منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

التحليل العقدي (١) المركب

الدكتور

محمد مناف الحمد

أستاذ في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

١٤٣٤ — ١٤٣٥ هـ

٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

الفهرس

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

المقدمة

أول من قدم الأعداد المركبة غيرولامو كاردانو (Girolamo Cardano) في مقالة مهمة لحل معادلات من الدرجة الثالثة والرابعة في عام ١٥٤٥م بعنوان Ans Magna. ولتقدير جرأة هذا الاقتراح يجب على الفرد أن يدرك أن مفهوم الأعداد السالبة بدأ يلقى قبولاً مع بعض الملاحظات حول خواصها ظهرت من هنا وهناك.

كانت كميات كاردانو Cardano المصطنعة مهملة من أغلب الرياضيين إلى أن جاء العالم الرياضي الفذ كارل فريدريشت Carl Fridrich فأعطى الاسم الحالي للأعداد المركبة واستخدمها في إثبات النظرية الأساسية في الجبر التي تنص على أن أي كثيرة حدود غير ثابتة لها على الأقل جذر واحد.

سنبحث في هذا الكتاب خواص الأعداد المركبة والدوال ذات القيمة المركّبة، وسوف نرى أن نظرية دوال المتغير المركّب تعمم مفهوم حساب التفاضل والتكامل إلى الحقل المركّب.

يضفي التفاضل والتكامل بثوبه الجديد عمقاً وجمالاً جديداً على الرياضيات، فضلاً على أن طبيعة المتغير المركّب تقدم نتائج مفيدة في الرياضيات التطبيقية.

التحليل المركب واحد من أكثر فروع الرياضيات تشويقاً ونجاحاً، فنتائجه تساعد على إثبات نظريات مهمة، وتفتح آفاقاً لعدة مفاهيم في مجالات أخرى للرياضيات، ويعتمد كثيرٌ من الطرق الفعالة المستخدمة في تطبيقات الرياضيات في الهندسة والعلوم الأخرى على نظرية الدوال المركبة.

كما يعطي التحليل المركب مقدمة ممتازة للرياضيات المعاصرة بسبب سعة تطبيقاته وجمعه بين المفاهيم الهندسية والتحليلية، ويُسر الكثير من نتائجه.

تعد التطورات الحديثة في نظرية الدالة المركبة ونظرية المتغيرات المركبة بإعطاء تطبيقات مفيدة في كثير من مجالات الهندسة.

وأحد أهدافي من كتابة هذا الكتاب هو الوصول لموضوع التكامل المركب بأسرع وقت ممكن، وهذا يتطلب تأخير معالجة الخواص الهندسية للدوال الأولية، وللوصول إلى صلب الموضوع بسرعة اعتمدت على ميزات؛ منها: أن التطورات اللاحقة تكون أغنى في التطبيقات وأهم في معالجتها للمتسلسلات وللنقاط الشاذة والتكامل على مسار، بالإضافة إلى تأجيل عرض لخواص الهندسية، ويعوّض عنه النظر إليها كدوال حافظة للزوايا، ويحقق ذلك ربطاً أفضل للموضوعات يوفر وقتاً يمكن استثماره في موضوعات أخرى.

وقد هدفت أيضاً من كتابة هذا الكتاب إلى تقديم خيارات من التطبيقات أوسع، ومدى من الطرائق أشمل مما تشتمل عليه الكتب التقليدية عادة.

يعد هذا الكتاب من الكتب الغنية بالتطبيقات المنوعة في مجال التحليل المركب، وهي تطبيقات يحتاج إليها طلاب العلوم والهندسة وغيرهم، وهذا أحد الأسباب التي دفعتني إلى تأليفه ليكون عوناً لهم في دراستهم الجامعية.

اعتمدت في هذا الكتاب التسلسل المنطقي للأبحاث الواردة في المنهاج، وتبسيط المعلومات بشكل يناسب مستوى الطالب، وأوضحت فيه جميع الأفكار الواردة فيه بأمثلة ملائمة ومتدرجة في الصعوبة، وأعددت الكثير من التمرينات المحلولة وغير المحلولة في نهاية كل فصل، بغية ترسيخ المعلومات في الذهن وبهدف تذليل العقبات التي تواجه الطالب أثناء دراسة المنهاج من خلال ما استنبطته في المحاضرات التي ألقيت على طلاب السنة الثالثة في قسم الرياضيات خلال السنوات الأخيرة.

يتناول كتاب التحليل المركب (١) الأبحاث الأولى في التحليل العقدي (المركب) من جبر الأعداد العقدية وطبولوجيا المستوي العقدي إلى التابع العقدي وتفاضله وتكامله

ومبرهنة كوشي ونشر الدوال التحليلية، وهذه الموضوعات تشكل فقرات منهج مقرر التحليل المركب (١)، وليس التحليل المركب (١) وحده، الذي خصص للتحليل العقدي، بل إن التحليل المركب (٢) يتناول أيضاً أبحاثاً أخرى من أهمها مبرهنة الرواسب وتطبيقاتها والتمديد التحليلي والتطبيق المحافظ.

أرجو أن أكون قد وفقت في عرض مضمون هذا الكتاب، وأرجو من الزملاء الكرام تزويدي بملاحظاتهم القيّمة حول هذا الكتاب إسهاماً منهم في تطويره وتحسينه مستقبلاً.

والله ولي التوفيق

المؤلف

أ.د. محمد مناف الحمد

الفصل الأول

الأعداد المركبة

Complex Numbers

لعلّ ما يميز العدد الحقيقي أن مربعه موجب دائماً وبالتالي فإنه من المعروف أنه لا يوجد حل للمعادلة $x^2 = -2$ في مجموعة الأعداد الحقيقية. من أجل ذلك كانت هناك ضرورة لتوسيع حقل الأعداد الحقيقية لنحصل على حل لمثل هذه المعادلات الجبرية، فعرّفت الأعداد المركبة. هذا التعريف يتضمنه البند الأول من هذا الفصل بالإضافة إلى الخصائص الجبرية لهذه الأعداد. أما البند الثاني فخصص لمعرفة الماهية التحليلية للأعداد المركبة. وعرضنا شكلاً خاصاً للأعداد المركبة يسمى الشكل القطبي في البند الثالث، وكذلك بحثنا قوى وجذور الأعداد المركبة في البند الرابع. أما البند الخامس فخصص لدراسة بعض الخصائص التبولوجية لمجموعات جزئية من الأعداد المركبة.

١ . ١ . الصفات الجبرية للأعداد المركبة:

تعرّف مجموعة الأعداد المركبة التي يرمز لها بالرمز C بأنها حاصل الضرب الديكارتي لمجموعة الأعداد الحقيقة R في نفسها أي إن:

$$C = R \times R = \{(x,y): x,y \in R\} \qquad (1)$$

تعرّف عمليتا الجمع والمضاعف العددي لعناصر المجموعة C كما هي في الأزواج المركبة فيكون الجمع بجمع المركبات المتناظرة والمضاعف العددي بضرب كل المركبات بالعدد المعنى وبالرموز يكون:

$$(x,y) + (a,b) = (x + a, y + b) \qquad (2)$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha x , \alpha y) \qquad (3)$$

لكل: (x,y) , (a, b) في C و α في R.

ويمكن القول إن النظام الجبري الثلاثي $(C, + , .)$ يمثل فراغاً (فضاءً) خطياً.

كما يمكن تعريف عملية الضرب لعددين مركبين بالمساواة التالية:

$$(x, y) . (a, b) = ((ax - by) , (xb + ay)) \qquad (4)$$

وبهذه العملية تصبح المجموعة $(C^* = C - \{(0,0)\}, .)$ زمرة تبديلية أي تحقق الصفات التالية:

١ . عملية الضرب عملية تبديلية:

$$(x,y) . (a, b) = (a, b) . (x, y)$$

٢ . عملية الضرب عملية تجميعية:

$$(x, y) . ((a, b) . (c, d)) = ((x,y) . (a,b)) . (c, d)$$

٣ . يوجد عنصر نظير ضربي (محايد ضربي) وهو:

$$(1 , 0) \qquad (5)$$

٤ . لكل عنصر (x, y) في C^* يوجد نظير ضربي له وهو $(x, y)^{-1}$ حيث:

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \qquad (6)$$

ونترك التحقق من هذه الخصائص تمريناً للقارئ.

وإذا مثلنا الأزواج المرتبة من الشكل $(x, 0)$ بالعدد الحقيقي x فإنه يمكن تمثيل أي عدد مركب على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) \\ &= x (1, 0) + y (0, 1) \end{aligned}$$

ومن خصائص العدد المركب $(0, 1)$ أن:

$$(0, 1) . (0, 1) = (-1, 0) \qquad (7)$$

فإذا رمزنا للعدد المركب $(0, 1)$ بالرمز i فإن:

$$i^2 = (0, 1) . (0,1) = (-1, 0) = -1 \qquad (8)$$

أي إن $i = \sqrt{-1}$، ويسمى العدد التخيلي ومن ثمَّ يأخذ العدد المركب z الشكل التالي:

$$z = (x, y) = x + yi \qquad (9)$$

وهو ما يسمى بالشكل الجبري (الديكارتي) للعدد العقدي.

حيث إن:

$$x = \mathrm{Re}.\ z\ ,\ y = \mathrm{Im}\ .\ z \qquad (10)$$

أي إن الجزء الحقيقي من العدد المركب z هو x والجزء التخيلي من العدد المركب z هو y. وإذا كان $x = 0$ فإن $z = yi$ عدد تخيلي خالص، وإذا كان $y = 0$ فإن $z = x$ عدد حقيقي خالص. وعليه فإن مجموعة الأعداد المركبة تعرف كما يلي:

تعريف ١:

مجموعة الأعداد المركبة C معرفة بالمساواة التالية:

$$C = \left\{x + yi : x, y \in R, i = \sqrt{-1}\right\}$$

أما عمليات الجمع والطرح والضرب والمضاعف العددي فتعرف كما يلي:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\, i$$
$$(a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$
$$\alpha\,(a + bi) = (\alpha a) + (\alpha b)\, i$$

ومما تقدم نستنتج أن النظير الجمعي للعدد المركب $a + bi$ هو $-a - bi$ وأن مقلوب العدد المركب (النظير الضربي) له هو $x + yi$ حيث إن:

$$x + yi = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \qquad (11)$$

أما قسمة العددين المركبين $a + bi$, $c + di$ فهي:

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi)(x + yi)$$

حيث إن $x + yi$ يمثل النظير الضربي للعدد $c + di$ أي إن:

$$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-d}{c^2+d^2}i\right)$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

مثال (١):

اكتب الكسر التالي على الشكل $x + yi$:

$$\frac{(2-3i)+(5+2i)}{(-1+2i)(1+i)}$$

الحل:

بتطبيق مفهوم جمع وضرب وقسمة الأعداد المركبة نجد:

$$\frac{(2-3i)+(5+2i)}{(-1+2i)(1+i)} = \frac{7-i}{-3+i}$$

$$= (7-i)(-3+i)^{-1}$$

$$= (7-i)\left(\frac{-3}{10} + \frac{-1}{10}i\right)$$

$$= \frac{1}{10}(-22-4i)$$

$$= -\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$$

مثال (٢):

أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد $z = 2 + 3i$

الحل:

لدينا $\operatorname{Re} z = 2$ و $\operatorname{Im}. z = 3$

مثال (٣):

اكتب الكسر $\frac{1-2i}{3-4i}$ على شكل عدد مركب؟

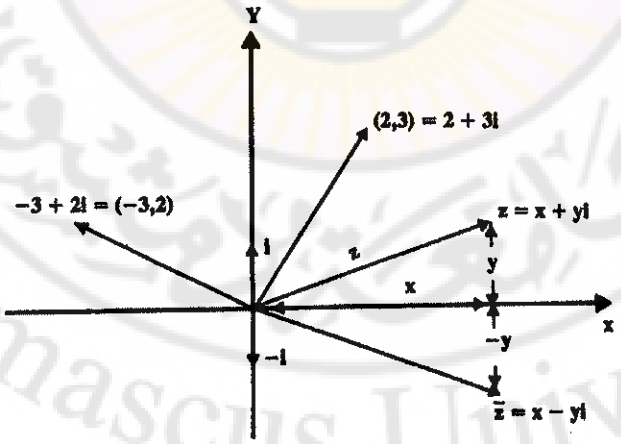
الحل:

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام نجد:

$$\frac{1-2i}{3-4i}=\frac{(1-2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3-6i+4i-8i^2}{9+12i-12i-16i^2}$$
$$=\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$$

١ . ٢ . الخصائص التحليلية للأعداد المركبة:

مما تقدم في البند السابق تبيّن لنا أنه يمكن أن ننظر للأعداد المركبة على أنها مجموعة النقاط التي يتكوّن منها المستوي الديكارتي $R \times R$ وعليه يمكن دراسة الخصائص التحليلية والهندسية للأعداد المركبة، فيمكن أن نعتبر أن العدد المركب يمثل متجهاً يحدّد بقيمة واتجاه، وكذلك يمكن أن نفسّر جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها هندسياً، وفي هذه الحالة يسمى المحور x بالمحور الحقيقي والمحور y بالمحور التخيلي.



الشكل (١)

أما طول المتجه الذي يمثل العدد المركب فيسمى القيمة المطلقة للعدد المركب أو مقياسه وهو معرّف فيما يلي:

تعريف (٢):

القيمة المطلقة أو مقياس أو طويلة العدد المركب $z = x + yi$ الذي يرمز له بالرمز $|z|$ معرف بالمساواة التالية:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (12)$$

وكذلك انعكاس المتجه (الذي يمثل العدد المركب) في المحور الحقيقي x فيسمى المرافق المركب وهو معرّف فيما يلي:

تعريف (٣):

لكل عدد مركب $z = x + yi$ يوجد مرافق مركب له يرمز له بالرمز $\bar{z}$ ومعرّف بالمساواة:

$$\bar{z} = x - yi \qquad (13)$$

مثال (٤):

ليكن $z = 5 - 2i$ و $w = 3 + i$ أوجد ما يلي:

أ. $|w|\ ,\ |z|$ ب. $|\bar{w}|, |\bar{z}|$

ج. $\frac{1}{w}, \frac{\bar{w}}{w\bar{w}}$ د. $\frac{z}{w}$

هـ. $z\bar{z}$ و. $\overline{wz}$

الحل:

أ. $|w| = \sqrt{10}, |z| = \sqrt{29}$

ب. $|\bar{w}| = \sqrt{10}, |\bar{z}| = \sqrt{29}$

ج ·

$$\frac{1}{w}=\frac{3}{10}-\frac{i}{10}$$

وكذلك:

$$\frac{\overline{w}}{w\overline{w}}=\frac{3-i}{10}=\frac{3}{10}-\frac{i}{10}$$

لاحظ أن:

$$\frac{\overline{w}}{w\overline{w}}=\frac{1}{w}$$

د ـ من الملاحظة السابقة نجد أن:

$$\frac{z}{w}=\frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}=(5-2i)\left(\frac{3}{10}-\frac{i}{10}\right)$$

$$=\frac{13}{10}-\frac{11}{10}i$$

هـ ـ $z\overline{z}=29$ لاحظ أن: $|z|^2=29$ كذلك نجد أن:

و ·

$$\overline{wz}=\overline{(3+i)(5-2i)}$$

$$=\overline{(17-i)}=17+i$$

نلاحظ كذلك أن:

$$\overline{w}\cdot\overline{z}=17+i$$

أي إن:

$$\overline{w.z}=\overline{w}\cdot\overline{z}$$

المبرهنة التالية تجمع بعض الخصائص التحليلية للأعداد المركبة:

مبرهنة (١):

لأي عددين مركبين W, Z فإن:

أ. $z\bar{z} = |z|^2$.

ب. $|z|\,|w| = |zw|$.

جـ. $|\bar{z}| = |z|$.

د. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

هـ. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

و. $\mathrm{Re}.z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$.

ز. $\mathrm{Im}.z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

حـ. $\overline{zw} = \bar{z}\cdot\bar{w}$.

ط. $\bar{\bar{z}} = z$.

ق. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

البرهان:

نبرهن الفروع أ، د، ق ونترك إثبات بقية الفروع تمريناً للقارئ ولإثبات أ نقول باستخدام تعريف ٢ وتعريف ٣ نجد أن:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

ولإثبات د فإن:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

بينما:

$$\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-yi}{|z|^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i = \frac{1}{z}$$

ولإثبات ق نقول إن:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z\overline{w}}{|w|^2}\right)} = \frac{1}{|w|^2} \overline{z \cdot \overline{w}}$$

$$= \frac{\overline{z}w}{|w|^2} = \overline{z} \cdot \frac{w}{w\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

أما المبرهنة التالية فتحتوي متباينات لها أثرٌ مهمٌّ في التحليل المركب إحداها المتباينة المثلثية.

مبرهنة (٢):

لأي عددين مركبين $z = x + yi$ و $w = s + ti$:

أ. $Re.z \le |z| \le |Re.z| + |Im.z|$

ب. $|z + w| \le |z| + |w|$

جـ. $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$

البرهان:

لإثبات المتباينة المثلثية (ب) نستخدم فرع أ من المبرهنة السابقة لنقول:

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}$$

$$= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}$$

$$= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2$$

$$= |z|^2 + 2\,Re(z\overline{w}) + |w|^2$$

وبتطبيق الفرع أ من المبرهنة (٢) ينتج أن:

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2$$
$$\le (|z| + |w|)^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على المطلوب.

نترك إثبات الفرع (أ) تمريناً للقارئ ونعطي برهاناً جزئياً للفرع (جـ)، لذلك نفرض أن $\alpha = z + w$ في المتباينة المثلثية ونعوض بدلاً من w قيمتها $w = \alpha - z$ لنحصل على ما يلي:

$$|\alpha| \le |z| + |\alpha - z|$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$|\alpha| - |z| \le |\alpha - z|$$

ويمكن أن نبرهن أن:

$$-|\alpha - z| \le |\alpha| - |z|$$

وبتوفيق النتيجتين نستنتج أن:

$$-|\alpha - z| \le |\alpha| - |z| \le |\alpha - z|$$

أي إن:

$$\big||\alpha| - |z|\big| \le |\alpha - z|$$

مثال (٥):

بيِّن أن النقاط التي تحقق المعادلة $|z| = 2$ تقع على محيط دائرة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

الحل:

بتعويض ما تساويه القيمة المطلقة بدلالة المتغيرين x و y في المعادلة $|z| = 2$ نجد أن:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

ومن ثَمَّ يكون:

$$x^2 + y^2 = 4$$

وهذه معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2.

وبشكل عام فإن المعادلة:

$$|z - z_0| = r \qquad (14)$$

تمثل معادلة دائرة مركزها $z_0 = (x_0, y_0)$ نصف قطرها r لأن المعادلة تكتب بالصيغة:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

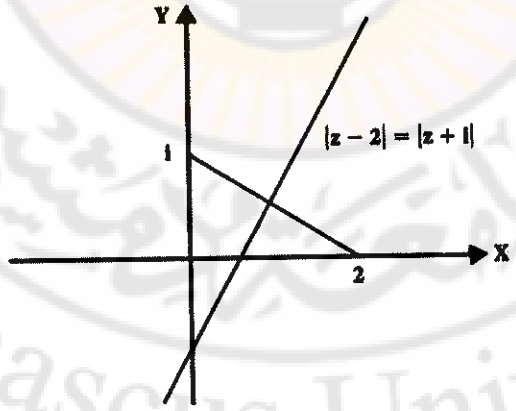
مثال (٦):

صف مسار نقطة تتحرك بحيث تحقق المعادلة:

$$|z - 2| = |z + i|$$

الحل:

النقطة التي تتحرك بحيث تحقق المعادلة $|z - 2| = |z + i|$ يكون بعدها عن النقطة 2 مساوياً دائماً لبعدها عن النقطة i، ومن ثَمَّ يكون مسار هذه النقطة هو الخط المستقيم العمودي والمنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين 2 و i.



الشكل (٢)

مثال (٧):

صف مسار النقطة التي تتحرك بحيث تحقق المعادلة:

$$|z + i|^2 = \text{Im.}\ (z + 2i)$$

الحل:

نحوِّل المعادلة إلى الإحداثيات الديكارتية (الكارتيزية):

$$x^2 + (y + 1)^2 = y + 2$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$x^2 + y^2 + y = 1$$

ومن ذلك فإن:

$$\frac{x^2}{\frac{5}{4}} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

مثال (٨):

بيِّن أنه إذا كانت النقطة z على محيط دائرة نصف قطرها 2 فإن:

أ. $|z^2 + 2z - 1| \le 9$

ب. $\frac{1}{|z^3 - 1|} \le \frac{1}{7}$

الحل:

حيث إن النقطة تقع على محيط دائرة نصف قطرها 2 فإنها تحقق المعادلة:

$$|z| = 2$$

ومن ذلك وباستخدام المتباينة المثلثية نحصل على ما يلي:

$$|z^2 + 2z - 1| \le |z|^2 + 2|z| + 1 = 9$$

وباستخدام المتباينة (جـ) من المبرهنة (٢) فإن:

$$|z^3 - 1| \ge ||z|^3 - 1| = 7$$

وبذلك يكون:

$$\frac{1}{|z^3 - 1|} \le \frac{1}{7}$$

١ . ٣ . الشكل القطبي للأعداد المركبة:

يمكن استخدام الإحداثيات القطبية r, θ للتعبير عن العدد المركب z ليأخذ صيغة تسمى الشكل القطبي للعدد المركب. حيث إن:

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta\ ,\ r^2 = x^2 + y^2$$

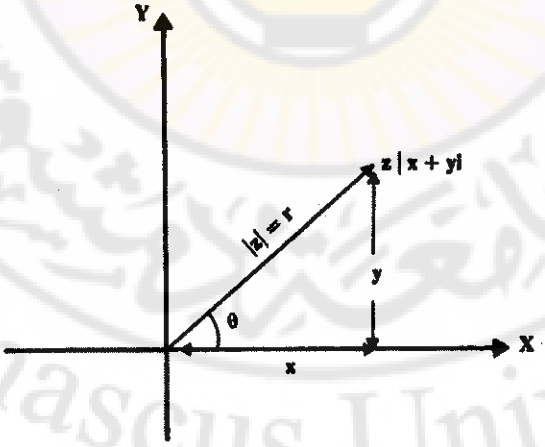
ينتج لدينا:

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

حيث $r = |z|$، ومن ثَمَّ فإن:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ ,\ |z| = r \qquad (15)$$

تسمى θ السعة الزاويّة للعدد المركب z وبالرموز $\theta = \arg z$ وبما أن قيمة θ التي تحقق (15) ليست وحيدة بسبب كون $\sin\theta$ و $\cos\theta$ دالتين دوريتين ودورتهما 2π نحتاج إلى تحديد قيمة θ بدورة واحدة حسب المتباينة التالية:



الشكل (٣)

$$-\pi < \theta \le \pi, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (16)$$

وعندها تسمى قيمة θ تلك السعة الرئيسية للعدد المركب z وبالرموز:

$$\Phi = \text{Arg } z$$

أي إن العدد المركب z يأخذ الصيغة:

$$z = |z| \,.\, (\cos(\Phi + 2n\pi) + i \sin(\Phi + 2n\pi)) \qquad (17)$$

حيث إن: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, -\pi < \Phi \le \pi$

المبرهنة التالية تلخص بعض خصائص السعة الزاوية للعدد المركب.

مبرهنة (٣):

نفرض أن z و w عددان مركبان فإن:

أ. $\arg(zw) = \arg z + \arg w$

ب. $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$

جـ. $\arg(1/z) = -\arg z$

د. $\arg(\bar{z}) = -\arg z$

البرهان:

حسب الشكل القطبي للعدد المركب (الصيغة 15) فإن:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \;,\; w = |w|(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

حيث إن θ و γ هما السعة (الزاويّة) للعددين z و w على الترتيب.

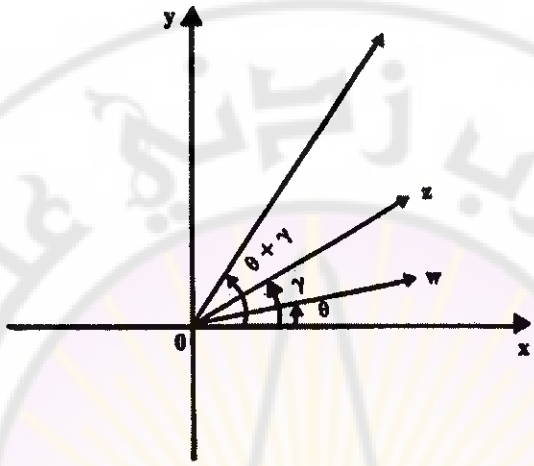
نجد حاصل ضرب العددين وهو:

$$zw = |z||w|\left((\cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma) + i(\cos\theta\sin\gamma + \sin\theta\cos\gamma)\right)$$
$$= |z||w|\left(\cos(\theta+\gamma) + i\sin(\theta+\gamma)\right)$$

وعليه فإن السعة الزاوية للعدد المركب zw هي $\theta + \gamma$ أي إن:

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w$$

(وبالتمثيل المتجه للعدد المركب يتبيّن لنا أن المعنى الهندسي لضرب عددين مركبين يتمثل بضرب القيمتين المطلقتين للعددين مع دوران عكس عقارب الساعة لأحدهما مقداره سعة العدد الآخر. انظر الشكل (٤).



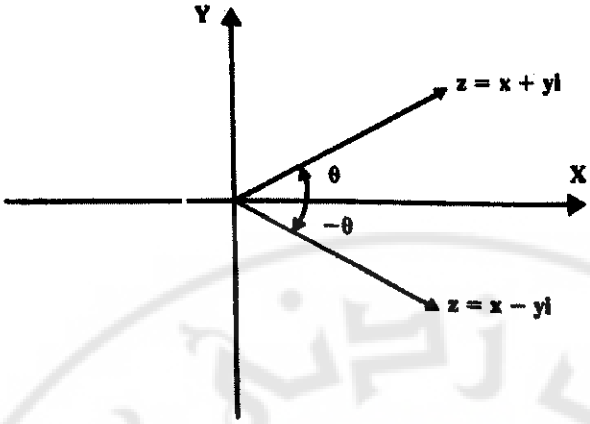
الشكل (٤)

أما تأثير حاصل ضرب القيمتين المطلقتين للعددين المركبين فهو تكبير أو تصغير لمقدار أحد العددين المركبين اعتماداً على كون القيمة المطلقة للعدد المركب الآخر أكبر أو أصغر من 1). وهذا ينهي إثبات الفرع أ.

يمكن أن نوظف الفرعين أ، جـ لإثبات الفرع ب. ولإثبات الفرع جـ فإننا نستعين بالفرع د لنقول إن:

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = -\text{atrgz}$$

نترك إثبات الفرع د تمريناً للقارئ لوضوحه هندسياً. انظر الشكل (٥).



الشكل (٥)

مثال (٩):

أوجد السعة والسعة الرئيسية للعدد المركب $z = 1 + \sqrt{3}i$

الحل:

حسب تعريف السعة θ نجد أن:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\sqrt{3}$$

ومن ذلك فإن:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

أما السعة الرئيسية لهذا العدد فهي أصغر قيمة موجبة للسعة θ بحيث تقع بين $[-\pi , +\pi]$ أي إن $\theta = \frac{\pi}{3}$.

مثال (١٠):

أوجد السعة والسعة الرئيسية للعدد المركب، واكتبه بالشكل القطبي:

$$z = \left(\sqrt{3} - i\right)/(1 + i)$$

الحل:

بتطبيق الفرع (ب) من المبرهنة السابقة نجد أن:

$$\arg z = \arg\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)$$

$$= \arg\left(\sqrt{3}-i\right) - \arg(1+i)$$

فإن كانت $\arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \theta$ و $\arg(1+i) = \gamma$ فإن:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

$$\gamma = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\arg z = \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + 2n\pi$$

$$= \frac{7\pi}{12} + 2n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

فيكون الشكل القطبي للعدد المركب z كما يلي:

$$z = \frac{\left|\sqrt{3}-i\right|}{\left|1+i\right|}\left(\cos(\frac{7\pi}{12} + 2n\pi) + i\sin(\frac{7\pi}{12} + 2n\pi)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin((\frac{7\pi}{12})\right)$$

ملحوظة مهمة:

من الجدير بالذكر أن ننوه بأن العلاقة أ في المبرهنة السابقة قد لا تكون صواباً إذا حولناها بدلالة السعة الرئيسية أي إن العلاقة:

$$\text{Arg}\,(zw) = \text{Arg}\,z + \text{Arg}\,w \qquad (18)$$

قد لا تكون صحيحة كما يشير إلى ذلك المثال التالي:

مثال (١١):

بيِّن أن العلاقة (18) ليست صحيحة بالضرورة.

الحل:

نفرض أن $z = 3i$ وأن $w = -2$ فإن:

$$\text{Arg}z = \frac{\pi}{2}, \text{Arg}w = \pi$$

وكذلك:

$$\text{Arg}zw = \text{Arg}(-6i) = -\frac{\pi}{2}$$

ولكن:

$$\text{Arg}z + \text{Arg}w = \frac{3\pi}{2}$$

وهذا يشير إلى أن:

$$\text{Arg}\,w \neq \text{Arg}\,z + \text{Arg}\,w$$

تعريف (٤):

لأي عدد حقيقي θ نعرف $\exp i\theta = e^{i\theta}$ بالمعادلة التالية:

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (19)$$

وباستخدام هذه الصيغة التي تعرف بأنها صيغة أولر Euler Formula يمكن إعطاء صيغة أخرى للعدد المركب حيث:

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta} \qquad (20)$$

ولهذه الصيغة فوائد كثيرة، منها تسهيل إثبات النظرية التالية التي تسمى نظرية دوموافر (De Moivere's Theorem).

مبرهنة (٤) (De Moivre's Theorem):

لأي عدد حقيقي θ ولأي عدد صحيح موجب n تكون المعادلة:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (21)$$

صحيحة.

البرهان:

بتوظيف المعادلة (19) نستنتج أن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

وكذلك من فوائد المعادلة (20) إعطاء برهان آخر للمبرهنة (٣) مثال ذلك:

لإثبات الفرع ب نوظف العلاقة (20) لنستنتج أن:

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg\left(\frac{|z|e^{i\theta}}{|w|e^{i\gamma}}\right) = \arg\left(\frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\gamma)}\right)$$
$$= (\theta - \gamma) = \arg z - \arg\gamma$$

وستظهر فوائد أخرى للمعادلة (20) في البند القادم.

مثال (١٢):

اكتب العدد المركب التالي على الصيغة (20) (التي تسمى الصيغة الأسية للعدد المركب):

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$$

الحل:

بتوظيف الصيغة (20) نحصل على ما يلي:

$$z = \frac{\left|-1+\sqrt{3}\,i\right|}{\left|\sqrt{3}-i\right|} e^{i(\theta-\gamma)}$$

حيث إن:

$$\theta = \arg(-1+\sqrt{3}i), \gamma = \arg(\sqrt{3}-i)$$

وبما أن:

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

وكذلك:

$$\gamma = \tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = \frac{-5}{6}\pi$$

فإن:

$$z = e^{i(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})}$$
$$= e^{i\left(\frac{-\pi}{6}\right)} = e^{\frac{-\pi}{6}i}$$

مثال (١٣):

أوجد الشكل القطبي للعدد $1 - i$.

الحل:

طويلة أو مقياس العدد $1 - i$ هو:

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

بينما الزاوية الأساسية للعدد $1 - i$ هي:

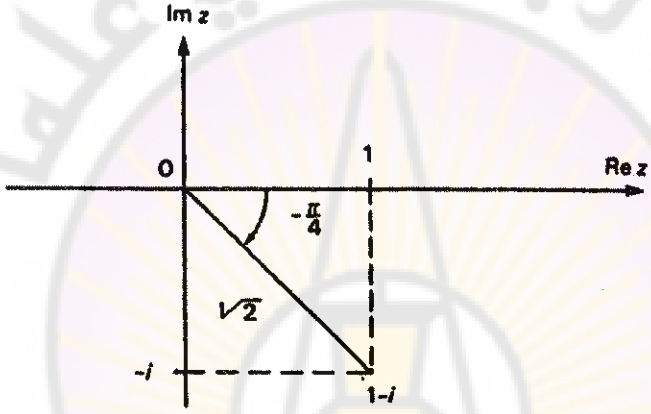
$$\arg(1-i)=\frac{-\pi}{4}$$

والزوايا القطبية θ غير وحيدة التحديد، إذن زاوية الميل هي:

$$\arg(1-i)=\frac{-\pi}{4}+2\pi k\,,$$

حيث k أي عدد صحيح، ومن ثمَّ فإن التمثيل القطبي للعدد $1-i$ هو:

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}+2\pi k\right)\right]$$



الشكل (٦)

١ . ٤ . القوى والجذور للأعداد المركبة:

لعل من أهم فوائد الشكل القطبي وخاصة الشكل الأسّي للعدد المركب هو تسهيل عملية إيجاد قوى وجذور العدد المركب. فإذا فرضنا أن z عدد مركب، n عدد صحيح موجب فإن:

$$|z^n|=\left(|z|e^{i\theta}\right)^n=|z|^n e^{in\theta}$$

ومن ذلك فإن:

$$r^n=|z^n|=|z|^n,\arg z^n=n\theta$$

وبالمثل إذا كان العدد n صحيحاً سالباً يكون:

$$|z^n| = |z|^n, \arg z^n = n\theta$$

ولإيجاد الجذر النوني للعدد المركب نتبع مرحلتين الأولى إيجاد الجذر النوني للعدد 1 ثم تأتي المرحلة الثانية لإيجاد الجذر النوني لأي عدد مركب.

مبرهنة (٥):

يوجد n من الأعداد المركبة التي تحقق المعادلة:

$$z^n = 1$$

تسمى جذور الوحدة وهي:

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\ , k = 0, 1, \ldots, n-1$$

البرهان:

بالاستفادة من الشكل الأسي للعدد المركب نستنتج أن:

$$|z|^n e^{in\theta} = 1\, e^{\theta i}$$

ومن ذلك ينتج أن $|z|^n = 1$ أي إن $|z| = 1$ وكذلك:

$$n\theta - 0 = 2k\pi\ , k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

وهذا يعطي:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n}\ , k = 0, 1, \ldots, n-1$$

وهذه هي القيم المختلفة للمتغير θ، حيث تكون القيم الأخرى تكراراً لهذه القيم.

وتكون هناك n جذراً للعدد المركب 1 هي:

$$z_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

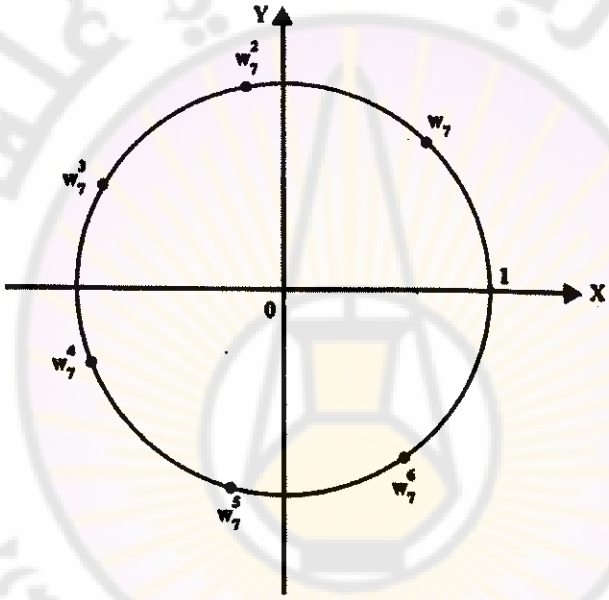
وقد جرت العادة أن يرمز لهذه الجذور للعدد الواحد بالرموز:

$$1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n-1} \qquad (23)$$

حيث إن:

$$w_n = e^{\frac{2\pi}{n}\cdot i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

ومن خصائص هذه الجذور هندسياً أنها تقسم دائرة الوحدة إلى n قسم متساوٍ فإذا كان $n = 7$ فإنها تمثل على دائرة الوحدة كما في الشكل (٧).



الشكل (٧)

المبرهنة التالية تبحث في الجذور النونية للعدد المركب.

مبرهنة (٦):

يوجد n جذراً يحقق المعادلة:

$$z = w^{1/n}$$

وهي:

$$z_k = |w|^{1/n} \cdot e^{\frac{\gamma+2k\pi}{n}i}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (24)$$

حيث إن: $\gamma = \arg w$.

البرهان:

بالمثل نوظف الشكل الأسّي للعدد المركب للعددين z, w لنحصل على:

$$\left(|z| e^{i\theta}\right)^n = |w| e^{i\gamma}$$

حيث إن $\theta = \arg z$ و $\gamma = \arg w$ ومن ذلك نستنتج أن:

$$|z|^n = |w|, \; n\theta - \gamma = 2k\pi$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ومن ثمَّ ينتج أن:

$$|z| = |w|^{1/n}, \theta_k = \frac{\gamma + 2k\pi}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1$$

وهذه هي القيم المختلفة للسعة الزاوية θ وباقي قيم k تكون تكراراً لهذه القيم فتكون الجذور المطلوبة هي:

$$z_k = |w|^{1/n} e^{\frac{\gamma+2k\pi}{n}i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

والعلاقة بين جذور الوحدة وجذور العدد المركب w وثيقة حيث يمكن الحصول على جذور العدد المركب w إذا علم لدينا جذر واحد له مثل z_0 فتكون الجذور الأخرى للعدد w هي:

$$z_0, z_0 w_n, z_0 w_n^2, \ldots, z_0 w_n^{n-1} \qquad (25)$$

حيث إن $1, w_n, w_n^2, \ldots w_n^{n-1}$ هي جذور الواحدة.

مثال (١٤):

أوجد جذور المعادلة: $z^5 = 1$

الحل:

جذور المعادلة $z^5 = 1$ هي $z = 1^{1/5}$ أي هي الجذور الخماسية للعدد 1 وهي:

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{5}\cdot i} \quad , \ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

وهي كما يلي:

$$z_0 = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

مثال (١٥):

أوجد جذور المعادلة:

$$z^5 = (\sqrt{3} + i)$$

الحل:

الجذور المطلوبة هي الجذور الخماسية للعدد المركب $w = \sqrt{3} + i$ وبتطبيق المبرهنة السابقة نجد أن:

$$z_k = |w|^{1/5} e^{\frac{\gamma + 2k\pi}{5}i} \ , k = 0, 1, 2, 3, 4$$

حيث إن $\gamma = \arg w$. وهي $\gamma = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$|w|$ القيمة المطلقة للعدد w وهي:

$$|w| = 2$$

وبالتعويض نحصل على الجذور المطلوبة وهي:

$$z_k = 2^{1/5} \cdot e^{\frac{\pi/6+2k\pi}{5}i} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

أي إن:

$$z_0 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30}i} \quad , \quad z_1 = 2^{1/5} e^{\frac{13\pi}{30}i}$$

$$z_2 = 2^{1/5} e^{\frac{25\pi}{30}i} \quad , \quad z_3 = 2^{1/5} e^{\frac{37\pi}{30}i}$$

$$z_4 = 2^{1/5} e^{\frac{49\pi}{30}i}$$

وبمحاولة التحقق من (25) نأخذ أحد الجذور الخماسية للعدد $w = \sqrt{3} + i$

وليكن $z_0 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30}i}$ لنجد بقية الجذور وهي:

$$z_0 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30}i}$$

$$z_1 = z_0 w_5 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30}i} e^{\frac{2\pi}{5}i} = 2^{1/5} e^{\frac{13\pi}{30}i}$$

$$z_2 = z_0 w_5^2 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30}i} e^{\frac{4\pi}{5}i} = 2^{1/5} e^{\frac{25\pi}{30}i}$$

$$z_3 = z_0 w_5^3 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30}i} e^{\frac{6\pi}{5}i} = 2^{1/5} e^{\frac{37\pi}{30}i}$$

$$z_4 = z_0 w_5^4 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30}i} e^{\frac{8\pi}{5}i} = 2^{1/5} e^{\frac{49\pi}{30}i}$$

مثال (١٦):

أوجد جذور المعادلة التربيعية: $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$

حيث إن α, β, γ أعداد مركبة و $\alpha \neq 0$.

الحل:

بالقسمة على α والإتمام إلى مربع كامل نحصل على:

$$z^2+\frac{\beta}{\alpha}z+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=-\frac{\gamma}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

أي إن:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد:

$$z=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

وبما أننا نتعامل مع أعداد مركبة حيث يوجد قيمتان للعدد $\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$ متضمنة كجذور تربيعية للعدد $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ وهي:

$$(\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}$$

يكون حل المعادلة التربيعية كما يلي:

$$z=\frac{-\beta+(\beta^2-4\alpha\gamma)^{1/2}}{2\alpha} \qquad (26)$$

فمثلاً لإيجاد جذور المعادلة التربيعية:

$$z^2-(1+2i)z-(2-i)=0$$

نطبق المعادلة (26) حيث إن $\alpha = 1$، $\beta = 1 + 2i$، $\gamma = -2 + i$ لنحصل على:

$$z=\frac{-1-2i+(1-4+4i+8-4i)^{1/2}}{2}$$

$$= \frac{-1-2i+5^{1/2}}{2} = \frac{\left(-1 \mp \sqrt{5}\right)-2i}{2}$$

أي إن الجذرين هما:

$$z_1 = \frac{(-1+\sqrt{5})-2i}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{(-1-\sqrt{5})-2i}{2}$$

مثال (١٧):

احسب: $(1-i)^{23}$

الحل:

يمكن أن نضرب $(1 - i)$ في نفسه 23 مرة للحصول على الجواب، ولكن باستخدام نظرية دوموافر، نحصل على الجواب بطريقة أسهل. رأينا في مثال (١٣) أن:

$$1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}+2\pi k\right)\right]$$

باستخدام القيمة الأساسية للزاوية نحصل على المساواة:

$$(1-i) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$$

ومن نظرية دوموافر نحصل على:

$$(1-i)^{23} = \left(\sqrt{2}\right)^{23}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{23}$$

مثال: (١٨):

أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $w = 1 - i$.

الحل:

لنفرض أن z هو الجذر التكعيبي للعدد $1 - i$ إذن:

$$z^3 = 1 - i$$

وبوساطة نظرية دوموافر نجد أن:

$$|z|^3 (\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$$

ومن ثَمَّ فإن:

$$|z|^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} \text{ و } \theta_k = \frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0,1,2.$$

إذن الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $1 - i$ هي:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

ملاحظة:

تعطي القطوع المخروطية أمثلة إضافية لمفاهيم في هذا الجزء. ومع من أن الصيغ العادية للهندسة التحليلية يمكن استخدامها (مع $x = \mathrm{Re}z$ و $y = \mathrm{Im}z$) فمن السهل تعريف القطوع المخروطية بدلالة المسافة.

مثال (١٩):

يعرف القطع الناقص على أنه مجموعة نقاط المستوى الإحداثي التي يكون مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين في هذا المستوى يساوي مقداراً ثابتاً. وتسمى

النقطتان F' و F بؤرتي القطع الناقص، ما معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة i والذي بؤرتاه ± 1؟

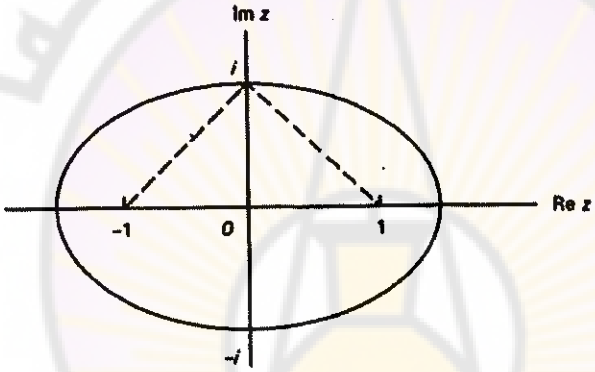
الحل:

بما أن $z - z_0$ المتجه من z_0 إلى z، فنجد من تعريف القطع الناقص:

$$|z-1| + |z+1| = c$$

حيث c عدد حقيقي ثابت، لكن $z = i$ تحقق هذه المعادلة، بالتالي نجد أن، (انظر الشكل (٨):

$$c = |i-1| + |i+1| = 2\sqrt{2}$$



الشكل (٨): قطع ناقص $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$

إذن القطع الناقص يعطى بالمعادلة:

$$|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$$

مثال (٢٠):

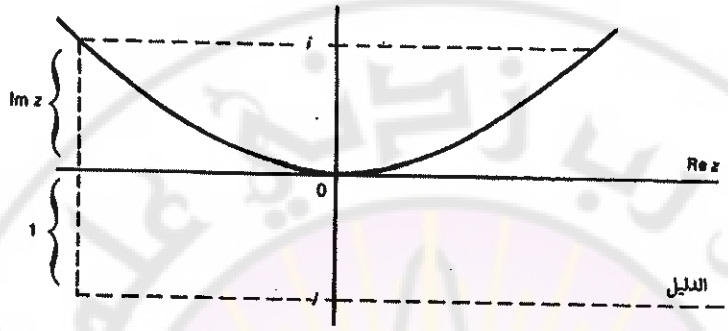
يعرّف القطع المكافئ على أنه مجموعة النقاط من المستوى التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة F يساوي بعدها عن مستقيم ثابت ما. (تسمى النقطة F بؤرة القطع ويسمى المستقيم L دليله). أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته i ودليله المستقيم $\operatorname{Im} z = -1$.

الحل:

من التعريف نحصل على:

$$|z - i| = \operatorname{Im} z + 1,$$

حيث تقع أقرب نقطة على الدليل من z عمودياً أسفل z، انظر الشكل رقم (٩)



الشكل (٩): القطع المكافئ $|z - i| = \operatorname{Im} z + 1$

وإذا أردنا الحصول على العلاقة المقابلة من الهندسة التحليلية، نربع الطرفين للمساواة السابقة فنحصل على:

$$|z|^2 + 1 + 2 \operatorname{Re} zi = (\operatorname{Im} z + 1)^2$$

أو:

$$|z|^2 - 2\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z)^2 + 2 \operatorname{Im} z$$

بوضع $y = \operatorname{Im} z$ و $|z|^2 = x^2 + y^2$ نحصل على:

$$y = x^{2/4}$$

مثال (٢١):

القطع الزائد هو مجموعة نقاط المستوى الإحداثي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F و F′ الواقعتين في هذا المستوى تساوي مقداراً ثابتاً (تسمى النقطتان F و F′ بؤرتي القطع الزائد). ما معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه ± 1 ويمر بالنقطة $1 + i$؟

الحل:

حسب التعريف فإن:

$$|z - i| - |z + i| = c$$

حيث c عدد حقيقي ثابت، وبما أن النقطة $z = 1 + i$ تحقق هذه المعادلة فإن $c = \sqrt{5} - 1$.

١ . ٥ . المستوي المركب:

نقصد بالمستوي المركب أنه مجموعة الأعداد المركبة C أي مجموعة الأزواج المرتبة $R \times R$ وهو المستوى الديكارتي ثنائي الأبعاد. في هذا البند نبحث بعض الخصائص التبولوجية للنقاط وللمجموعات الجزئية لهذا المستوي.

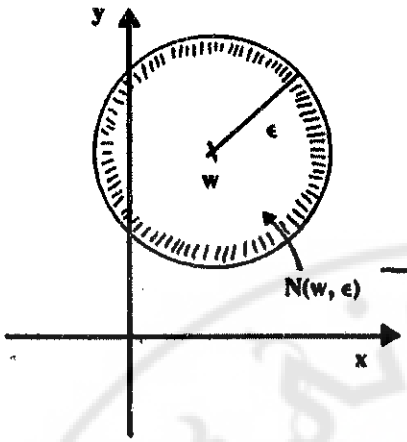
إن الأداة الأساس التي تستخدم في تقديم الخصائص التبولوجية هي فكرة الجوار والتي تعتمد على نقطة وعدد حقيقي موجب $\in$، فإذا رمزنا لفكرة $\in$ - جوار للنقطة N (للعدد المركب w) بالرمز $N(w, \in)$ فإنها معرفة بالمساواة التالية:

$$N(w, \in) = \{z \in C: |z - w| < \in\} \qquad (27)$$

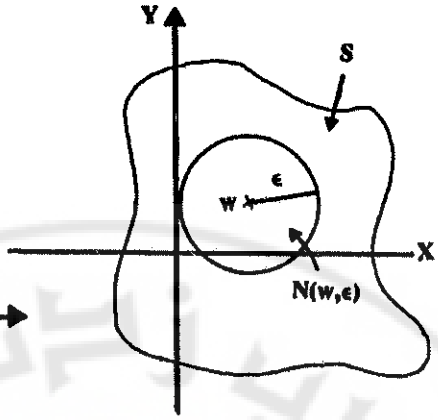
وببساطة فإن الجوار هو مجموعة النقاط التي تحقق المتباينة $|z - w| < \in$ وتسمى جواراً مفتوحاً. وهي تمثل النقط داخل دائرة مركزها w ونصف قطرها $\in$ أو هي قرص مركزه w ونصف قطره $\in$.

فإذا كانت S مجموعة جزئية من المستوي المركب C وكانت $w \in S$ فإن النقطة w تسمى نقطة داخلية للمجموعة S إذا وجد عدد حقيقي $\in > 0$ بحيث إن:

$$N(w, \in) \subset S \qquad (28)$$



شكل (١٠)



شكل (١١)

تسمى S مجموعة مفتوحة، إذا تحقق الشرط:

لكل w في S يوجد $\in > 0$ بحيث إن:

$$N(w,\in) \subset S \qquad (29)$$

أي إذا كانت كل نقطة w من نقاط المجموعة S نقطة داخلية لها.

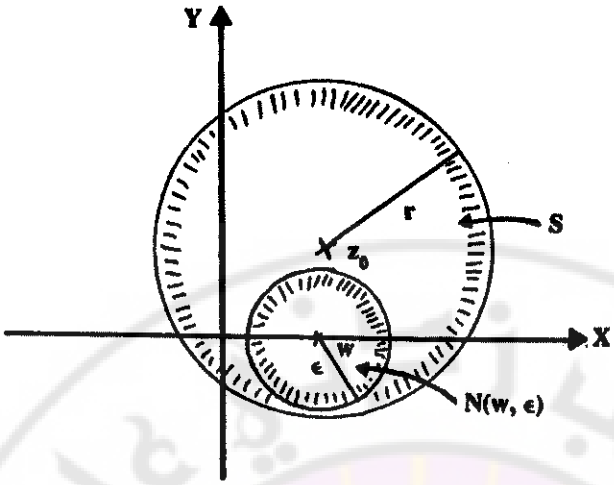
ملحوظة مهمة:

لتوضيح الأفكار السابقة نفرض أن المجموعة S هي القرص الذي مركزه z_0 ونصف قطره $r > 0$ أي إن:

$$S = \{w \in C : |w - z_0| < r\}$$

نلاحظ أن كل نقطة في هذا القرص هي نقطة داخلية لأننا نستطيع إيجاد جوار لأي نقطة تحتويه المجموعة S لذلك فإن هذه المجموعة مفتوحة.

تسمى النقطة w نقطة خارجية للمجموعة S, $(S \subset C)$ إذا كانت w نقطة داخلية لمكملة S وهي $S^c = C - S$. أما إذا كانت النقطة w لا تمثل لا نقطة داخلية ولا خارجية للمجموعة S فإنها تسمى نقطة حدودية (جبهوية) للمجموعة S، وبالرموز فإن w تسمى نقطة حدودية للمجموعة S إذا تحقق الشرط التالي:



الشكل (١٢)

$$N(w, \in) \cap S \neq \phi \wedge N(w, \in) \cap S^c \neq \phi \qquad (30)$$

لكل $\in > 0$. أي إن كل قرص مركزه w يحتوي على نقاط من S ونقاط أخرى من S^c.

مجموعة النقاط الحدودية لمجموعة مثل S تسمى حدود S، ويرمز لها بالرمز ∂S.

تكون المجموعة S مغلقة إذا احتوت جميع النقاط الداخلية والحدودية لنفسها. وبلغة أخرى فإن المجموعة S مغلقة إذا كانت S^c مفتوحة.

مثال (٢٢):

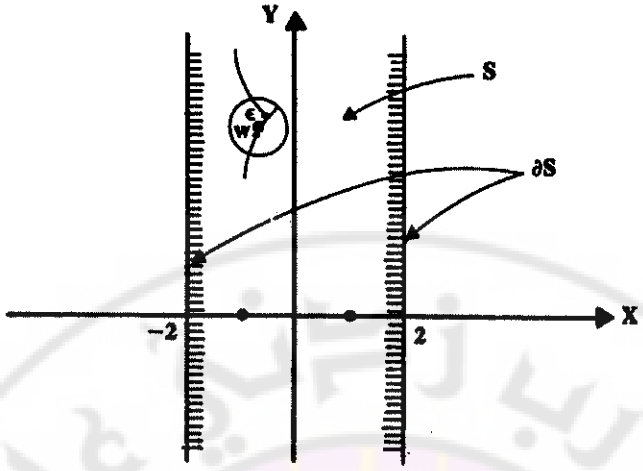
لتكن S المجموعة المعرفة بالمساواة التالية:

$$S = \{z \in C: |Re.z| \leq 2\}$$

فإن S مجموعة مغلقة لأنها تحتوي على النقاط الداخلية وكذلك النقاط الحدودية حيث إن حدود S هي المجموعة:

$$\partial S = \{z \in C: |Re.z| = 2\}$$

والمجموعة S ممثلة بالشريحة اللانهائية التالية:



الشكل (١٣)

ولإثبات أن S تحتوي على نقاطها الداخلية نفرض أن w في S ومن ثَمَّ فإن:

$$|\mathrm{Re.}\ w| \le 2$$

فإذا فرضنا أن: $\in = \frac{1}{4}|\mathrm{Re.w}|$ فإن:

$$N(w, \in) \subset S$$

مثال (٢٣):

لتكن S المجموعة المعرفة بالمساواة:

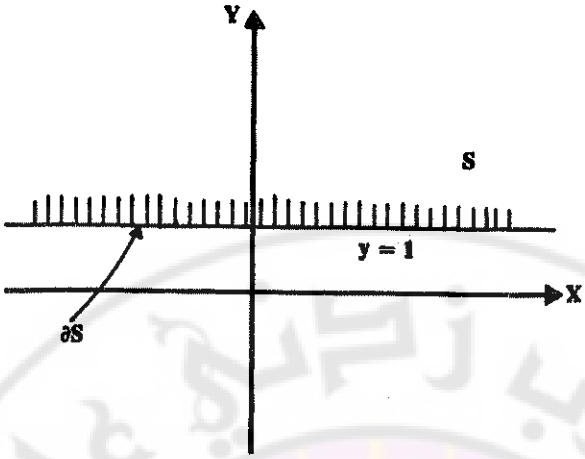
$$S = \{z \in C: \mathrm{Im.z} > 1\}$$

فإن S مجموعة مفتوحة وتسمى نصف المستوي الذي يعلو الخط المستقيم $y = 1$

أما حدود هذه المجموعة فهي المجموعة:

$$\partial S = \{z \in C: \mathrm{Im.z} = 1\}$$

أو هي الخط المستقيم $y = 1$ كما في الشكل (١٤).



الشكل (١٤)

ولإثبات أن S مفتوحة أي تحتوي على نقاطها الداخلية فقط نفرض أن $w \in S$ ومن ثمَّ فإن $Im.w > 1$.

فإذا فرضنا أن:

$\in_0 = \frac{1}{2} Im.(w - i) > 0$ فإن $N(w, \in) \subset S$ لكل $\in < \in_0$ لأنه إذا كان $z \in N(w, \in)$ فإن $|z - w| < \in$ ومن ثمَّ يكون $-\in < Im.(z - w) < \in$ لنستنتج أن:

$$\begin{aligned} Im.z &= Im.(z - w) + Im.w > -\in \\ &> -\in_0 + Im.w = \\ &> -\frac{1}{2} Im.(w - i) + Im.w \\ &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Im.w > 1 \end{aligned}$$

لذلك فإن: $z \in S$.

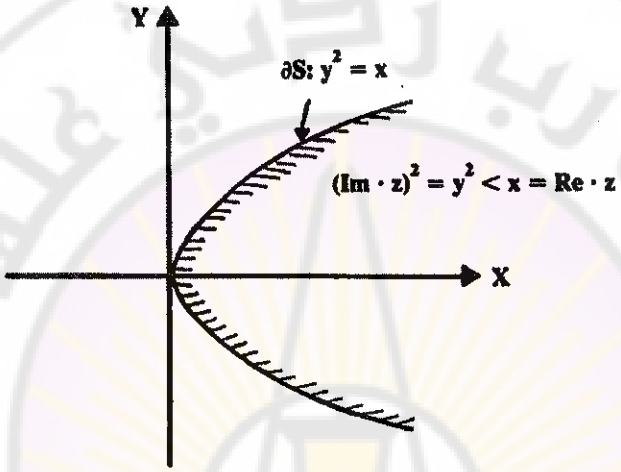
مثال (٢٤):

لتكن S المجموعة المعرفة بالمساواة:

$$S = \{z \in C: (Im.z)^2 \leq Re.\ z\}$$

فإن S مجموعة مغلقة لأنها تحتوي على نقاطها الداخلية:

$$\{z \in C: (Im.z)^2 < Re.\ z\}$$



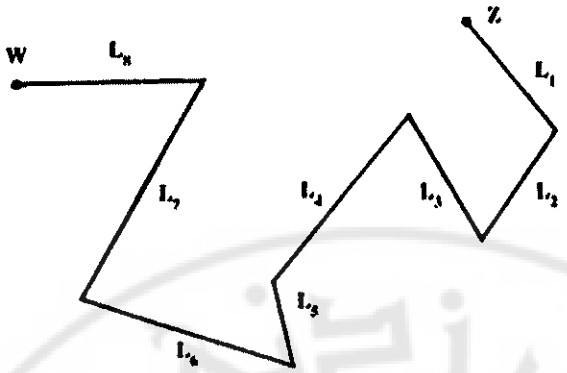
الشكل (١٥)

وكذلك تحتوي جميع نقاطها الحدودية:

$$\partial S = \{z \in C: (Im.z)^2 = Re.z\}$$

هذه المجموعة تمثل بيانياً كما في الشكل (١٥):

الخط المضلع الذي يصل بين نقطتي z و w نعني به أنه مجموعة منتهية من القطع المستقيمة $L_1, L_2, \ldots, L_n$ المتصلة بعضها ببعض نهاية الأول مع بداية الثاني بدءاً بالنقطة z وانتهاء بالنقطة w، كما في الشكل (١٦) التالي:

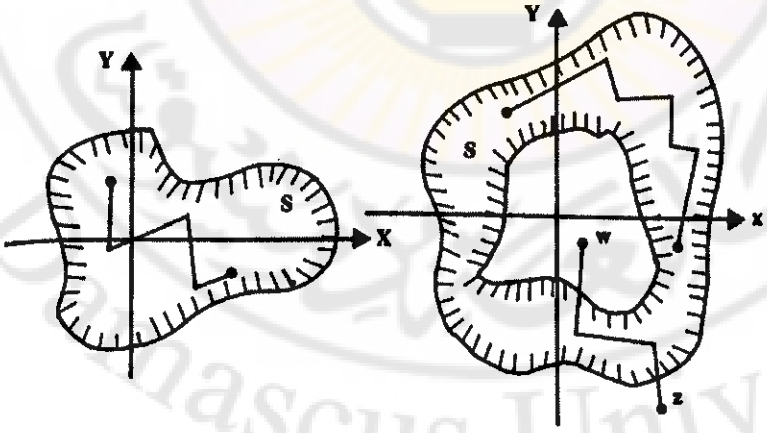


الشكل (١٦)

إذا فرضنا أن S مجموعة جزئية من C فعندئذ S تسمى مجموعة مترابطة Connected إذا تحقق الشرط التالي:

لكل نقطتين z و w في S يوجد خط مضلع ينتمي للمجموعة S يصل بين النقطتين z و w.

فإذا كانت مكملة S وهي S^c مترابطة كذلك فإن S تسمى مترابطة ترابطاً بسيطاً. أما إذا كانت المكملة S^c ليست مترابطة فإن S مترابطة ترابطاً مضاعفاً، انظر الشكلين (١٧) و (١٨).



الشكل (١٧): مترابطة ترابطاً مضاعفاً

الشكل (١٨): مترابطة ترابطاً بسيطاً

في الشكل (١٨) نلحظ أن S^c مترابطة كذلك، لذلك فإن S تسمى مجموعة مترابطة ترابطاً بسيطاً (Simply Connected) ولكن المجموعة S^c في الشكل (١٧) ليست مترابطة لعدم إمكانية ربط كل نقطتين z و w في S^c بخط مضلع تحويه S^c (أي دون المرور في S)، لذلك فإن المجموعة S تسمى مترابطة ترابطاً مضاعفاً (Multiply Connected).

المجموعة المفتوحة والمترابطة S تسمى مجالاً، المجموعة S تسمى منطقة إذا كانت مجالاً وتحتوي أو لا تحتوي جزءاً من أو كل نقاطها الحدودية.

المجموعة S تسمى مجموعة محدودة إذا وجد قرص نصف قطره R:

$$S \subset \{z \in C: |z| < R\} \ , \ 0 < R < \infty$$

وإذا لم تكن S مجموعة محدودة فإنها تسمى غير محدودة.

أي مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة من C تسمى مجموعة متراصة. تسمى النقطة w نقطة تجمع للمجموعة S (لاحظ أنه ليس هناك شرط بانتماء w للمجموعة S) إذا تحقق الشرط التالي:

كل جوار $N(w, \in)$ للنقطة w يحتوي على الأقل نقطة واحدة z في S بحيث إن: $z \neq w$.

مثال (٢٥):

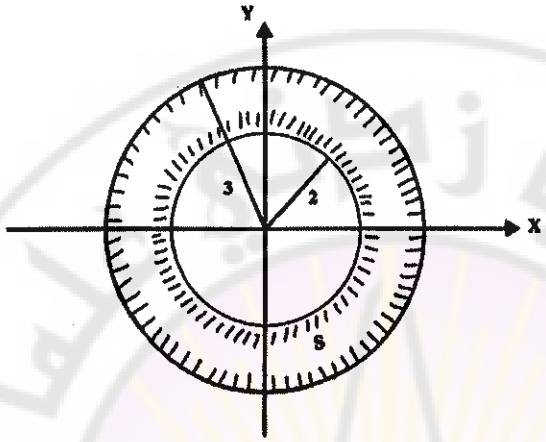
لتكن المجموعة S معرفة بالمساواة:

$$S = \{z \in C: 2 < |z| \leq 3\}$$

والتي يمكن تمثيلها بيانياً بالشكل (١٩).

هذه المجموعة تسمى حلقة (Annulus) نصف قطرها الداخلي 2 ونصف قطرها الخارجي 3. هذه المجموعة تحتوي نقاطها الداخلية ولكن حدودها مكوّنة من الدائرتين الصغرى والكبرى، وهي تحتوي نقاطها الحدودية من الدائرة الكبرى، ولا تحتوي

نقاطها الحدودية من الدائرة الصغرى، لذلك فهي ليست مفتوحة وكذلك ليست مغلقة. من السهل إدراك أنها مترابطة فهي منطقة وكذلك محدودة، ولكنها مترابطة ترابطاً مضاعفاً لأن مكملتها ليست مترابطة.



الشكل (١٩)

مثال (٢٦):

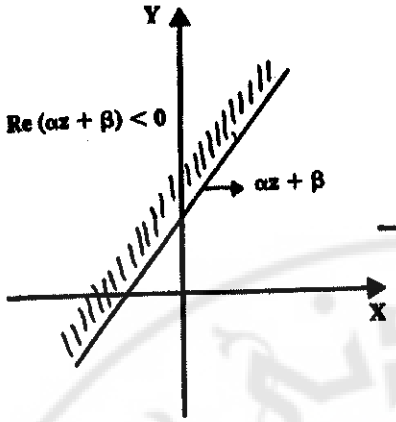
نصف المستوي المفتوح هو مجموعة النقاط التي تقع على جهة واحدة من خط مستقيم مثل:

$$\{z \in C: \text{Re.}\ (\alpha z + \beta) < 0\}$$

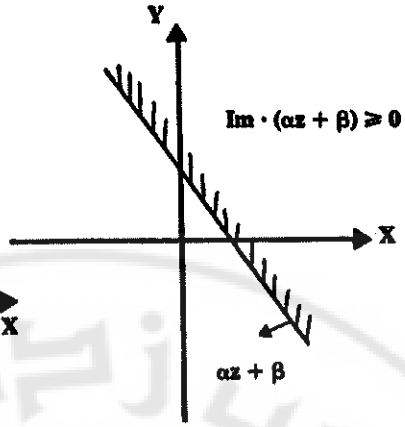
ونصف المستوي المغلق هو مجموعة النقاط التي تقع على خط مستقيم أو على جهة واحدة منه مثل:

$$\{z \in C: \text{Im.}\ (\alpha z + \beta \geq 0\}$$

وفي الحالتين فإن الخط المستقيم $\alpha z + \beta$ يمثل النقاط الحدودية لنصف المستوي. انظر (الشكل (٢٠) والشكل (٢١)).



الشكل (٢٠)



الشكل (٢١)

مثال (٢٧):

أوجد نقط التجمع للمجموعة S حيث:

$$S=\left\{(-1)^n\frac{n+1}{n}.i : n=1,2,...\right\}$$

الحل:

بدراسة عناصر المجموعة S نجد أنها:

$$S=\left\{-2i,\frac{3}{2}i,\frac{-4}{3}i,\frac{5}{4}i,...\right\}$$

بملاحظة أن المجموعة يمكن أن ينظر إليها كاتحاد مجموعتين مختلفتين $S=S_1\cup S_2$ حيث إن:

$$S_1=\left\{-2i,\frac{-4}{3}i,\frac{-5}{6}i,...\right\}$$

$$S_2=\left\{\frac{3}{2}i,\frac{5}{4}i,\frac{7}{6}i,...\right\}$$

نلاحظ أن مجموعة النقاط الأولى من S تتجمع حول النقطة $-i$ ولكن مجموعة النقاط الثانية تتجمع حول النقطة i، ويمكن تطبيق تعريف نقطة التجمع لنستنتج أن نقاط التجمع للمجموعة S هي المجموعة:

$$\{-i , i\}$$

لاحظ أن نقطة النهاية لأي متتالية تمثل نقطة تجمع، ولكن ليس صحيحاً بالضرورة أن نقطة التجمع تمثل نقطة نهاية.

مثال (٢٨):

لنفرض أن S_0 مجموعة النقاط z حيث $|z| < 1$. أوجد داخل المجموعة S_0 وخارجها وحدودها؟

الحل:

لنفرض أن z_0 أي نقطة من S_0. لاحظ أن القرص $|z - z_0| < \varepsilon$ يقع بكامله داخل S_0 عندما $\varepsilon < 1 - |z_0|$. إذن كل نقطة من S_0 نقطة داخلية، وبالمثل كل نقطة z_0 تحقق $|z_0| > 1$ هي نقطة خارجية إلى S_0. إذا كان $|z_0| = 1$، فإن كل جوار ε إلى z_0 سوف يحوي نقاطاً من S_0 ونقاطاً ليست من S_0. إذن حدود المجموعة S هي كل النقاط الواقعة على الدائرة $|z| = 1$، داخل S_0 هي المجموعة $|z| < 1$، أما خارج S_0 فهي مجموعة النقاط التي تحقق $|z| > 1$.

لعله من المفيد أن نضيف إلى المستوي المركب C نقطة عند اللانهاية يرمز لها بالرمز ∞ لنحصل على ما يسمى المستوي المركب الممدد. ومن أجل أن نفهم هذه النقطة دعنا ندرس الإسقاط المجسم البياني التالي (Stereographic Projection):

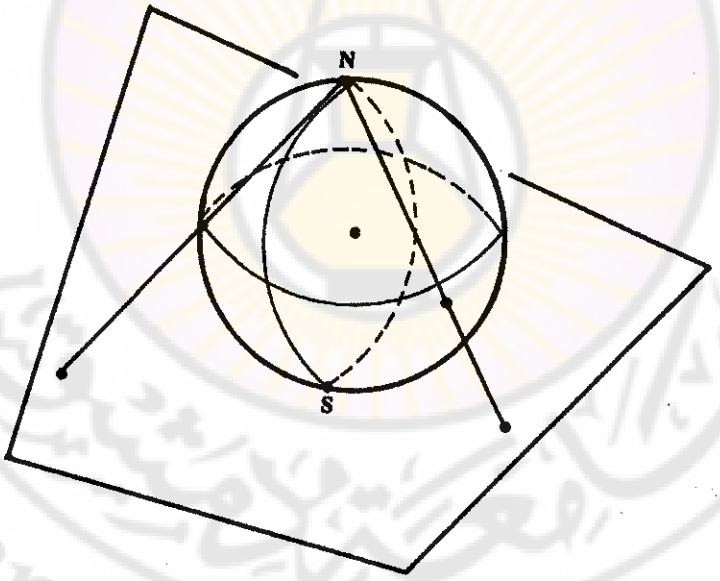
لنفرض أن كرة نصف قطرها الوحدة موضوعة على المستوي المركب بحيث إن القطب الجنوبي للكرة يقع على نقطة الأصل للمستوي المركب عندئذ نستطيع تعريف تناظر واحد لواحد بين نقاط سطح الكرة ما عدا القطب الشمالي N ونقاط المستوي

المركب، وذلك بتعريف صورة النقطة z في المستوي بأنها تلك النقطة w التي تمثل تقاطع سطح الكرة مع المستقيم الواصل بين N والنقطة z انظر الشكل (٢٢) وهنا يمكن تعريف صورة القطب الشمالي N بنقطة في اللانهاية التي رمزنا لها بالرمز ∞، وفي هذه الحالة تسمى $C \cup \{\infty\}$ كرة ريمان (Reimann Shpere). ويمكن تعريف جوار هذه النقطة ∞ بالمساواة التالية:

$$N(\infty,\in)=\left\{z\in C:|z|>\frac{1}{\in}\right\}$$

حيث $\in > 0$. أي إن جوار النقطة ∞ هو مجموعة النقاط الخارجية للقرص المغلق:

$$\left\{z\in C:|z|\leq\frac{1}{\in}\right\}$$



الشكل (٢٢) كرة ريمان

١ . ٦ . تمارين محلولة:

أولاً: اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري:

$$(1)\ z = (1-i)^5$$

$$\begin{aligned} z &= (1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i) \\ &= (1-1-2i)\,(1-1-2i)\,(1-i) \\ &= (0-2i)\,(0-2i)\,(1-i) \\ &= (-2i)\,(-2i)\,(1-i) \\ &= [+4i^2]\,[1-i] = 4i^2 - 4i^3 \\ &= 4(-1) - 4\,(i)^3 = -4 - 4i\,.\,i^2 \\ &= -4 + 4i \end{aligned}$$

$$(2)\ z = \frac{4}{i}$$

$$z = \frac{4}{i} = \frac{4.i}{i^2} = \frac{4i}{-1} = -4i$$

ثانياً: أوجد طويلة كل من الأعداد الآتية:

$$1)\ z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$$

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$$

$$2)\ z_2 = (3+2i)^5$$

$$|3+2i| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$|(3+2i)^5| = |3+2i|^5 = \left[\sqrt{13}\right]^5 = 169\sqrt{13}$$

$$3)\ z_3 = \frac{7}{(2-i)^2} = \frac{7}{(2-i)^2}$$

$$|z_3| = \left|\frac{7}{(2-i)^2}\right| = \frac{|7|}{|2-i|^2} = \frac{|7|}{|2-i|^2} = \frac{7}{\left(\sqrt{4+1}\right)^2} = \frac{7}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{7}{5}$$

ثالثاً: أوجد حل المعادلتين الآتيتين:

1) $2z + i = 3 - iz$

$$2(x + iy) + i = 3 - i(x + iy)$$
$$2x + 2yi + i = 3 - ix - i^2y$$
$$2x + 2yi + i = 3 - ix - i^2y$$
$$2x + (2y + 1)i = 3 - ix + y$$
$$2x + (2y + 1)i = (3 + y) - xi$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2x = 3 + y \\ 2y + 1 = -x \end{cases}$$

بحل هاتين المعادلتين حلاً مشتركاً نجد أن: $y = -1 \ \& \ x = 1$

ومنه يكون حل المعادلة:

$$z = x + iy = 1 - i$$

يمكن التحقق من صحة الحل بالتعويض المباشر في المعادلة المفروضة.

2) $2z + |z| = 11 - 8i$

$$2(x + iy) + \sqrt{x^2 + y^2} = 11 - 8i$$
$$2x + \sqrt{x^2 + y^2} + 2yi = 11 - 8i$$

بالمطابقة نجد:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + \sqrt{x^2 + y^2} = 11 \\ 2y = -8 \end{array}\right\}$$

من المعادلة الثانية نجد: $y = -4$ وبالتعويض في الأولى نجد:

$$2x + \sqrt{x^2 + 16} = 11$$
$$\sqrt{x^2 + 16} = 11 - 2x$$

حيث يجب أن يكون $11 - 2x \geq 0$ أي $x \leq \frac{11}{2}$

نربع طرفي المعادلة $\sqrt{x^2+16} = 11 - 2x$ فنجد:

$$x^2 + 16 = 121 + 4x^2 - 44x$$
$$3x^2 - 44x + 105 = 0$$

نحلها عن طريق الـ Δ فنجد:

$$x_1 = \frac{35}{5} = 7 \ \& \ x_2 = 3$$

القيمة $x_1 = \frac{35}{5}$ مرفوضة لأنها لا تحقق $x \leq \frac{11}{2}$ والقيمة الثانية هي المقبولة ويكون حل المعادلة هو:

$$z = x + iy = 3 - 4i$$

رابعاً: بفرض أن: $z = \frac{13-9i}{(1+2i)^2}$ أوجد $\bar{z}$.

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{13-9i}{(1+2i)^2}\right)} = \frac{\overline{13-9i}}{\overline{(1+2i)^2}} = \frac{13+9i}{(1+2i)^2} = \frac{13+9i}{-3-4i}$$

حيث: $(1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$

ومن ثمَّ نجد:

$$= \frac{(13+9i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = -3 + i$$

خامساً: حل جملة المعادلتين التاليتين:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$$

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$$

الحل:

نكتب المعادلة الأولى بالشكل:

$$\frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2}=\frac{25}{9}$$

ومنه:

$$16x^2+16y^2+216x-400y+304=0 \qquad (1)$$

نكتب المعادلة الثانية بالشكل:

$$\frac{(x-4)^2+y^2}{(x-8)^2+y^2}=1$$

$$(x-4)^2=(x-8)^2$$

$$x^2-8x+16=x^2-16x+64 \Rightarrow x=6$$

نبدل $x = 6$ في المعادلة (1) فنحصل على:

$$16y^2-400y+304+16(36)+216(6)=0$$

$$16y^2-400y+2176=0$$

$$y^2-25y+136=0$$

$$(y-8)(y-17)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=8 \\ y_2=17 \end{cases}$$

ومن ثمَّ حل جملة المعادلتين هو:

$$z_1=6+8i \;;\; z_2=6+17i$$

سادساً: عين في المستوي العقدي المجموعات النقطية الآتية:

١) $z=\bar{z}$

$x+iy=x-iy \Rightarrow 2iy=0 \Rightarrow y=0$ (هي مجموعة نقاط المحور الحقيقي)

٢) $|z-(1-2i)|=5$

$$|x + iy - (1 - 2i)| = 5$$
$$|x - 1 + i(y + 2)| = 5 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

وهي معادلة دائرة في المستوي العقدي مركزها (1, -2) ونصف قطرها = 5.

٣) $\left(z+\bar{z}\right)^2 + \left(z-\bar{z}\right)^2$

$$z + \bar{z} = 2x \ \& \ z - \bar{z} = 2yi$$
$$(2x)^2 + (2iy)^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 + 4i^2y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

ومجموعة النقاط تحقق معادلة قطع زائد.

٤) $|z - 1 - i| = |z - 5 - 3i|$

$$|x + iy - 1 - i| = |x + iy - 5 - 3i|$$
$$|(x - 1) + i(y - 1)| = |(x - 5) + i\,(y - 3)|$$
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x - 5)^2 + (y - 3)^2$$
$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 = x^2 + 25 - 10x + y^2 + 9 - 6y$$
$$8x + 4y - 32 = 0$$
$$2x + y - 8 = 0$$

ومجموعة النقاط هي معادلة مستقيم.

سابعاً: اكتب الأعداد الآتية بالشكل المثلثي:

$$1)\ z = i = x + iy \Rightarrow x = 0 \ \& \ y = 1$$
$$r = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$
$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$
$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 1[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}] = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$2)\ z=-1-i\ \&\ r=\sqrt{2};\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2};\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

وهذا يعني أن θ تقع في الربع الرابع $\theta=\frac{7\pi}{4}$ ومن ثمَّ فإن:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$3)\ z=2\sqrt{3}-2i\ ;\quad r=4$$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-1}{2}\end{cases}$ أي إن θ تقع في الربع الرابع، وهذا يعني أن:

$$\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$z=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$4)\ z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1\cdot\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1}=\frac{1}{r}[\cos\theta-i\sin\theta]$$

$$=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

$$=\frac{1}{r}[\cos\theta-i\sin\theta]=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

ثامناً: احسب $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10}$ باستخدام علاقة دوموافر:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10}=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

$$= 2^{10}\left[\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right]$$

$$= 1024\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right)\right]$$

$$= 1024\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = 1024\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right]$$

$$= -512 + 512\sqrt{3}i$$

تاسعاً: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $z = 4i$

الحل: لدينا: $\theta = \frac{\pi}{2}, r = \sqrt{16} = 4$

$$z_k = 4^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right]; k = 0,1$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left[\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$$

$$= 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= -\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$$

عاشراً: أوجد الجذور الخمسة للعدد 1.

الحل:

لدينا $z = 1,\ r = 1,\ \theta = 0$ فيكون:

$$z_k = (1)^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{5} + i.\sin\frac{\theta + 2\pi k}{5}\right]; k = 0,1,2,3,4$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = (1)^{\frac{1}{5}}[\cos 0 + i\sin 0] = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = (1)^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{2\pi}{5} + i.\sin\frac{2\pi}{5}\right] = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$k = 3 \Rightarrow z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$k = 4 \Rightarrow z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

حادي عشر: أوجد جميع جذور المعادلة التالية:

$$z^7 - z^4 + z^3 - 1 = 0$$

$$z^7 - z^4 + z^3 - 1 = z^4(z^3 - 1) + z^3 - 1$$
$$= (z^4 + 1)(z^3 - 1)$$

$$(z^4 + 1)(z^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} \\ z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1} \end{cases}$$

1) for $z = \sqrt[4]{-1}$; $r = 1$; $\theta = \pi$

$$z_k = 1^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right]; k = 0,1,2,3$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 1^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 1^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = 1^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=3 \Rightarrow z_3 = 1^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \frac{+\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) for $z = \sqrt[3]{1} \Rightarrow r = 1\ ;\ \theta = 0$

$$z_k = 1^{\frac{1}{3}}\left[\cos(0 + \frac{2\pi k}{3}) + i\sin(0 + \frac{2\pi k}{3})\right]; k = 0,1,2$$

$$k=0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_1 = 1^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبهذا الشكل عرفنا جذور المعادلة التي عددها سبعة.

ثاني عشر: أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$(-1+i)^7 = -8\,(1+i)$$

الحل:

لدينا: $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$ وكذلك:

الشكل الأسي للعدد العقدي المفروض هو: $-1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$$(-1+i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left[e^{\frac{21\pi}{4}i}\right]$$

$$= 8\sqrt{2}\left[\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}\right]$$

$$= 8\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$$

$$= 8\sqrt{2}\left[\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})\right]$$

$$= 8\sqrt{2}\left\{\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right\} = -8(1+i)$$

ثالث عشر: أوجد $z^{\frac{1}{4}}$ إذا علمت أن $z = -2 + 2i\sqrt{3}$، ثم أثبت أن جميع هذه الجذور تقع على محيط دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية العدد العقدي z تقع في الربع الثاني:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

إن الجذور من المرتبة الرابعة للعدد العقدي z تعطى بالعلاقة:

$$z_k = r^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\theta + \pi k}{4} + i\sin\frac{\theta + \pi k}{4}\right]; k = 0,1,2,3$$

$$z_k = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k)\right]; k = 0,1,2,3$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 3 \Rightarrow z_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

نلاحظ أن: $|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$

$\Leftarrow$ إن هذه الجذور تقع على محيط دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

رابع عشر: أوجد جميع قيم العدد العقدي z المحقق للمعادلة:

$$(z + 2)^5 + 243 = 0$$

ثم بين أن هذه القيم تقع كلها على محيط دائرة مركزها (-2, 0) ونصف قطرها 3.

الحل:

$$(z + 2)^5 = -243$$

لكن: $w = -243$

لنوجد الجذور من المرتبة الخامسة للعدد العقدي w.

$$|w| = 243 \quad , \cos\theta = -1 \ , \ \sin\theta = 0 \quad , \quad \theta = \pi$$

$$w_k = (243)^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\pi + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right] \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 3\left[\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right]$$

$$\Rightarrow z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) - 2$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 3\left[\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right]$$

$$\Rightarrow z_1 = 3\left[\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right] - 2$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 3[\cos\pi + i\sin\pi] = -3$$

$$\Rightarrow z_2 = -3 - 2 = -5$$

$$k=3 \Rightarrow w_3 = 3\left[\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right]$$

$$\Rightarrow z_3 = 3\left[\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right] - 2$$

$$k=4 \Rightarrow w_4 = 3\left[\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right]$$

$$= 3\left[\cos(2\pi - \frac{\pi}{5}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{5})\right]$$

$$= 3\left[\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right]$$

$$\Rightarrow z_4 = 3\left[\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right] - 2$$

نلاحظ أن: $|z_0 + 2| = |z_1 + 2| = |z_2 + 2| = |z_3 + 2| = |z_4 + 2| = 3$

$\Leftarrow$ ومن ثمَّ جميع قيم العدد العقدي z المحققة للمعادلة المعطاة تقع على محيط دائرة مركزها (0 , 2-) ونصف قطرها 3.

خامس عشر: أوجد $\sqrt[4]{-8i}$

الحل:

$$(-8i)^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right]$$

وحيث $k = 0, 1, 2, 3$، وعليه فإن القيم المختلفة الممكنة للجذر المطلوب هي:

$$k=0 \Rightarrow w_0 = (8)^{\frac{1}{4}}[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}]$$

$$k=1 \Rightarrow w_1 = (8)^{\frac{1}{4}}[\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}]$$

$$k=2 \Rightarrow w_2 = (8)^{\frac{1}{4}}[\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}]$$

$$k=3 \Rightarrow w_3 = (8)^{\frac{1}{4}}[\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}]$$

إذن $(8)^{\frac{1}{4}}$ هو القيمة الحقيقية للجذر الرابع للعدد 8 ويمكن إيجاد قيمته بالحسابات اللوغاريتمية العادية فنجد: $(8)^{\frac{1}{4}} = 1.682$.

سادس عشر: أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد.

الحل:

لدينا $|z| = 1 \ , \ \theta = 0$

$$z_k = (1)^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right] \quad ; \ k = 0,1,2$$

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3} \quad ; \ k = 0,1,2$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

أي إن:

$$z_0 = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$= \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

سابع عشر: أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد: $z = -1$

الحل:

لدينا: $|z| = 1 , \theta = \pi$

$$z_k = (1)^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right] \quad ; k = 0,1,2$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$z_1 = -1$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$= \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

١ . ٧ . تمارين غير محلولة:

أولاً: أوجد ما يلي:

أ . $\left|\frac{2+3i}{3+4i}\right|$

ب . $|i(2-i)^3|$

جـ . $\left|2i(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+2i)\right|$

د . $|(1+i)^5|$

ثانياً: أوجد ما يلي:

أ . $\arg\left(\frac{2+3i}{3+4i}\right)$

ب . $\arg(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)$

جـ . $\arg\,(1+i)^6$

د . $\arg(i(4-3i)^3)$

ثالثاً: اكتب الأعداد المركبة التالية بالشكل القطبي ثم بالشكل الأسّي:

أ . $\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}$

ب . $\frac{i}{1+i}$

جـ . $\frac{1+\sqrt{3}i}{(1-i)^2}$

د . $3-4i$

رابعاً: اكتب الأعداد المركبة التالية على الصيغة $x+yi$:

أ . $3e^{\frac{\pi}{3}i}$

ب . $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$

جـ . $e^{\frac{\pi}{3}}\cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$

د . $-5e^{-\frac{7\pi}{2}}$

هـ. $4\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ و. $2\left[\cos\frac{3\pi}{5}-i\sin\frac{3\pi}{5}\right]$

خامساً: لأي عددين مركبين z و w برهن أن:

$$|z+w|^2-|z-w|^2=4\,\mathrm{Re}.\left(z\overline{w}\right)$$

سادساً: برهن أن المثلث الذي تتكوّن رؤوسه من 0 ,z و w يكون متساوي الأضلاع إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$|z|^2=|w|^2=2\,\mathrm{Re}.\left(z\overline{w}\right)$$

سابعاً: برهن أن المساواة:

$$|z+w|=|z|+|w|$$

صحيحة إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$\arg z=\arg w$$

ثامناً: برهن لأي عددين مركبين z و w أن:

أ. $\arg(z\overline{w})=\arg z-\arg w$.

ب. $\arg z=\arg w$ إذا وإذا فقط $z=\alpha w$ حيث إن α عدد حقيقي موجب.

تاسعاً: برهن أنه إذا كان $\mathrm{Re}\,z>0$ و $\mathrm{Re}\,w>0$ فإن:

$$\mathrm{Arg}\,(zw)=\mathrm{Arg}\,z+\mathrm{Arg}\,w$$

عاشراً: إذا فرضنا أن $zw\neq 0$ برهن أن:

$$\mathrm{Re}(z\overline{w})=|z||w|$$

إذا وإذا فقط: $\theta-\gamma=2n\pi\,,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

حيث إن: $\theta=\arg z\,,\ \gamma=\arg w$

حادي عشر: إذا فرض أن $zw\neq 0$ برهن أن:

$$|z-w|=\big|\,|z|-|w|\,\big|$$

إذا وإذا فقط:

$$\theta - \gamma = 2n\pi \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حيث إن $\theta = \arg z$ و $\gamma = \arg w$

ثاني عشر: صف مجموعة الأعداد المركبة z التي تحقق:

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \neq -\mathrm{Arg}z$$

ثالث عشر: برهن المتطابقة التالية:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, z \neq 1$$

رابع عشر: في التمرين السابق بفرض أن $|z| = 1$ استخدم الصيغة الأسية (20) للعدد المركب. برهن المتطابقة المثلثية التالية والتي تسمى مطابقة لاغرانج (Lagrange Identity):

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$$

حيث إن $0 < \theta < 2\pi$.

استنتج قيمة التعبير التالي:

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$$

خامس عشر: أ. برهن أن $\bar{z} = z$ إذا وإذا فقط كانت z عدداً حقيقياً بحتاً.

ب. برهن أن $\bar{z} = -z$ إذا وإذا فقط كانت z عدداً تخيلياً بحتاً.

سادس عشر: أ. برهن أنه إذا كانت $|z| = \mathrm{Re.}\ z$ فإن z عدد حقيقي موجب.

ب . برهن أن $\overline{z}^2 = z^2$ إذا وإذا فقط كانت z إما عدداً حقيقياً خالصاً أو عدداً تخيلياً خالصاً.

سابع عشر: لأي عدد مركب z برهن أن:

$$|\mathrm{Re}.z| + |\mathrm{Im}.z| \le \sqrt{2}\,|z|$$

ثامن عشر: برهن أنه إذا كانت $z \neq 1$ وكانت $|z| = 1$ فإن:

$$\mathrm{Re}.\left(\frac{2}{1-z}\right) = 1$$

تاسع عشر: بيِّن أن لأي مجموعة من الأعداد المركبة $z_1, z_2, \ldots, z_n$ فإن:

أ . $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$

ب . $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$

جـ . لأعداد عدد مركب z فإن:

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad , \quad \overline{nz} = n\overline{z}$$

عشرون: صف مجموعة النقاط التي تحقق الشرط الوارد في كل مما يلي:

أ . $\mathrm{Re}.\ z = -1$

ب . $|2z + 3i| = 4$

جـ . $|z - 2 + i| = 1$

د . $|z| = \mathrm{Re}.z + 3$

هـ . $2|z| = 3|z + 1|$

و . $|z + i| < 2$

ز . $\mathrm{Im}.\ z \le -2$

حـ . $|z - 2| = |z + 3i|$

ط . $\mathrm{Re}.\ [z(1 + i)] = 0$

ي . $|z - 2i| + |z + 2i| = 0$

حادٍ وعشرون: بيِّن أن الأعداد المركبة التالية تمثل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع:

$$z = (1 + \sqrt{3})i \quad , \quad w = 1 + i \quad , \quad s = -1 + i$$

ثانٍ وعشرون: إذا علمت أن:

$$z^4 + 3z^2 - 4 = (z^2 + 4)(z^2 - 1)$$

فبيِّن أن:

أ . إذا كانت z تقع على الدائرة $|z| = 2$ فإن:

$$\left|\frac{1}{4}z^4 + \frac{3}{4}z^2 - 1\right| \le 10$$

ب . إذا كانت z تقع على الدائرة $|z| = 3$ فإن:

$$\frac{4}{|z^4 + 3z^2 - 4|} \le \frac{1}{10}$$

ثالث وعشرون: بيِّن أن $\sqrt{2}i$ و $-\sqrt{2}i$ جذران للمعادلة المركبة:

$$z^2 + 2 = 0$$

رابع وعشرون: بيِّن أن $-1+\sqrt{2}i$ جذر للمعادلة المركبة:

$$z^2 + 2z + 3 = 0$$

خامس وعشرون: بيّن أنه لأي عدد مركب z إذا كان $Im.z > 0$ فإن $Im.\left(\frac{1}{z}\right) < 0$

سادس وعشرون: بيّن أنه لأي عددين مركبين z_1 و z_2 إذا كان كل من $z_1 + z_2$ و $z_1 . z_2$ عدداً حقيقياً سالباً فإن كلاً من z_1 و z_2 عدد حقيقي.

سابع وعشرون: برهن أنه لأي عددين مركبين z_1 و z_2 إذا كان $z_1 . z_2 = 0$ فإن z_1 أو z_2 أو كليهما يكون صفراً.

ثامن وعشرون: إذا كان: $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 1 - 2i$ و $z_3 = 5 + 3i$ احسب قيمة ما يلي:

أ . $z_1 . z_2$ ب . $z_2 . z_3$

جـ . $z_1^2 + z_2^{-1}$ د . $z_1^2 + z_3$

هـ . $\frac{z_2}{z_3}$ و . $\frac{z_2}{z_1 \cdot z_3}$

ز . $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3}$ ح . $\frac{z_1 - z_2}{z_3}$

تاسع وعشرون: برهن أن:

أ . $\text{Re.}(iz) = -\text{Im}.z$ لأي عدد مركب z.

ب . $\text{Im}.(zi) = \text{Re}.z$ لأي عدد مركب z.

جـ . $i^{-1} = -i$

ثلاثون: إذا كانت $z_1, z_2, \ldots, z_n$ أعداداً مركبة فتحقق من أن:

أ . $\text{Re.}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Re.}z_k$

ب . $\text{Im.}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Im.}z_k$

حادٍ وثلاثون: أ . بيِّن أن المعادلة $x^2 - y^2 = 1$ يمكن أن تأخذ الصيغة:

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2$$

ب . بيِّن أن المعادلة $xy = 1$ يمكن أن تأخذ الصيغة:

$$z^2 - \bar{z}^2 = 4i$$

ثانٍ وثلاثون: في التمارين من (١) إلى (١٠) حدد نوع المجموعات حسب كونها مفتوحة، أو مغلقة، أو محدودة ومترابطة، أو بسيطة الترابط:

(١) $|z + 3| < 2$ (٢) $|\text{Re}z| < 1$

(٣) $|\text{Im } z| > 1$ (٤) $0 < |z - 1| \leq 1$

(٥) $|z| \leq \text{Re } z + 2$ (٦) $|z - 1| - |z + 1| > 2$

(٧) $|z+1|+|z+i|>2$ (٨) $|z-1|<\operatorname{Im} z$

(٩) $2\sqrt{2}<|z-1|+|z+1|<3$ (١٠) $\big||z-i|-|z+i|\big|<1$

(١١) ما حدود المجموعات في التمارين من (١) إلى (١٠)؟

في التمارين من (١٢) إلى (١٥) الخواص المذكورة للمجموعات المفتوحة أو المغلقة:

(١٢) تقاطع عدد منته من مجموعات مفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(١٣) اتحاد عدد منته من مجموعات مغلقة يكون مجموعة مغلقة.

(١٤) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

(١٥) اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(١٦) أثبت أنه إذا أمكن وصل أي نقطتين في مجموعة مفتوحة بمضلع يقع داخل المجموعة، فإن هذه المجموعة تكون مترابطة.

(١٧) إغلاق (closure) المجموعة S هي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحتوي على S. أثبت أن لصاقة المجموعة المترابطة تكون مجموعة مترابطة.

(١٨) أثبت أن S مغلقة إذا وفقط إذا كانت، تحوي جميع نقاط تجمعها.

(١٩) ما نقطة تجمع المجموعة التي تحتوي على جميع نقاط $z=\frac{1}{n}$ و n عدد طبيعي موجب (يبين هذا التمرين أن نقطة التجمع لا تقع بالضرورة داخل المجموعة).

(٢٠) لنفرض أن S مجموعة النقاط z التي تحقق $|z|\geq 1$ أو $z=0$. أثبت أن $z=0$ ليست نقطة تجمع لهذه المجموعة.

(٢١) ما نقطة التجمع لمجموعة النقاط z التي تحقق $z=-in$ حيث n عدد طبيعي موجب في المستوى الممتد m. وهل لهذه المجموعة نقطة تجمع في C.

(٢٢) أثبت أن أي نقطة من المنطقة هي نقطة تجمع لهذه المنطقة.

(٢٣) لنفرض أن $z_1 + z_2$ و $z_1 z_2$ أعداد حقيقية سالبة، فأثبت أن كلاً من z_1, z_2 عدد حقيقي.

(٢٤) أثبت نظرية ذات الحدين للأعداد المركبة:

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \ldots + z_2^n$$

حيث n عدد طبيعي موجب.

و $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (استخدم الاستقراء الرياضي).

ثالث وثلاثون: في التمارين من (١) إلى (٩) أوجد المقياس، والزاوية، ثم التمثيل القطبي للأعداد المركبة المعطاة.

(١) i (٢) $-i$ (٣) $1 + i$

(٤) $-3 + 4i$ (٥) $4 + 3i$ (٦) $5 - 12i$

(٧) $2 + 7i$ (٨) $2 - i$ (٩) $5 + 2i$

في التمارين من (١٠) إلى (١٥) استخدم نظرية دوموافر لكتابة كل عدد على الصيغة $x + iy$ حيث x و y أعداد حقيقية:

(١٠) $(1 + i)^{29}$ (١١) $(-1 + i)^{17}$

(١٢) $(-1 - i)^{36}$ (١٣) $(2 + 2i)^{12}$

(١٤) $(\sqrt{3} + i)^{15}$ (١٥) $(-\sqrt{3} + i)^{13}$

أوجد جميع الحلول لكل من المعادلات التالية في التمارين من (١٦) إلى (٢٣):

(١٦) $z^2 = i$ (١٧) $z^2 = 1 + i$

(١٨) $z^2 = 2 - i$ (١٩) $-z^2 = \sqrt{3} + i$

(٢٠) $z^3 = 2 + i$ (٢١) $z^3 = 1 + \sqrt{3}i$

(٢٢) $z^4 = i$ (٢٣) $z^4 = -1$

(٢٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $\pm i$ ويمر بالنقطة $1 + i$. ما الصيغة المناظرة في الهندسة التحليلية؟.

(٢٥) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه 1 و i، ويمر بنقطة الأصل ما الصيغة المناظرة في الهندسة التحليلية؟

(٢٦) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $1+i$ ودليله المستقيم $\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = 0$.

(٢٧) اكتب المعادلة العامة في الصورة المركبة للقطع الزائد الذي بؤرتاه a و b.

(٢٨) أثبت أن:

$$|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \le \sqrt{2}\,|z|$$

(٢٩) أثبت أنه إذا كان: $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ و $z_1 + z_2 + z_3 = 0$، فإن z_1, z_2, z_3 هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع.

(إرشاد: أثبت أن $|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2$).

(٣٠) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه z_1, z_2, z_3 يكون متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

(٣١) أثبت أن: $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

(٣٢) أثبت أن:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

(٣٣) أثبت أن:

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\, z_1 \overline{z_2}$$

(٣٤) أثبت أن:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

(٣٥) أثبت أن:

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$$

إذا كان $|z| < 1$ و $|a| < 1$.

(٣٦) أثبت أن المتباينة المثلثية تصبح مساواة مع العددين غير الصفريين z_1 و z_2 إذا وفقط إذا $\arg z_1 = \arg z_2$.

(٣٧) أثبت أنه إذا كان z_0 جذراً لكثير حدود $P(z)$ معاملاتها حقيقية، فإن $\bar{z}_0$ هو أيضاً جذر لـ $P(z)$.

(٣٨) فك $|z_1 + z_2|^2$ لإثبات المتراجحة المثلثية.

(إرشاد: $\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 \le |z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2|$).

(٣٩) الجذور n للمعادلة: $z^n = 1$ تسمى الجذور النونية للوحدة. أثبت أن الجذور النونية للوحدة تعطى بالصيغة:

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(٤٠) بفرض $|z| = 3$. أوجد حداً أدنى وأعلى للمقدار:

$$\left|\frac{z^4 + z^2 - z}{z^5 - 3}\right|$$

(٤١) إذا كانت $1, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ هي الجذور النونية للواحدة.

فأثبت أن:

$$(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$$

(٤٢) أوجد جميع الأوقات الممكنة التي يمكن أن تنتج من تبديل موضعي عقربي الساعات والدقائق للحصول على وضع يحدث فعلاً في ساعة عادية.

(٤٣) بتصغير المقدار $\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-\lambda|z_k|)^2$ حيث:

$a_1,\ldots,a_n, z_1,\ldots,z_n$ أعداد مركبة و λ عدد حقيقي اختياري، أثبت أن:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k z_k|\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)$$

(٤٤) أثبت مساواة لاغرانج (Lagrange):

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k z_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right) - \sum_{1\le j<k\le n}|a_j\bar{z}_k - a_k\bar{z}_j|^2$$

(٤٥) نظرية إنستروم . كاكيا (Enestrom – Kakeya):

لنفرض أن $P(z)$ كثيرة حدود معاملاتها حقيقية:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

تحقق $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > 0$

أثبت أن جميع جذور $P(z)$ تحقق $|z| > 1$.

(إرشاد: طبق المتراجحة (المتباينة) المثلثية على:

$$(1-z)P(z) = a_0 - \left[(a_0-a_1)z + (a_1-a_2)z^2 + \ldots + (a_{n-1}-a_n)z^n + a_n z^{n+1}\right]$$

رابع وثلاثون: ابحث في خصائص المجموعات المعرفة في التمارين (١ . ١٠) من حيث كونها مفتوحة أم مغلقة، أم مترابطة، أم متراصة، أم محدودة، أم مجال أو منطقة. ثم مثلها بيانياً:

١. $S = \{z \in C : |z| < 3\}$

٢. $S = \{z \in C: 1 \le |z| < 3\}$

٣. $S = \{z \in C: |z - i| \ge 3\}$

٤. $S = \{z \in C: 0 < \arg z \leq \pi/6\}$

٥. $S = \{z \in C: x^2 \leq y\}$

٦. $S = \{z \in C: |Re.z| < 2\}$

٧. $S = \{z \in C: |\arg z| < \pi/2\}$

٨. $S = \{z \in C: |Im.z| \leq 1\}$

٩. $S = \{z \in C: Re.(2z + i - 1) \geq 1\}$

١٠. $S = \{z \in C: Im.(iz + 1 - 2i) < 2\}$

١١. بيّن أن مسار المعادلة: $|z - \alpha| = |z - \beta|$

عبارة عن خط مستقيم عمودي ومنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين α وβ.

١٢. بيّن أن مسار المعادلة:

$$|z - a = k\,|z - \beta|$$

عبارة عن دائرة.

اقتراح: حوّل إلى الإحداثيات الديكارتية (الكارتيزية).

١٣. ابحث في الخصائص التبولوجية للمجموعة:

$$S = \{z \in C: |z - \alpha| < k\,|z - \beta|\}$$

١٤. يقال إن المجموعة S محدبة إذا تحقق الشرط:

لكل w, z في S فإن القطعة الواصلة بينهما محتواة في S. أي إن $tw + (1-t)\,z \in S$ لكل t في [0, 1]. أثبت أن نصف المستوي محدب، خذ مثالاً نصف المستوي المعرفة بالمعادلة:

$$Re.(iz - 1 + 3i) > 0$$

١٥ . بيِّن أن مسار النقطة التي تحقق المعادلة:

$$|z - r| = k\,(\text{Re. } z)\ ,\ k, r > 0$$

يأخذ:

أ . شكل قطع ناقص إذا كانت: $0 < k < 1$

ب . قطع مكافئ إذا كان: $k = 1$

جـ . قطع زائد إذا كانت: $1 < k < \infty$

١٦ . أوجد مجموعة نقاط الحدود وكذلك نقاط التجمع للمجموعات التالية:

أ . $S = \{(-i)^n : n = 1,2,3...\}$

ب . $S = \{\frac{i}{n} : n = 1,2,3...\}$

جـ . $S = \{z \in C: 0 \le \arg z < \pi/4\}$

د . $S = \{z \in C : \text{Re.}\left(\frac{1}{z}\right) \le 2\}$

هـ . $S = \{z \in C: \text{Re. } z^2 > 0\}$

١٧ . بيِّن أنه إذا احتوت المجموعة S جميع نقاط التجمع لها فإنها مغلقة.

١٨ . أعط مثالاً يبيِّن أن نقطة التجمع لمجموعة ما لا تنتمي لها. ومثالاً آخر تكون نقطة التجمع تنتمي لها.

١٩ . بيِّن أنه إذا كانت S مجالاً فإن كل نقطة داخلية للمجموعة S تكون نقطة تجمع لها.

٢٠ . بيِّن أنه إذا تكونت المجموعة S من عدد منتهٍ من النقاط فلا يوجد نقاط تجمع لها.

خامس وثلاثون: بتطبيق نظرية De Moivere Theorem أثبت أن:

أ . $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta$

ب . $\sin 3\theta = 3\cos^2 \sin\theta - \sin^3\theta$

سادس وثلاثون: بفرض أن $z_1 = 1 - i$، $z_2 = -1 + i$

أ . أنجز العمليات الأربع على z_1 و z_2.

ب . أوجد $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$, $\mathrm{Im}(2\overline{z_1} - \overline{z_2})$

جـ . أوجد: $\left|\frac{z_1^3}{z_2}\right|$

د . عين الثابتين α و β بحيث تتحقق المساواة:

$$2\alpha z_1 + \beta z_2 - \alpha - \beta + i = 2$$

سابع وثلاثون: أوجد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطة $1 + i$ ومحرقه $\pm i$ ثم معادلة القطع المكافئ الذي دليله $\mathrm{Im}\, z = -1$ ومحرقه i.

*　　*　　*

الفصل الثاني

الدوال التحليلية

Analytic Functions

٢ . ١ . الدوال المركبة:

إن فكرة العدد المركب التي أوجدت حلولاً لبعض المعادلات الجبرية، ويمكن أن يكون لها أثر أكثر أهمية ولا سيّما في بعض التطبيقات الفيزيائية، ذلك أنه يمكن تعريف فكرة الدالة المركبة التي يبرز من بينها نوع هام لتلك التطبيقات هي الدوال التحليلية.

لعلنا نذكر أن فكرة الدالة f هي قانون يؤثر في عناصر مجموعة X، ويحولها إلى عناصر في مجموعة Y بحيث إن لكل x في X هناك قيمة واحدة وواحدة فقط y في Y تسمى صورة x أو:

$$y = f(x) \qquad (1)$$

أما الدالة المركبة فهي تخصيص لذلك العموم، حيث إن f دالة مركبة إذا كانت f قانوناً يعيّن لكل عدد مركب z في مجموعة جزئية D من C عدداً مركباً واحداً ووحيداً w يسمى صورة z ويكتب كما يلي:

$$w = f(z) \qquad (2)$$

إن المجموعة D التي تحتوي كل الأعداد المركبة z التي تكون صورتها f(z) معرفة (أي عدداً مركباً) تسمى مجال تعريف الدالة وكذلك فإن المجموعة R التي تحتوي كل الأعداد المركبة التي يمكن أن تكون صورة لواحد أو أكثر من الأعداد المركبة z في D تسمى مدى الدالة f أو صورة الدالة f.

نلاحظ أن العدد المركب z الذي يمثل المتغير المستقل للدالة عبارة عن نقطة في المستوي المركب (ثنائي الأبعاد) ويحدّد بالمتغيرين (x, y) وكذلك العدد المركب w الذي

يمثل المتغير التابع $w = f(z)$ للدالة f عبارة عن نقطة في المستوي المركب (ثنائي الأبعاد) ويحدد بالمتغيرين (u, v)، ولعل هذا ما يبرز بعض المفارقات بين الدالة الحقيقية التي ألف القارئ دراستها وبين الدالة المركبة. مثل هذه المفارقات عدم إمكانية إعطاء رسم سهل التخيل كما هو الحال في الدوال الحقيقية، ولكن هذا لا يمنع من وصف تأثير الدالة في مجالها، هذا الوصف يتطلب دراسة تأثير الدالة في الخط المستقيم أو الدائرة أو الشريحة في مجال تعريفها، وإن هذه الدراسة ليست سهلة الاستيعاب في كثير من الأحيان.

ومن المفارقات كذلك إمكانية تمثيل الدالة المركبة بزوج من الدوال الحقيقية ذات متغيرين، ذلك لأن:

$$w = f(z) = u + vi = f(x + yi)$$

ومن ذلك نستنتج كلا من $u(x, y)$ و $v(x, y)$ كما يوضح ذلك الأمثلة التالية:

٢ . ١ . ١ . مثال (١):

إذا كانت $f(z) = z^3$ فإن مجال هذه الدالة D هو مجموعة الأعداد المركبة، وكذلك مداها، لإيجاد الدالتين $v(x, y)$ و $u(x, y)$ نقول:

$$\begin{aligned} u + vi = f(z) = z^3 &= (x + yi)^3 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)\, i \end{aligned}$$

ومن ذلك فإن:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 ,$$
$$v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

وتسمى الدالة u بأنها Re.f وتسمى الدالة v بأنها Im. f.

٢ . ١ . ٢ . مثال (٢):

إذا كانت $f(z) = x^2 - 2y^2i$ فإنه يمكن لهذه الدالة أن تكتب بدلالة المتغير z، ذلك إذا تذكرنا أن:

$$x = \mathrm{Re}.z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), y = \mathrm{Im}.z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

وبالتعويض في الدالة f نجد أن:

$$\begin{aligned} f(z) &= (\mathrm{Re}.\ z)^2 - 2(\mathrm{Im}\ .\ z)^2\ .\ i \\ &= \frac{(z+\bar{z})^2}{4} + \frac{(z-\bar{z})^2}{2} i \\ &= \frac{1}{4}\{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2\} + \frac{1}{2} i\{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2\} \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i\right) z^2 + \left(\frac{1}{2} - i\right) z\bar{z} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i\right) \bar{z}^2 \\ &= \alpha z^2 + \beta z\bar{z} + \gamma \bar{z}^2 \end{aligned}$$

حيث إن:

$$\alpha = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i\right), \beta = \left(\frac{1}{2} - i\right), \gamma = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i\right)$$

لعله من المفيد دراسة بعض الدوال دراسة أكثر تفصيلاً، مثل التحويلات التالية: الانسحاب، والدوران، والانعكاس.

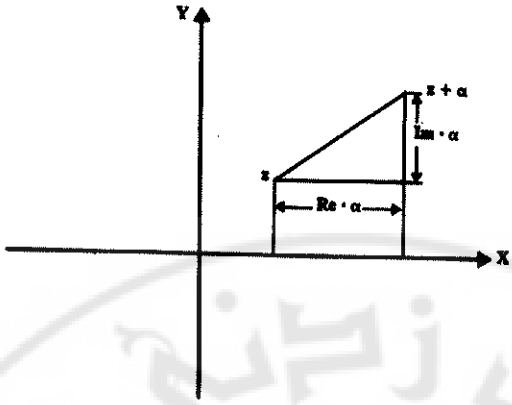
٢ . ١ . ٣ . مثال (٣): الانسحاب:

الانسحاب هو دالة معرفة بالمساواة:

$$w = f(z) = z + \alpha = (x + \mathrm{Re}.\ \alpha) + i(y + \mathrm{Im}.\ \alpha)$$

حيث إن α عدد مركب. وإن مجال هذه الدالة هو C وكذلك مداها. وتأثيرها في مجالها أنها تسحب كل عدد (حقيقي) مركب z بمقدار واتجاه العدد المركب α، أي إن x تسحب بمقدار $\mathrm{Re}.\ \alpha$، وكذلك y تسحب بمقدار $\mathrm{Im}.\ \alpha$ ويكون التأثير انسحاباً بمحصلة الانسحابين الحقيقيين $\mathrm{Re}.\ \alpha$، $\mathrm{Im}.\ \alpha$ شكل رقم (١).

ويمكن ملاحظة أن الدالة العكسية لها هي: $z = f^1(w) = w - \alpha$



الشكل (١)

٢ . ١ . ٤ . مثال (٤): الدوران:

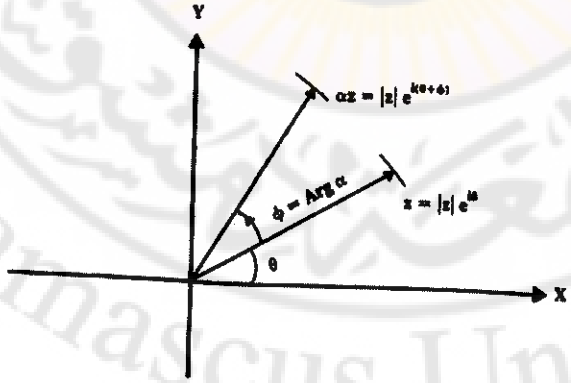
الدوران هو دالة معرفة بالمساواة:

$$w = f(z) = \alpha \, . \, z$$

حيث إن α عدد مركب يقع على دائرة الوحدة أي إن $|\alpha| = 1$. إن مجال هذه الدالة هو C وكذلك مداها، كما أن الدالة العكسية هي:

$$z = f^{-1}(w) = \overline{\alpha} w$$

وتأثيرها هو دوران عكس عقارب الساعة بزاوية مقدارها $\phi = \text{Arg } \alpha$، انظر الشكل رقم (٢).



الشكل (٢)

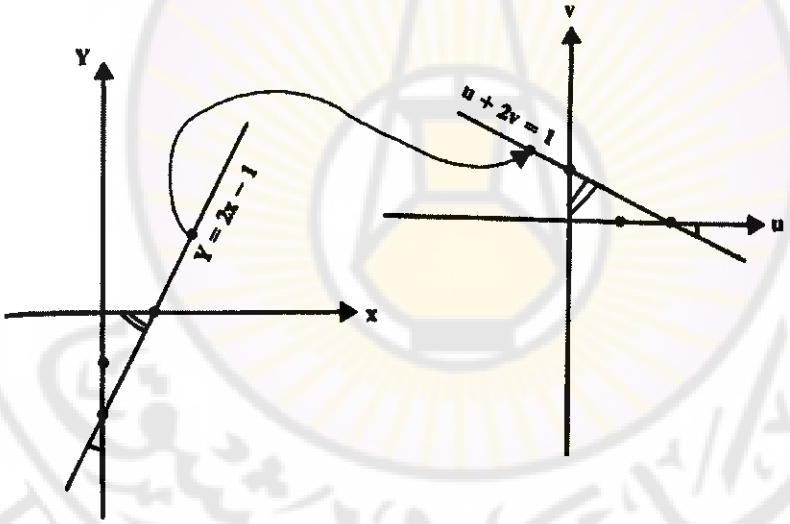
فإذا كانت $\alpha = i$ فإن سعة الدوران هي $\text{Argi} = \frac{\pi}{2}$ ولمعرفة تأثير هذا الدوران في الخط المستقيم الذي يقع في مجالها $y = 2x - 1$ مثلاً فإن صورة هذا الخط المستقيم هو تدوير له بمقدار $\frac{\pi}{2}$ عكس عقارب الساعة وبالتحليل فإن:

$$w = f(z) = iz = -y + xi = u + vi$$

ومن ذلك ينتج أن $u = -y$ و $v = x$ وبالتعويض بدلاً من x و y في معادلة المستقيم $y = 2x - 1$ نحصل على:

$$-u = 2v - 1$$

أي إن صورة $y = 2x - 1$ هي الخط المستقيم $u + 2v = 1$. لاحظ أخيراً أن الدوران يحافظ على الزوايا، انظر الشكل (٣).



الشكل (٣)

٢ . ١ . ٥ . مثال (٥): الانعكاس:

أما الانعكاس فهو معرف بالمساواة:

$$w = f(z) = \bar{z}$$

ومجاله هو C وكذلك مداه وتأثيره أنه ينقل النصف العلوي من المستوي المركب إلى النصف السفلي منه والعكس أيضاً بالعكس أما الدالة العكسية فهي:

$$z = f^{1}(w) = \overline{w}$$

ننوّه هنا أنه من المفيد استخدام الشكل القطبي للعدد المركب للحصول على الشكل القطبي للدالة المركبة $w = f(z) = u + vi$ حيث تصبح:

$$f(re^{i\theta}) = u\,(r, \theta) + iv\,(r, \theta)$$

هذه الفكرة يوضحها المثال التالي:

٢ . ١ . ٦ . مثال (٦):

إذا كانت $f(z) = \alpha\, z$ فإن:

$$w = f(re^{i\theta}) = |\alpha|\, e^{i\phi}\, |z|\, e^{i\theta} = |\alpha|\, |z|\, e^{i(\theta+\phi)}$$

حيث إن $|z| = r$، $\phi = \arg \alpha$ ومن ذلك ينتج:

$$w = |\alpha|\, |z|\, (\cos(\theta + \phi) + i \sin (\theta + \phi))$$

ومنها فإن:

$$u(r, \theta) = |\alpha|\, r \cos (\theta + \phi),$$
$$v(r, \theta) = |\alpha|\, r \sin (\theta + \phi).$$

لاحظ أن تأثير هذه الدالة على مجالها هو دوران بمقدار $\phi = \text{Arg}\ \alpha$ عكس عقارب الساعة بالإضافة إلى تكبير أو تصغير لمقياس المتغير z حسب كون $|\alpha| > 1$ أو $|\alpha| < 1$.

٢ . ٢ . النهاية والاستمرار:

لا شك أن لفكرة النهاية أثرٌ مهمٌّ في الرياضيات عامة والتحليل خاصة سواء التحليل الحقيقي أم المركب، لذلك لا بد من لفت انتباه القارئ إلى أهمية هذه الفكرة أولاً ثم لدقتها ثانياً. يبيّن التعريف التالي مفهوم النهاية للدالة المركبة.

تعريف (١):

لتكن f دالة مركبة معرفة على جوار للنقطة z_0 ما عدا احتمالاً z_0 نفسها. إذا كان w_0 عدداً مركباً فإن $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط التالي:

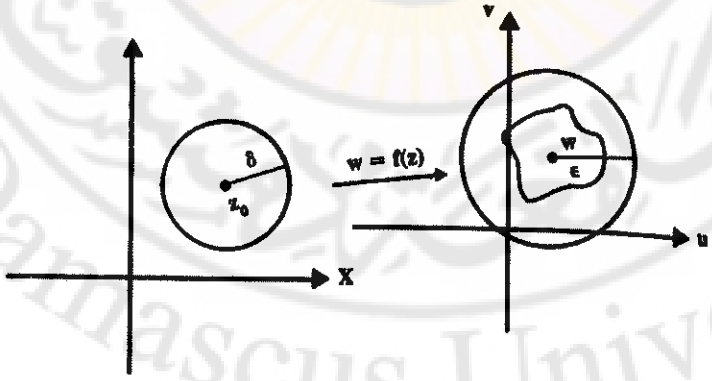
لكل عدد حقيقي $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \in \qquad (3)$$

هذا التعريف يشبه تعريف نهاية الدالة الحقيقية شكلاً، ولكن بالتدقيق والتأمل بالجمل المكوّن منها هذا التعريف نستنتج بعض المفارقات، إن الجملة $|z - z_0| < \delta$ تمثل قرصاً مركزه z_0 ونصف قطره δ في حين أن نفس الجملة في الدالة الحقيقية كانت تمثل فترة مركزها x_0 ونصف قطرها δ. وقل الشيء نفسه بالنسبة إلى لجملة $|f(z) - w_0| < \in$.

إن هذا الفرق يُفقد فكرتي النهاية من اليمين ومن اليسار معناهما ذلك أنه في حالة الفترة التي مركزها x_0 ونصف قطرها δ يكون اقتراب المتغير x من x_0 على مسارين اثنين لا ثالث لهما، ولكن في حالة القرص الذي مركزه z_0 ونصف قطره δ فإن اقتراب المتغير z من z_0 يكون بمسارات عددها لا نهائي لذلك لم يعد هناك معنى للنهاية اليمنى والنهاية اليسرى.

الأمثلة التالية توضح كيفية استخدام التعريف لإثبات النهاية.



الشكل (٤)

مثال (٧):

إذا كانت $f(z) = x + (x + 2y)i$ فبيِّن باستخدام التعريف (١) أن:

$$\lim_{z \to i} f(z) = 2i$$

الحل:

لتكن $\in > 0$، علينا أن نجد علاقة بين $\in$ و δ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \in$$

لذلك نفرض أن $|z - i| < \delta$ وبالحساب فإن:

$$|f(z) - w_0| = |x + (x + 2y)i - 2i|$$
$$= |x + (x + 2y - 2)i|$$

ومن الفرض $|z - i| < \delta$ نستنتج أن:

$$|z - i| = |x + (y - 1)\, i| < \delta$$

ومن هذا ينتج أن:

$$|x| < \delta \,,\ |y - 1| < \delta$$

وعليه فإن:

$$|f(z) - w_0| = |x + (x + 2y - 2)\, i| \le 2\,|x| + 2|y - 1| < 4\delta$$

فإذا اخترنا قيمة δ تحقق الشرط $4\delta \le \in$ فإن العلاقة المطلوبة هي $\delta \le \frac{1}{4} \in$.

مثال (٨):

بيِّن باستخدام التعريف أن:

$$\lim_{z \to 2i} z^2 = -4$$

الحل:

نفرض أن $\in > 0$ لنبحث عن علاقة بين $\in$ وعدد حقيقي δ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \in$$

لذلك نفرض أن $|z - 2i| < \delta$ ومن ذلك ينتج أن:

$$\begin{aligned}|f(z) - w_0| &= |z^2 + 4| = |(z - 2i)(z + 2i)| \\ &= |z - 2i|\,|z - 2i + 4i| \\ &\le |z - 2i|\,(|z - 2i| + |4i|) \\ &< \delta(\delta + 4) \\ &< \delta^2 + 4\delta.\end{aligned}$$

فإذا فرضنا أن $\delta < 1$ فإن $\delta^2 < \delta$ ولذلك فإن:

$$|f(z) - w_0| < \delta^2 + 4\delta < 5\delta$$

فإذا فرضنا أن $5\delta \le \in$ فإن $\delta \le \frac{1}{5} \in$ ومن ذلك فإن:

$$\delta \le \min.\left\{1, \frac{1}{5} \in\right\}$$

هي العلاقة التي تحقق الشرط (صغرى = min).

إن الملاحظة التي ذكرت تعقيباً على تعريف (١) تفيدنا في حالة إثبات أن قيمة نهاية دالة ما غير موجودة لوجود قيم مختلفة للنهاية عندما يقترب المتغير z من z_0 بطرق مختلفة، ذلك لأن النهاية إن وجدت فإن قيمتها واحدة ووحيدة.

مثال (٩):

لتكن الدالة f معرفة بالمساواة:

$$f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$$

فبيِّن أن $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ غير موجودة.

الحل:

نبحث عن قيمة النهاية بفرض اقتراب المتغير z من z_0 بمسارين مختلفين، فإذا وجدنا قيمتين مختلفتين للنهاية فإنها غير موجودة (هل يمكن أن نستنتج شيئاً إذا حدث أن قيمتي النهاية من طريقين مختلفين متساويتان؟). ليكن المسار الأول هو عن طريق المحور التخيلي أي بفرض $x = 0$ نجد أن:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x+yi\to 0}\frac{(x^2-y^2)+2xyi}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{yi\to 0}\frac{-y^2}{y^2}$$

$$= \lim_{yi\to 0} -1 = -1$$

وإذا سلك المتغير z مقترباً من 0 بالمسار $y = x$ ينتج أن:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+i)^2x^2}{2x^2} = i$$

وبما أن قيمتي نهاية الدالة مختلفتان فإن $\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2}$ غير موجودة.

التعريف التالي يوضح مفهوم نهاية الدالة إذا اقترب المتغير z من ∞، ومفهوم نهاية الدالة عندما تكون لا نهائية.

تعريف (٢):

إذا كانت $f(z)$ دالة فإن $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي $k > 0$ بحيث إن:

$$|z| > k \Rightarrow |f(z) - w_0| < \in \qquad (4)$$

وكذلك $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

لكل عدد حقيقي $k > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > k \qquad (5)$$

علماً بأن f معرفة على جوار النقطة z_0 ما عدا احتمالاً z_0 نفسها.

نفس المفارقات يمكن ذكرها في هذه الحالة كذلك. مع ملاحظة أن الجملة $|z|>k$ تعني جوار ∞ أو جميع النقاط الخارجية للقرص المغلق $|z| \le k$.

كما يمكن ملاحظة أن: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0$ تكافئ $\lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$ وكذلك $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ تكافئ $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. لتوضيح هذه الأفكار نقدم الأمثلة التالية:

مثال (١٠):

بيِّن بالتعريف أن $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z^n} = 0$ حيث إن n عدد موجب.

الحل:

إذا فرضنا أن $|z| > k$ فإن $|z|^n > k^n$ وبفرض أن $k > 1$ ينتج أن:

$$\frac{1}{|z^n|} < \frac{1}{k^n} < \frac{1}{k}$$

فإذا فرضنا أن $\frac{1}{k} \le \in$ فإن:

$$k \ge \max . \{1, \frac{1}{\in}\}$$

هي العلاقة بين $\in$ و k التي تحقق شرط التعريف المطلوب (كبرى = max).

مثال (١١):

بيِّن بالتعريف كذلك أن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^n} = \infty$$

حيث إن n عدد صحيح موجب.

الحل:

إذا فرضنا أن $|z| < \delta$ وكانت $\delta < 1$ فإن $|z|^n \le \delta^n < \delta$، ومن ذلك نستنتج أن $\left|\frac{1}{z^n}\right| \ge \frac{1}{\delta}$.

فإذا فرضنا أن $k = \frac{1}{\delta}$ فإن العلاقة:

$$k = \max.\ \{1, 1/\delta\}$$

بين δ و k هي العلاقة التي تحقق التعريف.

المبرهنة التالية أساس لباقي المبرهنات التي تلخص خصائص النهايات.

مبرهنة (١):

لتكن $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ دالة مركبة معرفة على جوار للنقطة $z_0 = x_0 + y_0 i$ ما عدا احتمالاً z_0 نفسها فإذا كان $w_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$ عدداً مركباً فإن:

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط:

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta_0 \end{cases} \qquad (6)$$

البرهان:

نفرض أن:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

فإن تعريف (١) يؤكد أنه لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \in$$

ومن تعريف القيمة المطلقة للعدد المركب فإن هذه الجملة تكتب بالصيغة:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|<\in$$

وبما أن:

$$|u(x,y) - \alpha_0| = |Re.\ (f(z) - w_0)| \le |f(z) - w_0|$$

وكذلك:

$$|v(x,y) - \beta_0| = |Im.\ (f(z) - w_0)| \le |f(z) - w_0|$$

فإننا نستنتج ما يلي:

لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |u(x,y)-\alpha_0|<\in ,$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |v(x,y)-\beta_0|<\in .$$

وهذا يكافئ:

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=\alpha_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=\beta_0 \end{cases} \qquad (7)$$

وبالعكس إذا فرضنا (7) صحيحاً فإنه لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |u(x,y)-\alpha_0|<\in/2 ,$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |v(x,y)-\beta_0|<\in/2 .$$

وبالتالي إذا فرضنا أن: $|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

فإن:

$$\begin{aligned} |f(z)-w_0| &= |(u(x,y)-\alpha_0)+i(v(x,y)-\beta_0)| \\ &\le |u(x,y)-\alpha_0|+|v(x,y)-\beta_0|<\in \end{aligned}$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

إن أهمية هذه المبرهنة تكمن في تحويل إيجاد نهاية دالة مركبة إلى إيجاد نهاية دالتين حقيقيتين ذات متغيرين.

ويمكن بالاستعانة بالمبرهنة إثبات المبرهنات التالية بسهولة، كما يمكن إعطاء برهان (مستقل عن هذه النظرية) مباشرة من التعريف، وهو لا يختلف عن مثيلاتها في موضوع التفاضل والتكامل، لذلك نتركه تمريناً للقارئ.

مبرهنة (٢):

لنفرض أن f و g دالتان مركبتان معرفتان على جوار للنقطة z_0 (ما عدا احتمالاً z_0 نفسها) وأن w_1, w_2 عددان مركبان بحيث إن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1 \quad , \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$$

العلاقات التالية صحيحة:

أ. $\lim_{z\to z_0}(f \pm g)(z) = w_1 \pm w_2$

ب. $\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = w_1 \cdot w_2$

جـ. وبفرض أن $w_2 \neq 0$ فإن: $\lim_{z\to z_0}(f(z)/g(z)) = w_1 / w_2$

لا شك أن فكرة استمرار الدالة مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بفكرة النهاية، بل هي تفسير لحالة خاصة من حالات وجود نهاية الدالة. لذلك نقدم التعريف التالي:

تعريف (٣): (الاستمرار)

نفرض أن f دالة مركبة ومجال تعريفها هو المجموعة D، يقال إن الدالة f مستمرة على النقطة z_0 إذا تحققت الشروط التالية:

أ. $z_0 \in D$ (أي إن $f(z_0)$ عدد مركب).

ب. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة.

جـ. $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

ويمكن استبدال هذه الشروط بشرط واحد وهو:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \in C \qquad (8)$$

المبرهنة التالية تعتبر نتيجة للمبرهنة ٢، نترك إثباتها تمريناً للقارئ.

مبرهنة (٣):

لنفرض أن الدالتين f, g مستمرتان على النقطة z_0 التي تنتمي إلى مجالهما المشترك فإن الدوال $f \pm g$ و $f \cdot g$ و f/g (بشرط $g(z_0) \neq 0$) جميعها مستمرة على النقطة z_0.

هذه المبرهنة تبين لنا استمرار كثير من الدوال المركبة على مجال تعريفها مثل كثيرة الحدود:

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot z + \alpha_2 \cdot z^2 + \ldots + \alpha_n z^n$$

والدالة النسبية التي تتكون من حاصل قسمة كثيرتي حدود p و q أي إن الدالة $p(z)/q(z)$ مستمرة على كل نقطة z لا تجعل المقام $q(z)$ صفراً.

كذلك فإن تركيب دالتين مستمرتين يكون مستمراً كما تشير إلى ذلك المبرهنة التالية:

مبرهنة (٤):

لنفرض أن الدالة f معرفة على جوار للنقطة z_0 وهي مستمرة عليها. وأن الدالة g معرفة على جوار للنقطة $f(z_0)$ وهي مستمرة عليها فإن الدالة gof مستمرة على z_0.

البرهان:

بما أن g مستمرة على النقطة $f(z_0)$ فإنه لكل $\in > 0$ يوجد $\delta' > 0$ بحيث إن:

$$|w - f(z_0)| < \delta' \Rightarrow |g(w) - g(f(z_0)| < \in$$

بما أن f مستمرة على z_0 فإنه لكل $\in' > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \in'$$

وبفرض أن $w = f(z)$ وأن $\delta' = \in'$ فإن المتراجحتين السابقتين تنتجان ما يلي:

لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow (|f(z) - f(z_0)| < \delta') \Rightarrow |g(w) - g(f(z_0))| < \in$$

أي إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(f(z)) - g(f(z_0))| < \in$$

وهذا ينهي إثبات صحة المبرهنة.

لعله من المفيد كذلك أن ننوه إلى أن أي دالة مركبة $f = u + vi$ مستمرة عند نقطة z_0 إذا وإذا فقط كانت الدالتان u و v مستمرتين عند z_0، هذه الملاحظة نتيجة مباشرة لتعريف الاستمرار ومبرهنة (١). كما أننا ننوّه أنه لإيجاد قيمة النهاية لأي دالة مركبة نستخدم التعويض المباشر إذا كانت النقطة z_0 في مجال تعريف الدالة أما إذا نتج من التعويض المباشر إحدى الصيغ غير المحددة مثل ($\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و 1^∞ و $\infty - \infty$ و $\infty \cdot 0$)، فإننا نوظف الطرق التي عرفها القارئ في حالة الدوال الحقيقية مثل (التحليل للعوامل والتبسيط، الضرب بالمرافق والتبسيط، القسمة على أكبر قوة للمتغير z في البسط والمقام (في حالة $\frac{\infty}{\infty}$ وغيرها من الطرق الجبرية).

الأمثلة التالية توضح الملاحظات السابقة.

مثال (١٢):

لإيجاد:

$$\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 1}{z + i}$$

نلاحظ أن $-i$ تجعل كلاً من بسط ومقام الدالة صفراً، ومن ثمَّ فإن التعويض المباشر يعطي $\frac{0}{0}$ لذلك فإن التحليل للعوامل والتبسيط يساعدنا في إيجاد تلك النهاية وهي:

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i}=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)(z+i)}{(z+i)}$$
$$=\lim_{z\to -i}(z-i)=-2i$$

مثال (١٣):

الدالة $f(z) = (z^2 + 1)/ (z + i)$ مستمرة على جميع الأعداد عدا جذور المقام وهي $z_0 = - i$ ومن ثمَّ فإن الدالة:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2+1}{z+i}, & z\neq -i\\ -2i, & z=-i\end{cases}$$

تكون مستمرة على جميع الأعداد المركبة C.

مثال (١٤):

الدالة f المعرفة بالمساواة:

$$f(z)=\cos y+ie^{xy}$$

مستمرة على جميع الأعداد المركبة ذلك لأن $u(x, y) = \cos y$ وهي مستمرة وكذلك $v(x, y) = e^{xy}$ مستمرة أيضاً لجميع قيم x و y الحقيقة.

٢ . ٣ . الدالة التحليلية:

إن تعريف المشتقة الأولى لدالة مركبة عند نقطة z_0 في مجال تعريفها لا يختلف عن تعريف المشتقة الأولى للدالة الحقيقية كما يبيّن ذلك التعريف التالي:

تعريف (٤):

لتكن الدالة f معرفة على جوار للنقطة z_0 فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 إذا وإذا فقط وجد عدد مركب w_0 بحيث إن:

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (9)$$

ويسمى عادة هذا العدد المركب w_0 بأنه المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة z_0 ويرمز له بالرموز التقليدية:

$$w_0 = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) \qquad (10)$$

وإذا كتبنا $\Delta z = z - z_0$ فإن التعريف يأخذ الشكل:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (11)$$

وهذه صيغة تمكننا من النظر إلى المشتقة كدالة بالمتغير z وهي:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (12)$$

مثال (١٥):

باستخدام تعريف المشتقة أوجد $f'(z)$ إذا كانت $f(z) = \sqrt{z}$ لكل z تحقق $|z| > 0 \ , -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

الحل:

بتطبيق الصيغة (12) للمشتقة نجد أن:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sqrt{z + \Delta z} - \sqrt{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\sqrt{z+\Delta z}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

ننوّه هنا أن الشرط المذكور في المثال يحدّد المجال الذي تكون فيه المشتقة موجودة، وسنبحث فيما بعد طرق إيجاد مثل هذه الشروط. أما الآن فنكتفي بعملية إيجاد المشتقة باستخدام التعريف مفترضين مجال وجودها.

مثال (١٦):

بيِّن باستخدام التعريف أن المشتقة للدالة $f(z)=\bar{z}$ ليست موجودة عند أي نقطة في المستوي المركب.

الحل:

بتطبيق الصيغة (12) نجد أن:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

ولإثبات أن هذه النهاية غير موجودة عند أي عدد مركب z نجعل اقتراب المتغير Δz من 0 على مسارين أحدهما المحور الحقيقي x، وهذا يعني أن $\overline{\Delta z} = \Delta z$ والآخر المحور التخيلي y، وهذا يعني أن $\overline{\Delta z} = -\Delta z$، ومن هذا نستنتج أن:

$$f'(z) = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1, & \overline{\Delta z} = \Delta z \\ \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1, & \overline{\Delta z} = -\Delta z \end{cases}$$

وبما أن القيمتين مختلفتان فإن $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ غير موجودة، وبالتالي تكون الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند أي عدد مركب z.

لاحظ أن الدالة $f(z) = \overline{z} = x - yi$ مستمرة على جميع الأعداد المركبة، لأن $u(x, y) = x$ و $v(x, y) = -y$ مستمرتان، ولكن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند أي عدد مركب، وهنا ننوّه أن قابلية الاشتقاق للدالة عند نقطة مثل z_0 تؤكد استمرار هذه الدالة عند نفس النقطة، وهذا ما تثبته النظرية التالية:

مبرهنة (٥):

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 فإنها مستمرة عند z_0.

البرهان:

لا يختلف (شكلاً) عن إثبات نفس النظرية في الحالة الحقيقية لذلك نتركه تمريناً للقارئ.

والحقيقة أن إثبات جميع قوانين الاشتقاق في الحالة المركبة يشبه (شكلاً) إثباتها في الحالة الحقيقية لذلك نتركها تمريناً للقارئ وهذه القوانين ملخصة بالنظرية التالية:

مبرهنة (٦):

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند النقطة z فإن القوانين التالية صحيحة:

أ. $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$

ب. $(f \cdot g)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

جـ. وإذا كان $g(z) \neq 0$ فإن:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

د. إذا كانت g قابلة للاشتقاق عند f(z) فإن:

$$(gof)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

وهذه القوانين تمكننا من إيجاد المشتقة حيثما وجدت.

مثال (١٧):

إذا كانت $f(z) = c$ حيث c مقدار ثابت فإن $f'(z) = 0$، وإذا كانت $f(z) = z^n$ فإن $f'(z) = nz^{n-1}$ وإذا كانت $f(z) = (3z^2 - iz + 3i)^5$ فإن:

$$f'(z) = 5(3z^2 - iz + 3i)^4 (6z - i)$$

وإذا كانت f كثيرة حدود فهي قابلة للاشتقاق لجميع قيم z.

وإذا كانت:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

حيث إن p(z) و q(z) كثيرتا حدود فإن f قابلة للاشتقاق لجميع قيم z التي لا تجعل المقام q(z) صفراً.

هذه القوانين تفيدنا إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على جوار للنقطة z لكن هناك دوال قابلة للاشتقاق على نقطة واحدة في مجالها أي قابلة للاشتقاق على نقطة معزولة، انظر المثال التالي:

مثال (١٨):

بيِّن أن الدالة $f(z) = z\,\bar{z}$ قابلة للاشتقاق على النقطة المعزولة $z_0 = 0$ أي إنها غير قابلة للاشتقاق عند $z \neq 0$.

الحل:

باستخدام الصيغة (12) وبفرض أن $z \neq 0$ نجد أن:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + z \cdot \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{\Delta z} \right)$$

وبالاستعانة بالمثال (١٦) وكون $\overline{\Delta z}$ مستمرة فإن:

$$f'(z) = \bar{z} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \begin{cases} \bar{z} + z, & \overline{\Delta z} = \Delta z \\ \bar{z} - z, & \overline{\Delta z} = -\Delta z \end{cases}$$

ومن ذلك فإن المشتقة f غير موجودة لأن $\bar{z} + z \neq \bar{z} - z$ لكل $z \neq 0$ ومن ثمَّ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق لجميع قيم $z \neq 0$.

أما إذا كانت $z = 0$ فإن:

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z}$$
$$= 0$$

وبالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على النقطة $z = 0$ فقط ولذلك فهي معزولة.

إن الدوال القابلة للاشتقاق على مجال (مفتوح) تشكل نوعاً هاماً من الدوال المركبة، لأن لها أثراً كبيراً في التحليل المركب ولها تطبيقات مهمة كذلك وهي تسمى دوال تحليلية.

تعريف (٥):

نقول إن الدالة f تحليلية Analytic عند النقطة z_0 إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق ليس فقط عند z_0 بل عند كل نقطة في جوار ما للنقطة z_0.

ونقول كذلك إن الدالة f تحليلية على مجموعة مفتوحة D إذا كانت تحليلية على كل نقطة من نقاط D. أما إذا كانت المجموعة D مغلقة فإن الدالة تكون تحليلية على D إذا كانت تحليلية على مجموعة مفتوحة تحتوي على D.

وإذا كانت الدالة تحليلية على كل المستوي المركب فإنها تسمى دالة صحيحة (شاملة) (Entire).

إذا كانت الدالة ليست تحليلية عند النقطة z_0، ولكنها تحليلية عند نقطة واحدة على الأقل في كل جوار للنقطة z_0 فإن النقطة z_0 تسمى نقطة شاذة (singular point) للدالة f.

الأمثلة التالية توضح المفاهيم التي ذكرت في التعريف السابق.

مثال (١٩):

الدالة $f(z) = z^3$ دالة تحليلية على كل الأعداد المركبة (لأن $f'(z) = 3z^2$ معرفة وموجودة لكل عدد مركب) ومن ثمَّ فهي دالة صحيحة ولكن الدالة $f(z) = z\bar{z}$ ليست تحليلية لأنها قابلة للاشتقاق عند النقطة $z = 0$ فقط (وليست قابلة للاشتقاق على أي جوار للنقطة $z = 0$) ومن ثمَّ فهي ليست صحيحة.

مثال (٢٠):

الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ قابلة للاشتقاق على كل الأعداد المركبة $z \neq 0$ (لأن $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$). ومن ثمَّ فإنها تحليلية عند كل عدد مركب $z \neq 0$ أما عند النقطة $z = 0$ فإن الدالة ليست معرفة (فضلاً عن كونها غير قابلة للاشتقاق)، ولأن الدالة تحليلية على نقطة واحدة على الأقل في كل جوار للنقطة $z = 0$ (ما عدا $z = 0$ نفسها) فإن النقطة $z = 0$ نقطة (شاذة) للدالة f. لاحظ كذلك أن الدالة $f(z) = \bar{z}$ ليس لها نقاط (شاذة) مع كونها ليست تحليلية على أي عدد مركب. لاحظ كذلك أن الدالة $f(z) = z\bar{z}$ ليس لها نقاط (شاذة) (مع كونها قابلة للاشتقاق على النقطة $z = 0$) لأنها ليست تحليلية عند أي نقطة في المستوي.

نلاحظ أن الدوال التحليلية تعتمد في تركيبها على المتغير z فقط ولكن الدوال غير التحليلية لا تعتمد على z فحسب بل على $\bar{z}$ كذلك، لذلك نستطيع التعرف على كون الدالة تحليلية أم لا بالتعبير عن متغيراتها x و y بدلالة $\bar{z}$ ، z فإذا استطعنا حذف $\bar{z}$ تكون تحليلية، وإذا لم نستطع حذف $\bar{z}$ فإن الدالة ليست تحليلية كما في المثال التالي:

مثال (٢١):

تعرَّف على الدالة التحليلية وغير التحليلية بين الدالتين:

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi \ , \ g(z) = (x^2 + 2x + y^2) + 2yi$$

الحل:

تذكر قيمتي x و y بدلالة z و $\bar{z}$ وهما:

$$x = \mathrm{Re}.z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), y = \mathrm{Im}.z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

لنحصل على:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4}(z+\bar{z})^2 - \frac{-1}{4}(z-\bar{z})^2 + \frac{1}{2i}(z+\bar{z})(z-\bar{z})i \\ &= \frac{1}{4}(2z^2 + 2\bar{z}^2) + \frac{1}{2}(z^2 - \bar{z}^2) \\ &= z^2 \end{aligned}$$

وبما أننا تخلصنا من $\bar{z}$ فإنها تكون تحليلية (لاحظ كذلك أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق على كل الأعداد المركبة وبالتالي فهي صحيحة فضلاً عن كونها تحليلية).

ولكن الدالة:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{4}(z+\bar{z})^2 + (z+\bar{z}) + \frac{1}{4}(z-\bar{z})^2 + (z-\bar{z}) \\ &= \frac{1}{4}(4z\bar{z}) + 2z \\ &= z(\bar{z}+2) \end{aligned}$$

وهذه الدالة تعتمد على $\bar{z}$ وحيث إن:

$$\bar{z} = \frac{g(z)}{z} - 2$$

فإذا فرضنا أن $g(z)$ تحليلية فإن:

$$\left(\frac{g(z)}{z} - 2\right)$$

تحليلية على كل الأعداد المركبة ما عدا $z = 0$ ومن ثمَّ فإن $\bar{z}$ تحليلية على كل الأعداد المركبة ما عدا $z = 0$ ولكن هذا ليس صحيحاً. انظر مثال (١٦). لذلك لا تكون الدالة تحليلية.

على أن هذه الطريقة في الكشف عن الدالة التحليلية وغير التحليلية تواجه عدة عقبات منها قد لا يكون من السهل التعبير عن الدالة بدلالة z و $\bar{z}$ خاصة إذا احتوت الدالة في تركيبها على الدول المثلثية والأسية وغير ذلك. وعقبة أخرى قد لا يكون من السهل تبسيط الدالة لنعرف اعتماد الدالة على $\bar{z}$. وهناك نوع من الدوال تكون تحليلية على منطقة ما ولا تكون تحليلية على مكملتها وليس من السهل التعرف على حدود هذه المنطقة، للتغلب على العقبات جميعها ولذلك نحتاج إلى ما يسمى معادلتي كوشي وريمان، وهذا ما خصص له البند التالي.

المبرهنة التالية تلخص خصائص الدوال التحليلية ونذكرها دون برهان.

مبرهنة (٧):

لتكن الدالتان f و g تحليليتين على المجال D فإن الدوال $f \pm g$ و $f \cdot g$ تحليلية على المجال D وإذا فرض أن الدالة g ليست معدومة على أي نقطة في المجال D فإن f/g كذلك تحليلية.

يترك البرهان للقارئ.

٢ . ٤ . معادلتا كوشي . ريمان:

(Cauchy – Riemann Equation):

إن حقيقة كون دالة $f = u + vi$ تحليلية تفرض علاقة ما بين المشتقات الجزئية للدوال الحقيقية ذات المتغيرين u و v والتي تتكوّن منها الدالة f. في هذا البند سنعرف كنه (جوهر) هذه العلاقة، ونبحث الربط بين تحقيق هذه العلاقة وكون الدالة تحليلية.

التعريف التالي يبيّن العلاقة المذكورة التي تسمى معادلتي كوشي وريمان نسبة للعالم الفرنسي كوشي والعالم الألماني ريمان Cauchy – Reimann.

تعريف (٦):

نفرض أن $f = u + vi$ فإن المعادلتين:

$$u_x = v_y \ , \ u_y = - v_x \qquad (13)$$

تسميان معادلتي كوشي ريمان، حيث إن u_x, u_y, v_x, v_y ترمز للمشتقات الجزئية للدالتين u و v بالنسبة للمتغيرين x و y على الترتيب.

المبرهنة التالية تؤكد أن معادلتي كوشي ريمان شرط لازم لكون الدالة f تحليلية.

مبرهنة (٨):

إذا كانت الدالة المركبة $f = u + vi$ تحليلية على المجال D فإن الدالتين u و v قابلتان للاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتغيرين x و y، وتحققان معادلتي كوشي . ريمان (13) كما أن قيمة المشتقة f' تحقق المساواة:

$$f' = u_x + v_x i$$

البرهان:

بما أن الدالة f تحليلية على المجال D فإن f' موجودة عند كل نقطة في المجال D وبفرض أن $z_0 \in D$ فإن:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$f'(z_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x + yi - (x_0 + y_0 i)}$$

$$f'(z_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + iv\big((x,y) - (x_0,y_0)\big)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

وبما أن $f'(z_0)$ موجودة فإن كل مسارات اقتراب (x, y) من (x_0, y_0) تعطي نفس القيمة للنهاية، لذلك نفرض أن $\Delta z = z - z_0$ حقيقية ومن ثمَّ يكون $z - z_0 = x - x_0$ وعندها فإن:

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

ومن ذلك فإن:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \qquad (14)$$

وإذا فرضنا أن $\Delta z = z - z_0$ تخيلية فإن $z - z_0 = i(y - y_0)$ ومن ثمَّ ينتج أن:

$$f'(z_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y\to y_0} \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{i(y - y_0)}$$
$$= -iu_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0)$$

أي إن:

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \qquad (15)$$

وبالمقارنة بين (14) و (15) ينتج أن:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \ , \ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

وهما معادلتا كوشي . ريمان، حيث تكتب للتبسيط على الصيغة:

$$u_x = v_y \ , \ u_y = -v_x$$

وهذا يفيد كذلك أن المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة، وتحقق معادلتي كوشي . ريمان في الوقت نفسه.

بما أن تحقق معادلتي كوشي ريمان شرط ضروري لكون الدالة f تحليلية، يعني أنه إذا لم تتحقق معادلتا كوشي . ريمان فإن الدالة ليست قابلة للاشتقاق. أما إذا تحققت معادلتا كوشي . ريمان فإن ذلك لا يكفي لكون الدالة قابلة للاشتقاق كما يوضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال (٢٢):

بيِّن باستخدام معادلتي كوشي . ريمان أن الدالة $f(z) = \bar{z}$ ليست تحليلية.

الحل:

بما أن $f(z) = x - yi$ فإن $u(x,y) = x$ و $v(x,y) = -y$

ومن ذلك فإن:

$$u_x = 1 \ , \ u_y = 0 \ , \ v_x = 0 \ , \ v_y = -1$$

وبما أن $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ لجميع قيم $z = x + yi$

فإن الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند أي عدد مركب ومن ثمَّ ليست تحليلية.

مثال (٢٣):

بيِّن أن معادلتي كوشي . ريمان متحققة للدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

عند النقطة $z = 0$ ولكنها ليست قابلة للاشتقاق عند $z = 0$.

الحل:

نحاول باستخدام التعريف إيجاد المشتقة f' عند $z = 0$ لنجد أن:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^2$$

وبجعل المتغير z يقترب من 0 بمسارين: الأول المحور الحقيقي x والثاني المحور التخيلي y فإن:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^2 = \begin{cases} 1, & \bar{z} = z \\ -1, & \bar{z} = -z \end{cases}$$

وهذا يؤكد أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $z = 0$ وبالمقابل نجد v, u للدالة f حيث:

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \frac{\left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(-3x^2y + y^3\right)}{x^2 + y^2}$$

ومن ذلك فإن:

$$u(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, v(x,y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

وبتطبيق تعريف المشتقة فإن:

$$u_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

وبالمثل يمكن إيجاد كلٍّ من:

$$u_y(0, 0) = 0, v_x(0,0) = 0$$

وكذلك $v_y(0,0) = 1$. وبالمقارنة نجد أن هذه المشتقات الجزئية تحقق معادلتي كوشي - ريمان. لاحظ أن كلاً من u_x, u_y, v_x, v_y ليس مستمراً عند $z = 0$.

نستنتج من ذلك أن تحقق معادلتي كوشي - ريمان ليس كافياً لكون الدالة قابلة للاشتقاق. المبرهنة التالية تناقش الشروط الكافية.

مبرهنة (٩):

نفرض أن المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y للدالتين u, v موجودة مستمرة عند z_0. فإذا حققت هذه المشتقات الجزئية معادلتي كوشي . ريمان فإن الدالة $f = u + vi$ قابلة للاشتقاق عند z_0 وقيمة المشتقة عندئذ هي:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

وإذا كانت قد تحققت هذه الشروط على جوارٍ مفتوح يحتوي z_0 فإن الدالة f تحليلية عند z_0.

البرهان:

لإيجاد قيمة المشتقة نحسب قيمة الكسر:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \qquad (16)$$

$$=\frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta z}+i\frac{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta z}$$

ولتبسيط العمليات الحسابية نجد قيمة البسط للكسر الأول في الطرف الأيمن:

$$\begin{aligned}\{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)\} &= \{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\\ &\quad -u(x_0,y_0+\Delta y)+u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)\}\\ &= \Delta x\left\{\frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\right\}+\\ &\quad +\Delta y\left\{\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}\right\}\end{aligned}$$

وبما أن المشتقات الجزئية u_x, u_y موجودة عند z_0 فإن مبرهنة القيمة الوسطى تؤكد وجود عددين x^*, y^* في الفترتين $[y_0, y_0+\Delta y]$، $[x_0, x_0+\Delta x]$ على الترتيب بحيث إن:

$$\frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta x}=u_x(x^*, y_0+\Delta y),$$

$$\frac{u(x_0, y_0+\Delta y)-u(x_0, y_0)}{\Delta y}=u_y(x_0, y^*)$$

ومن ذلك نحصل على ما يلي:

$$\{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0, y_0)\}=\Delta x u_x(x^*, y_0+\Delta y)+\Delta y u_y(x_0, y^*)$$

وبالاستفادة من كون المشتقات الجزئية مستمرة، يمكن كتابة:

$$u_x(x^*, y_0+\Delta y)=u_x(x_0, y_0)+\in_1$$

حيث إن $\in_1 \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ وكذلك:

$$u_y(x_0, y^*)=u_y(x_0, y_0)+\in_2$$

حيث إن $\in_2 \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ومن ذلك ينتج:

$$\{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0, y_0)\}$$
$$=\Delta x\{u_x(x_0, y_0)+\in_1\}+\Delta y\{u_y(x_0, y_0)+\in_2\} \qquad (17)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0, y_0)\}$$
$$=\Delta x\{v_x(x_0, y_0)+\in_3\}+\Delta y\{v_y(x_0, y_0)+\in_4\} \qquad (18)$$

حيث إن $\in_3 \to 0,\ \in_4 \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ وبتعويض (17) و (18) في الكسر (16) نحصل على ما يلي:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta z}\{u_x+\in_1\}+\frac{\Delta y}{\Delta z}\{u_y+\in_2\}$$
$$+i\frac{\Delta x}{\Delta z}\{v_x+\in_3\}+i\frac{\Delta y}{\Delta z}\{v_y+\in_4\}$$
$$=\frac{\Delta x}{\Delta z}\{u_x+iv_x\}+\frac{\Delta y}{\Delta z}\{u_y+iv_y\}+\frac{\alpha}{\Delta z}$$

حيث إن:

$$\alpha = \Delta x\,(\epsilon_1 + i\epsilon_3) + \Delta y\,(\epsilon_2 + i\epsilon_4)$$

وبما أن $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le 1$ فإن:

$$\left|\frac{\alpha}{\Delta z}\right| \le \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|\left|\epsilon_1 + i\,\epsilon_3\right| + \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\left|\epsilon_2 + i\,\epsilon_4\right| < \left|\epsilon_1 + i\,\epsilon_3\right| + \left|\epsilon_2 + i\,\epsilon_4\right|$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha}{\Delta z} = 0$$

وبذلك ينتج أن:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta z}(u_x + iv_x) + \frac{\Delta y}{\Delta z}(u_y + iv_y) \right\} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha}{\Delta z}$$

وبالاستفادة من كون المشتقات الجزئية تحقق معادلتي كوشي ـ ريمان حيث:

$$u_x = v_y \,,\; u_y = -v_x$$

فإن:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta z}(u_x + iv_x) + \frac{\Delta y}{\Delta z}(-v_x + iu_x) \right\}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta z}(u_x + iv_x) + i\frac{\Delta y}{\Delta z}(u_x + iv_x) \right\}$$

$$= (u_x + iv_x) \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta z}$$

$$= u_x + iv_x$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

هذه المبرهنة تبيِّن أنه حتى تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة لا بد (بالإضافة لتحقق معادلتي كوشي . ريمان) من كون المشتقات الجزئية مستمرة فضلاً عن وجودها عند النقطة.

مثال (٢٤):

بالاستعانة بالمبرهنة السابقة ناقش أين تكون الدالة f تحليلية أو قابلة للاشتقاق حيث:

$$f(z)=\left(\frac{1}{3}x^3+y\right)+i\left(\frac{1}{2}y^2-x\right)$$

يترك الحل للقارئ.

مثال (٢٥):

وضح أن الدالة:

$$f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$$

تكون صحيحة.

الحل:

يجب أن نختبر أولاً استمرار المشتقات الجزئية:

$$v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy \quad \text{و} \quad u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

وتحقق معادلتي كوشي . ريمان عند جميع نقاط C من الواضح أن:

$$u_x=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy)=v_y$$

وأن:

$$-u_y=2e^{x^2-y^2}(y\cos 2xy+x\sin 2xy)=v_x$$

دوال مستمرة في C وعليه فإن f(z) صحيحة.

مثال (٢٦):

صف المنطقة التي تكون عندها الدالة f تحليلية:

$$f(z) = \frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}$$

الحل:

المشتقات الجزئية الأولى لكل من $u = \mathrm{Re}f$ و $v = \mathrm{Im}\, f$ تحقق:

$$u_x = \frac{y^2-(x-1)^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2} = v_y$$

$$u_y = \frac{-2y(x-1)}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2} = -v_x$$

هذه الدوال مستمرة لجميع $z \neq 1$. لاحظ أن $f(z)$ غير معرفة عند $z = 1$ ومن ثمَّ فإن $f(z)$ تحليلية لجميع $z \neq 1$.

عرفنا أنه في حالة المتغير الحقيقي وفي دراستنا لمبادئ التفاضل والتكامل، وعندما تكون مشتقة الدالة تساوي صفراً على فترة معينة، فإن الدالة تكون ثابتة على تلك الفترة. ونفس النتيجة تكون صحيحة في حالة المتغير المركب.

٤.٢ .١. مبرهنة (١٠): (مبرهنة المشتقة الصفرية Zero derivative theory):

إذا كانت f تحليلية على منطقة G و $f'(z) = 0$ عند كل نقطة z من G. فإن f تكون ثابتة على G ويبقى الاستنتاج صحيحاً إذا كانت أي من $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f, |f|$ أو $\arg f$ ثابتاً على G.

البرهان:

بما أن $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$ فإن انعدام المشتقة يؤدي إلى أن: $v_x = -u_y$ و $u_x = v_y$ كلاهما يساوي الصفر. إذن u و v مقداران ثابتان على المستقيمات الموازية

لمحوري الإحداثيات، وبما أن G مترابطة، بمعنى أنه يمكن وصل أي نقطتين فيها بمضلع، فإن $f = u + iv$ ثابتة على G.

إذا كانت u (أو v) ثابتة، فإن $v_x = -u_y = 0 = u_x = v_y$ ومنه نجد أن:

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = 0$$

وبالتالي فإن f ثابتة.

إذ كان $|f|$ مقداراً ثابتاً، فإن $|f|^2$ أيضاً ثابت، ومن المساواة:

$$|f|^2 = u^2 + v^2$$

يتضح أن: $uu_x + vv_x = 0$ و $uu_y + vv_y = vu_x - uv_x = 0$

بحل هاتين المعادلتين في u_x, v_x نجد أن $u_x = v_x = 0$ ما لم يكن $u^2 + v^2 = 0$ وبما أن $|f|^2 = u^2 + v^2$ مقدار ثابت، فإنه إذا كان $u^2 + v^2 = 0$ عند نقطة واحدة، فإن $|f|$ عدد ثابت يساوي الصفر، وأن f تكون مطابقة للصفر. وما عدا ذلك فإن المشتقة تساوي الصفر وتكون f ثابتة.

إذا كان $\arg f = c$ فإن $f(G)$ تكون واقعة على الخط المستقيم $v = (\tan c) . u$ ما لم يكن $u = 0$، وفي هذه الحالة نكون قد انتهينا. ولكن $(1 - i \tan c) f$ تحليلية و:

$$\operatorname{Im}(1 - i \tan c) f = v - (\tan c) u = 0,$$

وهذا يؤدي إلى أن $(1 - i \tan c)f$ مقدار ثابت، وعليه تكون الدالة f ثابتة أيضاً.

٢ . ٥ . التوابع التوافقية:

تعريف (٧):

نقول إن الدالة $u = u(x, y)$ توافقية في المنطقة D من المستوي العقدي إذا كان قابلاً للاشتقاق في المنطقة D ومشتقاته الجزئية مستمرة في D، وتحقق معادلة لابلاس الآتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

وذلك في كل نقطة من D.

مثال (٢٧):

برهن أن التابع $u = u(x, y) = 3x - 3xy$ توافقي في المستوي العقدي.

الحل:

إن التابع المعطى هو كثير حدود بمتحولين فهو معرف ومستمر وقابل للاشتقاق ومشتقاته الجزئية مستمرة في كل نقطة من المستوي العقدي، وكذلك نجد أن:

$$u_x = 3 - 3y \; ; \; u_{xx} = 0,$$
$$u_y = -3x \; ; \; u_{yy} = 0$$

ومنه نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

وهذا يعني أن الدالة $u(x, y)$ توافقية في المستوي العقدي.

مبرهنة (١٢):

إذا كان $f(z) = u + iv$ تحليلياً في المنطقة D من المستوي العقدي، فإن الدالتين u, v توافقيتان في المنطقة D.

البرهان:

بما أن التابع $f(z)$ تحليلي في المنطقة D فإن u, v يحققان معادلتي كوشي - ريمان، ومنه:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

وبما أن المشتقات الجزئية مستمرة فرضاً، فإنّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وبشكل مماثل نجد أن:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

نسمي كلاً من التابعين u, v مرافقاً توافقياً للآخر، وإذا أُعطينا أحدهما نستطيع أن نجد مرافقاً توافقياً له بحيث يكون التابع $f(z) = u + iv$ تحليلياً وذلك بالاعتماد على معادلتي كوشي . ريمان.

مثال (٢٨):

بيّن أن التابع $u = u(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 2xy - y$ توافقي في المستوي العقدي، وأوجد مرافقاً توافقياً له v بحيث يكون التابع: $f(z) = u + iv$ تحليلياً ثم عبر عن $f(z)$ بدلالة z.

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 2y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 2x - 1, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4$$

وهذه المشتقات مستمرة وتحقق معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 + (-4) = 0$$

إذا كان $v(x, y)$ مرافقاً توافقياً لـ u بحيث يكون $f(z) = u + iv$ تحليلياً فإنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ومنه $\frac{\partial v}{\partial y} = 4x - 2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 4y + 2x + 1$، وبالمكاملة نجد:

$$v(x, y) = \int (4x - 2y)dy + g(x) = 4xy - y^2 + g(x)$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد $\frac{\partial v}{\partial x} = 4y + g'(x)$، ومنه:

$4y + 2x + 1 = 4y + g'(x)$، أي إن $g'(x) = 2x + 1$ وبالمكاملة نجد:

$$g(x) = x^2 + x + c$$

إذن: $v = v(x, y) = 4xy - y^2 + x^2 + x + c$، والتابع $f(z)$ هو:

$$f(z) = u + iv = 2(x^2 - y^2) - 2xy - y + i(x^2 - y^2 + 4xy + x + c)$$

لنوجد $f(z)$ بدلالة z:

$$f(z) = 2(x^2 + 2xyi - y^2) + i(x^2 + 2xyi - y^2) + i(x + iy) + ic$$
$$= 2z^2 + iz^2 + iz + ic = (2 + i)z^2 + iz + ic$$

مثال (٢٩):

أوجد التابع التحليلي $f(z) = u + iv$ إذا علمت أن القسم التخيلي هو:

$$v = v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$$

الحل:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -4y, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4 - 4 = 0$$

لنعين الآن المرافق التوافقي $u = u(x, y)$، فمن معادلتي كوشي . ريمان نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y, \frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1$$

بالمكاملة نجد:

$$u = u(x, y) = -4\int y dx = -4xy + \varphi(y)$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة لـ y نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1$$

وهذا يعني أن:

$$\varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + c$$

إذن:

$$u = u(x, y) = -4xy - y + c$$

ومن ثمَّ يكون التابع التحليلي $f(z)$ هو:

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= -4xy - y + c + i(2x^2 - 2y^2 + x) \\ &= 2i\,(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + c \\ &= 2iz^2 + iz + c \end{aligned}$$

٢ . ٦ . تمارين محلولة:

أولاً: أوجد نهاية الدالة $f(z)=\dfrac{z^4-1}{z^2+1}$ عند $z=i$.

الحل:

$$\lim_{z\to i}\frac{z^4-1}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{(z^2-1)(z^2+1)}{(z^2+1)}=\lim_{z\to i}(z^2-1)=-2$$

ثانياً: احسب النهايات التالية:

$$\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{z-e^{\frac{\pi}{3}i}}{z^3+1}\quad;\quad\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}\quad;\quad\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}$$

الحل:

التابعان $f_1(z)=z-e^{\frac{\pi}{3}i};f_2(z)=z^3+1$ تحليليان.

وكذلك فإنّ $f_1(e^{\frac{\pi}{3}i})=0;f_2(e^{\frac{\pi}{3}i})=0$، ومنه:

$$\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{z-e^{\frac{\pi}{3}i}}{z^3+1}=\frac{0}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

عدم تعيين لذا نطبق قاعدة أوبيتال:

$$\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{z-e^{\frac{\pi}{3}i}}{z^3+1}=\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{1}{3z^2}=\frac{1}{3e^{\frac{2\pi}{3}i}}=\frac{5}{14}-\frac{\sqrt{3}}{14}i$$

بالنسبة إلى النهاية الثانية:

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}=\frac{0}{0}$$

عدم تعيين، نطبق قاعدة أوبيتال:

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^{6}+1}=\lim_{z\to i}\frac{10z^{9}}{6z^{5}}=\frac{10i}{6i}=\frac{5}{3}$$

بالنسبة للنهاية الثالثة:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^{2}}=\frac{0}{0}$$

نطبق قاعدة أوبيتال:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z\cos z^{2}}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{2\cos z^{2}}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\cos z^{2}}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ثالثاً: ادرس استمرارية الدالة:

$$f(z)=\begin{cases} z+1; & z\neq i \\ i+1; & z=i \end{cases}$$

عندما $z_0=i$.

الحل:

(١) الدالة معرفة في النقطة z_0.

(٢) للدالة نهاية في هذه النقطة ولتكن $\lim_{z\to z_0} f(z)$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_i}(z+1)=1+i$$

(٣) النهاية تساوي قيمة هذه الدالة في النقطة z_0 أي إن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\Rightarrow \lim_{z\to z_i} f(z)=1+i=f(i)$$

ومن ثمَّ فإن الدالة مستمرة في النقطة $z=i$.

رابعاً: ادرس استمرارية الدالة:

$$f(z)=\begin{cases} z^2; & z\neq i \\ 0; & z=i \end{cases}$$

عند النقطة $z=i$.

الحل:

نلاحظ ما يلي:

(١) الدالة معرفة في النقطة $z=i$ وحيث $f(i)=0$

(٢) للدالة نهاية عندما $z\to i$ وهي $\lim\limits_{z\to i} f(z)=-1$

(٣) $\lim\limits_{z\to i} f(z)=-1\neq 0=f(i)$

ومن ثمَّ فإن الدالة غير مستمرة في النقطة $z=i$.

خامساً: أثبت أن $\lim\limits_{z\to 3}\dfrac{z-1}{z-2}=2$

الحل:

بتبسيط المقدار $|f(z)-A|$ نحصل على:

$$|f(z)-A|=\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|=\left|\frac{3-z}{z-2}\right|<\frac{\delta}{|z-2|}$$

حيث افترضنا أن $0<|z-3|<\delta$ مع وجوب حساب δ بدلالة ε. إذا كان $\delta<\dfrac{1}{2}$

باستخدام المتراجحة المتباينة المثلثية نحصل على:

$$|z-2|=|1-(3-z)|\geq 1-|3-z|>1-\delta>\frac{1}{2}$$

عندئذ:

$$\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|<2\delta$$

وعليه، إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، نختار: $\delta < \min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\varepsilon\right)$

فنجد:

$$\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|<\varepsilon$$

سادساً: برهن أن الدالة: $u(x, y) = e^y \cos x$ دالة توافقية، ثم أوجد الدالة $v(x,y)$ المرافقة لها ثم أوجد الدالة $f(z) = u + iv$ ثم احسب مشتقها.

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^y \sin x;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^y \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^y \cos x;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^y \cos x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية حتى المرتبة الثانية موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس التفاضلية الجزئية ومن ثمَّ الدالة u توافقية.

إيجاد المرافق التوافقي:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^y \sin x=\frac{\partial v}{\partial y}$$

نكامل بالنسبة لـ y:

$$v(x,y)=-e^y \sin x+\phi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{y}\cos x + \phi'(x) = \frac{-\partial u}{\partial y}$$

$$-e^{y}\cos x + \phi'(x) = -e^{y}\cos x$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = c$$

$$\Rightarrow v(x, y) = -e^{y}\sin x + c$$

$$f(z) = u + iv$$

$$= e^{y}\cos x - ie^{y}\sin x + ic$$

$$= e^{y}(\cos x - i\sin x) + ic$$

$$= e^{y-ix} + ic = e^{-i(x+iy)} + ic$$

$$f(z) = e^{-iz} + ic$$

$$f'(z) = -ie^{-iz}$$

سابعاً: برهن أن كلاً من الدوال التالية تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي:

أ. $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

$$u(x, y) = 3x + y\ ,\ v(x, y) = 3y - x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية للدالتين u, v موجودة ومستمرة حتى المرتبة الأولى وتحقق شرطي كوشي وريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

إذاً f تحليلية في C.

ب. $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$

$$f(z) = e^{-y}\cos x + i\,e^{-y}\sin x$$

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x$$
$$v(x, y) = e^{-y} \sin x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x; \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y} \cos x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y} \cos x; \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \sin x$$

إذن شروط كوشي وريمان محققة ومن ثمَّ فإن f تحليلية.

جـ. $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$$
$$v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y$$

إن المشتقات الجزئية حتى المرتبة الأولى للدالتين u و v موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي وريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\partial u}{\partial y}$$

إذاً الدالة f تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي.

ثامناً: أثبت أن الدالة $f(z) = 2z + i$ قابلة للمفاضلة في كل المستوي العقدي C وأن $f(z) = |z|$ وكذلك $f(z) = \bar{z}$ قابلة للمفاضلة في النقطة $z = 0$.

الحل:

لدينا:

$$f(z) = 2z + i = 2(x + iy) = 2x + i(2y + 1) = u + iv$$

$$\Rightarrow u = 2x \text{ and } v = 1 + 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ ; \ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

نلاحظ أن شرطي كوشي وريمان محققان لكل (x, y) والدالة $f(z)$ قابلة للمفاضلة في كل المستوي المركب C.

أما بالنسبة للدالة $f(z) = \bar{z}$ فلدينا:

$$f(z) = \bar{z} = x - iy = u + iv \Rightarrow u = x \ ; \ v = -y$$

وعليه فإن الشرط $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ لا يتحقق إلا في النقطة $(0, 0)$ وهذا يعني أن $\bar{z}$ قابل للمفاضلة في النقطة $z = 0$ فقط.

أخيراً:

$$f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = u + iv \Rightarrow u = \sqrt{x^2 + y^2} \ ; \ v = 0$$

وبنفس الأسلوب نجد أن أحد شرطي كوشي . ريمان يتحقق فقط في النقطة $(0, 0)$.

٢ . ٧ . تمارين غير محلولة:

أولاً: اكتب الدوال التالية على الشكل $w = u(x, y) + iv(x, y)$:

أ . $f(z) = 2z^2 - 3z + i$

ب . $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

جـ . $f(z) = \dfrac{z-i}{z+4}$

د . $f(z) = |z|$

هـ . $f(z) = 2i\bar{z}$

و . $f(z) = \mathrm{Arg}(z^2)$

ثانياً: أوجد مجال تعريف كل دالة في التمرين السابق.

ثالثاً: اكتب الدوال التالية بدلالة z و $\bar{z}$.

أ . $w = x^2 + y^2 - 2xy + i\,(x - x.y)$

ب . $w = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

رابعاً: لنعرّف الدالة f بالمساواة:

$$f(z) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{y}i$$

أ . أوجد مجال تعريف f.

ب . بيِّن أن f تتوافق مع الدالة:

$$g(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) + i\left(\int_0^{\infty} e^{-yt}dt\right)$$

في المجال $-1 < \mathrm{Re}.z < 1$ و $\mathrm{Im}.\,z > 0$.

خامساً: أوجد صورة المجموعة $S = \{z: 0 < |z| < 1\}$ تحت الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

سادساً: لتكن الدالة f معرفة بالمساواة:

$$f(z) = (2 + i)\, z + (1 - 2i)$$

أوجد $f(S)$ في الحالات التالية:

أ. $S = \{z \in C: \operatorname{Re} z \le 1\}$

ب. $S = \{z \in C: y = 1 + 2x\}$

جـ. $S = \{z \in C: |z - i| \le 1\}$

د. $S = \{z \in C: x^2 + y^2 = 4\}$

سابعاً: استخدم تعريف ε - δ للنهاية لإثبات التمارين من (١) إلى (١٠):

(١) $\lim\limits_{z \to 1} 2z = 2$ (٢) $\lim\limits_{z \to i} iz = -1$

(٣) $\lim\limits_{z \to -i} z + i = 0$ (٤) $\lim\limits_{z \to i} (z^2 + 1) = 0$

(٥) $\lim\limits_{z \to 1+i} 2z - 3 = -1 + 2i$ (٦) $\lim\limits_{z \to 1+i} z^2 = 2i$

(٧) $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{z^2 - 4}{z - 2} = 4$ (٨) $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{z^2 + 1}{z + i} = -2i$

(٩) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$ (١٠) $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{z^2 - 3z + 4}{z - 2} = 1$

ثامناً: أثبت أن الدوال في التمارين من (١١) إلى (١٤) دوال مستمرة في C:

(١١) $w = \operatorname{Re} z$ (١٢) $w = \operatorname{Im} z$

(١٣) $w = \bar{z}$ (١٤) $w = |z|$

تاسعاً: لنفرض أن $f(z)$ دالة مستمرة على المنطقة G، أثبت أن الدوال في التمارين من (١٥) إلى (١٨) مستمرة على G:

(١٥) $\operatorname{Re} f(z)$ (١٦) $\operatorname{Im} f(z)$

(١٧) $|f(z)|$ (١٨) $f(\bar{z})$

عاشراً: عند أي النقاط تكون الدالة:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-1}{z^2-1}, & z\neq\pm1\\ \dfrac{3}{2}, & z=\pm1\end{cases}$$ مستمرة؟

حادي عشر: أثبت أن الدوال في التمارين من (٢٠) إلى (٢٣) تكون مستمرة من أجل $z\neq 0$. هل يمكن تعريف الدالة عند $z=0$ حتى تكون مستمرة؟

(٢٠) $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Re} z}{|z|^2}$ (٢١) $f(z)=\dfrac{|z|^2}{z}$

(٢٢) $f(z)=\dfrac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{|z|^2}$ (٢٣) $f(z)=\dfrac{(\operatorname{Re} z)^2-(\operatorname{Im} z)^2}{|z|^2}$

ثاني عشر: في المسائل من (١) إلى (٤) أثبت أن كل دالة تحقق معادلتي كوشي . ريمان:

(١) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$

(٢) $f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

(٣) $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

(٤) $f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$

ثالث عشر: باستخدام قواعد الاشتقاق، أوجد المشتقات المركبة للدوال في المسائل من (٥) إلى (٨):

(٥) $f(z)=18z^3-\frac{z^2}{4}+4z+8$

(٦) $f(z)=(2z^3+1)^5$

(٧) $f(z)=\frac{z+1}{z-1}, z\neq 1$

(٨) $f(z)=z^3(z^2+1)^{-2}, z\neq \pm i$

رابع عشر: لنفترض أن f, g دالتان تحليليتان معرفتان على المنطقة G. أثبت قواعد الاشتقاق المذكورة في التمرينين (٩) و (١٠).

(٩) $(f\pm g)'=f'\pm g'$

(١٠) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}$, $g(z)\neq 0$ لكل z في G.

(١١) بين أن النسبة $P(z)\ /\ Q(z)$ لكثيرتي حدود، لها مشتقة عند كل نقطة؛ حيث $Q(z)\neq 0$.

خامس عشر: مستخدماً معادلتي كوشي . ريمان، أثبت أن الدوال في التمارين من (١٢) إلى (١٥) لا يوجد لها مشتقة عند أي نقطة في C.

(١٢) $f(z)=\bar{z}$ (١٣) $f(z)=\operatorname{Re} z$

(١٤) $f(z)=\operatorname{Im} z$ (١٥) $f(z)=|z|$

سادس عشر: استخدم معادلتي كوشي . ريمان، وتعريف المشتقة لتعيين المنطقة التي تكون فيها الدوال في التمارين من (١٦) إلى (١٩) قابلة للاشتقاق:

(١٦) $f(z)=\bar{z}^2$ (١٧) $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$

(١٨) $f(z)=\bar{z}\operatorname{Re} z$ (١٩) $f(z)=z\operatorname{Im} z$

سابع عشر: أثبت قاعدة السلسلة للتفاضل:

$$[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z)$$

مع الافتراض أن كلاً من f و g صحيحة.

ثامن عشر: باستخدام قاعدة السلسلة أثبت أن دالة صحيحة لدالة صحيحة هي دالة صحيحة.

تاسع عشر: إذا كانت جميع أصفار كثيرة الحدود $P(z)$ لها جزء حقيقي سالب. أثبت أن الأمر نفسه صحيح لكل أصفار $P'(z)$.

(إرشاد: حلل $P(z)$، اعتبر $P'(z)/P(z)$).

عشرون: إذا عُبّر عن v و u بدلالة الإحداثيين القطبيين (r, θ)، بين أن معادلتين كوشي . ريمان يمكن كتابتهما على الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad , \quad r \neq 0$$

حادٍ وعشرون: أثبت أن الدالة:

$$f(z) = r^5 (\cos 5\theta + i \sin 5\theta)$$

تحقق معادلتي كوشي . ريمان في الشكل القطبي لجميع $z \neq 0$.

ثانٍ وعشرون: في التمارين ١ . ١٠ أوجد قيمة النهاية (إن وجدت):

١ . $\lim\limits_{z \to (i+1)} \dfrac{z^2 + z - 3}{z + 1}$

٢ . $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^3 + i}{z - 1}$

٣ . $\lim\limits_{z \to 4i} \dfrac{z^2 + 16}{z - 4i}$

٤. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^4-1}{z^2+1}$

٥. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{|z|^2}{z}$

٦. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$

٧. $\lim\limits_{z\to +i}\dfrac{1}{1-\mathrm{Re}.z}$

٨. $\lim\limits_{z\to -1}(\mathrm{Arg}.z)$

٩. $\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{z^2+1}{z-2}$

١٠. $\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$

ثالث وعشرون: في التمارين ١١ . ١٦ أوجد جميع نقاط الاستمرار للدالة المذكورة:

١١. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3+8i}{z-2i}, & z\neq 2i\\ -2i, & z=2i\end{cases}$

١٢. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|z|^2}, & |z|\neq 1\\ 0, & |z|=1\end{cases}$

١٣. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

١٤. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

١٥. $$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x-iy}{|z|-1}, & |z|\neq 1\\ i, & |z|=1\end{cases}$$

١٦. $$f(z) = ye^{x} + x^{2}\, e^{-y} \,.\, i$$

رابع وعشرون: باستخدام قوانين الاشتقاق أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

أ. $$f(z) = 3z^{2} - iz + (1 - 2i)$$

ب. $$f(z) = (2i + z^{2})^{4}$$

جـ. $$f(z)=\frac{i-z}{i+z}$$

د. $$f(z)=\frac{(z+2)^{2}}{(iz^{2}+z-3i)^{3}}$$

هـ. $$f(z) = 3i\,(z^{3} - i)^{2}\,(z + 1)^{5}$$

و. $$f(z)=\sqrt{z^{3}}$$

خامس وعشرون: باستخدام تعريف المشتقة ناقش قابلية الاشتقاق ثم كوّنها تحليلية أم لا لكل من الدوال التالية:

أ. $$f(z)=\bar{z}^{2}$$

ب. $$f(z)=|z|^{2}$$

جـ. $$f(z) = \mathrm{Re.}\ z$$

د. $$f(z) = \mathrm{Im.}\ z$$

هـ. $$f(z)=\frac{1}{z}$$

و. $$f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$$

سادس وعشرون: ابحث في كون الدالة تحليلية أو لا بالتعبير عن متغيرات الدالة بدلالة z و $\bar{z}$ وإمكانية التخلص من $\bar{z}$ في كل مما يلي:

أ. $f(z) = 2x + i(2y + 1)$

ب. $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + x + yi$

جـ. $f(z) = (x^3 - 3y^2x) + i(3x^2y - y^3)$

د. $f(z) = r^2 + \cos 2\theta + i \,.\, r^2 \sin 2\theta$

سابع وعشرون: استخدم قانون أوبيتال لإيجاد قيم النهايات الآتية:

أ. $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^3 + i}{z - i}$

ب. $\lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{z^4 - 16}{z - 2i}$

جـ. $\lim\limits_{z \to 1-i} \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z^2 + (3i - 1)z - 2(1 + i)}$

ثامن وعشرون: أعط مثالاً تبيّن فيه أن مبرهنة القيمة الوسطى للدوال الحقيقية ليست صحيحة في الدوال المركبة. أي أعط مثالاً لدالة f(z) قابلة للاشتقاق على مجال يحتوي على قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين z_1, z_2 في هذا المجال ولكن ليس صحيحاً لأن:

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(w)\,(z_2 - z_1)$$

اقتراح: خذ مثلاً الدالة $f(z) = z^3$

والنقاط: $z_1 = -1 - \sqrt{3}i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i$

تاسع وعشرون: أثبت أن كل من الدوال في التمارين من (١) إلى (٥) دالة صحيحة:

(١) $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$

(٢) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$$f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (٣)$$

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3) \quad (٤)$$

$$f(z) = \sin (x^2 - y^2) \cosh (2xy) + i \cos (x^2 - y^2) \sinh (2xy) \quad (٥)$$

ثلاثون: في التمارين من (٦) إلى (٨) اذكر المنطقة التي تكون فيها الدالة المذكورة تحليلية:

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (٦)$$

$$f(z) = \sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\sinh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\sinh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad (٧)$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right) + i\arctan\frac{y}{x} \quad (٨)$$

حادٍ وثلاثون: بين أن الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^{-3}}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

عند $z = 0$، تحقق معادلتي كوشي . ريمان، ولكن لا يوجد لها مشتقة.

ثم بين أن الدالة المعطاة بالشكل:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

تحقق معادلتي كوشي . ريمان عند النقطة $z = 0$. ولكن لا يوجد لها مشتقة عند تلك النقطة.

ثانٍ وثلاثون: إذا كان كل من $f(z) = u + iv$ و $\bar{f} = u - iv$ دالة تحليلية، أثبت أن f دالة ثابتة.

ثالث وثلاثون: لنفرتض أن $f(z) = u + iv$ دالة صحيحة ولنفترض أن $u.v$ ثابت. أثبت أن f دالة ثابتة.

رابع وثلاثون: إذا كان $f(z) = u + iv$ دالة صحيحة وأن $v = u^2$ ثابت. أثبت أن f دالة ثابتة.

خامس وثلاثون: إذا كان $f(z) = u + iv$ دالة صحيحة وأن $u^2 = v^2$. أثبت أن f دالة ثابتة.

سادس وثلاثون: لنفترض أن الدالة التحليلية f حقيقية على المنطقة G. أثبت أن f دالة ثابتة على G.

سابع وثلاثون: لنفترض أن $z_1 = 1$، $f(z) = z^3$ و $z_2 = i$ أثبت أنه لا يوجد نقطة z_0 على القطعة المستقيمة من z_1 إلى z_2 تحقق المساواة:

$$f(z_2) - f(z_1) = f(z_0)\,(z_2 - z_1)$$

يبين هذا أن مبرهنة القيمة المتوسطة للدوال الحقيقية لا تعمم إلى الدوال المركبة.

ثامن وثلاثون: إذا كان $z = x + iy$ بين أنه لا توجد دالة صحيحة تكون مشتقتها المقدار $f(z) = x$.

تاسع وثلاثون: برهن أن الدوال التالية ليست تحليلية عند أي نقطة في المستوي المركب:

أ. $f(z) = e^{\bar{z}}$ ب. $f(z) = e^{|z|^2}$

أربعون: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية، ثم أوجد المجال الذي تكون عليه الدالة تحليلية:

أ. $f(z) = e^{1/z}$ ب. $f(z) = z^2 e^z$

حادٍ وأربعون: بالاستعانة بقانون أوبيتال، برهن أن:

أ. $\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{z}=-1$ ب. $\lim_{z\to \frac{\pi}{2}i}\frac{e^z-i}{z-\frac{\pi}{2}i}=i$

ثانٍ وأربعون: بيِّن أن الدالة:

$$f(z)=\frac{\log(z-2+4i)}{z^2+4}$$

تحليلية على كل الأعداد الحقيقية باستثناء النقاط z التالية:

$$\{2i, -2i\} \cup \{z \in C: \text{Re. } z \le 2, \text{Im.} z = -4\}$$

ثالث وأربعون: برهن أن الدالة:

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\tan^{-1}(y/x)$$

تحليلية على كل الأعداد المركبة z بحيث إن $\text{Re. } z > 0$ ثم استنتج أن $\tan^{-1}(y/x)$ يمثل مرافقاً توافقياً للدالة التوافقية $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

رابع وأربعون: إذا كانت الدالة $v(x,y)$ تمثل المرافق التوافقي للدالة $u(x, y)$ فبيِّن أن الدالة:

$$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

تحليلية حيث إن:

$$U(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v\,(x,y)$$
$$V(x,y) = e^{u(x,y)} \sin v\,(x,y)$$

* * *

الفصل الثالث

الدوال الأولية المركبة

Elementary Complex Functions

في هذا الفصل نعرض لمفاهيم بعض الدوال المألوفة لدى القارئ في التفاضل والتكامل مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية بالإضافة إلى المثلثية والزائدية لنرى المفارقات في خصائص تلك الدوال عندما تعطى تعريفاً مركباً.

٣ . ١ . الدالة الأسية (Exponential Function):

$$\exp z = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y \qquad (1)$$

حيث إن e^x هي الدالة الأسية الحقيقية وكذلك $\cos\ y,\ \sin\ y$ الدوال المثلثية الحقيقية. وهذا التعريف يتوافق مع صيغة أولر إذا كانت $\text{Re. } z = 0$ حيث ينتج عندئذ:

$$\exp z = e^z = \cos y + i \sin y = e^{yi}$$

ومن دراستنا لخصائص الدالتين:

$$u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y \qquad (2)$$

نستطيع استنتاج خصائص الدالة e^z. سنركز على خصائص الدالة e^z التي تختلف عن خصائص الدالة الحقيقية e^x، أما الخصائص المشتركة لهما (أي الصحيحة في الحالتين) سنذكرها دون إثبات.

ومن أهم الخصائص للدالة المركبة e^z أنها دورية في حين أن الدالة الحقيقية e^x ليست كذلك. هذه الخاصية تثبتها المبرهنة التالية:

مبرهنة (١):

الدالة المركبة e^z دورية بدورة مقدارها $2\pi i$ وبالرموز فإن $e^z = e^w$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$z - w = 2n\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (3)$$

وبشكل خاص فإن $e^z = 1$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$z = 2n\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (4)$$

البرهان:

بتطبيق تعريف (١) نستنتج أن: $e^z = e^w$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$e^x e^{yi} = e^s e^{ti}$$

حيث إن $z = x + yi$، $w = s + ti$ ومن ذلك ينتج أن $x = s$ وكذلك $\cos y = \cos t$، $\sin y = \sin t$ وبما أن الدوال $\sin y, \cos y$ دوال دورية بدورة قدرها 2π فإن حل المعادلتين $\cos y = \cos t$، $\sin y = \sin t$ هو $y - t = 2n\pi$ ولكل عدد صحيح n، ومن ثمَّ فإن $e^z = e^w$ إذا وإذا فقط:

$$z - w = 2n\pi i \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وإذا فرضنا أن $w = 0$ سنحصل على المطلوب الآخر. وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

وبما أن هذه الدالة دورية فإنها تنقل بشكل واحد لواحد الشريط اللانهائي $0 \le \text{Im. } z < 2\pi$ إلى المستوي المركب $C - \{0\}$ ذلك أنه لا يوجد عدد مركب z بحيث إن $e^z = 0$.

المبرهنة التالية تبيّن العلاقة بين الدالة الأسية الحقيقية e^x والدالة الأسية المركبة e^z.

مبرهنة (٢):

الدالة الأسية الحقيقية e^x تمثل القيمة المطلقة للدالة الأسية المركبة e^z وبالرموز فإن:

$$|e^z| = e^x \qquad (5)$$

وكذلك:

$$\arg e^z = \text{Im. } z + 2n\pi \ , \ n = 0, \pm 1, \ldots \qquad (6)$$

البرهان:

بتطبيق التعريف (١) فإن:

$$|e^z| = |e^x e^{yi}| = e^x$$

وكذلك:

$$\arg e^z = \arg e^{yi}$$
$$= y + 2n\pi \ , \ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

المبرهنة التالية تجمع خصائص الدالة الأسية المشابهة لخصائص الدالة الأسية الحقيقية.

مبرهنة (٣):

لأي عددين مركبين z, w فإن:

أ. $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ (7)

ب. $(e^z)^n = e^{nz}$ (8)

جـ. $e^z/e^w = e^{z-w}$ (9)

د. الدالة e^z تحليلية على كل عدد مركب z (أي إنها دالة صحيحة) حيث:

$$\frac{d}{dz}\left(e^z\right) = e^z \qquad (10)$$

البرهان:

نبرهن الفرع (د) ونترك إثبات بقية الفروع تمريناً للقارئ ولذلك نستعين بمعادلتي كوشي . ريمان وحيث إن:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

فإن:

$$u = e^x \cos y \quad , \quad v = e^x \sin y$$

ومن ثمَّ فإن المشتقات الجزئية:

$$u_x = e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \sin y$$
$$v_x = e^x \sin y \quad , \quad v_y = e^x \cos y$$

موجودة ومستمرة وحيث إن $u_y = -v_x$، $u_x = v_y$ وهذا يعني أن الدالة e^z قابلة للاشتقاق عند كل عدد مركب z وبالتالي فإنها تحليلية على المستوي المركب أي إنها دالة صحيحة وكذلك:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

مثال (١):

أوجد جميع قيم z بحيث إن:

$$e^z = 1 + \sqrt{3}i$$

الحل:

إذا فرضنا أن $w = e^z$

فإن المبرهنة (٢) تؤكد أن:

$$|w| = e^x \ , \ \arg w = \text{Im. } z + 2n\pi$$

وبالتعويض عن قيمة w بالعدد المركب $1 + \sqrt{3}i$ فإن:

$$e^x = |w| = 2 \ , \ x = \ln 2$$
$$y = \text{Im. } z = \arg w + 2n\pi$$
$$= \arg\ (1 + \sqrt{3}i) + 2n\pi$$
$$= \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبالتالي ينتج أن:

$$z = x + yi = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)i \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

مثال (٢):

وبالمحافظة على عمومية الحل في المثال السابق فإن قيم z التي تحقق المعادلة:

$$e^z = w$$

هي:

$$z = \ln |w| + (\operatorname{Arg} w + 2n\pi)\, i, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (11)$$

مثال (٣):

ابحث تأثير الدالة $w = e^z$ في الخط المستقيم:

أ . $x = \alpha, \; y = t$ حيث α عدد حقيقي وثابت و t متغير حقيقي يحقق $0 \le t \le \pi$.

ب . $x = t, \; y = \beta$ حيث β عدد حقيقي ثابت و t متغير حقيقي موجب.

الحل:

الخط المستقيم في الفرع (أ) معرف بما يلي:

$$z = x + yi = \alpha + ti \, , \; 0 \le t \le \pi$$

وبالاستفادة من مثال (٢) فإن:

$$|w| = e^x = e^\alpha \, ,$$
$$\operatorname{Arg} w = y = t \, , \; 0 \le t \le \pi$$

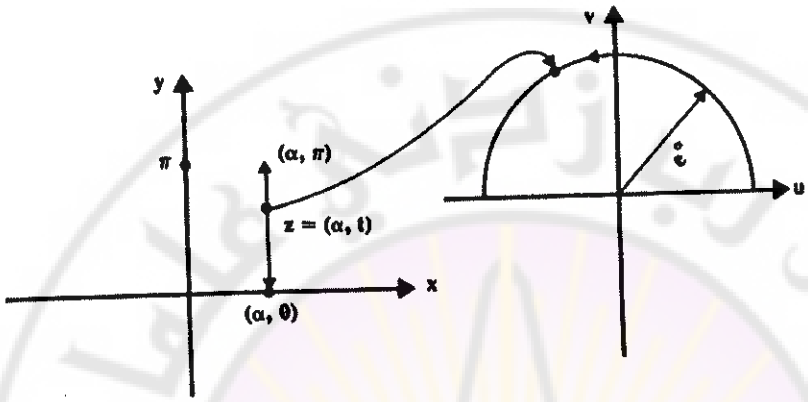
ومن ثمَّ فإن:

$$e^z = w = e^\alpha e^{ti} \, , \; 0 \le t \le \pi$$

ويمكن تمثيل هذه المنطقة بيانياً في المستوي u, v كما يلي:

$$u = e^\alpha \cos t \, , \; v = e^\alpha \sin t$$

وهذه معادلة دائرة نصف قطرها e^{α} , $0 \le t \le \pi$ ومن ذلك فإن صورة الخط المستقيم الرأسي عبارة عن قوس في دائرة نصف قطرها e^{α} يتحدّد حسب قيم t أو Im. z.



الشكل (١)

لاحظ أنه إذا أخذت t القيم $-\pi < t \le \pi$ فإن صورة الخط المستقيم هو كل الدائرة التي نصف قطرها e^{α} ولكون e^{z} دورية بدورة قدرها $2\pi i$ فإن كل نقطة على محيط الدائرة تمثل صورة عدد لا نهائي من النقاط على الخط الرأسي المسافة بينها مضاعفات الدورة 2π أي إن صورة النقاط:

$$\{z = \alpha + (t + 2n\pi)\, i,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

هي النقطة:

$$u + vi = e^{\alpha} \cos t + ie^{\alpha} \sin t,\ -\pi < t \le \pi$$

أما المستقيم في الفرع (ب) فهو مستقيم أفقي ومعرف بما يلي:

$$z = x + yi = t + \beta i\ ,\ t \ge 0$$

وبالاستفادة من مثال ٢ فإن:

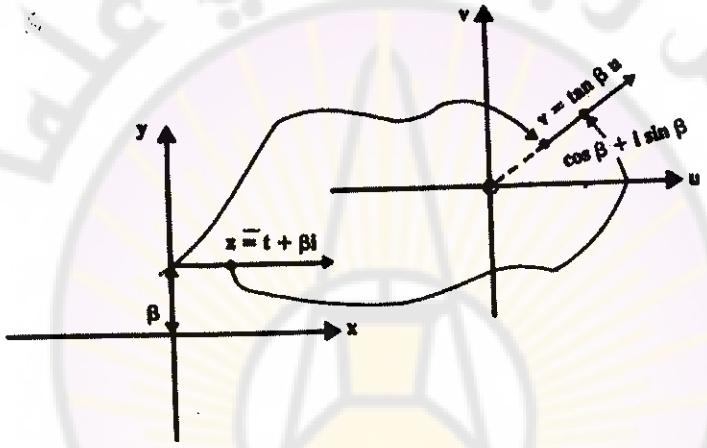
$$|w| = e^{t}\ ,\ t \ge 0$$

وبما أن Arg w مقدار ثابت فإن:

$$u = \cos\beta\, e^t \,,\; v = \sin\beta\, e^t$$

تمثل معادلة شعاع أي نصف المستقيم الذي تكون معادلته: $v = (\tan\beta)\, u$ وزاوية ميله β حيث تكون صورة النقطة $z = 0 + \beta i$ هي النقطة $\cos\beta + i\sin\beta$ وكلما زادت قيمة t فإن تحرّكت صورها على الشعاع باتجاه السهم في الشكل أدناه.

كما نترك للقارئ استنتاج أن صورة المستقيم المحدد بقيم t حسب المتباينة $t \le 0$ هي الجزء من الشعاع الممتد من النقطة $\cos\beta + i\sin\beta$ إلى نقطة الأصل (وبالطبع عدا نقطة الأصل نفسها).



الشكل (٢)

٣ . ٢ . الدالة اللوغاريتمية:

تبيّن لنا في البند السابق أن الدالة المركبة الأسية e^z دالة دورية، ومن ثمَّ فهي تعين صورة واحدة ووحيدة لعدد لا نهائي من الأعداد المركبة في مجال تعريفها، وهذا يعني أن الدالة e^z ليست واحداً – لواحد بل هي دالة متعددة – لواحد، ومن المعلوم لدى القارئ أن الدالة العكسية لأي دالة من نوع متعدد – لواحد غير معرفة، لذلك كان يجب تحديد مجال تعريف الدالة من نوع متعدد – لواحد كي تصبح واحداً ـ لواحد لنتمكن من دراسة الدالة العكسية لها، ولكن يمكن أن يُنظر إلى الأمر من زاوية أخرى تماماً كما ينظر للدالة

الضمنية $y = f(x)$ التي تضمنتها المعادلة $F(x, y) = 0$ في التفاضل والتكامل أي يمكن أن ننظر لعكس الدالة من نوع المتعدد – لواحد من الجهة الأخرى ونسميها دالة متعددة القيمة، أي أنها تعين قيماً متعددة كصورة مختلفة لعدد مركب واحد في مجال تعريفها.

من المعلوم أن دالة اللوغاريتم الطبيعي الحقيقية $\ln x$ تمثل الدالة العكسية للدالة الأسية الحقيقية e^x، لأنها واحد–لواحد. وحيث إن الدالة المركبة e^z ليست واحداً–لواحد بل هي متعدد–لواحد فإن الدالة (العكسية) لها ستكون دالة متعددة القيمة وهي الدالة اللوغاريتمية المركبة كما يشير التعريف التالي:

تعريف (١):

الدالة اللوغاريتمية المركبة التي يرمز لها بالرمز $\log z$ معرَّفة بالمساواة التالية:

$$\log z = \ln |z| + (\arg z)\, i \,,\ |z| > 0 \qquad (12)$$

وبلغة الإحداثيات القطبية للعدد المركب z حيث $z = re^{\theta i}$ فإن:

$$\log z = \ln r + \theta i,\ r > 0 \qquad (13)$$

حيث إن θ تمثل إحدى قيم $\arg z$ وبما أن $\arg z$ متعدد القيمة لأي عدد مركب z فإن:

$$\log z = \ln r + (\theta + 2n\pi)i \quad ,\ r > 0 \qquad (14)$$

وهذا يبيّن لنا أن الدالة $\log z$ متعددة القيمة حيث تعين عدداً لا نهائياً من الصور المختلفة للعدد المركب الواحد z.

إن الدالة متعددة القيمة $f(z)$ تتضمن دالة وحيدة القيمة باختيار مجال مناسب D تكون فيه قيمة $F(z)$ إحدى قيم الدالة متعددة القيمة $f(z)$ وعندها تكون الدالة $F(z)$ واحد–لواحد. وإذا كانت الدالة $F(z)$ تحليلية في المجال D فإنها تسمى فرع للدالة $f(z)$.

إن الدالة $\operatorname{Log} z$ حيث:

$$\text{Log } z = \ln |z| + (\text{Arg } z)\, i, \; |z| > 0 \qquad (15)$$

تسمى القيمة الرئيسية للدالة log z واحد-لواحد وفي هذه الحالة فإنها تمثل الدالة العكسية للدالة الأسية e^z حيث يكون:

$$\text{Log } e^z = z \; ; \; e^{\log z} = z \qquad (16)$$

وحتى نبيّن أن الدالة Log z فرع للدالة log z نحتاج أن نبحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق وهي المبرهنة التالية.

مبرهنة (٤):

أ . الدالة log z ليست مستمرة عند كل نقطة z تحقق الشرطين $\text{Re. } z \leq 0$ و $\text{Im. } z = 0$ (أي على الأعداد الحقيقية غير الموجبة).

ب . الدالة log z قابلة للاشتقاق عند كل نقطة z لا تقع على الشعاع $r = 0, \theta = \pi$ (أي إن $z = 0$ وكل z تحقق الشرطين $\text{Im. } z = 0, \text{Re. } z < 0$ تمثل نقطة شاذة للدالة log z).

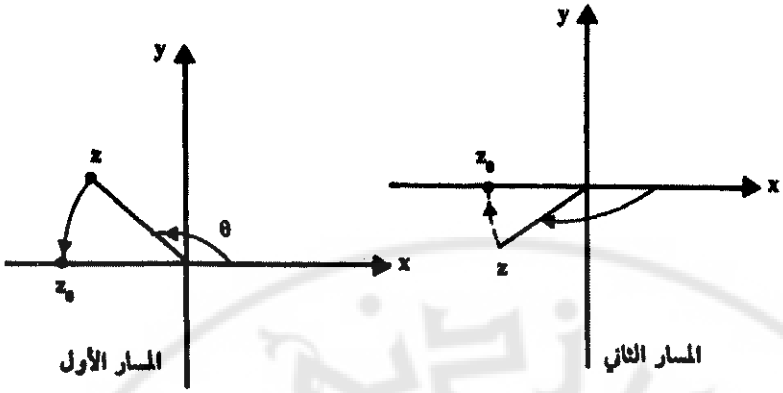
البرهان:

بالاستفادة من الشكل القطبي للدالة log z وهو:

$$\log z = \ln r + \theta i \; , \; r > 0 \qquad (17)$$

فإننا نجد نهاية الدالة log z عندما تقترب z من النقطة z_0 التي (تحقق الشرطين $\text{Re. } z_0 \leq 0$، $\text{Im. } z_0 = 0$) تقع على الشعاع $\theta = \pi$ بسلوك مسارين الأول اقتراب z من z_0 من النصف الأعلى للمستوي والثاني اقتراب z من z_0 خلال النصف الأسفل للمستوي المركب، لنجد أن:

$$\lim_{z \to z_0} \log z = \lim_{(r,\theta) \to (r_0, \pi)} (\ln r + \theta i)$$
$$= \ln r_0 + \pi i$$



الشكل (٣)

في حالة المسار الأول فإن:

$$\lim_{z\to z_0} \log z = \lim_{(r,\theta)\to(r_0,\pi)} (\ln r + \theta i)$$
$$= \ln r_0 - \pi i$$

في حالة سلوك المسار الثاني وحيث إن للنهاية قيمتين مختلفتين فإن $\lim_{z\to z_0} \log z$ غير موجودة عند كل نقطة z_0 تحقق الشرطين:

$$\text{Im. } z_0 = 0 \ , \ \text{Re. } z_0 \le 0$$

وهذا ينهي إثبات الفرع (أ) ولإثبات الفرع (ب) فإنه يكفي أن نبيّن أن المشتقات الجزئية للدالتين u و v اللتين تتكوّن منهما الدالة log z تحقق معادلتي كوشي وريمان عند كل نقطة لا تقع على الشعاع $\theta = \pi$، ذلك أن الفرع (أ) الدالة ليست قابلة للاشتقاق (ومن ثمَّ ليست تحليلية) عند النقاط z التي تحقق $\text{Re. } z \le 0$ و $\text{Im.} z = 0$ لكونها ليست مستمرة عندها. وحيث إن:

$$\log z = \ln r + \theta i \ , \ r > 0$$

فإن:

$$v(r, \theta) = \theta \ ; \ u(r, \theta) = \ln r$$

ومن ثمَّ ينتج:

$$u_r = \frac{1}{r} \ , \ u_\theta = 0 \ , \ v_r = 0 \ , \ v_\theta = 1$$

وهذه المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة عند كل z_0 بحيث إن:

$$\theta = \arg z \neq \pi \ , \ |z| > 0$$

وكذلك تحقق:

$$u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta , \frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

وهما معادلتا كوشي . ريمان أي إن الدالة $\log z$ قابلة للاشتقاق عند كل z لا تقع على الشعاع $\theta = \pi$, $|z| = 0$ حيث تكون مشتقتها:

$$\frac{d}{dz}(\log z) = e^{-\theta i}(u_r + iv_r)$$

$$= \frac{1}{r} e^{-\theta i} = \frac{1}{re^{\theta i}}$$

أي إن:

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}$$

من ذلك فإن $\log z$ دالة تحليلية على كل z لا تحقق الشرطين $\text{Re. } z \leq 0$ و $\text{Im. } z = 0$.

نستنتج مما تقدم أن الدالة:

$$\text{Log } z = \ln r + \phi i \ , \ r > 0 \ , \ -\pi < \phi \leq \pi \qquad (18)$$

تحليلية في المجال المذكور ومن ثمَّ فإن $\text{Log } z$ فرع للدالة $\log z$. ويسمى هذا الفرع الفرع الرئيسي، إن مجموعة النقاط الشاذة للدالة $\text{Log } z$ وهي كل الأعداد الحقيقية غير الموجبة التي يمثلها نصف المحور x السالب فإنها تسمى فصل الفرع للدالة $\text{Log } z$ وكذلك فإن النقطة الشاذة المشتركة لجميع فروع الدالة $\log z$ وهي $z = 0$ فإنها تسمى

نقطة التفرع وبشكل أعم فإنه يمكن تعريف فروع الدالة $\log z$ لأي عدد حقيقي α بحيث إن:

$$w = \text{Log } z = \ln r + \theta i \ , \ r > 0 \ , \ \alpha < \theta \leq 2\pi \qquad (19)$$

تمثل فرعاً للدالة $\log z$ في المجال المذكور، وهنا فإن فصل الفرع هو الشعاع $\theta = \alpha$ حيث تكون الدالة $\text{Log } z$ ليست تحليلية على هذا الشعاع وعند $z = 0$ كذلك. ويكون مجال هذه الدالة كل الأعداد المركبة z بحيث إن $|z| > 0$ وتنقل هذا المجال بشكل واحد-لواحد وشامل على الشريحة الأفقية اللانهائية.

$$\alpha < \text{Im. } w \leq \alpha + 2\pi \qquad (20)$$

إن الدالة $\log z$ تشبه دالة اللوغاريتم الطبيعي الحقيقي من حيث خضوعها لقوانين اللوغاريتمات المعروفة كما تبيّن المبرهنة التالية.

مبرهنة (٥):

لأي عددين مركبين z, w حاصل ضربهما ليس صفراً فإن القوانين التالية صائبة:

أ. $\log zw = \log z + \log w$

ب. $\log z/w = \log z - \log w$

البرهان:

نبرهن (أ) ونترك إثبات الفرع (ب) تمريناً للقارئ. وبتعريف الدالة اللوغاريتمية نستنتج أن:

$$\begin{aligned} \log zw &= \ln |zw| + i \arg (zw) \\ &= \ln |z| \, |w| + i (\arg z + \arg w) \\ &= (\ln |z| + i \arg z) + (\ln |w| + i \arg w) \\ &= \log z + \log w \end{aligned}$$

لاحظ أننا استفدنا من حقيقة أن سعة حاصل ضرب عددين مركبين هي مجموع سعتي العددين المركبين في الخطوة الثانية، وكذلك استفدنا من الخاصية المشابهة للدالة اللوغاريتمية الحقيقية ln في الخطوة الثالثة. وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

هذه الخصائص التي تحققها الدالة متعددة القيمة log z قد تفشل في تحقيقها الدالة وحيدة القيمة (التي تمثل الفرع الرئيسي) Log z وإليك المثال التالي:

مثال (٤):

إذا كان $z = -1 + i$، $w = 2i$، فأوجد قيمة كل مما يلي:

أ. log zw, log w, log z.

ب. القيمة الرئيسية: Log zw, Log w, Log z.

جـ. بيِّن أن الفرع (أ) من المبرهنة السابقة يتحقق في حالة الدالة متعددة القيمة log z، ولكنه لا يتحقق في حالة الدالة وحيدة القيمة Log z.

الحل:

أ. بتطبيق تعريف الدالة log z نستنتج أن:

$$\log(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\log(2i) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\log 2i\,(-1 + i) = \log(-2 - 2i)$$

$$= \ln\sqrt{8} + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

ب. وبتطبيق تعريف الدالة Log نستنتج ما يلي:

$$\mathrm{Log}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i$$

$$\mathrm{Log}(2i) = \ln 2 + \frac{\pi}{2} i$$

$$\mathrm{Log}\, 2i(-1+i) = \log(-2-2i) = \ln\sqrt{8} - \frac{3\pi}{4} i$$

جـ. وبجمع قيم log 2i, log (-1 + i) نستنتج أن:

$$\log(-1+i) + \log 2i = \ln\sqrt{8} + \left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبما أن $\frac{5\pi}{4}$ تمثل إحدى قيم سعة العدد المركب (-1 + i) 2i فإن:

$$\log(-1+i) + \log 2i = \ln\sqrt{8} + \left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$
$$= \log 2i(-1+i)$$

أما إذا جمعنا قيمة Log (-1 + i) وقيمة Log 2i فإن:

$$\mathrm{Log}(-1+i) + \mathrm{Log}\, 2i = \ln\sqrt{8} + \frac{5\pi}{4} i$$

ولكن:

$$\mathrm{Log}\, 2i(-1+i) = \ln\sqrt{8} + \left(\frac{-3\pi}{4}\right) i$$

لذلك نلاحظ أن:

$$\mathrm{Log}\ zw \neq \mathrm{Log}\ z + \mathrm{Log}\ w$$

مما تقدم نلاحظ أن عدم تحقق المساواة بين Log zw و Log z + Log w يرجع بالدرجة الرئيسية إلى أن السعة الرئيسية لحاصل ضرب عددين مركبين ليس بالضرورة مساوياً لحاصل جمع السعتين الرئيسيتين لهما. أي إن:

$$\mathrm{Arg}\ z + \mathrm{Arg}\ w \neq \mathrm{Arg}\ zw$$

ننهي هذا البند بالمثال التالي:

مثال (٥):

أ . أوجد المجال الذي تكون عليه الدالة f تحليلية ثم أوجد النقاط الشاذة (إن وجدت) حيث إن:

$$f(z) = \frac{\log(z-2i)}{z^2+1}$$

ب . أوجد الفرع للدالة متعددة القيمة $g(z) = \log(z^2 - 1)$ الذي يكون تحليلياً عند $z = 0$.

الحل:

أ . لإيجاد المجال الذي تكون عليه f تحليلية نبحث عن النقاط التي تجعل المقام صفراً ثم القيم التي يكون البسط عندها غير قابل للاشتقاق ثم نستثني هذه النقاط من مجموعة الأعداد المركبة C. وبفرض أن المقام $z^2 + 1$ يساوي صفراً فإن:

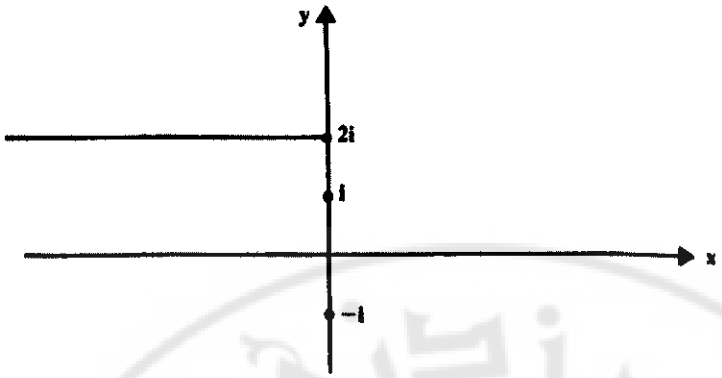
$$z = \pm i$$

وكذلك فإن الدالة $\log(z - 2i)$ ليست تحليلية عند النقاط z التي تحقق الشرطين:

$$\text{Im.}(z-2i) = 0 \ , \ \text{Re.}(z-2i) \le 0$$

ومن ذلك فإن $y = 2 \ , \ x \le 0$، وهذا يمثل نصف المستقيم $y = 2$ الأيسر. انظر الشكل (٤) ومن ثمَّ فإن المجال الذي تكون عليه الدالة f تحليلية يحتوي جميع الأعداد المركبة باستثناء الأعداد المعرفة بالمساواة التالية:

$$\{z \in C: z = \pm i\} \cup \{z \in C: \text{Im. } z = 2 \ , \ \text{Re. } z \le 0\}$$



الشكل (٤)

وهذه المجموعة تمثل النقاط الشاذة للدالة f منهما النقطتان i, -i+ شاذة معزولة أما الباقي فهي شاذة ليست معزولة. ويمثل الشعاع المذكور فصل الفرع وكذلك 2i تمثل نقطة التفرع.

ب . لإيجاد الفرع للدالة g(z) الذي يكون تحليلياً عند $z = 0$ نلاحظ إمكانية كتابة الدالة g على الصيغة التالية:

$$g(f(z)) = \log (f(z))$$

حيث إن $f(z) = z^2 - 1$. وهذه الدالة $f(z) = z^2 - 1$ دالة تحليلية على جميع الأعداد المركبة (أي إنها دالة صحيحة). ولذلك يكفي إيجاد الفرع للدالة $g(z) = \log z$ الذي يكون تحليلياً عند النقطة $z_0 = f(0) = -1$ وبما أن سعة العدد $z_0 = -1$ هي π فإننا نختار مجالاً يحتوي على النقطة π وبالتالي يكون الفرع:

$$\text{Log } z = \ln r + \theta i \ , r > 0 \ , 0 < \theta \leq 2\pi$$

تحليلياً عند $z_0 = -1$ نستنتج من ذلك أن الفرع المطلوب هو الدالة:

$$g(z) = \text{Log } (z^2 - 1)$$

وحيث: $0 < \arg (z^2 - 1) \leq 2\pi \ ; \ |z^2 - 1| > 0$

بالإضافة إلى ذلك فإن قيمة المشتقة g هي:

$$g'(z) = g'(f(z))f'(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

ومن ذلك فإن:

$$g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = 0$$

٣ . ٣ . الأسس المركبة:

بالاستعانة بالدالتين الأسية واللوغاريتمية نستطيع تعريف الأسس المركبة كما هو موضح في التعريف التالي:

تعريف (٢):

لأي عدد مركب $z \neq 0$ ولأي عدد مركب α فإن:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} \qquad (21)$$

ومن هذا التعريف نستنتج أن الدالة z^{α} ترث كثيراً من خصائص الدالة اللوغاريتمية $\log z$ منها أن الدالة $f(z) = z^{\alpha}$ متعددة القيمة ولها نفس فروع الدالة $\log z$ ومن ثمَّ فإن الفرع الرئيسي لها هو:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{\alpha\{\ln|z| + (\operatorname{Arg} z)i\}} \qquad |z| > 0 \ , \ -\pi < \arg z \leq \pi$$

وكذلك فصل الفرع هو الشعاع $y = 0, \ x \leq 0$. والنقطة $z = 0$ تمثل نقطة التفرع لأنها شاذة ومشتركة لجميع الفروع الدالة.

مثال (٦):

أوجد قيم $(-i)^{2i}$ ثم أوجد القيمة الرئيسية لها.

الحل:

بتطبيق تعريف (٢) نستنتج أن:

$$(-i)^{2i} = e^{2i \log(-i)}$$

وبما أن:

$$\log(-i) = \ln|-i| + \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

فإن:

$$(-i)^{2i} = e^{2i\left\{\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\right\}}$$

$$= e^{(4n+1)\pi},\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

أما القيمة الرئيسية لها فهي:

$$(-i)^{2i} = e^{2i\mathrm{Log}(-i)}$$

$$= e^{2i\left(-\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\pi}$$

المبرهنة التالية تبحث قابلية z^{α} للاشتقاق.

مبرهنة (٦):

الدالة وحيدة القيمة:

$$f(z) = z^{\alpha},\ |z| > 0,\ -\pi < \arg z < \pi$$

قابلة للاشتقاق بل هي تحليلية على جميع الأعداد المركبة باستثناء الأعداد المركبة التي تحقق $\mathrm{Im.}\ z = 0,\ \mathrm{Re.}\ z \le 0$ وقيمة المشتقة عندئذ هي:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right) = \alpha z^{\alpha-1} \qquad (22)$$

البرهان:

بما أن:

$$f(z) = z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$$

فإن قانون السلسلة يبيّن أن:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(z^{\alpha}) = \frac{d}{dz}e^{\alpha \log z}$$

$$= \frac{\alpha}{z}e^{\alpha \log z} = \frac{\alpha}{z}z^{\alpha}$$

لجميع قيم z التي تكون الدالة $\log z$ عندها تحليلية، ومن ثمَّ فإن الدالة z^{α} ليست تحليلية عند الأعداد التي لا تكون عندها الدالة $\log z$ تحليلية وهي تلك الأعداد التي تحقق:

$$\text{Re. } z \le 0, \text{ Im. } z = 0$$

مثال (٧):

أما الدالة α^z حيث α عدد مركب غير الصفر و z متغير مركب فهي كذلك معرّفة بما يلي:

$$\alpha^z = e^{z \log \alpha} \qquad (23)$$

وبما أن $\log \alpha$ عدد مركب ثابت فإن الدالة $f(z) = \alpha^z$ ترث خصائص الدالة e^z فإذا كانت α لا تقع على الشعاع $r \ge 0,\ \theta = \pi$ (أي على النصف السالب للمحور x) فإن $\log \alpha$ عدد مركب ومن ثمَّ فإن الدالة $f(z) = \alpha^z$ تكون صحيحة أي تحليلية على جميع المستوي المركب وقيمة المشتقة لها هي:

$$f'(z) = \alpha^z \,.\, \log \alpha \qquad (24)$$

لاحظ أن الصيغة تتوافق مع الدالة الأسية الحقيقية.

مثال (٨):

أوجد قيمة 1^2.

الحل:

حسب التعريف فإن القيمة المطلوبة هي:

$$1^2 = e^{2\log 1} = e^{2\{\ln 1 + 2n\pi i\}}$$
$$= e^{4n\pi i}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

أما القيمة الرئيسة للعدد 1^2 فهي: $1^2 = e^{2\text{Log}1} = e^0 = 1$

ماذا نستنتج من هذا المثال؟

مثال (٩):

أوجد القيم المختلفة للمقدار $e^{\frac{1}{k}\log z}$.

الحل:

حسب تعريف الأسس المركبة فإن:

$$e^{\frac{1}{k}\log z} = z^{\frac{1}{k}}$$

وبالاستفادة من الشكل القطبي للعدد المركب $z = re^{i(\phi+2n\pi)}$ حيث إن: $r = |z|\ ;\ \phi = \operatorname{Arg} z$ نستنتج:

$$e^{\frac{1}{k}\log z} = r^{\frac{1}{k}} e^{i(\phi+2n\pi)/k} \quad , n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

وبما أن الطرف الأيمن له k قيمة مختلفة فإن $e^{\frac{1}{k}\log z}$ له k قيمة مختلفة هي:

$$e^{(\log z)/k} = r^{1/k} e^{i(\phi+2n\pi)/k} , n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (25)$$

٣ . ٤ . الدوال المثلثية:

نستطيع بالاستفادة من صيغة أولر:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta , \qquad e^{-\theta i} = \cos\theta - i\sin\theta$$

إيجاد تعريف «مركب» للدوال المثلثية الحقيقية بالصيغة التالية:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right) \qquad (26)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right) \qquad (27)$$

وهذه الصيغة تقترح تعريفاً مماثلاً للدوال المثلثية المركبة كما في التعريف التالي:

تعريف (٣):

لأي عدد مركب z فإن الدالتين المثلثيتين sin z، cos z تعرفان بالمتساويتين التاليتين:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + e^{-zi}\right) \qquad (28)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{zi} - e^{-zi}\right) \qquad (29)$$

إن هذه الدوال المركبة sin z, cos z ترث كثيراً من صفات الدالة الأسية المركبة، وهي كذلك تتصف بصفات كثيرة مشتركة مع مثيلاتها الحقيقية، إن كثيراً من خصائص الدوال المثلثية الحقيقية تبقى صحيحة للدوال المثلثية المركبة. سنذكر بعضاً من هذه الخصائص دون برهان للتمثيل فقط، ولكن سنبرهن بعض الخصائص التي ليس لها شبه للدوال الحقيقية.

المبرهنة التالية تحتوي بعض الخصائص المشتركة.

مبرهنة (٧):

لأي عددين مركبين z, w فإن الجمل التالية صائبة:

أ. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad (30)$

ب. $\cos(-z) = \cos z,\ \sin(-z) = -\sin z \qquad (31)$

جـ. $(32)\ \cos(z \pm w) = \sin z \cos w \mp \sin z \sin w$

د. $(33)\ \sin(z \pm w) = \sin z \cos w \mp \cos z \sin w$

هـ. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \qquad (34)$

المبرهنة التالية تحتوي بعض الخصائص التي تنفرد بها الدوال المثلثية المركبة.

مبرهنة (٨):

أ . الدوال $\sin z, \cos z$ دورية بدورة مقدارها 2π. أي إن:

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \qquad (35)$$

$$\sin(z+2\pi) = \sin z \qquad (36)$$

ب . هذه الدوال صحيحة أي إنها تحليلية على كل المستوي المركب وكذلك:

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos, \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z \qquad (37)$$

جـ . $\cos z = 0$ إذا وإذا فقط:

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (38)$$

وكذلك $\sin z = 0$ إذا وإذا فقط:

$$z = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (39)$$

د . $$\sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sin hy \qquad (40)$$

$$\cos(x + yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sin hy \qquad (41)$$

هـ . $$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \qquad (42)$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \qquad (43)$$

البرهان:

نبرهن بعض هذه الفروع ونترك إثبات بقية الفروع تمريناً للقارئ.

لإثبات الفرع (أ) نستفيد من كون الدالة الأسية المركبة دورية لنستنتج أن:

$$\cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + e^{-zi}\right) = \cos z$$

ولإثبات الفرع (ب) نستنتج من كون الدالة الأسية المركبة صحيحة وأن الدوال المثلثية $\cos z$ و $\sin z$ صحيحة كذلك وأن:

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(ie^{zi} - ie^{-zi})$$

$$= \frac{-1}{2i}(e^{zi} - ie^{-zi})$$

$$= -\sin z$$

أما الفرع (جـ) فإن المساواة $\sin z = 0$ تصح إذا وإذا فقط:

$$\frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}) = 0$$

ومنها ينتج أن $e^{zi} = e^{-zi}$ أي إن $e^{2zi} = 1$ وهذا يصح إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$2zi = 2n\pi i \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبالتبسيط يكون الشرط:

$$z = n\pi \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ومن تعريف الدالة $\sin z$ فإن:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}) = \frac{1}{2i}(e^{-y}e^{xi} - e^{y}e^{-xi})$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\sin x + i\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})\cos x$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

وهذا يثبت جزءاً من فرع (د).

وأخيراً نبرهن جزءاً من الفرع (هـ) لذلك نستفيد من الفرع (د) السابق حيث إن:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$

وبإضافة وطرح المقدار $\sin^2 x \sinh^2 y$ نحصل على:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + (\cos^2 x + \sin^2 x) \sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x + \sinh^2 y$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

مثال (١٠):

أوجد جميع قيم z التي تحقق المعادلة:

$$\sin z = \cosh 2$$

الحل:

بالاستفادة من الفرع (د) من المبرهنة السابقة نستنتج أن:

$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = \cosh 2$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية معاً ومساواة الأجزاء التخيلية معاً نستنتج أن:

$$\cos x \sinh y = 0 \quad , \quad \sin x \cosh y = \cosh 2$$

وبفرض $\sinh y = 0$ فإن $y = 0$ وبفرض أن $\cos x = 0$ فإن:

$$x = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

بما أن الطرف الأيمن في المعادلة الثانية $\cosh 2$ موجب فإن الطرف الأيسر يجب أن يكون موجباً مما يحتّم أن تكون $\sin x$ موجبة لذلك نتخلص من قيم x التي تجعل $\sin x$ سالبة وهي قيم n الفردية ومن ثمَّ فإن:

$$x = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وفي هذه الحالة تكون $\sin x = 1$ ومن ثمَّ فإن المعادلة الثانية تصبح:

$$\cosh y = \cosh 2$$

ومن كون الدالة $\cosh y$ دالة زوجية فإن $y = -2 , +2$ وبهذا تصبح قيم z التي تحقق المعادلة هي اتحاد المجموعتين R و Q حيث:

$$R = \left\{ z \in C : Re.z = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi) \wedge Im.z = \pm 2 \right\}$$

$$Q = \left\{ z \in C : Im.z = 0, Re.z = \sin^{-1}(\cos 2) \right\}$$

مثال (١١):

استخدم كون الدالة $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ تحليلية لإثبات المتطابقة المذكورة في فرع (أ) من المبرهنة (٧).

الحل:

بما أن كلاً من الدوال المثلثية $\cos z, \sin z$ تحليلية على جميع الأعداد المركبة فإن الدالة:

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$$

تحليلية ومن ثمَّ قابلة للاشتقاق على جميع الأعداد المركبة وبإيجاد المشتقة نجد أن:

$$f'(z) = -2 \cos z \sin z + 2 \sin z \cos z = 0$$

لكل عدد مركب z، وهذا يدلنا على أن الدالة f دالة ثابتة القيمة، أي يوجد عدد مركب α بحيث إن:

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z = \alpha$$

لجميع قيم z وبفرض أن $z = 0$ نستنتج أن $\alpha = 1$ ومن ثمَّ فإن:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

مثال (١٢):

بيِّن أن:

أ. $\sin(yi) = i \sinh y \qquad (44)$

ب. $\sin \bar{z} = \overline{\sin z} \qquad (45)$

الحل:

بالاستفادة من الخاصة (د) من مبرهنة (٨) وهي:

$$\sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

بالتعويض بدلاً من x القيمة 0 ينتج أن:

$$\sin(yi) = i \cos 0 \sinh y = i \sinh y$$

وهذا يثبت الفرع (أ).

ولإثبات الفرع (ب) نستفيد من نفس المتطابقة السابقة لإيجاد المرافق المركب:

$$\overline{\sin z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

بينما:

$$\sin \bar{z} = \sin x \cosh(-y) + i \cos x \sinh(-y)$$

وبما أن الدالة $\cosh y$ زوجية بينما الدالة $\sinh y$ فردية نستنتج أن:

$$\sin \bar{z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

وبالمقارنة نستنتج أن:

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

إن بقية الدوال المثلثية الحقيقية يمكن أن يعاد تعريفها بشكل طبيعي لتصبح دوالَّ مركبة مثل:

$$\csc z = \frac{1}{\sin z}, \sec z = \frac{1}{\cos z}, \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad (46)$$

وبالمثال فإن هذه الدوال لها نفس الخصائص تقريباً التي تملكها الدوال المماثلة الحقيقية، نذكر منها المشتقة مثلاً:

$$\frac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z \qquad (47)$$

$$\frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z \qquad (48)$$

$$\frac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z \qquad (49)$$

$$\frac{d}{dz}(\cot z) = -\csc^2 z \qquad (50)$$

٣ . ٥ . الدوال الزائدية:

يمكننا تعريف الدوال الزائدية المركبة بشكل طبيعي بالمعادلات التالية:

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \qquad (51)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad (52)$$

لأي عدد مركب z. هناك خصائص مشتركة بين هذه الدوال في الحالة الحقيقية والمركبة وهناك خصائص أخرى تنفرد بها الدوال المركبة. المبرهنة التالية تتضمن بعض الخصائص المشتركة.

مبرهنة (٩):

لأي عددين مركبين z, w تكون الجمل التالي صحيحة:

أ. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \qquad (53)$

ب. $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z \qquad (54)$

جـ. $\sinh (z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w \qquad (55)$

د. $\cosh (z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \qquad (56)$

هـ. $\cosh (-z) = \cosh z \text{ , } \sinh (-z) = - \sin hz \qquad (57)$

والمبرهنة التالية تتضمن بعض الحقائق التي تنفرد بها الدوال الزائدية المركبة.

مبرهنة (١٠):

لأي عدد مركب z فإن الجمل التالية صحيحة:

أ . الدالتان sinh z , cosh z تحليليتان وكذلك:

$$\frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z, \frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \qquad (58)$$

ب . الدالتان cosh z, sinh z دوريتان بدورة مقدارها $2\pi i$ أي إن:

$$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z\ ,\ \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z \qquad (59)$$

جـ .

$$\cosh(zi) = \cos z,\ \sin h(zi) = i\ sh\ z \qquad (60)$$

$$\sin(zi) = i \sinh z,\ \cos(zi) = \cosh z \qquad (61)$$

د .

$$\cosh z = \cosh x\ .\ \cos y + i \sinh x \sin y \qquad (62)$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \qquad (63)$$

هـ .

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y \qquad (64)$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \qquad (65)$$

إن الدوال المثلثية كما أن الدوال الزائدية تعتمد في تعريفها على الدالة الأسية المركبة وبالتالي فإن أساليب برهنة الخصائص في المبرهنات السابقة تشبه برهنة الخصائص المماثلة للدوال المثلثية لذلك نتركها تمريناً للقارئ.

كذلك يمكن تعريف بقية الدوال الزائدية بشكل طبيعي كما يلي:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \sec hz = \frac{1}{\cosh z} \qquad (66)$$

$$\csc hz = \frac{1}{\sinh z}, \coth z = \frac{1}{\tanh z} \qquad (67)$$

وهي تملك الخصائص نفسها التي تملكها الدوال الحقيقية نفسها. مثلاً:

$$\frac{d}{dz}(\tanh z) = \sec h^2 z, \qquad (68)$$

$$\frac{d}{dz}(\coth z) = -\csc h^2 z, \qquad (69)$$

$$\frac{d}{dz}(\sec hz) = -\sec hz \tanh z, \qquad (70)$$

$$\frac{d}{dz}(\csc hz) = -\csc hz \coth z. \qquad (71)$$

مثال (١٣):

أوجد جميع قيم z التي تحقق المعادلة:

$$\sinh z = 0$$

الحل:

بالاستفادة من الخاصية (د) من المبرهنة السابقة نستنتج أن:

$$\sinh x \cos y = 0 \quad , \quad \cosh x \sin y = 0$$

بما أن $\cosh x$ في المعادلة الثانية ليس صفراً لجميع قيم x الحقيقية فإن $\sin y = 0$ ومن ثمَّ $y = n\pi \, , \, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

ومن ذلك فإن $\cos y$ في المعادلة الأولى تأخذ إحدى القيمتين $+1$,-1 اعتماداً على كون n زوجية أو فردية، وهذا يحتم كون $\sinh x = 0$ أي إن $x = 0$ فقط التي تحقق المعادلتين معاً لذلك تكون أصفار المعادلة المطلوبة هي:

$$z = n\pi i, \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (72)$$

لنذكر أن الدالة $g(z)$ تمثل الدالة العكسية للدالة $f(z)$ إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

$$f(g(z)) = z \, , \, g(f(z)) = z$$

وبلغة أخرى فإن معكوس الدالة $w = f(z)$ هو $z = f^{-1}(w)$ وعليه فإن معكوسات الدوال المثلثية المركبة والزائدية المركبة تعرف بما يلي:

$$w = \sin^{-1} z \Leftrightarrow z = \sin w \qquad (73)$$

$$w = \cos^{-1} z \Leftrightarrow z = \cos w \qquad (74)$$

$$w = \sinh^{-1} z \Leftrightarrow z = \sinh w \qquad (75)$$

$$w = \cosh^{-1} z \Leftrightarrow z = \cosh w \qquad (76)$$

وهكذا ويمكن إعطاء تعريف آخر لكل من هذه المعكوسات اعتماداً على الدالة اللوغاريتمية كما تبيّن الأمثلة التالية:

مثال (١٤):

بيِّن أن:

$$\cos^{-1}z = -i \log [z + i(1 - z^2)^{1/2}] \qquad (77)$$

الحل:

إذا فرضنا أن $w = \cos^{-1} z$ فإن: $z = \cos w = \frac{1}{2}\left(e^{wi} + e^{-wi}\right)$

وبضرب المعادلة السابقة بالمقدار $2e^{wi}$ نستنتج أن: $(e^{wi})^2 - 2ze^{wi} + 1 = 0$

وبإيجاد جذور هذه المعادلة التربيعية نحصل على:

$$e^{wi} = \frac{2z + \left(4z^2 - 4\right)^{1/2}}{2}$$
$$= z + i(1 - z^2)^{1/2}$$

وعليه فإن:

$$w = \frac{1}{i}\log\left[z + i(1 - z^2)^{1/2}\right],$$
$$\cos^{-1} z = -i\log\left[z + i(1 - z^2)^{1/2}\right]$$

لاحظ أن الطرف الأيمن يمثل دالة متعددة القيمة وكذلك يوجد قيمتان للجذر:

$$(1 - z^2)^{1/2}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\sin^{-1} z = -i \log\left[zi + (1-z^2)^{1/2}\right] \qquad (78)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2} i \log\left[(i+z)/(i-z)\right] \qquad (79)$$

$$\sinh^{-1} z = \log\left[z + (z^2+1)^{1/2}\right] \qquad (80)$$

$$\cosh^{-1} z = \log\left[z + (z^2-1)^{1/2}\right] \qquad (81)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log\left[(1+z)/(1-z)\right] \qquad (82)$$

إن هذا التعريف للدوال المثلثية والزائدية العكسية يسهل عملية إيجاد المشتقة لكل من هذه الدوال، كما يشير المثال التالي:

مثال (١٥):

بيّن أن:

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \qquad (83)$$

الحل:

بالاستعانة بالخاصية (78) فإن:

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) = \frac{-i\left\{i + \frac{1}{2}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}(-2z)\right\}}{zi + (1-z^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{zi + (1-z^2)^{1/2}}{\sqrt{1-z^2}\left\{zi + (1-z^2)^{1/2}\right\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\frac{d}{dz}(\cos^{-1} z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \qquad (84)$$

$$\frac{d}{dz}(\tan^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \qquad (85)$$

$$\frac{d}{dz}(\sinh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \qquad (86)$$

$$\frac{d}{dz}(\cosh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \qquad (87)$$

$$\frac{d}{dz}(\tanh^{-1} z) = \frac{1}{1-z^2} \qquad (88)$$

نختم هذا البند بالمثال التالي:

مثال (١٦):

أوجد قيمة ما يلي: $\cos^{-1}\sqrt{3}, \sin^{-1}(i)$

الحل:

من المتطابقة (77) فإن:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i\log\left[\sqrt{3} + i(1-3)^{1/2}\right]$$
$$= -i\log\left[\sqrt{3} \pm i\sqrt{2}i\right]$$

من ذلك ينتج حالتان، الأولى:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i\log\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}\right]$$

والثانية:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i\log\left[\sqrt{3} + \sqrt{2}\right]$$

وبما أن العددين $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ حقيقيان موجبان فإن:

$$\mathrm{Arg}\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right) = 0$$

أي إن:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i\left\{\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+2n\pi i\right\}$$

أو:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i\left\{\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2n\pi i\right\}, \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

وأخيراً فإن:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = \left\{2n\pi - i\ln\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)\right\}, \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

وكذلك من المتطابقة (80) فإن:

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(i) &= \log\left[i+(-1+1)^{1/2}\right]\\ &= \log i\\ &= \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i \;, \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\end{aligned}$$

٣ . ٦ . تمارين محلولة:

أولاً: أوجد القيمة الرئيسية للمقدارين:

$$w_1 = (2+i)^{1-i} \quad , \quad w_2 = i^i$$

الحل:

من أجل $w_1 = (2+i)^{1-i}$ إذن بحسب التعريف:

$$\begin{aligned}w_1 &= e^{(1-i)\ln(2+i)}\\ &= e^{(1-i)\,[\ln|2+i| + i(\theta+2\pi k)]}\end{aligned}$$

ومهمتنا تحديد θ والطويلة $|2+i|$.

لدينا:

$$|2+i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\theta\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ولنحل المعادلة:

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \ ; \ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$e^{2i\theta} - \frac{4}{\sqrt{5}} e^{i\theta} + 1 = 0 \quad ; \quad w = e^{i\theta}$$

$$w^2 - \frac{4}{\sqrt{5}} w + 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{16}{5} - 4 = -\frac{4}{5}$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{2}{\sqrt{5}} i$$

$$w = \frac{2}{\sqrt{5}} \mp \frac{1}{\sqrt{5}} i = \frac{2 \mp i}{\sqrt{5}}$$

$$e^{i\theta} = \frac{2 \mp i}{\sqrt{5}} \Rightarrow i\theta = \ln\left(\frac{2 \mp i}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = -i \ln\left(\frac{2 \mp i}{\sqrt{5}}\right)$$

من أجل: $\theta = -i \ln\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)$ يكون لدينا:

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left[\frac{2+i}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{2+i}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(2+i)^2 - 5}{(2+i)\sqrt{5}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{5}i}\left[\frac{4 - 1 + 4i - 5}{2+i}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}i}\left[\frac{-2+4i}{2+i}\right]=\frac{2i}{2\sqrt{5}i}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

وهي قيمة مقبولة.

تعطى القيمة الرئيسية عندما $k=0$ ومن ثمَّ يكون:

$$w_1=e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{5}+i\left(-i\ln\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]}$$

أما من أجل $w_2=i^i$ فينتج:

$$w_2=e^{i\ln i}=e^{i\left[i(\frac{\pi}{2}+2\pi ki)\right]}=e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi ki}$$

ونحصل على ما يسمى القيمة الرئيسية عندما $k=0$ ومن ثمَّ:

$$w_2=i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

ثانياً: أوجد طويلة التابع $w=\sin z$ في النقطة $z=\pi+i\ln(2+\sqrt{5})$

الحل:

لنضع $z=x+iy$ فنجد:

$$w=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\,\mathrm{sh}\,y\cos x$$

$$|w|=|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\mathrm{sh}^2 y\cos^2 x}$$

$$=\sqrt{\sin^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\mathrm{sh}^2 y(1-\sin^2 x)}$$

$$=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y+\mathrm{sh}^2 y-\mathrm{sh}^2 y\sin^2 x}$$

$$=\sqrt{\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y}$$

وبتعويض z بالنقطة $z=\pi+i\ln(2+\sqrt{5})$ نجد:

$$\left|\sin(\pi+i\ln(2+\sqrt{5})\right|=\sqrt{\sin^2\pi+\mathrm{sh}^2\ln(2+\sqrt{5})}$$

$$=\sqrt{\mathrm{sh}^2\ln(2+\sqrt{5})}$$

$$= \operatorname{sh} \ln(2+\sqrt{5})$$

$$= \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{5} - \dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}{2}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})-1}{2(2+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{4+4\sqrt{5}+5-1}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{8+4\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(4+2\sqrt{5})}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = 2$$

ثالثاً: برهن صحة ما يلي:

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z$$

الحل:

لدينا: $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\sin z = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = -\frac{e^{z} - e^{-z}}{2i} =$$

$$= i^2 \frac{e^{z} - e^{-z}}{2i} = i\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) = i\operatorname{sh}z$$

وبشكل مشابه نبرهن صحة العلاقة: $\cos iz = \operatorname{ch} z$

رابعاً: أوجد قيم المقدار $\operatorname{Arc}\tan(1+i)$

الحل:

بتعويض $z = 1 + i$ في العلاقة:

$$\operatorname{Arc}\tan z = \frac{-i}{2}\log\frac{1+iz}{1-iz}$$

فنجد:

$$\operatorname{Arc}\tan(1+i) = \frac{-i}{2}\log\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = \frac{-i}{2}\log\frac{i}{2-i}$$

$$= \frac{-i}{2}\log\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)$$

وبما أن:

$$\log\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) = -\ln\sqrt{5} + (2k+1)\pi i + i\operatorname{Arc}\tan 2$$

فإننا نجد:

$$\operatorname{Arc}\tan(1+i) = \frac{i}{2}\ln\sqrt{5} + (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan 2$$

وحيث $k = (0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$.

خامساً: أوجد القسم الحقيقي والتخيلي للتابع $\operatorname{sh} z$:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{i}\sin iz = \frac{1}{i}\sin[i(x+iy)]$$

$$= \frac{1}{i}\sin[ix - y] = \frac{1}{i}[\sin ix\cos y - \sin y\cos ix]$$

$$= \frac{1}{i}[i\operatorname{sh}x\cos y - \sin y\operatorname{ch}x] = \operatorname{sh}x\cos y - \frac{1}{i}\sin y\operatorname{ch}x$$

$$= \operatorname{sh}x\cos y + \frac{i^2}{i}\sin y\operatorname{ch}x$$

$$= \operatorname{sh}x\cos y + i\sin y\operatorname{ch}x$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{sh}\,z) = \mathrm{sh}\,x \cos y$$
$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{sh}\,z) = \sin y\,\mathrm{ch}\,x$$

سادساً: حل المعادلة: $\tan z - 1 = 0$

الحل:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = 1$$

ومنه:

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = 1 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = i(e^{iz} + e^{-iz})$$

نضرب طرفي المعادلة بالمقدار e^{iz} فنجد:

$$e^{2iz} - 1 = i(e^{2iz} + 1)$$
$$e^{2iz} - ie^{2iz} = 1 + i$$
$$e^{2iz}(1 - i) = 1 + i \Rightarrow e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\ln(e^{2iz}) = \ln i \Rightarrow 2iz \ln e = \ln i$$
$$2iz = \ln i = (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)i; k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

إذن حل المعادلة المطلوب هو: $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$

سابعاً: برهن صحة العلاقة: $\ln i^3 \neq 3 \ln i$

$$\ln i^3 = \ln(i^2 \cdot i) = \ln(-i) = \ln|-i| + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$= 0 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$= \pi i(2k - \frac{1}{2}) \qquad (أ)$$

$$\ln i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 0 + \pi i(2k + \frac{1}{2})$$

$$3\ln i = 3\pi i(2k + \frac{1}{2}) \qquad (ب)$$

من (أ) و (ب) نجد المطلوب.

٣ . ٧ . تمارين غير محلولة:

أولاً: أوجد قيمة e^z لكل قيمة من قيم z التالية:

أ. $z = \sqrt{3} - i$ ب. $z = \frac{\pi}{2} i$

جـ. $z = 1 + \frac{\pi}{6} i$ د. $z = 3 - \frac{3\pi}{4} i$

ثانياً: أوجد قيمة z التي تحقق المعادلة $e^z = w$ لكل قيمة من قيم w التالية:

أ. $w = 2i$ ب. $w = \sqrt{3} + i$

جـ. $w = 1 - i$ د. $w = -4$

ثالثاً: عبِّر عن الدوال التالية بالصيغة $u + vi$:

أ. $f(z) = e^{x^2}$ ب. $f(z) = e^{\bar{z}}$

جـ. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ د. $f(z) = e^{|z|^2}$

رابعاً: لأي عدد مركب z بيِّن أن:

أ . $\left|\exp(z)^2\right| \le \exp\left(|z|^2\right)$

ب . $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$

خامساً: برهن صحة ما يلي:

أ . $|e^{-2z}| < 1$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط $\operatorname{Re} z > 0$.

ب . $e^{i\bar{z}} = \overline{(e^{zi})}$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط: $z = n\pi\ ,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

سادساً: أوجد الشرط (الشروط) التي تجعل الجمل التالية صواباً:

أ . قيمة e^x حقيقية بحتة.

ب . قيمة e^z تخيلية بحتة.

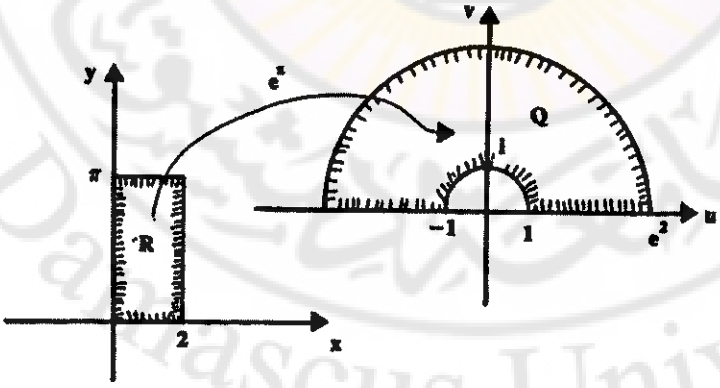
سابعاً: بالاستعانة بمثال بيِّن أن صورة المنطقة المستطيلة R حيث:

$$R = \{z \in C: 0 \le \operatorname{Re} z \le 2,\ 0 \le \operatorname{Im}. z \le \pi\}$$

تحت تأثير الدالة $f(z) = e^z$ هي نصف الحلقة Q حيث إن:

$$Q = \{w \in C: 1 \le |w| \le e^2\ ,\ 0 \le \operatorname{Arg} w \le \pi\}$$

كما في الشكل التالي:



الشكل (٥)

ثامناً: لأي عدد حقيقي α أوجد صورة الشريحة اللانهائية.

$$\{z \in C: \alpha \le \text{Im. } z \le \alpha + 2\pi\}$$

تحت الدالة $f(z) = e^z$.

تاسعاً: أوجد صورة الخط المستقيم:

$$\{z \in C: z = t + (t + 2\pi)i, t \in R\}$$

تحت الدالة $f(z) = e^z$.

عاشراً: صف سلوك الدوال:

أ. $e^{(x + yi)}$ عندما تقترب x من ∞ -

ب. $e^{(2\pi + yi)}$ عندما تقترب y من ∞

حادي عشر: برهن أن $z^n = e^{n \log z}$

حيث إن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ثاني عشر: بيِّن أن $\log z^n = n \log z$ قد لا يكون صواباً.

اقتراح: ابدأ بالفرض $n = 2, z = -1 + i$ مثلاً.

ثالث عشر: عرِّف الدالة $\log z$ كما يلي:

$$\log z = \ln r + \theta i, r > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}$$

أوجد قيمة $\log i^2$ في هذا الفرع، ثم أوجد قيمة $2 \log i$ وقارن بينهما. ماذا تستنتج؟

أوجد مجالاً للمتغير θ بحيث يكون:

$$\log i^2 = 2 \log i$$

رابع عشر: إذا فرض أن z, w تحققان الشرطين $\text{Re. } z > 0$ و $\text{Re. } w > 0$ فبيِّن أن:

$$\log zw = \log z + \log w$$

خمسة عشر: أوجد العلاقة بين $\log z$, $\log (1/z)$.

سادس عشر: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

أ. $f(z) = \log (z^3 + 3z)$

ب. $g(z) = z^2 \log 2z$

سابع عشر: أوجد الفرع للدالة $\log (z^2 - 2z + 5)$ الذي يكون تحليلياً عند النقطة $z = 1$.

ثامن عشر: أوجد فرعاً للدالة $\log (2z + i - 1)$ يكون تحليلياً على كل الأعداد المركبة باستثناء الأعداد المركبة في كل حالة مما يلي:

أ. $\{z \in C : \mathrm{Re}.z \le \frac{1}{2}, \mathrm{Im}.z = -\frac{1}{2}\}$

ب. $\{z \in C : \mathrm{Re}.z \ge \frac{1}{2}, \mathrm{Im}.z = -\frac{1}{2}\}$

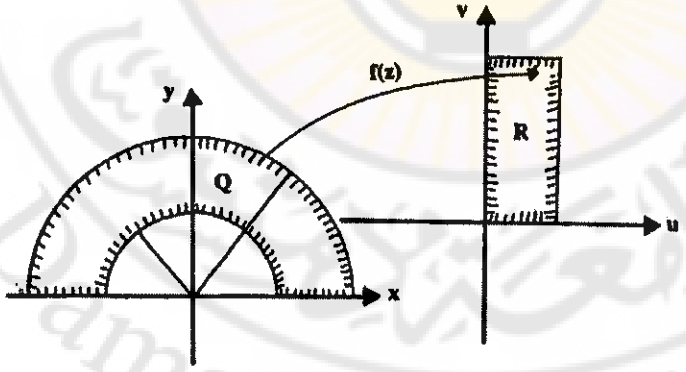
تاسع عشر: ابحث عن فرع للدالة $\log (z + 4)$ يكون تحليلياً عند $z = -5$ ويأخذ القيمة $7\pi i$ هناك.

عشرون: بعكس سلوك الدالة الأسية بيّن أن الدالة وحيدة القيمة:

$w = f(z) = \mathrm{Log}\, z \,,\ |z| > 0 \,,\ -\pi < \mathrm{Im}.\, z < \pi$

تنقل المنطقة Q إلى R حيث إن:

$Q = \{z \in C: 1 \le |z| \le e^2, 0 \le \mathrm{Arg}\, z \le \pi\}$
$R = \{w \in C: 0 \le \mathrm{Re}.\, w \le 2, 0 \le \mathrm{Im}.\, w \le \pi\}$



الشكل (٦)

حادٍ وعشرون: أوجد قيم الأسس المركبة التالية:

أ. $(2i)^{i}$ ب. $(-1)^{2/3}$

جـ. $(i)^{3/4}$ د. $(-i)^{\pi i}$

هـ. $(1+i)^{i-2}$ و. π^{-i}

ثانٍ وعشرون: أوجد القيمة الرئيسية للأسس المركبة التالية:

أ. $(2+i)^{2+i}$ ب. $2^{\sqrt{2}}$

ثالث وعشرون: أوجد قيم $(1-\sqrt{3}i)^{2/3}$ بثلاث طرق مختلفة.

اقتراح: أولاً بالتعريف ثم بإيجاد $\left[(1-\sqrt{3}i)^{2}\right]^{1/3}$، ثم بإيجاد $\left[(1-\sqrt{3}i)^{1/3}\right]^{2}$.

رابع وعشرون: برهن لأي عددين مركبين α, β ولأي عدد مركب $z \neq 0$ فإن المتطابقات التالية صحيحة فقط في حالة الفرع الرئيسي للدالة الأسية:

أ. $z^{\alpha} . z^{\beta} = z^{\alpha+\beta}$

ب. $z^{\alpha}/z^{\beta} = z^{\alpha-\beta}$

جـ. $1/z^{\beta} = z^{-\beta}$

خامس وعشرون: برهن أو انفِ صحة المساواة التالية:

القيمة الرئيسية للمقدار $(z . w)^{\alpha}$ = القيمة الرئيسية للمقدار $z^{\alpha} . w^{\alpha}$ حيث إن α, z, w أعداد مركبة. بحيث إن $z \neq 0$ و $w \neq 0$.

سادس وعشرون: ما هي قيمة العدد العقدي z الذي يجعل $\sin z = 10$

سابع وعشرون: أوجد الفرع الرئيسي للدالة $f(z) = z^{1/2}$ ثم أوجد نقطة التفرع وكذلك فصل الفرع لها.

ثامن وعشرون: أوجد المشتقة التالية حيثما وجدت ثم أوجد النقاط الشاذة (إن وجدت) لهذه الدوال:

أ. $f(z) = z^{(1+\sqrt{3}i)}$

ب. $f(z) = i^z$

جـ. $f(z) = z^{\sqrt{3}}$

د. $f(z) = 2^{2z}$

تاسع وعشرون: برهن المساواة التالية لأي عدد مركب z.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

اقتراح: استعن بتعريف الأسس المركبة ثم بخاصية الاستمرار ثم طبق قانون أوبيتال لإيجاد النهاية.

ثلاثون: أوجد فرعاً للدالة $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ يكون تحليلياً على جميع الأعداد المركبة باستثناء تلك التي تنتمي للمجموعة التالية:

$Q = \{z \in C: |Re.\ z| < 1\ ,\ Im.\ z = 0\}$

حادٍ وثلاثون: أوجد قيم كل مما يلي:

أ. $\log ei$

ب. $\log(1+\sqrt{3}i)$

جـ. $\log e$

د. $\log(1-i)$

ثانٍ وثلاثون: أوجد قيم كل مما يلي:

أ. $Log\ (-1)^2$

ب. $Log\ (-1)$

جـ. $Log\ (-1+i)^2$

د. $Log\ (-1+i)$

هـ. $Log\ ei$

و. $Log\ e$

ثالث وثلاثون: أوجد قيم z التي تحقق المعادلات التالية:

أ. $\mathrm{Log}z = 1 + \frac{\pi}{3}i$ ب. $\log z = \frac{\pi}{4}i$

جـ. $\mathrm{Log}(2z+1) = \frac{\pi}{2}i$ د. $e^z = ei$

هـ. $e^{2z} + e^z + 2 = 0$ و. $e^{z-1} = \frac{\pi}{6}$

رابع وثلاثون: بيِّن أن العلاقة بين log z و Log z هي:

$$\log z = \mathrm{Log}\, z + 2n\pi i\ ,\ n = 0, \pm 1, \ldots$$

خامس وثلاثون: أ. بيِّن أن $e^{\log z} = z$ لأي عدد مركب z.

ب. بينما لأي عدد مركب z يكون:

$$\log e^z = z + 2n\pi i\ ,\ n = 0, \pm 1, \ldots$$

جـ. بيِّن أن $\log\ e^z = z$ لأي عدد مركب z إذا وإذا فقط تحقق الشرط: $-\pi < \mathrm{Im.}\ Z \le \pi$

سادس وثلاثون: اكتب ما يلي على الصيغة u + vi ثم أوجد قيمتها:

أ. $\cos(1-i)$ ب. $\sin(\frac{\pi}{2} + i)$

جـ. $\sec 2i$ د. $\tan\frac{\pi + 4i}{4}$

سابع وثلاثون: تحقق مما يلي:

أ. $\sin(\pi - z) = \sin z$

ب. $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos z$

جـ. $\cos(\pi + z) = -\cos z$

د . $\tan(z+\pi) = \tan z$

ثامن وثلاثون: برهن المتطابقات التالية:

أ . $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$

ب . $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$

جـ . $2 \sin z \cos w = \sin(z+w) + \sin(z-w)$

د . $2\sin z \sin w = \cos(z-w) - \cos(z+w)$

تاسع وثلاثون: بالاستعانة بالفرع هـ . من مبرهنة (٨) برهن أن:

أ . $|\sin x| \le |\sin z|$

ب . $|\cos x| \le |\cos z|$

أربعون: بالاستعانة بالفرع هـ من المبرهنة (٨) برهن أن:

أ . $|\sinh y| \le |\sin z| \le \cosh y$

ب . $|\sinh y| \le |\cos z| \le \cosh y$

حادٍ وأربعون: بالاستعانة بالتمرين السابق برهن أن: $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 \ge 1$

ثم أوجد شرطاً لتتحقق المساواة فقط.

ثانٍ وأربعون: أوجد جميع قيم z التي تحقق المعادلات التالية:

أ . $\cos z = \cosh 2$

ب . $\cos z = 4$

جـ . $\sin z = \pi i$

د . $\sin z = i \sinh 1$

ثالث وأربعون: أوجد المشتقة لكل من الدوال التالية:

أ. $f(z) = \cos(1/z)$

ب. $f(z) = \sin(z^3)$

جـ. $f(z) = z^2 \sec z$

د. $f(z) = z \cot z$

رابع وأربعون: بيِّن أن كلاً من $\cos \bar{z}$ ، $\sin \bar{z}$ ليست تحليلية على أي عدد مركب.

خامس وأربعون: بيِّن أن e^{iz} دورية بدورة مقدارها π^2.

ثم أوجد جذور المعادلة $e^{zi} + 1 = 0$

ثم بيِّن أن: $e^{zi} = \cos z + i \sin z$ لكل عدد مركب z.

سادس وأربعون: برهن أن:

أ. $\cos yi = \cosh y$

ب. $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$

سابع وأربعون: برهن صحة المتطابقة الآتية:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

اقتراح: افرض أن: $f(z) = \cos 2z$, $g(z) = \cos^2 z - \sin^2 z$

ثم بيِّن أن $f'(z) = g'(z)$ لجميع قيم z ثم أكمل البرهان.

ثامن وأربعون: بيِّن أن:

أ. $\cos(\overline{zi}) = \overline{\cos(zi)}$ لجميع قيم z.

ب. $\sin(\overline{zi}) = \overline{\sin(zi)}$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$z = n\pi i,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

تاسع وأربعون: أ . بيِّن أن الدالة $\cos x \sinh y$ هي المرافق التوافقي للدالة التوافقية $\sin x \cosh y$.

ب . بيِّن أن الدالة $\sin x \sinh y$ ليست المرافق التوافقي للدالة التوافقية $\cos x \cosh y$ ثم أوجد المرافق التوافقي لها.

خمسون: بيِّن أن $\lim_{|y|\to\infty} |\sin yi| = \infty$ ثم استنتج أن:

$$\lim_{|y|\to\infty} |\sin(x_0 + yi)| = \infty$$

اقتراح: استفد من الخاصية:

$$\sin(yi) = i \,.\, \sinh y$$

حادٍ وخمسون: في المسائل من (١) إلى (٦) أوجد القيم للمقادير المعطاة:

(١) $\log i$ (٢) $\log(1+i)$

(٣) $\log(-1)$ (٤) 1^i

(٥) $e^{e^{1+i}}$ (٦) $(1+i)^{1+i}$

ثانٍ وخمسون: في المسائل من (٧) إلى (١٠) أوجد القيم الرئيسية للمقادير المعطاة:

(٧) $\log i$ (٨) $\log(1+i)$

(٩) $\arctan 1$ (١٠) $(1+i)^{1+i}$

(١١) $\mathrm{Arctan}(1+i)$ (١٢) $\mathrm{Arccos}\, 1$

(١٣) $\mathrm{Arcsin}\, 2$ (١٤) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ثالث وخمسون: لأي القيم العدد المركب a يمكن أن نمد الدالة z^a حتى تصبح مستمرة عند $z = 0$؟ ومتى تكون هذه الدالة صحيحة؟

رابع وخمسون: أثبت أن $\log z$ هي الدالة التحليلية الوحيدة التي تكون حلاً للمعادلة التفاضلية:

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad , \quad f(1) = 0$$

في القرص $|z - 1| < 1$.

خامس وخمسون: إذا علمت أن $w = z^{1+i}$ فاحسب $w'(i)$.

سادس وخمسون: ناقش المحيرة التالية:

نعلم أن $e^{2\pi i} = 1$ إذن: $e^{2\pi i\left(\frac{1}{2\pi i}\right)} = (1)^{\frac{1}{2\pi i}} = 1$ ولكن: $e^{\frac{2\pi i}{2\pi i}} = e$ إذن $e = 1$.

سابع وخمسون: إذا فرضنا أن: $z = x + iy$ فاحسب بدلالة المتغيرين x,y ما يلي:

$$\left|e^{i+3z}\right| \ ; \ \left|e^{z^2}\right| \ ; \ \left|e^{(i+z)(i-z)}\right|$$

ثامن وخمسون: ما مجموعة قيم الثابت α التي من أجلها تتطابق قيم مجموعة $(a^2)^\alpha$ مع مجموعة قيم $(a)^{2\alpha}$.

تاسع وخمسون: أثبت أن: $\operatorname{Log}(-1-i) - \operatorname{Log} i \neq \operatorname{Log}\left(\frac{-1-i}{i}\right)$

ستون: أوجد الخطأ في التعبير الآتي:

$$i = (-1)^{\frac{1}{2}} = \left[(-1)^3\right]^{\frac{1}{2}} = \left[-1\right]^{\frac{3}{2}} = i^3 = -i$$

حادٍ وستون: أثبت أن $\log z^a = a \log z$, a عدد مركب $\neq$ الصفر، $z \neq 0$.

ثانٍ وستون: هل 1 مرفوعاً لأي قوة يساوي واحداً دائماً؟

ثالث وستون: أثبت أن: $\cos^{-1} z = -i \log\left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$

رابع وستون: أثبت أن: $\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right), z \neq \pm i$

خامس وستون: أثبت أن: $\cot^{-1} z = \frac{i}{2}\log\left(\frac{z-i}{z+i}\right), z \neq \pm i$

سادس وستون: أثبت أن: $\sinh^{-1} z = \log\left[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$

سابع وستون: أثبت أن: $\cosh^{-1} z = \log\left[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$

ثامن وستون: أثبت أن: $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), z \neq \pm 1$

تاسع وستون: أثبت أن: $\left(\sin^{-1} z\right)' = \left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm 1$

سبعون: أثبت أن: $\left(\cos^{-1} z\right)' = -\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \ z \neq \pm 1$

حادٍ وسبعون: أثبت أن: $\left(\tan^{-1} z\right)' = \frac{1}{1+z^2}, z \neq \pm 1$

ثانٍ وسبعون: أثبت أن: $\left(\sinh^{-1} z\right)' = \left(1+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm 1$

ثالث وسبعون: برهن المتطابقة:

$$\sin^{-1} z + \cos^{-1} z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

لأي عدد مركب z وحيث إن: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

رابع وسبعون: أوجد فرعاً لكل من الدوال f(z) التالية بحيث يكون قابلاً للمفاضلة في الساحة المبينة جانب الدالة f:

(١) $f(z) = \sqrt{z^2-1} \ ; \ |z| < 1$

(٢) $f(z)=\sqrt{z^2+4}\ ;\ C/[-2i,2i]$

(٣) $f(z)=\sqrt{z^4-1}\ ;\ |z|>1$

(٤) $f(z)=\sqrt[3]{z^3-1}\ ;\ |z|>1$

خامس وسبعون: برهن المتباينة التالية:

$$|\sinh x| \le |\cosh z| \le \cosh x$$

لأي عدد مركب $z = x + yi$.

سادس وسبعون: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

أ. $f(z)=(\sinh z^2+1)^{\frac{3}{2}}$

ب. $f(z)=\cosh^{-1}(i+z^2)$

سابع وسبعون: بيِّن أن الدالتين $\sinh \bar{z}, \cosh \bar{z}$ ليستا تحليليتين عند أي عدد مركب.

ثامن وسبعون: برهن ما يلي:

أ. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$

ب. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z}=0$

اقتراح: استفد من تعريف المشتقة: $f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}$

تاسع وسبعون: أوجد ما يلي:

أ. $\sinh\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)$ ب. $\cosh(-1+\pi i)$

جـ. $\cos^{-1}\sqrt{2}$ د. $\sin^{-1} i$

هـ. $\tanh^{-1} 1$ و. $\sinh^{-1}\left(\frac{\pi}{4}i\right)$

ثمانون: أوجد جميع قيم z التي تحقق المعادلة في كل مما يلي:

أ. $\sin z = \frac{\pi}{2}i$ ب. $\sin z = \frac{4i}{3}$

جـ. $\sinh z = -i$ د. $\tanh z = \frac{1}{2}$

هـ. $\tan z = \frac{5i}{3}$ و. $\cos z = \frac{3+i}{4}$

* * *

الفصل الرابع

التكامل المركب

Complex Integration

تحدثنا في الفصل الثاني عن قابلية الدوال المركبة للاشتقاق، وتعرفنا على صنف مهم من الدوال المركبة تلك هي الدوال التحليلية على مجال ما. وفي هذا الفصل نتحدث عن قابلية التكامل للدوال المركبة، لنجد أن الدوال التحليلية تملك خصائص تكاملية ممتازة وترث كل الخصائص تقريباً المعروفة في التفاضل والتكامل. فنبدأ بأبسط أنواع التكامل المركب مروراً بتكامل المسار وعلاقته بمبرهنة غرين المعروفة في التحليل المتجه ثم نعرف خاصية الاستقلالية عن المسار للدوال التحليلية، ولصنف خاص من المسارات نتحدث عن مبرهنة كوشي كورسات. هذا كله في البندين الأول والثاني. أما البند الثالث فخصص لمبرهنة كوشي للتكامل المركب ونتائجها في البند الرابع. أما التطبيقات فستكون في البند الخامس.

٤ . ١ . التكامل المركب وتكامل المسار:

الدالة المركبة $f = u + vi$ يمكن أن تعتمد على متغير واحد فقط بدلاً من متغيرين x, y، ويتم ذلك عندما تكون كل من الدالتين u, v حقيقية بمتغير واحد t ومن ثمَّ تأخذ الدالة المركبة f الشكل التالي:

$$f(t) = u(t) + iv(t);\ a \le t \le b \qquad (1)$$

وتكامل هذا الصنف من الدوال هو أبسط أنواع التكامل المركب وهو معرف فيما يلي:

تعريف (١):

بفرض أن الدالة المركبة f تأخذ الشكل (1) فإن:

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b u(t)dt\right) + i\left(\int_a^b v(t)dt\right) \qquad (2)$$

ويتم إيجاد قيمة تكاملات الطرف الأيمن للمساواة (2) بالطرق التقليدية لإيجاد التكامل في التفاضل والتكامل.

مثال (١):

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\pi/3} e^{ti}dt$

الحل:

بما أن $e^{ti} = \cos t + i \sin t$

يتوافق مع الشكل (1) فإن التعريف (١) يؤكد أن:

$$\int_0^{\pi/3} e^{ti}dt = \left(\int_0^{\pi/3} \cos t dt\right) + i\left(\int_0^{\pi/3} \sin t dt\right)$$
$$= \sin t\Big|_0^{\pi/3} + i(-\cos t)\Big|_0^{\pi/3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$$

نلاحظ أن قيمة التكامل المركب عدد مركب.

إن كثيراً من خصائص التكامل يتوارثها بشكل طبيعي التكامل المركب (2) بالإضافة إلى بعض الصفات المكتسبة، المبرهنة التالي تتضمن بعض تلك الصفات:

مبرهنة (١):

بفرض أن الدالتين f, g تأخذان الشكل (1) فإن:

أ. $$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \qquad (3)$$

ب. لأي عدد حقيقي c فإن:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \qquad (4)$$

جـ. لأي عدد مركب α فإن:

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt \qquad (5)$$

د. $$(6)\ \mathrm{Re}.\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \left(\mathrm{Re}.f(t)\right)dt$$

$$\mathrm{Im}.\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \left(\mathrm{Im}.f(t)\right)dt \qquad (7)$$

هـ. $$(8)\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

و. وإذا فرضنا أن: $a \le t \le b\ ;\ F(t) = U(t) + i\,V(t)$

بحيث إن: $a \le t \le b\ ,\ V'(t) = v(t)\ ,\ U'(t) = u(t)$

فإن:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \qquad (9)$$

البرهان:

الخاصيتان أ، جـ تمثلان الخصائص الخطية للتكامل، أما الخاصية (ب) فهي الخاصية التجمعية له. بما أن الخصائص أ، ب، د، يمكن استنتاجها من التعريف (٢) مباشرة فنترك إثباتها للقارئ ونبرهن الخاصيتين جـ، هـ فقط، ولإثبات جـ نفرض أن: $\alpha = \beta + \gamma i$ وبالتعويض وباستخدام التعريف (2) نستنتج أن:

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \int_a^b \left[\left(\beta u(t) - \gamma v(t)\right) + i\left(\beta v(t) + \gamma u(t)\right)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left(\beta u(t) - \gamma v(t)\right)dt + \int_a^b i\left(\beta v(t) + \gamma u(t)\right)dt$$

وبتطبيق الخاصية الخطية للتكامل الحقيقي وإعادة التجميع فإن:

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = (\beta + \gamma i)\int_a^b u(t)dt + i(\beta + \gamma i)\int_a^b v(t)dt$$

$$= \alpha\left[\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt\right]$$

$$= \alpha\int_a^b f(t)dt$$

ولإثبات الفرع هـ نستفيد من الشكل القطبي للعدد المركب فنكتب $\int_a^b f(t)dt$ كما يلي:

$$\int_a^b f(t)dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right| e^{\theta_0 i}$$

ومن ذلك فإن:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b e^{-\theta_0 i} f(t)dt$$

وبما أن الطرف الأيسر عدد حقيقي فإن التكامل في الطرف الأيمن يجب أن يكون حقيقياً كذلك، وبالاستفادة من الخاصية د من النظرية السابقة نستنتج أن:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}.\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right)dt$$

ومن خصائص الأعداد المركبة أن:

$$\mathrm{Re}.e^{-\theta_0 i} f(t) \le \left|e^{-\theta_0 i} f(t)\right| \le \left|f(t)\right|, \qquad a \le t \le b$$

وبالاستفادة من خاصية المقارنة للتكامل الحقيقي فإن:

$$\int_a^b \mathrm{Re}.\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right)dt \le \int_a^b \left|f(t)\right|dt$$

أي إن:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

ولمعرفة نوع آخر من التكامل المركب نذكر القارئ بالمنحنيات المستوية(Plane curves) والمنحني المستوي الذي يرمز له بالرمز C معرف بالمساواة التالية:

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t)\ ,\ a \le t \le b\}$$

بحيث إن الدالتين $x(t),\ y(t)$ مستمرتان على الفترة $[a,\ b]$ ويسمى المنحني C بسيطاً إذا لم يقطع نفسه أي إذا تحقق الشرط $z(t_1) \ne z(t_2)$ لكل $t_1 \ne t_2$، ويسمى المنحني C كذلك مغلقاً إذا تحقق الشرط $z(a) = z(b)$ حيث a تمثل نقطة البداية و b تمثل نقطة النهاية للمنحني نفسه باتجاه تزايد المتغير الوسيط t.

الشكل (١) أنواع المسارات

كما يسمى المنحني C (ممهداً) أملسَ إذا كان قابلاً للاشتقاق، أي إذا وجدت المشتقات $x'(t),\ y'(t)$ عند كل t في $[a,\ b]$، ويسمى المنحني C أملس جزئياً أو (أملس تقطيعياً) إذا تكون من عدد منتهٍ من المنحنيات الملساء موصولة بعضها ببعض نهاية السابق مع بداية اللاحق، وهذا النوع من المنحنيات (التي هي متعددة الأجزاء) (ملساء جزئياً) تسمى المسار أو كانتور. والكانتور له اتجاه اعتماداً على زيادة المتغير الوسيط t وقد اصطلح على أن يكون اتجاه المسار (الطريق) موجباً باتجاه زيادة المتغير t وسالباً باتجاه تناقص t.

وباستخدام فكرة المسار أو الكانتور أو الطريق يمكن أن نعرف نوعاً آخر من التكاملات المركبة فيما يلي:

تعريف (٢):

بفرض أن $f(z)$ دالة مركبة، وأن C مسار (طريق) يصل بين العددين المركبين α, β فإن:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)dz \qquad (10)$$

يسمى تكامل المسار (أو تكامل الكانتور) (Line Integral) للدالة f على المسار C ويسمى الكانتور C مسار التكامل.

إذا فرض أن الدالة f هي الدالة الثابتة بقيمة 1 فإن:

$$\int_\alpha^\beta dz = \int_C dz = \int_a^b \left(x'(t) + iy'(t)\right)dt \qquad (11)$$

يؤول إلى التكامل (2) وفي الواقع فإن طول الكانتور C الذي يرمز له بالرمز L يمكن إيجاده بالمعادلة التالية:

$$L = \int_a^b |dz| = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \qquad (12)$$

هذا بافتراض أن المسار C أملس على الفترة $[a, b]$.

كما أنه يمكن إيجاد قيمة (10) بتحويله إلى التكامل (2) وذلك بمعرفة المعادلات الوسيطية لمسار التكامل وهي $x(t), y(t)$ لينتج من ذلك ما يلي:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\left(x(t) + iy(t)\right)z'(t)dt \qquad (13)$$

وبما أن المسار C ممهد الأجزاء فإن $z'(t)$ مستمرة استمراراً جزئياً، ومن ثمَّ فإن التكامل على الطرف الأيمن موجود، ويمكن أن يأخذ الشكل التالي:

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (uy' + vx')dt \qquad (14)$$

حيث إن كلاً من x', y', u, v في الطرف الأيمن تفهم على أنها:

$$u = u(x(t), y(t)), v = v(x(t), y(t))$$

$$x' = x'(t)\ ,\ y' = y'\ (t)$$

وهذا التكامل (14) هو نفس التكامل (2) وبالتعريف يمكن أن نفهم:

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz \qquad (15)$$

حيث إن $-C$ يمثل الاتجاه السالب للكانتور C. إن قابلية التكامل لدالة ما تؤكده المبرهنة التالية التي نذكرها دون برهان.

مبرهنة (٢):

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال D الذي يحتوي المسار الأملس C فإنها تكون قابلة للتكامل على C أي إن:

$\int_C f(z)dz$ عدد مركب.

أما المبرهنة التالية فتذكر أهم خصائص تكامل المسار.

مبرهنة (٣):

بفرض أن g و f دالتان مركبتان، وأن C_1, C_2, C مسارات فإن:

أ. $\int_C (f+g)(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz \qquad (16)$

ب. لأي عدد مركب α فإن:

$$\int_C \alpha f(z)dz = \alpha \cdot \int_C f(z)dz \qquad (17)$$

جـ. إذا كان المسار C_1 موصولاً بالمسار C_2 نهاية الأول ببداية الثاني ويرمز لهما بالرمز C فإن:

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C} f(z)dz \qquad (18)$$

د . إذا كان M عدداً حقيقياً موجباً بحيث $|f(z)| \le M$ لكل z في مجال f فإن:

$$\left|\int_{C} f(z)dz\right| \le M.L \qquad (19)$$

حيث يمثل L طول المسار C.

البرهان:

بما أن التكامل $\int_{C} f(z)dz$ يمكن اختصاره إلى الشكل (2)، نبرهن فقط الفرع (د). ولذلك فإن الخاصية (هـ) من المبرهنة (١) تؤكد أن:

$$\left|\int_{C} f(z)dz\right| \le \int_{a}^{b} |f(z)||dz| \le M\int_{a}^{b} |z'(t)|dt \qquad (20)$$

هذا بفرض أن C قابل للاشتقاق على الفترة [a, b] وإذا كان أملس جزئياً فإننا بحاجة إلى تقسيم التكامل حسب الفترات التي يكون عليها C أملسَ.

وبما أن $L = \int_{a}^{b} |z'(t)|dt$ هو طول الكانتور (الطريق) فإن:

$$\left|\int_{C} f(z)dz\right| \le M.L$$

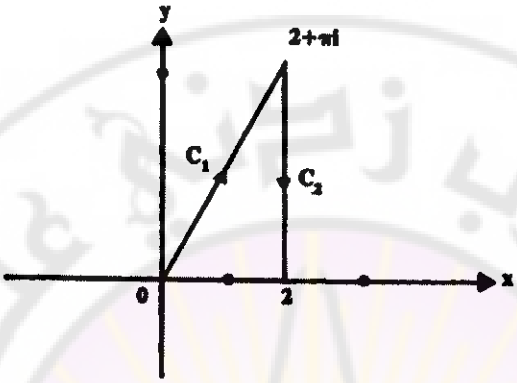
مثال (٢):

أوجد قيمة التكامل $\int_{C} f(z)dz$ حيث إن $f(z) = e^{zi}$ ومسار التكامل C هو الكانتور (الطريق) المكون من الخطين المستقيمين اللذين يصلان بين النقاط $0, 2+\pi i, 2$ على الترتيب.

الحل:

نبحث عن المعادلات الوسيطية لكل من هذين الخطين المستقيمين فيكون المستقيم الأول C_1 معرَّفاً بما يلي:

$$C_1 : y = \frac{\pi}{2}x, 0 \le x \le 2$$



الشكل (٢)

أما المستقيم الثاني C_2 فهو معرف بما يلي: $C_2: x = 2 , \pi \ge y \ge 0$

ومن ذلك يمكن كتابة التكامل كمجموع تكاملين:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

ولإيجاد التكامل الأول على المسار C_1 فإن المعادلات الوسيطية لهذا المسار تبين أن:

$$dz = dx + idy = dx + i\left(\frac{\pi}{2}\right)dx$$

$$= \left(1 + \frac{\pi}{2}i\right)dx$$

ومن ذلك فإن:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^2 e^{i(x+\frac{\pi}{2}xi)}(1 + \frac{\pi}{2}i)dx$$

$$= (1+\frac{\pi}{2}i)\int_0^2 e^{(-\frac{\pi}{2}+i)x}dx$$

وبما أن الدالة: $\frac{1}{(-\frac{\pi}{2}+i)}e^{(-\frac{\pi}{2}+i)x}$ هي أصل المشتقة للدالة $e^{(-\frac{\pi}{2}+i)x}$ فإن:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1+\frac{\pi}{2}i}{-\frac{\pi}{2}+i}e^{(-\frac{\pi}{2}+i)x}\Big|_0^2$$

$$= \frac{1+\frac{\pi}{2}i}{-\frac{\pi}{2}+i}\left\{e^{(-\pi+2i)}-1\right\}$$

$$= i(1-e^{-\pi}e^{2i})$$

وكذلك فإن المعادلات الوسيطية للمسار الثاني C_2 تبين أن:

$$dz = dx + i\,dy = (dy)\,i$$

لأن x مقدار ثابت.

ومن ثمَّ فإن:

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{\pi}^{0} e^{i(2+yi)}idy$$

$$= ie^{2i}\int_{\pi}^{0} e^{-y}dy$$

$$= ie^{2i}(e^{-\pi}-1)$$

لاحظ أن اتجاه المسار فرض أن تكون حدود التكامل من π إلى 0 وليس العكس. ومن ذلك نستنتج قيمة تكامل المسار على C وهي:

$$\int_C f(z)dz = i(1-e^{-\pi}e^{2i}) + i(e^{2i}e^{-\pi}-e^{2i}) = i(1-e^{2i})$$

مثال (٣):

أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث إن $f(z) = z$، وإن المسار (الطريق) C هو دائرة الوحدة.

الحل:

بما أن المسار (الطريق) C هو دائرة الوحدة فإن معادلتيه الوسطيتين هما:

$$C: x = \cos t$$
$$y = \sin t\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$$

ومن ثمَّ فإن:

$$dz = dx + i\,dy$$
$$= (-\sin t + i\cos t)\,dt$$

أما قيمة التكامل فهي:

$$\int_C zdz = \int_0^{2\pi}(\cos t + i\sin t)(-\sin t + i\cos t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -2\cos t\sin t + i(\cos^2 t - \sin^2 t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\sin 2tdt + i\int_0^{2\pi}\cos 2tdt$$
$$= (\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}i\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

مثال (٤):

أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث إن $f(z) = \bar{z}$ والمسار C هو دائرة الوحدة.

الحل:

بالاستفادة من المعادلات الوسيطية لدائرة الوحدة نستنتج أن:

$$dz = (-\sin t + i\cos t)\,dt$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^{2\pi}(\cos t - i\sin t)(-\sin t + i\cos t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi i$$

لاحظ الفرق بين المثال ٣ والمثال ٤ حيث إن قيمة تكامل المسار للدالة التحليلية z على المسار لدائرة الوحدة صفراً بينما قيمة تكامل المسار للدالة $\bar{z}$ التي ليست تحليلية على أي نقطة في المستوي المركب على نفس المسار هي $2\pi i$ وليست صفراً.

مثال (٥):

بيِّن أن: $\left|\int_C \frac{e^{zi}}{z^2 - i}dz\right| \le \frac{12}{5}\pi e^2$

حيث إن: $C: |z| = \frac{3}{2}$.

الحل:

بما أن المسار C هو الدائرة التي نصف قطرها 3/2 فإن طول هذا المسار $L = 3\pi$ بقي أن نجد عدداً حقيقياً موجباً M بحيث إن $|f(z)| \le M$ لكل z في مجالها.

بالاستفادة من المتباينة المثلثية التالية نجد أن:

$$|z^2 - i| \ge |z|^2 - |i| = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\frac{1}{|z^2 - i|} \le \frac{4}{5}$$

أما الدالة الأسية فهي: $\left|e^{zi}\right| = e^{-y} \le e^2$

وهذا يبين قيمة M فتكون: $\left|f(z)\right| \le \frac{4}{5}e^2 = M$

وعليه فإن: $\left|\int_C \frac{e^{zi}}{z^2 - i}dz\right| \le \frac{4}{5}e^2(3\pi) = \frac{12}{5}\pi e^2$

٤ . ٢ . مبرهنة (٣) (كوشي . كورسات) والاستقلالية عن المسار:

(Cauchy – Goarsat):

بالعودة إلى التكامل (10) وهو تكامل المسار:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)dz$$

والذي يمكن إعادة صياغته بشكل آخر بالاستفادة من تمثيل الدالة f(z) على الصيغة $f = u + vi$ وذلك على النحو التالي:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + vi)(dx + idy)$$
$$= \int_C (udx - vdy) + i(udy + vdx)$$

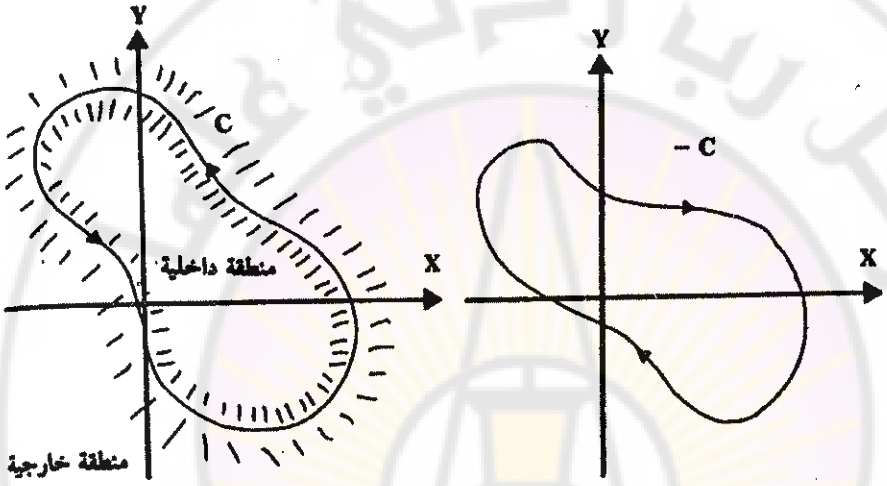
وبالتالي فإن:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (udy + vdx) \qquad (21)$$

ومن ذلك نستنتج أن تكامل المسار للدالة المركبة يمكن فهمه على أنه يتكون من الجزء الحقيقي $\int_C udx - vdy$ والجزء التخيلي $\int_C udy + vdx$ وكل منهما يمثل تكامل المسار المعروف في التحليل المتجه في التفاضل والتكامل والذي يمكن إيجاد قيمته بتطبيق نظرية غرين التي نذكرها للفائدة دون برهان بعد التعرف على نوع مهم من مسارات التكامل. بفرض أن C كانتور مغلق وبسيط فإن C يقسم المستوي إلى قسمين، قسم

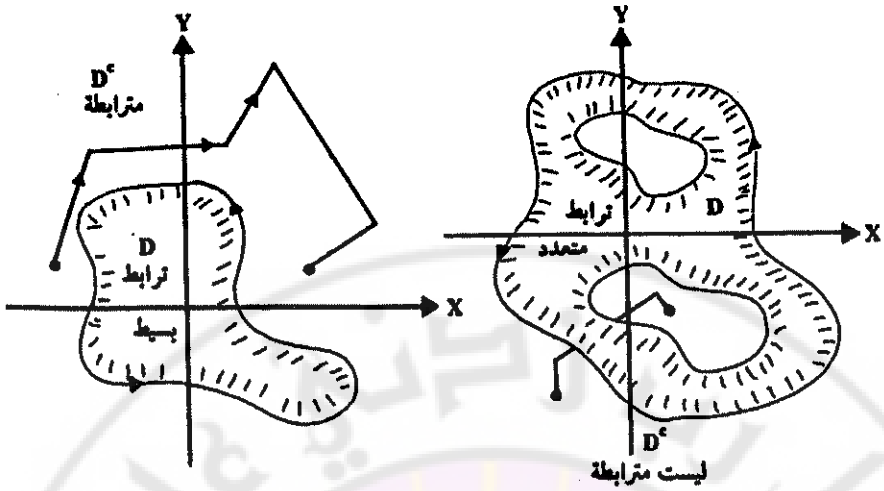
محدود بالمسار C ويسمى المنطقة الداخلية للمسار، وقسم غير محدود بالمسار ويسمى المنطقة الخارجية للمسار.

وبما أن المسار ذو اتجاه فإنه اصطلح على اعتبار الاتجاه الموجب للمسار هو الاتجاه الذي يحدد بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة بحيث تكون المنطقة الداخلية للمسار دائماً على يسار النقطة المتحركة على المسار نفسه كما يوضح الشكل التالي:



الشكل (٣)

والمنطقة الداخلية لمسار موجب الاتجاه C قد تكون مترابطة وقد تكون غير ذلك وهناك نوعان من الترابط. الأول الترابط البسيط، فالمجال D يسمى مترابطاً ترابطاً بسيطاً إذا كانت مكملة D (أي $D^c = C - D$) مترابطة. والنوع الثاني الترابط المتعدد (أو غير البسيط)، فالمجال D يسمى مترابطاً متعدداً إذا كانت مكملة D (وهي D^c) ليست مترابطة. هذه المفاهيم موضحة بالأشكال التالية:



الشكل (٤)

ويمكن أن يفهم المجال المترابط ترابطاً متعدداً (ليس بسيطاً) كصفيحة فيها خرق واحد أو أكثر.

٤ . ٢ . ١ . مبرهنة (٤) غرين (Green):

بفرض أن المسار C كانتور بسيط ومغلق موجب الاتجاه وD تمثل المنطقة الداخلية لهذا المسار، إذا كانت الدالتان $v(x, y)$ و $u(x, y)$ مستمرتين وكذلك المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة على جميع نقاط C و D فإن:

$$\int_C (udx + vdy) = \iint_D (v_x - u_y)dxdy \qquad (22)$$

إن هذه المبرهنة تمكننا من تحويل تكامل المسار (١٥) إلى تكامل ثنائي يمكن إيجاد قيمته بالطرق المعروفة في التفاضل والتكامل كما يلي:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (udy + vdx) \qquad (23)$$

$$\int_C f(z)dz = \iint_D (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_D (u_x - v_y)dxdy$$

لقد استطاع كوشي الاستفادة من مبرهنة غرين بإعطاء برهان للمبرهنة التالية والتي لها أثرٌ مهمٌّ في التكامل المركب.

٤ . ٢ . ٢ . مبرهنة (٥) (كوشي . كورسات):

بفرض أن المجال D مترابط ترابطاً بسيطاً والدالة f تحليلية على المجال D فإذا كان المسار C كانتوراً مغلقاً وبسيطاً يحتويه المجال D فإن:

$$\int_C f(z)dz = 0 \qquad (24)$$

البرهان:

بما أن الدالة f تحليلية فإن الدالتين u, v تحققان معادلتي كوشي . ريمان أي إن:

$$u_x = v_y \ , \ u_y = - v_x$$

وبالاستفادة من المساواة (23) نحصل على النتيجة المطلوبة.

وهناك برهان آخر قدمه كورسات، ويعتمد على التحليل الرياضي (وعلى الفرضية أن المشتقة $f'(z)$ مستمرة ونترك هذا البرهان لمساقات متقدمة في التحليل المركب).

مثال (٦):

بين أن: $\int_C e^{zi} dz = 0$

حيث إن المسار C يمثل دائرة الوحدة.

الحل:

بما أن المسار C يمثل كانتوراً مغلقاً وبسيطاً والدالة $f(z) = e^{zi}$ تحليلية على مجال يحتوي المسار C فإن مبرهنة كوشي . كورسات تؤكد أن:

$$\int_C e^{zi} dz = 0$$

المبرهنة التالية من نتائج مبرهنة كوشي . كورسات.

نتيجة (٦):

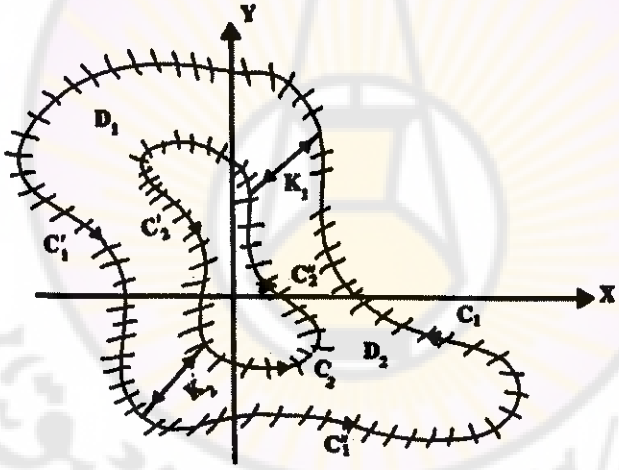
نفرض أن $C_1, \ C_2$ مساران مغلقان بسيطان موجبا الاتجاه أحدهما موجود في المنطقة الداخلية للآخر وأن الدالة $f(z)$ تحليلية على مجال يحتوي كلاً من $C_1, \ C_2$ والمنطقة المحصورة بينهما (وليست بالضرورة على المنطقة الداخلية للمسار الداخلي) فإن:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

البرهان:

نقسم المجال إلى قسمين D_1, D_2.

الأول D_1 محاط بالمسار L_1 حيث إن: $L_1 = C'_1 - K_2 - C'_2 + K_1$ والثاني D_2 محاط بالمسار L_2 حيث إن: $L_2 = C''_1 - K_1 - C''_2 + K_2$



الشكل (٥)

وواضح أن الدالة f تحليلية على المجالين $D_1, \ D_2$ والمسارين اللذين يحيطان بهما L_1, L_2. لذلك يمكننا تطبيق نظرية كوشي ـ كورسات على كل من المجالين لنستنتج أن:

$$\int_{L_1} f(z)dz = 0, \int_{L_2} f(z)dz = 0$$

وبمحاولة جمع المسارين L_1, L_2 نجد أن: $L_1 + L_2 = C_1 - C_2$

ومن ثمَّ فإن: $\int_{C_1-C_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz = 0$

أي إن: $\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$

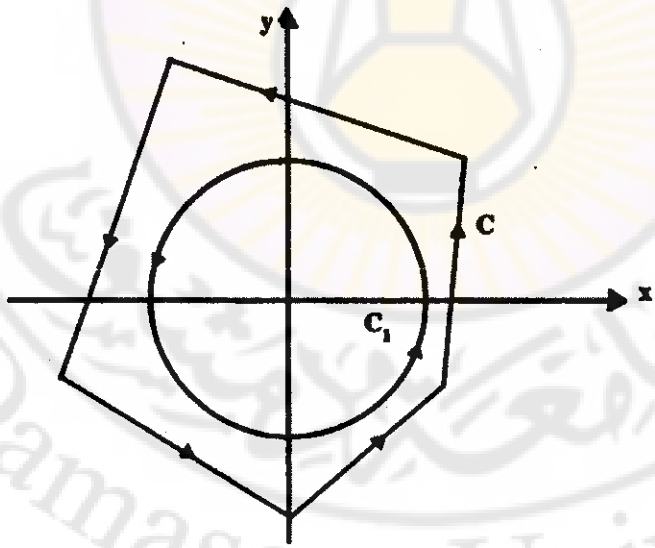
وهذا يعطي النتيجة المطلوبة منهياً برهان النتيجة.

المبرهنة السابقة تفيدنا بأن قيمة تكامل المسار $\int_C f(z)dz$ ثابتة ولا تعتمد على شكل المسار C ما دام هذا المسار مغلقاً وبسيطاً والدالة تحليلية على مجال يحتويه وهذا يمكننا من التخلص من المسار المعقد أو الذي لا نستطيع تمثيله بمعادلات وسيطية والاستبدال به مساراً مغلقاً بسيطاً يمكننا تمثيله بمعادلات وسيطية كما يبين المثال التالي:

مثال (٧):

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_C \frac{1}{z} dz$

حيث إن C يمثل الكانتور المغلق البسيط في الشكل التالي:



الشكل (٦)

الحل:

لتسهيل عملية الحل نستبدل المسار C بدائرة الوحدة وحيث إن الدالة $\frac{1}{z}$ تحليلية على المجال الذي يحتوي المسارين وكذلك على المنطقة المحصورة بينهما فإن النتيجة السابقة قابلة للتطبيق لنستنتج أن:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz$$

وحيث إن C_1 يمثل دائرة الوحدة فإن النقاط z على C_1 تحقق:

$$z(t) = e^{ti}, \ 0 \le t \le 2\pi$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} ie^{-ti} e^{ti} dt$$

$$= 2\pi i$$

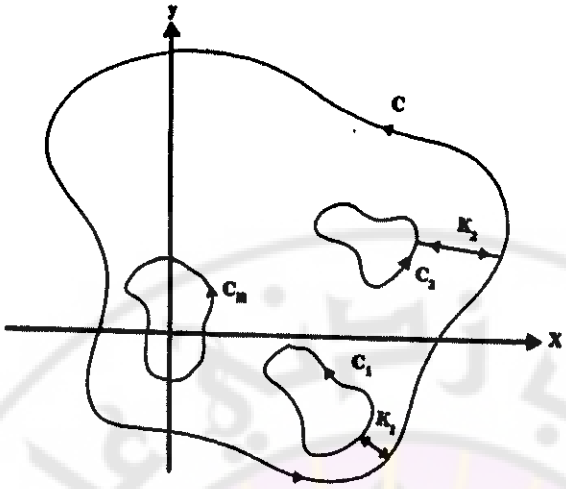
كما أن برهان هذه النتيجة يمكن تطويره لإيجاد صيغة أعم لمبرهنة كوشي . كورسات التالية.

٤ . ٢ . ٣ . مبرهنة (٧) (تعميم لنظرية كوشي . كورسات):

نفرض أن C كانتور مغلق وبسيط موجب الاتجاه وأن $C_1, C_2, \ldots C_n$ تمثل مسارات مغلقة وبسيطة وموجبة الاتجاه ومنفصلة مثنى مثنى تقع في المنطقة الداخلية للمسار C وبفرض أن الدالة f تحليلية على مجال يحتوي على كل من المسارات $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ وعلى المنطقة التي تقع خارج المسارات $C_1, C_2, \ldots, C_n$ وداخل المسار C (وليس بالضرورة داخل المسارات $C_1, C_2, \ldots, C_n$) فإن:

$$\int_B f(z)dz = 0 \qquad (25)$$

حيث يمثل B السمار المكون من $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ الموضح في الشكل التالي (٧):



الشكل (٧)

أي إن B هو:

$$B = C + K_1 - C_1 - K_1 + K_2 - C_2 - K_2 + \ldots + K_n - C_n - K_n$$
$$= C - \{C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n\}$$

لفهم البرهان لاحظ أن الدالة f تحليلية على المجال الذي يمثل المنطقة الداخلية للمسار B الموجب الاتجاه. المثال التالي يبين تطبيق المبرهنة (٧):

مثال (٨):

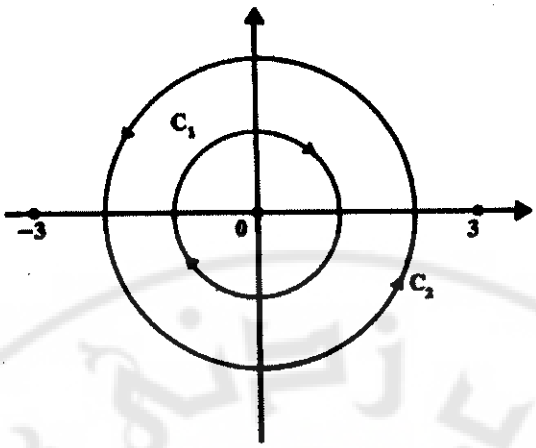
أوجد قيمة التكامل:

$$\int_B \frac{z^3 - i}{z(z^2 - 9)} dz$$

حيث يمثل المسار B مجموع المسارين C_1, C_2 حيث:

C_1 يمثل المسار $z(t) = e^{it}\,;\ 0 \le t \le 2\pi$ السالب الاتجاه.

ويمثل C_2 المسار $z(t) = 2e^{ti}\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$ الموجب الاتجاه.



الشكل (٨)

الحل:

بتطبيق المبرهنة (٧) نستنتج أن قيمة التكامل صفر لأن الدالة تحليلية على كل الأعداد المركبة باستثناء 3 ,0 ,3- وهذه لا تقع في المجال بين C_1, C_2 ولا عليهما.

لاحظنا من النتيجة (٦) أن كون الدالة تحليلية على مجال D يحتوي مسار التكامل المغلق والبسيط C يكسب تكامل المسار صفة هامة، وهي أن التكامل ثابت القيمة لجميع المسارات في ذلك المجال المشابهة للمسار C، والحقيقة أن كون الدالة تحليلية يكسب التكامل عمقاً أكثر من ذلك حيث يجعل التكامل مستقلاً عن المسار، وهذا يمكننا من تعريف التكامل المحدود وغير المحدود ولا سيما المبرهنة الأساسية للتكامل لذلك نبدأ بالتعريف التالي:

تعريف (٣):

إذا كانت قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ ثابتة لجميع المسارات C التي تصل بين نقطتين β و α فإن التكامل:

$$\int_C f(z)dz$$

يسمى مستقلاً عن المسار ويكتب بالصيغة:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)dz \qquad (26)$$

المبرهنة التالية تسمى المبرهنة الأساسية للتكامل.

٤ . ٢ . ٤ . مبرهنة (٨): (المبرهنة الأساسية للتكامل:

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجال المترابط ترابطاً بسيطاً D وأن α نقطة ثابتة في D. إذا كانت z نقطة اختيارية في D والمسار C كانتوراً يصل بين النقطتين α, z ومحتوى كلياً في D فإن الدالة:

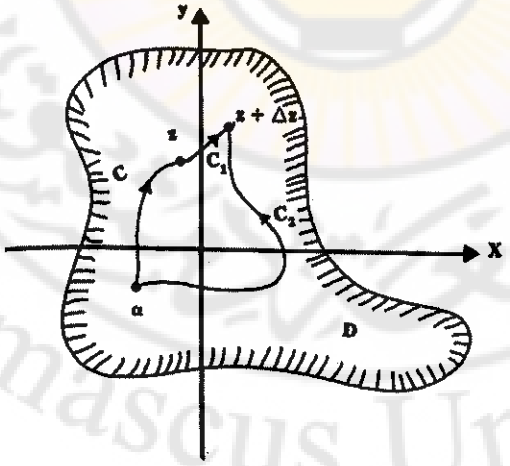
$$F(z) = \int_C f(\omega)d\omega = \int_\alpha^z f(\omega)d\omega \qquad (27)$$

تحليلية على المجال D وتحقق المساواة:

$$F'(z) = f(z) \qquad (28)$$

البرهان:

نفرض أن C_1 يمثل القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين z و $z + \Delta z$ وأن C_2 أي كانتور يصل بين النقطتين α, $z + \Delta z$ فإذا عرفنا المسار B الموجب الاتجاه الظاهر في الشكل (٩) كما يلي: $B = C_2 - C_1 - C$



الشكل (٩)

فإن B كانتور مغلق وبسيط، وبما أن الدالة تحليلية على مجال يحتوي هذا المسار فإن المبرهنة (٥) والنتيجة (٦) تؤكدان أن التكامل: $\int_B f(\omega)d\omega$ لا يعتمد على المسار وأن:

$$\int_B f(\omega)d\omega = 0$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\int_{C_2} f(\omega)d\omega - \int_{C_1} f(\omega)d\omega - \int_C f(\omega)d\omega = 0$$

أي إن:

$$\int_{C_2} f(\omega)d\omega - \int_C f(\omega)d\omega = \int_{C_1} f(\omega)d\omega$$

وهذا يمكن كتابته كما يلي:

$$\int_{\alpha}^{z+\Delta z} f(\omega)d\omega - \int_{\alpha}^{z} f(\omega)d\omega = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\omega)d\omega \qquad (29)$$

وحسب تعريف F(z) (27) فإن:

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{C_1} f(\omega)d\omega \qquad (30)$$

وبملاحظة أن:

$$\int_{C_1} d\omega = \int_{z}^{z+\Delta z} d\omega = \Delta z$$

نستنتج أن:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{C_1} f(\omega)d\omega - \int_{C_1} f(z)d\omega\right|$$

ونستنتج من ذلك وبتطبيق الفرع هـ من المبرهنة (١) أن:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\int_{C_1}|f(\omega)-f(z)||d\omega|$$

وبما أن الدالة تحليلية فإنها مستمرة لذلك فإن لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|\omega - z| < \delta \Rightarrow |f(\omega) - f(z)| < \in$$

وهذا ينتج أن لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إنه إذا تحقق الشرط $|\omega - z| < \delta$ فإن:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\frac{\in}{|\Delta z|}\int_{C_1}|d\omega|=\in$$

ومن هذا فإن:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z)=f(z)$$

أي إن $F(z)$ تحليلية على D وتحقق المساواة $F'(z) = f(z)$.

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

هذه المبرهنة تمكننا من إيجاد قيمة التكامل لأي دالة f تكون تحليلية، وذلك بمعرفة أصل المشتقة للتابع المكامل كما تبين المبرهنة التالية:

مبرهنة (٩):

إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال D وكانت F أي أصل مشتقة لها فإنه لكل α و β في D يكون:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (31)$$

البرهان:

بتطبيق المبرهنة (٨) نستنتج أن التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$ مستقل عن المسار لأن:

$$F(z) = \int_{\alpha}^{z} f(\omega)d\omega$$

تحليلية ومن ثمَّ تكون مستمرة، فإذا كانت $H(z)$ أي أصل مشتقة آخر فإن $H'(z) = F'(z)$ ومن ثمَّ فإن $F(z) = H(z) + K$ حيث K عدد مركب ثابت، نجده بالتعويض بدلاً من z العدد المركب α لينتج أن:

$$0 = \int_{\alpha}^{\alpha} f(\omega)d\omega = F(\alpha) = H(\alpha) + K$$

أي إن $K = -H(\alpha)$ وبالتعويض بدلاً من z العدد المركب β ينتج أن:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\omega)d\omega = H(\beta) - H(\alpha)$$

وبما أن:

$$H(\beta) - H(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha)$$

فإن:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

أما التكامل المركب غير المحدود ففي التعريف التالي:

تعريف (٤):

بفرض أن الدالة f تحليلية على المجال المترابط ترابطاً بسيطاً D وأن F تمثل أصل المشتقة للدالة f فإن التكامل المركب غير المحدود معرف بالمساواة التالية:

$$\int f(z)dz = F(z) + K$$

حيث إن K عدد مركب يسمى ثابت التكامل.

هذه المبرهنات أبرزت أهمية الدوال التحليلية على مجال معين وفي نفس الوقت سهولة إيجاد التكامل المركب لهذه الدوال، لأن هذا التكامل يكون مستقلاً عن المسار، كل ما نحتاج إليه أن نبحث عن أصل المشتقة للدالة المكاملة، وهنا ننوه أن جميع طرق

التكامل التقليدية المعروفة في التفاضل والتكامل قابلة للتطبيق في حالة التكامل المركب للدوال التحليلية، كما تبين الأمثلة التالية:

مثال (٩):

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}i} \sin z dz$.

الحل:

بما أن الدالة $\sin z$ تحليلية على كل المستوي المركب فإنها تحليلية بشكل أخص على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً يحتوي النقطتين $0, \frac{\pi}{2}i$ لذا فإن التكامل مستقل عن المسار وقيمته هي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}i} \sin z dz = -\cos z\Big|_0^{\frac{\pi}{2}i} = 1 - \cos(\frac{\pi}{2}i)$$

مثال (١٠):

أوجد قيمة التكامل: $\int_i^{2-3i} 3z^2 dz$

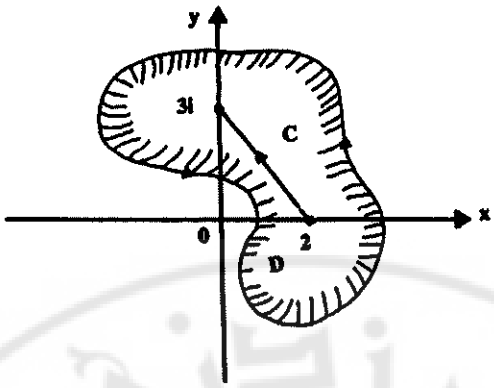
الحل:

بما أن أصل المشتقة للدالة المكاملة هي z^3 فإن:

$$\int_i^{2-3i} 3z^2 dz = (2-3i)^3 - i^3 = -46 - 8i$$

مثال (١١):

أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{1}{z^2} dz$ حيث إن C يمثل القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين $2, 3i$.



الشكل (١٠)

الحل:

بما أن الدالة ليست تحليلية على النقطة $z = 0$ فقط وهي نقطة شاذة ومعزولة للدالة فإنه يمكن إيجاد مجال D لا يحتوي نقطة الأصل ويحتوي على المسار C بين النقطتين $2, 3i$ وتكون عليه الدالة تحليلية ومن ثمَّ فإن التكامل مستقل عن المسار وقيمته هي:

$$\int_C \frac{1}{z^2}dz = \int_2^{3i} z^{-2}dz = -\frac{1}{z}\Big|_2^{3i} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)$$

مثال (١٢):

أوجد قيمة التكامل: $\int_{-i}^{i}\frac{1}{z}dz$

الحل:

أصل المشتقة للدالة $\frac{1}{z}$ هي $\text{Log } z$ حيث z لا تحقق الشرطين $\text{Re. } z \le 0$ و $\text{Im. } z = 0$ وبما أن النقطتين $-i, i$ تقعان في مجال تكون عليه الدالة تحليلية فإن التكامل مستقل عن المسار، وإن:

$$\int_{-i}^{i}\frac{1}{z} = \text{Log}i - \text{Log}(-i)$$
$$= \pi i$$

مثال (١٣):

بين أن التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث إن:

$$f(z) = z^{1/2} = |z|^{1/2}\, e^{i\theta/2}, |z| > 0, -\pi < \theta < \pi$$

ليس مستقلاً عن المسار الذي يصل بين النقطتين $-2,\ 1+\sqrt{3}\,i$ ثم أوجد قيمة التكامل في الحالات التالية:

أ. إذا كان C واقعاً في النصف العلوي من المستوي المركب.

ب. إذا كان C واقعاً في النصف السفلي من المستوي المركب.

الحل:

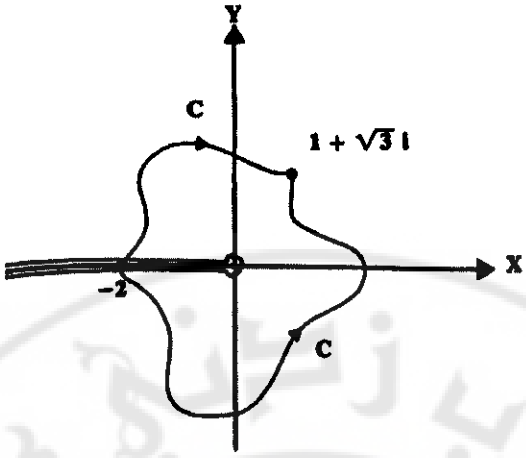
بما أن الدالة $f(z)$ تمثل الفرع الرئيسي للدالة متعددة القيمة $z^{1/2}$ فإنها ليست مستمرة على الشعاع $\theta = -\pi$ ومن ثمَّ ليست مستمرة عند النقطة $z = -2$ لذلك فإن الدالة ليست تحليلية على مجال يحتوي المسار والنقطتين وهذا يؤكد أن التكامل ليس مستقلاً عن المسار.

ولإيجاد قيمة التكامل في الفرع (أ) نبحث عن فرع للدالة يتوافق مع $f(z)$ ويكون تحليلياً على المسار والنقطتين $-2, 1+\sqrt{3}i$ ومن المعلوم أنه يمكن إيجاد الفرع المطلوب بإعطاء قيمة مناسبة للعدد الحقيقي α للدالة.

$$f(z) = z^{1/2} = |z|^{1/2}\, e^{i\theta/2}, |z| > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

وبإعطاء α القيمة $-\frac{\pi}{2}$ نحصل على الفرع:

$$f(z) = |z|^{1/2}\, e^{i\theta/2}, |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < 3\frac{\pi}{2}$$



الشكل (١١)

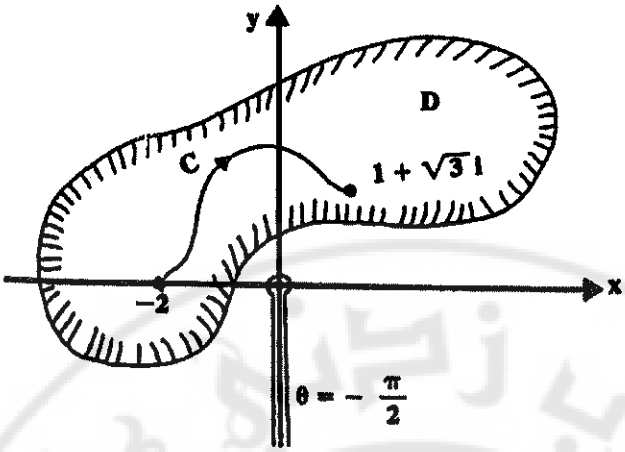
وهذا يتوافق مع الفرع الرئيسي (ما عدا بالطبع z = -2) وهذا الفرع تحليلي على جميع الأعداد المركبة التي لا تقع على الشعاع $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ومن ثمَّ فإنه تحليلي على مجال يحتوي على المسار C والنقطتين $-2, 1+\sqrt{3}i$ وبإيجاد أصل المشتقة للدالة f(z) نجد قيمة التكامل وهي:

$$\int_{-2}^{1+\sqrt{3}i} f(z)dz = \frac{2}{3} z^{3/2}\Big|_{-2}^{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{3} 2^{3/2} e^{i3\theta/2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} 2^{3/2}\left(e^{\pi i/2} - e^{3\frac{\pi}{2}i}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3} i$$

كما يبين الشكل التالي:



الشكل (١٢)

وبإعطاء α القيمة $\frac{\pi}{2}$ نحصل على الفرع:

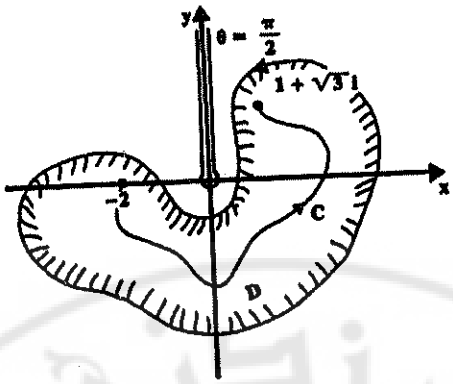
$$f(z) = |z|^{1/2}\, e^{i\theta/2}, |z| > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < 5\frac{\pi}{2}$$

وهذا يتوافق كذلك مع الفرع الرئيسي (باستثناء z = -2 بالطبع) ولكنه تحليلي على جميع الأعداد المركبة التي لا تقع على الشعاع $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإذا كان المسار الذي يصل بين النقطتين $-2, 1+\sqrt{3}i$ واقعاً في النصف السفلي للمستوي المركب كما في الشكل فإن هذا الفرع يكون تحليلياً على مجال D يحتوي C والنقطتين -2 و $1+\sqrt{3}i$ وبإيجاد أصل المشتقة لهذا الفرع نجد قيمة التكامل وهي:

$$\int_{-2}^{1+\sqrt{3}i} f(z)dz = \frac{2}{3} z^{3/2}\Big|_{-2}^{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{3} 2^{3/2} e^{i3\theta/2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} 2^{3/2}\left(e^{i\frac{3}{2}\frac{5\pi}{2}} - e^{i3\frac{\pi}{4}} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$



الشكل (١٣)

لاحظ اختلاف قيمتي التكامل باختلاف المسار الواصل بين النقطتين. لاحظ كذلك أننا اخترنا قيمتي $\arg(1+\sqrt{3}i), \arg(-2)$ اللتين تحققان المتباينة لكل فرع في كل حالة.

٤ . ٣ . مبرهنة كوشي للتكامل:

لعل من أهم النتائج التي لها أثرٌ مهمٌّ في موضوع التحليل المركب هي مبرهنة كوشي للتكامل، تلك المبرهنة التي تبين أن قيمة الدالة التحليلية يمكن أن تمثل بصيغة تكامل على مسار مغلق وبسيط.

مبرهنة (١٠): (مبرهنة كوشي للتكامل)

بفرض أن C كانتور مغلق وبسيط وموجب الاتجاه. وأن الدالة f تحليلية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً D يحتوي المسار C فإذا كانت ω أي نقطة في المجال D فإن:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\omega}dz \qquad (32)$$

البرهان:

نفرض أن C_ω تمثل الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها r.

بما أن الدالة $\frac{f(z)}{z-\omega}$ تحليلية على المجال الذي بين المسارين $C, \ C_\omega$ وعليهما كذلك فإن النتيجة (٦) تؤكد أن:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\omega}dz = \int_{C_\omega} \frac{f(z)}{z-\omega}dz \qquad (33)$$

وبما أن: $\int_{C_\omega} \frac{f(z)}{z-\omega}dz = 2\pi i$

(انظر مثال (٧) حيث $z - \omega$ بدلاً من z) فإن:

$$\int_{C_\omega} \frac{f(z)}{z-\omega}dz = \int_{C_\omega} \frac{f(\omega)}{z-\omega}dz + \int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}dz$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\omega}dz = 2\pi i f(\omega) + \int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}dz \qquad (34)$$

وبما أن الدالة f تحليلية على المجال D فإنها مستمرة عليه ولا سيما عند ω لذلك نستنتج أنه لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ تحقق الشرط:

$$|z - \omega| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\omega| < \in$$

وبفرض أن نصف قطر الدائرة C_ω وهو r يحقق $r \le \frac{1}{2}\delta$ فإن النقاط z التي تقع على هذه الدائرة تحقق:

$$|z-\omega| = r \le \frac{1}{2}\delta < \delta$$

ومن ثمَّ فإن: $|f(z) - f(\omega)| < \in$

وهذا يقتضي ما يلي:

$$\left|\int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}dz\right| < \frac{\delta}{r}\int_{C_\omega}|dz|$$

أي إن:

$$\left|\int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}dz\right| < 2\pi \in$$

فإذا تركنا نصف قطر الدائرة r يقترب من الصفر فإن:

$$\lim_{r\to 0}\left(\int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}dz\right) = 0$$

وبالعودة إلى المساواة (34) فإن أخذ النهاية للطرفين يعطي:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\omega}dz = 2\pi i f(\omega) + \lim_{r\to 0}\int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}dz$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة لأنه يعطي المساواة المطلوبة.

مثال (١٤):

أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}dz$ في الحالات التالية:

أ . إذا كانت C تمثل الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب.

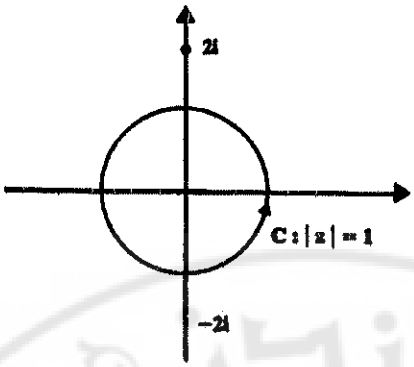
ب . إذا كانت C تمثل الدائرة $|z - 2i| = 1$ بالاتجاه الموجب.

جـ . إذا كانت C تمثل الدائرة $|z + 2i| = 1$ بالاتجاه الموجب.

الحل:

أ . بما أن الدالة $\frac{ze^z}{z^2+4}$ تحليلية في مجال مترابط ترابطاً بسيطاً يحتوي المسار $C:|z|=1$ (لأن أصفار المقام $-2i, 2i$ تقع خارج الكانتور) فإن مبرهنة كوشي . كورسات تبين أن:

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}dz = 0$$



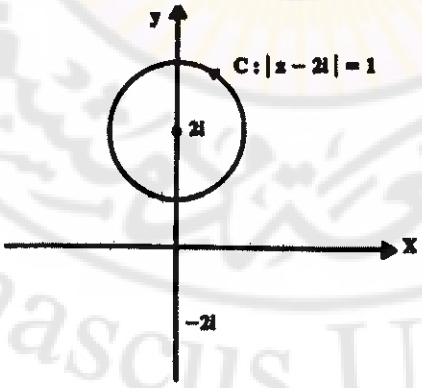
الشكل (١٥)

ب . بما أن أحد أصفار المقام $z = 2i$ يقع داخل المسار C فإن المكامل ليس تحليلياً في مجال يحتوي هذا المسار انظر الشكل (١٦). ومن ثمَّ فإن مبرهنة كوشي . كورسات لا تُطبق، وهنا نستعين بمبرهنة كوشي للتكامل حيث إن:

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}dz = \int_C \frac{ze^z/(z+2i)}{(z-2i)}dz$$

فتكون الدالة $f(z) = \dfrac{ze^z}{z+2i}$ تحليلية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً يحتوي على المسار $C: |z-2i| = 1$ وهذا يعني أن شروط مبرهنة كوشي تتحقق لنستنتج أن:

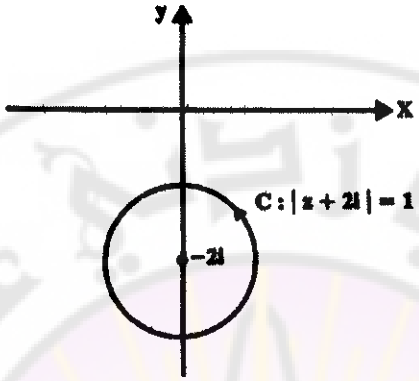
$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}dz = 2\pi i f(2i) = \pi i e^{2i}$$



الشكل (١٦)

جـ. بنفس أسلوب فرع (ب) نستنتج أن:

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}dz = \int_C \frac{ze^z/(z-2i)}{z+2i}dz = \pi i e^{-2i}$$



الشكل (١٧)

إن معنى مبرهنة كوشي يفيد بأن سلوك الدالة التحليلية في داخل مجال مترابط ترابطاً بسيطاً يتحدد بسلوك الدالة على حدود ذلك المجال أي على كانتور مغلق وبسيط يحيط بذلك المجال.

المبرهنة التالية تتعلق بمشتقة الدالة التحليلية وتمثيلها بصيغة تكامل مسار.

مبرهنة (١١):

نفرض أن الدالة $f(z)$ مستمرة على المسار المغلق البسيط C. ولنعرف الدالة $F(z)$ بالمساواة التالية:

$$F(z) = \int_C \frac{f(s)}{s-z}ds \qquad (35)$$

لكل z لا تقع على المسار C فإن $F(z)$ تحليلية والمشتقة $F'(z)$ حسب المساواة التالية:

$$F'(z) = \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}ds \qquad (36)$$

لكل z لا تقع على المسار C.

البرهان:

لإيجاد المشتقة نجد الكسر التالي:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left\{\int_C \frac{f(s)}{s-z-\Delta z}ds-\int_C \frac{f(s)}{s-z}ds\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_C\left(\frac{1}{s-z-\Delta z}-\frac{1}{s-z}\right)f(s)ds$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_C \frac{\Delta z f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)}ds$$

لذلك فإن:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)}ds \qquad (37)$$

ثم نجد الفرق بين الطرف الأيمن للمعادلتين (37) و (36) وهو:

$$\omega=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}ds$$

$$=\int_C\left[\frac{1}{(s-z-\Delta z)(s-z)}-\frac{1}{(s-z)^2}\right]f(s)ds$$

$$=\int_C \frac{\Delta z}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}f(s)ds$$

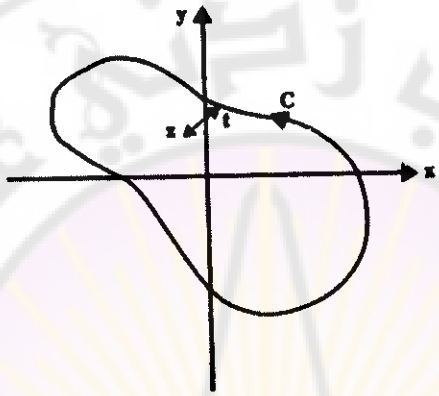
لذلك فإن:

$$\omega=\Delta z\int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}ds \qquad (38)$$

إذا استطعنا إثبات أن لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $|\Delta z| < \delta$

فإن $|\omega| < \in$ مما يفيد بأن: $F'(z) = \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds$

مما ينهي إثبات المبرهنة لذلك نقول افرض أن t تمثل أقصر مسافة بين النقطة z والمسار C لذلك فإن لكل s تقع على المسار C تكون $|s - z| \geq t > 0$.



الشكل (١٨)

وبما أن الدالة f(s) مستمرة على المسار C فإنه يوجد عدد حقيقي موجب K يحقق $|f(s)| \leq K$ لكل s تقع على المسار C. وكذلك بتطبيق متباينة المثلث نستنتج أن:

$$|s - z - \Delta z| > |s - z| - |\Delta z|$$

وبفرض أن: $|\Delta z| < \delta < \frac{1}{2}t$

نستنتج أن: $|s - z - \Delta z| > \frac{1}{2}t$

ومن ثمَّ فإن:

$$\left|\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}\right| \leq \int_C \frac{|f(s)||ds|}{|s-z-\Delta z||s-z|^2} < \frac{2K.L}{t^3} < \frac{K.L}{4\delta^3}$$

حيث إن L تمثل طول الكانتور C. وبالتعويض في (38) فإن:

$$|\omega| \le |\Delta z| \left| \int_C \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2} \right| < \frac{|\Delta z| K.L}{4\delta^3} < \frac{K.L}{4\delta^2} < \in$$

وبفرض أن δ تحقق $\delta^2 = \frac{K.L}{4 \in}$، وهكذا يتم المطلوب.

مثال (١٥):

أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{e^{zi}}{(z-\pi i)^2} dz$

إذا كان C يمثل الدائرة $|z - \pi i| = 1$

الحل:

بتطبيق المبرهنة السابقة نستنتج أن:

$$\int_C \frac{e^{zi}}{(z-\pi i)^2} dz = 2\pi i f'(\pi i)$$

حيث إن $f(z) = e^{zi}$ ومن ثمَّ ينتج:

$$\int_C \frac{e^{zi}}{(z-\pi i)^2} dz = 2\pi i(ie^{-\pi}) = -2\pi e^{-\pi}$$

مثال (١٦):

أوجد قيمة التكامل: $\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2} dz$ في الحالات التالية:

أ. $C: |z| = \frac{1}{2}$

ب. $C: |z+i| = \frac{1}{2}$

جـ. $C: |z-2i| = 1$

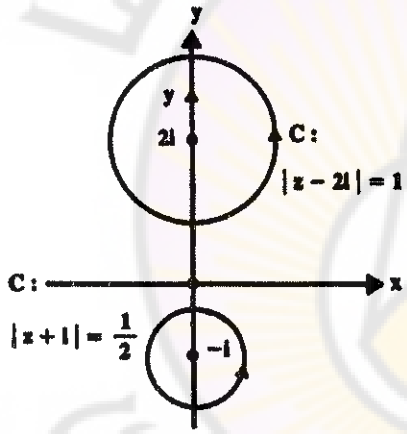
الحل:

أ . بإيجاد أصفار المقام فنجدها 0, -i ونلاحظ أن القيمة $z = 0$ تقع في المنطقة الداخلية للمسار C الذي يمثل $|z| = \frac{1}{2}$ أما القيمة $-i$ فتقع خارجه لذلك وبما أن:

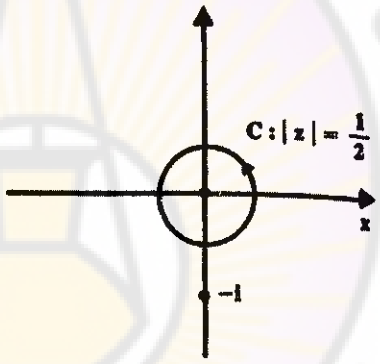
$$f(z) = \frac{\cos z}{(z+i)^2}$$

تحليلية على مجال يحتوي هذا المسار فإن مبرهنة كوشي للتكامل قابلة للتطبيق لنحصل على ما يلي:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2} dz = 2\pi i f(0) = -2\pi i$$



الشكل (٢٠)



الشكل (١٩)

ب . وبما أن القيمة $-i$ تقع داخل المسار $C: |z+i| = \frac{1}{2}$ والقيمة 0 تقع خارجه وأن الدالة:

$$f(z) = \frac{\cos z}{z}$$

تحليلية على مجال D يحتوي المسار C فإن المبرهنة (١١) قابلة للتطبيق لنحصل على:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\,dz = \int_C \frac{\cos z / z}{(z+i)^2}\,dz$$
$$= 2\pi i f'(-i)$$

وبما أن:

$$f'(z) = \frac{-z\sin z - \cos z}{z^2}$$

فإن:

$$f'(-i) = \cos i + i\sin i$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\,dz = 2\pi i(\cos i + i\sin i)$$
$$= \left(\frac{2\pi}{e}\right)i$$

جـ. أما في حالة كون أصفار المقام 0, -i خارج المسار $C: |z-2i| = 1$ فإن:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\,dz = 0 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

المبرهنة (١١) تبين أن الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

قابلة للاشتقاق عند كل نقطة z لا تقع على المسار C وأن:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds$$

وبتكرار نفس البرهان يمكن إثبات أن:

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^3}\,ds$$

وبالاستقراء الرياضي يمكن إثبات النتيجة التالية التي تسمى مبرهنة كوشي للمشتقة.

نتيجة (١٢):

بفرض أن الدالة f تحليلية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً ويحتوي المسار المغلق البسيط C فإن:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds \qquad (39)$$

لكل نقطة z لا تقع على المسار C (و n عدد صحيح موجب).

إن لهذه النتيجة معنى لطيفاً وهو أن الدالة التحليلية f قابلة للاشتقاق لأية درجة نريد، أي إن كل المشتقات لهذه الدالة موجودة وتحليلية كذلك.

نتيجة (١٣):

لأي دالة f تحليلية على مجال ما تكون المشتقات $f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ موجودة وتحليلية على D.

البرهان:

بفرض أن z_0 تنتمي إلى D، بما أن D مفتوح فإنه يوجد $r > 0$ بحيث إن القرص $\{z: |z - z_0| \le r\}$ محتوى في D ومن ثمَّ فإن الكانتور $C: |z - z_0| = r$ يقع في D وبتطبيق نتيجة (١٢) نحصل على المطلوب.

مثال (١٧):

أوجد قيمة $\int_C \frac{1}{z^{n+1}}dz$

حيث إن C دائرة الوحدة، n عدد صحيح موجب أو صفر.

الحل:

بفرض أن $n = 0$ والقيمة $z_0 = 0$ صفر المقام فإن:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i f(z)|_{z=0} = 2\pi i\ f(0)$$

$$= 2\pi i$$

وبفرض أن $n \geq 1$ والقيمة $z_0 = 0$ صفر المقام فإن:

$$\int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(0)$$

وبما أن الدالة $f(z)=1$ تحليلية لكل z في المجال الذي يحتوي الكانتور فإن $f^{(n)}(0) = 0$ لكل $z \geq 1$ ومن ثمَّ:

$$\int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz = 0, n \geq 1$$

٤ . ٤ . نتائج مبرهنة كوشي للتكامل:

نعرض في هذا البند بعض النتائج الهامة لمبرهنة كوشي للتكامل، ويحق لنا أن نتساءل عن إمكانية تحقق عكس مبرهنة كوشي . كورسات (التي تقول إن قيمة تكامل الدالة التحليلية في مجال يحتوي على الكانتور المغلق البسيط صفر)، وهو إذا حدث أن تكون قيمة تكامل دالة مستمرة على مجال يحتوي كانتوراً مغلقاً وبسيطاً صفراً فهل تكون الدالة تحليلية على ذلك المجال، المثال التالي يشير إلى إمكانية حدوث ذلك دون أن تكون الدالة تحليلية.

مثال (١٨):

أوجد قيمة التكامل: $\int_C \frac{\sin z}{z} dz$

حيث C تمثل دائرة الوحدة.

الحل:

بتطبيق مبرهنة كوشي للتكامل نستنتج أن:

$$\int_C \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \sin 0 = 0$$

ومن الواضح أن الدالة $\frac{\sin z}{z}$ ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$ بينما قيمة التكامل تساوي صفراً. المبرهنة التالية تسمى مبرهنة موريرا تمثل معكوس مبرهنة كوشي . كورسات.

٤ . ٤ . ١ . مبرهنة موريرا (١٤):

بفرض أن الدالة f مستمرة على المنطقة D. إذا تحقق الشرط $\int_C f(z)dz = 0$ لكل كانتور مغلق وبسيط يقع في المنطقة D فإن الدالة f تحليلية على D.

البرهان:

بما أن $\int_C f(z)dz = 0$ لكل كانتور مغلق وبسيط C في المنطقة D فإن $\int_C f(z)dz$ مستقل عن المسار C لذلك وبالاستفادة من برهان المبرهنة (٨) يمكن أن نثبت أن:

$$F(z) = \int_\alpha^z f(s)ds$$

دالة تحليلية على المنطقة D وأن $F'(z) = f(z)$ وبما أن الدالة $F(z)$ تحليلية على المنطقة D فإن نتيجة (١٣) تؤكد أن جميع مشتقات $F(z)$ موجودة مستمرة وبشكل خاص $F'(z)$ وبما أن $F'(z) = f(z)$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على D ومن ثمَّ تكون تحليلية عليه.

إذا كانت المنطقة D في مبرهنة موريرا مترابطة ترابطاً بسيطاً فإن مبرهنة موريرا تمثل عكس مبرهنة كوشي . كورسات.

المبرهنة التالية تسمى متباينة كوشي.

٤ . ٤ . ٢ . مبرهنة (١٥) (متباينة كوشي):

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D الذي يحتوي الكانتور $C: |s - z| = r$ (وهو الدائرة التي مركزها z ونصف قطرها r بالاتجاه الموجب). فإذا كان k عدداً حقيقياً موجباً يحقق $|f(s)| \le k$ لكل s تقع على الكانتور C فإن المشتقة النونية للدالة f عند النقطة w تحقق المتباينة:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!k}{r^n}, n = 1,2,... \qquad (40)$$

البرهان:

بتطبيق النتيجة (١٢) نستنتج أن:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds$$

وبما أن $|f(z) \le k$ لكل s تقع على الكانتور C وإن $|s - z| = r$ فإن:

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{k}{r^{n+1}}\int_C |ds| \le \frac{n!k2\pi r}{2\pi r^{n+1}} = \frac{n!k}{r^n}, n = 1,2,...$$

إن متباينة كوشي لها أثرٌ مهمٌّ في إثبات مبرهنة ليوفيل التي تبين أنه إذا كانت الدالة الصحيحة محدودة فإنها تكون ثابتة القيمة.

٤ . ٤ . ٣ . مبرهنة ليوفيل (١٦):

إذا كانت f دالة تحليلية ومحدودة على المستوي المركب (أي يوجد $k > 0$ بحيث أن $|f(z)| \le k$ لكل عدد مركب z) فإن f دالة ثابتة القيمة.

البرهان:

بما أن الثابت k في المبرهنة السابقة مرتبط بقيم الدالة على الكانتور C نرمز له بالرمز k_r حيث r نصف قطر الدائرة C لنحصل على:

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!k_r}{r^n}, n = 1,2,...$$

وبما أن $|f(z)| \le k$ لكل عدد مركب z (ليس فقط على الكانتور C) فإن $k_r \le k$

وبفرض أن $n = 1$ نستنتج أن:

$$|f'(z)| \le \frac{k}{r}$$

وبما أن البسط في الطرف الأيمن لا يعتمد على r، وكذلك الطرف الأيسر، فإذا أخذنا نهاية الطرفين عندما تؤول r إلى ∞ فإن:

$$f'(z) = 0$$

لكل عدد مركب z ومن ثمَّ فإن $f(z) = \alpha$ قيمة ثابتة.

مثال (١٩):

بين أن الدالة $\cos z$ ليست محدودة.

الحل:

من المعلوم أن الدالة $\cos z$ دالة تحليلية على كل المستوي المركب (أي صحيحة) وهي كذلك ليست ثابتة القيمة، ومن ثمَّ فإن مبرهنة ليوفيل تؤكد أن $\cos z$ ليست محدودة. (ولرؤية ذلك بطريقة أخرى نثبت $x = 0$ ونترك قيمة y تزداد دون توقف لنجد أن: $\cos z = \cos(yi) = \cosh y$

وبالتالي فإن: $\lim_{y\to\infty} \cos z = \lim_{y\to\infty} \cosh y = \infty$

أي إنها ليست محدودة).

ومن التطبيقات الهامة لمبرهنة ليوفيل كذلك النتيجة الجبرية التي تنص بوجود على الأقل صفر واحد لكثيرة الحدود من الدرجة n. وهذه النتيجة تسمى النظرية الأساسية للجبر.

٤ . ٤ . ٤ . نتيجة (١٧) (المبرهنة الأساسية للجبر):

يوجد لكثيرة الحدود من الدرجة n على الأقل جذر واحد (صفر واحد).

البرهان:

نفرض أن $P_n(z)$ كثيرة الحدود من الدرجة n أي إن:

$$P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0,\ \alpha_n \neq 0$$

حيث إن $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ أعداد مركبة. كثيرة الحدود هذه يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$P_n(z) = \alpha_n z^n \left\{ 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z} + \ldots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n z^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n} \right\}$$

وبتطبيق متباينة المثلث نستنتج أن:

$$\left| 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n} \right| \geq 1 - \left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n} \right|$$

وبفرض أن $|z| \to \infty$ فإنه يمكن أن نفرض أن:

$$|z| > 3nk\ ,\ \left(\frac{1}{|z|} < \frac{1}{3nk} \right) \leq 1$$

حيث إن:

$$k = \max, \left\{ 1, \left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right|, \ldots, \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \right|, \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right| \right\}$$

ومن ثمَّ ينتج أن:

$$\left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n} \right| \leq \left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right| \frac{1}{|z|} + \ldots + \left| \frac{\alpha_0}{|\alpha_n|} \right| \frac{1}{|z|^n} \leq \frac{1}{3n} + \ldots + \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}$$

ومن ذلك فإن:

$$\left|1+\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z}+\ldots+\frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n}\right| \geq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

وبالتالي ينتج أن:

$$|P_n(z)| \geq \frac{2}{3}|\alpha_n||z|^n$$

وبفرض أنه لا يوجد عدد مركب z بحيث إن $P_n(z) = 0$

فإن الدالة $f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ تحليلية على جميع الأعداد المركبة أي إنها صحيحة وكذلك:

$$|f(z)|=\frac{1}{|P_n(z)|} \leq \frac{3}{2\,|\alpha_n|\,|z|^n}$$

وبما أن العدد $|\alpha_n|$ ثابت وبفرض أن $|z| \to \infty$ فإن $\lim_{|z|\to\infty} f(z)=0$ وبالتالي لكل $K > 0$ يوجد $R > 0$ بحيث إن:

$$|f(z)| \leq K \qquad (41)$$

لكل z بحيث $|z| \geq R$.

وبما أن $|f(z)|$ دالة حقيقية القيمة وهي مستمرة على القرص $|z| \leq R$ فإنه يوجد M بحيث أن:

$$|f(z)| \leq M,\ |z| \leq R \qquad (42)$$

ومن (41) و (42) نستنتج أن الدالة f محدودة القيمة على كل المستوي المركب وبالتالي فإن مبرهنة ليوفيل تؤكد أن $f(z)$ دالة ثابتة القيمة ومنها فإن كثيرة الحدود $P_n(z)$ ثابتة القيمة وهذا تناقض لأن كثيرة الحدود ليست ثابتة القيمة.

النتيجة الأخرى الهامة من نتائج مبرهنة كوشي قانون القيمة العظمى لمقدار الدالة الذي يجيب على السؤال أين تحدث القيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ إن وجدت.

مبرهنة (١٨):

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D، إذا كانت الدالة f ليست ثابتة القيمة على D فإنه لا يوجد قيمة عظمى للدالة $|f(z)|$ في المجال D، أي إنه لا يوجد w في D تحقق الشرط:

$$|f(z)| \le |f(w)| \quad \text{لكل } z \text{ في } D \qquad (43)$$

البرهان:

بالاستفادة من تمرين ٦ فرع أ من البند السابق نستنتج أن:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w + re^{ti})dt$$

وهذا يفيد بأن قيمة الدالة f على مركز الدائرة:

$$C: z = w + R\,e^{ti},\ \ 0 \le t \le 2\pi\ ,\ 0 < r < R$$

حيث إن R تحقق $R = |z - w|$ محتواة في D يساوي المتوسط الحسابي لقيم هذه الدالة على الدائرة ومن ذلك نستنتج أن:

$$|f(w)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(w + re^{ti})|dt$$

فإذا فرضنا أنه يوجد للدالة قيمة عظمى عند w مثلاً فإن:

$$|f(z)| \le |f(w)|,$$

لكل z تحقق $|z - w| = r \le R$ ومن ثمَّ ينتج:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(w + re^{ti})dt \le |f(w)|$$

ومن هذه المتباينات ينتج أن:

$$|f(w)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(w + re^{ti})|\,dt$$

وبلغة أخرى فإن:

$$\int_0^{2\pi}\left(|f(w+re^{ti})|-|f(w)|\right)dt=0$$

لكل $r: 0 < r \le R$ ومن ثمَّ فإن:

$$|f(w)| = |f(w + re^{ti})|$$

لكل t و r بحيث إن $0 < r \le R\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

وبالعودة إلى المتغير فإن: $|f(z)| = |f(w)|$

لكل z تحقق $0 \le |z - w| < R$.

وهذا يفيدنا بأن مقدار الدالة f وهو $|f(z)|$ مقدار ثابت على المجال $0 \le |z - w| < R$ وبما أن الدالة f تحليلية على هذا المجال فإنها تكون ثابتة أي إن $f(z)$ ثابتة القيمة لكل z تحقق $0 \le |z - w| < R$، وهذا يناقض الفرض بأن f ليست ثابتة القيمة، ومن ثمَّ فإنه لا يوجد w في D بحيث إن $|f(w)|$ قيمة عظمى للدالة $|f(z)|$.

ويمكن أن يكتب قانون القيمة العظمى لمقدار الدالة بالصيغة التالية:

مبرهنة (١٩):

نفرض أن الدالة f تحليلية، وليست ثابتة القيمة على المجال D، فإذا كان الكانتور C يمثل حدود المجال D وكانت B ترمز للمنطقة التي تتكون من المجال D وحدوده C، وإذا كانت الدالة f مستمرة على المنطقة المغلقة B فإن $|f(z)|$ تأخذ قيمتها العظمى على إحدى نقاط الكانتور C أي يوجد نقطة w على الكانتور C بحيث إن:

$$|f(z)| \le |f(w)| \qquad (44)$$

لكل z في B.

البرهان:

بما أن الدالة f تحليلية وليست ثابتة القيمة على المجال D فإن المبرهنة السابقة تؤكد أن الدالة $|f(z)|$ لا تأخذ قيمة عظمى على أية نقطة من نقاط المجال D. وبما أن $|f(z)|$ مستمرة على المنطقة المغلقة B فإن التفاضل والتكامل يؤكد أنه يوجد قيمة عظمى للدالة $|f(z)|$ على إحدى نقاط المنطقة المغلقة B ومن ثمَّ فلا بد أن تكون هذه النقطة واقعة على حدود المجال D وهو الكانتور C أي يوجد نقطة w على C بحيث إن:

$|f(z)| \leq |f(w)|$ لكل نقطة z في B.

مثال (٢٠):

بفرض أن $f(z) = \sin z$ أوجد القيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ في المنطقة المغلقة:

$$B = \{z: 0 \leq \text{Re. } z \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \text{Im. } Z \leq 1\}$$

الحل:

بما أن الدالة $\sin z$ تحليلية وليست ثابتة فإن $|\sin z|$ لا تأخذ قيمة عظمى على النقاط الداخلية للمنطقة B، ولكنها تأخذ قيمتها العظمى على إحدى النقاط الحدودية للمنطقة B وبما أن:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

فإن:

$$|\sin z|^2 \leq 1 + \sinh^2 1 = \cosh^2 1$$

وبالتالي فإن $|\sin z|$ تأخذ قيمتها العظمى عند $z = \frac{\pi}{2} + i$ وهي $\cosh 1$.

٤ . ٥ . تطبيقات مهمة:

يمكن أن نحصل على نتيجة مشابهة لقانون القيمة العظمى (أو الصغرى) لمقدار الدالة التوافقية اعتماداً على قانون القيمة العظمى لمقدار الدالة المركبة.

مبرهنة (٢٠):

نفرض أن $u(x, y)$ دالة توافقية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً D، فإذا كانت $u(x, y)$ ليست ثابتة القيمة على D فإنه لا يوجد نقطة $w = (x_0, y_0)$ في D تحقق:

$$|u(x, y)| \leq |w(x_0, y_0)| \qquad (45)$$

وذلك من أجل $(x, y) \in D$.

وإذا كانت الدالة التوافقية $u(x, y)$ مستمرة على المجال D والنقاط الحدودية له فإنها تأخذ قيمتها العظمى عند إحدى النقاط الحدودية أي توجد نقطة حدودية $(x_0, y_0) = w$ للمجال D تحقق المتراجحة $|u(x, y)| \leq |u(x_0, y_0)|$

البرهان:

بما أن $u(x, y)$ توافقية على المجال D فإنه يوجد لها مرافق توافقي أي يوجد دالة توافقية $v(x, y)$ بحيث إن الدالة $f(z) = u + vi$ تحليلية على المجال ومن ثمَّ فإن الدالة:

$$g(z) = e^{f(z)} = e^u e^{vi}$$

تحليلية على المجال D وبتطبيق قانون القيمة العظمى للدوال المركبة ولكون الدالة $|g(z)|$ ليست ثابتة القيمة فإنها لا تأخذ قيمتها العظمى عند أي من نقاط المجال D ولكنها (وبما أنها مستمرة على المجال D وعلى النقاط الحدودية لهذا المجال) تأخذ قيمتها العظمى عند إحدى النقاط الحدودية وبملاحظة أن:

$$|g(z)| = |e^u e^{vi}| = e^u \qquad (46)$$

فإن e^u لا تأخذ قيمتها العظمى عند أي نقطة من نقاط المجال D ولكنها تأخذ قيمتها العظمى عند إحدى النقاط الحدودية، وبما أن الدالة الأسية الحقيقية متزايدة القيمة فإنه لا يوجد نقطة $w = (x_0, y_0)$ في D تحقق:

$$|u(x, y)| \leq |w(x_0, y_0)|$$

لكل (x, y) في D.

بل يوجد إحدى النقاط الحدودية $w = (x_0, y_0)$ تحقق ذلك الشرط..

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

مبرهنة (٢١):

نفرض أن $u(x, y)$ دالة توافقية على مجال D يحتوي القرص $|z| \le R$ فإن:

$$u(re^{ti}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{\theta i})d\theta}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)} \qquad (47)$$

البرهان:

نفرض $v(x, y)$ تمثل المرافق التوافقي للدالة $u(x, y)$ على المجال D ومن ثمَّ فإن الدالة $f(z) = u + vi$ تحليلية على D. وبتطبيق مبرهنة كوشي للتكامل نستنتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s - z} ds, |z| < R$$

حيث C_R يمثل الدائرة $|z| = R$ بالاتجاه الموجب. فإذا ثبتنا مؤقتاً $z: |z| < R$ فإن: $R^2 \neq s\,\bar{z}$ لكل $s: |s| = R$ ومن ثمَّ فإن الدالة:

$$g(s) = \frac{\bar{z}f(s)}{R^2 - s\bar{z}}$$

تحليلية على المجال D (وبشكل خاص على C_R) ومن ثمَّ يكون:

$$\int_{C_R} g(s)ds = \int_{C_R} \frac{\bar{z}f(s)}{R^2 - s\bar{z}} ds = 0 \qquad (48)$$

ومن المعادلتين (47) و (48) نستنتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \left(\frac{1}{s - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - s\bar{z}} \right) f(s)ds$$

وبجمع الكسرين والتعويض بالمعادلة الوسيطية للكانتور C_R، $s = Re^{\theta i}$ ينتج أن:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{(R^2-|z|^2)f(Re^{\theta i})}{(Re^{\theta i}-z)(R^2-\bar{z}Re^{\theta i})}iRe^{\theta i}\,d\theta$$

$$=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi}\int_{C_R}\frac{f(Re^{\theta i})d\theta}{(Re^{\theta i}-z)(Re^{-\theta i}-\bar{z})}$$

$$=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi}\int_{C_R}\frac{u(Re^{\theta i})+iv(Re^{\theta i})}{(Re^{\theta i}-z)\overline{(Re^{\theta i}-z)}}d\theta$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$u(z)=\operatorname{Re}f(z)=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi}\int_{C_R}\frac{u(Re^{\theta i})}{|Re^{\theta i}-z|^2}d\theta$$

وبما أن $|z|<R$ فإن $z=re^{ti}$ حيث r عدد حقيقي موجب $0\le r<R$ ومن ثمَّ فإن:

$$u(re^{ti})=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_{C_R}\frac{u(Re^{\theta i})}{|Re^{\theta i}-re^{ti}|^2}d\theta$$

وبإيجاد مقام كسر المكامل:

$$\left|Re^{\theta i}-re^{ti}\right|^2=(R\cos\theta-r\cos t)^2+(R\sin\theta-r\sin t)^2$$

$$=R^2+r^2-2rR\cos(\theta-t)$$

وبذلك فإن:

$$u(re^{ti})=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_{C_R}\frac{u(Re^{\theta i})}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-t)}d\theta$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

هذه النتيجة يمكن أن تفسر بأن الدالة التوافقية التي تكون مستمرة على مجال D والكانتور C_R الذي يمثل النقاط الحدودية لهذا المجال يمكن أن توجد قيمتها في داخل هذا

المجال بمعرفة قيمتها على الكانتور C_R، وهذا يمثل حلاً لحالة خاصة من مسألة معروفة تسمى مسألة ديريخليه.

تمرين (١):

إذا كانت $u_2(x, y), u_1(x, y)$ دالتين توافقيتين ومستمرتين على المجال المحدود D ومستمرتين على النقاط الحدودية لهذا المجال بحيث إن:

$u_1(x, y) = u_2(x, y)$ لكل نقطة حدودية (x, y) للمجال D.

برهن أن $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ لكل نقطة (x, y) في المجال D.

اقتراح: طبق المبرهنة (٢٠) على الدالة التوافقية $u = u_1 - u_2$.

تمرين (٢):

إذا كانت الدالة v تمثل المرافق التوافقي للدالة التوافقية u على المجال D فبرهن أن جميع المشتقات الجزئية للدالتين u و v بالنسبة للمتغيرين x, y موجودة ومستمرة.

اقتراح: استفد من الحقيقة أن $f = u + vi$ تحليلية على D.

٤ . ٦ . تمارين محلولة:

أولاً: احسب التكامل:

الحل:

$$\int_{i}^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3}\left[z^3\right]_{i}^{1+i} = \frac{1}{3}\left[(1+i)^3 - (i)^3\right] = \frac{-2}{3} + i$$

والتكامل مأخوذ على أي منحنٍ يصل بين النقطتين $i, 1 + i$.

ثانياً: إذا كان C هو المنحني: $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ الذي يصل النقطتين $(1, 1), (2, 3)$ فأوجد التكامل:

$$\int_C (12z^2 - 4iz)dz$$

الحل:

$$I = \int_C (12z^2 - 4iz)dz = 4z^3 - 2iz^2\Big|_{1+i}^{2+3i} = -160 + 20i$$

وذلك لأن التكامل لا يتعلق بالطريق المسلوك.

ثالثاً: احسب التكامل $\int_\gamma e^{\bar{z}}dz$ حيث γ جزء المستقيم $y = -x$ الواصل بين النقطتين $z_1 = 0$ و $z_2 = \pi - i\pi$.

الحل:

لدينا:

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$
$$= x(t) + iy(t)$$

إن التمثيل الوسيطي للمنحني γ هو $x = t$ و $y = -t$

وتكون معادلته في الصيغة العقدية: $z = t - it$

حيث إن t تتحول بين 0 و π ومن ثمَّ يكون:

$$\int_\gamma e^{\bar{z}}dz = \int_0^\pi e^{t+it}(1-i)dt = (1+e^\pi)i$$

رابعاً: احسب التكامل $\int_{1-i}^{2+i}(3z^2 + 2z)dz$

الحل:

بما أن التابع $f(z)$ تحليلي في جميع نقاط المستوي C فإن تابعه الأصلي موجود ومن ثمَّ يكون:

$$\int_{1-i}^{2+i}(3z^2 + 2z)dz = (z^3 + z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i$$

خامساً: احسب التكامل $\int_0^{1+i} z^2 dz$ على طول الخط:

أ . المستقيم الواصل بين النقطتين $M_0(0, 0)$ و $M_1(1, 1)$.

ب . المستقيم الواصل بين النقطتين $M_0 (0, 0)$ و $M_2 (1, 0)$

والمستقيم $M_2(1, 0)$ و $M_1 (1, 1)$.

الحل:

$$I = \int_0^{1+i} z^2 dz = \int_0^{1+i} (x+iy)^2 (dx + idy)$$

$$= \int_0^{1+i} \left[(x^2 - y^2)dx - 2xydy\right] + i\int_0^{1+i} \left[2xydx + (x^2 - y^2)dy\right]$$

لنناقش:

أ . على الخط C_1 الذي معادلته $y = x, 0 \le x \le 1$ أو $y = t, x = t$ حيث $0 \le t \le 1$

$$I_1 = \int_0^1 \left\{[t^2 - t^2]dt - 2t^2 dt\right\} + i\int_0^1 [2t^2 dt + (t^2 - t^2)dt] = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

ب . على الخط $C_2 + C_3$ نجد أن:

$$I_2 = \int_{C_2} z^2 dz + \int_{C_3} z^2 dz = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (1+iy)^2 (idy)$$

$$= \frac{1}{3} + i\int_0^1 (1 - y^2 + 2iy)dy$$

$$= -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$$

سادساً: احسب التكامل $\int_\gamma (1 + i - 2\bar{z})$

على طول المنحنيات:

(١) المستقيم الواصل بين النقطتين $z_1 = 0$ و $z_2 = 1 + i$.

(٢) القطع المكافئ $y = x^2$

(٣) الخط المنكسر $z_1z_3z_2$ حيث $z_3 = 1$.

الحل:

لنكتب التابع المكامل على الشكل:

$$1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y) = u + iv$$

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy)$$

هنا كتبنا التكامل على شكل تكامل منحن.

١) إن معادلة المستقيم المار من النقطتين $z_1 = 0$ و $z_2 = 1 + i$ هي $y = x$ أي $0 \le x \le 1$ ويكون $dy = dx$ ونجد تبعاً لذلك أن:

$$\int_\gamma = \int_0^1 [(1 - 2x)]dx - [(1 + 2x)]dx + i\int_0^1 [(1 + 2x)]dx + [(1 - 2x)]dx$$

$$= \int_0^1 [1 - 2x - 1 - 2x]dx + i\int_0^1 [1 + 2x + 1 - 2x]dx$$

$$= \int_0^1 - 4xdx + i\int_0^1 2dx$$

$$= -4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + i[2x]_0^1 = -4\left[\frac{1}{2}\right] + i[2]$$

$$= -2 + 2i$$

٢) من أجل القطع المكافئ $y = x^2 \Leftarrow dy = 2x\,dx$، $0 \le x \le 1$

$$\int_\gamma (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_0^1 [1 - 2x]dx - [1 + 2x^2]2xdx$$

$$+i\int_0^1[(1+2x^2)dx+(1-2x)(2x)dx]$$

$$=-2+\frac{4}{3}i$$

٣) من أجل المجال المغلق z_1z_3 لدينا $y=0$ فإن $dy=0$ و $0\le x\le 1$.

من أجل المجال المغلق z_3z_2 لدينا $x=1$ و $dx=0$ و $0\le y\le 1$ وباستخدام خاصة الخطية في التكامل نجد:

$$\int_\gamma(1+i-2\bar{z})dz=\int_{z_1z_3}(1+i-2\bar{z})dz+\int_{z_3z_2}(1+i-2\bar{z})dz$$

$$=\int_0^1\{[(1-2x)]dx-[1+2y]dx\}+i\int_0^1[1+2y]dx+i\int_0^1(1-2x)dy$$

وبالاستفادة من معطيات المسألة نجد:

$$=\int_0^1(1-2x)dx+i\int_0^1dx-\int_0^1(1+2y)dy-i\int_0^1dy$$

$$=-2$$

سابعاً: احسب التكامل: $\int_\gamma(z^2+z\cdot\bar{z})dz$

حيث γ هو قوس الدائرة $|z|=1$ وحيث $0\le\arg z\le\pi$

الحل:

نضع $z=e^{i\theta}\Leftarrow dz=ie^{i\theta}d\theta$

$$\int_\gamma(z^2+z\bar{z})dz=\int_0^\pi\left[e^{i\theta}+e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}\right]ie^{i\theta}d\theta=-\frac{8}{3}$$

ثامناً: احسب التكامل $\int_{\gamma}\frac{\ln^3 z}{z}dz$، حيث γ قوس الدائرة $|z| = 1$ الواصل بين النقطتين 1 و i وكذلك $\ln z$ هو التعيين الرئيسي للتابع اللوغاريتمي الذي من أجله $\ln 1 = 0$.

الحل:

التابع المستكمل تحليلي في جميع نقاط المنحني γ ومن ثمَّ:

$$\int_{\gamma}\frac{\ln^3 z}{z}dz=\int_{1}^{i}\frac{\ln^3 z}{z}dz=\int_{1}^{i}\ln^3 z d(\ln z)$$

$$=\frac{\ln^4 z}{4}\Big|_{1}^{i}=\frac{\ln^4 i-\ln^4 1}{4}$$

$$=\frac{\ln^4 i}{4}=\frac{\pi^4}{64}$$

تاسعاً: احسب التكامل $\int_{|z|=2}\frac{chiz}{z^2+4z+3}dz$

الحل:

$$\int_{|z|=2}=\int_{|z|=2}\frac{chiz}{(z+1)(z+3)}dz$$

التابع المستكمل تحليلي داخل الدائرة $|z| = 2$ باستثناء النقطة $z = -1$ لذا لتطبيق تكامل كوشي نكتب التابع المستكمل بالشكل:

$$=\int_{|z|=2}\frac{\frac{chiz}{z+3}}{z-(-1)}dz$$

ومن الواضح أن التابع $f(z)=\frac{chiz}{z+3}$ تحليلي في الدائرة $|z| \le 2$ ووفقاً لذلك نجد:

$$\int_{|z|=2} \frac{\text{chiz}}{z^2+4z+3} = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{\text{ch}(-i)}{2}$$

$$= \pi i \text{chi} = \pi i \cos 1$$

عاشراً: ليكن التابع $f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$

وليكن L محيط الدائرة $|z| = 1$. المطلوب حقق مبرهنة كوشي.

الحل:

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}\, d\theta$$

$$\int_L f(z)dz = \int_{|z|=1} (z^3 - iz^2 - 5z + 2i)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (e^{3i\theta} - ie^{2i\theta} - 5e^{i\theta} + 2i)ie^{i\theta} d\theta$$

$$= \left[i\frac{e^{4i\theta}}{4i} + \frac{1}{3i}e^{3i\theta} - \frac{5}{2}e^{2i\theta} - \frac{2}{i}ie^{i\theta} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

لأن: $e^{2\pi ki} = 1 \; ; k = 0, 1, 2, \ldots$

حادي عشر: احسب التكامل: $\int_c \frac{\sin \pi z}{z(z-1)} dz; C: |z| = 2$

الحل:

التابع $\sin \pi z$ تحليلي في المستوي العقدي فهو تحليلي في الدائرة C المفروضة كما أن للتابع المكامل نقطتين شاذتين هما $z = 0$ و $z = 1$ تنتميان إلى الدائرة C وهي نقاط شاذة معزولة. نحيط كلاً من النقطتين $z = 0$ و $z = 1$ بدائرتين C_1 و C_2 غير متقاطعتين $C: |z| = r_1 \; ; C_2: |z - 1| = r_2$ حيث r_1 و r_2 نصفا قطرين صغيرين بقدر كافٍ ويكون:

$$\int_C = \int_{C_1} \frac{\frac{\sin \pi z}{z-1}}{(z-0)} dz + \int_{C_2} \frac{\frac{\sin \pi z}{z}}{z-1} dz$$

حيث: $f_1(z) = \frac{\sin \pi z}{z-1}$ تحليلي في الدائرة C_1.

$f_2(z) = \frac{\sin \pi z}{z}$ تحليلي في الدائرة C_2.

ومن ثمَّ:

$$\int_C = \frac{2\pi i}{0!}\left(\frac{\sin \pi z}{z-1}\right)_{z=0} + \frac{2\pi i}{0!}\left(\frac{\sin \pi z}{z}\right)_{z=1} = 0$$

ثاني عشر: احسب التكامل $\int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz; \gamma = 1 + e^{it}; 0 \le t \le 2\pi$

الحل:

$$\int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz = \int_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz$$

نفرق الكسر $\frac{1}{z^2-1}$ فنجد:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$$

$$1 = A(z+1) + B(z-1) \Rightarrow 1 = (A+B)z + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow B = -A$$

$$\Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1}dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+1}dz$$

z الواقعة على γ تحقق:

$$z = 1 + e^{it}$$
$$\Rightarrow z - 1 = e^{it} \Rightarrow z + 1 = 2 + e^{it}$$
$$dz = i\, e^{it}\, dt$$

$$\int_\gamma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{2+e^{it}}dt = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(2+e^{it})'}{(2+e^{it})}dt$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}dt - \frac{1}{2}\left[\ln(2+e^{it})\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{i}{2}[t]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\ln(2+e^{it})\right]_0^{2\pi}$$

$$= i\pi - \frac{1}{2}\left[\ln(2+e^{2\pi i}) - \ln(2+e^0)\right]$$

$$= i\pi - \frac{1}{2}[\ln 3 - \ln 3] = i\pi$$

ثالث عشر: احسب التكامل $\int_\gamma (z^2-1)^{-1}dz; \gamma = 2e^{it}; -\pi \le t \le \pi$

الحل:

$$z = 2e^{it}$$
$$dz = 2ie^{it}dt$$
$$z - 1 = 2\,e^{it} - 1\ ,\ z + 1 = 2e^{it} + 1$$

$$\int_\gamma = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2ie^{it}}{2e^{it}-1}dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2ie^{it}}{2e^{it}+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(2e^{it}-1)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\ln(2e^{it}+1)\right]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(2e^{i\pi}-1)-\ln(2e^{-i\pi}-1)\right]-\frac{1}{2}\left[\ln(2e^{i\pi}+1)-\ln(2e^{-i\pi}+1)\right]$$
$$= 0$$

رابع عشر: احسب التكامل $\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}}dz$

أ. γ هو النصف الأعلى من دائرة الوحدة من 1- إلى 1+.

ب. γ هو النصف الأسفل من دائرة الوحدة من 1+ إلى 1-.

الحل:

$$\int_{-1}^{+1} z^{-\frac{1}{2}}dz = \left[2z^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{+1} = 2\left[\sqrt{1}-\sqrt{-1}\right]$$

حساب الجذر التربيعي للعدد العقدي (1):

$$\sqrt{1} = |1|.\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{2}\right]_{\theta=0} \quad k=0,1$$

$$\sqrt{1} = \begin{cases} \cos 0 + i\sin 0 = 1 & \text{(في النصف الأعلى من دائرة الوحدة)} \\ \cos\pi + i\sin\pi = -1 & \text{(في النصف الأسفل من دائرة الوحدة)} \end{cases}$$

حساب الجذر التربيعي للعدد العقدي (1-):

$$\sqrt{-1} = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i & \text{(في النصف الأعلى من دائرة الوحدة)} \\ \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2} = -i & \text{(في النصف الأسفل من دائرة الوحدة)} \end{cases}$$

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_{-1}^{+1} z^{-\frac{1}{2}}dz = 2(1-i)$$

وذلك في النصف العلوي من دائرة الوحدة، وبشكل مشابه نحسب قيمة التكامل في النصف السفلي من دائرة الوحدة.

خامس عشر: احسب التكامل $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ حيث γ هو قوس الدائرة $|z| = 1$ الواقع في نصف المستوي العلوي و $\sqrt{z}$ هو الفرع الذي من أجله $\sqrt{1} = -1$.

الحل:

إذا كان z عدداً عقدياً زاويته θ وطويلته r فإن $\sqrt{z}$ له فرعان:

الأول:

$$\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

الثاني:

$$\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos(\frac{\theta}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\theta}{2} + \pi)\right]$$
$$= -r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

إن الفرع الذي من أجله $\sqrt{1} = -1$ هو الثاني وبما أن γ هو قوس الدائرة $|z| = 1$ فإن $r = 1$ و:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)\, d\theta$$

في النصف العلوي: $\theta: 0 \to \pi$

$$\int_{\gamma} = \int_{0}^{\pi} \frac{(-\sin\theta + i\cos\theta)}{-(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})} d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi}(-\sin\theta + i\cos\theta)(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi}\left[-\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= +\int_0^{\pi}(\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2})d\theta - i\int_0^{\pi}(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\sin(\theta - \frac{\theta}{2})d\theta - i\int_0^{\pi}\cos(\theta - \frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta - i\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= \left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - i\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -2(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) - 2i(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)$$

$$= 2 - 2i$$

سادس عشر: أعد التمرين السابق لكن من أجل $\sqrt{z}$ هو الفرع الذي من أجله $\sqrt{1} = +1$.

الفرع الذي من أجله $\sqrt{1} = +1$ هو الفرع الأول:

$$\int_{\gamma} = \int_0^{\pi}\frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$= -(2 - 2i) = -2 + 2i$$

سابع عشر: احسب التكامل: $\int_{\gamma} z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$ حيث:

$$\gamma = \{|z| = 1; -\pi \le \arg z \le 0\}$$

الحل:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$z^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i\,(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\operatorname{Im} z^2 = \sin 2\theta$$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$\int_\gamma = \int_{-\pi}^{0} i\sin 2\theta e^{2i\theta} d\theta$$

$$= i\int_{-\pi}^{0} \sin 2\theta e^{2i\theta} d\theta$$

$$= i\int_{-\pi}^{0} \sin 2\theta(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) d\theta$$

$$= i\int_{-\pi}^{0} \sin 2\theta\cos 2\theta d\theta - \int_{-\pi}^{0} [\sin 2\theta]^2 d\theta$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta + \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{0} \sin 4\theta d\theta$$

لكن :

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin 4\theta d\theta = \left[-\frac{1}{4}\cos 4\theta\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

ومن ثمَّ نجد:

$$\int_\gamma = -\frac{\pi}{2}$$

ثامن عشر: احسب التكامل: $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$

الحل:

إن التابع المستكمل $\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$ يفقد تحليليته في المنطقة $|z-1| \le 1$ فقط في النقطة $z = 1$ لذا نكتب هذا التابع على الشكل الآتي:

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}$$

نلاحظ أن التابع في البسط تحليلي في المنطقة $|z-1| \le 1$ وباستخدام علاقة كوشي التكاملية العامة من أجل $n = 1$ نجد أن:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1)$$

$$f'(z) = \left[\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right]' = \frac{\pi \cos \pi z(z+1) - 2\sin \pi z}{(z+1)^3}$$

$$f'(1) = -\frac{\pi}{4}$$

وبالتالي فإن:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i$$

تاسع عشر: احسب التكامل:

$$\int_C \frac{z \cos \pi z}{(z+2)^2 (z-1)} dz; C: |z| = 4$$

الحل:

$$\frac{1}{(z+2)^2(z-1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{(z+2)^2}$$

$$A=\frac{1}{9};B=-\frac{1}{9};C=-\frac{1}{3}$$

$$\int_C=\int_C\frac{\frac{1}{9}z\cos\pi z}{z-1}dz+\int_C\frac{-\frac{1}{9}z\cos\pi z}{z+2}dz+\int_C\frac{-\frac{1}{3}z\cos\pi z}{(z+2)^2}dz$$

$$=\frac{1}{9}2\pi i(\cos\pi)-\frac{1}{9}2\pi i(-2\cos(-2\pi))-\frac{1}{3}\left(\frac{2\pi i}{1!}\right)\left[(z.\cos\pi z)'\right]_{z=-2}$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)-\frac{2}{3}\pi i\left[\cos z\pi-\pi z\sin\pi z\right]_{z=-2}$$

$$=\frac{-2\pi i}{9}-\frac{2}{3}\pi i\quad(1)$$

$$=-\frac{4}{9}\pi i$$

عشرون: احسب التكامل: $\int_{|z|=2}\frac{chz}{(z+1)^3(z-1)}dz$

الحل:

إن التابع المستكمل تحليلي في جميع نقاط المنطقة $|z|\le 2$ باستثناء النقطتين $z_1=-1$ و $z_2=1$، لنحط هاتين النقطتين بدائرتين C_1 و C_2 نصفا قطريهما صغيران بقدر كافٍ ولا يتقاطعان فيما بينهما وتقعان كلياً داخل المنطقة $|z|\le 2$.

بتطبيق مبرهنة كوشي في الحالة العامة نجد:

$$\int_{|z|=2}=\int_{C_1}+\int_{C_2}$$

ونعلم أن:

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\int_{C_1} = \int \frac{\frac{chz}{(z-1)}}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{chz}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=-1} = -\frac{2e^{-1} + ch1}{4}\pi i$$

$$\int_{C_2} = \int_{C_2} \frac{\frac{chz}{(z+1)^3}}{(z-1)} dz = \left[2\pi i \frac{chz}{(z+1)^3}\right]_{z=1} = \frac{ch1}{4}\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{C} = -\pi i \frac{2e^{-1} + ch1}{4} + \frac{\pi i ch1}{4}$$

$$= \frac{-\pi i}{2e}$$

حادٍ وعشرون: استند إلى مبرهنة كوشي في حساب التكامل:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$$

حيث:

أ. $\gamma: |z-2| = 1$

(ب) $\gamma: |z-2| = 3$

جـ) $\gamma: |z-2| = 5$

الحل:

أ. إن التابع المستكمل تحليلي في الساحة المغلقة والمحدودة بالدائرة $|z-2| = 1$ واستناداً إلى مبرهنة كوشي فإن التكامل معدوم.

ب . إن التابع المكامل يفقد تحليليته داخل الساحة المحدودة بالدائرة $|z-2|=3$ في النقطة $z=0$ وبكتابة التابع المستكمل على الشكل الآتي:

$$\int_{\gamma} = \int_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz$$

هنا نجد أن التابع $f(z)=\frac{e^{z^2}}{z-6}$ تحليلي في الساحة المذكورة وباستخدام صيغة كوشي التكاملية نجد:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} = 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}$$

جـ) إن التابع المستكمل يفقد تحليليته داخل الساحة المحدودة بالدائرة $|z-2|=5$ في النقطتين $z=0$ و $z=6$ ومن ثمَّ فإنه لا يمكننا استخدام العلاقة السابقة وفي مثل هذه الحالات يمكننا التصرف على الشكل الآتي:

طريقة أولى: نقوم بتفريق الكسر: $\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}$

وبالتعويض في التكامل نجد:

$$\int_{|z-2|=5} = \frac{1}{6}\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}dz}{z-6} - \frac{1}{6}\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z} dz$$

وهنا أصبح $f(z)=e^{z^2}$. عندئذ نجد:

$$= \frac{1}{6}2\pi i e^{36} - \frac{1}{6}2\pi i = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

طريقة ثانية: لنحط النقطتين $z=0$, $z=6$ بدائرتين γ_0, γ_1 مركزهما على الترتيب النقطتان z_0, z_1 ونصفا قطريهما صغيران بمقدار كافٍ وبحيث لا يتقاطعان فيما بينهما

وكذلك أيٍّ منهما مع الدائرة $|z-2| = 5$، ووفقاً لذلك يمكننا تطبيق مبرهنة كوشي التكاملية من أجل ساحة متعددة الاتصال ونجد:

$$\int_{|z-2|=5} = \int_{\gamma_0} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz + \int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} + 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z}\right|_{z=6}$$

$$= \frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

٤ . ٧ . تمارين غير محلولة:

أولاً: بين أن المسار (الطريق) C حيث: $C: z(t) = t^3 - it,\ 0 \le t \le 2$ مسارٌ أملس.

ثانياً: أوجد معادلتين وسيطيتين تمثلان المسار (الطريق) C المعرف بالمعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ثم بين أن C منحنٍ أملس.

ثالثاً: أوجد معادلتين وسيطيتين لكل مسار C فيما يلي:

أ . نصف الدائرة العلوي $|z - i| = 2$ الذي يسير عكس عقارب الساعة.

ب . C مكون من القطع المستقيمة التي تصل بين النقاط $-2,\ 2i,\ 2 + 2i,\ 5$ على الترتيب.

جـ . الجزء من القطع المكافئ $y = x^2$ الذي يصل بين النقطتين $(0, 0)$, $(2, 4)$.

رابعاً: بيّن أن مدى الدالة $0 \le t \le \pi,\ z(t) = \cos t + t^2 i$ يمثل مساراً ممهداً (أملس).

خامساً: باستخدام المساواة (12) أوجد طول المسار C فيما يلي:

أ . المسار المذكور في فرع أ من التمرين ٣.

ب . المسار المذكور في فرع ب من التمرين ٣.

جـ . المسار المذكور في فرع جـ من التمرين ٣.

د . المسار المذكور في التمرين ٢.

هـ . المسار المذكور في التمرين ١.

سادساً: أعط تفسيراً فيزيائياً لكل مما يلي:

أ . $z'(t)$

ب . $|z'(t)|$

جـ . $\int_a^b |z'(t)|\,dt$

حيث إن $z(t)$ يمثل مسار نقطة تتحرك في المستوي ومجال المتغير t هو $[a, b]$.

سابعاً: أوجد قيمة التكاملات التالية:

أ . $\int_0^1 (t^2 - t^3 i)dt$

ب . $\int_0^{\pi/2} e^{-ti}dt$

جـ . $\int_1^3 (i + 2t)^2 dt$

د . $\int_0^{\pi/6} e^{(1-i)t}dt$

ثامناً: بفرض أن الدالة θ التي تنقل الفترة $[c, d]$ على الفترة $[a, b]$ بشكل واحد لواحد وشامل مستمرة، وإذا كان $z(t)$ حيث $t \in [a, b]$ يمثل مساراً ممهداً فبرهن أن:

$$\int_{\theta(c)}^{\theta(d)} |z'(t)|\,dt = \int_{c}^{d} |z'(\theta(s))\theta'(s)ds$$

ثم ما المعنى الفيزيائي لهذه المساواة؟.

تاسعاً: بيّن أن:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt}\cdot e^{-int}dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases}$$

عاشراً: أوجد قيمة التكامل $\int_C \bar{z}dz$ لكل من المسارات التالية:

أ . C مجموعة النقاط التي تحقق:

$$z = 2e^{\theta i},\ 0 \le \theta \le \pi/2$$

ب . C تتكون من الخطوط المستقيمة التي تصل بين النقاط التالية:

$$2,\ 2+i,\ -2+i,\ -2$$

جـ . C تتكون من الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين 2 ,2-.

حادي عشر: أوجد قيمة التكامل $\int_C (z^2+i)dz$ لكل من المسارات التالية:

أ . $C: z(t) = t + (1+t)\,i,\ 0 \le t \le 1$

ب . الخطوط المستقيمة التي تصل بين النقاط $0,\ 2,\ 2-3i$

ثاني عشر: أوجد قيمة التكامل $\int_C |z|^2\,dz$ للمسار:

$$C: z(t) = -t + (1-t)i,\ 0 \le t \le 1$$

ثالث عشر: أوجد قيمة التكامل $\int_C e^{-zi}dz$ للمسار:

$$C: z(t) = 2 + e^{ti},\ 0 \le t \le \pi$$

رابع عشر: بفرض أن C يمثل الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 وأن الدالة f مستمرة على C بين أن:

$$\int_C f(z)dz = r_0 i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{ti}) e^{ti} dt$$

اقتراح: بين أن المعادلة التي تمثل C هي:

$$C: z(t) = z_0 + r_0 e^{ti},\ 0 \le t \le 2\pi$$

خامس عشر: بالاستعانة بالتمرين السابق بين أن:

أ. $\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$

ب. $\int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = 0; n \ne 1$

حيث إن C هو الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r_0.

سادس عشر: برهن أن:

$$\left| \int_C \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz \right| \le \frac{3\sqrt{3}}{8} \pi$$

حيث إن C تمثل نصف محيط الدائرة: $C: z(t) = 3e^{ti}\ ,\ 0 \le t \le \pi$

سابع عشر: برهن أن:

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2 - 1} dz \right| \le \frac{\pi}{3}$$

حيث إن C يمثل ربع الدائرة: $C: z(t) = 2e^{ti}\ ,\ 0 \le t \le \pi/2$

ثامن عشر: برهن أن:

$$\left| \int_C \frac{\mathrm{Log} z}{z^2} dz \right| \le 2\pi \frac{\pi + \ln R}{R}$$

حيث إن C يمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R أكبر من 1.

تاسع عشر: بفرض أن C دائرة نصف قطرها الواحد ومركزها نقطة الأصل برهن أن:

أ. $\int_C e^z dz = 0$

ب. $\int_C e^{\bar{z}} dz \neq 0$

عشرون: كرر التمرين السابق للدالة $f(z) = z^2$ للفرع (أ) و $f(z) = \bar{z}^2$ للفرع (ب). ماذا تستنتج من كلا التمرينين.

حادٍ وعشرون: بفرض أن C يمثل الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين $0, \pi/2$ برهن أن:

$$\left| \int_C e^{\cos z} dz \right| \leq e$$

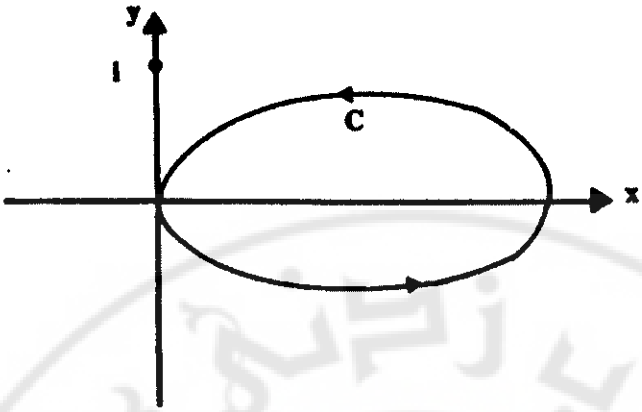
ثانٍ وعشرون: في التمارين ١ - ٦ طبق مبرهنة كوشي - كورسات لإثبات أن $\int_C f(z)dz = 0$ حيث C كانتور موجب الاتجاه:

١. $C: |z| = 1 \ , \ f(z) = \sin z$

٢. $C, \ f(z) = e^{2z}$ مكون من القطع المستقيمة التي تصل بين النقاط $0, 1+i, 2+i, 3, 0$ على التوالي.

٣. $C, \ f(z) = 2z^3 - i$ مكون من أضلاع المثلث ذي الرؤوس $i, -i, 2$.

٤. $f(z) = \dfrac{z}{z-i}$ ، C يمثل الكانتور في الشكل:



الشكل (١٤)

٥ . $C, f(z) = \tan z$ مكون من القطع المستقيمة الواصلة بين النقاط: $+i, -i, +1, -1$ بحيث يكون موجب الاتجاه.

٦ . $C, f(z) = |z|^2 e^z$ يمثل دائرة الوحدة.

ثالث وعشرون: أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{1}{z} dz$ في الحالات التالية:

أ . C مكون من المربع الذي رؤوسه $\mp 1, \mp i$ بالاتجاه الموجب.

ب . C مكون من الدائرة $|z - 2i| = 1$.

جـ . C يصل بين النقطتين z_1, z_2 اللتين لا تقعان على الجزء السالب من المحور الحقيقي.

د . C دائرة الوحدة.

اقتراح: استعن بالفرع (جـ)، وذلك بفرض أن الدائرة تبدأ بالنقطة z_1 التي تقع في النصف السفلي من المستوي المركب، وتنتهي بالنقطة z_2 التي تقع في النصف العلوي من المستوي المركب، ثم أوجد قيمة التكامل بأخذ النهاية عندما تقترب النقطتان z_1, z_2 من النقطة -1 لإغلاق الدائرة.

رابع وعشرون: في المثال (٣٠) برهن أن الفرع الرئيسي للدالة $f(z) = z^{1/2}$ ليست مستمرة على النصف السالب من المحور الحقيقي.

خامس وعشرون: بين أنه لأي كثيرة حدود $P(z)$ فإن $\int_C P(z)dz = 0$ لأي مسار مغلق وبسيط C.

سادس وعشرون: بين أن $\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 0$ لأي مسار مغلق وبسيط C تقع النقطة z_0 في المنطقة الخارجية له.

سابع وعشرون: بفرض أن: $\int_C \frac{1}{z+1-i} dz = 2\pi i$

حيث إن C يمثل الدائرة التي مركزها $-1 + i$ ونصف قطرها 2، أوجد قيمة التكامل:

$$\int_C \frac{1}{z+1-i} dz$$

وذلك إذا كان C يمثل المربع ذا الرؤوس $-2, -2 + 2i, 2i, 0$ بالاتجاه الموجب.

ثامن وعشرون: أوجد قيمة التكاملات التالية:

أ. $\int_i^3 (z-i)^2 dz$ ب. $\int_0^{2+\frac{\pi}{2}i} \sin 2z dz$

جـ. $\int_1^{2i} e^{\frac{\pi}{2}iz} dz$ د. $\int_{\frac{\pi}{3}i}^{1-i} ze^z dz$

هـ. $\int_0^{-i} \cos z dz$ و. $\int_1^{1+i} \frac{2z+1}{z^2+z} dz$

تاسع وعشرون: أوجد قيمة $\int_C \frac{2z+1}{z^2+z} dz$ في الحالات التالية:

أ . C يمثل الكانتور $|z+1|=\frac{1}{2}$.

ب . C يمثل الكانتور $|z|=\frac{1}{2}$.

جـ . C يمثل الكانتور $|z-1|=\frac{1}{2}$.

ثلاثون: بين أن قيمة $\int_C z^{1/2}dz$ ليست مستقلة عن المسار إذا كان المسار يصل بين النقطتين $-i, 1+\sqrt{3}i$ وأن:

$$z^{1/2}=|z|^{1/2}\, e^{i\theta/2}, |z|>0, \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{7\pi}{3}$$

ثم أوجد قيمته باختيار فرع مناسب.

حادٍ وثلاثون:

. بفرض أن $f(z)$ معرفة بالمساواة:

$$f(z)=z^i=e^{i(\ln|z|+\theta i)}\ ,\ |z|>0\ ,\ -\pi<\theta<\pi$$

وباختيار فرع مناسب، أوجد قيمة التكامل:

$$\int_C f(z)dz$$

حيث إن C يصل بين النقطتين $-2,\ 1+i$ ويقع في النصف العلوي من المستوي المركب.

ثانٍ وثلاثون: إذا كان C يمثل الدائرة $|z|=3$ أوجد قيمة التكاملات التالية:

أ . $\int_C \frac{ze^z}{z-1}dz$ ب . $\int_C \frac{\cos 2z}{z-\frac{\pi}{3}\cdot i}dz$

جـ . $\int_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^5}dz$ د . $\int_C \frac{\tan z}{(z-1)(z+1)}dz$ هـ . $\int_C \frac{z^3}{(z-i)^3}dz$

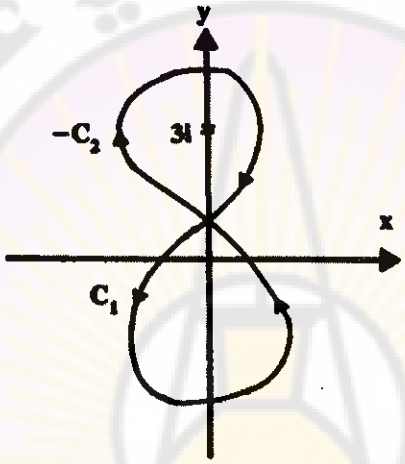
اقتراح: استعن بتفريق الكسر $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$

ثالث وثلاثون: أوجد قيمة التكامل: $\int_C \frac{\sin 2z}{z^3 - 3iz^2} dz$

في الحالات التالية:

أ. C هو المسار في الشكل (٢١).

اقتراح: اكتب $C = C_1 + C_2$ وجزئ التكامل.



الشكل (٢١)

ب. $C: |z - 3| = 2$

جـ. $C: |z| = 1$

د. $C: |z - 3i| = 2$

رابع وثلاثون: احسب القيمة المتوسطة للتابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ على الدائرة الموجودة ضمن قرص تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. أي احسب التكامل: $I = \int_0^{2\pi} f(re^{it})dt$

وحيث: $z = r\,e^{it}\,;\ 0 \le t \le 2\pi$.

خامس وثلاثون: نفرض أن C يمثل القطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 36$ بالاتجاه الموجب وأن الدالة $F(z)$ معرفة بالمساواة:

$$F(z) = \int_C \frac{3s^2 - 2s + 1}{s - z} dz$$

لكل z لا تقع على الكانتور C أوجد قيمة ما يلي:

أ. $F(2)$, $F(i)$.

ب. $F'(i)$, $F''(-i)$.

جـ. $F(4)$, $F(3i)$.

سادس وثلاثون: إذا كان C أي كانتور مغلقاً وبسيطاً، والدالة $f(z)$ معرفة بالمساواة الآتية:

$$f(z) = \int_C \frac{s^3 - 2s}{(s - z)^4} ds$$

لكل z لا تقع على الكانتور C فبرهن أن:

$$f(z) = \begin{cases} 2\pi i & ; \quad \text{(لكل z داخل الكانتور C)} \\ 0 & ; \quad \text{(لكل z خارج الكانتور C)} \end{cases}$$

سابع وثلاثون: إذا كانت الدالة f تحليلية على مجال يحتوي الدائرة $C: |z - z_0| = r$ فبرهن (باستخدام مبرهنة كوشي للتكامل) أن:

أ - $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{ti}) dt = 2\pi f(z_0)$ تسمى هذه المساواة مبرهنة غاوص للقيمة الوسطى.

ب. $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{ti}) e^{-nti} dt = \frac{2\pi r^n f^{(n)}(z_0)}{n!}$

اقتراح: استعن بالمعادلة الوسيطية للدائرة، ثم طبق مبرهنة كوشي للتكامل.

ثامن وثلاثون: إذا كانت الدالة f تحليلية على مجال يحتوي كانتوراً مغلقاً وبسيطاً C فبرهن:

$$\int_C \frac{f'(s)}{s-z}ds = \int_C \frac{f(z)}{(s-z)^2}ds$$

لكل z لا تقع على الكانتور C نفسه.

تاسع وثلاثون: نفرض أن C يمثل دائرة الوحدة بيّن أن:

$$\int_C z^{-1}e^z dz = 2\pi i$$

ثم بالاستفادة من المعادلة الوسيطية لدائرة الوحدة بيّن أن:

$$\int_0^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt = \pi$$

أربعون: من المعروف أن كثيرة حدود ليجندر يمكن أن تكتب بالصيغة:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\right]$$

استعن بمبرهنة كوشي للتكامل لإثبات أن:

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{(s^2-1)^n}{2^{n+1}(s-z)^{n+1}}ds$$

حادٍ وأربعون: إذا كانت f تحليلية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً والمسار C يمثل كانتوراً مغلقاً وبسيطاً وكانت النقطتان z, w في المنطقة الداخلية للكانتور فبرهن أن:

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)(s-w)}ds$$

ماذا نستنتج إذا تركنا النقطة w تقترب من z؟

ثانٍ وأربعون: نفرض أن الدالة f تحليلية على جميع الأعداد المركبة بحيث يوجد عدد حقيقي موجب M يحقق الشرط $\text{Re. } f(z) \le M$ لكل z. فبرهن أن f ثابتة القيمة.

اقتراح: طبق مبرهنة ليوفيل على الدالة $g(z) = e^{f(z)}$.

ثالث وأربعون: أوجد جميع الدوال التحليلية على المجال $D: |z| < 3$ التي تحقق الشرط $f(0) = -i$ وأن $|f(z)| \leq 1$ لكل z في D.

رابع وأربعون: نفرض أن f دالة تحليلية على المجال D المحدود بالكانتور المغلق البسيط C ويحقق: $|f(z) - 2| < 1$ لكل z تقع على الكانتور C. برهن أنه لا يوجد عدد مركب w بحيث إن $f(w) = 0$.

خامس وأربعون: بين أن أي كثيرة حدود P_n من الدرجة n يمكن أن تكتب على الصيغة

$$P_n(z) = \alpha_n (z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_n)$$

حيث إن $w_1, w_2, \dots, w_n$ تمثل الجذور (المركبة) لكثيرة الحدود $P_n(z)$ (مع تكرار الجذور).

سادس وأربعون: إذا كانت $f(z) = \alpha z + \beta$ معرفة على المجال: $D = \{z: |z| < 1\}$.

بيّن أنه يوجد قيمة عظمى للدالة $|f(z)|$ وهي: $\max |f(z)| = |\alpha| + |\beta|$

وأن هذه القيمة تحدث عند $w = e^{\theta_0 i}$ على الكانتور $C: |z| = 1$ حيث إن:

$$\theta_0 = \arg \alpha - \arg \beta$$

سابع وأربعون: برهن قانون القيمة الصغرى لمقدار الدالة $|f(z)|$ بإثبات أن $|f(z)|$ ليس لها قيمة صغرى على المجال D إذا كانت تحليلية وليست ثابتة، وأن القيمة الصغرى تحدث عند إحدى النقاط الحدودية للمجال D.

اقتراح: طبق القانون على الدالة: $g(z) + \dfrac{1}{f(z)}$

ثامن وأربعون: أوجد القيمة العظمى للدالة $f(z) = \cos z$ على المنطقة المغلقة:

$$R = \{z: 0 \leq \text{Re. } z \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \text{Im. } Z \leq 2\}$$

تاسع وأربعون: إذا كانت الدالة صحيحة وتحقق الشرط $|f(z)| \geq 1$ لكل عدد مركب z. برهن أن $f(z)$ ثابتة القيمة.

خمسون: بفرض أن الدالة f صحيحة وتحقق المتباينة $|f(z)| \leq k \ |z|$ لكل الأعداد المركبة z (حيث k عدد حقيقي موجب ثابت) برهن أن $f'(z) = 0$ لكل z وأن:

$$f(z) = \alpha z + \beta$$

حادٍ وخمسون: بفرض أن الدالة f تحليلية على المجال $D: |z| < 3$ وأن $|f(z)| \leq 5$ لكل z تقع على الدائرة $|z - 1| = 1$. أوجد حداً أعلى للمقدارين: $|f'''(1)|, |f''(0)|$

ثانٍ وخمسون: بفرض أن الدالة f تحليلية وليست ثابتة القيمة على المجال D المحدود بالكانتور البسيط المغلق C برهن أنه إذا كانت $|f(z)|$ ثابتة القيمة على الكانتور C فإنه يوجد على الأقل عدد واحد w في D يحقق $f(w) = 0$.

* * *

الفصل الخامس

تمثيل الدوال التحليلية بالمتسلسلات

Series Representation of Analytic Functions

نتعرض في هذا الفصل للمتتاليات والمتسلسلات التي تتكون حدودها من أعداد مركبة ولا سيما تعريف كل من نهاية المتتالية ومجموع المتسلسلة، ونجد علاقة بين هذه المتتاليات والمتسلسلات المركبة وتلك الحقيقة التي بحثت في موضوعات التفاضل والتكامل والتحليل الحقيقي. ونعرض بعض اختبارات التقارب ثم نخصص الدراسة لمتسلسلات تايلور وماكلورين ومتسلسلات القوى ثم كيفية تمثيل الدوال التحليلية بمتسلسلات القوى.

٥ . ١ . المتتاليات والمتسلسلات:

بفرض أن (z_n) متتالية من الأعداد المركبة فإن متسلسلة الأعداد المركبة هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + \ldots z_n + \ldots$$

أما متتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة فهي (S_n) حيث:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$$

ويمكن تعريف نهاية المتتالية ونهاية المتسلسلة في التعريف التالي:

تعريف (١):

نفرض أن z_0 عدد مركب فإن z_0 نهاية المتتالية (z_n) (وبالرموز $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$) عندما تزداد n بدون توقف إذا تحقق الشرط التالي:

لكل $\in > 0$ يوجد N بحيث إن:

$$n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \in \qquad (1)$$

وعندها تسمى المتتالية (z_n) متقاربة للعدد المركب z_0. أما إذا لم يوجد عدد مركب مثل z_0 يحقق (1) فإن المتتالية (z_n) تكون متباعدة.

وبالنسبة للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ فإنها تكون متقاربة للعدد المركب S إذا كان $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ وعندئذ يسمى العدد المركب S مجموع المتسلسلة ويكتب بالشكل:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

وإذا لم تكن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة فإنها تكون متباعدة، وذلك عندما تكون المتتالية (S_n) متباعدة.

يمكن الاستفادة من الاختبارات التي سبق للقارئ دراستها في مساق التفاضل والتكامل. نذكر من هذه الاختبارات بعضها حيث يناسب ذلك. فيما يلي اختبار المقارنة والنسبة دون برهان.

٥ . ١ . ١ . مبرهنة (اختبار المقارنة):

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ (حيث k_n عدد حقيقي موجب) متقاربة وكانت $|z_n| \le k_n$ لكل n بحيث $n = 0, 1, 2, \ldots$ فإن المتسلسلة المركبة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة.

٥ . ١ . ٢ . مبرهنة (٢) (اختبار النسبة):

إذا كانت (z_n) متتالية من الأعداد المركبة بحيث يوجد عدد حقيقي موجب L بحيث:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

فإن:

أ. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة إذا كانت $L < 1$.

ب. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متباعدة إذا كانت $L > 1$.

جـ. الاختبار يفشل في إعطاء معلومات إذا كانت $L = 1$.

مثال (١):

بين أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة إذا تحقق $|z| < 1$ ومتباعدة إذا كانت $|z| \geq 1$ ثم أوجد مجموع المتسلسلة إذا كانت متقاربة.

الحل:

بتطبيق اختبار المقارنة نستنتج أن: $|z| = |re^{\theta i}| = r$

وبما أن r عدد حقيقي موجب فإن $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ متسلسلة هندسية وتكون متقاربة عندما يكون $r < 1$ ومتباعدة عندما تكون $r \geq 1$ ومن ثمَّ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة إذا تحقق $|z| < 1$ ومتباعدة إذا تحقق $|z| \geq 1$. لإيجاد مجموع هذه المتسلسلة نجد متتالية المجاميع الجزئية لها وهي:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

وبالضرب بالعدد المركب z وطرح الناتج منها فإن:

$$S_n (1 - z) = 1 - z^{n+1}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

(ونترك للقارئ إثبات أن $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ إذا تحقق الشرط $|z| < 1$)، ومن ثمَّ فإن:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} - \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

ومنها فإن:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1 \qquad (2)$$

تسمى هذه المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ المتسلسلة الهندسية ولها أثرٌ مهمٌّ في تمثيل كثير من الدوال بالمتسلسلات كما سنرى.

يمكن أن ننظر للمتتالية المركبة وكذلك للمتسلسلة على أنها مكونة من متتاليتين أو متسلسلتين من الأعداد الحقيقية، وذلك بفرض أن $z_n = x_n + iy_n$ لنستنتج أن:

$$(z_n) = (x_n) + (y_n)\, i \qquad (3)$$

وتسمى المتتالية $\text{Re.}\ (z_n) = (x_n)$ الجزء الحقيقي وكذلك المتتالية $\text{Im.}\ (z_n) = (y_n)$ الجزء التخيلي للمتتالية (z_n) وكذلك:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) \qquad (4)$$

وتسمى المتسلسلة $\text{Re.}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ الجزء الحقيقي والمتسلسلة $\text{Im.}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ الجزء التخيلي للمتسلسلة S.

المبرهنة التالية تربط بين تقارب المتتالية (z_n) وتقارب كلتا المتتاليتين $(x_n), (y_n)$

مبرهنة (٣):

بفرض أن: $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$ فإن:

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$$

إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \qquad (5)$$

البرهان:

بفرض أن: $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$

فإن التعريف (١) يؤكد أنه لكل $\in > 0$ يوجد N بحيث إن:

$$n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \in$$

وبما أن:

$$|x_n - x_0| = |\text{Re.}\ (z_n - z_0)| < |z_n - z_0| < \in,$$
$$|y_n - y_0| = |\text{Im.}\ (z_n - z_0)| < |z_n - z_0| < \in$$

فإن:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

وبالعكس إذا فرضنا أن:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

باستخدام التعريف (١) يكون:

لكل $\in > 0$ يوجد N_1, N_2 بحيث إن:

$$n > N_1 \Rightarrow |y_n - y_0| < \in/2,$$
$$n > N_2 \Rightarrow |x_n - x_0| < \in/2$$

وبفرض أن $N = \max.\ \{N_1, N_2\}$ فإن $n > N \Rightarrow n > N_1\ ,\ n > N_2$

وعندئذ يكون $|z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \in$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

المبرهنة التالية تربط بين تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ وتقارب كلتا المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

مبرهنة (٤):

بفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ وأن $w = s + it$ فإن $w = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$

إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n, t = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \qquad (6)$$

البرهان:

بما أن:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + i\sum_{k=0}^{n} y_k = s_n + it_n$$

فإن المبرهنة السابقة تؤكد أن: $w = \lim_{n\to\infty} w_n$

إذا وإذا فقط تحقق الشرطان: $s = \lim_{n\to\infty} s_n, t = \lim_{n\to\infty} t_n$

مثال (٢):

بين أن المتتالية التالية متقاربة ثم أوجد نهايتها:

$$z_n = \frac{2n + i(n+2)}{n+1}$$

الحل:

بما أن:

$$z_n = \frac{2n}{n+1} + i\frac{(n+2)}{n+1}$$

نبحث عن نهاية كل من المتتاليتين: $\frac{(n+2)}{n+1}$ و $\frac{2n}{n+1}$ وبما أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$$

فإن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 2+i$$

مثال (٣):

بين أن المتسلسلة التالية متباعدة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

الحل:

بما أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

فإن اختبار ليبنتز للمتسلسلة المترددة (المتناوبة) يؤكد أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ متقاربة

وكذلك فإن اختبار المقارنة بين المتسلسلتين: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ يبين أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 > 0$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

إما أن تكونا متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً. وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متسلسلة متباعدة (لماذا؟) فإن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متباعدة كذلك وعليه فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

متسلسلة متباعدة.

المبرهنة التالية تفيدنا في اختبار التباعد للمتسلسلات.

مبرهنة (٥):

أ. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة فإن: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

ب . اختبار التباعد: إذا كان $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متباعدة (ليست متقاربة).

البرهان:

يتم بملاحظة أن: $z_n = S_n - S_{n-1}$ ونترك تفصيلاته تمريناً للقارئ.

مثال (٤):

بين أن $\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n$ متباعدة.

الحل:

نفرض أن $z_n = (1-i)^n$ وبالاستفادة من الشكل القطبي للعدد المركب:

$$z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{n\theta i}, \theta = \arg(1-i)$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \cos n\theta + i\left(\sqrt{2}\right)^n \sin n\theta$$

وبما أن كلاً من المتتاليتين الحقيقتين $\left((\sqrt{2})^n \sin n\theta\right)$ و $\left((\sqrt{2})^n \cos n\theta\right)$ متباعدة فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n \sin n\theta \neq 0, \lim_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n \cos n\theta \neq 0$$

(في الواقع هذه النهايات غير موجودة ومن ثمَّ كل منها لا يساوي صفراً) وهذا يفيدنا بأن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(1-i)^n \neq 0$$

وبتطبيق المبرهنة السابقة فإن $\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n$ متباعدة.

مثال (٥):

أ. أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$

ب. بين ما إذا كانت المتسلسلة التالية متقاربة أو متباعدة؟

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(1+i)^n}$$

الحل:

في الفرع أ نلاحظ أن المتسلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$ هندسية، وذلك بفرض أن $z=\frac{1}{2}(1+i)$ حيث: $|z|=\frac{1}{2}|1+i|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$.

وبالاستفادة من مثال (١) فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i)}$$

$$= \frac{2}{1-i} = (1+i)$$

أما الفرع (ب) فبالاستفادة من اختبار النسبة نستنتج أن:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)!(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}.n!} = \frac{n+1}{1+i}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty}(n+1) > 1$$

وهذا يؤكد أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1+i)^n}$ متباعدة.

ولإتمام الفائدة نورد بعض الشروط اللازمة والكافية لتكون المتتالية أو المتسلسلة متقاربة. وهذه الشروط تسمى شروط كوشي ونذكرها بدون برهان.

مبرهنة (٦):

بفرض أن (z_n) متتالية من الأعداد المركبة فإنها تكون متقاربة إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N بحيث إن:

$$N,m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \in \qquad (7)$$

أيّ متتالية تحقق الشرط (7) تسمى متتالية كوشي.

مبرهنة (٧):

بفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متسلسلة من الأعداد المركبة فإنها تكون متقاربة إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N بحيث إن:

$$n,m > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| < \in \qquad (8)$$

أيّ متسلسلة تحقق الشرط (8) تسمى متسلسلة كوشي.

وأخيراً سنعرض نوعين هامين من التقارب:

تعريف (٢):

يقال إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ متقاربة، ويمكن ملاحظة أن:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} z_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |z_k| \qquad (9)$$

فإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة تقارباً مطلقاً فإن $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ متقاربة ومن ثمَّ فإن مبرهنة (٧) تؤكد أن $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ تحقق شرط كوشي. وبالاستفادة من (9) فإن $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تحقق شرط كوشي (8) ومن ثمَّ تكون متقاربة، وبهذا نكون قد أثبتنا الحقيقة التالية:

مبرهنة (٨):

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة تقارباً مطلقاً فإنها تكون متقاربة. إذا فرضنا أن عناصر المتتالية تتكون من دوال $f_n(z)$ بدلاً من الأعداد المركبة فإننا نحصل على متتالية الدوال (f_n) وكذلك على متسلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ فعندئذ يوجد نوعان من التقارب الأول يعتمد على قيمة z، ويسمى التقارب الموضعي والآخر التقارب المنتظم وسنورد تعريف كل منهما فيما يلي:

تعريف (٣):

نفرض أن (f_n) متتالية من الدوال لها المجال المشترك D. نقول إن المتتالية (f_n) تتقارب تقارباً موضعياً عند النقطة z في المجال D للدالة f إذا تحقق الشرط:

لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N (يعتمد على $\in$، z) بحيث:

$$n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \in \qquad (10)$$

ونقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة تقارباً موضعياً من الدالة f إذا كانت المتتالية $S_n(z)$ متقاربة تقارباً موضعياً من الدالة f حيث إن: $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

وللتحقق من التقارب الموضعي للمتسلسلات الدالية نطبق أحد اختبارات التقارب المعروفة بعد تثبيت قيمة z.

تعريف (٤):

نقول إن المتتالية (f_n) متقاربة تقارباً منتظماً على المجال المشترك D للدالة f إذا تحقق الشرط التالي: لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N (يعتمد فقط على $\in$) بحيث:

$$n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \in \qquad (11)$$

لكل z في D. ونقول كذلك إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة تقارباً منتظماً على المجال المشترك D إذا كانت المتتالية (S_n) متقاربة تقارباً منتظماً على D.

المبرهنة التالية تمثل اختباراً للتقارب المنتظم.

٥ . ١ . ٣ . مبرهنة (٩) (اختبار فيرشتراس):

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متسلسلة دوال وكانت (M_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث إن $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ متقاربة فإذا تحقق الشرط:

$$|f_n(z)| \le M_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (12)$$

لكل z في المجال المشترك D فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ تكون متقاربة تقارباً منتظماً.

مثال (٦):

نفرض أن الدالة f_n معرفة بالمساواة:

$$f_n(z) = z^n$$

أثبت ما يلي:

أ . المتتالية (f_n) متقاربة تقارباً موضعياً على كل نقطة في المستوي تحقق الشرط $|z| < 1$.

ب . المتتالية (f_n) متقاربة تقارباً منتظماً على المجال D حيث إن:

$$D = \{z: |z| \le R < 1\}$$

جـ . المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة تقارباً موضعياً عند كل z بحيث إن $|z| < 1$.

د . المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة تقارباً منتظماً على المجال D حيث:

$$D = \{z: |z| \le R < 1\}$$

الحل:

أ . نثبّت العدد المركب z الذي يحقق $|z| = r < 1$ ومن ثمَّ فإن:

$$|z^n| = |z|^n < \in$$

ومن ذلك ينتج أن: $n \ln |z| < \ln \in$

وبما أن $|z| = r < 1$ فإن $\ln |z|$ سالب ومن ثمَّ فإن:

$$n > \frac{\ln \in}{\ln |z|}$$

فتكون قيمة N تحقق:

$$N = \left[\frac{\ln \in}{\ln |z|}\right]$$

لاحظ أن قيمة N تعتمد على قيمة $\in$ وكذلك على قيمة z وهذا يثبت أن:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

تقارباً موضعياً لكل z تحقق الشرط $|z| < 1$ حيث إن $f(z) = 0$ لكل z في ذلك المجال.

ب . لإثبات التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) نلاحظ أن:

$$|z^n| \le R^n < \in$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$n > \frac{\ln \in}{\ln R}$$

وبفرض أن:

$$N = \left[\frac{\ln \in}{\ln R}\right]$$

فإن قيمة N لا تعتمد على الموضع z ومن ثمَّ فإن التقارب $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ منتظم على المجال D:

$$D = \{z: |z| \le R < 1\}$$

جـ . بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ هندسية فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = f(z)$$

حيث إن $f(z) = \frac{1}{1-z}$ لكل z في المجال $D = \{z: |z| < 1\}$ وبالبحث عن متتالية المجاميع الجزئية (S_n) نجد أن:

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

ومن ثمَّ نحصل على:

$$|S_n(z) - f(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| < \frac{|z|^n}{\left|\frac{1-z}{z}\right|} < \in$$

من ذلك ينتج أن:

$$n \ln|z| < \ln \in + \ln\left|\frac{1-z}{z}\right|$$

ومن ثمَّ فإن:

$$n > \frac{\ln \in}{\ln|z|} + \frac{\ln\left|\frac{1-z}{z}\right|}{\ln|z|}$$

وبفرض أن N تأخذ القيمة:

$$N = \left[\frac{\ln \in}{\ln|z|} + \frac{\ln|1-z|}{\ln|z|} - 1\right]$$

فإن N تعتمد على قيمة $\in$ وكذلك z فيكون التقارب موضعياً.

د . إذا فرض أن $|z| \le R < 1$ فإن:

$$|S_n(z) - f(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} < \frac{R^{n+1}}{1-R} < \in$$

ومن ثمَّ فإن:

$$(n+1)\ln R < \ln \in + \ln(1-R)$$

ومن ذلك فإن:

$$n > \frac{\ln \in}{\ln R} + \frac{\ln(1-R)}{\ln R} - 1$$

وبفرض أن N تأخذ القيمة:

$$N = \left[\frac{\ln \in}{\ln R} + \frac{\ln(1-R)}{\ln R} - 1\right]$$

فإن N تعتمد فقط على $\in$ ومن ثمَّ يكون التقارب منتظماً على المجال:

$$D = \{z: |z| \le R < 1\}$$

مثال (٧):

بين أن التقارب للمتسلسلات التالية منتظماً.

أ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n^2}$ لكل عدد مركب z.

ب. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$ لكل z تحقق $|z| \le 4$.

الحل:

بتطبيق نظرية اختبار فيرشتراس نلاحظ أن:

$$\left|\frac{\cos n|z|}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} = M_n$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n^2}$ متقاربة تقارباً منتظماً.

وبما أن $|z| \le 4$ فإن:

$$\left|\frac{2^n z^n}{n!}\right| \le \frac{8^n}{n!} = M_n$$

وللتحقق من أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ متقاربة نستعين باختبار النسبة لنستنتج أن:

$$\frac{8^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{8^n}=\frac{8}{n+1}$$

وهذا يقترب من الصفر إذا اقتربت n من اللانهاية ومن ثمَّ فإن:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ متقاربة وكذلك تكون $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n z^n}{n!}$ متقاربة تقارباً منتظماً لكل z تحقق $|z|\le 4$.

٥ . ٢ . متسلسلات القوى: Power Series

تبين لنا من المثال (٦) أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ لها خصائص هامة مثل أنها متقاربة عند كل z تحقق $|z|<1$، بل إنها متقاربة تقارباً منتظماً على كل مجال D حيث إن $D=\{z: |z|\le R<1\}$ وعند ذلك يكون مجموع هذه المتسلسلة هو الدالة:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}$$

أي إن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$$

لكل z تحقق $|z|<1$.

هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة قوى وبشكل عام فإن المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n \qquad (13)$$

تسمى متسلسلة قوى حيث إن (α_n) متتالية من الأعداد المركبة. السؤال الذي يفرض نفسه هنا هو ما خصائص هذه المتسلسلة من حيث كونها متقاربة أم لا وإمكانية تمثيلها بدالة ما على مجال معين.

المبرهنة التالية تبين الخصائص التقاربية لمتسلسلة القوى (13).

مبرهنة (١٠):

لأي متسلسلة قوى من الشكل: $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ يوجد عدد حقيقي $R \geq 0$ بحيث إن:

أ. المتسلسلة متقاربة لكل z تحقق: $|z-z_0| < R$

ب. المتسلسلة متباعدة لكل z تحقق: $|z-z_0| > R$

يسمى العدد الحقيقي R نصف قطر التقارب، ويسمى القرص الذي مركزه z_0 ونصف قطره R مجال التقارب. وإذا كان $R = 0$ فإن المتسلسلة متقاربة فقط عندما تكون $z = z_0$ وإذا كان $R \to \infty$ فإن المتسلسلة متقاربة لكل الأعداد المركبة z. أما الحالات عندما تكون z على محيط الدائرة $|z - z_0| = R$ فإنها تعالج على انفراد باستخدام اختبارات التقارب. ويمكن إيجاد نصف قطر التقارب بإحدى الطرق التالية:

أ. $R = \frac{1}{L}$ حيث إن:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \qquad (14)$$

إن وجدت النهاية.

ب. $R = \frac{1}{L}$ حيث إن:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|} \qquad (15)$$

إن وجدت النهاية.

جـ. $R = \frac{1}{L}$ حيث إن:

$$L = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|} \qquad (16)$$

وهذه النهاية موجودة دائماً.

البرهان:

نثبت الفرع (أ) ونترك إثبات الفرعين الآخرين تمريناً للقارئ. ولذلك نفرض أن z تحقق $|z - z_0| \le r < R$ ومن ثمَّ فإن النسبة بين أي حدين متتالين هي:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{\alpha_n(z-z_0)^n}\right| = \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right||z-z_0|$$

وبإيجاد النهاية للطرفين نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{\alpha_n(z-z_0)^n}\right| = |z-z_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$$
$$= L|z-z_0|$$

وبتطبيق اختبار النسبة نستنتج أن المتسلسلة متقاربة إذا تحقق الشرط:

$$L\,|z-z_0| < 1$$

ومن ذلك فإن:

$$|z-z_0| < \frac{1}{L}$$

وبفرض أن $L \neq 0$ وإذا رمزنا بالرمز R للعدد $\frac{1}{L}$ لنجد أن المتسلسلة تكون متقاربة إذا كانت:

$$|z-z_0| < R$$

مثال (٨):

أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^2(z-i)^n}{n!}$$

الحل:

بإيجاد النسبة:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{2^{n+1}.n!}{(n+1)!2^n}$$

$$= \frac{2}{n+1}$$

ومن ذلك فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

ومن ثمَّ فإن هذه المتسلسلة متقاربة لجميع قيم z التي تحقق:

$$|z-i| < R = \frac{1}{L} = \infty$$

أي لجميع الأعداد المركبة.

مثال (٩):

أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^n(z+i)^n}{n!}$$

الحل:

بإيجاد النسبة:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}.n!}{(n+1)!n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

وبإيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

نستنتج أن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم z التي تحقق:

$$|z+i| < R = e^{-1}$$

المبرهنة التالية تعتبر تعميماً لمثال (٦).

مبرهنة (١١):

نفرض أن R نصف قطر التقارب للمتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (z-z_0)^n$$

فإنه يوجد دالة f(z) بحيث إن:

أ. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (z-z_0)^n$ تتقارب موضعياً للدالة f أي إن:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (z-z_0)^n \qquad (17)$$

لكل z تحقق $|z-z_0| < R$.

ب. يكون التقارب منتظماً على المجال:

$$|z-z_0| \le r < R \qquad (18)$$

جـ. المتسلسلة متباعدة على المجال:

$$|z-z_0| > R$$

البرهان:

أ. بما أنه لكل z تحقق $|z-z_0| < R$ فإن المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (z-z_0)^n$$

متقاربة. نعرف الدالة f بالمساواة:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$$

نترك للقارئ إثبات أن هذا التقارب تقارب موضعي.

ب . بما أن R نصف قطر التقارب فإن $L=\frac{1}{R}$ تحقق:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}$$

وهذا يكافئ لكل $\in>0$ يوجد N تحقق:

$$n>N\Rightarrow\left|L-\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right|<\in$$

ومن ذلك فإن:

$$L-\in<\sqrt[n]{|\alpha_n|}<L+\in$$

وبفرض أن $|z-z_0|\le r<R$ فإن $rL<RL=1$ ومن ثمَّ فإن:

$$L(R+r)=rL+RL<2$$

وبفرض أن:

$$\in=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-L(R+r)}{(R+r)}$$

يوجد N بحيث إن:

$$\begin{aligned}n>N\Rightarrow\sqrt[n]{|\alpha_n|}&<L+\in\\&<L+\frac{2-L(R+r)}{2(R+r)}\\&<\frac{L(R+r)+2}{R+r}\end{aligned}$$

$$< \frac{2}{(R+r)}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$|\alpha_n| < \left(\frac{2}{R+r}\right)^n, n > N$$

وهذا يبين لنا أن:

$$|\alpha_n (z-z_0)^n| < \left(\frac{2}{R+r}\right)^n r^n = \left(\frac{2r}{R+r}\right)^n, n > N$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n (z-z_0)^n| \le \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{2r}{R+r}\right)^n$$

وبما أن $r<R$ فإن $\frac{2r}{R+r} < 1$ وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{2r}{R+r}\right)^n$ متقاربة. وبتطبيق مبرهنة فيرشتراس فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n (z-z_0)^n|$ متقاربة تقارباً منتظماً على المجال $|z-z_0| \le r < R$.

وبذلك يتم المطلوب.

المبرهنة التالية تبين أن تقارب متسلسلات القوى يتحدد بتقارب المتسلسلة موضعياً عند نقطة واحدة.

مبرهنة (١٢):

نفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ متقاربة عند النقطة $z = w \neq z_0$ فإنها تكون متقاربة لجميع قيم z التي تحقق:

$$|z-z_0| < R$$

حيث إن:

$$R = |w - z_0|$$

البرهان:

بما أن المتسلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(w-z_0)^n$ متقاربة فإن فرع (أ) من المبرهنة (٥) يؤكد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(w-z_0)^n = 0$$

وهذا يفيد بأنه لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N يحقق:

$$n > N \Rightarrow \left|\alpha_n(w-z_0)^n\right| < \in$$

وبإعطاء $\in$ القيمة 1 فإنه يوجد N بحيث إن:

$$n > N \Rightarrow \left|\alpha_n(w-z_0)^n\right| < 1$$

فإذا فرضنا أن K تحقق:

$$K = \max\left\{1, |\alpha_0|, |\alpha_1(w-z_0)|, \ldots, \left|\alpha_n(w-z_0)^N\right|\right\}$$

فإن:

$$\left|\alpha_n(w-z_0)^n\right| < K, n = 0,1,2,\ldots$$

وبملاحظة أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\alpha_n(z-z_0)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n||w-z_0|^n\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}^n\right|$$

ومعرفة الحقيقة:

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{r}{R} = t < 1$$

فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\alpha_n(z-z_0)^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}Kt^n$$

وبما أن المتسلسلة في الطرف الأيمن هندسية متقاربة فإن اختبار المقارنة يؤكد أن المتسلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ متقاربة كذلك لكل z تحقق $|z-z_0| \le r < R$ حيث إن: $R = |w - z_0|$.

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

لاحظ أن التقارب على $D = \{z: |z-z_0| \le r < R\}$ منتظم.

إن التقارب المنتظم يعطي المتسلسلة خصائص هامة ومفيدة.

المبرهنات التالية تبيِّن أن المتسلسلة التي تكون متقاربة تقارباً منتظماً تكون قابلة للاشتقاق وقابلة للتكامل كذلك.

مبرهنة (١٣):

نفرض أن المتتالية (f_n) تتكون من دوال مستمرة على المجال المشترك D، وأنها تتقارب تقارباً منتظماً للدالة f على المجال D فإذا كان C كانتوراً يقع في المجال D فإن:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz \qquad (19)$$

البرهان:

إن التمرين (١١) الفرع (٦) من الفقرة القادمة (٥ . ٥) يؤكد أن f مستمرة على المجال D وبما أن التقارب منتظم فإنه لكل $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N يحقق:

$$n > N \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \in/L$$

حيث إن L يمثل طول الكانتور C. ومن ثمَّ فإن:

$$\left|\int_C f(z)dz - \int_C f_n(z)dz\right| \le \int_C |f(z) - f_n(z)||dz|$$

$$< \frac{\in}{L}\cdot L = \in, n > N$$

وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

مبرهنة (١٤):

نفرض أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب تقارباً منتظماً للدالة f على المجال المشترك D فإذا كانت f_n تحليلية على المجال المترابط ترابطاً بسيطاً D فإن f تحليلية على D.

البرهان:

إن التمرين (١١) الفرع (٦) من الفقرة القادمة (٥ . ٥) يؤكد أن f مستمرة على المجال D وبما أن التقارب منتظم فإن المبرهنة السابقة تؤكد أن:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz$$

لكل كانتور مغلق وبسيط في D وبما أن f_n تحليلية على D فإن $\int_C f_n(z)dz = 0$ لكل كانتور مغلق وبسيط C، حيث $n = 0,1,2,\ldots$, ومن ذلك فإن $\int_C f(z)dz = 0$ لكل كانتور مغلق وبسيط C في D وبتطبيق مبرهنة موريرا فإن f تحليلية على D.

نتيجة (١٥):

المتسلسلة $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ تحليلية على كل نقطة في مجال التقارب وأن:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n n(z-z_0)^{n-1} \qquad (20)$$

البرهان:

طبق مبرهنة (١٤) على متتالية المجاميع الجزئية علماً بأن متسلسلة القوى متقاربة تقارباً منتظماً.

نتيجة (١٦):

المتسلسلة: $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ قابلة للتكامل في مجال تقاربها وإن:

$$\int_0^z S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \frac{(t-z_0)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n (z-z_0)^{n+1}}{n+1}$$

البرهان:

طبق مبرهنة (١٣) على متتالية المجاميع الجزئية.

هذه الخصائص الجيدة لمتسلسلات القوى تفرض السؤال التالي، بما أن متسلسلة القوى تمثل دالة مركبة على مجال ما هو مجال التقارب فهل يمكن تمثيل أية دالة $f(z)$ على صيغة متسلسلة قوى على مجال ما؟

الأمثلة التالية تعطي إجابة جزئية لهذا السؤال.

مثال (١٠):

أوجد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة: $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

الحل:

بالاستفادة من المتسلسلة الهندسية: $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, |t|<1$

فإن التعويض بالقيمة $-z^2$ بدلاً من t يعطي التمثيل المطلوب:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

حيث تكون هذه المتسلسلة متقاربة في المجال $|z^2| < 1$ أو أن $|z| < 1$.

مثال (١١):

أوجد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

الحل:

بإيجاد المشتقة للدالة $\frac{1}{1-t}$ فإن:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{1}{(1-t)^2}$$

وهذا يفيدنا بأن تمثيل الدالة f بمتسلسلة قوى يتم بإيجاد المشتقة للمتسلسلة الهندسية $\frac{1}{1-t}$ كما يلي:

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

وكذلك فإن مجال التقارب لهذه المتسلسلة هو $|z|<1$.

مثال (١٢):

أوجد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة:

$$f(z) = \text{Log}\,(1 + z)$$

الحل:

بملاحظة أن:

$$\text{Log}z=\int_0^z\frac{1}{1+t}dt$$

حيث إن $\text{Log}\,(1 + z)$ أحد فروع الدالة $\log\,(1 + z)$ الذي يكون تحليلياً على مجال يحتوي النقطتين $0, z$ ومن ثمَّ فإن:

$$\text{Log}(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$$

وأن مجال تقاربها $|z|<1$.

٥ . ٣ . متسلسلات تايلور وماكلورين: (Taylor and Maclaurin)

نلاحظ في البند السابق أننا وظفنا في الأمثلة معرفتنا للمتسلسلة الهندسية وخصائص قابلية التكامل وقابلية الاشتقاق لمتسلسلات القوى. ولكن كيف يمكن تمثيل دالة أخرى لا يصلح معها الأسلوب المتبع في هذه الأمثلة. وما الشروط التي تضمن إمكانية تمثيل الدالة بمتسلسلة قوى. هذا ما تجيب عنه المبرهنات التي تتبع التعريف التالي:

تعريف (٥):

نفرض أن الدالة f تحليلية على النقطة z_0 فإن المتسلسلة:

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f'(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots \qquad (21)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

تسمى متسلسلة تايلور للدالة f حول النقطة z_0. وإذا كانت $z_0 = 0$ فإن المتسلسلة تعرف بأنها متسلسلة ماكلورين للدالة f. المبرهنة التالية تسمى مبرهنة تايلور (Taylor Theorem).

٥ . ٣ . ١ . مبرهنة (١٧) (مبرهنة تايلور):

بفرض أن الدالة f تحليلية على مجال يحتوي القرص $|z - z_0| \le R$ فإن متسلسلة تايلور (21) للدالة f حول النقطة z_0 تتقارب موضعياً للدالة f في القرص $|z - z_0| < R$ ويكون التقارب منتظماً على $|z - z_0| \le r < R$.

البرهان:

بالاستفادة من تمرين (١١) الفرع (٧) فإن:

$$\frac{1}{1-t}=1+t+\ldots+t^n+\frac{t^{n+1}}{1-t}\ ;\ t\neq 1$$

ويمكن توظيف هذه المساواة للحصول على ما يلي:

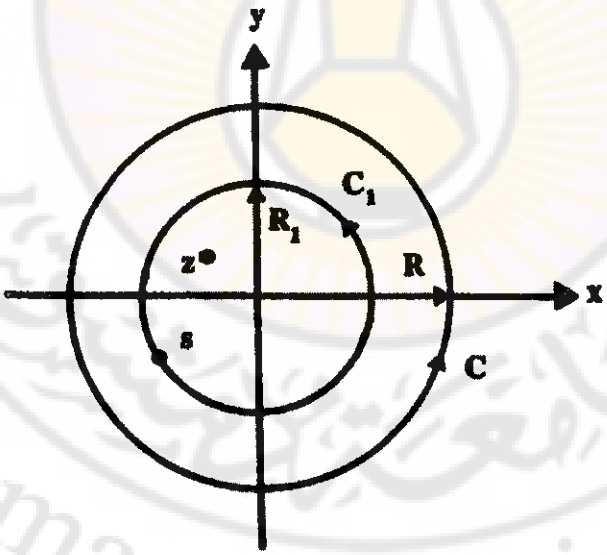
$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{s}\left\{\frac{1}{1-(z/s)}\right\}$$

$$=\frac{1}{s}\left\{+\frac{z}{s}+\left(\frac{z}{s}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{s}\right)^n+\frac{(z/s)^{n+1}}{1-(z/s)}\right\}$$

وبإيجاد التكامل بالنسبة للمتغير s نجد أن:

$$\int_C\frac{f(s)}{s-z}ds=\int_C\frac{f(s)}{s}ds+\int_C\frac{zf(s)}{s^2}ds+\ldots+\int_C\frac{z^nf(s)}{s^{n+1}}ds+\int_C\frac{z^{n+1}f(z)}{s^{n+2}(1-z/s)}ds$$

حيث إن C كانتور مغلق وبسيط: $|s|<r$,z تقع داخل هذا الكانتور وبتطبيق مبرهنة كوشي للتكامل ومبرهنة كوشي للمشتقة نستنتج ما يلي:



الشكل (١)

$$2\pi i f(z) = 2\pi i f(0) + 2\pi i \frac{f'(0)}{1!} z + 2\pi i \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots$$

$$+ 2\pi i \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \int_{C_1} \frac{z^{n+1} f(s)}{s^{n+1}(1 - z/s)} ds$$

ومن ثمَّ ينتج أن:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + I_n(z) \qquad (22)$$

حيث:

$$I_n(z) = z^{n+1} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{s^{n+1}(1 - z/s)} = z^{n+1} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^n (s - z)} ds$$

وبالاستفادة من الفرض أن $|z| = r$, $|s| = R_1$ حيث أن $r < R_1$ فإن:

$$|s - z| \geq ||s| - |z|| = R_1 - r$$

وبما أن $f(s)$ تحليلية فإنها تأخذ قيمة عظمى على إحدى النقاط الحدودية للقرص $|s| \leq R_1$ ومن ثمَّ فإنه يوجد عدد حقيقي موجب k يحقق: $|f(s)| \leq k$

ومن هذه المعلومات نستنتج أن:

$$|I_n(z)| \leq \frac{r^{n+1} k 2\pi R_1}{R_1^n (R_1 - r)} = \frac{2\pi r R_1 k}{R_1 - r} \left(\frac{r}{R_1} \right)^n$$

وبما أن $\frac{r}{R_1} < 1$ فإن $\lim_{n \to \infty} I_n(z) = 0$.

وبأخذ النهاية لطرفي المساواة (22) ينتج أن:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (23)$$

وهذه تسمى متسلسلة تايلور عند $z = 0$ أو متسلسلة ماكلورين للدالة f.

وللحصول على (21) نفرض أن z_0 نقطة اختيارية في المجال D ونفرض أن $w = z - z_0$ وأن:

$$g(w) = f(w + z_0) = f(z)$$

فإذا كانت f تحليلية عند z_0 فإن $f(w)$ تحليلية عند $w = 0$ ومن ثمَّ فإن الدالة g تمثل بالمتسلسلة (23) وبما أن:

$$g(w) = f(z), g^{(n)}(0) = f^{(n)}(z_0)$$

فإن:

$$f(z) = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} w^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

وبتطبيق مبرهنة (١١) نحصل على التقارب المنتظم. وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

مثال (١٣):

مثِّل الدوال التالية بمتسلسلة قوى عند $z = 0$.

أ. $f(z) = e^z$

ب. $f(z) = \sin z$

جـ. $f(z) = \cos z$

الحل:

أ. بالاشتقاق المتكرر للدالة e^z فإن: $f^{(n)}(0) = 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

ومن ذلك فإن:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (24)$$

ب . بالاشتقاق المتكرر للدالة sin z فإن:

$$f^{(n)}(0)=\sin^{(n)}0=\begin{cases}0 & ,n=4k\\ 1 & ,n=4k+1\\ 0 & ,n=4+2\\ -1 & ,n=4k+3\end{cases}$$

ومن ذلك فإن:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots \qquad (25)$$

جـ . وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots \qquad (26)$$

وبما أن متسلسلة تايلور متسلسلة قوى فإنها تكتسب كل خصائص متسلسلات القوى التي سبق ذكرها من كونها قابلة للاشتقاق حداً حداً وكذلك قابلة للتكامل حداً حداً. وتخضع لقانون جمع الدوال والضرب العددي للدالة. ولكن ضرب متسلسلتين بعضهما ببعض يختلف قليلاً وهو معرف فيما يلي:

٥ . ٣ . ٢ . تعريف (٦) (جداء كوشي لمتسلسلتين):

بفرض أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(z-z_0)^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$$

متسلسلتا قوى فإن حاصل ضربهما متسلسلة قوى:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(z-z_0)^n$$

تسمى حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين حيث إن:

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\beta_k \quad n = 0,1,2,3,4,... \qquad (27)$$

المبرهنة التالية تبين أن المتسلسلة التي تمثل حاصل ضرب دالتين تحليليتين على مجال مشترك لهما هو حاصل ضرب كوشي لمتسلسلتي تايلور للدالتين.

مبرهنة (١٨):

إذا كانت f و g تحليليتين على المجال المشترك D وكانت $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ متسلسلة تايلور للدالة f حول z_0 وكذلك $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(z-z_0)^n$ متسلسلة تايلور للدالة g حول z_0 فإن متسلسلة تايلور للدالة g . f حول z_0 هي: $f.g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(z-z_0)^n$ حيث إن γ_n معرفة بالمساواة (27).

البرهان:

حسب مبرهنة تايلور المبرهنة (١٧) فإن:

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad , \quad \beta_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$$

والمطلوب إثبات أن:

$$\gamma_n = \frac{(f\cdot g)^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (28)$$

يمكن بالاشتقاق المتكرر والاستقراء الرياضي إثبات أن:

$$(f\cdot g)^{(n)}(z_0) = \sum_{k=0}^{n} n!\frac{f^{(n-k)}(z_0)g^{(k)}(z_0)}{(n-k)!k!} \qquad (29)$$

وهذه تسمى صيغة ليبنتز.

وبإيجاد حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين فإن:

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\beta_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!} \cdot \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad (30)$$

وبالمقارنة بين (29) و (30) نستنتج (28) وهذا ينهي إثبات المبرهنة.

نلاحظ أنه يوجد للدالة التحليلية حول كل نقطة في مجالها تمثيل بمتسلسلة تايلور فهل هذا التمثيل وحيد عند النقطة الواحدة؟ هذا ما تجيب عليه المبرهنة التالية:

مبرهنة (١٩):

إذا كانت الدالة f تحليلية، وممثلة بالمتسلسلة:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \qquad (31)$$

لكل z تحقق $|z - z_0| < R$ فإن:

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0,1,2,... \qquad (32)$$

البرهان:

بتعويض z_0 بدلاً من z في (31) ينتج أن $f(z_0) = \alpha_0$.

وبما أن متسلسلة القوى قابلة للاشتقاق حداً حداً فإن الاشتقاق المتكرر ينتج لنا:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n n! \frac{(n+k)!}{k!} (z - z_0)^k \qquad (33)$$

وبالتعويض في (33) بدلاً من z القيمة z_0 ينتج أن:

$$f^{(n)}(z_0) = \alpha_n n! \qquad (34)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

والاستقراء الرياضي ينهي برهان (32). وهذا يفيد بأن المتسلسلة (31) يجب أن تكون متسلسلة تايلور للدالة f حول النقطة z_0 ويكون التمثيل عندها بالتالي وحيداً.

مثال (١٤):

أوجد دالة تحليلية عند $z = 0$ تحقق الشرط $f'(z) = -2i\, f(z)$ وتأخذ القيمة 1 عند $z = 0$.

الحل:

بما أن الدالة تحليلية عند $z = 0$ فإنه يوجد لها تمثيل بمتسلسلة ماكلورين ومن ثمَّ فإن $f(0) = 1$ وكذلك:

$$f'(0) = -2i\, f(0) = -2i$$

وبتكرار الاشتقاق ينتج أن:

$$f''(z) = -2i\, f'(z) = (-2i)^2\, f(z)\,,$$
$$f'''(z) = -2i\, f''(z) = (-2i)^3\, f(z),\ldots$$

وهكذا فإن:

$$f^{(n)}(0) = (-2i)^n\, f(0) = (-2i)^n$$

ومن ذلك فإن الدالة هي:

$$f(z) = 1 - 2iz + \frac{(2i)^2}{2!}z^2 - \frac{(2i)^3}{3!}z^3 + \ldots \qquad (35)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{n!}z^n$$

فإذا لاحظنا فرع أ من مثال (١٣) الذي يبين أن: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$

فإذا عوضنا $-2iz$ بدلاً من z ينتج لدينا:

$$e^{-2iz} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{n!}z^n \qquad (36)$$

وبالمقارنة بين (35) و (36) نستنتج أن: $f(z) = e^{-2iz}$

وهي الدالة التي تحقق المطلوب.

مثال (١٥):

نفرض أن $f(t)$ دالة مركبة القيمة معرفة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ فإذا عرفنا الدالة المركبة $g(z)$ بالمساواة التالية:

$$g(z) = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin zt dt \qquad (37)$$

برهن أن الدالة g صحيحة ثم أوجد تمثيلاً لها بمتسلسلة تايلور حول $z = 0$.

الحل:

يمكن إيجاد تمثيل للدالة $\sin zt$ بمتسلسلة ماكلورين. بالاستفادة من فرع ب من مثال (١٣) نستنتج أن:

$$\sin zt = zt - \frac{(zt)^3}{3!} + \frac{(zt)^5}{5!} - \frac{(zt)^7}{7!} + \ldots$$

ومن ثمَّ فإن:

$$f(t)\sin zt = ztf(t) - \frac{(zt)^3}{3!}t^3 f(t) + \frac{(zt)^5}{5!}t^5 f(t) - \frac{(zt)^7}{7!}t^7 f(t) + \ldots$$

وبالتكامل على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ نستنتج أن:

$$g(z) = \int_0^{\pi/2} f(t)\sin zt dt$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} tf(t)dt\right)z - \left(\frac{1}{3!}\int_0^{\pi/2} t^3 f(t)dt\right)z^3 + \left(\frac{1}{5!}\int_0^{\pi/2} t^5 f(t)dt\right)z^5 - \ldots (38)$$

وبما أن التكاملات لا تعتمد على المتغير z، وتعتمد فقط على رتبة الحد، فإن الطرف الأيمن للمساواة (38) متسلسلة ماكلورين للدالة g وهي من ثمَّ دالة تحليلية لجميع قيم z فتكون بالتالي صحيحة.

٥ . ٤ . تمارين محلولة:

أولاً: ادرس تقارب المتتالية:

$$\{z_n\}=\left\{\frac{(1-2i)^n}{n}\right\}$$

الحل:

$$|z_n|=\left|\frac{(1-2i)^n}{n}\right|=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty \quad \text{(متباعدة)}$$

ثانياً: أوجد نقطة تقارب المتتالية:

$$\{z_n\}=\left\{\frac{n^2+in^3}{n^3-1}\right\}$$

الحل:

$$z_n=\frac{n^2+in^3}{n^3-1}=\frac{n^2}{n^3-1}+i\frac{n^3}{n^3-1}=x_n+iy_n$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3-1}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3-1}=1$$

أي أن: $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}z=x+iy=i$

وهذا يعني أن: $\{z_n\}$ تتقارب من النقطة $z_0=i$.

ثالثاً: أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

الحل:

نطبق دالامبير فنجد:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|z^{2n+3}\right|}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)1}{\left|z^{2n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|z^2\right|}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|=0$$

إذاً نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة هو: $R=\frac{1}{L}$ وبما أن:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|=0$$

فعندئذ يكون:

$$R=\frac{1}{L}=\frac{1}{0}=\infty$$

$R=\infty$ متسلسلة القوى تتقارب في النقطة $z=z_0$.

رابعاً: أعد السؤال السابق من أجل المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n^2}$$

الحل:

نطبق دالامبير:

$$\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right| = \left[\frac{n}{n+1}\right]^2 |z+2i|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right| = |z+2i|$$

تكون المتسلسلة متقاربة إذا كان $|z + 2i| < 1$ والتي تسمى منطقة تقارب متسلسلة القوى. أما نصف قطر التقارب فيعطى بالقانون: $|z - z_0| < R$ ومن ثمَّ بالمقارنة نجد أن: $R = 1$.

خامساً: ادرس تقارب المتسلسلات التالية:

١) $$\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-nz}$$

الحل:

بتطبيق اختبار الجذر النوني:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}\left|e^{-nz}\right|} = \lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{2n}}\left|e^{-z}\right| = \left|e^{-z}\right|$$

نميز الحالات التالية:

عندما $|e^{-z}| < 1$ تكون المتسلسلة متقاربة، وذلك لأن:

$$\begin{aligned}
|e^{-z}| < 1 &\Rightarrow |e^{-x-iy}| < 1\\
&\Rightarrow |e^{-x}\,.\,e^{-iy}| < 1\\
&\Rightarrow |e^{-x}|\,.\,|e^{-iy}| < 1\\
&\Rightarrow |e^{-x}| < 1\\
&\Rightarrow e^{-x} < 1\\
&\Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0
\end{aligned}$$

إذاً المتسلسلة متقاربة على يمين المحور $0y$ (في الربعين الأول والرابع). أما عندما $|e^{-z}| > 1$ فتكون $x < 0$ والمتسلسلة متباعدة.

أي إن المتسلسلة متباعدة على يسار المحور 0y في (الربعين الثاني والثالث) أما عندما $|e^{-z}| = 1$ فيفشل اختبار الجذر النوني، وذلك لأن:

$$|e^{-z}| = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-nz} = \sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-n(0+iy)}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-niy}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}(\cos ny - i\sin ny)$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}\cos ny - i\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}\sin ny$$

$\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}\cos ny$: متباعدة لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر.

$\sum_{1}^{\infty}\sqrt{n}\sin ny$: متباعدة لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر.

إذاً المتسلسلة متباعدة على المحور 0y.

٢) $$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{n}$$

الحل:

متسلسلة هندسية أساسها $\frac{z-i}{z+i}$ وهي متقاربة عندما:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$$

$$|z-i| < |z+i|$$

$$|z-i|^2 < |z+i|^2$$

$$x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2$$

$$x^2+y^2-2y+1<x^2+y^2+2y+1$$
$$4y>0\Rightarrow y>0$$

أي المتسلسلة متقاربة فوق المحور 0x.

٣) $$\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z)^{n+i}}$$

الحل:

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(1-z)^i}\left(\frac{z}{1-z}\right)^n=\frac{1}{(1-z)^i}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{z}{1-z}\right)^n$$

متسلسلة هندسية متقاربة عندما $\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$

$$\Rightarrow|z|<|1-z|$$
$$\Rightarrow|z|^2<|1-z|^2$$
$$x^2+y^2<(1-x)^2+y^2$$
$$x^2+y^2<1-2x+x^2+y^2$$
$$1-2x>0\Rightarrow x<\frac{1}{2}$$

أي إن المتسلسلة متقاربة على يسار المستقيم الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$.

سادساً: عين قيم z التي من أجلها تتقارب المتسلسلة $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n(z^n+z^{n+1})$ ثم احسب مجموعها.

الحل: $$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n(1+z)\cdot z^n=(1+z)\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n$$

نعلم أن: $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n$ متقاربة عندما $|z|<1$ ومجموعها: $\frac{1}{1+z}$

ومن ثمَّ المتسلسلة المعطاة متقاربة عندما $|z| < 1$ ومجموعها يعطى بـ:

$$(1+z)\cdot\frac{1}{1+z}=1$$

سابعاً: اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{i^n}{n^n}$

الحل:

نقارن هذه المتسلسلة مع المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}$ المتقاربة مطلقاً وحيث إن:

$$\left|\frac{i^n}{n^n}\right| \le \left|\frac{i^n}{2^n}\right|$$

اعتباراً من $n > 1$ فالمتسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً ومن ثمَّ فهي متقاربة.

ثامناً: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{n}\right)}}{n}$

الحل:

لدينا: $e^{i\frac{\pi}{n}}=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$

إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ متباعدة، بينما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ متقاربة ومن ثمَّ فالمتسلسلة المفروضة متباعدة.

تاسعاً: عين منطقة التقارب المطلق للمتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{(n+1)^3.3^n}$

الحل:

لدينا:

$$|u_n(z)| = \left|\frac{(z+1)^{n-1}}{(n+1)^3.3^n}\right| \le \frac{1}{3(n+1)^3} = M_n$$

وذلك من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة $\left|\frac{z+1}{3}\right| \le 1$ جميعها، وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3(n+1)^3}$ متقاربة، فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة $|z + 1| \le 3$، أي من أجل النقاط الواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها 1- ونصف قطرها 3.

عاشراً: عين منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n}$

الحل:

ندرس التقارب المطلق لهذه المتسلسلة بتطبيق كوشي، حيث لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(z)|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z|^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$$

إذا كانت $\frac{x^2+y^2}{2} < 1 \Leftarrow x^2 + y^2 < 2$ فالمتسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً، ومن ثمَّ فهي متقاربة ومنطقة تقارب هذه المتسلسلة هي النقاط الواقعة داخل دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

أما على محيط الدائرة $|z| = \sqrt{2}$ يكون لدينا:

$$\sum_{1}^{\infty} \left|\frac{z^{2n}}{2^n}\right| = 1+1+1+1+\ldots$$

وهي سلسلة متباعدة.

حادي عشر: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{0}^{\infty} 2^n (z-i)^n$

الحل:

حسب كوشي نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|2^n (z-i)^n\right|^{\frac{1}{n}} = 2|z-i|$$

وتكون هذه المتسلسلة متقاربة مطلقاً ومن ثمَّ متقاربة عندما:

$$2|z-i|<1 \Rightarrow |z-i|<\frac{1}{2}$$

ومتباعدة من أجل $|z-i|>\frac{1}{2}$ ومن ثمَّ دائرة التقارب هي الدائرة التي مركزها النقطة i ونصف قطرها يساوي $\frac{1}{2}$.

ثاني عشر: ادرس تقارب المتسلسلات العقدية الآتية:

الحل:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(3-4i)}{4}\right]^n$$

نطبق اختبار كوشي:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \left|\frac{3-4i}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1 \quad \text{(متباعدة)}$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+2i)^n}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_n+1}{z_n}\right| = |3+2i|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+4} = \sqrt{13} > 1 \quad \text{(متباعدة)}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)i^n}{n^3}$$

$$\lim\left|\frac{z_n+1}{z_n}\right|=|i|.1=1$$

وهي حالة شك لذا نطبق اختبار راب فنجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left|\frac{z_n+1}{z_n}\right|-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\frac{(2n+3)n^3}{(n+1)^3(2n+1)}|i|-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^4-9n^3-5n^2-n}{(n+1)^3(2n+1)}=-2<1$$

ومن ثمَّ فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً.

ثالث عشر: عين منطقة التقارب المطلق للمتسلسلة: $\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{(n+1)^3(3)^n}$

الحل:

نأخذ الحد العام بالقيمة المطلقة فنجد:

$$|u_n(z)|=\left|\frac{(z+1)^{n-1}}{(n+1)^3(3)^n}\right|\le\frac{1}{3(n+1)^3}=M_n$$

وذلك من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة $\left|\frac{z+1}{3}\right|\le 1$ جميعها.

وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}M_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3(n+1)^3}$ متقاربة، فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة $|z+1|\le 3$ أي من أجل جميع النقاط الواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها 1- ونصف قطرها 3.

رابع عشر: عين منطقة تقارب كلٍّ من المتسلسلتين التاليتين:

(أ): $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-a)^n$

الحل:

متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-a)^n$ لا تتقارب إلا في النقطة a وذلك لأن:

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{(n+1)(z-a)^{n+1}}{n!\cdot(z-a)^n}\right|$$
$$= (n+1)\cdot|z-a| > 1$$

وذلك من أجل أي نقطة ثابتة z تحقق $z \neq 0$ وابتداءً من عدد طبيعي $N(\varepsilon)$.

(ب): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}$

الحل:

إن متسلسلة القوى المفروضة متقاربة من أجل جميع قيم z وذلك لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(z-a)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|z-a|}{n+1} = 0 < 1$$

وذلك أياً كان z من المستوي العقدي.

خامس عشر: أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلات الصحيحة التالية:

(أ): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

الحل:

لدينا:

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{|z^{2n+3}|}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{|z^{2n+1}|} = \frac{|z^2|}{(2n+3)(2n+2)}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z^2|}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

وهذا يعني أن نصف قطر التقارب هو: $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = \infty$.

(ب): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n^2}$

الحل: لدينا:

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{(z+2i)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(z+2i)^n}\right| = \frac{|z+2i|\cdot n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot|z+2i|$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot|z+2i| = |z+2i|$$

وتكون المتسلسلة متقاربة عندما $|z+2i|<1$ ويكون نصف قطر التقارب هو العدد 1.

سادس عشر: انشر الدالة $f(z) = \frac{1}{z^2-9}$ بجوار الواحد.

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z+3)}$$

$$\frac{1}{(z-3)(z+3)}=\frac{A}{(z-3)}+\frac{B}{(z+3)}$$

$$1 = A\,(z+3) + B\,(z-3)$$

$$1 = (A+B)\,z + (3A-3B)$$

$$A+B=0\ ,\ 3A-3B=1 \Rightarrow$$

$$A=-B\ ,\ -6B=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{6}\ ,\ A=\frac{1}{6}$$

$$f(z)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z+3}$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{-2+(z-1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{-2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{-2}\right)^{n}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-1)^{n}}{2^{n}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n}$$

حيث: $\left|\frac{z-1}{-2}\right|<1 \Rightarrow |z-1|<2$

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{4+z-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}\left(\frac{z-1}{4}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n}}{4^{n+1}}$$

حيث: $|z-1|<4 \Leftarrow \left|\frac{z-1}{4}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n}}{4^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right](z-1)^n$$

حيث: $|z-1|<2$.

سابع عشر: أوجد منطقة تقارب ومجموع المتسلسلة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^{n+1}(z-1)^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\left[2(z-1)^{n+1}\right]}=\sum_{n=1}^{\infty}2n[2(z-1)]^{-n-1}$$

$$=-\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}[2(z-1)]^{-n}\right]$$

لكن لنلاحظ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(z-1)]^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2(z-1)}\right]^n$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها هو $\frac{1}{2(z-1)}$ وهي متقاربة عندما $\left|\frac{1}{2(z-1)}\right|<1$

أي إن: $|2(z-1)|>1$

ومن ثمَّ: $|z-1|>\frac{1}{2}$

ومجموعها:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2(z-1)}}=\frac{2z-2}{2z-2-1}$$

$$=\frac{2(z-1)}{2z-3}$$

ومن ثمَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}=\frac{-d}{dz}\left[\frac{2z-2}{2z-3}\right]$$

$$=-\frac{2(2z-3)-2(2z-2)}{(2z-3)^2}$$

$$=-2\frac{4z-6-4z+4}{(2z-3)^2}=\frac{4}{(2z-3)^2}$$

وهي متقاربة عندما $|z-1|>\frac{1}{2}$ أي خارج الدائرة التي مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n-1}=\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n\right]$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$ متسلسلة هندسية أساسها $\frac{z-1}{3}$ متقاربة عندما $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ أي $|z-1|<3$.

ومجموعها:

$$\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}=\frac{3}{3-z+1}=\frac{3}{4-z}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}=\frac{d}{dz}\left[\frac{3}{4-z}\right]=\frac{+3}{(4-z)^2}$$

وهي متقاربة عندما $|z-1|<3$

إذاً المتسلسلة المعطاة متقاربة عندما: $\frac{1}{2}<|z-1|<3$ ومجموعها يعطى بـ:

$$\frac{4}{(2z-3)^2}+\frac{3}{(4-z)^2}$$

ثامن عشر: ليكن $u_n = 1 + \rho\cos\alpha + \rho^2\cos 2\alpha + \ldots + \rho^n\cos n\alpha$

حيث $0 < \rho < 1$ و $n = 1, 2, \ldots$ والمطلوب أوجد: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

الحل:

لنضع: $v_n = \rho\sin\alpha + \rho^2\sin 2\alpha + \ldots + \rho^n\sin n\alpha$

ولنكتب:

$$z_n = u_n + i\,v_n$$

$$z_n = 1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha)\,\rho + (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)\,\rho^2 + \ldots$$
$$+ (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)\,\rho^n$$

$$z_n = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n\ ;\ t = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\ ;\ |t| = \rho < 1$$

$$z_n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{Re}\frac{1}{1-t}\right]$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{1-\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{(1-\rho\cos\alpha)}{(1-\rho\cos\alpha)^2 + \rho^2\sin^2\alpha}$$

تاسع عشر: أوجد منشور الدالة $f(z)=z^2\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ في جوار الصفر.

الحل:

نعلم أنه من أجل جميع نقاط z من المستوي العقدي C يكون لدينا:

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\frac{\theta^8}{8!}-+....$$

بوضع $\theta=\frac{1}{z}$ نجد:

$$z^2\cos\left(\frac{1}{z}\right)=z^2\left[1-\frac{1}{2!\cdot z^2}+\frac{1}{4!\cdot z^4}-\frac{1}{6!\cdot z^6}+...\right]$$

$$=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!\cdot z^2}-\frac{1}{6!\cdot z^4}+...$$

$$=-\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{4!}z^{-2}-\frac{1}{6!}z^{-4}+...$$

وهذا النشر صحيح من أجل جميع النقاط $z\neq 0$.

عشرون: أوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(z)=\frac{z^2+2}{z^2-4}$ في جوار النقطة $z=1$.

الحل:

بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام لذا نقسم فنجد:

$$f(z)=1+\frac{6}{z^2-4}=1+\frac{6}{(z-2)(z+2)}$$

نفرق الكسر:

$$\frac{6}{z^2-4}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+2}$$

بتوحيد المقامات وحذفها وإجراء المطابقة نجد:

$$A=\frac{3}{2} \quad ; \quad B=-\frac{3}{2}$$

ومن ثمَّ:

$$f(z)=1+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z+2}\right]$$

وبما أن النشر بجوار النقطة $z = 1$ فنجري التحويل:

$$z-1=t$$

أي إن: $z = t + 1$ وعليه فإنه:

$$f(z)=h(t)=1+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+3}\right]$$

وبالاستفادة من المتسلسلة الهندسية:

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+....+u^n+....;|u|<1$$

فعندئذ يكون:

$$\frac{1}{t-1}=\frac{-1}{1-t}=-(1+t+t^2+t^3+t^4+....);|t|<1$$

$$\frac{1}{t+3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{t}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{t}{3}\right)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{(3)^2}-\frac{t^3}{(3)^3}+...\right)$$

وبالتعويض في عبارة الدالة $h(t)$ نجد:

$$h(t)=1+\frac{3}{2}\left[(-1-t-t^2-....)-\frac{1}{3}(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{(3)^2}-\frac{t^3}{(3)^3}+...\right]$$

$$=1-\frac{3}{2}\left[(1+\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{(3)^2})t+(1+\frac{1}{(3)^3})t^2+(1-\frac{1}{(3)^4})t^3+...+\right.$$

$$+(1+\frac{(-1)^{n-1}}{(3)^n})t^{n-1}\Bigg]$$

وبالعودة للدالة الأصلية $f(z)$ نجد:

$$f(z)=1-\frac{3}{2}\Bigg[(1+\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{(3)^2})(z-1)+(1+\frac{1}{(3)^3})(z-1)^2+\ldots+$$

$$+(1-\frac{(-1)^{n-1}}{(3)^n})(z-1)^{n-1}\Bigg]$$

وذلك بشرط: $|z-1|<1$ و $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$، ويكون نصف قطر التقارب هو العدد 1 حيث يتحقق الشرطان معاً.

٥ . ٥ . تمارين غير محلولة:

أولاً: أ . برهن أنه إذا وجدت نهاية المتتالية فإنها تكون واحدة ووحيدة.

ب . برهن أنه إذا كانت $S=\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ فإن $\overline{S}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{z_n}$.

جـ . إذا كانت $T=\sum_{n=0}^{\infty}w_n$ كذلك فإن: $S+T=\sum_{n=0}^{\infty}(z_n+w_n)$.

ثانياً: بيّن ما إذا كانت المتتاليات التالية متقاربة أم لا، ثم أوجد نهايتها إذا كانت متقاربة:

أ . $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}i\right)^n$ ب . $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+i^n}{n}$

جـ . $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n!i}{2^n}$ د . $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(1-ni)}{n^2}$

ثالثاً: بيِّن ما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أم لا، ثم أوجد مجموعها إذا كانت متقاربة:

أ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{n!}$ ب. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ni^n}{2n+1}$

جـ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{(1+i)^n}$ د. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2-i}\right)^2$

هـ. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{3}\right)^n$ و. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i}{(1-i)^n}$

رابعاً: بيِّن لماذا تكون المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$ متباعدة.

ماذا نقول حول المتسلسلة التالية ولماذا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$$

خامساً: بتطبيق اختبار فيراشتراس بيّن أن المتسلسلات التالية متقاربة تقارباً منتظماً:

أ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ ، $|z|\le 1$.

ب. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ، $|z|\le 2$.

جـ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z|+n^2}$ لكل $z\ne 0$.

د. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n|z|}{2^n}$ ولكل عدد مركب z.

سادساً: برهن المبرهنة (٩) بالاستفادة من اختبار المقارنة وشرط كوشي لتقارب المتسلسلات.

سابعاً: ابحث في العلاقة بين التقارب المنتظم والتقارب الموضعي (بين أنه إذا كانت متسلسلة (متتالية) تتقارب تقارباً منتظماً فإنها تكون متقاربة تقارباً موضعياً).

ثامناً: ابحث في العلاقة بين التقارب المنتظم والتقارب المطلق. بيِّن ليس هناك علاقة ما كما يلي:

أ . بيِّن أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ تتقارب تقارباً منتظماً ولكنها لا تتقارب تقارباً مطلقاً (حيث x متغير حقيقي).

ب . بين أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ تتقارب تقارباً مطلقاً للدالة $f(x) = 1 + x^2$ في الفترة $0 \le x \le 1$ ولكنها لا تتقارب تقارباً منتظماً.

تاسعاً: بيّن أن المتتالية:

$$f_n(z) = \frac{nz}{n+1} + \frac{2}{n}, n = 1,2,...$$

تتقارب تقارباً منتظماً للدالة $f(z) = z$ على المجال: $D = \{z: |z| \le R\}$

عاشراً: إذا كانت المتتالية (z_n) تحقق الشرط:

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| \le \frac{1}{2}|z_{n+1} - z_n|, n = 0,1,2,...$$

برهن أن (z_n) تحقق شرط كوشي ومن ثمَّ تكون متقاربة.

حادي عشر:

١ . برهن فرع ب من المبرهنة (١٠).

٢ . برهن فرع جـ من المبرهنة (١٠).

٣ . برهن فرع جـ من المبرهنة (١١) بأسلوب (نقض الفرض).

٤ . برهن أن التقارب في فرع أ من مبرهنة (١١) تقارب موضعي.

٥ . إذا فرضنا أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$ متباعدة عند النقطة $z = w \neq z_0$ فإنها تكون متباعدة لكل قيم z التي تحقق $|z - z_0| > R$ حيث $R = |w - z_0|$.

اقتراح: بأسلوب التناقض ثم طبق مبرهنة (١٢).

٦ . بفرض أن (f_n) متتالية من الدوال المستمرة على المجال المشترك D وإن (f_n) تتقارب تقارباً منتظماً للدالة f على D فبرهن أن الدالة f مستمرة على المجال D.

٧ . برهن المتطابقة التالية:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \ldots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}, t \neq 1$$

اقتراح: استعن بالقسمة المطولة.

٨ . لأي دالتين تحليليتين f و g برهن صيغة ليبنتز لمشتقة حاصل الضرب f . g وهي:

$$(f \cdot g)^{(n)}(z_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} f^{(n-k)}(z_0) g^{(k)}(z_0)$$

ثاني عشر: أوجد نصف قطر التقارب لكل من المتسلسلات التالية:

أ . $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-2)^n$

ب . $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

جـ . $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(z-i)^n$

د . $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}(z+i)^n$

هـ . $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(1+i)^n}$

و . $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{2n+1}\right)^n z^n$

ز . $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n}(z-i)^n$

ح . $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(z+3i)^n$

ثالث عشر: مثل الدوال التالية بمتسلسلة قوى:

أ . $f(z) = \tan^{-1} z$

ب. $f(z) = \sinh z$

جـ. $f(z) = \cos z^2$

د. $f(z) = e^{2iz}$

هـ. $f(z) = z^3 \sin 2z$

رابع عشر: أوجد متسلسلة تايلور للدوال التالية حول النقطة المذكورة:

أ. $f(z) = \sin z$، $z_0 = \pi/2$

ب. $f(z) = \cos z$، $z_0 = \pi/3$

جـ. $f(z) = e^z$ ، $z_0 = i$

د. $f(z) = \cosh z$، $z_0 = -1$

هـ. $f(z) = z^4$، $z_0 = 2i$

خامس عشر: أوجد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

بثلاث طرق مختلفة.

سادس عشر: بيّن أن الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\cos z - 1}{z} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

تحليلية عند $z = 0$ وبالتالي تكون صحيحة.

سابع عشر: أوجد دالة تحليلية عند $z_0 = 0$ تحقق $f'(z) = if(z)$ لكل z وتأخذ القيمة 1 عند $z = 0$.

ثامن عشر: بفرض أن الدالة $f(t)$ دالة مركبة القيمة ومستمرة على الفترة $[0, 1]$ فبرهن أن الدالة:

$$g(z) = \int_0^1 f(t)e^{zt}dt$$

تحليلية على كل الأعداد المركبة z وبالتالي تكون مستمرة ثم أوجد متسلسلة ماكلورين لها.

تاسع عشر: أ. أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z) = e^{zi}$.

ب. أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $g(z) = \cos z + i \sin z$.

جـ. قارن بين الدالتين. ماذا تستنتج ولماذا؟

عشرون: أوجد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة:

$$f(z) = \sec z$$

بطريقتين مختلفتين.

حادٍ وعشرون: كرر التمرين السابق للدالة:

$$f(z) = \tan z$$

اقتراح: الطريقة الأولى باستخدام حاصل ضرب كوشي للمتسلسلات وفيه يعرف قسمة المتسلسلات والطريقة الثانية باستخدام مبرهنة تايلور.

ثانٍ وعشرون: بفرض أن الدالة $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ صحيحة:

أ. أوجد تمثيلاً للدالة $\overline{f(z)}$ بمتسلسلة قوى للمتغير $\bar{z}$.

ب. بين أن الدالة $\overline{f(z)}$ صحيحة (شاملة).

ثالث وعشرون: بفرض أن الدالة f تمثل بالمتسلسلة التالية:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

حيث إن $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $n \geq 2$

أ . برهن أن f تحقق المعادلة:

$$f(z) = 1 + z\, f(z) + z^2\, f(z)$$

ب . ومن ذلك استنتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

رابع وعشرون: بفرض أن الدالة f تحليلية عند $z = 0$ وتحقق الشرط:

$$f(0) = f'(0) = 0$$

برهن أنه يوجد دالة g تحليلية عند $z = 0$ وتحقق الشرط:

$$f(z) = z^2\, g(z)$$

لكل z.

خامس وعشرون: بفرض أن الدالة f صحيحة وتحقق الشرط:

$$f(0) = f'(0) = 0$$

وأن:

$$f''(z) + f(z) = 0$$

أوجد تمثيلاً لهذه الدالة بمتسلسلة قوى عند $z = 0$. هل تستطيع التعرف على هذه الدالة؟ قارن بين هذه المتسلسلة التي حصلت عليها وبين متسلسلة الدالة $\sin z$ عند $z = 0$.

سادس وعشرون: إذا كانت f دالة تحليلية تحقق المعادلة: $f(z) = z + f(z^2)$

فما هي الدالة f؟

اقتراح: أوجد f على صورة متسلسلة قوى عند $z = 0$ مثلاً.

سابع وعشرون: بيِّن أنه يمكن تمثيل الدالة: $f(z) = (1 + z)^{\alpha} = e^{\alpha \,.\, \mathrm{Log}\,(1 + z)}$

بالمتسلسلة التالية:

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \dots$$

ويكون تقاربها موضعياً على المجال $|z| < 1$.

ثامن وعشرون: بيِّن أن الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{zi}-1}{z} & , z \neq 0 \\ i & , z = 0 \end{cases}$$

تحليلية على كل الأعداد المركبة وبالتالي تكون صحيحة.

تاسع وعشرون: إذا كانت الدالة f تحليلية عند z_0 وكانت $f(z_0) = 0$ فبين أن:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

ثلاثون: أوجد مجموع المتسلسلات التالية:

(أ) $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^j$ (ب) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{(1+i)^k}$ (جـ) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{2}{3}\right)^j$

(د) $\sum_{k=14}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^k$ (هـ) $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2j}$ (و) $\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{i+2} - \frac{1}{j+1}\right]$

حادٍ وثلاثون: مستخدماً اختبار النسبة، بيّن أن المتسلسلات التالية متقاربة:

(أ) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}$ (ب) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3+i)^k}{k!}$ (جـ) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^2}{4^j}$ (د) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$

ثانٍ وثلاثون: أثبت أنه إذا كانت المتتالية $\{z_n\}_n^{\infty}=1$ متقاربة، فإن $(z_n - z_{n-1}) \to 0$ عندما $n \to \infty$.

ثالث وثلاثون: لنفرض أن $z_0 \neq 0$، أثبت أن المتتالية $(z/z_0)^n$، $n = 1, 2, \dots$ متباعدة إذا كان $|z| \geq |z_0|$، $z_0 \neq z$.

[**إرشاد:** عندما $|z| = |z_0|$ لاحظ أن: $\left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^n - \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1}\right| = \left|\frac{z}{z_0} - 1\right| > 0$]

رابع وثلاثون: أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ متقاربة فإن $c_j \to 0$ عندما $j \to \infty$

[**إرشاد:** اعتبر الفرق $S_n - S_{n-1}$ لمجموعتين جزئيتين متتاليتين].

خامس وثلاثون: أثبت أن المتسلسلة $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ متباعدة إذا كان $|c| \geq 1$.

[**إرشاد:** انظر المسألة ذات الرقم (٣٤)].

سادس وثلاثون: لكل من التالي حدد فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة:

(أ) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^k$ (ب) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2 3^j}$ (جـ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n}{2n+1}$

(د) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j!}{5^j}$ (هـ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k^3}{(1+i)^k}$ (و) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(i^k - \frac{1}{k^2}\right)$

سابع وثلاثون: أثبت صحة كل مما يأتي:

(أ) إذا كان المجموع $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ يساوي S فإن مجموع $\sum_{j=0}^{\infty} \bar{c}_j$ يساوي $\bar{S}$.

(ب) إذا كان المجموع $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ يساوي S، λ أي عدد مركب فإن $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda c_j$ يساوي λS.

(جـ) إذا كان المجموع $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ يساوي S، $\sum_{j=0}^{\infty} d_j$ يساوي T فإن $\sum_{j=0}^{\infty}(c_j + d_j)$ يساوي $S+T$.

ثامن وثلاثون: أثبت أن المتسلسلة $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ متقاربة إذا، وفقط إذا، كان كل من $\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Re} z_j$، $\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Im} z_j$ متقاربين.

تاسع وثلاثون: أثبت أن متتالية الدوال $F_n(z) = z^n/(z^n - 3^n),\ n = 1,2,\ldots$ متقاربة من الصفر لقيم $|z| < 3$ ومن الواحد لقيم $|z| > 3$.

أربعون: مستخدماً اختبار النسبة أوجد منطقة التقارب لكل من متسلسلات الدوال التالية:

(أ) $\sum_{j=1}^{\infty} jz^j$ (ب) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{2^k}$

(جـ) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$. (د) $\sum_{k=0}^{\infty} (z+5j)^{2k}(k+1)^2$

حادٍ وأربعون: لنفرض أن:

$$F_n(z) = [nz/\ (n+1)] + (3/n),\ n = 1,2,\ldots$$

أثبت أن المتتالية $\{F_n(z)\}_1^{\infty}$ تتقارب بانتظام من $F(z) = z$ على كل قرص مغلق $|z| \le R$.

ثانٍ وأربعون: أثبت أن $\sum_{j=1}^{\infty} 1/\ j^p$ تتقارب لقيم $p > 1$.

[**إرشاد:** عرف التكامل $\int_1^N (1/x^p)dx$ على أنه مساحة ومنه عرف $\sum_{j=2}^{N} 1/\ j^p$ على أنه مساحة أيضاً ثم قارن].

ثالث وأربعون: مستخدماً اختبار المقارنة ونتيجة المسألة (٤٢) بيّن أن المتسلسلات التالية متقاربة:

(أ) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+i)}$ (ب) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^{3/2}}$

(جـ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 i^k}{k^4+1}$ (د) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{5k+8}{k^3-1}\right)$

رابع وأربعون: أثبت أن المتتالية $\{z_n\}_1^\infty$ تتقارب إذا، وفقط إذا، كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}(z_{k+1}-z_k)$ متقاربة.

خامس وأربعون: (أ) أثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{j=0}^{\infty}z^j$ لا تتقارب عند أي نقطة على دائرة تقاربها $|z| = 1$.

(ب) أثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{j=1}^{\infty}z^j/j^2$ تتقارب عند كل نقطة على دائرة تقاربها $|z| = 1$.

سادس وأربعون: لنفرض أن متسلسلة القوى $\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ لها الخاصية أن $\lim_{j\to\infty}|a_{j+1}/a_j| = L$. أثبت باستخدام اختبار النسبة أن نصف قطر التقارب لهذه المتسلسلة هو $R = \frac{1}{L}$.

سابع وأربعون: مستخدماً نتيجة المسألة (٤٦) أوجد دائرة التقارب لكل من متسلسلات القوى التالية:

(أ) $\sum_{j=0}^{\infty}j^3z^j$ (ب) $\sum_{k=0}^{\infty}2^k(z-1)^k$ (جـ) $\sum_{j=0}^{\infty}j!z^j$

(د) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{3k}(z-i)^k$ (هـ) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3-1)^k}{k^2}(z+2)^k$ (و) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j}}{4^j}$

ثامن وأربعون: هل توجد متسلسلة قوى $\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ تكون متقاربة عند $z = 2 + 3i$ ومتباعدة عند $z = 3 - i$؟

تاسع وأربعون: لتكن $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k^3/3^k)z^k$. احسب كلاً من:

(أ) $f^{(6)}(0)$ (ب) $\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} dz$

(جـ) $\int_{|z|=1} e^z f(z) dz$ (د) $\int_{|z|=1} \frac{f(z)\sin z}{z^2} dz$

خمسون: لنفرض أن:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$ لقيم

(أ) مستخدماً مفكوك ماكلورين للدالة $\sin z$ بين أن:

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

لجميع قيم z.

(ب) وضح لماذا تكون $f(z)$ تحليلية عند نقطة الأصل.

(جـ) أوجد $f^{(3)}(0)$، $f^{(4)}(0)$.

حادٍ وخمسون: أوجد الثلاثة حدود الأولى غير الصفرية من مفكوك ماكلورين للدالة:

$f(z) = \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$ [إرشاد: أولاً انشر e^{ζ^2}].

ثانٍ وخمسون: لنفرض أن $f(z)$ تحليلية عند نقطة الأصل، وأن $f(0) = f'(0) = 0$.

أثبت أنه بالإمكان كتابة $f(z)$ على الشكل: $f(z) = z^2 g(z)$ حيث $g(z)$ تحليلية عند $z = 0$.

ثالث وخمسون: لنفرض أن g مستمرة على الدائرة $C: |z| = 1$، وأنه توجد متتالية من كثيرات الحدود تتقارب بانتظام من g على C. أثبت أن:

$$\int_C g(z) dz = 0$$

رابع وخمسون: وضح لماذا يكون لمتسلسلتي القوى $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ، $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ نفس نصف قطر التقارب.

خامس وخمسون: لنفرض أن $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ، $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ متسلسلتا قوى لهما نصف قطر تقارب موجب.

(أ) بين أنه إذا كان $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ في جوار ما لنقطة الأصل فإن $a_k = b_k$ لجميع k.

(ب) أكثر عموماً، بين أنه إذا كان $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ لجميع الأعداد الحقيقية x في فترة مفتوحة ما تحوي نقطة الأصل فإن $a_k = b_k$ لجميع k.

سادس وخمسون: أثبت باستخدام تعريف متسلسلة القوى أن الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية:

$$\begin{cases} \omega' = \dfrac{d\omega}{dz} = f(z, \omega(z)) \\ \omega(0) = 1 \end{cases}$$

الذي يكون تحليلياً عند $z = 0$ هو $\omega(z) = e^z$.

سابع وخمسون: كل من مسائل القيم الابتدائية التالية لها حل وحيد يكون تحليلياً عند نقطة الأصل. أوجد متسلسلة القوى $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ لذلك الحل بواسطة إيجاد علاقة تكرار بين المعاملات a_j.

(أ) $\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dz^2} - z\dfrac{df}{dz} - f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 0 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dz^2} + 4f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 1 \end{cases}$

(جـ) $$\begin{cases}(1-z^2)\dfrac{d^2f}{dz^2}-6z\dfrac{df}{dz}-4f=0\\ f(0)=1, f'(0)=0\end{cases}$$

[**إرشاد:** تصبح الطريقة الموضحة في المثال (أ) مجهدة أكثر لمعادلات معقدة مثل (جـ)، الطريقة الأكثر فعالية هو التعويض بمتسلسلة القوى للدالة $f(z)$ في المعادلة، ثم إضافة القوى المشابهة من z].

ثامن وخمسون: أثبت بواسطة متسلسلة القوى أن الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2f}{dz^2}+f=0\\ f(0)=0, f'(0)=1\end{cases}$$

الذي يكون تحليلياً عند $z = 0$ هو $f(z) = \sin z$.

تاسع وخمسون: لنفرض أن g مستمرة على الفترة $[-1, 2]$ ولنفرض أن:

$$F(z)=\int_{-1}^{2} g(t)\sin(zt)dt$$

(أ) أثبت أن F تكون (شاملة) صحيحة ثم أوجد متسلسلة القوى لها حول نقطة الأصل.

(ب) أثبت أن $F'(z)=\int_{-1}^{2} tg(t)\cos(zt)dt$ لجميع قيم z.

ستون: لتكن g مستمرة على الفترة الحقيقية $[0, 1]$ ولنعرف:

$$H(z)=\int_{0}^{1}\frac{g(t)}{1-zt^2}dt \quad ; \quad (|z|<1)$$

أثبت أن H تحليلية على القرص المفتوح $|z| < 1$.

* * *

المصطلحات العلمية

Negative orientation	اتجاه سالب
Positive orientation	اتجاه موجب
Weierstrass M- test	اختبار فيراشتراس
Comparison test	اختبار المقارنة
Ratio test	اختبار النسبة
Independence of path	استقلال عن المسار
Stereographic projection	إسقاط ستريوغرافي
Analytic continuation	استمرار تحليلي
Anti – derivative	أصل المشتقة
Arg z	السعة الزاوية للعدد
Principel branch	الفرع الرئيسي
Principel value	القيمة الرئيسية
Imaginary axis	المحور التخيلي
Real axis	المحور الحقيقي
Extended complex plane	المستوي المركب المغلق
Residue	رواسب
Partition	تجزئة

Transformation	تحويل
Translation transformation	تحويل انسحابي
Magnification transformation	تحويل تكبيري
Linear transformation	تحويل خطي
Rotational transformation	تحويل دوراني
Schwartz – christoffel transf.	تحويل شوارتز . كريستوفل
Bilinear transformation	تحويل مزدوج الخطية
Gradient	تدرج
Heat flow	تدفق حراري
Fluid flow	تدفق سائل
Mapping	تطبيق
Convergence	تقارب
Absolute convergence	تقارب مطلق
Uniform convergence	تقارب منتظم
Point wise convergence	تقارب موضعي
Integral	تكامل
Line integral	تكامل المسار
Trigonometric integral	تكامل مثلثي

Improper integral	تكامل معتل
Zero of a function	جذر دالة
Rool of a complex number	جذر عدد مركب
Zero of order m	جذر من الدرجة m
Potential	جهد (طاقة)
Electrostatic potential	جهد كهربائي
Neighbor hood	جوار
Cauchy product	حاصل ضرب كوشي (جداء كوشي)
Boundary of a set	حدود مجموعة
Electric field	حقل كهربائي
Vector field	حقل متجه
Irrotational vector field	حقل متجه غير دوراني
Conservative vector	حقل متجه محافظ
Loop	حلقة
Polygonal line	خط مضلع
Stream lines	خطوط التيار
Force lines	خطوط القوة
Local properties	خواص موضعية

Circle of convergence	دائرة التقارب
Function	دالة
Stream function	دالة التيار
Sine function	دالة الجيب
Exponential function	دالة أسية
Analytic function	دالة تحليلية
Harmonic function	دالة توافقية
Cosine function	دالة جيب التمام
Periodic function	دالة دورية
Inverse function	دالة عكسية
Entire function	دالة صحيحة
Multiple – valued function	دالة متعددة القيمة
Trigonometric function	دالة مثلثية
Conformal function	دالة مطابقة (مشاكلة)
Rational function	دالة نسبية
One to one function	دالة واحد . لواحد (دالة متباينة)
Velocity potential	سرعة الجهد
Argument	سعة زاوية

Chauchy condition	شرط كوشي
Polar form	شكل قطبي
Image	صورة
De Moivre's formula	صيغة ديموافر
Cauchy Integral formula	صيغة كوشي للتكامل
Generalized Cauchy integral formula	صيغة كوشي العامة للتكامل
Integration path	طريق المكاملة
Length of a contour	طول كانتور
Pure imaginary number	عدد تخيلي بحت
Real number	عدد حقيقي
Complex number	عدد مركب
Branch	فرع
Branch cut	فصل الفرع
Chain rule	قانون السلسلة
Maximum modulus principle	قانون القيمة العظمى
L'Hopital rule	قانون لوبيتال
Disc	قرص
Closed disc	قرص مغلق

Open disc	قرص مفتوح
Pole	قطب
Simple pole	قطب بسيط
Complex power	قوة مركبة
power	قوى
Cauchy Principal value	قيمة كوشي الرئيسة
Absolute value	قيمة مطلقة
Contour	كانتور (مسار)
Closed contour	كانتور مغلق
Simple closed contour	كانتور مغلق وبسيط
Open contour	كانتور مفتوح
Positively oriented contour	كانتور موجب الاتجاه
Polynomial	كثيرة حدود
Infinity	لا نهاية (الرمز ∞)
Logarithm	لوغاريتم
Triangular inequality	متباينة المثلث
Sequence	متتالية
Convergent sequence	متتالية تقاربية

Cauchy sequence	متتالية كوشي
Vector	متجه
Equipotential	متساوية الجهد
Isothermal	متساوية الحرارة
Series	متسلسلة
Power series	متسلسلة القوى
Taylor series	متسلسلة تايلور
Divergent series	متسلسلة متباعدة
Convergent series	متسلسلة متقاربة
Cauchy series	متسلسلة كوشي
Laurent Series	متسلسلة لورانت (لوران)
Maclaurin Series	متسلسلة ماكلورين
Geometric series	متسلسلة هندسية
Connected	مترابط
Continuous	مستمر
Domain	مجال
Domain of definition	مجال تعريف الدالة
Simply connected domain	مجال مترابط ترابطاً بسيطاً

Multiply connected domain	مجال متعدد الترابط
Partial sum	مجموع جزئي
Sum of series	مجموع متسلسلة
Unbounded set	مجموعة غير محددة
Bounded set	مجموعة محدودة
Closed set	مجموعة مغلقة
Open set	مجموعة مفتوحة
Range of function	مدى الدالة
Conjugate	مرافق
Harmonic conjugate	مرافق توافقي
Complex conjugate	مرافق مركب
Derivative	مشتقة
Laplace equation	معادلة لابلاس
Parametric equations	معادلات وسيطية
Cauchy – Riemann equations	معادلتي كوشي . ريمان
Complement of a set	مكملة مجموعة
Arc	منحنٍ (قوس)
Smooth curve	منحنٍ (مسار) ممهد (أملس)

Piece – wice smooth curve	منحنٍ ممهد الأجزاء (منحنٍ أملس تقطيعياً)
Directed smooth curve	منحنٍ ممهد موجه
Level curve	منحنيات المستوي
Region	منطقة
Closed Region	منطقة مغلقة
Open Region	منطقة مفتوحة
Exterior of a curve	منطقة خارجية للمنحني
Interior of a curve	منطقة داخلية للمنحني
Riemann Mapping Lemma	مبرهنة تطبيق ريمان
Green Theorem	مبرهنة غرين
Schwartz Lemma	مبرهنة شوارتز
Cauchy Residue theorem	مبرهنة كوشي للرواسب
Cauchy Integral theorem	مبرهنة كوشي للتكامل
Lieouville theorem	مبرهنة ليوفل
Morera theorem	مبرهنة موريرا
Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Removable discontinuity	نقطة انفصال قابلة للإزالة
Accumulation point	نقطة تجمع

Bunday point	نقطة حدودية
Exterior point	نقطة خارجية
Interior point	نقطة داخلية
Singular point	نقطة شاذة
Essential singular point	نقطة شاذة لازمة
Removable singularity	نقطة شاذة قابلة للإزالة
Limit	نهاية
Parameter	وسيط

المصادر

١ . د. موفق دعبول، تحليل (٦)، مطبوعات جامعة دمشق ١٩٨٢ .

٢ . د. حسن بدور، تحليل (٦)، مطبوعات جامعة تشرين ٢٠٠٥ .

٣ . د. شحادة الأسدي، تحليل (٦)، مطبوعات جامعة حلب ١٩٨٩ .

٤ . د. محمد صبح، التحليل العقدي، مطبوعات جامعة دمشق ٢٠١١ .

٥ . د. صفوان عويرة، التحليل (٣)، مطبوعات جامعة حلب ٢٠٠٣ .

٦ . د. زكريا نوت، التحليل المركب (١)، منشورات جامعة حلب ٢٠١١ .

٧ . ساف. ب. إ و سيندر. د. أ. أسس التحليل المركب، ترجمة د. أبو بكر بيومي ود. سعدون إبراهيم، كلية العلوم . قسم الرياضيات، جامعة الملك سعود، الرياض ٢٠٠٢م.

٨ . وليام دوريك، التحليل المركب وتطبيقاته، ترجمة د. أبو بكر بيومي ود. سعدون إبراهيم، كلية العلوم . قسم الرياضيات . جامعة الملك سعود، الرياض ٢٠٠١م.

٩ . د. محي الدين بجبوح، التحليل العقدي والسلاسل، مطبوعات جامعة دمشق، ٢٠٠٩م.

١٠ . مواقع متنوعة من شبكة الحاسوب (الإنترنت) بين عامي ٢٠٠٠ و ٢٠١٣م.

11 – Boas; Invitation to Complex Analysis, Random House 1987.

12 – Churchill R., Brown J.W.; Complex variable and Applications, 4th. Ed. Mc Graw – Hill Inc. Book comp. 1984 London.

13 – Fisher, S.D.; Complex Variables, Wadsworth Inc. 1986, Calif. Belmont.

14 – Lang, S.; Complex Analysis, Addison – Wesley pub. Comp. Inc. 1977, London.

15 – Mathews, J.H.; Basic Complex Variables for Mathematics and Engineering, Allyn and Bacon, 1982, Boston.

16 – Rudin, W; Real and Complex Analysis, Mc Graw – Hill comp. 3rd Ed. 1986 N.Y.

17 – Saff, E.B.; Snider, A.D.; Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics science and Engineering. Prentice – Hall Inc. 1976 New Jersey.

18 – Stromberg, K.R.; An Introduction to Classic Real Analysis, Wadsworth 1981 Belmont Calif.

19 – William, R.D, Complex analysis and applications 2nd edn, Wadsworth, 1984.

20 – Yu. V. Sidorov, M.V. Fedoryuk and M.I. shabunin, Lectures on the theory of functions of a complex variables Mir publisher, Moscow, 1985.

اللجنة العلمية

أ.د. محمد صبح

أ.م.د. جمال مللي

أ.م.د. صفوان زيزون

المدقق اللغوي

د. محمد قاسم