوجد تقريباً لـ λ بدقة 10^{-4} من المعادلة السكانية :

$$1,564,000 = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right)$$

ثم استخدم هذه القيمة للتنبؤ بعدد السكان في نهاية السنة الثانية، وذلك بفرض أن

معدل الهجرة خلال هذه السنة يبقى عند 435000 فرد في السنة.

14- مجموع عددين 20 وإذا أضيف كل منهما إلى جذره التربيعي فإن جداء الناتجين يساوي 155.55، عين هذين العددين بدقة 10^{-4}.

15- استخدم طريقة التقريب المتالي للنقطة الثابتة لإيجاد جذر التابع:

$$f(x) = 2\sin(\sqrt{x}) - x$$

باستخدام نقطة البداية $x_0 = 0.5$ والتقريب إلى $\varepsilon_a \le 0.001\%$

16- عين الجذر الحقيقي الأكثر دقة للتابع:

$$f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x - 5$$

باستخدام:

a) الطريقة البيانية.

b) طريقة النقطة الثابتة (مكتفياً بثلاثة تقريبات، $x_0 = 3$). ملاحظة: تأكد من تقارب الجذور.

c) طريقة نيوتن رافسون (مكتفياً بثلاثة تقريبات، $x_0 = 3$).

d) طريقة القاطع (مكتفياً بثلاثة تقريبات، $x_{-1} = 3, x_0 = 4$).

e) طريقة القاطع المعدلة(مكتفياً بثلاثة تقريبات، $\delta = 0.01, x_0 = 3$).

ثم احسب الخطأ النسبي المئوي للنتائج.

17- استخدم :

a) طريقة النقطة الثابتة.

b) طريقة نيوتن رافسون

لتعيين جذر التابع:

$$f(x) = -x^2 + 1.8x - 2.5$$

باستخدام $x_0 = 5$ إلى أن تصل إلى $\varepsilon_a < 0.05\%$. واحسب الخطأ عند القيمة النهائية.

18- أوجد الجذور الحقيقية للتابع:

$$f(x) = -1 + 5.5x - 4x^2 + 0.5x^3$$

باستخدام:

a) الطريقة البيانية.

b) طريقة نيوتن من أجل $\varepsilon_s = 0.01\%$

19- أوجد الجذر الحقيقي الأكثر دقة للتابع:

$$f(x) = 0.95x^3 - 5.9x^2 + 10.9x - 6$$

مستخدماً:

a) الطريقة البيانية.

b) طريقة نيوتن (مكتفياً بثلاثة تقريبات، $x_i = 3.5$).

c) طريقة القاطع (مكتفياً بثلاثة تقريبات، $x_{i-1} = 2.5, x_i = 3.5$).

d) طريقة القاطع المعدلة(مكتفياً بثلاثة تقريبات، $\delta = 0.01, x_i = 3.5$).

20- إذا علمت أن للتابع:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

جذراً مضاعفاً عند $x = 2$. استخدم:

a) طريقة نيوتن القياسية.

b) طريقة نيوتن المعدلة.

لحساب الجذر عند $x = 2$. قارن وناقش التقارب النسبي من القيمة $x_0 = 1.2$

21- استخدم طريقة مولر لتعيين الجذر الحقيقي الموجب للتابعين:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$

b) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 + 4x - 3$

22- استخدم طريقة مولر لتعيين الجذر الحقيقي والعقدي للتوابع:

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$

b) $f(x)=2x^4+6x^2+10$

c) $f(x)=x^4-2x^3+6x^2-8x+8$

23- أوجد النقطة الثابتة لكلٍ من التوابع التالية:

a) e^x+1 b) $e^{-x}-x$

c) $x^2-4\sin(x)$ d) $x^3+6x^2+11x-6$

24- تمثل $x=4$ نقطة ثابتة للتقريبات التالية:

a) $x_{n+1}=\frac{1}{4}(8x_n-x_n^2)$

b) $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n^2-4)$

c) $x_{n+1}=\sqrt{3x_n-4}$

حلل نظرياً (دون حساب التقريبات) لتعين أيٍّ من هذه الطرائق متقاربة من الجذر عند اختيار $x=4$ نقطة بدء. حدد الطرائق الأسرع في التقارب.

25- استخدم طريقة تقريب النقطة الثابتة لتعيين تقريب $\sqrt{3}$ بدقة 10^{-4}.

26- يُطلب من الطرائق التالية حساب $\sqrt[3]{21}$ ، على التتالي، حدد سرعة التقارب، حيث $x_0=1$:

a) $x_n=\dfrac{20x_{n-1}+\dfrac{21}{x_{n-1}^2}}{21}$ b) $x_n=x_{n-1}-\dfrac{x_{n-1}^2-21}{3x_{n-1}^2}$

c) $x_n=x_{n-1}-\dfrac{x_{n-1}^4-21x_{n-1}}{x_{n-1}^2-21}$ d) $x_n=\left(\dfrac{21}{x_{n-1}}\right)^{1/2}$

27- أثبت أن المتتالية $x_{n+1}=\sqrt[3]{1+x_n}$ تتقارب من حل المعادلة $x^3-x-1=0$ إذا استخدمنا قيمة x_0 تقع بين $[1,2]$

28- حدد رتبة التقارب لعمليات التقريب التالية:

a) $f(x)=\sin(x)+x-1$; $x_{n+1}=1-\sin(x_n)\ for\ x_0\in[0,\pi]$

b) $f(x) = x^3 - 10x + 4$; $x_0 \in [0,1]$ for $x_{n+1} = \frac{1}{10}(x_n^3 + 4)$

29- عيّن مجال قيم x التي تتقارب فيها الصيغ التالية:

a) $x_{n+1} = \sqrt[3]{10x_n - 4}$

b) $x_{n+1} = \frac{1}{2} - x_n^3$

c) $x_{n+1} = 0.5(\sin(x_n) + \cos(x_n))$

d) $x_{n+1} = 1 + \tan^{-1}(x_n)$

30- ليكن:

$$x_{n+1} = \frac{12}{1 + x_n}$$

a) أوجد النقطة الثابتة α.

b) برهن تقارب α من x_0. عين الرتبة ومعدل التقارب.

31- أوجد الجذر الموجب للتابع:

$$f(x) = \alpha - \beta x^2 - x; \quad \alpha, \beta > 0$$

باستخدام $x_{n+1} = \alpha - \beta x_n^2$. برهن التقارب من أجل قيمة البداية و بفرض $\alpha\beta < \frac{3}{4}$.

32- :أوجد تابع التقريب للمعادلة:

$$x = \frac{a}{6 + ax}$$

الذي يحقق نظرية النقطة الثابته من أجل $0 \le a < 6$.

ثم احسب جذر المعادلة بدقة $\varepsilon = 0.01$ و $a = 3$ باستخدام تقريب النقطة الثابته.

33- حدد قيمة الوسيط β لدالة تقريب المعادلة

$$x = \frac{3}{3 + \beta^2 x}; \; x \in [0,1]$$

بحيث يحقق نظرية النقطة الثابته.

34- قدّر الحل التقريبي للمعادلة

$$x = \frac{3}{3+x}; x \in [0,1]$$

بدقة $\varepsilon = 0.01$ وبأقل عدد من التقريبات.

35- بفرض $x_{n+1} = x_n + c(x_n^2 - 7)$ أوجد مجال قيم c الذي يحقق تقارب من النقطة الثابتة الموجبة. ما هي قيمة c التي تحقق التقارب التربيعي.

36- أثبت أن طريقة حساب $\sqrt{a}$ يمكن أن تُعطى بالشكل

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}; \quad n \geq 0$$

حدد أيضاً مرتبة الطريقة مع معدل التقارب.

37- بيّن أن المتتالية

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - a\alpha_n + a^2 + 5a}{\alpha_n + 5}$$

متقاربة من النقطة الثابتة α تربيعياً من أجل جميع القيم حيث $a \neq -5$.

38- أوجد تقريب عددي لنقطة تقاطع التابعين

$$e^{\frac{x}{4}} = \frac{1.982}{x}$$

ابتداءً من $x_1 = 1.300$ عند $k = 1$.باستخدام طريقة النقطة الثابتة، ثم طريقة نيوتن. برهن تقارب النقطة الثابتة من x_1.

39- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد تقريب عددي لجذر التابع

$$f(x) = e^{\frac{x}{4}} - \frac{0.512}{x}$$

في المجال $[1 , 2.2]$ ابتداءً من $k = 1$ وبدقة $|\Delta x_k| = |x_{k+1} - x_k| < 0.5e-2$.

الفصل الثالث

الاستيفاء بكثيرات الحدود

Interpolation Polynomials

1- مفهوم الاستيفاء

بفرض لدينا مجموعة من النقاط المتمايزة $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$، عندئذٍ تُعرّف مسألة الاستيفاء بأنّها عملية إيجاد تابع $f(x)$ يمر من هذه النقاط أي يحقق الشروط:

$$f(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n \qquad (1)$$

للاستيفاء عدة فوائد يأتي في مقدمتها:

- إيجاد تفاضل أو تكامل تابع ما عند قيمة معينة دون معرفة قاعدة ربط هذا التابع.
- تقريب التابع الرياضي إلى تابع ذو شكل أبسط.
- رسم خط بياني أملس يمرّ بمجموعة من النقاط المفروضة.

2- حدوديات الاستيفاء

لتكن لدينا مجموعة البيانات:

i	0	1	2
x_i	$-\pi$	0	π
y_i	0	1	0

نلاحظ أنّ التابع $f_1(x) = 1 - \pi^{-2}x^2$ يحقق الشروط:

$$f_1(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,2$$

كما نلاحظ أيضاً أنّ التابع $f_2(x) = \cos(x)$ يحقق الشروط:

$$f_2(x_i) = y_i \qquad\qquad i = 0,1,2$$

وهنا نجد أنفسنا أمام السؤال التالي: أيٌّ من التابعين السابقين علينا قبوله؟ في الحقيقة، تعدّ المعطيات المفروضة في هذه المسألة غير كافية للإجابة عن هذا التساؤل. فمن الممكن أن يكون كلاهما مقبولاً كما يمكن أن يكون كلاهما مرفوضاً، إلا أنّه يمكن ملاحظة أنّ أحد التابعين السابقين حدودية والآخر تابع مثلثي.

سنقتصر في دراستنا القادمة لمسألة الاستيفاء على الحدوديات، التي شاع استخدامها في مسألة استيفاء التوابع؛ لأنها تتميز بالخواص التالية:

- لها صيغة رياضية بسيطة تُعطى بالشكل:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- يُمكن أن تُحسب القيم وفقها باستخدام عمليات حسابية بسيطة.
- ليس لها نقاط شاذة.
- قابلة للمفاضلة والمكاملة بسهولة.
- غير مقيدة بمجموعة معينة من القيم.
- تُقرّب التوابع المستمرة بانتظام على أي مجال مغلق ومحدود.

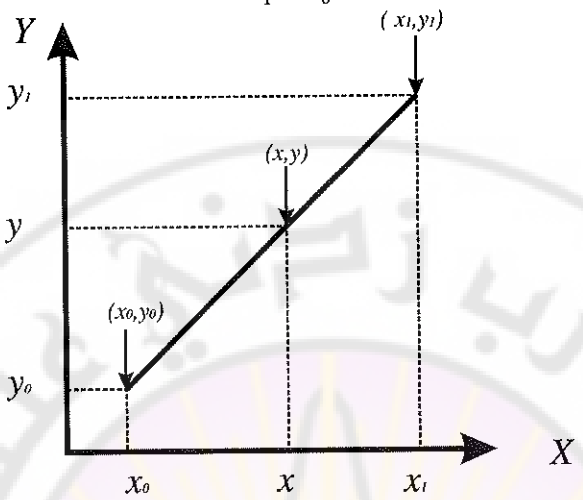
3- حدوديات استيفاء لاغرانج

3-1 حدودية الاستيفاء الخطي:

بفرض لدينا النقطتين $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ والمطلوب: إيجاد حدودية الاستيفاء الخطي التي تمر بهاتين النقطتين.

إنّ حدودية الاستيفاء الخطي التّي تمر بهاتين النقطتين ما هي إلا معادلة المستقيم المار بهما ومن المعلوم أنّ معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ تُعطى بالشكل:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



الشكل 1

وبناءً عليه فإنّ معادلة حدودية الاستيفاء المطلوبة هي:

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad (2)$$

ومنه:

$$P_1(x) = y_0 L_{1,0}(x) + y_1 L_{1,1}(x) \qquad (3)$$

حيث إنّ:

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

نلاحظ أنّ كلاً من الحدوديتين $L_{1,0}, L_{1,1}$ خطية وأنّ:

$$L_{1,i}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 1 & ; \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases} \qquad (4)$$

تُدعى $P_1(x)$ التّي حصلنا عليها في(2) بحدودية استيفاء لاغرانج الخطية.

ويمكن تعميم مفهوم الاستيفاء الخطي من خلال بناء حدودية درجتها n على الأكثر تمر بالنقاط $(n+1)$ المفروضة $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة (1):

ليكن لدينا $(n+1)$ نقطة(عقدة) مختلفة $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$، و f تابع تُعطى قيمه عند هذه النقاط بالأعداد $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ على الترتيب، عندئذٍ تُوجد حدودية وحيدة $P_n(x)$ من الدرجة n على الأكثر تُحقق:

$$P_n(x_k) = f(x_k) \qquad , k = 0, 1, \ldots, n$$

و تُعطى هذه الحدودية بالشكل:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 L_{n,0}(x) + y_1 L_{n,1}(x) + y_2 L_{n,2}(x) + \cdots + y_n L_{n,n}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k} \end{aligned} \tag{5}$$

حيثُ:

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{i \neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \qquad ; k = 0, 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{6}$$

البرهان:

بما أنّ حدوديات الاستيفاء يجب أن تحقق:

$$P_n(x_k) = f(x_k) \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

فإنّه يُشترط على معاملات حدودية الاستيفاء التّي نرغب في إيجادها أن تحقق:

$$L_{n,k}(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & ; \mathrm{i} = \mathrm{k} \\ 1 & ; \mathrm{i} \neq \mathrm{k} \end{cases} \tag{7}$$

وليكون $L_{n,k}(x_i) = 0$ عندما $i \neq k$ يجب أن يحتوي بسط الحدودية $L_{n,k}(x)$ على الحد $(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$، أمّا تحقق الشرط $L_{n,k}(x_k) = 1$ فإنّه يستلزم أن يكون مقام الحدودية $L_{n,k}(x)$ مساوياً لقيمة الحد $(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$ عند النقاط $x = x_k$، وهكذا نجد أنّ:

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

$$=\prod_{i\neq k}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \qquad ;k=0,1,....,n$$

إذاً يمكن كتابة حدودية لاغرانج من الدرجة n التّي تستوفي النقاط $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ بالشكل:

$$P_n(x)=y_0L_{n,0}(x)+y_1L_{n,1}(x)+y_2L_{n,2}(x)+...+y_nL_{n,n}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}y_kL_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_{n,k}$$

لنأخذ تطبيقاً على ذلك الاستيفاء بحدودية لاغرانج من الدرجة الثانية (التربيعية) للتابع الذي يمرّ بالنقاط $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{2}$. تُعطى حدودية استيفاء لاغرانج من الدرجة الثانية وفقاً للمبرهنة (1) بالشكل:

$$P_2(x)=y_0L_{2,0}(x)+y_1L_{2,1}(x)+y_2L_{2,2}(x) \qquad (8)$$

حيثُ:

$$L_{2,0}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_{2,1}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad (9)$$

$$L_{2,2}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

ويمكن المُلاحظة بسهولة أنّ الحدوديات $L_{2,0}(x),L_{2,1}(x),L_{2,2}(x)$ تربيعية تحقق:

$$L_{2,i}(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & ;\ i=j\\ 1 & ;\ i\neq j\end{cases} \qquad (10)$$

ندعوالحدودية $P_2(x)$ المعرفة بالعلاقة (8) بحدودية استيفاء لاغرانج التربيعية.

<u>ملاحظة:</u>

سندعو الحدوديات $L_{n,k}(x)$ بتوابع قاعدة حدودية لاغرانج $P_n(x)$.

$$L_{2,o} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)}$$

$$L_{2,1} = \frac{(x-(-2))(x-2)}{(0-(-2))(0-2)}$$

$$L_{2,2} = \frac{(x-(-2))(x-0)}{(2-(-2))(2-0)}$$

وعليه فإن حدودية لاغرانج:

$$f_2(x) = \frac{x(x-2)}{8}4 + \frac{(x+2)(x-2)}{-4}2 + \frac{x(x+2)}{8}8$$
$$= x^2 + x + 2$$

مثال(4):

أوجد حدودية لاغرانج التي تستوفي التابع $f(x) = \sin(x)$ عند النقاط:

$$x_0 = 0 \quad ; \quad x_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad x_2 = \pi$$

الحل

إن قيم التابع عند النقاط المذكورة

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y_i = f(x_i)$	0	1	0

وبالتالي:

$$P_2 = L_{2,0}y_0 + L_{2,1}y_1 + L_{2,2}y_2 = L_{2,1}$$

$$L_{2,1} = \frac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)} = -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

ومنه فإن حدودية لاغرانج المطلوبة:

$$P_2 = -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

مثال(5):

بفرض لدينا $(n+1)$ عقدة $(x_i \quad ,0 \le i \le n)$، والمطلوب:

1. برهن أنّ الحدوديات $L_{n,i}(x)$ الموافقة لهذه العقد مستقلة خطياً.
2. إذا كانت $Y_n(x)$ حدودية من الدرجة n على الأكثر تحقق الشروط: $Y_n(x_i)=0 \quad ,0 \le i \le n$ ، عندئذٍ برهن أنّ $Y_n(x)=0$.
3. حدودية استيفاء لاغرانج وحيدة.

الحل:

1. لنضع $\sum_{i=0}^{n} c_i L_{n,i}(x)=0$ ، وذلك اعتماداً على الملاحظة السابقة، وبأخذ $x=x_j \; ; 0 \le j \le n$ ، نجد أنّ $\sum_{i=0}^{n} c_i \delta_{ij}=0$ ، وعليه فإنّ $c_j=0 \; ;0 \le j \le n$ أي أنّ الحدوديات $L_{n,i}(x)$ حيث $0 \le i \le n$ مستقلة خطياً.
2. بما أنّ الحدوديات $L_{n,i}(x)$ هي حدوديات من الدرجة n مستقلة خطياً، فإنّ أي حدودية من الدرجة n يمكن أن تُولَد من خلال تركيب خطي في هذه الحدوديات وعليه: $Y_n(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i L_{n,i}(x)$ وبوضع $x=x_j \quad ,0 \le j \le n$ وبالاستفادة من $Y_n(x_i)=0 \quad ,0 \le i \le n$ (محققة فرضاً) فإننا نجد أنّ $b_j=0 \quad ,0 \le j \le n$ أي أنّ $Y_n(x)=0$.
3. بفرض $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ حدوديتان تحققان شروط الاستيفاء، و من الدرجة n على الأكثر ، ولتكن $B_n(x)=P_n(x)-Q_n(x)$ ، و لنثبت أن $B_n(x)=0$ ، نلاحظ $B_n(x)$ حدودية من الدرجة n على الأكثر (حاصل طرح حدوديتين من من الدرجة n على الأكثر)، كما أن

$$B_n(x_i)=P_n(x_i)-Q_n(x_i)=0, \; 0 \le j \le n$$

و استنادا إلى 2. نجد $B_n(x)=0$ ، وبالتالي $P_n(x)=Q_n(x)$

2-3 دراسة الخطأ في حدودية استيفاء لاغرانج:

ننتقل الآن إلى دراسة الخطأ الناتج عن تقريب تابع ما بحدودية استيفاء لاغرانج، تتوضح هذه الدراسة من خلال المبرهنة الآتية:

مُبرهنة(2):

بفرض لدينا $n+1$ نقطة مختلفة $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ من المجال $[a,b]$، وبفرض $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ ، عندئذٍ من أجل كل قيمة x في المجال $[a,b]$ يوجد عدد $\xi(x)$ من المجال $[a,b]$ (غالباً ما يكون عدداً مجهولاً) يحقق:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad (11)$$

حيث $P(x)$ هي حدودية استيفاء لاغرانج.

البرهان:

نميّز هنا حالتين:

أولاً: من أجل $x = x_k$ حيثُ $k = 0,1,\ldots,n$ يكون $f(x_k) = P(x_k)$ ، ومنه نحصل على العلاقة (11) من أجل $\xi(x_k)$ أي عدد من المجال $[a,b]$.

ثانياً: إذا كانت $x \neq x_k$ أياً كانت $k = 0,1,\ldots,n$ ، عندئذٍ نعرف التابع $g(t)$ على المجال $[a,b]$ بالشكل:

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

$$= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}$$

واعتماداً على كون $f \in C^{n+1}[a,b]$ و $P \in C^{\infty}[a,b]$ و $x \neq x_k$ أياً كانت k، نجد أنّ $g \in C^{n+1}[a,b]$.

لنأخذ $t = x_k$ عندئذٍ نجد:

$$g(x_k)=f(x_k)-P(x_k)-[f(x)-P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x_k-x_i)}{(x-x_i)}$$
$$=0-[f(x)-P(x)]\cdot 0=0$$

كما أنّه يتحقق أيضاً:

$$g(x)=f(x)-P(x)-[f(x)-P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x-x_i)}$$
$$=f(x)-P(x)-[f(x)-P(x)]=0$$

وهكذا نجد أنّ g ينعدم من أجل $n+2$ نقطة مختلفة $\{x,x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ واعتماداً على مبرهنة رول المعممة فإنه يوجد عدد ξ من المجال $[a,b]$ يحقق $g^{(n+1)}(\xi)=0$ ومنه فإنّ:

$$g^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-P^{(n+1)}(\xi)-[f(x)-P(x)]\left[\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}\right]_{t=\xi} \tag{12}$$
$$=0$$

الآن بما أنّ $\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}$ هي حدودية من الدرجة $(n+1)$ فإننا نستطيع كتابتها بالشكل:

$$\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}=\left[\frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}\right]t^{n+1}+Q(t)$$

حيث إنّ $Q(t)$ حدودية درجتها أقل من $n+1$.

ومنه:

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}=\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

وبما أنّ $P(x)$ هي حدودية من الدرجة n على الأكثر فإنّ $P^{(n+1)}(x)=0$ ، وعليه فإنّ المعادلة (12) تصبح بالشكل:

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - P(x)]\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

وبحلها من أجل $f(x)$ نجد أنّ:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

مثال(6):

ليكن لدينا جدول القيم التالي:

x_K	0	0.6
$\ln(x+1)$	1	0.47000

والمطلوب:

- أوجد حدودية لاغرانج الخطية للقيم السابقة.
- أوجد الخطأ النظري والخطأ الفعلي عند القيمة $x = 0.45$.

الحل:

حدودية لاغرانج الخطية الموافقة للقيم السابقة هي:

$$P_1(x) = \frac{x-0.6}{0-0.6}(0) + \frac{x-0}{0.6-0}(0.47) = 0.78334x$$

الخطأ النظري في هذه الحالة:

$$E_1(x) = \left|\frac{f''(\zeta)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)\right|$$

$$f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

وبما أن $|f''(x)|$ تابع متناقص فإن أكبر قيمة له تكون عند أصغر نقطة أي عند $x = 0$. وعليه فإن الخطأ النظري عند القيمة $x = 0.45$:

$$E_1(x) = \left|\frac{1}{(0+1)^2}\ \frac{1}{2}(0.45-0)(0.45-0.6)\right| = 3.375\times10^{-2}$$

أما الخطأ الفعلي عند القيمة $x = 0.45$:

$$|\ln(1 + 0.45) - P_1(0.45)| = 1.906\times10^{-2}$$

3-3 ميزات طريقة استيفاء لاغرانج وعيوبها:

نستطيع إجمال ميزات طريقة لاغرانج بالنقاط الآتية:

1- لا نحتاج -عند اعتماد طريقة لاغرانج لحل مسألة الاستيفاء- لأن تكون العقد متساوية البعد بعضهاعن بعض.

2- إنّ صيغة لاغرانج لحدوديات الاستيفاء مفيدة جداً؛ لأنّها لا تتطلب منا حل جملة من المعادلات الخطية.

3- تُوضّح لنا صيغة لاغرانج بشكل صريح تأثير f_i أو y_i على حدودية الاستيفاء.

أمّا العيوب الناجمة عن استخدام حدوديات لاغرانج لحل مسألة الاستيفاء فيمكن تلخيصها بالنقاط التالية:

1- إنّ أي زيادة أو نقصان لعدد العقد يجبرنا على إعادة حساب توابع الأساس $L_{n,k}(x)$.

2- إنّ درجة حدودية لاغرانج التّي تستوفي $n+1$ نقطة هي n. فمثلاً إذا أردنا إيجاد حدودية استيفاء لاغرانج من الدرجة 99 على الأكثر فإننا بحاجة إلى 100 نقطة، الأمرالذي يعني أنّ هذه الطريقة ذات كلفة حسابية كبيرة.

4-حدوديات استيفاء نيوتن- الفروق المقسومة:

وجدنا أثناء حل مسألة الاستيفاء بحدوديات لاغرانج أن زيادة عدد نقاط الاستيفاء يستدعي إعادة حساب جميع التوابع $L_{n,k}(x)$، الأمر الّذي يُفسَّر بقصور طريقة لاغرانج عن إمكانية التعبير عن $P_{n+1}(x)$ بدلالة $P_n(x)$، وهذا ما يدفعنا للجوء إلى طريقة الفروق المقسومة التّي تُتيح هذه الميزة فضلاً عن تمتعها بميزات أخرى سنُبينُها لاحقاً.

ندعو هذه المعاملات بمعاملات الفروق المقسومة.

وبناءً عليه فإنّ $P_n(x)$ تُكتب بالشكل:

$$P_n(x)=f[x_n]+\sum_{k=1}^{n}f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k}](x-x_n)\cdots(x-x_{n-k-1})$$

(22)

$$P_n(x)=f[x_n]+\sum_{k=1}^{n}f[x_n,\ldots,x_{n-k}]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_{n-j})$$

وتُدعى هذه الحدودية كذلك بحدودية نيوتن–الفروق المقسومة التراجعية.

<u>ملاحظة:</u>

إنّ حدودية الاستيفاء التّي حصلنا عليها آنفاً ما هي إلا حدودية استيفاءلاغرانج وذلك نظراً لوحدانية حدوديات الاستيفاء (انظر المبرهنة (1))، وإنّ الفرق بينهما يكمن في استخدام صيغة جبرية لتمثيل حدودية استيفاء نيوتن– الفروق المقسومة بديلة عن الصيغة المستخدمة في تمثيل حدودية استفاء لاغرانج. وبالاستفادة من ذلك نستطيع القول إنّ المعاملات $a_0,a_1,\ldots,a_n$ ما هي إلا معاملات لاغرانج نفسها، ولما كنّا نعلم أنّ حدودية لاغرانج تُكتب بالشكل:

$$\begin{aligned}P_n(x)&=y_0L_{n,0}(x)+y_1L_{n,1}(x)+y_2L_{n,2}(x)+\cdots+y_nL_{n,n}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}y_kL_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_{n,k}\\&=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}\end{aligned}$$

فإنّ المعاملات $a_0,a_1,\ldots,a_n$ تُعطى بالعلاقة:

$$a_k=\sum_{i=1}^{k}f(x_i)\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$
$$;k=0,\ldots,n$$

وبمقارنة العلاقة الأخيرة مع تعريف الفروق المقسومة من المرتبة n نجد أنّ:

$$a_k=f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k]\qquad ,k=0,\ldots,n$$

ملاحظة:

إنّ قيمة $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ مستقلة عن ترتيب الأعداد $x_0,x_1,\ldots,x_n$ أي:

$$f[x_i,x_{i+1}]=f[x_{i+1},x_i]$$

الإثبات:

$$\begin{aligned} f[x_i,x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i} \\ &= \frac{-(f[x_i]-f[x_{i+1}])}{-(x_i-x_{i+1})} \\ &= \frac{f[x_i]-f[x_{i+1}]}{x_i-x_{i+1}} \\ &= f[x_{i+1},x_i] \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

وكتطبيق على ذلك نأخذ $n=1$ فنجد أنّ: $f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]$ لأنّ:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_1,x_0]$$

3-4 خوارزمية لإيجاد حدوديات نيوتن- الفروق المقسومة:

لنوجد معاملات الفروق المقسومة لحدودية الاستيفاء $P(x)$ حيث لدينا $n+1$ نقطة مختلفة $x_0,x_1,\ldots,x_n$ للتابع f:

Input: numbers $x_0, x_1, \cdots, x_n$

values $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ as $F_{0,0}, F_{1,0}, \cdots, F_{n,0}$.

Output:the numbers $F_{0,0}, F_{1,1}, \cdots, F_{n,n}$, where $P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$.

Step 1 DO $i = 1, n$

DO $j = 1, i$

$$F_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

Step 2 Output $F_{0,0}, F_{1,1}, \cdots, F_{n,n}$; ("$F_{i,i}$ is $f[x_0, x_1, \cdots, x_i]$")

Stop

مثال(7):

استخدام صيغة نيوتن–الفروق المقسومة التقدمية للإيجاد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة التي تستوفي النقاط الآتية:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	5	7	8	10
$f(x_i)$	0	2	-1	-2	20

الحل:

اعتماداً على ما وجدناه في المبرهنة فإنّ إيجاد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة وفق طريقة نيوتن– الفروق المقسومة التقدمية يعني العمل على كتابتها بالشكل:

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x)(x-5) + a_3(x)(x-5)(x-7) + a_4(x)(x-1)(x-7)(x-8)$$

وحتّى يتم هذا فإنّه يتوجب علينا تعيين المعاملات a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 لذا نقوم ببناء جدول الفروق المقسومة كما يلي:

i	x_i	$f[]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0	0	0				
			$f[x_0,x_1]$			
1	5	2		$f[x_2,x_1,x_0]$		
			$f[x_2,x_1]$		$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$	
2	7	-1		$f[x_3,x_2,x_1]$		$f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0]$
			$f[x_3,x_2]$		$f[x_4,x_3,x_2,x_1]$	
3	8	-2		$f[x_4,x_3,x_2]$		
			$f[x_4,x_3]$			
4	10	20				

الجدول 3

مع العلم أن $f(x_i)=f[x_i]$ الفروق المقسومة الصفرية. نتابع العمل فنحسب الفروق المقسومة الأولى:

i	x_i	$f[]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0	0	0	$\leftarrow \boxed{f[x_1,x_0]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{2-0}{5-0}=0.4}$			
1	5	2	$\leftarrow \boxed{f[x_2,x_1]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}=\frac{-1-2}{7-5}=-1.5}$			
2	7	-1	$\leftarrow \boxed{f[x_3,x_2]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}=\frac{-2+1}{8-7}=-1}$			
3	8	-2	$\leftarrow \boxed{f[x_4,x_3]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}=\frac{20+2}{10-8}=11}$			
4	10	20				

الجدول 6

وبالمتابعة:

i	x_i	$f[]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0	0	0				
			0.4			
1	5	2		$\frac{-1.5-0.4}{7-0}$		
			-1.5		$\frac{0.167+0.271}{8-0}$	
2	7	-1		$\frac{-1+1.5}{8-5}$		$\frac{0.767-0.055}{10-0}$
			-1		$\frac{4-0.167}{10-5}$	
3	8	-2		$\frac{11+1}{10-7}$		
			11			
4	10	20				

الجدول 3

وعليه فإن:

i	x_i	$f[]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0	0	0				
			0.4			
1	5	2		-0.271		
			-1.5		0.055	
2	7	-1		0.167		0.071
			-1		0.767	
3	8	-2		4		
			11			
4	10	20				

الجدول 3

ومنه تُعطى حدودية الاستيفاء بالشكل:

$$p_4(x) = 0 + 0.4x - 0.2714x(x-5) + 0.0548x(x-5)(x-7)$$
$$+ 0.0712x(x-5)(x-7)(x-8)$$
$$= x(0.4 + (x-5)(-0.2714 + (x-7)(0.0548 + (x-8)0.0712)))$$

مثال(8): أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة التي تستوفي النقاط الآتية:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	3	6	10
$f(x_i)$	1	-6	4	169	921

وذلك باستخدام صيغة نيوتن–الفروق المقسومة التقدمية.

الحل:

إنّ جدول الفروق المقسومة الموافق لهذه البيانات يعطى بالشكل:

i	x_i	$f[]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0	0	0				
			-7			
1	1	-6		4		
			5		1	
2	3	4		10		0
			55		1	
3	6	169		19		
			188			
4	10	921				

الجدول 3

ومنه تُعطى حدودية الاستيفاء بالشكل:

$$p_4(x) = -7x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-3)$$

مثال(9):

أوجد حدودية نيوتن الفروق المقسومة التراجعية الموافقة للنقاط:

$$(1,3),(3,2),(4,6),(6,10)$$

الحل:

إنّ جدول الفروق المقسومة الموافق لهذه البيانات يعطى بالشكل:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	1	3			
			-1/2		
1	3	2		3/2	
			4		**-13/30**
2	4	6		**-2/3**	
			2		
3	6	**10**			

ومنهُ فإنّ حدودية الاستيفاء المطلوبة تُعطى بالشكل:

$$P_3(x)=f[x_3]+\sum_{i=1}^{3}f[x_3,\ldots,x_{3-i}]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_{3-j})$$

$$=f(x_3)+f[x_3,x_2](x-x_3)$$

$$+f[x_3,x_2,x_1](x-x_3)(x-x_2)$$

$$+f[x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$P_3(x)=10+2(x-6)-\frac{2}{3}(x-6)(x-4)-\frac{13}{30}(x-6)(x-4)(x-3)$$

$$=-\frac{13}{30}x^3+\frac{149}{30}x^2-\frac{221}{15}x+\frac{66}{5}$$

$$=-\frac{1}{30}(13x^3-149x^2+442x-396)$$

مثال(10):

بفرض $P_4(x)=(x-1)(x+2)(x-2)(x+1)$، أوجد $f[-2,-1,1,2,3]$.

الحل:

بما أنّ $P_4(x)$ هي حدودية من الدرجة الرابعة فإنّ $f[-2,-1,1,2,3]$ هو معامل x^4.

وبناءً على أنّ معامل x^4 هو الواحد فإنّ $f[-2,-1,1,2,3]=1$.

مثال(11):

أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الثالثة التّي تستوفي التابع $f(x)=\cos(x)$ وذلك باستخدام صيغة نيوتن–الفروق المقسومة التقدمية، علماً أنّها تحقق البيانات الآتية:

$$f(0.1)=0.99500 \quad , \quad f(0.2)=0.98007$$
$$f(0.3)=0.95534 \quad , \quad f(0.2)=0.92106$$

الحل:

إنّ جدول الفروق المقسومة للبيانات المعطاة هو التالي:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	0.1	**0.99052**			
			-0.14930		
1	0.2	0.98007		**-0.49000**	
			-0.24730		**0.04167**
2	0.3	0.95534		-0.47750	
			-0.34280		
4	0.4	0.92106			

ومنه فإنّ حدودية الاستيفاء من الدرجة الثالثة التّي تستوفي التابع f، باستخدام صيغة نيوتن–الفروق المقسومة تُعطى بالشكل:

$$P_4(x)=0.099052-0.14930(x-0.1)-0.4900(x-0.1)(x-0.2)$$
$$+0.04167(x-0.1)(x-0.2)(x-0.3)$$

ملاحظة:

عند دراستنا للاستيفاء وفق طريقة نيوتن–الفروق المقسومة فإننا عملنا على كتابة الحدودية $P_n(x)$ في العلاقة (16) بالشكل:

$$P_n(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}$$

$$P_n(x) = \underbrace{\qquad P_{n-1}(x) \qquad}_{} + \underbrace{\qquad Q_n(x) \qquad}_{}$$

حيثُ: $a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$

الأمرالّذي يعني أننا قمنا بكتابة $P_n(x)$ بدلالة $P_{n-1}(x)$.

مبرهنة(3):

بفرض $f \in C^n[a,b]$ و $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداد مختلفة من المجال $[a,b]$، عندئذٍ يوجد عدد ما ξ من (a,b) يحقق العلاقة:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

الإثبات:

لنفرض أنّ $g(x) = f(x) - P_n(x)$، عندئذٍ بما أنّ:

$$f(x_i) = P_n(x_i) \qquad ; i = 0, 1, \ldots, n$$

فإنّه يوجد $n+1$ صفراً مختلفاً للتابع g في المجال $[a,b]$، و اعتماداً على مبرهنة رول المعممة فإنّه يوجد عدد ξ في المجال (a,b) يُحقق: $g^{(n)}(\xi) = 0$ وعليه يكون:

$$0 = f^{(n)}(\xi) - P_n(\xi) \qquad \text{و} \qquad P_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi)$$

وبما أنّ $P_n(x)$ حدودية من الدرجة n معاملها القائد a_n هو $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ فإنّ:

$$P_n^{(n)}(x) = n!\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

وذلك من أجل جميع قيم x وبناءً عليه نجد:

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

وهو المطلوب.

أي أننا نتمكن من خلال جدول الفروق المقسومة حساب مشتق التابع f عند ξ حتّى وإن لم يكن التابع f موجوداً.

4-4 جدول الفروق:

تعاريف:

بفرض لدينا $n+1$ نقطة $\{(x_i,f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، وليكن:

$$h=x_{i+1}-x_i \qquad ;i=0,1,\ldots,n-1$$

عندئذٍ يُعرَّف مؤثرالفروق التقدمية Δ بالعلاقة:

$$\Delta(f(x_i))=f(x_{i+1})-f(x_i)$$

ويُعرَّف مؤثرالفروق التراجعية ∇ بالعلاقة:

$$\nabla(f(x_i))=f(x_i)-f(x_{i-1})$$

وسنعرف إضافةً لما سبق المؤثر E بالعلاقة:

$$E(f(x_i))=f(x_{i+1})$$

ومؤثرالانسحاب للمؤثر E بالعلاقة، الذي يُرمز له بالرمز E^{-1}، بالعلاقة:

$$E^{-1}(f(x_i))=f(x_{i-1})$$

والمؤثر المطابق

$$I(f(x_i))=f(x_i)$$

نتائج:

1- اعتماداً على التعاريف السابقة يمكن التحقق بسهولة من صحة العلاقات التالية:

$$\nabla=I-E^{-1} \qquad , \quad \Delta=E-I$$

ومنه ينتج أنّ:

$$\Delta = E\nabla = \nabla E$$

2- من الواضح أنّ العلاقات التالية محققة:

$$\Delta^i(f(x_0)) = (E-I)^i(f(x_0))$$
$$= \sum_{r=0}^{i}(-1)^{i-r}\binom{i}{r}f(x_r)$$
$$\nabla^i(f(x_n)) = (E-I^{-1})^i(f(x_n))$$
$$= \sum_{r=0}^{i}(-1)^{i-r}\binom{i}{r}f(x_{n-i+r})$$

مبرهنة(4):

بفرض لدينا $n+1$ نقطة $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، وليكن:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad ; i = 0,1,\ldots,n-1$$

عندئذٍ:

$$f[x_i,\ldots,x_{i+r}] = \frac{\Delta^r(f(x_i))}{r!h^r}$$

الإثبات:

يُمكن إثبات هذه المبرهنة بكل سهولة باستخدام الاستقراء الرياضي. فمن الواضح أنّ العلاقة محققة من أجل $r=1$.

لنفرض أنّها محققة من أجل $j \le (r-1)$ أي :

$$f[x_i,\ldots,x_{i+j}] = \frac{\Delta^j(f(x_i))}{j!h^j} \quad , j \le (r-1)$$

ولنبرهن أنّها محققة من أجل r:

$$f[x_i,\ldots,x_{i+r}] = \frac{f[x_i,\ldots,x_{i+1+r-1}] - f[x_i,\ldots,x_{i+r-1}]}{(x_{i+r}-x_i)} =$$
$$= \frac{1}{rh}\left(\frac{\Delta^{(r-1)}(f(x_{i+1}))}{(r-1)!h^{r-1}} - \frac{\Delta^{(r-1)}(f(x_i))}{(r-1)!h^{r-1}}\right) = \frac{\Delta^r(f(x_i))}{r!h^r}$$

وكتطبيق على هذه المبرهنة نجد أنّ:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)}{h}\right]=\frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

وبناءً على هذه المبرهنة، فإنّ جدول الفروق المقسومة التقدمية يُصبح بالشكل:

i	x_i	$\Delta^0(f(x_i))$	…	$\Delta^r(f(x_i))$	…	$\Delta^{n-1}(f(x_i))$
0	x_0	$f(x_0)$				
			…			
1	x_1	$f(x_1)$		$\Delta^{r-1}(f(x_1)-f(x_0))$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\Delta^{n-1}(f(x_1)-f(x_0))$
$n-1$	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$\Delta^{r-1}(f(x_{n-r+1})-f(x_{n-r}))$		
			…			
n	x_n	$f(x_n)$				

مثال(12):

أوجد جدول الفروق المقسومة التقدمية الموافق للنقاط $(1,3),(2,5),(3,7),(4,10)$.

الحل:

إنّ جدول الفروق المقسومة الموافق لهذه البيانات يعطى بالشكل:

i	x_i	$\Delta^0(f(x_i))$	$\Delta^1(f(x_i))$	$\Delta^2(f(x_i))$	$\Delta^3(f(x_i))$
0	1	3			
			2		

$$P_3(x)=10+\frac{3}{2}(x-7)+\frac{1}{8}(x-7)(x-5)+\frac{1}{48}(x-7)(x-5)(x-3)$$
$$=\frac{1}{16}(\frac{x^3}{3}-3x^2+\frac{71}{3}x+27)$$

5-4 صيغة نيوتن–غريغوري (Newton-Gregory Formula):

بفرض لدينا $n+1$ نقطة، $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، بحيث:

$$h=x_{i+1}-x_i \qquad ;i=0,1,\ldots,n-1$$

نهدف من خلال هذه الفقرة إلى إيجاد صيغة $P_n(x)$ وذلك عند x المعرفة بإحدى الشكلين الآتيين:

$$x=x_0+sh$$
$$x=x_n-sh$$

هذه الصيغة التّي تُدعى بصيغة نيوتن–غريغوري.

أولاً: ندرس الحالة التّي يكون فيها $x=x_0+sh$.

مبرهنة(8):

بفرض لدينا $n+1$ نقطة، $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، بحيث:

$$h=x_{i+1}-x_i \quad ;i=0,1,\ldots,n-1$$

و

$$x=x_0+sh$$

عندئذٍ فإنّ حدودية استيفاء نيوتن– الفروق المقسومة تصبح بالشكل:

$$P_n(s)=f[x_0]+\sum_{i=1}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i(f(x_0))=\sum_{i=0}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i(f(x_0)) \qquad (24)$$

وتُدعى هذه الحدودية بحدودية استيفاء نيوتن– غريغوري التقدمية.

الإثبات:

وجدنا سابقاً أنّ حدودية استيفاء نيوتن–الفروق المقسومة التقدمية تُعطى بالشكل:

$$P_n(x)=f[x_0]+\sum_{i=1}^{n}f[x_0,\ldots,x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$$

وبفرض أنّ العقد $x_0, x_1, \ldots, x_n$ متساوية البعد عن بعضها البعض أي:

$$x_j = x_0 + jh$$

واعتماداً على المبرهنة (4) فإننا نجد أنّ:

$$P_n(s) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i}\right)\prod_{j=0}^{i-1}(x_0 + sh - x_0 - jh)$$

$$= f[x_0] + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i}\right)\prod_{j=0}^{i-1}(sh - jh)$$

$$= f[x_0] + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i}h^i\right)\prod_{j=0}^{i-1}(s - j)$$

$$= f[x_0] + \sum_{i=1}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i\big(f(x_0)\big) = \sum_{i=0}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i\big(f(x_0)\big)$$

مثال(16):

أوجد قيمة $f(1.5)$ التقريبية باستخدام صيغة حدودية استيفاء نيوتن–غريغوري التقدمية الموافقة للنقاط: $(1,2),(2,3),(3,5),(4,6),(5,9)$.

الحل:

من الواضح أنّ $h = x_{i+1} - x_i = 1$ و $s = \frac{x - x_0}{h} = 0.5$، وبناءً عليه فإنّ جدول الفروق المقسومة الموافق يُعطى بالشكل:

i	x_i	$\Delta^0(f(x_i))$	$\Delta^1(f(x_i))$	$\Delta^2(f(x_i))$	$\Delta^3(f(x_i))$	$\Delta^4(f(x_i))$
0	1	**2**				
			1			
1	2	3		**1**		
			2		**-2**	
2	3	5		-1		**5**
			1		3	
3	4	6		2		

i	x_i	$\Delta^0(f(x_i))$	$\Delta^1(f(x_i))$	$\Delta^2(f(x_i))$	$\Delta^3(f(x_i))$	$\Delta^4(f(x_i))$
			3			
4	5	9				

ومنهُ فإنّ القيمة المستوفاة المطلوبة تُعطى بالشكل:

$$f(1.5) = f(1+0.5) \cong P_4(0.5)$$
$$= \sum_{i=0}^{4} \binom{0.5}{0} \Delta^i(f(x_0))$$
$$= \binom{0.5}{0} 2 + \binom{0.5}{1} 1 + \binom{0.5}{2} 1 - \binom{0.5}{3} 2 + \binom{0.5}{4} 5$$
$$= 2.055$$

مثال(17):

قرّب $f(22)$ مستخدماً صيغة حدودية استيفاء نيوتن–غريغوري التقدمية للنقاط:

$$(20,12),(25,15),(30,20),(35,27),(40,39),(45,52)$$

الحل:

من الواضح أنّ $h = x_{i+1} - x_i = 5$ و $s = \frac{x - x_0}{h} = 0.4$ و $x = 22$، وبناءً عليه فإنّ جدول الفروق المقسومة الموافق يُعطى بالشكل:

i	x_i	$\Delta^0(f(x_i))$	$\Delta^1(f(x_i))$	$\Delta^2(f(x_i))$	$\Delta^3(f(x_i))$	$\Delta^4(f(x_i))$	$\Delta^5(f(x_i))$
0	20	**12**					
			3				
1	25	15		**2**			
			5		**0**		
2	30	20		2		**3**	
			7		3		**-10**
3	35	27		5		-7	
			12		-4		

i	x_i	$\Delta^0(f(x_i))$	$\Delta^1(f(x_i))$	$\Delta^2(f(x_i))$	$\Delta^3(f(x_i))$	$\Delta^4(f(x_i))$	$\Delta^5(f(x_i))$
4	40	39		1			
			13				
5	52	52					

ومنهُ فإنّ القيمة المستوفاة المطلوبة تُعطى بالشكل:

$$
\begin{aligned}
f(22) &\cong P_5(0.4) \\
&= \sum_{i=0}^{5} \binom{s}{i} \Delta^i(f(x_0)) \\
&= 12 + \binom{0.4}{1} 3 + \binom{0.4}{2} 2 - \binom{0.4}{3} 0 + \binom{0.4}{4} 3 - \binom{0.4}{5} 10 \\
&= 12 + 1.2 - 0.48 + 0.0 - 0.1248 - 0.2995 \\
&= 12.2957
\end{aligned}
$$

مبرهنة(9):

بفرض لدينا $n+1$ نقطة، $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، بحيث:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad ; i = 0,1,\ldots,n-1$$

و

$$x = x_0 + sh$$

عندئذٍ فإنّ حدودية استيفاء نيوتن–الفروق المقسومة تكتب بالشكل:

$$P_n(s) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} \binom{s}{i} \nabla^i(f(x_i)) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \nabla^i(f(x_i)) \qquad (25)$$

وتُدعى هذه الحدودية بحدودية استيفاء نيوتن– غريغوري التقدمية.

الإثبات:

وفقاً للمبرهنة السابقة نجد أنّ حدودية استيفاء نيوتن–غريغوري التقدمية تُعطى بالشكل:

$$P_n(s) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \Delta^i(f(x_0))$$

واعتمادا على العلاقة بين المؤثرات E، Δ، ∇ والتّي تُعطى بالشكل:

$$\Delta = \nabla E$$

$$\Delta^i(f(x_0)) = \nabla^i E^i(f(x_0)) = \nabla^i(f(x_i))$$

فإننا نجد أنّ:

$$P_n(s) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \Delta^i(f(x_0))$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} (\nabla E)^i(f(x_0))$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \nabla^i(f(x_i))$$

مثال(18):

قرب $f(1.5)$ الموافقة للنقاط $(1,5),(2,9),(3,14),(4,20)$ باستخدام صيغة حدودية استيفاء نيوتن-غريغوري التقدمية والواردة في المبرهنة (9).

الحل:

من الواضح أنّ $h = x_{i+1} - x_i = 1$ و $s = \frac{x - x_0}{h} = 0.5$ و $x = 1.5$، وبناءً عليه فإنّ جدول الفروق المقسومة الموافق يُعطى بالشكل:

i	x_i	$\Delta^0(f(x_i))$	$\Delta^1(f(x_i))$	$\Delta^2(f(x_i))$	$\Delta^3(f(x_i))$
0	1	**5**			
			4		
1	2	9		**1**	
			5		**0**
2	3	14		1	
			6		
3	4	20			

ومنهُ فإنّ القيمة المستوفاة المطلوبة تُعطى بالشكل:

$$f(1.5) \cong P_3(0.5)$$
$$= \sum_{i=0}^{3} \binom{0.5}{i} \nabla^i (f(x_i))$$
$$= 5 + \binom{0.5}{1} \nabla^1 (f(x_1)) + \binom{0.5}{2} \nabla^2 (f(x_2))$$
$$= 5 + \binom{0.5}{1} 4 + \binom{0.5}{2} 1$$
$$= 5 + 2 - 0.125 = 6.875$$

ثانياً: ندرس الآن الحالة التّي يكون فيها $x = x_n - sh$.

مبرهنة(10):

بفرض لدينا $n+1$ نقطة، $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$ ،بحيث:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad ; i = 0,1,\ldots,n-1$$

و

$$x = x_n - sh$$

عندئذٍ فإنّ حدودية استيفاء نيوتن- الفروق المقسومة تكتب بالشكل:

$$P_n(x_n - sh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{s}{i} \Delta^i \left(f\left(x_{n-i}\right)\right) \tag{26}$$

$$P_n(x_n - sh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{s}{i} \nabla^i \left(f\left(x_n\right)\right) \tag{27}$$

وتدعى هذه الصيغ بحدودية استيفاء نيوتن-غريغوري التراجعية.

الإثبات:

وجدنا سابقاً أنّ حدودية استيفاء نيوتن- الفروق المقسومة التراجعية تُعطى بالشكل:

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{i=1}^{n} f[x_n, \ldots, x_{n-i}] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_{n-j})$$

وبفرض أنّ $x_{n-j} = x_n + jh$

واعتماداً على المبرهنة(4) فإننا نجد أنّ:

i	x_i	$\nabla^0(f(x_i))$	$\nabla^1(f(x_i))$	$\nabla^2(f(x_i))$	$\nabla^3(f(x_i))$
0	1	5			
			4		
1	2	9		1	
			5		**0**
2	3	14		**1**	
			6		
3	4	**20**			

ومنهُ فإنّ القيمة المستوفاة المطلوبة تُعطى بالشكل:

$$P_n(x_n - sh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{s}{i} \nabla^i \big(f(x_n)\big)$$

$$f(3.5) \cong P_4(2.5)$$

$$= \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{2.5}{i} \nabla^i (f(x_3))$$

$$= 20 - \binom{2.5}{1} \nabla^1 (f(x_3)) + \binom{2.5}{2} \nabla^2 (f(x_3))$$

$$= 20 - \binom{2.5}{1} 6 + \binom{2.5}{2} 1$$

$$= 20 - 15 + 1.875 = 6.875$$

مثال(21):

ليكن لدينا جدول البيانات التالي والمطلوب:

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

1. أوجد جدول الفروق المقسومة ثم أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة.

2. أوجد قيمة تقريبية للقيم الآتية: $f(1.1)$ و $f(2.0)$ و $f(1.5)$

الحل:

اعتماداً على ماسبق فإنّ جدول الفروق المقسومة وحدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة يُعطيان بالشكل:

i	x_i	$f[x_i]$				
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		-0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

الجدول 8

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3) \\ & + 0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6) \\ & + 0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9) \end{aligned}$$

حتّى نوجد قيمة تقريبية للمقدار $f(1.1)$ نختار العقد بحيث تكون قريبة من 1.1، لكن بما أنّ 1.1 تقع بين قيم x الواقعة في بداية جدول الفروق المقسومة، فإنّ أفضل اختيار للعقد هو: $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$ وهذا الاختيار يدفعنا إلى استخدام الفروق المقسومة من المرتبة الرابعة. واعتماداً على ما سبق نجد أنّ $h = 0.3$ و $s = \frac{1}{3}$، ولنستخدم مثلاً حدودية استيفاء نيوتن-غريغوري التقدمية (25)

التّي تعتمد على الفروق المقسومة التي وضعنا تحتها خطاً متصلاً في الجدول السابق إضافةً إلى تلك التي تحتها خطان متصلان ومنه:

$$P_4(1.1) = P_4(1.0+\frac{1}{3}(0.3)) = 0.7651977+\frac{1}{3}(0.3)(-0.4837057)$$
$$+\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(0.3)^2(-0.1087339)$$
$$+\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(0.3)^3(0.0658784)$$
$$+\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})(0.3)^4(0.0018251) = 0.7196460$$

أمّا لتقريب $f(2.0)$ فإننا نلاحظ أنّ 2.0 تقع تقريباً بين قيم x الواقعة في نهاية جدول الفروق المقسومة، وعليه فإنّنا سنستخدم مثلاً حدودية استيفاء نيوتن-غريغوري التراجعية (27)، التي تعتمد على الفروق المقسومة التي تحتها خط منقط في الجدول السابق إضافةً إلى تلك التي تحتها خطان متصلان ومنهُ:

$$P_4(x) = P_4(2.2-\frac{2}{3}(0.3)) = 0.1103623-\frac{2}{3}(0.3)(-0.5715210)$$
$$-\frac{2}{3}(\frac{1}{3})(0.3)^2(0.0118183)-\frac{2}{3}(\frac{1}{3})(\frac{4}{3})(0.3)^3(0.0680685)$$
$$-\frac{2}{3}(\frac{1}{3})(\frac{4}{3})(\frac{7}{3})(0.3)^4(0.0018251) = 0.2238754$$

حاولنا فيما سبق أن نستخدم حدوديات استيفاء نيوتن للحصول على أفضل تقريب، إلا أنّ جميع هذه الحدوديات غير ملائمة للحصول على أفضل تقريب لـ $f(1.5)$ وذلك لأنّ 1.5 تقع بين قيم x الواقعة بالقرب من مركز جدول الفروق المقسومة مما دفع العلماء إلى إيجاد عدد من الصيغ لتقريب مثل هذه القيمة تُعرف بصيغ الفروق المتمركزة وسنقدم فيما يأتي واحدة من هذه الصيغ ألا وهي صيغة سترلينغ.

6-4 صيغة سترلينغ (Strling's formula):

لتكن x نقطة واقعة بالقرب من مركز جدول الفروق المقسومة عندئذٍ يمكن

إيجاد قيمة تقريبية للتابع $f(x)$ باتباع الخطوات التالية:

1. نختار x_0 نقطة قريبة من النقطة x التّي نريد إيجاد قيمة تقريبية للتابع f عندها.
2. نرمز للعقد التّي تقع تحت x_0 مباشرةً بالرموز: $x_1, x_2, \ldots$.
3. ونرمز للعقد التي تقع فوق x_0 مباشرةً بالرموز: $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$.

عندئذٍ تُعطى صيغة ستربلينغ بالعلاقة:

$$P_n(x) = P_{2m+1}(x) = f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1]$$
$$+ \frac{s(s^2-1)h^3}{2} 2f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] + \cdots$$
$$+ s^2(s^2-1)(s^2-1)\cdots(s^2-(m^2-(m-1))h^{2m} f[x_{-m}, \ldots, x_m]$$
$$+ \frac{s(s-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}(f[x_{-m-1}, \ldots, x_m] + f[x_{-m}, \ldots, x_{m+1}]$$

وذلك من أجل $n=2m+1$ أي n فردي. أمّا إذا كان n زوجياً، أي $n=2m$ ، فإننا نستخدم الصيغة نفسها بعد أن نستغني عن السطر الأخير فيها، ويوضح الجدول الآتي مدخلات هذه العلاقة:

x	$f(x)$	$f[x_{-i}, x_{-i+1}]$	$f[x_{-i}, x_{-i+1}, x_{-i+2}]$	$f[x_{-i}, x_{-i+1}, x_{-i+2}, x_{-i+3}]$	$f[x_{-i}, x_{-i+1}, x_{-i+2}, x_{-i+3}, x_{-i+4}]$
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$\underline{f[x_{-1}, x_0]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]}$	
x_0	$\underline{f[x_0]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$
		$\underline{f[x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			

5-استيفاء هرميت (Hermite's Interpolation):

1-5 الحدوديات الملاصقة (Osculating Polynomials):

ليكن لدينا $n+1$ عدداً مختلفاً $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ في المجال $[a,b]$ ولتكن m_i أعداداً صحيحةً غير سالبة مرتبطة بالأعداد x_i وذلك من أجل $i = 0,1,\ldots,n$، بفرض $f \in C^m[a,b]$ حيث $m = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$، عندئذ تُعرف الحدودية الملاصقة التّي تُقرب التابع f بأنّها الحدودية $P(x)$ التّي درجتها أقل ما يُمكن والتّي تحقق:

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \qquad i = 0,1,\ldots,n \qquad k = 0,1,\ldots,m_i$$

ملاحظات:

- إنّ درجة أي حدودية لاثمة هي على الأكثر

$$M = n + \sum_{i=0}^{n} m_i$$

وذلك لأنّ عدد الشروط الواجب تحققها هو $(n+1) + \sum_{i=0}^{n} m_i$.

- عندما يكون $n = 0$ فإننا نجد أنّ الحدودية الملاصقة التّي تقرب التابع f ما هي إلا حدودية تايلور من المرتبة m_0 وذلك من أجل x_0.
- عندما يكون $m_i = 0$ وذلك من أجل كل i، فإنّنا نجد أنّ الحدودية الملاصقة ما هي إلا حدودية لاغرانج من الدرجة n التّي تستوفي f وذلك من أجل العقد $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2-5 استيفاء هرميت:

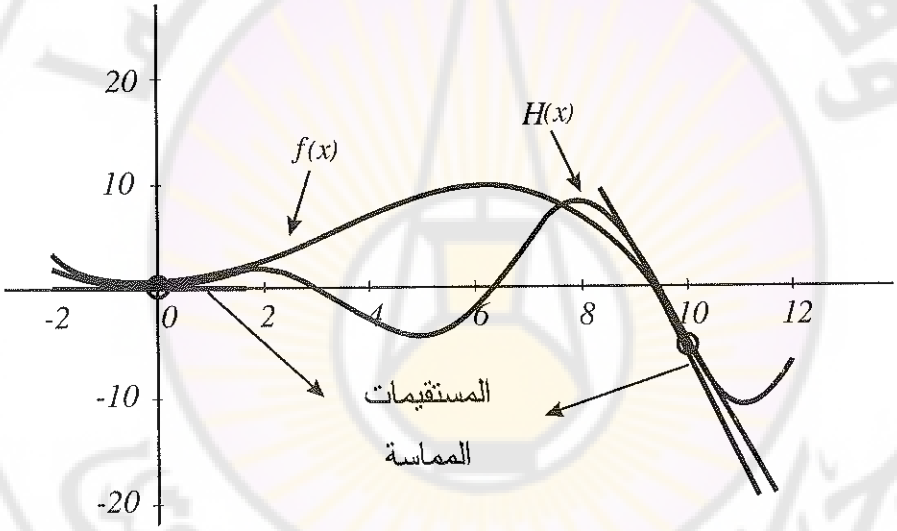
إنّ الحدوديات التّي نحصل عليها في الحالة التّي يكون فيها $m_i = 1$ وذلك من أجل $i = 0,1,\ldots,n$ تُسمى حدوديات هرميت.

ملاحظة:

يمكن بكل سهولة ملاحظة أنّ أي حدودية $P(x)$ من حدوديات هرميت تحقق الشروط:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad ;i = 0,\ldots,n$$
$$\frac{dP(x_i)}{dx} = \frac{df(x_i)}{dx} \quad ;i = 0,\ldots,n$$

بمعنى أنّ النقاط $(x_i, f(x_i))$ ما هي إلا نقاط تماس منحني الحدودية $P(x)$ مع منحني التابع f ، وعليه بإمكاننا القول إنّ الخطوط المستقيمة الماسة لمنحني التابع f تتطابق مع مماسات منحني الحدودية $P(x)$.



مبرهنة(11):

بفرض $f \in C^1[a,b]$ و $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ أعداد مختلفة، عندئذٍ فإنّ الحدودية الوحيدة التّي درجتها أقل ما يُمكن وتتفق مع f و f' بالنقاط $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي حدودية هرميت من الدرجة $2n+1$ على الأكثر والتّي تُعطى بالعلاقة:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x) \qquad (28)$$

حيث:

$$H_{n,j}(x)=[1-2(x-x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2_{n,j}(x)$$

(29)

$$\hat{H}_{n,j}(x)=(x-x_j)L^2_{n,j}(x) \qquad \text{و}$$

حيثُ ترمز $L_{n,j}(x)$ إلى المعامل j لحدودية لاغرانج من الدرجة n وتُعطى بالعلاقة:

$$L_{n,j}(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

وأكثر من ذلك، إذا كان $f\in C^{2n+2}[a,b]$ ، فإننا نجد أنّ:

$$f(x)=H_{2n+1}(x)+\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi(x))$$

وذلك من أجل $\xi(x)$ (عادةً ما تكون مجهولة) في المجال (a,b).

الإثبات:

نعلم أنّ:

$$L_{n,j}(x_i)=\begin{cases}0, & if\ i\neq j\\ 1, & if\ i=j\end{cases}$$

إذن عندما $i\neq j$ نجد:

$$H_{n,j}(x_i)=0 \quad \text{و} \quad \hat{H}_{n,j}(x_i)=0$$

بينما

$$H_{n,i}(x_i)=[1-2(x_i-x_i)L'_{n,i}(x_i)]\cdot 1=1$$

$$\hat{H}_{n,i}(x_i)=(x_i-x_i)\cdot 1^2=0 \qquad \text{و}$$

وعليه نجد:

$$H_{2n+1}(x_i)=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}f(x_j)\cdot 0+f(x_i)\cdot 1+\sum_{j=0}^{n}f'(x_j)\cdot 0=f(x_i)$$

بمعنى أنّ H_{2n+1} تتفق مع f عند النقاط $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$.

لنبرهن الآن أنّ $H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i) \quad ;i=0,1,\ldots,n$

من أجل ذلك وبملاحظة كون $L_{n,j}(x)$ قاسماً لـ $H'_{n,j}(x)$ فإننا نجد أنّ:

$$H'_{n,j}(x_i)=0, \qquad i\neq j$$

إضافة إلى ذلك عندما يكون $i=j$ و $L_{n,i}(x_i)=1$ فإنّه ينتج لدينا أنّ:

$$\begin{aligned}H'_{n,i}(x_i)&=-2L'_{n,i}(x_i)\cdot L^2_{n,i}(x_i)+\left[1-2(x_i-x_i)L'_{n,i}(x_i)\right]\cdot 2L_{n,i}(x_i)\\&=-2L'_{n,i}(x_i)+2L'_{n,i}(x_i)=0\end{aligned}$$

إذن: $H'_{n,j}(x_i)=0$ وذلك من أجل جميع قيم i و j .

أخيراً:

$$\begin{aligned}\hat{H}'_{n,j}(x)&=L^2_{n,j}(x_i)+(x-x_j)2L'_{n,j}(x_i)L_{n,j}(x_i)\\&=L_{n,j}(x_i)\left[L_{n,j}(x_i)+(x-x_j)2L'_{n,j}(x_i)\right]\end{aligned}$$

وعليه فإنّ:

$$\hat{H}'_{n,j}(x_i)=0 \quad if\ i\neq j$$

و

$$\hat{H}'_{n,i}(x_i)=0 \quad if\ i=j$$

اعتماداً على ما سبق نجد أنّ:

$$H'_{2n+1}(x_i)=\sum_{j=0}^{n}f(x_j)\cdot 0+f'(x_i)\cdot 1+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}f'(x_j)\cdot 0=f'(x_i)$$

ومنه فإنّ H_{2n+1} تتفق مع f و H'_{2n+1} تتفق مع f' عند العقد $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$.

أمّا برهان وحدانية الحدودية H_{2n+1} وصحة صيغة الخطأ الواردة في نص المبرهنة فإنه يُترك تمريناً للطالب.

توجيه : لُبرهان وحدانية الحدودية H_{2n+1} نفرض وجود حدودية أُخرى ولتكن $P(x)$ ثمّ ندرس $D=H_{2n+1}-P$ و D' عند العقد $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ ، أمّا لبرهان صحة صيغة الخطأ فإننا نستخدم الطريقة نفسها التّي استخدمناها في برهان خطأ لاغرانج كما نعتمد على كل من المبرهنة (2) والتابع $g(t)$:

$$g(t)=f(t)-H_{2n+1}(t)-\frac{(t-x_0)^2\cdots(t-x_n)^2}{(x-x_0)^2\cdots(x-x_n)^2}\left[f(x)-H_{2n+1}(x)\right]$$

وحقيقة كون $g'(t)$ يملك $2n+2$ صفراً مختلفاً في المجال $[a,b]$.

مثال(23):

أوجد حدودية استيفاء هرميت الموافقة للثلاثيات التالية:

$$(-1,1,5),(0,1,3),(1,3,7)$$

ذات الشكل العام: $\{(x_i, f(x_i), f'(x_i))\}_{i=0}^{n}$.

الحل:

$$L_{2,0}(x)=\prod_{j=1}^{2}\left(\frac{x-x_j}{x_0-x_j}\right)=\frac{x^2-x}{2}$$

$$L_{2,1}(x)=\prod_{j=0,j\neq 1}^{2}\left(\frac{x-x_j}{x_0-x_j}\right)=-(x^2-1)$$

$$L_{2,2}(x)=\prod_{j=0}^{1}\left(\frac{x-x_j}{x_0-x_j}\right)=\frac{x^2+x}{2}$$

وكذلك لدينا:

$$L'_{2,0}(x_0)=-\frac{3}{2},\qquad L'_{2,1}(x_1)=0,\qquad L'_{2,2}(x_2)=\frac{3}{2}$$

وبناءً عليه فإنّ حدودية استيفاء هرميت تُعطى بالشكل:

$$H_5(x)=\sum_{i=0}^{2}\left(1-2(x-x_i)L'_i(x)\right)L_i^2(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{2}(x-x_i)L_i^2(x)f'(x_i)$$

$$H_5(x)=\left(1-2(x+1)\left(\frac{-3}{2}\right)\right)\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2+\left(x^2-1\right)^2+$$

$$3\left(1-2(x-1)\left(\frac{3}{2}\right)\right)\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2+5(x+1)\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2+$$

$$3x(x^2-1)^2+7(x-1)\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2$$

$$= (3x+4)\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 + \left(x^2-1\right)^2 + 3(4-3x)\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 +$$

$$5(x+1)\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 + 3x(x^2-1)^2 + 7(x-1)\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2$$

$$= (8x+9)\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 + (3x+1)\left(x^2-1\right)^2 + (5-2x)\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)x^5 - \left(\frac{1}{2}\right)x^4 - \left(\frac{13}{2}\right)x^3 + \left(\frac{3}{2}\right)x^2 + 3x + 1$$

مثال(24):

أوجد تقريباً لـ $f(1.5)$ باستخدام حدودية هرميت الموافقة للبيانات الواردة في الجدول الآتي:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

الحل: سنقوم بدايةً بحساب حدوديات لاغرانج ومشتقاتها منه

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}$$

$$L'_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x^2 - \frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}$$

$$L'_{2,1}(x) = \frac{-200}{9}x + \frac{320}{9}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}$$

$$L'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}.$$

وعليه فإنّ الحدوديات $H_{2,j}(x)$ و $\hat{H}_{2,j}(x)$ تُعطى كما يلي:

$$H_{2,0}(x)=[1-2(x-1.3)(-5)]\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$=(10\text{x-}12)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x)=1\cdot\left(-\frac{100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x)=10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x)=(\text{x-}1.3)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x)=(x-1.6)\left(-\frac{100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x)=(x-1.9)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

ومنهُ فإنّ حدودية استيفاء هرميت تُعطى بالشكل:

$$H_5(x)=0.6200860H_{2,0}(x)+0.4554022H_{2,1}(x)+0.2818186H_{2,2}(x)$$
$$-0.5220232\hat{H}_{2,0}(x)-0.5698959\hat{H}_{2,1}(x)-0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$

$$f(1.5)\cong H_5(1.5)=0.6200860\left(\frac{4}{27}\right)+0.4554022\left(\frac{64}{81}\right)+0.2818186\left(\frac{5}{81}\right)$$
$$-0.5220232\left(\frac{4}{405}\right)-0.5698959\left(\frac{-32}{405}\right)-0.5811571\left(\frac{-2}{405}\right)$$
$$=0.5118277$$

3-5 العلاقة بين حدوديات هرميت وحدوديات لاغرانج:

على الرغم من أنّ المبرهنة (10) قد زودتنا بتوصيف كامل لحدوديات هرميت، إلا أنّه من الواضح استناداً إلى الأمثلة السابقة أنّ حاجتنا إلى حساب قيم حدوديات لاغرانج ومشتقاتها عند العقد، تجعل هذه الطريقة مملة ومضجرة حتّى من أجل قيم

صغيرة لـ n، الأمر الذي دفع العلماء إلى التفكير في طريقة بديلة لإيجاد تقريبات هرميت، فأوجدوا طريقة تعتمد حدوديات نيوتن- الفروق المقسومة كقاعدة بدلاً من حدوديات لاغرانج عند العقد $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

كنا قد وجدنا أنّ حدوديات نيوتن-الفروق المقسومة تُعطى بالصيغة (انظر العلاقة 19):

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

بفرض لدينا $n+1$ عدد مختلف $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$، بحيث إنّ قيمة f و f' عند كل عدد من هذه الأعداد معلوم.

لنُعرّف متتالية جديدة $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ كما يلي:

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i \qquad ; i = 0,1,\ldots,n$$

ولنبني جدول الفروق المقسومة باستخدام متتالية الأعداد الجديدة $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$. بما أنّ $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ من أجل كل i، فإننا لا نستطيع تعريف $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ مستخدمين صيغة الفروق المقسومة التّي كنا قد عرفناها سابقاً. فإذا فرضنا اعتماداً على المبرهنة(3) التّي تُوضح العلاقة بين الفروق المقسومة من الدرجة n والمشتق من المرتبة n للتابع f، أن التبديل المناسب في هذه الحالة هو: $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$، فإنه يصبح بإمكاننا استخدام $f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)$ بدلاً من الفروق المقسومة من المرتبة الأولى غير المعرفة هنا التّي لها الشكل:

$$f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \ldots, f[z_{2n}, z_{2n+1}]$$

أمّا بالنسبة إلى بقية الفروق المقسومة فإننا نستطيع استنتاجها كالمعتاد. وعليه فإنّ جدول الفروق (الفروق المقسومة الأولى والثانية مثلاً) هو الآتي:

z	$f[z]$	الفروق المقسومة الأولى	الفروق المقسومة الثانية
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	

z	$f[z]$	الفروق المقسومة الأولى	الفروق المقسومة الثانية
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

مثال(25):

أوجد تقريباً لـ $f(0.434)$ باستخدام حدودية هرميت الموافقة للبيانات الواردة في الجدول الآتي:

K	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	0.3	0.29552	0.95534
1	0.32	0.31457	0.94924
2	0.35	0.34290	0.93937

الحل:

ليكن جدول نيوتن–الفروق المقسومة :

z	$f[z]$					
1.3	0.29552					
		0.95534				
1.3	0.29552		-0.142			
		0.95250		-1.505		
1.6	0.31457		-0.163		20.776	
		0.94924		-0.0112		-436.1
1.6	0.31457		-0.16356		-10293	
		0.94433		-0.062667		
1.9	0.34290		-0.16544			
		0.93937				
1.9	0.34290					

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned} H_5(x) = {} & 0.29552 + (x-0.3)(0.95534) + (x-0.3)^2(-0.142) + \\ & + (x-0.3)^2(x-0.32)(-1.505) \\ & + (x-0.3)^2(x-0.32)^2(20.776) \\ & + (x-0.3)^2(x-0.32)^2(x-0.35)(-436.1) \\ = {} & 0.5118277 \end{aligned}$$

ومنه فإن :

$$f(0.434) \approx H_5(0.434) = 0.33349$$

لندرس الآن الخطأ الناتج عن تقريب تابع ما بحدودية هرميت، ومن أجل ذلك نستعرض المبرهنة الآتية:

مبرهنة(12):

بفرض $f \in C^{2n+2}[a,b]$ وليكن لدينا $n+1$ ثلاثية معطاة $\{(x_i, f(x_i), f'(x_i))\}_{i=0}^{n}$ عندئذٍ يُعطى خطأ استيفاء هرميت بالعلاقة الآتية:

$$E_{n+1}(x)=\left(\frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!}\right)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \qquad (30)$$

حيث $\eta\in[x_0,x_n]$.

الإثبات:

لتكن $P_{2n+1}(x)$ حدودية استيفاء هرميت الموافقة للثلاثيات $\{(x_i,f(x_i),f'(x_i))\}_{i=0}^{n}$، وبفرض أنّ التابع المستوفى معلوم، عندئذ نجد أنّ الخطأ يُعطى بالشكل:

$$E_{n+1}(x)=P_{2n+1}(x)-f(x)$$
$$=g(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

ولتكن:

$$W(u)=g(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2-f(u)+P_{2n+1}(u)$$

من الواضح أنّ: $W(x)=0\ ,\ W(x_i)=W'(x_i)=0\ \ ;0\le i\le n$

وعليه فإنّ:

$$W^{(2n+2)}(\eta)=0=g(x)(2n+2)!-f^{(2n+2)}(\eta)\qquad ;\eta\in[x_0,x_n]$$

أي أنّ $g(x)=\dfrac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}$، وبالتبديل في عبارة الخطأ نجد:

$$E_{n+1}(x)=\left(\frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!}\right)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

مثال(26):

بفرض أنّ حدودية استيفاء هرميت الموافقة للنقاط $(1,2,2),(2,5,4)$ تُعطى بالشكل:

$$P_3(x)=2H_0(x)+2H_1(x)+5H_2(x)+4H_3(x)$$

والمطلوب: أوجد الحدوديات التكعيبية $H_i(x)\ ;0\le i\le 4$.

الحل:

من الواضح لدينا أنّ $P_3(1)=2,P_3'(1)=2,P_3(2)=5,P_3'(2)=4$ ومنه ينتج أنّ:

$$H_0(1)=1 \qquad H_0'(1)=H_0(2)=H_0'(2)=0$$
$$H_1'(1)=1 \qquad H_1(1)=H_1(2)=H_1'(2)=0$$
$$H_2(2)=1 \qquad H_2(1)=H_2'(2)=H_2'(1)=0$$
$$H_3'(2)=1 \qquad H_3(1)=H_3(2)=H_3'(1)=0$$

وبما أنّ $H_i(x)$ حدودية تكعيبية، فإنّ لها الشكل:

$$H_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i$$

وبسهولة ينتج لدينا:

$$H_0(x)=2x^3-9x^2+12x-4$$
$$H_1(x)=x^3-5x^2+8x-4$$
$$H_2(x)=-2x^3+9x^2-12x+5$$
$$H_3(x)=x^3-4x^2+5x-2$$

إذن:

$$P_3(x)=2H_0(x)+2H_1(x)+5H_2(x)+4H_3(x)=x^2+1$$

خوارزمية هرميت:

لإيجاد معاملات حدودية استيفاء هرميت $H(x)$ للتابع f عند $n+1$ عقدة مختلفة $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ نستطيع اعتماد الخوارزمية التالية:

INPUT numbers $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$;

$f(x_0),f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)$ and $f'(x_0),f'(x_1),f'(x_2),\ldots,f'(x_n)$.

OUTPUT the numbers $Q_{0,0},Q_{1,1},\ldots,Q_{2n+1,2n+1}$ where

$$H(x)=Q_{0,0}+Q_{1,1}(x-x_0)+Q_{2,2}(x-x_0)^2+Q_{3,3}(x-x_0)^2(x-x_1)$$
$$+Q_{4,4}(x-x_0)^2(x-x_1)^2+\cdots+Q_{2n+1,2n+1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_{n-1})^2(x-x_n)$$

Step 1 For $i=0,1,\ldots,n$ do steps 2 and 3

Step 2 Set

$$z_{2i} = x_i;$$
$$z_{2i+1} = x_i;$$
$$Q_{2i,0} = f(x_i)$$
$$Q_{2i+1,0} = f(x_i)$$
$$Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$$

Step 3 if $i \neq 0$ Then set

$$Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$$

Step 4 For $i = 2,3,\ldots,2n+1$

For $j = 2,3,\ldots,i$

$$\text{Set } Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$$

Step 5 OUTPUT $(Q_{0,0}, Q_{1,1}, \ldots, Q_{2n+1,2n+1})$;
STOP.

6-الاستيفاء باستخدام جذور تشيبتشيف:

وجدنا عبارة الخطأ في استيفاء لاغرانج ونيوتن لـ $N+1$ نقطة متباينة

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi) \qquad x_0 < \xi < x_N$$

$$\Rightarrow$$

$$E(x) = \frac{1}{(N+1)!} \prod_{i=0}^{N} (x - x_i) f^{(N+1)}(\xi) \qquad x_0 < \xi < x_N$$

لإيجاد الخطأ الأصغري: نلاحظ أننا لا نستطيع التحكم $f^{(N+1)}(\xi)$ من عبارة $E(x)$ لعدم معرفتنا بالتابع f ولا نستطيع تعيين ξ. إذاً هدفنا هو تصغير الخطأ $E(x)$ بجعل الجداء $\prod_{i=0}^{N}(x - x_i)$ أصغر عن طريق اختيار مجموعة خاصة من نقاط الاستيفاء وهي نقاط تشيبتشيف.

1-6 كثيرات حدود تشيبتشيف

تُعرف كثيرة حدود تشيبتشيف بالشكل التالي:

$$T_j(x) \equiv \cos(j \cos^{-1} x) \quad on \quad -1 \le x \le 1 \quad j = 0,1,... \tag{31}$$

كثيرة حدود تشيبتشيف ذات الدرجة الصفرية:

$$T_0(x) = \cos(0 \cos^{-1} x) \quad \Rightarrow$$
$$T_0(x) = 1$$

كثيرة حدود تشيبتشيف من الدرجة الأولى:

$$T_1(x) = \cos(1 \cos^{-1} x) \quad \Rightarrow$$
$$T_1(x) = x$$

كثيرة حدود تشيبتشيف من الدرجة الثانية:

$$T_2(x) = \cos(2 \cos^{-1} x)$$

ولمّا كان

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

نجد أن

$$T_2(x) = 2\cos^2(\cos^{-1} x) - 1 \quad \Rightarrow$$
$$T_2(x) = 2[\cos(\cos^{-1} x)][\cos(\cos^{-1} x)] - 1 \quad \Rightarrow$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

كثيرة حدود تشيبتشيف من الدرجة الثالثة:

$$T_3(x) = \cos(3 \cos^{-1} x)$$

وبما أن

$$\cos(2\alpha) = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

نجد

$$T_3(x) = 4[\cos(\cos^{-1} x)]^3 - 3\cos(\cos^{-1} x) \quad \Rightarrow$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

وهكذا يمكن الوصول إلى الشكل العام

$$T_j(x) = 2xT_{j-1}(x) - T_{j-2}(x)$$

يمكن تحويل كثيرات حدود تشيبتشيف إلى حدوديات منظمة (واحدية المعامل للدرجة الأعلى)

$$\psi_j(x) = \frac{T_j(x)}{2^{j-1}} \tag{32}$$

فعلى سبيل المثال:

$$\psi_3(x) = \frac{T_3(x)}{2^2} = x^3 - \frac{3}{4}x$$

2-6 خصائص كثيرات حدود تشيبتشيف

لمّا كان $-1 \le \cos(x) \le 1$ ، فإن:

$$-1 \le T_j(x) \le 1$$

وفي هذه الحالة

$$\frac{-1}{2^{j-1}} \le \psi_j(x) \le \frac{1}{2^{j-1}} \tag{33}$$

لندرس جذور كثيرة حدود تشيبتشيف المنظمة، $\psi_{N+1}(x)$

$$\psi_{N+1}(x^c) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T_{N+1}(x^c) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\cos[(N+1)\cos^{-1}(x^c)] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(N+1)\cos^{-1}(x^c) = \cos^{-1}(0)$$

ولما كان

$$\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

فإن

$$(N+1)\cos^{-1}(x^c_{n-1}) = \left(N + 1 + \frac{1}{2} - n\right)\pi \qquad n = 1, 2, \ldots, N+1$$

$$x_{n-1}^{c}=\cos\left[\frac{\left(N+1+\frac{1}{2}-n\right)\pi}{N+1}\right] \qquad n=1,2,...,N+1$$

بما أن $x_0^c, x_1^c, x_2^c, ...$ جذور $\psi_{N+1}(x)$ نحصل على

$$\psi_{N+1}(x)=(x-x_0^c)(x-x_1^c)...(x-x_N^c) \quad \Rightarrow$$

$$\psi_{N+1}(x)=\prod_{i=0}^{N}(x-x_i^c)$$

مثال(27):

أوجد جذور تشيبتشيف لكثيرة حدود تشيبتشيف من الدرجة $N+1=3$

$$\psi_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$$

يمكن حساب الجذور بالشكل:

$$x_0^c=\cos\left[\frac{3+\frac{1}{2}-1}{3}\cdot\pi\right]=\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-0.866025$$

$$x_1^c=\cos\left[\frac{3+\frac{1}{2}-2}{3}\cdot\pi\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$x_1^c=\cos\left[\frac{3+\frac{1}{2}-3}{3}\cdot\pi\right]=0.866025$$

نلاحظ أن ناتج الجداء $(x-x_0^c)(x-x_1^c)(x-x_2^c)$ يساوي كثيرة حدود تشيبتشيف من الدرجة الثالثة $\psi_3(x)$. إذاً

$$(x+0.866025)(x-0)(x-0.866025)=x(x^2-0.75)=x^3-\frac{3}{4}x=\psi_3(x)$$

نلاحظ أن الطرف الأول هو جداء حدوديات تشبه صيغة الحدوديات الموجودة في

عبارة الخطأ لاستيفاء لاغرانج (حيث الجذور هي نقاط الإستيفاء).

3-6 تطبيقات جذور تشيبتشيف كنقاط استيفاء

لتكن $x_0^c, x_1^c, x_2^c, ...$ جذور كثيرة الحدود $\psi^{N+1}(x)$، عندئذٍ

$$\psi_{N+1}(x) = \prod_{i=0}^{N}(x - x_i^c) \qquad (34)$$

وبفرض أن $x_0^c, x_1^c, x_2^c, ...$ هي نقاط الإرتكاز في استيفاء لاغرانج نجد أن تابع الخطأ:

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)$$

يؤول إلى

$$E(x) = \frac{1}{(N+1)!}\psi_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\xi) \qquad (35)$$

ملاحظة:

بالاستفادة من العلاقة (33) نجد:

$$-\frac{1}{2^N (N+1)!} f^{(N+1)}(\xi) \le e(x) \le \frac{1}{2^N (N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)$$

مثال(28):

أوجد جذور تشيبتشيف من الدرجة الثالثة ضمن المجال $-1 \le x \le 1$ ثم استخدم تلك النقاط لإيجاد استيفاء لاغرانج ثم قدر الخطأ الأعظمي المرتكب.

الحل: جذور كثيرة حدود تشيبتشيف مع $N+1=3$ هي:

$$x_0^c = -0.866, x_1^c = 0, x_2^c = 0.866$$

حدودية استيفاء لاغرانج هي:

$$g(x) = f_0 \frac{(x-x_1^c)(x-x_2^c)}{(x_0^c - x_1^c)(x_0^c - x_2^c)} + f_1 \frac{(x-x_0^c)(x-x_2^c)}{(x_1^c - x_0^c)(x_1^c - x_2^c)}$$
$$+ f_2 \frac{(x-x_0^c)(x-x_1^c)}{(x_2^c - x_1^c)(x_2^c - x_1^c)}$$

نلاحظ أن قيم التابع f_0, f_1, f_2 هي

$$f_0 = f(x_0^c), f_1 = f(x_1^c), f_2 = f(x_2^c)$$

بتعويض القيم x_0^c, x_1^c, x_2^c

$$g(x) = f_0 \frac{(x-0)(x-0.866)}{(-0.866-0)(-0.866-0.866)} + f_1 \frac{(x+0.866)(x-0.866)}{(0+0.866)(0-0.866)}$$

$$+ f_2 \frac{(x+0.866)(x-0)}{(0.866+0.866)(0.866-0)}$$

الخطأ الأعظمي ضمن المجال يمكن أن يقدر $(N+1=3)$:

$$E^c(x) = \frac{1}{3!}\psi_3(x) f^{(3)}(\xi), \quad -1 \le \xi \le 1 \qquad \Rightarrow$$

$$E^c(x) \cong \frac{1}{3!}\psi_3(x) f^{(3)}(x_m), \quad x_m = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\max|E^c(x)| = \frac{1}{3!}\max(\psi_3(x)) f^{(3)}(x_m)$$

ولكن

$$-\frac{1}{2^N} \le \psi_{N+1}(x) \le -\frac{1}{2^N}$$

إذاً

$$\max|E^c(x)| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^2} f^{(3)}(x_m) \quad \Rightarrow$$

$$\max|E^c(x)| = \frac{1}{24} f^{(3)}(x_m) \quad \Rightarrow$$

4-6 تعميم مجال الاستيفاء

يمكن تعميم الدراسة السابقة من المجال $[-1,1]$ إلى المجال $[a,b]$ باستخدام التحويل

$$x = \frac{2z-a-b}{b-a} \Leftrightarrow z = \frac{(b-a)x+a+b}{2}$$

باستخدام هذا التحويل وتبديل x في كل الصيغ. فإن جذور تشيبتشيف أو نقاط الاستيفاء تصبح:

$$z=\frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{N+1+\frac{1}{2}-n}{N+1}\pi\right)+a+b\right],\quad n=1,2,\ldots,N+1 \tag{36}$$

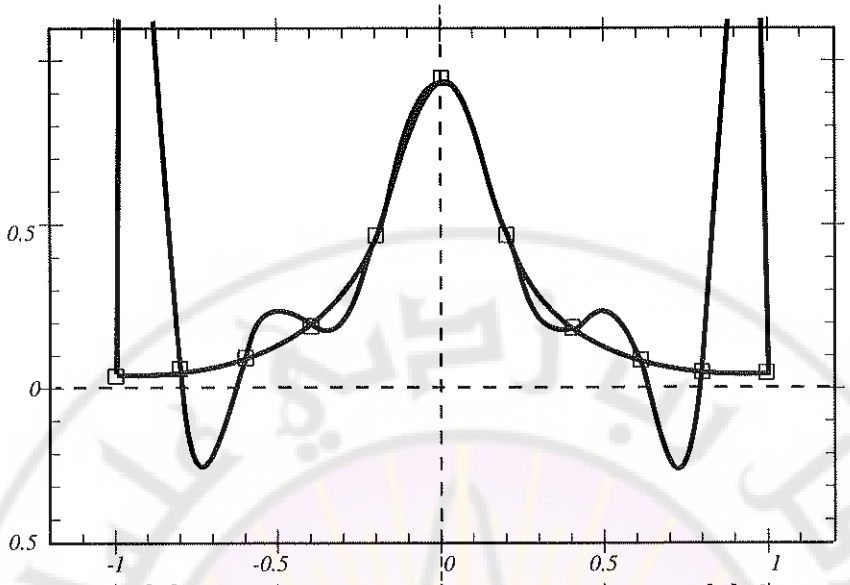
قضية للمناقشة:

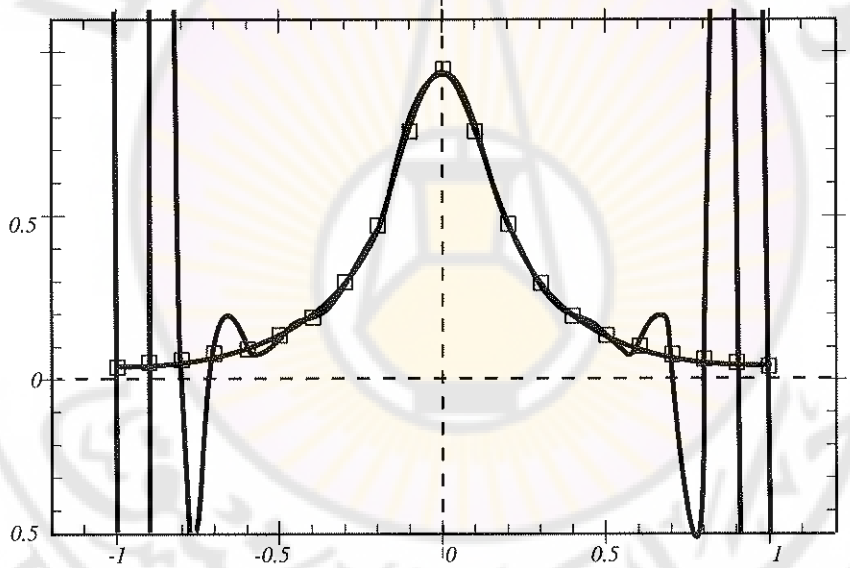
هل زيادة درجة حدودية الاستيفاء يُنتج حدودية استيفاء أفضل؟ أي هل زيادة عدد نقاط الاستيفاء يُنتج حدودية استيفاء أفضل؟

يُمكن للشخص أن يتوقع أنّه كلما ازدادت درجة حدودية الاستيفاء (وذلك بزيادة عدد نقاط الاستيفاء) كان الاستيفاء الناتج أفضل، ولكن لسوء الحظ هذا الأمر غير صحيح عموماً، ففي الواقع هناك لعدد من التوابع f حدوديات استيفاء لها تذبذب يزداد بين العقد x_i بازدياد عددها n، الأمر الذي يضعنا أمام حالة عدم استقرار عددي. ويُعد التابع الذي طرحه رانج الذّي أُطلِق عليه اسم تابع رانج من أشهر الأمثلة على هذه المسألة، وهو التابع المعرف بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$$

وأثبتَ أنّه من أجل عقد متساوية البعد، يكون الخطأ الأعظمي الناتج عن استيفاء هذا التابع لانهائياًعندما $n\to\infty$، ويمكن ملاحظة ذلك من خلال الشكلين الآتيين حيثُ استخدمنا في الأول 11 نقطة وفي الثاني 12 نقطة:





7- استيفاء سبلين (Spline's Interpolation):

عرضنا في الفقرات السابقة طرائق لإيجاد حلول لمسألة الاستيفاء، إلا أنّ الخط البياني لحدودية الاستيفاء الناتجة عن تلك الحلول كان في كثير من الحالات متذبذباً، بسبب مروره بعدد كبير من النقاط، وهذا يؤدي بدوره إلى الحصول على منحنٍ غير

مقبول، الأمر الذّي دفع العلماء إلى إيجاد طريقة أخرى وهي طريقة الاستيفاء القطعي أو طريقة سبلين التّي تتم بالاستيفاء بين النقاط المتعاقبة (x_k, y_k) و (x_{k+1}, y_{k+1}) بحدوديات $S_k(x)$ تُدعى بالحدوديات القطعية، وتشكل التوابع $\{S_k(x)\}_{k=0}^{n}$ منحنياً حدودياً يُسمى بحدودية الاستيفاء القطعي ونرمز لها بالرمز $S(x)$.

أي يتوجّب علينا البحث عن التابع $S(x)$ الّذي هوعبارة عن حدودية من الدرجة d على كل مجال جزئي $[x_{k-1}, x_k]$ ويتحقق:

$$S(x_k) = y_k \quad ; k = 0,1,\ldots,n$$

أي أنّ $S(x)$ يمرمن جميع النقاط المفروضة.

وحتّى يكون هذا الاستيفاء أملس علينا أن نفرض أنّ للحدوديات القطعية السابقة مشتقات مستمرة عند العقد، ولكي نحقق أعلى درجة تمليس عند العقد يجب أن يكون للتابع $S(x)$ مشتقات مستمرة حتّى المرتبة $d-1$.

ملاحظة:

ترجع تسمية طريقة الاستيفاء القطعي بطريقة سبلين إلى كونها مستوحاة من القضبان الرفيعة القابلة للالتواء التّي تدعى سبلين، التّي استخدمها المهندسون مدة طويلة للحصول على المنحني الأنسب للمرور من مجموعة من النقاط المفروضة، علماً أنّ العمل بهذه الطريقة في التحليل العددي بدأ عام 1946م على يد العالم I.J.Shoenb.

1-7 استيفاء سبلين الخطي:

لتكن لدينا النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$، والمطلوب: إيجاد حدودية سبلين الخطية (حدودية الاستيفاء الخطي القطعي) التّي تستوفي هذه النقاط.

اعتماداً على ما قد شرحناه سابقاً فإنّ حل هذه المسألة يتلخص في إيجاد التابع $S(x)$ الّذي هو عبارة عن حدودية من الدرجة الأولى على كل مجال جزئي

$[x_{k-1}, x_k]$ بحيث يتحقق:

$$S(x_k) = y_k \qquad ; k = 0,1,\ldots,n$$

و بمراعاة ترتيب الفواصل x_k $(x_0 < x_1 < \cdots < x_N)$، نجد أنّ حدودية سبلين الخطية تُعطى بالشكل:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) & ;\ x_0 \le x \le x_1 \\ S_1(x) = y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), & ;\ x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) = y_{n-1} + \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}) & ;\ x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

<u>ملاحظة:</u>

إنّ الحد $\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ هو ميل المستقيم المار بين النقطتين $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)$.

مثال(29):

أوجد تابع الاستيفاء الخطي القطعي الموافقة للبيانات التالية:

x_i	1	2	3	4
y_i	2	-1	0	2

ثم أوجد قيمة هذا التابع عند $x = 2.5$ وعند $x = 2$.

الحل:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = -3x + 5 & ;\ 1 \le x \le 2 \\ S_1(x) = x - 3 & ;\ 2 \le x \le 3 \\ S_2(x) = 2x - 6 & ;\ 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

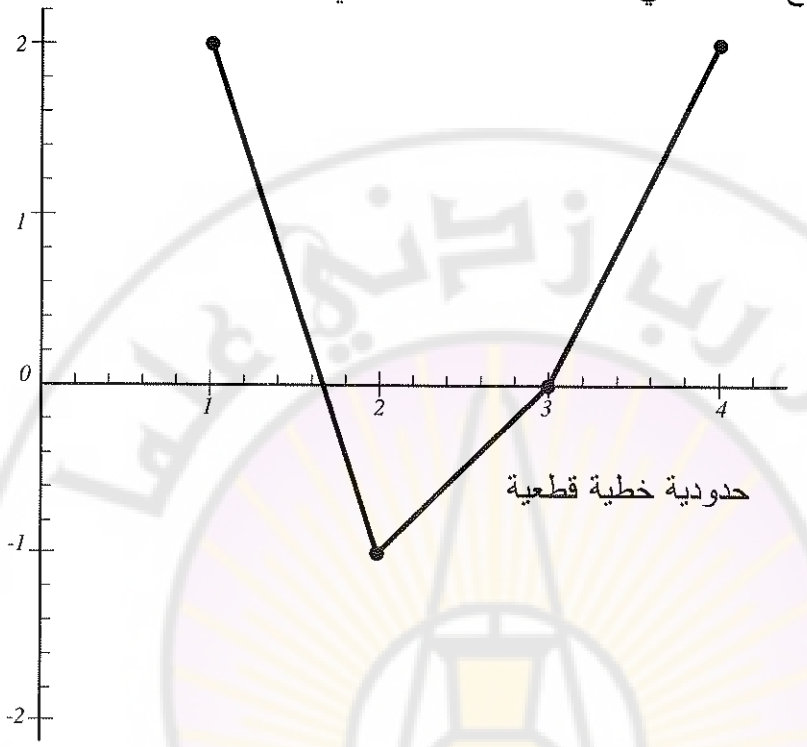
يمكن بكل بساطة ملاحظة أنّ $x = 2.5 \in [2,3]$ ومنهُ

$$S(2.5) = S_1(2.5) = 2.5 - 3 = -0.5$$

كذلك فإنّ قيمة $S(x)$ عند $x = 2$ هي:

$$S(2) = S_0(2) = S_1(2) = -3(2) + 5 = 2 - 3 = -1$$

ويوضح الشكل التالي حدودية سبلين الخطية التّي حصلنا عليها.



2-7 مساوىء سبلين الخطي:

يمكن، بكل سهولة، ملاحظة أنّ تابع سبلين الخطي مستمر في حين أنّ المشتق الأول له غير مستمر، الأمر الذي يوضح وجود زوايا في الخط البياني لمثل هذه التوابع، وعليه فإنّ هذه التوابع ستكون ذات فائدة قليلة من النواحي العملية كتصميم مجسمات السفن والسيارات وغيرها ولتحسين هذه الطريقة قام العلماء بدراسة استيفاء سبلين التربيعي.

3-7 استيفاء سبلين التربيعي:

يختلف هذا الاستيفاء عن استيفاء سبلين الخطي في أنّ الاستيفاء بين النقاط المتعاقبة يتم بوساطة حدوديات تربيعية. فمثلاً لو أُعطينا عدداً فردياً من العقد

$x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ عندئذٍ يمكن أن يتم بناء الحدودية التربيعية القطعية على كل مجال جزئي $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ حيث $k = 0,1,\ldots,n-1$. إلا أنّ العيب في تابع سبلين التربيعي الناتج هو أنّ الانحناء عند العقد الزوجية x_{2k} يتغير بشكل مفاجئ مما قد يسبب التواء أو تشوهاً غير مرغوب في الخط البياني للتابع، ويعود ذلك التغير المفاجيء إلى كون المشتق الثاني لتابع سبلين التربيعي غير مستمر عند العقد الزوجية.

4-7 استيفاء سبلين التكعيبي:

بفرض $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{N}$ $n+1$ نقطة، بحيثُ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. ونريد إيجاد التوابع القطعية التكعيبية $S_k(x)$ على كل مجال $[x_k, x_{k+1}]$ التّي تحقق أنّ المنحني القطعي الناتج وكلاً من مشتقيه الأول والثاني مستمر على المجال $[x_0, x_N]$.

<u>ملاحظة:</u>

إنّ استمرارية $S'(x)$ تعني أنّ بيان التابع $S(x)$ لن يحوي زوايا حادة أمّا استمرارية $S''(x)$ تعني أنّ نصف قطر الانحناء معرف عند كل نقطة.

تعريف:

ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[a,b]$ ومجموعة العقد $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$، يُعرف تابع سبلين التكعيبي $S(x)$ الّذي يستوفي f على أنّه تابع يحقق الشروط الآتية:

$$S(x) = S_k(x) = S_{k,0}(x) + S_{k,1}(x)(x - x_k) + S_{k,2}(x)(x - x_k)^2 + S_{k,3}(x)(x - x_k)^3 \quad ; x \in [x_k, x_{k+1}] \quad k = 0,1,\ldots,n$$

1. $$S(x) = S_k(x) = S_{k,0}(x) + S_{k,1}(x)(x - x_k) + S_{k,2}(x)(x - x_k)^2 + S_{k,3}(x)(x - x_k)^3 \quad ; x \in [x_k, x_{k+1}] \quad ; \; k = 0,1,\ldots,n$$

أي:

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x) & ,x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x) & ,x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & ,x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

2. $S_k(x_k)=f(x_k) \qquad ;k=0,1,\ldots,n-1$

$S_k(x_{k+1})=f(x_{k+1}) \qquad ;k=0,1,\ldots,n-1$

3. $S_k(x_{k+1})=S_{k+1}(x_{k+1}) \qquad ;k=0,1,\ldots,n-2$

4. $S'_k(x_{k+1})=S'_{k+1}(x_{k+1}) \qquad ;k=0,1,\ldots,n-2$

5. $S''_k(x_{k+1})=S''_{k+1}(x_{k+1}) \qquad ;k=0,1,\ldots,n-2$

من المهم الآن أن نعطي تفسيراً للشروط السابقة بحيث يُصبح التعامل معها أكثر مرونة، فالشرط الأول يعني أنّ $S(x)$ مؤلف من حدوديات تكعيبية قطعية، والثاني يعني أنّ الحدوديات التكعيبية القطعية تستوفي مجموعة النقاط المعطاة، أمّا الشرطان الثالث والرابع فيُفسرانِ على أنّ كلاً من التوابع القطعية تُمثل تابعاً مستمراً أملس، وأخيراً بالنسبة إلى الشرط الخامس فهو يعني أنّ المشتق الثاني للتابع الناتج مستمر.

5-7 بناء توابع استيفاء سبلين التكعيبية:

لإيجاد تابع سبلين التكعيبي الّذي يستوفي تابعاً مُعطى f نقوم بتطبيق شروط التعريف السابق على الحدوديات التكعيبية:

$$S_k(x)=a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3 \qquad ;k=0,1,\ldots,n-1 \tag{37}$$

من الشرط الثاني: $S_k(x_k)=f(x_k)$ نجد أنّ:

$$a_k=f(x_k) \tag{38}$$

وبتطبيق الشرط الثالث من التعريف $S_k(x_{k+1})=S_{k+1}(x_{k+1})$ ينتج:

$$a_{k+1} = a_k + b_k(x_{k+1} - x_k) + c_k(x_{k+1} - x_k)^2 + d_k(x_{k+1} - x_k)^3 \qquad (39)$$
$$k = 0,1,\ldots,n-2$$

ونظراً لكثرة استخدام الحدود $x_{k+1} - x_k$ حيثُ $k = 0,1,\ldots,n-1$ في بنائنا لتوابع سبلين التكعيبية وبغية التبسيط فإننا سنعتمد الترميز التالي:

$$h_k = x_{k+1} - x_k \qquad ;k = 0,1,\ldots,n-1$$

عندئذٍ نجد أنّ المعادلة(39) تُصبح بالشكل:

$$a_{k+1} = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 \qquad ;k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (40)$$

وباشتقاق الحدودية التكعيبية (37) مرة واحدة فإننا نحصل على الحدودية التربيعية:

$$S'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2$$

ويكون:

$$S'_k(x_k) = b_k \qquad ;k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (41)$$

وبالاستفادة من الشرط الرابع $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ نجد أنّ:

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 \qquad ;k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (42)$$

نشتق الحدودية التكعيبية (37) مرة ثانية فنحصل على الحدودية الخطيّة:

$$S''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_k)$$

وبهذا ويمكن إيجاد علاقة أخرى بين معاملات S_k وهي: $c_k = \dfrac{S''_k(x_k)}{2}$ وبتطبيق الشرط الخامس نجد أنّ:

$$c_{k+1} = c_k + 3\,d_k h_k \qquad k = 0,1,\ldots,n-1$$

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3\,h_k} \qquad k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (43)$$

نعوض قيمة d_k في كل من المعادلتين (40) و(42) فنحصل على المعادلتين:

$$a_{k+1} = a_k + b_k h_k + \frac{h_k^2}{3}(2c_k + c_{k+1}) \qquad ;k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (44)$$

و

$$b_{k+1} = b_k + h_k(c_k + c_{k+1}) \qquad ;k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (45)$$

نوجد المعاملات b_k من العلاقة (44)

مثال(30):

بفرض S تابع سبلين الطبيعي الذي يستوفي التابع f عند النقاط :

$$x_0 = 1; x_1 = 2; x_2 = 3$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & ;1 \le x < 2 \\ S_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + A(x-2)^3 & ;2 \le x < 3 \end{cases}$$

أوجد قيم A, B, D ثم قدر قيمة لكل من

$$f(1.4)\ ;\ f(2.3)\ ;\ f'(1.5)\ ;\ f'(2.5)$$

الحل:

من الشرط $S_0(2) = S_1(2)$ نجد أن $1 + B - D = 1 \Rightarrow B = D$.

ومن الشرط $S_0'(2) = S_1'(2)$ نجد أن $B - 3D = -\frac{1}{2}$.

بالحل المشترك للمعادلتين:

$$B = D$$

$$B - 3D = -\frac{1}{2}$$

نجد أن : $B = D = \frac{1}{4}$

ومن الشرط:

$$S_0''(1) = S_1''(3) = 0$$

$$-\frac{3}{2} + 6A = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

ومنه:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^3 & ;1 \le x < 2 \\ S_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(x-2)^3 & ;2 \le x < 3 \end{cases}$$

وعليه فإن:

$$f(1.4) = S_0(1.4) = 1.084$$
$$f(2.3) = S_1(2.3) = 0.58675$$
$$f'(1.5) = S_0'(1.5) = 0.0625$$
$$f'(2.5) = S_1'(2.5) = -1.0625$$

مثال(31):

قرب التابع $f(x) = e^x$ باستخدم استيفاء سبلين الطبيعي والنقاط:

$$(0,1),(1,e),(2,e^2),(3,e^3)$$

ثمّ قارن بين ناتج تكامل كلٍ من التابعين f و S على المجال $[0,3]$.

الحل:

لدينا بدايةً

$$n = 3$$
$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$
$$h_0 = h_1 = h_2 = 1 \qquad ; h_i = x_{i+1} - x_i$$
$$a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2, a_3 = e^3 \qquad , a_i = f(x_i)$$

وبالاعتماد على الشرط الحدي الطبيعي ينتج لدينا أنّ: $c_3 = \frac{S''(x_3)}{2} = 0$ و $c_0 = 0$.

وجدنا عند بنائنا لتوابع سبلين التكعيبية العلاقة:

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = \frac{3}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{3}{h_{k-1}}(a_k - a_{k-1})$$
$$;k = 1,\ldots,n$$

التّي تشكل مع المعادلتين:

$$c_0 = 0 \qquad , \qquad c_n = 0$$

جملة من المعادلات لها الشكل: $AX = b$ حيثُ:

$$X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^2 - 2e^2 + 1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تكافئ المعادلة $AX = b$ جملة المعادلات:

$$c_0 = 0$$
$$c_0 + 4c_1 + c_2 = 3(e^2 - 2e + 1)$$
$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 3(e^3 - 2e^2 + e)$$
$$c_3 = 0$$

التي لها الحل:

$$c_0 = c_3 = 0$$
$$c_1 = \frac{1}{5}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.756852643$$
$$c_2 = \frac{1}{5}(4e^3 - 9e^2 + 6e - 1) = 5.83006675$$

بالاستفادة من العلاقات ((36،38)) فإننا نجد أنّ بقية الثوابت تُعطى بالشكل:

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) =$$
$$= (e-1) - \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 1.465997614$$
$$b_1 = \frac{1}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$$
$$= (e^2 - e) - \frac{1}{15}(2e^3 + 3e^2 - 12e + 7) = 2.222850257$$
$$b_2 = \frac{1}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2)$$
$$= (e^3 - e^2) - \frac{1}{15}(8e^3 - 18e^2 + 12e - 2) = 8.809769651$$
$$d_0 = \frac{1}{3h_0}(c_1 - c_0) = \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.252284214$$
$$d_1 = \frac{1}{3h_1}(c_2 - c_1) = \frac{1}{3}(e^3 - 3e^2 + 3e - 1) = -1.943355583$$
$$d_2 = \frac{1}{3h_2}(c_3 - c_1) = \frac{1}{15}(-4e^3 + 9e^2 - 6e + 1) = -1.943355583$$

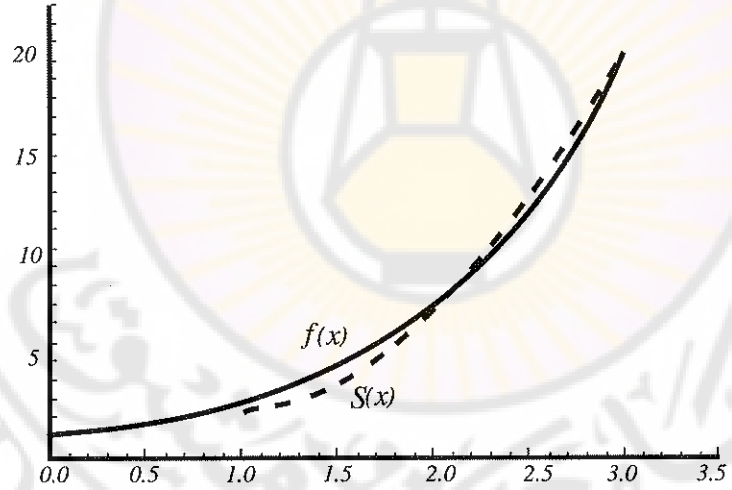
ويبين الجدول الآتي القيم التقريبية لهذه الثوابت a_k, b_k, c_k, d_k :

j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0	1	1.465997614	0	0.252284214
1	1	2.718281828	2.222850257	0.756852643	1.691071369
2	2	7.389056099	8.809769651	5.83006675	−1.943355583
3	3	20.08553692			

وباستخدام القيم التقريبية لهذه الثوابت فإنّ تابع سبلين التكعيبي الطبيعي يُعطى بالمعادلة:

$$S(x)=\begin{cases} 1+1.46600\,x+0.25228\,x^3 & ;0\le x<1 \\ 2.71828+2.22285\,(x-1)+0.75685\,(x-1)^2 & \\ \qquad +1.69107\,(x-1)^3 & ;1\le x<2 \\ 7.38906+8.80977\,(x-2)+5.83007\,(x-2)^2 & \\ \qquad -1.94336\,(x-2)^3 & ;2\le x\le 3 \end{cases}$$

ويبين الشكل التالي الخط البياني للتابع المفروض وتابع سبلين الموافق له.



لتقريب تكامل f على المجال $[0,3]$ الذي يُعطى بالقيمة:

$$\int_0^3 e^x\,dx = e^3-1 = 19.08553692$$

نكامل الآن تابع سبلين على المجال $[0,3]$:

$$\int_0^3 S(x)dx = \int_0^1 1+1.46600\,x+0.25228\,x^3 dx$$

$$+\int_1^2 \left[2.71828+2022285(x-1)+0.75685(x-1)^2+1.69107(x-1)^3\right]dx$$

$$+\int_2^3 \left[7.38906+8.80977(x-2)+5.83007(x-2)^2-1.94336(x-2)^3\right]dx$$

ومنه:

$$\int_0^3 s(x)\,dx = (1+2.71828+7.38906)+\frac{1}{2}(1.46600+2.22285+8.80977)$$

$$+\frac{1}{3}(0.75685+5.83007)+\frac{1}{4}(0.25228+1.69107-1.94336)$$

$$=19.55228750$$

وبهذا نجد أنّ الخطأ المطلق المرتكب عند تقريب التكامل باستخدام سبلين الطبيعي هو:

$$|19.08554-19.55229|=0.46675$$

مبرهنة(14):

ليكن f تابعاً معرفاً عند العقد $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ وقابلاً للمفاضلة عند a و b. عندئذٍ يوجد تابع سبلين وحيد يستوفي العقد $x_0,x_1,\cdots,x_n$ ويحقق الشرط الحدي المقيد $S'(a)=f'(a)\,,\,S'(b)=f'(b)$.

ندعو توابع سبلين المحققة لهذه الشروط الحدية توابع سبلين المقيدة.

7-7 خوارزمية سبلين المقيد:

لبناء تابع سبلين التكعيبي S الّذي يستوفي التابع f عند العقد $x_0<x_1<\cdots<x_n$ والمحقق للشرط الحدي المقيد نتبع الخوارزميّة التالية:

Input: $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))\}, f'(x_0), f'(x_n)$

Step 1 For $i = 0,1,\ldots n-1$ Set $a_i = f(x_i)$; Set $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Step 2 Set $\alpha_i = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0); \alpha_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$.

Step 3 For $i = 1,\ldots n-1$ Set $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$.

Step 4 Set $l_0 = 2h_0$; Set $\mu_0 = 0.5$; Set $Z_0 = \frac{\alpha_0}{l_0}$.

Step 5 For $i = 1,\ldots n-1$ Set $l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$; Set $\mu_i = \frac{h_i}{l_i}$;

Set $Z_i = \frac{\alpha_i - h_{i-1}Z_{i-1}}{l_i}$.

Step 6 Set $l_n = h_{n-1}(2 - \mu_{n-1}); Z_n = \frac{\alpha_n - h_{n-1}Z_{n-1}}{l_n}; c_n = Z_n$.

Step 7 For $j = n-1, n-2, \ldots, 0$ Set $c_j = Z_j - \mu_j c_{j+1}$;

Set $b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j(c_{j+1} + 2c_j)}{3}$; Set $d_j = \frac{(c_{j+1} - c_j)}{3h_j}$;

Step 8 For $j = 0,1,\ldots n-1$ OUTPUt a_j, b_j, c_j, d_j

Stop.

مثال(32):

قرب التابع $f(x) = e^x$ باستخدم استيفاء سبلين المقيد والنقاط:

$(0,1), (1,e), (2,e^2), (3,e^3)$

ثمّ قارن بين ناتج تكامل كلاً من التابعين f و S على المجال $[0,3]$.

الحل:

لدينا:

$$n = 3$$
$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$
$$h_0 = h_1 = h_2 = 1 \qquad ; h_i = x_{i+1} - x_i$$
$$a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2, a_3 = e^3 \qquad , a_i = f(x_i)$$

وبالاعتماد على الشرط الحدي المقيد ينتج لدينا:

$$S'(a) = f'(a) = S'(x_0) = b_0$$

ووجدنا عند بنائنا لتوابع سبلين التكعيبية العلاقة:

$$b_k = \frac{1}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$$

وبالاستفادة من العلاقة وبتعويض $k = 0$ فإننا نجد أنّ:

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

ونتيجةً لذلك:

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

وبطريقة مشابهة نجد:

$$f'(b) = b_{k+1} = b_k + h_k(c_k + c_{k+1})$$

وعليه فمن أجل $k = n-1$ نجد:

$$f'(b) = \frac{(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$$
$$= \frac{(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n)$$

ولدينا كذلك

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n + a_{n-1})$$

وعليه فإنّنا نحصل على جملة المعادلات:

$$b_k = \frac{1}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n + a_{n-1})$$

وتكتب هذه الجملة بالشكل $AX = b$ حيثُ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} 3(e-2) \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^2 - 2e^2 + 1) \\ 3e^2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

أي تكافئ جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} 2c_0 + c_1 &= 3(e-2) \\ c_0 + 4c_1 + c_2 &= 3(e^2 - 2e + 1) \\ c_1 + 4c_2 + c_3 &= 3(e^3 - 2e^2 + e) \\ c_2 + 2c_3 &= 3e^2 \end{aligned}$$

التّي لها الحل:

$$c_0 = \frac{1}{15}(2e^3 - 12e^2 + 42e - 59)$$

$$c_1 = \frac{1}{15}(-4e^3 + 24e^2 - 39e + 28)$$

$$c_2 = \frac{1}{15}(14e^3 - 39e^2 + 24e - 8)$$

$$c_3 = \frac{1}{15}(-7e^3 - 42e^2 - 12e + 4)$$

بالاستفادة من العلاقات السابقة نجد أنّ بقية الثوابت تُعطى بالشكل:

$$b_0 = 1.00000000, \quad b_1 = 2.710162986, \quad b_2 = 7.326516319$$

$$d_0 = 0.2735993306, \quad d_1 = 0.6951307937, \quad d_2 = 2.019091618$$

ويبين الجدول الآتي القيم التقريبية للثوابت a_k, b_k, c_k, d_k التّي حصلنا عليها:

k	x_k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	0	1	1	0.44468249	0.27359933
1	1	2.718281828	2.71016299	1.26548050	0.69513079
2	2	7.389056099	7.32651634	3.35087286	2.01909162
3	3	20.08553692			

وباستخدام القيم التقريبية لهذه الثوابت فإنّ تابع سبلين التكعيبي المقيد يُعطى بالمعادلة:

$$S(x)=\begin{cases} 1+x+0.44468x^2+0.27360x^3, & if\ 0\le x<1 \\ 2.71828+2.71016(x-1) & \\ \qquad +1.26548(x-1)^2+0.69513(x-1)^3 & if\ 1\le x<2 \\ 7.38906+7.32652(x-2) & \\ \qquad +3.35087(x-2)^2-2.01909(x-2)^3 & if\ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

لتقريب تكامل f على المجال $[0,3]$ الذي يُعطى بالقيمة:

$$\int_0^3 e^x dx = e^3-1=19.08553692$$

لنكامل الآن تابع سبلين على المجال $[0,3]$ وبالتالي:

$$\int_0^3 s(x)dx=(a_0+a_1+a_2)+\frac{1}{2}(b_0+b_1+b_2)$$
$$+\frac{1}{3}(c_0+c_1+c_2)+\frac{1}{4}(d_0+d_1+d_2)$$

ومنهُ:

$$\int_0^3 S(x)dx=(1+2.71828+7.38906)+\frac{1}{2}(1+2.71016+7.32652)$$
$$+\frac{1}{3}(0.44468+1.26548+3.35087)$$
$$+\frac{1}{4}(0.27360+0.69513-2.01909)=19.05965$$

وجدنا في المثال(31) أنّ الخطأ المطلق المرتكب عند تقريب التكامل باستخدام سبلين الطبيعي هو: 0.46675

أما الخطأ المرتكب عند تقريب التكامل باستخدام سبلين المقيد هو: $|19.08554-19.05965|=0.02589$، أي أنّ سبلين المقيد يعطي دقة أفضل من سبلين الطبيعي، وهذا ليس غريباً؛ لأنّ الشرط الحدي في حالة سبلين المقيد يعطي معلومات أكثر عن التابع من تلك التّي يعطيها الشرط الطبيعي.

8-7 مبرهنة الحد الأعلى للخطأ:

ليكن لدينا التابع f معرف على المجال $[a,b]$، وبفرض $\{x_n\}$ نقاط الاستيفاء حيث $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$، وليكن Sاستيفاء سبلين التكعيبي الطبيعي للتابع f (أو سبلين التكعيبي المقيد).

1. $$|f(x)-S(x)|\le\frac{5}{384}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}|.h^4$$

حيث $h=\max_i|x_{i+1}-x_i|$

2. $$\|S\|_2=\int_a^b[S''(x)]^2dx\le\int_a^b[f''(x)]^2dx=\|f\|_2$$

<u>ملاحظة:</u>

- استيفاء سبلين التكعيبي من المرتبة الرابعة
- الشرط الثاني هو خاصة مميزة لسبلين $S(x)$"التذبذب الأدنى" لجميع التوابع الملساء التي تحقق الشروط الحدية لسبلين (الطبيعية أو المقيدة)
- التقوس: يعرّف التقوس كما يلي:

$$k(x)=\frac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{3/2}}\approx|f''(x)|$$

إذاً المقدار $\int_a^b[f''(x)]^2dx$ يمثل قياس تقوس الدالة على طول المجال المعطى،

والعلاقة $\|S\|_2 \le \|f\|_2$ تبين أنَّ تقوس سبلين أصغر من تقوس الدالة المستوفاة، هذه الخاصة تضمن لنا أنَّ يكون سطح سبلين أملساً، و تعتبر مفيدة جداً في الهندسة الميكانيكية، وبشكل خاص في بناء السفن و أجنحة الطائرات.

الإثبات:

يمكن ببساطة إثبات (1) تمرين للطالب

(2): سنثبت هذه الميزة من أجل سبلين الطبيعي

نعلم أن: $F^2 - S^2 = (F-S)^2 - 2S(S-F)$

بفرض $F = f''(x)\ ,\ S = S''(x)$ على المجال $[a,b]$

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx =$$

$$\int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx - 2\int_a^b S''(x)(S''(x) - f''(x))dx$$

الحد الأول أكبر أو يساوي الصفر. سنثبت أن الحد الثاني معدوم.

بالاستفادة من عبارة التكامل بالتجزئة:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

نجد أنّ:

$$\int_a^b S''(x)(S''(x) - f''(x))dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} S''(x)(S''(x) - f''(x))dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(S''(x)(S'(x) - f'(x))\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''(x)(S'(x) - f'(x))dx \right)$$

وبملاحظة أنّ $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ وبالاستفادة من مبرهنة القيمة الوسطى التكاملية الأولى نجد

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} S'''(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} (S'(x) - f'(x))dx$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} S'''(x_i)(S(x) - f(x))\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

باستخدام $S(x_i) = f(x_i),\ i = 0,\dots,n$ و ملاحظة $S'''(x) = 6d_k$ ثابت

$$= 0$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين

1- بفرض $\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ ، برهن أنّه يُمكن التعبيرعن حدوديات القاعدة $L_i^{(n)}(x)$ بالشكل: $L_{n,i}(x)=\dfrac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x)}$ حيث $0\le i\le n$.

2- برهن أنّ: $\sum_{i=0}^{n}L_{n,i}(0)\,x_{n+1,i}=(-1)^n\prod_{i=0}^{n}x_i$

3- بفرض $\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ والمطلوب: برهن صحة المساواة: $\sum_{i=0}^{n}\dfrac{x_i^n}{\omega'(x_i)}=1$.

4- أوجد حدودية استيفاء لاغرانج الموافقة للنقاط $(1,2),(3,8),(6,64)$.

5- بفرض $f(x)$ يُعطى وفق الأشكال الآتية:

$$f(x)=\cos x$$
$$f(x)=Ln(x+1)$$
$$f(x)=\sqrt{1+x}$$
$$f(x)=\tan x$$

والمطلوب:

a- أوجد حدوديات استيفاء لاغرانج من الدرجة الأولى والثانية على الأكثر التّي تستوفي التابع $f(x)$ عند العقد $x_0=0,x_1=0.6,x_2=0.9$ وذلك لكل الأشكال الواردة سابقاً.

b- استخدم حدوديات الاستيفاء الناتجة لتقريب $f(0.45)$ وإيجادالخطأ المطلق.

6- بفرض $f(x)$ يُعطى وفق الأشكال الآتية:

$$f(x)=\sin \pi x$$
$$f(x)=Log_{10}(3x-1)$$
$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$
$$f(x)=e^{2x}-x$$

والمطلوب:

a- أوجد حدوديات استيفاء لاغرانج من الدرجة الأولى والثانية على الأكثر التّي تستوفي التابع $f(x)$ عند العقد $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.6$ وذلك لكل الأشكال الواردة سابقاً.

b- استخدم حدوديات الاستيفاء الناتجة لتقريب $f(1.4)$ وإيجاد الخطأ المطلق.

7- بفرض $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ و $P_2(x)$ حدودية استيفاء لاغرانج التّي تستوفي التابع الآنف الذكرعند العقد التالية: $x_0 = 0, x_1, x_2 = 1$. والمطلوب: أوجد أكبر قيمة لـ x_1 في المجال $(0,1)$ يكون من أجلها $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$.

8- بفرض $P_3(x)$ حدودية استيفاء لاغرانج الموافقة للنقاط $(0,0)$، $(0.5, y)$، $(1,3)$، $(2,2)$، أوجد y إذا كانت معاملات x^3 في $P_3(x)$ هي 6.

9- ليكن $f(x) = e^x$ حيث $0 \le x \le 2$، والمطلوب:

a- قرب $f(0.25)$ مستخدماً حدودية استيفاء لاغرانج الخطي عند العقد $x_0 = 0$، $x_1 = 0.5$

b- قرب $f(0.75)$ مستخدماً حدودية استيفاء لاغرانج الخطي عند العقد $x_0 = 1$، $x_1 = 0.5$

c- قرب $f(0.25)$ و $f(0.75)$ مستخدماً حدودية استيفاء لاغرانج التربيعية (من الدرجة الثانية) عند العقد $x_0 = 0$، $x_1 = 0.5$، $x_2 = 2$.

d- أي من التقريبات السابقة أفضل ولماذا؟

10- الاستيفاء العكسي: بفرض $f \in C^1[a,b]$ و $f'(x) \neq 0$ على $[a,b]$، وأنّ للتابع f جذراً r في المجال $[a,b]$، وليكن لدينا $n+1$ عدداً مختلفاً مثنى مثنى $x_0, x_1, \ldots, x_n$، في المجال $[a,b]$ يحقق $f(x_k) = y_k$ وذلك من أجل $k = 0,1,\ldots,n$. لتقريب r نقوم ببناء حدودية الاستيفاء التّي درجتها n التّي تستوفي التابع f^{-1} عند العقد $y_0, y_1, \ldots, y_n$. بما أنّ $f(x_k) = y_k$ و $f(r) = 0$ ينتج أنّ: $f^{-1}(y_k) = x_k$ و $r = f^{-1}(0)$.

والمطلوب: أوجد خورازمية تُستخدم لإيجاد الاستيفاء العكسي.

11- أوجد متتالية من القيم المستوفية للقيمة $f(1+\sqrt{10})$ حيث $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ على المجال $[-5,5]$، وذلك كما يلي: افرض $h=\frac{10}{n}$ و $y_n=P_n(1+\sqrt{10})$ من أجل $n=1,2,\ldots,10$ حيث $P_n(x)$ هي الحدودية التّي تستوفي $f(x)$ في العقد: $x_0^{(n)},x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}$ المعطاة بالعلاقة:

$$x_j^{(n)}=-5+jh \qquad ; j=0,1,2,\ldots,n$$

والمطلوب: هل المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة من $f(1+\sqrt{10})$ ؟

12- ليكن لدينا تابع الخطأ: $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ والمطلوب:

a- استخدم متسلسلة ماك لوران لتنظيم جدولاً بالقيم $erf(x_i)$ حيث $x_i=0.2i \quad ;i=0,1,\ldots,5$ وذلك بدقة 10^{-4}.

b- استخدم استيفاء لاغرانج الخطي والتربيعي لإيجاد تقريب للقيمة $erf(\frac{1}{3})$

c- أي من التقريبين أفضل ولماذا؟

13- أوجد حدوديات استيفاء لاغرانج للتوابع التالية وأوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق على المجال $[x_0,x_n]$.

a- $n=2$ $\quad x_0=0\,,x_1=0.3\,,x_2=0.6 \quad ; \quad f(x)=e^{2x}\cos 3x$

b- $n=2$ $\quad x_0=2.0\,,x_1=2.4\,,x_2=2.6 \quad ; \quad f(x)=\sin(Lnx)$

c- $n=3$ $\quad x_0=0\,,x_1=0.25\,,x_2=0.5\,,x_3=1.0 \quad ; \quad f(x)=\cos x+\sin x$

d- $n=4$ $\quad x_0=-2,\ x_1=-1,x_2=0\,,x_3=1\,,x_4=2 \quad ; \quad f(x)=3^x$

14- برهن أنّ $\frac{d}{dx}\left(f[x_0,\ldots,x_n,x]\right)=f[x_0,\ldots,x_n,x,x]$.

15- ليكن $f(x)=\frac{1}{x}$، برهن أنّ $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{(-1)^n}{\prod_{i=0}^{n}x_i}$.

توجيه: استخدم الاستقراء الرياضي على n للتحقق من صحة العلاقة.

16- أوجد المجهول a في مجموعة النقاط التالية:

$$(1,2),(5,6),(7,9),(8,a),(10,6)$$

توجيه: أوجد حدودية نيوتن-الفروق المقسومة التقدمية أو التراجعية $P_3(x)$ الموافقة للنقاط السابقة ثمّ عين a من العلاقة $a=P_3(8)$، وأوجد الفروق المقسومة التقدمية أو الفروق المقسومة التراجعية الموافقة للنقاط السابقة ثمّ عين a بحل المعادلة $f[x_0,x_1,\ldots,x_4]=0$.

17- برهن أنّ الحدوديتين التكعيبتين:

$$P_3(x)=3-2(x+1)+0(x+1)(x)+(x+1)(x)(x-1)$$

و

$$Q_3(x)=-1+4(x+2)-2(x+2)(x+1)+(x+2)(x+1)(x)$$

تستوفيان النقاط الواردة في جدول البيانات التالي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

18-ليكن لدينا حدودية استيفاء من الدرجة الرابعة تحقق:

$$\Delta^4P_4(0)=24\,,\Delta^3P_4(0)=6\,,\Delta^2P_4(0)=0;$$

$$\Delta^2P_4(x)=P_4(x+1)-P_4(x)$$

والمطلوب: احسب $\Delta^2P_4(10)$.

19- بفرض لدينا جدول البيانات:

x	0	1	2
$P(x)$	2	-1	4

الّذي تحققه الحدودية $P(x)$ التّي درجتها مجهولة. والمطلوب:

عين معاملات x^2 في الحدودية $P(x)$ إذا كانت جميع الفروق المقسومة من المرتبة الثالثة مساوية للواحد.

20- بفرض لدينا جدول البيانات:

x	0	1	2	3
$P(x)$	4	9	15	18

الّذي تحققه الحدودية $P(x)$ التّي درجتها مجهولة. والمطلوب:

عين معاملات x^3 في الحدودية $P(x)$ إذا كانت جميع الفروق المقسومة من المرتبة الرابعة مساوية للواحد.

21- يُعطى جدول الفروق المقسومة لتابع ما f بالشكل التالي:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

والمطلوب: عين القيم المجهولة في الجدول السابق.

22- قرب $f(0.3)$ الموافقة للبيانات التالية باستخدام حدودية نيوتن-غريغوري التقدمية

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	15.0	21.0	30.0	51.0

23- بفرض حدودية استيفاء نيوتن- الفروق المقسومة التقدمية المستوفية لتابع ما f عند العقد $x_0 = 0,\ x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = .75$ تُعطى بالشكل:

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x - 0.25) + \frac{16}{3}x(x - 0.25)(x - 0.5)$$

والمطلوب: أوجد $f(0.75)$.

24- قرب $f(0.05)$ الموافقة للبيانات التالية مستخدماً حدودية استيفاء نيوتن-الفروق المقسومة التقدمية:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

قرب $f(0.65)$ الموافقة كذلك للبيانات السابقة مستخدماً حدودية نيوتن-الفروق

المقسومة التراجعية. ثم استخدم صيغة سترلينغ لتقريب $f(0.43)$.

25- استخدم صيغة نيوتن-الفروق المقسومة التقدمية لبناء حدوديات استيفاء من الدرجة الأولى والثانية والثالثة وذلك باستخدام البيانات التالية:

a. $f(0)=1, f(0.25)=1.64875, f(0.5)=2.71828, f(0.75)=4.48169$

b. $\begin{cases} f(0.1)=-0.29004986, f(0.2)=-0.56079734 \\ f(0.3)=-0.81401972, f(0.4)=-1.0526302 \end{cases}$

ثمّ استخدم الحدودية التي حصلت عليها في (a) لتقريب $f(0.43)$ والتّي حصلت عليها في (b) لتقريب $f(0.18)$.

26- استخدم صيغة نيوتن-الفروق المقسومة التراجعية لبناء حدوديات استيفاء من الدرجة الأولى والثانية والثالثة وذلك باستخدام البيانات التالية:

a. $\begin{cases} f(-0.75)=-0.07181250,\ f(-0.5)=-0.02475000 \\ f(-0.25)=0.33493750,\ f(0)=1.10100000 \end{cases}$

b. $\begin{cases} f(0.1)=-0.62049958,\ f(0.2)=-0.62049958 \\ f(0.3)=0.00660095,\ f(0.4)=0.24842440 \end{cases}$

ثمّ استخدم الحدودية التي حصلت عليها في (a) لتقريب $f(-\frac{1}{3})$، والتّي حصلت عليها في (b) لتقريب $f(0.25)$.

27- بفرض $|x_{i+1}-x_i|=h$ حيثُ $0\le i\le n$. برهن أنّ $\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\le\frac{h^{n+1}n!}{4}$.

28- بفرض لدينا $n+1$ نقطة $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، بحيث:

$$h=|x_{i+1}-x_i| \qquad i=0,1,\ldots,n-1$$

وليكن لدينا مؤثر المعدل(المتوسط) الذي يُعرف بالشكل:

$$\mu(f(x_i))=\frac{f(x_i+\frac{h}{2})+f(x_i-\frac{h}{2})}{2}$$

برهن أنّ $\mu=\frac{E^{\frac{1}{2}}+E^{-\frac{1}{2}}}{2}$.

29- بفرض لدينا $n+1$ نقطة $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، بحيث:

$$h = |x_{i+1} - x_i| \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

وليكن لدينا المؤثر المتمركزالّذي يُعرف بالشكل:

$$\delta(f(x_i)) = f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i - \frac{h}{2})$$

برهن أنّ $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$.

30- برهن صحة العلاقات التالية:

1. $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$

2. $1 + \frac{\delta^2}{2} = (1 + \mu^2\delta^2)^{\frac{1}{2}}$

3. $\frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta} = \Delta + \nabla$

4. $\delta = E^{\frac{1}{2}}\nabla$

5. $\delta = \Delta E^{\frac{-1}{2}}$

6. $E = \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2$

7. $\Delta - \nabla = \delta^2$

8. $\Delta\nabla = \delta^2$

31- برهن أنّ: $\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i f(x + nh - ih)$.

32- بفرض لدينا $n+1$ نقطة $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، بحيث:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

وبفرض $x = x_i + sh$. والمطلوب: برهن أنّ $P_n(s) = \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} \Delta^j f(x_i)$.

33- بفرض لدينا $n+1$ نقطة $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، بحيث:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

وبفرض $x = x_i - sh$. والمطلوب: برهن أنّ $P_n(s) = \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} (-1)^j \nabla^j f(x_i)$.

34- أوجد حدودية استيفاء هرميت الموافقة لكل جدول من جداول البيانات الآتية:

(a

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

(b

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	3.116256
8.6	18.50515	3.151762

(c

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1.00000	2.00000
0.5	2.71828	5.43656

(d

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.5	1.9375	-3.25
0.5	0.6875	-0.25

35- استناداً إلى الجداول السابقة:

a) ليكن $f(x) = xLn(x)$ التابع الموافق للبيانات الواردة في الجدول (a) والمطلوب: قرب $f(8.4)$.

b) ليكن $f(x) = \sin(e^x - 2)$ التابع الموافق للبيانات الواردة في الجدول (b) والمطلوب: قرب $f(0.9)$.

c) ليكن $f(x) = e^{2x}$ التابع الموافق للبيانات الواردة في الجدول (c) والمطلوب: قرب $f(0.34)$.

d) ليكن $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ التابع الموافق للبيانات الواردة في الجدول (d) والمطلوب: قرب $f(0)$.

36- ليكن لدينا التابع $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$، والمطلوب:

a) أوجد تقريباً لـ $f(0)$ باستخدام حدودية هرميت من الدرجة الثالثة على الأكثر

الموافقة للعقد التالية $x_0 = 1,\ x_1 = 1.05$.

b) قارن بين الخطأ الفعلي والحد الأعلى للخطأ الناتج عن تقريب التابع بحدودية هرميت.

c) أعد الطلبين الأول والثاني باستخدام حدودية هرميت من الدرجة الخامسة على الأكثر الموافقة للعقد التالية $x_0 = 1,\ x_1 = 1.05,\ x_2 = 1.07$.

37- ليكن لدينا $z_0 = x_0 , z_1 = x_0 , z_2 = x_1 , z_3 = x_1$ ، برهن اعتماداً على جدول الفروق المقسومة الآتي:

z	$f[z]$	الفروق المقسومة الأولى	الفروق المقسومة الثانية	الفروق المقسومة الثالثة
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$			
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$		
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2]$	
		$f[z_0, z_1]$		$f[z_0, z_1, z_2, z_3]$
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_0, z_1, z_3]$	
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$		
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$			

إنّ كثيرة حدود استيفاء هرميت التكعيبية $H_3(x)$ يمكن أن تُكتب بالشكل:

38- استخدم كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة الأولى، الثانية، الثالثة والرابعة لتقريب كل مما يلي:

a) $f(8.4)$ if $f(8) = 16.63553, f(8.1) = 17.6149,$
$f(8.3) = 17.56492, f(8.6) = 18.50515, f(8.7) = 18.82091$

b) $f(0.25)$ if $f(0) = -1, f(0.1) = -0.62049958,$
$f(0.2) = -0.28398668, f(0.3) = 0.00660095,$
$f(0.4) = 0.24842440$

$f(0.9)$ if $f(0.5) = -0.34409873, f(0.6) = -0.17694460,$ (c

$f(0.7) = 0.01375227, f(0.8) = 0.22363362,$

$f(1.0) = 0.65809197$

39- إن معطيات الأجزاء (a)، (b)، (c) و(d) من التمرين (42) هي للتوابع التالية الموجودة في الجدول الآتي، والمطلوب الخطأ المرتكب وقارن ذلك الخطأ مع الخطأ الفعلي:

(d $f(x) = x \ln x$

(e $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$

(f $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$

(g $f(x) = \sin(e^x - 2)$

وذلك بأخذ $n=1$ و $n=2$ فقط

40- استخدم كثيرات حدود لاغرانج من الدرجة الثالثة ، لتقريب $\cos(0.750)$ باستخدام القيم التالية، ثمّ أوجد حد خطأ للتقريب:

(a $\cos(0.768) = 0.7193$

(b $\cos(0.903) = 0.6946$

(c $\cos(0.698) = 0.7661$

(d $\cos(0.733) = 0.7432$

علماً أن القيمة الفعلية لـ $\cos(0.750)$ هي 0.7317 (بأربع مراتب عشرية). فسر التعارض بين الخطأ الفعلي وحد الخطأ.

41- استفد من القيم التالية لإنشاء تقريب حدودية لاغرانج من الدرجة الثالثة لـ $f(1.09)$. حيث أنّ التابع المقرب هو $f(x) = \log_{10}(\tan x)$. استخدم هذه المعلومات لإيجاد حد لخطأ التقريب.

(a $f(1.05) = 0.2414$

(b $f(1.15) = 0.3492$

c) $f(1.00) = 0.1924$

d) $f(1.10) = 0.2933$

42- أنشئ y_n كمتتالية حدوديات استيفاء لقيم $f\left(1+\sqrt{10}\right)$، حيث $f(x) = \left(1+x^2\right)^{-1}$ من أجل $-5 \le x \le 5$، كما يلي: لكل $n = 1, 2, \ldots\ldots, 10$، نفرض $h = \frac{10}{n}$ و $y_n = p_n\left(1+\sqrt{10}\right)$ حيث $p_n(x)$ حدودية من الدرجة n.

43- تُعطى المعلومات التالية من أجل حدودية P مجهولة الدرجة:

x	0	1	2
$p(x)$	2	-1	4

فإذا علمت أنّ جميع الفروق التقدمية من المرتبة الثالثة تساوي الواحد، فعّين معامل x^2 في $p(x)$.

44- تعطى البيانات التالية حدودية P مجهولة الدرجة:

x	0	1	2	3
$p(x)$	4	9	15	18

إذا كانت جميع الفروق التقدمية من المرتبة الرابعة تساوي الواحد فاحسب معامل x^3 في $p(x)$.

45- استخدم استيفاء هرميت لإنشاء حدودية من أجل المعطيات التالية:

a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	1.116256
8.6	18.50515	1.151762

b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

(c

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.5	-0.0247500	0.7510000
-0.25	0.3349375	2.1890000
0	1.1010000	4.0020000

(d

x	$f(x)$	$f'(x)$
3.0	-4.240058	6.649860
3.1	-3.496909	8.215853
3.2	-2.596792	9.784636

46- لتكن $f(x) = 3x\,e^{x} - e^{2x}$

a) قرب $f(1.03)$ لحدوديات هيرميت ذات الدرجة التي لاتزيد على ثلاثة، وذلك باستخدام $x_0 = 1$ و $x_1 = 1.05$. ثمّ قارن الخطأ المطلق بحد الخطأ.

b) أعد (a) بحدودية هيرميت للاستيفاء ذات الدرجة التي لاتزيد على أربعة، باستخدام $x_0 = 1$، $x_1 = 1.05$ و $x_2 = 1.07$.

47- ليكن لدينا الجدول الآتي:

x	$\sin x$	$D_x \sin x = \cos x$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937

a) استخدم القيم السابقة، وبتدوير لخمس مراتب لإنشاء تقريب لـ $\sin(0.34)$ بكثيرة حدود هيرميت.

b) أوجد حداً للخطأ في تقريب الجزء (a) وقارن مع الخطأ الفعلي.

48- أوجد حدودية سبلين التكعيبية الطبيعية للمعطيات التالية:

(a

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

(b

x	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

(c

x	$f(x)$
-0.5	-0.0247500
-0.25	0.334937
0	1.1010000

(d

x	$f(x)$
3.0	-4.240058
3.1	-3.496909
3.2	-2.596792

49- نفرض أن f معرفة على $[a,b]$ والعقد $a=x_o<x_1<....<x_n=b$ معروفة.

وأنّ حدودية استيفاء سبلين التربيعية له في $[x_0,x_1]$ هي:

$$S_0(x)=a_0+b_0(x-x_0)+c_0(x-x_0)^2$$

وحدودية استيفاء سبلين التربيعية له في $[x_1,x_2]$ هي:

$$S_1(x)=a_1+b_1(x-x_1)+c_1(x-x_1)^2$$

بحيث يتحقق:

a. $S(x_0)=f(x_0)\,,S(x_1)=f(x_1)\,,S(x_2)=f(x_2)$

b. $S\in C^1(x_0,x_2)$

برهن أن الشرطين (a) و (b) يؤديان إلى خمس معادلات بستة مجاهيل هي a_0,b_0,c_0,a_1,b_1,c_1.

هل الشرط $S\in C^2(x_0,x_2)$ يؤدي إلى حل المسألة ؟

50- لتكن $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$، حدودية من الدرجة الثالثة على

$[a,b]$. بتعيين العقد $a=x_o<x_1<....<x_n=b$. برهن أن:

$$S(x)=P(x)+\sum_{j=1}^{n-1}c_j\left(x-x_j\right)^3$$

51- ليكن لدينا جدول البيانات التالي:

x	1	2	3	5	6
y	4.75	4	5.25	15	45

بفرض أنّ حدودية سبلين التكعيبية التّي تستوفي هذه البيانات تُعطى بالشكل:

$$S(x)=\begin{cases}-0.75x+5.5x^2+0.27360x^3 & ,1\le x<2\\ 2x^2-8.75x+13.5 & ,2\le x<3\\ cx^2+gx+h & ,3\le x<5\\ jx^2+kx+l & ,5\le x\le 6\end{cases}$$

حيث c,g,h,j,k,l ثوابت. والمطلوب:

a. أوجد قيمة كل من الثوابت c,g,h,j,k,l.

b. أوجد حدودية استيفاء سبلين الخطية الموافقة للبيانات السابقة.

c. قارن بين قيمة تابع استيفاء سبلين الخطي وتابع استيفاء سبلين التكعيبي عند $x=2.3$.

52- ليكن لدينا جدول البيانات التالي:

x	1	2.2	3.7	5.1	6
y	4.75	6	5.25	15.1	45

وبفرض أنّ حدودية سبلين التكعيبية التّي تستوفي البيانات السابقة تُعطى بالشكل:

$$S(x)=\begin{cases}1.4583x+2.7916 & ,1\le x<2.2\\ -1.3055x^2+7.2027x-3.5272 & ,2.2\le x<3.7\\ cx^2+gx+h & ,3.7\le x<5.1\\ jx^2+kx+l & ,5.1\le x\le 6\end{cases}$$

حيثُ c,g,h,j,k,l ثوابت. والمطلوب: قيمة كل من الثوابت c,g,h,j,k,l.

53- ليكن لدينا جدول البيانات التالي:

x	1	2.2	3.7	5.1	6
y	4.75	6	5.25	15.1	45

وبفرض أنّ حدودية سبلين التكعيبية التّي تستوفي البيانات السابقة تُعطى بالشكل:

$$S(x)=\begin{cases} 1.4583x+2.7916 & 1\le x<2.2 \\ -1.3055x^2+7.2027x-3.5272 & 2.2\le x<3.7 \\ cx^2+gx+h & 3.7\le x<5.1 \\ jx^2+kx+l & 5.1\le x\le 6 \end{cases}$$

حيثُ c, g, h, j, k, l ثوابت. والمطلوب:

a. أوجد قيمة $\frac{df}{dx}$ عند $x=2.67$.

b. أوجد قيمة $S(2.5)$.

54- اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

a. بفرض لدينا $n+1$ نقطة $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$، عندئذٍ فإنّ العقد التّي يتم عندها استيفاء سبلين التكعيبي يجب أن تكون:

- متساوية البعد بعضها عن بعض.
- أعداداً صحيحة.
- مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً.
- موجبة.

b. في حدودية استيفاء سبلين التكعيبية يكون:

- المشتقات الأولى مستمرة في نقاط البيانات الداخلية.
- المشتقات الثانية مستمرة في نقاط البيانات الداخلية.
- كلاً من المشتقات الأولى والثانية مستمرة في البيانات الداخلية.
- المشتقات الثالثة مستمرة.

55- ليكن لدينا التابع:

$$S(x)=\begin{cases}-5+8x-6x^2+2x^3 & ,1\le x<2\\ 27-40x+18x^2-2x^3 & ,2\le x<3\end{cases}$$

والمطلوب:

a. تحقق من كون $S(x)$ هوتابع سبلين تكعيبي على المجال $[1,3]$.

b. هل يحقق هذا التابع الشرط الحدي الطبيعي على هذا المجال؟

56- ليكن لدينا التابع:

$$S(x)=\begin{cases}2x^3 & ,0\le x<1\\ 1-3x+3x^2+x^3 & ,1\le x<2\\ 9-15x+9x^2 & ,2\le x\le 3\end{cases}$$

والمطلوب:

a. تحقق من كون $S(x)$ هوتابع سبلين تكعيبي على المجال $[0,3]$.

b. هل يحقق هذا التابع الشرط الحدي الطبيعي على هذا المجال؟

57- هل التابع التالي هو تابع سبلين تكعيبي الطبيعي على المجال $[1,3]$؟

$$S(x)=\begin{cases}x^3-3x^2+2x+1 & ,1\le x<2\\ -x^3+9x^2-22x+17 & ,2\le x\le 3\end{cases}$$

58- هل التابع التالي هو تابع سبلين تكعيبي على المجال $[0,3]$؟

$$S(x)=\begin{cases}x^3 & ,0\le x<1\\ 2x-1 & ,1\le x\le 2\\ 3x^2-9 & ,2\le x\le 3\end{cases}$$

59- ليكن لدينا التابع التالي:

$$S(x)=\begin{cases}x^3+2x^2+1 & ,1\le x<2\\ -2x^3+\beta x^2-36x+25 & ,2\le x\le 3\end{cases}$$

والمطلوب:

a. أوجد قيمة β التّي من أجلها يكون $S(x)$ تابع سبلين تكعيبي على

المجال $[1,3]$.

b. هل تابع سبلين التكعيبي الناتج يحقق الشرط الحدي الطبيعي على المجال $[1,3]$؟

60- أوجد مجموعة قيم الثوابت $\{a,b,c,d\}$ التّي تجعل التابع التالي تابع سبلين تكعيبي.

$$S(x)=\begin{cases}(x+1)^3 & ,-2\le x<-1\\ ax^3+bx^2+cx+d & ,-1\le x\le 1\\ (x-1)^2 & ,1\le x\le 2\end{cases}$$

61- بفرض لدينا المجموعة التالية من النقاط: $\{(0,1),(1,1),(2,5)\}$، والمطلوب:

a. أوجد تابع الاستيفاء القطعي الخطي الموافق للبيانات السابقة.

b. أوجد تابع الاستيفاء القطعي التربيعي الموافق للبيانات السابقة.

c. أوجد تابع الاستيفاء القطعي التكعيبي الموافق للبيانات السابقة.

d. ارسم الخط البياني الموافق لكل من الحالات السابقة على المجال $[0,2]$

62- ليكن لدينا الجداول التالية:

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	1	2	3	2

b)

x	0	1/2	1	2	3
y	0	1/4	1	−1	−1

c)

x	0	1	2	2.5	3
y	1.4	0.6	1.0	0.65	0.6

والمطلوب:

1) أوجد تابع الاستيفاء القطعي الخطي الموافق للبيانات السابقة.

2) أوجد تابع الاستيفاء القطعي التربيعي الموافق للبيانات السابقة.

3) أوجد تابع الاستيفاء القطعي التكعيبي الموافق للبيانات السابقة.

63- أوجد قيم الثوابت $\{a,b,c,d,e\}$ التّي تجعل التابع S تابع سبلين تكعيبي طبيعي.

$$S(x)=\begin{cases} a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3 & x\in[0,1] \\ (x-1)^3+ex^2-1 & x\in[1,2] \end{cases}$$

64- بين إذا كان f يمثل تابع سبلين تكعيبي طبيعي مع العقد $-1, 0, 1, 2$؟

$$f(x)=\begin{cases} 1+2(x+1)+(x+1)^3 & -1\le x\le 0 \\ 3+5x+3x^2 & 0\le x\le 1 \\ 11+(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

65- هل يُمثل هذا التابع تابع سبلين تكعيبي طبيعي؟

$$S(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+7x-5 & -1\le x\le 0 \\ -x^3+3x^2+7x-5 & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

66- هل توجد قيم $\{a,b,c,d\}$ليكون التابع

$$S(x)=\begin{cases} ax^3+x^2+cx & -1\le x\le 0 \\ bx^3+x^2+dx & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

تابع سبلين تكعيبي طبيعي ينسجم مع تابع القيمة المطلقة $f(x)=|x|$ عند العقد $-1, 0, 1$؟

الفصل الرابع

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Differentiation and Intergration

1- الطرائق العددية للحساب التفاضلي:

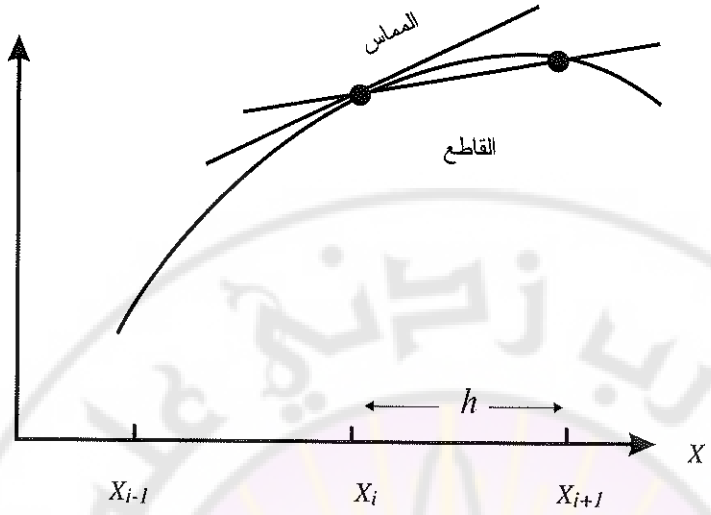
وجدنا سابقاً في بحث الاستيفاء، أنه بفرض $f(x_0), f(x_1), \ldots\ldots, f(x_n)$ مجموعة قيم التابع f في النقاط: $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$ على الترتيب عندئذٍ يمكن إيجاد كثير الحدود من الدرجة n تستوفي التابع f عند النقاط السابقة، ويمكن حساب قيمة تقريبية لهذ التابع عند أية نقطة من نقاط المنطقة المدروسة، ولكن السؤال الجدير بالذكر الآن: هل يمكن إيجاد قيمة تقريبية لمشتق هذا التابع اعتماداً على البيانات آنفة الذكر؟

طبعاً إنّ هذه الإجرائية ممكنة وتعرف باسم الاشتقاق العددي الذي يمكن تعريفه بأنّه: إجرائية عددية لحساب قيمة مشتق تابع ما عند نقاط محددة، لذا نقوم في هذا الفصل بعرض عبارات لحساب قيمة تقريبية لمشتق تابع عند نقطة محددة باستخدام قيمتها عند نقطتين أو ثلاث أو خمس، كما ندرس الأخطاء الناتجة عن هذا التقريب في كل حالة من الحالات، ثم ننتقل في النهاية لدراسة تأثير طول البعد بين النقاط على كل من خطأي التدوير والاقتطاط، ومن ثم البحث عن البعد الأمثل الذي يجب أن يفصل بين النقاط.

أسهل طريقة لحساب قيمة المشتق تستند إلى التعريف:

يُعرّف مشتق التابع f عند النقطة x_0 بالشكل:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$



الشكل 1

ولإيجاد قيمة تقريبية لهذا المقدار نقوم بما يلي:

نفرض أن $f \in C^2[a,b]$، و $x_0 \in [a,b]$، ونختار نقطة $x_1 = x_0 + h$ بحيث تكون $h \neq 0$ صغيرة بشكل كافٍ على نحوٍ نضمن من خلاله أن تكون $x_1 \in [a,b]$ عندئذ يمكن استيفاء التابع f بكثير الحدود لاغرانج من الدرجة الأولى $P_{0,1}(x)$ كما يلي:

$$f(x) = P_{0,1}(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\theta_x)$$

$$= \frac{f(x_0)(x-x_0-h)}{-h} + \frac{f(x_0+h)(x-x_0)}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!} f''(\theta_x)$$

وذلك من أجل θ_x نقطة من المجال $[a,b]$.

نشتق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة إلى x فنجد أنّ:

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + D_x[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\theta_x)]$$

$$= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2} f''(\theta_x) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} D_x[f''(\theta_x)] \quad (2)$$

إلا أن المعضلة التي تواجهنا عند استخدام العلاقة (2) لإيجاد قيمة تقريبية للتابع f عند نقطة اختيارية x، هو أننا لا نستطيع تقدير قيمة خطأ الاقتطاع الناتج في هذه

الحالة إذ إنَّه لا توجد أي معلومات عن المشتق $D_x[f''(\theta_x)] = f'''(\theta_x).\theta'_x$ ، لذلك نأخذ $x = x_0$ فتكون أمثال $D_x[f''(\theta_x)]$ معدومة وعندئذ تُعطى قيمة المشتق بالعلاقة:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\theta_x) \qquad (3)$$

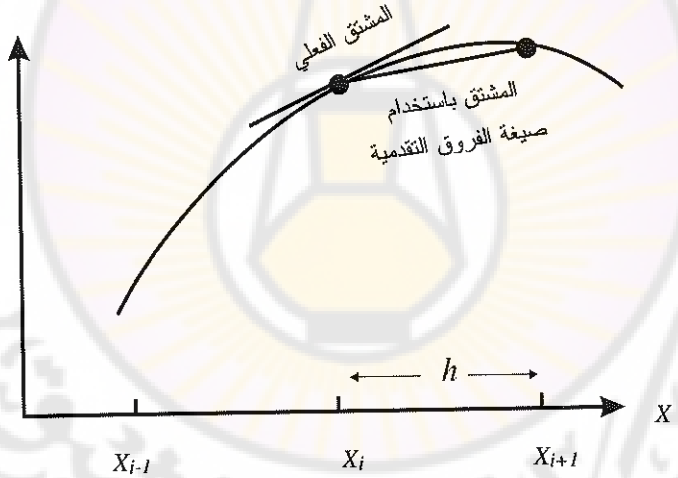
فإذا كان:

$$f''(\theta_x) \le M \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

أمكننا أن نكتب:

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \le \frac{M\,|h|}{2} \qquad (4)$$

من أجل $h > 0$ تُعرف الصيغة (3) باسم "صيغة الفروق التقدمية للمشتق الأول" (forward difference formula).

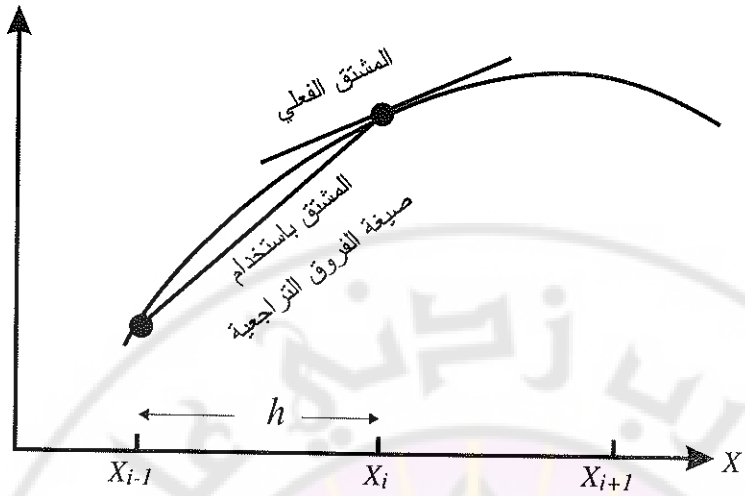


الشكل 2

أما عندما تكون $h < 0$ فتُصبح العلاقة (5) بالشكل:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\theta_x) \qquad (5)$$

وتُعرف باسم صيغة الفروق التراجعية للمشتق الأول backward difference formula



الشكل 3

مثال(1):

أوجد قيمة تقريبية لمشتق التابع $f(x)=Cos(x)$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{6}$ باستخدام العلاقة (2).

الحل:

يُعطي الجدول (1) قيماً تقريبية مختلفة للمشتق $f'(\frac{\pi}{6})$ من أجل قيم مختلفة للخطوة h. حيث إن $f'(\frac{\pi}{6})=-Sin(\frac{\pi}{6})=-0.5$ فإنه يمكن حساب الخطأ الفعلي من خلال العلاقة:

$$Error=\left|\frac{f(\frac{\pi}{6}+h)-f(\frac{\pi}{6})}{h}-f'(\frac{\pi}{6})\right|$$

وبملاحظة أنّ:

$$|f''(x)|\le f''(\frac{\pi}{6}) \qquad \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+h\right]$$

يكون:

$$|f'(\frac{\pi}{6})-\frac{f(\frac{\pi}{6}+h)-f(\frac{\pi}{6})}{h}|\le\frac{h}{2}Cos(\frac{\pi}{6}) \qquad (6)$$

h	$\frac{f(\frac{\pi}{6}+h)-f(\frac{\pi}{6})}{h}$	Exact Error	$\frac{h}{2}Cos(\frac{\pi}{6})$	$Ratio=\frac{\text{Exact Error}}{\frac{h}{2}Cos(\frac{\pi}{6})}$
0.1	-0.54243	0.04243	0.0433	0.98
0.05	-0.52144	0.02144	0.02165	0.99
0.025	-0.51077	0.01077	0.01083	0.995
0.0125	-0.5054	0.0054	0.00541	0.998
0.00625	-0.5027	0.0027	0.00271	0.999
0.003125	-0.50135	0.00135	0.00135	0.999

الجدول 1

بالذ ر إلى عمود الأخطاء، نجد أن الخطأ الفعلي متناسب تقريباً مع h، وأنه غالباً كلما انخفضت قيمة h بنسبة معينة تناقص الخطأ بالنسبة نفسها تقريباً، وهذا يتفق مع حد الخطأ في العلاقة (6).

1-1 صيغ أخرى لتقريب قيمة المشتق:

لتكن لدينا $\{x_0,x_1,...,x_n\}$ أي $(n+1)$ نقطة متمايزة من المجال (I)، ولتكن $f\in C^{n+1}(I)$ ، عندئذ يمكن استيفاء التابع f بكثيرالحدود لاغرانج من الدرجة (n) كما يلي:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_k(x)+\frac{(x-x_0)...(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_x)$$

وذلك من أجل θ_x تنتمي إلى المجال (I).

$L_k(x)$: كثيرالحدود لاستيفاء لاغرانج من الدرجة k للتابع f عند النقاط $\{x_0, x_1, .., x_n\}$

نشتق عبارة $f(x)$ فنجد:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x) +$$

$$D_x[\frac{(x-x_0)..(x-x_n)}{(n+1)!}] f^{(n+1)}(\theta_x) + \frac{(x-x_0)..(x-x_n)}{(n+1)!} D_x[f^{(n+1)}(\theta_x)]$$

تواجهنا هنا أيضاً مشكلة في تقدير قيمة خطأ الاقتطاع، لذا نجعل x مساوية لإحدى القيم x_j، وفي هذه الحالة تكون أمثال الحدّ $D_x[f^{(n+1)}(\theta_x)]$ معدومة وعليه يكون:

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\theta_{x_j})}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k) \qquad (7)$$

تدعى العلاقة (7) "صيغة تقريب مشتق التابع f عند النقطة x_j باستخدام $(n+1)$ نقطة".

ملاحظة:

يمكن أن نحصل على دقة أكبر في حساب قيمة المشتق عند زيادة عدد النقاط المستخدمة في عبارة التقريب (7)، على الرغم من أنّ تراكم أخطاء التدوير يعيق إلى حد ما من ذلك.

2-1 عبارة المشتق باستخدام ثلاث نقاط:

نوجد كثيرالحدود لاستيفاء لاغرانج عند النقاط x_0, x_1, x_2 ومشتقاتها:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \Rightarrow \quad L_0'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

وبالمثل:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad \Rightarrow \quad L_1'(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

و

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad \Rightarrow \quad L_2'(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

نبدل في العلاقة (6) فنجد:

$$f'(x_j)=f(x_0)[\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}]+f(x_1)[\frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}]$$
$$+f(x_2)[\frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}]+\frac{1}{6}f^{(3)}(\theta_{x_j})\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2}(x_j-x_k) \qquad (8)$$

حيث $j=0,1,2$.

3-1 عبارة المشتق باستخدام ثلاث نقاط تبعد أبعاداً متساوية:

لنفرض أنَّ: $x_1=x_0+h,\ x_2=x_0+2h,\ h\neq 0$ نبدل في العلاقة(8) $x_j=x_0$ فنجد أنّ:

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[-\frac{3}{2}f(x_0)+2f(x_1)-\frac{1}{2}f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_{x_0})$$

وبالطريقة ذاتها من أجل $x_j=x_1$ نجد:

$$f'(x_1)=\frac{1}{h}[-\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_2)]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_{x_1})$$

ومن أجل $x_j=x_2$ يكون:

$$f'(x_2)=\frac{1}{h}[\frac{1}{2}f(x_0)-2f(x_1)+\frac{3}{2}f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_{x_2})$$

وبما أنّ $x_1=x_0+h,\ x_2=x_0+2h$ فإنّه يمكن التعبير عن العلاقات الثلاثة السابقة بالشكل:

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[-\frac{3}{2}f(x_0)+2f(x_0+h)-\frac{1}{2}f(x_0+2h)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_{x_0})$$

$$f'(x_0+h)=\frac{1}{h}[-\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_0+2h)]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_{x_1})$$

$$f'(x_0+2h)=\frac{1}{h}[\frac{1}{2}f(x_0)-2f(x_0+h)+\frac{3}{2}f(x_0+2h)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_{x_2})$$

أو بشكلٍ آخر:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_{x_0})$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-f(x_0-h)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_{x_1})$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_{x_2})$$

بما أنَّ الصيغة الأخيرة من المعادلات الثلاثة تنتج عن الأولى بتبديل $-h$ بـ h، فإنه توجد في الحقيقة صيغتان فقط لحساب قيمة المشتق هما:

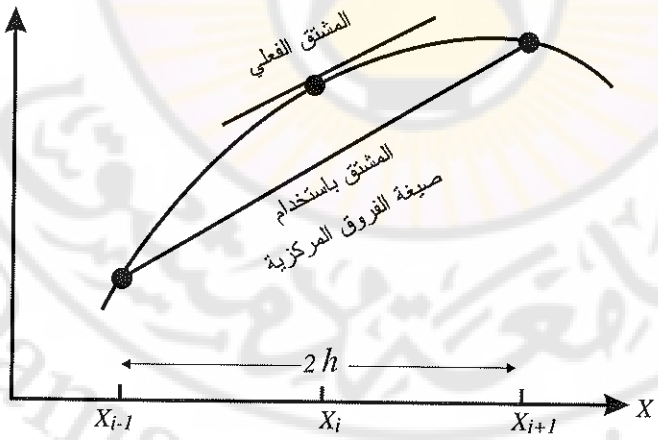
$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_{x_0}) \qquad (9)$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_{x_1}) \qquad (10)$$

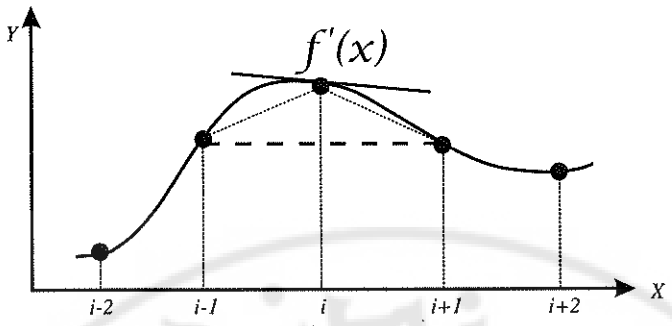
وذلك من أجل θ_{x_0} واقعة بين القيمتين x_0 و x_0+2h أمّا θ_{x_1} فتقع بين القيمتين x_0+h, x_0-h.

تُعرف الصيغة (10) باسم صيغة الفروق المركزية(Centered difference).

وتُعرف الصيغة (9) باسم صيغة الفروق التقدمية (Forword) .



الشكل 4



الشكل 5 مقارنة بين صيغ الفروق (التقدمية، التراجعية، المركزية)

مثال(2):

أوجد قيمة تقريبية لمشتق التابع $f(x)=Cos(x)$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{6}$ باستخدام العلاقتين(9) و(10).

الحل:

نجد باستخدام العلاقتين(9) و(10). أنه من أجل $h=0.1$ تعطى عبارة المشتق بالعبارتين التاليتين:

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{0.2}[-3f(\frac{\pi}{6})+4f(\frac{\pi}{6}+0.1)-f(\frac{\pi}{6}+0.2)]$$

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[-f(\frac{\pi}{6}-0.1)+f(\frac{\pi}{6}+0.1)]$$

نتابع من أجل قيم مختلفة لـ h فنحصل على القيم التقريبية للمشتق الموضّحة بالجدولين(2) و(3).

وحيث إنّ $f'(\frac{\pi}{6})=-Sin(\frac{\pi}{6})=-0.5$ فإنه يمكن حساب الخطأ الفعلي الناتج عن استخدام الصيغة الأولى بالشكل:

$$Error=\left|\frac{1}{0.2}\left[-3f(\frac{\pi}{6})+4f(\frac{\pi}{6}+0.1)-f(\frac{\pi}{6}+0.2)\right]-f'(\frac{\pi}{6})\right|$$

كذلك من أجل الصيغة الثانية يُعطى بالشكل:

$$Error=\left|\frac{1}{0.2}[-f(\frac{\pi}{6}-0.1)+f(\frac{\pi}{6}+0.1)]-f'(\frac{\pi}{6})\right|$$

وبملاحظة أنّ:

$$|f'''(x)|=|Sin(x)|\le f'''(\frac{\pi}{6}+2h) \quad ; \quad \forall x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+2h]$$

يكون:

$$\left|\frac{1}{0.2}\left[-3f(\frac{\pi}{6})+4f(\frac{\pi}{6}+0.1)-f(\frac{\pi}{6}+0.2)\right]-f'(\frac{\pi}{6})\right|\le\frac{h^2}{3}Sin(\frac{\pi}{6}+2h)$$

h	Formula(1)	Exact Error	$\frac{h^2}{3}Sin(\frac{\pi}{6}+2h)$	Ratio= $\frac{\text{Exact Error}}{\frac{h^2}{3}Sin(\frac{\pi}{6}+2h)}$
0.1	-0.50187	0.00187	0.00221	0.85
0.05	-0.50044	0.00044	0.00049	0.9
0.025	-0.5001	0.0001	0.00011	0.88
0.0125	-0.50002	$10^{-5}\times1.9$	$10^{-5}\times2.7$	0.69
0.00625	-0.5	$10^{-6}\times1.04$	$10^{-6}\times6.7$	0.156
0.003125	-0.49999	$10^{-6}\times5.97$	$10^{-6}\times1.6$	3.626

الجدول 2

كذلك بما أنّ:

$$f'''(x)=Sin(x)\le f'''(\frac{\pi}{6}+h) \qquad \forall x\in\left[\frac{\pi}{6}-h,\frac{\pi}{6}+h\right]$$

فيكون:

$$\left|\frac{1}{0.2}[-f(\frac{\pi}{6}-0.1)+f(\frac{\pi}{6}+0.1)]-f'(\frac{\pi}{6})\right|\le\frac{h^2}{6}Sin(\frac{\pi}{6}+h)$$

h	Formula(2)	Error Exact	$\frac{h^2}{6}Sin(\frac{\pi}{6}+h)$	$Ratio = \frac{\text{Exact Error}}{\frac{h^2}{6}Sin(\frac{\pi}{6}+h)}$
0.1	-0.49916	0.00084	0.00097	0.86
0.05	-0.49978	0.00022	0.00023	0.95
0.025	-0.49994	$10^{-5}\times 6$	$10^{-5}\times 5.4$	1.1
0.0125	-0.49998	$10^{-5}\times 2.1$	$10^{-5}\times 1.3$	1.55
0.00625	-0.49999	$10^{-5}\times 1.1$	$10^{-6}\times 3.3$	3.3
0.003125	-0.49999	$10^{-6}\times 8.4$	$10^{-7}\times 8.2$	10.3

الجدول 3

ملاحظة:

تكون قيمة الخطأ في العلاقة (10) مساوية تقريباً لضعفي قيمتها في العلاقة (9)، ويعود ذلك بشكل أساسي إلى أن نقاط الاستيفاء تكون في الحالة الأولى متوضعة في جهة واحدة من النقطة x_0 في حين تتوزع في الحالة الثانية على طرفيها، زد على ذلك أن العلاقة (10) تتطلب حساب قيمة التابع f في موضعين فقط، في حين تتطلب العلاقة (9) حساب قيمتها في ثلاثة مواضع، وفي كلا الحالتين تكون هذه المواضع مغايرة للموضع x_0.

4-1 عبارة المشتق باستخدام خمس نقاط تبعد أبعاداً متساوية بعضها عن بعض:

يمكن وبأسلوب مماثل تماماً، إثبات أنّ حساب قيمة تقريبية للمشتق باستخدام خمس نقاط تبعد بعضها عن بعض أبعاداً متساوية ومتوضّعة على طرفي القيمة x_0 يُعطى بالعبارة:

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)$$
$$-f(x_0+2h)]+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\theta_x) \qquad (11)$$

حيث إنَّ θ_x واقعة بين القيمتين x_0-2h و x_0+2h .

أما إذا كانت النقاط الأربع متوضّعة في جهة واحدة من x_0 فعندئذ تستخدم العلاقة:

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)$$
$$+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h)]+\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\theta_x) \qquad (12)$$

حيث إنَّ θ_x واقعة بين القيمتين x_0+4h و x_0

عدد النقاط	صيغة المشتق f'	عبارة الخطأ
2	$f'(x)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\lvert\frac{h}{2}f''(\theta_x)\rvert$
3	$f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$	$\lvert\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\rvert$
	$f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[-f(x_0-h)+f(x_0+h)]$	$\lvert\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_x)\rvert$
	$f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)]$	$\lvert\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\rvert$
5	$f'(x_0)\approx\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)$ $+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$	$\lvert\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\theta_x)\rvert$
	$f'(x_0)\approx\frac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)$ $+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h)]$	$\lvert\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\theta_x)\rvert$

الجدول 4

5-1 القيمة التقريبية للمشتق من مراتب أعلى:

يمكن إيجاد القيمة التقريبية للمشتقات من مراتب أعلى (مرتبة ثانية، ثالثة،...) وذلك باستخدام قيم التابع عند نقاط مختلفة، فمثلاً من أجل حساب قيمة مشتق التابع f من المرتبة الثانية عند النقطة x_0 يمكن أن نقوم بما يلي:

ننشر التابع f بجوار x_0 باستخدام مبرهنة تايلور.

نوجد قيمة التابع f عند النقطتين حيث إنَّ θ_x واقعة بين القيمتين x_0-h و x_0+h:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\,f'(x_0)+\frac{1}{2}h^2f''(x_0)+\frac{1}{6}h^3f'''(x_0)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(\theta_{x_1})$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-h\,f'(x_0)+\frac{1}{2}h^2f''(x_0)-\frac{1}{6}h^3f'''(x_0)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(\theta_{x_{-1}})$$

حيث إنَّ: $x_0-h<\theta_{x_{-1}}<x_0<\theta_{x_1}<x_0+h$.

نجمع المعادلتين الأخيرتين طرفاً إلى طرف فنجد:

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)=2f(x_0)+h^2f''(x_0)+\frac{1}{24}h^4[f^{(4)}(\theta_{x_1})+f^{(4)}(\theta_{x_{-1}})]$$

نعزل الحد $f''(x_0)$ فنجد أنَّ:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\theta_{x_1})+f^{(4)}(\theta_{x_{-1}})] \qquad (13)$$

وبفرض أنّ $f^{(4)}$ تابع مستمر على المجال $[x_0-h,x_0+h]$، وبما أنَّ $\frac{1}{2}[f^{(4)}(\theta_{x_1})+f^{(4)}(\theta_{x_{-1}})]$ تقع بين القيمتين $f^{(4)}(\theta_{x_1})$ و $f^{(4)}(\theta_{x_{-1}})$، فإن هذا يقتضي، وحسب مبرهنة القيمة الوسطى وجود عدد θ_x بين θ_{x_1} و $\theta_{x_{-1}}$، أي يوجد عدد θ_x ينتمي إلى المجال $[x_0-h,x_0+h]$ بحيث يحقق:

$$f^{(4)}(\theta_x)=\frac{1}{2}[f^{(4)}(\theta_{x_1})+f^{(4)}(\theta_{x_{-1}})]$$

مما يسمح بكتابة (13) بالشكل:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\theta_x) \qquad (14)$$

مثال(3):

أوجد قيمة تقريبية للمشتق من المرتبة الثانية للتابع $f(x)=Cos(x)$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{6}$.

الحل:

نعلم أن: $f''(\frac{\pi}{6})=-Cos(\frac{\pi}{6})=-0.86603$.

بالاستفادة من العلاقة (13) نجد أن:

$$f''(\frac{\pi}{6})\approx\frac{1}{(h)^2}\left[f(\frac{\pi}{6}-h)-2f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{\pi}{6}+h)\right]$$

كما أن عبارة الخطأ تُعطى بالشكل:

$$\left|f''(\frac{\pi}{6})-\frac{1}{h^2}[f(\frac{\pi}{6}-h)-2f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{\pi}{6}+h)]\right|\le\frac{h^2}{12}Cos(\frac{\pi}{6}-h)$$

وهكذا نجد أنّ قيمة المشتق من المرتبة الثانية للتابع f تُعطى من أجل قيم مختلفة لـ h وفق الجدول(5) التالي:

h	$f''(\frac{\pi}{6})$ Approx	Error Exact	$\frac{h^2}{12}Cos(\frac{\pi}{6}-h)$	Ratio
0.1	-0.86531	0.000721	0.00076	0.95
0.05	-0.86585	0.00018	0.000185	0.97
0.025	-0.86598	$10^{-5}\times4.51$	$10^{-5}\times4.57$	0.99
0.0125	-0.86602	$10^{-5}\times1.13$	$10^{-5}\times1.14$	0.99
0.00625	-0.86603	$10^{-6}\times2.82$	$10^{-6}\times2.83$	1
0.003125	-0.86603	$10^{-7}\times7.05$	$10^{-7}\times7.06$	1

الجدول 5

6-1 أخطاء التدوير وخطأ الاقتطاع:

لا شك أنه من الضروري أن ندرس هنا تأثير أخطاء التدوير الناتجة عن عملية تقريب قيمة المشتق، لذا نأخذ على سبيل المثال الأخطاء في العبارة (10):

لنفرض أن أخطاء التدوير الناتجة عن حساب قيمة $f\ (x_0+h)$ و $f\ (x_0-h)$ هي على الترتيب $e(x_0+h)$، $e(x_0-h)$ أي:

$$f\,(x_0+h)=\tilde{f}\,(x_0+h)+e(x_0+h)$$

$$f\,(x_0-h)=\tilde{f}\,(x_0-h)+e(x_0-h)$$

وينقسم الخطأ الكلي للتقريب إلى قسمين قسم ناتج عن عن أخطاء التدوير الآخر ناتج عن الاقتطاع:

$$f'(x_0)-\frac{f\,(x_0+h)-f\,(x_0-h)}{2h}=\frac{e\,(x_0+h)-e\,(x_0-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_{x_1})$$

فإذا فرضنا وجود عددين $\varepsilon>0$ و $M>0$ يحققان:

$$e(x_0\mp h)\le\varepsilon \qquad , \qquad f^{(3)}(\theta_{x_1})\le M$$

نجد أنَّ:

$$|\,f'(x_0)-\frac{f\,(x_0+h)-f\,(x_0-h)}{2h}|\le\frac{\varepsilon}{h}+\frac{h^2}{6}M \qquad (15)$$

ونلاحظ أنَّ خطأ الاقتطاع $(\frac{h^2}{6}M)$ ينقص كلما صغرت قيمة h، لكنه وبالمقابل كلما صغرت قيمة h ازداد الخطأ الناتج عن التدوير $\frac{\varepsilon}{h}$. لذا فإنه قلما يكون جعل قيمة h صغيرة جداً مجدياً في عملية تصغير قيمة الخطأ، إذ أن ذلك يؤدي بالمقابل إلى زيادة أخطاء التدوير.

مثال(4):

نجد باستخدام العلاقة (9) أنّ القيم التقريبية لمشتق التابع $f(x)=Cos(x)$ عند

النقطة $x=\frac{\pi}{6}$ تُعطى من أجل قيم مختلفة للخطوة h وفق الجدول التالي:

h	$\frac{f(\frac{\pi}{6}+h)-f(\frac{\pi}{6})}{h}$	Exact Error
0.1	-0.499167	$10^{-5}\times 8.32917$
0.05	-0.499792	$10^{-5}\times 2.08307$
0.015	-0.499981	$10^{-6}\times 1.87498$
0.025	-0.499948	$10^{-6}\times 5.20817$
0.0125	-0.499987	$10^{-6}\times 1.30207$
0.00625	-0.499997	$10^{-6}\times 3.2552$
0.003125	-0.499999	$10^{-7}\times 8.13802$

الجدول 6

بالتدقيق في عمود الخطأ الفعلي نجد أنّه من أجل $h=0.015$ ازدادت قيمة الخطأ الفعلي في الوقت الذي كانت فيه قيمة h تتناقص، لذا يمكننا القول إن القيمة الأمثل لطول الخطوة h تقع ضمن المجال $[0.025,0.05]$، والدراسة التالية توضح ذلك:

وجدنا أن قيمة الخطأ الناتج عن التدوير والاقتطاع لن تتجاوز المقدار:

$$e(h)=\frac{\varepsilon}{h}+\frac{h^2}{6}M \qquad (16)$$

وبما أن القيمة الأمثل يجب أن تجعل مقدار الخطأ أصغر ما يمكن، فإنّه باشتقاق المقدار السابق بالنسبة إلى طول الخطوة h وجعله مساوياً للصفر نجد :

$$h=\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}} \qquad (17)$$

لكن:

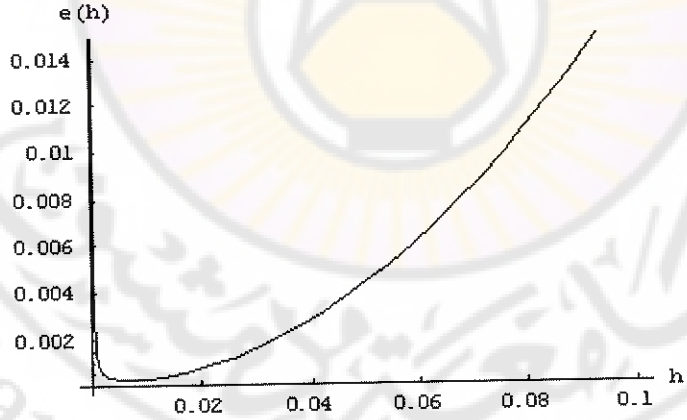
$$M=\max_{x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+h]}|f'''(x)|=\max_{x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+h]}|Sin(x)|=Sin(\frac{\pi}{6}+0.1)$$

ومن أجل $\varepsilon = 10^{-6}$ نجد بالتبديل في عبارة h أنّ:

$$h = \sqrt[3]{\frac{310^{-6}}{Sin(\frac{\pi}{6}+0.1)}} = 0.0172549$$

وهذا يتوافق مع النتائج التي حصلنا عليها في الجدول(6).

الشكل 6 يُبين تذبذب الخطأ الموضح بالجدول (6)



الشكل 7 يُوضح التابع القيمة المثلى لـ h

ملاحظة:

لا نستطيع في الواقع حساب قيمة h الأمثلية التي يجب استخدامها في

حساب قيمة مشتق تابع، وذلك لأننا لا نملك أي معلومات عن المشتق الثالث لهذا التابع، لكن ما أردنا توضيحه هو أنّ تصغير قيمة h لن يعطينا دائماً تقريباً أفضل لقيمة المشتق.

درسنا هنا خطأ التدوير في حالة استخدام عبارة المشتق الناتجة عن استخدام ثلاث نقاط فقط، ولاحظنا أنّه كلما صغرنا طول الخطوة ازداد خطأ التدوير، ولو درسنا عبارات الاشتقاق الأخرى لواجهتنا المشكلة ذاتها، ويعود ذلك بشكلٍ أساسي إلى ضرورة القسمة على قوى h، وكما هو معلوم تجعل عملية القسمة على أعداد صغيرة خطأ التدوير كبيراً لذا علينا تجنب ذلك ما أمكن.

لذا يمكننا اعتبار طرائق الاشتقاق العددي من الطرائق غير المستقرّة، إذ إنّ القيم الصغيرة لطول الخطوة h والضرورية لتصغير خطأ الاقتطاع تتسبب أيضاً في نمو خطأ التدوير.

2- التكامل العددي:

منذ حوالي ألفي سنة أوجد أرخميدس(212-287 B.C) صيغ لحساب السطوح والحجوم للأجسام الصلبة مثل الكرة والمخروط و.... وتُعد طريقته في التكامل إنجازاً في عصره؛ لأنه لم يكن ملمّاً بالجبر ولا بفكرة التابع أو حتى بالتمثيل العشري للأعداد.

اكتشف ليبنز(1646-1716) ونيوتن (1643-1727) فكرة التفاضل والتكامل، والفكرة التي أوحت لهم بذلك هي أن التفاضل عملية عكسية للتكامل ، وباستخدام هذا الارتباط الرمزي كانا قادرين على حل عدد هائل من المسائل الهامة في الرياضيات والفيزياء والفلك.

درس فورييه (1768-1830) نقل الحرارة باستخدام سلسلال مثلثية لتمثيل التوابع. تُعد سلاسل وتكاملات وتحويلات فورييه من الدراسات الهامة اليوم، وفي شتى العلوم مثل الطب وعلم اللغويات والموسيقا.

قام غاوس (1777–1855) بكتابة أول جدول للتكاملات ، و طبّق كوشي (1789–1857) التكامل في الحقل العقدي، أمّا ريمان(1866-1926) وليبسجو (1875-1941) فقد وضعا تعريفاً للتكامل على أساس منطقي قوي.

ابتكر ليوفيل (1809-1882) إطاراً جديداً للتكامل وذلك باكتشاف متى تكون التكاملات غير المحدّدة لتوابع أوليّة هي أيضاً توابع أوليّة. وأوجد هرميت (1901-1822) خوارزميّة لمكاملة التوابع الدورانيّة وفي عام 1940 مدّد أوستروسكي(1986-1893) هذه الخوارزميّة إلى تطبيقات دورانيّة كثيرة.

وخلال القرن العشرين ، قبل ظهور الحواسيب واستخدامها طوّر الرياضيون مبرهنة التكامل واستخدموها لكتابة جداول للتكاملات والتحويلات التكاملية، ومن هؤلاء العلماء:

G.N.Watson، E.C.Titchmarsh، E.W.Barnes، H.Mellin ، C.S.Meijer، W.Grobner، N.Hofreiter، A.Erdelyi، L.Lewin ، Y.L.Luke، W.Magnus، A.Apelblat، F.Oberhettinger ، I.S.Gradshtyn، H.Extan، H.M.Srivastava، A.P.Prudnikov ، O.I.Marichow، Ya.A.Brychkov.

وفي عام 1969 قام R.H.Risch بتطوير هام في التكامل غير المحدّد وذلك عندما أصدر كتابه عن المبرهنة العامّة للتكامل و تطبيقاتها على التوابع الأولية. لكن مبرهنته لم تستخدم أوتوماتيكاً في جميع صفوف التوابع الأوليّة؛ لأنه كان يوجد في أعماقها معادلة تفاضلية صعبة تحتاج للحل.

وفي عام 1980 تمّ إحراز بعض التقدم في تحديد طريقته لتشمل صفوفاً معيّنة من التوابع الخاصّة.

1-2 تكامل ريمان

1-1-2 التكامل المحدد والتكامل غير المحدد

يكون التكامل غير المحدد لتابع ما تابعاً آخر أو صفاً من التوابع، في حين يكون التكامل المحدد لتابع ما على مجالٍ محدد عدداً. على سبيل المثال:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$ تكامل غير محدد

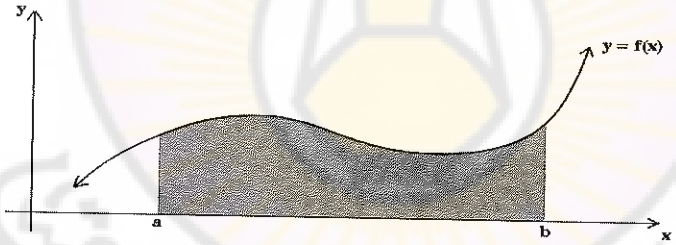
$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$ تكامل محدد

نستخدم لحساب التكامل المحدد القاعدة التالية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

حيث يمثل F التابع الأصلي للتابع f ، بعبارة أخرى: $F' = f$.

يُمثل التكامل المحدد المساحة المحصورة بين بيان التابع والمحور ox على المجال $[a,b]$.



الشكل 8

2-1-2 المجاميع السفلية والعلوية

لتكن $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ تجزئة للمجال $[a,b]$. أي:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

تُجزّئ P المجال $[a,b]$ إلى n مجال جزئي $[x_i, x_{i+1}]$.

نرمز لأكبر حد أدنى للدالة f على المجال الجزئي $[x_i, x_{i+1}]$ بالرمز m_i. والذي يعطى بالشكل:

$$m_i = \inf\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$

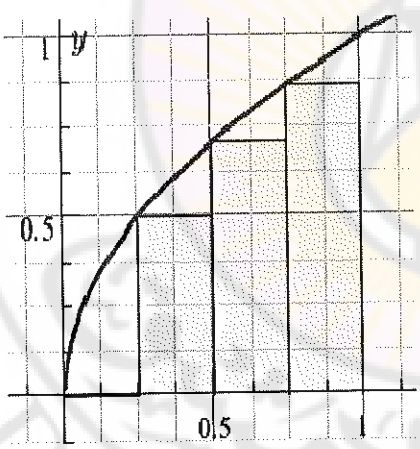
وبشكل مشابه نرمز لأصغر حد أعلى للدالة f على المجال الجزئي $[x_i, x_{i+1}]$ بالرمز M_i. ويعطى بالشكل:

$$M_i = \sup\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$

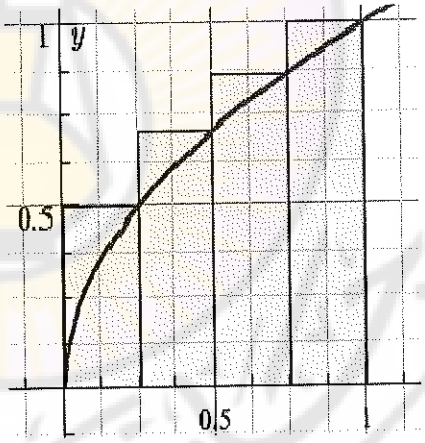
نُعرف المجاميع السفلية والمجاميع العلوية للتابع f بالنسبة للتجزئة P بالشكل:

$$L(f;P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$U(f;P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$



الشكل 10:المجاميع السفلية



الشكل 9:المجاميع العلوية

من الواضح أن:

$$L(f;P) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f;P)$$

وذلك مهما تكن التجزئة P.

3-1-2 التوابع القابلة للمكاملة وفق ريمان

بفرض أن أصغر حد أعلى لمجموعة الأعداد $L(f;P)$ موجود، حيث P تمسح جميع تجزئات المجال $[a,b]$. وبفرض أنّ أكبر حد أدنى لمجموعة الأعداد $U(f;P)$ موجود، حيث P تمسح جميع تجزئات المجال $[a,b]$. فإذا تحقق:

$$\inf_P U(f;P) = \sup_P L(f;P)$$

عندئذٍ نقول إنَّ التابع f قابل للمكاملة وفق ريمان على المجال $[a,b]$. ونعرف تكامل ريمان للتابع f على المجال $[a,b]$ بالعلاقة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_P U(f;P) = \sup_P L(f;P)$$

ويُبرهن أن كل تابع مستمر على مجال حقيقي محدود قابل للمكاملة وفق ريمان.

2-2الطرائق العددية للتكامل:

1-2-2 مبدأ التكامل العددي:

تقوم معظم الطرائق العددية لحساب التكامل على اختيار متتالية من التوابع $\{f_n\}$ معرفة على المجال $[a,b]$، وقابلة للمكاملة (يتم ذلك غالباً باستخدام الاستيفاء القطعي بكثيرات الحدود)، وبحيث تكون متقاربة بانتظام نحو f:

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وعندئذ نقوم بحساب $I(f_n)$ بدلا من $I(f)$.

بفرض $I_n(f) = I(f_n)$ عندئذ:

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x)dx \qquad (18)$$

باستخدم استيفاء لاغرانج نجد:

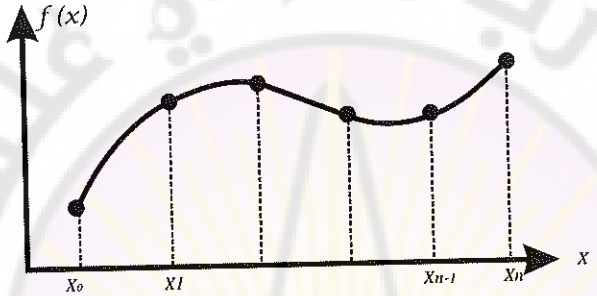
$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx$$

حيث $L_i(x)$ كثيرالحدود من درجة n.

$$I_n(f)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)[\omega_i]$$

وبفرض $\int_a^b L_i(x)\,dx=\omega_i$:

$$I_n(f)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i) \qquad (19)$$



الشكل 11

تدعى هذه الطريقة التكامل العددي التربيعي (Numerical Integration Quadrature) و (ω_j) أوزان الصيغة التربيعية (Weights) و (x_j) نقاط المكاملة (nodes).

2-2-2 الخطأ في حساب التكامل العددي:

لدينا:

$$\int_a^b f(x)\,dx=I_n(f)+E_n(f) \qquad (20)$$

أو

$$E_n(f)=\int_a^b f(x)\,dx-I_n(f)$$

حيث $E_n(f)$ هو خطأ الاقتطاع.

تُدعى الصيغة التربيعية "مفتوحة" إذا تحقق $a < x_0$ و $x_n < b$، بينما ندعوها "مغلقة" إذا كان $a = x_1$ و $x_n = b$.

تصنف طرائق الشكل التربيعي كما يلي:

- طرائق نيوتن – كوتس: وهي طرائق تعتمد على نقاط متساوية المسافة فيما بينها.
- صيغ الشكل التربيعي لغاوص: وهي طرائق تعتمد على نقاط البيانات غير متساوية المسافة فيما بينها.

نلاحظ أن التكامل عبارة عن مجموع خطي لقيم التابع $f(x_i)$.

والسؤال ما هي قيم (ω_j) المناسبة لإيجاد التكامل. والتي سنقوم في هذا الفصل بحسابها، وأما بالنسبة لعبارة الخطأ لدينا:

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &= |I(f) - I_n(f)| \\ &= \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \\ &\le (b-a)\|f - f_n\|_\infty \end{aligned}$$

ومن أجل n ما سيكون $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$، وعندئذ:

$$|E_n(f)| \le \varepsilon(b-a) \tag{21}$$

3-2-2 طرائق نيوتن–كوتس (Newton-Cotes Methods)

تعتمد هذه الطريقة على الاستيفاء عند نقط متساوية المسافة فيما بينها، وعادة هذا غير محقق ويُعد ذلك من مساوئ هذه الطريقة .

بفرض $\{x_i\}_{i=0}^n$ نقاط مختلفة، عندئذ:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

حيث $L_i(x)$ كثيرة حدود لاغرانج. نعوض في (3) :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))dx \qquad (22)$$

حيث $\xi(x) \in [a,b]$.

غالباً نستخدم هذه الصيغة من أجل x_i تنتمي للمجال $[a,b]$.

لتكن $x_i = a + ih$ حيث $h = \frac{b-a}{n}$، فإذا قمنا بعملية تغيير متحول في $L_i(x)$ حيث نفرض $x = a + hu$ و $u = \frac{x-a}{h}$ فينتج:

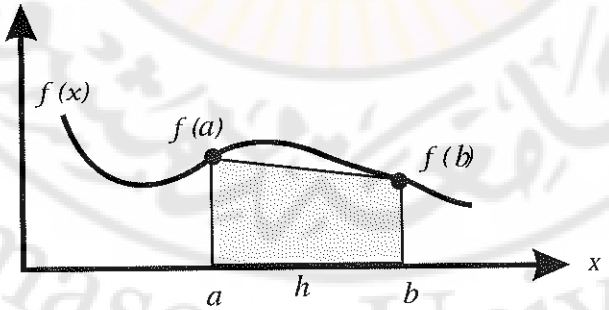
$$\omega_j = \int_a^b \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}dx = h\int_a^b \frac{\prod_{j\neq i}(u-j)}{\prod_{j\neq i}(i-j)}du = h\gamma_i \qquad (23)$$

ونلاحظ أن قيم γ_i مستقلة عن a و b وإنما تعتمد فقط على n.

نستطيع الآن أن نستخلص حالات خاصة من هذه الطريقة.

1-3-2-2 طريقة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule):

تقوم هذه الطريقة على استيفاء التابع f المعرف على المجال $[a,b]$ بحدودية من الدرجة الأولى تصل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.



الشكل 12

من أجل $n=1$ يكون التقريب خطي وفي هذه الحالة $h=b-a$، نعوض في (23)

$$\gamma_1=\int_0^1\frac{u-0}{1-0}du=\frac{1}{2} \text{ و } \gamma_0=\int_0^1\frac{u-1}{0-1}du=\frac{1}{2}$$

ويكون:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)=\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \qquad (24)$$

ونلاحظ بأنّها تعادل مساحة شبه المنحرف قاعدتاه $f(a)$، $f(b)$ و ارتفاعه $\frac{h}{2}$. أما عبارة الخطأ فهي:

$$E(f)=\int_a^b\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(\xi(x))dx$$

نعوض $x=a+hu$ نجد:

$$E(f)=h^3\int_0^1\frac{u(u-1)}{2}f''\left(\xi(a+uh)\right)du$$

ونلاحظ صعوبة حساب $\xi(x)$.

نحاول الآن الاستعانة بمبرهنة القيمة الوسطى التكاملية الأولى مع ملاحظة أن الحد $u(u-1)$ قابل للمكاملة و لا يغير إشارته ضمن المجال $[0,1]$.

$$\int_0^1 f''\left(\xi(a+hu)\right)\frac{u(u-1)}{2}du=f''(\xi)\int_0^1\frac{u(u-1)}{2}du$$

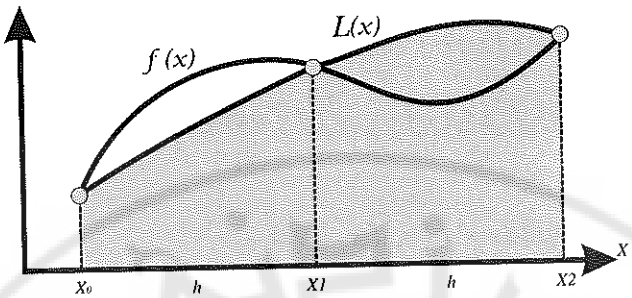
$$=f''(\xi)\left[\frac{u^3}{6}-\frac{u^2}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{12}f''(\xi) \qquad (25)$$

نعوض في عبارة التكامل فنجد:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)-h^3\frac{f''(\xi)}{12} \qquad (26)$$

حيث $h=b-a$ و $\xi\in]a,b[$.

2-3-2-2 طريقة سيمبسون((Simpson's Rule):



الشكل 13

من أجل $n=2$ يكون التقريب للتابع $f(x)$ بكثيرالحدود لاغرانج من الدرجة الثانية ، لذلك سنحتاج إلى ثلاث نقط.

نفرض $h=\frac{b-a}{2}$ و $x_0=a$ و $x_1=a+h$ و $x_2=b$ نعوض في (23) فنجد:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx+$$

$$\int_{x_0}^{x_2}\frac{1}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f^{(3)}(\xi(x))dx$$

ونلاحظ صعوبة حساب الحد:

$$\int_{x_0}^{x_2}\frac{1}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f^{(3)}(\xi(x))dx$$

كما أنه لا يُمكننا اتباع طريقة حساب الخطأ في شبه المنحرف إذ إنَّ المقدار $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، جذوره (x_0,x_1,x_2) ويُغير إشارته ضمن المجال $[x_0,x_2]$، ولذلك سنتبع أسلوباً آخر.

نطبق مبرهنة تايلور بجوار x_1 :

$$f(x)=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)+\frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2+$$
$$\frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3+\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=f(x_1)(x_2-x_0)+$$
$$\left[\frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2+\frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3+\frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)\Big|_{x_0}^{x_2}\right] \qquad (27)$$
$$+\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx$$

ونلاحظ أن الحد $(x-x_1)^4$ لا يغير إشارته وهو قابل للمكاملة، فحسب مبرهنة القيمة الوسطى التكاملية الأولى نجد:

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4dx=\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4dx=\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x-x_1)^5\Big|_{x_0}^{x_2}$$

وذلك من أجل $\xi_1\in\,]x_0,x_2[$ و $h=x_2-x_1=x_1-x_0$

ويصبح التكامل بالشكل :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=2hf(x_1)+\frac{h^3}{3}f''(x_1)+\frac{h^5}{60}f^{(4)}(\xi_1)$$

لكن لدينا:

$$f''(x_1)=\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h^2}-\frac{h^5}{12}f^{(4)}(\xi_2)$$

نعوض فنجد:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]-\frac{h^5}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2)-\frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{36}f^{(4)}(\xi_2) + \frac{h^5}{60}f^{(4)}(\xi_1)$$

وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطى نجد:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) \tag{28}$$

وبالتالي يمكن كتابة:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

<u>ملاحظة</u>: يمكن استنتاج عبارات مشابهة لما سبق :

1. إذا كان $f \in C^4[a,b]$ فإن:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3) - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi) \tag{29}$$

و تدعى بصيغة سيمبسون $\frac{3}{8}$.

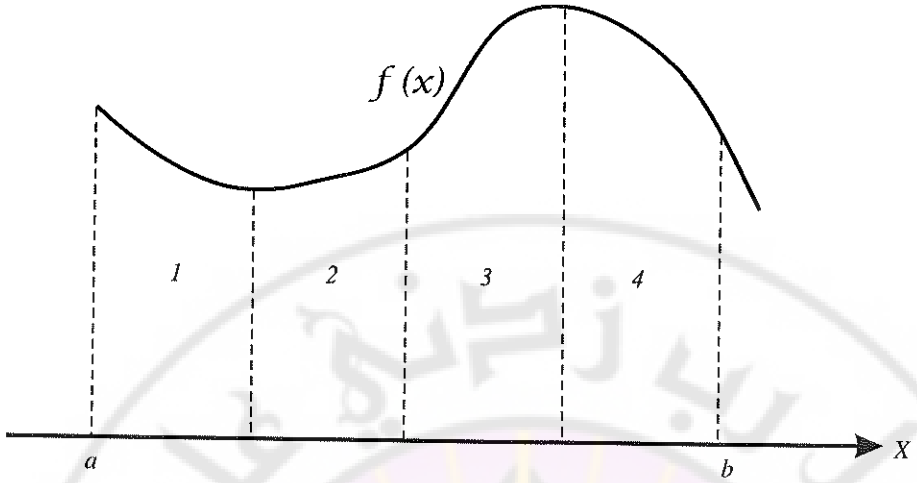
2. إذا كان $f \in C^6[a,b]$ فإن:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4) - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi) \tag{30}$$

وتدعى بصيغة بول (Boole's rule)

3-3-2-2 التكامل العددي المركب (Composite Numerical Integration):

نلاحظ أن طرائق نيوتن–كوتس غير جيدة من أجل مجالات كبيرة فهي تُعطي خطأ كبير وبالتالي دقة غير كافية. لذلك سنلجأ إلى فكرة تجزئة المجال إلى عدد محدود من المجالات $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

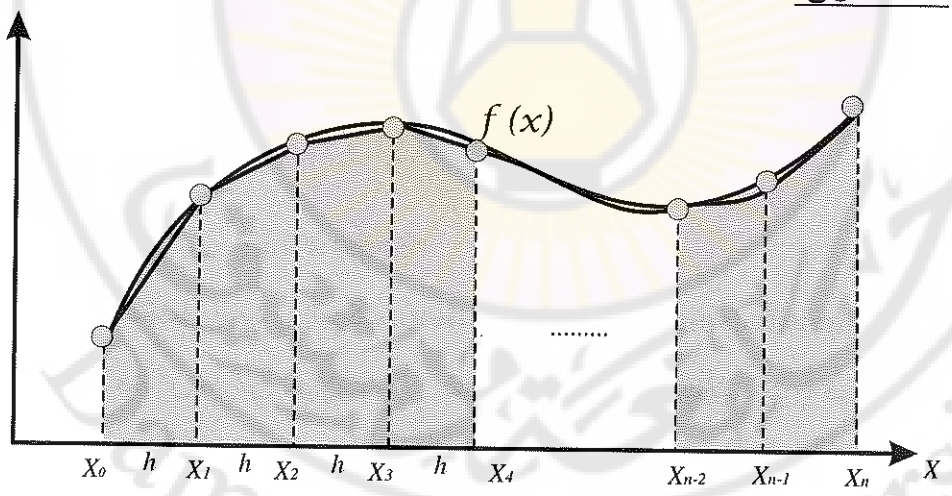


الشكل 14

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx$$

حيث $x_j = a + jh$ و $h = (b-a)/n$. ونميز حالتين:

<u>الحالة الأولى:</u> **طريقة سيمبسون المركبة (composite Simpson's Rule):**



الشكل 15

بفرض أن $n = 2m$ نجد:

$$h=\frac{(b-a)}{2m} \quad \text{و} \quad a=x_0<x_1<\ldots<x_{2m-1}<x_{2m}=b$$

$$x_i=a+ih \quad , i=0,1,2,\ldots\ldots,2m \quad \text{و}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+2\sum_{j=1}^{m-1}f(x_{2j})+4\sum_{j=0}^{m-1}f(x_{2j+1})+f(x_{2m})\right]-\frac{h^5}{90}\sum_{i=0}^{m-1}f^{(4)}(\xi_i)$$

لكن: $h=\frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)\ldots\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]-\frac{h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(\xi) \qquad (31)$$

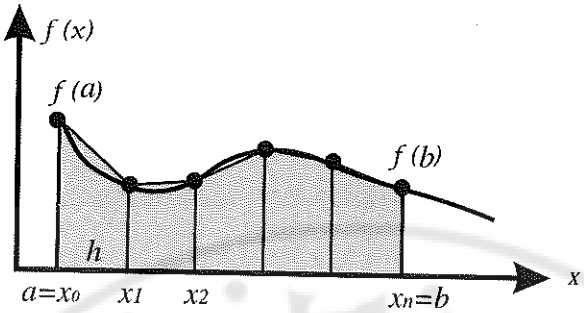
نلاحظ أن الخطأ في طريقة سيمبسون من المرتبة $O(h^5)$ وأصبح بطريقة سيمبسون المركبة من المرتبة $O(h^4)$.

الحالة الثانية: **طريقة شبه المنحرف المركبة (Composite Trapezoidal Rule)**

بفرض أن $m=n$ وبمناقشة مماثلة لما سبق نستنتج:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a=x_0}^{x_1}f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx+\int_{x_2}^{x_3}f(x)dx+\ldots.+\int_{x_{n-1}}^{x_n=b}f(x)dx$$

$$=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+\ldots\frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]$$



الشكل 16

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+.....++2f(x_{n-1})+f(x_n)] - \frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi) \qquad (32)$$

مثال(5):

أوجد قيمة تقريبية للتكامل I باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة. حيث

$$I = \int_8^{30}\left(2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt$$

الحل:

من أجل $n=1$:

$$I \approx (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \quad ; \quad a=8 \quad b=30$$

$$f(t) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t$$

$$f(8) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(8)}\right]-9.8(8) = 177.27$$

$$f(30) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(30)}\right]-9.8(30) = 901.67 \ m/s$$

$$I \approx (30-8)\left[\frac{177.27+901.67}{2}\right] = 11868$$

القيمة الفعلية للتكامل I :

$$I = \int_8^{30}\left(2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt = 11061$$

وعليه فإن الخطأ الفعلي هو:

$$E = |11061 - 11868| = 807$$

من أجل $n = 2$:

$$\int_8^{30} f(t)dt = \int_8^{19} f(t)dt + \int_{19}^{30} f(t)dt$$

$$= (19-8)\left[\frac{f(8)+f(19)}{2}\right] + (30-19)\left[\frac{f(19)+f(30)}{2}\right]$$

$$f(8) = 177.27$$

$$f(19) = 484.75$$

$$f(30) = 901.67$$

$$\int_8^{30} f(t)dt \approx (19-8)\left[\frac{177.27+484.75}{2}\right] + (30-19)\left[\frac{484.75+901.67}{2}\right]$$

$$\approx 11266$$

والخطأ الفعلي في هذه الحالة هو:

$$|11061 - 11266| = 205$$

n	القيمة التقريبية	الخطأ المرتكب
1	11868	807
2	11266	205
3	11153	91.4
4	11113	51.5
5	11094	33.0
6	11084	22.9
7	11078	16.8
8	11074	12.9

$$\approx \frac{5.05}{4}[f(-2.15)+2f(-2.15+i\times 2.525)+f(2.9)]$$

$$\approx \frac{5.05}{4}[f(-2.15)+2f(0.375)+f(2.9)]$$

$$\approx \frac{5.05}{4}[0.039550+2(0.37186)+0.0059525]$$

$$\approx 0.99638$$

والخطأ المرتكب في هذه الحالة:

$$E=|0.98236-0.99638|=0.014025$$

n	القيمة التقريبية	الخطأ المرتكب
1	0.11489	0.86746
2	0.99638	0.014025
3	0.96093	0.021427
4	0.96969	0.012670
5	0.97402	0.0083332
6	0.97649	0.0058680
7	0.97801	0.0043459
8	0.97901	0.0033441

مثال(8):

أوجد قيمة تقريبية للتكامل التالي:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة.

الحل:

n	القيمة التقريبية	الخطأ المرتكب
2	1.354	1.474
4	1.792	1.036
8	2.097	0.731
16	2.312	0.516

مثال(9):

أوجد قيمة تقريبية للتكامل I

$$I=\int_{8}^{30}\left(2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt$$

باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة.

الحل:

من أجل $n=1$:

$$I\approx(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\quad ;\ a=8\quad b=30$$

$$f(t)=2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t$$

$$f(8)=2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(8)}\right]-9.8(8)=177.27$$

$$f(30)=2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(30)}\right]-9.8(30)=901.67\ m/s$$

$$I\approx(30-8)\left[\frac{177.27+901.67}{2}\right]=11868$$

القيمة الفعلية للتكامل I:

$$I=\int_{8}^{30}\left(2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt=11061$$

وعليه فإن الخطأ الفعلي هو:

$$E=|11061-11868|=807$$

من أجل $n=2$:

$$\int_{8}^{30}f(t)dt=\int_{8}^{19}f(t)dt+\int_{19}^{30}f(t)dt$$

$$=(19-8)\left[\frac{f(8)+f(19)}{2}\right]+(30-19)\left[\frac{f(19)+f(30)}{2}\right]$$

$f(8) = 177.27$

$f(19) = 484.75$

$f(30) = 901.67$

$$\int_8^{30} f(t)dt \approx (19-8)\left[\frac{177.27+484.75}{2}\right] + (30-19)\left[\frac{484.75+901.67}{2}\right]$$

$$\approx 11266$$

والخطأ الفعلي في هذه الحالة هو:

$$|11061 - 11266| = 205$$

n	القيمة التقريبية	الخطأ المرتكب
1	11868	807
2	11266	205
3	11153	91.4
4	11113	51.5
5	11094	33.0
6	11084	22.9
7	11078	16.8
8	11074	12.9

مثال(10):

أوجد قيمة تقريبية للتكامل I باستخدام طريقة سيمبسون المركبة.

$$I = \int_{250}^{270} 0.3515\ e^{-0.3881(x-252.2)^2} dx$$

الحل:

من أجل $n = 1$:

$$a = 250 \quad , \quad b = 270 \quad , \quad \frac{a+b}{2} = 260$$

$$f(y) = 0.3515e^{-0.3881(y-252.2)^2}$$

$$f(250) = 0.3515e^{-0.3881(250-252.2)^2} = 0.053721$$

$$f(270) = 0.3515e^{-0.3881(270-252.2)^2} = 1.3888\times10^{-54}$$

$$f(260) = 0.3515e^{-0.3881(260-252.2)^2} = 1.9560\times10^{-11}$$

$$I \approx \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$\approx \left(\frac{20}{6}\right)\left[0.053721+4\left(1.9559\times10^{-11}\right)+1.3888\times10^{-54}\right] = 0.17907$$

والقيمة الفعلية للتكامل:

$$I = \int_{250}^{270} 0.3515 \ e^{-0.3881(x-252.2)^2} dx = 0.97377$$

وعليه فإن الخطأ المرتكب:

$$E = |0.97377 - 0.17907| = 0.79470$$

n	القيمة التقريبية	الخطأ المرتكب
2	0.17907	0.79470
4	0.20133	0.77244
6	1.0090	0.035226
8	1.2042	0.23042
10	1.0954	0.12167

مثال(11):

أوجد قيمة تقريبية للتكامل:

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

باستخدام طريقة سيمبسون المركبة من أجل $n = 6$.

الحل:

لدينا $n=6$ وعليه فإن:

$$h=\frac{4-1}{6}=0.5$$

لنحسب الآن القيم $\{f(x_i)\}_{i=0}^{6}$:

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4.375}$	3	$\sqrt{16.625}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{43.875}$	$\sqrt{65}$

وعليه:

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3}dx \approx \frac{0.5}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+4\sqrt{4.375}+2(3)+4\sqrt{16.625}+\\+2\sqrt{28}+4\sqrt{43.875}+\sqrt{65}\end{pmatrix}$$

$$\approx 12.871$$

1-3-3-2-2 تعريف: (درجة الدقة) Degree of Precision :

نعرف درجة الدقة للصيغة التربيعية (20) بأنّها عدد صحيح موجب n، حيث يكون الخطأ $E[P_i]=0$ أياً كان كثيرة الحدود $P_i(x)$ من الدرجة $n\geq i$، وحيث $E[P_{i+1}]\neq 0$ من أجل كثيرة الحدود ما $P_{i+1}(x)$ درجته $n+1$.

أي أن:

$$\begin{aligned}&\int_a^b P_i(x)dx = I[P_i] \quad ; \quad n\geq i\\ &\int_a^b P_{i+1}(x)dx \neq I[P_{i+1}] \quad ; \quad n+1=i\end{aligned} \tag{33}$$

لنفترض $P_i(x)=a_ix^i+a_{i-1}x^{i-1}+.....+a_1x^1+a_0$ كثيرة حدود من الدرجة i، في حالة $n\geq i$ $P_i^{(n+1)}(x)\equiv 0$ وذلك $\forall x\in[a,b]$، ومن جهة أخرى $P_{n+1}^{(n+1)}(x)\equiv(n+1)!\,a_{n+1}$، وذلك $\forall x\in[a,b]$. نستنتج أن خطأ الاقتطاع للتابع

f المستوفى يُعطى بالشكل:

$$E(f) = k f^{(n+1)}(\xi) \qquad (34)$$

حيث k ثابت محدد و n درجة الدقة.

نتيجة:

لتكن لدينا $x_k = x_0 + kh$ مجموعة نقط مختلفة ومتساوية المسافة بينها، عندئذ درجة دقة طريقة شبه المنحرف هي $n = 1$.

أما طريقة سيمبسون و سيمبسون $\left(\frac{3}{8}\right)$ فدرجة دقتها $n = 3$ ، أما طريقة بول فدرجة دقتها $n = 5$.

4-2-2 الشكل التربيعي لغاوص:

اعتمد العلم كارل فريدريك غاوص (1777–1855) على تقريب التابع بكثيرة حدود ذات درجة عظمى ودقة مثلى، وذلك باختيار مناسب للأوزان ولنقط المكاملة، التي لم يشترط فيها تساوي المسافات وإنما يجب أن تنتمي إلى $[a,b]$.

سندرس في البداية $[a,b] = [-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) \qquad (35)$$

1-4-2-2 الحالة الأولى:

من أجل $n = 1$ عندئذ $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \omega_1 f(x_1)$ لدينا هنا مجهولين x_1 و ω_1، وعليه نقوم باستيفاء $f(x)$ بكثير حدود من الدرجة الأولى $P(x) = a_1 x + a_0$، وذلك $\forall a_0, a_1 \in \Re$

$$E[P_0] = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} a_0\, dx = \omega_1 a_0$$

$$E\left[P_0\right]=0 \Rightarrow 2a_0=\omega_1 a_0$$

بالمطابقة نجد: $\omega_1=2$.

وبطريقة مشابهة نجد:

$$E\left[P_1\right]=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\left(a_0+a_1 x\right)dx=2\left(a_1 x_1+a_0\right)$$

ومنه $2a_1 x_1=0$، نستنتج $x_1=0$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2f(0) \qquad (36)$$

نلاحظ بأنّ هذه العلاقة غير محققة من أجل كثيرات الحدود من الدرجة الثانية أو أكثر.

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx=\frac{2}{3} \quad ; \quad 2f(0)=0$$

فالعلاقة (36) محققة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها واحد أو أقل. إذاً فدرجة الدقة للعلاقة (36) هي واحد.

مثال(12):

أوجد قيمة التكامل بطريقة غاوص من أجل $n=1$:

$$I=\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$$

الحل:

نعوض في العلاقة (36)

$$I=2e^0=2$$

أما التكامل الفعلي:

$$I=1.49365$$

نلاحظ أنّ هذه النتيجة ليست دقيقة بالدرجة الكافية لكنها تُعتبر أفضل نتيجة إذاً تم

الاستيفاء بحدودية من الدرجة الأولى.

2-4-2-2 الحالة الثانية:

من أجل $n=2$ نعوض في العلاقة (35) فنجد

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) \qquad (37)$$

ونقوم الآن بعمليات مشابهة للحالة الأولى فنبدأ بكثيرة الحدود من درجة صفر، فنجد:

$$\omega_1 + \omega_2 = 2$$

ثم بكثيرة الحدود من درجة الأولى ، $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = 0$

ثم بكثيرة الحدود من درجة الثانية ، $\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$

ثم بكثيرة الحدود من درجة الثالثة ، $\omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 = 0$

بالحل المشترك نجد:

$$x_1 = -x_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \text{ و } \omega_1 = \omega_2 = 1$$

نعوض في التكامل:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad (38)$$

وهي محققة من أجل كل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فما دون وغير محققة من أجل كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة أو أكثر. نستنتج أن درجة الدقة للعلاقة (38) هي 3.

3-4-2-2 الحالة العامة:

في الحالة العامة من أجل (n) اختيارية، في العلاقة (35) لدينا $(2n$ مجهول) $x_1,\ldots\ldots,x_n$ و $\omega_1,\ldots,\omega_n$ ، فنحتاج إلى $2n$ معادلة. إذاً نقرب التابع $f(x)$ بكثيرالحدود من الدرجة $2n-1$ ، وستكون درجة الدقة $2n-1$.

نقدم فيما يلي جدولاً لقيم x_i و ω_i الموافقة لـ: $n = 1, 2, ..., 10$

n	ω_i	x_i	n	ω_i	x_i
1	2.0	0.0	8	0.1012285363	±0.9602898565
2	1.0	±0.5773502692		0.2223810345	±0.7966664774
3	0.5555555556	±0.7745966692		0.3137066459	±0.5255324099
	0.8888888889	0.0		0.3626837834	±0.1834346425
4	0.3478548451	±0.8611363116	9	0.0812743883	±0.9681602395
	0.6521451549	±0.3399810436		0.1806481607	±0.8360311073
5	0.2369268851	±0.9061798459		0.2606106964	±0.6133714327
	0.4786286705	±0.5384693101		0.3123470770	±0.3242534234
	0.5688888889	0.0		0.3302393550	0.0
6	0.1713244924	±0.9324695142	10		
	0.3607615730	±0.6612093865		0.0666713443	±0.9739065285
	0.4679139346	±0.2386191861		0.1494513492	±0.8650633667
7	0.1294849662	±0.9491079123		0.2190863625	±0.6794095683
	0.2797053915	±0.7415311856		0.2692667193	±0.4333953941
	0.3818300505	±0.4058451514		0.2955242247	±0.1488743390
	0.4179591837	0.0			

مثال(13):

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

باستخدام الشكل التربيعي لغاوص من أجل $n = 3$.

الحل:

نعلم أن:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \approx \frac{5}{9}\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2} + \frac{8}{9}\sqrt{1-0} + \frac{5}{9}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}+8}{9}$$

ويكون الخطأ المرتكب -0.020820931

<u>ملاحظة:</u>

في حالة المكاملة على مجال $[a,b]$. نستخدم التحويل $t=\frac{2}{b-a}(x-a)-1$

ومنه : $x=\frac{b-a}{2}(t+1)+a$ نعوض فنجد :

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}(t+1)+a\right)dt$$

مثال(14):

أوجد قيمة التكامل بطريقة غاوص من أجل $n=3$:

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

الحل:

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{9}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{5}{18}e^{-0.112701665^2}+\frac{4}{9}e^{-0.5^2}+\frac{5}{18}e^{-0.887298335^2}$$

$$\approx 0.746814584$$

والقيمة الفعلية للتكامل:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=0.7468241330$$

أي نجد أن الخطأ المرتكب من مرتبة 10^{-5}.

ملاحظة:

يمكن استخلاص طريقة شبه المنحرف وطريقة سيمبسون من طريقة غاوص التربيعية كما يلي:

ليكن لدينا:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(x_i)$$

من أجل $n=2$ نجد: $\omega_1=1$ و $\omega_2=1$ و $x_1=1$ و $x_2=-1$

$$I=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)]$$

وهي طريقة شبه المنحرف في المجال $[-1,1]$.

ومن أجل $n=3$ نجد: $\omega_1=\frac{1}{3}$ و $\omega_2=\frac{4}{3}$ و $\omega_3=\frac{1}{3}$ و $x_1=-1$ و $x_2=0$ و $x_3=1$

$$I=\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$$

وهي طريقة سيمبسون في المجال $[-1,1]$.

تُعد طرائق نيوتن – كوتس أكثر كلفة من طرائق غاوص.

4-4-2-2 تحليل الخطأ:

لدينا صيغتان لشكل الخطأ لطريقة غاوص التربيعي.

الصيغة الأولى :

$$E_n(f)=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\sum_{j=1}^{n}\omega_j f(x_j)$$

$$E_n(f) = e_n \frac{f^{(2n)}(c_n)}{(2n)!} \tag{39}$$

حيث $a \le c_n \le b$

$$e_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left[(2n)!\right]^2} \approx \frac{\pi}{4^n} \tag{40}$$

نرمز $M_k = \max_{-1\le x\le 1} \frac{\left|f^{(k)}(x)\right|}{k!}$ ، ثم نعوض في العلاقة (39) ، فنجد

$$\left|E_n(f)\right| \le e_n M_{2n} \tag{41}$$

أي :

$$\left|E_n(f)\right| \le \frac{\pi}{(4)^n} M_{2n} \tag{42}$$

نلاحظ بأنّ الخطأ يتناقص تقريباً بمقدار $\frac{1}{4}$ في كل خطوة. و هذا ما يسوغ سرعة تقارب الشكل التربيعي لغاوص مقارنة بطرائق نيوتن–كوتس.

<u>الصيغة الثانية:</u>

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً في المجال $a \le x \le b$، عندئذ يمكن كتابة الشكل التربيعي لغاوص كما يلي:

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) \equiv I_n$$

$$\left|I(f) - I_n(f)\right| \le 2(b-a)\rho_{2n-1}(f) \tag{43}$$

حيث نعرف التابع $\rho(f)$ بالشكل:

$$\rho_m(f) = \min_{\deg(p)\le m}\left[\max_{a\le x\le b}\left|f(x) - p(x)\right|\right], \quad m \ge 0 \tag{44}$$

مثال(15):

لتكن $f(x)=e^{-x^2}$ عندئذ تعطى $\rho_m(f)$ حسب الجدول التالي :

m	$\rho_m(f)$
1	5.30×10^{-2}
2	1.79×10^{-2}
3	6.63×10^{-4}
4	4.63×10^{-4}
5	1.62×10^{-5}
6	7.82×10^{-6}
7	4.62×10^{-7}
8	9.64×10^{-8}
9	8.05×10^{-9}
10	9.16×10^{-10}

إذاً من أجل تقدير عبارة الخطأ للتكامل $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ من أجل $n=3$ نجد:

$$|I-I_3|\le 2\rho_5\left(e^{x^2}\right)=3.24\times10^{-5}$$

بالمقارنة مع الخطأ الفعلي 9.5×10^{-6} نلاحظ سرعة تقارب الطريقة.

مثال(16):

ببساطة يمكن استنتاج أن عبارة الخطأ للشكل التربيعي لغاوص في المجال $[-1,1]$ من أجل $n=2$ ، تُعطى بالشكل $E_2(f)=\frac{1}{135}f^{(4)}(\xi)$ ، حيث $-1\le\xi\le1$.

3-2- التكاملات الشاذة (المعتلة) Singular integration:

لقد استطعنا من خلال الطرائق العددية السابقة إيجاد قيم عددية تقريبية لتكاملات من أنماط متعددة (مثلثية، كسرية، جذرية، أسيّة)، إلا أننا في جميع هذه الحالات استخدمنا توابع مكاملة معرفة ومستمرة على كامل مجال المكاملة المحدود

أي أن هذه التكاملات تحقق شرطي ريمان :

- التابع $f(x)$ معرف و مستمر عند كل نقطة من مجال التكامل $[a,b]$.
- المجال $[a,b]$ محدود.

لكن ماذا يحدث لو اختل أحد هذين الشرطين، أو بمعنى آخر هل نستطيع تمديد مفهوم التكامل على توابع غير معرفة وغير مستمرة عند بعض نقاط من مجال المكاملة ؟

تعرف مثل هذه التكاملات باسم التكاملات المعتلّة (الشاذة)، وباختصار نقول عن تكامل إنه معتل إذا كان من أحد الأنماط التالية :

النمط الأول: التابع $f(x)$ غير معرف عند بعض نقاط مجال المكاملة المحدود $[a,b]$.

النمط الثاني: التابع $f(x)$ معرف ومحدد على المجال $[a,b]$ إلا أنّ مجال المكاملة غير محدود أي يأخذ أحد الأشكال التالية : $]-\infty,+\infty[,]-\infty,\alpha], [\alpha,+\infty[$

النمط الثالث: وفيه يكون التابع $f(x)$ غيرمعرف عند نقطة أو أكثرمن مجال المكاملة غير المحدود، أي أنه يشمل النمطين الأول والثاني معاً.

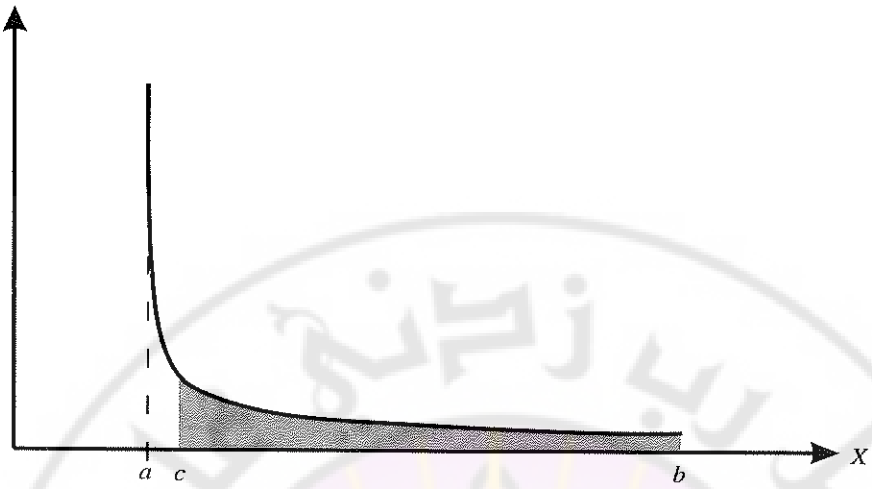
نوضح فيما يلي بعض الطرائق التي تعالج مثل هذه الحالات.

1-3-2 النمط الأول:

ليكن $f(x)$ تابع موجب (نفرض أنه موجب للإيضاح فقط) غير معرف عند أحد أطراف المجال $[a,b]$، عندئذٍ:

إذا كان التابع $f(x)$ غير معرّف عند $x=a$ ، نأخذ نقطة $a<c<b$ ثم نقوم بحساب المساحة المحصورة بين منحني التابع $f(x)$ ومحور الفواصل وكل من المستقيمين $x=b$ و $x=c$ ثم نجعل c تسعى إلى a أي:

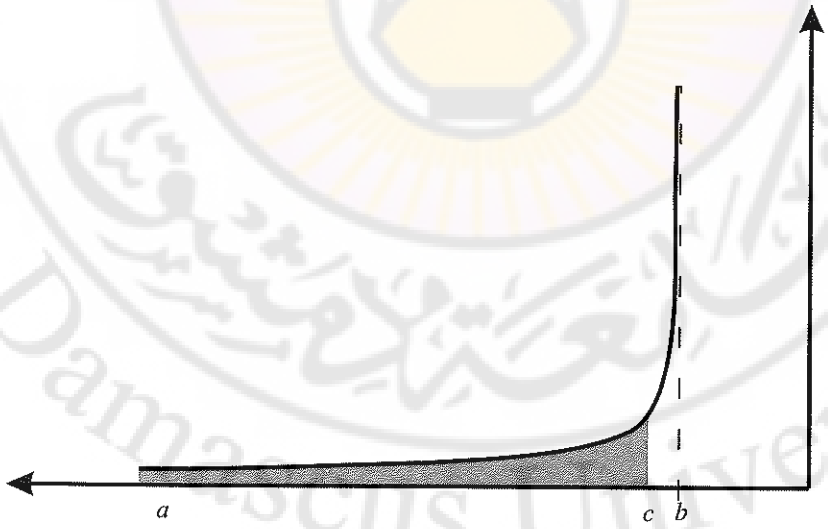
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a}\int_c^b f(x)dx \qquad (45)$$



الشكل 17

وبالمثل إذا كان التابع $f(x)$ غير معرّف عند $x=b$ ، نأخذ نقطة $a<c<b$ ثم نقوم بحساب المساحة المحصورة بين منحني التابع $f(x)$ ومحور الفواصل وكل من المستقيمين $x=a$ و $x=c$ ثم نجعل c تسعى إلى b أي:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx \qquad (46)$$



الشكل 18

أما إذا كان التابع $f(x)$ غير معرّف عند نقطة أو أكثر من مجال المكاملة $[a,b]$ مثل c_1,c_2 ،عندئذٍ نعالج الحالات التالية:

❖ نختار نقطة β تحقق $c_1<\beta<c_2$ ونجزأ المجال كما يلي :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{\beta} f(x)dx+\int_{\beta}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{b} f(x)dx \qquad (47)$$

ثم نقوم بحساب كل تكامل على حدا للحصول على القيمة العددية للتكامل الأساسي، حيث نلاحظ أن كل تكامل من التكاملات الجزئية السابقة غير معرف عند طرف واحد فقط من أطراف التكامل أي يُردّ إلى أحد الأشكال السابقة.

مثال(17):

أوجد قيمة عددية للتكامل التالي: $\int_0^1 \frac{1}{2x^2-x}dx$

الحل:

من الواضح أنّ التابع $f(x)=\frac{1}{2x^2-x}$ غير معرّف عند النقطتين $x=0, x=\frac{1}{2}$ لذا يمكن أن نأخذ $c=0.4$ ونكتب:

$$\int_0^1 \frac{1}{2x^2-x}dx=\int_0^{0.4} \frac{1}{2x^2-x}dx+\int_{0.4}^{1/2} \frac{1}{2x^2-x}dx+\int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x^2-x}dx$$

ثم نقوم بدراسة كل تكامل بشكل مستقل.

❖ تعتمد الطريقة الثانية على تكامل كوشي، حيث نقوم في البداية بتجزئة المجال كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{r\to 0^+}\left[\int_a^{c-r} f(x)dx+\int_{c+r}^{b} f(x)dx\right] \qquad (48)$$

فإذا كان التابع $f(x)$ غير معرف عند النقطة $c=0$ وأردنا مكاملته على مجال متناظر $[-a,a]$ عندئذٍ من الممكن أن نكتب التابع $f(x)$ على شكل مجموع تابعين

أحداهما فردي $g(x)$ والآخر زوجي $h(x)$ معرفان وفق العلاقتين:

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$
$$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \qquad (49)$$

نعوض فنجد:

$$\int_{-a}^{-r} f(x)dx+\int_{r}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{-r} g(x)dx+\int_{r}^{a} g(x)dx+\int_{-a}^{-r} h(x)dx+\int_{r}^{a} h(x)dx$$
$$=2\int_{r}^{a} h(x)dx$$

ومنه:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\lim_{r\to 0+}\int_{r}^{a} h(x)dx \qquad (50)$$

مثال(18):

أوجد قيمة التكامل $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$

الحل:

نلاحظ أنّ:

$$h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$$

مثال(19):

أوجد قيمة التكامل: $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{x}dx$

الحل:

$$h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x}+\frac{e^{-x}}{-x}\right)=\frac{1}{x}\sinh(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1}\frac{e^x}{x}dx=2\int_{0}^{1}\frac{\sinh(x)}{x}dx$$

❖ يمكن في بعض الأحيان اللجوء إلى إجراء تحويل مناسب للمتحول لإزالة حالة الشذوذ.

مثال(20):

في حالة التكامل من النمط:

$$I=\int_0^1 x^{\frac{-1}{n}} g(x)dx \quad ; n\geq 2 \quad , g(x)\in C[0,1]$$

نجري تغيير في المتحول $x=t^n$ فيصبح التكامل بالشكل التالي:

$$I=n\int_0^1 t^{n-2} g\left(t^n\right)dt$$

أما من أجل التكامل: $I=\int_0^1 \sin x\sqrt{1-x^2}\,dx$ فنختار تغيير المتحول: $u=\sqrt{1-x}$ فيصبح التكامل بالشكل:

$$I=2\int_0^1 u^2\sqrt{2-u^2}\sin\left(1-u^2\right)du$$

ولكن هذه الطريقة غير فعالة دوماً. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال(21):

من أجل $I=\int_0^1 \log(x)g(x)dx$ نأخذ تغيير المتحول: $t=-\log(x)$ فنحصل على التكامل المعتل :

$$I=-\int_0^\infty te^{-t} g\left(e^{-t}\right)dt$$

لذلك نلجأ في مثل هذه الحالة إلى إزالة الشذوذ بطرح و جمع تابع ما إلى تابع المكاملة والمثال التالي يوضح هذه الطريقة:

مثال(22):

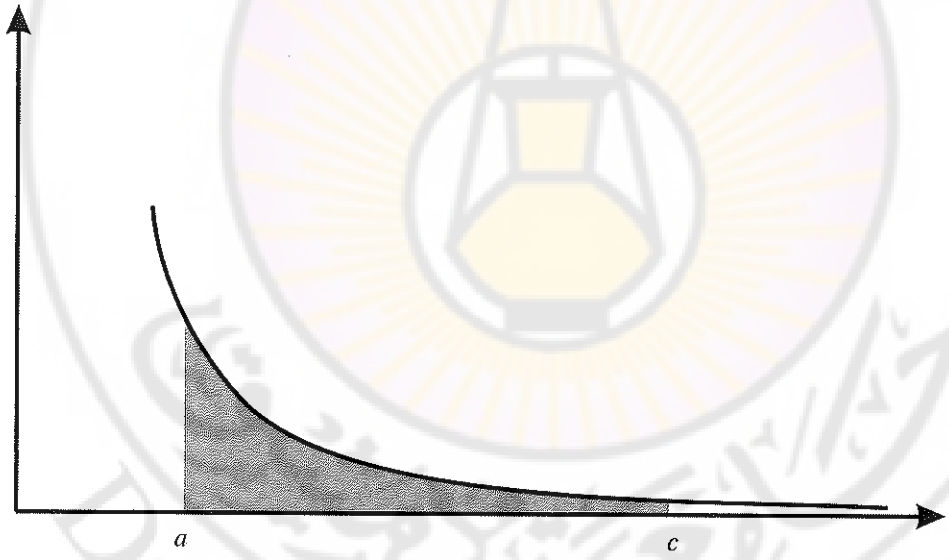
$$I=\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_0^1 \frac{\cos x-1}{\sqrt{x}}dx=2+\int_0^1 \frac{\cos x-1}{\sqrt{x}}dx$$

لكن عند $x=0$ يكون: $\cos x-1\approx-\frac{x^2}{2}$ وهكذا عند تبديله في التكامل الأصلي يمكننا التخلص من حالة الشذوذ.

2-3-2 النمط الثاني:

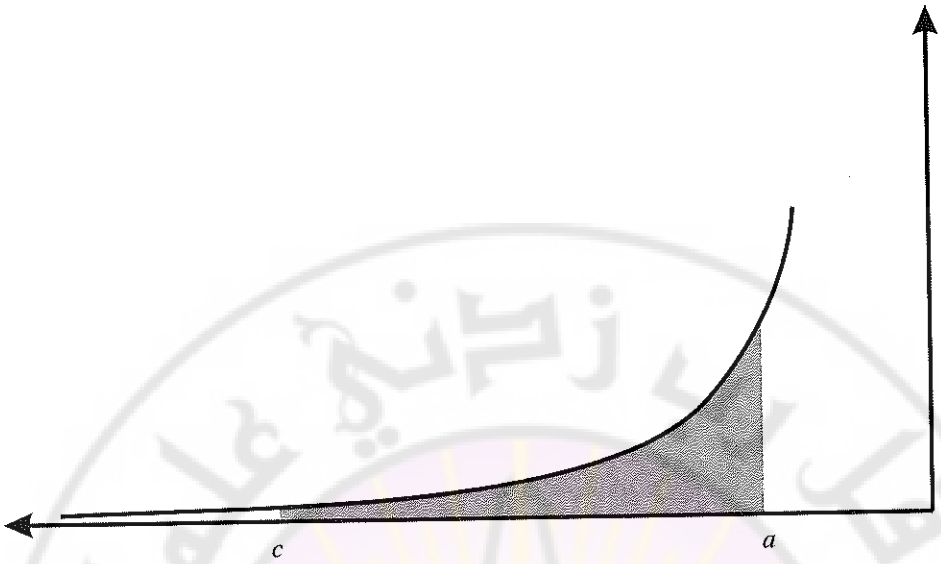
وفيه يكون التابع معَّرفاً ومستمراً على مجال المكاملة، إلا أنّ مجال المكاملة هذا غير محدود أي يأخذ أحد الأشكال التالية: $]-\infty,+\infty[$ ، $]-\infty,a]$ ، $[a,+\infty[$ ، ويمكننا من خلال الأشكال التالية توضيح الطريقة التي سنعالج بها مثل هذه الحالات:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx \;\; ; \; c>a$$



الشكل 19

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx \;\; ; \; c<a$$



الشكل 20

نستنتج أن التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \qquad (51)$$

مثال(23):

أوجد قيمة التكامل

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

الحل:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(1-\frac{1}{c}\right) = 1$$

3-3-2 النمط الثالث:

في بعض الحالات يحقق التكامل $\int_a^b f(x)dx$ كلاً من النمطين الأول والثاني في آن واحد، في هذه الحالة نستخدم طريقة تجزئة التكامل إلى مجموعة من

التكاملات الجزئية بحيث يكون لكل منها سلوك معتل وحيد.

مثال(24):

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{c\to+\infty}\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

ومن الواضح أنّ التكامل الجزئي الأول هو تكامل معتل من النمط الأول أما التكامل الجزئي الثاني فهو تكامل معتل من النمط الثاني.

مثال(25):

أوجد قيمة التكاملات التالية:

1. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^5}$ 2. $\int_{-1}^{\infty}e^{-5x}dx$ 3. $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+9}$

الحل:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^5}=\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n}\frac{dx}{x^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{4x^4}\Big|_{1}^{n}=\frac{1}{4}$$

$$\int_{-1}^{\infty}e^{-5x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{n}e^{-5x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{5}e^{-5x}\Big|_{-1}^{n}=\frac{e^5}{5}$$

$$\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+9}=\lim_{n\to\infty}\int_{3}^{n}\frac{dx}{x^2+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\Big|_{3}^{n}=\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

تمارين

1- استخدم صيغتي الفروق التقدمية والفروق التراجعية لحساب قيمة تقريبية لمشتق التابع f عند النقاط المحددة في الجدولين التاليين:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.0	0.00000	
0.1	0.74140	
0.2	1.3718	

الجدول 7

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

الجدول 8

2- إذا علمت أنّ البيانات في الجدولين السابقين هي قيم للتوابع التالية:

a) $f(x) = \sin(x)$ للجدول رقم 7

b) $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$ للجدول رقم 8

أوجد قيمة الخطأ الفعلي في التمرين الأول، ثمّ قارنه مع الخطأ المرتكب .

3- أوجد قيمة تقريبية لمشتق التابع $f(x)$ عند النقاط المحددة في الجدولين التاليين، اعتماداً على صيغة ملائمة للمشتق باستخدام ثلاث نقاط:

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	1.949477	
1.2	2.199796	
1.3	2.439189	
1.4	2.670324	

الجدول 9

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.1	16.94410	
8.3	17.56492	
8.5	18.19056	
8.7	18.82091	

الجدول 10

4- إذا علمت أنّ البيانات في الجدولين السابقين هي قيم للتوابع التالية:

a) $f(x) = \ln(e^{2x} - 2)$ للجدول رقم 9

b) $f(x) = x \ln(x)$ للجدول رقم 10

أوجد قيمة الخطأ الفعلي في التمرين الثالث، ثمّ قارنه مع الخطأ المرتكب.

5- استخدم القانون الأكثر دقة لإيجاد قيمة تقريبية لمشتق التابع $f(x)$ عند النقاط المحدّدة في الجدولين التاليين:

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	-1.09847	
2.2	-1.373823	
2.3	-1.119214	
2.4	-0.9160143	
2.5	-0.7470223	
2.6	-0.6015966	

الجدول 11

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	9.367879	
-2.8	8.233241	
-2.6	7.180350	
-2.4	6.209329	
-2.2	5.320305	
-2.0	4.513417	

الجدول 12

6- إذا علمت أنّ البيانات في الجدولين السابقين هي قيم للتوابع التالية:

a) $f(x)=e^{\frac{x}{3}}+x^2$ للجدول رقم 11

b) $f(x)=\tan x$ للجدول رقم 12

أوجد قيمة الخطأ الفعلي في التمرين الخامس، ثمّ قارنه مع الخطأ النظري للطريقة.

7- ليكن لدينا جدول المعطيات:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

والمطلوب:

a) استخدم جميع القوانين الملائمة لتقريب: $f'(0.4)$ و $f''(0.4)$.

b) استخدم جميع القوانين الملائمة لتقريب: $f'(0.6)$ و $f''(0.6)$.

8- ليكن التابع $f(x)=\cos \pi x$، استخدم المعادلة (14) وقيم $f(x)$ عند النقاط: $x=0.25,0.5,0.75$، لحساب قيمة تقريبية للمشتق $f''(0.5)$. ثمّ قارن النتيجة مع القيمة الفعلية.

9- ليكن التابع $f(x)=3xe^x-\cos x$، استخدم المعطيات في الجدول التالي والمعادلة (14) لحساب قيمة تقريبية للمشتق $f''(1.3)$، من أجل: h =0.01 ، h =0.1 .

x	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
$f(x)$	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

ثمّ قارن هذه النتيجة مع القيمة الفعلية $f''(1.3)$.

10- استنتج قانوناً لتقريب قيمة المشتق $f'(x_0)$ وذلك باستخدام القيم الخمس التالية:

$$f(x_0-h), f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h), f(x_0+3h)$$

توجيه: انظر إلى التركيب:

$$Af(x_0-h)+Bf(x_0+h)+Cf(x_0+2h)+Df(x_0+3h)$$

ثم استخدم كثير حدود تايلور من الدرجة الخامسة واختر A, B, C, D بصورة ملائمة.

11-استنتج طريقة لتقريب $f'''(x_0)$ ، بحيث يكون حد الخطأ فيه من المرتبة h^2، وذلك بتطبيق مبرهنة تايلور من الدرجة الخامسة بجوار x_0 على التابع f ، ثمّ أوجد القيم عند $x_0 \pm h$ و $x_0 \pm 2h$.

12-ليكن التابع:

$$e(h)=\frac{\varepsilon}{h}+\frac{h^2}{6}M$$

حيث إنّ M حد أعلى للمقدار $\left|\frac{d^3(\cos x)}{dx^3}\right|$ على المجال $[0.8,0.899]$.

برهن أنّ $e(h)$ لها قيمة صغرى عند: $h=\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$.

13-لتكن لدينا التكاملات التالية:

a) $\int_{0.25}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\int_{0}^{1}(2+\sin(2\sqrt{x}))dx$ c) $\int_{-1}^{1}(1+x^2)^{-1}dx$

d) $\int_{0}^{\pi}\sin(2x)e^{-x}dx$ e) $\int_{0}^{2}2x\cos(x)dx$ f) $\int_{0}^{4}x^2e^{-x}dx$

والمطلوب:

a) أوجد قيمة تقريبية للتكاملات السابقة باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل $n=10$.

b) أوجد قيمة تقريبية للتكاملات السابقة باستخدام طريقة سيمبسون المركبة من أجل $n=5$.

14-يعطى طول قوس الخط البياني للتابع $y=f(x)$ على المجال $a\le x\le b$ بالعلاقة:

$$length=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

والمطلوب:

a) أوجد قيمة تقريبية لطول قوس كل من التوابع التالية باستخدام طريقة شبه

المنحرف المركبة من أجل $n=10$.

b) أوجد قيمة تقريبية لطول قوس كل من التوابع التالية باستخدام طريقة سيمبسون المركبة من أجل $n=5$.

- $f(x)=x^3 \quad ; \; 0\le x\le 1$
- $f(x)=\sin(x) \quad ; \; 0\le x\le \frac{\pi}{4}$
- $f(x)=e^{-x} \quad ; \; 0\le x\le 1$

15-تُعطى مساحة السطح الخارجي للمجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $y=f(x)$ حيث $a\le x\le b$ حول محور الفواصل بالعلاقة:

$$area=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

والمطلوب:

a) أوجد قيمة تقريبية للمساحة باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل $n=10$.

b) أوجد قيمة تقريبية للمساحة باستخدام طريقة سيمبسون المركبة من أجل $n=5$.

16-تحقق أنّ طريقة شبه المنحرف تعطي القيم الفعلية لكثيرات الحدود التي لا تتجاوز درجتها (1) أي لكثيرات الحدود من الشكل: $f(x)=c_1x+c_0$ على المجال $[0,1]$.

17- تحقق من أن حدّ الخطأ الناتج عن حساب تكامل التابع $f(x)=c_2x^2$ على المجال $[0,1]$ باستخدام طريقة شبه المنحرف (h=1,n=1) يعطى بالعلاقة:

$$E_T(f,h)=\frac{-(b-a)f^{(2)}(c)h^2}{12}$$

18-تحقق أنّ طريقة سيمبسون تعطي القيم الفعلية للحدوديات التي لا تتجاوز درجتها (3) أي كثيرات الحدود من الشكل: $f(x)=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ على

المجال $[0,2]$

19- تحقق من أن حدّ الخطأ الناتج عن حساب تكامل التابع $f(x)=c_4x^4$ على المجال $[0,4]$ باستخدام طريقة سيمبسون (h=1,n=1) يعطى بالعلاقة:

$$E_s(f,h)=\frac{-(b-a)f^{(4)}(c)h^4}{180}$$

20- حدد قيمة w_0,w_1 اللتين يأخذ من أجلهما التكامل $\int_0^1 g(t)dt=w_0g(0)+w_1g(1)$ قيماً فعلية عند الدالتين: $g(t)=1, g(t)=t$.

21- استخدم العلاقة $f(x_0+ht)=g(t)$ وتغيير المتحول $x=x_0+ht$ و $dx=hdt$ لإجراء انسحاب لطريقة شبه المنحرف من المجال [0,1] إلى المجال $[x_0,x_1]$.

22- حدد قيمة w_0,w_1,w_2 التي يأخذ من أجلها التكامل

$$\int_0^2 g(t)dt=w_0g(0)+w_1g(1)+w_2g(2)$$

قيماً فعلية عند التوابع: $g(t)=1, g(t)=t, g(t)=t^2$.

23- استخدم العلاقة $f(x_0+ht)=g(t)$ وتغيير المتحول $x=x_0+ht$ و $dx=hdt$ لإجراء انسحاب لطريقة سيمبسون من المجال [0,2] إلى المجال $[x_0,x_2]$.

24-حدد كلاً من قيمتي n (عدد المجالات الجزئية) و h (طول المجال) اللتين يمكن من أجلهما حساب قيمة تقريبية للتكاملات التالية باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة وبدقة لا تتجاوز 5×10^{-9}:

a) $\int_0^2 xe^{-x}dx$ b) $\int_2^3 \frac{1}{5-x}dx$ c) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos(x)dx$

25-حدد كلاً من قيمتي n (عدد المجالات الجزئية) و h (طول المجال) اللتين يمكن من أجلهما حساب قيمة تقريبية للتكاملات التالية باستخدام طريقة سيمبسون المركبة

وبدقة لا تتجاوز 5×10^{-9}:

d) $\int_{0}^{2} xe^{-x}dx$ e) $\int_{2}^{3} \frac{1}{5-x}dx$ f) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos(x)dx$

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المصطلحات

	(A)	
Algorithm		خوارزمية
Approximation theory		نظرية التقريب
	(B)	
Back substituion		تعويض خلفي
Backward difference		فرق خلفي
Banded matrix		مصفوفة ذات شرائط قطرية
Bandwidth		عمق الشريط
Binomial theorem		نظرية ذات الحدين
Bisection method		طريقة التنصيف
Bracketing interval		فترة حصر
Bracketing methods		طرق الحصر
	(C)	
Central difference		فرق مركزي
Characteristic equation		معادلة مميزة
Clamped boundary conditions		شروط حدية مُلزِمة
Closed Newton-Cotes formulas		صيغ نيوتن- كوتس المغلقة
Composite rules		القواعد التركيبية
Consistency		تآلف
Convergence		تقارب

Cubic splines		شرائح وصل تكعيبية
	(D)	
Decomposition methods		طرق التحليل
Deflation		تخفيض
Determinant		محدد
Diagonal dominance		القطر المهيمن
Differences		فروق
Differential equations		معادلات تفاضلية
Differentiation		تفاضل
Discretization error		خطأ القطع (أو التشذيب)
Divided differences		الفروق المقسومة
Dominant eigenvalue		القيمة الذاتية المهيمنة
	(E)	
Eigenvalue		قيمة ذاتية
Eigenvector		متجه ذاتي
Elimination		حذف
Error		خطأ
Error constant		ثابت الخطأ
Euler's formula		صيغة أويلر
Explicit method		طرق صريحة
Extrapolation		استكمال خارجي
	(F)	

False position		طريقة الوضع الخطأ
Finite difference interpolation		استكمال الفروق المحدودة
Finite difference method		طريقة الفروق المحدودة
First order equation		معادلة من المرتبة الأولى
First order process		عملية من المرتبة الأولى
Fixed point iteration		التقريب المتتالي للنقطة الثابتة
Forward difference		فرق أمامي
Forward substitution		تعويض خلفي
Free boundary condition		شروط حدية حرة
Fundamental theorem of algebra		النظرية الأساسية في الجبر
	(G)	
Gauss elimination		حذف جاوس
Gaussian quadrature		التربيعة الجاوسية
Gauss-Seidel method		طريقة جاوس- زيدل
Gershgorin's theorems		نظريات جير شجورين
Global error		الخطأ الشامل (أو الكلي)
Gradient vector		متجه الانحدار
	(H)	
Hermite interpolation		استكمال هرميت
Hessenberg form		صيغة هيسنبرج
Hessian matrix		المصفوفة الهيسيانية
Higher order equations		معادلات من مرتب أعلى

Hilbert matrix		مصفوفة هيلبرت
Householder matrix		مصفوفة هوسهولدر
Householder method		طريقة هوسهولدر
	(I)	
Ill-conditioned problems		مسائل معتلة
Implicit method		طرق ضمنية
Indirect methods for linear equation		طرق غير مباشرة للمعادلات الخطية
Initial conditions		شروط ابتدائية
Initial value problems		مسائل القيمة الابتدائية
Integration mean value theorem		نظرية القيمة المتوسطة للتكامل
Integration		تكامل
Intermediate value theorem		نظرية القيمة الوسطى
Interpolation		استكمال
Inverse iteration		التقريب المتتالي باستخدام المعكوس
Inverse of matrix		معكوس المصفوفة
Iteration matrix		مصفوفة التقريب المتتالي
Iterative method for linear equations		طرق التقريب المتتالي للمعادلات الخطية
	(J)	
Jacobian matrix		المصفوفة الجاكوبية
Jacoi method		طريقة جاكوبي

	(K)	
knots		عُقَدْ
	(L)	
Lagrange interpolation		استكمال لاجرانج
Laguerre polynomials		كثيرات حدود لاجير
Least square approximation		تقريب المربعات الصغرى
Legendre polynomials		كثيرات حدود ليجيندر
Linear algebraic equation		المعادلات الجبرية الخطية
Linear convergence		تقارب خطي
Linear difference equation		معادلة فروق خطية
Linear interpolation		استكمال خطي
Local truncation error		خطأ القطع المحلي
Lower triangular matrix		مصفوفة مثلثية سفلى
	(M)	
Mean value theorem		نظرية القيمة المتوسطة
Mesh points		نقاط الشبكية
	(N)	
Natural splines		شرائح وصل طبيعية
Newton- Cotes formulas		صيغ نيوتن- كوتس
Newton Raphson method		طريقة نيوتن- رافسون
Newton's backward difference formula		صيغة نيوتن للفروق الخلفية

Newton's forward difference formula		صيغة نيوتن للفروق الأمامية
Newton's method		طريقة نيوتن
Non-linear algebraic equations		المعادلات الجبرية اللاخطية
Normal equations		المعادلات القياسية
Numerical algorithm		خوارزمية عددية
Numerical differentiation		تفاضل عددي
Numerical integration		تكامل عددي
	(O)	
Open Newton-Cotes formulas		صيغ نيوتن- كوتس المفتوحة
Order of consistency		مرتبة التآلف
Order of convergence		مرتبة التقارب
Orthogonal decomposition		تحليل تعامدي
Orthogonal matrix		مصفوفة متعامدة
Orthogonal polynomials		كثيرات حدود متعامدة
	(P)	
Partial stability		استقرارية جزئية
Picewise polynomial		الاستكمال بكثيرة حدود متقطعة
Polynomial deflation		تخفيض درجة كثيرة الحدود
Polynomial interpolation		استكمال كثيرة حدود
Positive definite matrix		مصفوفة حتماً موجبة
Power method		طريقة القوى

	(Q)	
Quadratic convergence		تقارب تربيعي
Quadrature		تربيعة
	(R)	
Rectangular rule		قاعدة المستطيل
Relaxation parameter		بارامتر الاسترخاء
Rolle's theorem		نظرية رول
Pomberg's method		طريقة رومبرج
Root		جذر
Rotation matrix		مصفوفة الدوران
Pounding error		خطأ التدوير
	(S)	
Secant method		طريقة القاطع
Second order process		عملية من الرتبة الثانية
Simpson's adaptive quadrature		تربيعة سيمبسون ذاتية التعديل
Simpson's rule		قاعدة سيمبسون
Simpson 3/8 rule		قاعدة الـ 3/8 لسيمبسون
Simultaneous linear euqation		معادلات خطية آنية
Splines		شرائح وصل
Stability		استقرارية
Starting procedure		عملية بدء
Step length		طول الخطوة

Stirling's formula		صيغة ستيرلنج
Successive over-relaxation		استرخاء زائد متتالٍ
Systems of equations		مجموعة من المعادلات
	(T)	
Taylor series method		طريقة متسلسلة تايلور
Taylor's theorem		نظرية تايلور
Test equations		معادلات اختبار
Trapezium rule		قاعدة شبه المنحرف
Triangular decomposition		تحليل مثلثي
Tridiagonal matrix		مصفوفة ثلاثية الأقطار
Truncation error		خطأ القطع
	(U)	
Unit lower triangular matrix		مصفوفة الوحدة المثلثية السفلى
Upper Hessenberg form		صيغة هيسنبرج العليا
Upper triangular matrix		مصفوفة مثلثية عليا
	(V)	
Vandermonde matrix		مصفوفة فاندرموند
	(W)	
Weak stability		استقرارية ضعيفة
weight		وزن
Weight function		دالة وزن

	(Z)	
Zero		صفر
Zero stability		استقرارية صفرية

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المراجع

1- R. L. Burden and J. D. Faires, "NumericalAnalysis", 8th edition, Thomsom Brooks/ Cole, 2005.

2- John H. Mathews and Kurtis D. Fink, "Numerical Methods using MATLAB", Fourth Edition, Pearson Education, 2005.

3- Steven C. Chapra, "Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and. Scientist", Second edition, Mc-GrawHill Publishing Co-Ltd, 2008.

4- Abdelwahab Kharab and Ronal B. Guenther, "An Introduction To Numerical Methods – A Matlab Approach", Chapman and Hall/CRC, 2005.

5- نبيه عودة ،" التحليل العددي(1)"، الطبعة الثانية، مديرية الكتب والمطبوعات، جامعة دمشق، 2002 .

6- برلنت مطيط وعبد الله العمر ، "التحليل العددي"، مديرية الكتب والمطبوعات، جامعة دمشق، 2011 .

Damascus University

اللجنة العلمية:

د. محمد صبح

د.جمال مللي

د.محمد جمال اللبن

المدقق اللغوي:

د. خالد الحلبوني

حقوق الطبع و الترجمة و النشر محفوظة لمديرية الكتب و المطبوعات الجامعية