نظرية الجبور

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

نظرية الجبور

الدكتور

إيلي قدسي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

الفهرس

مقدمة

لكل أمة من الأمم حضارة لها وعاؤها، ووعاء حضارة أمتنا هو اللغة العربية.

والعلم ثمرة من ثمرات الحضارة فمن المنطق أن يُنقل للأمة بلغة حضارتها.

ولسوء الحظ، إن معظم الكتب العلمية المتوافرة في مكتباتنا العربية كانت بلغة أجنبية وهي في الحقيقة، على درجة عالية من التجريد، يجد معها القارئ العربي صعوبة في قراءة واضحة لمضمونها.

ومن أجل استكمال نواة أولية لمكتبة علمية عربية وحرص شديد على المساهمة المتواضعة في الجهود المبذولة على المستوى العربي لدعم المكتبة العربية، التي نحن أمس ما نكون إليها لدعم تقدمنا وازدهارنا على طريق الحضارة والرقي، فقد قمت بتأليف هذا الكتاب المسمّى " **نظرية الجبور**"، وهو مُعَدّ لطلاب الرياضيات للسنة الأخيرة من الدراسة الجامعية الأولى ويُعد أيضاً مرجعاً أساسياً لمقرر جبور لي لطلبة دبلوم الدراسات العليا في قسم الرياضيات بجامعة دمشق.

لقد حاولت جاهداً أثناء عرض أفكار هذا الكتاب أن أتوخى البساطة والوضوح دون أن تُغفل الدقة الرياضية، وأن تكون فقراته متسلسلة وميسرة ليتسنى لقارئه فهم محتواه دون جهد كبير.

وتماشياً مع المنهاج المقرر، فقد قمت بتقسيم الكتاب إلى وحدتين:

الوحدة الأولى تتضمن مبادئ جبور لي وسماتها الأساسية وعرضتها في خمسة فصول. أشير للقارئ بأن البداية الفعلية لهذا المفهوم تعود إلى الربع الأخير من القرن التاسع عشر عندما رأى العالم النرويجي ماريوس سوفوس لي (١٨٤٢-١٨٩٩) أثناء تقصيه لخواص الجبور غير التجميعية إلى ضرورة إيراد مفهوم جبور لي، ولقد كان اختيارنا لهذا المفهوم بسبب حيويته وأهميته البالغة وكونه أساساً لدراسة زمر لي.

يُعد الفصل الأول في هذه الوحدة مقدمة في نظرية المقاسات والجبور. والفصل الثاني يبحث في جبور لي، أما الفصل الثالث فيتناول جبور لي القابلة للحل ونصف البسيطة، والفصل الرابع يعالج جبور لي عديمة القوى والأشكال الخطانية على جبور لي، والفصل الأخير في هذه الوحدة نناقش فيه تمديدات جبور لي والمجموع المباشر لجبور لي.

أما الوحدة الثانية فتتضمن أربعة فصول، تبحث في أنماط هامة من الجبور الحديثة، وهي صفوف جبرية من النمط $(2,0)$، أسسها وطورها عدد من أبرز رياضيي المدرسة اليابانية، في السنوات الأخيرة من القرن العشرين وفي مقدمتهم I.Iséki. تُعد هذه الأنماط الحديثة من الجبور تعميماً وتجريداً لحقائق هامة في نظرية المجموعات.

والفصول الأربعة: جبور BCK - جبور BCK المحدودة - جبور BCH وجبور BH - جبور BCC.

هذا، ورغبة في مساعدة القارئ عند اللجوء إلى المصادر الأجنبية، فقد أوردت في نهاية الكتاب ثبتاً بالمصطلحات العلمية وقائمة بأهم المراجع المستعان بها لدى وضع الكتاب.

وإن كنتُ قد وفّقت إلى تقديم شيء مفيد للقارئ العربي، فآملُ أن يفي هذا الكتاب بالغرض المنشود، ويقدم لأبناء وطننا ما نرجوه من الفائدة العلمية.

والله ولي التوفيق

المؤلف

الباب الأول

جبور لي وسماتها الأساسية

١-نظرية المقاسات والجبور (مفاهيم أساسية)

٢-جبور لي

٣-جبور لي القابلة للحل ونصف البسيطة

٤-جبور لي معدومة القوى والأشكال الخطانية على جبور لي

٥-المجموع المباشر لجبور لي وتمديدات جبور لي

٦-تمرينات الباب الأول

الفصل الأول

نظرية المقاسات والجبور

١- الحلقات والحقول

تعريف (١-١)

لنعتبر مجموعة $\Re$ من العناصر $a, b, c, ...$ وقاعدتي تركيب سندعوهما «الجمع» (وتُكتب $a + b$)، و«الضرب» (وتُكتب $ab, a.b$) بحيث إنه إذا كان a و b أي عنصرين من $\Re$، فعندئذ يكون $a + b$ و ab عنصرين من $\Re$ معرفين بصورة وحيدة. لنفرض بالإضافة إلى ذلك، أن عمليتي الجمع والضرب تخضعان للقوانين الخمسة التالية:

١. $a + b = b + a$ (قانون الجمع تبديلي)

٢. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (قانون الجمع تجميعي)

٣. للمعادلة $a + x = b$ حل دائم في $\Re$.

٤. $a(bc) = (ab)c$ (الضرب تجميعي)

٥. $a(b + c) = ab + ac; \quad (b + c)a = ba + ca$

(قانون توزيع الضرب على الجمع)

فمجموعة العناصر التي تحقق الشروط المذكورة أعلاه تسمى حلقة.

وكل ما يعرضه الشرط (٣) هو أن الطرح ممكن دوماً في الحلقة. ولم نتخذ وحدانية الطرح كفرضية، لأنه يمكن البرهان عليها باستخدام الشروط الواردة أعلاه.

بالإضافة إلى الشروط الخمسة المذكورة أعلاه، إذا تحققت العلاقة:

٦. $a.b = b.a$

من أجل أي عنصرين اختياريين a, b من المجموعة فنقول عندئذ إن $\Re$ هـي حلقة إبدالية (تبديلية).

ونشير إلى أن كل حلقة $\Re$ تحـوي عنصـراً وحيـداً 0، يـدعى «العنصـر الصفري» لهذه الحلقة، ويتصف بالخاصتين التاليتين:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a.0 = 0.a = 0$$

وذلك من أجل أي عنصر a من $\Re$.

وإذا احتوت الحلقة $\Re$ عنصراً e بحيث إن $ae = a$ من اجل أي عنصـر a من $\Re$، فعندئذ نقول: إن e هو العنصر «محايد أيمـن». فـي هـذه الحلقـة وبصورة مشابهة، يسمى العنصر f، الذي يحقق العلاقة $fa = a$ مـن أجـل أي a من $\Re$ العنصر «محايد أيسر». وقد لا تحوي الحلقة أي عنصر محايـد على الإطلاق. وعلى الوجه الآخر، قد تحوي عناصر محايدة يُمنى ولا تحـوي عناصر محايدة يسرى، والعكس بالعكس. وعلى أية حال، إذا كـان للحلقـة $\Re$ عنصر محايد أيمن e وعنصر محايد أيسر f، فيجب أن يتساوى العنصـران. ذلك لأن $fe = f$ من الشرط الأول، بينما $fe = e$ بالاسـتناد إلـى الشـرط الثاني، وبالتالي $e = f$.

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الحلقة $(\Re, +, .)$ إنها حلقـة جزئية إذا وفقط إذا كانت $(A, +, .)$ حلقة، أي إذا وإذا فقط تحقـق الشـرطان التاليان:

أ- $x - y \in A$

ب- $x.y \in A$

لأجل كل عنصرين x, y من A .

ونشير للقارئ بأن تقاطع حلقتين جزئيتين من الحلقة $\Re$ يكــون حلقــة جزئيــة من $\Re$، أما اتحاد حلقتين جزئيتين من $\Re$ فليس من الضروري أن يكون حلقــة جزئية من $\Re$، بالإضافة لذلك، إن الحلقة $\Re$ هي حلقة جزئيــة مــن $\Re$، كمــا أن $\{0_{\Re}\}$ حلقة جزئية من $\Re$.

أمثلة على الحلقات

- إن مجموعة الأعداد الصـــحيحة Z ومجموعـــة الأعـــداد العاديـــة Q ومجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$ هي حلقات تبديلية وواحدية، وذلك بالنسبة لجمع الأعداد وضربها.
- إن مجموعة الأعداد العقدية C هي حلقة تبديلية وواحدية بالنسبة لجمع الأعداد العقدية وضربها.
- المجموعة $A=\{a+ib : a,b \in Z\}$ هي حلقة تبديلية وواحديــة بالنسبة لجمع الأعداد العقدية وضربها.
- إن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية $2Z$ تشكل حلقة تبديلية وغيــر واحدية بالنسبة لجمع الأعداد وضربها.
- إن مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية التي عناصر كــل مصفوفة منها أعداد حقيقية، تكون حلقة واحدية وغير تبديليــة بالنســبة لجمع المصفوفات وضربها المألوفين.
- إن المجموعة $Z/_{nZ} = \{[0],[1],....,[n-1]\}$ حيث n عــدد صحيح موجب هي حلقة تبديلية وواحدية، ضربها هو $[0]$، وواحدها هو $[1]$ وقانونا الجمع والضرب معرفان بـــ:

$$[x]+[y]=[x+y] \quad , \quad [x].[y]=[x.y]$$

تعريف (١-٢)

يقال إن $\Re$ **حلقة تامة** (مجال تام) *Integral Domain* إذا كانت إبدالية وفيها عنصر الوحدة ولا يوجد فيها قواسم للصفر.

نعرف **المنطقة التكاملية** بأنها حلقة تامة وتبديلية وواحدية.

إن الحلقة Z هي منطقة تكاملية بينما الحلقة $Z/6Z$ ليست بمنطقة تكاملية، أما الحلقة Z/nZ (n عدد أولي) تكون منطقة تكاملية.

نعرف **الحقل** بأنه منطقة تكاملية فيها كل عنصر مختلف عن الصفر يملك نظيراً بالنسبة لعملية الضرب.

ويجدر بنا الإشارة إلى أن Z_n حقل إذا وفقط إذا كان n عدداً أولياً.

أمثلة على الحقول

- مجموعة كل الأعداد النسبية، (حقل الأعداد النسبية)
- مجموعة كل الأعداد الحقيقية، (الحقل الحقيقي)
- مجموعة كل الأعداد المركبة، (الحقل المركب)
- مجموعة كل الأعداد من الشكل $a+b\sqrt{2}$ حيث b, a عددان نسبيان.
- مجموعة كل الدوال النسبية $f(x)/g(x)$ بمتغير واحد ومعاملات حقيقية.
- مجموعة كل المصفوفات 2×2 من الشكل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ حيث b, a عددان صحيحان.

نظرية (١-٣)

إن كل حقل F هو حلقة تامة ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً.

البرهان

إن أي حقل F هو حلقة تامة لأن $(F^*,.)$ زمرة إبدالية وفق تعريف الحقل. وبالتالي فإنه لكل $x, y \in F^*$ فإن $xy \neq 0$ أي أنه لا توجد قواسم للصفر في F ومنه نجد أن F حلقة تامة حسب التعريف (١-٢) ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً فمثلاً Z حلقة تامة وفق التعريف (١-٢) ولكن من الواضح أنها ليست حقلاً.

نظرية (١-٤)

إذا كانت $\mathfrak{R}$ حلقة تامة ومنتهية (أي $|\mathfrak{R}| < \infty$) فإن $\mathfrak{R}$ حقل.

البرهان

يتم المطلوب إذا استطعنا أن نبرهن أن $(\mathfrak{R}^*,.)$ زمرة إبدالية، وذلك وفق تعريف الحقل. ولما كانت $\mathfrak{R}$ حلقة تامة فإنه يبقى، لكي يصبح النظام $(\mathfrak{R}^*,.)$ زمرة إبدالية أن نبرهن على وجود نظير ضربي لكل عنصر في $\mathfrak{R}^*$. وبما أن $\mathfrak{R}$ حلقة منتهية فسنفرض أن عناصر $\mathfrak{R}^*$ المختلفة هي:

$$x_1 = 1, x_2, x_3, ..., x_n \qquad ......(1)$$

والآن ليكن $1 \neq y \in \mathfrak{R}^*$ عنصراً اختيارياً، ولنعد كتابة عناصر $\mathfrak{R}^*$ بعد ضرب كل منها في y فنحصل على:

$$x_1 y, x_2 y, x_3 y, ..., x_n y \qquad ......(2)$$

من الواضح أن العناصر في (2) كلها مختلفة (لأننا لو فرضنا جدلاً أن $x_i y = x_j y$ حيث $i \neq j$ لكان $x_i = x_j$ وهذا خلاف ما ورد في (1))

ولهذا سيكون واحد منها لا محالة هو العنصر المحايد الضربي 1، أي أن $x_i y = 1$ من أجل قيمة واحدة فقط لـ i، حيث $i = 2,3,\ldots,n$ ، وهذا يعني أنه يوجد نظير ضربي في $\Re^*$ للعنصر y. وبالتالي فإن $(\Re^*,.)$ زمرة إبدالية، وبذلك تم البرهان، (لاحظ أن العنصر المحايد 1 هو نظير نفسه).

تعريف (١-٥)

إذا كانت $\Re$ حلقة وكان $n \in Z^+$ هو أصغر عدد يحقق الشرط $nx = 0$ لكل $x \in \Re$ قيل إن n **مميز الحلقة** $\Re$ Characteristic of the ring. أما إذا لم يوجد مثل هذا العدد فيقال إن مميز الحلقة $\Re$ هو الصفر.

مثال

إن مميز الحلقة Z هو الصفر لأنه لا يوجد عدد طبيعي $n \in N$ بحيث $n.1 = 0$. كذلك لنفس السبب فإن مميز كل من الحقلين $Q, \Re$ هو الصفر أيضاً. بينما مميز الحلقة Z_n هو n لأن $n.1 = 0$.

ومن الملائم أيضاً أن نشير بأن مميز كل منطقة تكاملية هو إما عدد أولي أو الصفر وكذلك مميز أي حقل هو الصفر أو عدد أولي.

تعريف (١-٦)

إذا كانت $\Re$ حلقة وكانت I حلقة جزئية منها، فإننا نقول إن:

(١) I حلقة جزئية **مثالية يمنى لـ** $\Re$ (أو اختصاراً I مثالية يمنى لـ $\Re$ (Right ideal) إذا كان $Ir \subseteq I$ لكل $r \in \Re$.

(٢) I حلقة جزئية **مثالية يسرى لـ** $\Re$ (أو اختصاراً I مثالية يسرى لـ $\Re$ (Left ideal) إذا كان $rI \subseteq I$ لكل $r \in \Re$.

(٣) I حلقة جزئية **مثالية** لـ $\Re$ (أو اختصاراً I مثالية لـ $\Re$: Two-sided ideal or Ideal) إذا تحقق الشرطان (١)،(٢) معاً أي إذا كان $Ir \subseteq I$ و $rI \subseteq I$ لكل $r \in \Re$.

ملاحظات

(١) نستنتج من التعريف مباشرة أن كل حلقة لها على الأقل حلقتان جزئيتان مثاليتان هما $\{0\}$، $\Re$ نفسها وذلك بافتراض أن $2 \leq |\Re|$.

(٢) إن الحلقة الجزئية **المثالية** لحلقة ما تلعب دوراً مماثلاً لدور الزمرة الجزئية الناظمية لزمرة ما. ومن هنا برزت أهمية الحلقات الجزئية المثالية لحلقة، فلقد رأينا أنه إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية لزمرة ما G فإن المجموعات المشاركة اليمنى لـ H هي نفس المجموعات المشاركة اليسرى لها، كما أن المجموعات المشاركة هذه تكون زمرة بالنسبة لنفس العملية المعرفة على G وقد عرفنا مثل هذه الزمرة بأنها زمرة حاصل القسمة G/H. إنه بالإمكان أن نفعل الشيء ذاته بالنسبة للحلقات، فلو كانت $\Re$ حلقة وكانت I مثالية لها لكان بالإمكان إثبات أن المجموعة $T = \{r + I : r \in \Re\}$ تكون حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع "+" والضرب "." المعرفتين في $\Re$ (لاحظ أن $r + I = I + r$ لكل $r \in \Re$ وأن عناصر T هي المجموعات المشاركة بالنسبة لـ I).

تعريف (١-٧)

إذا كانت $\Re$ حلقة وكانت I مثالية لـ $\Re$ فإن الحلقة التي عناصرها المجموعات المشاركة بالنسبة لـ I (أي T وفق ما ذكر آنفاً قبل التعريف مباشرة) تسمى

حلقة قسمة $\Re$ على I (أو اختصاراً **حلقة القسمة** إذا لم يكن ثمة التباس) ويرمز لها بالرمز $\Re/I$ (*Quotient ring or factor ring*).

مثال

إذا كانت $\Re = Z_6$ وكانت $I = \{0,3\} < \Re$، فأجب عما يلي:

(١) أثبت أن I مثالية لـ Z_6.

(٢) أوجد حلقة القسمة Z_6/I.

الحل

(١) تكون I مثالية لـ Z_6 إذا كان $Ir \supseteq I \subseteq rI$ لكل $r \in Z_6$ وفق التعريف (١-٦) وهذا متحقق كما يلي:

من الواضح أن $rI = Ir$، لأن Z_6 حلقة إبدالية. وبالتالي يكفي أن نبين أن $rI \subseteq I$ لكل $r \in Z_6$.

إن $0I \subseteq I$ وكذلك $3I \subseteq I$، لأن $0,3 \in I$، كما أن: $1I = I$ لأن 1 هو العنصر المحايد الضربي.

$$2I = \{2.0,2.3\} = \{0\} \Rightarrow 2I \subseteq I$$
$$4I = \{4.0,4.3\} = \{0\} \Rightarrow 4I \subseteq I$$
$$5I = \{5.0,5.3\} = \{0,3\} \Rightarrow 5I \subseteq I$$

يمكن إيجاز إجابة الفقرة (١) كما يلي:

$$\forall r \in Z_6 : rI \subseteq I \Leftrightarrow r.0 \in I \wedge r.3 \in I$$

وواضح تحقق الطرف الواقع عن يمين علاقة التكافؤ، لأن $r.0 = 0 \in I$، كما أن:

$$r.3 = \begin{cases} 0 \in I & \text{عندما يكون } r \text{ زوجياً} \\ 3 \in I & \text{عندما يكون } r \text{ فردياً} \end{cases}$$

(٢) إن $Z_6/I = \{0+I, 1+I, 2+I\}$ تاركين إثباتها للقارئ.

٢- الشبكات

تعريف (٢-١)

لتكن A مجموعة غير خالية، لنفرض وجود علاقة ثنائية معرفة على A نرمز لها بـ"$\le$" نقول إن العلاقة"$\le$":

١- **انعكاسية** (*Reflexive*) إذا كان $a \le a$ وذلك من أجل جميع العناصر a من A.

٢- **متخالفة التناظر** أو **تخالفية** (*anti symmetric*) إذا كان $b \le a, a \le b$ فإن $a = b$ وذلك من أجل جميع العناصر a,b من A.

٣- **متعدية** (*transitive*) إذا كان من أجل $b \le c, a \le b$ فإن $a \le c$ وذلك من أجل جميع العناصر a,b,c من A.

إذا حققت العلاقة"$\le$" (١) و(٢) و(٣) أي إذا كانت انعكاسية وتخالفية ومتعدية ندعوها **علاقة ترتيب** ونرمز لها ($R.A.T$).

وعلاوة على ذلك، إذا تحققت الخاصة"$a \le b or b \le a$"من أجل أي عنصرين a,b من A فيقال عندئذ عن العلاقة"$\le$" بأنها **علاقة ترتيب كلي**.

وكنتيجة لذلك، سوف نرمز للمجموعة A المزودة بعلاقة ترتيب **بمجموعة مرتبة**، والمجموعة A المزودة بعلاقة ترتيب كلي **بمجموعة مرتبة كلياً**.

وبناءً على ذلك، يُقال عن المجموعة المرتبة $(A,\leq)$ بأنها **مجموعة موجهّة** إذا تحقق ما يلي:

«أياً كان العنصران a,b من A فثمة عنصرٌ c من A بحيث $a,b \leq c$»

وعليه، **إن كل مجموعة مرتبة كلياً تكون موجهّة.**

إن أبسط الأمثلة على المجموعات المرتبة، نأخذ N مجموعة الأعداد الطبيعية في الحقيقة، إن N مرتبة كلياً وفق علاقة الترتيب المألوفة للأعداد، زد على ذلك، إنها مجموعة موجهّة. كذلك، إن جماعة كل أجزاء مجموعة ما تكون مجموعة مرتبة وفق علاقة الاحتواء.

تعاريف أساسية (٢-٢)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ولتكن H مجموعة جزئية غير خالية منها:

(١) يُقال عن عنصر $a \in A$ إنه **عنصر أصغر** في المجموعة A إذا كان $a \leq x$ وذلك أياً كان x من A.

(٢) يُقال عن عنصر $a \in A$ إنه **عنصر أعظم** في المجموعة A إذا كان $x \leq a$ وذلك أياً كان x من A.

ومن الملائم أن نشير للقارئ، وذلك وفقاً لحقائق معروفة في الجبر العام، بأن العنصر الأصغر، إن وجد في المجموعة المرتبة، يكون **وحيداً** ونرمز له بـ 0 «**صفر المجموعة المرتبة**» كذلك العنصر الأعظم في حال وجوده في المجموعة المرتبة يكون أيضاً **وحيداً** ونرمز له بـ 1 «**واحد المجموعة المرتبة**».

(٣) يُقال عن عنصر $a \in A$ إنه **حدٌ أدنى** لـ H في المجموعة المرتبة $(A,\leq)$ إذا كان $a \leq h$ وذلك أياً كان h من H.

(٤) يُقال عن عنصر $a \in A$ إنه **حدٌّ أعلى** لـ H في المجموعة المرتبة A إذا كان $h \le a$ وذلك أياً كان h من H.

وسوف نصطلح على تسمية العنصر الأعظم في مجموعة الحدود الدنيا لـ H في المجموعة المرتبة A **بأكبر حد أدنى** ونرمز له بـ $\inf H$ أما العنصر الأصغر في مجموعة الحدود العليا لـ H في المجموعة المرتبة A فنصطلح على تسميته **أصغر حد أعلى** ونرمز له بـ $\sup H$.

إن الحقائق التالية أُرسيت في الجبر الابتدائي، لن نورد إثباتها:

تمهيدية (٢-٣)

لتكن H مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة المرتبة $(A,\le)$ وليكن $c \in A$. إن $c = \inf H$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

١- $c \le h$ وذلك أياً كان h من H.

٢- أياً كان $x \in A$ وأياً كان $h \in H$. إذا كان $x \le h$ فعندئذ $x \le c$.

تمهيدية (٢-٤)

لتكن H مجموعة جزئية من المجموعة المرتبة $(A,\le)$ وليكن $c \in A$.

إن $c = \sup H$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

١- $h \le c$ وذلك أياً كان h من H.

٢- أياً كان $x \in A$ وأياً كان $h \in H$. إذا كان $h \le x$ فعندئذ $c \le x$.

سنقصر اهتمامنا لاحقاً على حالة هامة جداً وهي تلك التي تكون فيها المجموعة الجزئية H مؤلفة من عنصرين فقط.

تعريف (٢-٥)

ندعو **شبكة** كل مجموعة A مزودة بقانوني تشكيل داخليين يرمز لهما بـ $\wedge,\vee$ تبديليين وتجميعيين ويحققان الخاصتين التاليتين:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a\wedge(a\vee b)=a \\ (2) & a\vee(a\wedge b)=a\end{array}\right\} \quad \forall a,b\in A$$

نستنتج مباشرة أنه إذا كانت A شبكة فإن $a\wedge a=a$ وكـذلك $a\vee a=a$ وذلك مهما يكن a من A. علاوة على ذلك، من السهل على القارئ أن يرى أن:

$$a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b$$

تمهيدية (٢-٦)

إذا كانت A شبكة، إن العلاقة "$a\leq b \Leftrightarrow a\wedge b=a$" هـي علاقـة ترتيب على A.

البرهان

في الحقيقة، نلاحظ أولاً أن العلاقة انعكاسية وذلك لأن $a\wedge a=a$ أياً كـان $a\in A$.

أيضاً، إذا كان $b\leq a, a\leq b$ فإن: $a=a\wedge b=b\wedge a=b$ أياً كـان $a,b\in A$.

أي أن العلاقة متخالفة التناظر.

وأخيراً، لنفرض أن $a\leq b,\quad b\leq c$ فعندئذ نجد:

$$a\wedge c=(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)=a\wedge b=a$$

وبالتالي $a\leq c$ ومنه العلاقة متعدية يتضح ممـا سـبق أن $(A,\leq)$ مجموعـة مرتبة.

نظرية (٢-٧)

إذا كانت $(A,\leq)$ شبكة، فإن $a \wedge b$ و $a \vee b$ هما على الترتيب أكبر حد أدنى وأصغر حد أعلى للعنصرين a,b.

البرهان

في الحقيقة، من الواضح أولاً وفقاً لخاصية الدمج أن $a \wedge b \leq a$ وأن $a \wedge b \leq b$.

لنفرض الآن أن $c \leq b, c \leq a$ فإن:

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$$

وبالتالي $c \leq a \wedge b$ وعليه نكتب $a \wedge b = \inf\{a,b\}$.

من جهة أخرى، بموجب الخاصة (١) والتمهيدية (٢-٦) لدينا $a \leq a \vee b$ وكذلك $b \leq a \vee b$.

زد على ذلك، إذا كان $b \leq d, a \leq d$ فعندئذ نجد:

$$(a \vee b) \vee d = a \vee (b \vee d) = a \vee d = d$$

وبالتالي $a \vee b \leq d$ وعليه نكتب $a \vee b = \sup\{a,b\}$ وبذلك يتم إثبات النظرية.

سنورد الآن نظرية هامة تاركين برهانها للقارئ.

نظرية (٢-٨)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة بحيث يقبل كل جزء أكبر حد أدنى وأصغر حد أعلى، فإن A المزودة بالعمليتين الثنائيتين:

$a \wedge b = \inf\{a,b\}$ ، $a \vee b = \sup\{a,b\}$ تشكل شبكة.

أمثلة على الشبكات

- إن جماعة مجموعة أجزاء المجموعة M تشكل شبكة. علاقة الترتيب فيها هي الاحتواء المألوف للمجموعات.
- إن مجموعة الأعداد الطبيعية هي شبكة وذلك إذا أخذنا قابلية القسمة كعلاقة ترتيب، وإن العملية الثنائية $\wedge$ تمثل القاسم المشترك الأكبر والعملية الثنائية $\vee$ تمثل المضاعف المشترك الأصغر.
- ويمكننا الحديث أيضاً عن شبكة الزمر الجزئية وشبكة الزمر الجزئية الناظمية لزمرة معينة G. كذلك، شبكة الحلقات الجزئية وشبكة المثاليات اليسارية (اليمينية) وشبكة المثاليات لحلقة معينة $\mathfrak{R}$.

من المُلائم أن نشير للقارئ بأن مفهوم المثاليات مفهوم هام جداً في الجبر الحديث المجرد «حالة خاصة من الجبور الشاملة»، وقد ظهر حديثاً عددٌ كبيرٌ من الكتب والمقالات العلمية القيمة حول هذا المفهوم، وبما أننا لا نهدف هنا إلى القيام بدراسة خاصة وواسعة لمفهوم الشبكات فسوف نكتفي فقط بما ذكر من حقائق أساسية ونتابع فقط الحديث عن الشبكات البولية لأهميتها في سياق مواضيع هذا الكتاب.

ملاحظة

لتكن $(A,\leq)$ شبكة.

- إن العنصر الصفري في الشبكة A، إن وجد، هو عنصر من A ويسمى غالباً **صفر الشبكة** ويشار له بالرمز 0 ويتصف بالخاصة $0 \leq a$ وذلك أياً كان $a \in A$ إذن وفق ما ورد سابقاً ينتج أن $0 \wedge a = 0$ وأن $0 \vee a = a$.

- أما العنصر الواحدي في الشبكة A، إن وجد، فهو عنصر من A ويسمى غالباً **عنصر الواحد** أو **عنصر الكل للشبكة** ويشار له بالرمز 1 ويتصف بالخاصة: $a \leq 1$ وذلك $\forall a \in A$، ويتضح أيضاً بموجب ما ورد سابقاً أن $1 \vee a = 1$ وكذلك $1 \wedge a = a$.
- قد تملك شبكات كلاً من عنصري الصفر والواحد أو أحداهما. في شبكة الزمر الجزئية لزمرة G يكون عنصر الصفر هو حيادي الزمر الجزئية ويكون عنصر الواحد هو الزمرة G نفسها، أما في شبكة المجموعات الجزئية لمجموعة M يكون عنصر الصفر هو المجموعة الجزئية الخالية ويكون عنصر الواحد هو المجموعة M. أما بالنسبة لشبكة الأعداد الطبيعية المرتبة كلياً وفق ترتيبها الطبيعي يكون عنصر الصفر هو الرقم(1) ولكن لا يوجد عنصر الواحد فيها.

تعريف (٢-٩)

لتكن$(A, \leq)$ شبكة.

- يُقال عن A إنها **شبكة توزيعية** إذا تحقق الشرط التالي:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c); \quad \forall a,b,c \in A$$

- يُقال عن A إنها **شبكة معيارية** (ديدكند) إذا تحقق ما يلي:

أياً كانت $a,b,c \in A$ حيث أن $b \leq a$ فإن

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$$

تمهيدية (٢-١٠)

إن كل شبكة توزيعية تكون معيارية.

نشير إلى أن شبكة كل المجموعات الجزئية لمجموعة اختيارية تكـون شـبكة توزيعية بينما شبكة جميع الزمر الجزئية ليست بالضرورة توزيعية أمـا شـبكة جميع المثاليات لحلقة اختيارية تكون معيارية.

نظرية (٢-١١)

لتكن $(A,\leq)$ شبكة توزيعية، فإن القضايا التالية محققة:

1. $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

2. $\left.\begin{array}{l} a\wedge c=b\wedge c \\ a\vee c=b\vee c \end{array}\right\}\Rightarrow a=b$

البرهان

في الواقع، لدينا:

$$\begin{aligned} a\vee(b\wedge c) &= (a\vee(a\wedge c))\vee(b\wedge c) \\ &= a\vee((a\wedge c)\vee(b\wedge c)) \\ &= a\vee((a\vee b)\wedge c) \\ &= ((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c) \\ &= (a\vee b)\wedge(a\vee c) \end{aligned}$$

لبرهان الشق الثاني من هذه النظرية، يُلاحظ استناداً إلى الفرض ووفقـاً للشـق الأول أن:

$$\begin{aligned} a &= a\vee(a\wedge c)=a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c) \\ &= b\vee(a\wedge c)=b\vee(b\wedge c)=b=(a\vee b)\wedge(b\vee c) \end{aligned}$$

من المناسب أن نشير إلى وجود العديد من التعاريف المختلفة للشبكات المعيارية والتي تكافئ جميعها التعريف أعلاه. سنعرض إحدى التعريفات تاركين للقـارئ متعة البرهان.

نظرية (٢-١٢)

لتكن A شبكة.

تكون A شبكة معيارية إذا وفقط إذا كان

$$\left.\begin{array}{l} a \le b \\ a \wedge c = b \wedge c \\ a \vee c = b \vee c \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

وذلك من أجل a,b,c من A.

والآن إلى **التعريف الأساسي:**

- يُقال عن شبكة توزيعية A ذات صفر وواحد إنها **بوليانية** وتقليداً يُقال **«جبر بول»** إذا كان:

$$\forall a \in A, \exists a' \in A: \quad a \wedge a' = 0 \quad and \quad a \vee a' = 1$$

- بتعبير مكافئ: الشبكة البولية هي شبكة توزيعية وتميمة.

ويُبرهن على أن العنصر المتمم في الشبكة البولية يكون وحيداً.

تعريف (٢-١٣)

يُقال عن حلقة تجميعية واحدية $\Re$ إنها **حلقة بولية** إذا كانت جميع عناصرها جامدة، أي $a^2 = a$ وذلك مهما يكن $a \in \Re$.

يترتب على مفهوم الحلقات البولية:

(١) أن كل حلقة بولية $\Re$ تكون حلقة تبديلية ومميزها 2

في الواقع، إن

$$a+b = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$$

وبالتالي نجد أن $ab + ba = 0$ وذلك $\forall a,b \in \Re$ وعليه $2a = 0$.

(٢) أن كل شبكة بولية A هي حلقة بولية وذلك بوضع:

$$a+b=(a'\wedge b)\vee(a\wedge b')$$
$$ab=a\wedge b$$

وبالعكس، إن كل حلقة بولية تكون شبكة بولية وذلك إذا عرفنا العمليتين الثنائيتين كما يلي:

$$a\vee b=a+b-ab$$
$$a\wedge b=ab$$

وعليه، يوجد تكافؤ بين فئة الشبكات البولية وفئة الحلقات البولية، وإن إثبات ذلك هو خارج نطاق دراستنا الحالية.

٣- نظرية المقاسات والجبور

(١). المقاسات

لتكن $\Re$ حلقة واحدية. نعرف $\Re$ - مقاساً أو مقاساً على $\Re$ بأنه زمرة آبليّة جمعية M مزودة بقانون تشكيل خارجي من اليسار مجموعة مؤثراته $\Re$

$$\Re\times M\to M$$
$$(\lambda,x)\mapsto\lambda x$$

وبحيث يكون:

1. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
2. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$
3. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$
4. $1_{\Re}x=x$

وذلك $\forall x,y\in M$ $\quad\forall\lambda,\mu\in\Re$.

في الحالة التي يكون فيها F حقلاً فإن F – مقاساً يدعى F – فضاءً شعاعيّاً أو فضاءً شعاعيّاً على F.

وتجدر بنا الإشارة إلى أن ما أسميناه هنا $\Re$ –مقاساً يدعوه آخرون $\Re$ –**مقاساً واحدياً** ويطلق غالباً على $\Re$ – مقاس الذي عرفناه للتّو، اسم $\Re$ – **مقاس يساري**، ولعل التبرير الكافي لهذه التسمية هو أنه عندما عرفنا قانون التشكيل الخارجي كتبنا السلميّات في جهة اليسار.

أمثلة على المقاسات

- إن كل حلقة واحدية $\Re$ هي $\Re$ – مقاس، حيث يكون قانون التشكيل الخارجي عملية الضرب الداخلي في $\Re$.
- إن كل زمرة آبلية جمعية M هي Z – مقاس، إن قانون التشكيل الخارجي:

$$Z \times M \to M$$
$$(m,x) \mapsto mx$$

يعرّف بالصيغة التالية:

$$mx = \begin{cases} x+x+\ldots+x & m>0 \\ 0 & m=0 \\ -|m|x & m<0 \end{cases}$$

- لتكن $\Re$ حلقة واحدية وليكن n عدداً صحيحاً موجباً. فإن $\Re^n$ المؤلفة من جميع العناصر ذات n مركبة من $\Re$ تكون زمرة آبليّة بالنسبة لعملية جمع المركبات المعرفة بالشكل:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$$

- أيضاً، إذا زودنا $\Re^n$ بقانون تشكيل خارجي $\Re \times \Re^n \to \Re^n$ المعرف بالصيغة:

$$r(x_1, x_2, \dots, x_n) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$$

يتضح بسهولة أن $\Re^n$ هي $\Re$ − مقاس.

تعريف (٣-١)

إن المقاس الجزئي من $\Re$ − مقاس M هو **زمرة جزئية** N **من** M مغلقة بالنسبة لقانون التشكيل الخارجي لـ M.

يتضح من ذلك أن المجموعة الجزئية غير الخالية N من $\Re$ − مقاس M تكون مقاساً جزئياً من M إذا وفقط إذا تحقق:

$$"x - y \in N \quad and \quad \lambda x \in N"; \quad \forall x, y \in N, \forall \lambda \in \Re$$

يمكن اختزال الشرطين إلى شرط واحد، فنبرهن أنه يكون N مقاساً جزئياً من $\Re$ − مقاس M إذا وفقط إذا كان

$$\lambda x + \mu y \in N; \qquad \forall x, y \in N, \qquad \forall \lambda, \mu \in \Re$$

مثال

لتكن $\Re$ حلقة واحدية، وبالتالي فهي $\Re$ − مقاس. إن المقاسات الجزئية من $\Re$ هي بالضبط المثاليات اليسارية في $\Re$. زد على ذلك، إذا كانت $\Re$ هي $\Re$ − مقاساً يمينياً فإنّ المقاسات الجزئية في $\Re$ هي بالضبط المثاليات اليمينية فيها.

نظرية (٣-٢)

إن تقاطع أي أسرة من المقاسات الجزئية من $\Re$ − مقاس M هو مقاس جزئي من M.

البرهان

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة من المقاسات الجزئية من $\Re$ − مقاس M.

يُلاحظ أن $\bigcap_{i\in I} M_i \neq \Phi$ وذلك لأن كل مقاس جزئي عبارة عن زمرة جزئية وبالتالي فهو يحوي 0.

أيضاً، بما أن كل M_i هو مقاس جزئي من $\Re$ − مقاس M فإن:

$$\begin{aligned} x, y \in \bigcap_{i\in I} M_i &\Rightarrow x, y \in M_i, \qquad (\forall i \in I) \\ &\Rightarrow x - y \in M_i, \qquad (\forall i \in I) \\ &\Rightarrow x - y \in \bigcap_{i\in I} M_i \end{aligned}$$

من جهة ثانية، لتكن $x \in \bigcap_{i\in I} M_i$ ولتكن $\lambda \in \Re$ عندئذ $\lambda x \in M_i$ وذلك أياً كان $i \in I$ وبالتالي $\lambda x \in \bigcap_{i\in I} M_i$ وعليه فإن $\bigcap_{i\in I} M_i$ هو مقاس جزئي من $\Re$ − مقاس M.

اصطلاح

لتكن S مجموعة جزئية من $\Re$ − مقاس M. لنأخذ جماعة كل المقاسات الجزئية من M التي تحوي S، عندئذ إن تقاطع هذه الجماعة هو مقاس جزئي من M ويحوي S وبالتالي إن هذا التقاطع هو أصغر مقاس جزئي من M يحوي S ويُدعى بالمقاس الجزئي من M المولَّد بـ S والذي سنرمز له بـ $\langle S\rangle$.

لنرمز بـ $Lc(S)$ لمجموعة كل التراكيب الخطية لعناصر المجموعة الجزئية من $\Re$ − مقاس M وبالتالي نورد النظرية التالية:

نظرية (٣-٣)

إذا كانت S مجموعة جزئية من $\Re-$ مقاس M فإن:

$$\langle S\rangle=\begin{cases}\{0\} & S=\Phi\\ Lc(S) & S\neq\Phi\end{cases}$$

البرهان

من الواضح أنّه إذا كانت $S=\Phi$ فإن أصغر مقاس جزئي من M يحوي S هو المقاس الجزئي الصفري $\{0\}$.

لنفرض أن $S\neq\Phi$ عندئذ $Lc(S)$ مقاس جزئي من M وبالإضافة لذلك يكون $S\subseteq Lc(S)$ وذلك لأن:

$$x\in S\Rightarrow x=1_{\Re}.x\in Lc(S)$$

وبما أن $\langle S\rangle$ أصغر مقاس جزئي يحوي S فإننا نستنتج أن $\langle S\rangle\subseteq Lc(S)$

من جهة أخرى، إنّ كل تركيب خطي لعناصر S ينتمي إلى كل مقاس جزئي يحوي S وعليه فإن $Lc(S)\subseteq\langle S\rangle$. يتضح مما سبق أن $\langle S\rangle=Lc(S)$ وبالتالي يتم المطلوب.

نقوم الآن ببناء شبكة المقاسات الجزئية من $\Re-$ مقاس M.

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ جماعة من المقاسات الجزئية من $\Re-$ مقاس M إن هذه المجموعة مرتبة وفق علاقة الاحتواء.

لنأخذ أولاً المقاس الجزئي من M المولّد بـ $\bigcup_{i\in I}M_i$ في الواقع، إنه أصغر مقاس جزئي من M يحوي كل من M_i ويسمى عادةً المقاس الجزئي من M المولّد بالأسرة $(M_i)_{i\in I}$ من المقاسات الجزئية.

من جهة ثانية، وجدنا أن $\bigcap_{i\in I} M_i$ مقاس جزئي من M وهو أكبر مقاس جزئي من M محتوى في جميع المقاسات الجزئية M_i.

وبصورة خاصة، يُلاحظ أن كل مجموعة جزئية مكونة من عنصرين $\{M_1, M_2\}$ تملك حداً أعلى أصغرياً وهو $M_1 + M_2$ وتملك حداً أدنى أعظمياً وهو $M_1 \bigcap M_2$.

ينتج مما سبق، أن جماعة كل المقاسات الجزئية من $\Re -$ مقاس M المرتبة وفق علاقة الاحتواء تشكل شبكة وتتصف هذه الشبكة بأنها معيارية وهذا ما تؤكده النظرية القادمة.

نظرية (٣-٤)

ليكن M مقاس على $\Re$. إذا كانت A, B, C مقاسات جزئية من M بحيث يكون $C \subseteq A$ فإن:

$$A \bigcap (B+C) = (A \bigcap B) + C$$

البرهان

بما أن $C \subseteq A$ فإن $A + C = A$. أيضاً من السهل رؤية أن:

$$(A \bigcap B) + C \subseteq A + C \quad \text{وأن} \quad (A \bigcap B) + C \subseteq B + C$$

وبالتالي نجد أن:

$$(A \bigcap B) + C \subseteq (A+C) \bigcap (B+C) = A \bigcap (B+C)$$

للحصول على الاحتواء المعاكس، ليكن $a \in A \bigcap (B+C)$ فعندئذ يوجد $c \in C, b \in B$ بحيث $a = b + c$ ولما كان $C \subseteq A$ يتضح أن $c \in A$ وبالتالي $b = a - c \in A$ وعليه:

$$a = b + c \in (A \bigcap B) + C$$

ومنه:

$$A \bigcap (B+C) \subseteq (A \bigcap B) + C$$

أي أن علاقة المساواة محققة وبذلك يتم إثبات النظرية.

(٢). التشاكلات والمتتاليات التامة

إذا كان N, M مقاسين على الحلقة الواحدية $\Re$. يقال عن التطبيق $f : M \to N$ إنه $\Re$ – تشاكل (أو تشاكل على $\Re$) إذا حقق ما يلي:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad ; \quad \forall \lambda \in \Re, \quad \forall x, y \in M$

إذا كان $\Re$ حقلاً فإننا ندعو الـ $\Re$ – تشاكلاً المذكور أعلاه تحويلاً خطياً.

إذا كان التشاكل f متبايناً سمي **مونومورفيزم** وإذا كان غامراً سمي **ايبيمورفيزم**، أما إذا كان f تقابلاً فسوف ندعوه **ايزومورفيزم**.

لنورد الآن بعض النتائج الهامة:

(١) إذا كان M مقاساً على الحلقة الواحدية $\Re$، بفرض n عدداً صحيحاً موجباً إن M^n مقاس على $\Re$ زد على ذلك، أن التطبيق:

$\Pr_i : M^n \to M$ المعرف بالشكل $\Pr_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$

هو $\Re$ – ايبيمورفيزم ويسمى بالإسقاط i لـ M^n على M.

(٢) ليكن N, M مقاسين على $\Re$ وبفرض $f : M \to N$ تشاكلاً على $\Re$ فعندئذ:

أ. إذا كان M' مقاساً جزئيّاً من الـ $\Re$ – مقاس M فإن المجموعة: $\vec{f}(M') = \{f(x) : x \in M'\}$ تكون مقاساً جزئياً من الـ $\Re$ – مقاس N.

ب. إذا كان N' مقاساً جزئياً من الـ $\Re$ – مقاس N فإن المجموعة: $\overleftarrow{f}(N') = \{x \in M : f(x) \in N'\}$

تكون مقاساً جزئياً من الـ $\Re$ – مقاس M.

وعلاوة على ذلك، نعرض النتيجة الهامة التالية:

نتيجة هامة

ليكن N, M مقاسين على $\Re$. عندئذ هناك تقابل يحافظ على الاحتواء بين $L(M)$ شبكة المقاسات الجزئية من الـ $\Re$ – مقاس M و $L(N)$ شبكة المقاسات الجزئية من الـ $\Re$ – مقاس N.

زد على ذلك، أن المقاس الجزئي $\vec{f}(M)$ من N يدعى صورة التشاكل f ويكتب $\operatorname{Im} f$ والمقاس الجزئي $\overleftarrow{f}\{0_N\}$ من M يدعى نواة f ويكتب $Kerf$.

ويكون التشاكل $f : M \to N$ متبايناً إذا وفقط إذا كان $Kerf = \{0_M\}$ تاركين برهان ذلك للقارئ.

بالإضافة لذلك نورد النظرية التالية:

نظرية (٣-٥)

ليكن N, M مقاسين على $\Re$ وبفرض $f : M \to N$ تشاكلاً على $\Re$.

أ. إذا كان A مقاساً جزئياً من M فإن:

$$\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A + Kerf$$

ب. إذا كان B مقاساً جزئياً من N فإن:

$$\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B \cap \operatorname{Im} f$$

نتيجة (٣-٦)

إذا كـــان $f : M \to N$ و $g : N \to P$ تشـــاكلين علـــى $\Re$ فـــإن التركيب $g \circ f : M \to P$ يكون أيضاً تشاكلاً على $\Re$.

في الواقع، لدينا:

$$\bullet (g \circ f)(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)) + g(f(y))$$
$$= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

كذلك لدينا:

$$\bullet (g \circ f)(\lambda x) = g(f(\lambda x)) = g(\lambda f(x))(x)$$
$$= \lambda g(f(x)) = \lambda (g \circ f)$$

وذلك أياً كان x, y من M وأياً كان λ من $\Re$.

نتيجة (٣-٧)

إذا كـــان $f : M \to N$ و $g : N \to P$ ايبيمـــورفيزمين علـــى $\Re$ فـــإن التركيب $g \circ f : M \to P$ يكون كذلك.

في الحقيقة، ليكن $p \in P$ عندئذ هنالك $n \in N$ بحيث $g(n) = p$ وبالتـــالي يمكننا إيجاد العنصر $m \in M$ بحيث يكون $f(m) = n$.

يتضح من ذلك:

$$p = g(n) = g(f(m)) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$$

ومنه $P \subseteq \mathrm{Im}(g \circ f)$ ولما كان الاحتواء المعاكس محققاً دومـــاً، نســـتنتج أن $g \circ f$ غامرٌ.

نتيجة (٣-٨)

إذا كان $f : M \to N$ و $g : N \to P$ مونومـــورفيزمين علـــى $\Re$ فـــإن التركيب $g \circ f : M \to P$ يكون كذلك.

في الحقيقة، نلاحظ:

$$m \in Ker(g \circ f) \Rightarrow (g \circ f)(m) = 0_P$$
$$\Rightarrow f(m) = 0_N \Rightarrow m = 0_M$$

ومن السهل على القارئ رؤية ما يلي:

نتيجة (٣-٩)

إذا كان $f : M \to N$ و $g : N \to P$ تشاكلين على $\mathfrak{R}$ فإنه:

١- إذا كان التركيب $g \circ f$ ابيمورفيزم فإن g كذلك.

٢- إذا كان التركيب $g \circ f$ مونومورفيزم فإن f كذلك.

يُعتبر الإتمام البياني من المشاكل الهامة التي تواجهُنا عند دراسة التشاكلات.

إذا كان لدينا مخطط بيانيّ لمقاسات وتشاكلات على $\mathfrak{R}$ من النمط:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

والسؤال المطروح: ما هي الشروط اللازم تحقُّقها للحصول على $\mathfrak{R}$ - تشاكل $h : B \to C$ بحيث $h \circ f = g$

ويمكن أيضاً أن نصوغ مسألة مشابهة «الثنوية»، بتعبير آخر، إذا كان لدينا مخطط بيانيّ لمقاسات وتشاكلات على $\Re$ من النمط:

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}
$$

فما هي الشروط التي يلزم تحققها للحصول على $\Re$ – تشاكل $h : C \to B$ وبحيث $f \circ h = g$

سنبدأ أولاً بالإجابة على هذه التساؤلات من اجل A, B, C مجرّد مجموعات و g, f تطبيقات عادية.

تمهيدية (٣-١٠)

أ. إذا كانت A, B, C مجموعات غير خالية وكانت $f : A \to B$ و $g : A \to C$ تطبيقات، فإن الشرطين التاليين متكافئان:

١) يوجد تطبيق $h : B \to C$ بحيث $h \circ f = g$

٢) مهما تكن x, y من A فإن "$f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$"

ب. إذا كانت A, B, C مجموعات غير خالية وكانت $f : B \to A$ و $g : C \to A$ تطبيقات، فإن الشرطين التاليين متكافئان:

١) يوجد تطبيق $h : C \to B$ بحيث $f \circ h = g$

٢) $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$

تمهيدية (٣-١١)

أ. إذا كانت A,B مجموعتين غير خاليتين وليكن $f: A \to B$ تطبيقـاً فإن القضايا التالية متكافئة:

١) f متباين

٢) يوجد تطبيق $g: B \to A$ يحقّق $g \circ f = id_A$

٣) f قابل للاختصار من اليسار. أي أنه لأجل أي مجموعة غير خالية C وكل تطبيق $h,k: C \to A$ فإن

$$"f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k"$$

ب. إذا كانت A,B مجموعتين غير خاليتين وليكن $f: A \to B$ تطبيقاً فإن القضايا التالية متكافئة:

١) f غامر

٢) يوجد تطبيق $g: B \to A$ يحقّق $f \circ g = id_B$

٣) f قابل للاختصار من اليمين. أي أنه لأجل أي مجموعة غير خالية C وكل تطبيق $h,k: B \to C$ فإن

$$"h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k"$$

نظرية (٣-١٢)

ليكُن المخطّط المؤلف من مقاسات وتشاكلات على $\Re$ بحيث f غامر، عندئـذ الشرطان التاليان متكافئان:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

١) يوجد $\Re$ − تشاكل وحيد $h: B \to C$ يُحقّق $h \circ f = g$

٢) $Kerf \subseteq Kerg$

زد على ذلك، إن الـ $\Re$ − تشاكل h يكون مونومورفيزم إذا وفقط إذا كان $Kerf = Kerg$.

البرهان

(١)⇐(٢) ليكن $x \in A$ بحيث $f(x) = 0_B$ فعندئذ نجد وفقاً للفرض أن $g(x) = h(f(x)) = h(0_B) = 0_C$ وبالتالي $Kerf \subseteq Kerg$.

(٢)⇐(١) ليكن $x, y \in A$ بحيث $f(x) = f(y)$ فإن $f(x-y) = 0_B$ وبالتالي $x - y \in Kerf \subseteq Kerg$ ومنه $g(x) - g(y) = 0_C$ أي $g(x) = g(y)$، ووفقاً للجزء الأول من التمهيدية (٣-١٠) هناك تطبيق $h: B \to C$ بحيث $h \circ f = g$.

من جهة أخرى، بملاحظة أن f غامر فإنه استناداً إلى الجزء الثاني من التمهيدية (٣-١١) يكون f قابلاً للاختصار من اليمين وبالتالي h وحيد.

وأخيراً، لإتمام برهان الشق الأول من هذه النظرية يجب أن نبين أن h هو $\Re$ − تشاكل.

فـــي الواقـــع، إذا كـــان $x', y' \in B$ ولـــيكن $\lambda \in \Re$. بمـــا أن f غـــامر فهنالك $x, y \in A$ بحيث $f(x) = x'$ و $f(y) = y'$ وبالتالي نجد:

$$\bullet\ h(x'+y') = h(f(x)+f(y)) = h(f(x+y)) = g(x+y)$$
$$= h(x')+h(y') = g(x)+g(y) = h(f(x))+h(f(y))$$

$$\bullet\ h(\lambda x') = h(f(\lambda x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = \lambda h(f(x)) = \lambda h(x')$$

وبالتالي h هو فعلاً $\Re$ − تشاكل.

إذا كان h متبايناً فإنّه من أجل كل $x \in A$ يكون:

$$h(f(x)) = g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

وبالتالي $Kerg \subseteq Kerf$

ومنه $Kerf = Kerg$.

وبالعكس، لنفرض أن $Kerf = Kerg$ وليكن $x \in Kerh$ بما أنّ f غامر فإنّه يوجد $y \in A$ بحيث $x = f(y)$ ومنه:

$$0 = h(x) = h(f(y)) = g(y)$$

وبالتالي فـــإنّ $y \in Kerg = Kerf$ أي $x = f(y) = 0$ إذن h متبـــاين وبالتالي يتم إثبات النظرية.

نظرية (٣-١٣)

ليكُن المخطّط المؤلف من مقاسات وتشاكُلات على $\Re$ بحيث f متباين، عندئـــذٍ الشرطان التاليان متكافئان:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

١) يوجد $\Re$ – تشاكل وحيد $h: C \to B$ يُحقق $f \circ h = g$

٢) $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$

زد على ذلك، إن الـــ $\Re$ – تشــاكُل h يكــون ايبيمــورفيزم إذا وفقــط إذا كان $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.

البرهان

$(١) \Leftarrow (٢)$ ليكن $x \in C$ فيكــون $g(x) = f(h(x)) \in \operatorname{Im} f$ وبالتــالي $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$.

$(٢) \Leftarrow (١)$ لنفرض أن $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$ ،عندئذ بحسب الجزء الثــاني مــن التمهيدية (٣-١٠) هناك تطبيق $h: C \to B$ بحيث $f \circ h = g$. وبملاحظة أن f متباين بالفرض فإنه وفقاً للجزء الأول من التمهيدية (٣-١١) يكــون f قابلاً للاختصار من اليسار وبالتالي يكون h وحيداً.

لإتمام الشق الأول من هذه النظرية يجب علينا أن نثبت أن h تشاكل على $\Re$.

في الحقيقة، ليكن $c, d \in C$ وليكن $\lambda \in \Re$، بما أن g, f تشاكلات فإنّ:

- $$\begin{aligned} f(h(c+d)) &= g(c+d) = g(c) + g(d) \\ &= f(h(c)) + f(h(d)) = f(h(c) + h(d)) \end{aligned}$$
- $$f(h(\lambda c)) = g(\lambda c) = \lambda g(c) = \lambda f(h(c)) = f(\lambda h(c))$$

وبالاستفادة من كون f متبايناً يمكن أن نكتب:

$$h(c+d)=h(c)+h(d) \quad ; \quad h(\lambda c)=\lambda h(c)$$

يتضح بالتالي أن h تشاكل على $\Re$.

إذا كان h غامراً، فإنّه لأجل كُل $b \in B$ يوجد $c \in C$ بحيث $b=h(c)$

ومنه $f(b)=f(h(c))=g(c)$

أي أن $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} g$ إذن $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$.

وبالعكس، لنفرض أن $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$ فإنه من أجل كل $b \in B$ هنالك $c \in C$ بحيث $f(b)=g(c)=f(h(c))$ وبما أن f متباين بالفرض فإنّ $b=h(c)$ وبالتالي فإنّ h غامر. وبذلك يتم برهان النظرية.

ملاحظة

يُقال عن مخطّط مؤلّف من مجموعات وتطبيقات إنه **مخطط تبديلي** إذا كانت كل التّطبيقات المُحدثة من أي نقطة انطلاق إلى أي نقطة وصول متساوية.

- إن المخطط المثلثي يكون تبديلياً إذا وفقط إذا تحقّق $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

أيضاً يكون المخطط التالي تبديلياً

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}
$$

إذا وفقط إذا كان

$$f' \circ \alpha = \beta \circ f \quad \wedge \quad g' \circ \beta = \gamma \circ g$$

أي أنه إذا وفقط إذا كان كل مُربع تبديلياً.

تعريف (٣-١٤)

ليكن لدينا متتالية من المقاسات والتشاكُلات على $\Re$

$$\ldots M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \ldots$$

يُقال عن هذه المتتالية إنها **متتالية تامة** إذا كان $\operatorname{Im} f_{i-1} = Kerf_i$ وذلك مهما كان الدليل i.

ليكن $f : M \to N$ تشاكلاً على $\Re$ إن $N \to 0$ و $0 \to M$ يرمزان للتشاكل الصفري والاحتواء القانوني على الترتيب.

من السهل على القارئ رؤية ما يلي:

- تكون المتتالية $0 \to M \xrightarrow{f} N$ تامة إذا وفقط إذا كان $Kerf = \{0\}$
- تكون المتتالية $M \xrightarrow{f} N \to 0$ تامة إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Im} f = N$

• تكون المتتاليــة $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ تامــة إذا وفقــط إذا كان f تقابلاً.

ملاحظة

نُلاحظ أنه في المتتالية التامة، أن تركيب أي تشاكلين متتابعين يُعطي التشــاكل الصفري. إن عكــس ذلــك لــيس صــحيحاً فــي الحالــة العامــة لأنــه إذا كان $f \circ g = 0$ فعندئذ يكون $\operatorname{Im} g \subseteq Kerf$.

من الآن فصاعداً سوف ندعو المتتاليات التي يتحقّق فيها $f_i \circ f_{i-1} = 0$ مــن اجل كل دليل i بالمتتاليات نصف التامة.

نظرية (٣-١٥)

ليكن المخطّط المؤلف من مقاسات وتشاكُلات على $\Re$ بحيث أن السطر متتاليــة تامة وأن $g \circ \theta = 0$

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[d, "\theta"] & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

عندئذ هنالك $\Re$ – تشاكل وحيد $h : A \to X$ يجعل المخطّط تبديلياً.

البرهان

في الحقيقة، وفقاً للفرض لدينا: $\operatorname{Im}\theta \subseteq Kerg = \operatorname{Im} f$

بالإضافة إلى ذلك f متباينٌ، وبالتالي فإن النظرية تنتج مباشرة من النظرية (٣-١٣)

نظرية (٣-١٦)

ليكُن $f : M \to N$ تشاكلاً على $\mathfrak{R}$ وليكن $\pi : Kerf \to M$ الاحتواء القانوني فإن الدعاوى التالية محققة:

(١) $f \circ \pi = 0$

(٢) إذا كان P مقاساً على $\mathfrak{R}$ وليكن $g : P \to M$ تشاكلاً على $\mathfrak{R}$ بحيث $f \circ g = 0$ فعندئذ يوجد $\mathfrak{R}-$ تشاكل وحيد $\theta : P \to Kerf$ يجعل المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, "g"] & \\
Kerf \arrow[r, "\pi"'] & M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

البرهان

إن الدعوى الأولى واضحة أما الأخرى فتنتج مباشرةً من النظرية السابقة.

نظرية (٣-١٧)

ليكن المخطط التبديلي من المقاسات والتشاكُلات على $\mathfrak{R}$، وحيث الأسطر متتاليات تامة:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

فإن الدعاوى التالية محققة:

١) إذا كان γ,α غامرين وكان δ متبايناً فإن β غامر.

٢) إذا كان α غامراً وكان δ,β متباينين فإن γ متباين.

البرهان

١) ليكن $b' \in B'$. بما أنّ γ غامر فإنّه يوجد $c \in C$ بحيث $g'(b') = \gamma(c)$ وبما أن المُربّع اليميني تبديلي فإن:

$$\delta(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(g'(b')) = 0$$

وبالتالي فإنّ $h(c) \in Ker\delta = 0$ ومنه $h(c) = 0$

أي أن $c \in Kerh = \operatorname{Im} g$ بحيثُ $c = g(b)$ لأجل $b \in B$.

يتضح مما سبق وحسب تبديليّة المُربع الأوسط:

$$g'(b') = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b))$$

وبالتالي فإنّ $b' - \beta(b) \in Kerg' = \operatorname{Im} f'$

أي $b' - \beta(b) = f'(a')$ لأجل $a' \in A'$.

من جهة أخرى، بما أن α غامر فهنالك $a \in A$ بحيث $a' = \alpha(a)$ ومنه يمكن أن نكتب حسب تبديليّة المربع اليساري

$$b' - \beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a))$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$b' = \beta(b) + \beta(f(a)) = \beta(b + f(a)) \in \operatorname{Im}\beta$$

وعليه فإن β غامر.

٢) ليكن $c \in Ker\gamma$ عندئذ:

$$\delta(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(0) = 0$$

وبالتالي $h(c) \in Ker\delta = 0$ ومنه $c \in Kerh = \operatorname{Im} g$

أي أن $c = g(b)$ لأجل $b \in B$.

إذاً يمكن أن نكتب

$$0 = \gamma(C) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b))$$

أي $\beta(b) \in Kerg' = \operatorname{Im} f'$ ومنه هنالك $a' \in A'$ بحيث $\beta(b) = f'(a')$.

أيضاً بما أن $a' = \alpha(a)$ لأجل $a \in A$ يتضح بالتالي:

$$\beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a))$$

وكون β متبايناً بالفرض فإن $b = f(a)$

ومنه: $c = g(b) = g(f(a)) = 0$ وبالتالي يتم إثبات النظرية بكاملها.

نظرية (٣-١٨)

ليكن المخطّط التبديلي من المقاسات والتشاكُلات على $\Re$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & E \arrow[d, "\alpha_5"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

حيث السطران متتاليتان تامتان فإن:

إذا كان كُل من $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ تقابلاً فإنّ α_3 كذلك.

البرهان

في الحقيقة، بتطبيق الشق الأول من النظرية الأخيرة على المربعات الثلاثة من جهة اليمين من المخطّط نجد أن α_3 غامر.

أيضاً، بتطبيق الشق الثاني من النظرية ذاتها على المربعات الثلاثة من جهة اليسار من المخطّط نجد أن α_3 متباين، إذاً α_3 يكون تقابلاً.

نتيجة (٣-١٩)

ليكن المخطّط التبادلي من المقاسات والتشاكلات على $\Re$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

بحيث سطراه متتاليتان تامتان عندئذ: إذا كان α, γ تقابُلين فإن β كذلك.

البرهان

حالة خاصة من النظرية السابقة.

(٣). مقاسات الخارج ونظريات التماثل

ليكن M مقاساً على الحلقة الواحدية $\Re$ وليكن N مقاساً جزئي من M .

نعرف على M العلاقة الثنائية: $x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in N$

"ونكتب أيضاً $x \equiv y (\bmod N)$"

تتصف العلاقة السابقة بأنها انعكاسية وذلك لأن $x \equiv x (\bmod N)$ أياً كان $x \in M$ كما أنها متناظرة وذلك بملاحظة أن:

$$x \equiv y(\bmod N) \Rightarrow y \equiv x(\bmod N)$$

أيضاً، من السهل على القارئ أن يرى أن:

$$x \equiv y(\bmod N) \wedge y \equiv z(\bmod N) \Rightarrow x \equiv z(\bmod N)$$

وذلك أياً كانت x, y, z عناصر من M، يتضح من ذلك أن العلاقة متعدية فهي علاقة تكافؤ.

وبالإضافة إلى ذلك، لدينا التمهيدية التالية:

تمهيدية (٣-٢٠)

إذا كان N مقاساً جزئياً من الـ $\Re$ - مقاس M. فإن علاقة التكافؤ:

$$x \equiv y(\bmod N) \Leftrightarrow x - y \in N$$

متوائمة مع بنية المقاس M.

البرهان

لدينا:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y(\bmod N) \\ x' \equiv y'(\bmod N) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x - y \in N \quad and \quad x' - y' \in N$$

$$\Rightarrow (x + x') - (y + y') \in N$$

$$\Rightarrow (x + x') \equiv y + y'(\bmod N)$$

أيضاً:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y(\bmod N) \\ \lambda \in \Re \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - y \in N \\ \lambda \in \Re \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda(x - y) \in N$$

$$\Rightarrow \lambda x \equiv \lambda y(\bmod N)$$

ملاحظة

يوجد تقابل بين مجموعة علاقات التكافؤ المنسجمة على $\Re$ – مقاس M ومجموعة المقاسات الجزئية من M.

وبالتالي فسوف نكتب M/N لأجل مقاس الخارج $M/_{\equiv}$ وذلك عندما تكون N مقاساً جزئياً بالنسبة لعلاقة التكافؤ المتوائمة $\equiv$.

نظرية (٣-٢١)

إذا كان N مقاساً جزئياً من الـ $\Re$ – مقاس M فإن M/N مقاس على $\Re$ بالنسبة لقانوني التشكيل الداخلي والخارجي المعرفين كما يلي:

$$\begin{cases} x/N + y/N = x+y/N \\ \lambda\left(x/N\right) = \lambda x/N \end{cases}$$

وذلك مهما تكن $x/N, y/N$ من M/N ومهما يكن $\lambda \in \Re$.

زد على ذلك، إن التطبيق $\pi : M \to M/N$ يكون ابيمورفيزم.

سنترك للقارئ متعة إيجاد برهان هذه النظرية.

نظرية (٣-٢٢)

إذا كان N مقاساً جزئياً من $\Re$ – مقاس M. عندئذ يوجد تقابل يُحافظ على الاحتواء بين مجموعة المقاسات الجزئية لـ M/N ومجموعة المقاسات الجزئية A لـ M بحيث $N \subseteq A \subseteq M$

البرهان

ليكن A مقاساً جزئياً من M وحيث أن $N \subseteq A \subseteq M$ وعليه فإن المجموعة:

$$A/N = \{a/N : a \in A\}$$

تكون مقاساً جزئياً من M/N ، وبناء على ذلك، لنأخذ التطبيق f من مجموعة كل المقاسات الجزئية A من الـ $\mathfrak{R}$ – مقاس M إلى مجموعة المقاسات الجزئية لـ M/N المعرف بالصيغة $f(A) = A/N$.

إن التطبيق f متباين، لنفرض أن $A/N = B/N$ وليكن $a \in A$ فعندئذ هنالك $b \in B$ بحيث $a/N = b/N$ وعليه يكون $a - b \in N$ أي $a = b + n$ لأجل $n \in N$. وبما أن $N \subseteq B$ نجد أن $a \in B$ وبالتالي $A \subseteq B$.

إن برهان الاحتواء الآخر شبيه تماماً بالأول وسوف نتركه للقارئ. يتضح مما سبق أن $A = B$ والتطبيق f متباين.

لإثبات أن f غامر، لنفرض أن P مقاسٌ جزئيٌ من M/N وحيث أن $P = \{x/N : x \in X\}$ وسوف نبين أن X مقاسٌ جزئيٌ من M ويحوي N.

في الواقع، إذا كان $x, y \in X$ ومهما يكن $\lambda \in \mathfrak{R}$ لدينا أولاً

$$x - y/N = x/N - y/N \in P$$

وعليه يكون $x - y \in X$.

أيضاً، لدينا $\lambda x/N = \lambda(x/N) \in P$ وبالتالي $\lambda x \in X$ وبناءً على ذلك ينتج أن X مقاسٌ جزئيٌ من M.

وعلاوة على ذلك، إن $N \subseteq X$ وذلك لأنه لأجل كل $n \in N$ لدينا $n/N = 0/N \in P$ وبالتالي $n \in X$.

يتضح مما سبق أن $f(X) = P$ والتطبيق f إذن غامر.

وأخيراً، إذا لاحظنا أن التطبيق f هو مقصور تطبيق الغمر القانوني على مجموعة المقاسات الجزئية من M التي تحوي N يكون ذلك أذاناً بانتهاء البرهان.

قبل متابعة عرض النظريات الأساسية المتعلقة بمفهوم المقاسات لابد من **ملاحظة مهمة هي:**

إن كُل مقاس جزئي من M/N هو من الصيغة A/N حيث A مقاس جزئي من M يحوي N.

نظرية (٣-٢٣)

ليكن N, M مقاسين على $\mathfrak{R}$ ، وليكن $f : M \to N$ تشاكُلاً على $\mathfrak{R}$.

إذا كان A, B مقاسين جزئيين من N, M على الترتيب فإن العبارتين التاليتين متكافئتان:

١) $\vec{f}(A) \subseteq B$

٢) يوجد $\mathfrak{R}$ – تشاكل وحيد $f_* : M/A \to N/B$ يجعل المخطط التالي تبديلياً:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Pi_A"'] & N \arrow[d, "\Pi_B"] \\
M/A \arrow[r, dashed, "f_*"] & N/B
\end{tikzcd}
$$

وعلاوة على ذلك، إذا وجد مثل هذا التشاكل فإنه يكون:

أ. f_* مونومورفيزماً إذا وفقط إذا تحقق $A = \overline{f}(B)$

ب. f_* ايبيمورفيزماً إذا وفقط إذا تحقق $\operatorname{Im} f + B = N$

البرهان

في الحقيقة، بتطبيق النظرية (٣-١٢) على المخطّط:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Pi_B \circ f"'] \arrow[d, "\Pi_A"'] & N/B \\
M/A &
\end{tikzcd}
$$

نجد بسهولة أن العبارة (٢) تكون محققة إذا وفقط إذا كان $Ker \prod_A \subseteq Ker \prod_B \circ f$ وعليه العلاقة الأخيرة تكون محققة إذا وفقط إذا كان $\overline{f}(A) \subseteq B$ وذلك بملاحظة:

$$x \in Ker \prod_A \Leftrightarrow x/_A = 0/_A \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow$$

$$f(x) \in B \Leftrightarrow f(x)/_B = 0/_B \Leftrightarrow x \in Ker \prod_B \circ f$$

وبالتالي فإن الشق (١) من النظرية صحيح.

أ. في الحقيقة، يترتب على الشق الأول من هذه النظرية أن $A \subseteq \overleftarrow{f}(B)$

أيضاً، إذا لاحظنا أن

$$Kerf_* = \left\{ x/_A : f(x) \in B \right\} = \left\{ x/_A : x \in \overleftarrow{f}(B) \right\} = \overleftarrow{f}(B)/_A$$

يتضح أن f_* متباين إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{f}(B) = A$

ب. استناداً إلى الشق الأول، يمكن أن نرى أن:

$$\operatorname{Im} f_* = \left\{ f(x)/_B : x \in M \right\}$$

وعليه f_* غامر إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall n \in N, \qquad \exists x \in M: \qquad n/_B = f(x)/_B$$

والعبارة الأخيرة تكافئ ما يلي:

$$\forall n \in N, \qquad \exists x \in M: \qquad n - f(x) \in B$$

أي $N = \operatorname{Im} f + B$ وبذلك يتم إثبات النظرية.

وكنتيجة للنظرية الأخيرة، يمكننا أن نرتقي درجة في سلم مفهوم المقاسات بأن نقدم مبرهنات التماثل. ولهذا الغرض لنضع المصطلح التالي:

- إذا كان $f: M \to N$ تشاكلاً على $\Re$، سوف نرمز بـ $f^+: M \to \operatorname{Im} f$ للتشاكل على $\Re$ المعرف بالصيغة: $f^+(x) = f(x)$ وذلك مهما يكن x من M. إن وجه الاختلاف بين هذين التشاكلين ربما اقتصر على كون f^+ غامراً بينما f ليس بالضرورة كذلك.

مبرهنة التماثل الأولى:

ليكن $f : M \to N$ تشاكلاً على $\Re$، عندئذ يوجد $\Re$ – تماثل وحيد $\theta : M/_{Kerf} \to \operatorname{Im} f$ يجعل المخطّط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f^+"] \arrow[d, "\Pi"'] & \operatorname{Im} f \\ M/_{Kerf} \arrow[ur, dotted, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

البرهان

استناداً إلى النظرية الأخيرة وبوضع على وجه الخصوص $B = \{0_N\}, N = \operatorname{Im} f, A = Kerf$ يمكننا إيجاد $\Re$ تشاكل وحيد $\theta : M/_{Kerf} \to \operatorname{Im} f$ وحيث أن $\theta \circ \Pi = f^+$.

علاوة على ذلك، بما أن f^+ غامر فإنّ θ كذلك.

ولما كان من السهل رؤية أن $Kerf = \bar{f}\{0\} = \bar{f}(B)$ يتضح أن θ متباين.

ويترتب على هذا أن $M/_{Kerf} \approx \operatorname{Im} f$ ونكون بهذا قد برهنا على صحة المطلوب.

ملاحظة

إذا كان $f : M \to N$ تشاكلاً على $\Re$. استناداً إلى ما ذكر أعلاه نؤكد بأن المخطّط التالي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, "f^{+}"] & N \\ M/Kerf \arrow[r, "\theta"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

(حيث i تطبيق الاحتواء القانوني) وعليه فإن $f = i\circ\theta\circ\prod$ ويسمى عندئذ بالتحليل القانوني لـ $\Re$ − تشاكل f .

مبرهنة التماثل الثانية:

ليكن P, N مقاسين جزئيين من الـ $\Re$ − مقاس M بحيث $P \subseteq N$ ، فإن N/P مقاسٌ جزئي من M/P ، وعلاوة على ذلك، يوجد $\Re$ − تماثل وحيد

$$h : M/N \to (M/P)/(N/P)$$

يجعل المخطّط تبديلياً.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Pi_P"'] \arrow[d, "\Pi_N"'] & M/P \arrow[d, "\Pi"] \\ M/N \arrow[r, "h"'] & (M/P)/(N/P) \end{tikzcd}$$

البرهان

في الحقيقة، إن كل مقاس جزئي من M/N هو من النمط A/N حيث A مقاس جزئي من M يحوي N.

لدينا $\overline{\prod}_P(N)=\{n/P : n\in N\}=N/P$ وعليه بتطبيق النظرية (٣-٢٣) على المخطّط المذكور أعلاه هنالك $\Re$ – تشاكل وحيد

$$h : M/N \to (M/P)/(N/P)$$

يجعل المخطّط تبديلياً.

من جهة أخرى، بملاحظة أن $h\circ\prod_N$ غامر نستنتج أن h كذلك وأخيراً، بما أن $\overline{\prod}(N/P)=N$ يمكننا بتطبيق نفس النظرية أن نرى أن h متباين ومنه h يكون $\Re$ – تماثل.

إذا كان A مقاساً جزئياً من الـ $\Re$ – مقاس M. من السهل على القارئ تبيان أنّ المتتالية:

$$0\to A\xrightarrow{i_A}M\xrightarrow{\prod_A}M/A\to 0$$

تامة، حيث i_A تطبيق الاحتواء القانوني و $\prod_A$ تطبيق الغمر القانوني.

وبالتالي يمكننا أن نعرض مبرهنة التماثل التالية:

مبرهنة التماثل الثالثة:

إذا كان A,B مقاسين جزئيين من الـ $\Re$ – مقاس M، فإن المخطّط التالي:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A\cap B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B/A\cap B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d] & M \arrow[r, "\Pi_A"] \arrow[d] & M/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A/A\cap B \arrow[r, "(i_A)_*"] \arrow[d] & M/B \arrow[r] \arrow[d] & M/A+B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

تبديلي وأن أعمدته وأسطره متتاليات تامّة.

البرهان

ليكن $i_A : A \to M$ الاحتواء القانوني، وبالتالي نجد $\overrightarrow{i_A}(A\cap B) = A\cap B \subseteq B$ وعليه فإن المخطّط التالي

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
A/A\cap B \arrow[r, "(i_A)_*"] & M/B
\end{tikzcd}
$$

تبديلي وذلك وفقاً للنظرية (٣-٢٣). وبطريقة مشــابهة تمامــاً نحصــل علــى المخطّط التبديلي:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_B"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
B/A\cap B \arrow[r, "(i_B)_*"] & M/A
\end{tikzcd}
$$

هذان المخُطّطان يمكن وصلهما وتمديدهما للمخطّط التالي:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A\cap B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "i_B"] & B/A\cap B \arrow[r] \arrow[d, "(i_B)_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d] & M \arrow[r, "\Pi_A"] \arrow[d] & M/A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A/A\cap B \arrow[r, "(i_A)_*"] \arrow[d] & M/B & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

إن المخطّط الأخير تبديلي وحيث أن أسطره وأعمدته متتاليات تامة.

ويمكننا الآن إتمام الزاوية اليمنى السفلى في هذا المخطّط وذلـك بـأن نعـرف التطبيقين:

$$\theta_A : M/B \to M/A+B \quad ; \quad \theta_B : M/A \to M/A+B$$

كما يلي:

$$\theta_A\left(x/B\right) = x/A+B \quad , \quad \theta_B\left(x/A\right) = x/A+B$$

من الواضح أن θ_B, θ_A هما $\Re$ – تشاكلات تجعل المخطط المتمم تبديلياً، زد على ذلك أن السطر السفلي

$$0 \to A/A \cap B \xrightarrow{(i_A)_*} M/B \xrightarrow{\theta_A} M/A+B \to 0$$

متتالية تامة.

في الواقع، يترتب على النظرية (٣-٢٣) أن θ_A غامر وأن $(i_A)_*$ متباين.

من جهة ثانية، نلاحظ أنّ:

$$\mathrm{Im}(i_A)_* = \left\{x/B : x \in A\right\}$$

وأن:

$$Ker\theta_A = \left\{x/B ; x \in A+B\right\}$$

وعليه لدينا:

$$x \in A+B \Rightarrow \exists a \in A, \exists b \in B; x = a+b$$
$$\Rightarrow x+B = a+b+B = a+B$$

ومنه نجد:

$$Ker\theta_A \subseteq \mathrm{Im}(i_A)_*$$

كذلك:

$$x \in A \Rightarrow \forall b \in B, \exists a \in A; x+B = a+B = a+b+B$$

وعليه:

$$\mathrm{Im}(i_A)_* \subseteq Ker\theta_A$$

وبناء على ذلك يكون

$$\mathrm{Im}(i_A)_* = Ker\theta_A$$

وأخيراً، بالتناظر يكون العمود اليميني متتالية تامة. وذلك ينهي البرهان.

مبرهنة التماثل الرابعة:

إذا كان A, B مقاسين جزئيين من $\Re$ – مقاس M، فإن

$$A+B/B \approx A/A \cap B$$

البرهان

من الواضح أن كلاً من A, B مقاسٌ جزئي من $\Re$ – مقاس $A+B$ وعليه بتطبيق مبرهنة التماثل الثالثة نجد أن السطر الأخير من المخطط متتالية تامة أي

$$0 \to A/A \cap B \to A+B/B \to A+B/A+B \to 0$$

وبالتالي المتتالية

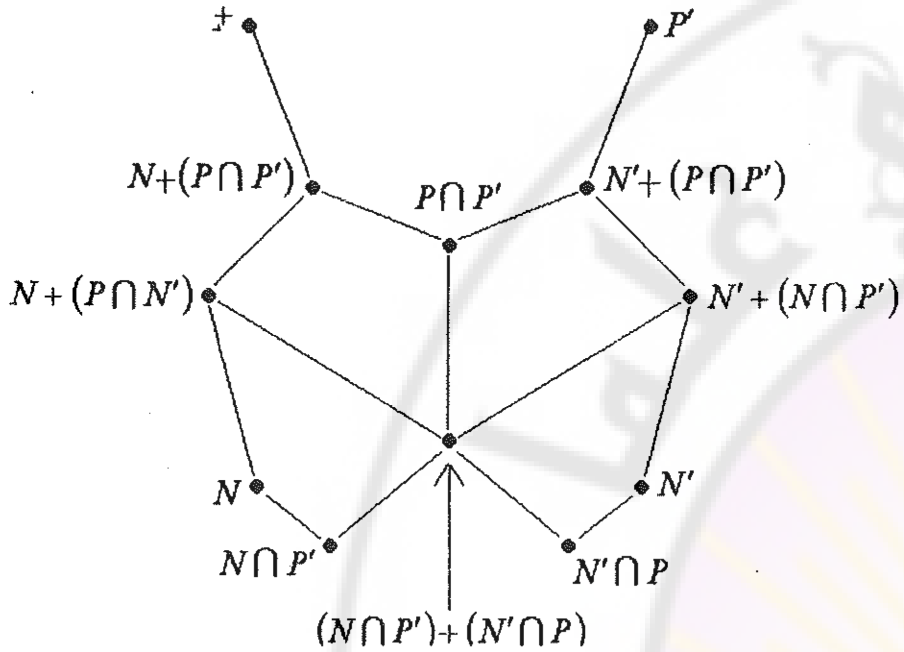
$$0 \to A/A \cap B \xrightarrow{(i_A)_*} A+B/A \to 0$$

تامة. يتضح من ذلك استناداً إلى نتيجة سابقة أن $(i_A)_*$ تماثل.

وأخيراً نورد مبرهنة *Zassenhaus* التالية.

مبرهنة *Zassenhaus*

لتكن N, P, N', P' مقاسات جزئية من $\Re$ – مقاس M بحيث $N' \subseteq P', N \subseteq P$ وليكن المُخطَّط التالي:



عندئذ يكون:

$$\frac{N+(P\cap P')}{N+(P\cap N')} \approx \frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)} \approx \frac{N'+(P\cap P')}{N'+(N\cap P')}$$

البرهان

بما أن $N\subseteq P$, $N'\subseteq P'$ يكون لدينا $P\cap N'\subseteq P\cap P'$

وعليه

$$(P\cap P')+N+(P\cap N')=(P\cap P')+N$$

وحسب قانون المعيارية الوارد في النظرية (٣-٤) نجد أن:

$$\begin{aligned}(P\cap P')\cap[N+(P\cap N')] &= (P\cap P'\cap N)+(P\cap N') \\ &= (P'\cap N)+(P\cap N')\end{aligned}$$

نطبق المبرهنة الرابعة في التماثل وذلك بأخذ:

$$A=P\cap P' \qquad , \qquad B=N+(P\cap N')$$

نحصل على التماثل

$$\frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)}\approx\frac{N+(P\cap P')}{N+(P\cap N')}$$

وسوف ندخر للقارئ بأن يثبت بأسلوب مشابه تماماً للحالة الأولى أن

$$\frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)}\approx\frac{N'+(P\cap P')}{N'+(N\cap P')}$$

وبذا يتم إثبات مبرهنة *Zassenhaus*.

(٤). المقاسات النوثرية والآرتينية

ليكن M مقاساً على حلقة واحدية $\mathfrak{R}$.

- يُقال عن M إنه يحقق **شرط السلسلة المتزايدة للمقاسات الجزئية من M (نوثري)** إذا كانت كل سلسلة متزايدة من المقاسات الجزئية من M منتهية الطول. بتعبير آخر: إذا كان من أجل كل سلسلة متزايدة $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq .....$ من المقاسات الجزئية من M فثمة عدد طبيعي n بحيث يكون $M_k = M_n$ وذلك مهما يكن $(k \geq n)$.
- يُقال عن M إنه يحقق **شرط السلسلة المتناقصة للمقاسات الجزئية من M (آرتيني)** إذا كانت كل سلسلة متناقصة من المقاسات الجزئية من M منتهية الطول. بتعبير آخر: إذا كان من أجل كل سلسلة متناقصة $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq .....$ من المقاسات الجزئية من M فثمة عدد طبيعي n بحيث يكون $M_k = M_n$ وذلك مهما يكن $(k \geq n)$.

سنورد الآن نظريتين أساسيتين متعلقتين بمفهوم المقاسات النوثرية والآرتينية تاركين للقارئ مهمة إيجاد البرهان.

نظرية (٣-٢٤)

إذا كان $\Re$ – مقاس M نوثرياً (آرتينياً) فإن كل مقاس جزئي منه أو مقاس الخارج له يكون كذلك.

نظرية (٣-٢٥)

ليكن $\Re$ – مقاس M.

إذا كان كل من المقاس الجزئي N من M ومقاس الخارج M/N نوثرياً (آرتينياً) فإن M يكون كذلك.

(٥). الجبور

بفرض أن $\Re$ حلقة واحدية تبديلية. نعرف $\Re$ – جبر (أو الجبر على $\Re$) بأنّه $\Re$ – مقاس A مزود بقانون تشكيل داخلي:

$$A \times A \to A$$

$$(x, y) \mapsto x.y$$

ويُسمى الضرب في A بحيث يتحقّق أنّ الضرب توزيعي بالنسبة للجمع وبحيث يكون

$$\lambda(x.y) = (\lambda x).y = x.(\lambda y); \quad (\forall x, y \in A), (\forall \lambda \in \Re)$$

وبفرض شروط إضافية على الضرب المذكورة في هذا التعريف يمكن الحصول على أنماط مختلفة من الجبور.

- إذا كان الضرب تجميعياً فإن A تدعى **جبراً تجميعياً** (لاحظ أنّه في هذه الحالة تكون A حلقة بالنسبة لقانونيها الداخليين الجمع والضرب).
- إذا كان الضرب تبديلياً فإنّ A تدعى **جبراً تبديلياً**.

• إذا وجد في A عنصر حيادي بالنسبة للضرب فإنّ A تدعى **جبراً واحدياً**.
• إذا وجد في الجبر الواحدي التجميعي A لكل عنصر غير صفري نظير فإن A تدعى **جبرَ الخارج (جبرَ القسمة)**.

أمثلة على الجبور

• لتكن $\Re$ حلقة واحدية تبديلية وليكن الـ $\Re$ − مقاس $\Re^N$ الوارد في مثال سابق ولنعرف جداء التّطبيقات كما يلي:

$$\forall f, g \in \Re^N; \qquad f.g : N \to \Re$$

$$(f.g)(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) g(n-i)$$

عندئذ من الواضح أنّ القانون الذي يرفق بكل ثنائية (f, g) العنصر $f.g$ يجعل من الـ $\Re$ − مقاس $\Re^N$ جبراً على $\Re$ ونسمي الجبر $\Re^N$ عندئذ **بجبر سلاسل القوى الأساسية بمعاملات من $\Re$**. ولعل التبرير الكافي لسبب هذه التسمية هو التالي:

إذا كانت $t \in \Re^N$ معرفة بالصيغة:

$$t(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإنّه لأجل كل عدد صحيح موجب m يكون التركيب m مرة هو التّطبيق

$$t^m = t \circ t \circ ..... \circ t$$

وقاعدته

$$t^m(n) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

لنأخذ الآن سلسلة القوى الأساسية المتعلقة بـــ $f \in \Re^N$ والتي تأخذ الشكل:

$$\theta = f(0)t^0 + f(1)t^1 + f(2)t^2 + \dots\dots + f(m)t^m + \dots\dots$$

حيث« $t^0 = id_R$ التطبيق المطابق على $\Re$» وبمـــا أنّ: $\theta(n) = f(n)$ من أجل كل $n \in N$ فيمكن القول بأنّ f يمكن أن تمثل بشكل سلسلة قوى أساسية كما في الأعلى.

- بفرض أن V فضاء متجهي على الحقل F، إن المجموعة $End(V)$ جبر تجميعي واحدي وغير تبديلي على F حيث الضرب هو تركيـــب التطبيقات. ويرمز له أحياناً بـــ $GL_F(V)$

تعريف (٣-٢٦)

(١) تكون المجموعة الجزئية غير الخالية B من $\Re -$ جبر A **جبـــراً جزئيـــاً** من A إذا تحقق:

$$\forall x, y \in B, \forall \lambda \in \Re; \quad x - y, \lambda x \in B \quad and \quad x.y \in B$$

ويمكن للقارئ أن يرى بسهولة أنه تكون المجموعة الجزئية B من A جبراً جزئياً إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x, y \in B), (\forall \lambda, \mu \in \Re); \quad \begin{cases} \lambda x + \mu y \in B \\ x.y \in B \end{cases}$$

(٢) إذا كان A جبراً على حلقة واحدية تبديلية $\Re$.

يكـــون المقـــاس الجزئـــي I مـــن A **مثاليـــاً** لـــــ A إذا كـــان $A.I \subseteq I$ وكذلك $I.A \subseteq I$ يُلاحظ أن كل مثالي I لـــ A هو جبر جزئي من A.

(٦). جبر الخارج

ليكن A جبراً على الحلقة الواحدية والتبديلية $\Re$، وليكن I مثالياً لهذا الجبـر، نعرف على A العلاقة الثنائية:

$$x \equiv y(\operatorname{mod} I) \Rightarrow x - y \in I$$

تتصف هذه العلاقة بأنها **انعكاسية** وذلك لأن$x \equiv x(\operatorname{mod} I)$ أياً كان $x \in A$ كما أنها **متناظرة** وذلك بملاحظة أن

$$x \equiv y(\operatorname{mod} I) \Leftrightarrow y \equiv x(\operatorname{mod} I)$$

ولما كان من السهل على القارئ رؤية أن:

$$x \equiv y(\operatorname{mod} I) \wedge y \equiv z(\operatorname{mod} I) \Rightarrow x \equiv z(\operatorname{mod} I)$$

وذلك $\forall x, y, z \in A$ يترتب على ذلك أن العلاقة **متعدية** وعليه فهي علاقـة **تكافؤ** على A.

علاوة على ذلك، إن علاقة التكافؤ المذكورة متوائمة مع قانون التشكيل الداخلي الضرب وذلك لأن:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y(\operatorname{mod} I) \\ x' \equiv y'(\operatorname{mod} I) \end{array}\right\} \Rightarrow x - y \in I \quad and \quad x' - y' \in I$$

$$\Rightarrow (x-y).x' \in I \quad and \quad y(x'-y') \in I$$

$$\Rightarrow x.x' - y.y' \in I$$

$$\Rightarrow x.x' \equiv y.y'(\operatorname{mod} I)$$

وفضلاً عن ذلك، بالرجوع إلى مفهوم مقاسات الخارج، لقد وجـدنا أن علاقـة التكافؤ:

$$x \equiv y(\operatorname{mod} I) \Leftrightarrow x - y \in I$$

متوائمة مع قانون التشكيل الداخلي وهو الجمع وقانون التشكيل الخارجي وهـو المضاعف السلمي، وعليه فإن علاقة التكافؤ على A تتحول إلى علاقة تطـابق على A .

يمكننا الآن بناء جبر الخارج على حلقة واحدية تبديلية كما يلي:

ليكن A جبراً على الحلقة الواحدية التبديلية $\Re$، إذا كان I مثالياً لـ A . إن A/I مقاس على $\Re$ وذلك بالعودة إلى النظرية(٣-٢١) كذلك، إذا عرفنا قانون التشكيل الداخلي:

$$A/I \times A/I \longrightarrow A/I$$

بالصيغة:
$$\frac{x}{I}\cdot\frac{y}{I} = \frac{x.y}{I}$$

فنجد أن:

$$\frac{x}{I}\cdot\left(\frac{y}{I}+\frac{z}{I}\right) = \frac{x}{I}\cdot\frac{y+z}{I} = \frac{x.(y+z)}{I} = \frac{x.y+x.z}{I}$$
$$= \frac{x.y}{I}+\frac{x.z}{I} = \frac{x}{I}\cdot\frac{y}{I}+\frac{x}{I}\cdot\frac{z}{I}$$

بطريقة مشابهة يمكن أن نرى أن:

$$\left(\frac{y}{I}+\frac{z}{I}\right)\cdot\frac{x}{I} = \frac{y}{I}\cdot\frac{x}{I}+\frac{z}{I}\cdot\frac{x}{I}$$

وذلك مهما تكن $\frac{z}{I}$ و $\frac{y}{I}$، $\frac{x}{I}$ من A/I .

$$\lambda\left(\frac{x}{I}.\frac{y}{I}\right) = \lambda\left(\frac{x.y}{I}\right) = \frac{\lambda(x.y)}{I}$$
$$= \left(\lambda\frac{x}{I}\right).\frac{y}{I} = \frac{x}{I}.\left(\lambda\frac{y}{I}\right)$$

وبناءً على ذلك فإن $A/_{I}$ جبر على حلقة واحدية تبديلية $\Re$ ندعوه **بجبر الخارج.**

علاوة على ذلك، إن التطبيق $\pi : A \to A/_{I}$

$$x \mapsto x/_{I}$$

يسمى بتطبيق الغمر القانوني للجبر A على جبر الخارج $A/_{I}$.

(٧). تطبيقات الاشتقاق على الجبر

ليكن A جبراً على حلقة واحدية تبديلية $\Re$.

إن تطبيق الاشتقاق على A هو تداكلّ $d : A \to A$ على المقاس A وبحيث يتحقق

$$d(x.y) = (dx).y + x.(dy)$$

وذلك أياً كان x, y من A.

سنرمز بـ $Der(A)$ لمجموعة تطبيقات الاشتقاق على الجبر A، ولنعرف على هذه المجموعة قانوني التشكيل:

<u>الداخلي:</u> $Der(A)\times Der(A) \to Der(A)$

$$(d+d')(x) = d(x) + d'(x) \quad ;\forall d, d' \in Der(A), \forall x \in A$$

<u>الخارجي:</u> $\Re \times Der(A) \to Der(A)$

$$(\lambda d)(x) = \lambda d(x) \quad ;\forall d \in Der(A), \forall \lambda \in \Re, \forall x \in A$$

وبالتالي يمكننا عرض النظرية المنشودة التالية:

نظرية (٣-٢٧)

إذا كان A جبراً على $\Re$ فإن $Der(A)$ مقاس على $\Re$.

البرهان

لنفرض أن $d, d' \in Der(A)$ وأن $\lambda \in \Re$، من الواضح قبل كل شيء أن كلاً من $\lambda d, d + d'$ تداكلٌ على المقاس A، وبالإضافة لذلك لدينا:

$$(d+d')(x.y) = d(x.y) + d'(x.y)$$
$$= (dx).y + x.(dy) + (d'x).y + x.(d'y)$$
$$= (dx + d'x).y + x.(dy + d'y)$$
$$= ((d+d')x).y + x.((d+d')y)$$

وكذلك لدينا:

$$(\lambda d)(x.y) = \lambda(d(x.y)) = \lambda((dx).y + x.(d.y))$$
$$= (\lambda d)(x).y + x(\lambda d)(y)$$

وبناءً على ذلك يكون: $d + d' \in Der(A)$ ، $\lambda d \in Der(A)$

ولإتمام البرهان يجب أن نبين أن $Der(A)$ زمرة تبديلية وعلاوة على ذلـك، إن:

- $\lambda(d+d') = \lambda d + \lambda d'$
- $(\lambda + \mu)d = \lambda d + \mu d$
- $\lambda(\mu d) = (\lambda\mu)d$
- $1_R d = d; \quad \forall d, d' \in Der(A), \forall \lambda, \mu \in \Re$

تاركين متعة إيجاد برهان هذه الخطوات للقارئ.

ملاحظة

إذا كان A جبراً يملك عنصراً واحدياً e، فعندئذ:

$$d(e) = d(e.e) = d(e).e + e.d(e) = d(e) + d(e)$$

وعليه $d(e) = 0$.

زد على ذلك، أن صورة أي اشتقاق d على جبر A يكون مقاساً جزئياً من A، وكذلك إن نواة تطبيق الاشتقاق d هو جبر جزئي من A.

نظرية (قاعدة لايبنز)

إن:

$$d^n(x.y)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}d^r x.d^{n-r}y$$

وذلك أياً كان $d\in Der(A)$ ومهما يكن x,y من A.

البرهان

نُبرهن هذه النظرية بالاستقراء على n، ونُلاحظ قبل كل شيء أن النظرية صحيحة من أجل $n=1$ وذلك استناداً إلى كون

$$d(x.y)=(dx).y+x.(dy)$$

الآن، نفرض أن النظرية صحيحة من أجل n ثم نبرهن على صحتها من أجل $n+1$.

في الواقع، لدينا:

$$d^{n+1}(x.y)=d\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}d^r x.d^{n-r}y\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}d^{r+1}x.d^{n-r}y+\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}d^r x.d^{n-r+1}y$$

$$=d^{n+1}x.y+\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}d^{r+1}x.d^{n-r}y+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}d^r x.d^{n-r+1}y+x.d^{n+1}y$$

$$= d^{n+1}x.y + \sum_{r=1}^{n}\left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right] d^{r}x.d^{n-r+1}y + x.d^{n+1}y$$

$$= d^{n+1}x.y + \sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r} d^{r}x.d^{n-r+1}y + x.d^{n+1}y$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n+1}{r} d^{r}x.d^{n-r+1}y$$

الفصل الثاني

جبور لي

١- جبور لي

إن جبر لي هو مقاس A على حلقة واحدية تبادلية $\Re$ مزود بقانون تشكيل داخلي يرمز له $[\ ,\ ]$ ويحقق الموضوعات الخمس التالية :

$$1-[x,x]=0$$

$$2-[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$$

$$3-[x,y+z]=[x,y]+[x,z]$$

$$4-[\lambda x,y]=[x,\lambda y]=\lambda[x,y] \quad ; \quad \forall \lambda \in \Re$$

$$5-[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \quad ; \quad \forall x,y,z \in A$$

وتعرف العلاقة الأخيرة **بمتطابقة جاكوبي**. نرغب في تبيان أن مفهوم جبور لي يعود إلى **العالم النرويجي ماريوس سوفوس لي** (١٨٤٢ -١٨٩٩) .

تعريف (١-١)

نقول عن جبر لي A ، إنه **تبادلي** إذا اتصف بالخاصية $[A,A]=\{0\}$، أي أنه إذا كان $[x,y]=0$ وذلك مهما يكن $x,y\in A$.

تعريف (١-٢)

ليكن A',A جبري لي على حلقة واحدية تبادلية $\Re$. نقول عن تطبيق f لـ

A في A' إنه **تشاكل بين الجبرين** إذا كان f تطبيقاً خطياً وكان $f[x,y]=[f(x),f(y)]$ مهما كان العنصران x,y من A .

بتعبير آخر، يكون التطبيق $f:A\to A'$ تشاكلاً لـ A في A' ونعبر عن ذلك بالرمز $f\in LA-Hom(A,A')$ إذا كان:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \ f(x+y)=f(x)+f(y) \\ \cdot\ \ f(\lambda x)=\lambda f(x) \\ \cdot\ \ f[x,y]=[f(x),f(y)] \end{array}\right\} ;\ \forall x,y\in A, \forall\lambda\in\Re$$

يسمى f مونومورفيزم لي أو اختصاراً مونومورفيزماً إذا كان f متبايناً ويسمى f ابيمورفيزم لي أو اختصاراً ابيمورفيزماً إذا كان f غامراً، كما يسمى تماثلاً إذا كان تقابلاً.

إذا كان $A=A'$ سمي التشاكل $f:A\to A$ تداكلاً.

اصطلاح

إذا احتوى جبر لي A عنصراً e بحيث $[x,e]=x$ مهما يكن x من A ، فعندئذ نقول إن e هو **محايد أيمن في** A وبصورة مشابهة نعرف المحايد الأيسر.

نستنتج على الفور الخواص التالية :

نظرية (١-٣)

ليكن A جبر لي. عندئذ الخواص التالية محققه:

$1\cdot\ \ [x,y]=-[y,x]$

$2\cdot\ \ [x,[y,z]]=[y,[x,z]]+[z,[y,x]]$

وذلك مهما يكن x,y,z من A .

البرهان

لدينا $[x+y,x+y]=0$ وبالاستفادة من كون التطبيق ثنائي الخطية نجد

$$[x+y,x+y]=[x,y]+[y,x] \quad \text{ومنه} \quad [x,y]=-[y,x]$$

أيضا استنادا إلى متطابقة جاكوبي والخاصة الأولى نجد:

$$\begin{aligned}[x,[y,z]]&=-[y,[z,x]]-[z,[x,y]]\\&=[y,-[z,x]]+[z,-[x,y]]\\&=[y,[x,z]]+[z,[y,x]]\end{aligned}$$

نظرية (١-٤)

كل جبر لي يحوي عنصراً محايداً يكون تافهاً.

البرهان

ليكن A جبر لي ولنفرض أن e عنصرٌ محايدٌ من اليمين لـ A ، فيكون $[e,e]=e=0$ وبالتالي إذا كان x عنصراً اختيارياً من A فإن:

$$x=[x,e]=[x,0]=[x,x+(-x)]=[x,x]-[x,x]=0$$

ومنه $A=\{0\}$ ويمكننا إعادة عرض المناقشة من أجل المحايد الأيسر وبالتالي كل جبر لي مغاير للصفر لا يملك على الإطلاق أي عنصرٍ محايدٍ.

توضيح

استناداً إلى حقائق أرسيت في الجبر الخطي ، يمكننا عندئذ إعادة عرض التعريف كما يلي :

إن جبر لي هو مقاس A على حلقة واحدية تبادلية $\Re$ ، مزود بتطبيق خطاني يرمز له بـ $[\ ,\ ]$ يحقق الموضوعة $[x,x]=0$ وذلك مهما يكن x من A بالإضافة إلى متطابقة جاكوبي.

يشـــار غالبـــاً إلى $\mathfrak{R}$ على أنها حلقة واحديـــة تبادليـــة باستثناء ما قد يعود للإشارة.

ونحتاج لاحقاً للنظرية التالية:

نظرية (١-٥)

لتكن B, B', B'' مقاسات جزئية من جبر لي A، عندئذ:

1. $[B,B'] = [B',B]$
2. $[B'+B'',B] = [B',B]+[B'',B]$
3. $[B,[B',B'']] \subset [B'',[B,B']]+[B',[B'',B]]$
4. $[B\cap B',B''] \subset [B,B'']\cap[B',B'']$

البرهان

(١) ليكن b من B وليكن b' من B'، فإن $[b,b'] \in [B,B']$

وبالتالي نجد:

$$[b,b'] = -[b',b] = [b',-b] \in [B',B]$$

وعليه يكون $[B,B'] \subseteq [B',B]$

إن الاحتواء الثاني شبيه تماماً بالأول من حيث البرهان، وبناءً على ذلك، نجد أن $[B,B'] = [B',B]$.

(٢) ليكن b من B، ليكن b' من B'، وليكن b'' من B''

لدينا: $[b'+b'',b] = [b',b]+[b'',b] \in [B',B]+[B'',B]$

أي أن: $[B'+B'',B] \subseteq [B',B]+[B'',B]$

من جهة ثانية، نلاحظ أن:

$$[b',b]+[b'',b] = [b'+b'',b] \in [B'+B'',B]$$

وعليه: $[B',B]+[B'',B] \subseteq [B'+B'',B]$

وكنتيجة لما سبق يتضح أن: $[B'+B'',B]=[B',B]+[B'',B]$

(٣) ليكن b من B وليكن b' من B'، وليكن b'' من B'' فإن

$$[b,[b',b'']]\in[B,[B',B'']]$$

أيضاً استناداً إلى متطابقة جاكوبي، يمكننا أن نرى أن:

$$[b,[b',b'']]=-[b',[b'',b]]-[b'',[b,b']]$$

وبملاحظة أن:

$$\left.\begin{array}{l}[b',[b'',b]]\in[B',[B'',B]]\\ [b'',[b,b']]\in[B'',[B,B']]\end{array}\right\}$$

يتضح مباشرةً أن:

$$[B,[B',B'']]\subseteq[B'',[B,B']]+[B',[B'',B]]$$

(٤) ليكن لدينا $b\in B\bigcap B'$ وليكن $b''\in B''$، عندئذ:

$$[b,b'']\in[B,B''] \quad and \quad [b,b'']\in[B',B'']$$

وبالتالي: $[b,b'']\in[B,B'']\bigcap[B',B'']$

يترتب على ذلك، أن: $[B\bigcap B',B'']\subset[B,B'']\bigcap[B',B'']$

وبالتالي يتم إثبات النظرية بكاملها.

٢- جبور لي خاصة

أولاً: جبر لي $M_n(C)$ لمجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n وبعناصر من الحلقة المركبة C.

إن المجموعة $M_n(C)$ تشكل مقاساً على الحلقة C بالنسبة لعملية جمع المصفوفات والمضاعف السلمي لمصفوفة.

بالإضافة لذلك، إن التطبيق:

$$[\ ,\ ]: M_n(C)\times M_n(C)\to M_n(C)$$

المعرف بالصيغة: $[M_1,M_2]=M_1.M_2-M_2.M_1$

يحقق وضوحاً $[M,M]=0$ وعلاوة على ذلك، لدينا:

$$[M_1+M_2,M_3]=(M_1+M_2).M_3-M_3.(M_1+M_2)$$
$$=M_1.M_3+M_2.M_3-M_3.M_1-M_3.M_2$$
$$=[M_1,M_3]+[M_2,M_3]$$

$$.\ [\lambda M_1,M_2]=(\lambda M_1).M_2-M_2.(\lambda M_1)\quad ;\forall\lambda\in C$$
$$=\lambda(M_1.M_2-M_2.M_1)=\lambda[M_1,M_2]$$

ويمكن بصورة مماثلة تبيان أن:

$$.\ [M_1,M_2+M_3]=[M_1,M_2]+[M_1,M_3]$$

and

$$.\ [M_1,\lambda M_2]=\lambda[M_1,M_2]$$

يبقى الحديث عن متطابقة جاكوبي.

في الواقع:

$$[M_1,[M_2,M_3]]=M_1.[M_2,M_3]-[M_2,M_3].M_1$$
$$=M_1.(M_2.M_3-M_3.M_2)-(M_2.M_3-M_3.M_2).M_1$$
$$=M_1.M_2.M_3-M_1.M_3.M_2-M_2.M_3.M_1+M_3.M_2.M_1$$

وذلك استناداً إلى مفاهيم أساسية أُرسيت في نظرية المصفوفات، وبصورة مشابهة يكون لدينا العبارات التالية :

$$[M_2,[M_3,M_1]]=M_2.M_3.M_1-M_2.M_1.M_3$$
$$-M_3.M_1.M_2+M_1.M_3.M_2$$

$$[M_3,[M_1,M_2]]=M_3.M_1.M_2-M_3.M_2.M_1$$
$$-M_1.M_2.M_3+M_2.M_1.M_3$$

وبالتالي متطابقة جاكوبي محققة وذلك بملاحظة أن مجموع الحدود الواقعة في الطرف الأيمن من العبارات الثلاث الأخيرة تساوي الصفر.

ثانياً: ليكن A جبراً تجميعياً على حلقة واحدية تبديلية $\Re$.

إن التطبيق $[x,y]=xy-yx$ « ترمز "." لعملية الضرب في الجبر A » خطاني وذلك لأن:

- $$[x,y+z]=x.(y+z)-(y+z).x$$
$$=x.y+x.z-y.x-z.x$$
$$=(x.y-y.x)+(x.z-z.x)$$
$$=[x,y]+[x,z]$$

وبطريقة مشابهة تماماً يمكننا إقامة البرهان على:

- $[y+z,x]=[y,x]+[z,x]$

وكذلك يكون من السهل أيضاً تبيان أن:

- $[\lambda x,y]=[x,\lambda y]=\lambda[x,y]$

علاوة على ذلك، التطبيق الخطاني يحقق: $[x,x]=x.x-x.x=0$ •

ولنبرهن الآن على صحة متطابقة جاكوبي:

لدينا:

- $$[x,[y,z]]=x.[y,z]-[y,z].x$$
$$=x.(y.z-z.y)-(y.z-z.y).x$$
$$=x.y.z-x.z.y-y.z.x+z.y.x$$

وبطريقة مماثلة، نستنتج أيضاً أن:

- $[y,[z,x]] = y.z.x - y.x.z - z.x.y + x.z.y$
- $[z,[x,y]] = z.x.y - z.y.x - x.y.z + y.x.z$

وبالجمع تتحقق متطابقة جاكوبي. وبالتالي نحصل على جبر لي وسنوافق على تسميته بجبر لي المولد بالجبر التجميعي والذي يشغل حالياً مركزاً مرموقاً في أبحاث الجبر الحديث.

ثالثاً: ليكن V فضاءً متجهياً على الحقل K، ولنرمز بـ $GL_K(V)$ لمجموعة المؤثرات الخطية على V.

في الحقيقة، إن $GL_K(V)$ تشكل جبراً تجميعياً وواحدياً على K. ويمكن جعلها جبر لي وذلك بتعريف العملية الثنائية التالية:

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f\,; \quad \forall f,g \in GL_K(V)$$

وذلك إذا اتّبعنا خط النقاش نفسه المتّبع في " ثانياً ".

إن جبر لي $GL_K(V)$ يسمى غالباً «الجبر الخطي العام». كما يسمى كل جبر جزئي منه جبر لي الخطي.

٣- تطبيقات الاشتقاق على جبر لي

تعريف (٣-١)

ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية $\mathfrak{R}$. إن الاشتقاق على A هو تداكل d على المقاس A ويحقق العلاقة:

$$d[x,y] = [dx,y] + [x,dy]; \quad \forall x,y \in A$$

سنرمز بـ $Der(A)$ لمجموعة تطبيقات الاشتقاق على A.

لنزود هذه المجموعة بالعمليتين التاليتين:

$$(d+d_1)(x)=d(x)+d_1(x) \quad and \quad (\lambda d)(x)=\lambda d(x)$$

وذلك مهما يكن $d,d_1 \in Der(A)$ ومهما يكن $x \in A$, $\lambda \in \Re$

إن كلاً من $\lambda d, d+d_1$ تداكلٌ على A وفضلاً على ذلك،

$$\begin{aligned}(d+d_1)[x,y] &= d[x,y]+d_1[x,y] \\ &= [dx,y]+[x,dy]+[d_1x,y]+[x,d_1y] \\ &= [(d+d_1)(x),y]+[x,(d+d_1)(y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda d)[x,y] &= \lambda(d[x,y]) = \lambda([dx,y]+[x,dy]) \\ &= [\lambda(dx),y]+[x,\lambda(dy)] \\ &= [(\lambda d)x,y]+[x,(\lambda d)y]\end{aligned}$$

واستناداً إلى الفقرة (٧) من الفصل الأول فإن $Der(A)$ المصحوبة بقانون التشكيل الداخلي وقانون التشكيل الخارجي الذي مجموعة مؤثراته $\Re$ تشكل مقاساً على $\Re$.

ولكن يمكننا المضي إلى ابعد من ذلك. وفي الحقيقة سنبرهن النظرية التالية.

نظرية (٣-٢)

إذا كان A جبر لي، عندئذ $Der(A)$ يكون أيضاً جبر لي.

البرهان

إن $Der(A)$ مقاس على $\Re$ ، أيضا لنعرف على $Der(A)$ العملية الثنائية:

$[d,d_1]=d\circ d_1-d_1\circ d$ وذلك مهما يكن d,d_1 من $Der(A)$.

إن $[d,d_1]$ تداكلٌ على A وضوحاً، أكثر من ذلك لدينا:

$$[d,d_1][x,y]=(d\circ d_1-d_1\circ d)[x,y]$$
$$=(d\circ d_1)[x,y]-(d_1\circ d)[x,y]$$
$$=d(d_1[x,y])-d_1(d[x,y])$$
$$=d([d_1x,y]+[x,d_1y])-d_1([dx,y]+[x,dy])$$
$$=[(d\circ d_1-d_1\circ d)x,y]+[x,(d\circ d_1-d_1\circ d)y]$$
$$=[[d,d_1]x,y]+[x,[d,d_1]y]$$

وهذا يعني إن $[d,d_1]\in Der(A)$. لنبين الآن انه تطبيق خطاني .

في الواقع، لدينا:

$$[d+d_1,d_2](x)=((d+d_1)\circ d_2-d_2\circ(d+d_1))(x)$$
$$=d(d_2x)+d_1(d_2x)-d_2(dx)-d_2(d_1x)$$
$$=[d,d_2](x)+[d_1,d_2](x)$$

$$[\lambda d,d_1](x)=((\lambda d)\circ d_1-d_1\circ(\lambda d))(x)$$
$$=(d\circ(\lambda d_1)-(\lambda d_1)\circ d)(x)$$
$$=\lambda(d\circ d_1-d_1\circ d)(x)$$
$$=(\lambda[d,d_1])(x)$$

وبالتالي:

$$[d+d_1,d_2]=[d,d_2]+[d_1,d_2]$$

ويكون أيضاً: $[d,\lambda d_1]=[\lambda d,d_1]=\lambda[d,d_1]$

وبطريقة مماثلة تماماً يمكن للقارئ أن يبين أن:

$$[d,d_1+d_2]=[d,d_1]+[d,d_2]$$

فالتطبيق إذن خطاني.

وأخيراً، من السهل أن نرى أن $[d,d]=0$. يبقى الحديث عن متطابقة جاكوبي. باستخدامنا لمفاهيم أولية فإن كل عبارة من الطرف الأيسر في متطابقة جاكوبي يمكن إن تكتب بالشكل التالي الأكثر تراصاً:

$$[d,[d_1,d_2]]=d\circ d_1\circ d_2-d\circ d_2\circ d_1-d_1\circ d_2\circ d+d_2\circ d_1\circ d$$
$$[d_1,[d_2,d]]=d_1\circ d_2\circ d-d_1\circ d\circ d_2-d_2\circ d\circ d_1+d\circ d_2\circ d_1$$
$$[d_2,[d,d_1]]=d_2\circ d\circ d_1-d_2\circ d_1\circ d-d\circ d_1\circ d_2+d_1\circ d\circ d_2$$

بالاختزال نجد أن:

$$[d,[d_1,d_2]]+[d_1,[d_2,d]]+[d_2,[d,d_1]]=0$$

وبالتالي $Der(A)$ جبر لي.

ويمكن إذن عرض النظرية التالية:

نظرية (٣-٣)

ليكن A جبر لي، وليكن x عنصراً من A. إن التطبيـــق $ad_x:A\to A$ المعرف بالصيغة $ad_x(y)=[x,y]$ يكون تطبيق اشتقاق على A.

البرهان

في الحقيقة، مهما يكن $y,z\in A$ ومهما يكن $\alpha,\beta\in\Re$ نجد:

$$ad_x(\alpha y+\beta z)=[x,\alpha y+\beta z]=\alpha[x,y]+\beta[x,z]$$
$$=\alpha ad_x(y)+\beta ad_x(z)$$
$$ad_x[y,z]=[x,[y,z]]=-[y,[z,x]]-[z,[x,y]]$$
$$=[[x,y],z]+[y,[x,z]]=[ad_xy,z]+[y,ad_xz]$$

تعريف (٣-٤)

يدعى التطبيق ad_x **بتطبيق الاشتقاق الداخلي على جبر لي**.

وسنرمز في هذا الفصل لمجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية على جبر لي A بالرمز $I_{nn}(A)$.

بالإضافة لذلك، نورد النظرية الهامة:

نظرية (٣-٥)

إن التطبيق $\psi : A \to Der(A)$ الذي يرفق بكل عنصر x من A بتطبيق الاشتقاق الداخلي ad_x هو تشاكل بين جبري لي A و $Der(A)$.

البرهان

ليكن $x, y \in A$ ومهما يكن $\lambda \in \Re$ نجد أولاً أن:

$$ad_{x+y}(z) = [x+y, z] = [x, z] + [y, z]$$
$$= ad_x(z) + ad_y(z) = (ad_x + ad_y)(z)$$

وذلك مهما يكن z من A، نستنتج أن:

$$ad_{x+y} = ad_x + ad_y$$

وبالتالي $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$ من جهة أخرى، لدينا:

$$ad_{\lambda x}(z) = [\lambda x, z] = \lambda[x, z] = \lambda ad_x(z)$$

أي $\psi(\lambda x) = \lambda \psi(x)$.

وأخيراً باستخدام متطابقة جاكوبي نستطيع أن نكتب:

$$ad_{[x,y]}(z) = [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

$$=[x,ad_y(z)]-[y,ad_x(z)]$$
$$=ad_x(ad_y(z))-ad_y(ad_x(z))$$
$$=(ad_x\circ ad_y-ad_y\circ ad_x)(z)$$
$$=[ad_x,ad_y](z)$$

أي $\psi[x,y]=[\psi(x),\psi(y)]$ والتطبيق ψ هو إذا تشاكل بين جبري لي A و $Der(A)$.

نتيجة (٣-٦)

ليكن A جبر لي، عندئذ $[d,ad_x]=ad_{dx}$ وذلك مهما يكن $d\in Der(A)$ ومهما يكن $x\in A$.

البرهان

ليكن $z\in A$ عندئذ نجد:

$$[d,ad_x](z)=(d\circ ad_x)(z)-(ad_x\circ d)(z)$$
$$=d(ad_x(z))-ad_x(dz)=d[x,z]-[x,dz]$$
$$=[dx,z]+[x,dz]-[x,dz]=ad_{dx}(z)$$

وبالتالي العلاقة صحيحة.

مبرهنة (قانون لايبنز)

ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبديلية $\Re$ وليكن d تطبيق اشتقاق على A.

عندئذ:

$$d^n[x,y]=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[d^r x,d^{n-r}y] \quad ; \quad \forall x,y\in A$$

البرهان

نبرهن هذه النظرية بالاستقراء الرياضي على n "رتبة تطبيـق الاشـتقاق d".

وللقيام بذلك، نلاحظ قبل كل شيء أن النظرية صحيحة من أجل $n=1$.

وذلك لأن:

$$d[x,y]=\binom{1}{0}[d^0x,d^1y]+\binom{1}{1}[d^1x,d^0y]$$
$$=[x,dy]+[dx,y]$$

وهو تعريف تطبيق الاشتقاق d.

وكأساس للاستقراء الرياضي نفترض أن النظرية صحيحة من أجل الرتبـة n، ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$.

$$d^{n+1}[x,y]=d(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[d^r x,d^{n-r}y])$$
$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}d[d^r x,d^{n-r}y]$$
$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[d^{r+1}x,d^{n-r}y]+\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[d^r x,d^{n-r+1}y]$$

وإذا طبقنا الآن التحويل الإضافي، وذلك بوضع $r-1$ بدلاً من r.

$$d^{n+1}[x,y]=\sum_{r=1}^{n}\{\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}\}[d^r x,d^{n-r+1}y]+$$

$$+\binom{n}{0}[d^0x, d^{n+1}y]$$

وإذا لاحظنا أن $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ وأن $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$

فتصبح المعادلة الأخيرة بعد إعادة الترتيب:

$$d^{n+1}[x,y] = \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}[d^r x, d^{n-r+1}y]$$

٤ – جبور لي الجزئية والمثاليات في جبر لي

نقول عن جزء S من جبر لي A على الحلقة الواحدية التبادلية $\mathfrak{R}$ إنه **جبر جزئي من** A إذا كان مقاساً جزئياً من A وحقق العلاقة $[S,S] \subseteq S$. بتعبير آخر إذا كان الجزء S مستقراً بالنسبة للعمليات الثلاث المعرفة على A.

تعريف (٤–١)

ليكن A جبر لي وليكن S جبراً جزئيّاً من A. ندعو المجموعة $N(S) = \{x \in A : ad_x(S) \subseteq S\}$ **بمناظم** S في جبر لي A.

نظرية (٤–٢)

ليكن A جبر لي وليكن S جبراً جزئياً من A، عندئذ إن مناظم S في A يكون أيضاً جبراً جزئياً من A.

البرهان

من الملاحظ أن $N_A(S) \neq \Phi$ وذلك لأن $0 \in N_A(S)$.

أيضاً إن $N_A(S)$ مقاس جزئي من A وذلك لأنه إذا كـــان x, y عنصـــرين من $N_A(S)$ ومهما يكن $\alpha, \beta \in \Re$ فإن كلاً من $ad_x(S), ad_y(S)$ محتواة في S وبالتالي يكون:

$$ad_{\alpha x+\beta y}(s) = [\alpha x + \beta y, s] = \alpha[x, s] + \beta[y, s]$$
$$= \alpha ad_x(s) + \beta ad_y(s) \quad ; \quad \forall s \in S$$

ومنه $\alpha x + \beta y \in N_A(S)$

وأخيراً بفرض أن $x, y \in N_A(S)$ فنجد أن:

$$ad_{[x,y]}(s) = [[x, y], s] = [x,[y, s]] - [y,[x, s]]$$
$$= ad_x[y, s] - ad_y[x, s]$$
$$= ad_x(ad_y(s)) - ad_y(ad_x(s))$$

وبالتالي $ad_{[x,y]}(s) \in S$ لأن $ad_y(s), ad_x(s)$ من S وذلـــك مهمـــا يكـــن $s \in S$ ومنه $[x, y] \in N_A(S)$ وهذا يدل على أن $N_A(S)$ جبر جزئي من جبر لي A.

ملاحظة

إذا كان $N_A(S) = S$ فإننا نسمي S في هذه الحالة الخاصة **بالمناظم الذاتي** في جبر لي A.

تعريف (٤-٣)

ليكن A جبر لي. يُقال عن جزء I من A إنه **مثالي في** A إذا كان مقاساً جزئياً

مــن A وكــان مســتقراً بالنســبة لتطبيقــات الاشــتقاق الداخليــة علــى A أي $ad_x(I) \subseteq I$ وذلك مهما يكن x من A.

يُقال عن الجزء I من A إنه **مثالي مميز** في A إذا كان مقاساً جزئياً مــن A وكان مستقراً بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A أي $d(I) \subseteq I$ وذلك مهما يكن d من $Der(A)$.

يترتب على ذلك واستناداً إلى مفهوم الاشتقاق والاشتقاق الداخلي على جبر لي A والوارد في الفقرة (٣)، أن كل مثالي مميز في جبر لي يكون مثالياً ولكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

مصطلحات ونتائج أولية

نلفت نظر القارئ إلى أن بعض المؤلفين يشيرون بـــ $I \lhd A$ للدلالة علـــى أن I مثالي لجبر لي A وكذلك $I \lhd\!\lhd A$ للتعبير على أن I مثالي مميز لجبر لي A. وسوف نعتمد في بعض الأحيان المصطلحات آنفــة الــذكر فــي الفقرات اللاحقة. ونترك للقارئ التحقق من أن:

- $I \lhd\!\lhd A \Rightarrow I \lhd A$
- $I \lhd\!\lhd J \lhd A \Rightarrow I \lhd A$
- $I \lhd\!\lhd J \lhd\!\lhd A \Rightarrow I \lhd\!\lhd A$
- $I\,,J \lhd\!\lhd A \Rightarrow [I,J] \lhd\!\lhd A$

هذا وتجدرُ بنا الإشارة إلى أن:

$$I \lhd J \lhd A \not\Rightarrow I \lhd A$$

نظرية (٤-٤)

إن تقاطع ومجموع مثاليين في جبر لي A يكون مثالياً في A .

البرهان

ليكن I, J مثاليين في جبر لي A .

(١) إن تقاطع مقاسين جزئيين من مقاس A يكون مقاساً جزئياً من A وفضلاً على ذلك، لنفرض أن $x \in I \cap J$ وأن $y \in A$ فعندئذ لدينا $[x, y] \in I$ وكذلك $[x, y] \in J$ وبالتالي $[x, y] \in I \cap J$ ومنه $I \cap J$ مثالي في A .

(٢) إن مجموع مقاسين جزئيين من مقاس A يكون مقاساً جزئياً من A .

زد على ذلك، ليكن $x \in I + J$ وليكن $y \in A$ فعندئذ نجد أن:

$$[x, y] = [a + b, y] = [a, y] + [b, y] \in I + J$$

ومنه $I + J$ مثالي في A .

سنورد لاحقاً بعض النتائج الأساسية المتعلقة بمفهوم المثاليات والمثاليات المميزة في جبر لي. ولكن سوف نصطلح ما يلي: إذا كان J, I مقاسان جزئيان من جبر لي A فسنرمز بـ $[I, J]$ للمقاس الجزئي من A المولد بعناصر من النمط $[x, y]$ حيث $y \in J, x \in I$ وينتج مباشرةً أن $[I, J] = [J, I]$ وبالإضافة لذلك سوف نبرهن النظرية التالية:

نظرية (٤-٥)

إذا كان I, J مثاليين في جبر لي A فإن $[I, J]$ مثالياً في A .

البرهان

إن $[I, J]$ مقاس جزئي من A وذلك وفقاً لطريقة تشكيل $[I, J]$ الواردة أعلاه.

لنبين الآن أن $[I,J]$ مستقرة بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A .

في الواقع، إذا كان $x \in A$ ومهما يكن $z \in J, y \in I$ فإن:

$$ad_x[y,z] = [x,[y,z]] = [y,[x,z]] + [[x,y],z]$$
$$= [y, ad_x z] + [ad_x y, z]$$

ولما كان كل من I, J مثالياً في A واستناداً إلى كون $[I,J]$ مقاساً جزئياً من A يكون $ad_x[y,z] \subseteq [I,J]$ وهذا يدل على أن $[I,J]$ مثالي في A .

نظرية (٤-٦)

إذا كان I, J مثاليين مميزين في جبر لي A ، فإن $[I,J]$ مثالي مميز في A .

البرهان

سنبين وبسلوك مماثل للذي ورد في النظرية السابقة أن $[I,J]$ مستقرة بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A .

في الحقيقة، إذا كان $D \in Der(A)$ ومهما يكن $z \in J, y \in I$ فإن:

$$D[y,z] = [Dy,z] + [y,Dz] \in [I,J]$$

إذن $[I,J]$ يكون مثالياً مميزاً في A .

ويمكننا تعميم مفهوم هذه النظرية على أية مجموعة من المثاليات المميزة في جبر لي.

نظرية (٤-٧)

ليكن A جبر لي عندئذ $Inn(A)$ يكون مثالياً في جبر لي $Der(A)$.

البرهان

نبرهن أولاً أن $Inn(A)$ مقاس جزئي من $Der(A)$.

ليكن x, y عنصرين من A ، عندئذ مهما يكن $z \in A$ ومهما يكن $\lambda \in \Re$ فإن:

$$(ad_x + ad_y)(z) = ad_x(z) + ad_y(z)$$
$$= [x,z] + [y,z] = [x+y,z] = ad_{x+y}(z)$$
$$(\lambda ad_x)(z) = \lambda ad_x(z) = \lambda[x,z] = [\lambda x,z] = ad_{\lambda x}(z)$$

ولما كان A مقاساً بالفرض فإن $x + y, \lambda x \in A$ وبالتالي: $ad_{x+y}, ad_{\lambda x} \in Inn(A)$ وهذا يكافئ أن $ad_x + ad_y \in Inn(A)$ وأن $\lambda ad_x \in Inn(A)$

سنبين من جهة أخرى أن:

$$[Der(A), Inn(A)] \subseteq Inn(A)$$

في الحقيقة ليكن $D \in Der(A)$, $ad_x \in Inn(A)$

عندئذ مهما يكن $z \in A$ نجد:

$$[D, ad_x](z) = (D \circ ad_x - ad_x \circ D)(z)$$
$$= D(ad_x(z)) - ad_x(D(z))$$
$$= D[x,z] - [x,Dz]$$
$$= [Dx,z] + [x,Dz] - [x,Dz] = ad_{Dx}(z)$$

ولكن من الواضح أن $ad_{Dx} \in Inn(A)$ وبالتالي

$$[D, ad_x] \in Inn(A)$$

نستنتج أن مجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية على جبر لي A تكون مثاليّةً في مجموعة تطبيقات الاشتقاق على A .

نظرية (٤-٨)

إذا كان f تشاكلاً لجبر لي A في جبر لي A' فإن $Kerf$ مثالي في A .

البرهان

إن $Kerf$ مقاس جزئي من A ، بالإضافة لذلك فإنه مهما يكن $x \in Kerf$ ومهما يكن $y \in A$ لدينا:

$$f[x,y] = [f(x), f(y)] = [0, f(y)] = 0$$

أي أن $[x,y] \in Kerf$ وبالتالي $[Kerf, A] \subseteq Kerf$ نستنتج من ذلك أن $Kerf$ مثالي في A .

نظرية (٤-٩)

إذا كان f تشاكلاً لجبر لي A في جبر لي A' ، فإن $\operatorname{Im} f$ جبر جزئي من A' .

البرهان

من السهل أن نلاحظ قبل كل شيء أن $\operatorname{Im} f \neq \Phi$.

لنفرض الآن أن $z, z' \in \operatorname{Im} f$ وليكن $\alpha, \beta \in \Re$ فإن ثمة عنصراً $x \in A$ بحيث $f(x) = z$ وكذلك، هنالك $x' \in A$ وحيث أن $f(x') = z'$.

وعليه ينتج:

$$\alpha z + \beta z' = \alpha f(x) + \beta f(x') = f(\alpha x + \beta x') \in \operatorname{Im} f$$

إذن $\operatorname{Im} f$ مقاس جزئي من A' .

وعلاوة على ذلك، يلاحظ أن:

$$[z, z'] = [f(x), f(x')] = f[x, x'] \in \operatorname{Im} f$$

إذن الصورة المباشرة لتشاكل بين جبري لي A, A' يكون جبراً جزئيّاً من A' .

٥- جبر لي الخارج ومبرهنات التماثل

ليكن A جبر لي وليكن I مثالياً في A. إن علاقة التطابق قياس I المعرفة بالصيغة:

$$x \equiv y \bmod I \Leftrightarrow x - y \in I, \quad \forall x, y \in A$$

هي علاقة تكافؤ، أيضاً إن العلاقة المذكورة متوائمة مع بنية A، فمثلاً لنفرض أن $x \equiv x' \bmod I$, $y \equiv y' \bmod I$ فإن $x - x', y - y' \in I$

ويكون بالتالي اعتماداً على كون I مثالياً:

$$[x', y - y'] \in I \quad and \quad [y, x - x'] \in I$$

ومنه نجد أن: $[x, y] - [x', y'] \in I$ أي $[x, y] \equiv [x', y'] \bmod I$

ونشير إلى أن المجموعة $A/I = \{x + I : x \in A\}$ تشكل مقاساً على $\Re$ مع ملاحظة ما يلي:

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I$$
$$\lambda(x+I)=\lambda x+I; \quad \forall \lambda \in \Re$$

ندعوه غالبا مقاس الخارج، والآن يمكننا المضي إلى أبعد من ذلك حيث نبرهن النظرية التالية:

نظرية (٥-١)

إن A/I جبر لي.

البرهان

في الواقع، إن المجموعة A/I المصحوبة بقانون التشكيل الداخلي وقانون التشكيل الخارجي الذي مجموعة مؤثراته $\Re$ تشكل مقاساً على $\Re$.

أيضا إن قانون التشكيل الداخلي المعرف بالصيغة:

$$[x+I, y+I] = [x, y] + I; \quad \forall x+I, y+I \in A/I$$

هو تطبيق خطا ني وذلك لأن:

$$\begin{aligned}
[(x+I)+(y+I), z+I] &= [(x+y)+I, z+I] \\
&= [x+y, z]+I \\
&= [x,z]+I+[y,z]+I \\
&= [x+I, z+I]+[y+I, z+I]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\lambda(x+I), z+I] &= [\lambda x+I, z+I] = [\lambda x, z]+I \\
&= \lambda[x,z]+I = \lambda([x,z]+I) = \lambda[x+I, z+I]
\end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة يمكن للقارئ أن يبين أن:

$$[x+I, (y+I)+(z+I)] = [x+I, y+I]+[x+I, z+I]$$

$$[x+I, \lambda(z+I)] = \lambda[x+I, z+I]; \quad \forall \lambda \in \Re$$

وأخيرا بملاحظة أن:

$$[x+I, x+I] = [x,x]+I = 0+I = I$$

يكفي إذن لإتمام البرهان التأكد من صحة متطابقة جاكوبي. أي لنبين أن:

$$[x+I,[y+I,z+I]]+[y+I,[z+I,x+I]]+ [z+I,[x+I,y+I]] = I$$

من السهل أن نرى أن:

$$[x+I,[y+I,z+I]] = [x+I,[y,z]+I] = [x,[y,z]]+I$$

$$[y+I,[z+I,x+I]] = [y+I,[z,x]+I] = [y,[z,x]]+I$$

$$[z+I,[x+I,y+I]] = [z+I,[x,y]+I] = [z,[x,y]]+I$$

وبجمع الحدود الثلاثة نحصل على صحة متطابقة جاكوبي وبالتالي A/I جبرلي.

ملاحظة

إن A/I جبر لي المذكور في النظرية السابقة يسمى جبر لي الخارج. وبالتالي نحصل وفقا للنظرية (٥-١) على جبر لي الخـــارج $Der(A)/Inn(A)$ والذي ندعوه أحيانا **الاشتقاق الخارجي على جبر لي** A.

علاوة على ذلك، نورد الآن بعض النتائج الهامة المتعلقة بالتماثل بين جبري لي.

مبرهنة التماثل الأولى

إذا كـــان $f : A \to A'$ تشـــاكلاً لجبـــري لـــي A, A' فـــإن

$$A/Kerf \approx \operatorname{Im} f.$$

البرهان

لنأخذ العلاقة: $\psi : A/Kerf \to \operatorname{Im} f$ المعرفة بالصيغة

$$\psi(x + Kerf) = f(x)$$

من الواضح أن ψ تطبيق وذلك بملاحظة:

$$x + Kerf = x' + Kerf \Rightarrow x - x' \in Kerf \Rightarrow$$
$$f(x) = f(x') \Rightarrow \psi(x + Kerf) = \psi(x' + Kerf)$$

أيضاً، هذا التطبيق تشاكل بين جبري لي A, A'.

في الواقع، لدينا:

$$\begin{aligned}\psi((x + Kerf) + (x' + Kerf)) &= \psi((x + x') + Kerf)\\ &= f(x + x') = f(x) + f(x')\\ &= \psi(x + Kerf) + \psi(x' + Kerf)\end{aligned}$$

وكذلك لدينا:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda(x+Kerf)) &= \psi(\lambda x+Kerf) = f(\lambda x)\\ &= \lambda f(x) = \lambda\psi(x+Kerf)\end{aligned}$$

أخيراً، نجد أن:

$$\begin{aligned}\psi[x+Kerf, x'+Kerf] &= \psi([x,x']+Kerf)\\ &= f[x,x'] = [f(x), f(x')]\\ &= [\psi(x+Kerf), \psi(x'+Kerf)]\end{aligned}$$

وذلك أياً كان $x+Kerf, x'+Kerf$ عنصرين من $A/_{Kerf}$ ومهما يكن $\lambda \in \Re$.

زد على ذلك، أنه تشاكل متباين وذلك لأن:

$$\psi(x+Kerf) = \psi(x'+Kerf) \Rightarrow f(x) = f(x')$$
$$\Rightarrow f(x-x') = 0 \Rightarrow x+Kerf = x'+Kerf$$

وكذلك إن ψ غامر، لأنه إذا كان $z \in \operatorname{Im} f$ فإن ثمة عنصراً $x \in A$ بحيث يكون $f(x) = z$ وهذا يقتضي وجود $x+Kerf \in A/_{Kerf}$ بحيث يكون $\psi(x+Kerf) = z$.

ينتج من كل ما سبق أن ψ تماثلٌ أي أن $\operatorname{Im} f \approx A/_{Kerf}$.

تمهيدية (٥-٢)

إذا كان $f : A \to A'$ تشاكلاً لجبري لي A, A'، وليكن I مثالياً لـ A بحيث أن $I \subseteq Kerf$، فعندئذ يوجد تشاكل وحيد $\theta : A/_I \to A'$ يجعل المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A' \\ & A/I \arrow[ur, dashed, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

البرهان

لنفرض أن $I \subseteq Kerf$ ولنأخذ التطبيق: $\theta : A/_I \to A'$

$x + I \mapsto f(x)$

من السهل تبيان - بأسلوب مشابه لما ورد في بداية إثبات مبرهنة التماثل الأولى- أن θ تشاكل بين جبري لي $A/_I , A'$.

علاوة على ذلك، إن التشاكل المذكور يجعل المخطط تبديلياً وذلك وفقاً لطريقة بنائه. أما الوحدانية فيترك إثباتها للقارئ وبذلك يتم إثبات التمهيدية.

والآن نورد المبرهنة الثانية والهامة في التماثل.

مبرهنة التماثل الثانية

إذا كان $f : A \to A'$ تشاكلاً لجبري لي A, A'، وليكن I, J مثاليين في A بحيث أن $I \subseteq J$. فعندئذ يكون $J/_I$ مثالياً لجبر لي $A/_I$، زد على ذلك، $A/I/_{J/I} \approx A/_J$

البرهان

ليكن I, J مثاليين لجبر لي A وبحيث أن $I \subseteq J$

من الواضح أولاً أن $\Phi \neq J/_I \subseteq A/_I$ وذلك لأن $I = 0 + I \in J/_I$.

من جهة ثانية، J/I مقاس جزئي من A/I وسنترك للقارئ متعة إثبات ذلك.

وأخيراً، بملاحظة أن:

$$[x+I,z+I]=[x,z]+I\in J/I;\forall x+I\in A/I,\forall z+I\in J/I$$

نستنتج على الفور أن J/I مثالي في جبر لي A/I وبذا يتم إثبات الشق الأول من هذه المبرهنة.

لنأخذ العلاقة:

$$\psi : A/I \to A/J$$
$$x+I \mapsto x+J$$

من الواضح أن ψ تطبيق وذلك بملاحظة:

$$x+I=x'+I \Rightarrow x-x'\in I\subseteq J \Rightarrow x+J=x'+J$$

لنبرهن أن ψ تشاكل بين جبري لي $A/I , A/J$.

في الحقيقة، لدينا:

$$\begin{aligned}\psi((x+I)+(x'+I)) &= \psi((x+x')+I)\\ &= (x+x')+J=(x+J)+(x'+J)\\ &= \psi(x+I)+\psi(x'+I)\end{aligned}$$

كذلك، نرى أن:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda(x+I)) &= \psi(\lambda x+I)=\lambda x+J\\ &= \lambda(x+J)=\lambda\psi(x+I)\end{aligned}$$

أيضاً، نجد أن:

$$\begin{aligned}\psi[x+I,x'+I] &= \psi([x,x']+I)=[x,x']+J\\ &= [x+J,x'+J]=[\psi(x+I),\psi(x'+I)]\end{aligned}$$

إنه لمن الواضح أن التشاكل ψ غامر، كذلك إن نواته

$$Ker\psi = \{x+I \in A/I : \psi(x+I) = J\}$$
$$= \{x+I \in A/I : x+J = J\}$$
$$= \{x+I \in A/I : x \in J\} = J/I$$

وكنتيجة لذلك ووفقاً لمبرهنة التماثل الأولى يكون $\frac{A/I}{J/I} \approx A/J$ وذلك ينهي البرهان. وأخيراً نورد المبرهنة الثالثة في التماثل.

مبرهنة التماثل الثالثة

إذا كان I, J مثاليين لجبر لي A على الحلقة الواحدية التبديلية $\Re$، فإن:

$$I+J/I \approx J/I\cap J.$$

البرهان

لنأخذ المونومورفيزم: $\varphi : J \to I+J$ وتشاكل الغمر القانوني:

$$\pi : I+J \to I+J/I$$

إن $\pi \circ \varphi$ ابيمورفيزم نواته $I \cap J$ وذلك لأن:

$$x \in Ker(\pi \circ \varphi) \Leftrightarrow x \in J \, and \quad \pi(\varphi(x)) = I$$
$$\Leftrightarrow x \in J \, and \quad x+I = I$$
$$\Leftrightarrow x \in I \cap J$$

وبتطبيق المبرهنة الأولى في التماثل ينتج أن: $I+J/I \approx J/I\cap J.$

وصحة النظرية تصبح عندئذ واضحة.

الفصل الثالث

جبور لي القابلة للحل ونصف البسيطة

١- المتسلسلة المشتقة في جبر لي

ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R. نعلم بالاستناد إلى النظرية (٤-٦) أن $[A, A]$ مثالي مميز في A وذلك لأن كل جبر لي يكون بحد ذاتــه مثاليــاً مميزاً.

لنرمز بـــ $D^0 A = A$ وبـــ$D^1 A = [A, A]$ وبالتالي يمكننا وفقــا لمفهــوم الاستقراء الرياضي بناء متتالية المثاليات المميزة في A التالية:

$$D^0 A = A$$

$$D^1 A = [A, A]$$

$$D^2 A = [D^1 A, D^1 A]$$

$$\vdots$$

$$D^n A = [D^{n-1}, D^{n-1} A]$$

$$\vdots$$

بالإضافة إلى ذلك، إن $D^i A$ مثالي في $D^{i-1} A$ $\quad (\forall i = 1,2,....,n)$

في الواقع، لدينا: $\quad [D^{i-1} A, D^i A] \subseteq [A, D^i A] \subseteq D^i A$

وذلك لأن $D^i A$ مثالي في A، $(\forall i = 1,2,...)$. وبالاستفادة أخيــراً مــن كون $D^{i-1} A, D^i A$ جبوراً جزئيةً من A ومــن كــون $D^i A \subseteq D^{i-1} A$ يتضح أن $D^i A$ مثالي في $D^{i-1} A$

ووفقاً لهذه الحقائق، من السهل رؤية أن:

$$A = D^0 A \supseteq D^1 A \supseteq D^2 A \supseteq ....D^{i-1} A \supseteq D^i A.... \supseteq ....$$

وسندعو هذه المتتالية المتناقصة من المثاليات المميزة في A **بالمتسلسلة المشتقة في** A.

٢- جبور لي القابلة للحل

تعريف (٢-١)

ليكن A جبر لي. إذا كان يوجد عدد صحيح موجب m بحيث أن $D^m A = \{0\}$. فيقال إن A **قابل للحل**. وإذا كان m أصغر عدد صحيح موجب بحيث أن $D^m A = \{0\}$ فيقال إن A **قابل للحل دليله** m.

نقول عن المثالي I في جبر لي A إنه **قابل للحل**، إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $D^m I = \{0\}$. يتضح بالتالي أن كل مثالي تبادلي يكون مثالي قابل للحل ودليله 1.

ومن الملائم أن ندعو أكبر مثالي قابل للحل في جبر لي A " أساس لـ A " ونرمز له Rad A (Radical of A).

يمكن إذن عرض النظرية التالية:

نظرية (٢-٢)

إن كل جبر لي على الحقل K عدد أبعاده 2 يكون قابلاً للحل.

البرهان

ليكن A جبر لي على الحقل K، ولنفرض أن $\{e_1, e_2\}$ قاعدة لـ A فتنشأ حالتان:

حالة-١-

إذا كان $[e_1,e_2]=ce_1$ ، حيث $(c\in K)$. عندئذ

أياً كان $z\in D^1A=[A,A]$ فيمكن إيجاد $x,y\in A$ بحيث $z=[x,y]$ وبالتالي يمكن إيجاد أربع عناصر $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ من الحقل K تحقق العلاقة $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$ وبحيث يكون:

$$z=[x,y]=[\alpha e_1+\beta e_2,\alpha' e_1+\beta' e_2]$$
$$=\alpha\alpha'[e_1,e_1]+\alpha\beta[e_1,e_2]+\beta\alpha'[e_2,e_1]+\beta\beta'[e_2,e_2]$$
$$=(\alpha\beta'-\beta\alpha')[e_1,e_2]=(\alpha\beta'-\beta\alpha')ce_1=\lambda e_1$$

بملاحظة أن $\lambda\in K$ نستنتج أن:

$$D^1A=\{\lambda e_1:\lambda\in K\}\neq\{0\}$$

بمعنى آخر، إن D^1A مثالي مولد بعنصر واحد e_1.

سنبرهن الآن أن $D^2A=\{0\}$.

ليكن $z\in D^2A$ عندئذ يوجد x,y من D^1A بحيث $z=[x,y]$

وبالاستناد إلى ما سبق نكتب:

$$z=[x,y]=[\lambda e_1,\mu e_1]=\lambda\mu[e_1,e_1]=0$$

ومنه $D^2A=\{0\}$ أي أن A جبر لي قابل للحل ودليله 2.

أما إذا كان $[e_1,e_2]=ce_2$، حيث $(c\in K)$. عندئذ إذا اتبعنا الطريقة المشار إليها سابقاً، من السهل رؤية أن A قابل للحل أيضاً ودليله 2 الأمر الذي نتركه للقارئ.

حالة-٢-

إذا كان: $[e_1,e_2]=c_1e_1+c_2e_2$ بحيث $(c_1,c_2\in K-\{0\})$

ولنأخذ العنصرين e_1',e_2' كما يلي: $e_1'=c_1e_1+c_2e_2\quad ,e_2'=c_1e_1-c_2e_2$

نلاحظ أن $\{e'_1, e'_2\}$ مستقلة خطياً وبالتالي تشكل قاعدة لـ A، أيضاً لدينا:

$$[e'_1, e'_2] = [c_1e_1 + c_2e_2, c_1e_1 - c_2e_2]$$
$$= c_1c_1[e_1, e_1] - c_1c_2[e_1, e_2] + c_2c_1[e_2, e_1] - c_2c_2[e_2, e_2]$$
$$= -2c_1c_2[e_1, e_2] = -2c_1c_2e'_1 = \lambda e'_1, \quad (\lambda \in K)$$

إن $\lambda \neq 0$ لأن $c_1, c_2 \in K - \{0\}$ نستنتج أن D^1A مثالي مولد بعنصر واحد e'_1 وذلك باتباع الطريقة ذاتها في الحالة الأولى، ونلاحظ أيضاً أن $D^2A = \{0\}$ وبالتالي A جبر لي قابل للحل ودليله 2.

علاوة على ذلك، لدينا:

تمرين (٢-٣)

بين أن كل جبر لي ثلاثي البعد على الحقل K والذي يملك قاعدة $\{e_1, e_2, e_3\}$ المحققة للشروط التالية:

$$[e_1, e_2] = ae_1, [e_1, e_3] = be_1, [e_2, e_3] = ce_1 - fbe_2 + fae_3$$

حيث $(a, b, c, f \in K - \{0\})$ يكون قابلاً للحل.

الحل

ليكن $z \in D^1A = [A, A]$ فعندئذ يمكن إيجاد $x, y \in A$ بحيث $z = [x, y]$ وبالتالي يمكن أن نرى:

$$z = [x, y] = [\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3]$$
$$= \alpha\beta'.[e_1, e_2] + \alpha\gamma'[e_1, e_3] + \beta\alpha'[e_2, e_1]$$
$$+ \beta\gamma'[e_2, e_3] + \gamma\alpha'[e_3, e_1] + \gamma\beta'[e_3, e_2]$$
$$= (\alpha\beta' - \beta\alpha')[e_1, e_2] + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')[e_1, e_3]$$
$$+ (\beta\gamma' - \gamma\beta')[e_2, e_3]$$

$$= (\alpha\beta' - \beta\alpha').a.e_1 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')be_1$$
$$+ (\beta\gamma' - \gamma\beta').(ce_1 - bfe_2 + afe_3)$$
$$= \{(\alpha\beta' - \beta\alpha')a + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')b + (\beta\gamma' - \gamma\beta')c\}.e_1$$
$$+ (\beta\gamma' - \gamma\beta')f(ae_3 - be_2)$$

وبملاحظة أن:

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha') \;,\; (\alpha\gamma' - \gamma\alpha') \;,\; (\beta\gamma' - \gamma\beta')$$

جميعها ليست أصفاراً يتضح أن:

$$z = [x, y] = \lambda e_1 + \mu(be_2 - ae_3)$$

حيث $\lambda, \mu \in K^*$ وعليه:

$$D^1A = \{\lambda e_1 + e' : \lambda, \mu \in K^*\} \neq \{0\}$$

بمعنى آخر، إن D^1A مثالي مولّد بعنصرين e_1, e'.

سنبرهن الآن أن $D^2A = \{0\}$

ليكن $z \in D^2A$ عندئذ يوجد x, y من D^1A بحيث $z = [x, y]$

وبالاستناد إلى ما سبق نكتب:

$$z = [x, y] = [\lambda e_1 + \mu(be_2 - ae_3), \lambda' e_1 + \mu'(be_2 - ae_3)]$$
$$= (\lambda\mu' - \mu\lambda')[be_2 - ae_3, e_1]$$
$$= \alpha(a[e_1, e_3] - b[e_1, e_2]) \quad ; \quad \alpha \neq 0$$
$$= \alpha(abe_1 - bae_1) = 0$$

ومنه $D^2A = \{0\}$

وبناء على ذلك، يكون A جبر لي قابلاً للحل ودليله 2.

سنبرهن الآن النظرية المهمة التالية:

نظرية (٢-٤)

كل جبر جزئي من جبر لي قابل للحل يكون قابلاً للحل كذلك.

البرهان

ليكن B جبراً جزئياً من جبر لي A الذي نفترض أنه قابل للحل ودليله n فعندئذ يحقق A العلاقة $D^n A = \{0\}$ وسنبرهن أن $D^n B \subseteq D^n A$. لتقديم برهان عن طريق الاستقراء، يلاحظ أن:

$$DB = [B, B] \subseteq [A, A] = DA$$

وبالتالي إن الدعوى صحيحة من أجل $n = 1$. لنفرض أنها صحيحة من أجل n ونبين صحتها من أجل $n + 1$.

في الحقيقة، لدينا واستناداً إلى الفرض الاستقرائي:

$$D^{n+1}B = [D^n B, D^n B] \subseteq [D^n A, D^n A] = D^{n+1}A$$

إذن الدعوى صحيحة وبالتالي $D^n B \subseteq D^n A = \{0\}$ وهذا يؤكد أن خاصية قابلية الحل لجبور لي وراثية.

نظرية (٢-٥)

ليكن f تشاكلاً لجبر لي القابل للحل A في جبر لي A' عندئذ $f(A)$ لابد وأن يكون قابلاً للحل أيضاً.

البرهان

لنفترض أن A جبر لي قابل للحل ودليله n ، فعندئذ يكون $D^n A = \{0\}$.

من جهة أخرى من السهل رؤية أن الصورة المباشرة لجبر لي وفق تشاكل يكون جبر لي، وهذا يعني أن $f(A)$ جبر جزئي من جبر لي A'.

أيضاً سنبرهن عن طريق الاستقراء أن $f(D^n A) = D^n(f(A))$.

من الواضح أن الدعوى صحيحة من أجل $n = 1$ باعتبار أن:

$$f(DA)=f[A,A]=[f(A),f(A)]=D(f(A))$$

ولنفرض أنها صحيحة من أجل n ولنبرهن على صحتها من أجل $n+1$.

في الحقيقة، استناداً إلى مفهوم التشاكل بين جبور لي ووفقاً للفرض الاستقرائي يكون لدينا:

$$f(D^{n+1}A)=f[D^nA,D^nA]=[f(D^nA),f(D^nA)]$$
$$=[D^n(f(A)),D^n(f(A))]=D^{n+1}(f(A))$$

نستنتج أن الدعوى صحيحة ويترتب على هذا أن:

$$D^n(f(A))=f(D^nA)=f(\{0\})=\{0\}$$

إذن الصورة المباشرة لجبر لي قابل للحل وفق تشاكل يكون جبر لـي قـابلاً للحل. بالإضافة إلى ذلك يمكن أن نعرض مباشرة النتيجة التالية:

نتيجة (٢-٦)

ليكن A جبر لي قابلاً للحل، وليكن I مثالياً في A، عندئذ يكون A/I أيضـاً جبر لي قابلاً للحل.

البرهان

نعلم استناداً إلى النظرية (٥-١) أن جبر الخارج لجبر لي يكون جبر لي، إذن A/I جبر لي. من جهة أخرى، بتطبيق النظرية (٢-٥) على تشاكل الغمر القانوني π لـA في A/I والذي يقرن بكل عنصر من A صف التكافؤ لهـذا العنصر، نجد أن A/I قابلٌ للحل وبالتالي إن جبر الخارج لجبر لي قابل للحـل يكون أيضاً قابلاً للحل.

نظرية (٢-٧)

ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية $\Re$.

عندئذ:

$$1)\quad D(D^n A) = D^{n+1} A$$

$$2)\quad D^n(D^m A) = D^{n+m} A \quad , \quad (\forall n, m \geq 1)$$

البرهان

يبرهن الجزء الأول من هذه النظرية بالاستقراء الرياضي على r $(r \geq 1)$،

وللقيام بذلك، نلاحظ قبل كل شيء أن النظرية صحيحة من أجل $r = 1$

وذلك لأن:

$$D(DA) = D[A, A] = [[A, A], [A, A]]$$
$$= [DA, DA] = D^2 A$$

وكأساس للاستقراء الرياضي نفترض أن النظرية صحيحة من أجل r ونبرهن أنها صحيحة من أجل $r + 1$.

في الواقع، لدينا:

$$D(D^{r+1} A) = D[D^r A, D^r A]$$
$$= [[D^r A, D^r A], [D^r A, D^r A]]$$
$$= [D^{r+1} A, D^{r+1} A] = D^{r+2} A$$

وبطريقة مشابهة يمكننا إقامة البرهان على الجزء الثاني.

إن العبارة واضحة من أجل $r = 1$، وذلك باللجوء إلى الجزء الأول من هـذه النظرية. ولتقديم برهان عن طريق الاستقراء، نفرض أن العبارة صحيحة مـن أجل r ونبيّن أنها صحيحة من أجل $r + 1$.

في الحقيقة، لدينا:

$$D^{r+1}(D^m A) = D(D^r(D^m A))$$
$$= [D^r(D^m A), D^r(D^m A)]$$
$$= [D^{r+m} A, D^{r+m} A] = D^{(r+1)+m} A$$

إن هذه النظرية تقودنا على الفور إلى عرض النظرية الهامة التالية:

نظرية (٢-٨)

ليكن A جبر لي. إذا كان I مثالياً قابلاً للحل في A وكان A/I أيضـــاً قـــابلاً للحل. عندئذ A قابل للحل.

البرهان

لنرمز بـــ m,n على الترتيب لدليل قابليـــة الحل للمثالي I ولجبر لي الخـــارج A/I، فعندئذ يكون $D^n(I)=\{0\}$ و $D^m(A/I)=I$.

لنرمز أيضاً بـــ $\pi : A \to A/I$ لتشاكل الغمر القانوني الـــذي يقـــرن كـــل عنصر من جبر لي A بصف التكافؤ لهذا العنصر، فعندئذ استناداً إلـــى علاقـــة مشار إليها أثناء برهان النظرية السابقة يكون:

$$\pi(D^m A)=D^m(\pi(A))$$

لبرهان هذه النظرية، يلاحظ أولاً أن:

$$\pi(D^m A)=D^m(\pi(A))=D^m(A/I)=I\ldots\ldots \qquad (1)$$

من جهة أخرى، يمكن أن نبين بأسلوب الاستقراء الرياضي أن:

$$\pi(D^m A)=D^m A+I\ldots\ldots \qquad (2)$$

إن هذه الدعوى صحيحة من أجل $m=1$ وذلك لأنه:

$$\begin{aligned}\pi(DA)&=\pi[A,A]=[\pi A,\pi A]=[A/I, A/I]\\ &=[A,A]+I=D(A)+I\end{aligned}$$

نفترض أنها صحيحة من أجل m ولنبرهن على صحتها من أجل $m+1$.

في الواقع، لدينا استناداً إلى خواص التشاكلات وإلى الفرض الاستقرائي:

$$\begin{aligned}\pi(D^{m+1}A) &= \pi[D^m A, D^m A]\\ &= [\pi(D^m A), \pi(D^m A)]\\ &= [D^m A + I, D^m A + I]\\ &= [D^m A, D^m A] + I\\ &= D^{m+1}A + I\end{aligned}$$

نستنتج وفقاً للعلاقات $(1),(2)$ المشار لهما أعلاه أن $D^m A \subseteq I$

ومنه باستخدام النظرية (٢-٧) يكون:

$$D^{n+m}A = D^n(D^m A) \subseteq D^n(I) = \{0\}$$

وبالتالي A جبر لي قابل للحل.

هذه النظرية وبالاشتراك مع النظرية (٢-٦) تنتج النظرية التالية:

نظرية (٢-٩)

ليكن A جبر لي.عندئذ:

١- إن تقاطع مثاليين قابلين للحل في A يكون مثالياً قابلاً للحل.

٢- إن مجموع مثاليين قابلين للحل في A يكون مثالياً قابلاً للحل.

البرهان

إن تقاطع ومجموع مثاليين في A يكون مثالياً في A وذلك اعتماداً على ملاحظة سابقة.

لما كان $I \cap J \subseteq I$ وباعتبار أن I قابلٌ للحل نستنتج استناداً إلى النظرية (٢-٤)، أن $I \cap J$ قابلٌ للحل أيضاً.

لنبرهن الآن الجزء الثاني من النظرية. يلاحظ أولاً أن $I \cap J$ مثالي في I وبالتالي نحصل على جبر لي $I/_{I \cap J}$، من جهة أخرى من السهل على

القارئ رؤية أن I مثالي في $I + J$. ومنه نحصل أيضاً على جبر لي $I+J/_{I}$

لدينا: $I/_{I\bigcap J} \cong I+J/_{I}$ وذلك وفقاً لمبرهنة التماثلات في جبور لي.

وبما أن $I/_{I\bigcap J}$ جبر لي قابل للحل استناداً إلى النظرية (٢-٦) فيتضح أن $I+J/_{I}$ يكون كذلك. ومنه $I + J$ قابلٌ للحل وفقاً للنظرية (٢-٨).

وهكذا يكون قد تم البرهان على النظرية.

ولدينا أيضاً النظرية التالية:

نظرية (٢-١٠)

ليكن I, J مثاليين قابلين للحل في جبر لي A ،عندئذ $[I, J]$ يكون كذلك.

البرهان

في الواقع، إن $[I, J]$ مثالي في A وذلك بالاستناد إلى النظرية(٤-٥).

كذلك، إن كلاً من $[I, J]$,I جبور جزئية من جبر لي A.

وحيث أن $[I, J] \subseteq I$ يترتب على ذلك مباشرةً أن $[I, J]$ مثالي في I.

علاوة على ذلك، بما أن كل جبر جزئي من جبر لي قابل للحل يكون قابل للحل (نظرية(٢-٤)) يتضح أن $[I, J]$ مثالي قابل للحل.

نظرية (٢-١١)

ليكن A جبر لي قابلاً للحل على حقل K. عندئذ توجد متسلسلة متناقصة من المثاليات المميزة في A :

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n = \{0\}$$

بحيث A_{i+1} مثالي في A_i وجبر الخارج A_i/A_{i+1} تبديلي وذلك $(\forall i=1,2,\ldots,n-1)$

البرهان

لنأخذ المتسلسلة المشتقة في جبر لي A التالية:

$$A = D^0A, D^1A, D^2A, \ldots, D^iA, \ldots$$

وإذا رمزنا بــ n لدليل قابلية الحل لجبر لي A، فعندئذ يكون $D^nA = \{0\}$ وبالتالي استناداً إلى مفهوم المتسلسلة المشتقة نحصل على متتالية متناقصة مــن المثاليات المميزة في A والتي تحقق أن $D^{i+1}A$ مثالي في D^iA ويكون أيضاً:

$$[D^iA/D^{i+1}A, D^iA/D^{i+1}A] = [D^iA, D^iA] + D^{i+1}A = D^{i+1}A$$

٣- المتسلسلة المركزية المتناقصة

ليكن A جبر لي. يمكن بالاعتماد على مبدأ الاستقراء الرياضي بنـــاء متسلســـلة متناقصة من المثاليات المميزة في A كما يلي:

$$C^1A = A,\quad C^2A,\quad C^3A,\quad \ldots,\quad C^rA,\quad \ldots$$

حيث $C^rA = [A, C^{r-1}A]$ وذلك $(\forall r = 2,3,\ldots)$.

وتعرف هذه المتسلسلة بـــ " **المتسلسلة المركزية المتناقصة** " وتلعب دوراً هاماً في جبور لي عديمة القوى.

ولدينا في الحال التمهيدية التالية:

تمهيدية (٣-١)

ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية $\Re$، ولتكن J مجموعة جزئية من A، فعندئذ: $C^rJ \subseteq C^rA \;\; ; \;\; (r \geq 1)$

البرهان

يمكن إقامة برهان بطريقة الاستقراء الرياضي.

من السهل أن نرى أن العبارة المفروضة صحيحة من أجل $r = 1$

وذلك بملاحظة أن: $C^1 J = J \subseteq A = C^1 A$

وكأساس للاستقراء نفترض أن العبارة صحيحة من أجل $r - 1$ ونبرهن أنها صحيحة من أجل r.

لدينا في الحال:

$$C^r J = [J, C^{r-1} J] \subseteq [A, C^{r-1} A] = C^r A$$

نظرية (٣-٢)

ليكن A جبر لي، عندئذ:

$$1 - D^n A \subseteq C^{n+1} A$$
$$2 - [C^m A, C^n A] \subseteq C^{m+n} A$$

وذلك مهما يكن m, n أعداد صحيحة موجبة.

البرهان

سنقدم برهاناً لهذه النظرية عن طريق مبدأ الاستقراء بالنسبة للمقدار n.

(١) بما أن $D^1 A = [A, A] = C^2 A$ فإن الدعوى صحيحة من أجل $n = 1$. لنفرض أنها صحيحة من أجل n ولنبين على صحتها من أجل $n + 1$.

في الحقيقة، استناداً إلى مفهوم المتسلسلة المشتقة في جبر لي A والفرض الاستقرائي فإن:

$$D^{n+1} A = [D^n A, D^n A] \subseteq [A, C^{n+1} A] = C^{n+2} A$$

(٢) لنبرهن على صحة الجزء الثاني من هذه النظرية. بما أن:

$$[C^m A, C^1 A] = [C^m A, A] = [A, C^m A] = C^{m+1} A$$

فإن الدعوى صحيحة من أجل $n = 1$.

لنفرض أن الدعوى صحيحة من أجل n ولنبرهن على صحتها من أجل $n+1$.

في الحقيقة، استناداً إلى النظرية (١-٥) المتعلقة بالمقاسات الجزئية في جبر لي الواردة في الفصل الثاني ووفقاً للفرض الاستقرائي نكتب:

$$\begin{aligned}
[C^m A, C^{n+1} A] &= [C^m A, [A, C^n A]] \\
&\subseteq [C^n A, [C^m A, A]] + [A, [C^n A, C^m A]] \\
&\subseteq [C^n A, [A, C^m A]] + [A, C^{n+m} A] \\
&\subseteq [C^n A, C^{m+1} A] + C^{n+m+1} A \\
&\subseteq C^{n+m+1} A
\end{aligned}$$

أي أن $[C^m A, C^{n+1} A] \subseteq C^{n+m+1} A$ والنظرية صحيحة.

٤ - جبور لي نصف البسيطة

يقال عن جبر لي A إنه **نصف بسيط** إذا لم يحوِ أيَّ مثالي حقيقي تبادلي.

نبرهن أولاً النظرية الهامة:

نظرية (٤-١)

إذا كان A جبر لي، فإن الدعاوى الثلاث التالية متكافئة:

١ - A نصف بسيط.

٢ - لا يملك A أي مثالي حقيقي قابلٍ للحل.

٣ - $Rad(A) = \{0\}$

البرهان

لنبرهن أولاً أن(١) تقتضي (٢).

لنفرض جدلاً أن J مثالي حقيقي قابل للحل في A، ولنعتبر أن دليله r.

عندئذ $D^r(J) = \{0\}$ وبالتالي: $[D^{r-1}(J), D^{r-1}(J)] = \{0\}$.

باعتبار أن $D^{r-1}(J) \neq \{0\}$ وذلك لأن دليل قابلية الحل هو r ولما كان $D^{r-1}(J) \subset A$ فنستنتج أن $D^{r-1}(J)$ مثالي حقيقي وتبادلي في A فإن هذا يناقض الفرض بأن A نصف بسيط. إذن(١)$\Leftarrow$(٢).

لنثبت أن (٢) تقتضي (١).في الحقيقة، باعتبار أن جبر لي A لا يحوي أي مثالي حقيقي قابل للحل فمن الواضح أن A لا يحوي أي مثالي حقيقي تبادلي وذلك لأن كل مثالي تبادلي يكون مثالياً قابلاً للحل.

لإتمام إثبات النظرية، يكفي إثبات أن (٢) $\Leftrightarrow$(٣) وهذا واضح من خلال تعريف الأساس في جبر لي A .

والجوهري بالنسبة لهذه الفقرة هو إثبات أن جبر الخارج $A/_{RadA}$ يكون نصف بسيط:

سنذكر قبل ذلك النتيجة التالية دون برهان، تاركين للقارئ بيان ذلك.

نتيجة (٤-٢)

إذا كان I مثالياً في جبر لي نصف بسيط A ، فعندئذ $A/_I$ يكون نصف بسيط.

نظرية (٤-٣)

إذا كان A جبر لي، فإن جبر الخارج $A/_{RadA}$ يكون نصف بسيط.

البرهان

ليكن $\frac{I}{RadA}$ مثالياً قابلاً للحل في جبر لي $\frac{A}{RadA}$، حيث I مثالي في A ويحوي $RadA$.

باعتبار أن $RadA$ قابلٌ للحل، فلدينا استناداً إلى النظرية (٢-٨) إن I قابلٌ للحل، وبالتالي $I \subseteq RadA$ ومنه $I = RadA$.

ونستنتج أن $\frac{I}{RadA} = RadA$ أي أن كل مثالي قابل للحل يكون مثالياً صفرياً.

يتضح مما سبق أن جبر لي $\frac{A}{RadA}$ لا يملك أي مثالي حقيقي قابل للحل.

إذن $\frac{A}{RadA}$ نصف بسيط.

وبدلالة المفاهيم التي عرفناها لتوّنا نبرهن النظريتين التاليتين:

نظرية (٤-٤)

ليكن I مثالياً قابلاً للحل في جبر لي A، إذا كان $\frac{A}{I}$ نصف بسيط.

عندئذ $I = RadA$.

البرهان

لبرهان هذه النظرية، نلاحظ أنه وفقاً للنظرية (٢-٩)، $I + RadA$ مثالي قابل للحل في جبر لي A، ويترتب على هذا أن $\frac{I + RadA}{I}$ مثالي قابل للحل في جبر لي نصف البسيط $\frac{A}{I}$.

وبالتالي نرى أن $I + RadA \subseteq I$ ومنه $I = RadA$.

نظرية (٤-٥)

إذا كان $f : A \to A'$ تشاكلاً غامراً لجبري لي A, A' فإن $f(RadA) = RadA'$

البرهان

لنأخذ التطبيق: $\psi : A/RadA \to A'/f(RadA)$

المعرف بالصيغة $\psi(x + RadA) = f(x) + f(RadA)$

من الواضح أن التطبيق ψ تشاكل بين جبري لي $A/RadA$, $A'/f(RadA)$ وذلك:

$$\begin{aligned}
\psi[x + RadA, x' + RadA] &= \psi([x, x'] + RadA) \\
&= f[x, x'] + f(RadA) \\
&= [f(x), f(x')] + f(RadA) \\
&= [f(x) + f(RadA), f(x') + f(RadA)] \\
&= [\psi(x + RadA), \psi(x' + RadA)]
\end{aligned}$$

وسوف نترك للقارئ متعة التحقق من بقية الشروط.

علاوة على ذلك، بالرجوع إلى مبرهنة التماثل الأولى وباعتبار أن ψ غامر وضوحاً نستنتج أن:

$$\left. {A/RadA} \right/ Ker\psi \approx A'/f(RadA)$$

يترتب على ذلك، وفقاً للنظرية (٤-٣) والنتيجة (٤-٢) أن: $A'/f(RadA)$ نصف بسيط ومنه بحسب النظرية السابقة يتضح أن $f(RadA) = RadA'$ وبالتالي يتم إثبات النظرية.

الفصل الرابع

جبور لي معدومة القوى

وَ

الأشكال الخطانية على جبور لي

١ - جبور لي معدومة القوى

ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبديلية $\Re$. إذا كان يوجد عدد صحيح موجب m بحيث $C^m A = \{0\}$، فيقال إن A **معدوم القوى**.

وإذا كان m أصغر عدد صحيح موجب بحيث أن $C^m A = \{0\}$ فيقال إن A جبر لي **معدوم القوى دليله** m.

نظرية (١-١)

كل جبر لي معدوم القوى يكون قابلا للحل.

البرهان

ليكن A جبر لي معدوم القوى ودليله m، فعندئذ يكون $C^m A = \{0\}$ وبالتالي استناداً إلى خواص المتسلسلة المركزية المتناقصة التي أوردناها في الفقرة(٣) من الفصل الثالث يكون:

$$D^m A \subseteq C^{m+1} A \subseteq C^m A = \{0\}$$

يتضح من ذلك أن $D^m A = \{0\}$.

ومنه A جبر لي قابل للحل.

توضيح (١-٢)

نحذر القارئ من أن عكس هذه النظرية غير صحيح. وكتوضيح لذلك، لنعتبر A جبر لي على الحقل K بحيث أن $\dim A = 2$، ولنفرض أن $\{e_1, e_2\}$ قاعدة له. من السهل رؤية ثلاث حالات ممكنة:

الحالة الأولى: لنفرض أن $[e_1, e_2] = \lambda e_1$ وليكن $z \in C^2 A = [A, A]$ فعندئذ هنالك $x, y \in A$ بحيث أن $z = [x, y]$ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} z &= [\alpha e_1 + \beta e_2, \alpha' e_1 + \beta' e_2] \\ &= \alpha\beta'[e_1, e_2] - \beta\alpha'[e_1, e_2] \\ &= (\alpha\beta' - \beta\alpha')[e_1, e_2] = (\alpha\beta' - \beta\alpha')\lambda e_1 = k e_1 \end{aligned}$$

نستنتج أن

$$C^2 A = \{k e_1 : k \in K\} \neq \{0\}$$

لنفرض الآن أن $z \in C^3 A = [A, C^2 A]$ فيوجد وفقاً لطريقة تشكيل المتسلسلة المركزية المتناقصة عناصر مثل $x \in A \quad , \quad y \in C^2 A$ وبحيث يكون $z = [x, y]$ وبالتالي يكون:

$$z = [\alpha e_1 + \beta e_2, k e_1] = \mu e_1; \quad (\mu \in K)$$

ومنه نستنتج أن:

$$C^3 A = \{\mu e_1 : \mu \in K\} = C^2 A \neq \{0\}$$

إذا تابعنا العمل نحصل على العلاقة المهمة

$$C^2 A = C^3 A = \ldots = C^r A = \ldots \neq \{0\}; \quad (\forall r \geq 2)$$

الحالة الثانية : لنفرض أن $[e_1, e_2] = \lambda e_2$. يمكننا إعادة عرض المناقشة تماماً كما في الحالة الأولى وبالتالي نتوصل إلى العلاقة:

$$C^r A \neq \{0\} \quad ; \quad (\forall r \geq 2)$$

الحالة الثالثة: لنفترض أن:

$$[e_1, e_2] = \lambda e_1 + \mu e_2 \quad ; \quad (\lambda, \mu \in K - \{0\})$$

يمكن بسهولة رؤية أن الحالة العامة تؤول إلى إحدى الحالتين السابقتين.

مما سبق نجد أن كل جبر لي على الحقل K عدد أبعاده 2 غير معدوم القــوى.

وبالرجوع إلى النظرية (٢-٢) نستنتج الحقيقة التالية:

ليس من الضروري أن يكون كل جبر لي قابلاً للحل معدوم القوى.

٢- المركز والممركز في جبر لي

ندعو **مركز جبر لي** A، مجموعة العناصر من A التي تتصف بخاصة الإبدال مع جميع عناصر A، أي

$$CenA = \{x \in A : [x, y] = 0 \quad ; \quad \forall y \in A\}$$

ويقصد بممركز مجموعة جزئية S من جبر لي A مجموعة العناصر مــن A المتبادلة مع جميع عناصر المجموعة S، أي:

$$Cen_A S = \{x \in A : [x, s] = 0 \quad ; \quad \forall s \in S\}$$

نظرية (٢-١)

إن مركز جبر لي A يكون مثاليّاً مميزاً في A.

البرهان

يلاحظ قبل كل شيء أن $CenA \neq \Phi$ وذلك لأن $0 \in CenA$

لنبين أن $CenA$ مقاس جزئي من A.

في الواقع، مهما يكن $x, y \in CenA$ ومهما يكن $\alpha, \beta \in \Re$ فإن:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z] = 0; \quad \forall z \in A$$

وبالتالي $\alpha x + \beta y \in CenA$

أيضا، مهما يكن $d \in CenA$ ومهما يكن $x \in A$ فإن:

$$[dx,z]=d[x,z]-[x,dz]=0; \quad \forall z\in A$$

وبالتالي $dx\in CenA$ إذن $CenA$ مثالي مميز في A.

نظرية (٢-٢)

إن مركز أي مجموعة جزئية من جبر لي A يكون جبراً جزئياً من A.

البرهان

بفرض أن S مجموعة جزئية من A، وليكن $x,y\in Cen_A S$ فعندئذ:

$$[x-y,s]=[x,s]-[y,s]=0 \quad ; \quad \forall s\in S$$

وبالتالي $x-y\in Cen_A S$

من جهة أخرى استناداً إلى متطابقة جاكوبي لدينا:

$$[[x,y],s]=-[s,[x,y]]=[x,[y,s]]+[y,[s,x]]=0$$

وذلك مهما يكن $s\in S$ نستنتج أن: $[x,y]\in Cen_A S$

وبالتالي يكون $Cen_A S$ جبر لي من A.

نظرية (٢-٣)

إن مركز أي مثالي مميز في جبر لي A يكون مثاليّاً مميزاً.

البرهان

ليكن B مثاليّاً مميزاً في جبر لي A. من السهل رؤية أن $Cen_A B$ مقاس جزئي من A. من جهة أخرى إذا كان $d\in Der(A)$, $y\in Cen_A B$ ومهما يكن $x\in B$ فإن: $d[x,y]=[dx,y]+[x,dy]$

واستناداً إلى كون $[x,y]=0$، ينتج أن $[dx,y]=[dy,x]$ وبملاحظة أن $dx\in B$ لأن B مثالي مميز بالفرض يتضح أن $[dy,x]=0$

ومنه $dy\in Cen_A B$ إذن $Cen_A B$ مثالي مميز في A.

ولدينا إذن النتيجة التالية:

نتيجة (٢-٤)

إن ممركز أي مثالي في جبر لي يكون مثالياً.

تعريف (٢-٥)

يقال عن جبر لي A على حلقة واحدية تبادلية R إنه تـام، إذا كـان مركـزه معدوماً وكل تطبيق اشتقاق فيه يكون داخلياً. أي:

$$Der(A) = Inn(A) \quad , \quad CenA = \{0\}$$

٣- السلاسل المركزية المتزايدة

ليكن A جبر لي، وليكن: $A_{[0]} = \{0\}, A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots, A_{[i]}, \ldots$

متتالية من المجموعات الجزئية من A بحيث $\left(A_{[i]} \big/ A_{[i-1]} = Cen\left(A \big/ A_{[i-1]} \right) \right.$

وذلك مهما يكن $(i = 1,2,\ldots.)$.

نتساءل أولاً عن طبيعة عناصر هذه المتتالية.

وفقاً لتعريف المتتالية من السهل رؤية أن: $A_{[1]} \big/ A_{[0]} = Cen\left(A \big/ A_{[0]} \right)$

وبالتالي: $A_{[1]} \big/ A_{[0]} = Cen\left(A \big/ \{0\} \right)$ ومنه $A_{[1]} = Cen(A)$ لأن:

$$x \in A_{[1]} \Leftrightarrow x + \{0\} \in A_{[1]} \big/ \{0\} \Leftrightarrow x + \{0\} \in Cen\left(A \big/ \{0\} \right)$$

$$\Leftrightarrow [x + \{0\}, y + \{0\}] = \{0\}; \quad \forall y \in A$$

$$\Leftrightarrow [x,y]+\{0\}=\{0\}; \quad \forall y\in A$$
$$\Leftrightarrow [x,y]=0; \quad \forall y\in A$$
$$\Leftrightarrow x\in CenA$$

نظرية (٣-١)

ليكن A جبر لي، عندئذ:

$$A_{[m]}=\{x_{m+1}\in A:[x_1,\dots,[x_{m-1},[x_m,x_{m+1}]]\dots]=0 \quad ; \quad \forall x_i\in A \quad ,(1\le i\le m)\}$$

البرهان

وفقاً للنظرية السابقة، من السهل رؤية قبل كل شيء أن:

$$A_{[1]}=Cen(A)=\{x_2\in A:[x_1,x_2]=0;\forall x_1\in A\}$$

يمكننا الآن إقامة البرهان على النظرية بأسلوب الاستقراء الرياضي على m.

إذا كان $m=2$، وليكن $x_3\in A_{[2]}$ فعندئذ يمكن أن نكتب:

$$x_3+CenA\in Cen(A/CenA)$$

وهذا يعني أن: $[x_3+CenA,x_2+CenA]=CenA$

وذلك مهما يكن $x_2\in A$ وبشكل مكافئاً نكتب أيضاً

$[x_3,x_2]+CenA=CenA$ وبالتالي $[x_3,x_2]\in CenA$

إذن $[x_1,[x_2,x_3]]=[[x_3,x_2],x_1]=0$ وذلك مهما يكن $x_1,x_2\in A$

نستنتج أن:

$$A_{[2]}=\{x_3\in A:[x_1,[x_2,x_3]]=0;\forall x_1,x_2\in A\}$$

الآن نفرض أن النظرية صحيحة من أجل $m = n-1$ ثم نبرهن على صحتها من أجل $m = n$.

ليكن $x_{n+1} \in A_{[n]}$ فعندئذ استنادا إلى أسلوب تشكيل المتتالية الوارد أعلاه نكتب:

$$x_{n+1} + A_{[n-1]} \in A_{[n]} / A_{[n-1]} = Cen(A / A_{[n-1]})$$

وبالتالي

$$[x_{n+1} + A_{[n-1]} \quad , x'_n + A_{[n-1]}] = A_{[n-1]} \quad ; \forall x'_n \in A$$

أي $[x_{n+1}, x'_n] + A_{[n-1]} = A_{[n-1]}$ ومنه $[x_{n+1}, x'_n] \in A_{[n-1]}$.

وبوضع $x_n = -x'_n$ نجد $[x_n, x_{n+1}] \in A_{[n-1]}$ واعتمادا على النص الاستقرائي يمكن أن نكتب:

$$[x_1, ..., [x_{n-1}, [x_n, x_{n+1}]]...] = 0; \quad \forall x_i \in A \quad , (1 \le i \le n)$$

إذن صحة النظرية تصبح عندئذ واضحة وبالتالي:

$$A_{[m]} = \{x_{m+1} \in A : [x_1, ..., [x_{m-1}, [x_m, x_{m+1}]]...] = 0 \quad ; \quad \forall x_i \in A \quad (1 \le i \le m)\}$$

نظرية (٣-٢)

إذا كان A جبر لي، فإن $A_{[n-1]}$ مثالي في $A_{[n]}$ وذلك مهما يكن $n \ge 1$.

البرهان

لنبرهن أولا أن $A_{[n-1]} \subseteq A_{[n]}$ وذلك مهما يكن $n \ge 1$.

في الحقيقة، إذا كان $x_n \in A_{[n-1]}$ فإن: $[x_1, [x_2, ..., [x_{n-1}, x_n]]...] = 0$ وذلك مهما يكن $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ من A.

وبما أن $[x_0,0]=0$ وذلك أيا كان $x_0 \in A$ فيتضح أن:

$$[x_0,[x_1,[x_2,....,[x_{n-1},x_n]]...]=0$$

وذلك $\forall x_0,x_1,x_2,....,x_{n-1} \in A$ نستنتج من ذلك أن $x_n \in A_{[n]}$.

من جهة أخرى، لنبين أن $A_{[n-1]}$ مقاس جزئي من $A_{[n]}$.

ليكن $x_n, y_n \in A_{[n-1]}$ ومهما يكن $\alpha, \beta \in \Re$ فإن:

$$[x_1,[x_2,....,[x_{n-1},\alpha x_n+\beta y_n]]...]=$$
$$=\alpha[x_1,[x_2,....,[x_{n-1},x_n]]...]+\beta[x_1,[x_2,....,[x_{n-1},x_n]]...]=0$$
$$; \quad \forall x_1,x_2,....,x_{n-1} \in A$$

وبالتالي $\alpha x_n+\beta y_n \in A_{[n-1]}$.

يكفي حتى يتم المطلوب أن نبين أن:

$$[A_{[n-1]},A_{[n]}] \subseteq A_{[n-1]}$$

ليكن $y \in [A_{[n-1]},A_{[n]}]$ فعندئذ يوجد $x_n \in A_{[n-1]}$، $x_{n+1} \in A_{[n]}$ بحيث $y=[x_n,x_{n+1}]$ وبالتالي يكون:

$$[x_1,[x_2,....,[x_{n-1},[x_n,x_{n+1}]]...]=0$$

وذلك مهما يكن $x_1,x_2,....,x_n$ من A

أي

$$[x_1,[x_2,....,[x_{n-1},y]]...]=0$$

ومنه $y \in A_{[n-1]}$

فعلاقة الاحتواء صحيحة، وهكذا نكون قد برهنا النظرية.

أكثر من ذلك، نعرض النظرية التالية:

نظرية (٣-٣)

إذا كان A جبر لي، فإن $A_{[n]}$ مثالي مميز في A .

البرهان

في الواقع، بما أن $A_{[n]}$ مقاس جزئي من $A_{[n+1]}$ وفقاً للنظرية (٣-٢) فإن $A_{[n]}$ مقاس جزئي من A .

ليكن $d \in Der(A)$ ومهما يكن $x_{n+1} \in A_{[n]}$ فإن:

$$[x_1,[x_2,....,[x_n,x_{n+1}]]...]=0; \quad \forall x_1,x_2,...,x_n \in A$$

وبالتالي:

$$d([x_1,[x_2,....,[x_n,x_{n+1}]]...])=0; \quad \forall x_1,x_2,...,x_n \in A$$

وبتعميم مفهوم الاشتقاق الوارد في الفقرة (٣) فإن العلاقة الأخيرة تكتب:

$$[dx_1,[x_2,....,[x_n,x_{n+1}]]...]+[x_1,[dx_2,....,[x_n,x_{n+1}]]...]$$
$$+....+[x_1,[x_2,....,[x_n,dx_{n+1}]]...]=0$$

وبملاحظة أن كل حد من الطرف الأيسر في هذه العبارة باستثناء الحد الأخير معدوم وذلك لأن $x_{n+1} \in A_{[n]}$ فنجد أن:

$$[x_1,[x_2,....,[x_n,dx_{n+1}]]...]=0; \quad \forall x_1,x_2,...,x_n \in A$$

ومنه $dx_{n+1} \in A_{[n]}$.

نستنتج أن $d(A_{[n]}) \subseteq A_{[n]}$ وبالتالي $A_{[n]}$ مثالي مميز في A .

تعريف (٣-٤)

تدعى المتتالية المتزايدة $A_{[0]}=\{0\}, A_{[1]}, A_{[2]},...., A_{[n]},...$

من المثاليات المميزة في جبر لي A **بالمتسلسلة المركزية المتزايدة.**

إن المتسلسلة المركزية المتزايدة وحيدة، سنرى في النظريات القادمة شروط انقطاع هذه المتسلسلة.

نظرية (٣-٥)

ليكن A جبر لي معدوم القوى، عندئذ:

١- إنّ كل مثالي I من A يكون معدوم القوى.

٢- إنّ جبر الخارج A/I يكون معدوم القوى.

البرهان

إذا كان r دليل جبر لي معدوم القوى A، فإن $C^r A = \{0\}$.

ولما كان من السهل رؤية أن $C^r I \subseteq C^r A$ نستنتج أن $C^r I = \{0\}$

وبالتالي I مثالي معدوم القوى.

ليكن ϕ تشاكل الغمر القانوني من A إلى A/I. وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضي نرى أن $C^r(\phi(A)) = \phi(C^r A)$ وذلك مهما يكن $r \geq 1$ وبالتالي:

$$C^r(A/I) = C^r(\phi(A)) = \phi(C^r(A)) = \phi(\{0\}) = I$$

ومنه A/I معدوم القوى.

نظرية (٣-٦)

إذا كان A جبر لي عديم القوى على الحقل K، فإن المتسلسلة المركزية المتزايدة $\{0\} = A_{[0]}, A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots, A_{[i]}, \ldots$ تكون منتهية الطول.

البرهان

لنفرض أن r دليل جبر لي عديم القوى A، أي: $C^r A = \{0\}$

ومنه

$$[x_1,[x_2,....,[x_{r-1},x_r]]...]=0 \qquad \forall x_i \in A; \quad (1\le i\le n)$$

وبما أن

$$A_{[m]}=\{x_{m+1}\in A:[x_1,[x_2,....,[x_m,x_{m+1}]]...]=0$$
$$\forall x_i\in A \qquad (1\le i\le m)\}$$

نستنتج أن $x_r \in A_{[r-1]}$ وبالتالي $A_{[r-1]}=A$

وبناءً على ذلك، يوجد عدد صحيح موجب $t=r-1$ بحيث $A_{[t]}=A$

وعليه المتسلسلة المركزية المتزايدة تكون منتهية الطول.

نظرية (٣-٧)

كل جبر لي معدوم القوى A مغايرٌ للصفر يملك مركزاً غير صفري.

البرهان

ذلك لأنه إذا كان $CenA=\{0\}$ فعندئذ استنادا إلى خواص المتسلسلة المركزية المتزايدة يكون $A_{[1]}=CenA=\{0\}$

$$A_{[2]}\big/A_{[1]}=A_{[2]}\big/\{0\}=Cen(A\big/\{0\})$$

وبالتالي $A_{[2]}=CenA=\{0\}$

وهكذا بصورة عامة نجد علاقة من الشكل: $A_{[m]}=\{0\}; \quad \forall m\ge 1$

من جهة أخرى، بما أن A معدوم القوى، فيتضح وفقا للنظرية(٣-٦) أن المتسلسلة المركزية $A_{[0]},A_{[1]},A_{[2]}......$ متقطعة، أي هناك عددٌ صحيحٌ موجبٌ t بحيث $A_{[t]}=A$. نستنتج مما سبق أن $A=\{0\}$ وهذا تناقض مع الفرض ومنه $CenA\ne\{0\}$ والنظرية إذن محققة.

نظرية (٣-٨)

ليكن A جبر لي عديم القوى على الحقل K. عندئذ يوجد سلسلة منتهية متناقصة من المثاليات في A

$$A = A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq A_2 \cdots\cdots \supsetneq A_m = \{0\}$$

بحيث أن $[A, A_i] \subset A_{i-1}$ وذلك مهما يكن $(i = 1,2,\ldots,m)$

البرهان

بما أن A جبر لي عديم القوى، فنلاحظ من النظرية (٣-٦) أن المتسلسلة المركزية المتزايدة تكون منتهية الطول

$$\{0\} = A_{[0]} \subsetneq A_{[1]} \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq A_{[m]} = A$$

وبالتالي نحصل على متسلسلة متناقصة من المثاليات في A من النمط:

$$A = A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq A_2 \cdots\cdots \supsetneq A_m = \{0\}$$

وفضلاً عن ذلك، وبالاستفادة من النظرية (   ) والنظرية (   ) نجد:

$$[A, A_i] = [A, A_{[m-i]}] \subseteq A_{[m-i]} \subseteq A_{[m-(i-1)]} = A_{i-1}$$

وهكذا نكون قد برهنا النظرية.

٤ - تمثيلات جبر لي

ليكن A جبر لي على الحقل K، وليكن V فضاءً متجهياً على الحقل K.

رأينا سابقاً أن $GL_K(V)$ مجموعة المؤثرات الخطية على V تشكل جبر لي.

إن التمثيل لجبر لي A فوق الفضاء المتجهي V هو كل تطبيق:

$$T : A \to GL_K(V)$$
$$x \mapsto T_x$$

يتصف بالخواص التالية:

1. $T_{x+y} = T_x + T_y$

2. $T_{\alpha x} = \alpha T_x$

3. $T_{[x,y]} = [T_x, T_y] = T_x \circ T_y - T_y \circ T_x$

وذلك أياً كان x, y من A ومهما تكن $\alpha \in K$.

بتعبير مكافئ، إن التمثيل لجبر لي A هو تشاكل T بين جبري لي $GL_K(V)$ ، A.

ومن الملائم أن نرمز بـ $Hom(A, GL(V))$ أو بـ $\operatorname{Re} p_V(A)$ لمجموعة التمثيلات لجبر لي A بالنسبة للفضاء المتجهي V.

الحالة الخاصة ذات الأهمية الكبيرة لتمثيلات جبر لي هي التالية:

ليكن A جبر لي على الحقل K، من الواضح بأنه يمكن النظر إلى A كمقاس على ذاته، حيث قانون التشكيل الخارجي هو العملية الثنائية $[x, y] = ad_x(y)$ وبالتالي نحصل على جبر لي $GL(A)$.

لنأخذ التطبيق:

$$ad : A \to GL(A)$$
$$x \mapsto ad_x$$

حيث يكون $ad_x(z) = [x, z]$ وذلك مهما يكن $z \in A$.

إن التطبيق ad يحقق ما يلي:

. $$ad_{x+y}(z) = [x+y, z] = [x, z] + [y, z] = ad_x(z) + ad_y(z) = (ad_x + ad_y)(z)$$

. $$ad_{\alpha x}(z) = [\alpha x, z] = \alpha[x, z] = \alpha ad_x(z).$$

. $$ad_{[x,y]}(z) = [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

$$= ad_x[y,z] - ad_y[x,z]$$
$$= ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z))$$
$$= (ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x)(z)$$
$$= [ad_x, ad_y](z)$$

يتضح من ذلك أن ad تشاكل بين جبري لي $GL_K(A)$،A . ومن الملائم تسميته من الآن وصاعداً **بالتمثيل المرافق** لجبر لي A .

إن نواة التمثيل المرافق ad لجبر لي A ، هي:

$$Ker(ad) = \{x \in A : ad_x = 0\}$$
$$= \{x \in A : ad_x(z) = 0; \quad \forall z \in A\}$$
$$= \{x \in A : [x,z] = 0; \quad \forall z \in A\}$$
$$= CenA$$

نستنتج مما سبق **النتيجة** الهامة:

إذا كان A جبر لي بسيطاً (أي أن A تبادلي ولا يحوي أي مثالي حقيقي).

فعندئذ $CenA = \{0\}$ وهذا يعني أن كل جبر لي بسيطاً يماثل جبر لي الخطي.

توضيح

ليكن A جبر لي ثلاثي البعد على الحقل K الوارد في التمرين (٢-٣)، والمولَّد بالمجموعة $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ والذي يحقق الشروط التالية:

$$[x_1, x_2] = ax_1 \quad , \quad [x_1, x_3] = bx_1$$
$$[x_2, x_3] = cx_1 - fbx_2 + fax_3 \quad ; \quad (a,b,c,f \in K - \{0\})$$

في الحقيقة، إن كل عنصر x من A يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$$

حيث μ_1, μ_2, μ_3 عناصر من الحقل K.

وهكذا نرى أنه يمكن تعيين:

$$ad_x = ad(x) = \mu_1 ad_{x_1} + \mu_2 ad_{x_2} + \mu_3 ad_{x_3}$$

وحيث $ad : A \to GL(A)$ التمثيل المرافق لجبر لي A المذكور أعلاه.

علاوة على ذلك، يكون $ad_{x_1} : A \to A$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} [x_1, x_1] \\ [x_1, x_2] \\ [x_1, x_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ax_1 \\ bx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$ad_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أيضاً، نرى أن:

$$ad_{x_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x_1, x_1] \\ [x_1, x_2] \\ [x_1, x_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax_1 \\ 0 \\ cx_1 - bfx_2 + afx_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & -bf & af \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أي:

$$ad_{x_2}=\begin{pmatrix}-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ c & -bf & fa\end{pmatrix}$$

وكذلك، بطريقة مماثلة نجد أيضاً أن:

$$ad_{x_3}=\begin{pmatrix}-b & 0 & 0\\ -c & bf & -af\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

٥- الأشكال ثنائية الخطية على جبور لي

تعريف (٥-١)

ليكن A, A' جبري لي على حقل واحد K.

يُقال عن التطبيق $T : A\times A' \to K$ إنه **ثنائي الخطية** على $A\times A'$ إذا كان T خطياً بالنسبة للمركبة الأولى وخطياً بالنسبة للمركبة الثانية.

أي إذا حقق الشروط التالية:

$T(x+x', y) = T(x, y) + T(x', y)$.

$T(x, y+y') = T(x, y) + T(x, y')$.

$T(\alpha x, y) = \alpha T(x, y) = T(x, \alpha y)$.

وذلك أياً كانت العناصر x, x' من A وأياً كانت y, y' من A' ومهما كـان α من K.

بصورة خاصة، إذا كان $A = A'$ فإننا نقول عن T إنه شكل ثنائي الخطية على A. ويُرمز بـ $Bil(A,K)$ أو اختصاراً $Bil(A)$ لمجموعة الأشكال الثنائية الخطية على A.

نقول عن شكل ثنائي الخطية $T \in Bil(A)$ إنه **متناظر** إذا كان يحقق الشرط:

$$T(x,y) = T(y,x) \quad ; \forall x, y \in A........(1)$$

وإنه **شبه متناظر** إذا كان:

$$T(x,y) = -T(y,x) \quad ; \forall x, y \in A........(2)$$

ونلاحظ أيضاً أن الشرط (٢) يؤدي إلى أن $T(x,x) = -T(x,x)$ أو $2T(x,x) = 0$ ، ولما كان $K = R \;\; or \;\; C$ فإن هذا يؤدي إلى أن $T(x,x) = 0$ وذلك مهما كان x من A.

العكس، إذا كان الشكل الخطاني T يحقق الشرط: $T(x,x) = 0 \quad ; \forall x \in A$

ينتج عن ذلك:

$$\begin{aligned} 0 &= T(x+y, x+y) \\ &= T(x,x) + T(x,y) + T(y,x) + T(y,y) \\ &= T(x,y) + T(y,x) \end{aligned}$$

أي أنه يحقق الشرط (٢) وبالتالي T شبه متناظر.

تمهيدية (٥-٢)

كل شكل ثنائي الخطية T من $Bil(A)$ يمكن كتابته على الشكل $T = S_1 + S_2$ حيث $S_1 \in Bil(A)$ وهو متناظر و $S_2 \in Bil(A)$ وهو شبه متناظر.

البرهان

في الواقع، لنعرف التطبيقين S_1, S_2 كما يلي:

$$S_1, S_2 : A \times A \to K$$

حيث

$$S_1(x,y)=\tfrac{1}{2}[T(x,y)+T(y,x)]$$
$$S_2(x,y)=\tfrac{1}{2}[T(x,y)-T(y,x)]$$

فنجد مباشرةً أن S_1 شكل ثنائي الخطية على A وهو متنــاظر، وأن S_2 شــكل ثنائي الخطية على A وهو شبه متناظر. وعلاوة على ذلك، إن $T = S_1 + S_2$.

تعاريف أساسية (٥-٣)

ليكن A جبر لي على حقل K وليكن $T \in Bil(A)$.

- يُقال عن الشكل ثنائي الخطية إنه **غير مترد** أو **منتظم** إذا تحقق الشرط:

$$\forall 0 \neq x \in A \quad ; \exists x' \in A : T(x,x') \neq 0$$

- يُقال عن الشكل الثنائي الخطية T إنه **محدد موجب** إذا كان $T(x,x) > 0$ مهما كان $x \neq 0$ من A، وإذا حقق بالإضافة لذلك الشرط التالي:

$$T(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

- يُقال أخيراً عن الشكل ثنائي الخطية T إنه **متناوب** إذا كان:

$$T([x,y],z)=T(x,[y,z])$$

وذلك مهما تكن x,y,z عناصر من A.

وبتعبير مكافئ إذا كان: $T(ad_x(y),z)=T(x,ad_y(z))$

ومن الملائم أن نورد الحالة الخاصة، تلك التي نأخذ فيها $K=C$.

الأشكال الهرميتية

إذا كان A جبر لي منتهيَ البعد فوق حقل الأعداد العقدية C، وكان

$$h: A\times A \to C$$

تطبيقاً يحقق الشرطين:

1. $h(\alpha x+\beta y,z)=\alpha h(x,z)+\beta h(y,z)$

2. $h(x,y)=\overline{h(y,x)}$

وذلك مهما كان x,y,z من A ومهما كان α,β من C، فإننا نقـول عندئـذ عن h إنه شكل هرميتي على جبر لي A.

ونستنتج على الفور:

إذا كان h شكلاً هرميتياً على جبر لي A فعندئذ يكون:

$$\begin{aligned} h(x,\alpha y+\beta z) &= \overline{h(\alpha y+\beta z,x)} \\ &= \overline{\alpha h(y,x)+\beta h(z,x)} \\ &= \bar{\alpha}\ \overline{h(y,x)}+\bar{\beta}\ \overline{h(z,x)} \\ &= \bar{\alpha}h(x,y)+\bar{\beta}h(x,z) \end{aligned}$$

ونعبر عن هذه النتيجة بالقول، إن الشكل الهرميتي يكون خطياً بالنسبة للمتحول الأول وخطياً مرافقاً بالنسبة للمتحول الثاني.

سنرتقي الآن درجة في سلم الأشكال ثنائية الخطية على جبور لي بإيراد مفهوم **صيغة Killing**. ومن الملائم قبل كل شيء إثبات النظرية التالية:

نظرية (٥-٤)

ليكن A جبر لي فوق الحقل K، إن التمثيل المرافق

$$\begin{aligned} ad : A &\to GL(A) \\ x &\mapsto ad_x \end{aligned}$$

يحقق الموضوعات التالية:

1. $ad_{[x,y]}=[ad_x,ad_y]$

2. $ad_{Dx}=[D,ad_x]$

وذلك أياً كانت x, y عناصر من A ومهما يكن $D \in Der(A)$.

البرهان

ليكن $z \in A$ فعندئذ باللجوء إلى متطابقة جاكوبي نرى:

$$\begin{aligned} ad_{[x,y]}(z) &= [[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\ &= ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z)) \\ &= (ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x)(z) \\ &= [ad_x, ad_y](z) \end{aligned}$$

كذلك، وفقاً لتعريف تطبيقات الاشتقاق نجد:

$$\begin{aligned} [D, ad_x](z) &= (D \circ ad_x)(z) - (ad_x \circ D)(z) \\ &= D[x,z] - [x, Dz] \\ &= [Dx, z] \end{aligned}$$

٦- صيغة Killing وسماتها الأساسية

تعريف (٦-١)

ليكن A جبر لي فوق الحقل K، نعرف صيغة **Killing** على A بأنها شكل ثنائي الخطية يرمز له $< \;,\; >$ وبحيث:

$$< x, y > \;=\; Tr(ad_x \circ ad_y) \;;\; \forall x, y \in A$$

يتضح على الفور بأن صيغة Killing هي شكل خطاني متناظر، لأن المصفوفتين المتشابهتين تملكان الأثر ذاته، بالإضافة إلى ذلك، يمكن عرض النظرية التالية:

نظرية (٦-٢)

إن صيغة Killing لجبر لي A على الحقل K تكون شكلاً ثنائي الخطية متناوباً.

البرهان

للوصول إلى الهدف المنشود، علينا إثبات أن:

$$<[x,z],y>+<x,[y,z]>=0 \quad , \quad \forall x,y,z \in A$$

في الحقيقة، استناداً إلى الجزء الأول من النظرية (٥-٤) يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned}
&<[x,z],y>+<x,[y,z]>= \\
&= Tr(ad_{[x,z]} \circ ad_y) + Tr(ad_x \circ ad_{[y,z]}) \\
&= Tr\{(ad_x \circ ad_z - ad_z \circ ad_x) \circ ad_y\} + \\
&\qquad\qquad + Tr\{ad_x \circ (ad_y \circ ad_z - ad_z \circ ad_y)\} \\
&= Tr(ad_x \circ ad_z \circ ad_y - ad_z \circ ad_x \circ ad_y + \\
&\qquad\qquad + ad_x \circ ad_y \circ ad_z - ad_x \circ ad_z \circ ad_y) \\
&= Tr(ad_x \circ ad_y \circ ad_z - ad_z \circ ad_x \circ ad_y) \\
&= Tr(ad_x \circ (ad_y \circ ad_z)) - Tr(ad_x \circ (ad_y \circ ad_z)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

نظرية (٦-٣)

إن صيغة Killing لجبر لي عديم القوى A على الحقل K تكون صفراً.

البرهان

ينبغي أن يلاحظ القارئ أولاً بأن كل تداكل عديم القوى لفضاء متجهي على حقل K يملك جذوراً مميَّزة مساوية للصفر، وبالتالي تتصف مصفوفة هذا

التداكل بأن جميع عناصر قطرها الرئيسي معدومة والعناصر التي تعلو القطر الرئيسي تتألف من أصفار، أي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فأثر هذا التداكل يساوي الصفر.

من جهة ثانية، A جبر لي عديم القوى إذا وفقط إذا كان كل تطبيق اشتقاق داخلي ad_x عديم القوى.

وعليه فإن مصفوفة التداكل $ad_x \circ ad_y$، وذلك مهما تكن x, y من A، ستكون حتماً مصفوفة مثلثية ومنه $Tr(ad_x \circ ad_y) = 0$ أي $<x, y> = 0$ ومنه يتم إثبات النظرية.

نعلم بالرجوع إلى الفصل الثاني بأن كل تطبيق اشتقاق داخلي على جبر لي A يكون تطبيق اشتقاق على A، ولكن متى يكون العكس ممكناً.

إن النظرية التالية تجيب على هذا التساؤل.

نظرية (٦-٤)

إذا كانت صيغة Killing لجبر لي A منتهي البعد على الحقل K شكلاً ثنائي الخطية غير متردٍ فإن $Der(A) = Inn(A)$.

البرهان

يكفي، وفقاً للملاحظة الأخيرة إثبات أن: $Der(A) \subseteq Inn(A)$

ليكن $D \in Der(A)$. إذا كان $x \neq 0$ من A فثمة عنصر x' من A بحيث $< x', x > \neq 0$، وذلك باعتبار أن صيغة Killing شكل غير متردِ بالفرض، وعليه فإن $K < x', x >$ يمكن أن يأخذ أي قيمة نريدها. نستنتج ما يلي:

$$\forall 0 \neq x \in A \quad , \quad \exists x' \in A \quad : \quad < x', x >= Tr(D \circ ad_x)$$

ليكن z عنصراً اختيارياً من A، فاستناداً إلى المرحلة السابقة والنظرية (٥-٤) نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned}
< z, D_x > &= Tr(ad_z \circ ad_{Dx}) \\
&= Tr(ad_z[D, ad_x]) \\
&= Tr\{ad_z(D \circ ad_x - ad_x \circ D)\} \\
&= Tr(ad_z(D \circ ad_x)) - Tr(ad_z(ad_x \circ D)) \\
&= Tr(D \circ ad_x \circ ad_z) - Tr(D \circ ad_z \circ ad_x) \\
&= Tr(D \circ [ad_x, ad_z]) \\
&= Tr(D \circ ad_{[x,z]}) \\
&= < y', [x, z] >
\end{aligned}$$

وكنتيجة لما ورد وبالاستفادة من كون صيغة Killing لجبر لي A شكلاً متناوباً، نرى أن:

$$\begin{aligned}
< z, (D - ad_y)x > &= < z, D_x > - < z, ad_y(x) > \\
&= < y, [x, z] > - < z, [y, x] > = 0
\end{aligned}$$

وعليه يكون $(D - ad_y)x = 0$ لأن صيغة Killing شكلٌ غير متردِ بالفرض، إذن $D = ad_y$ أي $D \in Inn(A)$ وهكذا نكون قد أقمنا البرهان على النظرية.

وبالإضافة لذلك، نعرض النظرية الهامة التالية:

نظرية (٦-٥)

إذا كانت صيغة Killing لجبر لي A منتهي البعد على الحقل K شكلاً ثنائي الخطية غير مترد فإن A يكون جبر لي نصف بسيط.

البرهان

لنفرض أن صيغة Killing شكل غير متردٍ ولنقبل جدلاً بأن ثمة مثالياً $A \supset J \neq \{0\}$ بحيث $[J,J]=\{0\}$

يترتب على هذا أن $[A,J]=\{0\}$ ، وذلك لأن صيغة Killing شكل متناوب.

لنبرهن أنه أياً كانت x,y من A فإن $<x,y>|_J = 0$

في الحقيقة، إذا كان $a \in J$ فعندئذ يكون:

$$ad_x(ad_y(a))=[x,[y,a]]=[x,0]=0$$

وعليه $ad_x \circ ad_y|_J = 0$

وبالتالي الأثر يكون معدوماً أي $<x,y>|_J = 0$.

يترتب مباشرة، بأن صيغة Killing شكل غير متردٍ وهذا خلاف الفرض ومنه A جبر لي نصف بسيط، والنظرية إذن محققة.

الفصل الخامس

المجموع المباشر لجبور لي

وَ

تمديدات جبور لي

أولاً: المجموع المباشر لجبور لي

إن جبور لي التي نتناولها بالدراسة في هذا الفصل هي جبور لي على حقل K ما لم نذكر خلاف ذلك وبشكل صريح.

١- المجموع المباشر الخارجي لجبور لي

لتكن $G_1, G_2, \ldots, G_n$ جبور لي على الحقل K لنأخذ المجموعة:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} G_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in G_i\}$$

من الواضح قبل كل شيء أن هذه المجموعة ليست خالية، نزود $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ بقانون تشكيل داخلي هو الجمع وآخر خارجي مجموعة مؤثراته K معينين كما يلي:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

وذلك أياً كانت $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ عناصر من $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ وأياً كان $\lambda \in K$.

باللجوء إلى مفهوم المجموع والجداء المباشرين للمقاسات، نرى أن $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ مقاس على الحقل K ندعوه بالمجموع المباشر للمقاسات $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

يمكن الآن بناء جبر لي $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ على الحقل K وذلك بأن نلحق بالمقاس $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ قانون التشكيل الداخلي المعرف بالصيغة:

$$[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_n, y_n])$$

من السهل على القارئ أن يتأكد من أن الخواص التالية ملبّاة.

1. $[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)] =$
$[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)] + [(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)]$
2. $[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)] =$
$[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] + [(x_1, x_2, \ldots, x_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)]$
3. $[\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)]$
$$= [(x_1, x_2, \ldots, x_n), \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$
$$= \lambda[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

علاوة على ذلك، نرى أن:

$$[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n)] = ([x_1, x_1], [x_2, x_2], \ldots, [x_n, x_n])$$
$$= (0, 0, \ldots, 0) = 0 \quad .$$

وذلك بملاحظة أن $[x_i, x_i] = 0$ محققة في G_i، مهما تكن $1 \le i \le n$

وأخيراً، لنتأكد من صحة متطابقة جاكوبي:

في الحقيقة، لدينا:

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] &= [(x_1, x_2, \ldots, x_n), [(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)]] \\
&= [(x_1, x_2, \ldots, x_n), ([y_1, z_1], [y_2, z_2], \ldots\ldots, [y_n, z_n])] \\
&= ([x_1, [y_1, z_1]], [x_2, [y_2, z_2]], \ldots\ldots\ldots, [x_n, [y_n, z_n]])
\end{aligned}$$

كذلك:

$$\begin{aligned}[y,[z,x]] &= [(y_1,y_2,\dots,y_n),[(z_1,z_2,\dots,z_n),(x_1,x_2,\dots,x_n)]]\\ &= [(y_1,y_2,\dots,y_n),([z_1,x_1],[z_2,x_2],\dots,[z_n,x_n])]\\ &= ([y_1,[z_1,x_1]],[y_2,[z_2,x_2]],\dots\dots\dots,[y_n,[z_n,x_n]])\end{aligned}$$

أيضاً، نرى أن:

$$\begin{aligned}[z,[x,y]] &= [(z_1,z_2,\dots,z_n),[(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)]]\\ &= [(z_1,z_2,\dots,z_n),([x_1,y_1],[x_2,y_2],\dots,[x_n,y_n])]\\ &= ([z_1,[x_1,y_1]],[z_2,[x_2,y_2]],\dots\dots\dots,[z_n,[x_n,y_n]])\end{aligned}$$

ولما كانت متطابقة جاكوبي محققة في G_i أي

$$[x_i,[y_i,z_i]]+[y_i,[z_i,x_i]]+[z_i,[x_i,y_i]]=0$$

وذلك مهما تكن $1 \le i \le n$ فإننا نستنتج أن:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

وبالتالي متطابقة جاكوبي محققة، وعليه $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i$ جبر لي على الحقل K،

ندعوه المجموع المباشر الخارجي لجبور لي $G_1,G_2,\dots,G_n$

وكنتيجة لذلك، نعرض النظرية التالية:

نظرية (١-١)

إذا كانت $G_1,G_2,\dots,G_n$ جبور لي على الحقل K، فإن المجموعة

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) : x_i \in G_i\}$$

جبر لي على الحقل K بالنسبة لقوانين التشكيل:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$
$$\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$$
$$[(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)]=([x_1,y_1],[x_2,y_2],\dots,[x_n,y_n])$$

وذلك أياً كانت $(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n),(z_1,z_2,\dots,z_n)$ عناصر من $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ وأياً كان $\lambda \in K$.

٢ – المجموع المباشر الداخلي لجبور لي

ليكن G جبر لي ولتكن $G_1,G_2,\dots,G_n$ جبور لي الجزئية من G.

لنأخذ المجموعة:

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = \left\{x \in G : x=\sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad x_i \in G_i\right\}$$

من السهل التحقق من أن $\sum_{i=1}^{n} G_i$ مقاس على الحقل K، بالإضافة إلى ذلك، إن المقاس G مجموعٌ مباشرٌ داخليٌّ لجماعة المقاسات الجزئية $G_1,G_2,\dots,G_n$ من المقاس G لأنه يمكن كتابة كل عنصر $x \in G$ على الشكل الوحيد $x=\sum_{i=1}^{n} x_i$ حيث يكون $x_i \in G_i$.

من جهة أخرى، مهما يكن $x=\sum_{i=1}^{n} x_i$ ، $y=\sum_{j=1}^{n} y_j$ من $\sum_{i=1}^{n} G_i$ فإنّ:

$$[x,y]=\left[\sum_{i=1}^{n} x_i,\sum_{j=1}^{n} y_j\right]=\sum_{i,j=1}^{n}[x_i,y_j]$$

وبما أنه $[x_i,y_j]$ لا ينتمي بالضرورة إلى أي من G_i أو G_j يترتب على ذلك أن $\sum_{i=1}^{n} G_i$ لا تكون بالضرورة جبر لي ما لم نتخذ تبسيطات إضافية.

ولكن نلاحظ أنه عندما يكون كل من $G_i \ (1 \le i \le n)$ مثالياً في G، وحيث أن $G_i \cap G_j = \{0\}$ وذلك $(i \neq j)$، فإن $[x_i, y_j] \in G_i \cap G_j$ إضافة إلى تحقق شرطي جبر لي الأمر الذي يمكن أن يتحقق القارئ بسهولة من صحته.

وبناء على ذلك، يكون G في هذه الحالة المجموع المباشر الداخلي لـ G_i.

وعليه يمكن أن نورد النظرية الهامة التالية:

نظرية (٢-١)

كل جبر لي G على الحقل K هو مجموعٌ مباشرٌ داخليٌ لجماعة المثاليات $G_1, G_2, \ldots, G_n$ في G التي تحقق $G_i \cap G_j = \{0\}$، $(i \neq j)$

حالة خاصة

يُقال عن جبر لي G إنه مجموع مباشر داخلي لجبري لي الجزئيين A, B ونرمز لذلك بـ $G = A \oplus B$ إذا تحقق ما يلي:

١) $G = A + B$

٢) كل من A, B مثالي في G

٣) $A \cap B = \{0\}$

نظرية (٢-٢)

إذا كان A مثالي تام في جبر لي G، فإن $G = A \oplus Cen_G A$

البرهان

لنبرهن أولاً أن $G = A + Cen_G A$

ليكن $x \in G$. نعلم وفقاً للنظرية (٣-٥) الواردة في الفصل الثاني بأنه يمكن أن نرفق بكل عنصر $x \in G$ بتطبيق الاشتقاق الداخلي على جبر لي:

$$ad_x : G \to G$$
$$y \mapsto ad_x(y) = [x, y]$$

وبالتالي، فإن مقصوره على A يكون تطبيقاً خطياً:

$$ad_x|_A : A \to A$$
$$a \mapsto [x, a]$$

زد على ذلك، إنه تطبيق اشتقاق داخلي على A وذلك بملاحظة أن:

$$ad_x[a, a'] = [x, [a, a']] = [[x, a], a'] + [a, [x, a']]$$
$$= [ad_x(a), a'] + [a, ad_x(a')]$$

أي $ad_x|_A \in Der(A) = Inn(A)$ لأن A مثالي تام.

نستنتج أنه مهما يكن $a \in A$ ومهما يكن $x \in G$ فإنّ ثمة عنصراً $b \in A$ بحيث $ad_x(a) = ad_b(a)$ ومنه $[x, a] = [b, a]$ إذن $[x - b, a] = 0$ وهذا يعني أن $x - b \in Cen_G A$ وعليه $x \in A + Cen_G A$.

لنبرهن ثانياً أن: $A \cap Cen_G A = \{0\}$

في الواقع، بما أن A تام فإنّ $CenA = \{0\}$ وعليه فإنّ:

$$A \cap Cen_G A = A \cap CenA = CenA = \{0\}$$

وبملاحظة أن A مثالي في G وأن ممركز أي مثالي في جبر لي يكون مثـــالي في جبر لي فإنّنا نجد أن:

$$G = A \oplus Cen_G A$$

إن العلاقة بين المجموع المباشر الخارجي لجبور لي والمجموع المباشر الداخلي توضح في الفقرة التالية:

٣ – العلاقة بين المجموع المباشر الخارجي والمجموع المباشر الداخلي

لتكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ جبور لي على الحقل K. ولنأخذ المجموعات التالية:

$$S_1 = \{s = (x_1, 0, \dots, 0) : x_1 \in G_1\}$$
$$S_2 = \{s = (0, x_2, \dots, 0) : x_2 \in G_2\}$$
$$\vdots$$
$$S_n = \{s = (0, 0, \dots, x_n) : x_n \in G_n\}$$

من الواضح أن المجموعة الجزئية:

$$S = \{s = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in G_i \quad ; \quad 1 \le i \le n\}$$

من الجداء الديكارتي $\prod_{i=1}^{n} G_i$ هي جبر لي بالنسبة لقوانين التشكيل:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$
$$[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n])$$

ويسمى المجموع المباشر الخارجي لجماعة جبور لي $G_1, G_2, \dots, G_n$

سنبرهن الآن أن المجموعة S هي أيضاً المجموع المباشر الداخلي لـ S_i $(1 \le i \le n)$

في الحقيقة، إن S_i مثالي في S لأن S_i مقاس جزئي من S،

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\begin{aligned}[x, s] &= [(x_1, x_2, \dots, x_n), (0, 0, \dots, s_i, \dots, 0)] \\ &= ([x_1, 0], [x_2, 0], \dots, [x_i, s_i], \dots, [x_n, 0]) \\ &= (0, 0, \dots, x_i', \dots, 0) \in S_i\end{aligned}$$

وذلك مهما يكن $s \in S_i, x \in S$

كذلك، من الواضح أن $S_i \cap S_j = \{0\}$ وذلك مهما يكن $1 \leq i \neq j \leq n$

وأخيراً، بما أن كل عنصر $x \in S$ يكتب بشكل وحيد على النحو $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$

حيث $x_i \in S_i$ بمعنى أن $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

نستنتج مما سبق أن S مجموع مباشر داخلي لـ S_i والتي تماثل G_i مهما تكن $1 \leq i \leq n$.

ملاحظة

إذاً يمكن النظر إلى المجموع المباشر الخارجي لجبور لي G_i على أنه المجموع المباشر الداخلي لـ S_i التي كل منها يماثل G_i ويمكننا أن نعرض النظرية:

نظرية (٣-١)

إذا كان S جبر لي على الحقل K مساوياً المجموع المباشر الخارجي لجبور لي $G_1, G_2, \ldots, G_n$ على الحقل K، فتوجد في S مثاليات مثل S_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ بحيث يكون $S_i \cong G_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ويكون S مساوياً المجموع المباشر الداخلي للمثاليات S_i.

والآن نورد مفهوم المجموع نصف المباشر لجبور لي.

٤ – المجموع نصف المباشر لجبور لي

ليكن G, G' جبور لي على الحقل K. إن المجموعة:

$$G \times G' = \{(x, x'); x \in G, x' \in G'\}$$

المزودة بقانون تشكيل داخلي هو الجمع وآخر خارجي مجموعة مؤثراته K معينين كما يلي:

. $(x,x') \dot{+} (y,y') = (x+y, x'+y')$

. $\lambda.(x,x') = (\lambda x, \lambda x')$

مقـاس علـى الحقل K، ولإثبات ذلك على القارئ الرجوع إلى مفهوم الجداء الديكارتـي $\prod_{i=1}^{n} G_i$ لجماعة المقاسات $G_1, G_2, \ldots, G_n$ على الحقل K الوارد في كتاب الجبر(٥) لمؤلفيه الدكتور أنور اللحام والدكتورة إلهام الحمصي.

مـن جهـة ثانـية، إن قانون التشكيل الداخلي المعرف على المقاس $G \times G'$ بالصيغة:

$$[(x,x'),(y,y')]^{\bullet} = ([x,y+(wx')y-(wy')x],[x',y'])$$

وحيث $W : G' \to Der(G)$ تشاكل ثابت بين جبري لي G' و $Der(G)$ يجعل من المقاس $G \times G'$ جبر لي على الحقل K.

سنقتصـر فقط على إثبات أن $[(x,x'),(x,x')]^{\bullet} = 0$ وصحة متطابقة جاكوبي تاركين للقارئ متعة التأكد من بقية الشروط.

في الحقيقة أياً كان $(x,x') \in G \times G'$ لدينا:

$$\begin{aligned}[(x,x'),(x,x')]^{\bullet} &= ([x,x+(wx')x-(wx')x],[x',x']) \\ &= ([x,x],[x',x']) \\ &= (0,0) = 0\end{aligned}$$

كذلك مهما يكن $(x,x'),(y,y'),(z,z') \in G \times G'$ فإنّ:

$$\begin{aligned}[(x,x'),[(y,y'),(z,z')]^{\bullet}]^{\bullet} &= [(x,x'),([y,z],[y',z'])]^{\bullet} \\ &= ([x,[y,z]+(wx')[y,z]-(w[y',z'])x],[x',[y',z']])\end{aligned}$$

وباختـيار w التشاكل الصفري من G' إلى $Der(G)$ أي $wg' = 0$ مهما يكن $g' \in G'$ فإننا نجد أن:

$$\left[(x,x'),\left[(y,y'),(z,z')\right]^{\bullet}\right]^{\bullet}=\left(\left[x,[y,z]\right],\left[x',[y',z']\right]\right)$$

وبأسلوب مماثل نحصل على:

$$\left[(y,y'),\left[(z,z'),(x,x')\right]^{\bullet}\right]^{\bullet}=\left(\left[y,[z,x]\right],\left[y',[z',x']\right]\right)$$

$$\left[(z,z'),\left[(x,x'),(y,y')\right]^{\bullet}\right]^{\bullet}=\left(\left[z,[x,y]\right],\left[z',[x',y']\right]\right)$$

وبما أن متطابقة جاكوبي محققة في كل من G,G' نستنتج أن:

$$\left[(x,x'),\left[(y,y'),(z,z')\right]^{\bullet}\right]^{\bullet}+\left[(y,y'),\left[(z,z'),(x,x')\right]^{\bullet}\right]^{\bullet}+$$
$$\left[(z,z'),\left[(x,x'),(y,y')\right]^{\bullet}\right]^{\bullet}=0$$

وعليه فإن متطابقة جاكوبي محققة.

يترتب على ذلك أن $G\times G'$ جبر لي على الحقل K، ندعوه بالمجموع نصف المباشر لجبري لي G,G'.

وبالتالي نورد النظرية الهامة التالية.

نظرية (٤-١)

إذا كان G,G' جبري لي على الحقل K فإن المجموعة

$$G\times G'=\{(x,x');x\in G,x'\in G'\}$$

المزودة بقوانين التشكيل:

. $(x,x')\dot{+}(y,y')=(x+y,x'+y')$

. $\lambda.(x,x')=(\lambda x,\lambda x')$

. $\left[(x,x'),(y,y')\right]^{\bullet}=\left(\left[x,y+(wx')y-(wy')x\right],\left[x',y'\right]\right)$

" $W:G'\to Der(G)$ تشاكل ثابت بين جبري لي $Der(G),G'$ "

تكون جبر لي على الحقل K.

ملاحظة

إن المجمــوع المباشر هو حالة خاصة من المجموع نصف مباشر حيث يوافق اختــيار W التشــاكل الصفري، فإذا كان $G\times G'$ مجموع نصف المباشر لــ G,G' فإنَّ:

$$\begin{aligned}[(x,x'),(y,y')]^{*} &= ([x,y+(wx')y+(wy')x],[x',y']) \\ &= ([x,y],[x',y'])\end{aligned}$$

وذلــك مهمــا يكــن $(x,x'),(y,y')$ من $G\times G'$ وعليه فإنّ $G\times G'$ هو مجموع مباشر لــ G,G'.

ثانياً: تمديدات جبور لي

ســوف نبدأ في هذا الفقرة بعرض مفهوم المتتاليات التامة لجبور لي وتشاكلاتها على الحقل K.

٥- المتتاليات التامة

تعريف (٥-١)

لتكن المتتالية $\ldots.\rightarrow G_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}G_i\xrightarrow{f_i}G_{i+1}\ldots..$

مــن جــبور لي وتشاكلاتها على الحقل K. يُقال عن هذه المتتالية إنها تامة إذا كان $Kerf_i=\operatorname{Im}f_{i-1}$ وذلك مهما يكن الدليل i.

تمهيدية (٥-٢)

إذا كانت $0\xrightarrow{i}G\xrightarrow{f}H\xrightarrow{g}L\xrightarrow{\pi}0$

متتالية من جبور لي وتشاكلاتها على الحقل K عندئذ:

١- f مونومورفيزم إذا وفقط إذا كانت المتتالية $0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} H$ تامة.

٢- g ابيمورفيزم إذا وفقط إذا كانت المتتالية $H \xrightarrow{g} L \xrightarrow{\pi} 0$ تامة.

البرهان

١- إن المتتاليـــة $0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} H$ تامـــة إذا وفقـــط إذا كـــان

$$Kerf = \{0\} = \operatorname{Im} i$$

وهذا يكافئ القول إن f مونومورفيزم.

٢- كذلـــك، تكـــون المتتالية $H \xrightarrow{g} L \xrightarrow{\pi} 0$ تامة إذا وفقط إذا كان

$$\operatorname{Im} g = L = Ker\pi$$

وهذا يكافئ القول أن g ابيمورفيزم

ملاحظة هامة

إذا كانـــت $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} L$ متتالـــية تامة من جبور لي وتشاكلاتها على الحقل K.

إن $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0 \qquad (\forall x \in G)$$

وذلك لأن $Kerg = \operatorname{Im} f$ وبالتالي $g \circ f = 0$.

مـــن جهـــة أخـــرى، إذا كان $g \circ f = 0$ فإن ذلك لا يؤدي إلى أن المتتالية $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} L$ تامة.

نشـــير إلـــى أن بعـــض المؤلفيـــن يدعـــون المتتالـــيات التي تتصف بالخاصة $g \circ f = 0$ **بالمتتاليات نصف التامة**.

٦- تمديدات جبور لي

تعريف (٦-١)

كـــل متتاليـــة تامـــة مـــن جبـــور لـــي وتشـــاكلاتها مـــن الـــنمط $G \rightarrowtail H \xrightarrow{\varphi} L$ تدعى **تمديداً لجبر لـــي L بواســـطة G** أو اختصاراً « تمديداً لجبر لي L».

ولتوضيح مفهوم تمديدات جبور لي نورد المثال التالي:

مثال (٦-٢)

ليكن L جبر لي على الحقل K.

يُلاحظ أولاً بالرجوع إلى نظرية (٣-٥) الواردة في الفصل الثاني، أن التطبيق: $\psi : L \to InnL$ الذي يرفق بكل عنصـــر x مـــن L بتطبيـــق الاشـــتقاق الداخلي ad_x يكون ابيمورفيزماً بين جبري لي L و $InnL$.

بالإضافة لذلك، إن المتتالية $CenL \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\psi} InnL$ تامة وذلك بملاحظة أن:

$$
\begin{aligned}
x \in Ker\psi &\Leftrightarrow ad_x = ad_0 \\
&\Leftrightarrow ad_x(l) = ad_0(l) \quad ; \quad \forall l \in L \\
&\Leftrightarrow [x,l] = [0,l] = 0 \quad ; \quad \forall l \in L \\
&\Leftrightarrow x \in CenL
\end{aligned}
$$

إذن $Ker\psi = CenL = \operatorname{Im} i$.

وبالتالي يتضح بأن المتتالية $CenL \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\psi} InnL$ هي تمديـــد لجبر لي $InnL$ بواسطة $CenL$.

نظرية (٦-٣)

إذا كانت المتتالية $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\varphi} L$ ممدداً لجبر لي L. عندئذ يوجد مثالي H' لجبر لي H يماثل G وبحيث يحقق $L \cong H/H'$.

البرهان

نعلم بحسب النظرية (٤-٨) الواردة في الفصل الثاني بأن نواة أي تشاكل بين جبري لي يكون مثالياً، يترتب على ذلك مباشرةً بأن $Ker\varphi$ مثالي لجبر لي H، ولنفترض أن $H' = Ker\varphi$.

كذلك، من السهل أن نرى بأن $f^+ : G \to \operatorname{Im} f$ تماثلٌ. وبناءً على ذلك، نستطيع أن نكتب: $G \cong \operatorname{Im} f = Ker\varphi = H'$

لإثبات الشق الثاني، لنأخذ التطبيق: $\mu : H/H' \to \operatorname{Im}\varphi$ المعرف بالصيغة: $\mu(h+H') = \varphi(h)$

في الحقيقة، إنه تشاكل وذلك لأن:

$$\begin{aligned}
\mu((h+H')+(k+H')) &= \mu((h+k)+H') \\
&= \varphi(h+k) \\
&= \varphi(h)+\varphi(k) \\
&= \mu(h+H')+\mu(k+H')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha(h+H')) &= \mu(\alpha h+H') = \varphi(\alpha h) \\
&= \alpha\varphi(h) = \alpha\mu(h+H')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu[h+H',k+H'] &= \mu([h,k]+H') \\
&= \varphi[h,k] \\
&= [\varphi(h),\varphi(k)] \\
&= [\mu(h+H'),\mu(k+H')]
\end{aligned}$$

علاوة على ذلك، إن التشاكل المفروض متباين وذلك بملاحظة:

$$\begin{aligned}\mu(h+H')=\mu(k+H') &\Rightarrow \varphi(h)=\varphi(k)\\ &\Rightarrow h-k\in Ker\varphi=H'\\ &\Rightarrow (h-k)+H'=H'\\ &\Rightarrow h+H'=k+H'\end{aligned}$$

ولنبرهن أخيراً أن التشاكل μ غامر.

لنفرض $l\in L$، بما أن φ غامر فإن ثمة عنصراً $h\in H$ بحيث $\varphi(h)=l$

وبالتالي فإن ثمة عنصراً، $h+H'\in H/H'$ بحيث $\mu(h+H')=l$.

وكنتيجة لما ذكر سابقاً، هنالك مثالي H' لجبر لي H يماثل G ،

وبحيث $H/H'\cong L$ وبذا يتم إثبات النظرية.

تعريف(٦-٤):

التمديدات المتكافئة

ليكن:

$$G \rightarrowtail^{f'} H' \xrightarrow{\varphi'} L \quad و \quad G \rightarrowtail^{f} H \xrightarrow{\varphi} L$$

تمديدين لجبر لي L.

يُقال عن هذين التمديدين إنهما **متكافئان** إذا وجد تشاكل وحيد $\psi: H\to H'$

يجعل المخطط التالي تبادلياً:

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dr, two heads, "\varphi"] \arrow[dd, dashed, "\psi"] & \\
G \arrow[ur, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "f'"'] & & L \\
 & H' \arrow[ur, two heads, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

بمعنى أن: $\varphi' \circ \psi = \varphi \quad , \quad \psi \circ f = f'$

و عليه فإن التشاكل ψ يكون تماثلاً.

نظرية (٦-٥)

إذا كانت المتتالية $G \rightarrowtail^{f} H \xrightarrow{\varphi}\!\!\!\!\rightarrow L$ ممدداً لجبر لي L. فإن:

H جبر لي قابل للحل $\Leftrightarrow$ L,G جبور لي قابلة للحل.

البرهان

لنفرض أولاً أن H جبر لي قابل للحل. بما أنه بموجب النظرية (٢-٤) الواردة في الفصل الثالث، أن كل جبر جزئي من جبر لي قابل للحل يكون قابلاً للحـــل، فإن G قابل لنحل وذلك لأن f متباين.

كذلك، نعلم استناداً إلى النظرية (٢-٥) الواردة في الفصل ذاته بـــأن الصـــورة المباشرة لجبر لي قابلة للحل وفق تشاكل يكون قابلاً للحل، وبالتالي، إن L قابل للحل وذلك لأن φ غامرٌ.

لنفرض الآن أن كلاً من L,G قابلٌ للحل ولنبين أن H يكون كذلك.

في الحقيقة، إن المتتالية $G \rightarrowtail{} \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\varphi} L$ تمديد لجبر لي L، وعليه وفقاً للنظرية (٦-٣) السابقة، هنالك مثالي H' لجبر لي H يماثل G وبحيث يتحقق $L \cong H/_{H'}$ يتضح من ذلك مباشرةً أن $H/_{H'}$, H' جبور لي قابلة للحل ومنه وفقاً للنظرية (٢-٨) المذكورة في الفصل الثاني يكون H قابلاً للحل.

٧- التمديدات القابلة للإزالة

تعريف (٧-١)

يُقال عن تمديد لجبر لي L من النمط $G \rightarrowtail{} \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\varphi} L$ إنه **قابل للإزالة** إذا وجد جبر جزئي H' من جبر لي H بحيث يكون $H = H' \oplus Ker\varphi$.

نظرية (٧-٢)

إذا كانت المتتالية $G \rightarrowtail{} \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\varphi} L$ تمديداً قابلاً للإزالة لجبر لي Lفإن مقصور التشاكل φ على الجبر الجزئي المكمل لـ$Ker\varphi$ في H يكون تماثلاً.

البرهان

بما أن المتتالية $G \rightarrowtail{} \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\varphi} L$ تمديدٌ قابلٌ للإزالة لجبر لي L، فعندئذ هنالك جبر جزئي H' من جبر لي H بحيث يكون $H = H' \oplus Ker\varphi$ وعليه فإن $\varphi_{H'} : H' \to L$ مقصور التشاكل φ على H' يكون غامراً.

من جهة ثانية، إن التشاكل $\varphi_{H'}$ متباين وذلك بملاحظة أن:

$$x \in Ker\varphi_{H'} \Rightarrow x \in H' \quad and \quad \varphi(x) = 0$$
$$\Rightarrow x \in H' \cap Ker\varphi \Rightarrow x = 0$$

نستنتج مما سبق أن $\varphi_{H'}$ تماثل وبذلك يتم إثبات النظرية.

نتيجة (٧-٣)

بالعودة إلى النظرية السابقة، نلاحظ أنه إذا كانت المتتالية $L \twoheadleftarrow\!\!\xleftarrow{\varphi} H \xleftarrow{f}\!\!\leftarrowtail G$ تمديداً قابلاً للإزالة لجبر لي L، فإن $in \circ \varphi_{H'}^{-1} : L \to H$ يكون تشاكلاً متبايناً، ونعبر عنه بالرمز ψ وفضلاً عن ذلك، لدينا $\varphi \circ \psi = id_L$.

إن هذه الحقيقة تقودنا إلى عرض النظرية الهامة التالية.

نظرية (٧-٤)

إن المتتالية $L \twoheadleftarrow\!\!\xleftarrow{\varphi} H \xleftarrow{f}\!\!\leftarrowtail G$ تمديدٌ قابل للإزالة لجبر لي L إذا وفقط إذا وجد تشاكل متباين $\psi : L \to H$ بحيث يكون $\varphi \circ \psi = id_L$.

البرهان

إن لزوم الشرط يتضح من الملاحظة السابقة.

لإثبات كفاية شرط النظرية، لنفرض أن المتتالية $L \twoheadleftarrow\!\!\xleftarrow{\varphi} H \xleftarrow{f}\!\!\leftarrowtail G$ تمديدٌ لجبر لي L، ولنفرض أن $\psi : L \to H$ تشاكل متباين بحيث $\varphi \circ \psi = id_L$.

وسوف نبين أن التمديد لجبر لي L قابل للإزالة.

نلاحظ قبل كل شيء أن $\psi(L)$ جبر جزئي من جبر لي H وأن $\varphi(H) = L$.

وبالتالي يمكننا أن نكتب: $\varphi(H) = L + \varphi(Ker\varphi)$ وعليه نجد:

$$(\psi \circ \varphi)(H) = \psi(L) + (\psi \circ \varphi)(Ker\varphi)$$

كذلك، من السهل على القارئ تبيان أن $\psi \circ \varphi = id_H$ وبناءً على ذلك، يتضح أن: $H = \psi(L) + Ker\varphi$

لإتمام برهان النظرية، يكفي إثبات أن: $\psi(L) \cap Ker\varphi = \{0\}$

في الواقع، إذا كان $h \in \psi(L) \cap Ker\varphi$ فإن ثمة عنصراً $x \in L$ بحيث أن $h = \psi(x)$ وكذلك $\varphi(h) = 0$ يترتب على ذلك أن:

$$0 = \varphi(h) = (\varphi \circ \psi)(x) = x$$

وعليه:

$$h = \psi(x) = \psi(0) = 0$$

ومنه $\psi(L) \cap Ker\varphi = \{0\}$ وهكذا نكون قد برهنا النظرية بكاملها.

ملاحظة

حريٌ بنا تنبيه القارئ، بأن هنالك نفراً من الباحثين في هذا المجال الهام من علم الجبر الحديث يطلقون على تمديدات جبور لي القابلة للإزالة **بتمديدات جبور لي غير الأساسية**.

كذلك، إن بعض المصادر تدرج تعريف التمديدات القابلة للإزالة وفقاً للنظرية الأخيرة.

نظرية (٧-٥)

لتكن المتتالية $G \rightarrowtail^{f} H \xrightarrow{\varphi} L$ تمديداً لجبر لي L. إذا كان $H \cong G \oplus L$ فإن التمديد يكون قابلاً للإزالة.

البرهان

من السهل أن نرى بأن التطبيق: $\lambda : G \to G\ddot{\oplus} L$ تشاكل متباين

$$b \mapsto (b,0)$$

وأن التطبيق: $\mu : G\ddot{\oplus} L \to L$ تشاكل غامر

$$(b,l) \mapsto l$$

وبملاحظة أن: $\operatorname{Im}\lambda = Ker\mu$

يتضح بالتالي بأن المتتالية: $G \rightarrowtail^{\lambda} G\ddot{\oplus} L \xrightarrow{\mu} \twoheadrightarrow L$ تمديد لجبر لي L.

من جهة أخرى، لنأخذ التطبيق: $\psi : L \to G\ddot{\oplus} L$

المعرف بالصيغة $\psi(l) = (0,l)$

إنه تشاكل متباين، زد على ذلك، نرى أن:

$$(\mu \circ \psi)(l) = \mu(\psi(l)) = \mu(0,l) = l \qquad ;\forall l \in L$$

وبالتالي $\mu \circ \psi = id_L$ وبالرجوع إلى النظرية (٧-٤) نجد أن المتتالية $G \xrightarrow{\lambda} G\ddot{\oplus} L \xrightarrow{\mu} L$ تمديد قابل للإزالة لجبر لي L.

وبموجب الفرض، فإن المتتالية $G \rightarrowtail^{f} H \xrightarrow{\varphi} \twoheadrightarrow L$ تكون كذلك.

٨- التمديدات البسيطة والمركزية

ليكن $G \rightarrowtail^{f} H \xrightarrow{\varphi} \twoheadrightarrow L$ تمديداً لجبر لي L.

تعريف (٨-١)

يُقال عن هذا التمديد إنه **بسيط** إذا وجد H' مثالي لـ H بحيث يتحقق $H = H' \oplus Ker\varphi$.

يُقال عن هذا التمديد إنه **مركزي** إذا كان $Ker\varphi = CenH$

يتضح على الفور أن كل تمديد بسيط يكون قابلاً للإزالة. بالإضافة لذلك، نورد النظريتين التاليتين:

نظرية (٨-٢)

إذا كانت المتتالية $G \rightarrowtail^{f} H \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} L$ تمديداً بسيطاً لجبر لي L فإن $H \cong G \oplus L$.

البرهان

لنفرض أن المتتالية $G \rightarrowtail^{f} H \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} L$ تمديدٌ بسيطٌ لجبر لي L، فعندئذ يوجد H' مثالي لـ H بحيث أن $H = H' \oplus Ker\varphi$.

بما أن كل تمديد بسيط يكون قابلاً للإزالة، يترتب على ذلك بأن $\varphi_{H'} : H' \to L$ مقصور التشاكل φ على H' يكون تماثلاً وبالتالي $H' \cong L$.

من جهة أخرى، من الواضح أن التطبيق $f^{+} : G \to \operatorname{Im} f$ هو تماثل وعليه $G \cong \operatorname{Im} f = Ker\varphi$

يتضح مما سبق أن $H \cong G \oplus L$ وبالتالي يتم إثبات النظرية.

نظرية (٨-٣)

كل تمديد مركزي وقابل للإزالة لجبر لي L يكون بسيطاً.

البرهان

لنفرض أن المتتالية $G \rightarrowtail^{f} H \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} L$ تمديد مركزي وقابل للإزالة لجبر لي L، فعندئذ وفقاً للتعريف يوجد H' جبر جزئي من جبر لي H بحيث $H = H' \oplus Ker\varphi$ وعليه فإن أي عنصر $h \in H$ يكتب على

الشـــكل $h = h_1 + h_2$ حيـــث يكـــون $h_1 \in H'$ وكـــذلك يكـــون $h_2 \in Ker\varphi = CenH$.

زد على ذلك، أياً كان $h' \in H'$، يكون لدينا:

$$[h,h'] = [h_1 + h_2, h'] = [h_1, h'] + [h_2, h'] = [h_1, h']$$

أي أن $[H,H'] \subseteq H'$ وبالتـــالي يوجـــد H' مثـــالي لـــــ H بحيث $H = H' \oplus Ker\varphi$ والتمديد إذن بسيط.

تمرينات الباب الأول

(١) ليكن G, G' مقاسين على الحقل K، ولنزود المجموعة:

$$G \times G' = \{(x, x') : x \in G, x' \in G'\}$$

بقانون تشكيل داخلي وآخر خارجي مجموعة مؤثراته K معينين كما يلي:

$$(x, x') \dot{+} (y, y') = (x + y, x' + y')$$
$$\lambda(x, x') = (\lambda x, \lambda x')$$

بين أن $G \times G'$ مقاس على K.

(٢) لتكن المقاسات A, B, C, A', B', C' على الحقل K، لنفرض أن

$$f \in Hom(A, B) \quad , \quad f' \in Hom(A', B')$$

ولنعرف التشاكل $f \times f' \in Hom(A \times A', B \times B')$ بالصيغة:

$$(f \times f')(x, x') = (f(x), f'(x'))$$

برهن أنه إذا كانت المتتاليتان:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$
$$0 \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to 0$$

تامتين فإن المتتالية:

$$0 \to A \times A' \xrightarrow{f \times f'} B \times B' \xrightarrow{g \times g'} C \times C' \to 0$$

تكون تامة.

(٣) ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R ولــتكن x_1, x_2, x_3, x_4 عناصر من A، أثبت صحة ما يلي:

$$[[[x_1,x_2],x_3],x_4]+[[[x_2,x_1],x_4],x_3]+$$
$$+[[[x_3,x_4],x_1],x_2]+[[[x_4,x_3],x_2],x_1]=0$$

(٤) ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R، وبحيث يتحقق $[[x,y],y]=0$ وذلك مهما يكن x,y من A.

أ- أثبت أن $3[[x,y],z]=0 \quad , \quad \forall x,y,z \in A$

ب-أثبت باللجوء إلى التمرين السابق والقسم (أ) أن:

$$[[[x,y],z],t]=0 \quad , \quad \forall x,y,z,t \in A$$

(٥) ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R، لنفرض أن J مثالي في A بحيث يكون $[J,J]=J$ أثبت أن J يكون مثالياً مميزاً في A.

(٦) أثبت أن ممركز أي مثالي في جبر لي يكون مثالياً.

(٧) أثبت أن مجموع أي مثاليين عديمي القوى في جبر لي يكون مثالياً عديم القوى.

(٨) بين أن $RadA$ أساس جبر لي A يكون مثالياً مميزاً في A.

(٩) ليكن A جبر لي نصف بسيط على حقل K بعده منته:

أ- بين أن المثالي التبادلي الوحيد في A هو المثالي الصفري.

ب-بين أن كل تطبيق اشتقاق على A يكون تطبيق اشتقاق داخلي.

(١٠) يُقال عن جبر لي A إنه بسيط إذا كان غير تبادلي ولا يحوي أي مثالي حقيقي.

بين أن الجبر التافه $\{0\}$ ليس بسيطاً وأن كل جبر لي بسيط يكون نصف بسيط.

(١١) بين أن كل جبر لي تبادلي يكون عديم القوى.

(١٢) ليكن A جبر لي عديم القوى، بين وجود عدد صحيح موجب m بحيث يكون $ad_{x_1} \circ ad_{x_2} \circ \ldots \circ ad_{x_m} = 0$ وذلك أياً كانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ عناصر من A.

(١٣) ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R، إذا كان I, J مثاليين في A، أثبت أن المجموعة $H = \{x \in A : [x, J] \subset I\}$ تكون مثالية في A.

(١٤) إذا كان A جبر لي نصف بسيط، وليكن I مثاليّاً في A. أثبت أن A/I يكون نصف بسيط.

(١٥) لتكن $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\varphi} L$ متتالية تامة من جبور لي وتشاكلاتها على الحقل K. إذا كان H' مثاليّاً في H بحيث $H' \approx G$ وبحيث يكون $H/H' \approx L$ أثبت أن المتتالية المذكورة تكون تمديداً لجبر لي L بواسطة G.

الباب الثاني

جبور خاصة من النمط $(2,0)$

١- جبور BCK

٢- جبور BCK المحدودة

٣- جبور BCH والـ BH

٤- جبور BCC

٥- تمرينات الباب الثاني

الفصل الأول

جبور –BCK–

١ – جبور – BCK –

إن جبر BCK هو مجموعة A مزودة بعنصر مميَّز يرمز له بـــ 0 وبعملية ثنائية يرمز لها بـــ $*$ بحيث تتحقّق الخواص الخمس التالية:

$$(1) \quad a*a=0$$

$$(2) \quad 0*a=0$$

$$(3) \quad if \ \text{"} a*b=0 \ \ and \ \ b*a=0 \text{"} \ imply \ \ a=b$$

$$(4) \quad (a*(a*b))*b=0$$

$$(5) \quad ((a*b)*(a*c))*(c*b)=0$$

وذلك مهما تكن a,b,c عناصر من المجموعة A.

ينتج مباشرةً: $\quad x*0=0 \Rightarrow x=0$

ونبرهن أولاً التمهيدية التالية:

تمهيدية(١-١)

إذا كان A جبر BCK، فإن $a*0=a$ وذلك أياً كان a من A.

البرهان

يلاحظ وفقاً للخواص المذكورة أعلاه أن:

$$(a*0)*a=(a*(a*a))*a=0$$

كذلك يتضح من جهة أخرى وفقاً للعلاقة: $(a*(a*0))*0=0$

أن $a*(a*0)=0$ وبتطبيق الخاصة الثالثة، نجد أن: $a*0=a$.

ليكن A جبر BCK.

إن العلاقة الثنائية: $a \le b \Leftrightarrow a*b=0$ هي انعكاسية وذلك لأن $a*a=0$ أياً كان a من A. كما أنها تناظرية وذلك بالرجوع إلى الخاصة الثالثة من مفهوم جبور BCK.

لنفرض الآن أن $a \le b, b \le c$ فعندئذ وفقاً للتمهيدية التي أثبتناها لتونا، نجد أن:

$$a*c=((a*c)*(a*b))*(b*c)=0$$

وعليه فإن $a \le c$ فالعلاقة المذكورة هي فعلاً علاقة ترتيب على A.

ملاحظة

يمكن استناداً إلى ما ورد أخيراً إعادة صياغة الخواص الخمس الواردة في تعريف مفهوم جبور BCK على النحو التالي:

(1) $a \le a$

(2) $0 \le a$

(3) if " $a \le b$ and $b \le a$ " $imply$ $a=b$

(4) $a*(a*b) \le b$

(5) $(a*b)*(a*c) \le c*b$

وذلك مهما تكن a,b,c عناصر من المجموعة A.

نورد الآن النظرية الهامة التالية:

نظرية (١-٢)

إذا كان A جبر BCK فإن:

$$(1) \quad a \le b \Rightarrow a*c \le b*c \quad and \quad c*b \le c*a$$

$$(2) \quad (a*b)*c = (a*c)*b$$

وذلك مهما تكن a,b,c عناصر من المجموعة A.

البرهان

لنفرض أن $a \le b$ فعندئذ $a*b=0$ وبالتالي استناداً إلى الخاصة الخامسة نرى أن:

$$(a*c)*(b*c) = ((a*c)*(a*b))*(b*c) = 0$$

ومنه $a*c \le b*c$

من جهة ثانية، بتطبيق التمهيدية (١-١) والخاصة الخامسة مرة أخرى، نجد:

$$(c*b)*(c*a) = ((c*b)*(c*a))*(a*b) = 0$$

أي أن $c*b \le c*a$.

وبالتالي يتم إثبات الشق الأول من هذه النظرية.

لإثبات الشق الثاني، بما أن $a*(a*c) \le c$ يتضح وفقاً للشق الأول من النظرية أن:

$$(a*b)*c \le (a*b)*(a*(a*c)) \le (a*c)*b$$

وبطريقة مماثلة لما سبق يمكننا إقامة البرهان على أن:

$$(a*c)*b \le (a*b)*c$$

وبالرجوع إلى الخاصة التخالفية لعلاقة الترتيب ينتج أن:

$$(a*b)*c = (a*c)*b$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية بكاملها.

نظرية (١-٣)

إذا كان A جبر BCK، فإن:

$$(1) \quad a*(a*(a*b)) = a*b$$

$$(2) \quad ((a*c)*(b*c))*(a*b) = 0$$

وذلك مهما تكن a,b,c عناصر من A.

البرهان

لدينا $a*(a*b) \le b$ وبالتالي بحسب النظرية (١-٢) يكون $a*b \le a*(a*(a*b))$.

من جهة ثانية، لدينا وفقاً للشق الثاني من النظرية (١-٣)، أن $a*(a*(a*b)) \le a*b$ وعليه بتطبيق الخاصة التخالفية لعلاقة الترتيب نستنتج أن: $a*(a*(a*b)) = a*b$

لبرهان الشق الثاني، يُلاحظ باللجوء إلى النظرية (١-٢) والخاصة الخامسة أن:

$$((a*c)*(b*c))*(a*b) = ((a*c)*(a*b))*(b*c) = 0$$

سنورد الآن أصناف مميزة من جبور BCK من خلال التعريف الآتي:

تعريف (١-٤)

ليكن A جبر BCK.

١- يُقال إن A **خطي** إذا كان »$a \le b \quad or \quad b \le a$« وذلك لأجل أي عنصرين a,b من A.

٢- يُقال إن A **موجّه** إذا تحققت الموضوعة التالية:

أياً كان a,b من A فثمة عنصرٌ c من A بحيث $a,b \leq c$.

٣- يُقال إن A **يتمتع بخاصية الاختصار النسبية** إذا تحققت الموضوعة التالية:

أياً كانت a,b,c عناصر من A بحيث $a \leq b,c$ وبحيث يكون $b * a = c * a$ فإن $b = c$.

ويمكننا عرض النظرية التالية:

نظرية (١-٥)

كل جبر BCK خطي يكون موجَّهاً.

البرهان

ليكن A جبر BCK خطيّاً ولنفرض a,b عنصرين من A. فعندئذ إما $a \leq b$ أو $b \leq a$. إذا كان $a \leq b$ وبالتالي فإن $a,b \leq b$ ومنه A موجَّه. وبطريقة مشابهة إذا افترضنا أن $b \leq a$ نتوصل إلى أن A موجَّه أيضاً.

٢- جبور BCK التبادلية والضمنية

ليكن A جبر BCK.

يُقال عن A إنه **تبادلي**، إذا كان: $a * (a * b) = b * (b * a)$

يُقال عن A إنه **ضمني** إذا كان: $(a * b) * b = a * b$ وذلك مهما تكن a,b عناصر من A.

لتوضيح مفهوم جبور BCK التبادلية والضمنية نورد الأمثلة التالية:

مثال (٢-١)

لنأخذ المجموعة $A = \{0, a, b, c, d\}$ ولنزودها بالعملية الثنائية ∗المعرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	b
c	c	b	a	0	b
d	d	a	d	a	0

إن الخواص الخمس الواردة في تعريف مفهوم جبور BCK ملبّاة.

بالإضافة لذلك، إن A جبر BCK تبادلي. وأخيراً، إنه ضمني وذلك بملاحظة

على سبيل المثال أن: $(a*b)*b = a*b$

وأن $(c*d)*d = b*d = b = c*d$

نظرية (٢-٢)

إذا كان A جبر BCK تبادلياً، فعندئذ:

أياً كانت a, b, c عناصر من A بحيث $a, b \leq c$ وبحيث يكون $c*a = c*b$ فإن $a = b$.

البرهان

لنفرض أن $a, b \leq c$ وأن $c*a = c*b$ فعندئذ نرى أن:

$$a = a*0 = a*(a*c) = c*(c*a)$$
$$= c*(c*b) = b*(b*c) = b*0 = b$$

نلفت نظر القارئ إلى أنه ليس لزاماً أن يكون كل جبر BCK تبادلي يحقق خاصية الاختصار النسبية والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٢-٣)

لنأخذ المجموعة $A = \{0, a, b, c\}$ ولنزودها بالعملية الثنائية $*$ المعرفة وفق الجدول التالي:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	a
c	c	a	a	0

من السهل على القارئ رؤية أن A جبر BCK. علاوة على ذلك، إن A تبادلي وذلك لأن:

$$a*(a*b) = a = b*(b*a)$$
$$a*(a*c) = a = c*(c*a)$$
$$b*(b*c) = a = c*(c*b)$$

إن A لا يحقق خاصية الاختصار النسبية وذلك بملاحظة أن $a \le b, c$ وأن $b*a = c*a$ بينما $b \neq c$.

ولكن ينبغي ملاحظة النظرية التالية:

نظرية (٢-٤)

كل جبر BCK تبادلي وموجَّه يحقق خاصية الاختصار النسبية.

البرهان

ليكن A جبر BCK تبادليّاً وموجَّهاً ولنفرض أن a, b, c عناصر من A بحيث $a \le b, c$ وبحيث يكون $b * a = c * a$ ولنبين أن $b = c$.

في الحقيقة، لما كان A جبر BCK موجَّهاً فثمة عنصرٌ $d \in A$ بحيث $b, c \le d$ وعليه نجد:

$$b * a = (b * (b * d)) * a = (d * (d * b)) * a$$
$$= (d * a) * (d * b)$$

كذلك لدينا:

$$c * a = (c * (c * d)) * a = (d * (d * c)) * a$$
$$= (d * a) * (d * c) = (d * a) * (d * b) = (d * a) * (d * c)$$

وبالتالي يتضح أن:

$$(d * a) * (d * b) = (d * a) * (d * c)$$

من جهة ثانية، بالرجوع إلى الشق الأول من النظرية (١-٢) ينتج:

$$d * b \le d * a \quad and \quad d * c \le d * a$$

ووفقاً للنظرية (٢-٢) نجد أن: $d * b = d * c$

مما سبق نستنتج:

$$b = b * (b * d) = d * (d * b) = d * (d * c) = c * (c * d) = c$$

وبالتالي النظرية محققة.

من الطبيعي أن يرد السؤال التالي:

هل كل جبر BCK تبادلي يحقق خاصية الاختصار النسبية جبرٌ موجه.

نوضح الإجابة على هذا التساؤل من خلال المثال التالي:

مثال (٢-٥)

لنزود المجموعة $A = \{0, a, b, c, d\}$ بالعملية الثنائية $*$ المعرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a
b	b	b	0	b	0
c	c	a	c	0	c
d	d	d	b	d	0

إن A جبر BCK تبادلي، تاركين للقارئ رؤية ذلك.

وفضلاً على ذلك، يحقق خاصية الاختصار النسبية (تحقق من ذلك)

ولكن بالمقابل إن A غير موجَّه وذلك بملاحظة أن $c, d \in A$ ولكن لا يمكن إيجاد عنصر مثل $x \in A$ بحيث $c, d \leq x$.

نقدم من خلال النظريات اللاحقة معيارين بالغَي الأهمية من أجل تحديد جبور BCK تبادلية على بنية جبرية $(A,0,*)$. إن المعيار الأول يعود إلى $K.ise`ki$([4]) والمعيار الآخر نشر مؤخراً في إحدى المقالات العلمية من قبل $M.Meng \quad and \quad Y.Jun$([8]).

نظرية (٢-٦)

إن الموضوعات الأربعة التالية كافية لتحديد جبر BCK تبادلي على بنية جبرية $(A,0,*)$.

(1) $\quad a*a=0$

(2) $\quad a*0=a$

(3) $\quad a*(a*b)=b*(b*a)$

(4) $\quad (a*b)*c=(a*c)*b$

وذلك مهما تكن a,b,c من A.

البرهان

لنفرض أن الموضوعات (١)، (٢)، (٣)، (٤) الواردة محققة ولنتأكد من صحة الخواص الواردة في جبور BCK التبادلية كما يلي:

- $$\begin{aligned} 0*a &= (a*(a*0))*a=(0*(0*a))*a \\ &= (0*a)*(0*a)=0 \end{aligned}$$

لنفرض الآن أن $a*b=0$ و $b*a=0$ عندئذ:

- $a=a*(a*b)=b*(b*a))=b*0=b$

كذلك، لدينا استناداً إلى الفرض:

- $(a*(a*b))*b=(a*b)*(a*b)=0$

وأخيراً، لإتمام البرهان علينا تبيان صحة الخاصة الأخيرة من مفهوم جبور BCK الوارد في بداية الفصل.

في الواقع، نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}((a*b)*(a*c))*(c*b) &= ((a*(a*c))*b)*(c*b)\\ &= ((c*(c*a))*b)*(c*b)\\ &= ((c*b)*(c*a))*(c*b) = 0\end{aligned}$$

نظرية (٢-٧)

إن الموضوعات التالية:

$$(1)\quad a*(0*b) = a$$

$$(2)\quad (a*b)*(a*c) = (c*b)*(c*a)$$

لازمة وكافية لتحديد جبر BCK تبادلي على بنية جبرية $(A,0,*)$ وذلك مهما تكن a,b,c عناصر من A.

البرهان

لنفرض أن الموضوعات (١) و (٢) الواردة محققة، ولنبين أن الخواص الواردة في تعريف مفهوم جبور BCK التبادلية ملبّاة.

في الحقيقة، يُلاحظ قبل كل شيء استناداً إلى (١) أن $0*(0*a) = 0$ وبالتالي نجد:

$$a*0 = a*(0*(0*a)) = a$$

يتضح من ذلك ووفقاً للموضوعة (٢) أن:

$$a*a = (a*0)*(a*0) = 0*(0*a) = 0$$

وأن:

$$0*a = (a*a)*(a*0) = (0*a)*(0*a) = 0$$

كذلك يتضح أن:

$$a*(a*b)=(a*0)*(a*b)=b*(b*a)$$

لنفرض الآن أن $a*b=0$ وأن $b*a=0$ عندئذ نرى:

$$a=a*0=a*(a*b)=b*(b*a)=b$$

وأخيراً لإتمام برهان كفاية الشرط ما علينا سوى تبيان صحة الخاصتين الأخيرتين الواردتين في تعريف مفهوم جبور BCK التبادلية.

يُلاحظ أن:

$$(a*b)*a=(a*b)*(a*0)=0*0=0$$

وذلك لأجل أي عنصرين a,b من A.

وعليه يتضح أن:

$$(a*(a*b))*b=(b*(b*a))*b=0$$

وبالإضافة لذلك، يتضح أن:

$$((a*b)*(a*c))*(c*b)=$$
$$=((c*b)*(c*a))*(c*b)=0$$

إذن A جبر BCK تبادلي.

العكس، لنفرض أن A جبر BCK تبادلي، عندئذ نستنتج على الفور أن $a*(0*b)=a*0=a$.

وفضلاً على ذلك، نرى بوضوح أن:

$$\begin{aligned}(a*b)*(a*c)&=(a*(a*c))*b\\&=(c*(c*a))*b\\&=(c*b)*(c*a)\end{aligned}$$

وبذا يتم إثبات النظرية.

نظرية (٢-٨)

ليكن A جبر BCK، فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون A ضمنياً هو تحقق العبارة التالية:

$$(a*b)*c=(a*c)*(b*c); \quad \forall a,b\in A$$

البرهان

لزوم الشرط: لنفرض أن A جبر BCK ضمني، ولنبرهن صحة العبارة الواردة في نص النظرية.

في الحقيقة، يُلاحظ أولاً بالرجوع إلى الشق الثاني من النظرية (١-٣) وإلى الشق الأول من النظرية (١-٢) أن:

$$\begin{aligned} \cdot \quad (a*c)*(b*c) &= ((a*c)*c)*(b*c) \\ &= ((a*c)*(b*c))*c \le (a*b)*c \end{aligned}$$

من جهة ثانية، لدينا $b*c\le b$ وبالتالي وفقاً للشق الأول من النظرية (١-٢) يتضح أن:

$$\cdot \quad (a*b)*c=(a*c)*b\le(a*c)*(b*c)$$

ومنه نستنتج أن: $(a*b)*c=(a*c)*(b*c)$

إن **كفاية الشرط** ينتج على الفور من العبارة المفروضة وذلك بأخذ $c=b$.

نظرية (٢-٩)

ليكن A جبر BCK. عندئذ:

A تبادلي وضمني إذا وفقط إذا تحققت العلاقة $a*(b*a)=a$ وذلك أياً كانت a,b عناصر من A.

البرهان

لنفرض أن A جبر BCK تبادلي وضمني، فإن:

$$a*(a*(b*a))=(b*a)*((b*a)*a)$$
$$=(b*a)*(b*a)=0$$

ولما كان $(a*(b*a))*a=0$ يتضح على الفور صحة العلاقة.

العكس، لنفرض الآن أن A جبر BCK يحقق $a*(b*a)=a$ وذلك مهما يكن a,b من A.

لدينا وفقاً للفرض وبالرجوع إلى الشق الأول من النظرية (١-٢) أن:

$$a*(a*b)=(a*(b*a))*(a*b)\leq b*(b*a)$$

من جهة أخرى، بأسلوب مشابه تماماً ينتج أن:

$$b*(b*a)\leq a*(a*b)$$

ومنه A جبر BCK تبادلي.

كذلك، إن A ضمني باعتبار أن:

$$(a*b)*b=(a*(b*(a*b)))*b$$
$$=(a*b)*(b*(a*b))=a*b$$

وبذلك يتم إثبات النظرية.

نقدم الآن معياراً هاماً لتحديد جبر BCK تبادلي وضمني على بنية جبرية $(A,0,*)$ من خلال النظرية التي سندرجها فيما يلي:

نظرية (٢-١٠)

إن الموضوعات التالية:

(1) $a*a=0$

(2) $a*(b*a)=a$

(3) $(a*c)*(a*b)=(b*c)*(b*a)$

لازمة وكافية لتحديد جبر BCK تبادلي وضمني على بنية جبرية $(A,0,*)$ وذلك أياً كانت a,b,c عناصر من A.

البرهان

لزوم الشرط: إذا صحَّت الموضوعات الثلاث المعروضة في نـص النظريـة. لدينا مباشرة:

- $a*0 = a*(a*a) = a$

وبالتالي يتضح أن:

- $0*a = 0*(a*0) = 0$

وكذلك:

- $a*(a*b) = (a*0)*(a*b) = b*(b*a)$

من جهة أخرى، لنفرض أن: $b*a=0$ وأن $a*b=0$

ينتج على الفور:

- $a = a*(a*b) = b*(b*a)) = b$

وأخيراً، بملاحظة أن:

- $(a*b)*a = (a*b)*(a*0) = 0*(0*a) = 0$

نستنتج أن:

- $(a*(a*b))*b = (b*(b*a))*b = 0$

وكذلك:

- $$((a*b)*(a*c))*(c*b) = ((c*b)*(c*a))*(c*b) = 0$$

ومنه A جبر BCK تبادلي وضمني.

كفاية الشـرط: لنفرض أن A جبر BCK تبادلي وضمني. فإن الموضوعات (١) و(٢) الواردة في نص النظرية تكون محققة.

وعلاوة على ذلك، لدينا:

$$(a*c)*(a*b)=(a*(a*b))*c$$
$$=(b*(b*a))*c=(b*c)*(b*a)$$

وبالتالي يتم إثبات النظرية بكاملها.

٣- جبور BCK والخاصية (S)

ليكن A جبر BCK. ولنعتبر العملية الثنائية: $a\wedge b=a*(a*b)$
وذلك مهما تكن a,b من A.

وفقاً لحقائق أرسيت سابقاً ينبغي أولاً ملاحظة النظرية التالية:

نظرية (٣-١)

ليكن A جبر BCK فإن:

(1) $a\wedge a=a$

(2) $a*(a\wedge b)=a*b$

(3) $(a\wedge b)*a=(a\wedge b)*b=0 \quad ;\forall a,b\in A$

البرهان

إن: $\cdot \quad a\wedge a=a*(a*a)=a*0=a$

أيضاً باللجوء إلى نتيجة أساسية يمكننا أن نكتب:

$\cdot \quad a*(a\wedge b)=a*(a*(a*b))=a*b$

وأخيراً، استناداً إلى مفهوم جبر BCK نجد:

$\cdot \quad (a\wedge b)*a=(a*(a*b))*a=0$

$\cdot \quad (a\wedge b)*b=(a*(a*b))*b=(a*b)*(a*b)=0$

تعريف (٣-٢)

ليكن A جبر BCK. يُقال عن A إنه **يتمتع بالخاصية** (S) إذا كان:

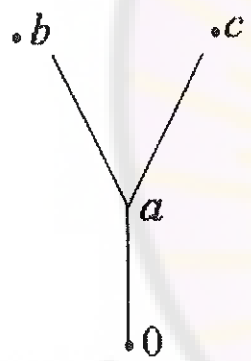
$$(a*b)\wedge(b*a)=0 \quad ;\forall a,b\in A$$

ولتوضيح هذا المفهوم نذكر الأمثلة التالية:

مثال (٣-٣)

ليكن $A=\{0,a,b,c\}$ جبر BCK حيث العملية الثنائية $*$ معرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	a
c	c	a	a	0

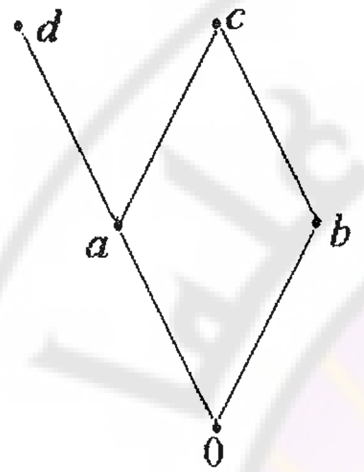


إن A جبر BCK تبادلي.

علاوة على ذلك، إن A لا يحقق الخاصية (S) وذلك بملاحظة أن $(b*c)\wedge(c*b)=a\neq 0$

بينما إذا أخذنا جبر BCK التالي: $A=\{0,a,b,c,d\}$

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	b
c	c	b	a	0	b
d	d	a	d	a	0



نلاحظ إن A تبادلي، بالإضافة لذلك يحقق الخاصية (S). وعلى القارئ التأكــد من ذلك.

نتيجة (٣-٤)

إن كل جبر BCK تبادليّاً وضمنيّاً يحقق الخاصية (S).

البرهان

ليكن A جبر BCK تبادلي وضمني، عندئذ:

$$\begin{aligned}(a*b)\wedge(b*a) &= (a*b)*((a*b)*(b*a))\\ &= (a*b)*((a*(b*a))*b)\\ &= (a*b)*(a*b)=0\end{aligned}$$

نتيجة (٣-٥)

إن كل جبر BCK يحقق الخاصية (S) يكون جبر لوكاسويكز.

نترك إثبات ذلك للقارئ، ولكن نشير بأن جبر لوكاسويكز هو بنية جبرية من النمط $(A,0,*)$ يحقق الشروط التالية:

(1) $a*0=a$

(2) $(a*b)*a=0$

(3) $a*(a*b)=b*(b*a)$

(4) $(a*b)*(b*a)=a*b$

(5) $((a*b)*(a*c))*(c*b)=0 \quad ;\forall a,b,c\in A$

٤- المثاليات في جبور BCK

ليكن A جبر BCK. إن المثالي لـ A هو مجموعة جزئية غير خالية I من A تحوي العنصر المميَّز 0 وتحقق الخاصة:

$$\text{«}a*b\in I \quad and \quad b\in I\Rightarrow a\in I\text{»}$$

ومن الواضح أن $\{0\}$ مثالي لـ A ندعوه "**المثالي الصفري**".

ينتج من ذلك على الفور بأنه إذا كان I مثالياً لـ A فإن:

$$a\le b \quad and \quad b\in I\Rightarrow a\in I$$

علاوة على ذلك، نورد النظرية التالية:

نظرية (٤-١)

ليكن A جبر BCK وليكن I مثالياً لـ A فإن:

(1) $a\in I\Rightarrow a*x\in I \quad ;\forall x\in A$

(2) $a\in I \quad or \quad b\in I\Rightarrow a\wedge b\in I$

البرهان

نعلم سابقاً أن:

$$(a*b)*a=0\in I \quad ;\forall a,b\in A$$

ومنه إذا كان $a\in I$ فينتج بحسب تعريف المثاليات أن $a*b\in I$.

إن الجزء الثاني من النظرية (٣-١) وذلك بملاحظة الحقيقة التالية:

$$(a\wedge b)*a=(a\wedge b)*b=0 \quad ;a,b\in A$$

مفاهيم أساسية (٤-٢)

ليكن A جبر BCK. يُقال إن A **غير خزول** إذا كان

$$\bigcap\{I\in Id(A): I\neq\{0\}\}\neq\{0\}$$

ليكن $a\in A$ ولنعتبر المجموعة:

$$)a(=\{x\in A: x*a=0\}$$

كذلك، أياً كان a,b من A ومهما يكن $n\geq 1$ سوف نعتبر من الآن فصاعداً:

$$a*^{0}b=a \quad , \quad a*^{1}b=a*b \quad , \quad a*^{2}b=(a*^{1}b)*b \quad ,.....$$

هذه المفاهيم الأساسية تقودنا إلى عرض النظريات الهامة التالية:

نظرية (٤-٣)

إذا كان A جبر BCK تبادليّاً فإن:

$$(1) \quad a\leq b \Leftrightarrow)a(\subseteq)b($$

$$(2) \quad)a\wedge b(=)a(\bigcap)b($$

البرهان

لنفرض أن $a\leq b$ وليكن $x\in)a($ ينتج مباشرةً أن $x\leq a, a\leq b$ وبالتالي $x\leq b$ ومنه $x\in)b($

لإثبات الاتجاه الآخر، إنه لمن الواضح أن $a \in)a(\subseteq)b($ وبالتالي $a * b = 0$ أي $a \leq b$ وبذلك يتم إثبات الشق الأول من هذه النظرية.

لبرهان الشق الثاني، نلاحظ وفقاً لنتائج سابقة أن:

$$a \wedge b \leq a \quad and \quad a \wedge b \leq b$$

وبالتالي يتضح من الشق الأول من هذه النظرية أن:

$$)a \wedge b(\subseteq)a(\quad and \quad)a \wedge b(\subseteq)b($$

ومنه
$$)a \wedge b(\subseteq)a(\bigcap)b($$

لإتمام البرهان، لنعتبر الآن أن: $x \in)a(\quad and \quad x \in)b($ فعندئذ يكون: $x * a = 0 \quad , \quad x * b = 0$ وبملاحظة أن:

$$a * (a * x) = x * (x * a) = x$$

$$(a * b) * (a * x) = (a * (a * x)) * b = 0$$

نستنتج على الفور أن:

$$x * (a \wedge b) = (a * (a * x)) * (a * (a * b)) = 0$$

ومنه $x \in)a \wedge b($ أي $)a \wedge b(=)a(\bigcap)b($ وبذلك نكون قد برهنا النظرية بكاملها.

ملاحظة

من المهم أن نشير للقارئ بأن المجموعة: $)a(= \{x \in A : x * a = 0\}$ لا تكون بالضرورة مثالياً لجبر BCK تبادلي A ما لم نتخذ شروط إضافية.

نورد الآن النتيجة الهامة التالية تاركين برهانها للقارئ.

نتيجة (٤-٤)

إذا كان A جبر BCK تبادليّاً وضمنياً، فإن المجموعة $)a(= \{x \in A : x * a = 0\}$ تكون مثالياً لـ A مولداً بالعنصر $a \in A$.

سندعو المثالي $)a($ **بالمثالي الرئيسي المولَّد بالعنصر** $a \in A$. نشير أيضاً إلى أنّ كل عنصر من A يولِّد مثالياً رئيسياً، وأن المثالي الصفري $\{0\}$ هو مثالي رئيسي مولَّد بالعنصر المميَّز 0 في جبر BCK التبادلي والضمني A.

زد على ذلك: $)a(= \{0\} \Leftrightarrow a = 0$

ويمكننا أيضاً عرض النظرية التالية:

نظرية (٤-٥)

كل جبر BCK تبادلي ضمني وغير خزول يكون خطي.

البرهان

ليكن A جبر BCK تبادليّاً ضمنياً وغير خزول، ولنفرض أن a,b عنصران مختلفان من A، وسوف نبين أن $a \leq b$ أو $b \leq a$.

في الواقع، نلاحظ أولاً أن:

$$(a*b)*(b*a) = (a*(b*a))*b = a*b$$

وبالتالي:

$$(a*b) \wedge (b*a) = 0$$

من جهة ثانية، استناداً إلى النظرية (٤-٣) والنتيجة (٣-٤) يمكننا أن نرى الحقيقة التالية:

$$)a*b(\bigcap)b*a(=)(a*b)\wedge(b*a)(=)0(=\{0\}$$

ولما كان A جبر BCK غير خزول، يترتب على ذلك أن:

$$)a*b(=\{0\} \quad or \quad)b*a(=\{0\}$$

وبالتالي فإن $a*b=0$ أو $b*a=0$ أي $a\leq b$ أو $b\leq a$ وبـذا يـتم إثبات النظرية.

ونبرهن الآن النظرية الأساسية التالية:

نظرية (٤-٦)

إذا كان I,J مثاليين لجبر BCK تبادلي A فإن:

$$I.J=\{a\wedge b : a\in I, b\in J\}$$

يكون مثالياً لــ A، بالإضافة لذلك، $I.J=I\bigcap J$.

البرهان

سنبرهن قبل كل شيء أن: $I.J\subseteq I \quad and \quad I.J\subseteq J$

نلاحظ أنه إذا كان $x=a\wedge b\in I.J$ حيث a عنصر ما مــن المثــالي I و b عنصر ما من المثالي J.

وعليه وفقاً للجزء الأول من النظرية (٤-١) يمكن أن نكتب:

$$x=a*(a*b)\in I \quad and \quad x=b*(b*a)\in J$$

لنثبت الآن أن $I.J$ مثالي لــ A.

فــي الحقيقــة، مــن الواضــح أن $0\in I.J$، لنفــرض أن $x*y\in I.J, y\in I.J$ فعندئذ بتطبيق الملاحظة الــواردة فــي بدايــة البرهان نجد:

$$x*y, y\in I \quad and \quad x*y, y\in J$$

وبالتالي: $x=x\wedge x\in I.J$ ومنه $I.J$ مثالياً لــ A.

ولإثبات العبارة الإضافية الواردة في نص النظرية، نلاحظ أن:

$$x \in I \bigcap J \Rightarrow x = x \wedge x \in I.J$$

ومنه $I.J = I \bigcap J$ وبذلك يتم إثبات النظرية بكاملها.

ونبرهن مباشرةً النظرية التالية:

نظرية (٤-٧)

ليكن A جبر BCK وليكن I مثالياً لـ A.

إن المجموعة: $I_a = \{x \in A : \exists n \geq 1 \;\; ; x *^n a \in I\}$

تكون مثالياً لـ A مولداً بالمثالي I وبالعنصر $a \in A$.

البرهان

من السهل قبل كل شيء رؤية أن $a \in I_a$.

لنفرض الآن أن $x \in I$. بما أن $(x * a) * x = 0 \in I$ يتضح على الفور أن $x * a \in I$ وبالتالي $x \in I_a$.

لنبين أن I_a مثالي لـ A.

في الواقع، لنفرض أن $x * y, y \in I_a$ فعندئذ هنالك عددان صحيحان $n, m \geq 1$ بحيث $(x * y) *^n a \in I$ وبحيث يكون $y *^m a \in I$،

وعليه فإن ثمة عنصراً $e \in I$ بحيث $(x * y) *^n a = e$

ومنه $((x * y) *^n a) * e = 0$ إذن $((x *^n a) * e) * y = 0$

أي $(x *^n a) * e \leq y$

وبتعميم النظرية (١-٢) نجد: $((x *^n a) * e) *^m a \leq y *^m a$

ووفقاً للفرض يكون: $((x *^n a) * e) *^m a \in I$

وبتعبير آخر: $(x*^{n+m} a)*e \in I$

نستخلص مما سبق وجود عدد صحيح $n+m \geq 1$ بحيث $x*^{n+m} a \in I$

ولدينا إذن $x \in I_a$ أي I_a مثالي لـ A.

وأخيراً، لنعتبر J مثالياً لـ A يحوي كلاً من المثالي I والعنصر $a \in A$ فعندئذ يمكن أن نرى:

$$x \in I_a \Rightarrow x*^{n} a \in I \Rightarrow x*^{n} a \in J \Rightarrow x \in J$$

إن ما ذكر في سياق البرهان يؤكد بأن I_a هو أصغر مثالي لـ A يحوي كلاً من I و a أي أن I_a مثالي مولد بالمثالي I وبالعنصر $a \in A$ وبذلك يتم إثبات النظرية.

نظرية (٤-٨)

ليكن A جبر BCK ضمنياً، وليكن I مثالياً لـ A.

فإن المجموعة $I(a) = \{x \in A : x*a \in I\}$ مثالي لـ A مولدٌ بالمثالي I وبالعنصر $a \in A$.

البرهان

من الواضح أن $a \in I(a)$.

لنفرض أن $x \in I$ بما أن $(x*a)*x = 0 \in I$ يتضح على الفور أن $x*a \in I$ وبالتالي $x \in I(a)$.

لنبين الآن أن $I(a)$ مثالي لـ A.

في الحقيقة، لنفرض أن $x*y, y \in I(a)$ فعندئذ يكون

$$(x*a)*(y*a) \in I \quad and \quad y*a \in I$$

وذلك لأن A ضمني.

وبالتالي $x * a \in I$ ومنه $x \in I(a)$ أي أن $I(a)$ مثالي لـ A.
وأخيراً، لنفرض أن J مثالي لـ A يحوي كلاً من I والعنصر $a \in A$ فعندئذ يمكن أن نكتب:

$$x \in I(a) \Rightarrow x * a \in I \subseteq J \Rightarrow x \in J \Rightarrow I(a) \subseteq J$$

إن ما ذكر في سياق البرهان يؤكد بأن $I(a)$ هو أصغر مثالي لـ A يحوي كلاً من I و $a \in A$. أي أن $I(a)$ مثالي مولد بـ I وبالعنصر $a \in I$ وبالتالي النظرية محققة.

تعريف (٤-٩)
ليكن A جبر BCK يُقال عن A إنه **بسيط** إذا لم يحوِ مثالياً حقيقياً سوى المثالي الصفري.
ولتوضيح مفهوم جبور BCK البسيطة نعرض المثال التالي:

مثال (٤-١٠)
لنأخذ $A = N$ ولنزود هذه المجموعة بالعملية الثنائية:

$$a * b = \begin{cases} 0 & if \quad a \leq b \\ a - b & if \quad a > b \end{cases}$$

لنبين أولاً أن A جبر BCK.
في الحقيقة، سوف نتأكد من صحة بعض الخواص تاركين للقارئ متابعة المناقشة فعلى سبيل المثال، لنثبت أن: $(a*(a*b))*b = 0$
يُلاحظ أنه إذا كان $a > b$ فإن:

$$(a*(a*b))*b = (a-(a-b))*b = b*b = 0$$

لنفرض الآن أن $a \leq b$ فعندئذ نجد:

$$(a*(a*b))*b=(a*0)*b=a*b=0 \cdot$$

من جهة ثانية، لنبين أن

$$((a*b)*(a*c))*(c*b)=0$$

من الواضح أن العلاقة صحيحة من أجل $a \leq b$ كذلك إذا كان $a > b$ فتنشأ لدينا ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان $a > b \geq c$ فنجد على الفور أن $a-c \geq a-b$ ومن ثم $(a-b)*(a-c)=0$ إذن $((a*b)*(a*c))*(c*b)=0$

الحالة الثانية: إذا كان $b < c < a$ فعندئذ يكون $a-b > a-c$ وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}((a*b)*(a*c))*(c*b) &= ((a-b)*(a-c))*(c-b)\\ &= ((a-b)-(a-c))*(c-b)\\ &= (c-b)*(c-b)=0\end{aligned}$$

الحالة الثالثة: إذا كان $b < a \leq c$ فعندئذ يكون $0 < a-b \leq c-b$ وبالتالي يتضح أن:

$$((a*b)*(a*c))*(c*b)=(a-b)*(c-b)=0$$

زد على ذلك، إن A تبادلي.

في الواقع، إن العلاقة $a*(a*b)=b*(b*a)$ محققة من أجل $a=b$

لنفرض أن $a < b$ فنجد:

$$a*(a*b)=a=b-(b-a)=b*(b-a)=b*(b*a)$$

أما إذا كان $a > b$ فعندئذ نجد أيضاً أن:

$$a*(a*b)=a*(a-b)=a-(a-b)=b*0=b*(b*a)$$

نستنتج مما سبق أن A جبر BCK تبادلي.

أخيراً، افترض مؤقتاً وجود مثالي I لــ A بحيث $\{0\} \neq I \subsetneq A$ فينشأ من ذلك وجود عنصراً $I \ni x \neq 0$ بحيث $x \geq 1$.

أيضـــاً، بملاحظــــة أن $1 * x = 0 \in I$ يتضــــح أن $1 \in I$، وبمـــا أن $2 * 1 = 1 \in I$ يتضح أيضاً أن $2 \in I$ وهكذا بالمتابعـــة نـــرى أن $n \in I$ ومنه $A = I$ إذن A جبر BCK بسيط.

٥- التشاكلات وجبر الفارج لـ BCK

تعريف (٥-١)

بفرض أن A, A' جبور BCK ، يكون التطبيـــق $f : A \to A'$ تشـــاكلاً لـــ A في A' إذا كان:

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad ; \forall x, y \in A$$

نستنتج مباشرةً أن:

- $f(0) = 0'$
- $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

بالإضـــــافة لـــــذلك، إن $Kerf = \{x \in A : f(x) = 0'\}$ نـــــواة التشاكل $f : A \to A'$ مثالي للجبر A .

في الواقع، إن $0 \in Kerf$، لنفرض أن $x * y, y \in Kerf$ فعندئذ

$$f(x * y) = f(x) * f(y) = f(x) * 0' = f(x)$$

أي $x \in Kerf$ ونبرهن أيضاً:

نظرية (٥-٢)

ليكن المخطط التالي والمؤلف من جبور BCK وتشاكلاتها وبحيث f غامر.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

إذا كان $Kerf \subseteq Kerg$ فعندئذ هنالك تشاكل وحيد $h : B \to C$ يُحقّق $h \circ f = g$.

البرهان

يُلاحظ قبل كل شيء بأنه إذا كان $y \in B$ فإنّه يوجد $x \in A$ بحيث يكون $f(x) = y$.

لنأخذ الآن العلاقة $h : B \to C$ المعرفة بـ

$h(y) = h(f(x)) = g(x)$ لأجل كل عنصر y من B.

إن h تطبيق وذلك لأن:

$$
\begin{aligned}
y = y' &\Rightarrow \exists x, x' \in A : f(x) = f(x') \\
&\Rightarrow f(x * x') = f(x) * f(x) = 0' \\
&\Rightarrow x * x' \in Kerf \subseteq Kerg \\
&\Rightarrow g(x) = g(x') \\
&\Rightarrow h(y) = h(y')
\end{aligned}
$$

كذلك إن التطبيق h تشاكلٌ.

في الواقع، إذا كان $y, y' \in B$ فهنالك $x, x' \in A$ بحيث يكون $y = f(x) \quad , \quad y' = f(x')$ وبالتالي يكون:

$$h(y*y')=h(f(x)*f(x'))=h(f(x*x'))$$
$$=g(x*x')=g(x)*g(x')=h(y)*h(y')$$

إن برهان وحدانية التطبيق h أمر بسيط ويترك للقارئ، وبذلك يتم إثبات النظرية.

تعريف (٥-٣) جبر الخارج لـ BCK

ليكن A جبر BCK، وليكن I مثالياً لـ A. نعرف على A العلاقة الثنائية التالية:

$$a\equiv b(\operatorname{mod} I)\Leftrightarrow a*b\in I \quad and \quad b*a\in I$$

إن العلاقة المذكورة انعكاسية وتناظرية وفضلاً على ذلك، إذا كان $a\equiv b\operatorname{mod}(I)$ و $b\equiv c\operatorname{mod}(I)$ فعندئذ يكون $a*b,b*a\in I$ وكذلك $b*c,c*b\in I$.

وبما أن:

$$\left.\begin{aligned}((a*c)*(a*b))*(b*c)=0\\((c*a)*(c*b))*(b*a)=0\end{aligned}\right\}$$

يتضح أن $a*c,c*a\in I$ ومن ثم $a\equiv c\operatorname{mod}(I)$ وبالتالي فالعلاقة تكون علاقة تكافؤ على A أكثر من ذلك، نورد النظرية التالية:

نظرية (٥-٤)

إذا كان A جبر BCK، وليكن I مثالياً لـ A. فإن $\operatorname{mod}(I)$ تكون علاقة تطابق على A.

البرهان

في الواقع، لنفرض أن:

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv a' \operatorname{mod}(I) \\ b &\equiv b' \operatorname{mod}(I) \end{aligned}\right\}$$

فعندئذ نجد $a*a', a'*a \in I$ وكذلك $b*b', b'*b \in I$

بملاحظة أولاً أن:

$$\left.\begin{aligned} ((a*b)*(a*b'))*(b'*b) = 0 \\ ((a*b')*(a*b))*(b*b') = 0 \end{aligned}\right\}$$

نستنتج أن $(a*b)*(a*b') \in I$ وأن $(a*b')*(a*b) \in I$

وبالتالي $a*b \equiv a*b' \operatorname{mod}(I)$

ومن ثم بملاحظة أن:

$$\left.\begin{aligned} ((a'*b')*(a*b'))*(a'*a) = 0 \\ ((a*b')*(a'*b'))*(a*a') = 0 \end{aligned}\right\}$$

يتضح بالتالي بطريقة مشابهة أن: $a*b' \equiv a'*b' \operatorname{mod}(I)$

نستنتج أن $a*b \equiv a'*b' \operatorname{mod}(I)$ إذن فعلاقة التكافؤ $\operatorname{mod}(I)$ متوائمة مع بنية A ومنه $\operatorname{mod}(I)$ علاقة تطابق على A.

اصطلاح (٥-٥)

إذا كان A جبر BCK، لنرمز من الآن فصاعداً بـ $Cong(A)$ **لمجموعة علاقات التطابق على** A. وبالتالي نورد النتائج الهامة التالية:

نظرية (٥-٦)

إذا كان A جبر BCK، وليكن R علاقة تطابق على A. فإن $I_R = \{x \in A : x = 0.(R)\}$ تكون مثالياً لـ A.

البرهان

من الواضح أن $0 \in I_R$. لنفرض أن $x * y, y \in I_{\Re}$ فعندئذ يكون $x * y \equiv 0.(R)$ و $y \equiv 0.(R)$. وبما أن R علاقة تطابق على A يتضح أن $x * y \equiv 0.(R)$ و $x * y \equiv x.(R)$ ويترتب على هذا أن $x \equiv 0.(R)$ وبالتالي $x \in I_R$.

وبدمج النظريتين الأخيرتين نجد:

نظرية (٥-٧)

إذا كان A جبر BCK تبادلياً. عندئذ يوجد تقابل بين مجموعة المثاليات لـ A وبين مجموعة علاقات التطابق $Cong(A)$ على A.

البرهان

أولاً: ليكن I مثالياً لـ A، بالرجوع إلى النظرية (٥-٤) نجد أن $\mathrm{mod}(I)$ علاقة تطابق على A، ويترتب مباشرة على ذلك وفقاً للنظرية (٥-٦) أن $I_{\mathrm{mod}(I)}$ مثالي لـ A. زد على ذلك $I = I_{\mathrm{mod}(I)}$، وذلك لأن:

$$x \in I \Leftrightarrow x * 0 \in I, 0 * x \in I \Leftrightarrow x \equiv 0.(\mathrm{mod}\, I)$$
$$\Leftrightarrow x \in I_{\mathrm{mod}(I)}$$

ثانياً: لتكن R علاقة تطابق على A، بالرجوع إلى النظرية (٣-٣) نجد أن I_R مثالي لـ A ويترتب على ذلك وفقاً للنظرية (٣-١) أن $\mathrm{mod}(I_R)$ علاقة تطابق على A. بالإضافة لذلك، إن $R = \mathrm{mod}(I_R)$ وذلك لأنه:

في الواقع، لدينا من جهة أولى:

$$x \equiv y.(R) \Rightarrow x * y \equiv 0.(R) \quad and \quad y * x \equiv 0.(R)$$
$$\Rightarrow x * y \in I_R \quad and \quad y * x \in I_R$$

$$\Rightarrow x \equiv y(\bmod I_R)$$

من جهة ثانية، نلاحظ:

$$x \equiv y(\bmod I_R) \Rightarrow x * y \in I_R \quad and \quad y * x \in I_R$$
$$\Rightarrow x * y \equiv 0.(R) \quad and \quad y * x \equiv 0.(R)$$
$$\Rightarrow x * (x * y) \equiv x.(R) \quad and \quad y * (y * x) \equiv y.(R)$$
$$\Rightarrow x \equiv y.(R)$$

وبالتالي، يتضح أن التطبيق: $\bmod : Id(A) \to Cong(A)$ التطبيق الذي يرفق بكل مثالي I لـ A بعلاقة التطابق $\bmod(I)$ يكون تقابلاً بين المجموعتين $Id(A)$ و $Cong(A)$ وبالتالي يتم إثبات النظرية.

ليكن A جبر BCK، وليكن I مثالياً لـ A. لنرمز لصف تكافؤ العنصر $x \in A$ بالرمز $C_x = \{z \in A : z \equiv x \bmod I\}$ يتضح أن $C_0 = I$ وذلك بملاحظة أن:

$$x \in I \Leftrightarrow x * 0 \in I \quad and \quad 0 * x \in I$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 0 \bmod(I) \Leftrightarrow x \in C_0$$

إن مجموعة صفوف التكافؤ تشكل تجزئة لـ A ويرمز لها بـ A/I،

لنزود هذه المجموعة بالعملية الثنائية $\bullet$ المعرفة وفق الصيغة:

$$C_x \bullet C_y = C_{x*y}$$

وذلك أياً كان x, y عناصر من A. وبالتالي نورد النظرية التالية:

نظرية (٥-٨)

إن $(A/I, C_0, \bullet)$ جبر BCK.

البرهان

لتكن x, y, z عناصر من A، نجد بسهولة أن:

$$C_x \bullet C_x = C_{x*x} = C_0 \quad and \quad C_0 \bullet C_x = C_{0*x} = C_0$$

لنفرض أن $C_x \bullet C_y = C_0$ و $C_y \bullet C_x = C_0$ فعندئذ يكون

$$x * y \equiv 0.(\mathrm{mod}\, I) \quad و \quad y * x \equiv 0.(\mathrm{mod}\, I)$$

يترتب على ذلك أن $x * y, y * x \in I$ ومن ثم $x \equiv y \,\mathrm{mod}\, I$

إذن $C_x = C_y$.

أيضاً يمكن أن نرى أن:

$$(C_x \bullet (C_x \bullet C_y)) \bullet C_y = C_{(x*(x*y))*y} = C_0$$

وأخيراً، لإتمام البرهان نلاحظ:

$$((C_x \bullet C_y) \bullet (C_x \bullet C_z)) \bullet (C_z \bullet C_y) = C_{((x*y)*(x*z))*(z*y)} = C_0$$

إذن A/I جبر BCK.

ملاحظة (٥-٩)

ندعو A/I بجبر BCK الخارج. ويمكن أن يبين القارئ دون صعوبة أنه إذا كان A تبادلياً فإن A/I يكون كذلك.

٦- المثاليات الأولية في جبور BCK

ليكن A جبر BCK، ولنورد التعريف الهام التالي:

يُقال عن مثالي I في A إنه **أولي** إذا كان $I \neq A$ ولأجل أي عنصرين a, b من A بحيث $a \wedge b \in I$ يكون إما $a \in I$ أو $b \in I$.

إذا كان I مثالياً أولياً في A فعندئذ:

$$a \wedge b \in I \Leftrightarrow a \in I \quad or \quad b \in I$$

وتنتج هذه العبارة من حقيقة أنه: $(a \wedge b) * a = (a \wedge b) * b = 0$

بالإضافة لذلك، نشير إلى أنَّ المثالي الصفري $\{0\}$ ليس بالضرورة مثالياً أولياً.

إن النظرية التالية تضيف أسلوباً بالغ الأهمية لتحديد المثاليات الأولية.

نظرية (٦-١)

إذا كان A جبر BCK تبادلياً وضمنياً، وليكن $A \neq I$ مثالياً في A.

عندئذ I مثالي أولي لــ A إذا وفقط إذا كان:

$$a * b \in I \quad or \quad b * a \in I \quad ; \forall a, b \in A$$

البرهان

لزوم الشرط: نفرض أن I مثالي أولي لــ A.

بما أن $(a * b) \wedge (b * a) = 0 \in I$ وذلك لأجل أي عنصرين a, b من A.

وبالتالي وفقاً للفرض يكون: $a * b \in I \quad or \quad b * a \in I$

ننتقل الآن إلى إثبات **كفاية شرط** النظرية.

لنفرض أنه من أجل أي عنصرين a, b من A فإما $a * b \in I$ أو $b * a \in I$ ولنبين الآن أن I أولي.

ليكن $a \wedge b \in I$ ولنناقش الحالتين:

الحالة (١) إذا كان $a * b \in I$ يتضح بالتالي، وباعتبار أن: $a * (a * b) = a \wedge b \in I$ أن $a \in I$.

الحالة (٢) إذا كان $b * a \in I$ يتضح أيضاً وباعتبار أن: $b * (b * a) = a \wedge b \in I$ أن $b \in I$ إذن I أولي.

إن هذه النظرية تقودنا إلى عرض النتائج التالية:

نتيجة (٦-٢)

إذا كان A جبر BCK تبادليّاً وضمنيّاً. إن كل مثالي في A يحوي مثالياً أولياً يكون أولياً.

البرهان

ليكن I مثاليّاً في A، بحيث $I \neq A$، ولنفرض أنه يوجد في A مثالي أولي مثل M بحيث يكون $M \subseteq I$. وعليه وفقاً للنظرية التي أثبتناها لتوّنا، نرى أن:

$$a * b \in M \subseteq I \quad or \quad b * a \in M \subseteq I \quad ,\forall a,b \in A$$

وبالتالي I مثالي أولي.

نتيجة (٦-٣)

إذا كان A جبر BCK تبادلياً وضمنياً فإن المثالي $\{0\}$ أولي إذا وفقط إذا كان كل مثالي في A أوليّاً.

البرهان

نظراً لسهولة البرهان فسنتركه للقارئ.

نظرية (٦-٤)

إذا كان A جبر BCK تبادلياً وضمنياً فإن المثالي $\{0\}$ أولي إذا وفقط إذا كان A جبر BCK خطياً.

البرهان

لزوم الشرط: نفرض أن $\{0\}$ مثالي أولي في A، وليكن a,b عنصرين من A.

لدينا بالاستناد إلى النظرية (٦-١) أن:

$$a*b \in \{0\} \quad or \quad b*a \in \{0\}$$

وبالتالي: $a \le b \quad or \quad b \le a$ وعليه فإن A جبر BCK خطي.

كفاية الشرط: إذا كان A جبر BCK خطياً، فعندئذ:

$$a \le b \quad or \quad b \le a \qquad \forall a,b \in A$$

وعليه $a*b \in \{0\} \quad or \quad b*a \in \{0\}$ ووفقاً للنظرية (٦-١) يكون $\{0\}$ أولياً.

نظرية (٦-٥)

ليكن A جبر BCK تبادلياً وضمنياً وليكن $A \neq I$ مثالياً في A. إن الشرط اللازم والكافي ليكون I أولياً هو أن يكون جبر BCK الخارج A/I خطياً.

البرهان

لزوم الشرط: نفرض أن I مثالي أولي في A، ولنبين أن A/I خطي.

في الحقيقة، بالاستناد إلى النظرية (٦-١)، يمكننا أن نكتب:

$$a*b \in I \quad or \quad b*a \in I$$

وذلك لأجل أي عنصرين a,b من A.

وعليه، استناداً إلى الملاحظات السابقة الواردة في الفقرة (٥) يمكن أن نكتب:

$$C_a \bullet C_b = C_{a*b} = C_0 \quad or \quad C_b \bullet C_a = C_{b*a} = C_0$$

ومنه $$C_a \le C_b \quad or \quad C_b \le C_a$$

إذن A/I جبر BCK خطي.

كفاية الشرط: نفرض أن A/I خطي، فعندئذ:

$$C_a \le C_b \quad or \quad C_b \le C_a \quad ;\forall a,b \in A$$

وهذا يعني أن:

$$C_{a*b} = C_a \bullet C_b = C_0 \quad or \quad C_{b*a} = C_b \bullet C_a = C_0$$

وعليه يكون:

$$a * b \in I \quad or \quad b * a \in I$$

ومنه وفقاً للنظرية (٦-١)، نستنتج أن I أولي.

ويمكننا الآن برهان النظرية المهمة التالية:

نظرية (٦-٦)

ليكن A جبر BCK تبادلياً وليكن I مثالياً حقيقياً في A، فإن الدعاوى التالية متكافئة:

(١) I مثالي أولي في A.

(٢) لأجل أي مثاليين J_1, J_2 في A، لدينا:

$$J_1.J_2 \subset I \Rightarrow (J_1 \subset I \quad or \quad J_2 \subset I)$$

البرهان

(١)⇐(٢) لنفرض أن $J_1.J_2 \subset I$ ولنُسلّم جدلاً أن:

$$J_1 \not\subset I \quad and \quad J_2 \not\subset I$$

إذن فثمة عنصرٌ $a \in J_1$ بحيث يكون $a \notin I$ وثمة عنصرٌ $b \in J_2$ بحيث يكون أيضاً $b \notin I$

يترتب على ذلك وفقاً لطريقة بناء المثالي $J_1.J_2$ الواردة في النظرية (٦-٤) أن $a \wedge b \in J_1.J_2$ في حين أن $a \wedge b \notin I$ وبالتالي $J_1.J_2 \not\subset I$ ونكون بذلك قد وقعنا في تناقض، وسبب هذا التناقض يعود إلى قبولنا بأن $J_1 \not\subset I \quad and \quad J_2 \not\subset I$ إذاً لابد أن يكون $J_1 \subset I \quad or \quad J_2 \subset I$

وبذا يكون قد تم إثبات الاتجاه الأول من النظرية. لننتقل الآن إلى إثبات الاتجاه الآخر.

(٢) ⟸ (١) لنفرض أن الدعوى (٢) محققة، ولنبين أن المثالي الحقيقي I لا بد وأن يكون مثالياً أولياً.

في الحقيقة، لنفرض أن $a \wedge b \in I$ لأجل أي عنصرين a,b من A

عندئذ بالرجوع إلى النظرية (٤-٣) نجد أن: $(a].(b]=(a\wedge b] \subset I$

ويترتب على ذلك استناداً إلى الفرض أن: $(a] \subset I \quad or \quad (b] \subset I$

وبالتالي $a \in I \quad or \quad b \in I$ وهذا يعني أن I مثالي أولي. وصحة النظرية تصبح عندئذ واضحة.

ملاحظة

إذا كانت $(J_i)_{i\in I}$ جماعة من المثاليات في جبر BCK التبادلي A. سنرمز من الآن وصاعداً بـ $\bigstar_{i\in I} J_i$ للمثالي المولد باتحادها، وهو حد أعلى أصغري لجماعة المثاليات $(J_i)_{i\in I}$.

بصورة خاصة، إن الحد الأعلى الأصغري للمثاليين I,J سيُرمز له أيضاً بالرمز $I \bigstar J$.

الفصل الثاني

جبور BCK المحددة

١- جبور BCK المحددة

ليكن A جبر BCK تبادلياً. لنفرض أنه يمتلك عنصراً مميَّزاً يرمز له 1 بحيث يحقق:

$$a*1=0 \quad ;\forall a\in A \qquad ....(١)$$

عندئذ نسمي جبر BCK التبادلي بجبر BCK المحدد.

لنفرض الآن أن A جبر BCK محدد.

من الواضح قبل كل شيء أن العنصرين المتميِّزين $0,1$ منفصلان، وذلك لأنه إذا افترضنا عكس ذلك لنتج أن:

$$a=a*0=a*1=0 \quad ;\forall a\in A$$

وبالتالي A يكون جبر BCK التافه.

ليكن A جبر BCK محدداً.

لنعتبر الآن أن $e(a)=1*a$ وذلك مهما يكن a من A.

يتضح بالتالي أن $e(e(a))=a$ وذلك بملاحظة:

$$e(e(a))=1*(1*a)=a*(a*1)=a*0=a$$

أيضاً، من السهل تبيان أن $e(0)=1 \quad , \quad e(1)=0$

وفضلاً على ذلك، وفقاً لنتائج أرسيت سابقاً نجد أن:

1. $e(a)*b=e(b)*a$
2. $a*e(b)=b*e(a)$
3. $e(e(a))*a=0$
4. $e(e(e(a)))=e(a)$
5. $e(a)*e(b)=b*a$

وذلك مهما يكن a,b من A .

الإثبات

في الحقيقة، لدينا:

$$e(a)*b=(1*a)*b=(1*b)*a=e(b)*a$$

إن العبارتين الثانية والثالثة تنتجان مباشرةً من العبارة الأولى وذلك لأن:

$$a*e(b)=e(e(a))*e(b)=e(e(b))*e(a)=b*e(a)$$

$$e(e(a))*a=e(a)*e(a)=0$$

كذلك وفقاً لنتيجة سابقة، نرى أن:

$$e(e(e(a)))=1*(1*(1*a))=1*a=e(a)$$

ولبرهان العبارة الأخيرة، نلاحظ وفقاً للعبارة الأولى أن:

$$e(a)*e(b)=e(e(b))*a=b*a$$

قبل المضيّ في متابعة عرض النظريات الأساسية المتعلقة بمفهوم جبور BCK المحددة، من الملائم أن نورد المثالين التاليين:

مثال (١-١)

لنعتبر المجموعة $A=\{a,b,0,1\}$ ولنزودها بالعملية الثنائية $*$ المعرفة وفق الجدول المرفق:

*	a	b	0	1
a	0	a	a	0
b	b	0	b	0
0	0	0	0	0
1	b	a	1	0

من السهل على القارئ تبيان أن الخواص الأربعة الواردة في بداية الفصل ملبّاه وبالتالي A جبر BCK تبادلي.

وفضلاً على ذلك، إنه ضمني وذلك لأن:

$$\begin{cases} a*(b*a) = a*b = a \\ b*(a*b) = b*a = b \end{cases}$$

وأخيراً، إنه محدد لأن $x*1 = 0$ وذلك أياً كان x عنصراً من A.

مثال (١-٢)

لنعتبر المجموعة $A = \{a,b,c,0,1\}$ ولنزودها بالعملية الثنائية * المعرفـة وفق الجدول التالي:

*	a	b	c	0	1
a	0	c	c	a	0
b	c	0	c	b	0
c	0	0	0	c	0
0	0	0	0	0	0
1	b	a	c	1	0

يمكن للقارئ أن يبين بطريقة مشابهة للمثال الأول بأن المجموعة A تشكل جبر BCK تبادلياً، ولكنه ليس ضمنياً باعتبار أن:

$$a*(b*a)=a*c=c\neq a$$

وأخيراً، إنه محدد لأن $x*1=0$ وذلك أياً كان x عنصراً من A .

وبعد ذلك نبرهن التمهيدية التالية:

تمهيدية (١-٣)

إذا كان A جبر BCK محدداً وضمنياً، فإن:

1. $a*e(a)=a$
2. $e(a)*a=e(a)$
3. $a*e(b)=a*(a*b) \quad ;\forall a,b\in A$

البرهان

لدينا $\quad a*e(a)=a*(1*a)=a$

وكذلك، بما أن A ضمني ينتج:

$$e(a)*a=(1*a)*a=1*a$$

ولبرهان العبارة الأخيرة من التمهيدية، نلاحظ وفقاً لما ورد أعلاه:

$$\begin{aligned}a*e(b)&=(a*e(a))*e(b)=(a*e(b))*e(a)\\&=a*(e(b)*e(a))=a*(a*b)\end{aligned}$$

٢- جبور BCK المحددة الضمنية والشبكات البولية

ليكن A جبر BCK محدداً وضمنياً. ولنعتبر العملية الثنائية:

$$a\vee b=e(e(a)*b)$$

وذلك مهما يكن a,b من A .

فيتضح مباشرة بالرجوع إلى النتائج التي أوردناها في بداية الفقرة أن $a \vee b = b \vee a$ وفضلاً على ذلك،

$$a \vee a = e(e(a) * a) = e(e(a)) = a$$

وعلاوة على ذلك، نورد النظرية التالية:

نظرية (٢-١)

إذا كان A جبر BCK محدداً وضمنياً، عندئذ:

1. $a * (b \vee c) = (a * b) * c$
2. $a * (a \vee b) = 0$
3. $(a \vee b) * a = b * a$
4. $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

البرهان

في الحقيقة، لدينا:

$$\begin{aligned} a * (b \vee c) &= a * e(e(b) * c) = (e(b) * c) * e(a) \\ &= (e(b) * e(a)) * c = (a * b) * c \end{aligned}$$

وكحالة خاصة ينتج على الفور أن: $a * (a \vee b) = 0$

لبرهان العبارة الثالثة، نلاحظ وفقاً للتمهيدية (١-٣) أن:

$$\begin{aligned} (a \vee b) * a &= e(e(a) * b) * a = e(a) * (e(a) * b) \\ &= b * (b * e(a)) = b * (b * (b * a) = b * a \end{aligned}$$

وأخيراً، لنفرض أن $a \leq b$، يتعين على العبارتين (٢)، (٣) السابقتين ما يلي:

$$b * (a \vee b) = 0 \quad and \quad (a \vee b) * b = 0$$

وبالتالي يكون $a \vee b = b$.

لنفرض الآن أن $a \vee b = b$ فعندئذ وفقاً للعبارة (٢) نرى أن:

$$a*b = a*(a\vee b) = 0$$

ومنه $a \le b$ وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية بكاملها.

إن النتائج التي أوردناها سابقاً والنظرية الأخيرة تقودنا إلى عرض النظرية الهامة التالية:

نظرية (٢-٢)

إن A شبكة محددة، حيث أن كلاً من $a\vee b, a\wedge b$ هما على الترتيب الحدان الأدنى الأعظمي والأعلى الأصغري للعنصرين a,b.

البرهان

لدينا بالرجوع إلى النظرية (٣-١) أن:

$$(a\wedge b)*a = 0 \quad and \quad (a\wedge b)*b = 0$$

وبالتالي يكون $a\wedge b \le a \quad and \quad a\wedge b \le b$

لنفرض الآن أن "$c \le a \quad and \quad c \le b$" فعندئذ نجد:

$$a*(a*c) = c*(c*a) = c$$

$$(a*b)*(a*c) = (a*(a*c))*b = c*b = 0$$

وبالتالي ينتج على الفور أن:

$$c*(a\wedge b) = (a*(a*c))*(a*(a*b)) = 0$$

إذن $c \le a\wedge b$ أي $a\wedge b$ هو فعلاً الحد الأدنى الأعظمي للعنصرين a,b.

من جهة ثانية، لدينا وفقاً للنظرية (٢-١) أن:

$$a*(a\vee b) = 0 \quad and \quad b*(a\vee b) = 0$$

وبالتالي $a \le a\vee b \quad and \quad b \le a\vee b$

لنفرض الآن أن "$a \le c \quad and \quad b \le c$"

بما أن $a \leq c$ فإن $a \vee c = c$ وذلك وفقاً للشق الأخير من النظرية (٢-١) وبالتالي $e(a) * c = e(c)$ ومنه نستنتج:

$$(a \vee b) * c = e(e(a) * b) * c = e(c) * (e(a) * b)$$
$$= (e(a) * c) * (e(a) * b) = 0$$

أي $a \vee b \leq c$ وعليه $a \vee b$ هو فعلاً الحد الأعلى الأصغري للعنصرين a, b.

وأخيراً، بملاحظة أن: $a \leq 1 \quad and \quad 0 \leq a$ أياً كان a من A.

يتضح من ذلك بأن A شبكة محددة. وبذا يتم إثبات النظرية.

نظرية (٢-٣)

إذا كان A جبر BCK محدداً وضمنياً، عندئذ:

1. $a * (b \vee c) = (a * b) \wedge (a * c)$
2. $a * (b \wedge c) = (a * b) \vee (a * c)$

وذلك أياً كانت a, b, c عناصر من A.

البرهان

لدينا وفقاً للعبارة الأولى من النظرية (٢-١) أن:

$$a * (b \vee c) = (a * b) * c = (a * (a * (a * b))) * c$$
$$= (a * c) * ((a * c) * (a * b)) = (a * b) \wedge (a * c)$$

ولبرهان الجزء الثاني من هذه النظرية. يلاحظ أولاً باللجوء إلى النظرية (٣-١) أن:

$$\left.\begin{aligned}(a * b) * (a * (b \wedge c)) = 0 \\ (a * c) * (a * (b \wedge c)) = 0\end{aligned}\right\}$$

وبالتالي يكون:

$$a*b \le a*(b \wedge c) \quad and \quad a*c \le a*(b \wedge c)$$

وبالاستفادة من كون A شبكة (نظرية (٢-٢)) يتضح أن:

$$(a*b) \vee (a*c) \le a*(b \wedge c)$$

لإتمام برهان النظرية، علينا إثبات أن:

$$a*(b \wedge c) \le (a*b) \vee (a*c)$$

في الحقيقة، بالرجوع إلى الجزء الأول من هذه النظرية وبالاستفادة من كون A شبكة، نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned} a*((a*b) \vee (a*c)) &= (a*(a*b)) \wedge (a*(a*c)) \\ &= a \wedge (b \wedge c) \le b \wedge c \end{aligned}$$

وعليه يكون:
$$a*(b \wedge c) \le (a*b) \vee (a*c)$$

وهكذا تكون النظرية قد بُرهنت.

إن النتائج التي أوردناها سابقاً والنظريات التي أثبتناها لتوّنا تقودنا إلى عرض النظرية المنشودة التالية.

نظرية (٢-٤)

كل جبر BCK محدد وضمني يكون جبر بول.

البرهان

إذا كان A جبر BCK محدداً وضمنياً، فعندئذ وفقاً للنظرية (٢-٢) يكون شبكة محددة $(0 \le a \le 1 \quad , \forall a \in A)$

بالإضافة لذلك، لنبرهن أن A شبكة توزيعية.

في الواقع، استناداً إلى النظرية (٢-٣) يمكن أن نكتب:

$$a \wedge (b \vee c) = a*(a*(b \vee c)) = a*((a*b) \wedge (a*c))$$

$$= (a*(a*b)) \vee (a*(a*c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

وأخيراً، ليكن $a \in A$ ولنضع $a' = e(a)$ فوفقاً للتمهيدية (١-٣) نرى أن:

$$\begin{cases} a \wedge a' = a*(a*e(a)) = a*a = 0 \\ a \vee a' = e(e(a)*e(a)) = e(0) = 1 \end{cases}$$

يشار إلى أن المتمم وحيد، لأنه إذا افترضنا وجود عنصرين a', a'' من A بحيث

$$a \vee a' = a \vee a'' = 1 \quad and \quad a \wedge a' = a \wedge a'' = 0$$

يتضح أن:

$$a' \leq a'*a \leq a' \quad and \quad a'' \leq a''*a \leq a''$$

وبالتالي يكون:

$$a'*a'' = (a'*a)*a'' = a'*(a \vee a'') = a'*1 = 0$$

$$a''*a' = (a''*a)*a' = a''*(a \vee a') = a''*1 = 0$$

وعليه نجد $a' = a''$ والنظرية إذن صحيحة.

٣- الطيوف الأولية لجبور BCK المحددة والضمنية

لنعتبر A جبر BCK محدد وضمني.

من الملائم، مع أنه غير ضروري إعادة صياغة مفهوم المثاليات الأولية الوارد في فقرة سابقة على النحو التالي:

يُقال عن مثالي I في A إنه أولي إذا كان $1 \notin I$ ولأجل أي عنصرين a, b من A بحيث $a \wedge b \in I$ يكون إما $a \in I$ أو $b \in I$.

ويعبّر عن الشرط الآخر، بقولنا:

$$\text{«} a \notin I \quad and \quad b \notin I \Rightarrow a \wedge b \notin I \text{»}$$

ويجدر بنا الإشارة إلى أنّ المثالي الصفري $\{0\}$ ليس بالضرورة أولياً.
ونبرهن أولاً التمهيدية التالية:

تمهيدية (٣-١)
ليكن A جبر BCK محدداً وضمنياً وليكن I مثاليّاً أولياً لـ A. فإن الدعاوى التالية محققة:

$$1.\ \ \forall x \in A\ ;\ \text{``}x \in I \quad or \quad e(x) \in I\text{''}$$
$$2.\ \ a \vee b \in I \Leftrightarrow a \in I \quad and \quad b \in I$$

البرهان
(١) نعلم بالاستناد إلى التمهيدية (١-٣)، أن:
$$x * e(x) = x \quad and \quad e(x) * x = e(x)$$
وذلك مهما يكن x من A.
وبالتالي: $x \wedge e(x) = e(x) \wedge x = 0 \in I$
فعندئذ إما $x \in I$ أو $e(x) \in I$.
(٢) إن **لزوم الشرط** واضح تقريباً ذلك لأنه إذا كان $a \vee b \in I$ فعندئذ، باعتبار أن:
$$a * (a \vee b) = 0 \quad and \quad b * (a \vee b) = 0$$
لدينا: $a \in I \quad and \quad b \in I$
لبرهان **ضرورة الشرط**: لنفرض أن $b \in I$, $a \in I$ ، فعندئذ بالعودة إلى النظرية (٢-١) والنظرية (٤-١) على التتالي يمكننا أن نرى أن:
$$\left.\begin{aligned}(a \vee b) * a = b * a \in I\\ (a \vee b) * b = a * b \in I\end{aligned}\right\}$$
وعليه يكون $a \vee b \in I$ وهكذا نكون قد برهنا التمهيدية.

لتكن $X_A = Spe(A)$ مجموعة المثاليات الأولية لـ A. يمكن تزويد المجموعة X_A ببنية تبولوجية وتحويلها من مجموعة مجردة من أية بنية إلى فضاء تبولوجي.

سنعكف في هذا البند على تحديد هذه التبولوجية، وفضلاً على ذلك، سنعرض الخصائص الأساسية التي يتمتع بها هذا الفضاء التبولوجي بالغ الأهمية، ويجدر بنا الإشارة إلى أن هذه المفاهيم الحديثة وردت مؤخراً في إحدى المقالات العلمية (انظر [7]) والتي تشكل الآن مادة هذا البند.

لنسند إلى كل مثالي J في A المجموعة:

$$V(J) = \{p \in X_A : J \subset p\}$$

أي مجموعة كل المثاليات الأولية في A التي تحوي ضمنها حقيقةً المثالي J.

ولنعتبر أيضاً المجموعة:

$$D(J) = \{p \in X_A : J \not\subset p\}$$

وكنتيجة لذلك، نورد النظرية التالية:

نظرية (٣-٢)

1. $V(A) = \Phi$
2. $V(\{0\}) = X_A$
3. $V(\underset{i \in I}{\bigstar} J_i) = \bigcap_{i \in I} V(J_i)$

لأجل أية جماعة $(J_i)_{i \in I}$ من المثاليات في A.

4. $V(I.J) = V(I) \bigcup V(J)$

لأجل أي مثاليين I,J في A .

البرهان

في الواقع، من السهل أولاً رؤية أن:

$$V(A)=\{p\in X_A : A\subset p\}=\Phi$$

and

$$V(\{0\})=\{p\in X_A : \{0\}\subset p\}=X_A$$

أيضاً، لدينا:

$$\begin{aligned}V(\mathop{\bigstar}_{i\in I} J_i) &= \{p\in X_A : \forall i\in I, J_i\subset p\}\\ &=\bigcap_{i\in I}\{p\in X_A : J_i\subset p\}=\bigcap_{i\in I}V(J_i)\end{aligned}$$

وأخيراً، وفقاً للنظرية (٦-٦) نجد:

$$\begin{aligned}V(I.J) &= \{p\in X_A : I.J\subset p\}\\ &=\{p\in X_A : J\subset p \quad or \quad J\subset p\}\\ &=V(I)\bigcup V(J)\end{aligned}$$

وبذا نكون قد أتممنا البرهان.

يمكن التحقق بسهولة أنه ينتج من النظرية السابقة النتيجة الهامة التالية:

نتيجة (٣-٣)

لتكن $X_A = Spec(A)$ مجموعة المثاليات الأولية لـ A .

إن $F_A = \{V(J) : J\in Id(A)\}$ جماعةٍ من المجموعات الجزئية من X_A تحقق الشروط التالية:

(١) المجموعة الخالية Φ والمجموعة الكلية X_A عنصران من F_A.

(٢) تقاطع أي جماعة من عناصر F_A هو عنصر من F_A.

(٣) اجتماع أي جماعة منتهية من عناصر F_A هو عنصر من F_A.

إن المجموعة $\tau_A = \{D(J) : J \in Id(A)\}$ تشكل تبولوجية على X_A، كما تشكل F_A جماعة المجموعات الجزئية المغلقة بالنسبة للتبولوجية τ_A.

تعريف (٣-٤)
إن التبولوجية τ_A المذكورة أعلاه تدعى أغلب الأحيان تبولوجية زاريسكي، أما الفضاء التبولوجي $(Spec(A), \tau_A)$ فيدعى بالطيف الأولي لجبر BCK المحدد A.

ومن الطبيعي أن يرد السؤال حول ما إذا كان هذا الصف الخاص من الفضاءات التبولوجية يتمتع ببعض الخواص التبولوجية المعروفة.
قبل المضي في عرض الصفات التبولوجية لهذا الصف الخاص، نورد المصطلح التالي:

ليكن A جبر BCK محدداً وضمنياً، وليكن $e \in A$ ، لنضع:

$$V(e) = \{p \in X_A : e \in p\} \quad and \quad D(e) = \{p \in X_A : e \notin p\}$$

ويمكننا الآن عرض النظرية التالية:

نظرية (٣-٥)

(1) $D(e) = X_A - V(e)$

(2) $D(0) = \Phi \quad and \quad D(1) = X_A$

(3) $D(e \wedge w) = D(e) \bigcap D(w)$

(4) $D(e \vee w) = D(e) \bigcup D(w)$

(5) $D(e) = X_A - D(e) = V(e)$

البرهان

في الواقع، من السهل أولاً أن يبيّن القارئ حتمية تحقق العبارتين (١)و(٢).

ليكن P مثالياً أولياً لجبر BCK المحدد الضمني A، نعلم سابقاً أن:

$$e \wedge w \in P \Leftrightarrow e \in P \quad or \quad w \in P$$

وبالتالي نجد:

$$D(e \wedge w) = \{P \in X_A : e \wedge w \notin P\}$$
$$= \{P \in X_A : e \notin P \quad and \quad w \notin P\} = D(e) \bigcap D(w)$$

ولبرهان العبارة الرابعة، نعلم استناداً إلى النظرية (٣-١) أن:

$$e \vee w \in P \Leftrightarrow e \in P \quad and \quad w \in P$$

يتضح بالتالي أن:

$$D(e \vee w) = \{P \in X_A : e \vee w \notin P\}$$
$$= \{P \in X_A : e \notin P \quad or \quad w \notin P\} = D(e) \bigcup D(w)$$

وأخيراً، نلاحظ أن: $D(e) \bigcap D(e') = D(e \wedge e') = D(0) = \Phi$

وكذلك، نرى أن:

$$D(e) \bigcup D(e') = D(e \vee e') = D(1) = X_A$$

ومنه $D(e') = X_A - D(e)$ وهكذا نكون قد برهنا النظرية.

ليكن $X_A = Spec(A)$، ولنرمز بـ $\mathcal{D}_A$ لجماعة من المجموعات الجزئية من X_A من النمط $D(e)$ حيث $e \in A$.

إن هذه المجموعة مرتبة وفق علاقة الاحتواء. علاوة على ذلك، إن $\mathcal{D}_A$ تشكل شبكة بولية وذلك بالرجوع إلى النظرية (٢-٤).

يمكننا الآن المضيّ إلى أبعد من ذلك، في الحقيقة سنبرهن النظرية التالية:

نظرية (٣-٦)

إن D_A قاعدة لتبولوجية الفضاء X_A، عناصرها مجموعات مفتوحة ومغلقة بآن واحد في الفضاء X_A.

البرهان

لنضع $J =)e($ نجد $D(J) = D(e)$ وعليه فإن كلّ عنصر $D(e)$ من D_A يكون مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي X_A.

كذلك، بما أن $D(e') = X_A - D(e)$ وذلك بحسب الشق الأخير من النظرية (٣-٥) وبالتالي يتضح أيضاً أن $D(e)$ مجموعة مغلقة.

ومنه فإن كل عنصر من D_A يكون مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد في X_A.

ليكن J مثالياً في A. لكي نبرهن النظرية نحتاج فقط لتبيان أن $D(J)$ اجتماعٌ لجماعة من المجموعات الجزئية من D_A.

إن $D(J) = \bigcup_{x \in J} D(e(e(x)))$ وذلك لأن:

$$
\begin{aligned}
P \in D(J) &\Leftrightarrow J \not\subset P \\
&\Leftrightarrow \exists x \in J : x \notin P \\
&\Leftrightarrow \exists x \in J : e(x) \in P \\
&\Leftrightarrow \exists x \in J : e(e(x)) \notin P \\
&\Leftrightarrow \exists x \in J : P \in D(e(e(x))) \\
&\Leftrightarrow P \in \bigcup_{x \in J} D(e(e(x)))
\end{aligned}
$$

إذن D_A قاعدة لتبولوجية الفضاء X_A عناصرها مجموعات مفتوحة ومغلقة في هذا الفضاء، وبذلك نكون قد أتممنا إثبات النظرية.

والجوهري بالنسبة لهذا الفصل هو إثبات أن الفضاء التبولــوجي X_A متــراصّ وهاوسدورف. ومن المناسب قبل المضيّ في عرض نص هذه النظرية الهامــة والشيقة لابد لنا من تذكير القارئ بمفهوم الفضاءات المتراصّة والفضاءات التي تتمتع بالخاصية T_2.

الفضاءات المتراصة

يُقال عن فضاءٍ تبولوجي (X,τ) إنه **متراص** إذا حوت كلُّ تغطية مفتوحة لهذا الفضاء تغطيةً جزئيةً منتهيةً.

فضاءات هاوسدورف

يُقال عن فضاءٍ تبولوجي (X,τ) إنه فضاء T_2 أو إنه **فضــاء هاوســدورف (Hausdorff)** إذا تحقق الشرط التالي: أياً كانــت النقطتــان المختلفتــان x, y من X، فثمة جوار W_x لــ x وجوار W_y لــ y بحيث $W_x \bigcap W_y = \Phi$.

يترتب مباشرةً على هذا التعريف أن كل فضــاءٍ T_2 هــو فضــاء T_1 وبالتــالي فضاء T_0، في حين أن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

سنرتقي الآن درجة في سلم الدراسة التبولوجية للفضــاء $X_A = Spec(A)$ بإيراد النظرية الهامة التالية:

نظرية (٨-٧)

X_A فضاء متراصّ وهاوسدورف.

البرهان

لتكن $(D(e_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ تغطية مفتوحة ما للفضاء X_A، فعندئذ كل عنصر p من X_A ينتمي إلى واحدٍ على الأقل من عناصر التغطية $D(e_\lambda)$، وبالتالي فثمة عناصر $(\lambda \in \Lambda)$ e_λ بحيث $e_\lambda \notin p$ ومنه المثالي المولد $)e_\lambda($ بالعنصر e_λ غير محتواة في أي مثالي أولي. الأمر الذي ينجم عنه أن المثالي:

$$J = \bigstar_{\lambda\in\Lambda})e_\lambda($$

غير محتواة في أي مثالي أولي، وعليه يكون $J = A$ ومنه $1 \in J$.

يترتب على ذلك، بموجب التعريف وجود عدد منتهٍ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ بحيث:

$$1 = e_{\lambda_1} \vee e_{\lambda_2} ..... \vee e_{\lambda_n}$$

ينتج مما سبق وبالرجوع إلى النظرية (٣-٥) ما يلي:

$$X_A = D(1) = D(e_{\lambda_1} \vee e_{\lambda_2} ..... \vee e_{\lambda_n})$$
$$= D(e_{\lambda_1}) \bigcup (e_{\lambda_2}) ..... \bigcup (e_{\lambda_n})$$

ولكن هذا يعني أن $\{D(e_{\lambda_i})\}_{i=1}^{n}$ تشكل تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة الاختيارية $\{D(e_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ أي أن X_A فضاء متراصّ.

ننتقل الآن إلى برهان أن الفضاء X_A هاوسدورف.

ليكن p, q عنصرين مختلفين من الفضاء X_A. فثمة عنصر مثل $x \in A$ بحيث $x \in p$ وبحيث يكون $x \notin q$ ، الأمر الذي يترتب عليه وفقاً للنظرية (٣-١) أن $e(x) \notin p$ و$x \notin q$ و وبالتالي:

$$q \in D(x) \text{ و } p \in D(e(x))$$

ومنه هنالك جوار $W_p = D(e(x))$ لـ p وجوار $W_q = D(x)$ لـ q بحيث:

$$W_p \cap W_q = D(e(x)) \cap D(x)$$
$$= D(e(x) \wedge x) = D(0) = \Phi$$

إذن فالفضاء التبولوجي X_A يكون فضاء هاوسدورف. وصحة النظرية تصبح عندئذ واضحة.

إن النظريات السابقة تقودنا إلى عرض النظرية الهامة والأخيرة:

نظرية (٨-٨)

ليكن A جبر BCK محدداً وضمنياً. إن التطبيق: $D: A \to D_A$ الذي يرفق كل عنصر $e \in A$ بالمجموعة المفتوحة والمغلقة $D(e) = \{p \in X_A : e \notin p\}$ يكون تشاكلاً تقابلياً بين جبري بول A و D_A.

البرهان

في الحقيقة، إن التطبيق $D: A \to D_A$ هو تشاكل بين جبري بول A و D_A وذلك استناداً إلى النظرية (٣-٥) ، كذلك فإن D غامر،

ولإتمام المطلوب يجب إثبات أن D متباين.

لنفرض $e \in A$ بحيث يكون $D(e) = \Phi$ وبالتالي e ينتمي إلى كل مثالي أولي لـ A وعليه فإن $e = 0$ وصحة النظرية تصبح عندئذ واضحة.

الفصل الثالث

جبور – BCH – وجبور الـ – BH –

١- جبور BCH – وجبور الـ – BH –

تعريف (١-١)

- إن جبر BH هو مجموعة G مزودة بعنصر مميَّز يرمز له بـ 0 وبعملية ثنائية يرمز لها بـ $\star$ وبحيث تتحقق الخواص الثلاث التالية:

1. $x*x=0$
2. $if \quad "x*y=0 \quad and \quad y*x=0" \quad imply \quad x=y$
3. $x*0=x$

وذلك مهما تكن x,y عناصر من المجموعة G.

- إن جبر BCH هو مجموعة G مزوّدة بعنصر مميَّز يرمز له بـ 0 وبعملية ثنائية يرمز لها بـ$\star$ وبحيث تتحقق الخواص الثلاث التالية:

1. $x*x=0$
2. $if \quad "x*y=0 \quad and \quad y*x=0" \quad imply \quad x=y$
3. $(x*y)*z=(x*z)*y$

وذلك مهما تكن x,y,z عناصر من المجموعة G.

ملاحظة

إذا كان G جبر BCH، ينتج وفقاً للخواص الواردة أعلاه أن $(\forall x \in G) \quad x * 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ وذلك بملاحظة أن:

$$0 * x = (x * 0) * x = (x * x) * 0 = 0 \; .$$

وعليه فإن $x = 0$ وفقاً للخاصة الثانية.

ونبرهن أولاً التمهيدية التالية:

تمهيدية (١-٢)

إذا كان G جبر BCH فإن $x * 0 = x$ وذلك أياً كان x من G.

البرهان

يُلاحظ وفقاً للخاصتين الأولى والثالثة المذكورة أعلاه أن:

$$(x * 0) * x = (x * x) * 0 = 0 \; .$$

من جهة ثانية، لدينا استناداً إلى الخواص نفسها،

$$(x * (x * 0)) * 0 = (x * 0) * (x * 0) = 0 \; .$$

وعليه ووفقاً للملاحظة الواردة لتوّنا نجد أن:

$$x * (x * 0) = 0$$

ينتج من ذلك وبحسب الخاصة الثانية أن $x = x * 0$.

تعريف (١-٣)

يُقال عن جبر BCH إنه **جبر** BCH_0 إذا حقق الخاصة الإضافية التالية:

$$0 * x = 0$$

ومن الملائم أن نشير إلى أن كل جبر BCK يكـون جبـر BCH_0، إلا أن العكس ليس بالضرورة ممكن.

ولتوضيح مفهوم جبور BCH وجبور BH نورد الأمثلة التالية.

مثال (١-٤)

لنأخذ المجموعة $G = \{0, a, b, c\}$ ولنزودها بالعملية الثنائية $\star$ المعرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	b	0	0
c	c	c	b	0

من الملاحظ أن الخواص الثلاث الواردة في تعريف مفهوم جبور BCH ملبَّاة. بالإضافة لذلك، إن G جبر BCH_0 وذلك بملاحظـة أن $0 * x = 0$ لأجـل كل x من G.

من جهة ثانية، إن G ليس جبر BCK وذلك لأنه لدينا على سبيل المثال:

$$((a*c)*(a*b))*(b*c) = a \neq 0$$

مثال (١-٥)

لنزود المجموعة $G = \{0, a, b, c, d\}$ بالعملية الثنائية $\star$ المعرفـة وفـق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	a	d
b	b	b	0	0	d
c	c	c	c	0	d
d	d	d	d	d	0

إن G جبر BH تاركين للقارئ رؤية ذلـك. ولكـن بالمقابـل إن G لـيس جبر BCH وذلك بملاحظة أن:

$$\left.\begin{array}{l}(b*c)*d=0*d=0\\(b*d)*c=d*c=d\end{array}\right\}$$

مثال (١-٦)

لنزود $G=R$ مجموعة الأعداد الحقيقية بالعملية الثنائية $\star$ المعرفة بالصيغة التالية:

$$x*y=\begin{cases}0 & if \quad x=0\\ \dfrac{(x-y)^2}{x} & if \quad x\neq 0\end{cases}$$

لنبين أن $(G,0,*)$ جبر BH.

الحل:

في الواقع، لدينا:

$$.\quad x*x=\frac{(x-x)^2}{x}=0$$

. $if \quad x*y=\dfrac{(x-y)^2}{x}=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

. $x*0=\dfrac{(x-0)^2}{x}=x$

علاوة على ذلك، إن جبر BH المذكور ليس جبر BCH.

من أجل ذلك يكفي وضع $x=1, y=2, z=3$ وملاحظة أن:

. $(x*y)*z=\dfrac{(1-2)^2}{1}*3=1*3=4$

. $(x*z)*y=\dfrac{(1-3)^2}{1}*2=4*2=1$

نظرية (١-٧)

ليكن G جبر BH يحقق الخاصتين:

. $(x*y)*x=0$

. $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0 \quad ; \quad \forall x,y,z \in G$

عندئذ G جبر BCK.

البرهان

لدينا وفقاً للخواص المذكورة في نص النظرية أن:

. $0*x=(x*x)*x=0$

. $(x*(x*z))*z=((x*0)*(x*z))*(z*0)=0$

وبالتالي G جبر BCK.

نظرية (١-٨)

ليكن G جبر BH يحقق الخاصة $x*(x*y)=x*y$

عندئذ G يكون جبراً تافهاً.

البرهان

لنفرض أن $x \in G$، فعندئذ وفقاً للفرض يمكن أن نكتب:

$$x = x*0 = x*(x*x) = x*x = 0$$

وبالتالي G جبرٌ تافهٌ.

نظرية (١-٩)

ليكن G جبر BH يحقق الخاصة التجميعية، فعندئذ G يكون زمرة.

البرهان

لدينا وفقاً للفرض:

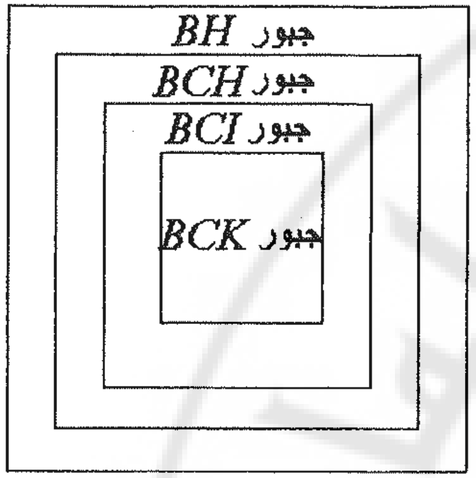
$$0*x = (x*x)*x = x*(x*x) = x*0 = x$$

وعليه 0 عنصرٌ حياديٌ في G.

كذلك، استناداً إلى مفهوم جبور BH نجد $x*x=0$ وبالتالي كل عنصر x من G يكون نظير نفسه إذن G زمرة.

ملاحظة

استناداً إلى الحقائق والتعاريف السابقة، يمكننا إيراد المخطط التالي الذي يوضح العلاقات بين الأصناف المميَّزة لهذه الجبور الحديثة:



تعريف (١-١٠)

ليكن G جبر BH. يُقال عن G إنّه **جبر BH محدود** إذا وجد عنصراً $m \in G$ بحيث يكون $x * m = 0$ وذلك أياً كان x من G.

٢- جبور BCH التناظرية

ليكن G جبر BCH. نحتاج قبل كل شيء إلى الرموز والمصطلحات التالية:

سوف نرمز من الآن وصاعداً بـ $e(x) = 0 * x$ وذلك أياً كان x من G وسندعوه **بالعنصر المتناظر المرتبط بـ** x.

يتضح مباشرةً أن $e(0) = 0$ وأن $e(x) * y = e(y) * x$ وذلك مهما كانت x, y عناصر من G.

وعليه نجد: $e(e(x)) * x = 0$

وعلاوة على ذلك، نقترح المجموعات الجزئية:

$SP(G) = \{x \in G : e(x) = x\}$

$$P(G) = \{x \in G : e(x) = 0\}$$

ولدينا في الحال النظريتان التاليتان:

نظرية (٢-١)

إذا كان G جبر BCH، فإن العبارات التالية محققة:

1. $e(x * y) = e(x) * e(y)$
2. $e(e(e(x))) = e(x) \quad ; \quad \forall x, y \in G$

البرهان

في الواقع، لدينا وفقاً لمفهوم جبور BCH الوارد في البند الأول أن:

$$\begin{aligned} e(x * y) &= [((x * y) * x) * e(y)] * (x * y) \\ &= [((x * y) * x) * (x * y)] * e(y) \\ &= e(x) * e(y) \end{aligned} .$$

لإثبات العبارة الثانية: لدينا وفقاً للملاحظة الواردة لتوّنا أن

$$e(e(x)) * x = 0$$

وبالتالي بتطبيق العبارة الأولى يكون: $e(e(e(x))) * e(x) = 0$

وعليه يمكن أن نكتب وفقاً لحقائق أُرسيت سابقاً ما يلي:

$$\begin{aligned} e(e(e(x))) &= (e(x) * e(x)) * e(e(x)) \\ &= (e(x) * e(e(x))) * e(x) \\ &= (e(e(e(x))) * x) * e(x) \\ &= (e(e(e(x))) * e(x)) * x \\ &= e(x) \end{aligned} .$$

وبالتالي يتم إثبات النظرية بكاملها.

نظرية (٢-٢)

إذا كان G جبر BCH، فإن $SP(G)$ تكون زمرة بولية.

البرهان

بما أن $0 \in SP(G)$، فعندئذ $SP(G) \neq \Phi$.

لنفرض أن x, y, z عناصر من المجموعة $SP(G)$ فنجد أن:

$$x * y = e(x) * y = e(y) * x = y * x$$

وكذلك:

$$(x * y) * z = (y * x) * z = (y * z) * x = x * (y * z)$$

يتضح أن $SP(G)$ زمرة بولية.

سنرى الآن كيف يمكن بناء جبر الخارج لجبر BCH بلغة العناصر المتناظرة.

ليكن G جبر BCH. لنعرف على G العلاقة الثنائية التالية:

$$x \equiv y \Leftrightarrow e(x) = e(y)$$

إن العلاقة المذكورة هي علاقة تكافؤ على G. علاوةً على ذلك، إنها علاقة متوائمة مع بنية G وذلك لأنه إذا افترضنا أن $x \equiv y$ و $z \equiv t$ فعندئذ بالرجوع للنظرية (٢-١) يكون:

$$e(x * z) = e(x) * e(z) = e(y * t) = e(y) * e(t)$$

أي: $x * z = y * t$.

سنرمز بـ $D_x = \{y \in G : e(x) = e(y)\}$ لصف تكافؤ العنصر $x \in G$، ومن الملائم أن يرمز بـ $G/_{\equiv}$ لمجموعة صفوف التكافؤ لـ G.

لنزود هذه المجموعة بالعملية الثنائية $\bullet$ المعرفة وفق الصيغة: $C_x \bullet C_y = C_{x*y}$ وذلك أياً كان x, y عناصر من G. وبالتالي نورد النظرية التالية.

نظرية (٢-٣)

إذا كان G جبر BCH فإن $(G/_{\equiv}, D_0, \bullet)$ يكون كذلك.

البرهان

يُلاحظ أولاً أن:

$$D_x \bullet D_x = D_{x*x} = D_0 = \{x \in G : e(x) = 0\}$$

ثم إنه إذا كان $D_x \bullet D_y = D_y \bullet D_x = D_0$ فعندئذ نجد:

$$e(x*y) = e(y*x) = 0$$

وعليه باللجوء إلى الشق الأول من النظرية (٢-١) يتضح أن $e(x) = e(y)$ ومنه $D_x = D_y$.

وأخيراً، بملاحظة أن:

$$(D_x \bullet D_y) \bullet D_z = D_{(x*y)*z} = D_{(x*z)*y} = (D_x \bullet D_z) \bullet D_y$$

يتم إثبات النظرية.

تعريف (٢-٤)

ليكن G جبر BCH. يُقال عن عنصرٍ $x \in G$ إنه **متناظر** إذا كان $e(e(x)) = x$.

ينتج على الفور أن 0 عنصر متناظر، وفضلاً عن ذلك، نعرض النظرية التالية:

نظرية (٢-٥)

إذا كان G جبر BCH. فإن: $Sym(G)=\{x\in G: e(e(x))=x\}$ تشكل- BCH- شبه زمرة.

البرهان

نلاحظ أولاً أن $0\in Sym(G)$. من جهة أخرى، لنفرض أن a,b عنصران متناظران من $Sym(G)$ عندئذ:

$$e(e(a*b))=e(e(a))*e(e(b))=a*b$$

إذن $a*b\in Sym(G)$ وبالتالي $Sym(G)$ جبر BCH جزئي من G.

ليكن $a\in Sym(G)$ ولنعتبر المعادلة $a*x=0$ فعندئذ:

$$e(x*a)=e(x)*e(a)=e(e(a))*x=a*x=0$$

وبالتالي $x*a=0$ ومنه $x=a$ إذن $Sym(G)$ يكون أيضاً شبه زمرة وبذلك نكون قد أتممنا برهان النظرية.

تعريف (٢-٦)

ليكن G جبر BCH.

يُقال عن G إنه **تناظري** إذا وفقط إذا كانت جميع عناصره متناظرة.

بتعبير مكافئ، إذا كان: $e(e(x))=x \quad ; \quad \forall x\in G$

ملاحظة

ليكن G جبر BCH. يُلاحظ وفقاً للنظرية (٢-١) بأن العناصر المتناظرة في G هي بالضبط العناصر من النمط $e(x)$، حيث $x\in G$.

وحريٌ بنا تنبيه القارئ إلى أن مفهوم جبور BCH التناظرية والنتائج المتعلقة بهذا المفهوم تم نشرها كمقالة علمية في مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية

(المجلد ١٩ – العدد (١)، ٢٠٠٣) وعلى القارئ العودة إلى المرجع ([6]) من أجل تفاصيل أدق.

ولتوضيح لمفهوم جبور BCH المتناظرة. لنعتبر المجموعة $G = \{0, a, b, c\}$ المزودة بالعملية الثنائية $*$ المعرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c
0	0	a	c	b
a	a	0	b	c
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

من السهل على القارئ تبيان بأن الخواص الثلاث الواردة في البند الأول ملبّاة. بالإضافة لذلك، $e(e(x)) = x$ وذلك أياً كان x من G. يتضح بالتالي أن G جبر BCH تناظري.

نظرية (٢-٧)

إذا كان G جبر BCH تناظرياً. فإن الدعاوى التالية محققة:

1. $e(x * y) = y * x$
2. $x * y = 0 \Rightarrow y * x = 0$
3. $x * (y * z) = z * (y * x)$
4. $x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن x, y, z عناصر من G.

البرهان

في الحقيقة، بتطبيق النظرية (٢-١) نرى:

$$e(x*y) = e(x)*e(y) = e(e(y))*x = y*x \quad .$$

لبرهان الدعوى (٢). لنفرض أن $x*y = 0$ ، فعندئذ وفقاً للدعوى (١) نجد:

$$y*x = e(x*y) = e(0) = 0 \quad .$$

لإثبات صحة (٣). باللجوء مرة أخرى إلى الدعوى (١)، نستطيع أن نكتب:

$$x*(y*z) = e((y*z)*x) = e((y*x)*z) = z*(y*x) \quad .$$

وأخيراً، يُلاحظ استناداً إلى الدعوى الأخيرة أن:

$$x*(x*y) = y*(x*x) = y$$

وبذا يتم إثبات صحة النظرية.

نقدم الآن معياراً هاماً لتحديد جبر BCH تناظري على بنية جبرية $(G,0,*)$ من خلال النظرية التي سندرجها فيما يلي:

نظرية (٢-٨)

إن الموضوعات التالية:

1. $x*(x*y) = y$
2. $(x*y)*z = (x*z)*y$

لازمة وكافية لتحديد جبر BCH تناظري على بنية جبرية $(G,0,*)$ وذلك أياً كانت x, y, z عناصر من G.

البرهان

لزوم الشرط:

إذا صحّت الموضوعتان المعروضتان في نص النظرية، يتعين على ذلك بوجهٍ خاص أن:

$$(x*x)*(x*x)=(x*(x*x))*x=x*x \ .$$

وبالتالي $0*0=0$.

الأمر الذي يترتب عليه:

$$\begin{aligned} x*0 &= (0*(0*x))*0=(0*0)*(0*x) \\ &= 0*(0*x)=x \end{aligned} \ .$$

ومنه نجد:

$$x*x=(x*0)*(x*0)=(x*(x*0))*0=0*0=0 \ .$$

لنفرض الآن أن $x*y=0$ وأن $y*x=0$ فعندئذ يكون:

$$x=x*0=x*(x*y)=y \ .$$

وأخيراً، بملاحظة أن:

$$e(e(x))=0*(0*x)=x \quad ; \quad \forall x \in G$$

يتم إثبات لزوم الشرط.

كفاية الشرط:

إن **كفاية الشرط** تتضح مباشرةً من العبارة الأخيرة في النظرية (٢-٧).

نظرية (٢-٩)

إذا كان G جبر BCH. فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون G تناظرياً هو أن يكون $P(G)=\{0\}$.

البرهان

لزوم الشرط: إذا كـان G جبـر BCH تناظريـاً، ولنفـرض أن $x \in G$ بحيث $e(x) = 0$ فعندئذ يكون $e(e(x)) = 0$ وبالتالي $x = 0$.

كفاية الشرط: لنفـرض أن $P(G) = \{0\}$ ولنبـرهن أن $e(e(x)) = x$ وذلك أياً كان x من G.

في الحقيقة، رأينا سابقاً أن: $e(e(x)) * x = 0$

من جهة ثانية، بالرجوع إلى النظرية (٢-١) نجد:

$$e(x * e(e(x))) = e(x) * e(e(e(x))) = 0$$

وعليه وفقاً للفرض يكون $x * e(e(x)) = 0$

يتضح أن G تناظري وبالتالي يتم إثبات النظرية بكاملها.

وتقودنا عندئذ النظرية الأخيرة إلى النتيجة الخاصة التالية تاركين للقارئ متعـة البرهان.

نتيجة (٢-١٠)

إذا كان G جبر BCH. إن الشرط اللازم والكافي كي يكون G تناظرياً هـو أن تتحقق القضية التالية:

لأجل أي عنصرين x, y من G بحيث $e(x) = e(y)$ فإن $x = y$.

وأخيراً، نعرض النظرية التالية.

نظرية (٢-١١)

كل جبر BCH تناظري G يكون زمرة تبديلية.

البرهان

ليكن $a,b \in G$، ولنأخذ $a+b = a*e(b)$ عندئذ يكون لدينا:

$$a+0 = a*e(0) = a = e(e(a)) = 0*e(a) = 0+a \ .$$

$$a+b = a*e(b) = e(e(b))*e(a) = b*e(a) = b+a \ .$$

ويتعين على هذا أن:

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= (b+a)+c = (b*e(a))*e(c) \ .\\ &= (b*e(c))*e(a) = (b+c)+a\\ &= a+(b+c)\end{aligned}$$

وعليه G نصف زمرة تبديلية تملك عنصراً محايداً.

لإتمام البرهان يجب إثبات الحقيقة التالية:

لأجل أي عنصرين $a,b \in G$ إن المعادلة $a+x=b$ تقبل حلاً وحيداً من النمط $x = b*a$.

في الحقيقة، استناداً إلى النظريتين (٢-٧) و(٢-٨) نجد أن:

$$a+x = a*e(x) = a*e(b*a) = a*(a*b) = b \ .$$

زد على ذلك، لنفرض أن $a+x = a+y$ ، فعندئذ باللجوء إلى النظرية (٢-٧)، النظرية (٢-١) والنظرية (٢-٨) على التتالي يتضح أن:

$$\begin{aligned}x*y &= e(y*x) = e(y)*e(x) \ .\\ &= (a*(a*e(y)))*e(x)\\ &= (a*e(x))*(a*e(y)) = 0\end{aligned}$$

وعليه $x=y$. إذن G زمرة تبديلية.

٣- جبور BCH التناظرية وجبور BCI

سنورد الآن صنفاً جديداً من أصناف الجبور الحديثة ألا وهو مفهوم جبور BCI من خلال التعريف التالي:

تعريف (٣-١)

إن جبر BCI هو مجموعة G مزودة بعنصر مميَّز يرمز له بـ 0 وبعملية ثنائية يرمز لها بـ $*$ بحيث تتحقق الخواص الأربع التالية:

1. $x*x=0$
2. $if\ \ "x*y=0\ \ and\ \ y*x=0"\ \ imply\ \ x=y$
3. $(x*(x*y))*y=0$
4. $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$

وذلك مهما تكن x, y, z عناصر من G.

ينتج مباشرةً ما يلي:

إذا كان G جبر BCI ، فإن $x*0=x$ وذلك أياً كان $x \in G$.

نترك للقارئ إقامة البرهان على هذه النتيجة مسترشداً ببرهان التمهيدية (١-١) الواردة في الفصل الأول.

علاوة على ذلك، إن العلاقة الثنائية: "$x \leq y \Leftrightarrow x*y=0$"

تكون علاقة ترتيب على G.

ملاحظة

إن كل جبر BCK يكون جبر BCI، أما العكس فغير صحيح.

ذلك أن جبور BCI ليست جبور BCK بالضرورة. من الملائم أن ندعوها بجبور BCI الفعلية. الأمر الذي يبينه المثالان التاليان.

مثال (٣-٢)

لنزود المجموعة $G = \{0, a, b, c\}$ بالعمليتين الثنائيتين المعرفتين وفق الجداول المرفقة:

$*$	0	a	b	c
0	0	c	b	a
a	a	0	c	b
b	b	a	0	c
c	c	b	a	0

$\bullet$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

إن $(G,*)$ جبر BCI فعلي وذلك بملاحظة أن: $0*a = c \neq 0$
بينما $(G,\bullet)$ جبر BCK، ويمكن للقارئ التأكد من هذه الحقيقة.

تمهيدية (٣-٣)

إذا كان G جبر BCI، فعندئذ:

1. $x \le y \Rightarrow z*y \le z*x$
2. $(x*y)*z = (x*z)*y$

وذلك مهما كانت x, y, z عناصر من G.

لن نورد إثبات هذه التمهيدية، إنما نكتفي بالإشارة إلى أنه يمكن لإثبات ذلك اتّباع خط النقاش نفسه المتّبع في النظرية (١-٢) الواردة في الفصل الأول، بالإضافة لذلك، نجد النظرية التالية.

نظرية (٣-٤)

إذا كان G جبر BCI فإن العبارات التالية متكافئة:

1. $0*x=x$
2. $x*y=y*x$
3. $(x*y)*z=(x*z)*y \quad ; \quad \forall x,y,z\in G$

البرهان

(١)$\Leftarrow$(٢) لدينا:

$$x*y=(0*x)*y=(0*y)*x=y*x \ .$$

سنبين الآن أن (٢) تقتضي (٣).

في الواقع، استناداً إلى التمهيدية السابقة، يمكن أن نكتب:

$$(x*y)*z=(y*x)*z=(y*z)*x=x*(y*z) \ .$$

وأخيراً، إن الاقتضاء (٣)$\Leftarrow$(١) يتضح على الفور، بأخذ $x=y=z$ وبالتالي يتم إثبات النظرية.

نظرية (٣-٥)

كل زمرة بولية هي جبر BCI فعلي.

نظراً لسهولة البرهان فيترك للقارئ.

إن عكس هذه النظرية غير ممكن، بيد أنه ترد النظريتان التاليتان تاركين للقارئ التحقق من صحتهما.

نظرية (٣-٦)

كل جبر BCI فعلي G يحقّق الشرط $0*x=x$ أياً كان x من G، يكون زمرة بولية.

نظرية (٣-٧)

كل جبر BCI فعلي G يحقّق الشرط $x*(y*x)=(x*y)*x$ وذلك أياً كانت x,y من G، يكون زمرة بولية.

وفضلاً عن الرابطة بين جبور BCI الفعلية والزمر البولية، فثمة رابطة بين جبور BCI الوسيطية وجبور BCH المتناظرة.

سنبين لاحقاً بأن صف الجبور BCH التناظرية يتطابق وصف جبور BCI الوسيطية. ومن الطبيعي أن نعرض أولاً التعريف التالي:

تعريف (٣-٨)

يُقال عن جبر BCI إنه **وسيطي** إذا تحقّق فضلاً عن الخواص الأربع الواردة أعلاه الخاصة الإضافية التالية:

$$(x*y)*(z*t)=(x*z)*(y*t)$$

وذلك مهما تكن x,y,z,t عناصر من G.

تمثل النظرية التالية أهم النظريات في هذا البند.

نظرية (٣-٩)

إن جبور BCH التناظرية هي بالضبط جبور BCI الوسيطية.

البرهان

سنبرهن أولاً أن كل جبر BCH تناظرياً يكون جبر BCI وسيطياً.

في الواقع، ليكن G جبر BCH تناظرياً، ولنفرض أن $x, y, z \in G$، فعندئذ باللجوء إلى النظرية (٢-٨)، نجد:

$$((x*y)*(x*z))*(z*y) = ((x*(x*z))*y)*(z*y)$$
$$= (z*y)*(z*y) = 0$$

ومنه G يكون جبر BCI.

علاوة على ذلك ، إذا كانت x, y, z, u عناصر من G، فعندئذ بالاستناد إلى النظرية (٢-٧) نجد:

$$(x*y)*(z*u) = (x*(z*u))*y = e((z*u)*x)*y$$
$$= e((z*x)*u)*y = (u*(z*x))*y$$
$$= (u*y)*(z*x) = (x*z)*(y*u) \; .$$

يتضح من ذلك أن الخاصة الإضافية محققة، وبالتالي G وسيطي.

العكس، لنفرض أن G جبر BCI وسيطي، فعندئذ نجد وفقاً للجزء الثاني من التمهيدية (٣-٣) أن:

$$(x*y)*z = (x*z)*y \quad ; \quad \forall x, y, z \in G \quad ......(١)$$

وإذا لاحظنا أن:

$$0*(0*x) = (x*x)*(0*x)$$
$$= (x*0)*(x*x) = x*0 = x \quad ; \quad \forall x \in G \; .$$

فإننا نستنتج:

$$x*(x*y) = (x*0)*(x*y)$$
$$= (x*x)*(0*y) = y \; .$$

إذن:

$$x*(x*y)=y \quad \text{......(٢)}$$

يترتب على ذلك بالرجوع إلى النظرية (٢-٨)، أن G جبر BCH تناظري.
ومنه يتم إثبات النظرية بكاملها.

٤- المثاليات في جبور BH

ليكن G جبر BH. يُقال عن جزء $I \neq \Phi$ من G إنه **مثالي في** G إذا كان $0 \in I$ وإذا تحقق ما يلي:
لأجل أي عنصرين x, y من G، بحيث يكون $x*y, y \in I$ فإن $x \in I$.
وتجدر الإشارة إلى أنه يوجد على الأقل مثاليان في G وهما G والمثالي الصفري $\{0\}$.

تعريف (٤-١)

ليكن G جبر BH. يُقال عن مثالي M في G إنه **أعظمي** إذا كان $M \neq G$، ولا يوجد في G أي مثالي مثل J بحيث يكون $M \subsetneq J \subsetneq G$.
بمعنى مكافئ، المثالي الأعظمي في G هو مثالي حقيقي وغير محتوى في أي مثالي حقيقي في G.
ولتوضيح مفهوم المثاليات والمثاليات الأعظمية في جبور BH نورد المثال الآتي:

مثال (٤-٢)

لنأخذ $G=\{0,a,b\}$ جبر BH المعرف بالجدول المرفق:

$*$	0	a	b
0	0	0	a
a	a	0	b
b	b	b	0

إن $I=\{0,b\}$ ليس مثالياً في G وذلك لأن $a*b=b\in I$ بينما $a\notin I$ ولكن $M=\{0,a\}$ مثالي حقيقي في G (تأكد من ذلك)، زد على ذلك، إنه أعظمي.

ولدينا مباشرة التمهيدية التالية:

تمهيدية (٤-٣)

إذا كان I مثالياً في جبر BH المحدود G، فعندئذ I مثالي حقيقي في G إذا وفقط إذا كان $m\notin I$.

البرهان

لنفرض أولاً أن I مثالي حقيقي في G، ولنقبل مؤقتاً أن $m\in I$. فعندئذ، إذا كان $x\in G$ فمن السهل أن نرى حينئذ أن هذا يقتضي:

$$x*m=0\in I\Rightarrow x\in I$$

وبالتالي $G=I$ ، ونكون بذلك قد وقعنا في تناقض. إذن $m\notin I$.

العكس، إذا كان $m\in G$ بحيث يكون $m\notin I$ ، يتضح لنا على الفور أن $I\neq G$ وبالتالي I مثالي حقيقي في G.

ويمكننا الآن عرض النظرية الهامة التالية:

نظرية (٤-٤)

كل جبر BH محدود G،$(GardG \geq 2)$ يملك على الأقل مثالياً أعظمياً.

البرهان

يمكننا إقامة البرهان على هذه النظرية وفق المخطط التالي:

لنفرض أن I مثالي في G، ولنعتبر المجموعة:

$$S = \{J \in Id(G): \ J \neq G, \ I \subseteq J\}$$

إن $S \neq \Phi$ لأن $\{0\} \in S$، بالإضافة لذلك، نرى بسهولة أن S مجموعة مرتبة جزئياً.

لتكن $T = \{J_i\}_{i\in I}$ مجموعة جزئية غير خالية والمرتبة كلياً من S ولنضع $M = \bigcup_{i\in I} J_i$ ولنبين أن M حداً أعلى لـ T.

في الحقيقة، إن $T \subseteq M$ وذلك لأن $I \subseteq J_i \quad (\forall i \in I)$.

أيضاً، من الواضح أولاً أن $0 \in M$. لنفرض الآن أن $x * y, y \in M$ فثمة $i_1, i_2 \in I$ بحيث يكون $x * y \in J_{i_1}$ ويكون كذلك $y \in J_{i_2}$ وبالتالي $y \in J_{i_2}$ و $x * y \in J_{i_2}$ لأن المجموعة T مرتبة كلياً، ومنه نجد أن:

$$x \in J_{i_2} \subseteq \bigcup_{i\in I} J_i = M$$

إذن M مثالي حقيقي في G ويحوي I أي أن $M \in S$.

ولما كان من جهة أخرى، $\quad J_i \subseteq \bigcup_{i\in I} J_i = M \quad (\forall i \in I)$

يتعين على هذا أن M حدٌ أعلى لـ T.

وأخيراً، باللجوء إلى تمهيدية زورن، يتضح بأن هنالك عنصراً أعظمياً واحداً على الأقل في S.

وبذلك نكون قد أتممنا البرهان.

تعريف (٤-٥) المثاليات الانسحابية

ليكن G جبر BH. يُقال عن المثالي I في G إنه **انسحابي** إذا حقق الاقتضاء التالي:

$$x*y,\, y*x \in I \Rightarrow (x*z)*(y*z) \in I$$
$$and \quad (z*x)*(z*y) \in I \quad ; \qquad \forall x,y,z \in G$$

ينتج مباشرةً أن $\{0\}$ و G مثاليان وانسحابيان لـــ G.

ولتوضيح مفهوم المثاليات الانسحابية نورد المثال الآتي.

مثال (٤-٦)

ليكن $G=\{0,a,b,c\}$ جبر BH، المعرف وفق الجدول التالي:

$*$	0	a	b	c
0	0	a	c	0
a	a	0	b	0
b	b	b	0	c
c	c	c	c	0

من السهل على القارئ رؤية أن $I=\{0,a\}$ مثالي في G، علاوة على ذلك I مثالي انسحابي في G وذلك بملاحظة أن $0*a \in I$ و $a*0 \in I$ وبالمقابل لدينا $(0*x)*(a*x) \in I$ و $(x*0)*(x*a) \in I$ وذلك لأجل $x \in \{0,a,b,c\}$.

بينما $J=\{0,a,b\}$ مثالي في G (تأكد من ذلك) لكنه في الحقيقة غير انسحابي لأن $a*b=b\in J \quad and \quad b*a=b\in J$

ولكن يُلاحظ على سبيل المثال أن:

$$(a*a)*(b*a)=0*b=c\notin J$$

٥- جبر BH الخارج ومبرهنات التماثل

ليكن G جبر BH وليكن I مثالياً انسحابياً في G.

نعرف على G العلاقة الثنائية التالية:

$$x\approx y \Leftrightarrow x*y\in I \quad and \quad y*x\in I$$

ونشير لذلك بـ $x\equiv y(\mathrm{mod} I)$ ونقرأ x تطابق y مقاس I.

تتصف هذه العلاقة بأنها انعكاسية $\forall x\in G \quad x\equiv x(\mathrm{mod} I)$

كما أنها متناظرة: $x\equiv y(\mathrm{mod} I) \Rightarrow y\equiv x(\mathrm{mod} I)$

لنفرض الآن أن: $x\equiv y(\mathrm{mod} I) \wedge y\equiv z(\mathrm{mod} I)$

فعندئذ نجد:

$$\begin{cases} x*y\in I \wedge y*x\in I \\ y*z\in I \wedge z*y\in I \end{cases}$$

وعليه وفقاً لمفهوم المثاليات الانسحابية الوارد في التعريف (٥-٥) يتضح أن:

$$\begin{cases} (x*z)*(y*z)\in I \wedge y*z\in I \\ (z*x)*(z*y)\in I \wedge z*y\in I \end{cases}$$

إذن $x*z\in I \quad and \quad z*x\in I$ ومنه $x\equiv z(\mathrm{mod} I)$

أي أن العلاقة المذكورة أعلاه متعدية ومنه تكون علاقة تكافؤ.

ومن الملائم أن نرمز لصف تكافؤ العنصر $x\in G$ بالمجموعة:

$$[x]=\{y\in G: x\approx y\}$$

أما مجموعة صفوف التكافؤ فسيرمز لها بـ G/I. بالإضافة لذلك نحتاج إلى إيراد التمهيدية التالية:

تمهيدية (٥-١)

إذا كان G جبر BH، وليكن I مثالياً انسحابياً في G. إن علاقة التكافؤ:

$$x\equiv y(\bmod I)\Leftrightarrow x*y\in I \quad and \quad y*x\in I$$

متوائمة مع بنية G.

البرهان

لنبرهن صحة الاقتضاء التالي:

$$\left.\begin{array}{l} x\equiv y(\bmod I)\\ u\equiv v(\bmod I)\end{array}\right\}\Rightarrow x*u\equiv y*v(\bmod I)$$

في الحقيقة، لدينا:

$$\left.\begin{array}{l} x\equiv y(\bmod I)\\ u\equiv v(\bmod I)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} x*y\in I & \wedge & y*x\in I\\ u*v\in I & \wedge & v*u\in I\end{array}\right\}$$

وعليه وفقاً للفرض نجد أن:

$$\left.\begin{array}{lcl} (x*u)*(y*u)\in I & \wedge & (u*x)*(u*y)\in I\\ (y*u)*(x*u)\in I & \wedge & (u*y)*(u*x)\in I\end{array}\right\}$$

وأيضاً:

$$\left.\begin{array}{lcl} (y*u)*(y*v)\in I & \wedge & (u*y)*(v*y)\in I\\ (y*v)*(y*u)\in I & \wedge & (v*y)*(u*y)\in I\end{array}\right\}$$

وبالتالي يتضح أن:

$$\left.\begin{array}{l} x*u \equiv y*u(\bmod I) \\ y*u \equiv y*v(\bmod I) \end{array}\right\}$$

وباستخدام الخاصية التعدية لعلاقة التكافؤ، نستنتج أن:

$$x*u \equiv y*v(\bmod I)$$

وبالتالي يتم الإثبات على صحة التمهيدية.

إن النتائج الأخيرة تقودنا إلى عرض النظرية التالية:

نظرية (٥-٢)

إذا كان G جبر BH، وليكن I مثالياً انسحابياً في G. فإن G/I يكون جبر BH بالنسبة لقانون التشكيل الداخلي:

$$[x]\bullet[y]=[x*y] \qquad ; \quad \forall x,y \in G$$

البرهان

إنه لمن الواضح أن يرى القارئ، أن قانون التشكيل الداخلي $\bullet$ معرف جيداً. علاوة على ذلك، إن الخواص الثلاث الواردة في تعريف جبور BH ملبّاة وذلك لأن:

$$[x]\bullet[0]=[x*0]=[x] \quad ; \quad [x]\bullet[x]=[x*x]=[0]$$

لنفرض الآن أن: $[x]\bullet[y]=[0]$ and $[y]\bullet[x]=[0]$

فعندئذ نجد أن $x*y \equiv 0(\bmod I)$ وكذلك $y*x \equiv 0(\bmod I)$

وبالتالي: $x*y \in I$ and $y*x \in I$

ومنه $x \equiv y(\bmod I)$ وهذا يدل على أن $[x]=[y]$.

ومن الطبيعي أن ندعو G/I **جبر BH الخارج**.

تعريف (٥-٣)

إذا كان G, G' جبري BH

إن تشاكل BH هو تطبيق $f : G \to G'$ يحقق

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

وذلك مهما يكن x, y من G.

يتضح على الفور أن:

$$f(0) = f(x * x) = f(x) * f(x) = 0$$

بالإضافة لذلك، سوف نعتمد المصطلحات التالية:

إذا كان f تشاكل BH ومتبايناً سمي BH **مونومورفيزماً** أو اختصاراً مونومورفيزماً.

إذا كان f تشاكل BH وغامراً سمي BH **ابيمورفيزماً** أو اختصاراً ابيمورفيزماً.

إذا كان f تشاكل BH وتقابلاً سمي BH **ايزومورفيزماً** أو اختصاراً ايزومورفيزماً.

من جهة أخرى، إذا كان f تشاكل BH، إن نواة هذا التشاكل هي المجموعة $Kerf = \{x \in G : f(x) = 0\}$ ولدينا على الفور النظرية التالية:

نظرية (٥-٤)

إذا كان G, G' جبري BH، وليكن $f : G \to G'$ تشاكل BH فعندئذ $Kerf$ يكون مثالياً انسحابياً في G.

البرهان

من السهل أولاً رؤية أن $0 \in Kerf$ لنفرض الآن أن: $x * y, y \in Kerf$ فعندئذ يكون $f(x*y) = 0$ و $f(y) = 0$ وبالتالي يتضح أن $f(x) = 0$ إذن $x \in Kerf$ ويترتب على ذلك أن $Kerf$ مثالي في G. لإتمام البرهان يجب أن نبين أن المثالي $Kerf$ انسحابي.

لنفرض الآن أن $x * y \in Kerf$ وأن $y * x \in Kerf$ فعندئذ نجد:

$$f(x*y) = 0 \quad and \quad f(y*x) = 0$$

وعليه يكون $f(x) = f(y)$

وبالتالي، لأجل أي عنصرٍ $z \in G$ يكون لدينا:

$$f((x*z)*(y*z)) = 0 \quad and \quad f((z*x)*(z*y)) = 0$$

يترتب على ذلك أن:

$$(x*z)*(y*z) \in Kerf \quad and \quad (z*x)*(z*y) \in Kerf$$

ومنه $Kerf$ مثالي انسحابي وبالتالي يتم إثبات النظرية.

تعريف (٥-٥)

ليكن G جبر BH وليكن I مثالياً انسحابياً في G.

إن التطبيق $\pi : G \to G/I$ الذي قاعدة ربطه هي $\pi(x) = [x]$ لأجل كل x من G، يكون BH ايبيمورفيزماً.

ويشار له غالباً بتشاكل الغمر القانوني لجبور BH. زد على ذلك، $Ker\pi = I$.

لنورد مبرهنات التماثل المتعلقة بجبور BH:

مبرهنة التماثل الأولى:

ليكن G,G' جبور BH ولـيكن $f:G\to G'$ ابيمـورفيزم $-BH-$

فإن $G/_{Kerf}\approx G'$.

البرهان

لنأخذ العلاقة:

$$\psi : G/_{Kerf}\to G'$$
$$[x]\mapsto f(x)$$

فنلاحظ على الفور أن ψ تطبيق وذلك لأن:

$$[x]=[y]\Rightarrow x\approx y\Rightarrow x*y, y*x\in Kerf$$
$$\Rightarrow f(x)=f(y)\Rightarrow \psi[x]=\psi[y]$$

زد على ذلك، إن ψ تشاكل بين جبري BH وذلك بملاحظة:

$$\psi([x]\bullet[y])=\psi[x*y]=f(x*y)$$
$$=f(x)*f(y)=\psi[x]*\psi[y]$$

أيضاً من السهل على القارئ رؤية أن ψ غامر.

وأخيراً، لإتمام المطلوب يكفي إثبات أن ψ متباين.

في الواقع،

$$\psi[x]=\psi[y]\Rightarrow f(x)=f(y)\Rightarrow x*y, y*x\in Kerf$$
$$\Rightarrow x\approx y\Rightarrow [x]=[y]$$

يتضح مما سبق أن ψ هو BH ايزومورفيزم وعليه $G/_{Kerf}\approx G'$.

وبالتالي مبرهنة التماثل الأولى تكون محققة.

مبرهنة التماثل الثانية:

إذا كان G,G',G'' جبور BH.

وليكن: $h:G\to G'$ تشاكل غامر BH

وليكن: $g:G\to G''$ تشاكل BH

إذا كان $Kerh \subseteq Kerg$ فعندئذ هنالك BH تشاكل وحيد $f:G'\to G''$ يجعل المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & G' \arrow[dl, dashed, "f"] \\ G'' & \end{tikzcd}$$

البرهان

ليكن $y\in G'$ بما أن h تشاكل غامر، فإنّ ثمة عنصراً $x\in G$ بحيث يكون $h(x)=y$ ولنضع $g(x)=z\in G$.

لنأخذ العلاقة:
$$f:G'\to G''$$
$$y\mapsto g(x)$$

إن f تطبيق وذلك لأن:

$$\begin{aligned} y=y' &\Rightarrow \exists x,x'\in G: h(x)=h(x') \\ &\Rightarrow h(x*x')=0 \\ &\Rightarrow x*x'\in Kerg \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = g(x')$$
$$\Rightarrow f(y) = f(y')$$

زد على ذلك، إن التطبيق f هو تشاكل BH وذلك بملاحظة:

$$\begin{aligned} f(y * y') &= f(h(x) * h(x')) = f(h(x * x')) \\ &= (f \circ h)(x * x') = g(x * x') \\ &= g(x) * g(x') = f(y) * f(y') \end{aligned}$$

وعليه، هنالك BH تشاكل يجعل المخطط أعلاه تبديلياً، علاوة على ذلك، إن وحدانية التشاكل f تتضح مباشرةً من كون h تشاكلاً غامراً. وبالتالي يتم إثبات المبرهنة.

مبرهنة التماثل الثالثة:

إذا كان G, G', G'' جبور BH.

وليكن: $g : G \to G''$ تشاكل $-BH-$

وليكن: $h : G' \to G''$ مونومورفيزم $-BH-$

إذا كان $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} h$ فعندئذ هنالك BH تشاكل وحيد $f : G \to G'$ يجعل المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & G'' \\ & G' \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

البرهان

نقوم ببناء BH - تشاكل يتمتع بالخواص المذكورة في نص المبرهنة.

ليكن $x \in G$ فعندئذ $g(x) \in \operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} h$ ، وبما أن h تشاكل متباين فثمة عنصرٌ وحيدٌ $y \in G'$ بحيث يكون $h(y) = g(x)$.

لنأخذ العلاقة $f : G \to G'$ المعرفة بالصيغة $f(x) = y$.

إن f تطبيق وذلك لأن:

$$\begin{aligned} x = x' &\Rightarrow g(x) = g(x') \Rightarrow h(y) = h(y') \\ &\Rightarrow y = y' \Rightarrow f(x) = f(x') \end{aligned}$$

وفضلاً على ذلك، إن التطبيق المذكور يجعل المخطط تبديلياً وذلك بملاحظة أن:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y) = g(x) \quad ; \quad \forall x \in G$$

أيضاً، إن التطبيق f هو BH تشاكل.

في الحقيقة، استناداً إلى ما ورد توّاً، يمكننا أن نرى أن:

$$\begin{aligned} h(f(x * x')) &= g(x * x') = g(x) * g(x') \\ &= h(f(x)) * h(f(x')) \\ &= h(f(x) * f(x')) \end{aligned}$$

يتضح بالتالي أن $f(x * x') = f(x) * f(x')$ وذلك لأن h متباين.

وأخيراً، إن وحدانية التشاكل f تتضح مباشرةً من كون الـ BH تشاكل h متبايناً. وبالتالي يتم إثبات المبرهنة.

نظرية (٥-٦)

ليكن $f : G \to G'$ تشاكلاً بين جبري BH G, G' إذا كان I مثالي انسحابياً في G بحيث $I \subseteq Kerf$ فعندئذ التطبيق

$$\begin{aligned} h : G/I &\to G' \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

يكون تشاكلّ BH .

البرهان

في الحقيقة، إن h معرف جيداً للأسبابّ التالية:

$$\begin{aligned}[x]=[y] &\Rightarrow x\approx y \Rightarrow x*y, y*x\in I\subseteq Kerf\\ &\Rightarrow f(x*y)=f(y*x)=0\\ &\Rightarrow f(x)=f(y)\\ &\Rightarrow h[x]=h[y]\end{aligned}$$

بالإضافة لذلك، h تشاكل BH وذلك بملاحظة:

$$\begin{aligned}h([x]\bullet[y]) &= h([x*y]) = f(x*y)\\ &= f(x)*f(y) = h([x])*h([y])\end{aligned}$$

نظرية (٥-٧)

ليكن $f:G\to G'$ تشاكلاً بين جبري BH G,G' وليكن I مثالياً انسحابياً في G. فإن الدعاوى التالية تكون متكافئة:

(١) $I\subseteq Kerf$

(٢) يوجد BH تشاكل وحيد $g: G/I \to G'$ يجعل المخطط المرفق تبديلياً، أي $g\circ\pi=f$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & G/I \arrow[dl, dashed, "g"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

علاوة على ذلك، g متباين إذا وفقط إذا كان $I = Kerf$.

البرهان

(١)⇐(٢) لنأخذ BH تشاكل الغمر القانوني $\pi : G \to G/I$ ، فيلاحظ أن $Ker\pi = I \subseteq Kerf$

يترتب على ذلك وفقاً لمبرهنة التماثل الثانية بأنه هنالك تشاكل وحيد $g : G/I \to G'$ يجعل المخطط المذكور تبديلياً.

(٢)⇐(١) لنفرض أنّ $x \in I = Ker\pi$ فعندئذ يكون $\pi(x) = [0]$ وعليه يمكننا أن نرى:

$$\pi(x) = (g \circ \pi)(x) = g([0]) = 0$$

ومنه $I \subseteq Kerf$.

لنفرض الآن أن g تشاكل متباين، وليكن $x \in Kerf$ فعندئذ $g(\pi(x)) = f(x) = 0$ وبالتالي $\pi(x) = 0$ ومنه $x \in Ker\pi = I$

وبذا نكون قد برهنا النظرية بكاملها.

إن مبرهنة التماثل الثانية، ومبرهنة التماثل الثالثة، والنتائج التي وجدناها تقودنا إلى صياغة النظرية الأخيرة:

نظرية (٥-٨)

ليكن لدينا متتالية من جبور BH وتشاكلاتها:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & A \arrow[r, "\beta"] & B \arrow[r, "\gamma"] & G' \end{tikzcd}$$

حيث α ابيمورفيزم، β ايزومورفيزم و γ مونومورفيزم.

فعندئذ $A \approx G/_{Kerf}$ و $B \approx \operatorname{Im} f$.

البرهان

ليكن لدينا المخطط التالي من جبور BH وتشاكلاتها،

$$\begin{tikzcd}
 & G/_{Kerf} \arrow[r, "f'"] & \operatorname{Im} f \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "i"] & \\
G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & & G' \\
 & A \arrow[uu, "h"] \arrow[r, "\beta"] & B \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

لن نورد إثبات هذه النظرية، وعلى القارئ إقامة البرهان عليها وذلك بأن يبين أن كلاً من k,h ايزومورفيزم بالاستفادة من مبرهنتي التماثل الثانية والثالثة.

الفصل الرابع

جبور BCC

١- جبور BCC

تعريف (١-١)

إن جبر BCC هو جبر $(G,0,*)$ من النمط $(2,0)$ يحقق الخواص الخمس التالية:

$$1-\quad x*x=0$$
$$2-\quad x*0=x$$
$$3-\quad 0*x=0$$
$$4-\quad if\quad "x*y=0\quad and\quad y*x=0"\quad imply\quad x=y$$
$$5-\quad ((x*z)*(y*z))*(x*y)=0$$

وذلك مهما تكن x,y,z عناصر من G.

يتضح من ذلك على الفور، أن كل جبر BCC يحقق العلاقة: $(x*y)*x=0$ وذلك بملاحظة أن:

$$(x*y)*x=((x*y)*(0*y))*(x*0)=0$$

علاوة على ذلك، إن العلاقة الثنائية:

$$x\le y \Leftrightarrow x*y=0$$

هي علاقة انعكاسية وذلك لأن $x*x=0$ كما أنها تخالفية وذلك بملاحظة أن:

$$x\le y\quad and\quad y\le x\Rightarrow x=y$$

لنفرض الآن أن $x \le y \quad and \quad y \le z$ فعندئذ يكون:

$$x * z = ((x * z) * (y * z)) * (x * y) = 0$$

وبالتالي $x \le z$ فالعلاقة تكون إذن علاقة ترتيب على G.

علاوة على ذلك، لدينا مجموعة من النتائج والتي تشكل تعميماً لمثيلات لها وردت في سياق بحثنا لجبور BCK نعرضها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية (١-٢)

إذا كان G جبر BCC، فإن:

1. $x \le y \Rightarrow x * z \le y * z \quad and \quad z * y \le z * x$
2. $x \le y \Rightarrow x * z \le y$

وذلك أياً كانت x, y, z عناصر من G.

البرهان

في الحقيقة، لدينا استناداً إلى الفرض ووفقاً للخاصة الأخيرة من تعريف جبور BCC.

$$(x * z) * (y * z) = ((x * z) * (y * z)) * (x * y) = 0$$

وعليه يكون: $(x * z) \le (y * z)$

كذلك، لدينا:

$$(z * y) * (z * x) = ((z * y) * (x * y)) * (z * x) = 0$$

يترتب على ذلك، $(z * y) \le (z * x)$

لإثبات الجزء الثاني من التمهيدية، بما أن $(y * z) * y = 0$

يتضح على الفور وفقاً للجزء الأول أن:

$$(x * z) * y \le (x * z) * (y * z) = 0$$

وعليه يكون: $(x * z) * y = 0$ ومنه: $x * z \le y$

وبذا يتم إثبات التمهيدية.

من السهل بالرجوع إلى المفاهيم الأساسية أن نرى بأن كل جبر BCK يكون جبر BCC، أما العكس فليس بالضرورة ممكناً كما يبين المثال التالي:

مثال (١-٣)

لنزود المجموعة $G=\{0,a,b,c\}$ بالعملية الثنائية المعرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	a
c	c	c	c	0

من السهل على القارئ أن يرى بأن الخواص الخمسة الواردة أعلاه ملبّاة، ومنه G جبر BCC.

زد على ذلك، أن G ليس جبر BCK وذلك بملاحظة أن:

$$((b*a)*(b*c))*(c*a)=(b*a)*c=b*c=a\neq 0$$

وأنّ:

$$(b*(b*c))*c=(b*a)*c=a\neq 0$$

ولكن يمكن أن نورد النظرية التالية:

نظرية (١-٤)

إن الشرط اللازم والكافي كي يكون جبر BCC جبرَ BCK هو التالي:

$$(x*y)*z=(x*z)*y \qquad ; \quad \forall x,y,z\in G$$

البرهان

نعلم أن كلُّ جبر BCK لابد وأن يكون جبر BCC.

وبالعكس، لنفرض أن G جبر BCC يحقق الخاصة الواردة في نص النظرية، ولنثبت أن G جبر BCK.

في الحقيقة، لدينا أولاً وفقاً للفرض:

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=$$
$$=((x*y)*(z*y))*(x*z)=0$$

زد على ذلك، لدينا من جهة أخرى:

$$((x*(x*y))*y=(x*y)*(x*y)=0$$

فالنظرية إذن محققة.

تعريف (١-٥)

يُقال عن جبر BCC إنه **فعلي** إذا لم يكن جبر BCK. ومن الملائم أن نشير إلى أنّ جبر BCC الوارد في المثال (١-٣) جبر BCC فعلي.

نظرية (١-٦)

كل جبر BCC فعلي G يملك على الأقل أربعة عناصر.

البرهان

لنفرض مؤقتاً أن جبر BCC الفعلي G يملك على الأكثر ثلاثة عناصر ولتكن x, y, z فتنشأ حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان واحدٌ على الأقل من هذه العناصر يساوي العنصر المميز 0 يترتب على ذلك أن:
$$(x*y)*z=(x*z)*y$$
وبالرجوع إلى النظرية (١-٤) نتوصل إلى تناقض. وهذا يعني بأن افتراضنا لجبر BCC الفعلي G بأنه يملك ثلاثة عناصر على الأكثر غير صحيح.

الحالة الثانية: إذا كان عنصران على الأقل من ثلاثية العناصر متساويين، الأمر الذي يترتب عليه بمساندة الملاحظة الواردة في بداية الفصل أن:
$$(x*y)*z=(x*z)*y$$
وهذا خلاف للفرض، إذن كل جبر BCC فعلي يملك على الأقل أربعة عناصر وبذا يتم إثبات النظرية.

تعاريف أساسية (١-٧)

جبور BCC الجزئية

ليكن G جبر BCC، يُقال عن جزء S من G إنه **جبر BCC جزئي من G** إذا كان $0 \in S$ وكان بالإضافة لذلك مستقراً بالنسبة للعملية الثنائية $*$ أي:
$$x*y \in S \qquad ;\forall x, y \in S$$

تشاكلات BCC

ليكن G, G' جبور BCC، يُقال عن التطبيق $f: G \to G'$ إنه **تشاكل BCC** إذا كان:
$$f(x*y)=f(x)*f(y) \qquad ;\forall x, y \in G$$

٢- جبور BCC مميّزة

سنورد الآن أصنافاً مميّزة من جبور BCC، ألا وهي جبور BCC **التبادلية** وجبور BCC **الضمنية الإيجابية**. ونلفت نظر القارئ إلى أن هذه الأصناف المميّزة من جبور BCC تشكل تعميماً لمثيلات لها وردت في سياق بحثنا لجبور BCK.

تعريف (٢-١)

ليكن G جبر BCC.

يُقال عن G إنه **تبادلي**، إذا كان $x*(x*y)=y*(y*x)$

يُقال عن G إنه **ضمني إيجابي**، إذا كان $(x*y)*y=x*y$

وذلك أياً كانت x,y من G.

وفضلاً على ذلك، نورد النظرية التالية:

نظرية (٢-٢)

إذا كان G جبراً من النمط $(2,0)$ يحقق الموضوعات:

1. $x*0=x$
2. $x*(x*y)=y*(y*x)$
3. $((x*y)*(z*y))*(x*z)=0 \quad ;\forall x,y,z\in G$

فإن G جبر BCC تبادلي.

البرهان

لنفرض أن الموضوعات الثلاث الواردة في نص النظرية ملبّاة فعندئذ نجد:

$$x*x=((x*0)*(0*0))*(x*0)=0$$

أيضاً، إذا كان $x * y = 0$ و $y * x = 0$ نستنتج على الفور أن:

$$x = x * 0 = x * (x * y) = y * (y * x) = y * 0 = y$$

ولإتمام برهان النظرية يكفي إثبات أن $0 * x = 0$

في الواقع، نلاحظ أن:

$$0 * (0 * x) = x * (x * 0) = x * x = 0$$

وبالتالي نرى أن:

$$0 * x = (0 * (0 * x)) * x = ((x * x) * (0 * x)) * (x * 0) = 0$$

وعليه فإن G جبر BCC تبادلي وبذا يتم إثبات النظرية.

علاوة على ذلك، ثمة علاقة بين جبور BCK التبادلية وجبور BCC التبادلية تعبر عنها النتيجة التالية التي يترك إثباتها البسيط للقارئ.

نتيجة (٢-٣)

إن جبور BCC التبادلية متطابقة مع جبور BCK التبادلية.

ليكن G جبر BCC فعلي، ولنعتبر الخاصة:

$$x * (x * (y * (y * x))) = y * (y * (x * (x * y)))$$

وذلك مهما تكن x, y من G.

ومن الطبيعي أن يرد السؤال حول ما إذا كانت جبور BCC الفعلية تتمتع بهذه الخاصة، وكان أن وجد بأنَّ الأمر ليس كذلك، إذ ليس لزاماً أن يكون كل جبر BCC فعلي يحقق الخاصة المذكورة أعلاه. ومن الممكن إيراد أمثلة على

جبور BCC تكون فيها الخاصة محققة وأمثلة أخرى لا تكون فيها الخاصة محققة.

مثال (٢-٤)

ليكن $G=\{0,a,b,c\}$ جبر BCC فعلياً، حيث العملية الثنائية * معرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	a
c	c	c	c	0

في الحقيقة، ينبغي أن يلاحظ القارئ بأن G جبر BCC فعلي يحقق الخاصة المذكورة أعلاه.

مثال (٢-٥)

لنأخذ $G=\{0,a,b,c\}$ جبر BCC الفعلي المعرف وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
c	c	b	b	0

إن G جبر BCC فعلي لا يحقق الخاصة المذكورة وذلك بملاحظة أن:

$$c*(c*(a*(a*c)))=c*(c*a)=c*b=b$$

بينما نرى أن:

$$\begin{aligned} a*(a*(c*(c*a))) &= a*(a*(c*b)) \\ &= a*(a*b)=a \end{aligned}$$

وحريّ بنا تنبيه القارئ إلى أنه لم يتوصل الباحثون في هذا المجال إلى إجماعٍ حول الإفصاح الملائم لمفهوم جبور BCC التي تتمتع بالخاصة آنفة الذكر، وهذا أمر ليس من الغرابة في شيء، ذلك أن هذه الأصناف المميّزة من الجبور الحديثة لا تزال حديثة العهد نسبياً. وسنعتمد نحن التعريف التالي:

تعريف (٢-٦)

كل جبر BCC فعلي G يحقق الخاصة:

$$x*(x*(y*(y*x)))=y*(y*(x*(x*y)))$$

أياً كانت x,y من G.

ندعوه **جبر BCC تناظرياً**، علاوة على ذلك، ترد النظرية الخاصة التالية:

نظرية (٢-٧)

إن الموضوعات الثلاث التالية كافية لتحديد جبر BCC تناظري على جبر G من النمط $(2,0)$.

1. $x*0=x$
2. $x*(x*(y*(y*x)))=y*(y*(x*(x*y)))$
3. $((x*z)*(y*z))*(x*y)=0$

وذلك مهما تكن x, y, z عناصر من G.

البرهان

من الواضح قبل كل شيء وفقاً للفرض أن:

$$x * x = ((x*0)*(0*0))*(x*0) = 0$$

لنفرض الآن أن $x * y = 0$ و $y * x = 0$ فعندئذ نرى:

$$\begin{aligned} x &= x * 0 \\ &= x*(x*y) \\ &= x*(x*(y*(y*x))) \\ &= y*(y*(x*(x*y))) \\ &= y*(y*x) \\ &= y*0 \\ &= y \end{aligned}$$

ولإتمام إثبات النظرية يكفي أن نبين بأن $0 * x = 0$

في الحقيقة، بتطبيق الموضوعتين الأولى والثالثة الواردتين في نص النظرية يتضح أن:

$$(0*(0*x))*x = 0$$

وبالتالي يكون:

$$0*(0*(0*x)) = 0*x \qquad (١)$$

كذلك، يمكن للقارئ أن يرى بتطبيق الموضوعة الثانية أن:

$$x \le x*(0*(0*x))$$

يترتب على ذلك، وباللجوء إلى حقيقة أن العلاقة $\le$ متعدية أن:

$$0*(0*x) \le x*(0*(0*x)) \qquad (٢)$$

وعليه، بدمج (١)، (٢) نتوصل إلى العلاقة:

$$0*x = 0*(0*(0*x))$$
$$\le (0*x)*(0*(0*(0*x))) = (0*x)*(0*x)$$

ومن العلاقة الأخيرة نرى أن $0*x=0$ وبالتالي G جبر BCC تناظري وهكذا نكون قد برهنا النظرية.

سنرتقي الآن درجة في سلم مفهوم جبور BCC بإيراد مفهوم جبور BCC **المحدودة** وعرض أساليب **بناء جبور** BCC **الفعلية والمحدودة.**

تعريف (٢-٨)

إن **جبر** BCC **المحدود** G هو جبر BCC مزود بعنصر مميّز يُرمز له بـ 1 وبحيث يحقق الخاصة الإضافية التالية:

$$x*1=0 \quad ; \quad \forall x \in G$$

يتضح على الفور، أن 1 هو عنصر أعظم في G، أيضاً، إن العنصرين المميّزين $0,1$ في جبر BCC محدود متمايزان لأنه لو فرضنا عكس ذلك لنتج أن:

$$x = x*0 = x*1 = 0 \quad ; \quad \forall x \in G$$

نظرية (٢-٩)

ليكن $(G,0,.)$ جبر BCC، وليكن $a \notin G$.

إن المجموعة $G' = G \cup \{a\}$ المزودة بالعملية الثنائية $*$ المعرفة بالصيغة:

$$x*y=\begin{cases} x.y & ; \quad x,y\in G \\ a & ; \quad x=a, y=0 \\ 0 & ; \quad x=a, y\neq 0 \\ x & ; \quad x\in G, y=a \end{cases}$$

تشكل جبر BCC.

علاوةً على ذلك، $(G',0,*)$ جبر BCC فعلي إذا كان $(G,0,.)$ فعلياً.

البرهان

يمكن للقارئ أن يبين أن الخواص الأربعَ الأولى الواردة في تعريف جبور BCC ملبّاة. وسوف نبرهن صحة الخاصة التالية:

$$((x*y)*(z*y))*(x*z)=0 \quad ; \quad \forall x,y,z\in G'$$

في الحقيقة، نميز الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان $z=a$ فينشأ عن ذلك ما يلي:

- إذا كان $y=0$ فنجد وفقاً للفرض أن:

$$((x*y)*(z*y))*(x*z)=(x*a)*(x*a)=0$$

وذلك مهما تكن x من G'.

- إذا كان $y\neq 0$ عنصراً من G، فعندئذ يمكن أن نجد:

$$((x*y)*(z*y))*(x*z)=(x*y)*x=0$$

وذلك مهما تكن x من G'.

- إذا كان $y=a$ فعندئذ نجد أن:

$$((x*y)*(z*y))*(x*z)=(x*a)*(x*a)=0$$

وذلك أياً كان x عنصراً من G'.

الحالة الثانية: إذا كان $y=a$ فتنشأ عن ذلك احتمالات متعددة تم صياغتها وفق المخطط التالي:

$$\left[\begin{array}{lll} x=a & , & z\in G' \\ x\in G & , & z=a \\ x\in G & , & z\neq a \end{array}\right.$$

إن جميع الاحتمالات تقودنا إلى الحقيقة التالية:

$$((x*y)*(z*y))*(x*z)=0$$

الحالة الثالثة: إذا كان $x=a$. إذا اتّبعنا خط النقاش نفسه المتّبع في الحالات السابقة فينتج أنه:

إذا كان $x=a$ ومهما تكن y,z من G' فإن

$$((x*y)*(z*y))*(x*z)=0$$

وعليه، فإن G' يكون جبر BCC.

بالإضافة إلى ذلك، نلاحظ أن: $(x*(x*y))*y=0$

وذلك مهما تكن x,y من G'.

نستنتج من ذلك أن $(G',0,*)$ جبر BCC فعلي إذا وفقط إذا كان G كذلك، وبذا يتم إثبات النظرية.

يمكننا أن نعرض النظريات التالية تاركين للقارئ إقامة البرهان مسترشداً بخط النقاش ذاته المتبع في النظرية السابقة بعد تعديلات ملائمة.

نظرية (٢-١٠)

ليكن $(G,0,.)$ جبر BCC، وليكن $1\notin G$، فإن المجموعة $G'=G\bigcup\{1\}$ المزودة بالعلمية الثنائية $*$ المعرفة بالصيغة:

$$x * y = \begin{cases} x.y & ; \quad x, y \in G \\ 0 & ; \quad x \in G', y = 1 \\ 1 & ; \quad x = 1, y \in G \end{cases}$$

تشكل جبر BCC محدوداً.

نظرية (٢-١١)

ليكن $(G,0,.)$ جبر BCC محدوداً، و m عنصراً أعظمياً في G، وليكن $1 \notin G$، فإن المجموعة $G' = G \cup \{1\}$ المزودة بالعملية الثنائية $*$ المعرفة بالصيغة:

$$x * y = \begin{cases} x.y & ; \quad x, y \in G \\ 0 & ; \quad x \in G', y = 1 \\ 1 & ; \quad x = 1, y = 0 \\ m & ; \quad x = 1, y \in G/\{0\} \end{cases}$$

تشكل جبر BCC فعلياً ومحدوداً.

نظرية (٢-١٢)

ليكن $(G,0,.)$ جبر BCC، ليكن x_0 عنصراً مغايراً للصفر من G بحيث $x_0 \leq x \quad (\forall x \in G)$.

إذا كان $a \notin G$ فإن المجموعة $G' = G \cup \{a\}$ المزودة بالعملية الثنائية $*$ المعرفة بالصيغة:

$$x * y = \begin{cases} x.y & x, y \in G \\ 0 & x = 0, y = a \\ x_0 & x \in G/\{0\}, y = a \\ 0 & x = y = a \\ a & x = a, y \in G \end{cases}$$

تشكل جبر BCC فعلياً.

ملاحظة

ليس بالضرورة أن يكون كل جبر BCC فعلي G يحقق الخاصة $x * (x * (x * y)) = x * y$ وذلك أياً كانت x, y من G.
وينبغي أن يلاحظ القارئ بالعودة إلى مفهوم جبور BCK أن الخاصة آنفة الذكر دوماً محققة.

ولتوضيح ذلك، لنعتبر المجموعة $G = \{0, a, b, c\}$ المزودة بالعملية الثنائية $*$ المعرفة وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
c	c	b	b	0

يمكن أن نرى بسهولة أن G جبر BCC فعلـي، بالإضـافة لـذلك، يحقـق الخاصة $x*(x*(x*y)) = x*y$ وذلك $\forall x,y \in \{0,a,b,c\}$

بيد أنه لو أخذنا جبر BCC الفعلي $G = \{0,a,b,c\}$ المعـرف بالجـدول التالي:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	a
c	c	c	c	0

نجد أن G جبر BCC فعلياً لا يحقق الخاصة المذكورة وذلك بملاحظة أن:

$$b*(b*(b*c)) = b*(b*a) = b*b = 0 \neq a = b*c$$

من جهة أخرى، سنترك للقارئ مهمة إثبات النتيجة التالية:

نتيجة (٢-١٢)

إذا كان $(G,0,.)$ جبر BCC فعلياً يحقق الخاصة

$$x.(x.(x.y)) = x.y \quad ; \quad \forall x,y \in G$$

فعندئذ إن جبر BCC الفعلي $(G',0,*)$ المستخلص من G وفـق النظريـة (٢-٩) يحقق أيضاً الخاصة ذاتها.

٣- المثاليات والعناصر الذرية في جبور BCC

المثاليات في جبور BCC

تعريف (٣-١)

ليكن G جبر BCC، ولتكن I مجموعة جزئية غير خالية من G.
- يُقال عن I إنه **مثالي** BCK فــي G إذا كان $0 \in I$ وإذا تحقق فضلاً عن ذلك الخاصة:

$$a * b \in I \quad and \quad b \in I \Rightarrow a \in I$$

وذلك مهما تكن a,b عناصر من G.

- يُقال عن I إنه **مثالي** BCC **في** G، إذا كان $0 \in I$ وإذا تحقق فضلاً عن ذلك الخاصة:

$$(a * b) * c \in I \quad and \quad b \in I \Rightarrow a * c \in I$$

وذلك مهما تكن a,b,c عناصر من G.

لنورد مثالاً يوضح مفهوم مثاليات BCC.

مثال (٣-٢)

لنزود المجموعة $G = \{0,a,b,c,d\}$ بالعملية الثنائية $*$ المعرفة وفــق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	a	0	0
d	d	c	d	c	0

من السهل أن نرى من الجدول المرفق أن G جبر BCC، بالإضافة لذلك، من السهل أيضاً على القارئ رؤية أن $S = \{0,a,b,c\}$ جبر جزئي من G وأن $I = \{0,a\}$ مثالي BCK من G.

هنالك رباط وثيق بين مثاليات BCC ومثاليات BCK تشير إليه التمهيدية التالية التي نلقي مهمة إثباتها على عاتق القارئ.

تمهيدية (٣-٣)

إذا كان G جبر BCC، فإن كل مثالي BCC يكون مثالي BCK.

بالإضافة لذلك، سنورد تمهيدية أعم من السابقة وهي:

تمهيدية (٣-٤)

إذا كان G جبر BCK، فإن كل مثالي BCK يكون مثالي BCC.

البرهان

ليكن I مثالي BCK في G، فعندئذ $0 \in I$

لنفرض الآن أن:

$$(x*y)*z \in I \quad and \quad y \in I$$

وبالتالي يكون:

$$(x*z)*y \in I \quad and \quad y \in I$$

ويترتب على هذا أن: $x*z \in I$ وعليه I يكون مثالي BCC.

تمهيدية (٣-٥)

ليكن G جبر BCC فإن كل مثالي BCK يكون جبر BCC جزئياً.

البرهان

ليكن I مثالي BCK وليكن $x, y \in I$، فعندئذ لدينا:

$$(x*y)*x = 0 \in I \quad and \quad (y*x)*y = 0 \in I$$

الأمر الذي يترتب عليه أن $x*y \in I$ وكذلك $y*x \in I$ ومنه I جبر BCC جزئي.

علاوة على ذلك، من السهل رؤية – بمساندة التمهيدية (٣-٣) – أن كل مثالي BCC يكون جبر BCC جزئياً.

هذا وليس من الضروري أن يكون كل مثالي BCC جبر BCK جزئياً كما يبين المثال التالي:

مثال (٣-٦)

لنأخذ المجموعة $G = \{0, a, b, c, d, e\}$ ولنزودها بالعملية الثنائية $*$ المعرفة وفق الجدول المرفق:

*	0	a	b	c	d	e
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0	0
b	b	b	0	0	a	a
c	c	b	0	0	a	a
d	d	d	d	d	0	a
e	e	e	e	e	e	0

من الممكن التحقق من أن G جبر BCC.

ومن السهل على القارئ، فضلاً عن ذلك، أن يتحقق من أن $I = \{0, a, b, c\}$ تشكل مثالي BCC في G، ولكن بالمقابل I ليس جبر BCK جزئياً من G وذلك بملاحظة أن:

$$(b * a) * d = a \neq 0 = (b * d) * a$$

بيد أنه لو أخذنا $J = \{0, a, b.c\}$ في جبر BCC الوارد في المثال (٣-٢) فمن الممكن التحقق من أن J جبر جزئي من G ولكنه ليس مثالي BCK لأن $c \in J \quad and \quad d * c \in J$ بينما $d \notin J$.

نظرية (٣-٧)

لتكن G, G' جبور BCC وليكن $f : G \to G'$ تشاكل BCC فإن $Kerf = \{x \in G : f(x) = 0\}$ تكون مثالي BCC في G.

البرهان

في الواقع، إن $0 \in Kerf \subseteq G$ وذلك لأن $f(0) = 0$.

لـيكن x, y, z عناصـر مـن G، ولنفـرض أن $(x * y) * z \in Kerf$ وأن $y \in Kerf$ فعندئذ يتضح أن:

$$f(x * z) = f(x) * f(z) = (f(x) * f(y)) * f(z)$$
$$= f(x * y) * f(z) = f((x * y) * z) = 0$$

وعليه، يكون $x * z \in Kerf$ وبالتالي $Kerf$ مثالي BCC في G.

وبطريقة مشابهة للنظرية (٥-٢) الواردة في سياق بحثنا لجبور BCK يمكـن للقارئ أن يبرهن:

نظرية (٣-٨)

ليكن لدينا المخطط التالي والمؤلف من جبور BCC وتشاكلاتها، وبحيـث f غامر.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & G'' \\ G' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

إذا كان $Kerf \subseteq Kerg$ فعندئذ هنالـك تشـاكل وحيـد $h : G' \to G''$ يحقق $h \circ f = g$.

العناصر الذرية في جبور BCC

تعريف (٣-٩)

ليكن G جبر BCC، وليكن a عنصراً من G مغايراً للعنصر المميّز 0.

يُقال عن a إنه n- **عنصرٌ ذريٌّ** إذا حقق ما يلي:

$$x * a^n = 0 \Rightarrow x = 0 \quad or \quad x = a \quad ; \forall x \in G, \forall n \in N$$

وبصورة خاصة، يُقال عن a إنه عنصرٌ ذريٌّ إذا حقق ما يلي:

$$x * a = 0 \Rightarrow x = 0 \quad or \quad x = a \quad ; \forall x \in G$$

لنورد أولاً النظرية التالية:

نظرية (٣-١٠)

ليكن G جبر BCC، وليكن a عنصراً من G مغايراً للعنصر المميَّز 0. إذا كانت المجموعة $\{0, a\}$ مثاليَّ BCC في G فإن a يكون n- عنصراً ذرياً، وذلك من أجل أي عدد طبيعي n.

البرهان

نبرهن هذه النظرية بالاستقراء الرياضي بالنسبة للعدد الطبيعي n. وللقيام بذلك، لأجل $n = 2$. ليكن $x \in G$ بحيث أن $x * a^2 = 0$ فعندئذ، ينتج من ذلك على الفور أن:

$$(x * a) * a \in \{0, a\} \quad and \quad a \in \{0, a\}$$

واستناداً إلى كون كل مثالي BCC يكون مثالي BCK، يتضح أن $x * a \in \{0, a\}$ ومنه إما $x * a = 0$ أو $x * a = a$ الأمر الذي يترتب عليه أنه إما $x = 0$ أو $x = a$ وعليه a يكون 2 عنصراً ذرياً

ولكي نمضي وفقاً لطريقة الاستقراء الرياضي، نفترض أن النظرية صحيحة من أجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n + 1$.

لنفرض أن $x \in G$ بحيث $x * a^{n+1} = 0$ فعندئذ نجد:

$$(x * a^n) * a = 0 \in \{0, a\} \quad and \quad a \in \{0, a\}$$

وبالتالي تنشأ حالتان: إمـا $x * a^n = 0$ أو $x * a^n = a$ وعليـه ووفقـاً للفرض الاستقرائي، يتضح في كلتا الحـالتين أنـه إمـا $x = 0$ أو $x = a$ ومنه a يكون $(n+1)$- عنصراً ذرياً.

وبذا يتم إثبات النظرية.

نتيجة (٣-١١)

ليكن G جبر BCC، وليكن a عنصراً من G مغايراً للعنصر المميَّز 0. إذا كانت المجموعة $\{0, a\}$ مثالي BCK في G، فإن a يكـون n- عنصـراً ذرياً، وذلك مهما يكن n عدداً طبيعياً.

نظرية (٣-١٢)

ليكن G, G' جبري BCC، ولـيكن $f : G \to G'$ تماثـل BCC. إذا كان $0 \neq a \in G$ n- عنصراً ذرياً في G، فإن $f(a)$ يكون n- عنصراً ذرياً في G'، وذلك من أجل أي عدد طبيعي n.

البرهان

ليكن $x' \in G'$ بحيث $x' * (f(a))^n = 0$، فعندئذ هنالك عنصـرٌ $x \in G$ بحيث $f(x) = x'$ وبالتالي نجد:

$$f(x * a^n) = f(x) * f(a^n) = f(x) * (f(a))^n = 0$$

ويترتب على ذلك بالاستفادة من كون f متبايناً أن $x * a^n = 0$، ويتوجـب على ذلك وفقاً للفرض أنه إما $x = a$ أو $x = 0$ ومنه إمـا $x' = f(a)$ أو $x' = 0$.

إذن $f(a)$ يكون n - عنصراً ذرياً في G'، فالنظرية تكون محققة.

٤- مثاليات BCC ذات n - نسق

ليكن G جبر BCC، سوف نستخدم في هذا الفصل المصطلح التالي:

$$x * y^n = ((....((x * y) * y) * ....) * y) \quad ; \forall x, y \in G$$

وذلك مهما يكن n عدداً صحيحاً موجباً أكبر أو يساوي الواحد.

تعريف (٤-١)

يُقال عن المجموعة الجزئية غير الخالية I من G إنها **مثالي** BCC ذات n- نسق إذا كان $0 \in I$ وإذا تحقق فضلاً عن ذلك الشرط التالي:

$$\forall x, y, z \in G, \quad \exists n \in N : (x * y) * z^n \in I \quad and \quad y \in I$$

$$\Rightarrow x * z^n \in I$$

يتضح على الفور، أن $G, \{0\}$ مثاليان لـ G ذات n- نسق.

زد على ذلك، يمكن التعبير عن كل مثالي BCC بأنه مثالي BCC وحيد النسق.

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $z = 0$، نصوغ النتيجة التالية:

كل مثالي BCC ذوت n- نسق في G يكون مثالي BCK.

ومن الممكن إيراد مثالٍ يوضح مفهوم المثاليات ذات n- نسق المذكور أعلاه.

مثال (٤-٢)

لنأخذ $G = \{0, a, b, c, d, e\}$ جبر BCC المعرف بالجدول التالي:

$*$	0	a	b	c	d	e
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0	a
b	b	b	0	0	a	a
c	c	b	a	0	a	a
d	d	d	d	d	0	a
e	e	e	e	e	e	0

إن المجموعة الجزئية $I=\{0,a,b,c,d\}$ تكون مثالي BCC ذا n - نسق وذلك أياً كان العدد الطبيعي n.

فعلى سبيل المثال، نرى أن:

$$(c*a)*e^n=(...((b*e)*e)*....*e)=a\in I$$

وأن $a\in I$ بالمقابل لدينا:

$$\begin{aligned} c*e^n &= (...((c*e)*e)*....*e) \\ &= (...((a*e)*e)*....*e)=a\in I \end{aligned}$$

إن الحالة الخاصة الواردة أخيراً والتمهيدية (٣-٥) تقودنا إلى صياغة الحقيقة التالية:

نتيجة (٤-٣)

إذا كان G جبر BCC، فإن كل مثالي BCC ذا n- نسق يكون جبر BCC جزئياً من G.

أما العكس فغير صحيح، ذلك أن أي جبر BCC جزئي من جبـــر BCC لا يكون مثالي BCC ذا $n-$ نسق بالضرورة. الأمر الذي يبينه المثال التالي:

مثال (٤-٤)
لنأخذ $G=\{0,a,b,c,d\}$ جبر BCC المعرف بالجدول المرسوم أدناه.

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	a	0	0
d	d	c	d	c	0

من السهل على القارئ أن يرى بأن $S=\{0,a,b,c\}$ تشكل جبـــر BCC جزئياً من G، بينما S ليست مثالياً ذا $n-$ نسق في G وذلك لأن:

$$(d*c)*b^n=c*b^n=(\ldots((c*b)*b)*\ldots*b))=a\in S$$

وأن $c\in S$ بينما:

$$d*b^n=(\ldots((d*b)*b)*\ldots*b)=d\notin S$$

نظرية (٤-٥)
لتكن G,G' جبور BCC وليكن $f:G\to G'$ تشاكل BCC.

إذا كان I مثـــالي BCC ذا $n-$ نســق فـــي G' فــإن $f^{-1}(I)$ تكــون مثالي BCC ذا $n-$ نسق في G (مهما يكن العدد الطبيعي n).

البرهان

إن $0 \in f^{-1}(I)$ وذلك لأن $f(0) = 0 \in I$. ليكن x, y, z عناصر من G، ولنفرض أن $(x * y) * z^n \in f^{-1}(I)$ وأن $y \in f^{-1}(I)$ وذلك مهما يكن العدد الطبيعي n.

يُلاحظ أن:

$$\begin{aligned} f(x * z^n) &= f(x) * f(z^n) = f(x) * (f(z))^n \\ &= (f(x) * f(y)) * (f(z))^n \in I \end{aligned}$$

وبالاستفادة من كون I مثالي BCC ذا $n-$ نسق في G' يتضح على الفــور أن $x * z^n \in f^{-1}(I)$ وعليه $f^{-1}(I)$ تكون مثـــالي BCC ذا $n-$ نســق في G. وبذا يتم إثبات النظرية.

ولكن لدينا، أكثر من ذلك، النتيجة التالية:

نتيجة (٤-٦)

إذا كـــان G, G' جبـــري BCC ولـــيكن $f : G \to G'$ تشـــاكل BCC فإن $Kerf$ يكون مثالي BCC ذا $n-$ نسق فـــي G (مهمـــا يكـــن العـــدد الطبيعي n).

البرهان

بما أن $\{0\}$ مثالياً ذا $n-$ نسق في G'، فـــإن $f^{-1}(\{0\}) = Kerf$ يكـــون مثالي BCC ذا $n-$ نسق في G (نظرية (٤-٥)).

ونبرهن بعد هذا النظرية الأساسية التالية:

نظرية (٤-٧)

ليكن G جبر BCK. إن مفهوم مثاليات الـ BCC ذات n- نسق ومثاليات الـ BCK متطابقان.

البرهان

إن لزوم **الشرط** يتضح من كون كل جبر BCK جبر BCC ومن حقيقة أن كل مثالي BCC ذا n- نسق من G يكون مثالي BCK.

لإثبات **كفاية الشرط**، ليكن I مثالي BCK لجبر BCK، ولنفرض أن x, y, z عناصر من G بحيث أن:

$$(x * y) * z^n \in I \quad and \quad y \in I$$

فعندئذ يكون لدينا:

$$(x * z^n) * y \in I \quad and \quad y \in I$$

ومنه وفقاً للفرض نكتب $x * z^n \in I$ إذن I مثالي BCC ذو n- نسق في G. وبذلك يتم إثبات النظرية.

ويمكن الآن من خلال النظرية التالية الإفصاح عن شرط إضافي من أجله يكون كل جبر BCC جزئي مثالي BCC ذا n- نسق.

نظرية (٤-٨)

ليكن G جبر BCC. إن الشرط اللازم والكافي كي يكون جبر BCC الجزئي I مثالياً BCC ذا n- نسق هو أن تتحقق الموضوعة التالية:

$$\forall x, y, z \in G; \;\; x \in I \quad and \quad y * z^n \notin I \Rightarrow (y * x) * z^n \notin I$$

البرهان

لزوم الشرط: إذا كان كل جبر BCC جزئي من G مثالي BCC ذا $n-$ نسق. ولنبرهن على صحة الموضوعة الواردة في نص النظرية:

ليكن $x, y, z \in G$ بحيث أن $x \in I$ وأن $y * z'' \notin I$، ولنفرض جدلاً أن $(y * x) * z'' \in I$ فعندئذ يترتب على هذا أن $y * z'' \in I$ وهذا خلاف للفرض، إذن الموضوعة محققة.

لإثبات كفاية الشرط: نفرض أن I جبر BCC الجزئي من G بحيث يحقق الموضوعة الواردة في نص النظرية، ولنبرهن أن I مثالي BCC ذو $n-$ نسق.

من الواضح قبل كل شيء أن $0 \in I$. لنفرض الآن أن $x, y, z \in G$ بحيث أنّ:

$$(x * y) * z'' \in I \quad and \quad y \in I$$

إذا كان $x * z'' \notin I$ يتضح بالتالي وفقاً للفرض أن $(x * y) * z'' \notin I$ وهذا تناقض، الأمر الذي يترتب عليه أن $x * z'' \in I$ وعليه I مثالي BCC ذو $n-$ نسق وبالتالي يتم إثبات النظرية بكاملها.

سنقدم الآن أسلوباً لبناء جبر BCC الخارج متبعين الأسلوب نفسه الوارد في سياق بحثنا لجبور BCK.

ليكن G جبر BCC، وليكن I مثالي BCC لــ G. لنعرف العلاقة الثنائية:

$$x \equiv y(\operatorname{mod} I) \Leftrightarrow x * y \in I \quad and \quad y * x \in I$$

إن العلاقة $x \equiv y(\operatorname{mod} I)$ هي علاقة انعكاسية وتناظرية، ومن السهل، فضلاً عن ذلك، أن نتحقق من أنها علاقة متعدية:

في الواقع، لنفرض أن

$$x \equiv y(\bmod I) \quad and \quad y \equiv z(\bmod I)$$

فعندئذ نجد:

$$x*y, y*x \in I \quad and \quad y*z, z*y \in I$$

وإذا لاحظنا من جهة أخرى أن:

$$((x*z)*(y*z))*(x*y) = 0 \in I$$

$$((z*x)*(y*x))*(z*y) = 0 \in I$$

يترتب على هذا أن $x \equiv z(\bmod I)$، وعليه فالعلاقة المذكورة تكون علاقة تكافؤ على G.

علاوة على ذلك، لنفرض أن:

$$x \equiv u(\bmod I) \quad and \quad y \equiv v(\bmod I)$$

فعندئذ نجد أن:

$$x*u, u*x \in I \quad and \quad y*v, v*y \in I$$

وبما أن:

$$((x*y)*(u*y))*(x*u) = 0 \in I$$

$$((u*y)*(x*y))*(u*x) = 0 \in I$$

يتضح على الفور أن:

$$(x*y)*(u*y) \in I \quad and \quad (u*y)*(x*y) \in I$$

وعليه نرى أن:

$$x*y \equiv u*y(\bmod I)$$

بطريقة مشابهة تماماً، يمكننا إقامة البرهان على أن:

$$u*y \equiv u*v(\bmod I)$$

يتضح مما سبق أن: $x*y \equiv u*v(\bmod I)$

الأمر الذي يترتب عليه أن علاقة التكافؤ $\equiv$ متوائمة مع العملية الثنائيـــة $*$ ومنه $x \equiv y(\bmod I)$ تكون علاقة تطابق على G.

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية التالية:

نظرية (٤-٩)

ليكن G جبر BCC وليكن I مثالي BCC في G.

فإن العلاقة الثنائية:

$$x \equiv y(\bmod I) \Leftrightarrow x * y \in I \quad and \quad y * x \in I$$

تكون علاقة تطابق على G.

ولدينا أيضاً النظرية التالية:

نظرية (٤-١٠)

ليكن G جبر BCC ولتكن $\Re$ علاقة تطابق على G. فإن

$$I_{\Re} = \{x \in G : x \equiv 0.(\Re)\}$$

تكون مثالي BCC.

البرهان

من الواضح قبل كل شيء أن $0 \in I_{\Re}$. لتكن x, y, z عناصر من G بحيــث يكون:

$$(x * y) * z \in I_{\Re} \quad and \quad y \in I_{\Re}$$

فعندئذ نجد:

$$(x * y) * z \equiv 0.(\Re) \quad and \quad y \equiv 0.(\Re)$$

الأمر الذي يترتب عليه أن: $x * z \equiv 0.(\Re)$ ومنه يكون $x * z \in I_{\Re}$
إذن $I_{\Re}$ مثالي BCC في G.

تمرين (٤-١١)

إذا كان G جبر BCC ولتكن $\Re$ علاقة تطابق على G. بين أن $I_{\Re} = \{x \in G : x \equiv 0.(\Re)\}$ تكون مثالي BCC ذا n - نسق في G، وذلك لأجل أي عدد طبيعي n.

ليكن G جبر BCC، ولتكن $\Re$ علاقة تطابق على G. إن مجموعة صفوف التكافؤ:

$$C_x = \{y \in G : x \equiv y.(\Re)\} \quad ;\forall x \in G$$

تشكل تجزئة لـ G وذلك لأنه لدينا من جهة $G = \bigcup_{x\in G} C_x$

وعلاوة على ذلك، إن $C_x \bigcap C_y = \Phi$ و $(C_x \neq C_y)$ وذلك لأنه إذا افترضنا مؤقتاً أن $C_x \bigcap C_y \neq \Phi$ فثمة عنصر $z \in G$ بحيث يكون $z \in C_x , z \in C_y$

يترتب على ذلك أن $y \equiv z.(\Re)$, $x \equiv z.(\Re)$ وعليه $x \equiv y.(\Re)$ ومنه $C_x = C_y$ وهذا خلاف الفرض.

لنرمز بـ $G/\Re$ أو بالرمز G/I لمجموعة صفوف التكافؤ، ولنعتبر العملية الثنائية $\bullet$ المعرفة بالصيغة:

$$C_x \bullet C_y = C_{x*y}$$

من السهل أن نرى أن:

$$C_x \bullet C_x = C_{x*x} = C_0$$
$$C_x \bullet C_0 = C_{x*0} = C_x$$
$$C_0 \bullet C_x = C_{0*x} = C_0$$

أيضاً، لدينا:

$$((C_x \bullet C_y) \bullet (C_z \bullet C_y)) \bullet (C_x \bullet C_z) =$$
$$= (C_{x*y} \bullet C_{z*y}) \bullet C_{x*z} = C_{((x*y)*(z*y))*(x*z)} = C_0$$

ومنه نجد النظرية:

نظرية (٤-١٢)
إذا كان G جبر BCC ولتكن $\Re$ علاقة تطابق منتظمة على G، فإن $(G/\Re, \bullet, C_0)$ تكون جبر BCC.

البرهان

في الحقيقة، وفقاً للحقائق الواردة أعلاه. لإتمام المطلوب علينا فقط التأكد من صحة الخاصة الرابعة الواردة في تعريف مفهوم جبور BCC

لنفرض أن:

$$C_x \bullet C_y = C_0 \quad and \quad C_y \bullet C_x = C_0$$

فعندئذ نجد:

$$C_{x*y} = C_0 \quad and \quad C_{y*x} = C_0$$

ويترتب على هذا أن:

$$x * y \equiv 0.(\Re) \quad and \quad y * x \equiv 0.(\Re)$$

وبما أن علاقة التطـــابق منتظمـــة، يتوجـــب علـــى ذلـــك أن $x \equiv y.(\Re)$

ومنه $C_x = C_y$. يتضح أن $G/\Re$ جبر BCC، وبذا يتم إثبات النظرية.

ويمكن للقارئ أن يبين أن:

نظرية (٤-١٣)

إذا كان G, G' جبور BCC وليكن $f : G \to G'$ تشاكل BCC غـــامراً

فإن: $G/Kerf \approx G'$

٥- المثاليات الأعظمية في جبور BCC

ليكن G جبر BCC

تعريف (٥-١)

يُقال عن $G \supsetneq I \neq \{0\}$ مثالي BCC في G إنه **أعظمي** إذا كان I غيـــر محتوى في أي مثالي حقيقي آخر.

يُقال عن $G \supsetneq I \neq \{0\}$ مثالي BCK في G إنه **أعظمي** إذا كان I غيـــر محتوى في أي مثالي حقيقي آخر.

سنورد الآن مفهوم جبور BCC البسيطة من خلال التعريف التالي:

تعريف (٥-٢)

ليكن G جبر BCC.

يُقال عن G إنه جبر BCC **بسيط** إذا لم يحوِ أي مثالي BCC حقيقي.

يُقال عن G إنه **جبر** BCK **بسيط** إذا لم يحوِ أي مثالي BCK حقيقي.
ويمكننا إيراد النتيجة التالية:

نتيجة (٥-٣)

ليكن G جبر BCC، فإن كل جبر BCK بسيط G يكون جبر BCC بسيطاً.

البرهان

في الواقع، إذا كان G جبر BCC لا يحوي أي مثالي BCK حقيقي، فعندئذ G لا يحوي أي مثالي BCC حقيقي وذلك لأن كل مثالي BCC يكون مثالي BCK.

أما العكس فغير صحيح، ذلك أن جبور BCC البسيطة ليست بالضرورة جبور BCK بسيطة وذلك كما يبيّن المثال التالي:

مثال (٥-٤)

ليكن $G = \{0,a,b,c,d\}$ جبر BCC معرفاً وفق الجدول المرفق:

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	c	a	0	0
d	d	c	d	c	0

من السهل على القارئ رؤية أن G جبر BCC بسيط، وإذا لاحظنا أن $I=\{0,a\}$ وأن $J=\{0,b\}$ مثاليات BCK حقيقية، فإننا نستنتج أن G جبر BCC ولكن ليس جبر BCK بسيطاً.

ونبرهن مباشرةً النظرية التالية:

نظرية (٥-٥)

ليكن G جبر BCC بسيطاً، وليكن I مثالي BCC حقيقياً في G.

إن الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي I أعظمياً هو أن يكون G/I جبر BCC بسيطاً.

البرهان

لزوم الشرط: إذا كان I مثالي BCC أعظمياً في G، ولنسلّم جدلاً أن G/I جبر BCC غير بسيط، فعندئذ هنالك مثالي حقيقي وليكن J/I في G/I.

لنأخذ تشاكل الغمر القانوني $\psi : G \to G/I$.

إن $\psi^{-1}\left(J/I\right)$ مثالي BCC حقيقي في G، لأن الصورة العكسية لأي مثالي BCC في المستقر وفق تشاكل غامر يكون مثالي BCC في المنطلق. علاوة على ذلك، لدينا $I \subsetneq \psi^{-1}\left(J/I\right)$ وهذا خلاف للفرض. إذن G/I جبر BCC بسيط.

كفاية الشرط: لنفرض أن G/I جبـر BCC بسـيط، ولنقبـل مؤقتـاً أن I مثالي BCC في G غير أعظمي، فثمة مثالي BCC مثل J في G بحيـث يكون:

$$I \subsetneq J \neq G$$

لنبرهن أن $J/I \neq \Phi$ مثالي BCC في G/I.

في الواقع، لنفرض أن:

$$(C_x \bullet C_y) \bullet C_z \in J/I \quad and \quad C_y \in J/I$$

فعندئذ يكون:

$$(x * y) * z \in J \quad and \quad y \in J$$

ويترتب على ذلك أن: $x * z \in J$

وعليه نجد: $C_{x*z} \in J/I$ أي $C_x \bullet C_z \in J/I$ وإذا لاحظنا من جهة أخرى أن $I = C_0 \subset J/I$ يتضح على الفور أن J/I مثالي BCC في G/I.

زد على ذلك، إن J/I حقيقي وذلك $I \subsetneq J/I \neq G/I$ وهـذا يقودنـا إلـى تناقض مع كون G/I جبر BCC بسـيطاً. إذن I مثـالي BCC أعظمـي في G. وبذا يتم إثبات النظرية.

تمرينات الباب الثاني

(١) ليكن X جبر BCI. يُقال عن مثالي J في X إنه مثالي مغلق إذا كان جبراً جزئياً من X. بين أن:
J مثالي مغلق في X إذا وفقط إذا كان $x \in J$ $e(x) = 0 * x \in J$ وذلك مهما يكن x عنصراً من J.

(٢) ليكن X جبر BCI. ولنعرف المجموعات التالية:

$$P(X) = \{x \in X : e(x) = 0\}$$

$$SP(X) = \{x \in X : e(e(x)) = x\}$$

يُقال عن X إنه P – نصف بسيط إذا كان $SP(X) = X$.

والمطلوب:

أ- بين أن $SP(X)$ جبر جزئي من X.

ب-أثبت أن: $P(X) \bigcap SP(X) = \{0\}$

ج- X جبر BCK $\Leftrightarrow SP(X) = \{0\}$

د- X يكون P – نصف بسيط $\Leftrightarrow P(X) = \{0\}$

هـ- إذا كان S جبراً جزئياً من X بحيث $S \bigcap P(X) = \{0\}$ فبين أن $S \subseteq SP(X)$.

(٣) لنأخذ المجموعة $X = \{0,1,2,3\}$ المزودة بالعملية الثنائية المعرفة وفق الجدول التالي:

*	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	3	0	0

أثبت أن X جبر BCI، وبين أن

$$P(X) = \{0,1\} \quad \text{و} \quad SP(X) = \{0,3\}$$

(٤) إذا كان A جبر BCK، فبين أن:

1. $x * x^n = 0$
2. $(x * (x * y)) * y^n = 0$
3. $(x * y^{n+1}) * (x * y^n) = 0$

وذلك مهما يكن x, y من A وأياً كان n عدداً صحيحاً موجباً.

(٥) إذا كان A جبر BCK تبادلياً يتمتع بخاصية الاختصار النسبية، بين: المثالي الصفري $\{0\}$ يكون أولياً إذا وفقط إذا كانت علاقة الترتيب $\leq$ علاقة ترتيب كلي.

(٦) ليكن A جبر BCK، يُقال عن مجموعة جزئية J من A إنها مثالي ضمني إذا كان $0 \in J$ وحقق القضية التالية:

$$(x * y) * z \in J \quad , \quad y * z \in J \Rightarrow x * z \in J; \forall x, y, z \in A$$

أ- بين أن المثالي الصفري $\{0\}$ يكون ضمنياً إذا وفقط إذا كانت المجموعة:

$$)a(=\{x\in X : x\le a\} \quad ; \quad \forall a\in A$$

مثالياً في A.

ب- إذا كان I,J مثاليين ضمنيين في A فبين أن $I\bigcup J$ يكون مثالياً ضمنياً في A.

(٧) يُقال عن المثالي I في جبر BCK التبادلي A إنه فئوي إذا وفقط إذا حقق ما يلي:

$$(a\wedge b)\wedge c\in I \Rightarrow a\wedge c\in I \quad or \quad b\wedge c\in I$$

وذلك أياً كانت a,b,c عناصر من A.

ويُقال عن جبر BCK التبادلي A إنه فئوي إذا كان المثالي الصفري $\{0\}$ مثالياً فئوياً.

بين صحة ما يلي:

أ- إذا كان A جبر BCK تبادلياً محدوداً وضمنياً، فإن I مثالي فئوي إذا وفقط إذا كان I مثالياً أولياً.

ب- إذا كان A جبر BCK تبادلياً محدوداً وضمنياً، فإن القضايا التالية متكافئة:

١- A جبر BCK فئوي.

٢- المثالي الصفري $\{0\}$ يكون مثالياً فئوياً.

٣- المثالي الصفري $\{0\}$ يكون مثالياً أولياً.

٤- كل مثالي في A يكون أولياً.

(٨) إذا كان A جبر BCK تبادلياً يحقق خاصية الاختصار النسبية فبين أن: $(x * y) \wedge (y * x) = 0$ وذلك مهما تكن x, y من A.

(٩) ليكن A جبر BCK تبادلياً، ولتكن J مجموعة جزئية من A ولنضع: $J^{*} = \{x \in A : x \wedge a = 0 \quad , \forall a \in J\}$

بين أن $A^{*} = \{0\} \quad , \quad \{0\}^{*} = A$

علاوة على ذلك، إذا كان J مثالياً في A فإن $J \cap J^{*} = \{0\}$.

(١٠) لنزود المجموعة $X = \{0,1,2,a,b,c,d\}$ بالعملية الثنائية * المعرفة وفق الجدول المرفق:

*	0	1	2	a	b	c	d
0	0	0	0	a	a	a	a
1	1	0	0	b	a	a	a
2	2	1	0	c	b	a	a
a	a	a	a	0	0	0	0
b	b	a	a	1	0	0	0
c	c	b	a	2	1	0	1
d	d	b	a	2	1	1	0

بين أن X جبر BCI تبادلي.

(١١) إذا كان X جبر BCI، بين أن:

$$0*(x*y)^n=(0*x^n)*(0*y^n)$$
$$0*(0*x^n)=0*(0*x)^n$$
وذلك مهما تكن x, y عناصر من X وأياً كان n عدداً صحيحاً موجباً.

(١٢) بين أن مفهوم جبور BCC التبادلية متطابقة مع مفهوم جبور BCK التبادلية.

(١٣) ليكن $(G,0,\bullet)$ جبر BCC، وليكن $1 \not\in G$ ، بين أن المجموعة $G' = G \bigcup \{1\}$ المزودة بالعملية الثنائية المعرفة بالصيغة:
$$x*y=\begin{cases} x.y & x,y\in G \\ 0 & x\in G', y=1 \\ 1 & x=1, y\in G \end{cases}$$
تشكل جبر BCC محدودٌ.

(١٤) إذا كانت G,G' جبور BCC ولتكن $f:G\to G'$ تشاكل BCC غامراً، بين أن $G' \approx {G}/{Kerf}$.

(١٥) إذا كانت $f:G\to H$ تشاكل BCC غامراً، بين أن الصورة العكسية لأي مثالي BCC في H وفق التشاكل f يكون أيضاً مثالي BCC في G.

(١٦) إذا كان G جبر BCC، فإن كل مثالي BCC يكون مثالي BCK.

(١٧) ليكن لدينا المخطط التالي المؤلف من جبـور BCC وتشـاكلاتها وبحيث f غامر. أثبت صحة ما يلي:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & G'' \\ G' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

- إذا كـان $Kerf \subseteq Kerg$ فعندئـذ هنالـك تشـاكل وحيد $h : G' \to G''$ يحقق $h \circ f = g$

(١٨) إذا كان G جبر BCC وليكن I مثالي BCC في G.

إن العلاقة الثنائية:

$$x \equiv y (\bmod I) \Leftrightarrow x * y \in I \quad and \quad y * x \in I$$

تكون علاقة تكافؤ على G. بالإضافة لذلك، إنها علاقة تطابق على G.

(١٩) إذا كان G جبر BCC ولتكن $\Re$ علاقة تطابق على G. بين أن المجموعة

$$I_{\Re} = \{x \in G : x \equiv 0.(\Re)\}$$

تكون مثالي BCC ذات $n-$ نسـق فـي G. وذلـك لأجـل أي عـدد طبيعي n.

(٢٠) ليكن $X_A = Spec(A)$ الطيف الأولي لجبـر BCK المحـدد والضمني A. ولنرمز بـ D_A لجماعة مـن المجموعـات الجزئيـة

من X_A من النمط $D(e)$ حيث $e \in A$. بين أن D_A تشكل شبكة بولية.

(٢١) بين أن جبر BCK المبين وفق الجدول التالي:

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	b
c	c	b	a	0	b
d	d	a	d	a	0

تبادلي ويحقق الخاصية (S).

(٢٢) بين أن كل جبر BCK يتمتع بالخاصية (S) يكون جبر لوكاسويكز.

(٢٣) إذا كان A جبر BCK تبادلياً فإن جبر BCK الخارج يكون تبادلياً.

(٢٤) إذا كان A جبر BCK تبادلياً وضمنياً، بين أن: $\{0\}$ مثاليّ أوليّ إذا وفقط إذا كان كل مثالي في A أولياً.

(٢٥) ليكن X جبر BCI، يُقال عن عنصر $a \in X$ إنه ذري إذا حقق العلاقة: $x * a = 0 \Rightarrow x = a \;\; ; \;\; \forall x \in X$

ولنرمز بـ $L(X)$ لمجموعة العناصر الذرية في X. بين ما يلي:

١- $0*(0*x) \in L(X)$ وذلك أياً كان x من X.

٢- إذا كان $a,b \in L(X)$ فإن $a*b \in L(X)$

٣- إذا كان $a,b \in L(X)$ فإن $b*a = 0*(a*b)$

ثَبْتُ المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة بالمصطلحات العلمية المستخدمة في هذا الكتاب مرتّبة وفق الحروف اللاتينية، مع مقابل كل منها باللغة العربية.

A

Adjoint mapping	التطبيق المرافق (القرين)
Adjoint representation	التمثيل المرافق
Algebra	جبر
Algebra of type $2,0$	جبر من النمط $2,0$
Algebraic structure	بنية جبرية
Altesnaling bilinear form	شكل ثنائي الخطية متناوب
Anti - symmetric form bilinear	شكل ثنائي الخطية شبه متناظر
Anti - symmetry	تخالفية
Ascending chain condition	شرط السلسلة المتزايدة
Associative Algebra	جبر تجميعي
Automorphism	تماثل ذاتي

B

Base for a topology	قاعدة فضاء تبولوجي
BCH - quasigroup	BCH - شبه زمرة

Bilinear form	الشكل ثنائي الخطية
Bilinear form symmetric	الشكل الخطاني المتناظر
Bilinear forms on lie algebras	الأشكال الخطانية لجبور لي
Binary operation	عملية ثنائية
Binary relation	علاقة ثنائية
Boolean algebra	جبر بول
Boolean group	زمرة بولية
Bounded	محدود
Bounded commutative BCK - algebra	جبر BCK التبادلي والمحدود

C

Canonical	قانوني
Congruent	مطابق
Center	المركز
Central extensions	التمديدات المركزية
Centralizer	الممركز
Chain	سلسلة
Characteristics ideal	المثالي المميّز
Closed ideal	مثالي مغلق
Commutative	تبديلي
Commutative algebra	جبر تبديلي
Commutative BCK - algebra	جبر BCK تبادلي

Commutative BCK - algebra with condition (S)
جبر BCK تبادلي والذي يحقق الخاصة (S)

Commutative field	حقل تبديلي
Commutative group	زمرة تبديلية
Commutative law	قانون تبديلي
Commutative lie algebra	جبر لي التبادلي
Commutative ring	حلقة تبديلية
Compact space	فضاء متراص
Comparable	متقارن
Complete lattice	شبكة تامة
Complete lie algebra	جبر لي التام
Concept	مفهوم
Congruence relation	علاقة تطابق
Constant element	عنصر ثابت
Contradiction	تناقض
Convention	اصطلاح
Cover (Covering)	غطاء (تغطية)

D

Derivation	الاشتقاق
Derivation in Lie algebra	الاشتقاق في جبر لي
Derivation mappings	تطبيقات الاشتقاق
Derived series	المتسلسلة المشتقة

Derived series and descending central series

المتسلسلات المشتقة والمتسلسلات المركزية المتناقصة

Descending — متناقص

Descending chain condition — شرط السلسلة المتناقصة

Diagonal — قطري

Diagram — رسم بياني

Dimension of lie algebra — بعد جبر لي

Direct sum — مجموع مباشر

Directed set — مجموعة موجّهة

Discriminant — مميِّز

Distinct — مختلف

Distributive lattice — شبكة توزيعية

Divisor of zero — قاسم للصفر

Dual — ثنوي

E

Element — عنصر

Endomorphism — تشاكل ذاتي

Epimorphism — تشاكل غامر

Equivalence relation — علاقة تكافؤ

Equivalent — متكافئة

Equivalent extensions — التمديدات المتكافئة

Exact sequences — المتتاليات التامة

Exict sequence	متتالية تامة
Extermal direct sum	مجموع مباشر خارجي

F

Factor	عامل
Field	حقل
Finite cover	تغطية منتهية
Finite dimensional	منتهي البعد
First isomorphism theorem	مبرهنة التماثل الأولى
Formula	صيغة
Function	دالّة

G

Genarated	مولد
General linear algebra	جبر خطي عام
Generate	مولدة
Grealest lower bound	حد أدنى أعظمي

H

Hausdorff space	فضاء هاوسدورف
Hermitian	هرميتي
Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية
Homomorphism	تشاكل
Homomorphism of Lie algebras	تشاكل جبور لي

Hypothesis	فرضية

I

Ideal	مثالي
Ideal of X generated by I and a	مثالي في X مولد بـــ I وبالعنصر a
Ideals of lie algebra	مثاليات جبر لي
Implicative	ضمني
Index	دليل
Induction	الاستقراء
Inessential extensions	التمديدات غير الأساسية
Inference	استدلال
Injective	متباين
Inner derivation	الاشتقاق الداخلي
Inner product space	فضاء جداء داخلي
Integer	عدد صحيح
Internal direct sum	مجموع مباشر داخلي
Involutory ideal	مثالي ارتدادي
Irreducible BCK - algebra	جبر BCK غير خزول
Isomorphism	تماثل

J

Jacobi(1804-1851)	جاكوبي
Jacobi identity	مطابقة جاكوبي

K

Killing form	صيغة كيلنغ

L

Lattice of ideals	شبكة المثاليات
Least upper bound	حد أعلى أصغري
Leipnig (rul)	قاعدة لايبنز
Lemma	تمهيدية
Lie algebra	جبر لي
Lie algebra direct sum	المجموع المباشر لجبر لي
Lie algebra extension	تمديد جبر لي
Lie algebra semi - direct sun	المجموع نصف المباشر لجبر لي
Lie subalgebra	جبر لي الجزئي
Linear	خطي
Linear BCK - algebra	جبر BCK الخطي
Linear map	تطبيق خطي
Lower bound	حد أدنى
Lower semilattice	شبه شبكة من الأدنى
Lukasiewicz algebra	جبر لوكاسويكز

M

Main diagonal	القطر الرئيسي
Mapping	تطبيق

Mathematical induction	استقراء رياضي
Maximum	قيمة عظمى
Medial BCI - algebra	جبر BCI الوسيطي
Method	طريقة
Minimal ideal	المثالي الأصغري
Minimum	قيمة صغرى
Module	فضاء متجهي حلقي
Modulo	قياس
Modulus	مقاس
Monomorphism	تشاكل متباين

N

n- atom elements	العناصر الذرية
n- fold BCC - ideals	مثاليات BCC ذات n –نسق
n- fold commutative ideals	مثاليات تبادلية من النسق – n –
Natural number or positive integer	عدد طبيعي أو عدد صحيح موجب
Nil - radical	أساس عديم القوى
Nilpotency	عديم القوى
Nilpotent lie algebra	جبر لي عديم القوى
Nilpotent ideal	مثالي عديم القوى
Non - derogatory	غير متردّد
Non - singular	غير شاذ
Non - trivial Boolean group	زمرة بولية غير تافهة

Normalizer	مناظم

O

Obstinal ideal	المثالي الارتدادي
Open cover	تغطية مفتوحة

P

Partial ordering	علاقة ترتيب جزئية
Partition	تجزئة
Permutation	مبادلة
Prime ideal	مثالي أولي
Principal ring	حلقة المثاليات الرئيسية
Property	خاصية
Propre ideal	مثالي حقيقي
Pruduct	جداء

Q

Quotient Algebra	جبر الخارج
Quotient BCH - algebra	جبر BCH الخارج
Quotient Lie algebra	جبر لي الخارج

R

Radical	أساس
Radical of lie algebra	أساس جبر لي
Rank	رتبة

Real number	عدد حقيقي
Reflexive	انعكاسية
Relation	علاقة
Relative concellation property	اصة الاختصار النسبية
Representation	ممثل
Right most	أقصى اليمين
Ring	حلقة

S

Second isomorphism theorem	مبرهنة التماثل الثانية
Semi - simple algebra	جبر لي نصف البسيط
Semi direct sum	مجموع نصف مباشر
Semi simple	نصف بسيط
Semi simple lie algebra	جبر لي نصف البسيط
Set	مجموعة
Simple	بسيط
Simple Algebra	جبر بسيط
Solvable	قابل للحل
Solvable lie algebra	جبر لي القابل للحل
Space of bilinear forms	فضاء الأشكال الثنائية الخطية
Spectral theorem	نظرية الطيف
Stable	مستقرة
Sub module	مقاس جزئي

Sub ring	حلقة جزئية
Subalgebra	جبر جزئي
Subcover	تغطية جزئية
Substitute	تعويض
Sum	مجموع
Surjective	غامر
Symmetric	تناظرية
Symmetric bilinear form	شكل ثنائي الخطية متناظر

T

Third isomorphism theorem	مبرهنة التماثل الثالثة
Tnace of operator	أثر مؤثر خطي
Topological space	فضاء تبولوجي
Topology	تبولوجيا
Trace	أثر
Trace form	أثر شكل
Transitive	متعدية
Translation ideal	مثالي انسحابي
Trivial extension	التمديد التافه
Trivial solution	حل تافه
Two non - zero element of X	عنصران من X مغايران للصفر

U

Unique	وحيد
Unit	واحدية
Unitary associative algebra	جبر تجميعي وواحدي
Unitary matrix	مصفوفة واحدية
Unitary ring	حلقة واحدية
Upper central series	سلسلة مركزية متزايدة

V

Vector space	فضاء شعاعي

المراجع العلمية

1) Blyth, T. S, **Module Theory**, Clarendon Press. OX Ford (1977)

2) Bourbaki, N, **Lie Groups and Lie algebras**. Springer – Verlag, (1989)

3) Humphrey, J. E, **Introduction to lie algebras and representation theory,** Second Printing, Springer – Verlag (1972)

4) Iséki. K and Tanaka. S, **An introduction to the theory of BCK – algebras, Math**. Japonica,23 (1978), 1- 26

5) Koudsi. E, **Idéaux Dérivés des BCK – algèbres**, Damascus University, Journal for Basic Sciences Vol 19, N 1, 2003

6) Koudsi. E, **Les BCK – algèbres Symétriques** Damascus University, Journal for Basic Sciences Vol 19, N 1, 2003

7) Koudsi. E **Les Spectres premiers des BCK – algèbres Commutatives**, Vol 23, N 1, 2005

8) Meng. J and Young Jun, **BCK – algebras**, Kyung Moon SA CO . (1994)

9) Meng. J, **On ideals in BCK – algebras**, Pure and Appl. Math . 2 (1985), 68 - 75

10) Ponasse. D et Carrega. J. C. **algèbre et topologic booléenne**. Masson, Paris, Wew – York, Barcelone, Milan, 1979

11) Young Jun and Dudek. A, **n – fold BCC – Ideals of BCC – algebras Scientiae Mathematicae**, Vol 3, No 2 (2000), 173 – 178

12) Young Jun and Hwan Roh, On **BH – algebras Scientiae Mathematicae**, Vol 1, No 3 (1998), 341 – 354

13) Yutze. Ch. **General Theory of Lie algebras** Volume one, New York – London – Paris – (1978)

١٤) د. أنور اللحام، د. إلهام الحمصي: الجبر (٥)، منشورات جامعة دمشق، (١٩٨٣-١٩٨٤)

اللجنة العلمية

أ. د. عبد الواحد أبو حمدة

أ. د. أنور اللحام

أ. م. د. يوسف الوادي

المدقق اللغوي

د. أحمد حاجي صفر