التحليل العددي والبرمجة

منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

التحليل العددي والبرمجة

الـــدكـــتـــور

مـحـمـد صبـح

أستاذ في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

1429 - 1430هـ
2007 - 2008 م

الـفهرس

مقدمة

Introduction

لقد دخلت الرياضيات في كثير من المجالات واعتمد عليها كثير من العلوم كالفيزياء والكيمياء والهندسة وغيرها. ويعدّ التحليل العددي من أهم الموضوعات التطبيقية في الرياضيات.

استأثر التحليل العددي في السنوات الأخيرة باهتمام كبير من الدارسين والباحثين وتأسست العديد من المجلات التخصصية لنشر أحدث ما يتم التوصل إليه في هذا المجال, وذلك لعلاقته المباشرة بالتطور التكنولوجي الذي نشهده في هذه الأيام، أمام هذه الأهمية أصبح التحليل العددي مقرراً على طلاب الكليات العلمية والتربوية.

وتضافرت جهود العلماء لتطوير التحليل العددي بحيث يصبح من الممكن حل مسائل تنتمي لفروع جد مختلفة بطرق عددية، ووضع خوارزميات مناسبة والبحث عن سبل برمجتها بحيث يمكن الاستفادة من القدرات الهائلة للحواسيب الحديثة.

ولما كان من الصعب جداً تغطية أبحاث التحليل العددي بكتاب واحد بل بالكثير من الكتب فإن هذا الكتاب هو عمل متواضع للتعريف بالمبادئ الأساسية للطرق العددية لحل مسائل رياضية يستفيد منها الفيزيائيون والرياضيون والمهندسون.

يتألف هذا الكتاب من ثمانية فصول، يبحث الفصل الأول في أنواع الأخطاء وطرق حسابها، ويبحث ثاني الفصول بالطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية، في حين يبحث ثالثها في الطرق العددية لحل جمل المعادلات الخطية وتعيين القيم الذاتية، ورابعها في الاستيفاء الداخلي والفروق المنتهية وخامسها في الطرق العددية للتفاضل العددي أما سادسها فيبحث في الطرق العددية

للحساب التكاملي وسابعها في الحلول العددية للمعادلات التفاضلية وفي الفصل الثامن التعرف على لغة البرمجة.

وفي كل فصل من فصول هذا الكتاب يوجد عدد كبير من الأمثلة المحلولة لترسيخ الأفكار الأساسية وكذلك يوجد عدد من التمارين على كل فصل من أجل التدريب واكتساب المهارات.

الفصل الأول

الأخطاء Errors

1-1- مقدمة:

إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية، لأنها غالباً ما تمثل قيم المقادير الفيزيائية بنتيجة القياس الذي هو بحد ذاته تقريبي.

في كثير من العمليات الحسابية نستبدل الأعداد والقياسات بأعداد وقياسات تقريبية وبالتالي ينشأ أخطاء, وهذه الأخطاء تتراكم وتكبر عند استعمال مجموعة كبيرة من العمليات الحسابية. للحد من هذه الأخطاء نتعرف إلى أهم مصادر الخطأ وأنواع الخطأ.

1-2- مصادر الخطأ:

تنشأ الأخطاء في التحليل العددي من أكثر من مصدر. **الأول** ينشأ من استعمال الصيغ التقريبية ذاتها، فمثلاً نستخدم صيغة أشباه المنحرفات لحساب تكامل محدد. والمصدر **الثاني** ينشأ من تقريب دالة ما باستخدام متسلسلة تايلور إلى حد معين، فمثلاً التابع الأسي يكتب كما يلي:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}(S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!})$$

هذا يعني أن $S_n(x)$ قيمة تقريبية للتابع e^x أي أننا حصلنا على هذه القيمة التقريبية بإهمال المقدار $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ وكأننا قطعنا المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ عند الحد n.

والمصدر الثالث ينشأ من تدوير الأعداد وتقريبها. وتدوير الأعداد يتم وفق **القاعدة التالية:**

ليكن العدد $x = 0.x_1x_2....x_{n-1}x_n$

إذا قربنا هذا العدد مكتفين بـ $n-1$ رقم على يمين الفاصلة فإن العدد المدور يكتب بالشكل التالي:

$$\overline{x} = 0.x_1x_2....x_{n-2}\overline{x}_{n-1}$$

حيث $\overline{x}_{n-1}$ يتم تحديده كما يلي:

إذا كان $x_n > 5$ فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$

وإذا كان $x_n < 5$ فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1}$

وفي حال $x_n = 5$ ننظر إلى x_{n-1} ونميز حالتين:

إذا كان x_{n-1} زوجياً فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1}$، أما إذا كان x_{n-1} فردياً فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$، ويكون الخطأ المرتكب والناتج عن عملية التدوير:

$$0.5\times10^{-(n-1)} = 0.5\times10^{-n+1} = 5\times10^{-n}$$

مثال (1):

دوّر العدد $x = 15.417528$ إلى عدد يحوي خمسة أرقام عشرية ثم إلى عدد يحوي ثلاثة أرقام عشرية ثم إلى عدد يحوي رقم عشري واحد، وما الأخطاء المرتكبة.

الحل:

$\overline{x} = 15.41753$ والخطأ المرتكب هو 5×10^{-6}

$\overline{x} = 15.418$ والخطأ المرتكب هو 5×10^{-4}

$\overline{x} = 15.4$ والخطأ المرتكب هو 5×10^{-2}

مثال (2):

دور العدد $x = 81.42517$ إلى عدد يحوي أربعة أرقام عشرية ثم إلى عدد يحوي ثلاثة أرقام عشرية, ثم إلى عدد يحوي رقمين عشريين واحسب الأخطاء المرتكبة.

الحل:

$\overline{x} = 81.4252$ والخطأ المرتكب هو 5×10^{-5}

$\overline{x} = 81.425$ والخطأ المرتكب هو 5×10^{-4}

$\overline{x} = 81.42$ والخطأ المرتكب هو 5×10^{-3}

الخطأ المطلق والخطأ النسبي:

بفرض $\overline{x}$ قيمة تقريبية للقيمة x فإن الخطأ المرتكب هو $\Delta x = x - \overline{x}$.

وبما أن إشارة Δx قد تكون موجبة أو سالبة, فإننا نعرف ما يسمى **بالخطأ المطلق** والذي نرمز له بالرمز $\Delta = |\Delta x|$.

تعريف:

الخطأ المطلق الذي نرتكبه باعتبار $\overline{x}$ قيمة تقريبية لـ x هو

$$\Delta = |\Delta x| = |x - \overline{x}|$$

أي الخطأ المطلق هو القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الفعلية x والقيمة التقريبية $\overline{x}$.

تعريف:

الخطأ النسبي الذي نرتكبه باعتبار $\overline{x}$ قيمة تقريبية لـــ x الذي نرمز له بـــالرمز R يُعطى بالعلاقة التالية: $R = \frac{\Delta}{x} = \frac{|\Delta x|}{x}$

وغالباً تكون القيمة x غير معروفة وإنما معروفة $\overline{x}$ القيمة التقريبية لـــ x لذلك يمكن أن نكتب: $R = \frac{\Delta}{\overline{x}} = \frac{|\Delta x|}{\overline{x}}$

مثال (3):

بفرض $x = 1.2374$ وَ $\overline{x} = 1.24$ قيمة تقريبية لـــ x، احسب الخطأ المطلـــق والخطأ النسبي باعتبار $\overline{x}$ قيمة تقريبية لـــ x.

الحل:

الخطأ المطلق:

$$\Delta = |\Delta x| = |x - \overline{x}| = |1.2374 - 1.24| = 0.0026$$

الخطأ النسبي:

$$R = \frac{\Delta}{x} = \frac{|\Delta x|}{x} = \frac{0.0026}{1.2374} = 0.002101$$

تعريف:

الخطأ المئوي الذي نرمز له بالرمز E يُعطى بالعلاقة التالية:

$$E = R \times 100\%$$

مثال (4):

بفرض $x = 4.123$ و $\overline{x} = 4.1229$ قيمة تقريبية لـــ x، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي والخطأ المئوي.

الحل:

الخطأ المطلق:

$$\Delta = |\Delta x| = |x - \overline{x}| = |4.123 - 4.1229| = 0.0001$$

الخطأ النسبي:

$$R = \frac{\Delta}{x} = \frac{|\Delta x|}{x} = \frac{0.0001}{4.123} = 0.00002425$$

الخطأ المئوي:

$$E = R \times 100\% = 0.002425\%$$

1-3- الأخطاء في العمليات الحسابية:

1- الخطأ المطلق في حاصل جمع عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة لهذين العددين.

الإثبات:

لتكن $\overline{x}$ قيمة تقريبية لـــ x، ولتكن $\overline{y}$ قيمة تقريبية لـــ y

ولنحسب الخطأ المرتكب باعتبار $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$ قيمة تقريبية لـــ $z = x + y$

$$\Delta z = z - \overline{z} = (x + y) - (\overline{x} + \overline{y}) = (x - \overline{x}) + (y - \overline{y}) = \Delta x + \Delta y$$

الخطأ المطلق:

$$\Delta = |\Delta z| = |\Delta x + \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y|$$

ويمكن تعميم ذلك من أجل أكثر من عددين.

2- الخطأ المطلق في حاصل طرح عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة لهذين العددين.

الإثبات:

لتكن $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y}$ قيمة تقريبية لـ $z = x - y$ فإن الخطأ المرتكب هو:

$$\Delta z = z - \overline{z} = (x - y) - (\overline{x} - \overline{y}) = (x - \overline{x}) - (y - \overline{y}) = \Delta x - \Delta y$$

الخطأ المطلق:

$$\Delta = |\Delta z| = |\Delta x - \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y|$$

مثال (5):

عين الخطأ المطلق لمجموع العددين التقريبيين $y = 4.524$, $x = 5.431$ وحاصل طرحهما.

الحل:

$$|\Delta x + \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y|$$

والخطأ المطلق المرتكب في تدوير العددين هو: $\Delta x = \Delta y = 5\times10^{-4}$

إذن الخطأ المطلق المرتكب في حالة الجمع يكون:

$$|\Delta x + \Delta y| \le 5\times10^{-4} + 5\times10^{-4} = 0.001$$

والخطأ المرتكب في حالة الطرح يكون:

$$|\Delta x - \Delta y| \le 5\times10^{-4} + 5\times10^{-4} = 0.001$$

والخطأ النسبي في حالة الجمع:

$$R = \frac{|\Delta x + \Delta y|}{x + y} = \frac{0.001}{9.955} = 0.00010045$$

والخطأ النسبي في حالة الطرح:

$$R=\frac{|\Delta x-\Delta y|}{x-y}=\frac{0.001}{0.907}=0.0010125$$

3- الخطأ النسبي لجداء عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطـــاء النســـبية للعددين.

الإثبات:

بفرض $\overline{x}$ قيمة تقريبية لـــ x، $\overline{y}$ قيمة تقريبية لـــ y، وَ $\overline{z}=\overline{x}.\overline{y}$ قيمة تقريبية لـــ $z=x.y$

فإن:

$$z=x.y=(\overline{x}+\Delta x)(\overline{y}+\Delta y)=\overline{x}.\overline{y}+\overline{x}\Delta y+\overline{y}\Delta x+\Delta x\Delta y$$

وبإهمال الحد الأخير $\Delta x\Delta y$ لأنه مقدار صغير نجد:

$$\Delta z=z-\overline{z}=\overline{x}.\overline{y}+\overline{x}\Delta y+\overline{y}\Delta x-\overline{x}.\overline{y}=\overline{x}\Delta y+\overline{y}\Delta x$$

الخطأ المطلق:

$$\Delta=|\Delta z|=|\overline{x}\Delta y+\overline{y}\Delta x|$$

الخطأ النسبي:

$$R_{x.y}=\frac{\Delta}{\overline{x}.\overline{y}}=\frac{|\overline{x}\Delta y+\overline{y}\Delta x|}{\overline{x}.\overline{y}}\le\frac{|\overline{x}\Delta y|+|\overline{y}\Delta x|}{\overline{x}.\overline{y}}=\frac{|\Delta y|}{\overline{y}}+\frac{|\Delta x|}{\overline{x}}$$

أي أن:

$$R_{x.y}\le R_x+R_y$$

مثال (6):

عين الخطأ النسبي والخطأ المطلق لحاصل ضرب العددين التقريبيين:

$$x = 10.5312 \quad , \quad y = 6.41$$

الحل:

حاصل الجداء أو الضرب هو: $x.y = 67.504992$

$$\Delta x = 5\times10^{-5} \quad , \quad \Delta y = 5\times10^{-3}$$

الخطأ النسبي في حاصل الضرب:

$$R_{x.y} \le R_x + R_y = \frac{5\times10^{-5}}{10.5312} + \frac{5\times10^{-3}}{6.41} = \frac{0.00005}{10.5312} + \frac{0.005}{6.41}$$
$$= 0.000004748 + 0.00078003 = 0.000784778$$

لحساب الخطأ المطلق من العلاقة: $R_{x.y} = \dfrac{|\Delta(x.y)|}{x.y}$

نجد: $|\Delta(x.y)| = (x.y)R_{x.y}$

بالتعويض في هذه العلاقة نحصل على الخطأ المطلق كما يلي:

$$|\Delta(x.y)| = (67.504992)(0.000784778) = 0.05298$$

4- الخطأ النسبي في حاصل قسمة عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين.

الإثبات:

بفرض $\overline{x}$ قيمة تقريبية لـ x، $\overline{y}$ قيمة تقريبية لـ y، $\overline{z} = \dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}$ قيمة تقريبية لـ

$$y \ne 0 \ ; \ z = \frac{x}{y}$$

فإن:

$$\Delta z = \Delta(\frac{x}{y}) = \frac{x}{y} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \frac{\overline{x}+\Delta x}{\overline{y}+\Delta y} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \frac{\overline{x}.\overline{y} + \overline{y}\Delta x - \overline{x}.\overline{y} - \overline{x}\Delta y}{\overline{y}(\overline{y}+\Delta y)}$$

$$\Delta z = \frac{\overline{y}\Delta x - \overline{x}\Delta y}{\overline{y}(\overline{y} + \Delta y)}$$

الخطأ المطلق:

$$\Delta = |\Delta z| = \left|\Delta(\frac{x}{y})\right| = \left|\frac{\overline{y}\Delta x - \overline{x}\Delta y}{\overline{y}(\overline{y} + \Delta y)}\right|$$

الخطأ النسبي:

$$R_{\frac{x}{y}} = \frac{\left|\frac{\overline{y}\Delta x - \overline{x}\Delta y}{\overline{y}(\overline{y} + \Delta y)}\right|}{\frac{\overline{x}}{\overline{y}}} = \left|\frac{\overline{y}\Delta x - \overline{x}\Delta y}{\overline{x}(\overline{y} + \Delta y)}\right| \le \left|\frac{\Delta x}{\overline{x}}\right| + \left|\frac{\Delta y}{\overline{y}}\right| = R_x + R_y$$

مثال (7):

عين الخطأ النسبي والخطأ المطلق المرتكب في ناتج قسمة العددين التقريبيين:

$$x = 15.6 \quad , \quad y = 9.14$$

الحل:

ناتج القسمة: $\frac{x}{y} = \frac{15.6}{9.14} = 1.70678$

$$\Delta x = 5\times10^{-2} \quad , \quad \Delta y = 5\times10^{-3}$$

الخطأ النسبي المرتكب في حاصل القسمة هو:

$$R_{\frac{x}{y}} \le R_x + R_y = \frac{0.05}{15.6} + \frac{0.005}{9.14}$$

$$= 0.003205 + 0.000547 = 0.003752$$

الخطأ المطلق المرتكب في حاصل القسمة، بالاعتماد على العلاقة:

$$R_{\frac{x}{y}} = \frac{\left|\Delta(\frac{x}{y})\right|}{\frac{x}{y}}$$

نجد:

$$\left|\Delta(\frac{x}{y})\right| = (\frac{x}{y})R_{\frac{x}{y}} = (1.70678)(0.003752) = 0.006404$$

مثال (8):

احسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق المرتكبين في ناتج ما يلي:

$\frac{(5.41)(7.251)}{20.3}$ حيث الأعداد مُدورة.

الحل:

الخطأ المطلق المرتكب في 5.14 باعتباره عـدداً مُـدوراً هـو $\Delta_1 = 5\times10^{-3}$

والخطأ النسبي هو $R_1 = \frac{0.005}{5.41} = 0.0009242$.

الخطأ المطلق المرتكب في 7.251 باعتباره عدداً مُـدوراً هـو $\Delta_2 = 5\times10^{-4}$

والخطأ النسبي هو $R_2 = \frac{0.0005}{7.251} = 0.00006896$.

الخطأ المطلق المرتكب في 20.3 باعتباره عـدداً مُـدوراً هـو $\Delta_3 = 5\times10^{-2}$

والخطأ النسبي هو $R_3 = \frac{0.05}{20.3} = 0.002463$.

الخطأ النسبي في حاصل الضرب (5.41)(7.251) هو:

$$R_4 \le R_1 + R_2 = 0.0009242 + 0.00006896 = 0.0009932$$

والخطأ المطلق في حاصل الضرب هو:

$$\Delta_4 = (5.41)(7.251)(0.0009932)$$
$$= (39.2279)(0.0009932) = 0.03896$$

الخطأ النسبي في حاصل القسمة هو:

$$R_5 \le R_4 + R_3 = 0.0009932 + 0.002463 = 0.003456$$

لحساب الخطأ المطلق، لدينا:

$$\frac{(5.41)(7.251)}{20.3} = \frac{39.2279}{20.3} = 1.93241$$

وبالاعتماد على العلاقة: $R_5 = \dfrac{\Delta_5}{1.93241}$

فإن الخطأ المطلق المرتكب هو:

$$\Delta_5 = (1.93241)R_5 = (1.93241)(0.003456) \doteq 0.006678$$

1-4- حساب الأخطاء لتوابع في عدة متغيرات:

بفرض لدينا التابع $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

لحساب الخطأ المطلق نستخدم عبارة التفاضل: $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

من هذه العلاقة يمكن تعيين قيمة الخطأ المطلق: $\Delta f \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$

وإذا كان التابع $f = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ فإن الخطأ المطلق يُعطى بالعلاقة:

$$\Delta f \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

أما إذا كان التابع $f = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ فإن الخطأ النسبي يُعطى بالعلاقة:

$$Rf = \frac{\Delta f}{f} \le |\alpha_1| R_1 + |\alpha_2| R_2 + \ldots + |\alpha_n| R_n$$

أما إذا كان التابع $f = \frac{x^a . y^b}{z^c}$ فإن الخطأ النسبي يُعطى بالعلاقة:

$$Rf = \frac{\Delta f}{f} \leq |a| R_x + |b| R_y + |c| R_z$$

مثال (9):

بفرض $f = x^{0.1} y^2$ حيث $x = 2.0 \ , \ y = 3.01$ أعداد مُدورة، عين الخطأ النسبي والخطأالمطلق.

الحل:

$$Rf = |0.1| R_x + |2| R_y$$

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.05}{2.0} = 0.025 \ , \ R_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0.005}{3.01} = 0.001661$$

الخطأ النسبي:

$$Rf = (0.1)(0.025) + (2)(0.001661) = 0.005822$$

الخطأ المطلق:

$$\Delta f \leq Rf \ (2.0)^{0.1} (3.01)^2 = 0.005822 (2.0)^{0.1} (3.01)^2 = 0.05653$$

مثال (10):

احسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق في حساب القيمة: $f = \frac{x^2 . y}{z}$

حيث $x = 8 \mp 0.08 \ , \ y = 5 \mp 0.1 \ , \ z = 10 \mp 0.1$

الحل:

الخطأ النسبي:

$$Rf = \frac{\Delta f}{f} \le |2| R_x + |1| R_y + |1| R_z = 2\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

$$= (2)\frac{0.08}{8} + \frac{0.1}{.5} + \frac{0.1}{10} = \frac{2}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100} = \frac{5}{100} = 0.05$$

الخطأ المطلق:

$$\Delta f = Rf\ (\frac{x^2.y}{z}) = 0.05[\frac{(64)(5)}{10}] = 1.6$$

مثال (11):

عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي لحساب $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ حيث $x = 8000 \mp 3$.

الحل:

$$f = x^{\frac{2}{3}} = (8000)^{\frac{2}{3}} = 400$$

الخطأ النسبي:

$$Rf = \frac{2}{3}\frac{\Delta x}{x} = \frac{2}{3}\frac{3}{8000} = \frac{1}{4000}$$

الخطأ المطلق:

$$\Delta f = Rf\ (400) = \frac{1}{4000}(400) = \frac{1}{10} = 0.1$$

ويمكن كتابة القيمة التي حصلنا عليها كما يلي: $f = 400 \mp 0.1$

1-5- تمارين:

1- دور الأعداد التالية إلى ثلاثة أرقام عشرية ثم إلى رقمين عشريين ثـم إلى رقم عشري واحد واحسب الأخطاء المرتكبة في كل منها:

$$0.5247 \quad ; \quad 7.1479 \quad ; \quad 15.41517 \quad ; \quad 100.527148$$

2- عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي بفرض $\overline{x}$ قيمة تقريبية لـ x حيث:

$$x = 8.7291 \quad , \quad \overline{x} = 8.73$$

$$x = 20.4078 \quad , \quad \overline{x} = 20.408$$

3- عين الخطأ المطلق لمجموع وحاصل طرح العددين التقريبيين:

$$x = 1.353 \quad , \quad y = 1.363$$

$$x = 7.423 \quad , \quad y = 6.514$$

$$x = 5.103 \quad , \quad y = 8.013$$

4- عين الخطأ النسبي والخطأ المطلق لحاصل ضرب العددين التقريبيين:

$$x = \pi = 3.14 \quad , \quad y = 2.15$$

$$x = 4.36 \quad , \quad y = 6.12$$

$$x = 7.562 \quad , \quad y = 4.103$$

5- عين الخطأ النسبي والخطأ المطلق لحاصل قسمة العددين التقريبيين:

$$x = 43.1673 \quad , \quad y = 12.134$$

$$x = 3.221 \quad , \quad y = 1.25$$

6- بفرض:

$$x = 3.219 \quad , \quad y = 2.73 \quad , \quad z = 1.842 \quad , \quad s = 8.7193$$

أعداد مُدورة احسب $L = \dfrac{x + y.z}{s}$ واحسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق.

7- احسب الخطأ المرتكب في ناتج المقدار $\frac{(24.3)(12.16)}{14.1}$ حيث الأعداد مُدورة.

8- إذا كان $x = 1.12$ عدداً مُدوراً احسب المقدار:

$$f = x^2 + 3.12x + 2.71$$

ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

9- أوجد الخطأ النسبي في حساب المقدار $f = x^2 y^2$ حيث $x = 1.3 \quad , \quad y = 2.3$ باعتبار x, y أعداد مُدورة.

10- إذا كان:

$$x = 2 \mp 0.005 \quad , \quad y = 10 \mp 0.01 \quad , \quad z = 20 \mp 0.01$$

احسب المقدار $f = \frac{x^3 y^5}{z^2}$ واحسب الخطأ المرتكب.

11- أثبت أن الخطأ المطلق في حاصل قسمة عددين تقريبيين يعطى بالعلاقة:

$$\Delta(z) = \Delta(\frac{x}{y}) \le \frac{\Delta x}{|\overline{y}|} + \Delta y \left| \frac{\overline{x}}{\overline{y}^2} \right| \quad ; \quad y \ne 0$$

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

Solving nonlinear equations

2-1- مقدمة:

نعلم أنه إذا كانت المعادلة من الشكل: $f(x)=ax+b=0$

فإن هذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الأولى ونسميها معادلة **خطية** وحل هذه المعادلة هو $x=-\frac{b}{a}$ حيث $a\neq 0$.

أما إذا كانت المعادلة من الشكل $f(x)=ax^2+bx+c=0$ فإن هذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية ونسميها معادلة **غير خطية** وحل هذه المعادلة كما يلي:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وإذا كانت المعادلة من الشكل $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ فإن هذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الثالثة, وهي معادلة **غير خطية**، لحل هذه المعادلة إذا كان $f(\alpha)=0$ فإن $(x-\alpha)$ هو أحد معاملات كثيرة الحدود $f(x)$ وأن α هو حل للمعادلة، نقسم $f(x)$ على $(x-\alpha)$ فنحصل على $f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$ حيث $f_1(x)$ حدودية من الدرجة الثانية يمكن إيجاد حلها.

مثال (1):

حل المعادلة: $f(x)=x^3+2x^2+2x+1=0$

الحل:

$$f(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+2(-1)+1=-1+2-2+1=0$$

نقسم $f(x)$ على $(x+1)$ فنجد:

$$f(x)=x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1)$$

وبحل المعادلة $x^2+x+1=0$ نجد:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad , \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

حيث $i=\sqrt{-1}$

ومنه فإن للمعادلة $f(x)=x^3+2x^2+2x+1=0$ الحلول (الجذور) التالية:

$$-1 \quad , \quad \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad , \quad \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

وبشكل عام فإن حل المعادلة:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

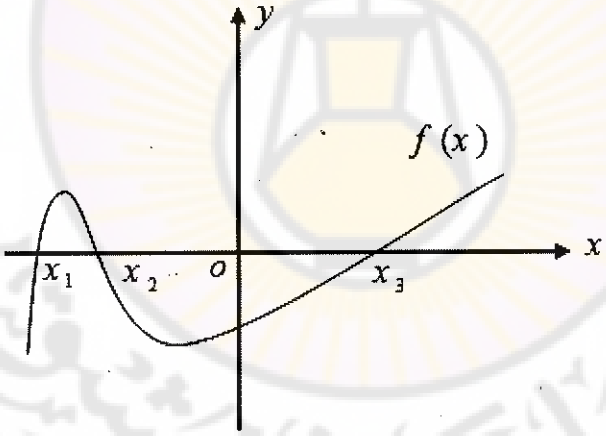
والتي هي كثيرة حدود من الدرجة n يزداد صعوبة كلما زادت n وفي بعض الحالات فإن المعادلة $f(x)=0$ تحوي توابع مثلثية أو أسية أو قطعية، في مثل هذه الحالات نسمي المعادلة بالمعادلة **المُتسامية**. عندئذ فإنه يصبح من الصعب حل هذه المعادلات بالطرق العادية المعروفة لذلك نلجأ في البحث عن حلول تقريبية للمعادلات غير الخطية، من أجل إيجاد هذه الحلول نُعين المجالات:

$$[a,b] \quad , \quad [c,d] \quad , \quad .....$$

بحيث يوجد جذر واحد فقط للمعادلة غير الخطية $f(x)=0$ في كل مجال من هذه المجالات وتُسمى عملية التعيين هذه **بعزل الجذور** ويمكن تعيين هذه المجالات بالاعتماد على الطريقة البيانية أو الطريقة التحليلية:

2-2- الطريقة البيانية لعزل جذور المعادلة غير الخطية:

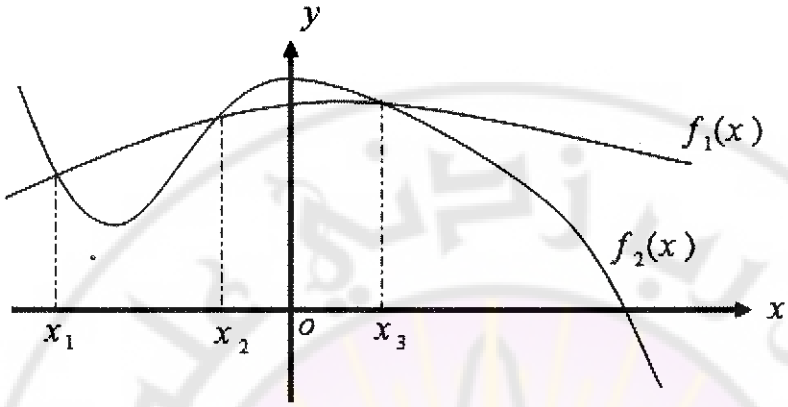
لعزل جذور المعادلة غير الخطية $f(x)=0$ حيث $f(x)$ تابع حقيقي مستمر أي لتعيين المجالات التي توجد فيها الجذور الحقيقية لهذه المعادلة نرسم منحني التابع $f(x)$ بشكل تقريبي بالاعتماد على إعطاء قيم للمتغير x، نحصل منها على القيم المقابلة للتابع $f(x)$ وكلما زدنا عدد النقاط حصلنا على منحني بياني أفضل للتابع $f(x)$ عندئذ نقاط تقاطع المنحني البياني مع المحور ox تقع ضمن مجالات معزولة كما في الشكل (2-1).



الشكل (2-1)

ويمكن في بعض الحالات استبدال المعادلة $f(x)=0$ بمعادلة مكافئة $f_1(x)=f_2(x)$ حيث $f_1(x),f_2(x)$ تابعان أكثر بساطة من $f(x)$، ثم نقوم

برسم كل من المنحنيين البيانيين للتابعين $f_1(x), f_2(x)$ وتصبح جذور المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع هذين المنحنيين كما في الشكل (2-2).



الشكل (2-2)

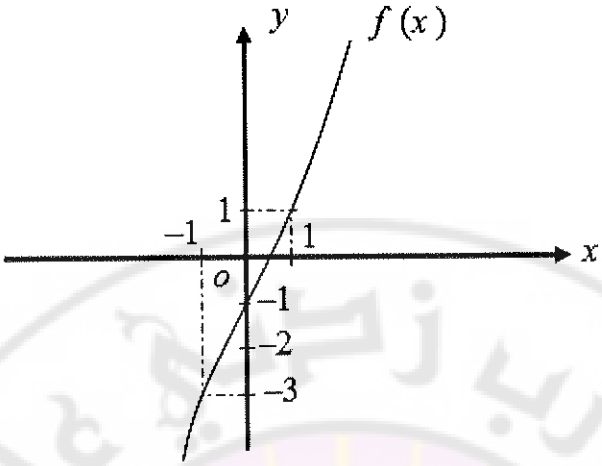
مثال (2):

أوجد بالطريقة البيانية جذور المعادلة $f(x)=x^3+x-1=0$.

الحل:

نرسم منحني التابع $f(x)=x^3+x-1$ وذلك بإعطاء قيم لـ x مثل $x_0, x_1, x_2, \ldots$ والحصول على القيم $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$

كما في الشكل (2-3)



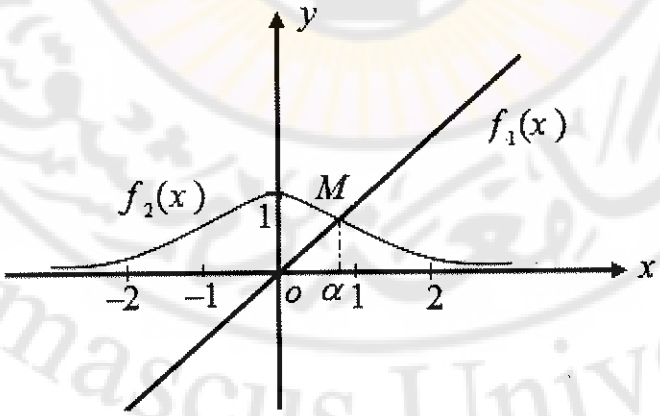
الشكل (2−3)

نلاحظ أن بيان التابع $f(x)$ يقطع المحور ox في نقطة واحدة فاصلتها تقع في المجال $[0,1]$.

وإذا كتبنا المعادلة السابقة بالشكل المكافئ التالي: $x = \dfrac{1}{1+x^2}$

حيث: $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f_1(x) = x$

ورسمنا منحني التابعين $f_1(x), f_2(x)$ نلاحظ أن المنحنيين يتقاطعان مع بعضهما في نقطة M فاصلتها α تقع في المجال $[0,1]$ كما في الشكل (2−4).

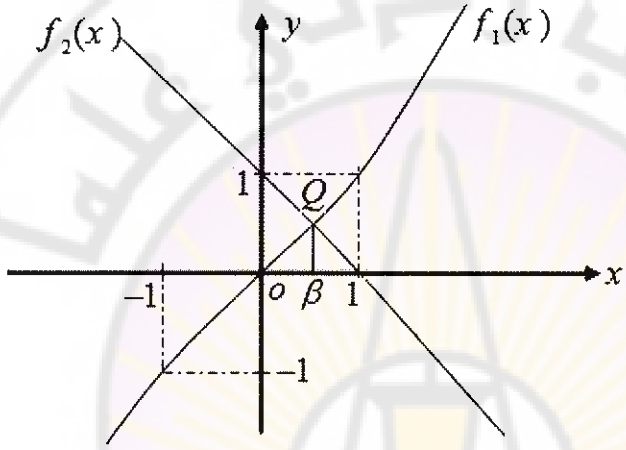


الشكل (2−4)

وكذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل المكافئ التالي: $x^3 = 1 - x$

حيث $f_2(x) = 1 - x \quad , \quad f_1(x) = x^3$

وبرسم منحني التابعين $f_1(x), f_2(x)$ نلاحظ أن المنحنيين يتقاطعان مع بعضهما في نقطة Q فاصلتها تقع في المجال $[0,1]$ كما في الشكل (2-5)



الشكل (2-5)

2-3- الطريقة التحليلية لعزل جذور المعادلة غير الخطية:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ وكان $f(a).f(b) < 0$ فإنه يوجد جذر واحد على الأقل للمعادلة $f(x) = 0$ يقع ضمن هذا المجال، وللتأكد من أن هذا الجذر وحيد يكفي أن يكون التابع $f(x)$ متزايداً أو متناقصاً ضمن هذا المجال، وفي حال $f(a).f(b) > 0$ فهذا يعني أنه لا توجد جذور للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a,b]$ أو يوجد عدد زوجي من الجذور لهذه المعادلة ضمن هذا المجال.

مثال (3):

أوجد بالطريقة التحليلية جذور المعادلة:

$$f(x) = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130 = 0$$

الحل:

$$f(1) = -20 < 0 \quad ، \quad f(2) = 46 > 0$$

إذن يوجد جذر للمعادلة في المجال $[1,2]$

$$f(3) = 50 > 0 \quad ، \quad f(4) = -2 < 0$$

إذن يوجد جذر للمعادلة في المجال $[3,4]$

$$f(5) = -80 < 0 \quad ، \quad f(6) = -130 < 0$$

$$f(7) = -74 < 0 \quad ، \quad f(8) = 190 > 0$$

إذن يوجد جذر للمعادلة في المجال $[7,8]$

$$f(-1) = -242 < 0 \quad ، \quad f(-2) = -290 < 0$$

$$f(-3) = -184 < 0 \quad ، \quad f(-4) = 190 > 0$$

أي الجذر الرابع سالب ويقع في $[-4,-3]$

2-4- الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية:

بعد عزل جذور المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ نستخدم الطرق العددية التالية لإيجاد الجذور التقريبية لهذه المعادلة:

2-4-1- طريقة التنصيف المتكرر:

بفرض أنه يوجد للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ جذر واحد ضمن المجال $[a,b]$، لإيجاد القيمة التقريبية لهذا الجذر نقسم المجال $[a,b]$ إلى نصفين فإذا

كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ فإن $x_0=\frac{a+b}{2}$ هي جذر المعادلة أما إذا كان $f(x_0)\neq 0$ فإننا نختار المجال $[x_0,b]$ إذا كان $f(x_0).f(b)<0$ أو نختار المجال $[a,x_0]$ إذا كان $f(a).f(x_0)<0$

نسمي المجال الذي اخترناه $[a_1,b_1]$ ونقسم هذا المجال إلى نصفين فإذا كان $f(x_1)=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$ فإن x_1 هي جذر المعادلة أما إذا كان $f(x_1)\neq 0$ فإننا نختار المجال $[x_1,b_1]$ إذا كان $f(x_1).f(b_1)<0$ أو نختار المجال $[a_1,x_1]$ إذا كان $f(a_1).f(x_1)<0$

نسمي المجال الذي اخترناه $[a_2,b_2]$

نكرر هذا العمل فنحصل على متتالية من القيم:

$$x_0,x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$$

تتقارب من جذر المعادلة المطلوب.

مثال (4):

استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد القيمة التقريبية لجذر المعادلة $f(x)=x^3-x-1=0$ حيث $\varepsilon=0.05$.

الحل:

$$f(0)=-1<0 \quad , \quad f(1)=-1<0 \quad , \quad f(2)=5>0$$

ومنه $f(1).f(2)<0$ إذن الجذر يقع في المجال $[1,2]$

$$x_0=\frac{1+2}{2}=1.5$$

$$f(x_0)=f(1.5)=(1.5)^3-(1.5)-1=0.875>0$$

نلاحظ أن $f(1).f(1.5) < 0$ إذن الجذر يقع في المجال $[1,1.5]$

$$x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

$$f(x_1) = f(1.25) = -0.296875 < 0$$

نلاحظ أن $f(1.25).f(1.5) < 0$ إذن الجذر يقع في المجال $[1.25,1.5]$

$$x_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$$

$$f(x_2) = f(1.375) = 0.22461 > 0$$

نلاحظ أن $f(1.25).f(1.375) < 0$ إذن الجذر يقع في المجال $[1.25,1.375]$

$$x_3 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.3125$$

$$f(x_3) = f(1.3125) = -0.051514 < 0$$

نلاحظ أن $f(1.3125).f(1.375) < 0$ إذن الجذر يقع في المجال $[1.3125,1.375]$

$$x_4 = \frac{1.3125+1.375}{2} = 1.34375$$

$$f(x_4) = f(1.34375) = 0.081636 > 0$$

$$|x_4 - x_3| = |1.34375 - 1.3125| = 0.03125 < 0.05 = \varepsilon$$

2-4-1-1- التقارب وتقييم الخطأ:

إذا كان المجال $[a,b]$ يحوي جذراً واحداً للمعادلة $f(x) = 0$ فإنه بتطبيق طريقة التنصيف المتكرر نحصل على المتتالية $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ حيث

x_0 منتصف المجال $[a,b]$

x_1 منتصف المجال $[a_1,b_1]$

x_2 منتصف المجال $[a_2,b_2]$

$\vdots$

x_n منتصف المجال $[a_n,b_n]$

حيث $f(a_n).f(b_n)<0 \quad ; \quad \forall n=1,2,.....$

إذا رمزنا للخطأ المطلق بالرمز $e_n=|x_n-\alpha|=|\alpha-x_n|$ حيث α جذر المعادلة $f(x)=0$ فإن α يحقق العلاقة $|\alpha-x_0|\le\frac{b-a}{2}$

وبشكل عام فإن:

$$|\alpha-x_n|\le\frac{b-a}{2^{n+1}} \quad ; \quad n=0,1,2,.....$$

نلاحظ أنه كلما زادت n عدد مرات التكرار فإن x_n يقترب من α جذر المعادلة والخطأ يصغر.

مثال (5):

إذا كان المطلوب إيجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x)=0$ بخطأ لا يتجاوز 10^{-k} فإن عدد التكرارات n التي نقوم بها للحصول على الجذر التقريبي x_n يُعين بالعلاقة التالية:

$$n+1\ge\frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$$

الحل:

الخطأ المرتكب بطريقة التنصيف المتكرر أصغر من $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ حيث وجدنا $|\alpha-x_n|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}$ ومنه يمكن تعيين n بالاعتماد على المتراجحة:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \le 10^{-k}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد:

$$\log(b-a) \le \log(2^{n+1}10^{-k}) = (n+1)\log 2 - k$$

ومنه:

$$n+1 \ge \frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$$

وهو المطلوب.

مثال (6):

أوجد بطريقة التنصيف المتكرر الجذر الموجب الأصغر للمعادلة $f(x) = 5x - 8\ln x - 8 = 0$ وكم مرة يجب أن نطبق طريقة التنصيف المتكرر لكي لا يتجاوز الخطأ 10^{-3}.

الحل:

$$f(0) = 0 - 8(-\infty) - 8 = \infty > 0$$

$$f(1) = 5 - 8\ln 1 - 8 = -3 < 0$$

$f(0).f(1) < 0$ إذن الجذر الموجب الأصغر يقع في المجال $[0,1]$ بالتعويض بالعلاقة:

$$n+1 \ge \frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$$

نجد:

$$n+1 \ge \frac{\log(1-0)+3}{\log 2} = 9.96578$$

ومنه $n \ge 9$ عدد مرات تطبيق طريقة التنصيف المتكرر

$$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5 \quad , \quad f(x_0) = f(0.5) = 0.0452 > 0$$

$f(0.5).f(1) < 0$ إذن الجذر يقع في المجال $[0.5,1]$

$$x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75 \quad , \quad f(x_1) = -1.9485 < 0$$

إذن الجذر يقع في المجال $[0.5,0.75]$

$$x_2 = 0.625 \quad , \quad f(x_2) = -1.1148 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5625]$

$$x_3 = 0.5625 \quad , \quad f(x_3) = -0.5846 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5625]$

$$x_4 = 0.5312 \quad , \quad f(x_4) = -0.2831 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5312]$

$$x_5 = 0.5156 \quad , \quad f(x_5) = -0.1226 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5156]$

$$x_6 = 0.5078 \quad , \quad f(x_6) = -0.0397 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5,0.5078]$

$$x_7 = 0.5039 \quad , \quad f(x_7) = 0.0025 > 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5039,0.5078]$

$$x_8 = 0.5058 \quad , \quad f(x_8) = -0.01809 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5039,0.5058]$

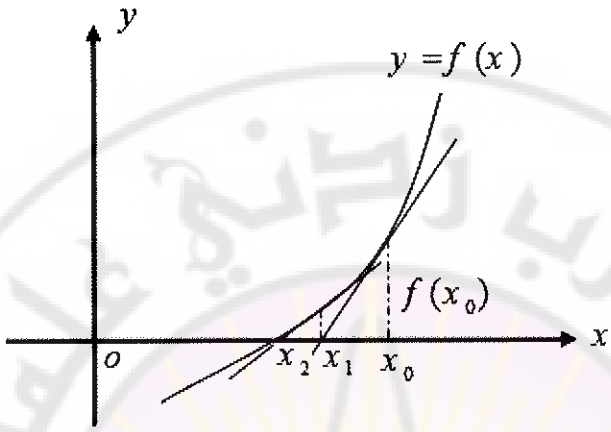
$$x_9 = 0.5048 \quad , \quad f(x_9) = -0.0073 < 0$$

الجذر يقع في المجال $[0.5039,0.5048]$

$$x_{10} = 0.50435$$

2-4-2- طريقة نيوتن:

بفرض $y = f(x)$ تابع كما هو موضح في الشكل (2-6)



الشكل (2-6)

لإيجاد القيمة التقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ نختار نقطة x_0 من المجال $[a,b]$ حيث $f(a).f(b) < 0$ نوجد $f(x_0)$ وننشىء المماس المار بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ الذي يقطع المحور ox بالنقطة x_1 وتكون معادلة المماس المار بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ هي:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

وترتيب النقطة x_1 هو $y = 0$ بالتعويض في معادلة المماس نجد:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

ومنه:

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

نوجد $f(x_1)$ ثم ننشىء المماس المار بالنقطة $(x_1, f(x_1))$ الذي يقطع المحور ox بالنقطة x_2 وبشكل مشابه نجد:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبشكل عام:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0$$

وهذه العلاقة تسمى **طريقة نيوتن** – رافسون ونتوقف عن التكرار عند تحقق الشرط $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ حيث ε مقدار صغير موجب وتكون القيمة x_{i+1} هي القيمة التقريبية لجذر المعادلة غير الخطية.

مثال (7):

أوجد بطريقة نيوتن جميع جذور المعادلة التالية:

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$$

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0).f(1) < 0$$

إذن يوجد جذر يقع في المجال $[0,1]$

$f(2) = 1 > 0$ إذن $f(1).f(2) < 0$ هذا يعني أنه يوجد جذر يقع في المجال $[1,2]$

$$f(-1) = 4 > 0 \quad , \quad f(-2) = 1 > 0 \quad , \quad f(-3) = -14 < 0$$

ومنه $f(-3).f(-2) < 0$ إذن يوجد جذر سالب يقع في المجال $[-3,-2]$

لنوجد أولاً الجذر السالب نختار $x_0 = -3$

ونطبق طريقة نيوتن:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

فنجد:

$$x_1 = -3 - \frac{(-3)^3 - 4(-3) + 1}{3(-3)^2 - 4} = -3 - \frac{-27 + 12 + 1}{3(9) - 4}$$

$$= -3 - \frac{-14}{23} = -3 + \frac{14}{23} = -2.3913$$

$$x_2 = -2.3913 - \frac{(-2.3913)^3 - 4(-2.3913) + 1}{3(-2.3913)^2 - 4} = -2.15496$$

$$x_3 = -2.115945$$

$$x_4 = -2.11496$$

ثم نوجد الجذر الموجب الأصغر الواقع في المجال $[0,1]$

نختار $x_0 = 0$ ونطبق طريقة نيوتن:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$x_1 = 0 - \frac{1}{-4} = 0.25$$

$$x_2 = 0.25 - \frac{(0.25)^3 - 4(0.25) + 1}{3(0.25)^2 - 4} = 0.2541$$

$$x_3 = 0.2541$$

وأخيراً لنوجد الجذر الموجب الأكبر الواقع في المجال $[1,2]$

نختار $x_0 = 2$ ونطبق طريقة نيوتن:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{8} = 1.875$$

$$x_2 = 1.875 - \frac{(1.875)^3 - 4(1.875) + 1}{3(1.875)^2 - 4} = 1.861$$

$$x_3 = 1.861$$

نظرية:

إذا كان $f(a).f(b) < 0$ وكان $f'(x), f''(x)$ غير معدومين ويحافظان على إشارتيهما فوق المجال $[a,b]$ فمن أجل أي نقطة $x_0 \in [a,b]$ التي تحقق $f(x_0).f''(x_0) > 0$ يمكن باستخدام طريقة نيوتن حساب القيمة التقريبية للجذر الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$

مثال (8):

احسب بطريقة نيوتن الجذر السالب للمعادلة:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

الحل:

$$f(-10) = -1050 < 0 \quad , \quad f(-11) = 3453 > 0$$

ومنه $f(-11).f(-10) < 0$

أي أن الجذر السالب يقع في المجال $[-11,-10]$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 \quad , \quad f''(x) = 12x^2 - 6$$

$$f'(-11) = -5183 \quad , \quad f''(-11) = 1446 > 0$$

نلاحظ أن $f'(-11) \neq 0$ و $f''(-11) \neq 0$ و $f(-11)f''(-11) > 0$

نختار $x_0 = -11$

ونطبق طريقة نيوتن:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -11 - \frac{3453}{-5183} = -10.3338$$

$$f(x_1) = 308.1563 \quad , \quad f'(x_1) = -4277.0767$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -10.3339 + 0.0720 = -10.2618$$

$$x_3 = -10.26096$$

$$x_4 = -10.26096$$

2-4-2-1- إيجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية بالاعتماد على طريقة نيوتن:

يمكن بالاعتماد على طريقة نيوتن إيجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية وذلك كما يلي:

إذا كان المطلوب هو إيجاد الجذر البائي للعدد الحقيقي a

نفرض أن القيمة التقريبية لهذا الجذر هي x أي:

$$x = \sqrt[p]{a} = (a)^{\frac{1}{p}}$$

ومنه:

$$x^p = a \Rightarrow f(x) = x^p - a = 0$$

$$f'(x) = px^{p-1}$$

بالتعويض بطريقة نيوتن:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0$$

نجد:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}}$$

وهذه العلاقة تمكننا من إيجاد الجذور للأعداد الحقيقية.

مثال (9):

باستخدام طريقة نيوتن استخرج علاقة لإيجاد الجذر التقريبي التكعيبي لأي عدد حقيقي $a > 0$ ثم طبق ذلك من أجل $a = 5$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية.

الحل:

نفرض:

$$x = \sqrt[3]{a} \Rightarrow x^3 = a$$

ومنه: $f(x) = x^3 - a = 0$

بالتعويض بطريقة نيوتن:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0$$

نجد:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2})$$

ثم نفرض $x_0 = 2$ ونعوض بالعلاقة السابقة فنجد:

$$x_1 = \frac{1}{3}[2(2) + \frac{5}{(2)^2}] = \frac{23}{12} = 1.91667$$

$$x_2 = \frac{1}{3}[2(1.91667) + \frac{5}{(1.91667)^2}] = 1.73146$$

$$x_3 = \frac{1}{3}[2(1.73146) + \frac{5}{(1.73146)^2}] = 1.71024$$

$$x_4 = \frac{1}{3}[2(1.71024) + \frac{5}{(1.71024)^2}] = 1.70998$$

$$x_5 = \frac{1}{3}[2(1.70998) + \frac{5}{(1.70998)^2}] = 1.70998$$

إذن القيمة التقريبية للجذر الثالث للعدد 5 هي: $x = 1.70998$

مثال (10):

أوجد القيمة التقريبية للجذر $\sqrt[5]{12}$.

الحل:

نفرض:

$$x = \sqrt[5]{12} \Rightarrow x^5 = 12$$

ومنه:

$$f(x) = x^5 - 12 = 0$$

$$f'(x) = 5x^4$$

بالتعويض بطريقة نيوتن:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0$$

وبفرض $x_0 = 1.5$ نجد:

$$x_1 = 1.5 - \frac{(1.5)^5 - 12}{4(1.5)^4} = 1.5 + 0.17407 = 1.6741$$

$$x_2 = 1.6741 - \frac{(1.6741)^5 - 12}{4(1.6741)^4} = 1.6448$$

$$x_3 = 1.6448 - \frac{(1.6448)^5 - 12}{4(1.6448)^4} = 1.6438$$

$$x_4 = 1.6438 - \frac{(1.6438)^5 - 12}{4(1.6438)^4} = 1.6438$$

ومنه:

$$\sqrt[5]{12} \simeq 1.6438$$

2-4-3- طريقة النقطة الثابتة:

تعريف:

نقول عن التابع $g : R \to R$ أنه **تقليصي** على المجال $[a,b]$ إذا كانت المسافة بين $g(x)$ و $g(y)$ أصغر من المسافة بين x و y وبمعنى أدق إذا وجد ثابت k، $0 \le k < 1$ بحيث مهما كان x, y عددين حقيقيين من المجال $[a,b]$ فإن:

$$|g(x) - g(y)| \le k\,|x - y|$$

نظرية:

بفرض أن التابع g قابل للتفاضل على المجال $[a,b]$

إذا وجد $0 \le l < 1$ بحيث:

$$\forall x \in [a,b] \quad : \quad |g'(x)| \le l < 1$$

فإن g تابع تقليصي على المجال $[a,b]$.

الإثبات:

بتطبيق نظرية القيمة الوسطى، مهما يكن x, y عددين حقيقيين مختلفين من المجال $[a,b]$ فإنه يوجد عدد c بين x, y بحيث:

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(c)$$

نأخذ القيمة المطلقة للطرفين فنجد:

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| = |g'(c)| \le l \Rightarrow |g(x)-g(y)| \le l\,|x-y|$$

هذا يعني أن g تابع تقليصي على المجال $[a,b]$

مثال (11):

أثبت أن التابع $g(x)=\frac{2}{3}\sin x$ تقليصي على المجال $[0,\pi]$

الحل:

$$\forall x \in [0,\pi] \quad : \quad |g'(x)| = \left|\frac{2}{3}\cos x\right| = \frac{2}{3}|\cos x| \le \frac{2}{3} < 1$$

تعريف:

نقول إن التابع g يملك **نقطة ثابتة** α إذا تحقق الشرط $g(\alpha)=\alpha$

مثال (12):

أثبت أن $\frac{1}{2}$ نقطة ثابتة للتابع $g(x)=3x-1$

الحل:

$$g(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

2-5- نظرية النقطة الثابتة:

إذا كان $g:[a,b]\to[a,b]$ تابع تقليصي:

$$\exists k;0\le k<1:\forall x,y\in[a,b]:|g(x)-g(y)|\le k|x-y|$$

فإن :

1- g يملك نقطة ثابتة وحيدة داخل المجال $[a,b]$ أي أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلاً وحيداً α

2- بفرض $c\in[a,b]$ ولتكن u_n الحل الوحيد للعلاقة التكرارية:

$$u_{n+1}=g(u_n)\quad;\quad u_0=c$$

المتتالية u_n تنتهي إلى α عندما تنتهي n إلى ∞ أي:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\alpha$$

هذا يعني أن حدود المتتالية u_n تشكل حلولاً تقريبية للمعادلة $g(x)-x=0$.

الإثبات:

1- بفرض $f(x)=g(x)-x$، نلاحظ أن f تابع متصل على المجال $[a,b]$ لأنه عبارة عن حاصل فرق تابعين متصلين.

كذلك $f(a).f(b)\le 0$ لأن:

$$g(a)\in[a,b]\Rightarrow a\le g(a)\Rightarrow g(a)-a\ge 0\Rightarrow f(a)\ge 0$$

$$g(b)\in[a,b]\Rightarrow g(b)\le b\Rightarrow g(b)-b\le 0\Rightarrow f(b)\le 0$$

بالاعتماد على نظرية القيمة الوسطى للتوابع المتصلة، يوجد على الأقل α من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$f(\alpha)=0\Leftrightarrow g(\alpha)-\alpha=0\Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$$

لنثبت أن الحل α وحيد.

نفرض أنه يوجد حل آخر β يحقق العلاقة $g(\beta)=\beta$ وبما أن g تابع تقليصي فإن:

$$|g(\alpha)-g(\beta)|\le k\,|\alpha-\beta| \quad ; \quad 0\le k<1$$

ولكن $g(\alpha)=\alpha$ و $g(\beta)=\beta$ ومنه فإن المتراجحة السابقة تكتب كما يلي:

$$|\alpha-\beta|\le k\,|\alpha-\beta| \Leftrightarrow (1-k)|\alpha-\beta|=0 \Rightarrow \alpha=\beta$$

لأن $k\neq 1$

2- بفرض $c\in[a,b]$ ولتكن u_n الحل الوحيد للعلاقة التكرارية:

$$u_{n+1}=g(u_n) \quad ; \quad u_0=c$$

لنثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\alpha$

$$|u_n-\alpha|=|g(u_{n-1})-g(\alpha)|\le k\,|u_{n-1}-\alpha|=k\,|g(u_{n-2})-g(\alpha)|$$
$$\le k^2|u_{n-2}-\alpha|\le\ldots\ldots\le k^n|u_0-\alpha|=k^n|c-\alpha|$$

وبما أن $0\le k<1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}k^n|c-\alpha|=0$

هذا يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\alpha$

مثال (12):

حل المعادلة التالية $\cos x-4x=0$ بطريقة النقطة الثابتة.

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{4}\cos x-x=0$$

$$f(0)=\frac{1}{4}>0 \quad , \quad f(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$$

ومنه $f(0).f(\frac{\pi}{2})<0$ إذن يوجد جذر واحد على الأقل في المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$x=g(x)=\frac{1}{4}\cos x$$

$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}] \ , \ |g'(x)| \le \frac{1}{4}|\sin x| \le \frac{1}{4} < 1$$

هذا يعني أن التابع g تقليصي

$$g([0,\frac{\pi}{2}]) = [0,\frac{1}{4}] \subset [0,\frac{\pi}{2}]$$

$$g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cos\alpha - \alpha = 0$$

هذا يعني أن المعادلة السابقة بالاعتماد على نظرية النقطة الثابتة تملك حل وحيد α في المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$

ثم نفرض $u_0 = \frac{\pi}{4}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}\cos u_n$ فنجد:

$$u_1 = \frac{1}{4}\cos u_0 = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0.1768$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\cos u_1 = 0.2461$$

$$u_3 = \frac{1}{4}\cos u_2 = 0.2425$$

$$u_4 = \frac{1}{4}\cos u_3 = 0.2427$$

مثال (13):

أوجد بطريقة النقطة الثابتة أكبر جذر موجب للمعادلة:

$$f(x) = x^2 - 100x + 1 = 0$$

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} f(10) = 100 - 1000 + 1 = -899 < 0 \\ f(100) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(10)f(100) < 0$$

إذن يوجد جذر واحد على الأقل في المجال $[10,100]$

$$x^2 - 100x + 1 = 0 \Rightarrow 100x - 1 = x^2$$

$$x = g(x) = 100 - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} < 0 \quad ; \quad \forall x \in [10,100]$$

$$g([10,100]) = [g(10), g(100)] = [99.9, 99.99] \subset [10,100]$$

ومنه فإن المعادلة السابقة تملك حلاً وحيداً في المجال $[10,100]$

ثم نفرض $x_0 = 10$

$$x_{k+1} = 100 - \frac{1}{x_k}$$

$$x_1 = g(x_0) = 99.9 \quad , \quad x_2 = g(x_1) = 99.99 \quad , \quad x_3 = g(x_2) = 99.99$$

2-6- الحلول العددية لجملة المعادلات غير الخطية:

بفرض:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

جملة معادلات غير خطية والمطلوب إيجاد قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ التي تحقق جملة المعادلات غير الخطية السابقة.

للتبسيط نأخذ معادلتين غير خطيتين بمجهولين:

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

حيث f, g تابعان قابلان للاشتقاق الجزئي ويمكن حل المعادلتين باستخدام الطرق العددية التالية:

2-6-1- طريقة نيوتن:

لإيجاد حل المعادلتين غير الخطيتين السابقتين ننشر كلاً من التابعين f, g حسب تايلور بجوار النقطة (x_n, y_n) وبحذف الحدود غير الخطية في $(x - x_n), (y - y_n)$ فنجد:

$$f(x, y) = f(x_n, y_n) + f_x(x - x_n) + f_y(y - y_n) = 0$$

$$g(x, y) = g(x_n, y_n) + g_x(x - x_n) + g_y(y - y_n) = 0$$

بحل المعادلتين السابقتين بالاعتماد على طريقة كرامر نجد:

$$x - x_n = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$y - y_n = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x(x_n, y_n) & f(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & g(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

حيث f_x, f_y, g_x, g_y المشتقات الجزئية لـ f, g

$$J = J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} f_x(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

ومن أجل $J(x_n, y_n) \neq 0$ يمكن كتابة العلاقات التكرارية التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

ونتوقف عن التكرار عند تحقق ما يلي:

$$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon \quad ; \quad |y_{k+1}-y_k|<\varepsilon$$

حيث ε مقدار صغير موجب.

مثال (14):

باستخدام طريقة نيوتن وبفرض $(x_0,y_0)=(0.5,0.1)$ أوجد حل المعادلتين:

$$x^2+y^2=1 \quad , \quad xy=0$$

الحل:

$$f(x,y)=x^2+y^2-1 \quad , \quad g(x,y)=xy$$

$$f_x=2x \quad ; \quad g_x=y$$

$$f_y=2y \quad ; \quad g_y=x$$

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix}=2(x^2-y^2)$$

$$J(x_0,y_0)=J(0.5,0.1)=2(0.25-0.01)=0.48\neq 0$$

$$J(x_0,y_0)=0.48 \ , \ f(x_0,y_0)=-0.74 \ , \ g(x_0,y_0)=0.05$$

$$f_x(x_0,y_0)=1 \ , \ f_y(x_0,y_0)=0.2$$

$$g_x(x_0,y_0)=0.1 \ , \ g_y(x_0,y_0)=0.5$$

بالتعويض بالعلاقتين:

$$x_1=x_0-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} \quad ; \quad y_1=y_0-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

نجد:

$$x_1=0.5-\frac{1}{0.48}\begin{vmatrix} -0.74 & 0.2 \\ 0.05 & 0.5 \end{vmatrix}=1.2917$$

$$y_1 = 0.1 - \frac{1}{0.48}\begin{vmatrix} 1 & -0.74 \\ 0.1 & 0.05 \end{vmatrix} = -0.1583$$

$$x_1 = 1.2917 \quad , \quad y_1 = -0.1583$$

$J(x_1, y_1) = 3.2869$, $f(x_1, y_1) = 0.6934$, $g(x_1, y_1) = 0.204$

$f_x = 2.5834$, $f_y = -0.3166$

$g_x = -0.1583$, $g_y = 1.2917$

بالتعويض نجد:

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 1.2917 - \frac{1}{3.2869}\begin{vmatrix} 0.6934 & -0.3166 \\ 0.2045 & 1.2917 \end{vmatrix} = 0.9995$$

$$y_2 = y_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$= -0.1583 - \frac{1}{3.2869}\begin{vmatrix} 2.5834 & 0.6934 \\ -0.1583 & 0.2045 \end{vmatrix} = -0.3524$$

$$x_2 = 0.9995 \quad , \quad y_2 = -0.3524$$

$J(x_2, y_2) = 1.7496$, $f(x_2, y_2) = 0.1232$, $g(x_2, y_2) = -0.3522$

$f_x = 1.999$, $f_y = -0.7048$

$g_x = -0.3524$, $g_y = 0.9995$

بالتعويض نجد:

$$x_3 = x_2 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 0.9995 - \frac{1}{1.7496}\begin{vmatrix} 0.1232 & -0.7048 \\ 1.7496 & 0.9995 \end{vmatrix} = 1.0710$$

$$y_3 = y_2 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$= -0.3524 - \frac{1}{1.7496}\begin{vmatrix} 1.999 & 0.1232 \\ -0.3524 & 1.7496 \end{vmatrix} = 0.0252$$

$$x_3 = 1.0710 \quad , \quad y_3 = 0.0252$$

بنفس الطريقة نجد:

$$x_4 = 1.0026 \quad , \quad y_4 = 0.0016$$

$$x_5 = 1.00009 \quad , \quad y_5 = 0.000008$$

ومنه فإن الحل يقترب من $(1,0)$

2-6-2- طريقة التكرار:

لإيجاد حل المعادلتين غير الخطيتين:

$$f(x,y) = 0 \quad , \quad g(x,y) = 0$$

نختار تابعي التكرار بالشكل:

$$x = F(x,y) \quad , \quad y = G(x,y)$$

ونكتب علاقتي التكرار:

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \quad , \quad y_{n+1} = G(x_n, y_n)$$

تتقارب المتتاليتان الناتجتان من تطبيق علاقتي التكرار إذا تحقق ما يلي:

$$|F_x| + |F_y| \le k < 1$$

$$|G_x| + |G_y| \le k < 1$$

مثال (15):

أوجد بطريقة التكرار حل المعادلتين:

$$x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$

$$x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0$$

حيث: $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$

الحل:

نكتب المعادلتين بالشكل التالي:

$$x = F(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} \quad , \quad y = G(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3}$$

$$F_x = \frac{x^2}{2} \quad , \quad F_y = \frac{y^2}{2}$$

$$G_x = \frac{x^2}{2} \quad , \quad G_y = -\frac{y^2}{2}$$

$$|F_x| + |F_y| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 < 1$$

$$|G_x| + |G_y| = \left|\frac{x^2}{2}\right| + \left|-\frac{y^2}{2}\right| = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{0.25 + 0.25}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 < 1$$

هذا يعني أن شرط التقارب محقق وبتطبيق العلاقتين التكراريتين:

$$x_{n+1}=\frac{1}{6}(x_n^3+y_n^3)+\frac{1}{2}$$
$$y_{n+1}=\frac{1}{6}(x_n^3-y_n^3)+\frac{1}{3}$$

نجد:

$$x_1=\frac{1}{6}(x_0^3+y_0^3)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}(0.125+0.125)+\frac{1}{2}=0.542$$
$$y_1=\frac{1}{6}(x_0^3-y_0^3)+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}(0.125-0.125)+\frac{1}{3}=0.3333$$
$$x_2=\frac{1}{6}(x_1^3+y_1^3)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}[(0.542)^3+(0.3333)^3]+\frac{1}{2}=0.533$$
$$y_2=\frac{1}{6}(x_1^3-y_1^3)+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}[(0.542)^3-(0.3333)^3]+\frac{1}{3}=0.353$$
$$x_3=\frac{1}{6}(x_2^3+y_2^3)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}[(0.533)^3+(0.353)^3]+\frac{1}{2}=0.532$$
$$y_3=\frac{1}{6}(x_2^3-y_2^3)+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}[(0.533)^3-(0.353)^3]+\frac{1}{3}=0.351$$
$$x_4=\frac{1}{6}(x_3^3+y_3^3)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}[(0.532)^3+(0.351)^3]+\frac{1}{2}=0.532$$
$$y_4=\frac{1}{6}(x_3^3-y_3^3)+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}[(0.532)^3-(0.351)^3]+\frac{1}{3}=0.531$$

إذاً الجذر التقريبي هو $(0.532,0.531)$.

مثال (16):

أوجد حل المعادلتين:

$$x=\sin y \quad , \quad y=\cos x$$

بطريقتين مختلفتين حيث $(x_0, y_0) = (1,1)$.

الحل:

أولاً بطريقة نيوتن:

نكتب المعادلتين السابقتين بالشكل التالي:

$$f(x,y) = \cos x - y \quad , \quad g(x,y) = x - \sin y$$

$$f_x = -\sin x \quad ; \quad g_x = 1$$

$$f_y = -1 \quad ; \quad g_y = -\cos y$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} -\sin x & -1 \\ 1 & -\cos x \end{vmatrix} = \sin x \cos x + 1$$

$$J(x_0, y_0) = \sin x \cos x + 1 = (0.8415)(0.5403) + 1 = 1.4547 \neq 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{1.4547}\begin{vmatrix} -0.4597 & -1 \\ 0.1585 & -0.5403 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{0.4069}{1.4547} = 1 - 0.2797 = 0.7203$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{J} = \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{1.4547}\begin{vmatrix} -0.8415 & -0.4597 \\ 1 & 0.1585 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{0.3263}{1.4547} = 1 - 0.2243 = 0.7757$$

$$J(x_1, y_1) = \sin 0.7203 \cos 0.7757 + 1$$

$$= (0.6596)(0.7139) + 1 = 1.4709$$

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 0.7203 - \frac{1}{1.4709}\begin{vmatrix} -0.0241 & -1 \\ 0.0020 & -0.7139 \end{vmatrix} = 0.7203 - \frac{0.0192}{1.4709}$$

$$= 0.7203 - 0.0130 = 0.7073$$

$$y_2 = y_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$= 0.7757 - \frac{1}{1.4709}\begin{vmatrix} -0.6596 & -0.0241 \\ 1 & 0.0020 \end{vmatrix} = 0.7757 - \frac{0.0228}{1.4709}$$

$$= 0.7757 - 0.0155 = 0.7602$$

ثانياً <u>بطريقة التكرار</u>:

$$x = F(x, y) = \sin x \quad , \quad y = G(x, y) = \cos x$$

ولنطبق علاقتي التكرار:

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) = \sin y_n \quad , \quad y_{n+1} = G(x_n, y_n) = \cos x_n$$

$$x_1 = \sin y_0 = \sin 1 = 0.8415$$
$$y_1 = \cos x_0 = \cos 1 = 0.5403$$
$$x_2 = \sin y_1 = \sin 0.5403 = 0.5144$$
$$y_2 = \cos x_1 = \cos 0.8415 = 0.6663$$
$$x_3 = \sin y_2 = \sin 0.6663 = 0.6181$$
$$y_3 = \cos x_2 = \cos 0.5145 = 0.8706$$
$$x_4 = \sin y_3 = \sin 0.8706 = 0.7647$$
$$y_4 = \cos x_3 = \cos 0.6181 = 0.8150$$
$$x_5 = \sin y_4 = \sin 0.8150 = 0.7277$$
$$y_5 = \cos x_4 = \cos 0.7647 = 0.7216$$

$$x_6 = \sin y_5 = 0.6606 \quad , \quad y_6 = \cos x_5 = 0.7467$$
$$x_7 = \sin y_6 = 0.6792 \quad , \quad y_7 = \cos x_6 = 0.7896$$
$$x_8 = \sin y_7 = 0.7101 \quad , \quad y_8 = \cos x_7 = 0.7781$$
$$x_9 = \sin y_8 = 0.7019 \quad , \quad y_9 = \cos x_8 = 0.7583$$
$$x_{10} = \sin y_9 = 0.6877 \quad , \quad y_{10} = \cos x_9 = 0.7636$$
$$x_{11} = \sin y_{10} = 0.6915 \quad , \quad y_{11} = \cos x_{10} = 0.7727$$

2-7- تمارين:

1- اعزل جذور المعادلة $f(x)=x^4-4x-1=0$.

2- حل المعادلتين التاليتين بالطريقة البيانية:

أ. $x\ln x=1$

ب. $x^3+2x+7.8=0$

3- استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد جذور المعادلة:

$$f(x)=x^4+2x^2-x-1=0$$

4- كم مرة يجب أن نكرر طريقة التنصيف المتكرر للحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-3} في إيجاد جذر المعادلة $f(x)=x^4-3x^2+1=0$.

5- أوجد بطريقة التنصيف المتكرر جذور المعادلة:

$$f(x)=3x+\sin x-e^x=0$$

6- أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x)=x^3-x-1=0$ بطريقة نيوتن.

7- عين اعتماداً على طريقة نيوتن الجذر التقريبي للمعادلة:

$$f(x)=x-2\sin x=0$$

8- أوجد القيمة التقريبية للجذر $\sqrt[3]{5}$ بطريقة نيوتن.

9- أوجد جذر المعادلة $f(x)=x^2-x-2=0$ بطريقة النقطة الثابتة.

10- بطريقة النقطة الثابتة حل المعادلة $f(x)=e^{-x}-\cos x=0$.

11- اعتماداً على طريقة النقطة الثابتة أوجد القيمة التقريبية لجذر المعادلة:

$$e^x-3x^2=0$$

12- حل المعادلتين التاليتين:

$$f(x,y)=2x^3-y^2-1=0$$
$$g(x,y)=xy^3-y-4=0$$

بطريقة نيوتن.

13- بطريقة نيوتن حل المعادلتين التاليتين:

$$f(x,y) = y - e^{x} + 2 = 0$$

$$g(x,y) = y - \ln(x+2) = 0$$

14- أوجد حل المعادلتين التاليتين:

$$f(x,y) = e^{x} - y = 0$$

$$g(x,y) = xy - e^{x} = 0$$

بطريقة التكرار.

15- بطريقة التكرار حل المعادلتين التاليتين:

$$x - y^{2} + 3\log_{10} x = 0$$

$$y - \frac{1}{x} - 2x + 5 = 0$$

حيث $f(x_0, y_0) = (3.4, 2.2)$

16- بطريقة التكرار حل المعادلتين التاليتين:

$$0.1x^{2} + 0.1y^{2} - x + 0.8 = 0$$

$$0.1x + 0.1xy^{2} - y + 0.8 = 0$$

حيث $f(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$

الفصل الثالث

حل المعادلات الخطية

Solving linear equations

3-1- مقدمة:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

حيث a_{ij} $j = 1,2,\ldots,n$, $i = 1,2,\ldots,m$ مقادير معلومة وتسمى الأمثال أو المعاملات.

b_i مقادير معلومة أيضاً $i = 1,2,\ldots,m$

x_j مقادير غير معلومة (مجهولة) $j = 1,2,\ldots,n$

وهذه الجملة تسمى **جملة معادلات خطية** مؤلفة من m معادلة و n مجهول.

يمكن كتابة الجملة السابقة باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$AX = B$$

وهذا يكافئ:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

حيث:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

وتسمى مصفوفة الأمثال

و B مصفوفة الثوابت $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

و X مصفوفة المجاهيل $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

ولحل جملة المعادلات الخطية نتعرف إلى خواص المصفوفات:

تسمى $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ مصفوفة من النوع $m\times n$

إذا كانت $m=n$ فإننا نقول إن A مصفوفة **مربعة** من الدرجة n

مثال(1):

بفرض أن:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & -1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 5 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 7\\ 2 & 8 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad D=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 4\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$$

فإن A مصفوفة من النوع 1×4

B مصفوفة من النوع 2×3

C مصفوفة من النوع 4×3

D مصفوفة من النوع 5×1

تعريف:

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى **بالمصفوفة الصفرية** ونرمز لها بالرمز O فمثلاً المصفوفات التالية هي مصفوفات صفرية:

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

تعريف:

المصفوفة القطرية هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها غير القطرية أصفار ونكتب المصفوفة القطرية بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وإذا كانت جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية وتساوي الواحد في المصفوفة القطرية فإننا نُسمي هذه المصفوفة **بالمصفوفة الواحدية** ونرمز لها بالرمز I ونكتب المصفوفة الواحدية بالشكل التالي:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-2- العمليات الجبرية على المصفوفات:

1- تساوي مصفوفتين:

إذا كانت $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ فإننا نقول إن المصفوفتين A, B **متساويتان** ونكتب $A = B$ إذا كان $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1,2,....,m$
$j = 1,2,....,n$

أي العناصر المتناظرة في المصفوفتين من نفس النوع تكون متساوية.

2- جمع مصفوفتين:

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ مصفوفتين من نفس النوع $m\times n$ فإن حاصل الجمع $A+B$ هو مصفوفة من نفس النوع وعناصرها هي مجموع العناصر المتناظرة أي أن:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3- ضرب المصفوفة في عدد قياسي:

ضرب المصفوفة A بالعدد λ الذي يكتب بالشكل λA هو مصفوفة نحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالعدد λ هذا يعني أن:

إذا كان $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ فإن $\lambda A=\left[\lambda a_{ij}\right]_{m\times n}$

مثال(3):

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ و $\lambda=4$ فإن $\lambda A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 12 & 4 & 20 \\ -4 & 16 & 24 \\ 8 & 32 & 36 \end{bmatrix}$

ملاحظة:

من تعريف جمع المصفوفات وضربها بعدد فإنه من أجل أي مصفوفتين A,B من نفس النوع ومن أجل أي عددين قياسين λ,μ فإن:

$$A+B=B+A$$

$$A+O=O+A=A$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$$

وكذلك إذا كانت C مصفوفة من نفس نوع المصفوفتين A,B فإن:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

مثال(4):

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

أوجد $2A-B$

الحل:

$$2A-B=\begin{bmatrix}0 & 8 & 10 & 12\\ 6 & 2 & -6 & 8\\ 4 & 14 & 16 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -1 & 0 & -2\\ -7 & -4 & -2 & 5\\ -8 & -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & 7 & 10 & 10\\ -1 & -2 & -8 & 13\\ -4 & 13 & 16 & 5\end{bmatrix}$$

4- ضرب المصفوفات:

حاصل ضرب المصفوفتين A,B الذي يكتب بالشكل $A.B$ يكون معرفاً إذا كان عدد أعمدة A مساوياً عدد صفوف B

وهذا يعني أنه بفرض $A=\left[a_{ij}\right]$ من النوع $m\times n$ وأن $B=\left[b_{jk}\right]$ من النوع $n\times k$ حيث:

$$i=1,2,...,m \quad , \quad j=1,2,...,n \quad , \quad k=1,2,...,s$$

فإن $AB=C=\left[c_{ik}\right]$

حيث:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \quad ; \quad i=1,2,...,m \quad , \quad k=1,2,...,s$$

فمثلاً العنصر c_{23} هو حاصل ضرب عناصر السطر الثاني من A في عناصر السطر الثالث من B أي أن:

$$c_{23}=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}b_{j3}=c_{21}b_{13}+c_{22}b_{23}+....+c_{2n}b_{n3}$$

مثال(5):

أوجد حاصل ضرب المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 3\\ -2 & -6 & -1\end{bmatrix}$$

الحل:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 3\\ -2 & -6 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -21 & 7\\ -2 & -30 & -1\end{bmatrix}$$

لاحظ أن:

1. إذا كان عدد أعمدة A لا يساوي عدد أسطر B فإن AB غير معرف.
2. إذا كان AB و BA معرف فإن AB لا يساوي دائماً BA
3. $A=IA=AI$
4. $\forall n\in N \quad : \quad I=I^2=I^3=....=I^n$

مثال(6):

إذا كان $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -4\end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

أوجد AB و BA ماذا تستنتج؟

الحل:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 10\\ 7 & 16\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 5\\ -10 & -4\end{bmatrix}$$

نستنتج أن $AB \neq BA$.

5- منقولة مصفوفة:

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ من النوع $m\times n$ فإن منقول المصفوفة A الذي نرمز له بالرمز A^T هو مصفوفة نحصل عليها بكتابة أسطر A كأعمدة وكتابة أعمدة A كأسطر مع المحافظة على الترتيب

أي أن: $A^T=\left[a_{ji}\right]$

و A^T مصفوفة من النوع $n\times m$

مثال(7):

أوجد منقول المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 3 & 7 & 1\\ 5 & 0 & -1\\ 6 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5 & 6\\ 4 & 7 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

6- المصفوفة المثلثية:

أ- **المصفوفة المثلثية العليا:** هي مصفوفة مربعة كل عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي صفرية.

ب- **المصفوفة المثلثية السفلى:** هي مصفوفة مربعة كل عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي صفرية.

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من النوع 3×3 وهي مصفوفة مثلثية عليا.

والمصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من النوع 4×4 وهي مصفوفة مثلثية سفلى.

7- المصفوفة النظامية:

إذا كانت $A = \left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة من النوع $n\times n$ نقول عن هذه المصفوفة بأنها **مصفوفة نظامية** (غير شاذة) إذا كان معينها الذي نرمز له بالرمز $|A|$ أو $\det A$ لا يساوي الصفر أي $\det A = |A| \neq 0$

أما إذا كان $|A| = 0$ فإننا نقول عن المصفوفة A بأنها **شاذة** أو غير نظامية.

8- المعينات من النوع $n\times n$

معين المصفوفة المربعة A من النوع $n\times n$ أو اختصاراً من النوع n يكتب بالشكل التالي:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

تعريف:

صغير العنصر a_{ij} هو معين ينتج من المعين $|A|$ وذلك بحذف السطر i والعمود j منه ومسبوقاً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ ونرمز له بالرمز A_{ij}

هذا يعني أن: $A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$

يمكن إيجاد قيمة المعين $|A|$ وذلك بنشره وفق أحد الأسطر أو أحد الأعمدة كما يلي:

قيمة المعين $|A|$ عند نشره وفق السطر i هي:

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+....+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

قيمة المعين $|A|$ عند نشره وفق العمود j هي:

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+....+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

مثال(8):

احسب قيمة معين المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

الحل:

ننشر المعين $|A|$ وفق الصف الأول فنجد:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}+(2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+(0)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=(1+3)+(2)(-1)(-1-6)$$

$$=4-2(-7)=4+14=18$$

3-3- خواص المعينات:

1) لا تتغير إشارة المعين (قيمة المعين) إذا جعلنا أسطره أعمدة وأعمدته أسطر مع المحافظة على نفس الترتيب.
2) إذا بادلنا بين سطرين أو عمودين فإن قيمة المعين تتغير إشارته فقط.
3) إذا ضربنا جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة في معين Δ بعدد ثابت k فإن قيمة المعين الناتج هي $k\,\Delta$
4) تنعدم قيمة المعين في الحالات الآتية:
   أ- إذا تساوى في المعين سطران أو عمودان.
   ب- إذا كانت عناصر أي سطر أو أي عمود أصفاراً.

ت- إذا كانت عناصر أي سطر أو أي عمود هي مضاعفات عناصر سطر آخر أو عمود آخر.

5) لا تتغير قيمة المعين إذا أضفنا إلى عناصر أحد الأسطر أو (الأعمدة) عناصر سطر آخر (عمود آخر) بعد ضربها بعدد ثابت k

6) إذا كان كل عنصر من عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة في معين يتألف من مجموع حدين فإن المعين يُرد إلى مجموع مُعينين.

مثال(9):

باستخدام خواص المُعينات أوجد قيمة المعين:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$$

الحل:

بطرح عناصر العمود الأول من عناصر العمود الثاني وكذلك بطرح عناصر العمود الثاني من عناصر العمود الثالث نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 16-13 & 19-16 \\ 14 & 17-14 & 20-17 \\ 15 & 18-15 & 21-18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3-4- مقلوب المصفوفة المربعة النظامية:

بفرض $A = \left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة من النوع n

وبفرض $\det A = |A| \neq 0$

لإيجاد مقلوب المصفوفة A نجري الخطوات التالية:

1- نوجد أولاً معين المصفوفة A أي نوجد $|A|$

2- نوجد مصفوفة الصغائر التالية:

$$\left[A_{ij}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ثم نوجد منقول المصفوفة $\left[A_{ij}\right]$

أي نوجد $\left[A_{ij}\right]^T$ التي نرمز لها بالرمز $adjA$ أو $\Gamma(A)$

أي $\Gamma(A)=adjA=\left[A_{ij}\right]^T$

وتسمى **المصفوفة المرافقة** (المساعدة أو الملحقة)

3- مقلوب المصفوفة A الذي نرمز له بالرمز A^{-1} يعطى بالعلاقة التالية:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA$$

ويحقق ما يلي: $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$

مثال(10):

أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

إذن المصفوفة نظامية ويمكن إيجاد مقلوبها A^{-1}

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad , \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad , \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

إذن مصفوفة الصغائر هي:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة المرافقة هي:

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة A هو :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&2&2\\1&1&3\\4&0&4\end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد كما يلي:

$$A^{-1}A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&2&2\\1&1&3\\4&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-1\\-1&2&0\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3$$

تعريف:

بفرض $A=\left[a_{ij}\right]$ من النوع $m\times n$

معين أي مصفوفة جزئية مربعة في المصفوفة A يسمى بالتعريف **بالمعين الأصغر**.

3-5- تعريف رتبة مصفوفة:

نقول عن العدد r إنه يمثل **رتبة المصفوفة** $A=\left[a_{ij}\right]$ من النوع $m\times n$ إذا حقق الشرطين التاليين:

1- يوجد على الأقل معين أصغر واحد من النوع r لا يساوي الصفر.

2- كل معين أصغر من النوع $r+1$ وما فوق يساوي الصفر.

نرمز لرتبة المصفوفة A بالرمز $ran(A)$ ونكتب $ran(A)=r$ وتكون رتبة المصفوفة المربعة النظامية تساوي نوعها.

مثال(11):

عين رتبة المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 6 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

الحل:

لنحسب معين هذه المصفوفة حيث إن هذه المصفوفة من النوع 3

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}3 & -4 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 6 & 0 & 7\end{vmatrix}=21-48+0-(0+0-140)$$

$$=-27+140=113\neq 0$$

هذا يعني أن المصفوفة نظامية ورتبتها $ran(A)=3$

مثال(12):

عين رتبة المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 4 & 6\\ 2 & 6 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

الحل:

إن كل المعينات التي يمكن تشكيلها من النوع 3 من هذه المصفوفة قيمتها تساوي الصفر.

بينما الصغير $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

ومنه فإن $ran(A) = 2$

3-6-التحويلات الأولية (العمليات البسيطة) على المصفوفات:

العمليات التالية تسمى **تحويلات أولية** على المصفوفات:

1. المبادلة بين سطرين من أسطر المصفوفة فمثلاً $R_i \leftrightarrow R_j$
2. ضرب جميع عناصر أحد الأسطر بعدد لا يساوي الصفر أي $a \neq 0; aR_i$
3. إضافة أحد الأسطر إلى سطر آخر بعد ضربه بعدد ما لا يساوي الصفر أي $aR_i \mp R_j$ حيث $a \neq 0$

تعريف:

تكون المصفوفتان A, B متكافئتين إذا كانت إحداهما ناتجة عن الأخرى بتطبيق تحويلات أولية ونكتب $A \sim B$

ملاحظة:

بالاعتماد على التحويلات الأولية يمكن تعيين رتبة المصفوفة حيث تكون رتبة المصفوفة تمثل عدد الأسطر في هذه المصفوفة والمستقلة خطياً.

مثال(13):

عين باستخدام التحويلات الأولية رتبة المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2\\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

الحل:

نطبق التحويلات الأولية لجعل عناصر العمود الأول أصفاراً ما عدا العنصر الأول ثم نطبق التحويلات الأولية لجعل عناصر العمود الثاني أصفاراً ما عدا العنصر الأول من السطر الثاني وهكذا.....

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2\\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\overset{\substack{-R_1+R_2\\ -R_1+R_3}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2\\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{-2R_2+R_3\\ \frac{1}{2}R_2+R_4}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

إن رتبة المصفوفة A هي $ran(A)=2$

ونلاحظ أن الصغير $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2\neq 0$

والصغائر من النوع 3×3 تكون معدومة لأن السطر الثالث أصفار وكذلك الصغائر من النوع 4×4 معدومة أيضاً.

3-7- مقلوب مصفوفة نظامية باستخدام التحويلات الأولية:

بالاعتماد على التحويلات الأولية يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة النظامية $A=\left[a_{ij}\right]$ من النوع n وذلك بكتابة المصفوفة الموسعة: $\left[A:I_n\right]$

تم إجراء التحويلات الأولية على هذه المصفوفة للحصول على المصفوفة $\left[I_n:A^{-1}\right]$

مثال(14):

أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

باستخدام التحويلات الأولية.

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة ونجري التحويلات الأولية المناسبة كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\overset{\frac{1}{3}R_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-R_1+R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{2}{3}R_2+R_1 \\ \frac{4}{3}R_2+R_3 \\ -R_2+R_4}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-\frac{3}{5}R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{-\frac{2}{3}R_3+R_1 \\ -R_3+R_2 \\ -R_3+R_4}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right] \overset{-10R_4}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{2}{5}R_4+R_1 \\ \frac{1}{10}R_4+R_2 \\ -\frac{3}{5}R_4+R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right]$$

ومنه فإن مقلوب المصفوفة A المصفوفة A^{-1} التالية:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

3-8- المعادلات الخطية المتجانسة:

تعريف:

نقول عن جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بأنها جملة معادلات خطية **متجانسة** إذا كانت $B = [0]$ أي $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$

ومجموعة المعادلات الخطية المتجانسة $AX = O$ دوماً تملك الحل الصـــفري أي $X = [0]$

وإذا كان المعين $|A| \neq 0$ فإن لجملة المعادلات الخطية المتجانسة الحل الصفري فقط.

أما إذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل في جملة المعادلات الخطيـــة المتجانسة فإن لهذه الجملة حل غير الحل الصفري.

مثال(15):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل:

هذه جملة معادلات خطية متجانسة لإيجاد حل هذه الجملة نكتب مصفوفة الأمثال ونجري عليها التحولات الأولية المناسبة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \overset{5R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الصغير:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

ومنه فإن رتبة مصفوفة الأمثال A هي $r = 3$

وعدد المجاهيل $n = 4$

إذن $n > r$ هذا يعني أنه يوجد حل غير الصفري وجملة المعادلات الخطية المتجانسة هي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 - 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

إذن لدينا ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل هذا يعني أنه يوجد مجهول اختياري وليكن مثلاً x_4 ومنه يمكن أن نكتب:

$$x_3 = \frac{9x_4}{12} = \frac{3}{4}x_4$$

$$x_2 = -2x_3 + x_4 = -2(\frac{3}{4})x_4 + x_4 = -\frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 = -2(\frac{1}{2})x_4 + \frac{3}{4}x_4 - x_4 = \frac{3}{4}x_4$$

ومنه فإن حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة هو:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}x_4\\-\frac{1}{2}x_4\\\frac{3}{4}x_4\\x_4\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\\1\end{bmatrix}$$

كلما أعطينا المجهول الاختياري x_4 قيمة نحصل على حل وبالتالي فإن جملة المعادلات الخطية المتجانسة لها عدد كبير من الحلول.

مثال(16):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$\begin{aligned}3x_1-x_2&=0\\5x_1+x_2+2x_3&=0\\6x_1+7x_3&=0\end{aligned}$$

الحل:

نجري تحويلات أولية على مصفوفة الأمثال كما يلي:

$$\begin{bmatrix}3&-4&0\\5&1&2\\6&0&7\end{bmatrix}\overset{-\frac{5}{3}R_1+R_2}{\underset{-2R_1+R_3}{\sim}}\begin{bmatrix}3&-4&0\\0&-\frac{17}{3}&2\\0&8&7\end{bmatrix}\overset{-\frac{3}{17}R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \overset{-8R_2+R_3.}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 0 & \frac{167}{17} \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$x_2 - \frac{6}{17}x_3 = 0$$

$$\frac{167}{17}x_3 = 0$$

ومنه:

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{6}{17}x_3 = \frac{6}{17}(0) = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{3}x_2 = \frac{4}{3}(0) = 0$$

وهذا يعني أن جملة المعادلات الخطية المتجانسة لها الحل الصفري فقط.

مثال(17):

أوجد حل المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 - 3x_3 = 0$$

الحل:

نأخذ مصفوفة الأمثال ونجري عليها التحويلات التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \overset{-2R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-2x_2 + 2x_3 = 0$$

إذن لدينا معادلتان بثلاثة مجاهيل.

أي $n > r$ هذا يعني أنه يوجد حل غير الحل الصفري $(n = 3 \quad , \quad r = 2)$

إذن يوجد مجهول اختياري واحد وليكن x_3 مثلاً:

$$x_2 = x_3$$
$$x_1 = -x_2 + 4x_3 = -x_3 + 4x_3 = 3x_3$$

ومنه حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3-9- الطرق العددية لحل جملة المعادلات الخطية:

يمكن إيجاد حل جملة المعادلات الخطية $AX = B$، أي إيجاد قيم المجاهيل $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ بالاعتماد على الطرق العددية التالية:

3-9-1- طريقة مقلوب مصفوفة:

بفرض $AX = B$ جملة معادلات خطية، حيث $A = \left[a_{ij}\right]$ من النوع n

إذا كانت المصفوفة A نظامية أي $|A| \neq 0$، فإنه يمكن إيجاد مقلوبها A^{-1}.

نضرب طرفي المساواة $AX = B$ من اليسار بـ A^{-1} فنجد:

$$A^{-1}.AX = A^{-1}.B$$

وبما أن $A^{-1}A = I_n$ فإن $X = A^{-1}B$.

هذا يعني أنه من أجل حل جملة المعادلات الخطية يمكن أن نوجد A^{-1} ثم نعوض في العلاقة $X = A^{-1}B$ فنحصل على حل جملة المعادلات الخطية المطلوب.

مثال(18):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 19 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 + 7x_2 - x_3 &= 17 \end{aligned}$$

بطريقة مقلوب مصفوفة.

الحل:

نحسب معين الأمثال:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 56 + 12 - (-24 + 21 - 4)$$

$$= 71 - (-7) = 78 \neq 0$$

ثم نحسب مصفوفة الصغائر:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 20 \\ 30 & -27 & -9 \\ 6 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة المرافقة:

$$adjA = \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة A هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

بالتعويض بالعلاقة $X = A^{-1}B$ نجد:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} 78 \\ 156 \\ 234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3-9-2- طريقة كرامر:

وجدنا أن حل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بطريقة مقلوب مصفوفة يعطى بالعلاقة التالية: $X = A^{-1}B$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

نرمز لمعين مصفوفة الأمثال A بالرمز Δ أي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$

ونرمز بـــ Δ_i حيث $i = 1, 2, \dots, n$ للمعين الناتج من Δ بتبديل عمود الثوابت B بالعمود i أي أن:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ومنه يمكن أن نكتب:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

مثال (16):

بطريقة كرامر أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4$$

الحل:

نحسب معين الأمثال:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0$$

ثم نحسب المعينات:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -153$$

وبتطبيق طريقة كرامر نجد:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{153}{-153} = -1 \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{153}{-153} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-153} = 0 \quad , \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-153}{-153} = +1$$

الحل هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3-9-3- طريقة غاوس:

لحل جملة معادلات خطية $AX = B$ نستخدم التحويلات الأولية من أجل تحويل مصفوفة الأمثال A إلى مصفوفة مثلثية عليا أو إلى مصفوفة مثلثية سفلى. من أجل ذلك نأخذ المصفوفة الموسعة $[A : B]$ وباستخدام التحويلات

الأولية يمكن تحويل مصفوفة الأمثال A إلى مصفوفة مثلثية عليا أو إلى مصفوفة مثلثية سفلى كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\text{باستخدام التحويلات الأولية}}{}} \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\text{باستخدام التحويلات الأولية}}{}} \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & d_n \end{array}\right]$$

حيث $j = 1,2,...,n$, $i = 1,2,...,n$; d_i , c_{ij} ثوابت جديدة ناتجة بعد إجراء التحويلات الأولية على المصفوفة $[A : B]$ بعد ذلك نكتب جملة المعادلات المقابلة للمصفوفات الناتجة التي يكون حلها سهلاً بالتعويض التراجعي في حال المصفوفة مثلثية عليا أو بالتعويض التقدمي في حال المصفوفة مثلثية سفلى.

مثال (20):

أوجد بطريقة غاوس حل جملة المعادلات الخطية:

$$x_1 - x_2 = 2$$
$$2x_1 - 3x_2 = 10$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة, ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية عليا, ثم لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية سفلى كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{array}\right] \overset{-2R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

نكتب جملة المعادلات الخطية:

$$x_1 - x_2 = 2$$
$$-x_2 = 6$$

ومنه: $x_2 = -6$

$$x_1 = 2 + x_2 = 2 - 6 = -4$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \end{array}\right] \overset{R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \end{array}\right]$$

نكتب جملة المعادلات الخطية:

$$\frac{1}{3}x_1 = -\frac{4}{3}$$
$$-\frac{2}{3}x_1 + x_2 = -\frac{10}{3}$$

ومنه: $x_1 = -4$

$$x_2 = -\frac{10}{3} + \frac{2}{3}x_1 = -\frac{10}{3} + (\frac{2}{3})(-4) = -\frac{18}{3} = -6$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

مثال (21):

باستخدام طريقة غاوس أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + 5x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة, ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية سفلى كما يلي:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \overset{\substack{-\frac{5}{3}R_3+R_2 \\ -R_3+R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & -4 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\overset{-2R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{10}{3} & 0 & 0 & 10 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

نكتب جملة المعادلات:

$$\frac{10}{3}x_1 = 10$$

$$-\frac{5}{3}x_1 + x_2 = -7$$

$$x_1 + 3x_3 = 6$$

ومنه:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{5}{3}x_1 - 7 = 5 - 7 = -2$$

$$3x_3 = 6 - x_1 = 6 - 3 = 3 \Rightarrow x_3 = 1$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (22):

بطريقة غاوس أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$$

$$8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12$$

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية عليا كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3 \\ -\frac{3}{2}R_1+R_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{-3R_2+R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{4}R_3+R_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

نكتب جملة المعادلات الخطية:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$
$$-x_2 + x_3 = -2$$
$$-2x_3 = 2$$
$$\frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2}$$

ومنه: $x_3 = -1 \quad , \quad x_4 = -1$

$$-x_2 = -x_3 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$$
$$2x_1 = 4 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 - 2 - 1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

3-9-3-1- حساب معين مصفوفة باستخدام طريقة غاوس:

إذا كان عدد المعادلات الخطية كثيراً فإن عملية نشر المعينات لا تعود سهلة من أجل ذلك يمكن استخدام طريقة غاوس وتحويل المصفوفة المربعة إلى مصفوفة مثلثية عليا, أو إلى مصفوفة مثلثية سفلى عندئذ فإن قيمة المعين تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

مثال (23):

باستخدام طريقة غاوس احسب قيمة المعين التالي:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\2 & -2 & 3 & -3\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

الحل:

نجري تحويلات أولية على المعين كما يلي:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\2 & -2 & 3 & -3\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix}\underset{\sim}{\overset{-2R_1+R_2\\-R_1+R_3\\-R_1+R_4}{}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 2 & -1 & 1\\0 & 0 & 2 & 4\end{vmatrix}\underset{\sim}{\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{}}$$

$$(-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\0 & 2 & -1 & 1\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 2 & 4\end{vmatrix}\overset{2R_3+R_4}{\sim}(-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\0 & 2 & -1 & 1\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

ومنه فإن قيمة المعين هي:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\2 & -2 & 3 & -3\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\0 & 2 & -1 & 1\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=4$$

3-9-4- طريقة غاوس – جوردان:

في هذه الطريقة نجري تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال المربعة A في جملة المعادلات الخطية $AX=B$ إلى مصفوفة قطرية (أي مصفوفة مثلثية عليا وسفلى في آن واحد).

مثال (24):

أوجد بطريقة غاوس – جوردان حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned}2x_1+3x_2-x_3&=5\\4x_1+4x_2-3x_3&=3\\-2x_1+3x_2-x_3&=1\end{aligned}$$

الحل:

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة قطرية كما يلي:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right] \overset{3R_2+R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right] \overset{\substack{-\frac{1}{5}R_3+R_1 \\ -\frac{1}{5}R_3+R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right] \overset{\frac{2}{3}R_2+R_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

ومنه:

$$2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$-2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = 2$$
$$-5x_3 = -15 \Rightarrow x_3 = 3$$

حل جملة المعادلات الخطية هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مثال (25):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + 3x_4 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$

بطريقة غاوس – جوردان.

الحل:

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة قطرية كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \\ R_1+R_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \overset{\substack{-4R_2+R_3 \\ 3R_2+R_4}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{13}R_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{-3R_4+R_1 \\ 5R_4+R_2 \\ -13R_4+R_3}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}R_3+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2+R_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ومنه:

$$x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 1$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

يمكن تعيين مقلوب مصفوفة بالاعتماد على طريقة غاوس – جوردان.

نعلم أنه من أجل المصفوفة النظامية فإن: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

ومنه من أجل إيجاد مقلوب المصفوفة A نوسع المصفوفة A بالمصفوفة الواحدية I_n ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل المصفوفة A إلى مصفوفة واحدية I_n فنحصل على A^{-1}.

مثال (26):

أوجد بطريقة غاوس – دوردان مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 18 - 12 - (8 - 12 - 18)$$

$$= -2 - (-22) = -2 + 22 = 2 \neq 0$$

هذا يعني أن المصفوفة A نظامية ولها مقلوب لذلك نجري التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة التالية:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{3R_2+R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{-\frac{1}{5}R_3+R_1 \\ -\frac{1}{5}R_3+R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 2 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{3}{2}R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{1}{2}R_1 \\ -\frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{1}{5}R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

ومنه فإن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (27):

أوجد بطريقة غاوس – جوردان مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

إذن المصفوفة A نظامية, ولها مقلوب من أجل ذلك نجري التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة التالية:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{-2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ -R_1+R_4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{2R_3+R_4}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{1}{2}R_2 \\ -R_3 \\ \frac{1}{2}R_4}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{\substack{R_4+R_1 \\ -\frac{1}{2}R_4+R_2 \\ -R_4+R_3}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{\substack{-2R_3+R_1 \\ \frac{1}{2}R_3+R_2}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{21}{2} & 5 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{R_2+R_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ومنه:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{9}{2} & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3-9-5- طريقة كراوت:

وجدنا أنه لحل جملة المعادلات الخطية $AX=B$ نحول مصفوفة الأمثال A إلى مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى وفي هذه الطريقة نكتب مصفوفة الأمثال A بالشكل $A=LU$ حيث L مصفوفة مثلثية سفلى و U مصفوفة مثلثية عليا وكل من L,U من نوع المصفوفة A عندئذ فإن حل جملة المعادلات الخطية $AX=B$ يكافئ حل جملة المعادلات الخطية $LUX=B$ ويمكن إيجاد هذا الحل على مرحلتين:

المرحلة الأولى حل الجملة $LY=B$

المرحلة الثانية حل الجملة $UX=Y$

حيث كل من الجملتين السابقتين مصفوفة الأمثال مصفوفة مثلثية وحل الجملة يكون سهلاً.

وتبقى الخطوة المهمة في هذه الطريقة هي كيفية كتابة المصفوفة A بالشكل $A=LU$ من أجل ذلك نكتب هذه العلاقة بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن كلاً من L,U تحـوي $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$ عنصـراً مجهولاً ولدينا n^2 علاقة لتعيين المجاهيل n^2+n هذا يعني أنه يمكن إعطاء n من المجاهيل قيماً اختيارية ونختار عادة هذه القيم بأحد الأشكال التالية:

1- نختار $l_{11}=l_{22}=....=l_{nn}=1$

2- نختار $u_{11}=u_{22}=....=u_{nn}=1$

ويمكن اختيار n من المجاهيل بأشكال متعددة أخرى.

مثال (28):

اكتب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

بالشكل LU.

الحل:

يمكن كتابة المصفوفة A بالشكل LU وبأشكال متعددة كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\6&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$$

لنفرض أننا اخترنا $u_{11}=u_{22}=....=u_{nn}=1$

عندئذ يمكن الحصول على العلاقات التي تعين المجاهيل l_{ij},u_{ij} للمصـــفوفتين L,U كما يلي:

من أجل $j=1$ فإن $l_{i1}=a_{i1}$ حيث $i=1,2,....,n$

ومن أجل $i=1$ فإن $u_{1j}=\frac{a_{1j}}{l_{11}}=\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ حيث $j=1,2,....,n$

$$l_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj} \quad \text{حيث} \quad i\geq j>1$$

$$u_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}}{l_{ij}} \quad \text{حيث} \quad i<j$$

ملاحظة:

ليس من الضروري أن نستطيع كتابة أي مصفوفة نظامية كجـداء مصـفوفتين مثلثيتين في الحالة العامة، فالمصفوفة النظامية $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ لا يمكن كتابتهـا بالشكل LU.

مثال (29):

بطريقة كراوت أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned}&10x_1-7x_2=7\\&-3x_1+2x_2+6x_3=4\\&5x_1-x_2+5x_3=6\end{aligned}$$

الحل:

نأخذ مصفوفة الأمثال:

$$A=\begin{bmatrix}10 & -7 & 0\\ -3 & 2 & 6\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

ونكتبها بالشكل: $A=LU$ وهذا يكافئ:

$$\begin{bmatrix}10 & -7 & 0\\ -3 & 2 & 6\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

وبالاعتماد على العلاقات السابقة نجد:

$$l_{11}=a_{11}=10\ ,\ l_{21}=a_{21}=-3\ ,\ 1_{31}=a_{31}=5$$

$$u_{11}=\frac{a_{11}}{a_{11}}=1 \quad , \quad u_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=-\frac{7}{10} \quad , \quad u_{13}=\frac{a_{13}}{a_{11}}=0$$

$$l_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=2-(-3)(-\frac{7}{10})=-\frac{1}{10}$$

$$u_{23}=\frac{a_{23}-l_{21}u_{13}}{l_{22}}=\frac{6-(-3)(0)}{-\frac{1}{10}}=-60$$

$$l_{32}=a_{32}-l_{31}u_{12}=(-1)-5(-\frac{7}{10})=\frac{25}{10}$$

$$l_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=5-5(0)-(\frac{25}{10})(-60)=155$$

ومنه:

$$A=LU=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{25}{10} & 155 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنوجد أولاً حل الجملة $LY=B$ وهذا يكافئ:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{25}{10} & 155 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات:

$$10y_1 = 7$$
$$-3y_1 - \frac{1}{10}y_2 = 4$$
$$5y_1 + \frac{25}{10}y_2 + 155y_3 = 6$$

ومنه:

$$y_1 = \frac{7}{10} \ , \ y_2 = -61 \ , \ y_3 = 1$$

ثم نوجد حل الجملة $UX = Y$ وهذا يكافئ:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ -61 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات:

$$x_1 - \frac{7}{10}x_2 = \frac{7}{10}$$
$$x_2 - 60x_3 = -61$$
$$x_3 = 1$$

ومنه:

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = -1 \ , \ x_3 = 1$$

إذن حل جملة المعادلات الخطية هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

بالاعتماد على طريقة كراوت يمكن إيجاد مقلوب مصفوفة نظامية وذلك بحل الجملة: $LUX = I_j$

n مرة من أجل n طرفاً ثانياً حيث I_j هي أعمدة المصفوفة الواحدية I_n وَ $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$

مثال (30):

بطريقة كراوت أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 2 - (0 - 1 + 0) = 4 \neq 0$$

إذن المصفوفة A نظامية ويوجد لها مقلوب.

نكتب المصفوفة A بالشكل LU كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = a_{11} = 1 \ , \ l_{21} = a_{21} = 2 \ , \ 1_{31} = a_{31} = 0$$

$$u_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1 \ , \ u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 0 \ , \ u_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - 2(0) = 1$$
$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{-1-(2)(1)}{1} = -3$$
$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 1 - (0)(0) = 1$$
$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 1 - (0)(1) - (1)(-3) = 4$$

بالتعويض نجد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

لإيجاد مقلوب المصفوفة A نحل جملة المعادلات $AX = I_3$ وبما أن $A = LU$ نحل الجملة $LUX = I_3$

من أجل ذلك نوجد أولاً حل الجملة $LY = I_3$ وذلك كما يلي:

أولاً نحل الجملة $LY = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ فنجد:

$$y_1 = 1$$
$$2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2$$
$$y_2 + 4y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{2}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ وهو أول عمود من المصفوفة Y

ثانياً نحل الجملة $LY = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ فنجد:

$$y_1 = 0$$
$$2y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$$
$$y_2 + 4y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -\frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ وهو ثاني عمود للمصفوفة

ثالثاً نحل الجملة $LY = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ فنجد:

$$y_1 = 0$$
$$2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$
$$y_2 + 4y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ وهو ثالث عمود للمصفوفة Y وبالتالي المصفوفة Y هي:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بعد أن أوجدنا المصفوفة Y نحل الجملة $UX = Y$ من أجل ذلك نوجد أولاً حل الجملة $UX = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ فنجد:

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 - 3x_3 = -2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ وهو أول عمود للمصفوفة X أي أول عمـــود للمصـــفوفة A^{-1}.

ثانياً نحل الجملة $UX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ فنجد:

$$x_3 = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 - 3x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$$

$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ وهو ثاني عمود للمصفوفة A^{-1}

ثالثاً نحل الجملة $UX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ فنجد:

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4}$$

إذن الحل هو $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ وهو ثالث عمود للمصفوفة A^{-1} وأخيراً نجد:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

3-10- طرق التكرار لحل جملة معادلات خطية:

الطرق التي تعرفنا إليها تسمى **الطرق المباشرة**, وعندما يكون عدد المجاهيل في جملة المعادلات الخطية كثيراً فإن تطبيق الطرق المباشرة يصبح ليس بالأمر السهل, في مثل هذه الحالات سوف نستخدم طرقاً أخرى تسمى الطرق **غير المباشرة** أو **الطرق التكرارية** حيث تعتمد هذه الطرق على اختيار مسبق للتقريب الأولي للحل.

فإذا أخذنا قيمة تقريبية للحل وحصلنا على قيم جديدة باستخدام الطرق التكرارية فإننا نحصل على متتاليات للحلول, هذه المتتاليات قد تكون متقاربة لحل جملة المعادلات الخطية المطلوبة وقد يكون تقاربها بطيئاً من أجل دراسة تقارب متتاليات التكرار نحتاج إلى مقياس معين, ويمكن اعتبار النظيم هو المقياس، وفي بعض الحالات قد تكون المتتاليات متباعدة.

3-11- نظيم مصفوفة وحساب الأخطاء:

نظيم مصفوفة $A=[a_{ij}]$ من النوع n هو في الحالة العامة عدد حقيقي نرمز له بالرمز $\|A\|$ ويحقق الشروط التالية:

1- $\|A\|\geq 0$ كما أن $\|A\|=0$ إذا وفقط إذا كانت $A=0$

2- $\|kA\|=|k|\|A\|$ حيث k عدد حقيقي ويكون $\|-A\|=\|A\|$

3- $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$ حيث $B=[b_{ij}]$ من النوع n

4- $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

وبشكل عام $\|A^p\|\leq\|A\|^p$ حيث p عدد طبيعي.

ومن **النظم المعروفة بالنسبة للمصفوفات:**

$$\|A\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأعمدة

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأسطر

$$\|A\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2}$$

النظيم الاقليدي

مثال (31):

لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -5 & 6\\ 4 & 1 & 3\\ 7 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

احسب $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_2$

الحل:

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le 3}\left(\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|\right)=\max(11,8,18)=18$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\left(\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|\right)=\max(11,8,18)=18$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(a_{ij})^2}=\sqrt{0+25+36+16+1+9+49+4+81}$$

$$=\sqrt{221}=14.866$$

في الحالة الخاصة، إذا كان لدينا الشعاع:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

يمكن اعتبار $\|X\|$ نظيماً لهذا الشعاع ومن **النظم المعروفة** ما يلي:

$$\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|x_1|+|x_2|+....+|x_n|$$

مجموع القيمة المطلقة

$$\|X\|_\infty=\max_{1\le i\le n}(|x_i|)=\max(|x_1|,|x_2|,....,|x_n|)$$

نظيم القيمة المطلقة العظمى

$$\|X\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+.....+x_n^2}$$

النظيم الاقليدي

مثال (32):

احسب $\|X\|_2, \|X\|_\infty, \|X\|_1$ للشعاع $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\|X\|_1 = |3| + |-4| + |1| + |0| = 8$$
$$\|X\|_\infty = \max(|3|, |-4|, |1|, |0|) = 4$$
$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} = \sqrt{9+16+1+0} = \sqrt{26}$$

بعد التعرف إلى نظيم مصفوفة ونظيم شعاع وبفرض A مصفوفة مربعة و X شعاع حيث A مصفوفة من النوع n و X شعاع من النوع n فإن:

$$\|AX\|_1 \le \|A\|_1 \|X\|_1$$
$$\|AX\|_\infty \le \|A\|_\infty \|X\|_\infty$$
$$\|AX\|_2 \le \|A\|_2 \|X\|_2$$

ملاحظة:

أثناء حل جمل المعادلات الخطية فإن أي خطأ صغير قد يؤدي إلى تغيير كبير في الحل وكذلك فإن أخطاء التدوير تتراكم في بعض الحالات وخاصة إذا كانت مصفوفة الأمثال قريبة من المصفوفة الشاذة, لذلك يمكن تصنيف جمل المعادلات الخطية كما يلي:

1- جمل ضعيفة الشرطية: هذه الجمل يكون فيها معين مصـــفوفة الأمثـــال قريباً من معين المصفوفة الشاذة.

2- جمل جيدة الشرطية: في هذه الجمل يكون معين مصفوفة الأمثال بعيداً عن الصفر.

3-12- تقدير الأخطاء في حل جملة معادلات خطية:

بفرض X_c هي القيمة التقريبية للحل فإننا نعرف الخطأ المطلـــق لحـــل جملـــة معادلات خطية بأنه النظيم:

$$\|X_c - X\| = \|e\|$$

كما نعرف الخطأ النسبي بالشكل التالي:

$$\frac{\|X_c - X\|}{\|X\|} = \frac{\|e\|}{\|X\|}$$

مثال (33):

احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي بفـــرض $X_c = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ تقريـــب للشـــعاع $X = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 1.33 \\ 1.21 \end{bmatrix}$.

الحل:

$$e = X_c - X = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.54 \\ 1.33 \\ 1.21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

ومنه الخطأ المطلق هو:

$$\|e\|_1 = \|X_c - X\|_1 = |-0.04| + |-0.03| + |-0.01| = 0.08$$

ويكون الخطأ النسبي:

$$\frac{\|e\|_1}{\|X\|_1} = \frac{0.08}{4.08} = 0.019$$

ولتقدير الخطأ نعرف ما يلي:

1- إذا كانت X_c هي القيمة التقريبية لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ فإننا نعرف الباقي أو شعاع الخطأ بأنه الشعاع r حيث:

$$r = AX_c - B$$

2- ونعرف العدد الشرطي لمصفوفة الذي نرمز له بالرمز $cond(A)$ بالعلاقة التالية:

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

عندئذ بفرض X_c الحل التقريبي للمعادلة $AX = B$ فإن شعاع الخطأ e يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$r = AX_c - B = AX_c - AX = A(X_c - X) = Ae$$

أي: $r = Ae$

ومنه شعاع الخطأ $e = A^{-1}r$

ومن أجل تعيين الخطأ المطلق نحسب نظيم الشعاع e كما يلي:

$$\|e\| \le \|A^{-1}\|\|r\|$$

$$\|r\| \le \|A\|\|e\|$$

ومنه:

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \le \|e\| \le \|A^{-1}\|\|r\| \qquad (1)$$

ولتعيين الخطأ النسبي نعين أولاً نظيم X من العلاقتين:

$$X = A^{-1}B \quad , \quad AX = B$$

فنجد:

$$\|B\| \le \|A\|\|X\|$$
$$\|X\| \le \|A^{-1}\|\|B\|$$

ومنه:

$$\frac{\|B\|}{\|A\|} \le \|X\| \le \|A^{-1}\|\|B\| \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و(2) نعين الخطأ النسبي كما يلي:

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|B\|} \le \frac{\|e\|}{\|X\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|B\|}$$

أو:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|B\|} \le \frac{\|e\|}{\|X\|} \le cond(A)\frac{\|r\|}{\|B\|}$$

هذا يعني أن الخطأ النسبي لا يتجاوز القيمة $\frac{\|r\|}{\|B\|}$ مضروبة بالعدد الشرطي لـذا فإن الباقي r لا يعطي دوماً معلومات كافية عن دقة الحل وذلك حين تكون قيمة العدد الشرطي كبيرة، بينما يصبح r مقياساً جيداً للدقة حين تكون قيمة العدد الشرطي قريبة من الواحد.

ملاحظة:

نعلم أنه في حالة معادلة غير خطية $f(x)=0$ نبحث عن تابع تكرار يحقق العلاقة $x=g(x)$ ونطبق العلاقة التكرارية $x_{n+1}=g(x_n)$ حيث $n=1,2,....$

.

وبشكل مشابه لحل جملة معادلات خطية $AX=B$ فإننا نبحث عن مصفوفة تكرار تحقق العلاقة: $X=\alpha X+\beta$

ونطبق العلاقة التكرارية $X^{n+1}=\alpha X^{n}+\beta$

حيث نبدأ من قيمة ما X^{0} ثم نحسب $X^{1}=\alpha X^{0}+\beta$

من جديد نحسب $X^{2}=\alpha X^{1}+\beta$ وهكذا .....

ومنه فإننا نحصل على التقريبات المتتالية:

$$X^{0},X^{1},X^{2},.....,X^{n},.....$$

فإذا كانت لهذه التقريبات المتتالية نهاية أي $X=\lim\limits_{n\to\infty}X^{n}$ فإن هذه النهاية هي حل لجملة المعادلات الخطية $X=\alpha X+\beta$ وبالتالي هذه النهاية هي حل لجملة المعادلات الخطية $AX=B$ وذلك لأن:

$$\lim_{n\to\infty}X^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(\alpha X^{n}+\beta)=\alpha\lim_{n\to\infty}X^{n}+\beta=\alpha X+\beta$$

أي: $X=\alpha X+\beta$

ويوجد عدد كبير من **الطرق التكرارية** لحل المعادلات الخطية من هذه الطرق:

3-12-1- طريقة جاكوبي:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX=B$ وبفرض أن العناصر $a_{ii}\neq 0$ حيث $i=1,2,....,n$

نكتب جملة المعادلات الخطية $AX=B$ بالتفصيل:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

هذه الجملة يمكن كتابتها من جديد بالشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots\ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \ldots\ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\
x_3 &= \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 - \ldots\ldots - \frac{a_{3n}}{a_{33}}x_n \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots\ldots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_n
\end{aligned}
$$

إذا رمزنا $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$

$j = 1,2,\ldots,n$, $i = 1,2,\ldots,n$ من أجل $i \neq j$

و $\alpha_{ij} = 0$ عندما $i = j$

فإنه يمكن كتابة جملة المعادلات كما يلي:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\
x_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\
x_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{3n}x_n + \beta_3 \\
&\vdots \\
x_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{nn-1}x_n + \beta_n
\end{aligned}
$$

حيث: $\alpha_{ij} = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$

وبفرض المصفوفتين:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn-1} 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة بالشكل المصفوفة التالي:

$$X = \alpha X + \beta$$

ويمكن كتابة العلاقة التكرارية بالشكل التالي:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$$

وهذه العلاقة تسمى **طريقة جاكوبي** حيث $\alpha_{ij} = 0$, $i = 1,2,\dots,n$

$k = 1,2,\dots$

أو بالشكل التالي:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{a_{ii}} x_j$$

مثال (34):

بطريقة جاكوبي أوجد حل جملة المعادلات:

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$3x_1 + x_2 = 0$$

واحسب العدد الشرطي ثم احسب الخطأ المطلق وشعاع الخطأ حيث $X^0 = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1.01 \end{bmatrix}$.

الحل:

نحسب α,β حيث $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & -\frac{2}{1}\\ -\frac{3}{1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad \beta=\begin{bmatrix}\frac{3}{1}\\ \frac{0}{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

ونطبق العلاقة التكرارية $X^{n+1}=\alpha X^{n}+\beta$ فنجد:

$$X^{1}=\alpha X^{0}+\beta=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.01\\ 1.01\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.98\\ -3.03\end{bmatrix}$$

$$X^{2}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.98\\ -3.03\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.06\\ -2.94\end{bmatrix}$$

$$X^{3}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9.06\\ -2.94\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.88\\ -27.18\end{bmatrix}$$

لحساب العدد الشرطي نوجد A^{-1}

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

$$adjA=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|=(4)(\frac{4}{5})=\frac{16}{5}=3.2$$

حيث استخدمنا النظيم:

$$\|A\|_\infty = \max(3,4) = 4$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$$

نحسب الخطأ المطلق وشعاع الخطأ في التكرار الأول:

$$r = AX_c - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.98 \\ 3.03 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.08 \\ -0.09 \end{bmatrix}$$

$$e = A^{-1}r = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8.08 \\ -0.09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.58 \\ -4.83 \end{bmatrix}$$

ولنحسب أيضاً الخطأ المطلق وشعاع الخطأ في التكرار الثالث:

$$r = AX_c - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8.88 \\ 27.18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48.48 \\ -0.54 \end{bmatrix}$$

$$e = A^{-1}r = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -48.48 \\ -0.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.48 \\ -28.98 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن نظيم شعاع الخطأ المطلق هو:

$$\|e\|_\infty = 28.98$$

هذا يعني أن الخطأ المطلق كبير، أي أن متتالية التكرار غير متقاربة.

ملاحظة:

للحصول على أصغر نظيم نغير ترتيب المعادلات بحيث تصبح عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة الأمثال A أكبر ما يمكن.

- الشرط اللازم والكافي لتقارب طريقة التكرار هو أن يكون نظيم ما لمصفوفة التكرار أصغر من الواحد.

في المثال السابق كان $\|\alpha\|_\infty = 3$

هذا يعني أن اختيار مصفوفة التكرار α غير موفق.

من أجل اختيار مصفوفة تكرار يكون النظيم لها أصغر من الواحد نغير في ترتيب المعادلات كما يلي:

$$3x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

أي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $\|\alpha\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$

نظرية:

إن متتالية التكرار X^n التي نحصل عليها من تطبيق العلاقة التكرارية $X^{n+1} = \alpha X^n + \beta$ تتقارب من حل وحيد X لجملة المعادلات الخطية $AX = B$ إذا كان نظيم ما لمصفوفة التكرار α أقل من الواحد وذلك مهما كان الشعاع الابتدائي X^0.

البرهان:

بفرض $X^0, X^1, X^2, ...$ متتالية التكرار التي نحصل عليها من العلاقة التكرارية $X^{n+1} = \alpha X^n + \beta$ وبفرض أن $\|\alpha\| < 1$ ولنبرهن أن للمعادلة $X = \alpha X + \beta$ حلاً وحيداً.

ولتحقيق ذلك يكفي أن نبرهن أن للمعادلة المتجانسة $X = \alpha X$ الحل الصفري فقط.

إذا كان X حلاً للمعادلة المتجانسة $X = \alpha X$ فإن $0 \le \|X\| \le \|\alpha\| \|X\|$

وبما أن $\|\alpha\| < 1$ فإن العلاقة الأخيرة لا تتحقق إلا إذا كان $\|X\| = 0$ أي إذا كان $X = 0$.

لنبرهن أن المتتالية (X^n) تتقارب من الحل الوحيد X

لبرهان ذلك، من أجل أي قيمة n يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} X - X^n &= (\alpha X + \beta) - (\alpha X^n + \beta) = \alpha(X - X^{n-1}) = \\ &= \alpha[(\alpha X + \beta) - (\alpha X^{n-2} + \beta)] \\ &= \alpha[\alpha(X - X^{n-2})] = \alpha^2(X - X^{n-2}) \\ &= \alpha^2[(\alpha X + \beta) - (\alpha X^{n-3} + \beta)] = \alpha^3(X - X^{n-3}) \\ &= ..... = \alpha^n(X - X^0) \end{aligned}$$

ومنه:

$$X - X^n = \alpha^n(X - X^0)$$

نأخذ نظيم الطرفين فنجد:

$$0 \le \|X - X^n\| \le \|\alpha^n\| \|X - X^0\| \le \|\alpha\|^n \|X - X^0\|$$

وبما أن $\|\alpha\| < 1$ فإن $\|\alpha\|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ومنه فإن $\|X - X^n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

هذا يعني أن متتالية التكرار (X^n) تتقارب من الحل الوحيد X.

مثال (35):

اعتماداً على طريقة جاكوبي أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12.$$
$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

الحل:

نغير ترتيب المعادلات كما يلي:

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

$$x_1 = -\frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{12}{10}$$
$$x_2 = -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{12}{10}$$
$$x_3 = -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + \frac{12}{10}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

نأخذ $X^{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ثم نطبق العلاقة التكرارية $X^{n+1}=\alpha X^{n}+\beta$ فنجد:

$$X^{1}=\alpha X^{0}+\beta=\begin{bmatrix}0 & -0.1 & -0.1\\-0.1 & 0 & -0.1\\-0.1 & -0.1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2\\1.2\\1.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2\\1.2\\1.2\end{bmatrix}$$

$$X^{2}=\alpha X^{1}+\beta=\begin{bmatrix}0 & -0.1 & -0.1\\-0.1 & 0 & -0.1\\-0.1 & -0.1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.2\\1.2\\1.2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2\\1.2\\1.2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.24\\-0.24\\-0.24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2\\1.2\\1.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.96\\0.96\\0.96\end{bmatrix}$$

$$X^{3}=\alpha X^{2}+\beta=\begin{bmatrix}0 & -0.1 & -0.1\\-0.1 & 0 & -0.1\\-0.1 & -0.1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.96\\0.96\\0.96\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2\\1.2\\1.2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.192\\-0.192\\-0.192\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2\\1.2\\1.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.008\\1.008\\1.008\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن متتالية التكرار تتقارب من الحل:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

مثال (36):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي:

$$12x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$
$$x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 15$$
$$x_1 + x_2 + 12x_3 + x_4 = 15$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 15$$

الحل:

$$x_1 = -\frac{1}{12}x_2 - \frac{1}{12}x_3 - \frac{1}{12}x_4 + \frac{15}{12}$$
$$x_2 = -\frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{12}x_3 - \frac{1}{12}x_4 + \frac{15}{12}$$
$$x_3 = -\frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{12}x_2 - \frac{1}{12}x_4 + \frac{15}{12}$$
$$x_4 = -\frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{12}x_2 - \frac{1}{12}x_3 + \frac{15}{12}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \end{bmatrix} , \quad \beta = \begin{bmatrix} \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن:

$$\|\alpha\|_\infty = \max(\frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}) = \frac{1}{4} < 1$$

$$x_1^{k+1}=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_2^k-\frac{1}{12}x_3^k-\frac{1}{12}x_4^k$$
$$x_2^{k+1}=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^k-\frac{1}{12}x_3^k-\frac{1}{12}x_4^k$$
$$x_3^{k+1}=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^k-\frac{1}{12}x_2^k-\frac{1}{12}x_4^k$$
$$x_4^{k+1}=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^k-\frac{1}{12}x_2^k-\frac{1}{12}x_3^k$$

نأخذ $X^0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ بالتعويض نجد:

$$x_1^1=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_2^0-\frac{1}{12}x_3^0-\frac{1}{12}x_4^0=\frac{15}{12}$$
$$x_2^1=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^0-\frac{1}{12}x_3^0-\frac{1}{12}x_4^0=\frac{15}{12}$$
$$x_3^1=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^0-\frac{1}{12}x_2^0-\frac{1}{12}x_4^0=\frac{15}{12}$$
$$x_4^1=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^0-\frac{1}{12}x_2^0-\frac{1}{12}x_3^0=\frac{15}{12}$$

ومنه:

$$X^{1}=\begin{bmatrix}\frac{15}{12}\\ \frac{15}{12}\\ \frac{15}{12}\\ \frac{15}{12}\end{bmatrix}$$

$$x_1^2=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_2^1-\frac{1}{12}x_3^1-\frac{1}{12}x_4^1$$

$$=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}(\frac{15}{12})-\frac{1}{12}(\frac{15}{12})-\frac{1}{12}(\frac{15}{12})=0.937$$

$$x_2^2=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^1-\frac{1}{12}x_3^1-\frac{1}{12}x_4^1=0.937$$

$$x_3^2=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^1-\frac{1}{12}x_2^1-\frac{1}{12}x_4^1=0.937$$

$$x_4^2=\frac{15}{12}-\frac{1}{12}x_1^1-\frac{1}{12}x_2^1-\frac{1}{12}x_3^1=0.937$$

ومنه:

$$X^{2}=\begin{bmatrix}0.937\\ 0.937\\ 0.937\\ 0.937\end{bmatrix}$$

وبشكل مشابه نجد:

$$X^{3}=\begin{bmatrix}1.015\\1.015\\1.015\\1.015\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن متتالية التكرار تتقارب من الحل:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

3-12-2- طريقة غاوس – سيدل:

في هذه الطريقة كما فعلنا في طريقة جاكوبي نغير ترتيب المعادلات للحصـــول على مصفوفة تكرار يكون النظيم لها أصغر من الواحد ونوجد مصفوفة التكرار α والمصفوفة β

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & \alpha_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn-1}\,0\end{bmatrix}\quad;\quad \beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\vdots\\\beta_n\end{bmatrix}$$

ونوجد

$$x_1^1=-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^0-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^0-\dots\dots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^0+\frac{b_1}{a_{11}}$$

كما في طريقة جاكوبي.

ونجري التعديلات التالية على طريقة جاكوبي:

نوجد:

$$x_2^1 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^0 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^0 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

هذا يعني أن القيمة x_1^1 التي حصلنا عليها استخدمناها بدلاً من x_1^0 ثم نوجد:

$$x_3^1 = -\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1^1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2^1 - \frac{a_{34}}{a_{33}}x_4^0 - \dots - \frac{a_{3n}}{a_{33}}x_n^0 + \frac{b_3}{a_{33}}$$

هذا يعني أننا استخدمنا القيمتين x_1^1, x_2^1 بدلاً من القيمتين x_1^0, x_2^0 وهكذا..... نوجد:

$$x_n^1 = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^1 - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^1 + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

وبشكل عام، بفرض أننا وصلنا إلى التقريب ذي الرتبة k أي وصلنا إلى:

$$X^k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$$

فإن إيجاد التقريب ذي الرتبة $(k+1)$ حسب غاوس- سيدل يتم كما يلي:

$$x_1^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^k + \beta_1$$

$$x_2^{k+1} = \alpha_{21} x_1^{k+1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^k + \beta_2$$

$$\vdots$$

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{k+1} + \beta_n$$

حيث: $k = 0,1,2,.....$.

مثال (37):

أوجد بطريقة غاوس – سيدل حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$5x_1 + 2x_2 = 7$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$
$$x_2 + 2x_3 = 3$$

حيث $X^0 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

الحل:

$$x_1 = -\frac{2}{5}x_2 + \frac{7}{5}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{2}{4}$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\| = \max(\frac{2}{5},\frac{2}{4},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} < 1$$

$$x_1^1 = -\frac{2}{5}x_2^0 + \frac{7}{5} = -\frac{2}{5}(0.8) + \frac{7}{5} = 1.0800$$

$$x_2^1 = \frac{1}{4}x_1^1 + \frac{1}{4}x_3^0 + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}(1.0800) + \frac{1}{4}(1.2) + \frac{2}{4} = 1.0700$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{2}x_2^1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(1.0700) + \frac{3}{2} = 0.9650$$

ومنه:

$$X^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0800 \\ 1.0700 \\ 0.9650 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = -\frac{2}{5}x_2^1 + \frac{7}{5} = -\frac{2}{5}(1.0700) + \frac{7}{5} = 0.9720$$

$$x_2^2 = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^1 + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}(0.9720) + \frac{1}{4}(0.9650) + \frac{2}{4} = 0.9842$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(0.9842) + \frac{3}{2} = 1.0079$$

ومنه:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0.9720 \\ 0.9842 \\ 1.0079 \end{bmatrix}$$

وهكذا نتابع فنجد:

$$X^{3}=\begin{bmatrix}1.0063\\1.0664\\0.9668\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن متتالية التكرار تتقارب من الحل:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

مثال (38):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$10x_1-x_2+2x_3=6$$
$$-x_1+11x_2-x_3+3x_4=25$$
$$2x_1-x_2+10x_3-x_4=-11$$
$$3x_2-x_3+8x_4=15$$

بطريقة جاكوبي وبطريقة غاوس – سيدل ماذا تستنتج؟

الحل:

أولاً <u>بطريقة جاكوبي</u>:

$$x_1=\frac{1}{10}x_2-\frac{2}{10}x_3+\frac{6}{10}$$
$$x_2=\frac{1}{11}x_1+\frac{1}{11}x_3-\frac{3}{11}x_4+\frac{25}{11}$$
$$x_3=-\frac{2}{10}x_1+\frac{1}{10}x_2+\frac{1}{10}x_4-\frac{11}{10}$$
$$x_4=-\frac{3}{8}x_2+\frac{1}{8}x_3+\frac{15}{8}$$

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \beta=\begin{bmatrix} \frac{6}{10} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\|=\max(\frac{3}{10},\frac{5}{11},\frac{4}{10},\frac{4}{8})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}<1$$

نختار: $X^{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_1^1=\frac{1}{10}x_2^0-\frac{1}{5}x_3^0+\frac{6}{10}=\frac{6}{10}=0.6000$$

$$x_2^1=\frac{1}{11}x_1^0+\frac{1}{11}x_3^0-\frac{3}{11}x_4^0+\frac{25}{11}=2.2727$$

$$x_3^1=-\frac{2}{10}x_1^0+\frac{1}{10}x_2^0+\frac{1}{10}x_4^0-\frac{11}{10}=-1.1000$$

$$x_4^1=-\frac{3}{8}x_2^0+\frac{1}{8}x_3^0+\frac{15}{8}=1.8750$$

ومنه:

$$X^{1}=\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.6000 \\ 2.2727 \\ -1.1000 \\ 1.8750 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2=\frac{1}{10}x_2^1-\frac{1}{5}x_3^1+\frac{6}{10}=1.0473$$

$$x_2^2=\frac{1}{11}x_1^1+\frac{1}{11}x_3^1-\frac{3}{11}x_4^1+\frac{25}{11}=1.7159$$

$$x_3^2=-\frac{2}{10}x_1^1+\frac{1}{10}x_2^1+\frac{1}{10}x_4^1-\frac{11}{10}=-0.8052$$

$$x_4^2=-\frac{3}{8}x_2^1+\frac{1}{8}x_3^1+\frac{15}{8}=0.8852$$

$$X^{2}=\begin{bmatrix} 1.0473 \\ 1.7159 \\ -0.8052 \\ 0.8852 \end{bmatrix}$$

$$X^{3}=\begin{bmatrix} 0.9326 \\ 2.0533 \\ -1.0493 \\ 1.1000 \end{bmatrix}$$

وهكذا.....

$$X^{10} = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 1.9998 \\ -0.9998 \\ 0.9998 \end{bmatrix}$$

ثانياً بطريقة غاوس – سيدل:

$$x_1^k = \frac{1}{10}x_2^{k-1} - \frac{2}{10}x_3^{k-1} + \frac{6}{10}$$

$$x_2^k = \frac{1}{11}x_1^k + \frac{1}{11}x_3^{k-1} - \frac{3}{11}x_4^{k-1} + \frac{25}{11}$$

$$x_3^k = -\frac{2}{10}x_1^k + \frac{1}{10}x_2^k + \frac{1}{10}x_4^{k-1} - \frac{11}{10}$$

$$x_4^k = -\frac{3}{8}x_2^k + \frac{1}{8}x_3^k + \frac{15}{8}$$

نختار: $X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_1^1 = \frac{1}{10}x_2^0 - \frac{2}{10}x_3^0 + \frac{6}{10} = 0.6000$$

$$x_2^1 = \frac{1}{11}x_1^1 + \frac{1}{11}x_3^0 - \frac{3}{11}x_4^0 + \frac{25}{11} = 2.3272$$

$$x_3^1 = -\frac{2}{10}x_1^1 + \frac{1}{10}x_2^1 + \frac{1}{10}x_4^0 - \frac{11}{10} = -0.9873$$

$$x_4^1 = -\frac{3}{8}x_2^1 + \frac{1}{8}x_3^1 + \frac{15}{8} = 0.8789$$

ومنه:

$$X^{1}=\begin{bmatrix}0.6000\\2.3272\\-0.9873\\0.8789\end{bmatrix}$$

$$x_1^2=\frac{1}{10}x_2^1-\frac{2}{10}x_3^1+\frac{6}{10}=1.0300$$
$$x_2^2=\frac{1}{11}x_1^2+\frac{1}{11}x_3^1-\frac{3}{11}x_4^1+\frac{25}{11}=2.0370$$
$$x_3^2=-\frac{2}{10}x_1^2+\frac{1}{10}x_2^2+\frac{1}{10}x_4^1-\frac{11}{10}=-1.0140$$
$$x_4^2=-\frac{3}{8}x_2^2+\frac{1}{8}x_3^2+\frac{15}{8}=0.9844$$

ومنه:

$$X^{2}=\begin{bmatrix}1.0300\\2.0370\\-1.0140\\0.9844\end{bmatrix}$$

وهكذا.....

$$X^{5}=\begin{bmatrix}1.0001\\2.0000\\-1.0000\\1.0000\end{bmatrix}$$

نستنتج أن طريقة غاوس – سيدل أسرع تقارباً من طريقة جاكوبي.

3-13- تقدير الخطأ المرتكب باستخدام الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية:

بفرض أن كلاً من X^{n-1}, X^{n} حل تقريبي لجملة المعادلات الخطية $X = \alpha X + \beta$ فمن أجل $k \geq 1$ يمكن أن نكتب:

$$\left\|X^{n+k} - X^{n}\right\| = \left\|X^{n+k} - X^{n+k-1} + X^{n+k-1} - \dots\dots\dots + X^{n+1} - X^{n}\right\|$$
$$\leq \left\|X^{n+k} - X^{n+k-1}\right\| + \left\|X^{n+k-1} - X^{n+k-2}\right\| + \dots\dots + \left\|X^{n+1} - X^{n}\right\|$$

ولكن:

$$X^{n+2} - X^{n+1} = (\alpha X^{n+1} + \beta) - (\alpha X^{n} + \beta) = \alpha(X^{n+1} - X^{n})$$

ومنه:

$$\left\|X^{n+2} - X^{n+1}\right\| \leq \|\alpha\| \left\|X^{n+1} - X^{n}\right\|$$
$$\left\|X^{n+3} - X^{n+2}\right\| \leq \|\alpha\|^{2} \left\|X^{n+1} - X^{n}\right\|$$
$$\vdots$$
$$\left\|X^{n+k} - X^{n+k-1}\right\| \leq \|\alpha\|^{k-1} \left\|X^{n+1} - X^{n}\right\|$$

وبالتالي فإن:

$$\left\|X^{n+k} - X^{n}\right\| \leq \left\|X^{n+1} - X^{n}\right\| \left\|1 + \alpha + \alpha^{2} + \dots\right\|$$

وبما أن $\|\alpha\| < 1$ هو شرط تقارب متتالية التكرار حسب النظرية السابقة فإن:

$$1 + \alpha + \alpha^{2} + \dots = \frac{1}{1 - \|\alpha\|}$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $k \to \infty$ نجد: $\lim\limits_{k \to \infty} X^{n+k} = X$

وبالتالي يكون:

$$\left\|X - X^{n}\right\| \leq \frac{\left\|X^{n+1} - X^{n}\right\|}{1 - \|\alpha\|}$$

حيث إن X هو الحل الحقيقي أو الفعلي لجملة المعادلات الخطية و X^{n} هو الحل التقريبي.

ونعلم أن:

$$\left\|X^{n+1}-X^{n}\right\| \le \|\alpha\| \left\|X^{n}-X^{n-1}\right\|$$

ومنه:

$$\left\|X^{n+1}-X^{n}\right\| \le \|\alpha\|^{n} \left\|X^{1}-X^{0}\right\|$$

بالتعويض نجد:

$$\left\|X-X^{n}\right\| \le \frac{\|\alpha\|^{n}}{1-\|\alpha\|} \left\|X^{1}-X^{0}\right\|$$

وبفرض أن $X^{0}=\beta$ نجد:

$$\left\|X^{1}-X^{0}\right\| = \left\|\alpha X^{0}+\beta-\beta\right\| = \left\|\alpha X^{0}\right\| \le \|\alpha\| \|\beta\|$$

وبالتالي فإن قيمة الخطأ المرتكب تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left\|X-X^{n}\right\| \le \frac{\|\alpha\|^{n+1}}{1-\|\alpha\|} \|\beta\|$$

مثال (39):

عين عدد الخطوات الواجب إجراؤها لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية وبخطأ لا يتجاوز 10^{-3}:

$$\begin{aligned} 20x_1+2x_2-x_3&=25 \\ 2x_1+13x_2-2x_3&=30 \\ x_1+x_2+4x_3&=2 \end{aligned}$$

الحل:

$$x_1 = -\frac{2}{20}x_2 + \frac{1}{20}x_3 + \frac{25}{20}$$

$$x_2 = -\frac{2}{13}x_1 + \frac{2}{13}x_3 + \frac{30}{13}$$

$$x_3 = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{2}{4}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{2}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{bmatrix} \frac{25}{20} \\ \frac{30}{13} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\|_1 = \max(0.4038, 0.35, 0.2038) = 0.4038$$

$$\|\beta\|_1 = 4.0577$$

وبالتعويض بالعلاقة:

$$\|X - X^n\| \le \frac{\|\alpha\|^{n+1}}{1 - \|\alpha\|}\|\beta\|$$

نجد:

$$\|X - X^n\| \le \frac{(0.4038)^{n+1}}{1-(0.4038)}(4.0577) \le 10^{-3}$$

$$(0.4038)^{n+1} \le \frac{0.5962}{(4.0577)10^{-3}}$$

نأخذ اللوغاريتم العشري للطرفين فنجد:

$$(n+1)\log(0.4038) \le \log(0.5962) - \log(4.0577) - 3$$

$$-0.3938(n+1) \le -0.2246 - 0.6083 - 3$$

$$-0.3938(n+1) \le -3.8329$$

$$(n+1) \ge \frac{3.8329}{0.3938} = 9.7$$

ومنه: $n \ge 9$.

3-14- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من النوع n فإننا نعرف **القيمة الذاتية** λ لهذه المصفوفة بأنها العدد الذي يحقق المعادلة $AX = \lambda X$ بشرط أن يكون الشعاع X غير صفري, ويسمى الشعاع X **بالشعاع الذاتي** للمصفوفة الموافق للقيمة الذاتية λ .

المعادلة $AX = \lambda X$ التي تعرف القيمة الذاتية يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

حيث I هي المصفوفة الواحدية.

وهذه المعادلة تمثل n معادلة خطية متجانسة بـ n مجهول:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0
\end{aligned}$$

يوجد لدينا n معادلة خطية متجانسة، لكي يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حل غير الحل الصفري يجب أن يكون معين الأمثال مساوياً الصفر أي:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

وهذا المعين يمكن أن يكتب بالشكل التالي:

$$|A - \lambda I| = 0$$

وبنشر هذا المعين نحصل على كثيرة حدود (حدودية) من الدرجة n بالنسبة لـــ λ

$$p_n(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

وتسمى هذه المعادلة **بالمعادلة المميزة** للمصفوفة المربعة A أو **كثيرة الحـــدود المميزة** التي تكتب على بالشكل التالي:

$$p_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \dots\dots - p_n$$

حيث أن: $p_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$p_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$ مجموع كل المعينات الصغرى من النوع 2

$p_3 = \sum_{i<j<k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}$ مجموع كل المعينات الصغرى من النوع 3

وهكذا.....

$p_n = |A|$ أي p_n هو معين المصفوفة A.

مثال (40):

أوجد كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة A من النوع 3.

الحل:

بفرض A مصفوفة من النوع 3 أي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة لهذه المصفوفة هي:

$$p_3(\lambda)=\lambda^3-p_1\lambda^2+p_2\lambda-p_3=0$$

$$p_3(\lambda)=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2$$

$$+(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix})\lambda-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

إن عدد المعينات الصغرى من النوع k للمصفوفة A يعطى بالعلاقة التالية:

$$C_n^k=\frac{n(n-1).....(n-k+1)}{k!} \quad ; \quad k=1,2,.....,n$$

وعدد المعينات الصغرى من مختلف الأنواع للمصفوفة A يُعطى بالعلاقة التالية:

$$C_n^1+C_n^2+.....+C_n^n=2^n-1$$

ملاحظة:

إذا كان $0 \neq \alpha \in R$ وَ X شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A والمقابل للقيمة الذاتيـــة λ فإن أي شعاع ذاتي Y من الشكل $Y = \alpha X$ هو شعاع ذاتي للمصفوفة A أيضاً بالنسبة للقيمة الذاتية λ وذلك لأن:

$$AY = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X) = \lambda Y$$

مثال (41):

أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ثم عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A.

الحل:

كثيرة الحدود المميزة:

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - p_1\lambda + p_2 = \lambda^2 - (4+1)\lambda + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

لإيجاد القيم الذاتية نحل المعادلة $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ فنجد:

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 3$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة A.

لإيجاد الأشعة الذاتية $AX = \lambda X$ وهذا يكافئ:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$4x_1 - x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$$

وهذه الجملة يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$(4-\lambda)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

من أجل $\lambda_1 = 2$ نجد:

$$2x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$

ومنه $x_2 = 2x_1$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نختار $x_1 = 1$ فنحصل على الشعاع الذاتي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$

ومن أجل $\lambda_2 = 3$ نجد:

$$(4-3)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-3)x_2 = 0$$

ومنه:

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

أي أن: $x_1 = x_2$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dot{x}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نختار $x_1 = 1$ فنحصل على الشعاع الذاتي:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 3$

مثال (42):

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

كثيرة الحدود المميزة هي:

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 - p_1\lambda^2 + p_2\lambda - p_3 = \lambda^3 - (5+4-3)\lambda^2 +$$

$$+\left(\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}\right)\lambda - \begin{vmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + (20-5-4)\lambda - [-60-14-(-40-40)]$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

أو:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

ومنه: $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 3$

لنوجد الأشعة الذاتية: $AX = \lambda X$

هذا يكافئ:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$(5-\lambda)x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0$$
$$(4-\lambda)x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + 8x_2 + (-3-\lambda)x_3 = 0$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ نجد:

$$4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0$$
$$3x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0$$

وهي جملة معادلات خطية متجانسة، بحل هذه الجملة بطريقة غاوس مثلاً نجد:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \overset{2R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix} \overset{-3R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية:

$$4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0$$
$$3x_2 - x_3 = 0$$

ومنه: $x_3 = 3x_2$

$$4x_1 = 5x_3 - 7x_2 = 5(3x_2) - 7x_2 = 15x_2 - 7x_2 = 8x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_2\\x_2\\3x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

نختار مثلاً $x_2=1$ فنجد:

$$X_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=1$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_2=2$ نجد:

$$\begin{aligned}&3x_1+7x_2-5x_3=0\\&2x_2-x_3=0\\&2x_1+8x_2-5x_3=0\end{aligned}$$

وهي جملة معادلات خطية متجانسة، بحل هذه الجملة نجد:

$$\begin{bmatrix}3&7&-5\\0&2&-1\\2&8&-5\end{bmatrix}\overset{-\frac{2}{3}R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}3&7&-5\\0&2&-1\\0&\frac{10}{3}&-\frac{5}{3}\end{bmatrix}\overset{3R_3}{\sim}\begin{bmatrix}3&7&-5\\0&2&-1\\0&10&-5\end{bmatrix}\overset{-5R_2+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}3&7&-5\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}&3x_1+7x_2-5x_3=0\\&2x_2-x_3=0\end{aligned}$$

ومنه: $x_3=2x_2$

$$3x_1=5x_3-7x_2=3x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_2\\2x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

نختار مثلاً $x_2=1$ فنجد:

$$X_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2=2$

وأخيراً، من أجل القيمة الذاتية $\lambda_3=3$ نجد:

$$2x_1+7x_2-5x_3=0$$
$$x_2-x_3=0$$
$$2x_1+8x_2-6x_3=0$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$x_3=x_2$$
$$x_1=-x_2$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2\\x_2\\x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

نختار مثلاً $x_2=1$ فنجد:

$$X_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_3=3$.

نذكر دون برهان **بعض النظريات المتعلقة بالقيم الذاتية والأشعة الذاتية:**

1- إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة $|A-\lambda I|=0$ مختلفة فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مستقلة خطياً.

2- إن القيم الذاتية لمصفوفة A متناظرة هي أعداد حقيقية.

3- إن الأشعة الذاتية لمصفوفة متناظرة والمقابلة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة.

مثال (43):

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ثم عين $T^{-1}AT$ حيث T هي المصفوفة التي أعمدتها الأشعة الذاتية للمصفوفة A

الحل:

كثيرة الحدود المميزة:

$$p_3(\lambda)=\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10=0$$

لإيجاد القيم الذاتية نحل هذه المعادلة فنجد:

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad , \quad \lambda_3=10$$

ولإيجاد الأشعة الذاتية:

$$AX=\lambda X$$

هذا يكافئ:

$$(5-\lambda)x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-2x_1 + (2-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0$$

من أجل $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ نجد:

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

جملة معادلات خطية متجانسة بحلها نجد:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1+R_2}{\underset{R_1+R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات:

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$

ومنه $x_2 = 2x_1 - 2x_3$

نختار مثلاً $x_1 = 1$ وَ $x_3 = 0$ فنجد $x_2 = 2$

ومنه:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي الأول.

ثم نختار $x_2 = 0$ فنجد $x_1 = x_3$ ومنه:

$$X_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\2\\x_1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

فإذا اخترنا $x_1=1$ فإن:

$$X_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي الثاني.

من أجل $\lambda_3=10$ نجد:

$$\begin{aligned}-5x_1-2x_2-4x_3&=0\\-2x_1-8x_2+2x_3&=0\\-4x_1+2x_2-5x_3&=0\end{aligned}$$

جملة معادلات خطية متجانسة بحلها نجد:

$$\begin{bmatrix}-2&-8&2\\-5&-2&-4\\-4&2&-5\end{bmatrix}\overset{-\frac{1}{2}R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-1\\-5&-2&-4\\-4&2&-5\end{bmatrix}\overset{\substack{5R_1+R_2\\4R_1+R_3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&4&-1\\0&18&-9\\0&18&-9\end{bmatrix}\overset{-R_2+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-1\\0&18&-9\\0&0&0\end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات:

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$
$$18x_2 - 9x_3 = 0$$
$$x_3 = 2x_2$$
$$x_1 = x_3 - 4x_2 = -2x_2$$
$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نختار $x_2 = 1$ فنجد:

$$X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي الثالث.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة T هو:

$$T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$T^{-1}AT = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

3-15- طريقة التكرار لتعيين أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها:

في بعض الحالات نحتاج لتعيين أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المقابل لها من أجل ذلك نستخدم الطريقة التالية:

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة من النوع n معرفة على الحقل R وإذا فرضنا أن القيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,.....,\lambda_n$ للمصفوفة A أعداد حقيقية وأن الأشعة الذاتية المقابلة لها $X_1,X_2,X_3,.....,X_n$ مستقلة خطياً.

بفرض Y_0 شعاعاً اختيارياً يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$Y_0=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3+.....+c_nX_n$$

لنحسب: $Y_1=AY_0$

$$Y_1=AY_0=c_1AX_1+c_2AX_2+c_3AX_3+.....+c_nAX_n$$

وبما أن $X_1,X_2,X_3,.....,X_n$ هي أشعة ذاتية للمصفوفة وحسب تعريف القيمة الذاتية والشعاع الذاتي لمصفوفة يكون:

$$AX_i=\lambda X_i \quad ; \quad i=1,2,3,.....,n$$

ومنه يمكن أن نكتب:

$$Y_1=c_1\lambda_1X_1+c_2\lambda_2X_2+c_3\lambda_3X_3+.....+c_n\lambda_nX_n$$

نحسب كذلك على الترتيب:

$$Y_2=AY_1 \quad , \quad Y_3=AY_2 \quad , \quad ..... \quad , \quad Y_{i+1}=AY_i$$

نجد كما في حساب Y_1 أن:

$$Y_2 = c_1\lambda_1^2 X_1 + c_2\lambda_2^2 X_2 + c_3\lambda_3^2 X_3 + \ldots\ldots + c_n\lambda_n^2 X_n$$

$$\vdots$$

$$Y_i = c_1\lambda_1^i X_1 + c_2\lambda_2^i X_2 + c_3\lambda_3^i X_3 + \ldots\ldots + c_n\lambda_n^i X_n$$

لنفرض أن القيم الذاتية للمصفوفة A مرتبة حسب قيمها المطلقة كما يلي:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots\ldots\ldots \geq |\lambda_n|$$

في هذه الحالة يمكن أن نكتب:

$$Y_i = \lambda_1^i [c_1 X_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^i X_2 + c_3 (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^i X_3 + \ldots\ldots + c_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^i X_n]$$

وبالتالي يكون لدينا من أجل قيم كبيرة لـــ i

$$Y_i = c_1\lambda_1^i X_1$$

$$Y_{i+1} = c_1\lambda_1^{i+1} X_1 = \lambda_1 (c_1\lambda_1^i X_1) = \lambda_1 Y_i$$

نستنتج إذن أن مركبات الشعاعين Y_i, Y_{i+1} تصبح تقريباً متناسبة ونسبتها تساوي تقريباً λ_1 أي القيمة الذاتية للمصفوفة A وذات أكبر قيمة مطلقة.

إذن انطلاقاً من شعاع Y_0 اختياري نحسب على التوالي:

$$Y_1 = AY_0 \quad , \quad Y_2 = AY_1 \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad Y_{i+1} = AY_i$$

حتى نحصل على شعاعين Y_i, Y_{i+1} بحيث تصبح مركباتهما متناسبة فعندها تكون النسبة هي أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة وبتقسيم هذه النسبة على مركبات الشعاع Y_{i+1} هذه نحصل على الشعاع الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية التي وجدناها نلاحظ أن:

$$Y_1 = AY_0 \quad , \quad Y_2 = A^2 Y_0 \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad Y_{i+1} = A^{i+1} Y_0$$

ومن هنا تسمى طريقة التكرار هذه طريقة القوى.

مثال (44):

عين أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المقابل لها بطريقة التكرار للمصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}$$

الحل:

نأخذ الشعاع الاختياري:

$$Y_0=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

ولنحسب الأشعة: $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots$

$$Y_1=AY_0=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 16\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\ \frac{16}{6}\end{bmatrix}$$

لنستخدم الشعاع $\begin{bmatrix}1\\ \frac{16}{6}\end{bmatrix}$ بوصفه شعاعاً تقريبياً جديداً لحساب Y_2

$$Y_2=A\begin{bmatrix}1\\ \frac{16}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{16}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{38}{3}\\ \frac{113}{3}\end{bmatrix}=\frac{38}{3}\begin{bmatrix}1\\ \frac{113}{38}\end{bmatrix}$$

$$Y_3=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{113}{38}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{264}{19}\\ \frac{1538}{38}\end{bmatrix}=13.8947\begin{bmatrix}1\\ 2.9129\end{bmatrix}$$

$$Y_4=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2.9129\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13.6516\\ 40.8677\end{bmatrix}=13.6516\begin{bmatrix}1\\ 2.9936\end{bmatrix}$$

$$Y_5=13.9744\begin{bmatrix}1\\ 2.9995\end{bmatrix}$$

$$Y_6=13.998\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$$

ومنه فإن أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي $\lambda=13.998$ والشعاع الذاتي المقابل لها هو $\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$.

نلاحظ أنه عند استخدام طريقة التكرار فإننا نحصل على القيمة الذاتية, ونحصل على الشعاع الذاتي المقابل لهذه القيمة مباشرة بينما سابقاً كنا نحتاج لحل المعادلة $p_n(\lambda)=0$ من أجل إيجاد القيم الذاتية, ونحتاج لحل جمل معادلات خطية متجانسة من أجل إيجاد الأشعة الذاتية.

3-16- طريقة التكرار لتعيين أصغر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها:

في بعض المسائل نحتاج لإيجاد أصغر قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة A نظامية والشعاع الذاتي المقابل لها، وطريقة التكرار تمكننا أيضاً من ذلك.

ليكن X شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A مقابلاً للقيمة الذاتية λ حسب تعريف القيم الذاتية نكتب: $AX = \lambda X$

نضرب طرفي هذه العلاقة بمقلوب المصفوفة A فنجد:

$$A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X$$

$$X = \lambda A^{-1}X$$

أو:

$$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$$

تبين هذه العلاقة أن $\frac{1}{\lambda}$ هي القيمة الذاتية لمقلوب المصفوفة A أي القيمة الذاتية للمصفوفة A^{-1}.

نستنتج أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة النظامية A فإن $\frac{1}{\lambda}$ هي القيمة الذاتية لمقلوب هذه المصفوفة.

إذا اعتمدنا المصفوفة A^{-1} وطبقنا طريقة التكرار السابقة لإيجاد أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها فسنحصل على قيمة ذاتية λ' للمصفوفة A^{-1} وستكون λ' أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} وسيكون مقلوب λ' أي $\frac{1}{\lambda'}$ أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A.

مثال (45):

عين أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

والشعاع الذاتي المرتبط بها.

الحل:

نعين مقلوب المصفوفة A:

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}13 & -4\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}$$

نختار $Y_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ فنجد:

$$Y_1=A^{-1}Y_0=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.6425\\ -0.9714\end{bmatrix}=0.6425\begin{bmatrix}1\\ -0.1111\end{bmatrix}$$

$$Y_2=A^{-1}Y_1=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0.1111\end{bmatrix}$$

$$=0.9599\begin{bmatrix}1\\ -0.2398\end{bmatrix}$$

$$Y_3=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0.2398\end{bmatrix}=0.9967\begin{bmatrix}1\\ -0.2494\end{bmatrix}$$

$$Y_4=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0.2494\end{bmatrix}=0.9995\begin{bmatrix}1\\ -0.2500\end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن الفرق بين المركبتين في عمليتي تكرار متتاليتين أصبح 0.0006 فإذا اكتفينا بهذه الدقة تكون أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي:

$$\frac{1}{0.9995}=1.0095$$

والشعاع الذاتي المرتبط بها هو:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2500 \end{bmatrix}$$

3-17- تمارين:

1- أوجد قيمة المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 15 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

2- أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3- عين مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4- عين رتبة المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$$

5- أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -3 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 5 & 3\\ 4 & 3 & 8 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

باستخدام التحويلات الأولية.

6- حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4&=0\\ 2x_1-x_2-2x_4&=0\\ x_1+3x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

7- حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\begin{aligned} x_1+x_2-4x_3-4x_5&=0\\ x_1-x_2-2x_3-2x_4-2x_5&=0\\ x_1-3x_2-4x_4&=0\\ x_2-x_3+x_4-x_5&=0 \end{aligned}$$

8- استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6\\ 2x_1-x_2+x_3&=3\\ x_1-x_2+2x_3&=5 \end{aligned}$$

9- بالاعتماد على طريقة كرامر، حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4$$
$$3x_1 - 4x_2 = 1$$
$$5x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0$$

10- أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 12$$
$$3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 38$$

بطريقة كرامر.

11- استخدم طريقة غاوس لحل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$
$$-x_1 - 3x_2 = 2$$

12- أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$
$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 3$$

بطريقة غاوس.

13- باستخدام طريقة غاوس احسب قيمة المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

14- أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 21$$
$$6x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 32$$

بطريقة غاوس – جوردان.

15- باستخدام طريقة غاوس – جوردان حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$$

16- أوجد بطريقة غاوس – جوردان مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

17- أوجد بطريقة غاوس – جوردان مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

18- أوجد بطريقة كراوت حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$50x_1 + 107x_2 + 36x_3 = 2$$
$$25x_1 + 54x_2 + 20x_3 = 1$$
$$31x_1 + 66x_2 + 21x_3 = 1$$

19- بطريقة كراوت أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}10 & -7 & 0\\ -3 & 2 & 6\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

20- احسب $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_2$ حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

21- أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي:

$$x_1+5x_2-x_3=7$$
$$8x_1+x_2+x_3=26$$
$$x_1-x_2+5x_3=7$$

حيث $X^0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

22- اعتماداً على طريقة جاكوبي أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$13x_1+5x_2-3x_3+x_4=18$$
$$2x_1+12x_2+x_3-4x_4=13$$
$$3x_1-4x_2+10x_3+x_4=29$$
$$2x_1+x_2-3x_3+9x_4=31$$

23- أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$10x_1 + x_2 + 7x_3 = 33$$
$$7x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 49$$
$$x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 39$$

بطريقة غاوس – سيدل.

24- عين عدد الخطوات الواجب إجراؤها لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية وبخطأ لا يتجاوز 10^{-4}.

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$

25- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ثم عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية.

26- عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

27- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

28- عين أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & -8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم أوجد الشعاع الذاتي المرتبط بها.

29- عين أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المرتبط بها للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

30- عين أكبر قيمة ذاتية وأصغر قيمة ذاتية والشعاعين الذاتيين المرتبطين بهما للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -6 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

الفصل الرابع

الاستيفاء (الاستكمال)

Interpolation

غالباً ما نحصل في الفيزياء وفي العلوم الأخرى على توابع تجريبية $f(x)$ نتيجة تجربة ما يمكن كتابتها على شكل جدول كما يلي:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_i)$	$\dots$	$f(x_n)$

وقد تكون هذه القيم غير كافية للتعبير بشكل جيد عن التجربة التي نجريها، بمعنى آخر نريد الحصول على قيم إضافية من أجل الحصول على نتيجة جيدة للتجربة التي نجريها، من أجل ذلك واعتماداً على الجدول المعطى نقرب التابع $f(x)$ بحدودية (كثيرة حدود) $P_n(x)$ ونكتب $P_n(x) \square f(x)$.

إن تعيين الحدودية $P_n(x)$ يعتمد على تطابق قيم التابع التجريبي $f(x)$ والحدودية $P_n(x)$ عند النقاط $x_i \;\; ; \;\; i = 0,1,2,\dots,n$ أي أن:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \;\; ; \;\; i = 0,1,2,\dots,n$$

إن مسألة تعيين الحدودية $P_n(x)$ التي تمكننا من تعيين قيم التابع $f(x)$ عند نقط واقعة بين النقط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ تسمى **بالاستيفاء الداخلي** (الاستكمال) وتسمى الحدودية $P_n(x)$ **بحدودية الاستيفاء** كما تسمى النقط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ **بنقط الارتكاز**.

ويمكن التفريق بين **نوعين من الاستيفاء:**

إذا كانت النقطة المطلوب تعيين قيمة التابع $f(x)$ عندها واقعة داخل النقط $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن الاستيفاء يسمى **بالاستيفاء الداخلي**.

أما إذا كانت النقطة المطلوب تعيين قيمة التابع $f(x)$ عندها واقعة خارج النقط $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن الاستيفاء يسمى **بالاستيفاء الخارجي**.

مثال (1):

في مخبر الفيزياء أجريت تجربة وتم الحصول على القياسات التالية:

x	0	20
$y = f(x)$	150	155

حيث x يرمز لدرجة الحرارة، y طول سلك معدني.

أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$، ثم احسب طول السلك المعدني عند $x = 15^\circ$ ثم عند $x = 50^\circ$.

الحل:

الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ هي: $P_1(x) = ax + b$

تتعين هذه الحدودية إذا عينا الثابتين a, b لذلك نحتاج إلى معادلتين، نحصل عليهما بالاعتماد على نقط الجدول وبالتعويض بالمعادلة $P_1(x) = ax + b$ نجد: $b = 150$

$$155 = 20a + b \Rightarrow 20a = 155 - b = 155 - 150 = 5$$

$$a = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

ومنه:

$$P_1(x) = \frac{1}{4}x + 150$$

$$P_1(15)=\frac{15}{4}+150=153.75 \quad c.m.$$

$$P_1(50)=\frac{50}{4}+150=162.5 \quad c.m.$$

من أجل تعيين حدودية الاستيفاء $P_n(x)$ نتعرف إلى **الطرق التالية:**

4-1- الطريقة العامة في الاستيفاء:

بفرض $y=f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n

الحدودية $P_n(x)$ الملائمة للتابع $y=f(x)$ أي الحدودية التي تحقق:

$$P_n(x_i)=y_i \quad ; \quad i=0,1,2,\dots,n$$

يمكن كتابتها بالشكل العام التالي:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

حيث $i=0,1,2,\dots,n$; a_i ثوابت يمكن تعيينها بالاعتماد على حل جملة المعادلات التالية والناتجة عن تعويض $i=0,1,2,\dots,n$; (x_i,y_i) في الحدودية $P_n(x)$:

$$\begin{aligned}
a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3+\dots+a_nx_0^n&=y_0\\
a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\dots+a_nx_1^n&=y_1\\
a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+a_3x_2^3+\dots+a_nx_2^n&=y_2\\
&\vdots\\
a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+a_3x_n^3+\dots+a_nx_n^n&=y_n
\end{aligned}$$

يمكن حل جملة المعادلات الخطية هذه بأي طريقة من الطرق التي تعرّفنا إليها في الفصل السابق، لنحل هذه الجملة بطريقة كرامر مثلاً، ونعلم أن طريقة كرامر تعتمد على حساب معين الأمثال التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن هذا المعين هو **معين فاندرموند** ونشر هذا المعين يعطى كما يلي:

$$\Delta = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0).....(x_n - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1).....$$
$$....(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2).....(x_n - x_2).....(x_n - x_{n-1}) \neq 0$$

ثم نعين المعينات $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ التي نحصل عليها من المعين Δ وذلك باستبدال عمود الثوابت $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ بالعمود الأول ثم العمود الثاني وهكذا.....

حتى العمود الأخير وبالتالي نحصل على الثوابت $a_i \;\; ; \;\; i = 0,1,2,....,n$ بالاعتماد على العلاقات التالية:

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \;\; ; \;\; i = 0,1,2,....,n$$

والحدودية الملائمة هي:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta} x^i$$

مثال (2):

أوجد باستخدام الطريقة العامة حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	-1	0	2
$y = f(x)$	2	-1	5

ثم أوجد $f(1)$.

الحل:

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ هي:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

بالاعتماد على قيم الجدول نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 2$$
$$a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = -1$$
$$a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = 5$$

ومنه:

$$a_0 - a_1 + a_2 = 2$$
$$a_0 = -1$$
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 5$$

لحل هذه الجملة بطريقة كرامر نحسب معين الأمثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

وهو معين فاندرموند بنشره نجد:

$$\Delta = (0+1)(2+1)(2-0) = 6 \neq 0$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -4+5-(-1+8) = 1-7 = -6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0+1+4-(0-2-5) = 5-(-7) = 12$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = -\frac{6}{6} = -1$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{6}{6} = -1$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$$

بالتعويض بالحدودية نجد:

$$P_2(x) = -1 - x + 2x^2$$

$$f(1) \simeq P_2(1) = -1-(1)+2(1)^2 = 0$$

مثال (3):

أوجد باستخدام الطريقة العامة حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2	4
$y=f(x)$	-3	1	2	7

الحل:

حدودية الاستيفاء الملائمة هي من الشكل:

$$P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

بالاعتماد على قيم الجدول نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$a_0+a_1(0)+a_2(0)^2+a_3(0)^3=-3$$
$$a_0+a_1(1)+a_2(1)^2+a_3(1)^3=1$$
$$a_0+a_1(2)+a_2(2)^2+a_3(2)^3=2$$
$$a_0+a_1(4)+a_2(4)^2+a_3(4)^3=7$$

ومنه:

$$a_0=-3$$
$$a_0+a_1+a_2+a_3=1$$
$$a_0+2a_1+4a_2+8a_3=2$$
$$a_0+4a_1+16a_2+64a_3=7$$

يمكن حل هذه الجملة بطريقة كرامر:

نحسب معين الأمثال Δ وهو معين فاندرموند بنشره نجد:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&4&16&64\end{vmatrix}$$
$$=(1-0)(2-0)(4-0)(2-1)(4-1)(4-2)=48\neq 0$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$= -3(4-2)(8-2)(8-4) = -144$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & 16 & 64 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 7 & 16 & 64 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$= 256 + 56 + 32 - (28 + 128 + 128) + 3[(3)(7)(4)]$$

$$= 344 - 284 + 252 = 60 + 252 = 312$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 7 & 64 \end{vmatrix} = -144$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 7 \end{vmatrix} = 24$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = -\frac{144}{48} = -3$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{312}{48} = \frac{13}{2}$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{144}{48} = -3$$

$$a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

بالتعويض بالحدودية نجد:

$$P_3(x) = -3 + \frac{13}{2}x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

4-2- طريقة لاغرانج:

لإيجاد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$y=f(x)$	$y_0=f(x_0)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	$\dots$	$y_i=f(x_i)$	$\dots$	$y_n=f(x_n)$

نعرف أولاً حدوديات لاغرانج $L_j(x)$ التي هي حدوديات من الدرجة n كما يلي:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).....(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3).....(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3).....(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3).....(x_1-x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3).....(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3).....(x_2-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2).....(x_n-x_{n-1})}$$

نلاحظ أن حدوديات لاغرانج تحقق العلاقة:

$$L_j(x_i)=\begin{cases}0 & \text{عندما} \quad i\neq j\\ 1 & \text{عندما} \quad i=j\end{cases}$$

حدودية الاستيفاء $P_n(x)$ المطلوبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}L_j(x)f(x_j)$$

وتسمى هذه العلاقة **بطريقة لاغرانج في الاستيفاء.**

وحدودية الاستيفاء $P_n(x)$ هي الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ أي أن:

$$P(x_i)=f(x_i)\ ;\ i=0,1,2,....,n$$

مثال (4):

باستخدام طريقة لاغرانج أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعـــرف بالجدول التالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$y=f(x)$	1	0

الحل:

$$f(x_0)=1 \qquad x_0=0$$

$$f(x_1)=0 \qquad x_1=\frac{\pi}{2}$$

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}=\frac{x-\frac{\pi}{2}}{0-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}(x-\frac{\pi}{2})$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{x-0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2x}{\pi}$$

بالتعويض بطريقة لاغرانج نجد:

$$P_1(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)$$

$$P_1(x)=-\frac{2}{\pi}(x-\frac{\pi}{2})(1)+\frac{2x}{\pi}(0)=-\frac{2}{\pi}x+1$$

مثال (5):

أوجد بطريقة لاغرانج الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$y=f(x)$	0	1	0

الحل:

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})}{(-\frac{\pi}{2}-0)(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}=\frac{2x(x-\frac{\pi}{2})}{\pi^2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2)}=\frac{(x+\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2})}{(0+\frac{\pi}{2})(0-\frac{\pi}{2})}=-\frac{4}{\pi^2}(x^2-\frac{\pi^2}{4})$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_1)}=\frac{(x+\frac{\pi}{2})(x-0)}{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}-0)}=\frac{2x(x+\frac{\pi}{2})}{\pi^2}$$

الحدودية المطلوبة هي:

$$P_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

$$=\frac{2x(x-\frac{\pi}{2})}{\pi^2}(0)-\frac{4}{\pi^2}(x^2-\frac{\pi^2}{4})(1)+\frac{2x(x+\frac{\pi}{2})}{\pi^2}(0)$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}(x^2-\frac{\pi^2}{4})=-\frac{4}{\pi^2}x^2+1$$

مثال (6):

أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2	4
$y=f(x)$	-3	1	2	7

بطريقة لاغرانج.

الحل:

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$

$$=\frac{x^3-7x^2+14x-8}{-8}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{x^3-6x^2+8x}{}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x^3-5x^2+4x}{-4}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{24}$$

حدودية لاغرانج الملائمة هي:

$$P_3(x)=\sum_{j=0}^{3}L_j(x)f(x_j)$$

$$=\frac{x^3-7x^2+14x-8}{-8}(-3)+\frac{x^3-6x^2+8x}{3}(1)+$$

$$+\frac{x^3-5x^2+4x}{-4}(2)+\frac{x^3-3x^2+2x}{24}(7)$$

$$=(\frac{3}{8}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{7}{24})x^3+(-\frac{21}{8}-\frac{6}{3}+\frac{10}{4}-\frac{21}{24})x^2+$$

$$+(\frac{14(3)}{8}+\frac{8}{3}-\frac{8}{4}+\frac{14}{24})x-3$$

$$=\frac{9+8-12+7}{24}x^3+\frac{-63-48+60-21}{24}x^2+$$

$$+\frac{(14)(3)(3)+64-48+14}{24}x-3$$

$$=\frac{12}{24}x^3+\frac{-72}{24}x^2+\frac{156}{24}x-3$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{13}{2}x-3$$

4-2-1- تقدير الخطأ المرتكب بطريقة لاغرانج:

يمكن تقدير الخطأ المرتكب عند حساب قيمة التابع في نقطة ما واقعة بين نقط الارتكاز بالاعتماد على النظرية التالية:

4-2-2- نظرية:

إذا كان التابع $f(x)$ متصلاً وقابلاً للاشتقاق $(n+1)$ مرة وبفرض أن النقطة $x=\overline{x}$ واقعة داخل المجال الذي يحوي النقط $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ بحيث $\overline{x}\neq x_i \quad ; \quad i=0,1,2,\ldots,n$ فإن الخطأ المرتكب يعطى بالعلاقة التالية:

$$e(\overline{x})=f(\overline{x})-P_n(\overline{x})=\frac{f^{(n+1)}(\mu)w(\overline{x})}{(n+1)!}$$

حيث $\mu\in[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\overline{x}]$ و $w(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$.

البرهان:

بفرض $P_n(\overline{x})$ قيمة تقريبية لـ $f(\overline{x})$ ولنوجد $f(\overline{x})-P_n(\overline{x})$ من أجل ذلك نأخذ التابع المساعد التالي:

$$\varphi(x)=f(x)-P_n(x)-Rw(x)$$

ونعين الثابت R من الشرط $\varphi(\overline{x})=0$ ثم نقدّر الخطأ في النقطة $x=\overline{x}$ التي ينعدم فيها التابع $\varphi(x)$ بالاعتماد على التابع المساعد يمكن أن نكتب:

$$R=\frac{f(\overline{x})-P_n(\overline{x})}{w(\overline{x})}$$

نلاحظ أن التابع $\varphi(x)$ ينعدم عند $(n+2)$ نقطة هي:

$$I=[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\overline{x}]$$

بالاعتماد على نظرية رول فإن المشتق $\varphi^{(n+1)}(x)$ ينعدم في نقطة μ من المجال I أي أن:

$$\varphi^{(n+1)}(\mu)=0$$

باشتقاق التابع المساعد $(n+1)$ مرة نجد:

$$\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-R(n+1)!$$

حيث $P_n^{(n+1)}(x)=0$ لأن $P_n(x)$ حدودية من الدرجة n والحدودية $w(x)$ من الدرجة $n+1$، وبفرض $x=\mu$ نجد:

$$0=\varphi^{(n+1)}(\mu)=f^{(n+1)}(\mu)-R(n+1)!\Rightarrow R=\frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}$$

ومنه فإن:

$$e(\overline{x})=f(\overline{x})-P_n(\overline{x})=\frac{f^{(n+1)}(\mu)w(\overline{x})}{(n+1)!}$$

إذا رمزنا بالرمز:

$$M=\max_{x_0\le\mu\le x_n}\left|f^{(n+1)}(\mu)\right|$$

فإن:

$$\left|e(\overline{x})\right|\le\frac{M\left|w(\overline{x})\right|}{(n+1)!}$$

مثال (7):

أوجد بطريقة لاغرانج الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)=\frac{1}{x}$ المعرف عند النقط $x_0=2$, $x_1=2.5$, $x_2=4$ ثم أوجد $f(3)$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

نشكل الجدول التالي:

x	2	2.5	4
$y=f(x)$	0.5	0.4	0.25

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)}=x^2-6.5x+10$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)}$$

$$=\frac{-4}{3}(x^2-6x+8)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x^2-4.5x+5)$$

الحدودية الملائمة هي:

$$P_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

$$=(x^2-6.5x+10)(0.5)-\frac{4}{3}(x^2-6x+8)(0.4)+$$

$$+\frac{1}{3}(x^2-4.5x+5)(0.25)$$

$$P_2(x)=0.05x^2-0.425x+1.15$$

$$f(3)\simeq P_2(3)=0.05(3)^2-0.425(3)+1.15=0.325$$

لنحسب الخطأ المرتكب:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{6}{x^4}$$

$$M=\max_{2\le\mu\le4}\left|f'''(\mu)\right|=\frac{6}{(2)^4}=\frac{6}{16}$$

$$w(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$w(3)=(3-2)(3-2.5)(3-4)=-0.5$$

$$\left|e(3)\right|\le\frac{\mathrm{M}\left|w(3)\right|}{3!}=\frac{\frac{6}{16}(0.5)}{3!}=0.03125$$

مثال (8):

أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)=\cos x$ بطريقة لاغرانج حيث:

$$f(0)=1, f(0.1)=0.995, f(0.2)=0.980, f(0.3)=0.955$$

ثم أوجد $\cos(0.25)$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

x	0	0.1	0.2	0.3
$y=f(x)$	1	0.995	0.980	0.955

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$=\frac{(x-0.1)(x-0.2)(x-0.3)}{(0-0.1)(0-0.2)(0-0.3)}$$

$$=\frac{(10x-1)(10x-2)(10x-3)}{(-1)(-2)(-3)}$$

$$=\frac{10^3x^3-6(10^2x^2)+11(10x)-6}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{10^3x^3-5(10^2x^2)+6(10x)}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{10^3x^3-4(10^2x^2)+3(10x)}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{10^3x^3-3(10^2x^2)+2(10x)}{6}$$

الحدودية الملائمة هي:

$$P_3(x)=\left(-\frac{10^3}{6}+\frac{995}{2}-\frac{980}{2}+\frac{955}{6}\right)x^3+$$

$$+\left(100-\frac{5(99.5)}{2}+2(98)-\frac{95.5}{2}\right)x^2+$$

$$+\left(\frac{-110}{6}+3(9.95)-\frac{3(9.8)}{2}+\frac{9.55}{3}\right)x+1$$

$$=0x^3-\frac{1}{2}x^2+0x-1=-\frac{1}{2}x^2+1$$

$$f(0.25)=\cos 0.25\simeq P_3(0.25)=-\frac{(0.25)^2}{2}+1=0.96875$$

لنحسب الخطأ المرتكب:

$$f(x)=\cos x$$

$$f'(x)=-\sin x$$

$$f''(x)=-\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$M = \max_{0 \le \mu \le 0.3} \left| f^{(4)}(\mu) \right| = \cos 0 = 1$$

$$w(0.25) = (0.25-0)(0.25-0.1)(0.25-0.2)(0.25-0.3)$$

$$= (0.25)(0.15)(0.05)(-0.05) = -0.9375 \times 10^{-4}$$

$$\left| e(0.25) \right| \le \frac{(1)\left|(-0.9375 \times 10^{-4})\right|}{4!} = 0.3906 \times 10^{-5}$$

4-3- طريقة نيوتن الأمامية:

من أجل إيجاد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n

نفرض أن المسافة بين نقطتين متتاليتين ثابتة وتساوي h أي:

$$x_1 - x_0 = h$$

$$x_2 - x_1 = h$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_{n-1} = h$$

ولنعرف المؤثر التفاضلي Δ كما يلي:

$$\Delta y_i = \Delta f_i = f_{i+1} - f_i = y_{i+1} - y_i$$

حيث:

$$y_i = f(x_i) = f_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

ومنه:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$
$$\vdots$$

نسمي هذه الفروق **بالفروق الأمامية الأولى للتابع** $y = f(x)$ وهذه الفروق يمكن أن تكون موجبة أو سالبة.

بالاعتماد على الفروق الأمامية الأولى يمكن إيجاد الفروق الأمامية الثانية والثالثة والرابعة و..... للتابع $y = f(x)$ كما يلي:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i)\\ &= y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i)\\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_i &= \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)\\ &= \Delta y_{i+2} - 2\Delta y_{i+1} + \Delta y_i\\ &= y_{i+3} - y_{i+2} - 2(y_{i+2} - y_{i+1}) + y_{i+1} - y_i\\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^4 y_i &= \Delta(\Delta^3 y_i) = \Delta(y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i)\\ &= y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i\end{aligned}$$

وبشكل عام يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned}\Delta^n y_i &= y_{i+n} - ny_{i+n-1} + \binom{n}{2} y_{i+n-2} - \binom{n}{3} y_{i+n-3} + \dots + (-1)^n y_i\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_{i+n-k}\end{aligned}$$

ويمكن كتابة الفروق الأمامية بالجدول التالي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

نسمي هذا الجدول **بجدول الفروق الأمامية** وجداول الفروق الأمامية تكون منتهية.

مثال (9):

أوجد الفروق الأمامية للتابع $y = f(x) = \ln x$ حيث:

$$x_0 = 0.30 \ , \ x_1 = 0.40 \ , \ x_2 = 0.50 \ , \ x_3 = 0.60$$
$$x_4 = 0.70 \ , \ x_5 = 0.80 \ , \ x_6 = 0.90$$

الحل:

لإيجاد الفروق الأمامية للتابع $y = \ln x$ نكتب جدول الفروق التالي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0.30	–1.20397						
		0.28768					
0.40	–0.91629		–0.06454				
		0.22314		0.02373			
0.50	–0.69315		–0.04081		–0.01110		
		0.18233		0.01263		0.00603	
0.60	–0.15082		–0.02818		–0.00507		–0.00365
		0.15415		0.00756		0.00238	
0.70	–0.35667		–0.02062		–0.00269		
		0.13353		0.00487			
0.80	–0.22314		–0.01575				
		0.11778					
0.90	–0.10536						

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \dots + \binom{\alpha}{n}\Delta^n y_0$$

حيث:

$$h = x_i - x_{i-1} \quad , \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

نسمي هذه العلاقة **بطريقة نيوتن الأمامية.**

مثال (10):

أوجد بطريقة نيوتن الأمامية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	1	16	81	256	625	1296

الحل:

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0						
		1					
1	1		14				
		15		36			
2	16		50		24		
		65		60		0	
3	81		110		24		0
		175		84		0	
4	256		194		24		
		369		108			
5	625		302				
		671					
6	1296						

الحدودية الملائمة هي:

$$P_6(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \binom{\alpha}{4}\Delta^4 y_0 + \\ + \binom{\alpha}{5}\Delta^5 y_0 + \binom{\alpha}{6}\Delta^6 y_0$$

حيث:

$$h=1 \quad , \quad x_0=0 \quad , \quad \alpha=\frac{x-x_0}{h} \Rightarrow \alpha=\frac{x-0}{1}=x$$

$$P_6(x)=0+x(1)+\frac{x(x-1)}{2!}(14)+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}(36)+$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}(24)+0+0$$
$$=x+7(x^2-x)+6x(x^2-3x+2)+(x^2-x)(x^2-5x+6)$$
$$=x+7x^2-7x+6x^3-18x^2+12x+x^4-5x^3+$$
$$+6x^2-x^3+5x^2-6x$$
$$=x^4+(6-5-1)x^3+(7-18+6+5)x^2+(1-7+12-6)x$$
$$=x^4+0x^3+0x^2+0x$$
$$P_6(x)=x^4$$

4-3-1- تقدير الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الأمامية:

إن الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الأمامية يقدّر بالحد الذي يلي الحد k الذي توقفنا عنده في حساب $P_k(x)$ أو $P_k(\alpha)$ أي الخطأ يعطى بالعلاقة التالية:

$$e=\binom{\alpha}{k+1}\Delta^{k+1}y_0=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-k)}{(k+1)!}\Delta^{k+1}y_0$$

مثال (11):

عيّن بطريقة نيوتن الأمامية الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	2.1	2.2	2.3	2.4
$y = f(x)$	0.61	1.09	1.58	2.09

ثم أوجد $f(2.33)$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2.1	0.61			
		0.48		
2.2	1.09		0.01	
		0.49		0.01
2.3	1.58		0.02	
		0.51		
2.4	2.09			

الحدودية الملائمة هي:

$$P_2(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$x_0 = 2.1 \quad , \quad h = 0.1 \quad , \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 2.1}{0.1} = 10x - 21$$

بالتعويض نجد:

$$P_2(x) = 0.61 + (10x - 21)(0.48) + \frac{(10x-21)(10x-22)}{2}(0.01)$$

$$= 0.61 + 4.8x - 10.08 + (100x^2 - 430x + 462)(\frac{0.01}{2})$$

$$= 0.5x^2 + (4.8 - 2.15)x + 0.61 - 10.08 + 2.31$$

$$= 0.5x^2 + 2.65x - 7.16$$
$$f(2.33) \simeq P_2(2.33) = 0.5(2.33)^2 + 2.65(2.33) - 7.16 = 1.72895$$

نحسب الخطأ المرتكب:

$$\alpha = 10x - 21 = 10(2.33) - 21 = 2.3$$
$$e(2.33) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$
$$= \frac{(2.3)(1.3)(0.3)}{6}(0.01) = 0.001495$$

4-4- طريقة نيوتن الخلفية:

نفرض أن الفروق بين القيم $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ منتظمة أي الفرق بين قيمتين متتاليتين ثابتة وتساوي h هذا يعني:

$$x_n - x_{n-1} = h$$
$$x_{n-1} - x_{n-2} = h$$
$$\vdots$$
$$x_1 - x_0 = h$$

نعرف المؤثر التفاضلي ∇ كما يلي:

$$\nabla y_i = \nabla f_i = \nabla f(x_i) = y_i - y_{i-1}$$

أي أن:

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$$
$$\nabla y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$$
$$\nabla y_{n-2} = y_{n-2} - y_{n-3}$$
$$\vdots$$

$$\nabla y_1 = y_1 - y_0$$

نسمي هذه الفروق **بالفروق الخلفية الأولى للتابع** $y = f(x)$.

يمكن بالاعتماد على الفروق الخلفية الأولى إيجاد الفروق الخلفية الثانية والثالثة والرابعة و..... للتابع $y = f(x)$ كما يلي:

$$\nabla^2 y_n = \nabla(\nabla y_n) = \nabla(y_n - y_{n-1})$$
$$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1} = y_n - y_{n-1} - (y_{n-1} - y_{n-2})$$
$$\nabla^2 y_n = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$
$$\nabla^3 y_n = \nabla(\nabla^2 y_n) = \nabla(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2})$$
$$\nabla^3 y_n = \nabla y_n - 2\nabla y_{n-1} + \nabla y_{n-2}$$
$$\nabla^3 y_n = y_n - y_{n-1} - 2(y_{n-1} - y_{n-2}) + y_{n-2} - y_{n-3}$$
$$\nabla^3 y_n = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}$$
$$\nabla^4 y_n = \nabla(\nabla^3 y_n) = \nabla(y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3})$$
$$\nabla^4 y_n = \nabla y_n - 3\nabla y_{n-1} + 3\nabla y_{n-2} - \nabla y_{n-3}$$
$$\nabla^4 y_n = y_n - y_{n-1} - 3(y_{n-1} - y_{n-2}) + 3(y_{n-2} - y_{n-3}) - (y_{n-3} - y_{n-4})$$
$$\nabla^4 y_n = y_n - 4y_{n-1} + 6y_{n-2} - 4y_{n-3} + y_{n-4}$$

وبشكل عام يمكن أن نكتب:

$$\nabla^n y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_{n-k}$$

ويمكن كتابة الفروق الخلفية بالجدول التالي:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				
$\vdots$					
$\vdots$					
x_{n-4}	y_{n-4}				
		∇y_{n-3}			
x_{n-3}	y_{n-3}		$\nabla^2 y_{n-2}$		
		∇y_{n-2}		$\nabla^3 y_{n-1}$	
x_{n-2}	y_{n-2}		$\nabla^2 y_{n-1}$		$\nabla^4 y_n$
		∇y_{n-1}		$\nabla^3 y_n$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\nabla^2 y_n$		
		∇y_n			
x_n	y_n				

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n(s) = y_n + \binom{s}{1}\nabla y_n + \binom{s+1}{2}\nabla^2 y_n + \binom{s+2}{3}\nabla^3 y_n + ...$$

$$..+\binom{s+k-1}{n}\nabla^k y_n+.....+\binom{s+n-1}{n}\nabla^n y_n$$

حيث:

$$s=\frac{x-x_n}{h}\quad,\quad h=x_i-x_{i-1}\quad,\quad i=n,n-1,....$$

تسمى هذه العلاقة **بطريقة نيوتن الخلفية.**

مثال (12):

أوجد بطريقة نيوتن الخلفية الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2
$y=f(x)$	-1	2	7

الحل:

نكتب جدول الفروق:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$
0	-1		
		3	
1	2		2
		5	
2	7		

الحدودية الملائمة هي:

$$P_2(s)=y_n+s\nabla y_n+\frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$h=1 \quad , \quad y_n = y_2 = 7$$

$$s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x-2}{1} = x-2$$

$$P_2(x) = 7 + (x-2)(5) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}(2)$$

$$= 7 + 5x - 10 + x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2x - 1$$

4-4-1- تقدير الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الخلفية:

يقدّر الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الخلفية بالحد الذي يلي الحد k الذي توقفنا عنده في حساب $P_k(x)$ أو $P_k(s)$ أي الخطأ يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e = \binom{s+k}{k+1} \nabla^{k+1} y_n = \frac{s(s+1)(s+2)....(s+k)}{(k+1)!} \nabla^{k+1} y_n$$

مثال (13):

عيّن بطريقة نيوتن الخلفية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = f(x)$	−1.00	−0.98	−0.91	−0.79	−0.62	−0.38

ثم أوجد $f(0.33)$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

نكتب جدول الفروق:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
0	−1.00					
		0.02				
0.1	−0.98		0.05			
		0.07		0		
0.2	−0.91		0.05		0	
		0.12		0		0.02
0.3	−0.79		0.05		0.02	
		0.17		0.02		
0.4	−0.62		0.07			
		0.24				
0.5	−0.38					

الحدودية الملائمة هي:

$$P_4(s) = y_n + s\nabla y_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \\ + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\nabla^4 y_n$$

$$h = 0.1 \ , \ x_n = 0.5 \ , \ s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x - 0.5}{0.1} = 10x - 5$$

$$P_4(x) = -0.38 + (10x-5)(0.24) + \\ + \frac{(10x-5)(10x-4)}{2}(0.07) + \\ + \frac{(10x-5)(10x-4)(10x-3)}{6}(0.02) + \\ + \frac{(10x-5)(10x-4)(10x-3)(10x-2)}{24}(0.02)$$

$$P_4(x) = 8.3333x^4 - 8.329x^3 + 5.4147x^2 - 0.4661x - 0.98002$$

$$f(0.33) \simeq P_n(0.33) = -0.74472$$

لنحسب الخطأ المرتكب:

$$s = 10x - 5 = 10(0.33) - 5 = -1.7$$

بالتعويض بالعلاقة:

$$e = \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{5!}\nabla^5 y_n$$

نجد:

$$e = \frac{(-1.7)(-0.7)(0.3)(1.3)(2.3)}{120}(0.02) = 0.00017$$

4-5- طريقة الفروق المقسومة:

نعرّف الفروق المقسومة الأولى للتابع $y = f(x) = f[x]$ كما يلي:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$$

$$\vdots$$

$$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n] - f[x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}$$

بالاعتماد على الفروق المقسومة الأولى يمكن إيجاد الفروق المقسومة الثانية والثالثة والرابعة و..... للتابع $y = f[x]$ كما يلي:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$$\vdots$$

$$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$$

$$\vdots$$

$$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]-f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-3}}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

يمكن كتابة الفروق المقسومة بالجدول التالي:

x	$f[x]$					
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0,x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$			
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$	
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$	
		$f[x_3,x_4]$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$		
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]$			
		$f[x_4,x_5]$				
x_5	$f[x_5]$					

مثال (14):

اكتب جدول الفروق المقسومة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
$y=f(x)$	132.651	140.877	157.464	166.375	195.112	216.000

الحل:

x	$f[x]$				
0	132.651				
		41.13			
0.2	140.877		415.8		
		165.87		−2022	
0.3	157.464		−393.8		4061.43
		89.11		821	
0.4	166.375		16.7		−1171.43
		95.79		1	
0.7	195.112		17.3		
		104.44			
0.9	216.000				

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) +$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots\ldots +$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

تسمى هذه العلاقة **بطريقة الفروق المقسومة.**

مثال (15):

أوجد باستخدام طريقة الفروق المقسومة الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	0.1	0.2	0.3
$y=f(x)$	1	0.995	0.980	0.955

الحل:

نكتب جدول الفروق المقسومة:

x	$f[x]$			
0	1			
		-0.05		
0.1	0.995		-0.5	
		-0.15		0
0.2	0.980		-0.5	
		-0.25		
0.3	0.955			

الحدودية الملائمة هي:

$$\begin{aligned}P_3(x)&=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\\&\quad+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\\&\quad+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\&=1+(-0.05)(x-0)+(-0.5)(x-0)(x-0.1)\end{aligned}$$

$$P_3(x)=1-0.05x-0.5x^2+0.05x=1-\frac{x^2}{2}$$

4-5-1- خواص الفروق المقسومة:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1}=f[x_1,x_0]$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$$

$$=\frac{f[x_1,x_0]-f[x_2,x_1]}{x_0-x_2}=f[x_2,x_1,x_0]$$

وبشكل عام فإن:

$$f[x_0,x_1,x_2,....,x_n]=f[x_n,x_{n-1},.....,x_1,x_0]$$

2- إذا كانت $x_0,x_1,x_2,....,x_{n-1},x_n$ نقاطاً متساوية البعد فيما بينها وطـول الخطوة h حيث $h>0$ أي

$$x_i-x_{i-1}=h \quad , \quad i=1,2,....,n$$

فإن:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{h}=\frac{\Delta y_0}{h}=\frac{1}{1!h}\Delta y_0$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{\frac{y_2-y_1}{h}-\frac{y_1-y_0}{h}}{2h}=\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}=\frac{1}{2!h^2}\Delta^2 y_0$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=$$

$$=\frac{\frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}-\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}}{3h}=\frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}=\frac{1}{3!h^3}\Delta^3 y_0$$

وبشكل عام فإن:

$$f[x_0,x_1,....,x_n]=\frac{1}{n!h^n}\Delta^n y_0$$

4-5-2- تقدير الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المقسومة:

يقدّر الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المقسومة بالعلاقة التالية:

$$e(x)=(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)f[x_0,x_1,....,x_{n-1},x_n]$$

مثال (16):

بفرض $y=f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$y=f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

بطريقة الفروق المقسومة عيّن $f(\frac{1}{3})$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

نكتب جدول الفروق المقسومة:

x	$f[x]$		
0	0		
		3	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$		-3
		$\frac{3}{2}$	
$\frac{1}{2}$	1		

الحدودية الملائمة هي:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 0 + 3(x-0) + (-3)(x-0)(x-\frac{1}{6}) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

$$f(\frac{1}{3}) \square P_2(\frac{1}{3}) = -3(\frac{1}{3})^2 + \frac{7}{2}(\frac{1}{3}) = \frac{5}{6}$$

لنحسب الخطأ المرتكب:

$$e(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0,x_1,x_2]$$

$$= (x-0)(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})(-3)$$

$$e(\frac{1}{3}) = -3(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}) = 0.028$$

مثال (17):

بطريقة الفروق المقسومة أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعـــرّف بالجدول التالي:

x	0	1	2	3
$y = f(x)$	1	2	4	8

ثم عين $f(1.5)$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

نكتب جدول الفروق المقسومة:

x	$f[x]$			
0	1			
		1		
1	2		$\frac{1}{2}$	
		2		$\frac{1}{6}$
2	4		1	
		4		
3	8			

الحدودية الملائمة هي:

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) +$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= 1 + (1)(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 1) + \frac{1}{6}(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

$$=1+x+\frac{x^2-x}{2}+\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$$

$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x+1$$

$$f(1.5)\approx P_3(1.5)=2.8125$$

لنحسب الخطأ المرتكب:

$$e(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$=(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(\frac{1}{6})$$

$$e(1.5)=\frac{1}{6}(1.5)(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)$$

$$=\frac{1}{6}(1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)=0.09375$$

4-6- تمارين:

1- اكتب جدول الفروق الأمامية للتابع $y = f(x)$ المعرّف بالجدول التالي:

x	2	4	6	8	10	12	14
$y = f(x)$	23	93	259	569	1071	1813	2843

2- باستخدام الطريقة العامة أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	1	2	3
$y = f(x)$	1	2	0	-1

ثم احسب $f(1.5)$.

3- عين باستخدام الطريقة العامة الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرّف بالجدول التالي:

x	0	30	60	90
$y = f(x)$	0	0.5	0.866	1

4- أوجد بطريقة لاغرانج الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرّف بالجدول التالي:

x	0	10	20
$y = f(x)$	150	151	155

5- بطريقة لاغرانج أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرّف بالجدول التالي:

x	-1	0	1	2
$y = f(x)$	0	1	2	9

ثم احسب $f(\frac{1}{2})$.

6- بفرض $y = f(x) = 3^x$ تابع معرف عند النقط

$$x_0 = -1 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$

أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ بطريقة لاغرانج ثم عيّن $f(0.5)$ واحسب الخطأ المرتكب.

7- بفرض $y = f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	2	3	4	6	7
$y = f(x)$	4	9	16	36	49

أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ بطريقة نيوتن الأمامية ثم عين $f(2.5)$ واحسب الخطأ المرتكب.

8- أكمل جدول الفروق الأمامية التالي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.3	0.9553			
		−0.0342		
0.4			−0.0093	
				0.0005
0.5				
0.6				

ثم عيّن الحدودية الملائمة واحسب $f(0.44)$ وأوجد الخطأ المرتكب.

9- أوجد بطريقة نيوتن الخلفية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرّف بالجدول التالي:

x	2	4	6	8	10	12
$y=f(x)$	23	93	256	569	1071	1813

ثم عيّن $f(5)$ واحسب الخطأ المرتكب.

10- بفرض $y=f(x)=\sin x$ تابع معرف بالجدول التالي:

x	30	35	40	45	50	55	60
$y=f(x)$	0.5	0.5736	0.6428	0.7071	0.766	0.8192	0.866

احسب $\sin 29$ بطريقة نيوتن الأمامية بالاعتماد على حساب $P_3(29)$ ثم احسب $\sin 61$ بطريقة نيوتن الخلفية بالاعتماد على حساب $P_3(61)$ واحسب الخطأ المرتكب في حساب كل قيمة.

11- باستخدام طريقة الفروق المقسومة أوجد الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرّف بالجدول التالي:

x	0	1	3
$y=f(x)$	-1	-2	8

ثم أوجد $f(2)$ واحسب الخطأ المرتكب.

12- ليكن التابع $y=f(x)$ المعرّف بالجدول التالي:

x	0	0.20	0.30
$y=f(x)$	0	0.20134	0.30452

عين $f(0.23)$ بالاعتماد على طريقة الفروق المقسومة ثم احسب الخطأ المرتكب.

13- بفرض $y=f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	0	2	3	5	6
$y=f(x)$	1	3	2	5	6

أوجد الحدودية الملائمة بطريقة الفروق المقسومة ثم عـيّن $f(1)$ واحسـب الخطأ المرتكب.

14- اكتب حدودية الاستيفاء بطريقة الفروق المقسومة ثم أثبت أن:

$$P_n(x_i) = f[x_i] = f(x_i) \quad ; \quad i = 0,1,2,3,\ldots,n$$

الفصل الخامس

التفاضل العددي

Numerical differentiation

بفرض أن $x(t)$ التابع الذي يعبّر عن المسافة التي يقطعها جسم متحرك بعد مرور t من الزمن، في بعض الحالات يكون من الصعب معرفة القانون الذي يخضع له الجسم في حركته وبالتالي لا يمكن معرفة $x(t)$ بشكل واضح، ومن المهم أن نعرف السرعة $v(t)$ التي يتحرك بها الجسم، ومن المعروف أن السرعة $v(t)$ هي مشتق التابع $x(t)$ أي أن $v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=x'(t)$.

هذا يعني أن حساب السرعة $v(t)$ يعتمد على اشتقاق تابع غير معروف بشكل واضح, وبالتالي لا يمكن حساب السرعة في هذه الحالة، من أجل ذلك يمكن استخدام بعض العلاقات لحساب السرعة بشكل تقريبي، وذلك من خلال معرفة المسافة التي يقطعها الجسم المتحرك في فترات من الزمن $t_0,t_1,t_2,....,t_n$ ثم نبحث عن كثيرة حدود الاستيفاء $P(t)$ التي تستكمل التابع $x(t)$ عند النقط $t_0,t_1,t_2,....,t_n$ ونقرّب $v(t)=x'(t)$ بالتابع $P'(t)$.

وفي كثير من الحالات يكون التابع $y=f(x)$ معطى قيمه في جدول كما يلي:

x	x_0	x_1	x_2	...	...	x_n
$y=f(x)$	$y_0=f(x_0)=f_0$	f_1	f_2	...	...	f_n

لحساب مشتق التابع $y=f(x)$ نفرض:

$$x_{i+1}-x_i=h \quad ; \quad i=0,1,2,...,n-1$$

أي الفروق منتظمة ولنوجد بعض **الصيغ العددية** التي توجد قيم تقريبية لمشـــتق التابع $y = f(x)$.

5-1- صيغة الفروق الأمامية:

بنشر التابع $y = f(x)$ حسب تايلور يمكن أن نكتب:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\ldots \quad (1)$$

حيث h مقدار صغير.

من هذه العلاقة وبإهمال المقادير الصغيرة نستطيع أن نكتب:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

وهذه العلاقة تسمى **بصيغة الفروق الأمامية** والخطأ المرتكب في صيغة الفروق الأمامية يكون من الرتبة $O(h)$.

مثال (1):

بفرض $y = f(x) = x^2$، احسب مشتق هذا التابع عند النقطة $x = 0.5$ ثـــم استخدم صيغة الفروق الأمامية لحساب القيمة التقريبية للتابع $y = f(x) = x^2$ عند النقطة $x = 0.5$ حيث $h = 0.001$ وأوجد الخطأ المطلق.

الحل:

مشتق التابع $f(x) = x^2$ هو $f'(x) = 2x$ بالتعويض نجد:

$$f'(0.5) = 2(0.5) = 1$$

لنحسب مشتق التابع $f(x)$ باستخدام صيغة الفروق الأمامية:

$$f'(0.5)=\frac{f(0.5+0.001)-f(0.5)}{0.001}$$

$$=\frac{(0.501)^2-(0.5)^2}{0.001}=1.001$$

الخطأ المطلق:

$$e=|1.001-1|=0.001$$

5-2- صيغة الفروق الخلفية:

بالتعويض بالعلاقة (1) كل h بـــ $-h$ نجد:

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)-\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+.....$$

(2)

من هذه العلاقة وبإهمال المقادير الصغيرة نجد:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\frac{\nabla f(x_0)}{h}$$

وتسمى هذه العلاقة **بصيغة الفروق الخلفية** والخطأ المرتكب في هذه الصـــيغة من الرتبة $O(h)$.

مثال (2):

احسب مشتق التابع $f(x)=x^2$ باستخدام صيغة الفروق الخلفية عند النقطـــة $x=0.5$ حيث $h=0.001$ وعيّن الخطأ المطلق.

الحل:

$$f'(0.5)=\frac{f(0.5)-f(0.5-0.001)}{0.001}$$

$$= \frac{(0.5)^2 - (0.499)^2}{0.001} = 0.999$$

الخطأ المطلق:

$$e = |1 - 0.999| = 0.001$$

5-3- صيغة الفروق المركزية:

بطرح العلاقة (2) من العلاقة (1) نجد:

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3} f'''(x_0) + \ldots..$$

بإهمال المقادير الصغيرة يمكن أن نكتب العلاقة التالية:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{\delta f(x_0)}{2h}$$

وتسمى هذه العلاقة **بصيغة الفروق المركزية** والخطأ المرتكب بهذه الصيغة من الرتبة $O(h^2)$.

مثال (3):

أوجد مشتق التابع $f(x) = x^2$ بصيغة الفروق المركزية عند النقطة $x = 0.5$ حيث $h = 0.001$ وعيّن الخطأ المطلق.

الحل:

$$f'(0.5) = \frac{f(0.5 + 0.001) - f(0.5 - 0.001)}{2(0.001)}$$

$$= \frac{(0.501)^2 - (0.499)^2}{0.002} = 1.000$$

الخطأ المطلق:

$$e = |1 - 1.000| = 0.000$$

واضح أن صيغة الفروق المركزية أدق من الصيغتين السابقتين.

5-4- صيغة المشتق الثاني للتابع $y = f(x)$:

بجمع العلاقتين (1) و(2) وإهمال المقادير الصغيرة يمكن أن نكتب:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0)$$

ومنه:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

مثال (4):

أوجد القيمة التقريبية للمشتق الثاني للتابع $y = f(x) = x^2$ عند النقطة $x = 0.5$ حيث $h = 0.001$.

الحل:

$$f''(0.5) = \frac{f(0.5 + 0.001) - 2f(0.5) + f(0.5 - 0.001)}{(0.001)^2}$$

$$= \frac{(0.501)^2 - 2(0.5)^2 + (0.499)^2}{(0.001)^2} = 2.000$$

مثال (5):

ليكن التابع $y = f(x) = e^x$ والمعرّف بالجدول التالي:

x	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
$y=f(x)$	3.669	4.482	5.474	6.686	8.166	9.974

عيّن $f'(1.7)$ باستخدام صيغة الفروق الأمامية وصيغة الفروق الخلفية وصيغة الفروق المركزية واحسب الأخطاء المرتكبة وأوجد $f''(1.7)$.

الحل:

$$f'(1.7)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(1.9)-f(1.7)}{0.2}$$

$$=\frac{6.686-5.474}{0.2}=\frac{1.212}{0.2}=6.06$$

$$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(1.7)=e^{1.7}=5.474$$

الخطأ المرتكب باستخدام صيغة الفروق الأمامية:

$$e=|6.06-5.474|=0.586$$

$$f'(1.7)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\frac{f(1.7)-f(1.5)}{0.2}$$

$$=\frac{5.474-4.482}{0.2}=\frac{0.992}{0.2}=4.96$$

الخطأ المرتكب باستخدام صيغة الفروق الخلفية:

$$e=|5.474-4.96|=0.514$$

$$f'(1.7)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{f(1.9)-f(1.5)}{2(0.2)}$$

$$=\frac{6.686-4.482}{0.4}=\frac{2.204}{0.4}=5.51$$

الخطأ المرتكب باستخدام صيغة الفروق المركزية:

$$e = |5.51 - 5.474| = 0.036$$

نلاحظ أن الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المركزية أصغر من الخطأ المرتكب باستخدام طريقة الفروق الأمامية وطريقة الفروق الخلفية، هذا يعني أن طريقة الفروق المركزية أدق من طريقة الفروق الأمامية والخلفية.

$$f''(1.7) = \frac{f(1.7+0.2) - 2f(1.7) + f(1.7-0.2)}{(0.2)^2}$$

$$= \frac{f(1.9) - 2f(1.7) + f(1.5)}{(0.2)^2}$$

$$= \frac{6.686 - 2(5.474) + 4.482}{0.04} = 5.5$$

5-5- صيغ عددية للمشتقات بالاعتماد على الاستيفاء:

يمكن الحصول على صيغ عددية لإيجاد مشتقات التابع $y = f(x)$ بالاعتماد على طرق الاستكمال التي درسناها في الفصل السابق.

إن كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن الأمامية هي:

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots\dots\dots\dots$$

حيث $\alpha = \frac{x - x_0}{h}$ ومنه $x = x_0 + \alpha h \Rightarrow dx = h\,d\alpha$

إذن:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$f'(x) \simeq P_n'(x) = \frac{d}{dx}P_n(x) = \frac{d}{d\alpha}[P_n(\alpha)]\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{d\alpha}[P_n(\alpha)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{d\alpha}[y_0 + \alpha\Delta y_0 + (\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2})\Delta^2 y_0 +$$

$$+\frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha}{6}\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{\alpha^4 - 6\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha}{24}\Delta^4 y_0 + ...]$$

$$= \frac{1}{h}[\Delta y_0 + (\alpha - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{1}{12}(2\alpha^3 - 9\alpha^2 + 11\alpha - 3)\Delta^4 y_0 + ...] \qquad \text{(I)}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{d\alpha}[f'(\alpha)]\frac{d\alpha}{dx}$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{d}{d\alpha}[\Delta y_0 + (\alpha - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{1}{12}(2\alpha^3 - 9\alpha^2 + 11\alpha - 3)\Delta^4 y_0 + ...]$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 + (\alpha - 1)\Delta^3 y_0 + \frac{6\alpha^2 - 18\alpha + 11}{12}\Delta^4 y_0 + ...] \qquad \text{(II)}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3}[\Delta^3 y_0 + \frac{2\alpha - 3}{2}\Delta^4 y_0 + ...] \qquad \text{(III)}$$

مثال (6):

ليكن التابع $y = f(x) = \cos x$ المعرّف بالجدول التالي:

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y = f(x)$	0.980	0.955	0.921	0.878	0.825

أوجد $f'(0.5)$ باستخدام صيغ الفروق الثلاثة واحسب الأخطاء المرتكبة، ثم عيّن $f'(0.45)$ باستخدام $f'(x)$ انطلاقاً من حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن واحسب $f'(0.23), f''(0.23), f'''(0.23)$.

الحل:

$$f'(0.5) = \frac{f(0.6) - f(0.5)}{0.1} = \frac{0.825 - 0.878}{0.1} = -\frac{0.053}{0.1} = -0.53$$

$f'(x) = -\sin x$ ومنه $f'(0.5) = -0.479$

$$e = |0.53 - 0.479| = 0.051$$

الخطأ المرتكب بطريقة الفروق الأمامية.

$$f'(0.5) = \frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = \frac{0.878 - 0.921}{0.1} = -\frac{0.043}{0.1} = -0.43$$

$$e = |0.479 - 0.43| = 0.049$$

الخطأ المرتكب بطريقة الفروق الخلفية.

$$f'(0.5) = \frac{f(0.6) - f(0.4)}{2(0.1)} = \frac{0.825 - 0.921}{0.2} = -\frac{0.092}{0.2} = -0.48$$

$$e = |0.479 - 0.48| = 0.001$$

الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المركزية.

لإيجاد $f'(x)$ بالاعتماد على الاستيفاء نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.2	0.980				
		−0.025			
0.3	0.955		−0.009		
		−0.034		0	
0.4	0.921		−0.009		−0.001
		−0.043		−0.001	
0.5	0.878		−0.010		
		−0.053			
0.6	0.825				

$$x_0 = 0.4 \quad , \quad h = 0.1 \quad , \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

ومنه:

$$\alpha = \frac{0.45 - 0.4}{0.1} = 0.5$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + (\alpha - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)\Delta^3 y_0 + ...]$$

بالتعويض نجد:

$$f'(0.45) = \frac{1}{0.1}[-0.043 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})(-0.010)] = -\frac{0.043}{0.1} = -0.43$$

لحساب $f'(0.23)$ و $f''(0.23)$ و $f'''(0.23)$، لدينا

$$x_0 = 0.2 \quad , \quad h = 0.1 \quad , \quad \alpha = \frac{0.23 - 0.2}{0.1} = 0.3$$

بالتعويض بالعلاقة (I) نجد:

$$f'(0.23)=\frac{1}{0.1}\Big(-0.025+(0.3-0.5)(-0.009)+0+$$

$$+\frac{1}{12}[2(0.3)^3-9(0.3)^2+11(0.3)-3](-0.001)$$

$$=\frac{1}{0.1}[-0.025-0.0018+0.000038]=-\frac{0.02676}{0.1}=-0.2676$$

$$f''(0.23)=\frac{1}{(0.1)^2}[-0.009+0+$$

$$+\frac{6(0.3)^2-18(0.3)+11}{12}(-0.001)]$$

$$=\frac{1}{0.01}[-0.009-0.0005117]=\frac{0.0095117}{0.01}=0.9512$$

$$f'''(x)=\frac{1}{(0.1)^3}[0+\frac{2(0.3)-31}{2}(-0.001)]=\frac{0.0024}{0.001}=2.4$$

ملاحظة:

يمكن بالاعتماد على الصيغ (I) و(II) و(III) إيجاد صيغ لمشتقات التابع $y=f(x)$ عند أي نقطة من نقط الارتكاز فمثلاً عند النقطة $x=x_0$ فإن $\alpha=0$ ومنه:

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+...]$$

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+...]$$

$$f'''(x_0)=\frac{1}{h^3}[\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+...]$$

مثال (7):

بفرض $y = f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$y = f(x)$	0.00000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41075	0.52110

احسب $f''(0.1)$, $f''(0)$, $f'(0.1)$, $f'(0)$.

الحل:

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0.00	0.00000					
		0.10017				
0.05	0.10017		0.00100			
		0.10117		0.00101		
0.10	0.20134		0.00201		0.00003	
		0.10318		0.00104		0.00000
0.15	0.30452		0.00305		0.00003	
		0.10623		0.00107		
0.20	0.41075		0.00412			
		0.11035				
0.25	0.52110					

$$h = 0.05 \ , \ x_0 = 0$$

مشتق التابع عند النقطة $x = 0$ فإن $\alpha = 0$ بالتعويض نجد:

$$f'(0)=\frac{1}{h}[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\frac{1}{5}\Delta y_0]$$

$$=\frac{1}{0.05}[0.10017-\frac{1}{2}(0.00100)+\frac{1}{3}(0.00101)-\frac{1}{4}(0.00003)]$$

$$=\frac{1}{0.05}[0.10017-0.0005+0.0034-0.00000076]$$

$$=\frac{0.10001}{0.05}=2.0002$$

$$f''(0)=\frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0]$$

$$=\frac{1}{0.0025}[0.00100-0.00101+\frac{11}{12}(0.00003)]$$

$$=-\frac{0.00002}{0.0025}=-0.008$$

مشتق التابع عند النقطة $x=0.1$ نعتبر $x_0=0.1$ ومنــه $\alpha=0$ بــالتعويض نجد:

$$f'(0.1)=\frac{1}{h}[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0]$$

$$=\frac{1}{0.05}[0.10318-\frac{1}{2}(0.00305)+\frac{1}{3}(0.00107)]=2.0404$$

$$f''(0.1)=\frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0]$$

$$=\frac{1}{0.0025}[0.00305-0.00107]=0.792$$

5-6- تقدير الخطأ المرتكب في حساب مشتق تابع:

الخطأ المرتكب باعتبار أن $P_n(x)$ هي كثيرة الحدود الملائمة للتابع $y=f(x)$ يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e'(x)=f'(x)-P_n'(x)=(-1)^n\frac{h^{(n+1)}}{n+1}f^{(n+1)}(x)$$

حيث $x\in[x_0,x_n]$.

مثال (8):

بفرض $y=f(x)=x\ln x$ تابع معرّف على المجال $[1,2]$ حيث $h=0.2$ ، أوجد $f'(x)$ عند النقطتين $x=1.4$, $x=1.1$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$y=f(x)$	0	0.2187858	0.4710611	0.7520058	1.058016	1.3862944

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	0				
		0.2187858			
1.2	0.2187858		0.0334895		
		0.252753		–0.0048201	
1.4	0.4710611		0.0286694		0.001216
		0.2809447		–0.0036039	
1.6	0.7520058		0.0250655		0.0008066
		0.3060102		–0.0027973	
1.8	1.058016		0.0222682		
		0.3282784			
2	1.3862944				

مشتق التابع $f(x)$ عند النقطة $x = 1.1$

$h = 0.2$, $x_0 = 1$ ومنه:

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.1-1}{0.2} = 0.5$$

$$f'(1.1) = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + (\alpha - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{1}{12}(2\alpha^3 - 9\alpha^2 + 11\alpha - 3)\Delta^4 y_0 + ...]$$

$$= \frac{1}{0.2}[0.2187858 + 0 + \frac{1}{6}(3(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 2)(-0.0048201) +$$

$$+ \frac{1}{12}(2(\frac{1}{2})^3 - 9(\frac{1}{2})^2 + 11(\frac{1}{2}) - 3)(0.001216)]$$

$$= \frac{1}{0.2}[0.2187858 + 0.0002 + 0.000608]$$

$$=\frac{0.2195938}{0.2}=1.097969$$

ثم لنوجد مشتق التابع $f(x)$ عند النقطة $x=1.4$ وهي نقطة ارتكاز، نعتبر $x_0=1.4$ ونعوض في العلاقة:

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+.....]$$

فنجد:

$$f'(1.4)=\frac{1}{0.2}[0.2809447-\frac{1}{2}(0.0250655)+\frac{1}{3}(-0.0027973)]$$
$$=1.337393$$

لنحسب الخطأ المرتكب:

$$f(x)=x\ln x$$

$$f'(x)=\ln x+1 \quad , \quad f''(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad f'''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{2}{x^3} \quad , \quad f^{(5)}(x)=-\frac{6}{x^4} \quad , \quad f^{(6)}(x)=\frac{24}{x^5}$$

$$\max_{1\le x\le 2} f^{(n+1)}(x)=f^{(6)}(1)=\frac{24}{(1)^5}=24$$

$$e'(x)\le(-1)^5\frac{h^5}{(5+1)}\max_{1\le x\le 2} f^{6}(x)=-\frac{(0.2)^5}{6}(24)=-0.00128$$

ملاحظة:

إذا كان التابع $y=f(x)$ معطى بجدول فقط في هذه الحالة يمكن حساب الخطأ المرتكب كما يلي:

$$f^{(n+1)}=\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

ومنه:

$$e'(x)=(-1)^n\frac{h^n}{n+1}\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}=(-1)^n\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h(n+1)}$$

حيث n هي درجة حدودية الاستيفاء.

مثال (9):

بفرض $y=f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	-1	1	3	5
$y=f(x)$	1	0	2	-1

أوجد $f'(1.1)$ واحسب الخطأ المرتكب،حيث حدودية الاستيفاء هي من الدرجة الثانية أي $P_2(x)$.

الحل:

نحسب α المقابلة للنقطة $x=1.1$ باعتبار $x_0=1$:

$$\alpha=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1.1-1}{2}=\frac{0.1}{2}=0.05$$

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	1			
		-1		
1	0		3	
		2		-8
3	2		-5	
		-3		
5	-1			

نعوض بالعلاقة:

$$f'(x)=\frac{1}{h}[\Delta y_0+(\alpha-\frac{1}{2})\Delta^2 y_0+\frac{1}{6}(3\alpha^2-6\alpha+2)\Delta^3 y_0+.....]$$

فنجد:

$$f'(1.1)=\frac{1}{2}[2+(0.05-0.5)(-5)]=\frac{4.25}{2}=2.125$$

لنحسب الخطأ المرتكب $n=2$:

$$e'(x)=(-1)^n\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h(n+1)} \quad ; \quad x\in[-1,5]$$

$$e'(x)=(-1)^2\frac{-8}{2(3)}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}=-1.3333$$

الخطأ كبير نسبياً لأن طول الخطوة $h=2$.

مثال (10):

بفرض $y=f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي:

x	0	1	2
$y=f(x)$	0	1	1.414

1- أوجد بطريقة الفروق المقسومة الحدودية الملائمة للتابع $y=f(x)$ ثم احسب $f'(1), f'(1.5)$

2- احسب $f'(1)$ باستخدام صيغة الفروق المركزية

3- احسب $f''(1)$

4- احسب الخطأ المطلق في التقريب السابق حيث $f(x)=\sqrt{x}$

الحل:

1- نكتب جدول الفروق المقسومة:

x	$f[x]$		
0	0		
		1	
1	1		−0.293
		0.414	
2	1.414		

الحدودية الملائمة هي:

$$P_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+$$
$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$=0+1(x-0)+(-0.293)(x-0)(x-1)$$
$$=x-0.293x^2+0.293x$$
$$=-0.293x^2+1.293x$$
$$f'(x)\simeq P_2'(x)=-0.586x+1.293$$
$$f'(1)\simeq P_2'(1)=-0.586(1)+1.293=0.707$$
$$f'(1.5)\simeq P_2'(1.5)=-0.586(1.5)+1.293$$

$$= -0.879 + 1.293 = 0.414$$

-2

$$f'(1) = \frac{f(1+1) - f(1-1)}{2} = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{1.414 - 0}{2} = 0.707$$

$$f''(1) = \frac{f(1+1) - 2f(1) + f(1-1)}{(1)^2} = \frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{1}$$ -3

$$= \frac{1.414 - 2}{1} = -0.586$$

$f(x) = \sqrt{x}$ -4

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{4(1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4} = -0.25$$

الخطأ المطلق $e = |0.586 - 0.25| = 0.336$

هذا الخطأ كبير نسبياً لأن طول الخطوة $h = 2$.

5-7- تمارين:

1- ليكن التابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول التالي:

x	1	2	3	4	5
$y=f(x)$	2.105	2.808	3.614	4.604	5.857

أوجد $f'(3)$ باستخدام صيغة الفروق الأمامية والخلفية والمركزية ثم احسب $f'(1), f''(1)$ اعتماداً على حدودية الاستيفاء.

2- بفرض $y=f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20
$y=f(x)$	2.7183	3.0005	3.3046	3.6319	3.9841

أوجد $f'(1)$ واحسب الخطأ المطلق في إيجاد هذه القيمة ثم احسب $f'(1.03), f''(1.03), f'''(1.03)$.

3- بفرض $y=f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	4	6	8	10
$y=f(x)$	1	3	8	20

أوجد $f'(x), f''(x), f'''(x)$ عند النقطتين $x=4, x=4.5$.

4- بفرض $y=f(x)$ تابع معرّف بالجدول التالي:

x	-1	1	3	5	7
$y=f(x)$	3	6	4	-3	-14

أوجد $f'(x), f''(x), f'''(x)$ عند النقطتين $x=-1, x=1.5$.

5- ليكن التابع $y=\dfrac{1}{1+e^x}$ تابع معرّف على المجال $[0,1]$ حيث $h=0.2$ أوجد $f'(0.2)$ ثم احسب الخطأ المرتكب بفرض أن حدودية الاستيفاء هي $P_3(x)$.

6- بفرض $y = f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي:

x	-1	0	1	2
$y = f(x)$	0.5	1	2	4

أوجد بطريقة الفروق المقسومة الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ ثم احسب $f'(0), f''(0), f'(-0.5), f''(-0.5)$.

الفصل السادس

التكامل العددي

Numerical integration

لإيجاد قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ نوجد التابع الأصلي $F(x)$ للتابع المكامل $f(x)$ بفرض أن $f(x)$ تابع متصل على المجال $[a,b]$ ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال (1):

احسب التكامل:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} + \cos x + x^3)dx$$

الحل:

$f(x) = \sqrt{x} + \cos x + x^3$ التابع الأصلي للتابع $f(x)$ هو:

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \sin x + \frac{x^4}{4}$$

ومنه:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \cos x + x^3\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \sin x + \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \sin 1 + \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{11}{12} + 0.841471 = 1.75814$$

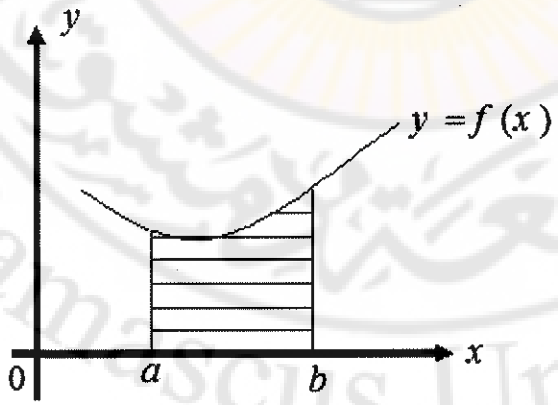
ولكن في بعض الحالات توجد صعوبة في إيجا د التابع الأصلي للتابع المكامل $f(x)$، وفي حالات أخرى يكون التابع $f(x)$ معطى فقط في جدول فمثلاً في مخبر الفيزياء يمكن عند إجراء تجربة فيزيائية الحصول على قيم التيار الكهربائي عند أزمنة معينة، في مثل هذه الحالات نستخدم الطرق العددية:

6-1- طريقة المستطيلات:

المفهوم الهندسي لتكامل التابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ هو المساحة المحصورة بين محور السينات ومنحني التابع $f(x)$ والمستقيمين $x=a, x=b$، لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل $\int_a^b f(x)dx$ حيث $f(x)$ تابع قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$

نعدّ $[a,b]$ مجالاً جزئياً واحداً كما في الشكل (6-1) عندئذٍ المساحة الواقعة تحت منحني التابع $y=f(x)$ التي هي مساحة مستطيل هي القيمة التقريبية للتكامل أي:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a)$$



الشكل (6-1)

وكلما كان طول المجال $[a,b]$ صغيراً فإن الخطأ يكون صغيراً، لـذلك نقسـم المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية متساوية الطول طـول كـل منهـا $h=\frac{b-a}{n}$ عندئذٍ المساحة الواقعة تحت منحني التابع $y=f(x)$ التي هـي مجموع مساحات المستطيلات هي القيمة التقريبية للتكامل أي:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}[f(x_0)+f(x_1)+....+f(x_{n-1})]$$

حيث $x_0=a<x_1<x_2<....<x_{n-1}<x_n=b$.

مثال (2):

احسب القيمة التقريبية للتكامل: $\int_0^1(\frac{1}{4}+x^2)dx$

بطريقة المستطيلات حيث $n=5$ ثم $n=10$، ماذا تستنتج؟

الحل:

من أجل $n=5$ فإن طول خطوة التقسيم هي:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{5}=0.2$$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y=f(x)$	0.25	0.29	0.41	0.61	0.89	1.25

بالتعويض بطريقة المستطيلات نجد:

$$\int_0^1(\frac{1}{4}+x^2)dx=\frac{1-0}{5}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$$
$$=0.2[0.25+0.29+0.41+0.61+0.89+1.25]$$
$$=(0.2)(3.7)=0.74$$

ومن أجل $n=10$ فإن طول الخطوة: $h=\frac{1-0}{10}=0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$y=f(x)$	0.25	0.26	0.29	0.34	0.41	0.5	0.61	0.74	0.89	1.06	1.25

بالتعويض بطريقة المستطيلات نجد:

$$\int_0^1 (\frac{1}{4}+x^2)dx = \frac{1-0}{10}[f(x_0)+f(x_1)+....+f(x_9)]$$
$$=0.1[0.25+0.26+0.29+0.34+0.41+0.5+0.61+$$
$$+0.74+0.89+1.06+1.25]$$
$$=(0.1)(6.6)=0.66$$

نستنتج أنه كلما كانت طول الخطوة أصغر كانت النتيجة أدق.

6-2- طريقة أشباه المنحرفات:

في هذه الطريقة يمكن تقريب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ بمساحة شبه المنحرف كما فعلنا بالطريقة السابقة ويمكن الاستفادة من الاستيفاء لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل $\int_a^b f(x)dx$ كما يلي:

نقسم المجال $[a,b]$ إلى n قسم متساوية الطول، طول كل منها $h=\frac{b-a}{n}$

$$x_0=a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n=b$$

على المجال $[x_0,x_1]$ إذا قربنا $f(x)$ بحدودية من الدرجة الأولى ونعلم أن حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن الأمامية تعطى كما يلي:

$$P_n(x)=P_n(\alpha)=y_0+\alpha\Delta y_0+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0+....$$

حيث:

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} \quad , \quad h = x_{i+1} - x_i \quad ; \quad i = 0,1,2,...,n-1$$

ومنه يمكن أن نكتب:

$$\int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (y_0 + \alpha \Delta y_0)dx$$

$$= \int_0^1 (y_0 + \alpha \Delta y_0) h d\alpha$$

$$= h[y_0 \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \Delta y_0]_0^1$$

$$= h[y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0] = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

التكامل على المجال $[a,b]$ يمكن أن يكتب كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + ... + \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{n-1} + y_n]$$

والعلاقة:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + y_n]$$

تسمى بطريقة أشباه المنحرفات لحساب التكامل المحدد.

مثال (3):

أوجد التكامل $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $n=5$ و $n=10$ واحسب الخطأ المطلق، ماذا تستنتج؟

الحل:

من أجل $n=5$ فإن: $h=\frac{2-1}{5}=0.2$

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$y=f(x)$	1	0.8333	0.7143	0.6250	0.5556	0.5000

بالتعويض بطريقة أشباه المنحرفات نجد:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}=\frac{h}{2}[y_0+2(y_1+y_2+y_3+y_4)+y_5]$$

$$=\frac{0.2}{2}[1+2(0.8333+0.7143+0.6250+0.5556)+0.5]$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}=\frac{0.2}{2}[1+2(2.7282)+0.5]=0.69564$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}=[\ln x]_1^2=\ln 2-\ln 1=0.693147-0=0.693147$$

الخطأ المطلق:

$$e=|0.69564-0.693147|=0.002493$$

ومن أجل $n=10$ فإن $h=\frac{2-1}{10}=0.1$

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$y=f(x)$	1	0.901	0.8333	0.7692	1.7143	0.6667

1.6	1.7	1.8	1.9	2
0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

بالتعويض بطريقة أشباه المنحرفات نجد:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + ... + y_9) + y_{10}]$$

$$= \frac{0.1}{2}[1 + 2(6.1877) + 0.5]$$

$$= \frac{0.1}{2}[13.8754] = 0.69377$$

الخطأ المطلق:

$$e = |0.69377 - 0.693147| = 0.000623$$

نستنتج أن الخطأ المطلق يصغر كلما زدنا عدد التقسيمات n.

6-2-1- تقدير الخطأ المرتكب بطريقة أشباه المنحرفات:

الخطأ المرتكب على المجال $[x_0, x_1]$ هو من الشكل:

$$e = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 y_0 dx$$

$$= \frac{h}{2} \Delta^2 y_0 \int_0^1 (\alpha^2 - \alpha) d\alpha$$

$$= \frac{h}{2} \Delta^2 y_0 [\frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^2}{2}]_0^1$$

$$= \frac{h}{2} \Delta^2 y_0 [\frac{1}{3} - \frac{1}{2}] = -\frac{1}{12} h \Delta^2 y_0$$

$f''(x) = \frac{\Delta^2 f}{h^2}$ على المجال $[x_0, x_1]$

ومنه:

$$e = -\frac{1}{12} h[h^2 f''(x)]$$

$$= -\frac{1}{12} h^3 f''(x) \quad ; \quad x \in [x_0, x_1]$$

الخطأ على المجال $[a,b]$ من الشكل:

$$E = -\frac{1}{12}(n) h^3 f''(x) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

$$E = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(x) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

$$E \le -\frac{b-a}{12} \max_{x_0 \le x \le x_n} |f''(x)|$$

مثال (4):

احسب التكامل $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h = 0.1$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y = f(x)$	0.5	0.52498	0.54983	0.57444	0.59869	0.62246	0.64566

0.7	0.8	0.9	1
0.66819	0.68997	0.71095	0.73106

بالتعويض بطريقة أشباه المنحرفات نجد:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + ... + y_9) + y_{10}]$$

$$= \frac{0.1}{2}[0.5 + 2(5.5817) + 0.73106] = 0.62007$$

لنحسب الخطأ المرتكب: $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

$$f'(x) = e^x(1+e^x)^{-1} - e^{2x}(1+e^x)^{-2}$$

$$f''(x) = e^x(1+e^x)^{-1} - e^{2x}(1+e^x)^{-2} - 2e^{2x}(1+e^x)^{-2} +$$

$$+2e^{3x}(1+e^x)^{-3}$$

$$f''(x) = e^x(1+e^x)^{-1} - 3e^{2x}(1+e^x)^{-2} + 2e^{3x}(1+e^x)^{-3}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)} + \frac{3e^{2x}}{(1+e^x)^2} + \frac{2e^{3x}}{(1+e^x)^3}$$

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x) = f''(1) = 3.11582$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ:

$$E = -\frac{b-a}{12}h^2 \max_{0\le x\le 1}|f''(x)|$$

نجد:

$$E = -\frac{1-0}{12}(0.1)^2(3.11582) = 0.0025965$$

مثال (5):

احسب التكامل $\int_{0.5}^{1} xe^x dx$ بطريقة أشباه المنحرفات وبخطأ مطلق لا يتجاوز $.10^{-3}$

الحل:

لحساب التكامل نوجد طول الخطوة h حيث $b=1, a=0.5$

$$f(x)=xe^x$$
$$f'(x)=e^x+xe^x$$
$$f''(x)=e^x+e^x+xe^x=e^x(2+x)$$
$$\max_{0.5\le x\le 1} f''(x)=f''(1)=3e=8.15484$$
$$|E|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2\max_{0.5\le x\le 1} f''(x)\right|\le 0.001$$
$$\frac{1-0.5}{12}h^2(8.15484)\le 0.001$$
$$8.15484h^2\le(0.001)(24)$$
$$h^2\le\frac{0.024}{8.15484}=0.002943$$

ومنه:

$$h\le 0.0542$$

نأخذ $h=0.05$:

x	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75
$y=f(x)$	0.8244	0.9533	1.0933	1.2451	1.4096	1.5878

0.8	0.85	0.9	0.95	1
1.7804	1.9887	2.2136	2.4564	2.7183

بالتعويض بطريقة أشباه المنحرفات نجد:

$$\int_{0.5}^{1} xe^x dx=\frac{h}{2}[y_0+2(y_1+y_2+....+y_9)+y_{10}]$$
$$=\frac{0.05}{2}[0.8244+2(14.7282)+2.7183]$$

$$=\frac{0.05}{2}(32.9991)=0.8250$$

6-3- طريقة سيمبسون:

لحساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ نقسم المجال $[a,b]$ باستخدام طول خطوة التقسيم $h=\frac{b-a}{n}$ حيث n عدد زوجي أي نستطيع أن نكتب:

$$[a,b]=[x_0,x_2]\cup[x_2,x_4]\cup....\cup[x_{n-2},x_n]$$

نحسب التابع على المجال $[x_0,x_2]$ بالاعتماد على حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن الأمامية:

$$P_n(x)=P_n(\alpha)=y_0+\alpha\Delta y_0+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0+....$$

وبتقريب التابع المكامل $f(x)$ بحدودية من الدرجة الثانية يمكن أن نكتب:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}(y_0+\alpha\Delta y_0+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=\int_0^2[y_0+\alpha\Delta y_0+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha)]h\Delta^2 y_0 d\alpha$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=h[y_0\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Delta y_0+\frac{1}{2}(\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^2}{2})\Delta^2 y_0]_0^2$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=h[2y_0+2\Delta y_0+\frac{1}{2}(\frac{8}{3}-2)\Delta^2 y_0]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=h[2y_0+2\Delta y_0+\frac{2}{6}\Delta^2 y_0]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=h[2y_0+2(y_1-y_0)+\frac{1}{3}(y_2-2y_1+y_0)]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

التكامل على المجال $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \ldots$$

$$+ \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

وهذه العلاقة تسمى بطريقة سيمبسون لحساب التكامل المحدد.

مثال (6):

احسب التكامل $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$ بطريقة سيمبسون حيث $n = 4$ ثم استنتج قيمة تقريبية لـ π.

الحل:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-1)}{4} = 0.5$$

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$y = f(x)$	0.5	0.8	1	0.8	0.5

بالتعويض بطريقة سيمبسون نجد:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$= \frac{0.5}{3}[0.5 + 4(0.8) + 2(1) + 4(0.8) + 0.5]$$

$$= \frac{0.5}{3}(9.4) = 1.5667$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\tan^{-1} x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

ومنه نستنتج:

$$\frac{\pi}{2} = 1.5667 \Rightarrow \pi = 2(1.5667) = 3.1334$$

6-3-1- تقدير الخطأ المرتكب بطريقة سيمبسون:

الخطأ المرتكب على المجال $[x_0, x_2]$ هو:

$$e = \int_{x_0}^{x_2} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 y_0 dx$$

$$e = \frac{h\Delta^3 y_0}{6} \int_0^2 (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha) d\alpha$$

$$e = \frac{h\Delta^3 y_0}{6} [\frac{\alpha^4}{4} - \alpha^3 + \alpha^2]_0^2 = \frac{h\Delta^3 y_0}{6}[4 - 8 + 4] = 0$$

وبالتالي فإن الخطأ يكون:

$$e = h\int_0^2 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} \Delta^4 y_0 dx$$

$$e = \frac{h\Delta^4 y_0}{24} \int_0^2 (\alpha^4 - 6\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha) d\alpha$$

$$e = \frac{h\Delta^4 y_0}{24} \left[\frac{\alpha^5}{5} - \frac{6}{4}\alpha^4 + \frac{11}{3}\alpha^3 - 3\alpha^2\right]_0^2$$

$$e=\frac{h\Delta^4 y_0}{24}\left[-\frac{4}{15}\right]=-\frac{1}{90}h\Delta^4 y_0$$

وبملاحظة أن $f^{(4)}(x)=\frac{\Delta^4 y_0}{h^4}$ فإن:

$$e=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(x) \quad ; \quad x\in[x_0,x_2]$$

الخطأ على المجال $[a,b]$ هو:

$$E=-\frac{h^5(\frac{n}{2})}{90}f^{(4)}(x) \quad ; \quad x\in[a,b]$$

$$E=-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(x) \quad ; \quad x\in[a,b]$$

مثال (7):

احسب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h=\frac{\pi}{8}$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

$$n=\frac{b-a}{h}=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi}{2}(\frac{8}{\pi})=\frac{8}{2}=4$$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$y=f(x)$	1	1.46621	2.02811	2.51904	2.71828

بالتعويض بطريقة سيمبسون نجد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$= \frac{\frac{\pi}{8}}{3}[1 + 4(1.46621) + 2(2.02811) + 4(2.51904) + 2.71828]$$

$$= 3.10278$$

لنحسب الخطأ المرتكب:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

$$f'(x) = \cos x e^{\sin x}$$

$$f''(x) = -\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x}$$

$$f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x) e^{\sin x}$$

$$f''(x) = (-\cos x - 2\cos x \sin x) e^{\sin x} +$$

$$+ \cos x (-\sin x + \cos^2 x) e^{\sin x}$$

$$= (-\cos x - 3\sin x \cos x + \cos^3 x) e^{\sin x}$$

$$f^{(4)}(x) = [\sin x - 3\cos^2 x + 3\sin^2 x + 3\cos^2 x(-\sin x)] e^{\sin x} +$$

$$+ \cos x (-\cos x - 3\sin x \cos x + \cos^3 x) e^{\sin x}$$

$$f^{(4)}(x) = [\cos^4 x - 6\sin x \cos^2 x - 4\cos^2 x +$$

$$+ 3\sin^2 x + \sin x] e^{\sin x}$$

$$f^{(4)}(0) = -3 \quad , \quad f^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = 10.87312$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ:

$$E = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(x)$$

نجد:

$$E = -\frac{(\frac{\pi}{2}-0)}{180}(\frac{\pi}{8})^4 f^{(4)}(\frac{\pi}{2})$$

$$E = -\frac{\pi}{360}(\frac{\pi}{8})^4(10.87312) = -0.0022565$$

مثال (8):

احسب التكامل $\int_1^{1.3}\sqrt{x}\,dx$ بطريقة سيمبسون وبخطأ مطلق لا يتجاوز 10^{-2}.

الحل:

لحساب التكامل نوجد طول الخطوة h حيث $a=1$, $b=1.3$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

$$\max_{1\le x\le 1.3}\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{15}{16}$$

بالتعويض بعلاقة الخطأ بطريقة سيمبسون:

$$E = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(x)$$

نجد:

$$|E| = \left| \frac{b-a}{180} \frac{15}{16} h^4 \right| \le 0.01$$

$$\frac{0.3}{180} \frac{15}{16} h^4 \le 0.01$$

$$\frac{4.5}{2880} h^4 \le 0.01$$

$$h^4 \le (0.015625)(0.01)$$

$$h^4 = 0.000015625$$

$$\Rightarrow h \le 0.06287$$

نختار $h = 0.05$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.3}{0.05} = 6$$

x	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
$y = f(x)$	1	1.0247	1.0488	1.0724	1.0954	1.1180	1.1402

بالتعويض بطريقة سيمبسون:

$$\int_1^{1.3} \sqrt{x}\, dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6]$$

نجد:

$$\int_1^{1.3} \sqrt{x}\, dx = \frac{0.05}{3}[1 + 4(1.0247 + 1.0724 + 1.1180) +$$

$$+2(1.0488 + 1.0954) + 1.1402]$$

$$= \frac{0.05}{3}(19.289) = 0.32148333$$

مثال (9):

احسب التكامل $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h = 0.2$.

الحل:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.2} = 5$$

نلاحظ أن عدد التقسيمات فردي، في هذه الحالة نطبق طريقة سيمبسون على أكبر عدد زوجي من المجالات الجزئية ونطبق طريقة أشباه المنحرفات على المجال الجزئي الأخير كما يلي:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y = f(x)$	1.000	0.961	0.852	0.698	0.527	0.368

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4] + \frac{h}{2}[y_4 + y_5]$$

$$= \frac{0.2}{3}[1 + 4(0.961 + 0.698) + 2(0.852) + 0.527] +$$

$$+ \frac{0.2}{2}[0.527 + 0.368] = 0.6578 + 0.0895 = 0.7473$$

6-4- تمارين:

1- احس2ب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ بطريقة المستطيلات حيث $n = 10$.

2- بطريقة المستطيلات احسب التكامل $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$ حيث $h = 1$ ثم بطريقة أشباه المنحرفات.

3- احسب التكامل $\int_2^3 x^2 e^{-x} dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h = 0.2$.

4- احسب التكامل $\int_1^{1.3} \sqrt{x}\, dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h = 0.05$ واحسب الخطأ المرتكب.

5- احسب التكامل $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h = 0.2$ واحسب الخطأ المرتكب.

6- احسب التكامل $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ بحيث يكون الخطأ المطلق لا يتجاوز 0.01.

7- احسب التكامل $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ بطريقة المستطيلات وبطريقة أشباه المنحرفات وبطريقة سيمبسون حيث $h = 0.1$.

8- احسب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h = \frac{\pi}{8}$ واحسب الخطأ المرتكب.

9- احسب قيمة التكامل $\int_{0.2}^{2.6} \frac{\sin x}{x} dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h = 0.4$

واحسب الخطأ المرتكب.

10- احسب التكامل $\int_{0}^{1} \frac{dx}{2+x^2}$ بطريقة سيمبسون حيث $n = 6$

واحسب الخطأ المرتكب.

11- احسب التكامل $\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h = 0.1$

واحسب الخطأ المرتكب.

12- احسب قيمة التكامل $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} dx$ بطريقة سيمبسون وبخطأ مطلق لا يتجاوز 10^{-3}.

الفصل السابع

حل المعادلات التفاضلية

Solving differential equations

إن الحل العام للمعادلة التفاضلية عادة يحتوي على عددمن الثوابت يساوي إلـــى رتبة المعادلة وهذا يعني ان لكل معادلة تفاضلية عدداً كثيراً من الحلول وذلـــك حسب القيم التي تُعطى لتلك الثوابت.

ومن أجل تعيين حل وحيد يجب أن نعرف شروطاً ابتدائية أو حديـــة يجـــب أن يحققها الحل ويشترط لذلك أن تكون المعادلة التفاضلية قابلة للحل. إن الطـــرق العادية المعروفة في بعض الحالات لا تمكننا من حل المعادلات التفاضلية لذلك نستخدم الطرق العددية في مثل هذه الحالات ومن هذه الطرق العددية ما يلي:

7-1- طريقة أولر:

لحل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى

$$y' = f(x, y)$$

التي تحقق الشرط الابتدائي

$$y(x_0) = y_0$$

نوجد قيم التابع $y(x)$ ومشتقه عند النقطة x_0 ثم نوجد قيمة التابع التقريبية عند النقطة x_1 ثم قيمة التابع التقريبية عند النقطة x_2 وهكذا نتابع لحساب قيم التابع التقريبية عند بقية النقط.

نفرض أن التابع هو كثيرة حدود من الدرجة الأولى كما يلي:

$$y = y(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

ومنه

$$y(x_0) = a_0$$
$$y'(x_0) = a_1$$

بالتعويض نجد:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0)$$

ولحساب $y_1 = y(x_1)$ نكتب $y_1 = y_0 + hy'(x_0)$ حيث $h = x_1 - x_0$

وبشكل عام يمكن أن نكتب

$$y_{n=1} = y_n + hy'(x_n)$$
$$= y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n)$$

حيث:

$$i = 0,1,2,.....,n \qquad ,h = x_{i+1} - x_i$$

وهذه العلاقة تسمى طريقة أولر

مثال(1):

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y - 2\frac{x}{y}$ بطريقة أولر حيث $y(o) = 1$, $h = 0.2$ عند النقطة $x = 1$

الحل:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
$$= y_n + 0.2\left(y_n - 2\frac{x_n}{y_n}\right)$$

$$x_1 = 0.2 \qquad y_0 = 1 \qquad x_0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + 0.2\left(y_0 - 2\frac{x_0}{y_0}\right)$$

$$= 1 + 0.2(1-0) = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + 0.2\left(y_1 - 2\frac{x_1}{y_1}\right)$$

$$= 1.2 + 0.2(1.2) - (0.2)(2)\left(\frac{0.2}{1.2}\right)$$

$$= 1.44 - 0.06667 = 1.3733$$

$$y_3 = y_2 + 0.2\left(y_2 - 2\frac{x_2}{y_2}\right)$$

$$= 1.3733 + 0.2\left(1.3733 - 2\frac{0.4}{1.3733}\right)$$

$$= 1.64796 - 0.1165$$

$$= 1.53146$$

$$y_4 = y_3 + 0.2\left(y_3 - 2\frac{x_3}{y_3}\right)$$

$$= 1.53146 + 0.2\left(1.53146 - 2\frac{0.6}{1.53146}\right)$$

$$= 1.837752 - 0.156713 = 1.681039$$

$$y_5 = y_4 + 0.2\left(y_4 - 2\frac{x_4}{y_4}\right)$$

$$= 1.681039 + 0.2\left(1.681039 - 2\frac{0.8}{1.681039}\right)$$

$$= 2.017247 - 0.190368 = 1.82689$$

مثال(2)

حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ بطريقة أولر حيث $y(0) = 1$ $h = 0.02$ عند النقطة $x = 0.04$ ثم احسب الخطأ المئوي.

الحل: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_1 = 0.02$, $x_2 = 0.04$

نطبق طريقة اولر فنجد:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= y_0 + h(x_0 + y_0) \\ &= 1 + h(0+1) = 1 + 0.02(0+1) \\ &= 1.02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h(x_1 + y_1) \\ &= 1.02 + 0.02(0.02 + 1.02) \\ &= 1.02 + 0.02(1.5) \\ &= 1.0408 \end{aligned}$$

لحساب الخطأ المئوي نحتاج لإيجاد الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية $y' = x + y$ وهي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى ويمكن كتابتها بالشكل $y' - y = x$

نوجد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة $y' - y = 0$

الحل هو:

$$y(x) = \alpha e^x$$

حيث α ثابت حقيقي.

نوجد حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية $y' - y = x$ نفرض أن هذا الحل الخاص هو $y = \alpha(x)e^x$

بالاشتقاق

$$y'(x)=\left[\alpha(x)e^{x}\right]'$$
$$=\alpha'(x)e^{x}+\alpha(x)e^{x}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$y'-y=x \Leftrightarrow \alpha'(x)e^{x}+\alpha(x)e^{x}-\alpha(x)e^{x}=x$$
$$\alpha'(x)e^{x}=x$$
$$\alpha'(x)=xe^{-x}$$

ومنه

$$\alpha(x)=\int xe^{-x}du$$

نكامل بالتجزئة فنجد:

$$\alpha(x)=-xe^{-x}-\int -e^{-x}dx$$
$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$
$$=-xe^{x}-e^{-x}+c$$
$$=-(x+1)e^{-x}+c$$

نأخذ $\alpha(x)=-(x+1)e^{-x}$

ومنه الحل الخاص هو

$$y=\alpha(x)e^{x}=-(x+1)e^{-x}e^{x}=-(x+1)$$

إذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'-y=x$ هو

$$y(x)=\alpha e^{x}-x-1$$

وبما ان $y(0)=1$ فإن $\alpha e^{0}-0-1=1 \Leftarrow \alpha=2$

وبالتالي فإن الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية

$$y'=x+y\ ,\ \ y(0)=1$$

هو $y(x)=2e^{x}-x-1$

$$y(0.04)=2(2.7182)^{0.04}-0.04-1$$
$$=1.0416$$

الخطأ المطلق

$$e=|1.0408-1.0416|=0.0008$$

الخطا النسبي:

$$R=\frac{0.0008}{1.0416}=0.000768$$

الخطأ المئوي

$$E=R\times 100\%$$
$$=0.0768\%$$

7-2- طريقة تايلور:

لحل المعادلة التفاضلية: $y'=f(x,y)$

$$y(x_0)=y_0$$

نوجد المشتقات المتتالية للتابع $f(x,y)$ بالنسبة للمتغيرين x و y وبفرض $x_{i+1}-x_i=h$, $i=0,1,2,....$ نعوض في منشور تايلور

$$y(x+h)=y(x)+\frac{h}{1!}y'(x)+\frac{h^2}{2!}y''(x)+\frac{h^3}{3!}y'''(x)+....$$

حيث h مقدار صغير

فنجد:

$$y_1=y(x_1)=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2!}y''(x_0)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_0)+....$$

والذي نسميه النشر بجوار النقطة (x_0) ثم ننشر بجوار النقطة (x_1) كما يلي:

$$y_2 = y(x_2) = y(x_1) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2!}y''(x_1) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_1) + \dots$$

وهكذا نتابع حتى الحصول على التقريبي $y_{n+1}(x)$ للمعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال(3)

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x.y$ بطريقة تايلور مستخدماً خمسة حـــدود من نشر تايلور حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 0.2$.

الحل:

$$y''(x) = y + xy'$$
$$y'''(x) = y' + y' + xy''$$
$$= 2y' + xy''$$
$$y^{(4)}(x) = 2y'' + y'' + xy'''$$
$$= 3y'' + xy'''$$
$$y'(x_0) = y'(0) = x_0 y_0 = 0$$
$$y''(x_0) = y''(0) = 1 + (0)(0) = 1$$
$$y'''(x_0) = y'''(0) = 2(0) + (0)(1) = 0$$
$$y^{(4)}(x_0) = y^{(4)}(0) = 3(1) + (0)(0) = 3$$

بالتعويض في نشر تايلور

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_0)$$

نجد:

$$y_1 = 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2!}(1) + \frac{(0.1)^3}{3!}(0) + \frac{(0.1)^4}{4!}(3)$$
$$y_1 = y(0.1) = 1.005$$

ثم نحسب:

$$y'(x_1)=y'(0.1)=x_1y_1=(0.1)(1.005)=0.1005$$
$$y''(x_1)=y_1+x_1y_1'=1.005+(0.1)(0.1005)=1.015$$
$$y'''(x_1)=2y_1'+xy_1''$$
$$=2(0.1005)+(0.1)(1.015)=0.3025$$
$$y^{(4)}(x_1)=3y_1''+x_1y_1'''$$
$$=3(1.015)+(0.1)(0.3025)=3.0752$$

نعوض في نشر تايلور

$$y_2=y(0.2)=y_1+hy_1'+\frac{h^2}{2!}y_1''+\frac{h^3}{3!}y_1'''+\frac{h^4}{4!}y_1^{(4)}$$

فنجد:

$$y_2=1.005+(0.1)(0.1005)+\frac{(0.1)^2}{2}(1.015)+$$
$$+\frac{(0.1)^3}{6}(0.3025)+\frac{(0.1)^4}{24}(3.0752)$$
$$y_2=1.020188$$

الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية $y\equiv x.y$ نحصل عليه كما يلي:

$$y'=\frac{dy}{dx}=x.y$$

ومنه $\frac{dy}{y}=xdx$

بالتكامل نجد:

$$\int_{y=1}^{y}\frac{dy}{y}=\int_{x=0}^{x}xdx$$

$$[\ln y]_1^y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

$$\ln y - \ln 1 = \frac{x^2}{2} - 0$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

عند النقطة $x = 0.2$ نجد:

$$y(0.2) = e^{\frac{(0.2)^2}{2}} = e^{0.02} = 1.0202$$

وهذه القيمة قريبة جداً من القيمة $y_2 = 1.020188$

7-2-1 تقدير الخطأ المرتكب باستخدام طريقة تايلور:

عند الاكتفاء بـــ k حد من حدود نشر تايلور فإن الخطأ المرتكب يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e(x) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y_{(x)}^{(k+1)} \qquad x_n \le x \le x_n + h$$

مثال(4)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x-y}{2}$ بطريقة تايلور مستخدماً خمسة حدود من نشر تايلور حيث: $y(0) = 1$ و $h = 0.25$ في المجال $[0,1]$ واحسب الخطأ المرتكب.

الحل:

$$y''(x) = \frac{1-y'}{2} = \frac{1-\frac{x-y}{2}}{2} = \frac{2-x+y}{4}$$

$$y'''(x)=\frac{-1+y'}{4}=\frac{-1+\frac{x-y}{2}}{4}=\frac{-2+x-y}{8}$$

$$y^{(4)}(x)=\frac{1-y'}{8}=\frac{1-\frac{x-y}{2}}{8}=\frac{2-x+y}{16}$$

$$y'(x_0)=y'(0)=\frac{0-1}{2}=-0.5$$

$$y''(x_0)=y''(0)=\frac{2-0+1}{4}=0.75$$

$$y'''(x_0)=y'''(0)=\frac{-2+0-1}{8}=-0.375$$

$$y^{(4)}(x_0)=y^{(4)}(0)=\frac{2-0+1}{16}=0.1857$$

بالتعويض بطريقة تايلور

$$y_1=y(x_1)=y_0+hy_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\frac{h^3}{3!}y_0'''+\frac{h^4}{4!}y_0^{(4)}$$

نجد:

$$y_1=1+(0.25)(-0.5)+\frac{(0.25)^2}{2}(0.75)$$
$$+\frac{(0.25)^3}{6}(-0.375)+\frac{(0.25)^4}{24}(0.1857)$$

$$y_1=0.8974915$$

ثم نحسب:

$$y'(x_1)=y'(0.25)=\frac{0.25-0.8974915}{2}=-0.3237458$$

$$y''(x_1)=y''(0.25)=\frac{2-0.25+0.8974915}{4}=0.6618729$$

$$y'''(x_1)=y'''(0.25)=\frac{-2+0.25-0.8974915}{8}=-0.3309364$$

$$y^{(4)}(x_1)=y^{(4)}(0.25)=\frac{2-0.25+0.8974915}{16}=0.1654682$$

بالتعويض بطريقة تايلور

$$y_2=y(x_2)=y_1+hy_1'+\frac{h^2}{2!}y_1''+\frac{h^3}{3!}y_1'''+\frac{h^4}{4!}y_1^{(4)}$$

نجد:

$$y_2=0.8974915+0.25(-0.3237458)+\frac{(0.25)^2}{2}(0.6618729)$$
$$+\frac{(0.25)^3}{6}(-0.3309364)+\frac{(0.25)^4}{24}(0.1654682)$$

$$y_2=0.8364037$$

وبنفس الخطوات نجد"

$$y_3=0.8119696$$
$$y_4=0.8195940$$

لنحسب الخطا المرتكب من أجل ذلك نوجد:

$$y^{(5)}(x)=\frac{-1+y'}{16}=\frac{-1+\frac{x-y}{2}}{16}=\frac{-2+x-y}{32}$$

$$y^{(5)}(x)=\frac{-2+x-y}{32}$$

$$y^{(5)}=\frac{-2+1-0.8195940}{32}=-0.056862$$

بالتعويض بالعلاقة:

$$e(x)=\frac{h^{k-1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(x)$$

نجد:

$$e=\frac{(0.25)^5}{5!}(-0.056862)=-0.00000046274$$

ملاحظة: يمكن تطبيق طريقة تايلور لحل معادلات تفاضلية من مراتب أعلى وفي هذه الحالة يصبح حساب المشتقات المتتالية أكثر صعوبة.

مثال(5)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y''-4x^2y=-2e^{-x^2}$ بطرقة تايلور حيث

$y(0)=1$ و $y'(0)=e$

$h=1$ عند النقطة $x=1$

الحل:

$$y''=4x^2y-2e^{-x^2}$$

$$y'''=8xy+4x^2y'+4xe^{-x^2}$$

$$y^{(4)}=8y+8xy'+8xy'+4x^2y''+4e^{-x^2}-8x^2e^{-x^2}$$

$$y^{(4)}=8y+16xy'+4x^2y''+4e^{-x^2}-8x^2e^{-x^2}$$

$$y''(0)=4(0)(1)-2e^0=-2$$

$$y'''(0)=8(0)(1)+4(0)e+4(0)e^0=0$$

$$y^{(4)}(0)=8(1)+16(0)e+4(0)(0)+4e^{-0}-8(0)e^{-0}$$

$$=8+4=12$$

بالتعويض بطريقة تايلور

$$y_1 = y(x_1) = y(1)$$
$$= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_0)$$

نجد:

$$y_1 = 1 + (1)e + \frac{(1)^2}{2}(-2) + \frac{(1)^3}{6}(0) + \frac{(1)^4}{24}(12)$$
$$y_1 = 3.218$$

7-3- طريقة رانج-كاتا:

إن طريقة رانج – كاتا تشبه طريقة أولر ولكن طريقة رانج- كاتا تعدّ أدق, ولطريقة رانج- كاتا عدة صيغ من هذه الصيغ طريقة رانج – كاتا من المرتبة الثانية.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

حيث

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$$

7-3-1- طريقة رانج-كاتا من المرتبة الثالثة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

حيث:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf(x_n + h, y_n + 2k_2 - k_1)$$

7-3-2-طريقة رانج – كاتا من المرتبة الرابعة:

التي تعدّ من أشهر صيغ رانج – كاتا

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right)$$

مثال(6)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ بطريقة رانج-كاتا من المرتبة الثانية حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.02$ عند النقطة $x = 0.04$.

الحل:

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right) = 0.02(0)(1) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + h, y_0 + hf\left(x_0 . y_0\right)\right)$$

$$= 0.02\left[\left(x_0 + h\right) + y_0 + hf\left(x_0 + y_0\right)\right]$$

$$= 0.02(0.05 + 1 + 0)$$

$$= 0.02(1.02) = 0.0204$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$=1+\frac{1}{2}(0+0.0204)=1.0102$$

ثم نحسب:

$$k_1=hf\ (x_1,y_1)=0.02[0.02+1.0102]$$
$$=0.020604$$
$$k_2=hf\ (x_1+h,y_1+hf\ (x_1+y_1))$$
$$=0.02[(x_1+h)+y_1+hf\ (x_1.y_1)]$$
$$=0.02[0.02+0.02+1.0102+0.020604]$$
$$=0.02141608$$
$$y_2=y\ (x_2)=y\ (0.04)=y_1+\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$
$$=1.0102+\frac{1}{2}[0.020604+0.02141608]$$
$$=1.0102+0.021001$$
$$=1.031201$$

مثال(7)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'=x-\frac{y^2}{10}$ بطريقة رانج- كاتا من المرتبة الثالثة حيث $h=0.1, y\ (0)=1$ عند النقطة $x=0.3$.

الحل:

$$k_1=hf\ (x_0,y_0)$$

$$=0.1\left(0-\frac{(1)^2}{10}\right)$$

$$=0.1(-0.1)=-0.01$$

$$k_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{k_1}{2}\right)$$

$$=0.1\left[0+\frac{0.1}{2}-\frac{\left(1+\frac{-0.01}{2}\right)^2}{10}\right]$$

$$=0.1\left(0.05-\frac{0.990025}{10}\right)$$

$$=-0.0049$$

$$2k_2-k_1=0.0002$$

$$k_3=(0.1)\left[0.1-(0.1)(1.0002)^2\right]=0$$

بالتعويض بالعلاقة:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(k_1+4k_2+k_3)$$

نجد:

$$y_1=1+\frac{1}{6}\left[-0.01+4(-0.0049)+0\right]=0.9951$$

ثم نحسب:

$$k_1=hf\ (x_1,y_1)$$

$$=0.1\left[0.1-(0.1)(0.9951)^2\right]=0.0001$$

$$k_2 = hf\left[x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right]$$

$$= 0.1\left[0.15 - (0.1)\left(0.9951 + \frac{0.0001}{2}\right)^2\right]$$

$$= 0.1\left[0.15 - (0.1)(0.99952)^2\right] = 0.0051$$

$$2k_2 - k_1 = 0.0101$$

$$k_3 = (0.1)\left[0.2 - (0.1)(1.0052)^2\right] = 0.0099$$

بالتعويض بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الثالثة:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

نجد:

$$y_2 = 0.9951 + \frac{1}{6}\left[0.0001 + 4(0.0051) + 0.0099\right]$$

$$= 0.9951 + 0.0051 = 1.0002$$

وبشكل مشابه نجد:

$$y_3 = 1.0151$$

مثال(8)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = xy^{\frac{1}{3}}$ بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الرابعة.حيث $h = 0.1, y(1) = 1$ عند النقطة $x = 1.1$ مقرباً النتائج إلى خمسة أرقام عشرية ثم قارن النتيجة التي تحصل عليها مع الحل التحليلي(الفعلي)

الحل:

$$k_1 = hf\ (x_0, y_0)$$
$$= (0.1)\left[(1)(1)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.1$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$= (0.1)f\ (1.05, 1.05)$$
$$= (0.1)\left[(1.05)(1.05)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.10672$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$= (0.1)f\ (1.05, 1.05336)$$
$$= (0.1)\left[(1.05)(1.05336)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.10684$$
$$k_4 = hf\ (x_0 + h, y_0 + k_3)$$
$$= (0.1)f\ (1.1, 1.10684)$$
$$= (0.1)\left[(1.1)(1.15684)^{\frac{1}{3}}\right] = 0.11379$$

بالتعويض بطريقة رانج – كاتا من المرتبة الرابعة

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

نجد:

$$y_1 = y\ (1.1) = 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 2(0.10672) + 2(0.10684) + 0.11379]$$
$$y_1 = 1.15682$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = xdx$$

بالتكامل نجد:

$$\int_{y=1}^{y} y^{-\frac{1}{3}} dy = \int_{x=1}^{x} xdx$$

$$\left[\frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_1^y = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^x$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left[x^2 - 1\right]$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

نضرب الطرفين بـــ $\frac{2}{3}$ فنجد:

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

ومنه الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$y = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

الحل التحليلي عند النقطة $x = 1.1$ هو:

$$y(1.1) = \left[\frac{1}{3}(1.1)^2 + \frac{2}{3}\right]^{\frac{3}{2}} = 1.106802$$

نلاحظ أن الحل التحليلي هو نفس الحل التقريبي.

7-4- تمارين:

1- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x.y$ بطريقة أولر حيث $h = 0.1,\ y(0) = 1$ عند النقطة $x = 0.4$.

2- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = -y^2$ بطريقة أولر حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ المئوي.

3- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y$ بطريقة تايلور حيث $y(2) = 2$ و $h = 0.02$ عند النقطة $x = 2.04$ واحسب الخطأ المرتكب مستخدماً أربعة حدود من منشور تايلور.

4- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y^2 + 1$ بطريقة تايلور حيث $y(0) = 0$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 0.2$ وأحسب الخطأ المرتكب مستخدماً خمسة حدود من منشور تايلور.

5- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'' + y' = y^2 e^x$ بطريقة تايلور حيث $y(0) = 0$ و $y'(0) = -1$ و $h = 0.2$ عند النقطة $x = 0.2$.

6- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y$ بطريقة رانج - كاتا من المرتبة الثانية حيث $y(0) = 1$ و $h = 1$ عند النقطة $x = 5$.

7- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x^2 + y$ بطريقة رانج - كاتا من المرتبة الثالثة حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 0.3$.

8- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y - 2\frac{x}{y}$ بطريقة رانج - كاتا من المرتبة الرابعة حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.2$ عند النقطة $x = 0.4$.

9- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x-y}{2}$ بطريقة أولر ثم بطريقة رانج - كاتا من المرتبة الرابعة حيث $y(0)=1$ و $h=0.25$ عند النقطة $x=1$.

الفصل الثامن

لـــغة الـبرمجـــة

Programming language

منذ خلق الله الإنسان على هذه الأرض وهو يسعى ويفكر فـــي اختصـــار البعد بينه وبين الأهداف التي يطمح إلى الوصول إليها, وعلى الرغم من جميـــع الصعوبات التي يصادفها فإنه يستمر بمواصلة رحلته المضنية ويتقـــدم أحيانـــاً بخطوات كبيرة وسريعة باتجاه أهدافه.

لم يصل الإنسان إلى مرحلة صناعة الحاسوب بسهولة, وإنما بدأ بخطـــوات بطيئة معتمداً على كثير من المبادئ والنظريات المتطورة ولقد استفاد من مبادئ الحساب الخوارزمي التي وضعها العالم محمد بن موسى الخوارزمي في القرن التاسع الميلادي, حيث كون فكرة واضحة عن طريقة تجزئـــة المســـائل إلـــى خطوات بسيطة وواضحة تؤدي إلى حل المسألة.

ساعد جبر بول في صناعة الحاسوب حيث أعطى فكرة واضحة عن تمثيـــل المعلومات كهربائياً واعتمد في تحليله للظواهر على فكرة التجربة الثنائية وعلى حالتي الفشل والنجاح حيث صفر تمثل حالة الفشل و واحد تمثل حالة النجـــاح, وبذلك انتقل التفكير من تمثيل الأعداد العشرية بحالاتها العشر لكل رقم من العدد إلى الأعداد الثنائية السهلة التمثيل كهربائياً.

وأخيراً جاءت نظرية فون نايمان العالم الهنغاري الشهير لتتم جميع هـذه الأمور عندما برهن على إمكانية كتابة أية خوارزمية على شكل متتالية عمليات حسابية ومنطقية وإمكان تمثيل هذه الخطوات كهربائياً عن طريق النظام الثنائي.

بعد صناعة الحاسوب الأول عام 1946م بدأ عصر جديد من حياة الإنسان, وتطورت العلوم في جميع نواحي الحياة, حيث دخل الحاسوب إلى جميع فـروع العلوم وساعد على تطويرها.

اللغة الوحيدة التي يفهمها الحاسوب هي لغة الترميز الثنائي وتتكـون هـذه اللغة من رمزين فقط هما الصفر والواحد وتنسجم مع بنية الحاسـوب الماديـة, وهذا يعني أن جميع التعليمات التي تدخل إلى الحاسوب تتحول ضمنه إلـى مـا يقابلها من لغة الترميز الثنائي قبل أن يتعامل معها ويعالجها.

تقدم للحاسوب برامج وهذه البرامج تقسم إلى قسمين:

القسـم الأول: برامج التشغيل وتتكون من مجموعة برامج مسؤولة عن تشـغيل الحاسوب, وتسهيل عملية التخاطب بين الحاسوب والمستخدم بحيث تنظم عمليات إدخال البيانات وإخراجها وتوضع أنظمة التشغيل عادة في الشركات المصـنعة للحواسيب, ولا يمكن للمبرمج أو المستثمر أن يغير أو يعدل فيها ومـن أشـهر أنظمة التشغيل المستخدمة على الحواسيب الشخصية مثلاً نظام windows.

القسم الثاني: برامج التطبيق وهي البرامج التي يكتبها المبرمجون بإحدى لغات البرمجة عالية المستوى لحل مسائلهم التطبيقية. ويعرف البرنامج بشـكل عـام على أنه متتالية من التعليمات والأوامر الموجهة إلى الحاسوب بأسلوب يمكن أن يفهمه ليقوم بتنفيذ عمل معين. تسمى مجموعة برامج التشغيل وبرامج التطبيـق بالبرمجيات Software.

كتابة برنامج:

إن الحاسوب ليس جهازاً سحرياً يلبي الحاجات والطلبات بمجرد الإشارة إليه بفعل ذلك, وإنما يجب كتابة خطوات حل المسألة بشكل من الأشكال يستطيع فيه الحاسوب فهمها والتمكن من حلها. هذا يعني أنه يجب تجهيز الحل وفق صيغة محددة كما يلي:

1) تحليل المسألة وفهمها:

أي دراسة المسألة المراد حلها بالحاسوب دراسة تحليلية, وتحديد الدخل input والخرج output و وضع الخطوات اللازمة للحل.

2) تحويل خطوات الحل إلى خوارزمية.

3) تحويل الخوارزمية إلى برنامج: أي تحويل الخوارزمية إلى تعليمات في لغة من لغات البرمجة.

4) تنفيذ البرنامج: إي إدخال البرنامج والمعطيات للحاسوب, وتخزينها على إحدى وسائط التخزين كالقرص المغناطيسي.

8-1- الخوارزميات:

تستخدم الخوارزميات في مختلف الأبحاث العلمية وتَدرس معظم الظواهر الطبيعية بخوارزميات ويكفي لدراسة ظاهرة ما أن نوجد الخوارزمية المقابلة لها لدراسة هذه الظاهرة. فمثلاً لنفرض أننا نريد دراسة حركة مقذوف ومراقبة مساره في كل لحظة من لحظات طيرانه, من أجل ذلك يكفي إيجاد المعادلات الرياضية لمسار المقذوف من خلال مجموعة معطيات متعلقة بالسرعة الابتدائية وزاوية الإطلاق والعوامل الجوية المحيطة وغيرها من أمور تؤثر في مسار المقذوف, وبعد إيجاد هذه المعادلة يصبح وضع هذه العلاقة على شكل

خوارزمية تدل على مكان المقذوف في كل لحظة من طيرانه,ويمكن التحكم بمكان سقوطه من خلال تغيير المعطيات الابتدائية للإطلاق.

8-1-1- قواعد كتابة الخوارزميات:

تتلخص القواعد الأساسية لكتابة خوارزمية بما يلي:

1) توزيع العمليات على عدد منتهٍ من الخطوات تهدف كل منها لتنفيذ عمل معين.
2) الخطوة الواحدة تعبر عن عمل حسابي أو منطقي. عملية طلب دخل أو خرج.
3) يفضل أن تعبر الخطوة عن عمل بسيط لعدم الوقوع في الخطأ.
4) يُعبر عن عمل الخطوة بأفضل طريقة ممكنة.
5) تنفذ أية خوارزمية من أول عملية في نصها.
6) لا تستخدم الخوارزمية أي متحول مجهول قبل إدخال قيمة له تسبق استخدامه.
7) يجب ذكر مكان الانتقال بعد تنفيذ كل خطوة وفي حال خلاف ذلك يتم الانتقال إلى الخطوة التالية مباشرة.
8) يجب إخراج نتيجة أية خوارزمية قبل إنهائها.
9) يجب التأكد من اختيار المعطيات وإدخالها بشكل صحيح.

إن أي خطأ يرتكب في تطبيق هذه القواعد يؤدي إلى خوارزمية غير فعالة.

8-1-2- طرق كتابة الخوارزميات:

نعلم أن الخوارزمية هي عبارة عن مجموعة من الخطوات المرتبة منطقياً وفق قواعد معينة لحل مسألة محددة. ويمكن التعبير عن خوارزمية بعدة طرق تبيّن تسلسل الخطوات ومن هذه الطرق ما يلي:

1) **الطريقة النَّصية:** وهي طريقة لتوصيف الخوارزمية بلغة طبيعية (العربية مثلاً).

مثال(1):

اكتب خوارزمية بالطريقة النّصية لعملية جمع أربعة أعداد صحيحة.

الحل:

اقرأ الأعداد a, b, c, d

نفِّذ $x = a + b + c + d$

اطبع الناتج x

مثال(2):

اكتب خوارزمية بالطريقة النّصية لعملية ترتيب عددين يتم إدخالهما من خلال لوحة المفاتيح.

الحل:

اقرأ العددين a, b

إذا كان $(a < b)$ نفّذ

اطبع $a, " < ", b$

وإلا إذا كان $(a > b)$ نفّذ

اطبع $a, " > ", b$

وإلاّ اطبع b," = ",a.

مثال(3):

اكتب بالطريقة النّصية خوارزمية لحساب مجموع الأعداد $1,2,3,.....,n$

الحل: اقرأ العدد N.

نقوم بعملية إسناد

$I = 0$ (عداد $counter$)

$Sum = 0$

(while) مادام $(I \le N)$ كرر

$Sum = Sum + I$

$I = I + 1$

فمثلاً إذا كان $N = 4$ فإن الخوارزمية تصبح كما يلي:

اقرأ العدد $(N = 4)$

نقوم بعملية إسناد:

$I = 0$

$Sum = 0$

$(I = 0 \le N = 4)$

$Sum = 0 + 0$

$I = 0 + 1 = 1$

$(I = 1 \le N = 4)$

$Sum = 0 + 1 = 1$

$I = 1 + 1 = 2$

$(I = 2 \le N = 4)$

$$Sum = 1 + 2 = 3$$
$$I = 2 + 1 = 3$$
$$(I = 3 \le N = 4)$$
$$Sum = 3 + 3 = 6$$
$$I = 3 + 1 = 4$$
$$(I = 4 \le N = 4)$$
$$Sum = 6 + 4 = 10$$
$$I = 4 + 1 = 5$$
$$(I = 5 \le N = 4)$$

نقف عند هذه الخطوة ونقول اطبع "Sum"

مثال(4):

اكتب خوارزمية بالطريقة النصية لإيجاد حلول معادلة من الدرجة الثانية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

الحل:

1- اقرأ الأعداد a, b, c

2- احسب $\Delta = b^2 - 4ac$

3- إذا كان "$\Delta \ge 0$"

4- فإن $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

5- $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

إذا كان " $\Delta \langle 0$ " فإنّ:

6- $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

7- $x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

8- وإلاّ يكون $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

9- اطبع العددين x_1, x_2

2)الطريقة البيانية (المخططات التدفقية)flow chart:

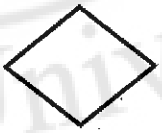
تعدّ هذه الطريقة من أكثر الطرق المستخدمة, وهذه الطريقة تعتمد على تمثيل الخوأرزمية بمخطط له بداية ونهاية, ويعبر عن العمليات الخوارزمية بأشكال هندسية توضع هذه العمليات داخلها, ويربط بين الأشكال بأسهم موجهة لتسلسل تنفيذ الخوارزمية ومن أهم الرموز المستخدمة في المخططات التدفقية ما يلي:


للتعبير عن بداية الخوارزمية ونهايتها.


للتعبير عن العمليات الحسابية وعمليات الإسناد والمعالجة.

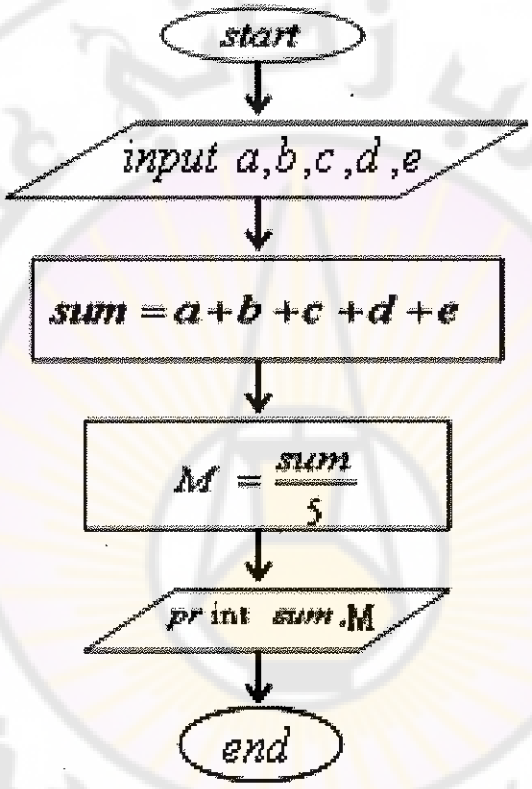

للتعبير عن عمليات الإدخال والإخراج.


للتعبير عن اتجاه تدفق المعطيات.


للتعبير عن العمليات الشرطية.

مثال(5):اكتب خوارزمية بالطريقة البيانية لحساب مجموع خمسة أعداد وإيجـــاد المتوسط الحسابي لها.

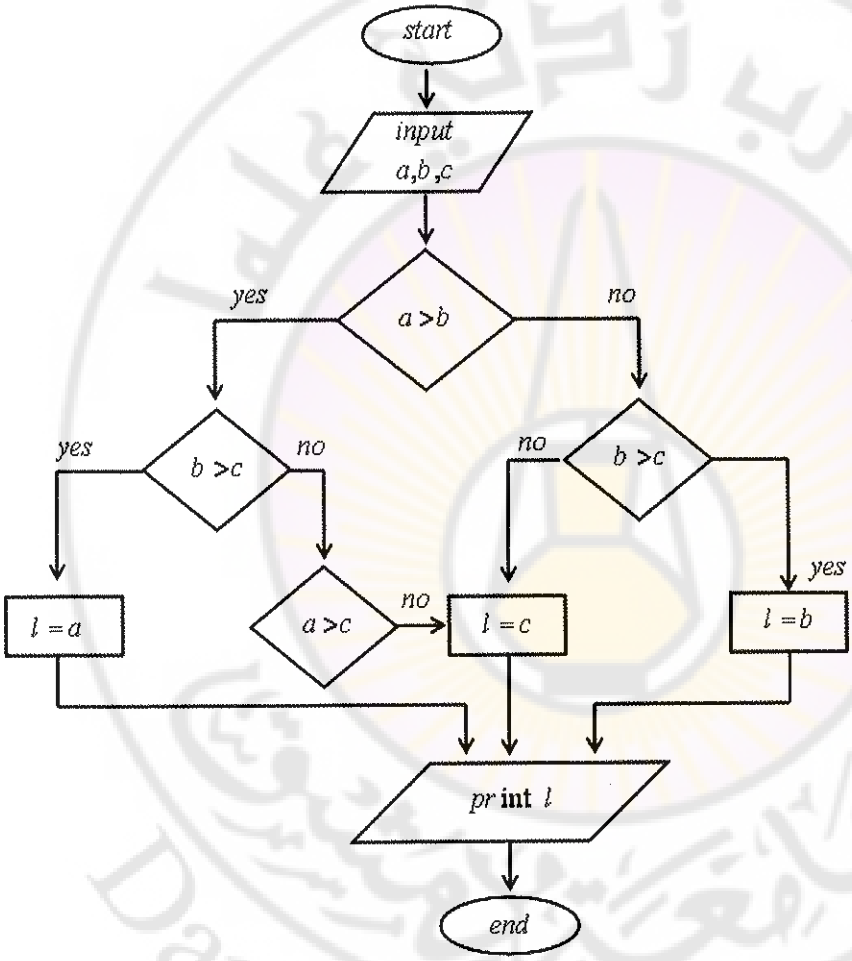
الحل:



مثال(6):

اكتب خوارزمية بالطريقة البيانية لقراءة ثلاثة أعداد وإيجاد أكبرها.

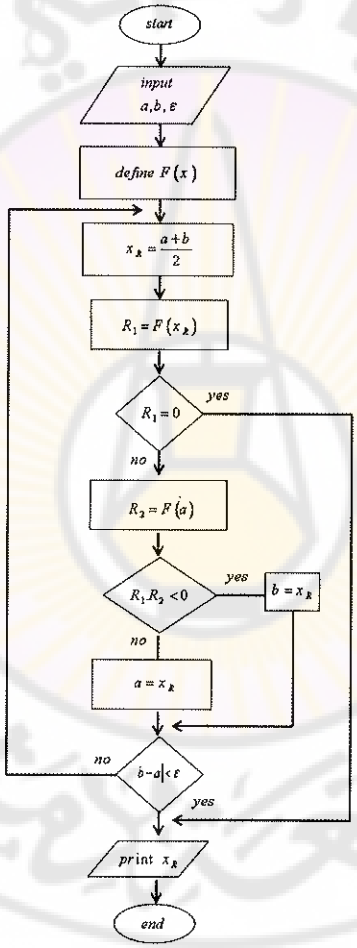
الحل:



مثال(7):

اكتب خوارزمية بالطريقة البيانية لطريقة التنصيف المتكرر لحل معادلة غير خطيه $f(x)=0$.

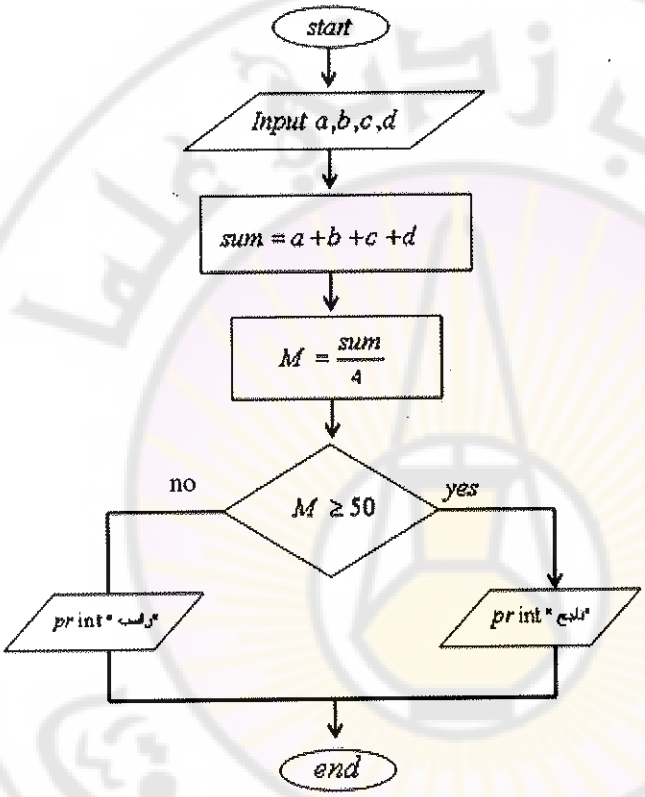
الحل:



مثال(8):

اكتب خوارزمية بالطريقة البيانية لقراءة الدرجات a ,b ,c ,d ومعرفة مـــا إذا كان الطالب ناجحاً أو راسباً.

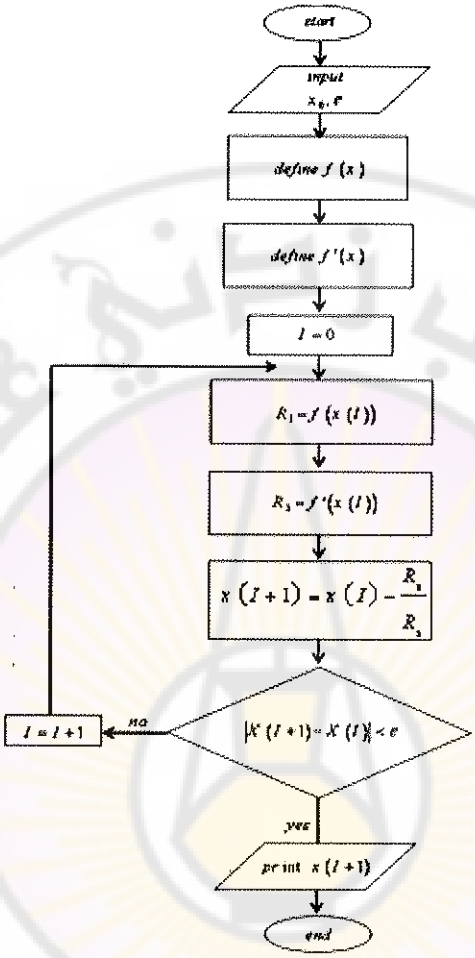
الحل:



مثال(9):

اكتب خوارزمية بالطريقة البيانية لطريقة نيوتن لحـــل معادلـــة غيـــر خطيـــة $f(x)=0$.

الحل:



8-2- مبادئ البرمجة بلغة C^{++} :

تُعدّ لغة C^{++} لغة شاملة متعددة التطبيقات والأغراض وهي لغة كتلية يمكن استخدامها في تطبيقات كثيرة ومختلفة. لكنها لغة صعبة التعلم وخصوصا للمبتدئين ولغة C^{++} تستخدم الرموز التالية:

1) حروف اللغة الإنكليزية الصغيرة والكبيرة.

2) الأرقام 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

3) بعض الرموز الخاصة مثل:

–	+	〈	!	"	[ ]	——
< =	(	)	〉	‖	→	>>
,	〉=	%	*	!=	{ }	;
$	/	:	<	>	#	^

الأسماء التعريفية (*Identifiers*):

وتسمى المعرفات أو الأسماء التي نطلقها على المتغيرات أو التوابع أو الثوابت وتوجد بعض القواعد النّاظمة لهذه الأسماء حيث يتراوح طول الاسم التعريفي بين حرف واحد وعدة أحرف ويجب أن يكون الرمز الأول من الاسم هو حرف أبجدي أو undersquar, ويمكن أن تكون بقية الرموز مؤلفة من حروف أبجدية أو أرقام ويمكن استخدام(_)undersquar .

الجدول التالي يبين أمثلة عن أسماء متغيرات صحيحة وخاطئة مع ذكر السبب:

اسم المتغير	مقبول أو لا	السبب
$\_A10$	مقبول	لأنه يحتوي فقط على أرقام (_)(undersquar)
$A-10$	غير مقبول	لأنه يحتوي إشارة الناقص(–)(إشارة خاطئة)

مع العلم أن لغة C^{++} تميز بين الحروف الأبجدية الصغيرة والكبيرة.

أنواع المتغيرات (*Variables*):

تستخدم لغة C^{++} معرفات لتسمية الثوابت والمتغيرات والدوال. والأنواع (types)المستخدمة في لغة هي:

مساحته	رمزه	نوع المتغير
8 *bits*	*char*	المتغيرات المحرفية
16 *bits*	int	المتغيرات الصحيحة
16 *bits*	*Short* int	المتغيرات الصحيحة القصيرة
32 *bits*	*float*	المتغيرات الحقيقية القصيرة
32 *bits*	*Long* int	المتغيرات الصحيحة الطويلة
64 *bits*	*double*	المتغيرات الحقيقية المزدوجة

ملاحظات:

1- تنتهي كل تعليمة في لغة الـ C^{++} بـ (;)(فاصلة منقوطة).

2- يجب تحديد كل متغير أو ثابت مسبقاً.

يتم التصريح عن المتغيرات كما يلي:

التصريح عن مُتغير حرفي *char a* ;

التصريح عن متغير صحيح int *x* ;

التصريح عن متغير حقيقي *floab c* ;

التصريح عن متغيرين صحيحين int *x , y* ;

8-2-1- عمليات الإسناد $(Assignment)$:

تتم عملية الإسناد باستخدام رمز المساواة $(=)$ فمثلاً من أجل إعطاء المتغير الصحيح x القيمة 15 يمكن أن نكتب: $int \quad x = 15 \;;$

ونكتب من أجل المتغيرات المحرفية; $char \quad d = '7' \;;$

ونكتب من أجل المتغيرات الحقيقية القصيرة; $float \quad c = 3.4 \;;$

العمليات الحسابية $(Arithmetic\ operators)$:

اسم العملية	رمزها
الجمع	+
الطرح	−
الضرب	*
القسمة	/
باقي القسمة	%

مثال(10)

يمكن باستخدام التصريح عن المتغيرات والعمليات الحسابية كتابة ما يلي:

$$float \quad f \;;$$
$$f = 176.8 \;;$$
$$float \quad c \;;$$
$$c = (f - 24) * 8/6 \;;$$

8-2-2- معامل التزايد والتناقص:

يرمز لمعامل التزايد بالرمز (++)وباستخدام هذا المعامل فإنّ المترجم يزيد قيمة المتغير بمقدار واحد ونميز حالتين:

1) الزيادة على المتغير قبل التنفيذ.
2) الزيادة على المتغير بعد التنفيذ.

كما يلي:

$$\text{int } a = 2 \;;$$
$$\text{int } b = 5 \;;$$
$$s_1 = a + (++b) \;;$$
$$s_2 = a + (b++) \;;$$

عندئذ: $s_1 = 8 \;, s_2 = 7$

حيث يتم حساب (s_1)بإضافة واحد للمتغير (b)ومن ثم يتم جمع القيمة الجديدة للمتغير (b)مع قيمة المتغير (a).

بينما يتم حساب (s_2) بجمع قيمة المتغير (a) والمتغير (b) ثم إضافة واحد للمتغير (b).

يرمز لمعامل التناقص بالرمز (--) وباستخدام هذا المعامل فإن المترجم ينقص قيمة المتغير بمقدار واحد.

ونميز حالتين:

$--a$إنقاص المتغير a بمقدار واحد بعد التنفيذ

$a--$إنقاص المتغير a بمقدار واحد قبل التنفيذ

ملاحظة: يمكن اختصار بعض العبارات الرياضية كما يلي:

$$\text{int } k \;;$$

$$k+=3$$
$$k-=5$$
$$k\ *=4$$
$$k\ /=6$$

8-2-3- عمليات المقارنة المنطقية:

تستخدم عمليات المقارنة المنطقية في التعابير الرياضية التي تحتوي على مقارنات فمثلاً يمكن أن نكتب:

$$c==b\ \ ,\ \ c\langle b\ \ ,\ \ a\langle 15$$

و عمليات المقارنة المنطقية تأخذ عند تقييمها إحدى القيمتين *false* أو *true*. و عمليات المقارنة المنطقية في لغة C^{++} هي:

اسم المؤثر	الرمز
أكبر من	$\rangle$
أكبر أو يساوي	$=\rangle$
أصغر من	$\langle$
أصغر أو يساوي	$=\langle$
يساوي	==
لا يساوي	=!

العمليات المنطقية هي:

اسم المؤثر	الرمز
Not	!
And	&&
Or	||

يستخدم مؤثر النفي (!) المنطقي لعكس قيمة التعبير. يستخدم && (and) لجمع تعبيرين منطقيين بحيث أن يكون التعبير صحيحاً عندما يكون التعبيران صحيحين.ويستخدم|| (*Or*)للجمع مابين تعبيرين منطقيين بحيث يكون التعبير الناتج صحيحاً إذا كان أحد أو كلا التعبيرين صحيحاً. انظر الجدول المرفق:

A	*B*	*A AND B*	*A OR B*	*!A*
t	*t*	*t*	*t*	*f*
t	*f*	*f*	*t*	*f*
f	*t*	*f*	*t*	*t*
f	*f*	*f*	*f*	*t*

حيث *t* تعني *true* و *f* تعني *false*.

التعليقات: يمكن كتابة تعليقات في البرنامج من أجل فهمه وسهولة صياغته وتصحيحه وذلك بالاعتماد على وضع إشارة مزدوجة (//)تلي كل عبارة فمثلاً:

// My first program

هذا يعني أن أي نص يلي هذا الرمز إلى نهاية السطر يتجاهله المترجم. وكذلك بوضع إشارة(*/)في بداية التعليق وتنهيه بالإشارة (/*) وبالتالي يمكن كتابة التعليق على عدة أسطر قبل الإنهاء بالأمر (/*) كمثال:

/ I am a student*

*and this is my first program */*

8-2-4- دالة الدّخل والخرج:

دالة الخرج: وهي عبارة إظهار النّص على الشاشة فمثلاً:

```
cout << "the text on the screen" ;
```

إن الدالة (*cout*)والمعامل (<<) المسمى معامل الإخراج يمكن من إظهار سلسلة من المحارف أو المحتويات من المتغيرات فمثلاً:

```
float x = 27 ;
cout << "the variable is"<<x ;
```

إن دالة الخرج لا تنشئ أسطراً جديدة فمثلاً:

```
cout <<342 ;
cout <<1245 ;
```

أو *output* هو 3421245

ولإنشاء سطر جديد فإننا نستخدم دالة التحكم "*n*\" عندئذ نكتب:

```
cout <<342 <<"\n" ;
cout <<12<<"\n" <<45 <<"\n" ;
output ⇒ 342
12
45
```

ومن أجل انتقال المشيرة الضوئية مسافة(8) محارف فارغة نستخدم دالة التحكم "*t*\"

دالة الدخل: إن الدالة (*cin*) ومعامل الإدخال (<<) تُمكّن من إسناد القيم الموجودة على يساره ويخزنها في المتغير الموجود على يمينه, وعند تنفيذ هذه العبارة ينتظر البرنامج أن يكتب المستخدم رقماً ويضغط "*Enter*"فمثلاً:

```
int age ;
cout << "Enter your age " ;
cin >> age ;
```

أساليب الدّخل والخرج: لاستخدام دوال الدخل والخرج (*I /O stream*) نحتاج إلى الملف "*iostream.h*" الذي يسمى ملف ترويسة (*Header*) ويكتب بالشكل التالي:

```
#include<iostream.h>
```

مثال(1) اكتب برنامج يُمكّن المستخدم من إدخال عمره ويطبعه على الشاشة.

الحل:

```
/*this program enables the user to
                                  enter his age */
#include<iostream.h>
void main( ){
    int age ;
    cout << "please enter your age " ;
    cin >> age ;
    cout << "your age is :"+age;
    cout << "thank you " ;
}
```

8-2-5- بنية الاختبار (*if*):

تستخدم هذه البنية لتنفيذ تعليمة ما وذلك عند تحقيق شرط معين وإذا لم يتحقق الشرط فإن التعليمة لن تنفذ, وإنما يتم الانتقال إلى التعليمة التالية, ويمكن كتابة التعليمة الشرطية بالشكل التالي:

if (شرط)

تعليمة;

مثال(12):

اكتب برنامج يقوم بقراء قيمة (x) وطباعة عبارة (ok) إذا كانت $(x\langle 10)$

الحل:

```
#include<iostream.h>
void main( )
{
    int x ;
    cout << "enter x " ;
    cin >> x ;
    if (x<10)
      cout << "ok " ;
}
```

بنية الاختيار $((if - else))$:

تستخدم هذه البنية لتنفيذ مجموعة تعليمات عند تحقيق شرط معين ومجموعة أخرى من التعليمات إذا لم يتحقق هذا الشرط ويمكن كتابة هذه التعليمة الشرطية بالشكل التالي:

if (شرط)

; مجموعة تعليمات

else

; مجموعة تعليمات

مثال(13):

اكتب برنامج يقوم بقراءة قيمة (x) وطباعة عبارة (ok) إذا كانت $(x\langle 10)$ وعبارة (no) إذا لم يتحقق هذا الشرط.

الحل:

```
#include <iostream.h>
void main ( )
{
    int x ;
    cout << "enter x " ;
    cin >> x ;
    if (x <10)
      cout << "ok ";
      else
      cout << "no ";
}
```

عندما تكون هناك أكثر من تعليمة يجب أن تنفذ إذا كان شرط الاختبار محققا أو مجموعة تعليمات يجب أن تنفذ عندما يكون الشرط غير محقق فإننا نحصر التعليمان بين قوسين }و { كما يوضح المثال التالي:

```
if (شرط)
  {
    تعليمة 1;
    تعليمة 2;
    :
    :
  }
  else
  {
```

تعليمة1;

تعليمة 2;

⋮

⋮

}

يمكن أيضاً استخدام البنية ($if - else$) بشكل متداخل من أجل القيام بفحص عدة حالات وذلك بوضع البنى ($if - else$) داخل بعضها البعض.

مثال(14) اكتب برنامج يقوم بقراءة (x) ويقوم بطباعة الحرف (a) إذا كانت ($x \langle 10$) والحرف (b) إذا كانت ($x \langle 20$) والحرف (c) إذا كانت ($x \langle 30$).

الحل:

```
#include <iostream.h>
void main ( )
{
    int x ;
    cout << "enter x " ;
    cin >> x ;
  if (x <10)
    cout << "a" ;
else  if (x <20)
        cout << "b " ;
else  if (x <30)
        cout << "c " ;
    else
    cout << "d " ;
}
```

بنية الاختيار المتعدد $(switch)$:

تستخدم لغة C^{++} البنية $switch$. يجري اختيارها عندما يكون عدد الشروط كبيراً, if_else معقدة ويصعب فهمها. لذلك تم إضافة $switch$ بديلاً.

```
switch (متغير)
{
    case 1 قيمة:
    تعليمة ;
    break;
    case 2 قيمة :
    تعليمة ;
    break;
    default :
    تعليمة ;
    break;
}
```

مثال(15):

اكتب برنامج يقوم بقراءة قيمة (x) ويقوم بطباعة الحرف (a) إذا كانت $(x=10)$ والحرف (b) إذا كانت $(x=20)$ والحرف (c) إذا كانت $(x=30)$ والحرف (d) ماعدا ذلك باستخدام بنية الاختيار المتعدد $(switch)$.

الحل:

```
#include<iostream.h>
void main( )
{
int x ;
cout <<"enter x " ;
cin >> x ;
switch (x )
{
 case 10:
     cout <<"a" ;
     break ;
 case 20 ;
     cout <<"b " ;
     break ;
 case 30;
     cout <<"c " ;
     break
     default :
     cout <<"d " ;
 }
```

حلقة التكرار (for):

تُستخدم حلقة التكرار $For-loop$ عند الحاجة لتكرار تنفيذ تعليمة معينه أو عدة تعليمات لعدد محدد من المرات. ويتم الخروج من الحلقة عندما يتجاوز عداد الحلقة الحد الأعلى لعدد مرات التكرار بحيث يستمر التنفيذ من التعليمة التالية للحلقة. وتكتب حلقة التكرار $For-loop$ بالشكل التالي:

(زيادة العداد ; شرط التوقف ; قيمة البدء) for

; تعليمة

مثال(16):اكتب برنامج يقوم بقراءة العدد الصحيح (x)وطباعة مجموع الأعداد $1,2,3,.....,x$.

الحل:

```
#include<iostream.h>
#include<conio.h>
void main( )
{
    int x ;
    int sum = 0 ;
    cout << "please enter x " ;
    cin >> x ;
    for (int i =1;i <= x ;i ++)
{
    sum = sum + i ;
 }
 cout << "sum = " << sum ;
 getch( );
 }
```

الحلقة التكرارية $(while-loop)$:

تستخدم هذه الحلقة عند الحاجة لتكرار تنفيذ تعليمة أو عدة تعليمات, وكان عدد مرات التكرار غير معروف مسبقاً, عندئذ يتم الاعتماد على الشرط فقط بحيث

يتم تكرار التنفيذ إلى أن يختل الشرط فيتمّ الانتقال إلى تنفيذ التعليمة التالية وتكتب البنية التكرارية *while* كما يلي:

while (شرط)

تعليمة ;

ملاحظة: إذا كان جسم الحلقة يحتوي على أكثر من تعليمة واحدة, عندئذ لابد من استخدام الأقواس"{","}".

مثال(17):

اكتب برنامج يقوم بقراءة قيمة (x) وفي حال كانت قيمة (x) موجبة قام باختبار قابلية القسمة على العدد (2).

الحل:

```
#include<iostream.h>
#include<conio.h>
void main( )
{
    int x ;
    cout <<"enter x " ;
    cin >> x ;
    while (x<0)
{
    cout <<"xis negative" ;
    cout <<"enter a new value for x " ;
    cin >> x ;
  }
 if (x%2==0)
```

```
    cout <<x<<"is even" ;
    else
    cout <<  <<"is  odd" ;
}//end main
```

الحلقة التكرارية (*do /while*):

تستخدم هذه الحلقة عند الحاجة لتنفيذ مقطع تكراري مرة على الأقل قبل أن يتم اختبار الشرط, إضافة إلى كون عدد مرات التكرار غير معروف مسبقاً, وتكتب هذه البنية بالشكل التالي:

do

تعليمة ;

while (شرط);

ملاحظة: إذا كان جسم الحلقة يحتوي على أكثر من تعليمة واحدة, عندئذ لابد من استخدام الأقواس"{","}".

مثال(18):اكتب برنامج يقوم بعرض قائمة من المهام لكي يختار منها المستخدم المهمة المطلوب تنفيذها على العددين المدخلين x و y ثمَّ يُسأل المستخدم عن رغبته في التنفيذ مرة أخرى.

الحل:

```
#include<iostream.h>
#include<conio.h>
```

```
void main( )
{
    int x y ;
    cout << "enter x :" ;
    cin >> x ;
    cout << "enter y :";
    cin >> y ;
    char ch,op ;
    do
{
    cout << "what kind of operation do you want
    to apply +,-,*,/,% :";
    cin >> op ;
    switch (op)
    {
  case "+" :
    cout <<x<<"+"<< y <<"="<x + y;
    break ;
  case "-" :
    cout <<x<<"-"<< y <<"="<x - y;
  case "*" :
    cout <<x<<"*"<< y <<"="<<x* y;
    break ;
 case "/":
  if (y !=0)
    cout <<x<<"/"<< y <<"="<<x / y;
    else
    cout <<"you can not do this operation";
```

```
        break;
    {
     case "%":
    if (y != 0)
        cout << x << "%" << y << "=" << x % y;
        else
        cout << "you can't do this operation";
        break ;
    {
        default
        cout << "error" ;
     }//end of switch
        cout << "do you want to continou";
        cin >> ch ;
     }//end of do
        while (ch = = 'y '//ch = = 'y ');
     }//end of main
```

8-3- الدوال (*functions*):

هناك دوال مخزنة سابقاً في لغة C^{++} يمكن للمستخدم استخدامها بشكل مباشر مثل الدالة Abs التي تحسب القيمة المطلقة لعدد. ولكن لغة C^{++} تمكن أيضاً المستخدم من كتابة الدوال التي يحتاجها. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال(19):

اكتب برنامج يقوم بحساب مكعب عدد ما.

الحل:

```
#include<iostream.h>
int cube(int y);
void main( )
{
    int x ;
    for(x =1 ;x<=10 ;x ++)
    cout <<cube(x);
 }//end of main
int cube(int y)
    int cube(int y)
{
    int x = y * y * y;
    return x;
}
```

8-4- المصفوفات (Arrays):

تعريف المصفوفة أحادية البعد: وهي المصفوفة التي تكون عناصرها مرتبة بالشكل التالي: $[a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n]$ من أجل تعريف المصفوفة أحادية البعد نكتب: ;

Type name of array[number of elements] وبشكل عام لتعريف مصفوفة اسمها (age) مكونة من أربعة عناصر من نوع أعداد صحيحة نكتب ما يلي:

int age[4];

age[3]	age[2]	age[1]	age[0]

حيث إن العنصر الأول لهذه المصفوفة يتوضع ضمن الذاكرة على أنه $age[0]$ والعنصر الثاني $age[1]$ والعنصر الثالث $age[2]$ والعنصر الرابع $age[3]$.

مثال(20):اكتب برنامج يقوم بإدخال مصفوفة اسمها(age) وعدد عناصرها أربعة من نوع الأعداد صحيحة, ويقوم بإظهار هذه العناصر.

الحل:

```
# include <iostream.h>
void main( )
{
int age[4]
for(int i=0 ; i<4 ;i++)
{
cout<<"enter element"<<i ;
cin>>age[i] ;
}
for(int i=0 ; i<4 ; i++)
{
cout <<"the element number"<<i<<"is"<<age[i] ;
}
}// end of main
```

يمكن إعطاء قيم بدائية للمصفوفة كما يلي:

مثلاً

```
int age[4]={12,15,20,24}
```

عندها يكفي لإظهار أي عنصر من عناصر هذه المصفوفة أن نحدد رقم العنصر,فمثلاً إذا أردنا إظهار العنصر الثالث نكتب:

```
Cout<<age[2] ;
```

مثال(21)

اكتب برنامج يقوم بإدخال مصـــفوفتين أحـــاديتين $(A1),(A2)$ ويقـــوم بإيجـــاد مجموعهما.

الحل:

```
# include<iostream.h>
void main( )
{
    int A1[4]={4,7,15,20};
    int A2[4]={2,3,4,8};
    int sum[4];
    for(int i=0 ; i<4 ; i++)
{
    sum[i]=A1[i]+A2[i]
}
    for (int i=0 ;i<4 ;i++)
{
    cout <<"sum["<<i <<"]="<<sum[i] ;
}
}//end of main
```

تعريف المصفوفة ثنائية البعد:هي المصفوفة المكونة من أسطر وأعمدة ونعرفها كما يلي:

Type name of array[number of rows][number of colums];

فمثلاً بفرض (A)مصفوفة ثنائية البعد مكونة مـــن ســـطرين و ثلاثـــة أعمـــدة وعناصرها من نوع أعداد صحيحة نعرفها كما يلي:

$$int\ A[2][3];$$

تعريف المصفوفة الثابتة ثنائية البعد: يمكن إعطاء قيم بدائية للمصفوفة كما يلي:

$$float\ B[4][3]=\{\{4.1.0.7.8.4\},\{5.0,6.2,31.7\}$$
$$\{41.2,3.5,9.1\},\{1.7,5.2,6.6\}\}$$

وهذه المصفوفة لها الشكل التالي:

$$B=\begin{bmatrix} 4.1 & 0.7 & 8.4 \\ 5.0 & 6.2 & 31.7 \\ 41.2 & 3.5 & 9.1 \\ 1.7 & 5.2 & 6.6 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

تستخدم الحلقة(for) من أجل إدخال عناصر المصفوفة أحادية البعد وحلقتي(for) متداخلتين لإدخال عناصر المصفوفة ثنائية البعد.

يتم الوصول إلى عناصر المصفوفة أحادية البعد باستخدام دليل العنصر,حيث إن دليل العنصر الأول هو الصفر والثاني هو الواحد وهكذا .... ولعرض العناصر الموجودة داخل المصفوفة تستخدم حلقة(for).

ويتم الوصول إلى عناصر المصفوفة ثنائية البعد باستخدام دليلين للعنصر, مثلاً $B[1][2]$,ولعرض العناصر الموجودة داخل المصفوفة نستخدم حلقتي(for) متداخلتين.

مثال(22):اكتب برنامج يقوم بإدخال مصفوفة ثنائية البعد مكونة من سطرين وعمودين وعناصرها من نوع أعداد صحيحة وإظهار هذه العناصر.

الحل:

```
# include<iostream.h>
# include<conio.h>
void main(   )
{
int A [2] [2] ;
for (int  i=0  ;  i<2  ;  i++)
{
for (int  j=0  ;  j<2  ;  j++)
{
cout<< "enter element " ;
cout<< "A" << "[ "<< i <<" ][ " << j << "]= "  ;
cin >> A [i] [j]  ;
}// end the second for loop
}// end the first for loop
for(int  i=0  ;  i<2  ;  i++)
{
  for(int  j=0  ;  j<2  ;  j++)
{
cout << A [i] [j]  ;
}
}
}// end of main
```

مثال(23)

اكتب برنامج يقوم برسم (n) عمود تتوضع عليها نجوم (*) بشكل متدرج

الحل:

```
  # include<iostream.h>
  # include<conio.h>
  Void main(   )
{
   clr scr (  )  ;
```

```
for(int  j=n  ;  j>0  ;  j--)
{
for(int  j=1  ;  i < j ;  i ++)
{
cout <<  "*"  ;
 }
cout << " 1n"  ;
 }
getch (   )  ;
}// end of main
```

8-5- الفئات في لغة C^{++}:

يمكن استخدام في لغة C^{++} مفهوم الفئات *classes* وهي عبارة عن جزء من البرنامج يتضمن متغيرات خاصة (*private* var*iables*) لها أنواع مختلفة وذلك حسب الحاجة البرمجية, وكذلك تتضمن متغيرات عامـــة (*public* var*iables*) وهي عبارة عن دوال ويُعبر عن الفئات كما يلي:

```
class < name >
{
private:
```

نعرف في هذا الجزء الدوال الخاصة أو المتغيرات

```
<type of variables local>
public:
```

نعرف في هذا الجزء الدوال العامة أو المتغيرات

```
< member function >
} ;
```

حيث إن الدوال الخاصة والمتغيـــرات الموجـــودة ضـــمن(private) لا يمكـــن للمستخدم أن يصل إليها أما الدوال العامة والمتغيرات الموجودة ضـــمن(public) فيمكن الوصول إليها من قبل المستخدم.يمكن التصريح عن كائنات معينة

داخل(class) تسمى هذه الكائنات(objects),ويمكن استدعاء دالة موجودة في(class) عند الوصول إلى دالة(main) وذلك بالشكل

اسم (objects) ; *الدالة*

مثال(24):اكتب برنامج تصرح فيه عن(class) اسمه(opr) وحساب مجموع و جداء عددين من خلال الدوال الموجودة في(class).

الحل:

```
# include<iostream.h>
# include<conio.h>
class opr
{
        private:
        public:
        int sum (int n , int m)
{
        return   n+m  ;
}
        int mul ( int r , int s)
{
        retun  r * s  ;
}
}  ; // end of class  opr
        void main  (     )
{
        clr scr (   )  ;
        opr obj1   , obj 2  ;
        int  a,b,x,y  ;
         cout  << " enter the value for obj 1 "  ;
        cin >> x  ;
        cout << " enter the value for obj 2 "  ;
        cin  >>. Y  ;
        a= obj 1 . sum(x,y)  ;
        b= obj 1. mul(x,y)  ;
         cout << a  ;
        cout << b  ;
} // end of main
```

8-6- تمارين:

1- اكتب خوارزمية بالطريقة النصية ثم بالطريقة البيانية لإدخال ثلاثة أعداد وحساب متوسطها الحسابي.

2- اكتب خوارزمية بالطريقة النصية ثم بالطريقة البيانية لإيجاد

$$n! = n(n-1)(n-2)...2.1$$

3- اكتب خوارزمية بالطريقة البيانية لإيجاد حل معادلة من الدرجة الثانية.

4- اكتب برنامج لإسناد قيم لعددين حقيقين ولعددين صحيحين وإيجاد حاصل جمع العددين الحقيقين وحاصل ضرب العددين الصحيحين وإخراج المتغيرات والنتائج.

5- اكتب برنامج لإيجاد مربعات الأعداد $1,2,...,9,10$ وإخراج النتائج.

6- اكتب برنامج لإيجاد المتوسط الحسابي للأعداد $1,2,3...,20$.

7- اكتب برنامج باستخدام الدوال يقوم بحساب مربعات الأعداد $1,2,...,10$ وإيجاد المتوسط الحسابي لها.

8- اكتب برنامج يقوم بحساب مساحة الدائرة ثم حساب مساحة المربع.

9- اكتب برنامج لإدخال مجموعة أعداد صحيحة موجبه تنتهي بالصفر وإيجاد أكبرها.

10- اكتب برنامج لإدخال عشرين عدداً صحيحاً لمتجهة بالترتيب العكسي.

11- اكتب برنامج يستخدم وظيفة ثانوية لجمع عددين صحيحين.

12- اكتب برنامج لإدخال n عدداً حقيقياً وإيجاد مجموعها.

13- اكتب برنامج يمكن من إدخال عددين وإيجاد حاصل القسمة ثم حاصل الضرب.

الرموز والمصطلحات العلمية

اللغة الإنكليزية	*اللغة العربية*
A	
Algorithm	خوارزمية
Absolutely convergent	متقارب بشكل مطلق
Analysis	تحليل
And	و
Accuracy	دقة
Arithmetic statement	عبارة الحسابية
Assembler language	لغة التجميع
B	
Bounded	محدود
Bounded function	دالة محدودة
Bit	خلية ثنائية
Blank	فراغ
Base	أساس
Binary	ثنائي
Bisection	تنصيف
C	
Charater constants	الثوابت الحرفية
Circuit	دارة
Code	ترميز

Common	مشترك
Compiler	مترجم
Condition	شرط
Constant	ثابت
Continuity	استمرارية
Convergense	تقارب
Computer	حاسب
Columms of matrix	أعمدة مصفوفة

D

Data	بيانات(معطيات)
Disc	قرص
Do loop	الحلقة التكرارية
Do statement	عبارة التكرار
Defined	مَعرف
Definite	محدد
Difference table	جدول الفروق
Direct methods	طرق مباشرة
Definite integral	تكامل محدد
Definition	تعريف
Derivation	اشتقاق
Derivative	مشتق
Divided defferences	الفروق المقسومة

E

End statement	عبارة النهاية
Equivalence	التكافؤ
Expression	تعبير
Element	عنصر
Equation	معادلة
Error	خطأ
Eigen value	القيمة الذاتية
Example	مثال

F

Flow chart	مخطط تدفقي
File	ملف
Format	صيغة
Factor	عامل
Fixed point	نقطة ثابتة
Fixed value	قيمة ثابتة
Function approximation	تقريب الدالة
Function of iteration	دالة التكرار

G

Gauss elimination	طريقة غاوس للحذف
Graphical methods	طرق بيانية
Greater than	أكبر من
Greatest value	القيمة العظمى

H

Hardware	مكونات الحاسوب
High level languages	اللغات عالية المستوى

I

If statement	عبارة *if* الشرطية
Integer number	عدد صحيح
Integer variable	متغير (متحول) صحيح
Infinity	لا نهاية
Interpolation	استكمال
Iteration	تكرار
Index	دليل
Indefinite	غير محدد
Interval	مجال
Information	معلومات

J

Jacobian method	طريقة جاكوبي

L

Logical expression	تعبير منطقي
Linear	خطي
Linear system	جملة خطية
Linear operator	مؤثر خطي
List	لائحة

Loop	حلقة
M	
Matrix	مصفوفة
Memory	ذاكرة
Maximum	قيمة عظمى
Mean value	قيمة وسطى
Mini computer	حاسوب صغير
N	
Nested	متداخل
Numerical	عددي
Norm	نظيم
Numerical analysis	تحليل عددي
Numerical methods	طرق عددية
Non linear	غير خطي
O	
Open interval	مجال مفتوح
Order	ترتيب
Operator	مؤثر
P	
Program	برنامج
Polynomial	كثيرة حدود
Product	ضرب
Proof	برهان

R

Record	سجل
Roots	جذور
Real	حقيقي
Real number	عدد حقيقي
Region	منطقة
Relation	علاقة
Round off	تدوير

S

Software	علم البرمجيات
Statement	عبارة
System	نظام
Series	متسلسلة
Set	مجموعة
Sign	إشارة
Solution	حل
Space	فضاء
Sum	جمع
Symbol	رمز
Symmetric	متناظر

T

Transpose	تحويل(منقول)

Table	جدول
Term	حد
Theorem	نظرية

U

Unique solution	حل وحيد

V

Value	قيمة
Variables	متحولات(متغيرات)
Vector	متجه(شعاع)
Vector space	فضاء متجهي

Z

Zero function	دالة صفرية
Zero solution	حل صفري

المـــراجـــــع

1- د. محمد صبح و د. علي جمال الدين: لغة الفورتران ومبادئ بعـــض اللغات الأخرى 1992م.

2- د. دعد الحسيني وآخرون:التحليل العددي(1) 2001م.

3- د. فوزي دنان: الرياضيات العددية 1991م.

4- د. محمود عثمان:الأسس العامة للتحليل العددي 1989م.

5- د. هاشم عبد للي: التحليل العددي 1992م.

6- د. محمد صبح و د. صالح الحربي: التحليل العددي وطـــرق حســـابه العددية 2006م.

7- د. فتحي قاضي: مبادئ أساسية في التحليل العددي 2005م.

8- د. تحسين الخطاب: مقدمة في الطرق العددية.

9- د. صلاح الدوه جي: (ترجمة) كيف تبرمج لغة C^{++} 1999م.

10- د. خالد خنيفس: البرمجة والخوارزميات 2008م.

11- Alkelley irapohl, an interoduction to programming in c, company inc1984.

12- Maron, M., numerical analysis 1982.

13-Emst hairer, interoduction al'analyse numerique,2001.

14-Rephale herbin, cours d'analyse numerique2004.

15-Dalziel: numerical methods 1999.

المدقق اللغوي: د. علي كردي