الفيزياء العامة (1)

السنة الأولى – كيمياء

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

الفيزياء العامة

(1)

الدكتور حمـود العرابي

الدكتور حسان كاملة

جامعة دمشق

1434 – 1433 هـ

2013 – 2012 م

فهرس المحتويات

مقدمة

إن كتاب الفيزياء العامة (1) من الكتب الأولى التي يدرسها الطالب في المرحلة الجامعية بكلية العلوم؛ لذلك راعينا فيه السهولة في العرض، والعمق في المعلومات متوافقاً مع قرار مجلس جامعة دمشق المحدد لمفردات هذا المقرر. يشتمل هذا الكتاب على ثمانية فصول، خُصّصت لمعالجة المبادئ الأساسية في الفيزياء، لا سيما علم الميكانيك الكلاسيكي.

تناول **الفصل الأول** مقدمة تضمّنت التعريف بأصل كلمة الفيزياء، وعلاقة علم الفيزياء بالعلوم الأخرى.

أما **الفصل الثاني**، فقد تناول قياس المقادير الفيزيائية وتحديد وحدات تقديرها، وكيفية تحديد أبعاد الكميات الفيزيائية المختلفة، لما لها من أهمية كبرى في بناء أساس صحيح لأي طالب يريد أن يصبح كيميائياً أو فيزيائياً.

و قد خُصّص **الفصل الثالث** لمعالجة الأشعة (جبر المتجهات) لما لهذا الموضوع من أهميةٍ في معالجة المقادير الفيزيائية الشعاعية جميعها.

و قد تطرق **الفصل الرابع** لموضوع القوى، والعزوم، وتوازن الأجسام.

واهتم **الفصل الخامس** بمعالجة علم الحركة التقليدية، حيث يشكل مقدمة أساسية لعلم التحريك وقوانين نيوتن المطبقة على الجسيم المادي.

وقد تناول **الفصل السادس** بشكل مبسط موضوع الحركة النسبية.

في حين اهتم **الفصل السابع** بموضوع تحريك الجسيمات المادية وفق قوانين نيوتن الكلاسيكية، ومبدأ انحفاظ كمية الحركة لجملة من الجسيمات المادية.

أما الفصل الثامن والأخير فقد عالج موضوع العمل الميكانيكي، ومفهوم الطاقة ومبدأ انحفاظ الطاقة.

تضمن الكتاب مجموعة من الملحقات والجداول التي تساعد الطالب في فهم بعض المفاهيم لتكون عوناً له في حل بعض المسائل؛ بالإضافة إلى قائمة المصطلحات العلمية المعتمدة وقائمة المراجع التي تم استخدامها لإعداد هذا الكتاب.

وقد استخدمت الحروف اللاتينية المتعارف عليها في كتابة المعادلات، بالإضافة إلى الحروف اليونانية (المبيّنة في الملحق) و الأعداد الرومانية (I, II , III , IV , V...) التي وردت في بعض الفقرات. أيضا، وردت في بعض الأشكال التوضيحية والمسائل حروف غامقة للدلالة على كونها أشعة مثل: ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{V}, \mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}, \mathbf{F_1}, \mathbf{F_2},\ldots$)، كما استخدمت الأعداد العربية التي نعتز بها في باقي النص.

لابد لنا من تنبيه أبنائنا الطلبة وهم يمضون السنة الأولى في الجامعة إلى اختلاف طبيعة الدراسة في التعليم ما قبل الجامعي عن التعليم الجامعي، حيث يلتزم المدرسون والطلاب خلال مراحل الدراسة الأولى بكتاب موحد لا يحيدون عنه أو عن مفرداته إلى عالم واسع تتميز به الدراسة الجامعية ينبغي أن يعتاد فيه الطالب على ارتياد المكتبة، واستخدام الانترنت للبحث في المواضيع التي تهمه، حيث تعد الدراسة الجامعية على جهد الطالب في تطوير معارفه مستعيناً بالكتب الجامعية ومصادر العلم جميعها بشتى تخصصاته.

في الختام نأمل أن يستفيد أبناؤنا الطلاب من هذا الكتاب، ونأمل من زملائنا تزويدنا بالملاحظات التي يمكن أن تجعل هذا الكتاب أفضل، وبشكله الأمثل.

المؤلفان

د. حمود   د. حسان

الفصل الأول

مقدمة في أهمية الفيزياء

1.1 ما هي الفيزياء ؟

1.2 فروع الفيزياء الكلاسيكية.

1.3 العلاقة بين الفيزياء والعلوم الأخرى.

الفصل الأول

مقدمة في أهمية الفيزياء

Introduction

1.1 ما هي الفيزياء ؟

أتت كلمة فيزياء من الكلمة اليونانية *فيزيك* "φυσική"، وتعني معرفة الطّبيعة (هي العِلم الذي يدرس المادة وحركتها؛ بالإضافة إلى مفاهيم أخرى كالفضاء والزمن، ويتعامل مع خصائص كونية محسوسة يمكن قياسها، مثل: القوة، والطاقة، والكتلة، والشحنة .وتعتمد الفيزياء المنهج التجريبي؛ أي أنها تحاول تفسير الظواهر الطّبيعية والقوانين التي تحكم الكون عن طريق نظريات قابلة للاختبار.

علم الفيزياء هو علم تجريبي يهتم بكشف أسرار الطبيعة، فكل شيء نعرفه عن هذا الكون وعن القوانين التي تحكمه تم التوصل إليها عن طريق القياسات والملاحظات لأي ظاهرة طبيعية. ويعرف علم الفيزياء أيضاً بأنه علم القياس Science of measurements يقول العالم الشهير كلفن "عندما تستطيع قياس ما تتكلم عنه وتعبّر عنه بالأرقام فإنك إذاً تعرف شيئاً عنه، ولكنها عندما لا تستطيع التعبير عنه بالأرقام فإن معرفتك في هذه الحالة غير كافية ولكن تعتبر البداية."

فالفيزياء ينبغي أن تكون علماً مخصصاً لدراسة الظواهر الطبيعية جميعها. وفي الواقع فقد بقيت الفيزياء حتى بداية القرن التاسع عشر تفهم بمعناها الأكثر شمولاً، وكانت تسمى الفلسفة الطبيعية، ومع ذلك فخلال القرن التاسع، وحتى عهد قريب جداً، كانت الفيزياء مقتصرة على دراسة مجموعة محددة من الظواهر الفيزيائية معرّفةٍ بشكل غير دقيق على أنها

الظواهر التي لا تتغير فيها طبيعة المواد التي تشترك فيها، وقد تُرك هذا التعريف غير الموفق للفيزياء بالتدريج، لتتم العودة إلى المفاهيم الأولى الأكثر عمومية وأساسية. ويمكننا وفق هذه الأفكار أن نقول إن الفيزياء هي علم هدفه دراسة مركبات المادة، والتأثيرات المتبادلة بينها. وتبعاً لهذه التأثيرات المتبادلة يفسر الفيزيائي خواص المادة بمجملها، كما يفسر الظواهر الطبيعية الأخرى كلها التي نشاهدها.

1.2 فروع الفيزياء الكلاسيكية:

لقد سعى الإنسان دائماً، بما يتمتع به من روح تواقة إلى المعرفة إلى تفهم أسرار الطبيعة، ولم يكن يملك في البداية كمصدر للمعلومات سوى حواسه؛ وبالتالي فقد صُنّفت الظواهر المشاهدة وفق الطريقة التي يشعر بها فيها، فقد ارتبط النور بحس الرؤية، وتطور علم البصريات أو الضوء (Optics) كعلم مستقل نوعاً ما ومرتبط بالرؤية، والصوت كان مرتبطاً بحس السمع، وقد تطور علم الصوت أو الصوتيات (Acoustics) كعلم مستقل، وارتبطت الحرارة بنوع آخر من الإحساس، وبقيت دراسة الحرارة أو (الترموديناميك) خلال سنوات طويلة تشكل فرعاً مستقلاً آخر من الفيزياء، أما الحركة فهي - بالطبع - الشيء المشترك في معظم الظواهر المشاهدة، وقد تطور علم الحركة (الميكانيك) قبل فروع الفيزياء الأخرى جميعها، وقد أمكن تفسير حركة الكواكب العائدة إلى تجاذبها، كما أمكن تفسير السقوط الحر للأجسام بشكل رائع بواسطة قوانين الميكانيك وهكذا ارتبطت الجاذبية تقليدياً بالميكانيك. أما الكهرطيسية (الكهرباء والمغنطيسية) التي لا ترتبط بأية تجربة حسّية رغم أنها المسؤولة عن معظم هذه الظواهر فلم تظهر كفرع منظم من الفيزياء قبل القرن التاسع عشر.
وهكذا كانت فيزياء القرن التاسع عشر مقسّمة إلى علوم عدة، أو فروع (تدعى كلاسيكية) الميكانيك، الحرارة، الصوت، الضوء، الكهرطيسية لا تكاد تكون بينها إلا علاقات بسيطة، رغم أن الميكانيك كان - كما ينبغي له أن يكون- المبدأ القائد لكل الفروع الأخرى. وبهذا الشكل كانت تدرّس الفيزياء للطلاب حتى وقت قريب. ومن بعد ذلك أُضيف فرع جديد

اسمه الفيزياء الحديثة Modern Physics يضم تطورات الفيزياء في القرن العشرين إلى تلك الفروع الكلاسيكية للفيزياء.

إن الفروع الكلاسيكية للفيزياء كانت وما تزال مواضيع اختصاص مهمة جداً، ولكن لم يعد هناك من معنى لدراسة أسس الفيزياء بهذه الطريقة المجزأة، ولقد ولّدت الظواهر نفسها التي تتضمنها الكهرطيسية والفيزياء الحديثة منحى جديداً في التفكير ينظر إلى الظواهر الفيزيائية من وجهة نظر موحدة وأكثر منطقية، وهذا ما يعد إحدى الخطوات المهمة في القرن العشرين.

ويتطلب هذا العرض الموحد للفيزياء عرضاً جديداً للفيزياء الكلاسيكية، ومن وجهة نظر حديثة، وليس مجرد تقسيم للفيزياء إلى كلاسيكية وحديثة.

ستبقى هناك دائماً فيزياء حديثة؛ بمعنى أنه في أي زمن من الأزمان ستتطور فيزياء معاصرة، وهذه الفيزياء الحديثة ستتطلب دائماً مراجعة، وإعادة تقويم الأفكار، والمبادئ السابقة. ينبغي أن تتوحد الفيزياء الكلاسيكية والحديثة على المستويات كلها في هيكل واحد للمعرفة وستبقى الفيزياء دائماً ككل ينظر إليه بشكل متوافق، ومنطقي.

1.3 العلاقة بين الفيزياء والعلوم الأخرى:

إن غرض الفيزياء هو أن تسمح لنا بفهم المركبات الأساسية للمادة والتأثيرات المتبادلة بينها؛ وبالتالي بتفسير الظواهر الطبيعية بما في ذلك خواص المادة ككل وابتداءً من هذا التحديد يمكننا أن نرى أن الفيزياء هي أكثر العلوم أساسية. فالكيمياء تهتم من حيث المبدأ بجزء خاص من هذا المجال الواسع؛ وهو تطبيق قوانين الفيزياء على تشكيل الجزئيات، والطرق العملية المختلفة لتحويل جزيئات معينة إلى أخرى، أما البيولوجيا، فينبغي أن تعتمد بشكل قويٍّ على الفيزياء، وعلى الكيمياء لتفسر الظواهر التي تجري في الأجسام الحية. إنّ تطبيق مبادئ الفيزياء والكيمياء على المسائل العملية، في مجالي البحث والتطبيق أو في مجال العمل المهني أدى إلى نشوء الفروع المختلفة للهندسة. إن التطبيق الحديث للهندسة مستحيل من دون الفهم العميق للأفكار الأساسية لعلوم الطبيعة.

لكن الفيزياء ليست مهمة فقط لأنها تشكل حجر الأساس في المفاهيم والنظريات التي تعتمد عليها علوم الطبيعة الأخرى، بل هي من وجهة النظر العملية هي مهمة؛ لأنها تقدم تقنيات يمكن أن تستخدم في أي مجال من مجالات البحث العلمي أو التطبيقي. فالفلكي بحاجة إلى تقنية البصريات والتحليل الطيفي والراديو الكهربائي. والجيولوجي يستخدم طرق القياسات الصوتية والنووية والميكانيكية في أبحاثه. والشيء نفسه يمكن أن يقال عن عالم المحيطات وعن عالم الأرصاد الجوية أو الهزات الأرضية. والمستشفى الحديث يكون مجهزاً بمخابر تستخدم فيها أكثر التقنيات الفيزيائية تقدماً. وباختصار لا يكاد يوجد حقل من حقول البحث بما فيها بحوث في مجالات كعلم الآثار أو المستحاثات أو التاريخ أو الفن، يمكن أن يتم من دون أن تحتاج إلى تقنيات فيزيائية حديثة. كل هذا يعطي الفيزيائي الشعور المرضي بأنه لا يسهم فقط في جعل معرفتنا بالطبيعة تتقدم؛ وإنما يسهم كذلك في التقدم الاجتماعي للإنسانية.

الفصل الثاني

القياس والوحدات

2.1 مقدمة.

2.2 القياس.

2.3 أنواع القياس.

2.4 طرق القياس.

2.5 المقادير الأساسية والوحدات.

2.6 أبعاد الكميات الفيزيائية - معادلة الأبعاد.

2.7 الدقة والإحكام.

الفصل الثاني

القياس والوحدات

Measurement and units

2.1 مقدمة:

بشكل عام تكون ملاحظة ظاهرة ما غير كاملة إذا لم تؤد إلى معلومات كمية. ويتطلب الحصول على مثل هذه المعلومات قياس مقدار فيزيائي؛ لذلك تشكل القياسات العنصر الرئيس للروتين اليومي الذي يقوم به الفيزيائي التجريبي. لقد قال الفيزيائي اللورد كلفن (Lord Kelvin) إن معرفتنا لا تكون مرضية إلا إذا استطعنا ترجمتها إلى صيغ عددية، ورغم أن هذا التأكيد هو من دون ريب مبالغ فيه إلا أنه يعكس فكرة ينبغي على الفيزيائي أن يكون دائماً أميناً لها طوال قيامه ببحثه. ولكن التعبير عن خاصة فيزيائية بشكل عادي لا يتطلب استخدام الرياضيات لتبيان العلاقات بين مختلف الكميات فقط؛ بل أن نكون أيضاً قادرين على استخدام هذه العلاقات؛ لهذا تشكل الرياضيات لغة الفيزياء، ومن المستحيل من دون الرياضيات فهم الظواهر الفيزيائية سواء أكان ذلك من الوجهة النظرية أم التجريبية. الرياضيات هي أداة الفيزيائي، وينبغي عليه استخدامها بذكاء، وإتقان لتساعده في عمله، لا لعرقلته.

نتعامل في كل لحظة مع عدد كبير من القياسات، مثل: الطول، والمساحة، والحجم، والوقت، والوزن والطاقة...الخ، ويستخدم لكل قياس طريقة خاصة. وبغض النظر عن الطرق المستخدمة في القياس، فإن قياس أي كمية فيزيائية ما هو إلا عبارة عن مقارنة بين مقدار

الكمية المقاسة ومقدار يؤخذ كوحدة. فمثلاً عند قياس طول طاولة فإننا نقارن بين طولها وطول جسم آخر يؤخذ كوحدة لقياس الأطوال (مثل: مسطرة مترية). ونعني بقياس مقدار كمية ما، إيجاد علاقة بين مقدار هذه الكمية والوحدة المناسبة.

إن استخدام عدة وحدت لقياس كمية ما يقود إلى ضرورة مهمة وهي القدرة على تحويل وحدة إلى أخرى. وبكلمة أخرى، إنه من الضروري أن نكون قادرين على تحديد العدد الذي يقيس مقدار كمية ما في وحدة إذا كان العدد الذي يقيس الكمية نفسها في وحدة أخرى معلوماً. فإذا قيس مقدار كمية ما (A) باستخدام الوحدة α_1 فإن القيمة العددية لهذه القيمة هو a_1 حيث يكون: $\frac{A}{\alpha_1} = a_1$

فعند قياس المقدار نفسه باستخدام الوحدة α_2 فإن القيمة العددية للكمية ستكون: $\frac{A}{\alpha_2} = a_2$ وبالتالي فإن :

$$A = \alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2 \quad \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

أي أن القيمة العددية لكمية فيزيائية تتناسب عكساً مع الوحدة المستخدمة لقياسها، وهكذا فإذا كان طول شخص باستخدام وحدة السنتمتر هو 176؛ فإن طول الشخص نفسه باستخدام وحدة الديسي متر سيكون 17.6

2.2 القياس:

القياس هو تقنية نعطي بواسطتها عدداً لخاصة فيزيائية بعد مقارنتها بكمية عيارية من النوع نفسه أُختيرت كوحدة. إن غالبية القياسات التي تجري في المخابر تعود بالأساس إلى قياس الطول. باستخدامنا لهذا القياس نحصل على المقدار المطلوب، عندما يجري الفيزيائي قياساً ما عليه أن يحتاط لإدخال أقل ما يمكن من الاضطرابات على الجملة التي يراقبها. فمثلاً عندما نقيس درجة حرارة جسم ما نضع هذا الجسم على تماس مع ميزان الحرارة. ولكن حالما يتم وضعهما يجري تبادل كمية معينة من الطاقة أو (الحرارة) بين الجسم والميزان، وينجم عن ذلك تغير طفيف في درجة حرارة الجسم؛ وبالتالي يحصل تغير في المقدار

الذي نريد قياسه. بالإضافة إلى ذلك فإن جميع القياسات مشوبة بشيء من الخطأ التجريبي بسبب عيوب جهاز القياس التي لا مفر منها أو بسبب الحدود التي تفرضها حواسنا (الرؤية والسمع) المكلّفة بتسجيل المعلومات. وعلى هذا يصمم الفيزيائي تقنيته للقياس بحيث يكون اضطراب المقدار المقيس أصغر من الخطأ التجريبي. وهذا في الحالة العامة ممكن دائماً عندما تقع الكميات المقيسة في المجال الجهري (الماكروسكوبي) - مثلاً في الأجسام المؤلفة من عدد كبير من الجزئيات - لأنه يكفي استخدام جهاز للقياس يحدث اضطراباً أصغر، بعدة رتب، من الكمية المقيسة. وهكذا مهما كان الاضطراب المحدث، فهو مهمل أمام الخطأ التجريبي. يمكن في حالات أخرى تقدير مقدار الاضطراب، وتصحيح القيمة المقيسة.

إلا أن الحالة تكون مغايرة تماماً عندما تقيس خواصّ ذرية فردية كحركة إلكترون. ليس لدينا الخيار في هذه المرة في استخدام جهاز يحدث تأثيراً متبادلاً أصغر من الكمية التي نود قياسها وذلك لأنه ليس لدينا جهاز بهذا الصغر. والاضطراب المحدث هو من رتبة الكمية المقيسة نفسها، وكذلك فإنه من غير الممكن تقديره أو الأخذ به بعين الاعتبار.

إذن ينبغي التمييز بين قياس كمية جهرية (ماكروسكوبية) وقياس كميات ذرية. سنحتاج إلى بناء نظري خاص عندما يتعلق الأمر بمعالجة مقادير ذرية، لن نناقش الآن هذه التقنية التي ندعوها ميكانيك الكم.

هناك متطلب آخر مهم، وهو أن تكون تعاريف المقادير الفيزيائية ذات صفة عملية، وهذا يعني أن تدل ظاهرياً أو ضمنياً على كيفية قياس الكمية المعرّفة. فمثلاً القول: إن السرعة هي صيغة للصورة التي يتحرك بها جسم، ليس تعريفاً عملياً للسرعة، بينما القول: إن السرعة هي المسافة المقطوعة مقسومة على الزمن هو تعريف عملي للسرعة.

نقول عن مقدار ما إنه قابل للقياس إذا أمكن التوصل إلى عدد ما يُعبّر عن نسبة مقدارين من النوع نفسه (من نوع المقدار القابل للقياس). يسمى عندئذٍ المقدار المستنتج في عملية المقارنة بوحدة أو واحدة القياس. وهنا لا بد من تحديد وحدة قياس المقدار الفيزيائي المراد قياسه. (وحدة القياس هي مقدار من النوع ذاته ينبغي أن يساوي الواحد بهدف تسهيل

عملية المقارنة). وينبغي أيضاً التمييز بين مصطلحين، المقدار المقاس وهو المقدار المعروض للقياس، والمقدار المقيس وهو الذي تم قياسه؛ بالإضافة إلى ناتج القياس المتمثل بالقيمة العددية التي تُعبر عن نسبة مقدارين من النوع نفسه.

- لجميع القياسات (القيم التجريبية) خطأ تجريبي. والخطأ التجريبي عبارة عن تغير ما في قيمة المقدار المقاس بسبب عيوب أداة أو جهاز القياس المستخدم أو بسبب محدودية حواسنا البصرية والسمعية التي نرصد من خلالها الظواهر التجريبية المختلفة. ولكن بعض المقادير لا تملك إلا قيمة عددية واحدة غير قابلة للزيادة أو النقصان؛ أي إنها ذات قيمة ثابتة؛ لذا فإنها تدعى بالثوابت الكونية، وتمثل هذه الثوابت ببعض الخواص الأساسية للخلاء أو للأوساط المادية. أو إنها تمثل رابطاً بين ميادين مختلفة من الفيزياء. ومن هذه المقادير، نذكر على سبيل المثال، ثابت التجاذب الكوني، وثابت بلانك، وثابت الغازات المثالية، وعدد أفوغادرو، وسرعة انتشار الضوء في الخلاء... الخ.

2.3 أنواع القياس:

تصنف القياسات، وفقاً لنوعين أساسيين، القياس المباشر، والقياس غير المباشر:

- القياس المباشر: يسمى القياس قياساً مباشراً إذا تم الحصول عليه باستخدام أدوات القياس مباشرةً، مثل: قياس الطول بالمسطرة والقدم القنوية، والكتلة بميزان الكتل، والزمن بالميقاتية، وشدة التيار الكهربائي بمقياس آمبير والجهد بمقياس فولط...الخ.

- القياس غير المباشر: وهو القياس الذي يحتاج إلى وسيط ما لقياسه. يكون هذا الوسيط عبارة عن علاقة رياضية تربط بين مقادير عدة، يعتمد قياس بعضها على القياس المباشر، مثال ذلك سطح دائرة: $S = \pi r^2$

2.4 طرق القياس:

تقاس المقادير الفيزيائية اعتماداً على إحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الحسابية، والطريقة البيانية بالرغم من اعتماد كلتا الطريقتين على دقة المجرب وحساسية الأجهزة والأدوات المستخدمة في القياس، إلا أنه لا يوجد قياس خال من الأخطاء مهما بلغت دقته.

بمعنى آخر يوجد في كل قياس أو تجربة خطأ ناجم عن المجرب (الخطأ الشخصي) وخطأ ناتج عن صغر حساسية الجهاز المستخدم في القياس (خطأ الجهاز).

A) - *الطريقة الحسابية*:

تتعلق طريقة القياس هذه بنوع القياس. فعند القياس المباشر يكون لأدوات القياس من مسطرة ميليمترية، وقدم قنوية، وأجهزة قياس إلكترونية...الخ دورٌ مهم في تحديد دقة النتيجة الحاصلة ويتمثل جوهر هذه الطريقة في إيجاد القيمة الوسطى للمقدار المقاس:

نفرض أننا قسنا المقدار الفيزيائي (x) عدداً من المرات (n)، وكانت نتائج القياسات المباشرة على الشكل التالي: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_i$ عندئذٍ تساوي القيمة الوسطى للمقدار إلى:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots x_i}{n} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

أما في حالة القياس غير المباشر، فالحالة مختلفة. لنفرض مثلاً، أن المقدار الفيزيائي هو تسارع الثقالة الأرضية (g) في مكان ما. عندئذٍ واعتماداً على قانون النواس البسيط تقوم بقياس مباشر لقيمة كل من طول خيط النواس (l) و دوره (T) ومن ثم نكتب قانون دور النواس البسيط التالي:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

وبتعويض قيم ناتج القياس المباشر لكل من (l) و (T) في العلاقة فنحصل على القيمة التجريبية لتسارع الجاذبية الأرضية (g).

B) - *الطريقة البيانية*:

تعتمد هذه الطريقة على رسم منحنٍ بياني اعتماداً على نتائج القياس في التجربة، ومن ثم تحليل المنحني الناتج وتفسيره. إذ تُمثَّل النتائج التجريبية على ورق ميليمتري خاص.

2.5 المقادير الأساسية والوحدات:

قبل قياس شيء ينبغي اختيار وحدة قياس أو عيار لكل مقدار نود قياسه. وتوجد لحاجات القياس، مقادير ووحدات أساسية ومشتقة؛ لذلك فإنه يتطلب منا بشكل أساسي الحصول على جملة من العيارات الموافقة للكثير من القيم والمقادير الفيزيائية. وبغية تحديد عيار جديد من أجل أية قيمة فيزيائية يمكن القيام بالآتي:

اختيار عدة عيارات موافقة لقيم فيزيائية أساسية (مثل الطول والكتلة والزمن) واعتمادها الوحدات الأساسية. واعتماد أن وحدات جميع القيم والمقادير الفيزيائية الأخرى مشتقة بمساعدة هذه الوحدات الأساسية، مستخدمين لهذا الغرض القوانين الفيزيائية التي تربط بين هذه المقادير المختلفة.

فعلى سبيل المثال، يمكن انطلاقاً من المقادير الثلاثة المعروفة سابقاً تحديد واحدة قياس مقدار فيزيائي مثل القوة. حيث نعلم أن القوة ترتبط مع الكتلة والتسارع حسب قانون نيوتن الثاني. وبما أن التسارع يرتبط مع الطول والزمن؛ لذلك فإن القوة التي هي عبارة عن جداء الكتلة في التسارع المكتسب تكون واحدة قياسها مرتبطة بكل من الكتلة والطول والزمن وهذا ما ندعوه بالنيوتن.

اعتمدت في نهاية القرن الثامن عشر طريقة في قياس المقادير الفيزيائية سميت " النظام المتري " ربطت بالمتر العديد من الوحدات الأخرى. وفيما بعد أنشئت بضعة نظم للوحدات أكثر كمالاً، دعيت كما يلي:

- النظام CGS وتعني (سنتيمتر، غرام، ثانية) والمسمى نظام الفيزيائيين.
- النظام MKS وتعني (متر، كيلوغرام، ثانية) والمسمى نظام الميكانيكيين.
- النظام MTS وتعني (متر، طن، ثانية) والمسمى النظام القانوني الفرنسي والذي استمر في الفترة الواقعة بين 1919 – 1961.

لاحظ الفيزيائيون أن معظم المفاهيم الفيزيائية ترتبط بشكل أساسي بأربعة مقادير هي الطول، والزمن، والكتلة، وشدة التيار الكهربائي. يُصاغ هذا الارتباط بعلاقة رياضية تدخل

في تكوينها المقادير الفيزيائية الأربعة أو جزء منها. ويُعبّر عن كل وحدة مشتقة بعلاقة تربطها بالوحدات الأساسية والمتممة، وفي سنة 1961 اعتمدت فرنسا النظام الدولي SI المسمى MKSA والذي يعني (متر، كيلوغرام، ثانية، أمبير) ومازال هذا النظام مستخدماً حتى اليوم . (الجدول1)

الجدول (1): الوحدات الأساسية.

المقدار	وحدة القياس	الرمز
الطول	متر	m
الكتلة	كيلوغرام	kg
الزمن	الثانية	S
شدة التيار الكهربائي	أمبير	A
درجة الحرارة الترموديناميكية	كلفن	K
شدة الضوء	شمعة	cd

ملاحظة: إذا كان Y مقداراً فيزيائياً قياسه N_1 ، وواحدة قياسه u_1 . ونريد بأن يكون قياسه N_2 وواحدة قياسه u_2، يمكننا كتابة العلاقة التالية:

$$Y = N_1 u_1 = N_2 u_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_1 u_1}{N_2 u_2} = 1$$

إذا فرضنا أن النسبة بين وحدتي القياس u_1 و u_2 تساوي إلى $n = u_1 / u_2$ ، يكون لدينا:

$$N_2 = n N_1$$

مثال: إذا كان المقدار الفيزيائي المدروس عبارة عن طاقة، وكان قياسه مساوياً:

N_1 إرغه (erg) في الجملة السغثية CGS

و N_2 جول (J) في الجملة المكثية MKSA

يكون لدينا: $\frac{1J}{1erg} = 10^7$

يبيّن الجدول(2) العلاقة بين قيم المقادير الفيزيائية في الجملة المكثية والجملة السغثية، أي قيم التناسب بالنسبة لوحدتي الجمل هذه.

الجدول (2): قيم التناسب بين الجملة المكثية والجملة السغثية.

اسم المقدار الفيزيائي		MKSA	CGS	MKSA /CGS
الطول	Length	m	cm	10^2
الكتلة	Mass	kg	gr	10^3
الزمن	Time	s	s	1
السرعة	Velocity	m/s	cm/s	10^2
التسارع	Acceleration	m/s^2	cm/s^2	10^2
القوة	Force	N	dyne	10^5
العمل	Work	J	erg	10^7
الاستطاعة	Power	W	erg/s	10^7
الضغط	Pressure	Pa	bar	10

وسوف نتطرق فيما يلي إلى تعريف الوحدات الأساسية المستخدمة في الجملة الدولية هي الطول والكتلة والزمن.

- **وحدة الطول:**

اعتمد المتر ورمزه m كوحدة أساسية لقياس الطول، وعرف تاريخياً بأنه جزء من المليون من المسافة الفاصلة بين القطب الشمالي وخط الاستواء، مروراً بمدينة باريس. وقد تم تحديد هذه المسافة بين نقطتين على طرفي قضيب معدني مصنوع من خليط البلاتين والإيريديوم في الدرجة 0C?. غير أن هذا العيار وجد أنه يتغير مع تغير درجة الحرارة؛ لذلك تم اللجوء إلى طريقة أخرى مستقلة عن الظواهر الطبيعية.

في عام 1960 في المؤتمر العام للمواصفات والمقاييس تقرر اعتماد وصفة جديدة للمتر ليكون مساوياً 1,650,763,73 ضعفاً من طول موجة الإشعاع الكهرطيسي الذي يصدره عنصر الكريبتون Kr^{86} في الفراغ.

غير أن حاجة مؤسسات البحث والمصانع للدقة والتقانة العالية تطلبت تعريفاً أدق للمتر، ففي عام 1983 وخلال المؤتمر السادس عشر للمواصفات والمقاييس تقرر اعتماد تعريف جديد للمتر يعتمد على سرعة الضوء في الفراغ، والتي تعد أكبر الكميات الفيزيائية ثباتاً لتعريف المتر، إذ تقرر أن يكون المتر الواحد مساوياً إلى المسافة التي يقطعها الضوء في الفراغ 1/299,792,458 من الثانية؛ أي إن سرعة الضوء في الخلاء 299,792,458 متراً في الثانية. وللمتر أجزاء ومضاعفات مبيّنة في الجدول (3).

جدول (3) الوحدة الأساسية (المتر):

F	Fermi	فيرمي	10^{-15} m
A°	Angstrom	انغستروم	10^{-10} m
nm	nanometer	نانومتر	10^{-9} m
μm	micrometer	ميكرومتر	10^{-6} m
mm	millimeter	ميلي متر	10^{-3}m
cm	centimeter	سنتيمتر	10^{-2}m
km	kilometer	كيلومتر	10^{3} m

- وحدة الكتلة :

لقد كان تحديد وحدة عيارية للكتلة من أصعب الموضوعات التي واجهها الاختصاصيون. ففي البدء تقرر اعتماد الكيلو غرام ورمزه kg مساوياً لكتلة قطعة من خليط البلاتين والاريديوم ارتفاعها يساوي إلى قطرها ويساوي إلى 39mm، وكتلتها تكافئ كتلة 1000 cm^3 من الماء المقطر واحتفظ بهذه القطعة في باريس، إلا أن هذا لم يكن دقيقاً تماماً، فاستخدمت كتلة ذرة الكربون ^{12}C، وقورنت بقية العناصر بها للحصول على كتلتها بالنسبة لها حيث افترض أن الكيلوغرام يعادل كتلة $5,0188\times 10^{25}$ ذرة من ^{12}C وللكيلو غرام أجزاء مبينة في الجدول (4).

الجدول (4) الوحدة الأساسية (الكيلوغرام).

μg	microgram	ميكروغرام	10^{-9} kg
mg	milligram	ميلي غرام	10^{-6} kg
g	gram	غرام	10^{-3} kg
T	ton	طن	10^{3} kg

- **وحدة الزمن:**

تعتمد وحدة الزمن على معرفة ظاهرة تتكرر دائماً بالشكل نفسه وخلال الزمن نفسه، كدوران الأرض حول نفسها أو حول الشمس، وغير ذلك. وقد كان شائعاً استخدام متوسط طول اليوم الشمسي (الزمن الفاصل بين ظهورين متتاليين للشمس في ذروة السماء) ليكون مساوياً إلى 86400 ثانية. لكن تغير طول اليوم خلال السنة جعل تحديد الثانية أمراً معقداً؛ لذلك اعتمد على تردد اهتزازات ذرات بلورة الكوارتز كوحدة عيارية للزمن ولفترة قريبة، إلا أن دقة هذه الطريقة ترتبط بطاقة ذرات الكوارتز التي لا تبقى ثابتة. ونتيجة لوجود مؤثرات خارجية، فقط تم استخدام اهتزازات ذرات عنصر السيزيوم ^{133}Cs بدلاً منها وحددت الثانية والتي رمزها S لتكون مساوية إلى 9,192,631,1770 ضعفاً من الزمن اللازم لذرات هذا العنصر للقيام باهتزازة واحدة. وهذه الثانية لها أجزاء، ومضاعفات مختلفة مبيّنة في الجدول (5) .

الجدول (5) الوحدة الأساسية (الثانية).

ps	picosecond	بيكو ثانية	10^{-12} s
ns	nanosecond	نانو ثانية	10^{-9} s
μs	micro second	ماكروثانية	10^{-6} s
ms	milli second	ميلي ثانية	10^{-3} s
min	minute	دقيقة	60 s
h	hour	ساعة	3600 s

2.6 أبعاد الكميات الفيزيائية - معادلة الأبعاد:

إن مهمة الباحثين في العلوم - وعلى وجه الخصوص في الفيزياء - هي الربط بين الكميات الفيزيائية بوساطة معادلات وقوانين مختلفة، واستنتاج ما يمكن استنتاجه منها. وكما بينا في الفقرة السابقة أن كل مقدار فيزيائي يقدر بواحدة قياس محددة؛ وبالتالي فالعلاقة الرياضية التي تصاغ بين مقادير فيزيائية مختلفة يجب أن تحقق أيضاً تجانساً وتطابقاً في طبيعة الوحدات المستخدمة في العلاقة أو القانون. وبغية تحقيق ذلك يجب تحديد طبيعة كل مقدار في العلاقة.

لقد بيّنا أن المقادير الفيزيائية الأساسية هي الطول، والكتلة، والزمن، غير أن المقادير الفيزيائية الأخرى تقاس مباشرة من هذه المقادير، وبالتالي فإن هذا يعني إيجاد علاقة رياضية بين المقدار الفيزيائي والمقادير الأساسية الداخلة في تعريفه بشكل غير مباشر. مثل هذه العلاقة يطلق عليها اسم معادلة الأبعاد. والبعد يعني ماهية المقدار (طبيعته) ويرمز له عادة بقوسين متوسطين [ ] فمثلاً سواء قدرنا البعد بين نقطتين بالمتر أو القدم أو الميل، فإننا في الأحوال جميعها نقدر مسافة أي طول، ونرمز له بالرمز [L] من كلمة Length، وهذا يعني أن المسافة هي من طبيعة الطول؛ وبالتالي نستطيع القول: إن أبعاد المسافة هي أبعاد طول. ومعادلة الأبعاد تسهل علينا من جهة ثانية تحديد واحدة قياس المقدار الفيزيائي المقاس. وبالطريقة نفسها نستطيع التعبير عن أبعاد الكتلة بالرمز [M] من كلمة Mass والزمن بالرمز [T] من كلمة Time. بصورة عامة نستطيع وصف معادلة الأبعاد لأي مقدار فيزيائي بالشكل التالي:

$$Z=A[L]^{a}[M]^{b}[T]^{c}$$

حيث A- ثابت يدخل في طبيعة القانون الفيزيائي، وهو مقدار يكون عديم الأبعاد، c,b,a - أعداد جبرية تبين مساهمة المقادير الأساسية T,M,L في المقدار الفيزيائي Z.

مثال 1: معادلة الأبعاد لحجم متوازي المستطيلات:

يعطى حجم متوازي المستطيلات بالعلاقة: $V=L_1 .L_2 .L_3$

حيث كل من L_3, L_2, L_1 هي طول وعرض وارتفاع متوازي المستطيلات. أي إنها عبارة عن أطوال، وهذا يعني أن طبيعة كل من L_3, L_2, L_1 هي أبعاد طول [L]. لذا يمكننا أن نكتب علاقة تشير صراحة إلى أن طبيعة مقدار الحجم هي مكعب بُعد الطول أي:

$$[V] = [L]^3$$

وتقرأ أن بُعد الحجم هو مكعب بُعد الطول. ومن هنا نستطيع تحديد واحدة قياس الحجم وهي m^3 أو cm^3 ...الخ، وهذه المعادلة لبُعد الحجم تبقى صحيحة من أجل حجم أي شكل يطلب حساب معادلة أبعاده.

مثال 2: معادلة الأبعاد للتسارع:

لنأخذ الآن مقداراً فيزيائياً كمثال آخر، وليكن التسارع، ولنحاول كتابة معادلة الأبعاد لهذا المقدار. يعطى التسارع بعلاقة من الشكل:

$$a = \frac{d^2 L}{dt^2}$$

حيث L– المسافة و t- الزمن؛ لذلك فإن التسارع حسب هذه العلاقة هو طول (مسافة) مقسوماً على مربع زمن، فمعادلة أبعاده هي من الشكل:

$$[a] = [L]\ [T]^{-2}$$

كذلك فإن معادلة أبعاد السرعة هي من الشكل:

$$[v] = [L]\ [T]^{-1}$$

هاتان المعادلتان تبيّنان أن وحدة قياس كل من التسارع m/s^2 والسرعة m/s.

مثال 3: معادلة الأبعاد للقوة:

يمكن استنتاج معادلة أبعاد القوة انطلاقاً من قانون نيوتن الثاني الذي يربط بين كل من القوة، والكتلة، والتسارع بعلاقة من الشكل:

$$F = m\,a$$

وبالتالي فإن معادلة أبعادها هي من الشكل:

$$[F] = [M][a] = [M][L][T]^{-2}$$

وبالتالي فإن وحدة قياس القوة استناداً إلى معادلة الأبعاد هي عبارة عن وحدة كتلة في وحدة الطول مقسومة على مربع وحدة الزمن أي $kg.\frac{m}{s^2}$ والذي يطلق عليها في الجملة الدولية اسم النيوتن. والجدول (6) يبيّن بعض وحدات القياس مع الأبعاد الموافقة لكل وحدة.

الجدول (6) معادلة الأبعاد و وحدات قياس بعض الوحدات المشتقة.

الواحدة	التعريف	معادلة الأبعاد	وحدة القياس
السطح	الطول × الطول	L^2	m^2
الحجم	السطح × الطول	L^3	m^3
السرعة	الطول على الزمن	L/T	m/s
التسارع	السرعة على الزمن	L/T^2	m/s^2
القوة	الكتلة × التسارع	$M.L/T^2$	$kg.m/s^2$
العمل	القوة × الانتقال	$M.L^2/T^2$	$kg.m^2/s^2$
الاستطاعة	العمل على الزمن	$M.L^2/T^3$	$kg.m^2/s^3$
الضغط	القوة على السطح	$M/L.T^2$	kg / ms^2

توضّح لنا الأمثلة السابقة أن معادلة الأبعاد تعطينا وحدة قياس المقدار الفيزيائي؛ إضافة إلى التأكد من صحة القوانين الفيزيائية المستنتجة. يلخص الملحق (1) دساتير ومعادلات الأبعاد لبعض المقادير الفيزيائية الشهيرة.

ولأسباب عملية أدخلت مضاعفات وأجزاء للوحدات الأساسية والمشتقة كقوى العشرة، ويرمز لها بأداة التصدير وفق ترتيب الجدول(7).

الجدول (7) : أدوات التصدير لقوى العشرة:

Power	Prefix	Abbreviation	Power	Prefix	Abbreviation
10^{-24}	yocto	y	10^{1}	deka	da
10^{-21}	zepto	z	10^{2}	hecto	h
10^{-18}	atto	a	10^{3}	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^{6}	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^{9}	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	milli	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

أمثلة:

1 femtometer = 1 fm = 10^{-15} m
1 picosecond = 1 ps = 10^{-12} s
1 nanocoulomb = 1 nC = 10^{-9} C
1 microkelvin = 1 μK = 10^{-6} K

1 millivolt = 1 mV = 10^{-3} V
1 kilopascal = 1 kPa = 10^{3} Pa
1 megawatt = 1 MW = 10^{6} W
1 gigahertz = 1 GHz = 10^{9} Hz

2.7 الدقة والإحكام:

تقتضي كلمة الدقة عادة الإحكام. أما في مجال القياس، فالدقة تقتضي عدم الإحكام، نريد بهذا القول أنه عندما نصف خاصة فيزيائية ما بواسطة بعض القيم العددية وبعض الوحدات، فإن القيمة العددية تتعلق بعدد من العوامل المختلفة، مثل: النوع الخاص لجهاز القياس المستخدم لإجراء القياس، نوع وعدد القياسات التي تجرى والطريقة التي استخدمها المجرب لاستخراج هذه القيمة العددية من الجهاز. وما لم تكن القيمة العددية مصحوبة بعدد آخر يعطي دقة القياس، فالعدد المدون هكذا بمقدار ما هو جيد فهو عديم الفائدة. قد يكون عدداً بمنتهى الإحكام (أي مضبوط) ولكنه غير دقيق؛ لأن الشخص الذي سجل هذا العدد نسي أن يعطي على الأقل دلالة على طريقته في القياس.

نقدم بعض الأمثلة لتوضيح هذه الأفكار، إذا نظرنا إلى سلة تحتوي على سبع تفاحات فالتأكيد (بأني اعد سبع تفاحات في السلة) هو تقدير فوري لقيمة عددية وهو دقيق ومحكم؛ لأن عدد الوحدات التي نود تعدادها صغير، وتام. إذا كان هناك الآن شخصان، الأول يضع ببطء تفاحاً في السلة والثاني يسحبها ببطء من السلة، فبإمكاننا عندئذ إجراء تقدير دقيق ومحكم لعدد التفاحات الموجودة في السلة في أية لحظة.

لنعقّد القضية الآن لنعتبر عدد سكان قرية صغيرة، فالعدد في هذه الحالة أكبر، ولكنه لا زال معقولاً وهو بالتأكيد عدد محكم وهناك مراقب واقف في منتصف الشارع الوحيد في القرية يراقب ذهاب الناس وإيابهم، فبإمكان هذا المراقب أن يعطي - بعد الإحصاء- تقديراً محكماً لعدد الناس في القرية. ولكن مقداره العددي هذا ليس بالضرورة دقيقاً؛ لأنه من الصعب عليه اكتشاف اللحظة المحكمة لولادة ووفاة البعض من السكان. لتنتقل إلى نطاق المدينة أو المحافظة، فيصبح العمل أكثر صعوبة.

لنتساءل الآن لماذا نحن بحاجة إلى تعداد محكم لسكان المحافظة؟ فلتأمين مختلف الخدمات للسكان جميعهم ليس ضرورياً معرفة العدد المحكم لهؤلاء في كل لحظة. نحن بالأحرى بحاجة إلى تقدير محكم تتعلق دقته بالخدمة الخاصة المعتبرة. فمثلاً لتحديد عدد المدارس الجديدة التي ينبغي بناؤها في منطقة ما يلزمنا نوع من الدقة العددية فيما يتعلق بالسكان يختلف عن النوع الذي نحن بحاجة إليه لتحديد احتياجات هذه المنطقة من مراكز للإطفائية إذا بيّنا تعداد سكان المحافظة بدقة 1% فإننا نعني القول إن العدد المشار إليه يمكن أن يكون أكبر بـ 1% أو أصغر 1% من عدد السكان الحقيقي الذي لا نعرفه، دون أن يكون لذلك أهمية في كثير من الحالات. ففي القرية ذات 200 نسمة تعني الدقة أننا نعرف تعدادها بتقريب شخصين اثنين، وفي المنطقة ذات الـ 100.000 نسمة فالدقة هي في حدود 1000 شخص. إذا علمنا عدد سكان سورية بدقة 1% فهذا يعني أن رقمنا قد ينحرف بمقدار، ولكننا لا نعلمه بالضبط، وبالطبع قد تكون في بعض الحالات دقة أعلى من ضرورية، وقد تكفي في حالات أخرى دقة أقل من ذلك.

لقد كانت العناية حتى الآن بعملية التعداد بحد ذاتها والفكرة هنا هي أنه بواسطة معلومات كافية وإمكانية المعالجة السريعة لهذه المعلومات نستطيع إيجاد تعداد السكان بالضبط، ولقد ناقشنا من قبل فيما إذا كان ضرورياً معرفته بدقة أم لا. ينبغي علينا الآن أن نأخذ بعين الاعتبار وجود عمليات لا تعطينا عدداً صحيحاً للوحدات. نعلم مثلاً أنه في نقطة ما من الغرفة توجد قيمة محكمة لدرجة الحرارة إلا أن قيمتها هذه تتعلق بالتعريف المعتمد لأن درجة الحرارة هي إدراك إنساني. ومع ذلك أننا لا نقيس درجة الحرارة نفسها بطريقة التعداد؛ بل نقيس بالأحرى طول عمود من الزئبق، الذي يمثل طوله درجة الحرارة. ولأسباب مختلفة لا تكون قراءات طول العمود متماثلة في كل مرة حتى ولو بقيت درجة الحرارة ثابتة. أحد هذه الأسباب المهمة للتغيرات في القراءة يكمن في أنه توجد مسافة محدودة بين التدريجات على سلم المقياس. يوجد عادة على المتر المستقيم مسافة 1mm فعلى هذا الأساس إذا قرأنا المتر حتى أقرب تدريجة فالقراءة عند كل من النهايتين ستكون مشوبة بخطأ قد يصل إلى 1/2mm. هناك أنواع أخرى من أخطاء القراءة تهتم بها كتب مختصة بهذه القضايا.

تسمح لنا دقة أو ارتياب عدد بتعريف عدد الأرقام المعنوية المرتبطة بالمقدار، فمثلاً إذا دل القياس على $642,54389 \pm 1\%$ فهذا يعني أن الارتياب هو بحدود 6,4 فيحق لنا إذن ألا نحتفظ إلا بالأرقام التي هي فعلاً معنوية ففي هذه الحالة يسجل العدد $642 \pm 1\%$ أو 642 ± 6 عندما يرى الطالب ثابتة فيزيائية (كسرعة الضوء أو عدد أفوكادرو) مبيّنة في هذا النص فالعدد سيكون مكتوباً بأرقامه المعنوية الخمسة الأولى حتى ولو أمكن معرفته بدقة أعلى، أما الدقة فلن تذكر، فإذا رغب الطالب في استعمال هذه الأرقام في حساب الارتياب أمكنه اعتبار آخر رقم معنوي مسجل بدقة ±1. عندما نجري سلسلة من العمليات الحسابية باستخدام أعداد معينة فأبسط طريقة لذلك هي إجراء العمليات مرة واحدة من دون الاهتمام بقضية الأرقام المعنوية حتى نهاية الجداء أو نهاية بعض العمليات الأخرى. ثم تعاد النتيجة النهائية عندئذ إلى عدد له عدد الأرقام المعنوية نفسه (أي الدقة نفسها) كالعدد الأقل دقة من بين الأعداد التي انطلقنا منها.

مسائل

2.1 أوجد معادلة الأبعاد لمساحة المربع، ومعادلة الأبعاد لمساحة الدائرة.

2.2 أوجد معادلة أبعاد الضغط.

2.3 أوجد معادلة أبعاد المقادير الآتية:

السعة الكهربائية – فرق الكمون – الشحنة الكهربائية. (استفد من الجداول المرفقة بالملحق 1).

2.4 إذا علمت أن العمل W يعطى بالعلاقة W=F.s حيث F ترمز للقوة، S ترمز للمسافة فاستنتج وحدات العمل وفق النظام الدولي للوحدات.

2.5 إذا علمت أن طاقة الحركة K تعطي بالعلاقة $K=\frac{1}{2}mv^2$ حيث m ترمز لكتلة الجسم ، v ترمز لسرعته فاستنتج وحدة الطاقة الحركية وفق النظام الدولي للوحدات ماذا تلاحظ من نتيجة المسألتين (4)، (5) ؟

2.6 استخدم تحليل الأبعاد لاختبار صحة كل من العلاقات الآتية :

(a $x=v_0 t^2$ حيث x المسافة التي يقطعها جسم يتحرك بسرعة ابتدائية v_0 في زمن t

(b $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ حيث T ترمز للزمن الدوري لنواس بسيط ، l طوله، g تسارع الجاذبية.

(c $\sigma=\frac{F}{2\pi r}$ حيث σ التوتر السطحي، r نصف قطر الأنبوب الزجاجي.

الفصل الثالث

الأشـــعة

3.1 مقدمة.

3.2 مفهوم الاتجاه.

3.3 المقادير السلّمية والمقادير الشعاعية.

3.4 جمع الأشعة.

3.5 مركبات شعاع.

3.6 جمع عدد من الأشعة.

3.7 الجداء السلّمي.

3.8 الجداء الشعاعي.

3.9 التمثيل الشعاعي للسطح.

3.10 تطبيق على مسائل في علم الحركات.

الفصل الثالث

الأشعة

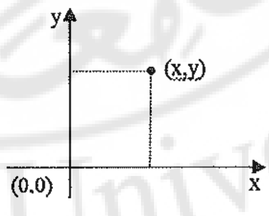
Vectors

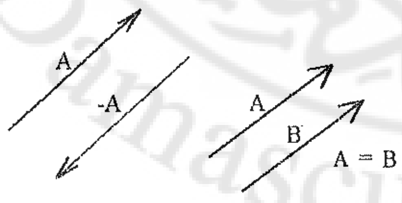
3.1 مقدمة:

سوف نستعرض في هذا الفصل المبادئ الأساسية للحساب الشعاعي الذي سنعتمد عليه كثيراً للتعبير عن الخواص الرياضية والفيزيائية للكثير من المقادير الفيزيائية التي تصادفنا في فصول هذا الكتاب. إن الجبر الشعاعي مهم لأنه يسمح للطالب العلمي أن يكتب صيغاً معقدة جداً برموز مريحة مقتضبة ومختزلة.

3.2 مفهوم الاتجاه:

إذا أعطينا خطاً مستقيماً، فإننا نستطيع السير عليه في اتجاهين متعاكسين. نفرق بينهما بإعطاء كل منهما إشارة زائد أو ناقص. وحالما تحدد الاتجاه الموجب نقول إن المستقيم موجّه ونسميه محوراً. إن محاور الإحداثيات Y وX وهي مستقيمات موجّهة تكون الاتجاهات الموجبة عليهما كالمبنية على الشكل (1-3) ونشير عادةً إلى الاتجاه الموجب بسهم، يعرّف المستقيم الموجه أو المحور اتجاهاً، وتعرف المستقيمات المتوازية الموجهة بالجهة نفسها، (الشكل 2-3) أما إذا كانت لهما اتجاهات متعاكسة، فهي تعرّف اتجاهين متعاكسين (الشكل 2-3).





الشكل (1-3) محاور إحداثيات موجهة. الشكل (2-3)اتجاهان متوازيان واتجاهان متعاكسان.

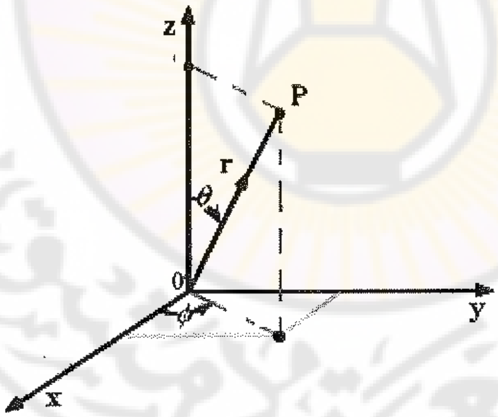
تتعين الاتجاهات في المستوي بزاوية، وهي الزاوية بين اتجاه مقارنة أو محور، والاتجاه الذي نريد الإشارة إليه، مقاسة في الجهة المعاكسة لدوران عقارب الساعة (الشكل 3-3) وتتعين الاتجاهات المتعاكسة بالزاويتين θ و $\theta+\pi$ (أو $\theta + 180^{\circ}$).

الشكل (3-3) في المستوي تتعين الاتجاهات المتعاكسة بالزاويتين θ و $\theta + \pi$

أما في الفراغ ثلاثي الأبعاد فتلزم زاويتان لتحديد اتجاه ما، الشكل (3-4) يتعين الاتجاه OP مثلاً بـ:

(i) الزاوية θ (وهي أقل من 180°) التي يصنعها r (OP) مع المحور oz.

(ii) الزاوية ϕ بين المستوي POZ والمستوي XOZ مقاسة في الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة.



الشكل(3-4)تعيين اتجاه في الفراغ.

3.3 المقادير السلمية والمقادير الشعاعية:

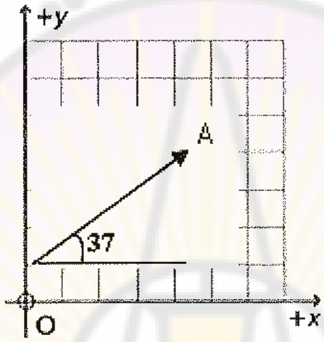
تتعين كثير من الكميات الفيزيائية كلياً بقيمة عددية يعبر عنها بوحدة مناسبة. تدعى هذه الكميات مقادير سلّمية. فمثلاً لتعيين حجم جسم ما يلزم فقط تبيان عدد

الأمتار المكعبة أو الأقدام المكعبة التي يشغلها. ولمعرفة درجة حرارة يكفي قراءة ميزان حرارة موضوع بشكل مناسب. إن الزمن والكتلة والشحنة والطاقة هي أيضاً مقادير سلّمية.

هناك كميات فيزيائية أخرى تتطلب لتعيينها الكامل بالإضافة إلى قيمتها، اتجاهاً نسمي مثل هذه الكميات مقادير شعاعية، والحالة الأكثر وضوحاً هي الانتقال، يعرّف انتقال جسم بالبعد الفعلي الذي انزاحه وبالاتجاه الذي انتقل وفقه. فعلى سبيل المثال:

انتقل جسيم من 0 إلى A في الشكل(5-3) يتعيّن هذا الانتقال بالبعد a=5 وبالزاوية $\theta = 37^0$.

ومن المقادير الشعاعية أيضاً نذكر السرعة، التسارع، القوة...



الشكل (5-3) الانتقال هو مقدار شعاعي.

تمثل الأشعة بيانياً بقطعة من مستقيم لها اتجاه المقدار الشعاعي نفسه (يدل عليه بسهم) وطول متناسب مع هذا المقدار.

شعاع الوحدة: هو شعاع طوله يساوي الواحد. يمكن التعبير عن شعاع $\vec{V}$ مواز لشعاع الوحدة $\vec{u}$ بالصورة:

$$\vec{V} = V\,\vec{u} \qquad (3.1)$$

الشعاع المعاكس لشعاع: هو شعاع آخر له المقدار نفسه ولكن اتجاهه معاكس.

إذا كان شعاعان $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ متوازيين، فيمكن كتابتهما $\vec{V} = V\,\vec{u}$

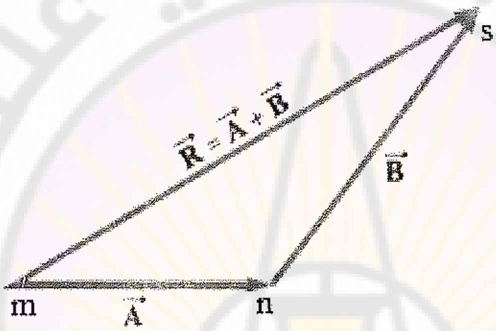
و $\vec{V}' = V'\vec{u}$ حيث إن شعاع الوحدة $\vec{u}$ هو نفسه، وكذلك إذا كان $\lambda = \vec{V} / \vec{V}'$ فيمكننا أن نكتب:

$$\vec{V} = \lambda \vec{V}'$$

وبالعكس عندما تطبق معادلة كهذه على شعاعين $\vec{V}', \vec{V}$ فهما متوازيان.

3.4 جمع الأشعة:

لفهم قاعدة جمع الأشعة، نعتبر في البدء حالة الانتقالات إذا انتقل جسيم أولاً من m إلى n ، الشكل (6-3) وهذا ما نمثله بالشعاع $\vec{A}$ ثم انتقل من n إلى s وليكن $\vec{B}$ فالنتيجة تكون مكافئة للانتقال الوحيد من m إلى s، وليكن $\vec{R}$ الذي نكتبه رمزياً $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$.



الشكل(6-3) الجمع الشعاعي لانتقالين

نستطيع تعميم الطريقة على أي نوع من الأشعة نقول إذن: إن $\vec{V}$ هو مجموع $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ إذا تم الحصول عليه كما هو مبيّن على الشكل(7-3) بإمكاننا أن نرى أيضاً على الشكل أن الجمع الشعاعي هو تبديلي، الشكل(7-3). إذ إن النتيجة تبقى نفسها إذا انعكس الترتيب في جمع الشعاعين وهذه هي النتيجة مباشرة من هندسة طريقة الجمع وللعلاقة الهندسية للشكل (8-3) الصيغة الجبرية:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \qquad (3.2)$$

لحساب قيمة $\vec{V}$ نرى على الشكل(8-3) أن:

$$(AC)^2=(AD)^2+(DC)^2$$

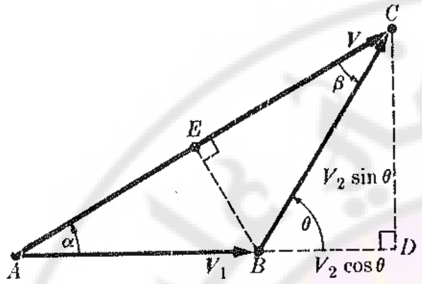
ولكن: $AD = AB + BD = V_1 + V_2 \cos\theta$ و $DC = V_2 \sin\theta$ إذن :

$$V^2 = (V_1 + V_2 \cos\theta)^2 + (V_2 \sin\theta)^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta$$

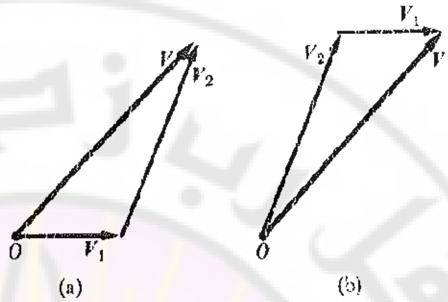
$$\Rightarrow \quad V=\sqrt{V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\cos\theta} \qquad (3.3)$$

لتعيين اتجاه $\vec{V}$ ينبغي علينا فقط إيجاد الزاوية α نرى بحسب الشكل أن في المثلث ACD:

$CD = AC\sin\alpha$ وفي المثلث BDC : $CD = BC\sin\theta$



الشكل (3-8)



الشكل (3-7)

إذن $V\sin\alpha = V_2\sin\theta$ $\qquad \dfrac{V}{\sin\theta}=\dfrac{V_2}{\sin\alpha}$

وبالمثل $BE = V_1\sin\alpha = V_2\sin\beta$ أو $\dfrac{V_2}{\sin\alpha}=\dfrac{V_1}{\sin\beta}$

بتركيب هاتين النتيجتين نحصل على العلاقة المتناظرة

$$\frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_1}{\sin\beta}=\frac{V_2}{\sin\alpha} \qquad (3.4)$$

وبهذا نكون قد أوجدنا صيغتين مثلثتين أساسيتين قانون التجب وقانون الجيب.

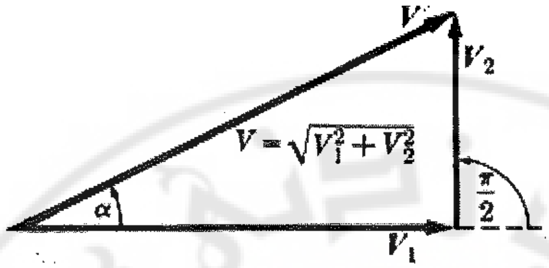
في الحالة الخاصة حين يكون $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ متعامدين $\theta=\pi/2$ تكون لدينا العلاقة التالية (الشكل 3-9):

$$V=\sqrt{V_1^2+V_2^2} \quad ، \quad tg\,\alpha=\frac{V_2}{V_1} \qquad (3.5)$$

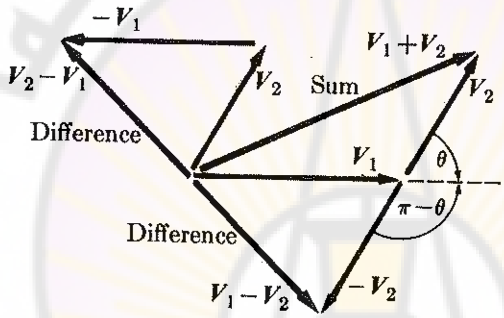
نحصل على فضل أو فرق شعاعين بأن نضيف إلى الشعاع الأول الشعاع المعاكس للثاني (الشكل 3-10) أي أن:

$$\vec{D}=\vec{V_1}-\vec{V_2}=\vec{V_1}+(-\vec{V_2})$$

لنلاحظ أن: $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = -\vec{D}$ وهذا يعني أنه إذا طرح شعاعان بالترتيب المعاكس فينتج عن ذلك الشعاع المعاكس. الفضل الشعاعي لا تبديلي ومقدار الفضل هو:



الشكل (3-9)



الشكل (3-10)

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\pi - \theta)}$$

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta} \qquad (3.6)$$

مسألة محلولة 1:

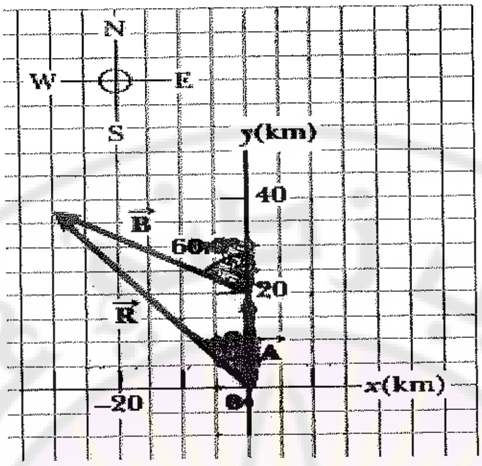
تسير سيارة من نقطة 0 باتجاه الشمال مسافة 20 km ثم تستمر بسيرها مسافة 35 km بعد أن تنحرف بزاوية ?60 باتجاه الشمال الغربي، كما هو موضّح في الشكل (3-11)، والمطلوب إيجاد قيمة شعاع المحصّلة، واتجاهها.

الحل:

نطبق العلاقة التالية لإيجاد المحصّلة:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\ \cos 60^{\circ}}$$

$$R = \sqrt{400 + 1225 + 2(20)(35)\cos 60^{\circ}} = 48.2\ km$$



الشكل (3-[illegible])

أما زاوية المحصّلة، فهي:

$$\frac{48.2}{\sin 120} = \frac{35}{\sin \beta} \qquad \Rightarrow \sin \beta = 0.629 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 39^{\circ}$$

إذن قيمة المحصّلة 48.2 km وبزاوية $\beta \approx 39^{\circ}$ شمال غربي.

مسألة محلولة 2:

لنفرض أنه لدينا شعاعان، يبلغ طول الشعاع **(A)** 6 cm، ويصنع زاوية 36° مع الاتجاه الموجب للمحور X ويبلغ طول الشعاع **(B)** 7 cm في الاتجاه السالب للمحور X. والمطلوب إيجاد:

(a) مجموع الشعاعين.

(b) فضل الشعاعين.

الحل:

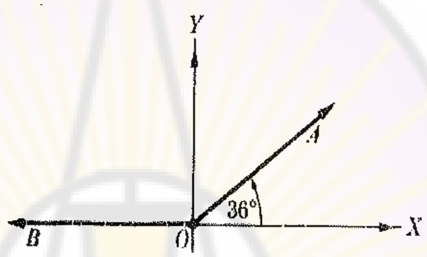
قبل البدء بتطبيق العلاقات السابقة لنرسم الأشعة في جملة محاور إحداثية (الشكل 3-12) نرى بحسب الأشكال (3-6)، (3-7)، (3-8) أنه ينبغي من أجل جمع شعاعين، وضع مبدأ أحدهما على نهاية الآخر يمكن إجراء ذلك بنقل كل من الشعاعين أو الاثنين معاً

شريطة ألا يتغير اتجاه الشعاع (الشكل 13-3) ونحصل في كل الحالات على الشعاع $\vec{C}=\overrightarrow{OE}$.

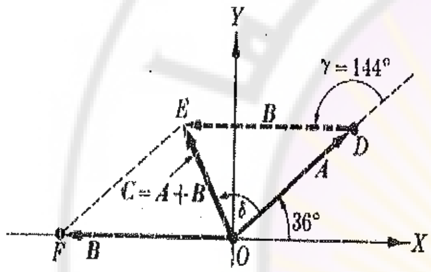
a) - نـرى بحسـب الشـكل (13-3) أنـه يمكـن كتابـة $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ أو $\vec{C}=\vec{B}+\vec{A}$ وباستخدام المثلث ODE نجد $\vec{C}$ مساوياً $\vec{B}$ + $\vec{A}$ لإيجاد قيمة $\vec{C}$ بتطبيق المعادلة (3.3) نـرى أولاً أنـه يمكـن مسـاواة $\vec{A}$ مـع $\vec{V}_1$ و $\vec{B}$ مـع $\vec{V}_2$ و $\vec{C}$ مـع والزاوية $144^{\circ}=180^{\circ}-36^{\circ}=\gamma$ مع الزاوية θ فينتج:

$$C=\sqrt{36+49+2(6)(7)\cos 144^{\circ}}=4.13\ \text{cm}$$

لإيجاد الزاوية بين $\vec{A}$ و $\vec{C}$ نطبق المعادلة التالية:



الشكل (3-12)

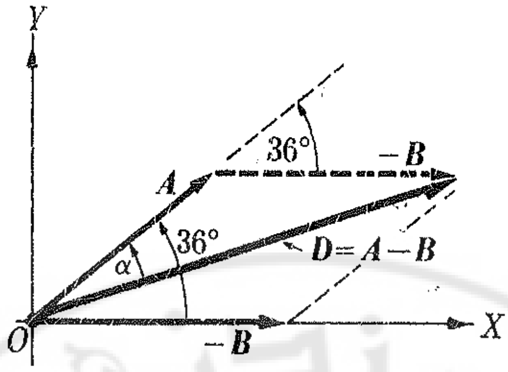


الشكل (3-13)

بحيث: $\sin\delta=\dfrac{B\sin 144^{\circ}}{C}=0.996$ و $\delta\cong 85^{\circ}$

إذن فطول $\vec{C}$ هو 4.13 وحدة، واتجاهه يصنع زاوية $+121^{\circ}=85^{\circ}+36^{\circ}$ مع المحور X الموجب.

b)- لإيجاد فرق الشعاعين علينا معرفة -كما في الحساب العادي- أية كمية ينبغي طرحها من الأخرى بمعنى أخر إذا عرّف الشعاع $\vec{D}$ على أنه مساوٍ لـ $\vec{A}-\vec{B}$ شكل (3-14) يكون $\vec{B}-\vec{A}$ يساوي $-\vec{D}$.



الشكل (3-14)

وعلى هذا وباستخدام علاقات المساواة للجزء (a) أعلاه ووفق المعادلة (3.6) نجد: من أجل قيمة $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$:

$$D=\sqrt{36+49-2(6)(7)\cos 144^{\circ}}=12.31\ \text{cm}$$

ولإيجاد اتجاه $\vec{D}$ نستخدم المعادلة (3.4):

$$\frac{D}{\sin 36^{\circ}}=\frac{|-B|}{\sin\alpha}$$

أو أن $|-B|=B$

$$\sin\alpha=\frac{B\sin 36^{\circ}}{D}=0.334 \quad\Rightarrow \alpha=19.5^{\circ}$$

وبالتالي فإن طول $\vec{D}$ هو 12.31 cm، ويصنع زاوية $36^{\circ}-19.5^{\circ}=16.5^{\circ}$ مع الاتجاه الموجب للمحور X.

يترك للطالب كتمرين إيجاد أن للشعاع $-\vec{D}=\vec{B}-\vec{A}$ طولاً يساوي 12.31 cm، ويصنع زاوية $+196.5^{\circ}$ مع الاتجاه الموجب للمحور X.

3.5 مركبات شعاع:

يمكن اعتبار أي شعاع كمجموع شعاعين (أو أكثر) وعدد الإمكانيات لا متناه، وكل مجموعة من الأشعة يعطي مجموعها الشعاع $\vec{V}$ تشكل مركبات $\vec{V}$.

إن المركبات المستخدمة في أغلب الأحيان هي المركبات المتعامدة، نعبر عن الشعاع كمجموع شعاعين متعامدين (الشكل 15-3). حينئذ وكما يدلنا الشكل $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$ حيث:

$$V_x = V\cos\alpha \quad \text{و} \quad V_y = V\sin\alpha \tag{3.7}$$

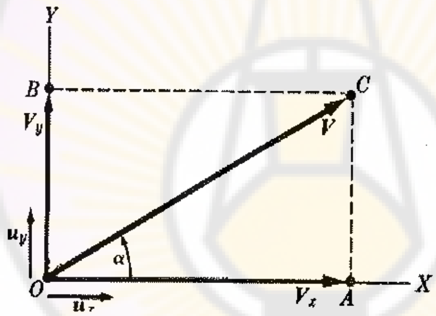
إذا عرفنا شعاعي الوحدة $\vec{u}_x$ و $\vec{u}_y$ في اتجاهين المحورين OX وOY نلاحظ أن:

$$\vec{V}_x = \overrightarrow{OA} = V_x\ \vec{u}_x \quad , \quad \vec{V}_y = \overrightarrow{OB} = V_y\ \vec{u}_y$$

لدينا إذن:

$$\vec{V} = V_x\vec{u}_x + V_y\,\vec{u}_y \tag{3.8}$$

تعطي هذه المعادلة صيغة شعاع بدلالة مركباته المتعامدة وفق بعدين بإمكاننا أيضاً باستخدام المعادلة (3.7)، أن نكتب بدلاً من المعادلة (3.8).



الشكل (15-3)

$$\vec{V} = V.\cos\alpha\ .\vec{u}_x + V.\sin\alpha\ .\vec{u}_y$$

$$\vec{V} = V(\ \cos\alpha\ \ .\vec{u}_x + \sin\alpha\ .\vec{u}_y)$$

عندما نقارن هذه النتيجة بالمعادلة (3.1)، ونفرض ببساطة أن v=1 نستخلص أن شعاع الوحدة يمكن أن يكتب:

$$\vec{u} = \cos\alpha\ \ \vec{u}_x + \sin\alpha\ .\vec{u}_y \tag{3.9}$$

وتوجد في الفضاء ثلاثة مركبات متعامدة V_x, V_y, V_z (الشكل 16-3) يمكن لطالب أن يتحقق على الشكل (16-3) أننا نحسبها وفق العلاقات:

$$V_x = V\sin\theta\cos\phi$$

$$V_y = V\sin\theta\sin\phi$$

$$V_z = V\cos\theta \tag{3.10}$$

وينتج عن ذلك، بحساب مباشر، أن:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \tag{3.11}$$

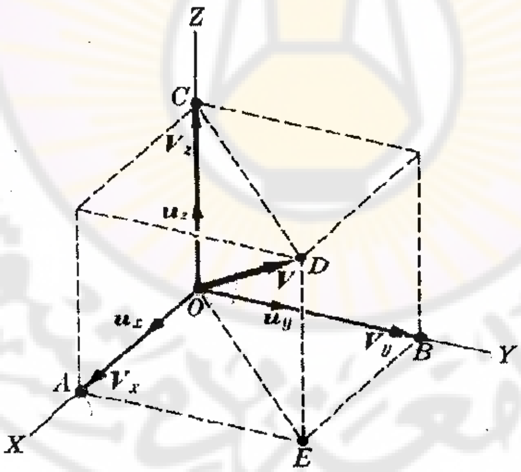
بتعريف ثلاثة أشعة وحدة $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ موازية على الترتيب للمحاور الثلاثة oz,oy,ox لدينا:

$$\vec{V} = V_x\,.\vec{u}_x + V_y\,.\vec{u}_y + V_z\,.\vec{u}_z \tag{3.12}$$

لنلاحظ أنه إذا رمزنا بـ α و β الزاويتين اللتين يصنعهما الشعاع $\vec{V}$ مع المحورين ox و oy وعلى الترتيب يكون لدينا بشكل مماثل للمعادلة التالية من المعادلات (3.10).

$$V_x = V\cos\alpha$$

$$V_y = V\cos\beta$$



الشكل (3-16) المركبات المتعامدة لشعاع وفق ثلاثة أبعاد.

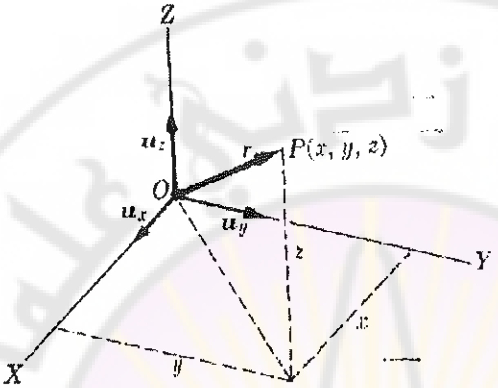
وبوضعنا هاتين العلاقتين، وكذلك $V_z = V\cos\theta$ في المعادلة (3.11) نحصل على العلاقة:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$$

تدعى الكميات $\cos\theta$ $\cos\beta$ $\cos\alpha$ جيوب تمام التوجيه للشعاع.

هناك حالة مهمة لشعاع في الفراغ ثلاثي الأبعاد، وهي حالة شعاع الموضع $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ لنقطة P ذات الإحداثيات (x,y,z) نرى على الشكل (3-17) أن:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y + z.\vec{u}_z \qquad (3.13)$$



الشكل (3-17)

إن شعاع الموضع النسبي لنقطتين p_1 و p_2 هو $\vec{r}_{21} = \overrightarrow{P_1P_2}$ ،الشكل (3-18) ، نلاحظ بحسب الشكل أن $\overrightarrow{op_2} = \overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{p_1p_2}$ بحيث إن:

$$\vec{r}_{21} = \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{op_2} - \overrightarrow{op} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_{21} = (x_2 - x_1)\vec{u}_x + (y_2 - y_1)\vec{u}_y + (z_2 - z_1)\vec{u}_z \qquad (3.14)$$

لنلاحظ أن $\overrightarrow{p_2p_1} = -\overrightarrow{p_1p_2}$ وعلينا أن نلاحظ أيضاً أنه بتركيب المعادلتين (3.11) و (3.14) نحصل على دستور الهندسة التحليلية من أجل البعد بين نقطتين:

$$r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

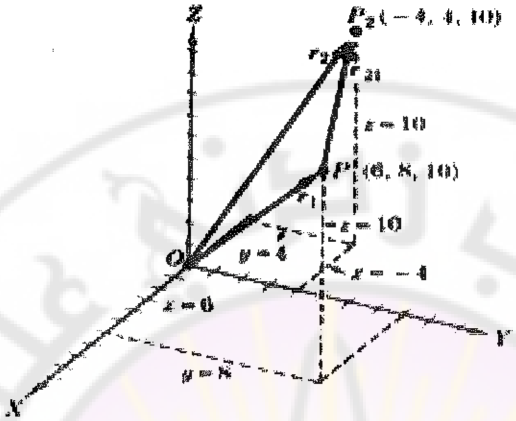
مسألة محلولة 3: أوجد البُعد بين النقطتين (10 ، 8 ، 6) و (1 ، 4 ، 4-):

الحل:

نرسم المحاور الإحداثية المتعامدة الثلاثة، ولنعلم عليها النقطتين (الشكل 17-3). نرى أن النقطتين واقعتان في مستو موازٍ للمستوي XOY لأن كلا الاثنتين على بُعد (ارتفاع) 10 وحدات في الاتجاه OZ. ولدينا وفق المعادلة (3.14) من أجل r_{21}

$$\vec{r}_{21} = (-4-6_1)\vec{u}_x + (4-8)\vec{u}_y + (10-10)\vec{u}_z$$

$$\vec{r}_{21} = (-10)\vec{u}_x + (-4)\vec{u}_y + (0)\vec{u}_z = -(10)\vec{u}_x - (4)\vec{u}_y$$



الشكل (3-18)

ونجد باستخدام المعادلة (3.11) أن القيمة هي:

$r_{21}^2 = 100+16 = 116$ وبالتالي : $r_{21} = 10.77$ وحدة

مسألة محلولة 4:

أوجد مركبات شعاع طوله يساوي 13 cm ويصنع زاوية $\theta = 22.6^o$ مع المحور Z وأن مسقطه على المستوي XOY يصنع زاوية $\Phi = 37^0$ مع الاتجاه الموجب للمحور X (راجع الشكل 16-3) أوجد أيضاً الزاويتين اللتين يصنعهما الشعاع مع المحورين OX وOY.

الحل:

باستخدام الشكل(16-3) من أجل هذه المسألة نقول إن:

$$V = 13, \quad \theta = 22.6^\circ, \quad \cos\theta = 0.923$$

$$\sin\theta = 0.384 \qquad \phi = 37^\circ, \qquad \cos\phi = 0.800 \qquad \sin\phi = 0.600$$

بعد ذلك بتطبيق بسيط للمعادلة (3.10) نحصل على:

$$V_x = 13(0.384)(0.800) = 4 \text{ cm}$$

$$V_y = 13(0.384)(0.600) = 4 \text{ cm}$$

$$V_z = 13(0.923) = 12 \text{ cm}$$

في المعادلة (3.12) بإمكاننا أن نكتب:

$$\vec{V} = (4)\vec{u}_x + (3)\vec{u}_y + (12)\vec{u}_z$$

ومن أجل الزاويتين α و β واللتين يصنعهما $\vec{V}$ مع المحورين OX و OY لدينا:

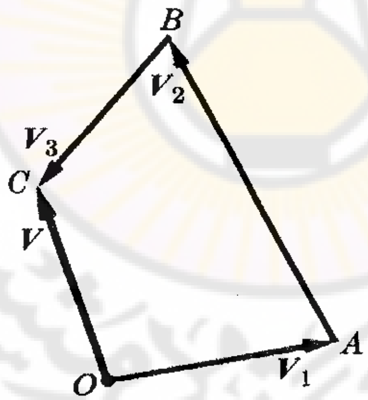
$$\cos\alpha = \frac{V_z}{V} = 0.308 \Rightarrow \alpha = 72.1^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{V} = 0.231 \Rightarrow \beta = 77^\circ$$

3.6 جمع عدد من الأشعة:

لجمع عدة أشعة $\vec{V}_3, \vec{V}_2, \vec{V}_1$ نوسع الطريقة المبنية على الشكل (3-7) في حالة شعاعين نبيّن على الشكل (3-19) الطريقة في حالة ثلاثة أشعة، ولهذا نرسم الأشعة الواحد بعد الآخر، وشعاع المجموع هو الشعاع الواصل بين مبدأ الشعاع الأول، ونهاية الشعاع الأخير، إذن:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots\ldots \qquad (3.15)$$



الشكل (3-19)

لا يوجد دستور بسيط للتعبير عن $\vec{V}_3, \vec{V}_2, \vec{V}_1$ ويفضّل استعمال المركبات. لنعتبر للتبسيط الحالة التي تكون فيها الأشعة واقعة في مستو واحد، وهي الحالة التي لا نحتاج فيها إلا إلى مركبتين وبالتالي:

$$\vec{V} = (V_{1x}\,\vec{u}_x + V_{1y}\,\vec{u}_y) + (V_{2x}\,\vec{u}_x + V_{2y}\,\vec{u}_y) + (V_{3x}\,\vec{u}_x + V_{3y}\,\vec{u}_y) + \dots$$
$$= (V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \dots)\,\vec{u}_x + (V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + \dots)\,\vec{u}_y$$

إذن

$$V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \dots = \sum_i V_{ix}\cos\alpha_i$$
$$V_y = V_{1u} + V_{2u} + V_{3u} + \dots = \sum_i V_{iy}\cos\alpha_i \qquad (3.16)$$

حيث α_i هي الزاوية التي يصنعها $\vec{V}_i$ مع الاتجاه الموجب للمحور X وحيث إن $V_i\cos\alpha_i$ و $V_i\sin\alpha_i$ هما مركبتا $\vec{V}$ على OY و OX وحالما نعرف V_x, V_y نحسب V_i باستعمال المعادلة (3.5).

مسألة محلولة 5: أوجد محصّلة الأشعة الخمسة التالية:

$$\vec{V}_1 = (4)\vec{u}_x + (-3)\vec{u}_y$$
$$\vec{V}_2 = (-3)\vec{u}_x + (2)\vec{u}_y$$
$$\vec{V}_3 = (2)\vec{u}_x + (-6)\vec{u}_y$$
$$\vec{V}_4 = (7)\vec{u}_x + (-8)\vec{u}_y$$
$$\vec{V}_5 = (9)\vec{u}_x + (1)\vec{u}_y$$

الحل:

لدينا، بتطبيق المعادلة (3.16)

$$V_x = 4 - 3 + 2 + 7 + 9 = 19$$
$$V_y = 3 + 2 - 6 - 8 + 1 = -14$$
$$\vec{V} = (19)\vec{u}_x - (14)\vec{u}_y$$

إن مقدار $\vec{V}$ هو: $V = \sqrt{(19)^2 + (-14)^2} = 23.55$

وأما اتجاهه فنجده انطلاقاً من: $tg\alpha = V_y / V_x = 0.738$ أو $\alpha = -36.4^\circ$ التي هي الزاوية التي يصنعها $\vec{V}$ مع المحورx.

3.7 الجداء السلّمي:

يعرف الجداء السلّمي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ويمثل بالرمز $\vec{A}\,.\vec{B}$ (يقرأ A سلّمياً B) كمقدار سلّمي يحصل عليه بإجراء جداء مقادير B.A وتجب الزاوية بين الشعاعين.

$$\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\ .\ \mathbf{B}\ .\cos\theta \qquad (3.17)$$

لدينا بالطبع $\vec{A}.\vec{A}=A^2$ لأن الزاوية في هذه الحالة معدومة إذا كان الشعاعان متعامدين $(\theta=\pi/2)$ فالجداء السلّمي معدوم وشرط التعامد يعبر عنه إذن ل $\vec{A}.\vec{B}=0$.إن الجداء السلّمي هو بحسب تعريفه تبديلي $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ لأن $\cos\theta$ هو نفسه في الحالتين والجداء السلّمي هو توزيعي بالنسبة للجمع.

$$\vec{C}.(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}.\vec{A}+\vec{C}.\vec{B} \qquad (3.18)$$

إن للجداءات السلّمية بين أشعة الوحدة $\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$ القيم:

$$\vec{u}_x.\vec{u}_y = \vec{u}_y.\vec{u}_z = \vec{u}_z.\vec{u}_x = 0 \qquad (3.19)$$

$$\vec{u}_x.\vec{u}_x = \vec{u}_y.\vec{u}_y = \vec{u}_z.\vec{u}_z = 1$$

بكتابة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بدلالة مركباتهما المتعامدة بحسب المعادلة (3.12) وبتطبيق قانون الخاصة التوزيعية (3.18) لدينا:

$$\begin{aligned}\vec{A}.\vec{B} &= (A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z).(B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z)\\ &= (\vec{u}_x.\vec{u}_x)A_xB_x + (\vec{u}_x.\vec{u}_y)A_xB_y + (\vec{u}_x.\vec{u}_z)A_xB_z\\ &+ (\vec{u}_y.\vec{u}_x)A_yB_x + (\vec{u}_y.\vec{u}_y)A_yB_y + (\vec{u}_y.\vec{u}_z)A_yB_z\\ &+ (\vec{u}_z.\vec{u}_x)A_zB_x + (\vec{u}_z.\vec{u}_y)A_zB_y + (\vec{u}_z.\vec{u}_z)A_zB_z\end{aligned}$$

ونحصل أخيراً بتطبيق العلاقات (3.19) على :

$$\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \mathbf{A}_y\mathbf{B}_y + \mathbf{A}_z\mathbf{B}_z \qquad (3.20)$$

وهي نتيجة لها تطبيقات عديدة.

نلاحظ أن: $A^2=\vec{A}.\vec{A}=A_x^2+A_y^2+A_z^2$ مما يتفق مع المعادلة (3.11)

نستطيع تطبيق خواص الجداء السليم لاستخراج العبارة (3.3) المتعلقة بجمع شعاعين بسهولة ابتداءً من $\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$ لدينا:

$$V^2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2).(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = V_1^2 + V_2^2 + 2\vec{V}_1.\vec{V}_2$$
$$V^2 \quad = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos\theta$$

هذه النتيجة يمكن أن تعمم من دون صعوبة على أي كان من الأشعة.

لنفرض أن:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + ... = \sum_i \vec{V}_i$$
$$\vec{V}^2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + ...)^2$$
$$\vec{V}^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + ... + 2\vec{V}_1\vec{V}_2 + 2\vec{V}_1\vec{V}_3 + ... + 2\vec{V}_2\vec{V}_3 + ...$$

بكتابة مختصرة نجد: $V^2 = \sum V_i^2 + 2\sum \vec{V}_i\vec{V}_j$

مسألة محلولة 6: أوجد الزاوية التي يصنعها الشعاعان:

$$\vec{A} = 2\vec{u}_x + 3\vec{u}_x - \vec{u}_z \qquad B = -\vec{u}_x + \vec{u}_y + 2\vec{u}_z$$

الحل:

نحسب في البدء جداءهما السلّمي باستعمال المعادلة (3.20):

$$\vec{A}.\vec{B} = 2(-1) + 3(1) + (-1)2 = -1$$

وكذلك:

$$A = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} = 3.74$$
$$B = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} = 2.45$$

لدينا إذن وفق المعادلة (3.17)

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = -\frac{1}{9.17} = -0.109 \quad \Rightarrow \theta = 96.3^\circ$$

3.8 الجداء الشعاعي:

يعرّف الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ الذي نمثله بالرمز $\vec{A}\times\vec{B}$ (يقرأ $\vec{A}$ شعاعياً $\vec{B}$) بالشعاع العمودي على المستوي المعين بـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وفي اتجاه انتقال اللولب اليميني الذي ندوره من $\vec{A}$ نحو $\vec{B}$، يقال عن لولب إنه يميني إذا وضعت اليد اليمنى كما هو مبيّن

على الشكل (20-21-3) بحيث تتجه الأصابع وفق اتجاه الدوران، كان تقدم اللولب في اتجاه الإبهام، إن أغلب اللوالب العادية هي لوالب يمينية.

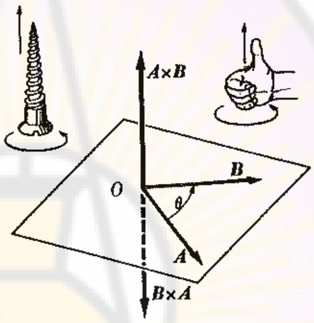
تعطى قيمة الجداء الشعاعي $\vec{A}\times\vec{B}$ بالعلاقة:

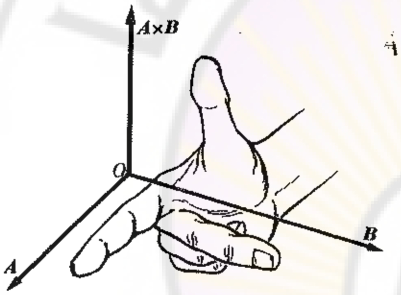
$$\left|\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right| = \mathbf{A.B.\ \sin\theta} \qquad (3.21)$$

نستخلص وفق تعريف الجداء الشعاعي أن:

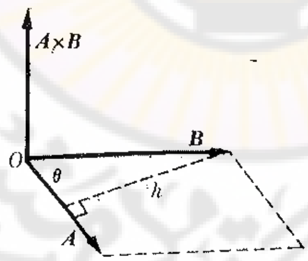
$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \qquad (3.22)$$

لأن اتجاه دوران اللولب يتغير مع ترتيب الأشعة، وبالتالي فالجداء الشعاعي لا تبديلي إذا كان الشعاعان متوازيين كان $\theta=0^\circ$ و $\sin\theta=0$ والجداء الشعاعي معدوم. نعبّر إذن عن شرط التوازي بـ $\vec{A}\times\vec{B}=0$ وبالطبع $\vec{A}\times\vec{A}=0$





الشكل (20-3) ترتيب الأشعة في الجداء الشعاعي. الشكل (21-3) قاعدة اليد اليمنى.



الشكل (22-3) الجداء الشعاعي مكافئ لمساحة متوازي الأضلاع.

لنلاحظ أن قيمة الجداء الشعاعي مساوية لمساحة متوازي الأضلاع المشكّل من الشعاعين أو أيضاً لضعف مساحة المثلث المشكّل مع محصّلتها، وهذا يمكن رؤيته كما يلي (الشكل 22-

3) إن قيمة $\vec{A}\times\vec{B}$ هي $A\,B\sin\theta$، ولكن $B\sin\theta=h$ حيث هو h ارتفاع متوازي الأضلاع الذي له $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كضلعين وبالتالي:

مساحة متوازي الأضلاع $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = A.\,h$

إن الجداء الشعاعي توزيعي بالنسبة للجمع أي:

$$\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B})=\vec{C}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{B} \qquad (3.23)$$

إن الجداءات الشعاعية بين أشعة الوحدة $\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$ وهي:

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_x\times\vec{u}_y=-\vec{u}_y\times\vec{u}_x=\vec{u}_z\\
&\vec{u}_y\times\vec{u}_z=-\vec{u}_z\times\vec{u}_y=\vec{u}_x\\
&\vec{u}_z\times\vec{u}_x=-\vec{u}_x\times\vec{u}_z=\vec{u}_y \qquad (3.24)\\
&\vec{u}_x\times\vec{u}_x=\vec{u}_y\times\vec{u}_y=\vec{u}_z\times\vec{u}_z=0
\end{aligned}$$

وبكتابة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بدلالة مركباتهما المتعامدة وفق المعادلة (3.12) وبتطبيق قانون الخاصة التوزيعية (3.23) يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\vec{u}_x+A_y\vec{u}_y+A_z\vec{u}_z)\times(B_x\vec{u}_x+B_y\vec{u}_y+B_z\vec{u}_z)\\
&=(\vec{u}_x\times\vec{u}_x)A_xB_x+(\vec{u}_x\times\vec{u}_y)A_xB_y+(\vec{u}_x\times\vec{u}_z)A_xB_z\\
&+(\vec{u}_y\times\vec{u}_x)A_yB_x+(\vec{u}_y\times\vec{u}_y)A_yB_y+(\vec{u}_y\times\vec{u}_z)A_yB_z\\
&+(\vec{u}_z\times\vec{u}_x)A_zB_x+(\vec{u}_z\times\vec{u}_y)A_zB_y+(\vec{u}_z\times\vec{u}_z)A_zB_z
\end{aligned}$$

وبتطبيق العلاقات (3.24) نحصل أخيراً على:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{u}_x+(A_zB_z)\vec{u}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{u}_z \qquad (3.25)$$

يمكن للمعادلة (3.25) أن تكتب باستخدام المحدد:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (3.26)$$

ملاحظة حول المحددات (المعينات): المحدد هو كتابة مريحة وملائمة لترتيب قيم ينبغي تركيبها بمراعاة تناظر معين المحدد من الرتبة الثانية هي جدول لأعداد 2x2 نحسبه وفق القاعدة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

لنلاحظ أن ما نفعله هو ضرب حدود كل من القطرين ومن ثم طرحهما والمحدد من الرتبة الثالثة هي جدول لأعداد 3×3 نحسبه وفق القاعدة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

لاحظ الترتيب الذي تظهر فيه الأعمدة في كل حد يمكن للطالب أن يتحقق من أنه بتطبيق هذه القاعدة على المعادلة (3.26) يحصل على المعادلة (3.25).

مسألة محلولة 7: أوجد مساحة متوازي الأضلاع المعيّن بالأشعة:

$$\vec{B} = -\vec{u}_x + \vec{u}_y + 2\vec{u}_z \qquad \vec{A} = 2\vec{u}_x + 3\vec{u}_y + \vec{u}_z$$

الحل:

نحسب أولاً الجداء الشعاعي لـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باستخدام المعادلة (3.26)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{u}_x - 3\vec{u}_y + 5\vec{u}_z$$

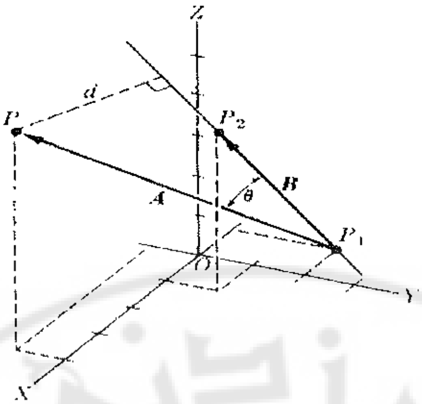
ومساحة متوازي الأضلاع هي حينئذ قيمة $\vec{A} \times \vec{B}$ تماماً

$$\text{المساحة} = |A \times B| = \sqrt{49+9+25} = 9.110$$

مسألة محلولة 8: أوجد بعد النقطة (1,2,0-) (1.5 -4) P عن المستقيم المار بالنقطتين (-1,2,0) P_1 و (1,1,4) P_2.

الحل:

إن الصورة الهندسية للمسألة مبيّنة على الشكل (3-23) نرى أن $d = P_1P.\sin\theta$ لنعتبر الشعاعين: $\vec{A} = \overrightarrow{P_1P}$ و $\vec{B} = \overrightarrow{P_1P_2}$



الشكل (3-23)

بحيث نحصل باستخدام المعادلة (3.14) على:

$$\vec{A} = \overrightarrow{P_1P} = 5\vec{u}_x - 3\vec{u}_y + 5\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{P_1P_2} = 2\vec{u}_x - \vec{u}_y + 4\vec{u}_z$$

نرى حينئذ أن:

$$d = A\sin\theta = \frac{AB\sin\theta}{B} = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{B}$$

وعلى هذا باستخدام المعادلة (3.26) لحساب الجداء الشعاعي لـ $\vec{A}\times\vec{B}$ نحصل على:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -7\vec{u}_x - 10\vec{u}_y + 1\vec{u}_z$$

وبالتالي $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{49+100+1} = \sqrt{150} = 12.25$

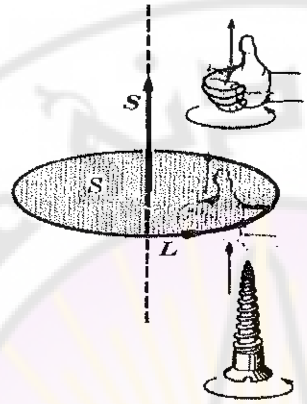
$$B = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21} = 4.58$$

$$d = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{B} = 2.67$$

3.9 التمثيل الشعاعي للسطح:

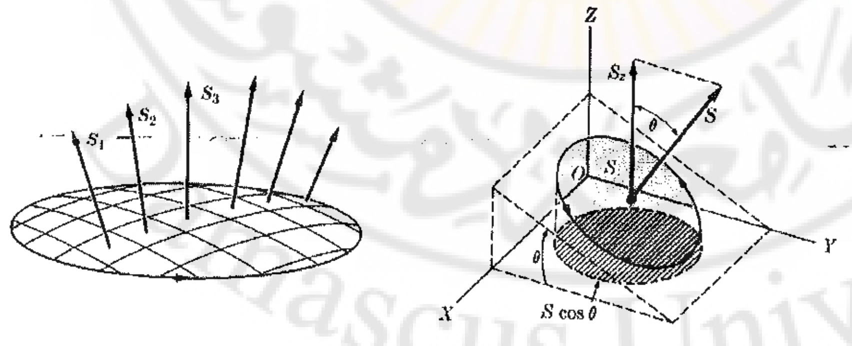
لقد بيّنا في المناقشة المتعلقة بالشكل (3-22) أن الجداء الشعاعي $\vec{A}\times\vec{B}$ يساوي بالمقدار مساحة توازي الأضلاع المعينة أضلاعه بالشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وهذا ما يوحي لنا إمكان ربط شعاع بسطح ما.

لنعتبر سطحاً مستوياً S (شكل 24- 3) حيث يوجه محيطه L كما يدل عليه السهم. سنتبنى إصطلاح تمثيله بشعاع مقداره يساوي مساحة السطح ومنحناه هو عمودي على السطح. إن جهة الشعاع هو الاتجاه الذي يتقدم حسبه لولب يميني عندما يدور رأسه في نفس الجهة المعينة على المحيط.



شكل (3-24)

إن المركبات S مدلول هندسي بسيط. لنفرض أن مستوي السطح S يصنع زاوية θ مع المستوي xoy فمسقط S على المستوي xy هو $S\cos\theta$ وهي علاقة معروفة جيداً في الهندسة الفراغية ولكن الناظم على مستوى السطح يصنع أيضاً زاوية θ مع المحور Z إذن فمركبة الشعاع S على المحور z هي $S_z = S\cos\theta$ نستخلص من ذلك أن مركبات S وفق محاور الإحداثيات تساوي مساقط السطح على المستويات الإحداثية الثلاثة.



الشكل (25- 3) التمثيل الشعاعي لسطح.

إذا كان السطح غير مستو، يمكننا دوماً تجزئته إلى عدد كبير من المساحات الصغيرة شكل (3-25) عملياً كل منها مستوية وتمثل بشعاع s والشعاع الممثل للسطح المنحني هو حينئذ.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... = \sum_i S_i$$

لا يكون مقدار S في هذه الحالة مساوية لمساحة السطح المنحني التي تساوي $\sum_i S_i$ إلا إن مقادير مركباته الثلاثة تساوي مساحة مساقط السطح على المستويات الإحداثية الثلاثة.

لنعتبر على سبيل المثال قطعة أرض. جزء منها أفقي والآخر على منحدر رابية، إذا رمزنا بـ S_1, S_2 لمساحة كان جزء فالمساحة الكلية القابلة للاستثمار هي "$S_1 + S_2$" أما إذا أردنا استخدام قطعة الأرض للبناء، فالأرض المستخدمة فعلاً هي مسقط قطعة أرض على مستو أفقي وليكن $S_1 + S_2\cos\theta$ إن الشعاع $S = S_1 + S_2$ الممثل لكامل قطعة الأرض مقداره $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\theta}$ أصغر من $S_1 + S_2$ لكن مركبته على المحور Z هي $S_z = S_1 + S_2$ تساوي مسقط قطعة الأرض على المستوي الأفقي xoy.

3.10 تطبيق على مسائل في علم الحركات:

لتوضيح طريقة استخدام الأشعة في الحوادث الفيزيائية البسيطة نأخذ بعض الأمثلة من علم الحركة. والفرضية الفيزيائية الوحيدة التي نحتاجها هي القبول بأن السرعة هي مقدار شعاعي.

لنفرض على سبيل المثال؛ إن مركباً ينتقل بسرعة $\vec{V}_B$ بالنسبة إلى ماء هادئ كانت $\vec{V}_B$ هي أيضاً سرعة المركب مقاسة من قبل مراقب على الشاطئ. أما إذا كان الماء يجري بسرعة ما فسيدخل عامل الانجراف الذي يغير من سرعة المركب. وهكذا فإن السرعة المحصّلة للمركب مقاسة من قبل مراقب على الشاطئ، هي المجموع الشعاعي لسرعة المركب $\vec{V}_B$ بالنسبة إلى الماء وسرعة الجر $\vec{V}_C$ الناجمة عن التيار $\vec{V} = \vec{V}_B + \vec{V}_C$ وتطبق محاكمة مشابهة على الأشياء المتحركة في الهواء مثل الطائرات.

مسألة محلولة 9:

يتجه زورق نحو الشمال بسرعة 15 Km/hr، منطقة يوجد فيها تيار سرعته 5km/hr في الاتجاه $70°s$، أوجد السرعة المحصّلة للزورق.

الحل:

أن هذه المسألة محلولة تخطيطياً على الشكل (3-26) حيث $\vec{V}_B$ هي سرعة الزورق $\vec{V}_C$ هي سرعة التيار أو الانجراف و $\vec{V}$ السرعة المحصّلة التي يحصل عليها انطلاقاً من: $\vec{V}=\vec{V}_B+\vec{V}_C$ وهذا يستند إلى الحقيقة الفيزيائية، إن السرعة المحصلة هي المجموع الشعاعي لسرعة الزورق بالنسبة إلى الماء وسرعة الانجراف $\vec{V}_C$ الناجمة عن التيار. ولما كانت $\theta=110^{\circ}$ فلدينا كصيغة تحليلية $\vec{V}$:

$$V=\sqrt{15^2+5^2+2(15)(5)\cos 110^{\circ}}=14.1 \quad km.hr^{-1}$$

التي تعطي قيمة السرعة المحصّلة. وللحصول على الاتجاه نطبق المعادلة (3.4) فنجد:

$$\frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_C}{\sin\beta}$$

وبالتالي:

$$\sin\beta=\frac{V_C \cdot \sin\theta}{V}=0.332$$

وهذا يعطي $\beta=19.4^{\circ}$ والحركة المحصّلة تتم إذن في الاتجاه $N19.4^{\circ}E$

مسألة محلولة 10:

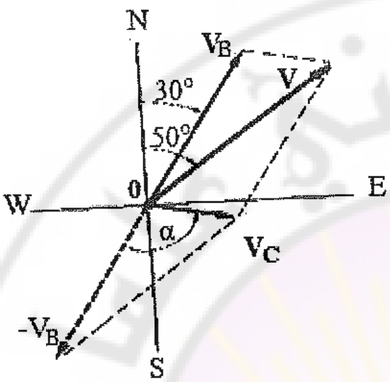
يتحرك زورق حربي سريع في الاتجاه $N30^{\circ}E$ بسرعة 25km/hr في نقطة التيار فيها هو بحيث إن الحركة الحاصلة تكون بسرعة 30km/hr في الاتجاه $N50^{\circ}E$ أوجد سرعة التيار.

الحل :

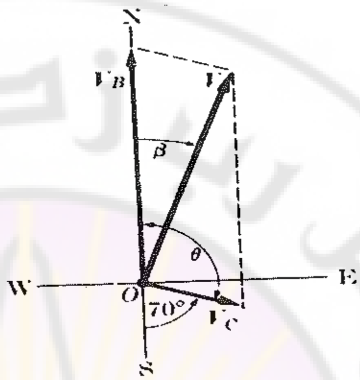
لنرمز من جديد لسرعة الزورق بـ $\vec{V}_B$ ولسرعة التيار بـ $\vec{V}_C$ وللسرعة المحصّلة بـ $\vec{V}$ فيكون لدينا $\vec{V}=\vec{V}_B+\vec{V}_C$ حيث إن $\vec{V}_c=\vec{V}-\vec{V}_B$ لقد رسم على الشكل (3-27) الشعاعان

$\vec{V}$ و $\vec{V}_B$ وكذلك فرقهما الذي يعطي $\vec{V}_C$ لحساب $\vec{V}_C$ نلاحظ أن الزاوية بين $\vec{V}$ و $\vec{V}_B$ وهي 160 أذن:

$$V_c = \sqrt{30^2 + 25^2 + 2(30)(25)\cos 160^\circ} = 10.8 \quad km/hr$$



الشكل (27-3)



الشكل (26-3)

للحصول على اتجاه $\vec{V}_C$ نحصل أولاً على الزاوية α بين $\vec{V}$ و $\vec{V}_B$ وباستخدام المعادلة (3.4)

$$\frac{V}{\sin\alpha} = \frac{Vc}{\sin\beta}$$

وبالتالي:
$$\sin\beta = \frac{V\sin 160^\circ}{V_C} = 0.951$$

وهذا يعطينا $\alpha = 72^\circ$ ، إذن فالزاوية مع المحور NS هي: $72^\circ - 30^\circ = 42^\circ$ واتجاه $\vec{V}_C$ هو $S42^\circ E$.

مسائل

3.1 أوجد الزاوية المشكلة بين شعاعين طولهما 10 cm و 15 cm عندما يكون طول محصّلتهما (a) 20 cm و (b) 12 cm ارسم الشكل المقابل لذلك.

3.2 شعاعان يصنعان زاوية ?110. أحد الشعاعين طوله 20 cm ويصنع زاوية ?40 مع شعاع المحصّلة أوجد مقدار كل من الشعاع الثاني والمحصلة.

3.3 طول محصّلة شعاعين 10 وحدات وتصنع زاوية 35° مع أحد الشعاعين الذي طوله يساوي 12 وحدة، أوجد مقدار الشعاع الآخر والزاوية بين الشعاعين.

3.4 إن لمحصّلة شعاعين طول يساوي 30 وحدة وتصنع معهما زاويتين ?25 و ?50 ، أوجد مقدار كل من هذين الشعاعين.

3.5 أوجد المركبات المتعامدة لشعاع طوله 15 cm عندما يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور ox زاوية: (a) 50° ،(b) 130° ، (c) 230° ، (d) 310°.

3.6 لدينا أربعة أشعة واقعة في مستو واحد أطوالهما على الترتيب 8 و 12 و 10 و 6 وحدات تصنع الأشعة الثلاثة الأخيرة مع الشعاع الأول الزوايا ?70 و ?150 و ?200 على التدريب أوجد مقدار شعاع المحصّلة واتجاهه.

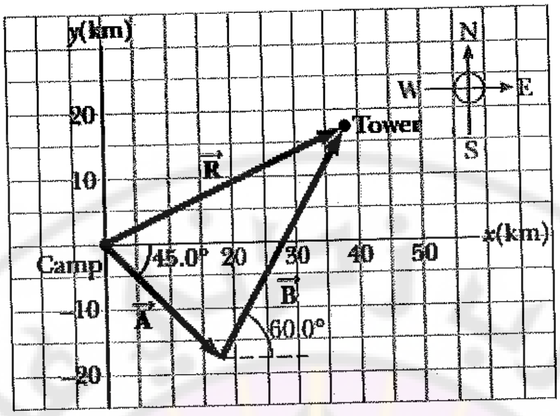
3.7 برهن أنه إذا تساوى مقدار جمع وفرق شعاعين كان الشعاعان متعامدين.

3.8 برهن أنه إذا تعامد جمع وفرق شعاعين فالشعاعان لهما قيمتان متساويتان.

3.9 يبدأ رحّال رحلة على الأقدام، فيقطع في البداية مسافة 25 km باتجاه الجنوب الشرقي من مكان المخيّم. في اليوم التالي، يقطع مسافة 40 km بزاوية ?60 متجهاً نحو الشمال الشرقي، حيث اكتشف برج حراسة لغابة هناك،كما هو موضّح في الشكل (28-3). المطلوب:

1. حدد مركّبات تحرّكات الرحّال في اليوم الأوّل و الثاني.

2.حدد مركّبات مجمل تحرّكات الرّحلة. 3- أوجد قيمة المحصّلة واتجاهها ابتداء من قاعدة التخييم.



الشكل (3-28)

3.10 لدينا الشعاعان:

$$\vec{A} = (3)\vec{u}_x + (4)\vec{u}_y + (-5)\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = (-1)\vec{u}_x + (1)\vec{u}_y + (2)\vec{u}_z$$

أوجد: (a) قيمة واتجاه محصلتهما.

(b) فرقهما $\vec{A} - \vec{B}$

(c) الزاوية $\vec{A}$ مع $\vec{B}$

3.11 أوجد محصّلة جمع الأشعة التالية:

$$\vec{V}_1 = 5\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + \vec{u}_z$$

$$\vec{V}_2 = -3\vec{u}_x + 1\vec{u}_y - 7\vec{u}_z$$

$$\vec{V}_3 = 4\vec{u}_x + 7\vec{u}_y + 6\vec{u}_z$$

واحصل على مقدار المحصلة والزوايا التي تصنعها مع المحاور OX ، OY ، OZ .

3.12 أوجد محصّلة الأشعة الخمسة:

$$\vec{V}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} \quad ,\vec{V}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} \quad , \quad \vec{V}_3 = 2\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$\vec{V}_4 = 7\vec{i} - 8\vec{j} \quad , \quad \vec{V}_5 = 9\vec{i} + \vec{j}$$

3.13 أوجد الزاوية التي يصنعها الشعاعان:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\,, \qquad \vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

3.14 لتكن الأشعة التالية:

$$\vec{V}_1 = -\vec{u}_x + 3\vec{u}_y + 4\vec{u}_z$$
$$\vec{V}_2 = 3\vec{u}_x - 2\vec{u}_y - 8\vec{u}_z$$
$$\vec{V}_3 = 4\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 4\vec{u}_z$$

(a) بيّن بمعالجة مباشرة فيما إذا كان يوجد فرق بين الجدائين الشعاعين

$$(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \times \vec{V}_3 \quad \text{و} \quad \vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3)$$

(b) أوجد $(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3)\,.\,\vec{V}_1$ و $(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2).\vec{V}_3$ وبيّن فيما إذا كان يوجد اختلاف بينهما.

(c) احسب $(\vec{V}_3 \times \vec{V}_1).\vec{V}_2$ وقارن هذه النتيجة مع النتيجتين الأوليتين.

3.15 أوجد البعد بني النقطتين $P_1(4,5,-7)$ و $P_2(-3,6,12)$ واكتب أيضاً معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين.

3.16 أوجد بعد النقطة $P(4,5,-7)$ عن المستقيم الذي يمر بالنقطة $Q(-3,6,12)$ والموازي للشعاع $\vec{V} = 4\vec{u}_x - \vec{u}_y + 3\vec{u}_x$، أوجد أيضاً بعد P عن المستوي المار بـ Q والعمودي على $\vec{V}$.

3.17 تعطى ثلاثة أشعة كما يلي:

$$\vec{A} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}\,, \quad \vec{B} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\,, \quad \vec{C} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

أوجد مركبات الشعاع $\vec{R}$ المعطى بالعلاقة $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$.

3.18 لنعتبر ثلاث قوى تؤثر في نقطة على النحو التالي:

$$\vec{F}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \;\text{،}\; \vec{F}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \;\text{،}\; \vec{F}_1 = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

والمطلوب أوجد مقادير واتجاهات الأشعة التالية:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{F_3} \quad \text{،} \quad \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$$

القوى

4.1 مقدمة.

4.2 تركيب القوى المتلاقية.

4.3 العزم.

4.4 عزم عدة قوى متلاقية.

4.5 تركيب القوى المطبقة على جسم صلب.

4.6 تركيب القوى الواقعة في مستو واحد.

4.7 تركيب القوى المتوازية.

4.8 مركز الثقل.

4.9 توازن جسيم.

4.10 توازن جسم صلب.

الفصل الرابع

القــوى

Forces

4.1 مقدمة:

تتوقف حالة التوازن والحالة الحركية للجسم المادي على التأثيرات الميكانيكية المتبادلة بينه وبين الأجسام الأخرى من ضغط وشد وتنافر، التي يمكن أن تحدث بين الأجسام نتيجة لهذا التأثير. يسمى المقدار الذي يعد مقياساً كمياً للتأثير الميكانيكي على الأجسام المادية بالقوة.

إن مفهوم القوة لا يكفي وصفه بقيمته الجبرية فقط وإنما يلزم لوصفه بشكل كامل تحديد جهة التأثير والمنحى الذي يتم وفقه التأثير بين الأجسام، أي إن هذا المفهوم يصنّف بين المقادير الفيزيائية الشعاعية، لذلك ولتحديده بشكل تام يجب أن نحدد العناصر الأساسية الأربعة للمقدار الشعاعي وهي: الشدة، الجهة، الحامل ونقطة التأثير. لذلك فعند ورود رمز القوة يجب أن يتبع بإشارة الشعاع أعلى الرمز مثل $\vec{F}$.

تقاس القوة في جملة الوحدات الدولية بالنيوتن الذي يرمز بـ (N)، ويمكن أيضاً أن نعبّر عن القوة بوحدات أخرى مختلفة مثل الكيلوغرام ثقلي (kgf) أو الليبرة الثقلية (Lbf) الخ، حيث يمكن إجراء التحويلات بين هذه الوحدات كما يلي:

$$1kgf = 9.8\ N, \quad 1\,lbf = 0.46\ kgf = 4.45\ N$$

سنقوم في هذا الفصل بمناقشة الخواص العامة للقوى، ودراسة توازن الأجسام المادية تحت تأثير جملة من القوى لما لهذه المسألة من تطبيقات واسعة وهامة.

4.2 تركيب القوى المتلاقية:

يطلق تعريف القوى المتلاقية على جملة القوى التي يمكن أن تلتقي أو تتقاطع المستقيمات الحاملة لها (خطوط تأثيرها) في نقطة واحدة. يمكن أن تكون هذه الجملة من القوى موجودة في الفراغ ثلاثي الأبعاد أو في المستوي ثنائي البعد. كما أشير أعلاه بأن القوة هي مقدار شعاعي، لذلك، لدراسة تأثير جملة من القوى على جسم ما؛ يلزم تحديد ما يعرف محصّلة هذه الجملة أي المجموع الشعاعي لهذه الجملة و الذي نحصل عليه وفقاً للطريقة الموضّحة في الفقرة (3.6) إذن فمحصلة عدة قوى متلاقية $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ...$ هي:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = \sum \vec{F}_i \qquad (4.1)$$

إذا كانت القوى واقعة في مستو واحد مثلاً في المستوي XY فلدينا بحسب المعادلة (3.16).

$$\vec{R} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y$$

حيث:

$$R_x = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos\alpha_i \qquad R_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \sin\alpha_i \qquad (4.2)$$

إن قيمة المحصّلة أو شدتها R هي:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

واتجاهها يعطى بالزاوية α

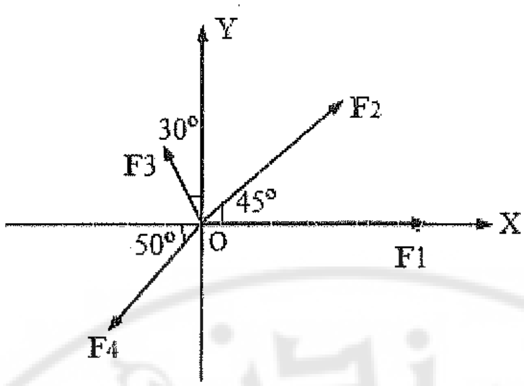
حيث:

$$tg\alpha = R_y / R_x$$

مسألة محلولة 1:

لتكن لدينا أربع قوى مؤثرة على جسم في نقطة O (الشكل 4-1) حيث تعطى قيم القوى كما يلي: القوة $\vec{F}_1$ تساوي 240 N القوة $\vec{F}_2$ تساوي 180N، القوة $\vec{F}_3$ تساوي 60 N، والقوة $\vec{F}_4$ تساوي 160N واتجاهات هذه القوى مبيّنة على الشكل، والمطلوب حساب مقدار محصّلة جملة القوى واتجاهها.

الحل: نعبّر أولاً عن كل قوة بدلالة مركباتها وفق المحورين OX و OY باستخدام الزاوية المشكّلة بين المحور X وتلك القوة وهكذا يكون لدينا:



الشكل(1-4)

$$\vec{F}_1 = (F_1 \cos 0^\circ)\vec{u}_x + (F_1 \sin 0^\circ)\vec{u}_y = (240)\vec{u}_x + (0)\vec{u}_y \quad N$$

$$\vec{F}_2 = (F_2 \cos 45^\circ)\vec{u}_x + (F_2 \sin 45^\circ)\vec{u}_y = (127.3)\vec{u}_x + (127.3)\vec{u}_y \quad N$$

$$\vec{F}_3 = (F_3 \cos 120^\circ)\vec{u}_x + (F_3 \sin 120^\circ)\vec{u}_y = (-30)\vec{u}_x + (52)\vec{u}_y \; N$$

$$\vec{F}_4 = (F_4 \cos 230^\circ)\vec{u}_x + (F_4 \sin 230^\circ)\vec{u}_y = (-102.8)\vec{u}_x + (-122.6)\vec{u}_y \; N$$

ولما كانت المحصّلة $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ يكون لدينا قيمة مركّبتي المحصّلة:

$$R_x = 240 + 127.3 - 30 - 102.8 = 234.5 \; N$$

$$R_y = 0 + 127.3 + 52 - 122.6 = 56.7 \; N$$

وبالتالي القوة المحصّلة: $\vec{R} = (234.5)\vec{u}_x + (56.7)\vec{u}_y \quad N$

ومنه نستخلص قيمة القوة المحصّلة واتجاهها:

$$R = 241.3 \; N \qquad tg\,\alpha = 0.242 \Rightarrow \qquad \alpha = 13.6^\circ$$

مسألة محلولة 2: أوجد مجموع القوى الثلاث $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{F}$ التي تعطى مركباتها في جملة الإحداثيات الديكارتية بالقيم التالية:

$$P_x = 6 \; N \;, \quad P_y = 3 \; N \;, \quad P_z = 12 \, N$$

$$Q_x = 3 \; N \;, \quad Q_y = -7 \; N \;, \quad Q_z = 1 \, N$$

$$F_x = 5 \; N \;, \quad F_y = 2 \; N \;, \quad F_z = -8 \, N$$

الحل:

من العلاقة (4.1) نجد:

$$R_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} = P_x + Q_x + F_x \quad = 6+3+5 = 14\ N$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{N} F_{iy} \quad = P_y + Q_y + F_y \quad = 3-7+2 = -2\ N$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{N} F_{iz} \quad = P_z + Q_z + F_z \quad = 12+1-8 = 5\ N$$

بتعويض القيم السابقة نجد أن قيمة المحصّلة هي:

$$R = \sqrt{(14)^2 + (-2)^2 + (5)^2} \quad = 15\ N$$

وبالتالي قيم زوايا المحصّلة مع جملة الإحداثيات هي:

$$\cos \propto = \frac{14}{15} \quad , \quad \cos \beta = \frac{2}{15} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{5}{15}$$

$$\propto = 21^\circ \quad , \ \beta = 97^\circ\ 40' \quad , \quad \gamma = 70^\circ\ 30'$$

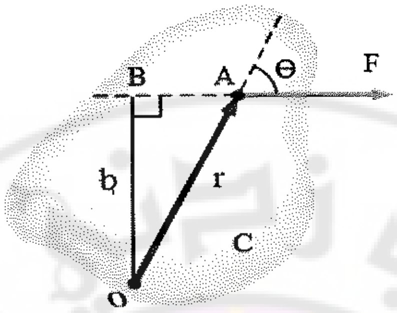
4.3 العزم:

عندما تؤثر قوة ما على جسم صلب مثبّت من نقطة ما منه بحيث يمر حامل هذه القوة من نقطة التثبيت؛ فإننا نجد أن الجسم يبقى بحالة سكون تماماً دون أي انتقال أو دوران. أما لو طُبقت القوة على أية نقطة أخرى من الجسم بحيث لا يمر حاملها من نقطة التثبيت لوجدنا الجسم يدور حول نقطة التثبيت دون أن ينتقل من مكانه. مما يعني أن هناك فعلاً واضحاً على الجسم نسميه بالفعل الدوراني للقوة. هذا الفعل الدوراني للقوى نعرفه بعزم القوة؛ حيث يمكن نسبه إما إلى نقطة الدوران أو إلى محور الدوران، وذلك حسب الحالة للجسم الخاضع للقوة.

لنعتبر قوة $\vec{F}$ مؤثرة على جسم c يمكنه الدوران حول نقطة O (الشكل 4-2) إذا كانت القوى لا تمر في 0 فلها مفعول يجعل الجسم يدور حول O تدّلنا تجربتنا اليومية أن فعالية $\vec{F}$ بإحداث الدوران تزداد مع البعد O (ذراع الرافعة أو القوة OB = b) عن مستقيم فعل القوة فمثلاً عندما نفتح باباً ندفع هذا الباب أو نسحبه دوماً من موضع يبعد أكبر بعد ممكن عن المفاصل، وكذلك نحاول جعل المنحنى الذي ندفع أو نسحب وفقه عمودياً على

الباب توحي لنا هذه التجربة انه من المناسب تعريف مقدار فيزيائي τ نسميه العزم (أو عزم القوة) بالعلاقة:

$$\vec{\tau} = \vec{F} . b \tag{4.3}$$



الشكل(2-4) عزم قوة

أو **العزم = القوة × ذراع القوة**. وعلى هذا يمكن أن يقدر العزم بجداء وحدة القوة ووحدة الطول. وهكذا يقدر العزم في الجملة الدولية بالنيوتن.متر أو N.m وهناك وحدات أخرى تستخدم أيضاً مثل ($kgf .m$) أو ($lbf.ft$)

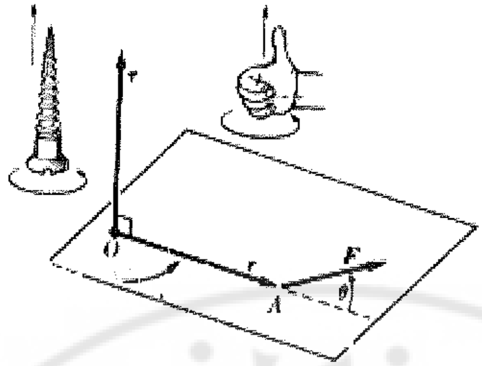
ومن الشكل نجد أن $b = r.\sin\theta$ يمكننا أيضاً كتابة:

$$\tau = F . r. \sin\theta \tag{4.4}$$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (3.21) نستخلص أنه يمكن تعريف العزم بأنه مقداراً شعاعياً يعطى بالجداء الشعاعي:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4.5}$$

حيث $\vec{r}$ هو شعاع الموضع، بالنسبة إلى O، للنقطة A حيث تطبق فيها القوة. وبحسب خواص الجداء الشعاعي يمثل العزم بشعاع عمودي بآن واحد على $\vec{r}$ و $\vec{F}$ أي عمودي على المستوي المعين بـ $\vec{r}$ و $\vec{F}$ وهو يتجه وفق اتجاه تقدم لولب يميني ندوّره في نفس اتجاه الدوران الذي تحدثه $\vec{F}$ حول O وهذا مبيّن على الشكل (3-4). ويمكن أن نصطلح على أن العزم موجبٌ إذا كانت القوة تدير الجسم حول النقطة المعتبرة بعكس عقارب الساعة، وسالباً إذا كان الدوران للجسم مع عقارب الساعة.



الشكل(3-4) العلاقة الشعاعية بين العزم والقوة وشعاع الموضع.

فإذا تذكرنا أن:

$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z \qquad \vec{F} = F_x\,\vec{u}_x + F_y\,\vec{u}_y + F_z\,\vec{u}_z$$

كان لدينا بتطبيق المعادلة (3.26):

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{u}_x + (zF_x - xF_z)\vec{u}_y + (xF_y - yF_x)\vec{u}_z \quad (4.6)$$

أو

$$\tau_x = yF_z - zF_y\,, \quad \tau_y = zF_x - xF_z \quad \tau_z = xF_y - yF_x$$

بصورة خاصة إذا كان $\vec{r}$ و $\vec{F}$ معاً في المستوي XOY كان $z = 0$ و $F_z = 0$

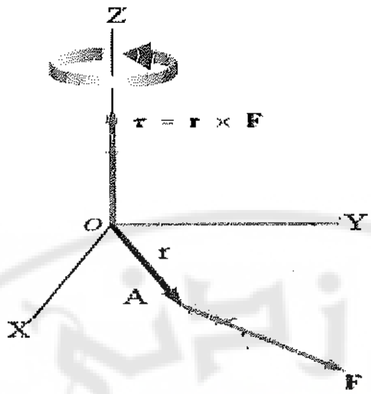
بحيث أن:

$$\vec{\tau} = (xF_y - yF_x)\vec{u}_z \qquad (4.7)$$

ويكون $\vec{\tau}$ موازٍ للمحور Z في هذه الحالة، كما يبيّن الشكل (4-4) .

لنلاحظ أنه يمكن إزاحة القوة على طول مستقيم فعلها بدون تغيير عزمها. لأن البعد b يبقى نفسه. وكذلك من أجل قيم اختيارية لـ x و y تعطي المعادلة (4.8) معادلة مستقيم فعل القوة التي لها العزم $\vec{\tau}$.

$$\tau = xF_y - yF_x \qquad (4.8)$$



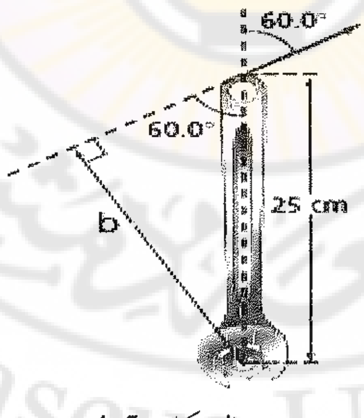
الشكل(4-4)

مسألة محلولة 3:

يُراد شد صمولة (عزقة) محرك سيارة بعزم قيمته 35 N.m ويستخدم لذلك مفك طوله 25cm حيث يتم سحب نهاية المفك بزاوية ?60 على المحور الشاقولي كما هو موضّح في الشكل (4-5) والمطلوب:

- ما هو طول ذراع الرافعة؟
- ما هي القوة التي يجب تطبيقها؟

الحل:



الشكل(4-5)

$$b = r \sin \theta^{\circ} = (0.25\, m)(\sin 60^{\circ}) = 0.22\, m$$

$$F = \frac{\tau}{b} = \frac{35\ N.m}{0.22\ m} = 1.6 \times 10^{2}\ N$$

مسألة محلولة 4:

عيّن العزم المطبّق على الجسم المبيّن في الشكل (6-4) حيث $\vec{F}$ تساوي 6N وتصنع زاوية 30° مع المحور X وحيث r له طول يساوي 45cm ويصنع زاوية 50° مع المحور X الموجب. ثم أوجد معادلة مستقيم فعل القوة.

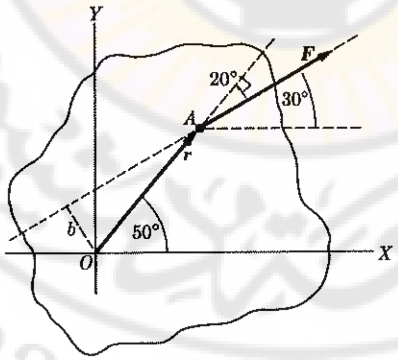
الحل:

نستطيع إجراء الحل بطريقتين مختلفتين نرى أولاً حسب الشكل: أن ذراع الرافعة للقوة $\vec{F}$ (لأن $r = 45\ cm = 0.45\ m$)

هو $b = r \sin\ 20^{\circ} = (0.45\,m)(0.342) = 0.154\ m$ والعزم بالنسبة لـ O هو إذن:

$$\tau = F.b = (6N)\ (0.154\,m) = 0.924\ N.m$$

كما ينبغي علينا لمراعاة الدقة الكاملة، كتابة 0.924 N.m- لأن الدوران حول O يتم في اتجاه دوران عقارب الساعة. وكطريقة ثانية، نستطيع استخدام المعادلة (4.8) لأن المسألة ذات بعدين لدينا حينئذ:



الشكل (6-4)

$$x = r.\cos 50^{\circ} = 0.289m \qquad y = r.\sin 50^{\circ} = 0.245m$$

$$F_x = F.\cos 30^{\circ} = 5.196N \qquad F_y = F.\sin 30^{\circ} = 3.0\,N$$

وبالتالي نجد قيمة العزم:

$$\tau = xF_y - yF_x = 0.867 - 1.792 = -0.925\ N.m$$

وهذه النتيجة متوافقة مع الطريقة الأولى وهي تعطي منحى العزم مباشرة.

للحصول على معادلة مستقيم فعل القوة $\vec{F}$ نعتبر فقط x و y مجهولين في المعادلة (4.8) مما يعطي:

$$-0.925 = 3x - 5.196y$$

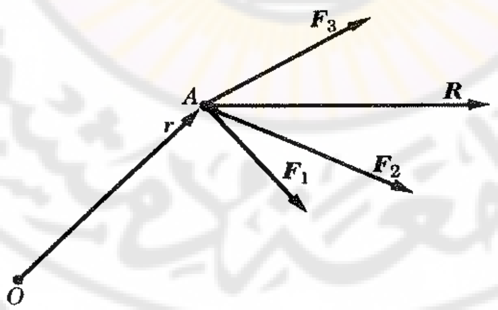
4.4 عزم عدة قوى متلاقية:

لنعتبر الآن عدة قوى.... $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ مؤثرة في نقطة A الشكل (4-7) إن العزم بالنسبة لـ O لكل قوة $\vec{F}_i$ هو $\vec{\tau}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i$، لنلاحظ أننا نكتب $\vec{r}$ وليس $\vec{r}_i$ لأن كل القوى مطبقة في النقطة نفسها.

إن عزم المحصّلة $\vec{R}$ هو $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$ حيث ... + $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ و $\vec{r}$ من جديد هو شعاع الموضع المشترك بتطبيق الخاصة التوزيعية للجداء الشعاعي لدينا:

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + ...)$$
$$= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + ...$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + ... = \sum \vec{\tau}_i \qquad (4.9)$$



الشكل (4-7)

وبالتالي نجد بأن عزم المحصّلة يساوي إلى المجموع الشعاعي لعزوم القوى المركبة إذا كانت متلاقية.

إذا كانت جميع القوى واقعة في مستو واحد، وإذا كانت O أيضاً في المستوي نفسه، فإن العزوم جميعها التي تظهر في المعادلة (4.9) لها منحى عمودي على المستوي، ويمكن كتابة العلاقة (4.9) عندئذ بالشكل:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i \qquad (4.10)$$

تدل المعادلة (4.9) أنه يمكن استبدال جملة قوى متلاقية بقوة وحيدة، وهي محصلة هذه القوى مكافئة كلياً للجملة طالما يتعلق الأمر بفعل انسحابي ودوراني.

مسألة محلولة 5:

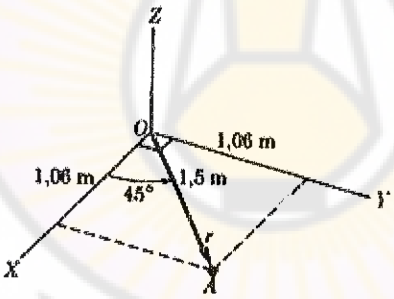
لنعتبر ثلاث قوى مطبقة في النقطة A من الشكل(4-8) حيث $r = 1.5\ m$ والقوى هي:

$$\vec{F}_1 = (6)\vec{u}_x + (0)\vec{u}_y + (0)\vec{u}_z \quad N$$

$$\vec{F}_2 = (6)\vec{u}_x + (7)\vec{u}_y + (14)\vec{u}_z \quad N$$

$$\vec{F}_3 = (5)\vec{u}_x + (0)\vec{u}_y + (3)\vec{u}_z \quad N$$

أوجد عزم محصّلة القوى $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، $\vec{F}_3$ بالنسبة للنقطة O.



الشكل (4-8)

الحل:

باستخدامنا في البدء للعلاقة $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$ حيث $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$

يكون لدينا إذن:

$$\vec{R} = (6+6+5)\vec{u}_x + (0-7+0)\vec{u}_y + (0+14-3)\vec{u}_z$$

$$\vec{R} = (17)\vec{u}_x + (7)\vec{u}_y + (11)\vec{u}_z$$

وبتركيب هذه القيمة مع $\vec{r} = (1.06)\vec{u}_x + (1.06)\vec{u}_y$ نستطيع كتابة العزم المحصّل باستخدام المعادلة (4.6):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R} = (11.66)\,\vec{u}_x - (11.66)\,\vec{u}_y - (25.44)\,\vec{u}_z \;\; N.m$$

بإمكاننا أيضاً إيجاد العزم المحصّل بتطبيق المعادلة (4.9) على صورة:

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3$ ومن ثم بتطبيق المعادلة (4.6) من جديد على كل قوة مركبة لدينا عندئذ:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 = (0)\vec{u}_x + (0)\vec{u}_y - (6.36)\vec{u}_z \quad N.m$$
$$\vec{\tau}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 = (14.84)\vec{u}_x - (14.84)\vec{u}_y - (13.78)\vec{u}_z \quad N.m$$
$$\vec{\tau}_3 = \vec{r} \times \vec{F}_3 = (3.17)\vec{u}_x + (3.18)\vec{u}_y - (5.30)\vec{u}_z \quad N.m$$

وبجميع العزوم الثلاثة نحصل على نتيجتنا السابقة من أجل $\vec{\tau}$.

على هذه الصورة نكون قد تحققنا من صحة المعادلة (4.9) ومن السهل التحقق من أن $\vec{\tau}.\vec{R} = 0$ مما يدل على أن $\vec{\tau}$ و $\vec{R}$ متعامدان في حالة القوى المتلاقية.

4.5 تركيب القوى المطبقة على جسم صلب:

عندما لا تكون القوى مطبّقة في النقطة نفسها، ولكنها تؤثر على جسم صلب فمن الضروري التمييز بين فعلين، الانسحاب والدوران. يتحدد انسحاب الجسم الصلب بالمجموع الشعاعي للقوى أي:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 ..... = \sum \vec{F}_i \qquad (4.11)$$

في هذه الحالة تكون نقطة تطبيق $\vec{R}$ أيضاً غير محددة، وتحدد الحركة الدورانية للجسم بالمجموع الشعاعي لعزوم القوى مقدرة كلها بالنسبة إلى النقطة نفسها:

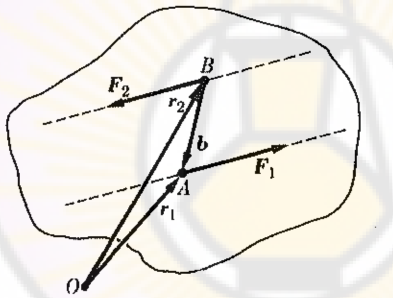
$$\tau = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 ..... = \sum \vec{\tau}_i \qquad (4.12)$$

يبدو من النظرة الأولى أنه من المنطقي أن نفترض بأن القوة $\vec{R}$ ينبغي أن تطبق في نقطة نختارها بحيث يكون عزم $\vec{R}$ مساوياً لـ $\vec{\tau}$ والحالة هذه كما نعلم هي دائماً صالحة، في حالة القوى المتلاقية عندما يكون ذلك ممكناً فالقوة $\vec{R}$ المطبقة هكذا تكون مكافئة إلى جملة قوى

من أجل الانسحاب والدوران على السواء. غير أن هذا بوجه عام غير ممكن؛ لأن عزم $\vec{R}$ هو شعاع عمودي على $\vec{R}$ وفي كثير من الحالات لا يكون $\vec{R}$ و $\vec{\tau}$ المعينيين بالمعادلتين (4.11) و (4.12) متعامدين إذن لا يمكن بوجه عام اختزال جملة قوى مؤثرة على جسم صلب إلى قوة وحيدة أو محصلة تساوي المجموع الشعاعي للقوى.

لنعتبر كمثال بسيط على ذلك المزدوجة، التي تعرّف كجملة مؤلفة من قوتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه تؤثران وفق مستقيمين متوازيين (الشكل 9-4). إن المحصلة أو المجموع الشعاعي للقوتين هو بالطبع معدوم $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$ دالاً على أن المزدوجة لا تحدث أي فعل انسحابي ومن ناحية أخرى وبأخذنا بعين الاعتبار أن $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$ فإن المجموع الشعاعي للعزوم هو:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}=\vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2&=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2=\vec{r}_1\times\vec{F}_1-\vec{r}_2\times\vec{F}_1\\&=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_1=b\times\vec{F}_1\end{aligned} \tag{4.13}$$



الشكل(9-4)

حيث $\vec{b}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ يدعى ذراع الرافعة للمزدوجة إذن $\vec{\tau}\neq 0$ والمزدوجة تحدث بحركة دورانية. لنلاحظ أن b مستقل عن موضع O وأن عزم الجملة بالتالي مستقل عن المبدأ الذي يحسب العزم بالنسبة له ومن المستحيل بطبيعة الحال إيجاد قوة وحيدة محققة لكل هذه الشروط.

لنلاحظ بعودتنا إلى الحالة العامة، أن جملة قوى يمكن أن تختزل دوماً إلى قوة واحدة ومزدوجة. نختار القوة مساوية لـ$\vec{R}$ للحصول على انسحاب مكافئ، وتكون مطبّقة في النقطة

التي تحسب بالنسبة لها العزوم بحيث يكون عزمها الخاص معدوماً، ونختار من أجل تكافؤ الدوران المزدوجة التي عزمها يساوي $\vec{\tau}$.

مسألة محلولة 6:

أوجد القوة المحصّلة والعزم المحصّل للجملة الممثّلة على الشكل (4-10) حيث:

$$\vec{F}_1 = 3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 4\vec{u}_z \quad N$$

$$\vec{F}_2 = -2\vec{u}_x + 5\vec{u}_y + \vec{u}_z \quad N$$

مع نقطتي التطبيق: $A(0.4m, 0.5m, 0)$ و $B(0.4m, -0.1m, 0.8m)$

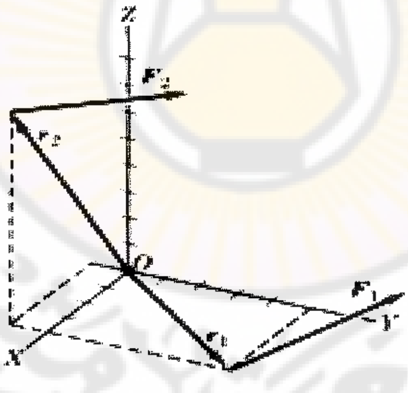
الحل:

نجد أولاً المحصّلة: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{u}_x + 9\vec{u}_y + 5\vec{u}_z \quad N$

نجد بعد ذلك عزم كل قوة بالنسبة لـ O:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = 2\ \vec{u}_x - 1.6\ \vec{u}_y + 0.1\ \vec{u}_z \quad N.m$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -4.1\ \vec{u}_x - 2\vec{u}_y + 1.8\ \vec{u}_z \quad N.m$$



الشكل(4-10)

وبالجمع نجد:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -2.1\vec{u}_x - 3.6\vec{u}_y + 1.9\vec{u}_z \quad N.m$$

ومن أجل أن نرى الآن فيما إذا كانت $\vec{R}$ يمكن أن توضع بحيث يكون عزمها مساوياً $\vec{\tau}$ ينبغي علينا أولاً البحث فيما إذا كان $\vec{\tau}$ و $\vec{R}$ متعامدين. نجد بتطبيق المعادلة (3.20).

$$\vec{\tau}.\vec{R} = (-2.1)(1) + (-3.6)(9) + (1.8)(5) = -25.5 \quad N.m$$

وهكذا يكون $\vec{\tau}.\vec{R}$ مخالفاً للصفر. وجملة الشكل (4-10) لا يمكنها إذن أن ترد إلى قوة وحيدة.

4.6 تركيب القوى الواقعة في مستو واحد:

عندما تكون القوى كلها واقعة في مستو واحد يمكن دوماً اختزال الجملة إلى قوة محصّلة $\vec{R}$ تعطى بالمعادلة (4.1) (ما لم تختزل إلى مزدوجة إذا كانت $\vec{R} = 0$ ولكن $\vec{\tau} \neq 0$ لأن $\vec{\tau}$ في هذه الحالة تكون دوماً عمودية على $\vec{R}$ بوضع مبدأ الإحداثيات O عند مركز العزوم في مستوى القوى نلاحظ أن $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \ldots$ وكذلك $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$ هي جميعها عمودية على المستوي، كما نرى ذلك بتطبيق المعادلة (4.6) أو (4.7) ووفق الشكل(4-4) إذن $\vec{R}$ و $\vec{\tau}$ متعامدان، ويمكن وضع $\vec{R}$ على بعد r من O بحيث يكون عزمها مساوياً لـ $\vec{\tau}$ أي بمعنى أن $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{\tau}$ في هذه الحالة يمكن للعلاقة الشعاعية $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$ أن تُستبدل بالمعادلة السلّمية $\tau = \sum_i \tau_i$ حيث يحسب كل $\vec{\tau}_i$ وفق المعادلة (4.8) لأن للأشعة جميعها المنحى نفسه إذن، إذا كانت R_x و R_y مركبتي $\vec{R}$ في الإحداثيات المتعامدة مدة فيمكن حينئذ وضع $\vec{R}$ في نقطة (x,y) بحيث يكون:

$$x R_y - y R_x = \tau \tag{4.14}$$

وهذه هي معادلة المستقيم الموافق لمستقيم فعل القوة المحصّلة. إذن لا توجد نقطة تطبيق وحيدة بل هناك مستقيم التطبيق.

مسألة محلولة 7:

عيّن عزم جملة القوى المبيّنة على الشكل (4.11) والمؤثرة جميعها في مستو واحد. ولهذه القوى القيم $F_1 = 10\ N\ , F_2 = 8\ N\ , F_3 = 7\ N$ وضلع كل مربع يساوي (0.1m).

الحل:

نكتب أولاً كل قوة بالشكل الشعاعي:

$$\vec{F}_1 = (10)\vec{u}_x \ N$$

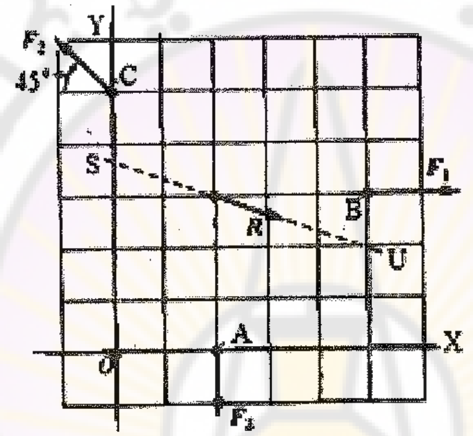
$$\vec{F}_2 = (F_2 \cos 135^\circ)\vec{u}_x + (F_2 \sin 135^\circ)\vec{u}_y \quad = (-5.66)\vec{u}_x + (5.66)\vec{u}_y \ N$$

$$\vec{F}_3 = -(7)\vec{u}_y \ N$$

والقوة المحصّلة $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ هي إذن:

$$\vec{R} = (4.34)\vec{u}_x + (-1.34)\vec{u}_y \ N$$

وبالتالي المحصّلة هي $R = 4.54 \ N$ وتصنع زاوية $\alpha = -17.1^\circ$ مع المحور X



الشكل(4.11)

إن إحداثيات نقاط تطبيق القوى هي:

$C(0, 0.5m)$ و $B(0.5m, 0.3m)$, $A(0.2m, 0)$

نحسب باستخدام المعادلة (4.8) العزوم $\vec{\tau}_1$، $\vec{\tau}_2$، $\vec{\tau}_3$:

$$\tau = xF_y - yF_x$$

$$\tau_1 = -(0.3m)(10 \ N) = -3.00 \ N.m$$

$$\tau_2 = -(0.5m)(-5.66 \ N) = +2.83 \ N.m$$

$$\tau_3 = (0.2m)(-7 \ N) = -1.40 \ N.m$$

لدينا إذن $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = -1.57 \ N.m$ وهو شعاع يتجه وفق المحور Z.

للحصول على مستقيم فعل المحصّلة نطبق المعادلة(4.14) مع إحداثيات x و y اختيارية.

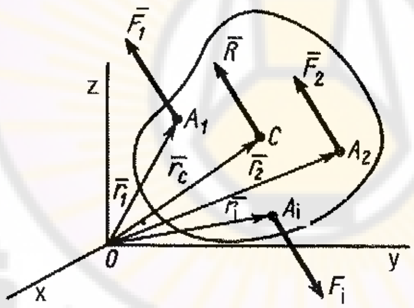
حينئذ:

$$x(-1.34) - y(4.34) = -1.57$$

وبالتالي نجد: $1.34x + 4.44y = 1.57$ وهذا يقابل المستقيم SU.

4.7 تركيب القوى المتوازية:

يبرز مفهوم تحديد مركز محصّلة جملة من القوى المتوازية عند حل بعض المسائل المهمة في الميكانيك، وخاصة عند تعيين مركز ثقل الأجسام. من أجل ذلك نفترض وجود جملة قوى متوازية $(\vec{F}_i ... \vec{F}_2, \vec{F}_1)$ تؤثر على جسم صلب في النقاط $(A_n,...A_2 \ , \ A_1)$ على الترتيب. إن لهذه الجملة من القوى محصلة $\vec{R}$ حاملها يوازي مجموعة القوى وجهتها وفق جهة القوى الأكثر شدة. أما نقطة تأثيرها فإنها تقع في نقطة مثل (C) الشكل (4-12) إن موضع النقطة (C) بالنسبة للجسم الصلب يكون ثابتاً ومستقلاً عن جملة دوران القوى المتوازية حول نقاط تأثيرها بالزوايا نفسها وبالاتجاه نفسه.



الشكل (4-12)

نستطيع تحديد متجهة الموضع $\vec{r}_c$ لمركز تطبيق محصلة جملة من القوى المتوازية في الشكل (4-12) إذا علمت جملة القوى المتوازية، وكذلك متجهات الموضع لنقاط تطبيق عناصر هذه الجملة. ومن أجل ذلك نختار شعاع واحدة ليكن $\vec{u}$ موازياً لهذه الجملة حيث يمكن كتابة كل قوة من الجملة بالشكل: $\vec{F}_i = F_i \, \vec{u}$ حيث F موجبة أو سالبة بحسب كون F_i لها اتجاه $\vec{u}$ نفسه أو الاتجاه المعاكس. إن المجموع الشعاعي هو:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i F_i \vec{u} = (\sum_i F_i)\vec{u} \qquad (4.15)$$

فهو إذن موازٍ أيضاً لـ $\vec{u}$ والمحصّلة لها عندئذ القيمة:

$$R = \sum_i F_i \tag{4.16}$$

والمجموع الشعاعي للعزوم هو:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times F_i \vec{u} = (\sum_i \vec{r}_i F_i) \times \vec{u}$$

وهو شعاع عمودي على $\vec{u}$ وبالتالي عمودي أيضاً على $\vec{R}$، وعلى هذا الأساس بوضعنا $\vec{R}$ في نقطة مناسبة $\vec{r}_c$ يمكن جعل عزمها مساوياً $\vec{\tau}$ أي أن $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{\tau}$ وبإدخال صيغتي $\vec{R}$ و $\vec{\tau}$ المعطاتين أعلاه يمكننا أن نكتب:

$$\vec{r}_c \times \vec{u} \ (\sum_i F_i) = (\sum_i \vec{r}_i F_i) \times \vec{u}$$

$$[\vec{r}_c \ (\sum_i F_i)] \times \vec{u} = (\sum_i \vec{r}_i F_i) \times \vec{u}$$

إذا كان $\vec{r}_c \ (\sum_i F_i) = \sum_i \vec{r}_i \ F_i$

حيث $\vec{r}_i$ متجهة الموضع للقوى $\vec{F}_i$ على الترتيب بالنسبة للنقطة (o).

بالتالي نجد أن متجهة الموضع لمركز تطبيق محصّلة جملة من القوى المتوازية تعطى بالعلاقة:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \vec{r}_i F_i}{\sum_i F_i} = \frac{\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + \ldots}{F_1 + F_2 + \ldots} \tag{4.17}$$

تدعى النقطة المعينة بـ $\vec{r}_c$ مركز القوى المتوازية.

نستخلص من ذلك أن جملة القوى المتوازية يمكن أن تختزل إلى قوة وحيدة موازية لكل من القوى ومعطاة بالمعادلة (4.15) ومؤثرة في نقطة تعطى بالمعادلة (4.17).

يمكن فصل المعادلة الشعاعية (4.17) إلى ثلاث معادلات كل منها يعود إلى مركبة:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}, \quad z_c = \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i}, \quad y_c = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}, \tag{4.18}$$

حيث رمزنا بـ z_c, y_c, x_c إلى إحداثيات النقطة المعينة بـ r_c.

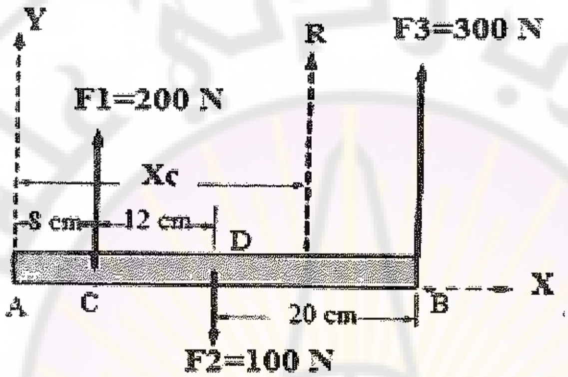
مسألة محلولة 8:

أوجد محصّلة القوى المؤثرة على القضيب المبيّن في الشكل(4-13).

الحل:

بأخذ الاتجاه الموجب نحو الأعلى واستخدام المعادلة (4.16) نجد من أجل المحصّلة:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = F_1 - F_2 + F_3 = 400\ N$$



الشكل(4-13)

لإيجاد نقطة تطبيقها نستخدم المعادلة (4.18). نحن بحاجة فقط إلى المعادلة الأولى؛ لأن جميع القوى متوازية وبأخذ النقطة A كمبدأ للإحداثيات نحصل على:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}$$

$$x_c = \frac{(200\ N)(8\ cm) + (-100\ N)(20\ cm) + (300\ N)(40\ cm)}{400\ N} = 29\ cm$$

إن اختيار المبدأ ليس له أهمية، وللبرهان على ذلك نأخذ النقطة D كمبدأ جديد للإحداثيات حينئذ نحصل على:

$$x_c = \frac{(200\ N)(-12\ cm) + (-100\ N)(0\ cm) + (300\ N)(20\ cm)}{400\ N} = 9\ cm$$

هذه النقطة هي تماماً النقطة السابقة نفسها؛ لأن AD = 20 cm.

4.7 مركز الثقل:

تؤثر على كل جسيم خاضع إلى حقل الجاذبية الأرضية قوة $\vec{W}$ تدعى ثقل هذا الجسيم، إن امتداد اتجاه هذه القوة سيمر من مركز الأرض سنرى في الفصل السابع أنه إذا كانت m هي كتلة الجسيم و g تسارع الثقالة الأرضية كانت لدينا العلاقة التالية:

$$\vec{W} = m\,.\vec{g} \qquad (4.19)$$

وبالرغم من أن اتجاهات الأثقال تتقاطع في مركز الأرض إلا أنه يمكن اعتبارها متوازية عندما تؤثر على جسيمات تشكل جسماً ذا أبعاد صغيرة نسبياً. إن الثقل المحصل لجسم يعطى إذن:

$$\vec{W} = \sum_i m_i\ \vec{g}$$

والمجموع يشمل جميع الجسيمات المشكلة للجسم، ويطبق هذا الثقل في نقطة معطاة بـ:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \vec{r}_i\ m_i\ g}{\sum_i m_i\ g} = \frac{\sum_i m_i\ \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (4.20)$$

مما يتفق مع المعادلة (4.17) نستطيع باستخدام المعادلة (4.18)، كتابة مركبات المعادلة (4.20) بالشكل التالي:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \qquad (4.21)$$

تدعى النقطة المعينة بالمعادلات (4.20) أو (4.21) مركز ثقل جملة الجسيمات (أو مركز الكتل). إن مفهوم مركز الثقل ليس مهماً فقط فيما يتعلق بتركيب القوى المتوازية؛ بل أنه يؤدي أيضاً دوراً رئيساً في تحليل حركة جملة جسيمات وبصورة خاصة حركة جسم صلب.

إذا اعتبرنا جسماً يتألف من عدد كبير من الجسيمات موزعة بصورة كثيفة جداً، ويمكننا الافتراض أن له بنية مستمرة إذا رمزت ρ للكثافة في كل نقطة من الجسم يمكننا تجزئة الحجم إلى عناصر حجمية dV تكون كتلة كل عنصر منها dV= ρ.dm. إذن، إذا استبدلنا إشارات الجمع في المعادلة (4.12) بالتكاملات، فمركز الثقل يعطى حينئذ بـ:

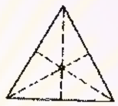
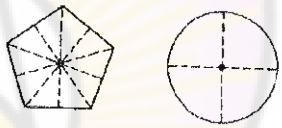
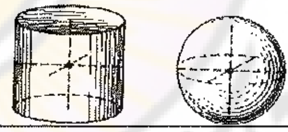
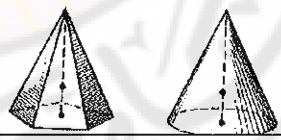
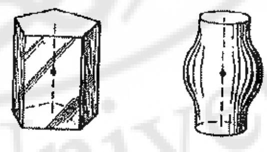
$$x_c = \frac{\int \rho x\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad y_c = \frac{\int \rho y\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad z_c = \frac{\int \rho z\, dV}{\int \rho\, dV} \tag{4.22}$$

وإذا كان الجسم متجانساً تكون ρ ثابتة، وتختصر من المعادلات (4.22) وينتج عن ذلك أن:

$$x_c = \frac{\int x.dV}{\int dV} = \frac{\int x.\, dV}{V} \tag{4.23}$$

بالإضافة إلى معادلات مماثلة من أجل y_c أو z_c في هذه الحالة يتحدد مركز الثقل فقط بالشكل الهندسي للجسم.

الجدول (1-4) مراكز الثقل:

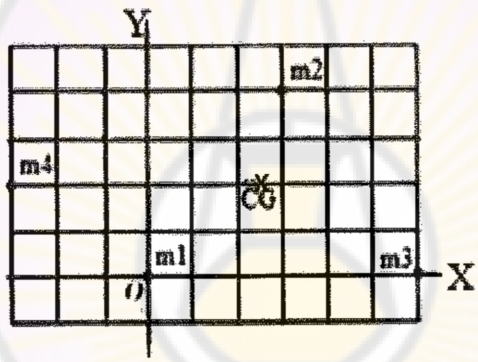
الشكل	موضع مركز الثقل
	مثلث مستو (نقطة تقاطع الخطوط المتوسطة).
	مضلع منتظم وصفيحة دائرية (في المركز الهندسي للشكل).
	اسطوانة وكرة (في المركز الهندسي للشكل).
	هرم ومخروط (على المستقيم الواصل بين الرأس ومركز القاعدة وعند ربع المسافة مقاسة من القاعدة).
	شكل ذو تناظر محوري (نقطة تقع على محور التناظر).
	شكل ذو مركز تناظر (في مركز التناظر).

عندما يتمتع الجسم المتجانس ببعض التناظر تختصر الحسابات؛ لأن مركز الثقل ينبغي أن ينطبق حينئذ على عنصر التناظر. إذا كان لجسم، كالكرة مثلاً أو متوازي السطوح ...الخ مركز تناظر فمركز الثقل منطبق عليه وإذا الجسم محور تناظر، مثل: المخروط، فمركز الثقل يقع على هذا المحور (الجدول 1-4).

مسألة محلولة 9:

أوجد مركز ثقل جسيمات واقعة كما يدل على ذلك الشكل (14-4) لكتل هذه الجسيمات القيم الآتية: $m_1 = 7kg \quad m_2 = 32kg \quad m_3 = 25kg \quad m_4 = 16kg$

وضلع كل مربع يساوي $5cm$.



الشكل(14-4)

الحل:

يجب علينا أولاً إيجاد الكتلة الكلية m :

$$m = \sum_i m_i = 7kg + 32kg + 25kg + 16kg = 80\,kg.$$

تطبق بعد ذلك المعادلة الأولى والثانية لـ (4.21).

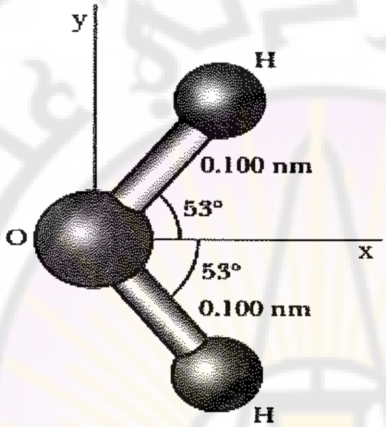
$$x_c = \frac{(7)(0)+(32)(15)+(25)(30)+(16)(-15)}{80} = 12.4\,cm$$

$$y_c = \frac{(7)(0)+(32)(20)+(25)(0)+(16)(10)}{80} = 10\,cm$$

يقع مركز الثقل إذن في النقطة التي يدل عليها بـ CG على الشكل (14-4).

مسألة محلولة 10:

يتألف جزيء الماء من ذرة أوكسجين، وذرتي هيدروجين، ترتبطان مع بعضهما كما هو موضّح بالشكل (4-15)، يبلغ طول الرابطة بين ذرة الأوكسجين والهيدروجين 0.100 nm تقريباً والزاوية بين الرابطتين ?106 تقريباً. باستخدام المحاور الإحداثية حدِّد موقع مركز ثقل الجزيء، بفرض كتلة ذرة الأوكسجين تساوي 16 مرة كتلة الهيدروجين.



الشكل (4-15)

الحل: نحسب كتلة جزيء الماء من كتلة مركباته:

$$m = \sum_i m_i = 15.999\,u + 1.008u + 1.008u \approx 18.00u$$

$$y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad \Rightarrow \quad y_c = 0$$

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad \Rightarrow$$

$$x_c = \frac{0 + (1.008u)(0.100nm)\cos(53.0) + (1.008u)(0.100nm)\cos(53.0)}{18.00u} = 0.00673\,nm$$

4.9 توازن جسيم:

علم التوازن هو الفرع من الميكانيك الذي يعالج توازن الأجسام. يكون الجسيم في حالة توازن إذا كان مجموع كل القوى المؤثرة عليه معدوماً أي:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{4.24}$$

والمعادلة أعلاه تكافئ:

$$\sum_i F_{iz} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i F_{ix} = 0 \tag{4.25}$$

سنعطي الآن أمثلة على كيفية حل بعض المسائل البسيطة المتعلقة بتوازن جسيم.

مسألة محلولة 11:

ناقش توازن ثلاث قوى مؤثرة على جسيم.

الحل:

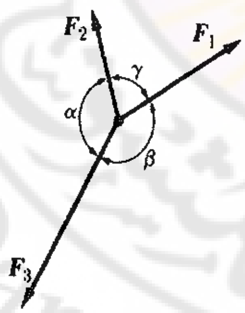
نعتبر القوى الثلاث المبيّنة على الشكل(16-4) إذا توازنت هذه القوى فهذا يعني أن:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

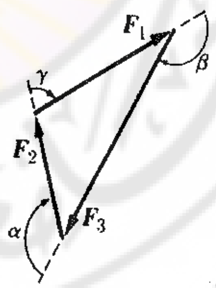
بحيث إذا أنشأنا بهذه القوى الثلاث مضلعاً، فينبغي الحصول على مثلث كما يبيّن ذلك الشكل (17-4) وهذا يدل على أنه يجب أن تكون القوى الثلاث المتلاقية المتوازية واقعة في المستوي نفسه، كذلك فإننا نحصل بتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma} \tag{4.26}$$

وهذا دستور مفيد جداً يربط بين قيم القوى والزوايا التي تصنعها فيما بينها.



الشكل(16-4)



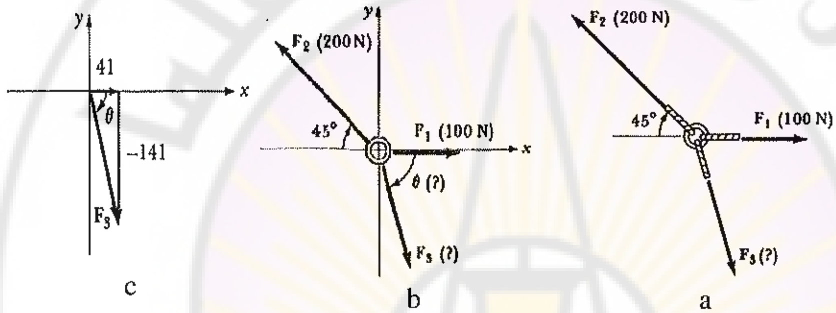
الشكل(17-4)

مسألة محلولة 12:

يسحب ثلاثة رجال ثلاثة حبال موصولة بحلقة كما في الشكل(4-18a)، يسحب الحبل الأول بقوة $\vec{F}_1$ وقيمتها 100N باتجاه المحور X الموجب، ويسحب الحبل الثاني بقوة $\vec{F}_2$ وقيمتها 200 N بزاوية 45° مع الاتجاه السالب للمحور X، أما الحبل الثالث فيسحب بقوة $\vec{F}_3$ قيمتها مجهولة والتي تتسبب ببقاء الحلقة بحالة توازن والمطلوب: حساب قيمة القوة $\vec{F}_3$ وجهتها.

الحل:

بالاعتماد على الشكل b نكتب:



الشكل (4-18)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$$

بتعويض مركبات القوى الثلاث نجد:

$$100\cos 0^\circ - 200\cos 45^\circ + F_{3x} = 0 \qquad (1)$$

$$100\sin 0^\circ - 200\sin 45^\circ + F_{3y} = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نجد: $-41 + F_{3x} = 0 \quad \Rightarrow F_{3x} = 41\,N$

و من المعادلة (2) نجد: $+141 + F_{3y} = 0 \quad \Rightarrow F_{3y} = -141\,N$

وبالتالي نجد محصّلة القوة الثالثة تساوي:

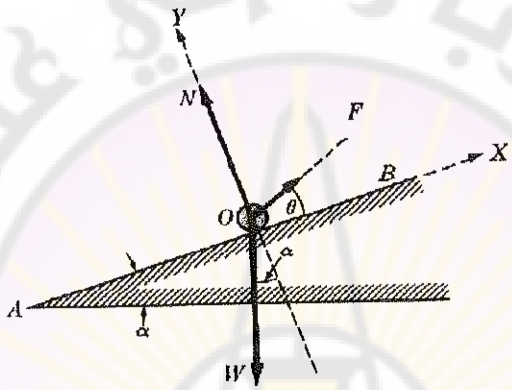
$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} \quad \Rightarrow F_3 = \sqrt{41^2 + (-141)^2} \Rightarrow F_3 = 147\,N$$

$$tg\,\theta = \frac{F_{3y}}{F_{3x}} \Rightarrow \quad tg\,\theta = \frac{-141}{41} \qquad \theta = -73.8°$$

أي أن القوة $\vec{F_3}$ والتي قيمتها 147 N تتوازن مع القوتين الأولى والثانية وبزاوية 73.8° أسفل المحور X الموجب، كما هو موضّح بالشكل (4-18c).

مسألة محلولة 13:

ناقش توازن جسيم على مستو مائل دون احتكاك.



الشكل(4-19) التوازن على مستو مائل.

الحل:

يخضع الجسيم 0 الموضوع على مستو مائل AB الشكل (4-19) إلى القوى التالية:

ثقله $\vec{W}$، قوة الشد $\vec{F}$ ورد الفعل الناظمي على المستوي $\vec{N}$، إننا نريد تقدير $\vec{F}$ و $\vec{N}$ بدلالة W, α, θ. يمكننا إجراء ذلك بطريقتين مختلفتين. لدينا باستخدام قانون الجيوب المعطى بالمعادلة (4.26)، وبالاعتماد على الشكل (4-19) نجد:

$$\frac{F}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{N}{\sin(90^\circ + \alpha + \theta)} = \frac{W}{\sin(90^\circ - \theta)}$$

$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{N}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{W}{\cos\theta}$$

وهذا يعطي من أجل F و N:

$$F = \frac{W \sin\alpha}{\cos\theta} \qquad N = \frac{W\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}$$

تقوم الطريقة الأخرى على إدخال المحورين OX و OY كما يبين ذلك الشكل، وعلى تطبيق المعادلتين الأوليتين (4.25) ونحصل بذلك على النتيجة:

$$\sum_i F_{ix} = F\cos\theta - W\sin\alpha = 0,$$
$$\sum_i F_{iy} = F\sin\theta - W\cos\alpha + N = 0$$

نحصل من المعادلة الأولى على: $F\cos\theta = W\sin\alpha$ أو $F = \dfrac{W\sin\alpha}{\cos\theta}$

مما يتفق مع نتيجتنا السابقة، ومن المعادلة الثانية وباستخدام الصيغة التي أوجدناها من أجل $\vec{F}$ لدينا:

$$N = W\cos\alpha - F\sin\theta = W\cos\alpha - \frac{W\sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= W\frac{\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta} = W\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}$$

وهذه هي أيضاً النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً.

4.10 توازن جسم صلب:

عندما تؤثر قوى على جسم صلب فمن الضروري الأخذ بعين الاعتبار توازن هذا الجسم من ناحيتي الانسحاب والدوران على السواء. يلزم إذن تحقيق الشرطين التاليين:

1- يجب أن يكون مجموع كل القوى معدوماً(توازن الانسحاب).

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{4.27}$$

2- يجب أن يكون مجموع كل العزوم، مأخوذة بالنسبة إلى نقطة ما لا على التعيين معدوماً(توازن الدوران).

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \tag{4.28}$$

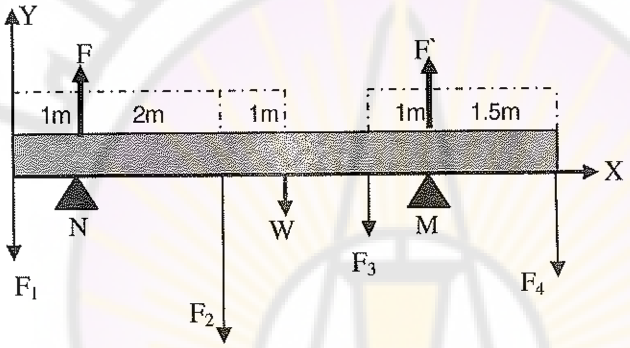
إذا كانت القوى كلها واقعة في المستوي نفسه فيقتصر الشرطان أعلاه على المعادلات الجبرية الثلاث التالية:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i \tau_i = 0 \tag{4.29}$$

وكما أنه توجد ثلاث معادلات بآن واحد فمسائل التوازن في المستوي لا تتعين إلا إذا كانت هناك ثلاثة مجاهيل. نعطي الآن أمثلة على طرق حل بعض المسائل النموذجية للتوازن في المستوي.

مسألة محلولة 14:

يرتكز القضيب المبيّن في الشكل(20-4) بتوازن على النقطتين M,N وتحت تأثير القوى التالية (**F₁**=200N , **F₂**=500N , **F₃**=100N , **F₄**=300). أوجد القوى المؤثرة على القضيب في النقطتين B.A يزن القضيب 40N وطوله يساوي 8m.



الشكل(20-4)

الحل: نطبق أولاً الشرط (4.27) من أجل توازن الانسحاب فيكون لدينا:

$$\sum \vec{F}_i = F + F' - 200 - 500 - 40 - 100 - 300 = 0$$

وهذا يؤدي إلى:

$$F + F' = 1140\ N \qquad (4.30)$$

نطبق بعد ذلك الشرط (4.28) من أجل توازن الدوران. من الأنسب هنا حساب العزوم بالنسبة إلى A و B لأنه بهذا الشكل يصبح عزم القوة معدوماً لدينا عندئذ:

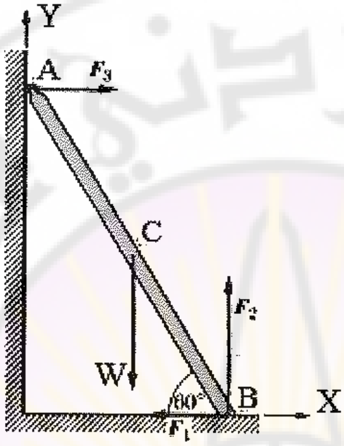
$$\sum_i \vec{\tau}_i = (-200)(-1) + F(0) + (-500)(2) + (-40)(3) + (-100)(4.5 + F'(5.5) + (-300)(7) = 0$$

ومنه $F' = 132.7\ N$ وبضم هذه النتيجة إلى المعادلة (4.30) نحصل على:

$$F = 1007.3\ N$$

مسألة محلولة 15:

يزن سلّم (AB) 40N، يرتكز على حائط شاقولي، الشكل(21-4). صانعاً زاوية 60^o مع سطح الأرض، أوجد القوى المؤثرة على السلم في B و A والسلّم مجهز ببكرات صغيرة في A بحيث يكون الاحتكاك على الحائط الشاقولي مهملاً.



الشكل(21-4)

الحل:

القوى المؤثرة على السلّم ممثّلة على الشكل (21-4)، يطبق الثقل $\vec{W}$ في مركز السلّم C، إن القوة $\vec{F}_1$ ضرورية لتفادي انزلاق السلّم وهي ناجمة عن الاحتكاك على الأرض والقوتان $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ هما ردا الفعل الناظميان على الأرض وعلى الحائط ولدينا باستخدام شروط التوازن الثلاثة، كما وضعت في المعادلات (4.29).

$$\sum F_{ix} = -F_1 + F_3 = 0 \qquad (4.31)$$

$$\sum F_{iy} = -W + F_2 = 0$$

وإذا رمزنا بـ L لطول السلّم وبأخذنا العزوم بالنسبة إلى B لكي يكون عزماً القوتين المجهولتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ ومعدومتين، نحصل من أجل المعادلة الثالثة للتوازن على:

$$\sum \vec{\tau}_i = W(\tfrac{1}{2}L\cos 60^\circ) - F_3(L\sin 60^\circ) = 0$$

أو
$$F_3 = \frac{W \cos 60^{\circ}}{2 \sin 60^{\circ}} = 11.52\ N$$

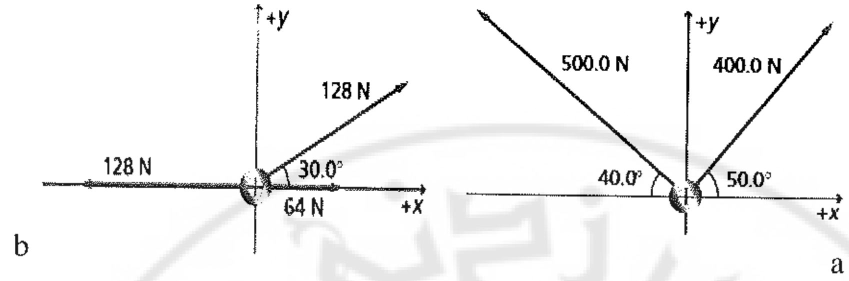
تعطي المعادلتان (4.31) حينئذ:

$$F_2 = W = 40N \qquad \text{و} \qquad F_1 = F_3 = 11.52N$$

لنلاحظ أنه إذالم تكن للسلّم بكرات في A لكانت هناك أيضاً قوة احتكاك في A موازية للحائط الشاقولي بهذا يصبح لدينا أربع قوى مجهولة وينبغي وضع فرضية إضافية لحل هذه المسألة.

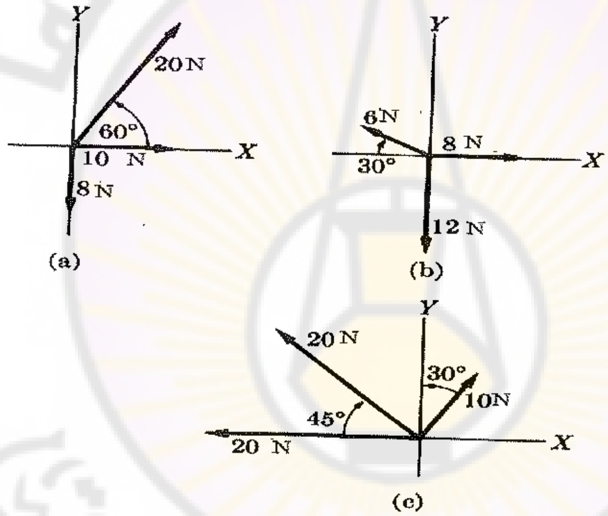
مسائل

4.1 ما هي القوة المحصّلة المؤثرة على الحلقة المبيّنة في الحالتين(a ,b) في الشكل (4-22)؟



الشكل (4-22)

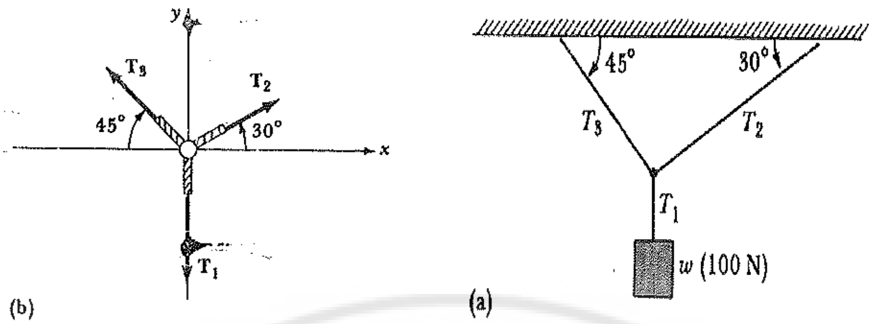
4.2 أوجد مقدار محصّلة جملة القوى واتجاهها الممثّلة على الشكل(4-18).



الشكل (4-23)

4.3 عمود هاتف مثبت شاقولياً بواسطة حبل معدني يربط بالعمود على ارتفاع 10m ويثبت من طرفه الآخر بالأرض على بعد 7m من أسفل العمود فإذا كان توتر الحبل يساوي 500N، ما هي القوى الأفقية والشاقولية التي يؤثر بها الحبل على العمود؟

4.4 يُري الشكل (4-24a) جسم وزنه (100N) معلق بثلاثة حبال، المطلوب حساب التوتر في كل حبل، استفد من الشكل (4-21b) في إيجاد التوترات للحبال الثلاثة.



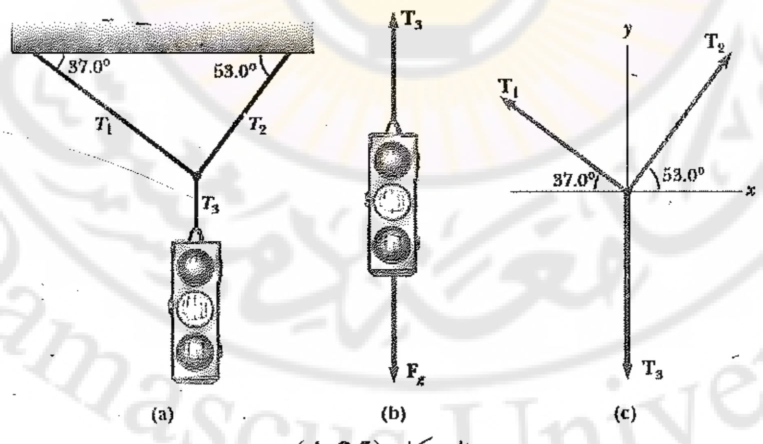
الشكل (4-24)

4.5 تزن كتلة 6N توجد على سطح صقيل أفقي. تدفعها بقضيب(يصنع زاوية 30° مع الأفق) بقوة 6N والمطلوب:

a) ما هي القوة المؤثرة عمودياً على السطح ؟

b) ما هي القوة الموازية للسطح؟

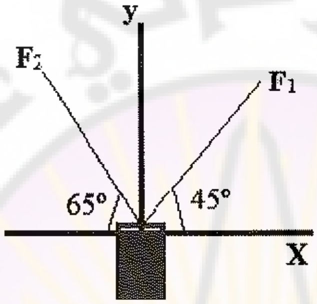
4.6 تزن إشارة ضوئية 122N معلّقة بواسطة كبل متفرع إلى كبلين متصلين بعارضة أفقية ومشكّلين زاويتين معها 37؟ و 53° كما هو موضّح بالشكل (4-25). هذه الكبلات ليست قوية بالشكل الكافي ويمكن أن تقطع إذا تجاوز التوتر المطبق على الكبل 100N، المطلوب: بيّن فيما إذا كانت الإشارة الضوئية سوف تبقى معلّقة بالكبل أو سوف ينقطع الكبل(استفد من الشكل b وc).



الشكل (4-25)

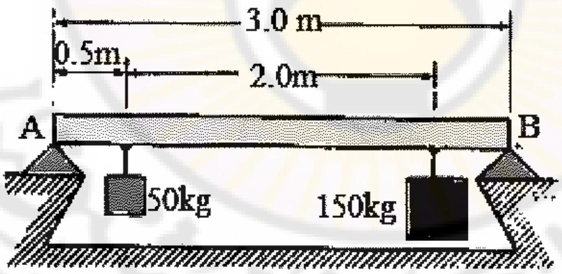
4.7 مستوي مائل ارتفاعه 2m وطوله 5m وقطعة حجر (وزنها 10N) موجودة على المستوي ومثبتة في موضعها بواسطة حاجز ثابت والمطلوب أوجد القوة التي يؤثر بها الحجر على: (a) المستوي (b) الحاجز.

4.8 يسحب شخصان صندوق بقوة $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ على الترتيب ($70\ N$ ، $100\sqrt{2}\ N$) حيث اتجاهات القوى مبيّنة على الشكل(4-26) والمطلوب: إيجاد محصّلة القوى المؤثرة على الصندوق واتجاهها، ثم أوجد القوة F_3 التي تعمل على إيقاف حركة هذا الصندوق.



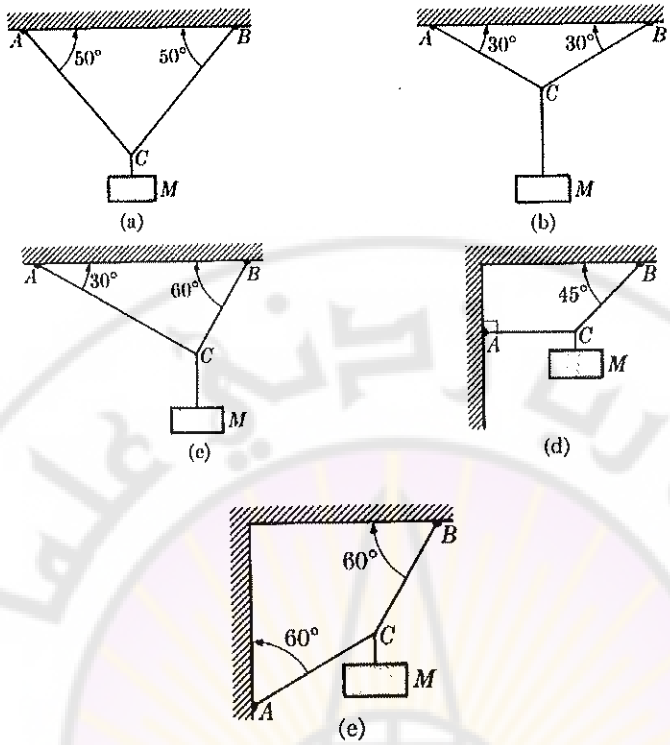
الشكل (4-26)

4.9 جسر AB منتظم كتلته 100kg يرتكز على نهايته A و B ويحمل كتلتين كما يبيّنه الشكل (4-27) احسب ردّي فعل الحاملين.



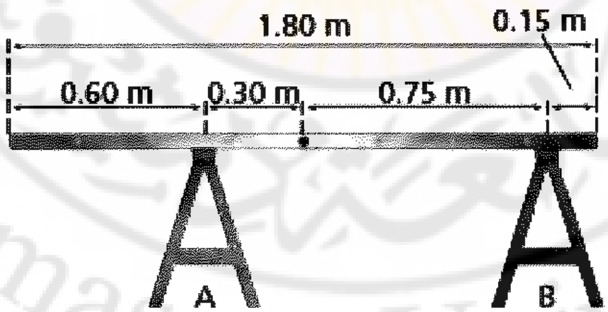
الشكل (4-27)

4.10 عيّن توتري الحبلين BC, AC في الأشكال المختلفة من الشكل (4-28) علماً بأن قيمة الوزن M هي 40 N .



الشكل (4-28)

4.11 يزن سلّم 5.8 kg ويبلغ طوله 1.8m، يرتكز على مسندين، يوضع المسند الأول (A) على بعد 0.60m من نهاية السلّم، والمسند الثاني B على مسافة 0.15m من الطرف الآخر للسلّم، الشكل (4-29). ما هي القوة التي يؤثر بها كل مسند على السلّم.



الشكل (4-29)

4.10 أربع قوى واقعة في مستوٍ واحد قيمتها (30N, 40N, 20N, 50N) تؤثر في نفس النقطة على جسم. والزوايا التي تصنعها هذه القوى فيما بينها هي على التوالي $50^{o}, 30^{o}$, 60^{o} . احسب قيمة القوة المحصّلة والزاوية التي تصنعها مع القوة 30N .

4.13 لتكن القوى الثلاث التالية:

$$\vec{F}_2=-200\vec{j}+100\vec{k} \quad , \quad \vec{F}_1=500\vec{i} \;\; N, \quad \vec{F}_3=-100\,\vec{i}+50\,\vec{j}+400\,\vec{k} \;\; N$$

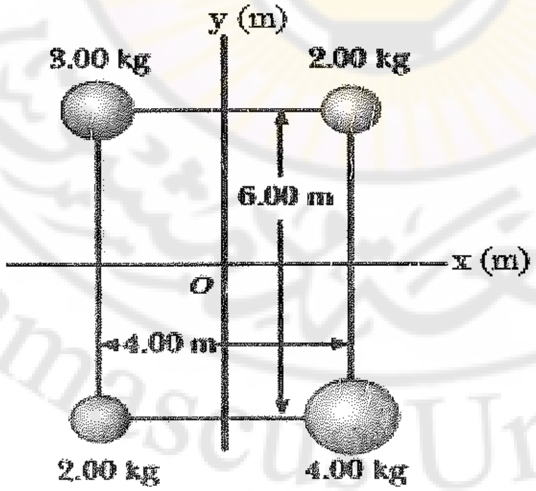
عيّن:

(a) مقدار واتجاه القوة المحصّلة.

(b) عيّن العزم المحصّل لهذه القوى بالنسبة للنقطة (o) مبدأ الإحداثيات؛إذا كانت جميع القوى مطبقة في نفس النقطة التي إحداثياتها (4,-3,5).

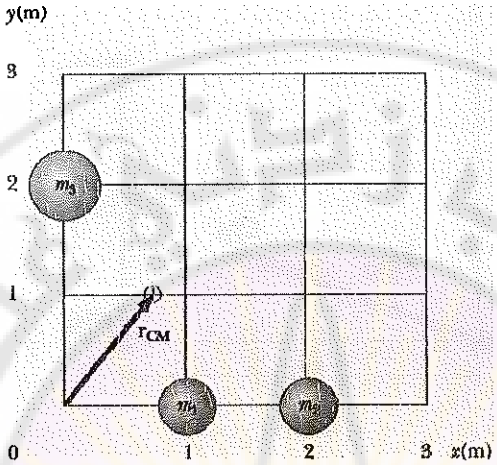
(c) عزم كل قوة منفصلة.

4.14 تُشكل أربع جسيمات نقطية واقعة على رؤوس مستطيل أبعاده(a=4m ، b=6m)كما يدل على ذلك الشكل (4-30). لكتل هذه الجسيمات القيم التالية:
$m_4=3kg \quad m_3=2kg \quad m_2=4kg \quad m_1=2kg$ والمطلوب: إيجاد إحداثيات مركز الكتلة.



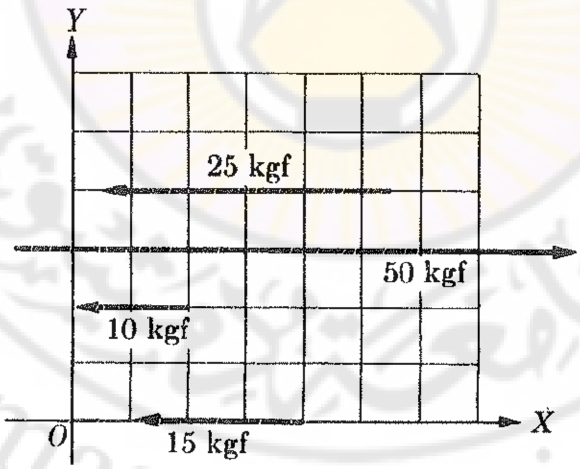
الشكل (4-30)

4.15 جملة مؤلفة من ثلاثة كتل مبيّنة على الشكل (4-31)، لكتل هذه الجسيمات القيم التاليـة: $m_2 = m_1 = 1kg$ ، $m_3 = 2kg$ والمطلـوب: بـيّن أن شـعاع مركـز الكتلـة للجملـة يعطى بالعلاقة التالية: $\vec{r}_{CM} = (0.75\vec{i} + 1.0\,\vec{j})\ m$



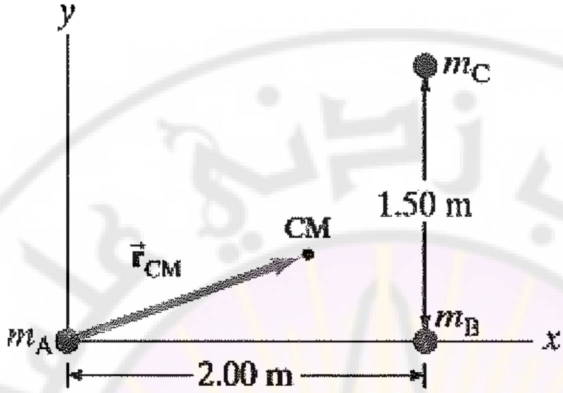
الشكل (4-31)

4.16 أوجد محصّلة ونقطة تطبيق جملة القوى المبيّنة على الشكل (4-32)، علماً أن مساحة كل مربع هي $1cm^2$.



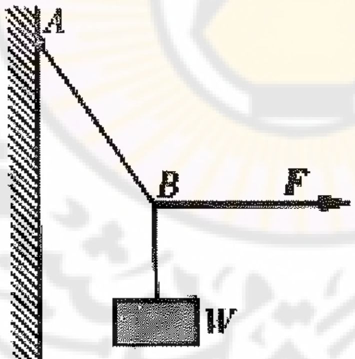
الشكل (4-32)

4.17 لدينا ثلاثة كتل، كل كتلة تبلغ 2.5kg و متوضّعة على رأس مثلث قائم الزاوية كما هو موضّح بالشكل(4-33)، طولا ضلعاه (2m, 1.5m)، والمطلوب: حساب مركز الكتلة CM، ثم اكتب الشكل الشعاعي لمركز الكتلة $\mathbf{r}_{CM}$.



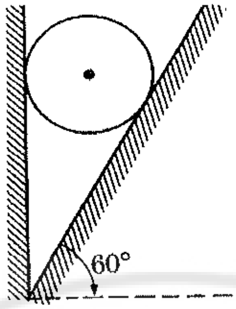
الشكل (4-33)

4.18 يزن الجسم الممثّل في الشكل (4-34) 40 kgf ، ويحافظ على التوازن بواسطة الحبل AB وتحت تأثير القوة الأفقية $\vec{F}$. إذا كان طول AB هو 150cm، والبعد بين الحائط والجسم هو 40 cm. احسب قيمة القوة $\vec{F}$ وتوتر الحبل.



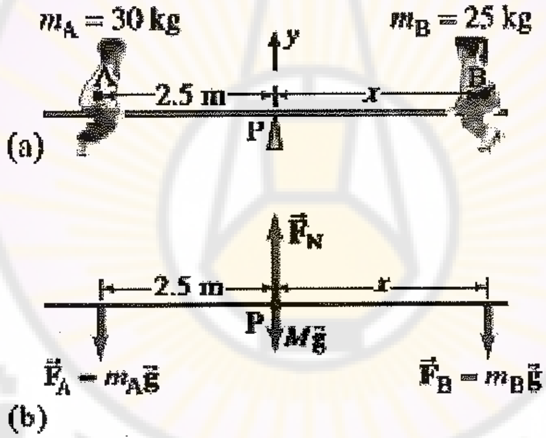
الشكل (4-34)

4.19 كرة تزن 50 N تستند بدون احتكاك إلى حائط وتحافظ على توازنها بواسطة مستوٍ يميل على الأفق بزاوية 60^o الشكل (4-35). احسب ردّي فعل الحائط والمستوي على الكرة.



الشكل (4-35)

4.20 تريد طفلتان أن تلعبا في لعبة التوازن كما هو مبيّن في الشكل(4-36)، حيث تبلغ كتلة الطفلة(A) 30kg والطفلة (B) كتلتها 25kg ،كما تبلغ المسافة من مركز الاتزان إلى مركز ثقل الطفلة(A) 2.5m والمطلوب: حساب المسافة X من مركز الاتزان إلى مركز ثقل الطفلة(B).استفد من الشكل(b) في حل المسألة.



الشكل (4-36)

الفصل الخامس

علم الحركة

5.1 مقدمة.

5.2 الحركة المستقيمة.

5.3 التمثيل الشعاعي للسرعة والتسارع في الحركة المستقيمة.

5.4 الحركة المنحنية.

1) القذف الأفقي.

2) القذف المائل.

5.5 المركبتان المماسية والناظمة للتسارع.

5.6 الحركة الدائرية.

علم الحركة

Kinematics

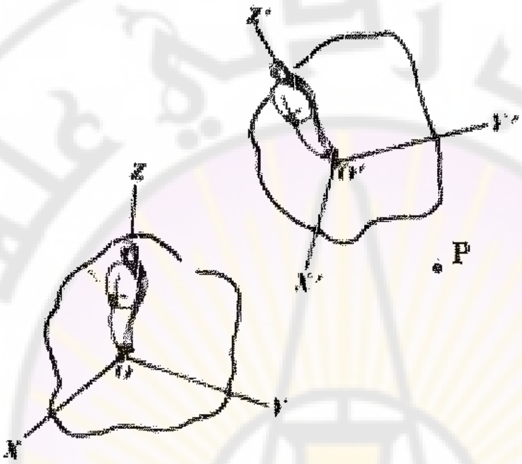
5.1 مقدمة:

اهتم الإنسان منذ القديم بالطبيعة والظواهر الطبيعية، فكانت حركة الأجسام السماوية مثار الإعجاب والفضول لديه، وحاول كشف أسرار الطبيعة بدءاً من أكبر الأجسام الكونية وانتهاء بأصغر مكونات الذرة والنواة. وتعد دراسة حركة وتحريك الأجسام العمود الفقري في جسم الفيزياء، وتدور أساساً حول هدف معرفة كيف تتحرك الأجسام ولماذا وكيف؟ سنقوم في هذا الفصل بدراسة الطريقة التي تتحرك بها الأجسام؛ ونعني بذلك معرفة موضعها وسرعتها وتسارعها في كل لحظة من الزمن، بغض النظر عن السبب الذي أدى إلى حركتها .

نقول عن جسم إنه متحرك بالنسبة إلى جسم آخر عندما يتغير موضعه، المقاس بالنسبة لهذا الجسم الآخر، بدلالة الزمن، وعلى العكس إذا لم يتغير هذا الموضع النسبي بدلالة الزمن فالجسم في سكون نسبي، إن السكون كالحركة، كلاهما مفهوم نسبي يتعلق بموضع الجسم بالنسبة للجسم الآخر الذي استخدم للمقارنة. فالشجرة والمنزل مثلاً هما في حالة سكون بالنسبة إلى الأرض لكنهما في حالة حركة بالنسبة إلى الشمس.

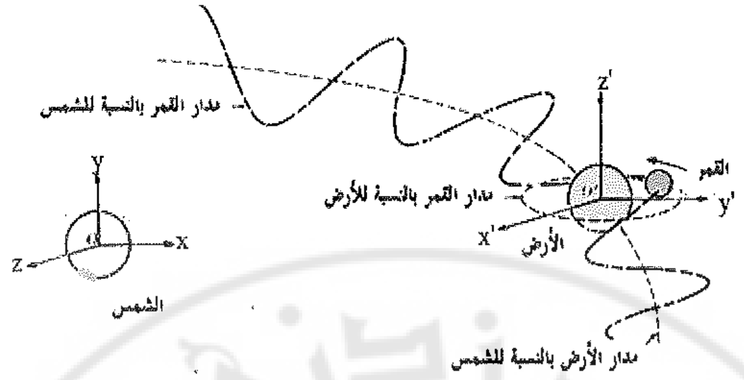
عندما يمر قطار في المحطة نقول: إن القطار في حالة حركة بالنسبة إلى المحطة، غير أن المسافر في القطار، يمكنه أيضاً القول: إن المحطة متحركة بالنسبة إلى القطار منتقلة في الاتجاه المعاكس.

إذن فمن أجل وصف الحركة ينبغي على المراقب تحديد جملة المقارنة التي يتم تحليل الحركة بالنسبة لها. لقد بيّنا على الشكل (5-1) مراقبين O و 'O وجسيم P. يستخدم هذان المراقبان جملتي المقارنة XYZ و 'X'Y'Z على الترتيب. إذا كان O و 'O في سكون أحدهما بالنسبة للآخر فإنهما يلاحظان الحركة نفسها للجسيم P. وبالمقابل إذا كان O و 'O وفي حركة نسبية فملاحظتهما لحركة P ستكون مختلفة.



الشكل (5-1) مراقبان مختلفان يدرسان حركة P

لنعتبر على سبيل المثال مراقبين أحدهما موجود على الشمس والآخر على الأرض (الشكل 5-2) كلاهما يدرس حركة القمر فمن أجل المراقب الأرضي المستخدم لجملة المقارنة XYZ يبدو القمر راسماً مداراً شبه دائري حول الأرض غير أنه بالنسبة للمراقب المستخدم لجملة المقارنة 'X'Y'Z يظهر المدار القمري كخط متموج، ولكن إذا عرف المراقبان حركتهما النسبية فيمكنهما بسهولة مطابقة ملاحظتيهما الخاصتين. سنناقش في الفصل 6 بصورة أكثر تفصيلاً، هذه المسألة مهمة. مسألة مقارنة المعطيات التي يحصل عليها مراقبان متحركان بحركة نسبية. أما الآن فنستفرض أن لدينا دوماً جملة مقارنة محددة تماماً.



الشكل (5-2): مدار القمر بالنسبة للشمس والأرض أن بعد الأرض عن القمر هو 4.10^{-3} مرة من بعد الأرض عن الشمس لقد بالغنا على الشكل في تموجات مدار القمر.

5.2 الحركة المستقيمة:

- السرعة:

تكون حركة جسم مستقيمة إذا كان مساره مستقيماً. لنأخذ المحور X المبين على الشكل (5-3) منطبقاً على المسار. يتعين موضع الجسم بالانتقال x الذي يعانيه بدءاً من نقطة اختيارية O تدعى المبدأ. مبدئياً يمكن ربط الانتقال بالزمن بواسطة علاقة تابعية $x = f(t)$ وبالطبع يمكن أن تكون $\overline{x}$ موجبة او سالبة. لنفترض أن الجسم في الزمن t كان في الموضع A حيث $OA = x$ وفي لحظة لاحقة t' أصبح في الوضع B حيث $OB = x'$ تعرّف السرعة الوسطية بين B,A بـ:

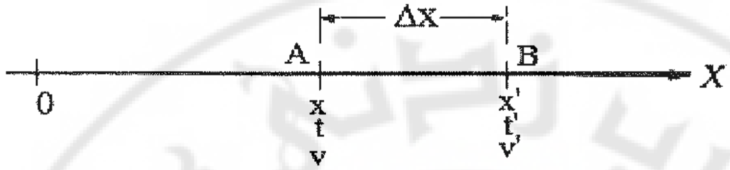
$$Vm = \frac{x'-x}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{5.1}$$

حيث $\Delta x = x'-x$ هو انتقال لجسم و $\Delta t = t'-t$ هو الزمن المنصرم. إن السرعة الوسطية خلال مجال زمني ما تساوي إذن للانتقال الوسطي بوحدة الزمن خلال هذا المجال الزمني. لتعيين السرعة الآنية في نقطة مثل النقطة A ينبغي جعل المجال الزمني Δt صغيراً بقدر الإمكان بحيث لا يحصل عملياً أي تغير في حالة الحركة خلال هذا المجال الزمني الصغير، وبتعبير رياضي يعود هذا إلى حساب القيمة الحدية للكسر الظاهر في المعادلة (5.1) عندما يتناهى المقام Δt إلى الصفر وهذا يكتب على الشكل:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} Vm = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

وليس هذا سوى تعريف مشتق x بالنسبة للزمن أي:

$$V = \frac{dx}{dt} \tag{5.2}$$



الشكل (5-3)

وهكذا نحصل على السرعة الآنية بحساب مشتق الانتقال بالنسبة للزمن. عملياً نجد السرعة الآنية بمراقبة الجسم المتحرك في موضعين متجاورين جداً تفصلهما المسافة الصغيرة dx ، وبقياس المجال الزمني الصغير dt اللازم للانتقال من الموضع الأول إلى الآخر فيما يلي ستدل العبارة (السرعة) دوماً على السرعة الآنية:

إذا علمنا $V = f(t)$ يمكننا حل المعادلة (5.2) من أجل المتحول x بالتكامل لدينا في الواقع وفق المعادلة (5.2) $dx = v.dt$ ونحصل عندئذ بالتكامل على:

$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v.dt$ حيث ترمز x_0 إلى قيمة x في الزمن t_0 ولما كان $\int_{x_0}^{x} dx = x - x_0$

إذن:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v \, . dt \tag{5.3}$$

لفهم المدلول الفيزيائي للمعادلة (5.3) ينبغي على الطالب أن يلاحظ أن $v.dt$ يمثل انتقال الجسم خلال المجال الزمني القصير dt. وكذلك إذا جزأنا المجال الزمني $t - t_0$ إلى مجالات صغيرة متتالية $dt_1, dt_2, dt_3, ...$ نجد أن الانتقالات المقابلة هي $v_1 dt_1, v_2 dt_2, v_3 dt_3, ...$.

وأن الانتقال الكلي بين t_0 و t وهو مجموع هذه الانتقالات. علينا أن نلاحظ أن v_1 , v_2 , v_3 هي قيم السرعة أثناء كل مجال زمني. ووفق مفهوم التكامل المحدود لدينا عندئذ:

$$\text{الانتقال} = x - x_0 = v_1 dt_1 + v_2 dt_2 + v_3 dt_3 + ...$$

$$= \sum_i v_i \ dt_i = \int_{t_0}^{t} v \ . \ dt$$

وهذا الانتقال هو بالطبع $x - x_0$ مما يتفق مع المعادلة (5.3) ينبغي أن نلاحظ أن الانتقال Δx (أو dx) يمكن أن يكون موجباً أو سالباً بحسب كون حركة الجسيم نحو اليمين أو نحو اليسار مع ما يترتب على ذلك من إشارة موجبة أو سالبة للسرعة. وهكذا فإن إشارة السرعة في الحركة المستقيمة تدل على جهة الحركة وتكون الجهة وفق $OX +$ إذا كانت السرعة موجبة ووفق $OX -$ إذا كانت سالبة.

نستخدم في بعض الأحيان مفهوماً آخر للسرعة يعرف كالنسبة(المسافة/ الزمن) وهي دائماً موجبة، وتساوي عددياً القيمة المطلقة للسرعة أي $|v|$. ليس لقيمتها الوسطية، على العموم قيمة وسطي السرعة الجبرية نفسها. من المهم أيضاً ألا نخلط بين الانتقال $x - x_0$ خلال الزمن $t - t_0$ بوالمسافة المقطوعة أثناء الزمن نفسه؛ إذ إننا نحسب الانتقال بواسطة المعادلة (5.3) بينما نحصل على المسافة من $\int_{t_0}^{t} |v| .dt$.

وكمثال على ذلك يمكن للسائق المسافر من المدينة A أولاً إلى المدينة B التي هي على بعد 100km إلى الشرق من A أن يسافر أولاً إلى المدينة C الواقعة على بعد 50km إلى الغرب من A ثم يعود ويسافر إلى B. إن المسافة المقطوعة هي 200km بينما الانتقال ليس سوى 100km. إذا تم الانتقال بـ 4 ساعات فالسرعة الوسطية تكون:

200 km/4hr =50 $kmhr^{-1}$ بينما السرعة الوسطية الجبرية 100 km/4hr = 25 $kmhr^{-1}$

تقدر السرعة في جملة الوحدات الدولية بالمتر في الثانية $m.s^{-1}$ وهذه هي سرعة جسم ينتقل متراً واحداً في ثانية واحدة، بسرعة ثابتة. يمكن أيضاً، بالطبع تقدير السرعة بأي تركيب لوحدات المكان، والزمن، مثل: الـ (كم بالساعة) أو (القدم بالدقيقة) الخ.

مسألة محلولة 1:

يتحرك جسيم على طول المحور X بحيث إن موضعه في كل لحظة يعطي بالعلاقة $x = 5t^2 + 1$ ، حيث تقدر x بالمتر t بالثانية. احسب سرعته الوسطية في المجال الزمني الواقع بين:

(a) 2 s و 3 s .

(b) 2 s و 2.1s .

(c) 2 s و 2.001 s .

(d) 2 s و 2.00001s احسب أيضاً السرعة الآنية في اللحظة 2 s.

الحل:

نفرض أن $t_0 = 2s$ التي هي قيمة مشتركة لكل المسألة باستخدام $x = 5t^2 + 1$ لدينا $x_0 = 5(2)^2 + 1 = 21m$ إذن فمن أجل كل طلب نكتب:

$$\Delta t = t - t_0 = t - 2 \qquad و \qquad \Delta x = x - x_0 = x - 21$$

(a) من أجل $t = 3s,$ لدينا $\Delta t = 1s,$

$$x = 5(3)^2 + 1 = 46$$

$$\Delta x = 46m - 21m = 25m$$

ومنه:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25m}{1s} = 25ms^{-1}$$

(b) من أجل $t = 2.1s,$ لدينا :

$\Delta t = 0.1s$ و $x = 5(2.1)^2 + 1 = 23.05m$ و $\Delta x = 2.05m$ إذن :

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2.05m}{0.01s} = 20.5ms^{-1}$$

(c) من أجل $t = 2.001s$ لدينا : $\Delta t = 000.1s$ و

$x = 5(2.001)^2 + 1 = 21.020005m$ و $\Delta x = 0.02005m$

ومنه:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.020005\,m}{0.001\,s} = 20.005\,ms^{-1}$$

(d) من أجل $t = 2.0001s$, فإن:

$$V_m = 20.00005\,ms^{-1}$$

(e) نلاحظ عندئذ أنه كلما أصبح Δt أصغر، تناهت السرعة الوسطية إلى القيمة $20\,ms^{-1}$ يمكننا أن نتوقع إذن أن هذه هي السرعة الآنية من أجل $t = 2s$ وبالفعل لدينا:

$$V_m = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 1) = 10t$$

وعندما نأخذ $t = 2s$ نحصل على $V_m = 20ms^{-1}$.

- **التسارع:**

تكون سرعة جسم ما، على العموم، تابعة للزمن. فإذا بقيت السرعة ثابتة نقول إن الحركة منتظمة. لنعد من جديد إلى الشكل(3-5)، لنفترض أن الجسم كان في الزمن t، في الموضع A بسرعة v وأنه أصبح في الزمن 't في B بسرعة 'v. يعرف التسارع الوسطي بين A و B بـ:

$$a_m = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{5.4}$$

حيث: $\Delta v = v' - v$ هو تغير السرعة $\Delta t = t' - t$ كالسابق هو الزمن المنصرم.

وهكذا فإن التسارع الوسطي خلال مجال زمني ما هو تغير السرعة بواحدة الزمن أثناء هذا المجال الزمني.

التسارع الآني: هو القيمة الحدية للتسارع الوسطي عندما يصبح المجال الزمني صغيراً جداً أي بمعنى:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ومنه ينتج:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{5.5}$$

أي إننا نحصل على التسارع الآني بحساب مشتق السرعة بالنسبة للزمن. نجد عملياً التسارع الآني بملاحظة التغير الصغير dv للسرعة الذي يحصل في المجال الزمني الصغير dt. (وفيما يلي وفي كل مرة نقول فيها "تسارع" فهذا سيعني تسارعاً آنياً).

على العموم، يتغير التسارع في أثناء الحركة. إذا كانت الحركة المستقيمة ذات تسارع ثابت، فنقول إن الحركة متغيرة بانتظام.

إذا ازدادت السرعة بالقيمة المطلقة مع الزمن، نقول إن الحركة " متسارعة "، وإذا نقصت السرعة بالقيمة المطلقة مع الزمن تدعى الحركة حينئذ متأخرة أو " متباطئة ".

إذا عرفنا التسارع أمكننا حساب السرعة بإجراء تكامل المعادلة (5.5) لدينا بموجب المعادلة (5.5): $dv = a\,.dt$ ونحصل بالتكامل على :

$$\int_{x_0}^{x} dv = \int_{t_0}^{t} a.\ \ dt$$

حيث v_0 هي السرعة في الزمن t_0 ، حينئذ ، ولكون : $\int_{v_0}^{v} dv = v - v_0$ نجد :

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a.\ \ dt \qquad (5.6)$$

وكما في حالة الانتقال يمكن حالاً فهم المدلول الفيزيائي للمعادلة (5.6). نعلم أن $a.dt$ يمثل تغير السرعة في أثناء المجال الزمني القصير dt وهكذا نجد ، بتجزئة المجال الزمني $t - t_0$ من جديد إلى مجالات زمنية صغيرة متتالية $dt_1, dt_2, dt_3,...$ ، إن التغيرات المقابلة للسرعة هي: $a_1.dt_1, a_2.dt_2, a_3.dt_3,...$ حيث $a_1, a_2, a_3,...$ هي قيم التسارع في كل مجال زمني ، والتغير الكلي للسرعة $v - v_0$ بين t_0 و t هو مجموع هذه التغيرات. أي:

$$\text{تغير السرعة} = v - v_0 = a_1\ .dt_1 + a_2\ .dt_2 + a_3\ .dt_3 + ...$$

$$= \sum_i a_i\ .\ dt_i = \int_{t_0}^{t} a\ .\ dt$$

ويمكن أيضاً ربط التسارع بالموضع بضم المعادلتين (5.2) و (5.5) مما يعطي:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \ \Rightarrow\ a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (5.7)$$

هناك علاقة أخرى مهمة بين الموضع والسرعة يمكن الحصول عليها بالطريقة التالية: نكتب انطلاقاً من المعادلة (5.5) $dv = a\ .dt$ وعندما نضرب الحد الأيسر لهذه المعادلة بالحد الأيسر للمعادلة (5.2) ونكرر ذلك من أجل الحدين اليمينين، نجد:

$$v\ .dv = a\ .dt\left(\frac{dx}{dt}\right) = a\ .dx$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\int_{v_0}^{v} v\ .dv = \int_{x_0}^{x} a\ .dx$$

أو:

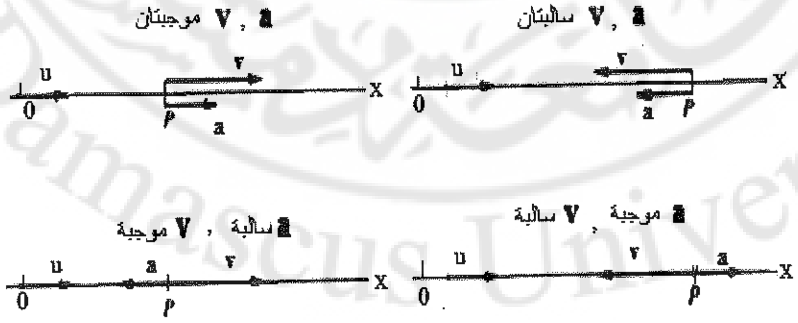
$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\ .dx \qquad (5.8)$$

إن هذه المعادلة مفيدة بصورة خاصة لحساب السرعة عندما تكون العلاقة بين x و a معروفة مما يسمح بحساب تكامل الحد الأيمن.

يقدر التسارع في الجملة الدولية بالمتر في الثانية في الثانية أو $(m/s)/s = m.s^{-2}$ وهذا هو تسارع جسم تزداد سرعته متراً واحداً بالثانية في الثانية الواحدة، بتسارع ثابت.

5.3 التمثيل الشعاعي للسرعة والتسارع في الحركة المستقيمة:

تمثل السرعة في الحركة المستقيمة بشعاع يعطى طوله بالمعادلة (5.2) واتجاهه ينطبق مع اتجاه الحركة (الشكل 4-5). ويمثل التسارع كذلك بشعاع قيمته تعطى بالمعادلة (5.5)، واتجاهه هو اتجاه المحور OX أو المعاكس له بحسب ما يكون موجباً أم سالباً. إذا كان $\vec{u}$ هو شعاع الوحدة في اتجاه X الموجب فيمكننا أن نكتب بالشكل الشعاعي:



الشكل (4-5): العلاقة الشعاعية بين السرعة والتسارع في الحركة المستقيمة.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} . \vec{u} \qquad \text{و} \qquad \vec{v} = v . \vec{u} = \frac{dx}{dt} . \vec{u} \tag{5.9}$$

يتجه الشعاعان $\vec{v}$ و $\vec{a}$ وفق $\vec{u}$ أو في الاتجاه المعاكس له بحسب إشارتي dx / dt و dv / dt. وتكون الحركة متسارعة أو متباطئة بحسب ما يكون لـ $\vec{v}$ و $\vec{a}$ الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان (الشكل 5-4). هناك قاعدة بسيطة، وهي أنه إذا كانت لـ $\vec{v}$ و $\vec{a}$ الإشارة نفسها فالحركة متسارعة، أما إذا كانا من إشارتين متعاكستين، فالحركة متباطئة.

- **الحركة المستقيمة المنتظمة:**

استناداً إلى معادلات تعريف كل من سرعة الجسيم وتسارعه على مساره. يمكن أن تكون الحركة منتظمة أو متغيرة، وذلك حسب قيمة كل من السرعة والتسارع. فإذا كانت سرعة الجسيم ثابتة وغير تابعة للزمن ($v = const$) في نقاط المسار جميعها فإن قيمة التسارع لهذا الجسيم على مساره وفقاً للمعادلة (5.5) تكون معدومة ($a = 0$)، وبالتالي فإن الحركة مستقيمة منتظمة.

إذن $a = dv / dt = 0$ وبالتالي لا يوجد تسارع، وانطلاقاً من المعادلة (5.3) وعندما تكون v ثابتة نستطيع أن نكتب معادلة الحركة بالشكل التالي:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v \, .dt = x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt \qquad \Rightarrow$$

$$x = v \, (t - t_0) + x_0$$

- **الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:**

في الحالة العامة عندما تكون سرعة الجسم على مساره تابعة للزمن، أي متغيرة مع الزمن $v = f\,(t)$ ، بحسب المعادلة (5.5) يكون لهذا الجسم المتحرك تسارع غير معدوم إما موجباً أو سالباً أو يكون تابعاً للزمن أيضاً، فإذا كانت له قيمة ثابتة تكون الحركة متغيرة بانتظام. أما إذا كان تابعاً للزمن تكون الحركة متغيرة.

في هذه الحالة a ثابت إذن لدينا بموجب المعادلة (5.6)

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a \, .dt = v_0 + a \int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a \, (t - t_0) \tag{5.10}$$

ولدينا أيضاً وفق المعادلة (5.3):

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a\,(t - t_0)\right].dt$$
$$= x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,.dt$$

وبالتالي:

$$x = \tfrac{1}{2} a\,(t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + x_0 \qquad (5.11)$$

ومن المفيد أيضاً الحصول على العلاقة المستخرجة من المعادلة (5.8)

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = a \int_{x_0}^{x} dx = a\,(x - x_0)$$

عندئذ:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0) \qquad (5.12)$$

حيث v_0, x_o: هما السرعة الابتدائية والفاصلة الابتدائية على الترتيب للجسيم المتحرك.

يمكن كتابة معادلات الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام بالشكل التالي:

$$v = a.t + v_0$$
$$x = \tfrac{1}{2} a\,t^2 + v_0 t + x_0$$
$$v^2 - v_0^2 = 2a\,x$$

نشير إلى أن قيمة التسارع الناظمي في الحركة المستقيمة يكون معدوماً. بينما التسارع المماسي (سيعرّف كلٍ من التسارع الناظمي والمماسي لاحقاً) يكون مساوياً لقيمة التسارع الكلي أي:

$$a_N = o,\ a_T = a$$

إن الحالة الأكثر أهمية للحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام هي حركة السقوط الحر تحت تأثير الثقالة. في هذه الحالة وباختيار الاتجاه نحو الأعلى الاتجاه الموجب نفرض أن $a = -g$ وإشارة الناقص تدل على أن تسارع الثقالة يتجه نحو الأسفل. إن قيمة g تتغير من مكان لآخر على سطح الأرض، ولكنها تبقى دائماً قريبة من $g = 9.8\,ms^{-2}$ هذه القيمة تبقى

نفسها من أجل الأجسام جميعها، ويمكن اعتبارها مستقلة عن الارتفاع طالما أننا لا نبتعد كثيراً عن السطح سواء كان ذلك نحو الداخل أم نحو الخارج.

فإذا كان جسيماً يسقط سقوطاً حراً من ارتفاع h عن سطح الأرض بحيث R >> h حيث – R نصف قطر الكرة الأرضية فإنه يتحرك بتسارع ثابت مقداره g وتكون معادلات الحركة لهذا الجسيم هي:

$$v = g\,t$$
$$y = \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

وفي حالة القذف الشاقولي أيضاً، حيث يقذف الجسيم بسرعة v_0 إلى الأعلى و تكون معادلات الحركة:

$$v = v_0 - g\,t \quad , \; x = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \quad , \quad v^2 = v_0^2 - 2\,g\,x$$

من هذه المعادلات نستنتج ما يلي:

1) عند أقصى ارتفاع تنعدم السرعة، لذلك نضع $v = 0$ فنحصل على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع وهو $t = \dfrac{v_0}{g}$ ومقدار أقصى ارتفاع هو: $x = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

2) لكي نحصل على زمن الوصول إلى نقطة البداية o بعد صعود الجسم وهبوطه نضع $x=0$ فنحصل على $v_0 t = \frac{1}{2} g\, t^2$ وبالتالي نحصل على $t = \dfrac{2v_0}{g}$ وهو زمن بلوغ أقصى ارتفاع ثم العودة مرة أخرى إلى نقطة القذف o وهذا يعني أن زمن الصعود يساوي زمن الهبوط.

3) عند ارتفاع h حيث $h < \dfrac{v_0^2}{2g}$ تتعين السرعة من $v^2 = v_0^2 - 2\,g\,h$ أي إن:

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h}$$

الإشارة الموجبة للسرعة أثناء الصعود، أما الإشارة السالبة فللسرعة أثناء الهبوط.

4) والزمن عند الارتفاع h يتعين من $h = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$.

أي: $g t^2 - 2 v_0 t + 2h = 0$ ، ومنها نوجد زمنين أحدهما: في أثناء الصعود والآخر في أثناء الهبوط.

مسألة محلولة 2:

جسم يتحرك وفق المحور x بموجب العلاقة التالية: $x = 2t^3 + 5t^2 + 5$

حيث x بالمتر (m) و t بالثواني، والمطلوب:

(a) أوجد السرعة، والتسارع في كل لحظة.

(b) الموضع، والسرعة، والتسارع من أجل $t = 2s$ و $t = 3\,s$.

(c) السرعة والتسارع الوسطيين بين $t = 2\,s$ و $t = 3\,s$.

الحل:

(a) باستخدام المعادلتين (5.5) و (5.2) يمكننا كتابة:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 + 5t^2 + 5) = 6\,t^2 + 10\,t \quad m.s^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + 10t) = 12\,t + 10 \quad m.s^{-2}$$

(b) من أجل $t = 2s$ وباستخدام الصيغ المقابلة لدينا:

$$x = 41\ m \qquad v = 44\ m.s^{-1} \qquad a = 34\ m.s^{-2}$$

وبالشكل نفسه ، من أجل $t = 3s$ يمكن التحقق من أن:

$$x = 104\,m \qquad v = 84\,m.s^{-1} \qquad a = 46\,ms^{-2}$$

(c) لإيجاد السرعة والتسارع الوسطيين بين $t = 2\,s$ و $t = 3\,s$ لدينا $\Delta t = 1s$

ولدينا بموجب (b) $\Delta x = 63m$ و $\Delta v = 40\ ms^{-1}$ ومنه:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{63\ m}{1\ s} = 63\ ms^{-1}\ , \qquad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40\ ms^{-1}}{1\ s} = 40\ ms^{-2}$$

مسألة محلولة 3:

يعطي تسارع جسم يتحرك على طول المحور x بالعلاقة $a = (4x - 2)\ ms^{-2}$ حيث x بالمتر. وعلى اعتبار أن $v_0 = 10\ ms^{-1}$ ، $x_0 = 0$ أوجد السرعة في أية نقطة أخرى.

الحل:

بما أن التسارع يعبّر عنه هنا بدلالة الفاصلة بدلاً من أن يكون بتابعية الزمن لا يمكننا استخدام التعريف $a = dv/dt$ للحصول على السرعة بالتكامل. بدلاً من ذلك، علينا استخدام المعادلة (5.8) مع $v_0 = 10ms^{-1}$ و $x_0 = 0$ وعليه:

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}(10)^2 = \int_0^x (4x-2)\,dx$$

$$v^2 = 100 + 2\left[(2x^2 - 2x)\right]_0^x = 4x^2 - 4x + 100$$

وبالتالي: $v = \sqrt{4x^2 - 4x + 100}$

هل ينبغي علينا وضع إشارة $\pm$ أمام الجذر؟ إذا كان الجواب نعم، فما هو مدلوله؟ ننصح الطالب بتمثيل السرعة بيانياً بدلالة الفاصلة x.

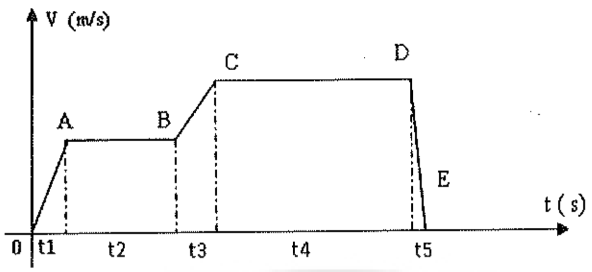
نترك للطالب إيجاد x بدلالة الزمن t باستخدام التعريف $v = dx/dt$ وانطلاقاً من هذه النتيجة الحصول على v و a بدلالة الزمن.

مسألة محلولة 4:

تتسارع سيارة بانتظام بادئة حركتها من السكون على طريق مستقيم، فتصل سرعتها إلى 45 km/h في 11 s. وتبقى على هذه السرعة مسافة 1.5 km بسبب وجود جرار أمامها حيث يتاح لها بعد ذلك تجاوز الجرار، فتتسارع السيارة بانتظام لتصل سرعتها إلى 75 km/h وتحتاج لبلوغ هذه السرعة إلى 11 s أيضاً. تسير السيارة بعد ذلك بهذه السرعة لمدة ثلاث دقائق ثم تتباطأ بانتظام بمعدل 11 m/s حتى تقف. والمطلوب:

1) إيضاح الحركة برسم مناسب، وحساب المسافة الكلية التي قطعتها السيارة، الشكل (5-5).
2) الزمن الكلي للحركة.
3) السرعة الوسطى.
4) التسارع الوسطي خلال الـ 142 الثانية الأولى من الحركة.

الحل:



الشكل (5-5)

1) المسافة الكلية التي قطعتها السيارة:

- بفرض x_1 المسافة التي قطعتها السيارة في الفترة t_1 عندئذ تكون المعادلة:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 \, t_1^{\ 2} + v_0 . t_1$$

السيارة تتحرك من السكون أي: $v_0 = 0$

وبالتالي: $$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = \frac{12.5 - 0}{11} = 1.14 \ m/s^2$$

بالتعويض: $$x_1 = \frac{1}{2}(1.14)\,(11)^2 = 69 \ m$$

- المسافة المقطوعة في المرحلة الثانية، هي $x_2 = 1.5\ \text{km} = 1500\ \text{m}$

- تتسارع السيارة في المرحلة الثالثة من 12.5 m/s إلى السرعة 20.8 m/s خلال 11s

وبالتالي المسافة x_3 التي تقطعها السيارة هي: $x_3 = \frac{1}{2} a_3 \, t_3^{\ 2} + v_0 . t_3$

علماً أن $v_0 = 12.5$ m/s $t_3 = 11$sec

$$a_3 = \frac{v_2 - v_0}{t_3} = \frac{20.8 - 12.5}{11} = 0.75 \ m/s^2$$

إذن يكون: $x_3 = 12.5\ (11) + 1/2\ (0.75)\ (11)^2$

$x_3 = 137.5 + 45.4 = 182.9$ m

- المرحلة الرابعة تسير السيارة بسرعة منتظمة مقدارها 20.8 m/s لمدة ثلاث دقائق أي 180s وبالتالي المسافة x_4 تساوي:

$x_4 = 20.8\ (180) = 3744$ m

- المرحلة الخامسة تسير السيارة بحركة متباطئة من السرعة 20.8 m/s إلى الصفر بمعدل $11\ m/s^2$ ولحساب المسافة نطبق العلاقة التالية: $v^2 - v_0^2 = 2\,a\,x$

حيث لدينا: $V=0$ $\quad V_0 = 20.8$ m/s $\quad a = -11$ m/s^2 ، $x = x_5$ نجد:

$$x_5 = \frac{0-(20.8)^2}{2(-11)} = 19.7\ m$$

أخيراً تكون المسافة الكلية التي قطعتها السيارة هي:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$x = 69 + 1500 + 182.9 + 3744 + 19.7 = 5515.6\ \text{m}$$

2) الزمن الكلي للحركة t يساوي:

$$x = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$$

نحسب فقط t_2 و t_5 ولدينا كل من $t_1 = 11$s ، $t_3 = 11$s ، $t_4 = 180$ s

لحساب t_2 حيث السيارة سارت بسرعة منتظمة مسافة 1500 m

والسرعة هي 12.5 m وبالتالي: $t_2 = 1500/12.5 = 120$ s

في المرحلة الأخيرة (الخامسة): $v = a.t + v_0$

$t = \dfrac{v-v_0}{a} = \dfrac{0-20.8}{-11} = 1.9\ s$ أي $t_5 = 1.9$ s

والزمن الكلي: $t = 11+120+11+180+1.9 = 323.9\ \text{s} \approx 324\ \text{s}$

3) السرعة الوسطى:

$$v = x/t = 5515.6/323.9 = 17\ \text{m/s}$$

4) حساب التسارع الوسطي:

نلاحظ أن الفترة تشمل المراحل الأولى والثانية والثالثة وبدأت المرحلة الرابعة؛ وبالتالي سرعتها هي 20.8 m/s وقيمة التسارع الوسطي هي: $a = 20.8/142 = 0.15$ m/s^2

مسألة محلولة 5:

نقذف كرة شاقولياً نحو الأعلى بسرعة $98\ ms^{-1}$ من سطح بناء ارتفاعها $100m$. الشكل (5-6)، والمطلوب:

(a) الارتفاع الأقصى الذي تبلغه الكرة بالنسبة إلى الأرض.

(b) الزمن اللازم للوصول إلى هذا الارتفاع.

(c) سرعة الكرة عندما تلامس الأرض.

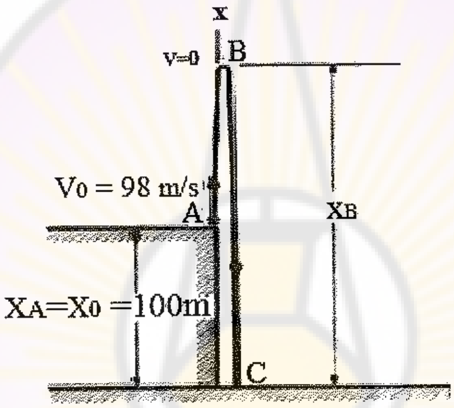
(d) الزمن الكلي المنصرم.

الحل:

بالنظر إلى الشكل (6-5) وباستخدامنا للمعادلتين (5.10) و(5.11) مع $x_0 = x_A = 100m$ $v_0 = 98ms^{-1}$ $t_0 = 0$ (لقد وضع مبدأ الإحداثيات C على الأرض) و $a = -g = -9.8ms^{-2}$ لدينا في كل لحظة t:

$$v = 98 - 9.8\,t$$

$$x = 100 + 98\,t - 4.9\,t^2$$



الشكل (6-5)

وفي النقطة ذات الارتفاع الأعظمي $v = 0$. إذن $98 - 9.8t = 0$ أو $t = 10s$ وباستبدال هذه القيمة في صيغة x لدينا:

$$x_B = 100 + 98(10) - 4.9(10)^2 = 590\,m$$

وللحصول على الزمن اللازم للوصول إلى الأرض (أي النقطة C) نجعل $x_c = 0$ لأن C هي مبدأ الإحداثيات الذي تم اعتماده. حينئذ:

$$0 = 100 + 98t - 4.9\,t^2$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ t، حلاهما: $t = 20.96s$ و $t = -0.96s$

إن الحل السالب يقابل الزمن للقذف $(t = 0)$ وينبغي حذفه؛ لأنه ليس له أي مدلول فيزيائي في هذه المسألة (قد يوجد له مدلول في مسائل أخرى) للحصول على السرعة في C ندخل قيمة $t = 20.96s$ في صيغة v_c ونحصل على:

$$v_c = 98 - 9.8(20.96) = -107.41\, ms^{-1}$$

تعني إشارة الناقص أن الكرة تتحرك نحو الأسفل. ننصح الطالب أن يتحقق من النتائج من أجل x_B و v_C باستعمال المعادلة (5.12) التي تكتب من أجل هذه المسألة:

$$v^2 = 9604 - 19.6\,(x - 100)$$

على الطالب أن يحل المسألة بوضع مبدأ الإحداثيات في A. حينئذ تكون:

$$x_0 = x_A = 0 \quad x_C = -100\,m$$

5.4 الحركة المنحنية:

a- السرعة:

لنعتبر الآن جسيماً يرسم مساراً منحنياً P، كما في الشكل(5-7) في الزمن t يكون الجسيم في النقطة A المعينة بشعاع الموضع $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ وفي اللحظة t يكون الجسيم في B المعينة بـ $\vec{r}\,' = \overrightarrow{OB} = x'\,\vec{u}_x + y'\,\vec{u}_y + z'\,\vec{u}_z$. بالرغم من أن الجسيم قد قطع القوس $AB = \Delta s$ إلا أن الانتقال الذي هو مقدار شعاعي، هو $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r}$. لنلاحظ حسب الشكل أن $\vec{r}\,' = \vec{r} + \overrightarrow{\Delta r}$ وتبعاً لذلك:

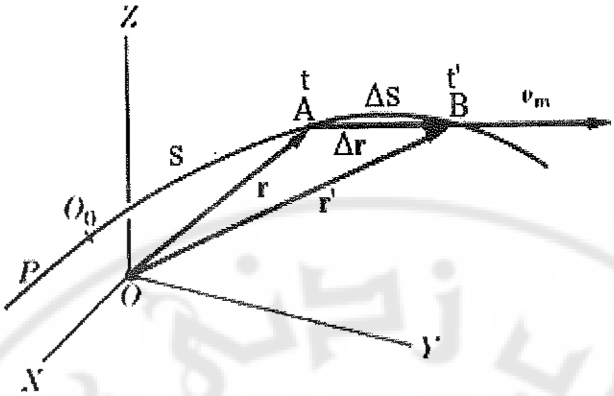
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}\,' - \vec{r} = (x'-x)\vec{u}_x + (y'-y)\vec{u}_y + (z'-z)\vec{u}_z$$

$$= (\Delta x)\vec{u}_x + (\Delta y)\vec{u}_y + (\Delta z)\vec{u}_z \qquad (5.13)$$

حيث: $\Delta x = x'-x \quad ,\Delta y = y'-y \quad ,\Delta z = z'-z$

والسرعة الوسطية التي هي أيضاً مقدار شعاعي، تعرف بـ:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (5.14)$$



الشكل (7-5): الانتقال والسرعة الوسطية في الحركة المنحنية.

أو باستعمال المعادلة (5.13):

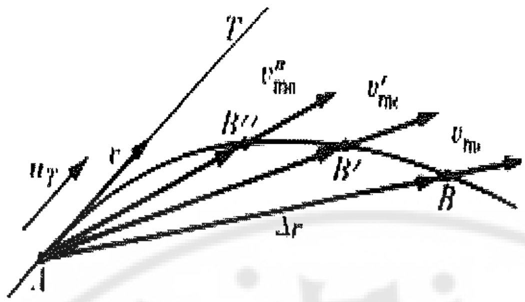
$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{u}_z \qquad (5.15)$$

تمثل السرعة الوسطية بشعاع مواز للانتقال $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$. ولحساب السرعة الآنية علينا كالسابق جعل Δt صغيراً جداً، ومنه:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (5.16)$$

إذا تناهت الآن Δt نحو الصفر تقترب النقطة B من النقطة A، كما تدل على ذلك النقاط 'B و "B ..... من الشكل(8-5). بالوقت نفسه يتغير الشعاع $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$ باستمرار بالقيمة وبالاتجاه، وكذلك تتغير السرعة الوسطية. وفي النهاية الحدية، عندما تصبح B قريبة جداً من A يكون للشعاع $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$ اتجاه المماس نفسه AT . إذن السرعة الآنية، في الحركة المنحنية، هي شعاع مماسي للمسار يعطي بـ:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (5.17)$$



الشكل (8-5) السرعة مماسية على المسار في الحركة المنحنية.

إذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلة (5.15) فسيكون للسرعة الصيغة:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \qquad (5.18)$$

مما يدل على أن مركبات السرعة وفق المحاور OX و OY و ZO وهي:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \ , \ u_y = \frac{dy}{dt} \ , \ u_z = \frac{dz}{dt} \qquad (5.19)$$

وأن القيمة الحسابية للسرعة هي:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (5.20)$$

يمكننا أن ننتقل من المعادلة (5.16) إلى المعادلة (5.17) بصورة مختلفة قليلاً. لتكن O_0 نقطة مقارنة اختيارية على المسار (الشكل 7-5) تعطي الكمية $s = O_0 A$ موضع الجسيم، مقاساً بالانتقال الذي يعانيه على طول المنحني. وكما هو الحال من أجل الحركة المستقيمة، يمكن أن يكون S موجباً أو سالباً، حسب الموضع النسبي لـ O_0 وللجسيم. عندما ينتقل الجسيم من A إلى B فإن الانتقال Δs وفق المنحني يعطى بطول القوس AB.

بضرب المعادلة (5.16) وتقسيمها على Δs، نحصل على:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

التي نشير فيها إلى أنه في الحد الأول $\Delta s \to 0$ عندما $\Delta t \to 0$ (الشكل 10-5) يمكننا أن نرى الآن على الشكل (9-5) أن قيمة $\Delta \vec{r}$ هي تقريباً مساوية إلى قيمة Δs وأن هاتين

القيمتين هما أكثر تقارباً من بعضهما بقدر ما تقترب B من A. وتمثل إذن نهاية $\Delta\vec{r}/\Delta s$ عندما تتناهى Δs نحو الصفر شعاعاً مقداره الوحدة واتجاهه المماس للمسار.

لدينا إذن:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_T \qquad (5.21)$$

ومن ناحية أخرى:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad (5.22)$$

يمكننا إذن كتابة $\vec{v}$ بالشكل:

$$\vec{v} = \vec{u}_T \ \frac{ds}{dt} = \vec{u}_T \ v \qquad (5.23)$$

حيث $ds/dt = v$ تعطي قيمة السرعة، ويعطي شعاع الوحدة $\vec{u}_T$ الاتجاه.

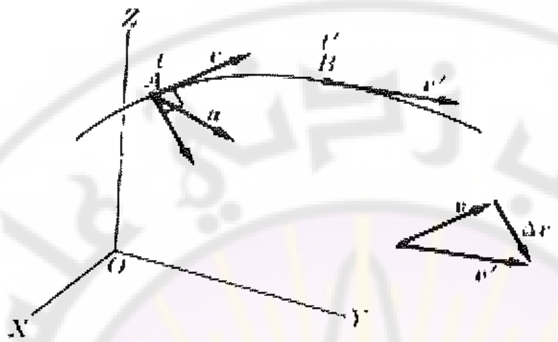
إن كون $v = ds/dt$ هي قيمة السرعة يتفق مع تعريفنا السابق للسرعة في المعادلة (5.2) لأن ds الآن هو الانتقال وفق المسار المنحني خلال الزمن dt. وهكذا يلعب ds في الحركة المنحنية الدور نفسه الذي يلعبه dx في الحركة المستقيمة. والاختلاف الوحيد بين المعادلتين (5.23) و (5.2) هو إدخال عامل الاتجاه المعطى بشعاع الوحدة $\vec{u}_T$ المحمول على المماس.

b- التسارع:

في الحركة المنحنية تتغير السرعة ، على العموم ، بالقيمة وبالاتجاه على السواء ، تتغير قيمة السرعة؛ لأن الجسيم يمكنه أن يتسارع أو يتباطأ ويتغير اتجاه السرعة لأن السرعة مماسية على المسار، وأن هذا ينحني باستمرار. يعطي الشكل(5-11) السرعة في الزمنين t و t' عندما يكون الجسيم في A وفي B على الترتيب. يشار إلى التغير الشعاعي للسرعة بالذهاب من A إلى B بـ Δv في المثلث المشكّل بالأشعة الثلاثة. وبعبارة أخرى حيث إنه

في المثلث $\vec{v}\,' = \vec{v} + \overrightarrow{\Delta v}$ لدينا عندئذٍ: $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}\,' - \vec{v}$ ينتج عن ذلك أن التسارع الوسطي في المجال الزمني Δt والذي هو شعاع، يعرف بـ:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (5.24)$$



الشكل (5-9): التسارع في الحركة المنحنية.

وهو مواز لـ Δv ولأن

$$\vec{v} = v_x\,\vec{u}_x + v_y\,\vec{u}_y + v_z\,\vec{u}_z$$

لدينا :

$$\overrightarrow{\Delta v} = \Delta v_x \vec{u}_x + \vec{u}_y\ \Delta v_y\,\vec{u}_y + \Delta v_z\,\vec{u}_z$$

$$a_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{u}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\,\vec{u}_z \qquad (5.25)$$

يعرف التسارع الآني الذي سنسميه فيما يلي، ببساطة، التسارع، بـ :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta s \to 0} \vec{a}\,' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \qquad (5.26)$$

إن التسارع هو شعاع له اتجاه التغير الآني للسرعة نفسه. ولما كانت السرعة تتغير في الاتجاه الذي ينحني وفقه المنحني، فالتسارع يتجه دوماً نحو تقعر المنحني وهو على العموم لا مماسي ولا ناظمي على المسار كما يدل على ذلك الشكل(5-10) إذا تذكرنا المعادلة (5.17) أمكننا أيضاً كتابة المعادلة (5.26) على الشكل:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (5.27)$$

بموجب المعادلة (5.25) نلاحظ أن:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\vec{u}_z \tag{5.28}$$

بحيث إن لمركبات التسارع وفق المحاور OX ، OY ، OZ القيم:

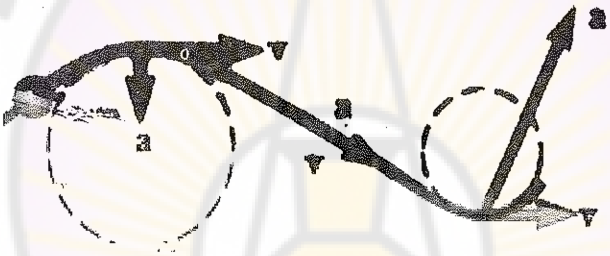
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad , a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad , a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{5.29}$$

أو بموجب المعادلتين (5.19) أو (5.27):

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad , a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad , a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{5.30}$$

أما قيمة التسارع، فهي:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{5.31}$$



الشكل (5-10) العلاقة الشعاعية بين السرعة والتسارع في الحركة المنحنية.

في الحركة المنحنية نعلم عادة معادلة المسار، أو بمعنى آخر نعلم إحداثيات الجسيم بدلالة الزمن. تعطى هذه الإحداثيات بالمعادلات:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

يمكننا بتطبيق المعادلات (5.19) و (5.29) حساب السرعة والتسارع.

وفي حالات أخرى، وهي بالضبط المسألة المعاكسة: نعلم مركبات التسارع بتابعية الزمن، أي:

$$a_x = a_x(t) \quad , \quad a_y = a_y(t) \quad , \quad a_z = a_z(t)$$

وعندئذ باستعمال المعادلات (5.29) وبالتكامل نحصل على مركبات السرعة، وبتكامل المعادلة (5.19) نحصل على الإحداثيات بدلالة الزمن.

- **الحركة المتغيرة بانتظام:**

إن الحالة التي يكون فيها التسارع ثابتاً بالقيمة وبالاتجاه على السواء لها أهمية خاصة. إذا كان (ثابتاً) $\vec{a} = const$ فلدينا بتكامل المعادلة (5.26):

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,.dt = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt = \vec{a}\,(t-t_0) \qquad (5.32)$$

حيث v_0 هي السرعة في اللحظة t_0 وكما أن: $\int_{v_0}^{v} dv = v - v_0$ لدينا عندئذ:

$$\vec{v} = \vec{a}\,(t-t_0) + \vec{v}_0 \qquad (5.33)$$

وهذا يعطي السرعة في كل لحظة. باستبدال ذلك في المعادلة (5.17) وبالتكامل نحصل على:

$$\int_{r_0}^{r} \overrightarrow{dr} = \int_{t_0}^{t} [\vec{v}_0 + \vec{a}\,(t-t_0)]\,dt = \vec{v}_0\int_{t_0}^{t} dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t} (t-t_0)\,dt$$

حيث r_0 يعطي الموضع في الزمن t_0 حينئذ:

$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{a}\,(t-t_0)^2 + \vec{v}_0(t-t_0) + \vec{r}_0 \qquad (5.34)$$

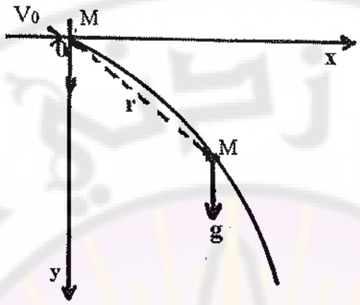
الذي يعطي موضع الجسيم في كل لحظة. ينبغي مقارنة هذه النتائج مع المعادلتين(5-10) و(5-11) اللتين حصلنا عليهما من أجل الحركة المستقيمة بتسارع ثابت. في الحركة المستقيمة كان للسرعة والتسارع منحى واحد باتجاهين متماثلين (أو متعاكسين).

أما من الآن فصاعداً فيمكن أن يكون لـ v_0 و a، في الحالة الأعم التي سنعالجها منحيان مختلفان. وعليه فإن v المعطاة بالمعادلة (5.33) ليست موازية لـ a ولكنها توجد دوماً في المستوى المعين بـ v_0 و $\vec{a}$. نرى أيضاً، حسب المعادلة (5.34)، أن نهاية الشعاع $\vec{r}$ تقع دوماً في المستوى الموازي لـ v_0 و a والمار من النقطة المعينة بـ $\vec{r}_0$. نستخلص من ذلك أن الحركة ذات التسارع الثابت هي دائماً مستوية. تدل المعادلة (5.34) أيضاً على أن مسار الحركة هو قطع مكافئ.

إن أحد أهم الأشكال لاستخدام هذه المعادلات هو تطبيقها على حركة القذائف. حيث يمكن تمييز حالات مختلفة لهذه المقذوفات، وذلك تبعاً لمنحى شعاع السرعة الابتدائية المعطى للجسيم لحظة بدء الحركة (القذيفة).

1) القذف الأفقي:

يدعى القذف أفقياً في حالة إعطاء الجسيم M سرعة ابتدائية منحاها وفق الأفق، الشكل (5-11). بإهمال مقاومة الهواء فإن القذيفة تخضع في أثناء حركتها إلى تسارع الجاذبية الأرضية g فقط، وبالتالي فإنه يمكن دراسة حركتها في المستوي (oxy) المبيّن في الشكل (5-11).



الشكل (5-11)

من المعادلة (5.34) يمكن أن نكتب:

$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t + \vec{r}_0$$

حيث: $\vec{r}$ - تمثل قيمة متجهة الموضع للمتحرك (القذيفة) في مستوي الحركة (oxy)، وبفرض النقطة o مبدأ الجملة منطبق على نقطة القذف فإن $\vec{r}_0$ يكون مساوياً للصفر.

بإسقاط المعادلة السابقة على جملة المحاور المعتبرة نجد أن:

$$x = v_{ox}\,t = v_o\,t$$

$$y = \frac{1}{2}\,g.t^2$$

من المعادلة الأولى نلاحظ أن الحركة وفق المحور (x) منتظمة، بينما الحركة وفق المحور y تكون حركة متغيرة بانتظام بتسارع ثابت g.

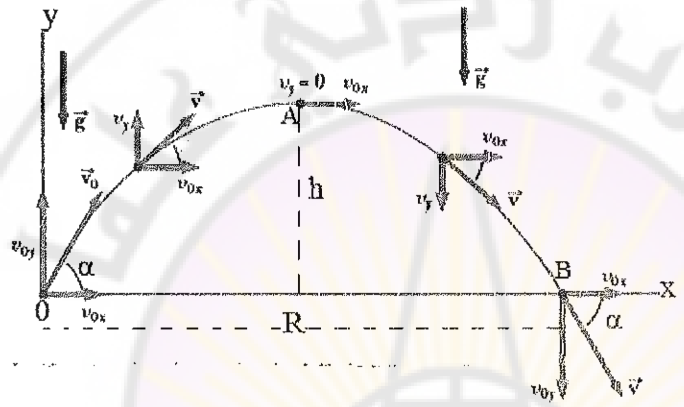
إن المعادلتين السابقتين تمثلان المعادلات الوسيطية لحركة القذيفة. وبحذف الزمن بين المعادلتين نجد أن معادلة مسار القذيفة من الشكل:

$$y = \left(\frac{g}{2v_0^2}\right).x^2$$

وهي تمثل معادلة قطع مكافئ ذروته منطبقة على مبدأ الإحداثيات.

2) القذف المائل:

وهو الحالة التي يصنع فيها شعاع السرعة الابتدائية المعطى للقذيفة زاوية تميل على الأفق بمقدار محدد α الشكل (5-12). بإهمال مقاومة الهواء فإن التسارع الذي تخضع له القذيفة هو تسارع الجاذبية الأرضية الثابت $\vec{g}$. لدراسة حركة القذيفة نختار جملة الإحداثيات oxy بحيث يصنع شعاع السرعة الابتدائية الزاوية α مع المحور x حسب الشكل (5-13).



الشكل(5-12)

في هذه الحالة: تسارع الثقالة $\vec{a} = \vec{g}$ نختار المستوى المعين بـ v_0 و $\vec{a} = \vec{g}$ كمستوى XY يكون فيه المحور Y متجهاً نحو الأعلى. بحيث إن $\vec{g} = -g\,\vec{u}_y$ والمبدأ O منطبق مع $\vec{r}_0$. حينئذ يكون لشعاع السرعة الابتدائية مركبتان وفق المحاور الإحداثية هي:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{u}_x + v_{0y}\,\vec{u}_y$$

حيث:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha \tag{5.35}$$

يمكن كتابة المعادلة (5.33) بدلالة المركبات (بجعل $t_0 = 0$) وبالتالي فإن شعاع السرعة للجسيم (القذيفة) في كل لحظة يكتب بالشكل:

$$\vec{v} = v_x\,\vec{u}_x + v_y\,\vec{u}_y = (v_{0x}\,\vec{u}_x + v_{0y}\,\vec{u}_y) - g\,t\,\vec{u}_y$$

بالمطابقة نجد:

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} - g\,t \tag{5.36}$$

مما يدل على أن مركبة v وفق OX تبقى ثابتة؛ لأنه لا يوجد تسارع في هذا الاتجاه. وكذلك فإن المعادلة (5.34) وبتعويض $\vec{r}_0 = 0$ و $t_0 = 0$ تصبح بدلالة المركبات :

$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y = (v_{0x}\,\vec{u}_x + v_{0y}\,\vec{u}_y) - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,\vec{u}_y$$

وبالمطابقة أيضاً ينتج:

$$x = v_{0x}t \qquad\qquad y = v_{0y}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad (5.37)$$

وهذا يعطي إحداثيات الجسيم بدلالة الزمن.

ويتم الحصول على الزمن اللازم للقذيفة كي تصل إلى أعلى نقطة A (ذروة المسار) بوضع $v_y = 0$ في المعادلة (5.36) لأنه في هذا الموضع تكون سرعة القذيفة أفقية. حينئذ :

$$t = \frac{v_{0y}}{g} \quad \Rightarrow \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (5.38)$$

ونحصل على الارتفاع الأعظمي للقذيفة h باستبدال هذه القيمة لـ t في المعادلة الثانية (5.37) مما يعطي :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad (5.39)$$

نحصل على الزمن اللازم للقذيفة لكي تعود إلى سوية الأرض في B، والذي يدعى زمن الطيران، بجعل $y = 0$ في المعادلة (5.37). وهذا الزمن هو بالطبع ضعف الزمن المعطى بالمعادلة (5.38) أي $2\,v_0 \sin\alpha / g$. إن المدى R=OB هو المسافة الأفقية التي اجتازتها القذيفة ويحصل عليه بوضع قيمة زمن الطيران في المعادلة الأولى (5.37) مما يعطي:

$$R = \frac{v_{ox}\,2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (5.40)$$

لنلاحظ أن المدى يكون أعظمياً من أجل $\alpha = 45^\circ$ نحصل على معادلة المسار بحذف t من المعادلتين (5.37) وهذا يعطي:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \sin^2 \alpha} x^2 + x.tg\ \alpha \qquad (5.41)$$

وهي معادلة قطع مكافئ؛ لأن كلاً من $tg\alpha$ وكذلك العامل x^2 ثابت.

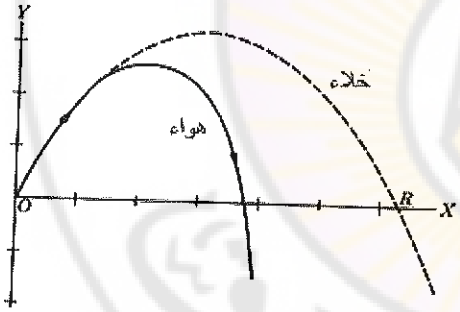
إن النتائج التي حصلنا عليها صالحة عندما يكون :

(1) المدى قصيراً بقدر كاف لكي نستطيع إهمال تقوس الأرض.

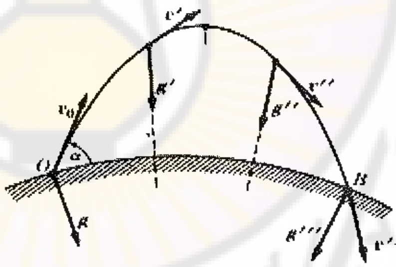
(2) الارتفاع ضعيفاً بقدر كاف لكي نستطيع إهمال تغير تسارع الثقالة مع الارتفاع.

(3) السرعة الابتدائية صغيرة بقدر كاف لكي نستطيع إهمال مقاومة الهواء.

أما من أجل القذائف بعيدة المدى، كالصاروخ عابر القارات مثلاً، فالحالة تتمثل كما في الشكل(5-13) حيث تتجه الأشعة جميعها g نحو مركز الأرض، وتتغير كذلك مع الارتفاع. إن المسار في هذه الحالة هو قوس من قطع ناقص. وإذا أخذنا بعين الاعتبار مقاومة الهواء فالمسار سينحرف عن القطع المكافئ كما يدل على ذلك الشكل(5-14) والمدى ينقص.



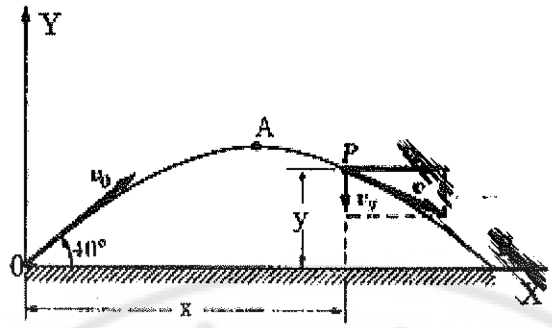
الشكل(5-14)



الشكل(5-13)

مسألة محلولة 6:

تطلق بندقية رصاصة بسرعة $200\ ms^{-1}$ صانعة زاوية 40^o مع سطح الأرض، الشكل(5-15). أوجد سرعة الرصاصة، وموضعها. بعد مرور 20 s. ثم أوجد كذلك المدى والزمن اللازم لكي تعود الرصاصة إلى الأرض.



الشكل (15-5)

الحل:

حسب الشكل (15-5)، وبملاحظة أن $v_0 = 200 ms^{-1}$ و $\alpha = 40^\circ$

نحصل على:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 153.2 ms^{-1}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 128.6 ms^{-1}$$

إذن فمركبات السرعة تعطى في كل لحظة بـ:

$$v_y = 128.6 - 9.8\,t \quad ms^{-1} \text{ و } v_x = 153.2\, ms^{-1}$$

وأن إحداثيات الرصاصة هي:

$$x = 153.2\,t \qquad y = 128.6\,t - 4.9\,t^2$$

من الواضح أنه من أجل: $t = 20\,s$ ، $v_x = 153.2\,ms^{-1}$ و $v_y = 153.2\,ms^{-1}$

إن كون v سالبة يعني أن الرصاصة تسقط. إن للسرعة القيمة :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 167.4 \quad ms^{-1}$$

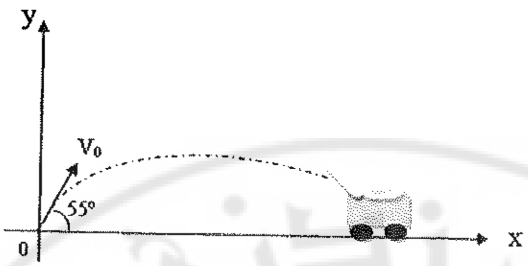
وكذلك فإن موضع P يعطى بـ: $x = 3.064\, m$ و $y = 612\, m$

ينبغي على الطالب التحقق من أن ارتفاع النقطة A يساوي 843.7m وأن المدى R=OB يساوي 4.021m وأن الزمن اللازم للذهاب من O إلى B هو 26.24 s.

مسألة محلولة 7:

يقذف مدفع قذيفة بزاوية تميل على الأفق بمقدار 55° وبسرعة فوهة تساوي 300 m/s. وتتقدم دبابة مباشرة نحو المدفع على أرض مستوية وبسرعة تساوي 3 m/s، كما هو موضّح

بالشكل(16-5)، والمطلوب: كم ينبغي أن تكون المسافة بين المدفع والدبابة في لحظة القذف إذا أريد للقذيفة أن تصيب الدبابة.



الشكل (16-5)

الحل:

باختيار جملة المقارنة عند فوهة المدفع وإحداثيات القذيفة الابتدائية $y_0 = 0$ $x_0 = 0$

سرعة القذيفة الابتدائية (مركبات السرعة):

$$v_{0x} = 300 \ \cos 55 = 172.1\, ms^{-1}$$

$$v_{0y} = 300 \sin 55 = 245.8\, ms^{-1}$$

ويتعين موضع القذيفة بعد انقضاء زمن t على لحظة الإطلاق فهي:

$$x = v_{ox} \ .t$$

$$y = v_{oy} \ .t - \frac{1}{2}\, g.t^2$$

بالتعويض: $y = 245.8\, t - 4.9\, t^2$ $x = 172.1\, t$

ويتحدد موضع الدبابة وحيث تسير بسرعة منتظمة بالعلاقات التالية:

$$x = x_0 - v_0\, t \qquad y = 0$$

حيث x_0 موضع الدبابة عند بدء الزمن (لحظة إطلاق القذيفة) وهي المسافة المطلوب تحديدها.

أما v_0 فهي سرعة الدبابة وهي في الاتجاه السالب لـ ox وبالتالي فإن معادلات حركة الدبابة في الجملة الإحداثية نفسها هي:

$$x = x_0 - 3\, t \qquad y = 0$$

وحتى تصيب القذيفة الدبابة يجب أن تكونا في موضع واحد في اللحظة نفسها، أي يكون لدينا معادلتين بمجهولين t و x_0

$$0 = 245.8\,t - 4.9\,t^2$$
$$x_0 - 3\,t = 172.1\,t$$

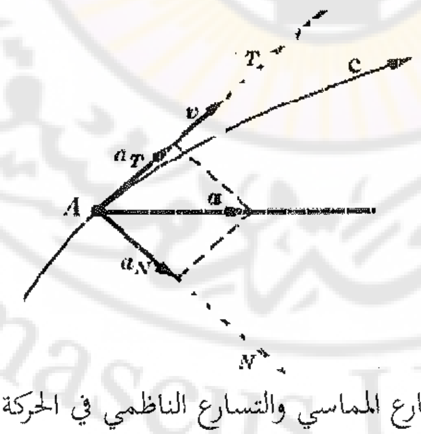
نجد من المعادلة الأولى أن $t = 50.2$ s

بالتعويض في المعادلة الثانية نجد:

$$x_0 = 172.1\,t + 3\,t = 175.1\,t = 175.1(50.2)$$
$$x_0 = 8790\,m = 8.79\,km$$

5.5 المركبتان المماسية والناظمة للتسارع:

لنعتبر جسيماً يرسم مساراً منحنياً (الشكل 17-5) وللتبسيط نفترض أن هذا المنحني مستوٍ ، ولكن النتائج التي سنجدها ستكون صالحة من أجل الحركة على أي منحى كان. في اللحظة t يكون الجسيم في الموضع A وبسرعة v وتسارع a. وحيث إن a يتجه نحو تقعر المنحني يمكننا تحليله إلى مركبة مماسية $\vec{a}_T$ موازية للماس AT وتدعى التسارع المماسي، ومركبة ناظمية $\vec{u}_T$ موازية للناظم AN وتدعى التسارع الناظمي. إن لكل من هاتين المركبتين مدلولاً فيزيائياً معيناً تماماً.



الشكل (17-5) التسارع المماسي والتسارع الناظمي في الحركة المنحنية.

عندما يتحرك الجسيم فيمكن لمقدار السرعة أن يتغير ويرتبط هذا التغير بالتسارع المماسي ، ويتغير كذلك اتجاه السرعة، ويرتبط هذا التغير بالتسارع الناظمي.

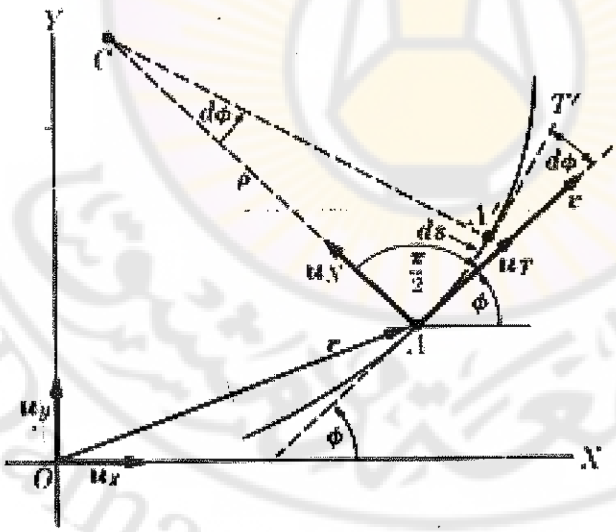
لنرسم في A (الشكل 18-5) شعاع الوحدة $\vec{u}_T$ مماسياً للمنحني. و تكتب السرعة، حسب المعادلة (5.23) على الصورة: $\vec{v} = v.\vec{u}_T$ ويصبح التسارع حينئذ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v.\vec{u}_T) = \quad \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{d\vec{u}_T}{dt}v$$

لو كان المسار مستقيماً لكان الشعاع $\vec{u}_T$ ثابتاً بالمقدار وبالاتجاه، ولكان $d\vec{u}_T/dt = 0$ ولكن بما أن المسار منحن فإن اتجاه $\vec{a}_N$ يتغير على طول المنحني؛ مما يعطي لـ $d\vec{u}_T/dt$ قيمة غير معدومة. علينا بعد ذلك أن نحسب $d\vec{u}_T/dt$. لندخل شعاع الوحدة $\vec{u}_N$ ناظمياً على المنحني ويتجه نحو التقعر. إذا رمزنا بـ ϕ إلى الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني في النقطة A مع المحور X أمكننا أن نكتب:

$$\vec{u}_T = \vec{u}_x \cos\phi + \vec{u}_y \sin\phi$$

$$\vec{u}_N = \vec{u}_x \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) + \vec{u}_y \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\vec{u}_x \sin\phi + \vec{u}_y \cos\phi$$



الشكل (18-5)

إذن:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \sin\phi \frac{d\phi}{dt}\vec{u}_x + \cos\phi \frac{d\phi}{dt}\vec{u}_y = \frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$$

وهذا يدل على أن $d\vec{u}_T / dt$ ناظمي على المنحني. لدينا أيضاً :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\phi}{ds}$$

حيث $ds=AA'$ هو القوس الصغير الذي يسير عليه الجسيم في المجال الزمني dt يتقاطع الناظمان على المنحني عند A وعند A' في نقطة C تدعى مركز التقوس بتسمية $\rho = CA$ نصف قطر التقوس عندئذٍ يمكننا كتابة:

$$d\phi / ds = 1/\rho \quad \text{أو} \quad ds = \rho\, d\phi$$

إذن:

$$d\phi / dt = v / \rho$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{u}_N \tag{5.42}$$

لندخل هذه النتيجة في علاقة dv/dt فنحصل على:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_N \tag{5.43}$$

إن الحد الأول $[\vec{u}_T(dv/dt)]$ هو شعاع مماسي للمنحني ، متناسب مع المشتق بالنسبة للزمن لمقدار شعاع السرعة، وهو يقابل التسارع المماسي a_T .

والحد الثاني $[\vec{u}_N(v^2 / \rho)]$ هو شعاع ناظمي على المنحني، وهو يقابل التسارع الناظمي a_N. وهو يرتبط بتغير الاتجاه؛ لأنه يقابل du_T / dt. أما فيما يخص المقادير فيمكننا أن نكتب:

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad a_N = \frac{v^2}{\rho} \tag{5.44}$$

مقدار التسارع في النقطة A هو إذن:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{(dv / dt)^2 + (v^4 / \rho^2)}$$

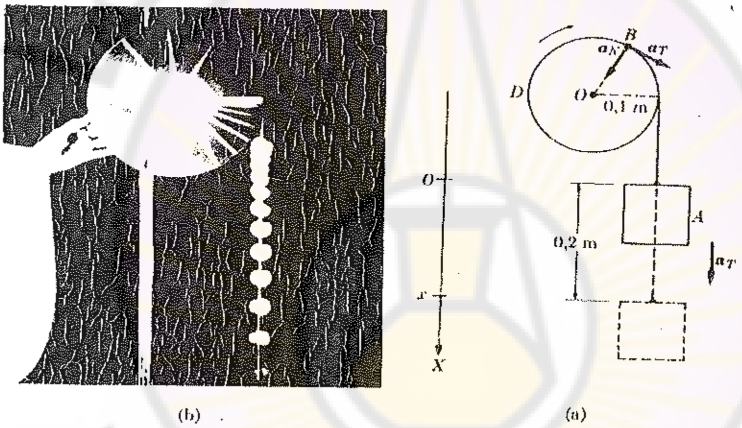
إذا كانت الحركة المنحنية منتظمة (أي إذا بقي مقدار السرعة ثابتاً) فإن $v = const$ بحيث إن $a_T = 0$ وأنه لا يوجد تسارع مماسي.

وبالمقابل إذا كانت الحركة مستقيمة (أي إذا لم يتغير اتجاه السرعة) فإن نصف قطر التقوس لا متناه $(\rho = \infty)$ بحيث إن $a_N = 0$ أي لا يوجد تسارع ناظمي. علينا أن نلاحظ أن النتائج

التي حصلنا عليها، فضلاً عن أنها تطبق على الحركة المستوية، فإنها تطبق أيضاً على الحركة في الفراغ.

مسألة محلولة 8:

يدور قرص D بحرية حول محور أفقي (الشكل 5-19). وهناك حبل ملفوف حول الحافة الخارجية للقرص وجسم A مرتبط بالحبل يسقط تحت تأثير الثقالة. إن الحركة A متسارعة بانتظام، ولكن تسارعها أصغر من التسارع الناجم عن الثقالة. في اللحظة $t = 0$ كانت سرعة الجسم A مساوية $0.04\ ms^{-1}$ وبعد ثانيتين سقط الجسم A بمقدار $0.2\ m$ والمطلوب: إيجاد التسارع الناظمي والمماسي في كل لحظة لنقطة ما من حافة القرص.



الشكل (5-19): تدل الصورة الفوتوغرافية بواسطة سلسلة من الومضات (b) على أن الكتلة تسقط بحركة متسارعة بانتظام (تحقق من ذلك بالقياس على الصورة).

الحل:

لنتخذ مبدأ الإحداثيات في النقطة المقابلة إلى $t = 0$.

فمعادلة حركة A المتسارعة بانتظام هي: $x = 0.04t + 0.03t^2$

نعلم أن $v_0 = 0.04ms^{-1}$ وأنه بالتالي: $x = 0.04\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2$

بجعل $t = 2s$ ينبغي أن يكون لدينا: $x = 0.2m$ ، إذن $a = 0.06\ ms^{-2}$. وبالتالي:

$$x = 0.04\ t + 0.03\ t^2$$

وأن سرعة A هي إذن: $$v = \frac{dx}{dt} = 0.04 + 0.06\,t$$

تعطي هذه المعادلة أيضاً سرعة أية نقطة B من حافة القرص. إذن فالتسارع المماسي لـ B تسارع نفسهA :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0.06 \quad ms^{-2}$$

بينما التسارع الناظمي لـ B ، لأن $\rho = 0.1\,m$ فله القيمة:

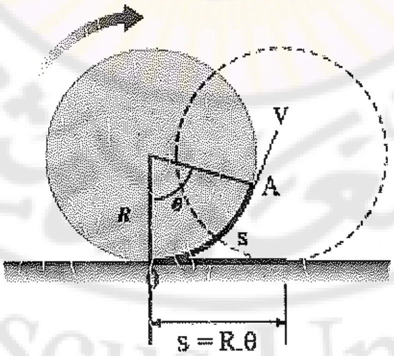
$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0.04 + 0.06t)^2}{0.1} = 0.016 + 0.048t + 0.036t^2 \; ms^{-2}$$

والتسارع الكلي للنقطة B هو إذن: $$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

5.6 الحركة الدائرية:

1) السرعة الزاوية: لنعتبر الآن الحالة الخاصة حين يكون المسار دائرياً أي لنعتبر الحركة الدائرية أن السرعة v ، المماسية للدائرة، تكون عمودية على نصف القطر $R = CA$. عندما نقيس المسافة على الدائرة بدءاً من النقطة O نجد حسب الشكل (20-5) وأن $s = R\,\theta$. إذن بتطبيق المعادلة (5.23)، وعلى اعتبار أن R يبقى ثابتاً نحصل على:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \tag{5.45}$$



الشكل (20-5) الحركة الدائرية.

تـدعى الكميـة $\frac{d\theta}{dt}$ بالسـرعة الزاويـة: وهـي تسـاوي مشـتق الزاويـة بالنسـبة للـزمن وتقـدر بالراديان في الثانية $rad\ s^{-1}$ أو باختصار: s^{-1} ويرمز لها بـ ω أي:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{5.46}$$

$$v = \omega R \tag{5.47}$$

يمكن وضع السرعة الزاوية على صورة مقدار شعاعي منحاه عمودي على مستوى الحركة في اتجاه تقدم اللولب اليميني الدائر في الاتجاه نفسه الذي يتحرك فيه الجسيم (الشكل 21-5) نـرى حسـب الشـكل أن $\vec{\omega} = \vec{u}_z\ d\theta / dt$ وأن $R = r \sin\gamma$ يمكننـا إذن بـدلاً مـن المعادلة (5.47) ، أن نكتب :

$$v = \omega\ r\ \sin\gamma$$

مما يدل على أنه لدينا، بالقيمة وبالاتجاه بآن واحد، العلاقة الشعاعية:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{5.48}$$

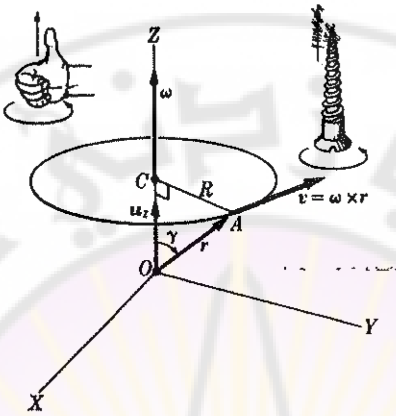
لنلاحظ أن هذا ليس صحيحاً إلا من أجل الحركة الدائرية أو الدورانية (حركة ذات r و γ ثابتين).

إن حالة الحركة الدائرية المنتظمة، أي الحركة التي تكون فيها: ثابت = ω هي ذات أهمية خاصة. في هذه الحالة تكون الحركة دورية والجسيم يمر بنقطة ما من الدائرة خلال مجالات زمنية متتالية متساوية.

إن الدور P هو الزمن اللازم لكي يقوم الجسيم بدورة كاملة. والتواتر υ هو عدد الدورات بوحـدة الـزمن. فـإذا دار الجسـيم n دورة في الـزمن t، فالـدور $P = t/n$ والتـواتر $\upsilon = n/t$ وعليه فإن هاتين الكميتين ترتبطان بالعلاقة التالية، التي كثيراً ما سنستخدمها:

$$\upsilon = \frac{1}{p} \tag{5.49}$$

عندما نقدر الدور بالثواني علينا أن نقدر التواتر بـ $(\text{ثانية})^{-1}$ أو s^{-1}. تدعى هذه الوحدة هرتز ويرمز لها باختصار *Hz*. لقد دعيت هذه الوحدة بالهرتز نسبة إلى الفيزيائي الألماني *Hertz* الذي كان أول من برهن تجريبياً على وجود الأمواج الكهرطيسية.



الشكل (5-21)

يطبق مفهوماً الدور والتواتر على الحوادث الدورية جميعها التي تظهر على شكل دوري، أي الحوادث التي تتكرر على المنوال نفسه كل مرة تنتهي فيها الدورة. مثال حركة الأرض حول الشمس فهي ليست دائرية ولا منتظمة، ولكنها دورية، وهي حركة تتكرر كل مرة تنهي فيها الأرض دورتها على مسارها. فالدور هو الزمن اللازم لإنهاء دورة كاملة، والتواتر هو عدد الدورات في الثانية والهرتز يقابل دورة في الثانية.

إذا كانت ω ثابتة فلدينا بتكامل المعادلة (5.46):

$$\int_{t_0}^{t} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt = \omega \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega \,(t - t_0)$$

على الطالب أن يقارن هذه العلاقة، التي تصلح في حالة الحركة الدائرية المنتظمة مع صيغة مشابهة تم الحصول عليها في حالة الحركة المستقيمة المنتظمة. نفرض عادة: $\theta_0 = 0$ و $t_0 = 0$ مما يعطي:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \Rightarrow \quad \theta = \omega . t \qquad (5.50)$$

ومن أجل دورة كاملة $t = P$ و $\theta = 2\pi$ ومنه ينتج :

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\,\upsilon \qquad (5.51)$$

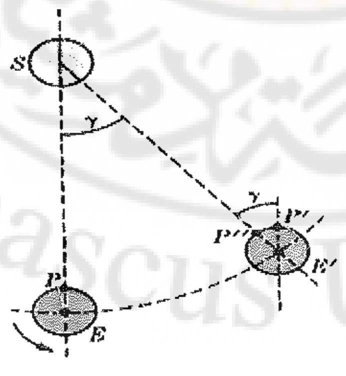
مسألة محلولة 9:

أوجد سرعة الأرض الزاوية حول محورها.

الحل:

ربما خطر للطالب لأول وهلة استخدام المعادلة (5.51) مع $\omega = 2\pi / P$ وأخذ القيمة $8.640 \times 10^4 s$ من أجل الدور P، وهي القيمة المقابلة ليوم شمسي وسطي. غير أنه إذا أجرينا ذلك على هذه الصورة فالنتيجة ستكون غير صحيحة. لنعد إلى الشكل(22-5) (الذي لم يرسم بمقياس صحيح) ولنعتبر نقطة P عندما تنهي الأرض دورة واحدة حول محورها القطبي، وهذا ما يدعى باليوم النجمي، فستكون الأرض حينئذ موجودة في 'E بسبب حركتها الانسحابية وستكون النقطة في 'P. ولكي ينقضي يوم كامل ينبغي أن تدور الأرض أيضاً زاوية γ حتى تصبح في "P مواجهة للشمس من جديد. إن دور دوران الأرض (اليوم النجمي) هو إذن أصغر بقليل من $8.640 \times 10^4 s$ وقيمته المقاسة هي:

$$P = 8.616 \times 10^4 s$$



الشكل (22-5) اليوم النجمي.

أي أقصر بحوالي 240s من اليوم الشمسي الوسطي. والسرعة الزاوية للأرض هي إذن:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 7.292 \times 10^{-5}\ rads^{-1}$$

إنه من السهل تقدير هذا الفرق البالغ 240 s. تقطع الأرض مدارها الكامل حول الشمس بـ 365 يوماً؛ مما يدل على أن الزاوية γ التي تقابل يوماً واحداً هي أصغر بقليل من 1° ولتكن 0.01745 rad وإن الزمن اللازم للدوران بهذه الزاوية بالسرعة الزاوية المعطاة لأعلاه هو ، وفق المعادلة (5.50):

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{1.745 \times 10^{-2}\ rad}{7.292 \times 10^{-5} \cdots rads^{-1}} = 239\ s$$

وهو مطابق بصورة ممتازة لنتيجتنا السابقة.

2) **التسارع الزاوي:** عندما تتغير السرعة الزاوية لجسيم مع الزمن فالتسارع الزاوي يعرف بالشعاع :

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{5.52}$$

وحيث إن الحركة الدائرية مستوية فإن اتجاه ω يبقى نفسه والعلاقة (5.52) تطبق كذلك على مقادير الكميات المعنية وعليه:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{5.53}$$

وعندما يكون التسارع الزاوي ثابتاً (أي عندما تكون الحركة الدائرية متسارعة بانتظام) يكون لدينا بتكامل المعادلة (5.53):

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha\ .dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \tag{5.54}$$

حيث ω_0 هي قيمة ω في اللحظة t_0. وبوضع المعادلة (5.54) في (5.46) نحصل على:

$$d\theta / dt = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

وبالتكامل من جديد نجد:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 \, dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0) \, dt$$

بحيث إن:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \tfrac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 \qquad (5.55)$$

تعطي هذه العلاقة الموضع الزاوي في كل لحظة.

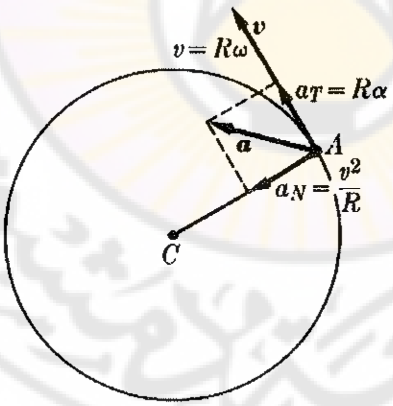
في حالة الحركة الدائرية نجد، بضم المعادلتين (5.43) و (5.47) مع المعادلة (5.53) ، أن التسارع المماسي له القيمة:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R \, \frac{d\omega}{dt} = R \, \frac{d^2\theta}{dt^2} = R \, \alpha \qquad (5.56)$$

وأن التسارع الناظمي (أو المركزي أو القطري) يساوي:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \qquad (5.57)$$

إن المركبتين الناظمية والمماسية للتسارع في الحركة الدائرية ممثلتان على الشكل(5-23).



الشكل (5-23)

لنلاحظ أنه في الحركة الدائرية المنتظمة (بدون تسارع زاوي $\alpha = 0$) لا يوجد تسارع مماسي، ولكن يبقى هناك تسارع ناظمي أو مركزي ناجم عن تغير اتجاه السرعة. وفي حالة الحركة

الدائرية المنتظمة هذه يمكننا حساب التسارع مباشرة باستخدام المعادلة (5.48)؛ ولأن ω ثابتة، لدينا عندئذ:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{5.58}$$

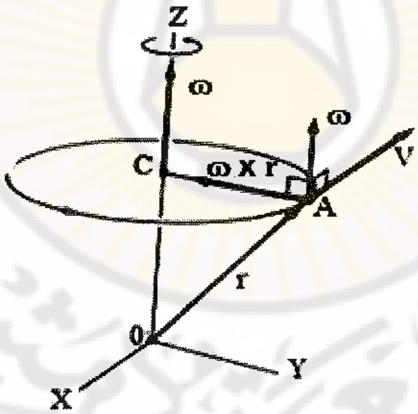
إذ إن $dr/dt = v$. وباستخدام المعادلة (5.48) مجدداً يمكننا كتابة التسارع على صورة أخرى:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{5.59}$$

ولما كانت الحركة الدائرية منتظمة، فالتسارع المعطى بالمعادلة (5.58) أو (5.59) ينبغي أن يكون مركزياً، ويمكن التحقق من ذلك بكل سهولة. لنعد إلى الشكل(24-5) فنرى أن الشعاع $\vec{\omega} \times \vec{v}$ يتجه نحو مركز الدائرة وأن قيمته هي:

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega\, v = \omega^2 R$$

لأن ω و v متعامدان، ولأن $v = \omega\, R$. تتطابق هذه القيمة مع نتيجتنا السابقة (5.57).



الشكل (24-5)

مسألة محلولة 10:

تدور الأرض بانتظام حول محورها بسرعة زاوية $\omega = 7.292 \times 10^{-5}\, s^{-1}$ أوجد، بدلالة درجة خط العرض λ، سرعة، وتسارع نقطة على سطح الأرض.

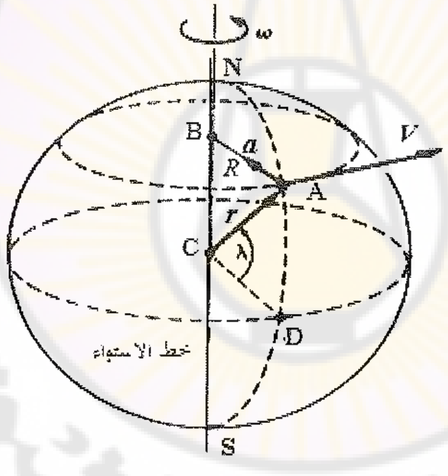
الحل :

بسبب الحركة الدورانية للأرض تتحرك كل النقاط على سطح الأرض بحركة دائرية منتظمة. تعرف درجة خط العرض لنقطة A (الشكل 25-5) بأنها الزاوية λ التي يصنعها نصف القطر $r = CA$ مع نصف القطر CD الواقع في مستوى خط الاستواء. عندما تدور الأرض حول المحور شمال جنوب (NS) ترسم نقطة مثل A دائرة مركزها B ونصف قطرها $R = AB$ بحيث إن:

$$R = r \cos \lambda$$

إن سرعة نقطة على سطح الأرض تكون مماسية للدائرة، وبالتالي موازية لخط الاستواء، ولها وفق المعادلة (5.47) القيمة :

$$v = \omega R = \omega r \cos \lambda$$



الشكل (25-5) السرعة والتسارع لنقطة ما على الأرض.

التسارع a مركزي؛ لأن الحركة منتظمة، وبالتالي فهو يتجه نحو B، وله وفق المعادلة (5.57) القيمة:

$$a = \omega^2 R = \omega^2 \ .r \ .\cos \lambda \qquad (5.60)$$

بإدخال قيمتي السرعة الزاوية ($\omega = 7.292\times10^{-5} s^{-1}$) ونصف قطر الأرض ($r = 6.35\times10^{6} m$) نجد:

$$v = 459 \cos\lambda \quad ms^{-1}$$

ومن أجل التسارع:

$$a = 3.34\times10^{-2} \cos\lambda \quad ms^{-2} \tag{5.61}$$

وعلى خط الاستواء تأخذ v قيمتها العظمى، ولتكن: $v = 459\, ms^{-1}$ أو $1.652 km hr^{-1}$ إننا لا نشعر بتأثيرات سرعة كبيرة بهذا القدر، لأننا ننتقل دوماً بهذه السرعة وأجسامنا كإحساساتنا معتادة على ذلك. غير أننا نشعر حالاً بتغير هذه السرعة. وبالمثل فإن القيمة العظمى للتسارع هي $3.34\times10^{-2} ms^{-2}$ وتساوي حوالي 0.3% من تسارع الثقالة.

مسائل

5.1 يتحرك جسم بسرعة ابتدائية تساوي $3\ ms^{-1}$، وله تسارع ثابت يساوي $4ms^{-2}$ في اتجاه السرعة نفسها. ما هي سرعة الجسم وما هي المسافة المقطوعة خلال 7s ؟ حل المسألة نفسها من أجل جسم تسارعه في الاتجاه المعاكس للسرعة، اكتب صيغة الانتقال بدلالة الزمن.

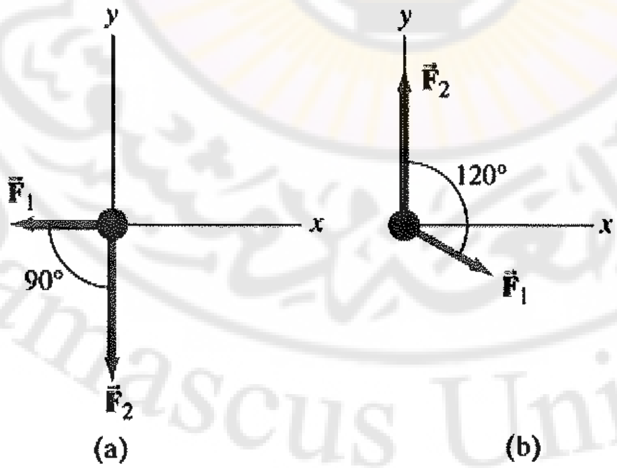
5.2 تقطع طائرة قبل إقلاعها مسافة 600 m خلال 15s بفرض أن التسارع ثابت. احسب سرعة الإقلاع، واحسب كذلك التسارع مقدّراً بـ ms^{-2}.

5.3 تنطلق سيارة بدءاً من السكون فتصل إلى سرعة $17\ ms^{-1}$ خلال 15 s والمطلوب:

(a) احسب التسارع الوسطي مقدراً بـ $m\ s^{-2}$ والمسافة المقطوعة.

(b) بفرض أن التسارع ثابت كم ينبغي من الثواني إضافة إلى ما سبق لكي تصل السيارة إلى سرعة $22\ ms^{-1}$ ؟ ما هي المسافة الكلية التي ستقطعها السيارة حينئذ؟

5.4 تمارس قوتان $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ على جسم كتلته 18.5 kg ليتحرك بدون احتكاك كما هو موضّح في الشكل (2-2)، إذا كانت قيمة $F_1 = 10.2N$ و $F_2 = 16.0\ N$ أوجد محصلة القوة المطبقة على الجسم، والتسارع كذلك في كلتا الحالتين a ، b



الشكل (2-26)

5.4 تنطلق سيارة بدءاً من السكون، وتتحرك بتسارع $1ms^{-2}$ خلال 1s نوقف عندئذ المحرك، ونترك السيارة ،تتباطأ بسبب الاحتكاك، خلال 10 s بتسارع $5\ cm\ s^{-2}$ ثم نطبق الفرامل تقف السيارة بعد 5 ثوانٍ إضافية. احسب المسافة الكلية التي قطعتها السيارة مثل بيانياً v بدلالة الزمن t.

5.5 تنطلق سيارة من السكون بتسارع $4\ ms^{-2}$ خلال 4s ثم تتحرك بحركة منتظمة خلال 10 ثواني تالية، ومن ثم نطبق الفرامل فتتباطأ السيارة بتسارع $8ms^{-2}$ حتى تقف، ارسم مخطط السرعة بدلالة الزمن، وبرهن أن المساحة المحصورة بين المنحني ومحور الزمن تقيس المسافة الكلية المقطوعة.

5.6 تقف سيارة أمام الإشارة الحمراء، وعندما تنتقل الإشارة الضوئية إلى الأخضر تتسارع السيارة بانتظام خلال 6s بتسارع قوة $2\ ms^{-2}$ ومن بعدها تتحرك بسرعة منتظمة. في اللحظة التي أقلعت فيها السيارة عند الضوء الأخضر كانت هناك شاحنة تسير بنفس الاتجاه بسرعة منتظمة قدرها $10\ ms^{-1}$ متجاوزة إياها، بعد كم من الوقت وعلى أي بعد من الإشارة الضوئية ستلحق السيارة بالشاحنة ؟

5.7 يتحرك جسم على طول مستقيم وفق العلاقة: $x = 16t-6t^2$ حيث x تقاس بالمتر و t بالثانية والمطلوب:

(a) أوجد موضع الجسم من أجل $t=1\ s$.

(b) في أية لحظة يمر الجسم من المبدأ ؟.

(c) احسب السرعة الوسطية في المجال الزمني $0\langle t\langle 2s$.

(d) أوجد الصيغة العامة للسرعة الوسطية في المجال الزمني $t_0\langle t\langle(t_0 + \Delta t)$

(e) احسب السرعة الآنية.

(f) احسب السرعة الآنية من أجل $t = 0$

(g) في أية لحظة وفي أي موضع سيكون الجسم ساكناً ؟

(h) أوجد الصيغة العامة للتسارع الآني.

(i) في أي لحظة يكون التسارع الآني معدوماً ؟

(j) ارسم على جملة المحاور نفسها منحنيات تغير x مع الزمن، v مع الزمن، و a مع الزمن.

(k) في أية لحظة تكون الحركة متسارعة أو متباطئة؟

5.8 يتحرك جسم على مستقيم وفق القانون $v = t^3 + 4t^2 + 2$ فإذا كانت $x = 4m$ عندما يكون $t = 2s$، أوجد قيمة x عندما يكون $t = 3s$. ثم أوجد كذلك التسارع.

5.9 يعطى تسارع جسم يتحرك على مستقيم بـ: $a = 4 - t^2$ حيث a مقدر بـ ms^{-2} و t بالثانية. أوجد صيغتي السرعة والانتقال بدلالة الزمن، علماً بأنه من أجل: $x = 0$ ، $v = 4ms^{-1}$.

5.10 إن تسارع جسم يتحرك على مستقيم هو: $a = -K\ v^2$ حيث: K ثابت. تعطى $v = v_0$ من أجل $t = 0$. أوجد السرعة والانتقال بدلالة الزمن. أوجد كذلك v بدلالة x.

5.11 يتحرك جسم بحركة مستقيمة حيث يعطى التسارع بـ: $a = 31 - 4v$
(مع الشروط الابتدائية $x = 0$ و $v = 4$ من أجل $t = 0$) أوجد: V بدلالة الزمن و x بدلالة الزمن وكذلك x بدلالة V.

5.12 إن موضع جسم متحرك بدلالة الزمن مبيّن على الشكل (5-27). والمطلوب بيّن:

(a) في أي مجال تتم الحركة في اتجاه X الموجب أو السالب ؟

(b) في أية لحظة تكون الحركة متباطئة أو متسارعة ؟

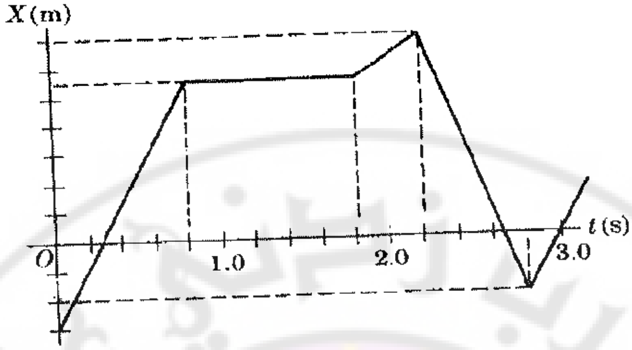
(c) متى يمر الجسم بالمركز ؟

(d) متى تكون السرعة معدومة ؟ ارسم كذلك مخططاً للسرعة وللتسارع بدلالة الزمن. قدر حسب المخطط السرعة الوسطية من أجل المجالات الزمنية:

(1) $t = 1s$ و $t = 3s$

(2) $t = 1s$ و $t = 2.2s$

(3) $t = 1s$ و $t = 1.8s$

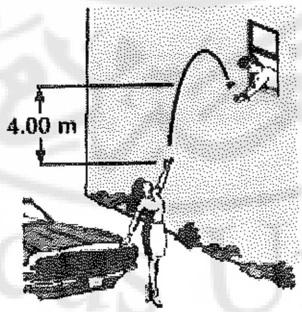


الشكل (5-27)

5.13 يسقط حجر من منطاد هو نفسه يهبط بسرعة منتظمة تقدر بـ $12ms^{-1}$. احسب السرعة والمسافة التي يقطعها الحجر بعد 10s. حل المسألة نفسها في حالة المنطاد الذي يرتفع بالسرعة نفسها.

5.14 يُرمى حجر شاقولياً نحو الأعلى بسرعة $20\ ms^{-1}$. متى تصبح سرعته مساوية $6\ ms^{-1}$ وما هو ارتفاعه حينئذ ؟

5.15 تلقي طالبة سلسلة مفاتيح باتجاه صديقتها التي تنظر إليها عبر نافذة ارتفاعها 4m وتمسك سلسلة المفاتيح بعد 1.5 s من إلقائها كما هو موضح بالشكل (5-28) والمطلوب حساب السرعة الابتدائية التي ألقيت بها سلسلة المفاتيح ، وما هي سرعة هذه السلسلة تماماً قبل إمساكها.



الشكل (5-28)

5.16 يُرمى حجر نحو الأعلى من قعر بئر عمقه 30m بسرعة ابتدائية قدرها $80ms^{-1}$. احسب الزمن اللازم للحجر لكي يصل إلى حافة البئر، وكذلك سرعته. ناقش الإجابات الممكنة .

5.17 يرمي رجل من قمة مبنى كرة شاقولياً نحو الأعلى بسرعة $40\ ms^{-1}$. تصل الكرة إلى الأرض بعد مرور (4.25 s). ما هو الارتفاع الأعظمي الذي تصل إليه الكرة؟ ما هو ارتفاع المبنى؟ بأي سرعة تصل الكرة إلى الأرض ؟

5.18 يسقط جسم سقوطاً حراً مسافة 74m في الثانية الأخيرة من حركته . بفرض أن الجسم انطلق من السكون، والمطلوب عيّن من أي ارتفاع سقط الجسم وما هو الزمن اللازم له لكي يصل الأرض.

5.19 احسب السرعة الزاوية لقرص يدور بحركة منتظمة بمعدل 13.2 راديان بالثانية. احسب كذلك الدور وتواتر الدوران. كم من الزمن يستغرقه قرص

(a) كي يدور ?780. (b) كي يتم 12 دورة.

5.20 احسب السرعة الزاوية، والسرعة الخطية، والتسارع المركزي للقمر ، علماً بأن القمر يقوم بدورة كاملة في 28 يوماً، وأن البعد الوسطي بين الأرض والقمر يساوي $38.4\times10^{4}\,km$. ثم أوجد قيمة السرعة و التسارع المركزي للأرض في دورانها حول الشمس. إن نصف قطر المسار الأرضي يساوي $1.49\times10^{11}\,m$.وإن دور حركتها يساوي $3.16\times10^{7}\,s$

5.21 أوجد قيمة السرعة والتسارع المركزي للشمس في حركتها عبر المجرة . إن نصف قطر مسار الشمس يساوي $2.4\times10^{20}m$. ودور حركتها يساوي $6.3\times10^{15}s$.

5.22 دولاب قطره 3m يدور بمعدل 120 دورة في الدقيقة. والمطلوب حساب:

(a) تواترها.

(b) دورها.

(c) السرعة الزاوية.

(d) السرعة الخطية لنقطة على محيطها.

5.23 تزداد السرعة الزاوية لدولاب بانتظام من $20\ \text{rad s}^{-1}$ إلى $30\ \text{rad s}^{-1}$ خلال 300 ثانية. احسب التسارع الزاوي والزاوية الكلية التي دارها الدولاب خلال هذا الزمن.

5.24 دولاب قطره 2.6 m تتناقص سرعته الزاوية بانتظام من 100 دورة في الدقيقة في اللحظة $t=0$ وحتى الوقوف عن الدوران من أجل $t=4s$. احسب التسارع الناظمي والتسارع المماسي لنقطة على محيطه من أجل $t = 2\ s$.

5.25 يؤثر حقل مغناطيسي على إلكترون سرعته 4.0×10^{5} m/s فيجبره على رسم مسار دائري نصف قطره 3.0 m. أوجد تسارعه المركزي .

5.26 جسم، كان في البدء ساكناً ($\theta = 0$ و $\omega = 0$ من أجل $t = 0$) يتسارع على مسار دائري نصف قطره 1.3m وفق المعادلة $a = 120t^2 - 48t + 16$ والمطلوب:

1) إيجاد الموضع الزاوي والسرعة الزاوية للجسم بدلالة الزمن.

2) مركبتي التسارع المماسية والناظمية.

5.27 تتحرك نقطة على دائرة وفق القانون $s = t^3 + 2t^2$ حيث s يقاس بالمتر على الدائرة و t بالثواني. إذا كان التسارع الكلي يساوي $16\sqrt{2}\ ms^{-2}$ من أجل t=2s ، احسب نصف قطر الدائرة .

5.28 يتحرك جسيم على دائرة وفق القانون $\theta = 3t^2 + 2t$ حيث θ تقاس بالراديان و t بالثواني . احسب السرعة الزاوية والتسارع الزاوي بعد 4s .

5.29 تُعطى إحداثيات جسيم متحرك بـ $x = t^2$ و $y = (t-1)^2$ أوجد سرعته الوسطية وتسارعه في المجال بين t و $t + \Delta t$. طبق النتيجة على الحالة التي يكون فيها $t = 2s$ و $\Delta t = 1s$ وقارن ذلك مع قيمتي السرعة، والتسارع من أجل $t = 2s$. ارسم كل الأشعة الداخلة في الحساب .

5.30 يُعطى موضع جسيم في اللحظة t بـ $x = A\sin\omega t$ أوجد سرعته وتسارعه بدلالة t و x .

5.31 يتحرك جسيم على القطع المكافئ: $y = x^2$ بحيث تكون $v_x = 3ms^{-1}$ في كل لحظة. احسب قيمة واتجاه السرعة والتسارع للجسيم في النقطة $x = 2/3\ m$.

5.32 تُعطى إحداثيات متحرك بالعلاقتين التاليتين:

$$y = 2\cos\omega t \quad و \quad x = 2\sin\omega t$$

والمطلوب:

(a) أوجد معادلة المسار بالإحداثيات الديكارتية.

(b) احسب قيمة السرعة في كل لحظة.

(c) احسب المركبة المماسية والمركبة الناظمية للتسارع في كل لحظة. عيّن نوع الحركة الممثلة بالمعادلتين السابقتين.

5.33 إذا كان لمتحرك الإحداثيات $x = a.t$ و $y = b.\ \sin a\,t$ ، برهن أن قيمة التسارع متناسبة مع بعد الجسم المتحرك عن المحور. مثل بيانياً المسار.

5.34 يتحرك جسيم على طول منحنٍ يعطى وسيطياً بالمعادلات(x، y، z تقدر بالمتر و t بالثانية):

$$z = \sin 2t \ ، \ y = 3\cos 2t \ ، \ x = e^{-t}$$

والمطلوب:

1- عرف السرعة الوسطية، والسرعة الآنية.

2- عيّن شعاع السرعة، والتسارع في أية لحظة t .

3- أوجد مقدار السرعة، والتسارع في اللحظة t=0 .

5.35 تُطلق قذيفة بزاوية 35^o. فتصطدم بالأرض على مسافة أفقية قدرها 4km من المدفع. والمطلوب حساب:

(a) السرعة الابتدائية.

(b) الزمن الذي استغرقته القذيفة للوصول إلى الأرض.

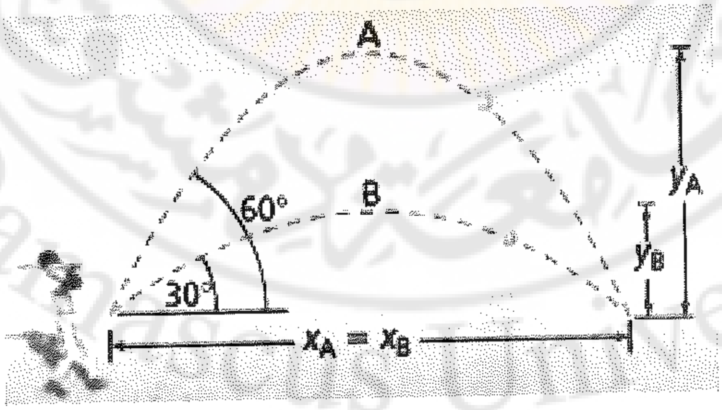
(c) الارتفاع الأعظمي.

(d) السرعة في نقطة الارتفاع الأعظمي.

5.36 تطير طائرة أفقياً على ارتفاع h وبسرعة v. في اللحظة التي تكون فيها الطائرة تماماً فوق مدفع مضاد للطائرات يفتح المدفع النار على الطائرة. احسب السرعة الصغرى v_0 للقذيفة و زاوية التصويب α حتى يصيب المدفع الطائرة.

5.37 تطير طائرة أفقياً على ارتفاع 1km وبسرعة $200\ km\ hr^{-1}$ تلقى قنبلة مفروض بها إصابة سفينة تتحرك في الاتجاه نفسه بسرعة $20\ km\ hr^{-1}$. برهن أنه ينبغي ألقاء القنبلة عندما تكون المسافة الأفقية بين الطائرة والسفينة 730 m. حل المسألة نفسها في حالة تحرك السفينة في الاتجاه المعاكس.

5.38 أطلقت كرتي بيسبول بالسرعة الابتدائية نفسها 25m/s كما هو موضّح بالشكل (5-29) والمطلوب: حساب المدى والارتفاع بتابعية الزمن.



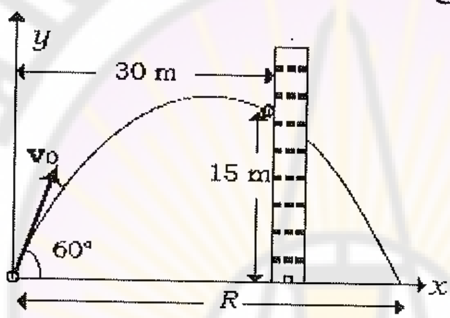
الشكل (5-29)

5.39 يتحرك جسيم على المحور X وفق العلاقة: $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$ خلال أي مجال زمني يتحرك الجسيم نحو X الموجبة ؟ نحو X السالبة؟ خلال أي مجال زمني تكون الحركة متسارعة؟ متباطئة ؟ مثل بيانياً x و v و a بدلالة الزمن.

5.40 تطلق قذيفة من سطح الأرض بزاوية °60 فوق الأفق فتصيب حائطاً يبعد 30m على ارتفاع 15m، كما في الشكل (30-5) والمطلوب؟

1) ما هي سرعة الإطلاق.

2) ما أعلى ارتفاع تصل إليه وما مداها؟

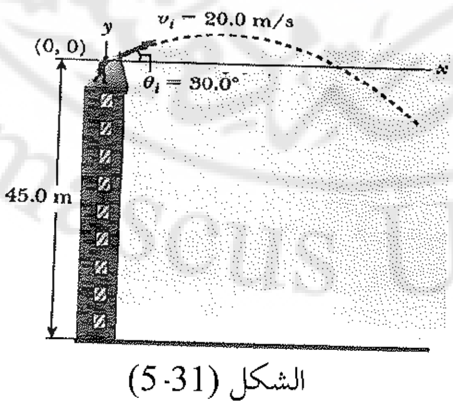


الشكل (30-5)

5.41 يقذف رجل حجراً من قمة بناء كما في الشكل (31-5) باتجاه الأعلى بزاوية 30.0? بالنسبة للأفق، وبسرعة ابتدائية 20 m/s، علماً أن ارتفاع البناء هو 45m والمطلوب:

A - ما هي المدة الزمنية التي يستغرقها الحجر حتى يصل إلى الأرض؟

B - ما هي سرعة الحجر قبيل اصطدامه بالأرض؟



الشكل (31-5)

5.42 أطلق جسم من سطح عمارة وباتجاه رأسي إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها 20 m/s وكانت حركته كما بالشكل (32-5). باعتبار $g = 10\ m/s^2$ احسب:

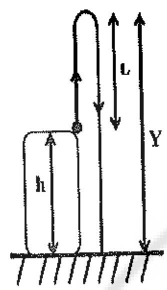
-1 مكان الجسم عند t=1 s .

-2 أقصى ارتفاع للجسم فوق سطح العمارة.

-3 زمن وصول الجسم لأقصى ارتفاع.

-4 سرعة الجسم على ارتفاع 15m فوق سطح العمارة.

-5 ارتفاع العمارة إذا ارتطم الجسم بالأرض بعد 7 ثوان من إطلاقه.



الشكل (32-5)

5.43 ألقي حجر في بئر بسرعة ابتدائية مساوية للصفر، فسمع صوت ارتطامه بسطح الماء بعد زمن قدره 4 s، الشكل (33-5)، علماً أن $g = 9.8\ m/s^2$ احسب:

1 -عمق سطح الماء D.

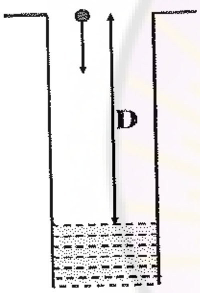
2 -سرعة الحجر عند ارتطامه بسطح الماء.

3 -سرعة الحجر بعد زمن 2 s من إلقائه.

4 -عمق الحجر بعد زمن 2 s من إلقائه.

5 -سرعة الحجر في منتصف المسافة D.

6 -زمن وصول الحجر لمنتصف المسافة D.

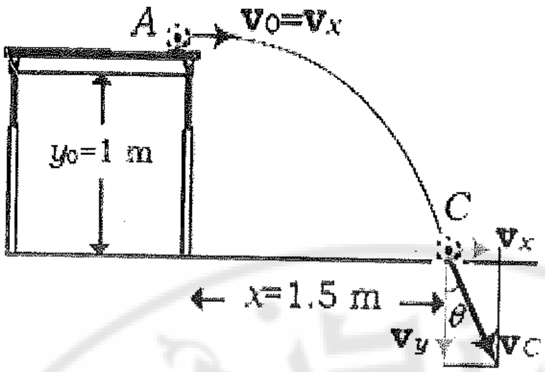


الشكل (33-5)

5.44 تتدحرج كرة عن سطح طاولة ارتفاعها 1m، فتسقط على بعد 1.5 m من حافتها كما هو موضّح في الشكل (34-5) والمطلوب:

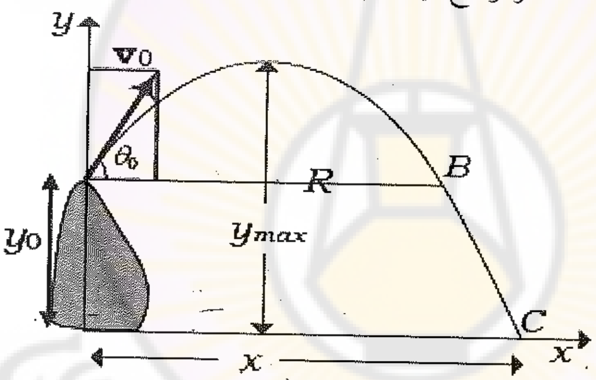
1) ما هي سرعة الكرة الابتدائية، وزمن طيرانها؟

2) ما قيمة واتجاه سرعة الكرة لحظة وصولها إلى الأرض؟



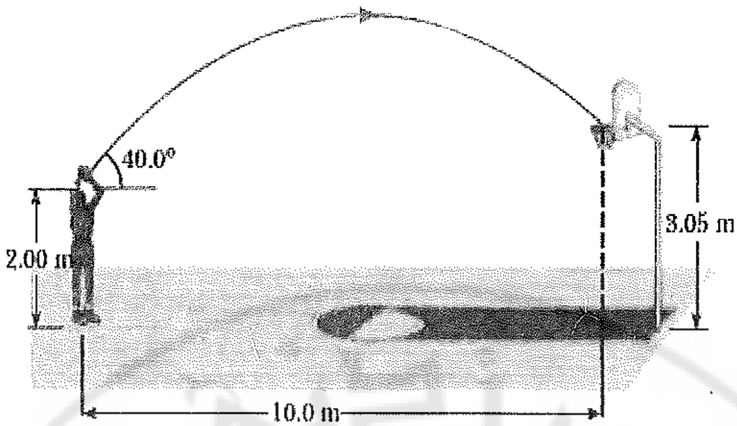
الشكل (5-34)

5.45 تُطلق قذيفة من ذروة هضبة ارتفاعها 300 m بسرعة ابتدائية 20 m/s وتصنع زاوية 30° مع الأفق كما هو موضّح بالشكل (5-35) والمطلوب:معادلة مسار القذيفة، وأعلى ارتفاع تصل إليه، ومداها، وموضع ارتطامها بالأرض.



الشكل (5-35)

5.46 لاعب كرة سلّة طوله 2 m يقف على أرض الملعب على بعد 10 m من السلّة كما في الشكل (5-36). فيما إذا سدد الكرة بزاوية تميل ?40 على الأفق. والمطلوب: إيجاد السرعة الابتدائية التي يجب على اللاعب رمي الكرة وتسديدها دون لمسها للوحة التسديد، علماً أن ارتفاع السلّة هو (3.05) .



الشكل (5-36)

5.46 أوجد زاويتي القذف لكرة قذفت من الأرض بسرعة 40 m/s بحيث تكاد تجتاز حائطاً ارتفاعه 12 m ويقع على بعد 30 m من نقطة القذف.

5.47 يريد سائق مغامر أن يقفز بسيارته فوق ثماني سيارات متوقّفة جنباً إلى جنب تحت منصة انطلاق أفقية كما هو موضح بالشكل(37-5) والمطلوب:

1- ما هي أصغر سرعة يمكن أن ينطلق بها السائق من منصة الانطلاق؟ علماً أن ارتفاعها عن السيارات المتوقّفة 1.5 m وكذلك تشكل السيارات المتوقفة مسافة 22 m.

2- إذا كانت منصة الانطلاق تميل على الأفق بزاوية 7؟، في هذه الحالة ما هي أصغر سرعة يمكن للسائق الانطلاق بها ؟

الشكل (5-37)

الفصل السادس

الحركة النسبية

6.1 مقدمة.

6.2 السرعة النسبية.

6.3 الحركة النسبية الانسحابية المنتظمة.

6.4 الحركة النسبية الدورانية المنتظمة.

6.5 الحركة بالنسبة إلى الأرض.

6.6 تحويل لورنتس.

6.7 تحويل السرع.

6.8 نتائج تحويل لورنتس.

(1) تقلص الأطوال.

(2) تمدد الزمن.

الفصل السادس

الحركة النسبية

Relativity

6.1 مقدمة:

إن فهم نظرية أينشتاين التي سماها(النظرية النسبية) يتطلب معرفة عالية في الرياضيات. وقد كان يشاع سابقاً، أن أربعين عالماً فقط على وجه الأرض يفهمون وحدهم النظرية النسبية وسواء صحت هذه الإشاعات أو لم تصح فإن مضمونها يدل على شيءٍ واحد هو: أن هذه النظرية صعبة وفهمها كاملةً يستعصي حتى على المختصين أحياناً. نعم ولكنها مع ذلك ليست إعجازاً وخاصة إذا كان الشارح لها متملكاً لمضمونها وأحسن عرضها. إن الطول يتقلص بفعل السرعة والزمن يتمدد بفعل السرعة، وما هو حقيقة مبرمة بالنسبة لي لا يكون كذلك بالنسبة لك فكل شيء نسبي في هذا الكون.

فالنظرية النسبية هي حجر الزاوية لكافة فروع العلم الحديث، وتعد ثورة علمية قوّضت باندلاعها كافة المفاهيم والمبادئ العلمية والفلسفية التي كانت قائمة قبلها واستبدلتها بمفاهيم ومبادئ جديدة.

في الواقع نحن في مواجهة ثلاثة نماذج للكون، وضع أوّلها العالم نيوتن (*Newton*) ووضع ثانيها وثالثها العالم أينشتاين (*Einstein*). لا يذكر القرن العشرون إلا ويذكر أينشتاين ولا يذكر أينشتاين إلا ويذكر القرن العشرون، وعليه كان على كل من رغب في فهم القرن العشرين أن يطلع على مدى قوة البنيان الذي أشاده أينشتاين (*Einstein*). يسمى النموذج الثالث الذي وضعه أينشتاين بالنظرية النسبية العامة، وهو تعميم للنموذج الثاني المسمى بالنظرية النسبية الخاصة.

لا يمكن فهم النظرية النسبية العامة إلا إذا وقفنا على دقائق النظرية النسبية الخاصة، وتتلاشى كافة الصعوبات التي قد نصادفها في النظرية النسبية العامة إذا تمكننا من فك الخيوط التي تربط بين النظريتين ربطاً محكماً منطقياً.

إن موقع جسم ما أو سرعته في فضاء نيوتن المطلق لا يمكن كشفها بأية تجربة ميكانيكية. ومهما يكن من أمر فإن ظهور نظرية مكسويل الكهرطيسية أتاح إمكانية استخدام حركة الإشارة الضوئية لقياس سرعة الأجسام في الفضاء. إن نجاح مثل ذلك يتوافق على أثير مكسويل هذا النوع من المائع الذي يملأ الفضاء كله (والمفترض ساكناً) فحركة جسم في الفضاء يمكن استنتاجها من حركته في الأثير المزعوم.

إن سرعة الأرض في الأثير المزعوم هذا يمكن تعيينها على أساس المحاكمة التالية: إن الأرض في أثناء دورانها حول الشمس تتحرك بسرعة متغيرة خلال الأثير فمن وجهة نظر راصد موجود على الأرض يبدو الأثير ريحاً أو تياراً. إن ميكانيك نيوتن يمنعه من أن يؤدي إلى قوة أو احتكاك على الأرض المتحركة، وإلا لكان قد أبطأ حركتها وتسبب في سقوطها على الشمس منذ دهر بعيد. ومع ذلك كانت ريح الأثير تعد في القرن التاسع عشر حقيقة لا مراء فيها، وكان التحدي يتلخص في قياس سرعة انسيابها. وكانت نظرية مكسويل تتنبأ بأن الضوء يسير خلال الأثير بسرعة ثابتة لا تتعلق إلا بمرونة هذا الوسط. ينتج من هذا أن سرعة الضوء، كما يقيسها راصد مرتبط بالأرض، تتوقف على جهة سير الضوء، أي أن الضوء الذي يسير باتجاه ريح الأثير مثلاً، ينحرف مع التيار بسرعة أكبر من سرعة الضوء الذي يسير بعكس اتجاه تيار الريح.

لقد استعمل مايلكسون ومورلي حزمتين ضوئيتين (سابحتين) في الأثير. وإرسالهما لتذهبا وتعودا، في منحيين متعامدين وقاما بقياس دقيق للفاصل الزمني بين عودتيهما، فكانت النتيجة محيرة حقاً. وعندما ننظر إليها بمنظار اليوم نجد أنها تمثل ضربة لنظرية نيوتن للمكان والزمان، وبالتالي لم يكتب لنظرية الأثير الاستمرارية.

إن عدم وجود ريح أثيرية كشف عن أن بناء الفيزياء كان قائماً، حتى ذلك الوقت، على أساس هش. ففكرة المرجع المطلق الساكن الذي يمكن فيه قياس سرعة الجسم من خلال الفضاء الخالي هي فكرة وهمية وبذلك أصبح منها الأثير في متحف الغرائب العلمية. وقد اقترح أينشتاين مبدأً جديداً حل محله. هو أن سرعة الضوء حسب مبدأ النسبية الخاصة هي ثابتة في كل مكان، وهذا يعني أن للضوء سرعة واحدة سواء قيست على الأرض أو ضمن صاروخ سريع أو كان منبعه ساكناً أو مقترباً من الراصد أو مبتعداً عنه. وحتى أنه لو قاس راصدان سرعة حزمة ضوئية واحدة، وهما متحركان سريعاً، أحدهما نحو الآخر، فسيجدان لسرعة الحزمة القيمة نفسها حتى ولو كانا آنذاك جنباً إلى جنب.

من الواضح أن مبدأ ثبات سرعة الضوء يفسر فشل مايكلسون ومورلي في كشف أي فارق زمني بين ما تستغرقه حزمتان لتقوما برحلة مغلقة في (الأثير) ذلك أن الحزمتين تسافران بسرعة واحدة دون أن يكون لاتجاه حركة الأرض تأثير على هذه السرعة.

من الواضح أن المفاهيم التي تعد راسخة كالزمن والفراغ والكتلة، هي في الواقع متغيرة الخواص فالزمن، مثلاً في صاروخ كوني يمضي أبطأ من مضيّه على الأرض ففي الوقت الذي تمر فيه على الأرض مئات السنين، لا يمر على الصاروخ سوى بضع سنوات فقط.

إذا أخذنا أيضاً اليمين واليسار، فعلى أي جانب من الطريق الأيمن أم الأيسر يقع البيت؟ الإجابة المباشرة على هذا السؤال مستحيلة.

لو نمشي من القنطرة إلى الغابة، فإن البيت سيقع على الجانب الأيسر، ولو مشينا بالعَكس من الغابة إلى القنطرة، فإنه سيقع على الجانب الأيمن. فمن الواضح أنه لا يمكن التحدث عن الجانب الأيمن أو الأيسر للطريق دون أن نأخذ في الاعتبار الاتجاه الذي نعين بالنسبة إليه اليمين واليسار. وعندما تتحدث عن الشاطئ الأيمن للنهر، يكون لحديثنا معنى؛ وذلك لأن مجرى الماء يحدد اتجاه النهر. وهكذا، فإن مفهومي يميناً ويساراً مفهومان نسبيان كذلك الآن نهار أو ليل؟ إن الإجابة تعتمد على المكان الذي يطرح فيه السؤال فعندما يكون في سدني نهاراً يكون في مدنية دمشق ليلاً، ولا يوجد هنا أي تعارض، فإن النهار والليل مفهومان

نسبيان، ولا تمكن الإجابة على السؤال المطروح دون أن نوضح بالنسبة لأية نقطة على سطح الكرة الأرضية يجري الحديث.

والمعروف أننا مهما تحركنا على سطح الأرض ورصدنا النجوم من أية نقطة على الكرة الأرضية فإننا سنرى دائماً أن المسافات التي تفصل النجوم عن بعضها، تبقى ثابتة، وهذا يفسر بأن النجوم تبعد عنها بمسافات شاسعة يصعب تخيلنا بحيث يكون انتقالنا على سطح الأرض بالمقارنة معها غير محسوس. ولكن مع دوران الأرض حول الشمس، يصبح التغير في هذه القياسات ملحوظاً رغم ضآلته.

إن الضوء لا ينتشر فجأة، ولو أنه ينتشر بسرعة 300000 km/s ولا يمكننا أن نفعل مثل هذه السرعة الكبيرة؛ لأننا في حياتنا اليومية نتعامل مع سرع أقل من ذلك بما لا يقاس. حتى سرعة صاروخ كوني مثلاً وصلت إلى 12 km/s، فقط والأرض عند دورانها حول الشمس هي الجسم الأكبر سرعة من كل الأجسام التي نتعامل معها ولكن سرعة الأرض هي 30 km/s لا غير. إن سرعة الضوء الهائلة تمتاز بثبات قاطع. فسرعة الضوء لا تعتمد على مصدره فهي واحدة مهما كان المصدر، ويمكننا دائماً بطرق مختلفة أن نبطئ أو نعجل سرعة أي جسم حتى الرصاصة بحيث نضع عن طريق الرصاصة المنطلقة كيساً من الرمل فتفقد جزئاً من سرعتها في أثناء اختراقها للكيس، وتخرج بسرعة أقل.

ولكن الأمر مع الضوء يختلف، ففي الوقت الذي تعتمد فيه سرعة الرصاصة على تركيب السلاح الذي أطلقها، لا تعتمد سرعة الضوء على مصدره فعند مرور شعاع الضوء في الزجاج تقل سرعته، ولكن ما أن يخرج حتى يعاود انتشاره بسرعة 300000 km/s.

فانتشار الضوء في الفراغ يمتاز بخاصة، وهي أنه لا يمكن إبطاؤه أو تعجيله. ومهما يحدث للشعاع عند دخوله في المادة فبخروجه للفراغ يبدأ في الانتشار بالسرعة السابقة.

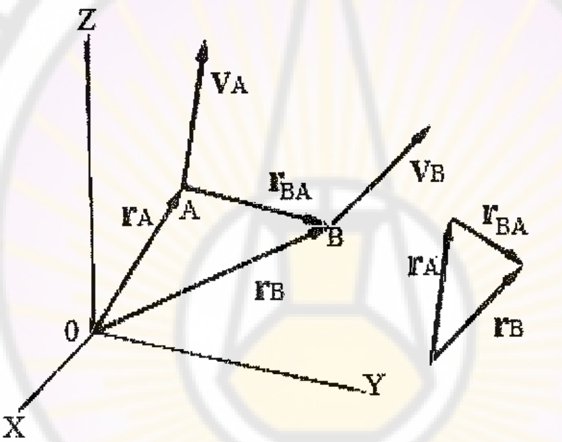
إن تجربة مايكلسون تؤكد مبدأ نسبية الحركة ليس فقط لحركة الأجسام المادية، ولكن أيضاً لخاصة انتشار الضوء، أي لظواهر الطبيعية جميعها.

إن مبدأ نسبية الحركة يؤدي بشكل مباشر إلى نسبية السرعة، ويختلف مقدار السرعة من مختبر إلى آخر يتحرك بالنسبة له. ولكن سرعة الضوء 3×10^8 m/s لا تتغير في المختبرات المختلفة، وبالتالي فهي ليست نسبية بل مطلقة.

6.2 السرعة النسبية:

لنعتبر جسمين A و B والمراقب O الذي اتخذ الثلاثية OXYZ كجملة مقارنة (الشكل 6-1). إن للجسمين A و B بالنسبة إلى O، السرعتان :

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \qquad \vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} \tag{6.1}$$



الشكل (6-1)

تعرف سرعة B بالنسبة إلى A وسرعة A بالنسبة إلى B بـ:

$$\vec{V}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \qquad \vec{V}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \tag{6.2}$$

حيث:

$$\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \tag{6.3}$$
$$\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

لنلاحظ أنه لما كان: $\vec{r}_{AB} = -\vec{r}_{BA}$، فلدينا أيضاً:

$$\vec{V}_{BA} = -\vec{V}_{AB} \tag{6.4}$$

بمعنى آخر: إن سرعة B بالنسبة إلى A تساوي وتعاكس سرعة A بالنسبة لـ B. باشتقاق المعادلتين (6.3) بالنسبة إلى الزمن نحصل على:

$$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \qquad \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

أو باستخدام المعادلات (6.1) و (6.2) لدينا أيضاً:

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \qquad \text{و} \qquad \vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \qquad (6.5)$$

إذن للحصول على السرعة النسبية لجسمين نطرح سرعتيهما بالنسبة للمراقب. وباشتقاق المعادلتين (6.5) نجد:

$$\frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt}$$

كما نجد عبارة مشابهة من أجل $d\vec{V}_{AB} / dt$. يدعى الحد الأول تسارع B بالنسبة إلى A ونرمز له بـ $\vec{a}_{BA}$ والحدان الآخران هما على الترتيب تسارعا B و A بالنسبة إلى O. إذن:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \qquad \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B \qquad (6.6)$$

مسألة محلولة 1:

تطير طائرة A (الشكل 2-6) نحو الشمال بسرعة 300 km hr^{-1} بالنسبة إلى الأرض وتطير في اللحظة نفسها طائرة أخرى B في الاتجاه 60?NW بسرعة 200 km hr^{-1} بالنسبة إلى الأرض. أوجد سرعة A بالنسبة إلى B وكذلك سرعة B بالنسبة إلى A.

الحل:

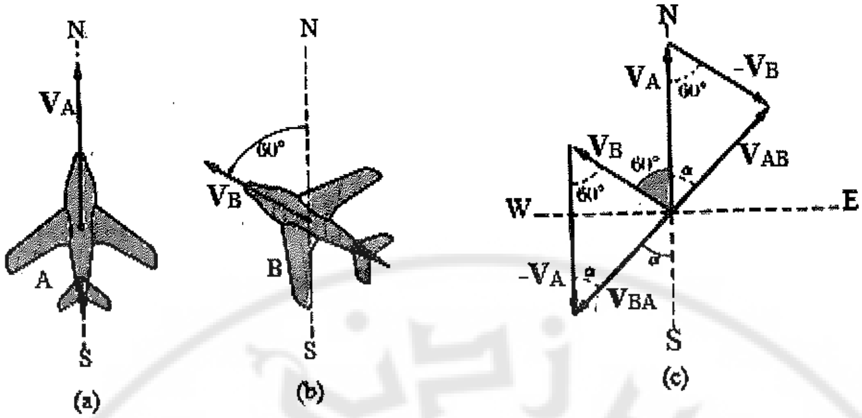
في الشكل(2-6) تتمثل سرعتا الطائرتين A و B بالنسبة إلى الأرض، على القسم الأيسر. ولدينا على اليمين سرعة A بالنسبة إلى B وهي:

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

وكذلك سرعة B بالنسبة إلى A وهي:

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

يمكننا ملاحظة أن $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$ كما تتنبأ به المعادلة (6.4).



الشكل (6-2)

لحساب $\vec{V}_{AB}$ نستخدم المعادلة (3.6). بملاحظة أن الزاوية θ المشكّلة بين $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ تساوي 60°. وبالتالي:

$$V_{AB} = \sqrt{300^2 + 200^2 - 2 \times 300 \times 200 \times \cos 60^{\circ}} = 264.6 \quad kmhr^{-1}$$

وللحصول على اتجاه $\vec{V}_{AB}$ نستخدم قانون الجيوب، المعادلة (3.4):

$$\frac{V_B}{\sin \alpha} = \frac{V_{AB}}{\sin 60^{\circ}} \qquad \text{أو} \qquad \sin \alpha = \frac{V_B \sin 60^{\circ}}{V_{AB}} = 0.654$$

مما يعطي $\alpha = 40.7^{\circ}$. وعليه فالأمر يتم من أجل راكب الطائرة B، كما لو أن الطائرة A تنتقل بسرعة $264.6\ kmhr^{-1}$ في الاتجاه $40.7^{\circ} NE$. إن للسرعة V_{BA} المقدار نفسه، أي $264.6\ km\ hr^{-1}$ ولكن في الاتجاه المعاكس: $40.7^{\circ} SW$.

6.3 الحركة النسبية الانسحابية المنتظمة:

لنعتبر مراقبين O و 'O يتحركان أحدهما بالنسبة للآخر بحركة انسحابية منتظمة. هذا يعني أن المراقبين لا يدوران بالنسبة لبعضهما. يرى المراقب O إذن أن المراقب 'O يتحرك بسرعة v بينما 'O يرى O يتحرك بسرعة v. وما يهم من الأمر هو مقارنة وصفيهما لحركة جسم ما، مثلاً عندما يكون أحد المراقبين واقفاً على رصيف المحطة، ويكون الآخر جالساً في قطار يسير على خط مستقيم وكلاهما ينظر إلى طائرة تحلق فوق رأسيهما.

نختار، للتبسيط، مستقيم الحركة النسبية كمحورين OX' و OX (الشكل3-6) والمحاور OY و OZ و OY' و OZ' متوازية فيما بينها، تبقى محاور الإحداثيات هذه دوماً متوازية بسبب عدم وجود الدوران النسبي. نفترض بالإضافة إلى ذلك أن O و O' كانا في اللحظة $t = 0$ منطبقين على بعضهما بحيث أننا بتسمية v السرعة النسبية الثابتة، يمكننا أن نكتب:

$$\vec{v} = v.\vec{u}_x \quad و \quad \overrightarrow{oo'} = \vec{v}.t$$

لنعتبر الآن جسيما في A. نرى حسب الشكل (3-6) أن :

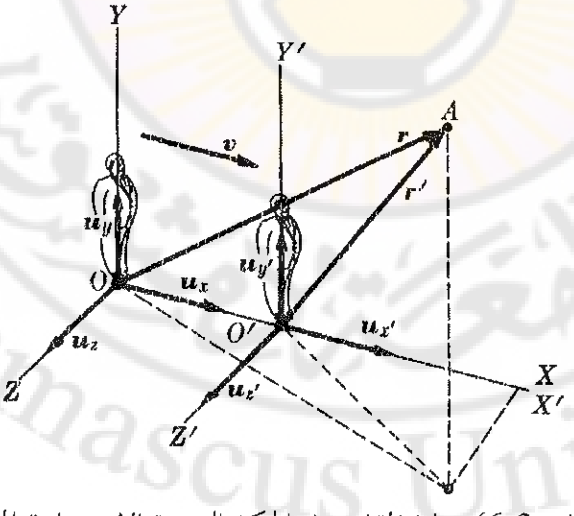
$\overrightarrow{oA} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'A}$ ، وبما أن $\overrightarrow{oo'} = \overrightarrow{vt}$ ، $\overrightarrow{o'A} = r'$ ، $\overrightarrow{oA} = \vec{r}$, فإن شعاعي الموضع لـ A المقاسين من قبل O و O' مرتبطان بالعلاقة:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\ t \tag{6.7}$$

يمكن تحليل هذه المعادلة الشعاعية وفق مركباتها الثلاثة، بأخذنا بعين الاعتبار حقيقة أن v موازية لـ OX إذن:

$$x' = x - v\,t \quad و \quad y' = y \quad و \quad z' = z, \quad و \quad t' = t \tag{6.8}$$

لقد أضفنا $t' = t$ إلى المعادلات الفراغية الثلاث لنشير إلى أنه افترض أن المراقبين قد استخدما الزمن نفسه. وهذا يعني أن قياسات الزمن افترضت مستقلة عن حركة المراقب.



الشكل (3-6) جملتا المقارنة في الحركة النسبية الانسحابية المنتظمة.

يبدو ذلك منطقياً جداً ولكنها ليست إلا فرضية يمكن للتجربة أن تبرهن على أنها خطأ. تدعى مجموعة المعادلات (6.8) أو المعادلة الشعاعية الوحيدة (6.7) مضافة إلى $t'=t$ تحويلات غاليليه.

لتكن $\vec{V}$ هي سرعة A بالنسبة إلى O، تعرّف $\vec{V}$ كما يلي:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{u}_x+\frac{dy}{dt}\vec{u}_y+\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

وتعرّف $\vec{V}'$، سرعة A بالنسبة إلى 'O كالتالي :

$$\vec{V}'=\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}$$

لنلاحظ أنه لا حاجة لكتابة: $d\vec{r}'/dt'$ لأننا افترضنا أن $t=t'$ وبالتالي فإن $d\vec{r}'/dt'$ هي مطابقة لـ: $d\vec{r}'/dt$. باشتقاق المعادلة (6.7) بالنسبة للزمن وبملاحظة أن $\vec{V}$ ثابت لدينا :

$$\vec{V}'=\vec{V}-\vec{v} \qquad (6.9)$$

وبملاحظة أن $V_x=dx/dt$ و $V'_{x'}=dx'/dt$ .. إلخ ، يمكننا تحليل المعادلة (6.9) وفق المركبات الثلاثة للسرعة:

$$V'_{x'}=V_x-v, \qquad V'_{y'}=V_y, \qquad V'_{z'}=V_z \qquad (6.10)$$

يمكن أيضاً الحصول على هذه العلاقات مباشرة بأخذ مشتق المعادلات (6.8) بالنسبة إلى الزمن. تعطي المعادلات (6.9) أو (6.10) قاعدة غاليليه لمقارنة سرعتي جسم مقاستين من قبل مراقبين يتحركان بحركة نسبية انسحابية. فمثلاً إذا كان A يتحرك موازياً للمحور OX يكون لدينا ببساطة :

$$V'=V-v \qquad (6.11)$$

ذلك أن المركبات الأخرى معدومة. بالمقابل إذا تحرك A موازياً للمحور OY بحيث: $V_x=V_z=0$ ، $V_y=V$

يكون لدينا إذن: $V'_{y'} = V$ و $V'_{x'} = -v$ و $V'_{z'} = 0$

بحيث إن:

$$V' = \sqrt{V^2 + v^2} \tag{6.12}$$

إن تسارعي A بالنسبة إلى O و 'O هما على الترتيب:

$$\vec{a}' = d\vec{V} / dt \quad \text{و} \quad \vec{a} = d\vec{V}' / dt$$

لنلاحظ من جديد أننا نستخدم نفس t في الحالتين. وكما أن $d\vec{v} / dt = 0$ لأن $\vec{V}$ ثابتة نحصل انطلاقاً من المعادلة (6.9) على:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} \tag{6.13}$$

مما يعطي بالإحداثيات المتعامدة:

$$a'_{x'} = a_x \qquad a'_{y'} = a_y \qquad a'_{z'} = z_z \tag{6.14}$$

بتعبير آخر، إن المراقبين يقيسان التسارع نفسه. بعبارة أخرى: إن تسارع جسيم هو نفسه من أجل جميع المراقبين المتحركين بحركة نسبية انسحابية منتظمة. تعطينا هذه النتيجة مثالاً على مقدار فيزيائي - تسارع جسيم - يظهر مستقلاً عن حركة المراقب، بعبارة أخرى لقد وجدنا أن التسارع يبقى لا متغيراً عندما ننتقل من جملة مقارنة إلى جملة مقارنة أخرى متحركة بحركة انسحابية منتظمة بالنسبة للأولى.

وهذه هي المرة الأولى التي نرى فيها مقداراً فيزيائياً يبقى لا متغيراً بعد التحويل. وسنجد فيما بعد مقادير فيزيائية أخرى تسلك السلوك نفسه. إن لهذه النتيجة، كما سنرى، تأثيراً عميقاً على وضع القوانين في الفيزياء.

مسألة محلولة 2:

إن سرعة الصوت في الهواء، وفي الدرجة 25?C تساوي $358\ ms^{-1}$ ما هي السرعة، مقاسة من قبل مراقب يتحرك بسرعة $90\ km\ hr^{-1}$

(a) مبتعداً عن المنبع ؟

(b) في اتجاه المنبع؟

(c) عمودياً على منحنى الانتشار في الهواء؟

(d) في اتجاه يبدو فيه الصوت منتشراً عمودياً على المراقب المتحرك ؟ نفترض أن المنبع ساكناً بالنسبة للأرض.

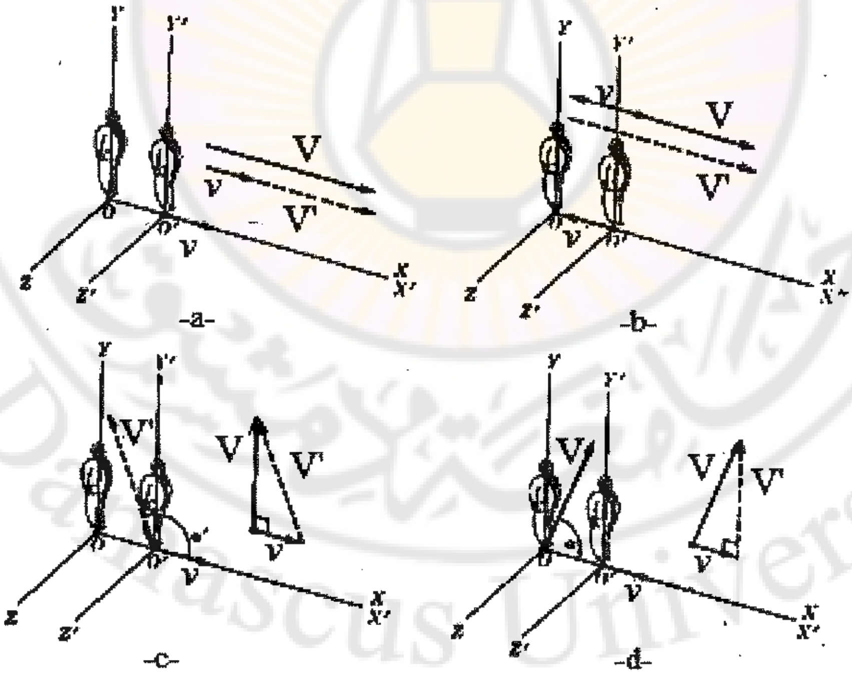
الحل :

لنستخدم جملة -ثلاثية المقارنة OXYZ المرتبطة بالأرض: (الشكل 4-6) وبالتالي فهي ساكنة بالنسبة للهواء. وثلاثية O'X'Y'Z' تتحرك مع المراقب، بحيث يكون المحوران OX و O'X' موازيين لسرعة المراقب كما في الشكل(6-3). بالنسبة إلى OXYZ يكون منبع الصوت في O وسرعة المراقب 'O هي:

$$v = 90 \text{ km hr}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$$

وللصوت سرعة $V = 358 \text{ m s}^{-1}$

إن سرعة الصوت في الجملة O'X'Y'Z' كما يسجلها المراقب 'O هي 'V.



الشكل (6-4)

بتطبيق المعادلة (6.9) أو (6.10) لدينا :

في الحالة (a) $$V' = V - v = 333 \text{ m s}^{-1}$$

أما في الحالة (b) فنلاحظ أن O' تتحرك في الاتجاه السالب للمحور X. يصادف هنا أن:

$$\vec{v} = -v\,\vec{u}_x$$

ما يغير المعادلة (6.11) إلى $V' = V + v = 383 \text{ m s}^{-1}$.

ومن أجل (c) نستخدم المعادلة (6.12) مما يعطي:

$$V' = \sqrt{V^2 + v^2} = 359.9\ ms^{-1}$$

من أجل المراقب المتحرك يبدو الصوت منتشراً في الاتجاه الذي يصنع زاوية α' مع المحور O'X' بحيث إن:

$$tga' = \frac{V'_{y'}}{V'_{z'}} = \frac{V}{-v} = -15.32 \Rightarrow \qquad \alpha' = 93.7^{\circ}$$

وأخيراً في الحالة (d) يكون اتجاه انتشار الصوت في الهواء بحيث يبدو من أجل O' أنه ينتقل في الاتجاه O'Y' لدينا إذن:

$$V'_{z'} = 0 \ \text{و}\ V'_{x'} = 0, \quad V'_{y'} = V'$$

وعليه باستخدامنا للمعادلة (6.10)، نحصل على:

$$V' = V_y \ \text{و}\ V_x = v \ : \text{أو}\ \ 0 = V_x - v$$

ومنه: $$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = v^2 + V'^2$$

وبالتالي: $$V' = \sqrt{V^2 + v^2} = 357.1\ ms^{-1}$$

في هذه الحالة ينتشر الصوت في الهواء الهادئ وفق اتجاه يصنع زاوية α مع المحور X بحيث يكون:

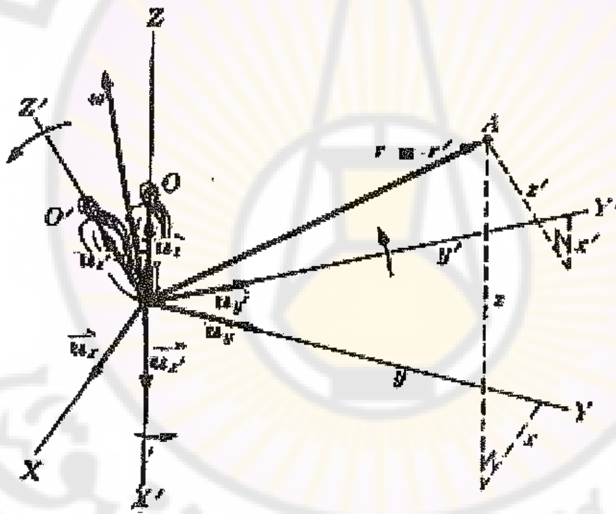
$$tg\ \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{V'}{v} = 14.39$$

$$\alpha = 86.0^{\circ}$$

6.4 الحركة النسبية الدورانية المنتظمة:

لنعتبر مراقبين O و'O في حركة دورانية أحدهما بالنسبة للآخر ودون حركة نسبية انسحابية. نفترض للتبسيط أن O و'O هما في المنطقة نفسها من الفراغ، وأن كلاً منهما يستخدم جملته الخاصة للمقارنة على أن يكون المبدأ مشتركاً، فمثلاً يلاحظ المراقب O، الذي يستخدم الجملة OXYZ (الشكل 5-6) أن الجملة O'X'Y'Z' المرتبطة بـ 'O تدور بسرعة زاوية ω . أما من أجل المراقب 'O فالحالة على عكس ذلك تماماً ، يلاحظ المراقب 'O أن الجملة OXYZ تدور بسرعة زاوية تساوي $-\omega$. إن شعاع الموضع للجسيم A في الجملة OXYZ هو:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \tag{6.15}$$



الشكل (5-6) جملتا المقارنة في حركة نسبية دورانية منتظمة.

وبالتالي فإن سرعة الجسيم A كما يقيسها O في جملته OXYZ هي:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \tag{6.16}$$

وعلى غرار ذلك، فإن شعاع الموضع لـ A في O'X'Y'Z' هو :

$$\vec{r} = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'} \tag{6.17}$$

وهذه علاقة فيها الشعاع $\vec{r}$ هو نفسه كما في المعادلة (6.15) بسبب تطابق المبدئين، وهذا هو السبب الذي لم نكتب من أجله 'r. إن لسرعة A المقاسة من قبل 'O في جملته الخاصة O'X'Y'Z' القيمة :

$$\vec{V}'=\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} \tag{6.18}$$

لقد افترض المراقب 'O بأخذه مشتق المعادلة (6.17) أن جملته O'X'Y'Z' لا تدور، واعتبر إذن أن أشعة الوحدة ثابتة بالاتجاه. إلا أنه يحق للمراقب O القول إن الجملة O'X'Y'Z' تدور بالنسبة له، وبالتالي فإن أشعة الوحدة $\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'}$ ليست ثابتة بالاتجاه، وبحساب مشتق المعادلة (6.17) بالنسبة للزمن ينبغي إذن كتابة:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}+\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}x'+\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}y'+\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}z' \tag{6.19}$$

ومن ناحية أخرى فإن نهايات الأشعة $\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'}$ هي (بالفرض) في حركة دائرية منتظمة بالنسبة إلى O، وبسرعة ω، وبتعبير آخر $d\vec{u}_{x'}/dt$ هو سرعة نقطة واقعة على مسافة الوحدة من O متحركة بحركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ω. إذن فلدينا باستخدام المعادلة (5.48):

$$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{u}_{x'} \qquad \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{u}_{y'} \qquad \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{u}_{z'}$$

وعليه يمكننا وفق المعادلة (6.19) كتابة:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}x'+\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}y'+\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}z'&=\vec{\omega}\times\vec{u}_{x'}\,x'+\vec{\omega}\times\vec{u}_{y'}\,y'+\vec{\omega}\times\vec{u}_{z'}\,z'\\&=\vec{\omega}\times(x'\,\vec{u}_{x'}+y'\,\vec{u}_{y'}+z'\,\vec{u}_{z'})\\&=\vec{\omega}\times\vec{r}\end{aligned} \tag{6.20}$$

وبإدخالنا هذه النتيجة في المعادلة (6.19) وباستخدام المعادلات (6.16) و (6.18) نحصل أخيراً على:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (6.21)$$

تعطي هذه الصيغة العلاقة بين السرعتين $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ لـ A مقاستين من قبل المراقبين O و O' المتحركين بحركة نسبية دورانية .

للحصول على العلاقة بين التسارعين نتبع الطريقة نفسها. إن تسارع A مقاس من قبل O بالنسبة إلى OXYZ هو:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dV_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{dV_z}{dt}\vec{u}_z \qquad (6.22)$$

أما تسارع A المقاس من قبل O' بالنسبة إلى O'X'Y'Z' دون أخذ الدوران بعين الاعتبار من جديد فله القيمة:

$$\vec{a}' = \frac{dV'_{x'}}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dV'_{y'}}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dV'_{z'}}{dt}\vec{u}_{z'} \qquad (6.23)$$

عندما نشتق المعادلة (6.21) بالنسبة للزمن t نحصل، إذا تذكرنا أن ω افترضت ثابتة، على:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (6.24)$$

ومن جهة أخرى لما كانت $\vec{V} = V'\vec{u}_{x'} + V'\vec{u}_{y'} + V'\vec{u}_{z'}$ نحصل بالتفاضل على:

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{dV'_{'x}}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dV'_{y'}}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dV'_{z'}}{dt}\vec{u}_{z'} + \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}V'_{x'} + \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}V'_{y'} + \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}V'_{z'}$$

إن الحدود الثلاثة الأولى ليست إلا $\vec{a}'$ كما تعطيه المعادلة (6.23)، وإن الحدود الثلاثة الأخيرة، بعملية مماثلة للتي استخدمت للحصول على المعادلة (6.20)، تساوي إلى $\vec{\omega}' \times \vec{V}'$ مما يعطينا، باستبدال المقادير المناسبة في المعادلة (6.20):

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_{x'} V'_{x'} + \vec{\omega} \times \vec{u}_{y'} V'_{y'} + \vec{\omega} \times \vec{u}_{z'} V'_{z'}$$
$$= \vec{\omega} \times (V'_{x'}\vec{u}_{x'} + V'_{y'}\vec{u}_{y'} \times V'_{z'}\vec{u}_{z'}) = \vec{\omega} \times \vec{V}'$$

إذن : $d\vec{V}'/dt=\vec{a}'+\vec{\omega}\times\vec{V}'$ ولـــدينا أيضـــاً مـــن المعـــادلات (6.16) و (6.21) بحيث إن: $d\vec{r}/dt=\vec{V}=\vec{V}'+\vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times(\vec{V}'+\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\times\vec{V}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

باستبدال هاتين النتيجتين في المعادلة (6.24) نحصل أخيراً على:

$$\vec{a}=\vec{a}'+2\,\vec{\omega}\times\vec{V}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{6.25}$$

تعطي هذه المعادلة العلاقة بين التسارعين $\vec{a}$ و $\vec{a}'$ لـ A مقاسين من قبل المراقبين O و 'O المتحركين بحركة نسبية دورانية منتظمة.

يدعى الحد الثاني $2\omega\times V'$ تسارع كوريوليس (*Coriolis*). أما الحد الثالث فمماثل للمعادلة (5.59) ويقابل تسارعاً مركزياً. ينتج تسارع كوريوليس والتسارع المركزي -كلاهما- من الحركة النسبية الدورانية للمراقبين.

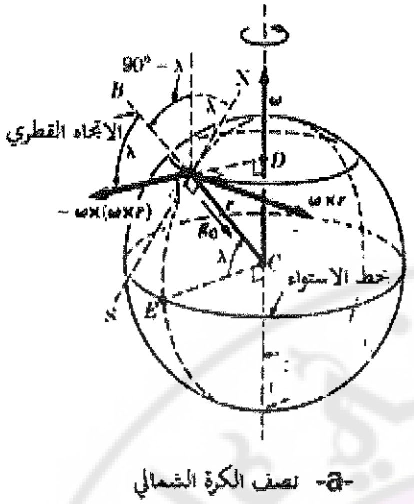
6.5 الحركة بالنسبة إلى الأرض:

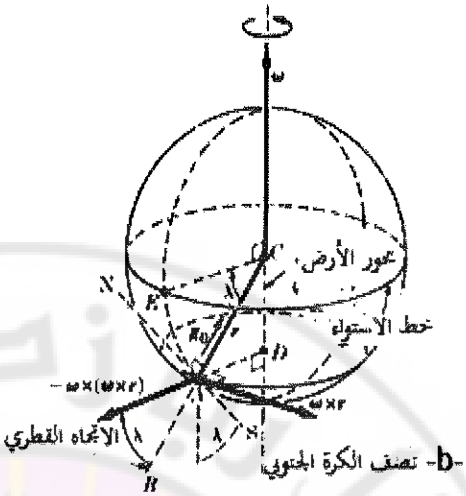
إن دراسة حركة جسم بالنسبة إلى الأرض تشكل إحدى التطبيقات الأكثر أهمية للمعادلة (6.25). إن للأرض (كما بينّا في المسألة المحلولة 5.10) سرعة زاوية $\omega=7.292\times10^{-5}\ rad\ s^{-1}$ منحاها هو منحى محور دوران الأرض. لنعتبر نقطة على سطح الأرض كما هو مبين في الشكل(6-6). لنسمِّ $\vec{g}_0$ تسارع الثقالة مقاساً من قبل مراقب في A لا يدور. $\vec{g}_0$ تقابل عندئذ $\vec{a}$ في المعادلة (6.25). باستخراج $\vec{a}'$ من المعادلة (6.25)، نحصل على التسارع مقاسا من قبل مراقب يدور مع الأرض :

$$\vec{a}'=\vec{g}_0-2\,\vec{\omega}\times\vec{V}'-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{6.26}$$

نعتبر أولاً حالة جسم ساكن في البدء. أو أنه يتحرك ببطء شديد بحيث إن حد كوريوليس $2\,\vec{\omega}\times\vec{V}'$ – يكون معدوماً أو مهملاً بالمقارنة مع الحد الأخير $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ – إن التسارع الذي نقيسه في هذه الحالة يدعى التسارع الفعّال للثقالة، ونرمز له بـ g. وبالتالي:

$$\vec{g}=\vec{g}_0-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{6.27}$$





الشكل (6-6): التسارع النابذ الناجم عن دوران الأرض.

وهذا هو التسارع الذي نقيسه بواسطة النواس. بفرض أن الأرض كروية وأنه لا توجد شواذ موضعية يمكننا أن نعتبر أن $\vec{g}_0$ يتجه نحو مركز الأرض وفق منحى ناظمي(قطري).

وبسبب وجود الحد الثاني من المعادلة (6.27) فإن منحى $\vec{g}$ المسمى الشاقول، ينحرف قليلاً عن المنحى الناظمي (القطري).

تبقى السوائل دائماً في حالة توازن بسطحها العمودي على $\vec{g}$ وعلى كل حال ولأسباب عملية وبخلو الاضطرابات الموضعية، يمكننا افتراض أن الشاقول ينطبق على المنحى القطري. لنحلل الآن بتفصيل أوسع قليلاً الحد الأخير من المعادلة (6.27) أي الحد $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$. وندعو هذا الحد التسارع النابذ؛ لأنه بسبب إشارته السالبة، يتجه نحو الخارج وفق DA نرى ذلك على الشكل (6-6). إن الزاوية λ، التي يصنعها $r = CA$ مع خط الاستواء هي زاوية خط العرض. والشعاع ω يصنع إذن زاوية $90° - \lambda$ مع CA في نصف الكرة الشمالي و $90° + \lambda$ في نصف الكرة الجنوبي. وإن قيمة $\vec{\omega}\times\vec{r}$ هي عندئذ:

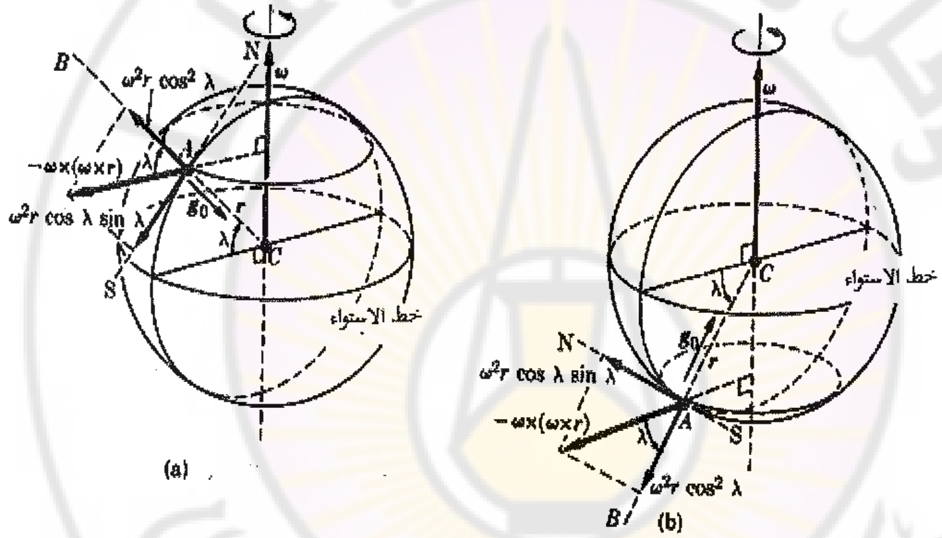
$$\omega . r . \sin(90° \pm \lambda) = \omega . r . \cos \lambda$$

وإن اتجاه $\vec{\omega}\times\vec{r}$ باعتباره عمودياً على $\vec{\omega}$ يوازي خط الاستواء. بتذكرنا للمسألة المحلولة (5.11)، نجد من أجل قيمة التسارع النابذ $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$:

$$\left|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right| = \omega^2 .r.\cos\lambda = 3.34\times10^{-2}.\cos\lambda \quad m\,s^{-2} \quad (6.28)$$

حيث: $r = 6.35\times10^{6}\ m$ نصف قطر الأرض.

يتناقص هذا التسارع من خط الاستواء نحو القطبين، ولكنه دوماً صغير جداً بالنسبة إلى تسارع الثقالة $g_0 = 9.80\ ms^{-2}$ وقيمته العظمى على خط الاستواء تساوي حوالي 0.3% من g_0 (انظر للمسألة المحلولة (5.11).



الشكل (7-6) المركبتان القطرية والأفقية للتسارع النابذ.

لنفتش عن مركبات $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ وفق المنحى القطري AB ووفق خط الشمال-جنوب(NS) في A. على الشكل (7-6) يعطي المستقيم AB ممدد CA، المنحى الناظمي أو القطري. ويصنع الشعاع $\vec{\omega}$ ، بالطبع زاوية λ مع NS. وكما بينا سابقاً يتجه تسارع الثقالة g_0 نحو الأسفل وفق AB. ويصنع التسارع النابذ $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ زاوية λ مع AB ونحصل على مركبته وفق AB بضرب مقداره المعطى بالمعادلة (6.28) بـ λ ، مما يعطي:

$$\left|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right|.\cos\lambda = \omega^2 .r.\cos^2\lambda$$

إن مركبة التسارع النابذ وفق المستقيم NS تتجه نحو الجنوب في نصف الكرة الشمالي (ونحو الشمال في نصف الكرة الجنوبي) ويحصل عليها بضرب مقدار التسارع بـ $\sin \lambda$ ومنه ينتج :

$$\left| -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right| . \sin \lambda = \omega^2 .r . \cos \lambda . \sin \lambda$$

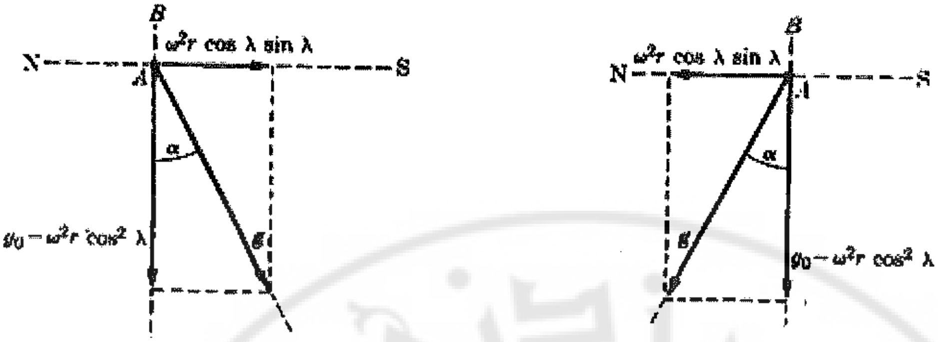
إن المركبتين ممثلتان على الشكل (6-7). وحسب تعريف g المعطى بالمعادلة (6.27)، فإن مركبتي $\vec{g}$ وفق المنحى القطري والأفقي تتوضعان كما يبيّنه الشكل (6-8). وبسبب صغر الحد النابذ فإن الزاوية α صغيرة جداً وإن قيمة g لا تختلف بشكل محسوس عن مركبتها وفق المنحى القطري AB، يبيّن الجدول (6-1) قيم تسارع الجاذبية الأرضية في بعض الأماكن في العالم. يمكننا إذن نكتب بتقريب جيد:

$$g = g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda \tag{6.29}$$

الجدول (6-1): قيم تسارع الجاذبية الأرضية (الثقالة) مقدرة بـ ms^{-2}

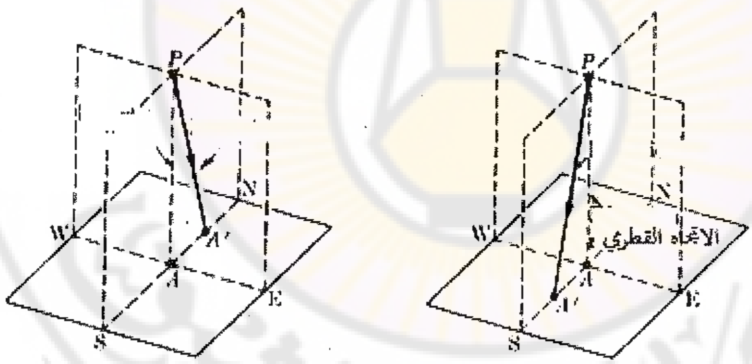
المكان	زاوية خط العرض	تسارع الثقالة
القطب الشمالي	90?0'	9.8321
أنكوراج	61?10'	9.8218
غرينويتش	51?29'	9.8119
باريس	48?50'	9.8094
واشنطن	38?53'	9.8011
كي وست	24?34'	9.7897
باناما	8?55'	9.7822
خط الاستواء	0?0'	9.7799

وبالرغم من أن الحد الأخير صغير جداً إلا أنه يفسر تزايد الثقالة الذي نلاحظه بدلالة خط العرض.



الشكل (6-8): تعريف المنحى الشاقولي والتسارع الفعلي للسقوط الحر.

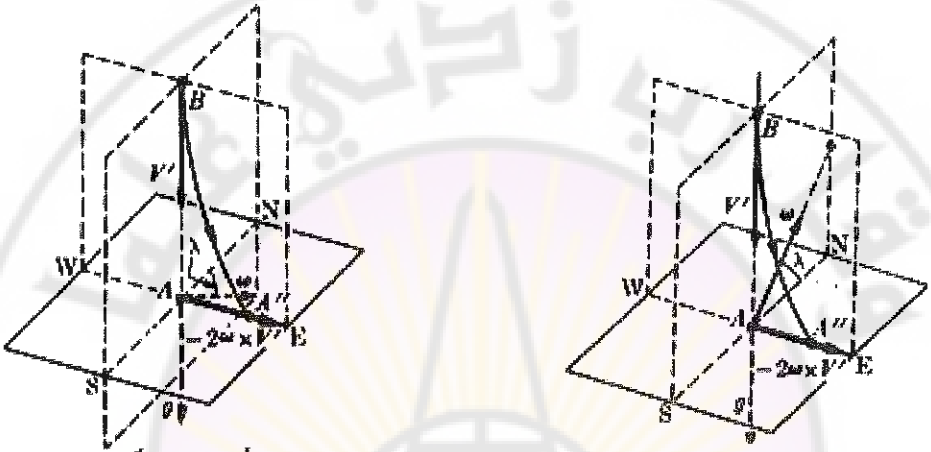
إن مركبة التسارع النابذ وفق NS ستزيح الجسم قليلاً نحو الجنوب في نصف الكرة الشمالي بدءاً من المنحى القطري AB، ونحو الشمال في نصف الكرة الجنوبي. إذن فمسار الجسم الذي يسقط سينحرف كما يبيّنه الشكل (6-9). والجسم سيصل إلى 'A بدلاً من أن يصل إلى A كما يحصل في حالة عدم وجود الدوران. وبسبب القيمة الصغيرة α فإن هذا الانحراف مهمل.



الشكل (6-9) انحراف مسار جسم ساقط سقوطاً حراً ناجم عن التسارع النابذ: نحو الجنوب (نحو الشمال) في نصف الكرة الشمالي (الجنوبي).

لنعتبر بعد ذلك حد كوريوليس $-2\vec{\omega}\times\vec{V}'$. في حالة سقوط جسم تتجه السرعة $\vec{V}'$ نحو الأسفل وفق الشاقول AB (الشكل 6-10) ويتجه $\vec{\omega}\times\vec{V}'$ نحو الغرب. إذن يتجه حد كوريوليس $-2\vec{\omega}\times\vec{V}'$ نحو الشرق، والجسم الساقط سينحرف في هذا الاتجاه وسيصل إلى الأرض في "A، قليلاً إلى الشرق من A بضم فعل كوريوليس هذا إلى الفعل النابذ، فالجسم

سيسقط في نقطة إلى الجنوب الشرقي من A في نصف الكرة الشمالي، وإلى الشمال الشرقي من A في نصف الكرة الجنوبي. هذا الفعل، المهمل في أغلب الحالات، ينبغي أخذه بدقة بعين الاعتبار في حالة قذف القنابل من ارتفاع عال، كما في حالة الصواريخ القاذفة عابرة القارات كما وأن لتسارع كوريوليس فعل ملموساً على مسارات الصواريخ والأقمار الصناعية بسبب سرعتها الكبيرة .

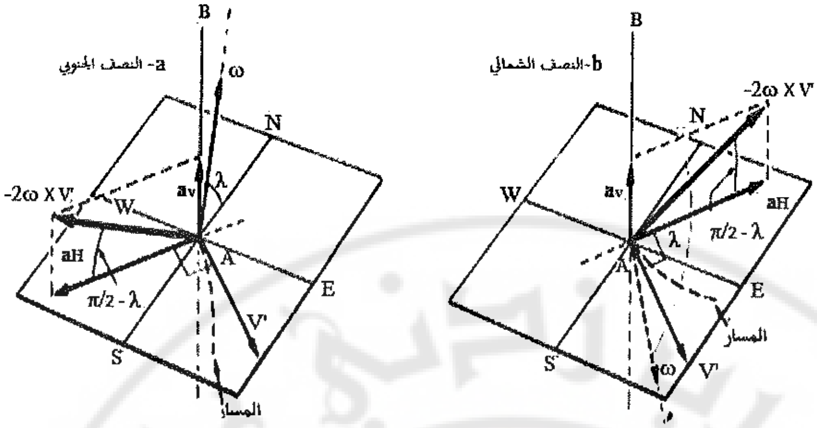


-b- نصف الكرة الشمالي

-a- نصف الكرة الجنوبي

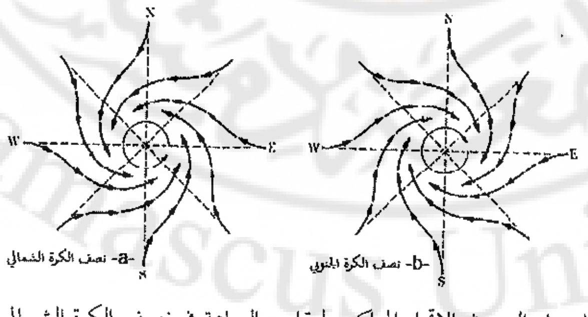
الشكل (6-10) الانحراف نحو الشرق في نصف الكرة الشمالي (أو الجنوبي) الناجم عن تسارع كوريوليس على جسم ساقط.

في حالة جسم متحرك في المستوى الأفقي يصنع الشعاع $-2\vec{\omega}\times\vec{V}'$ العمودي على $\vec{\omega}$ وعلى $\vec{V}'$ زاوية $\frac{\pi}{2}-\lambda$ مع المستوى الأفقي. وله مركبة أفقية a_H ومركبة شاقولية a_V (الشكل 6-11). تحت تأثير المركبة الأفقية لن يكون المسار أفقياً، بل سينحرف نحو اليمين في نصف الكرة الشمالي ونحو اليسار في نصف الكرة الجنوبي. تتناقص المركبة a_H بالانتقال من القطب إلى خط الاستواء حيث تكون معدومة. وهكذا ففي خط الاستواء لا يحدث تسارع كوريوليس فعلاً أفقياً على الحركة الأفقية . والفعل الشاقولي صغير بالنسبة إلى تسارع الثقالة، ويمكن إهماله في أغلب الحالات.



الشكل (6-11) تسارع كوريوليس. عندما يتحرك جسم في مستو أفقي، تتجه المركبة الأفقية لتسارع كوريوليس نحو اليمين (نحو اليسار) من اتجاه الحركة في نصف الكرة الشمالي (الجنوبي). في هذه الحالة تكون $\vec{V}'$ في المستوى الأفقي، و $\vec{\omega}$ في المستوى المحدد بـ AB و NS، ويكون a_H عمودياً على $\vec{V}'$.

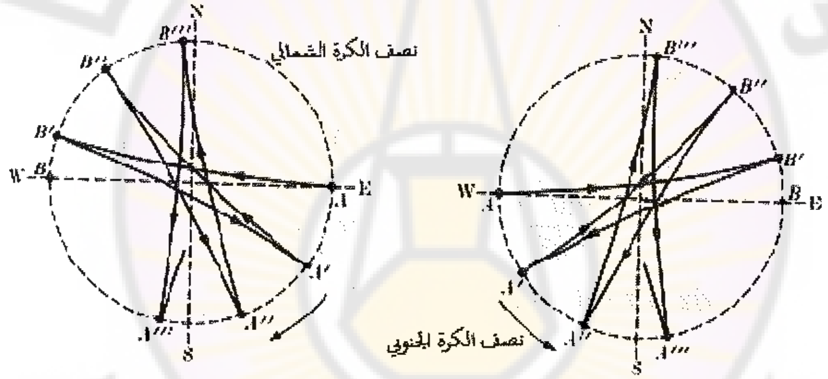
يمكن تبيان الفعل الأفقي في ظاهرتين معروفتين جيداً: كمثال أول وجود دوار الهواء في الإعصار. فلو نما مركز ضغط منخفض في الجو فستهب الريح قطرياً نحو المركز (الشكل12-6) غير أن تسارع كوريوليس يحرف جزئيات الهواء عن مسارها نحو اليمين في نصف الكرة الشمالي وينتج عن ذلك حركة دوارة في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة. كما وأن للضغط ولدرجة حرارة الهواء فعل مهم على حركة الهواء. وكنتيجة نهائية تحصل حركة الإعصار المبيّنة على الشكل (6-12) – أما في نصف الكرة الجنوبي فيتم الدوران في اتجاه عقارب الساعة.



الشكل (6-12) إعصار الريح في الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة في نصف الكرة الشمالي (في اتجاه عقارب الساعة في نصف الكرة الجنوبي) ينتج عن التأثير المشترك لمركز ضغط منخفض ولتسارع كوريوليس .

كمثال ثان، لنعتبر اهتزازات النواس. فمن أجل اهتزازات صغيرة السعة يمكن الافتراض أن حركة النواس تتم وفق مسار أفقي . فإذا جعلنا النواس ينوس في البدء في الاتجاه شرق – غرب ثم نتركه في A (انظر الشكل 13-6) فينبغي عليه أن يتابع اهتزازه بين A و B فيما لو كانت الأرض لا تدور. غير أنه، بسبب تسارع كوريوليس الناجم عن دوران الأرض، ينحرف مسار النواس باستمرار نحو اليمين في نصف الكرة الشمالي ونحو اليسار في نصف الكرة الجنوبي. إذن ففي نهاية كل هزّة يصل إلى نقطة 'B بدلاً من B. وعند العودة يصل إلى 'A وليس إلى A وهكذا يصل في سياق الاهتزازات الكاملة المتتالية إلى "A", "'A.

إلخ .... بتعبير آخر، إن مستوى اهتزازات النواس يدور في اتجاه عقارب الساعة في نصف الكرة الشمالي وفي الاتجاه المعاكس في نصف الكرة الجنوبي .



الشكل (13-6) دوران مستوي اهتزاز النواس الناجم عن تسارع كوريوليس. (يحدث الدوران في نصف الكرة الجنوبي بالاتجاه المعاكس للدوران في نصف الكرة الشمالي).

لقد برهن على هذا الفعل بصورة مدهشة الفيزيائي الفرنسي جان ليون فوكو، عندما علّق عام 1851 نواساً طوله 67m داخل كنيسة الإنفاليد، وعند كل اهتزازه كان النواس يسقط قليلاً من الرمل على دائرة مما يرهن تجريبياً على أن مستويه يدور بـ '15 °11 في الساعة. يوجد نواس فوكو في القاعة الكبرى في مؤسسة سميثزونيان في واشنطن، وكذلك في قاعة مبنى الأمم المتحدة في نيويورك. إن تجربة فوكو هي برهان ساطع على دوران الأرض، وحتى لو كانت الأرض مغطاة دوماً بالغيوم لقالت هذه التجربة للفيزيائيين إن الأرض تدور.

مسألة محلولة 3:

احسب الانحراف الناجم عن تسارع كوريوليس لجسم ساقط، وقارنه مع الانحراف الناجم عن الحد النابذ.

الحل:

نرى من الشكل (6-10) أن السرعة 'V للجسم الساقط تصنع زاوية $90^{\circ}+\lambda$ مع ω.

إذن فللتسارع $-2\omega\times V'$ القيمة:

$$2\omega V'\sin(90^{\circ}+\lambda) \quad \text{أو} \quad 2\,\omega\,V'\cos\lambda$$

وهذا هو التسارع d^2x/dt^2 للجسم. بأخذنا منحى الشرق كمحور X إذن:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\,\omega\,V'\cos\lambda$$

نستعمل من أجل 'V، بتقريب جيد، القيمة التي وجدناها في الفصل السابق في حالة السقوط الحر، بمعنى آخر: $V'=g\,t$ بالتعويض نجد:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\omega\,g\,t\cos\lambda$$

بالتكامل وبفرض أن الجسم كان ساكناً عند بدء السقوط $dx/dt=0$ من أجل $t=0$ لدينا

$$\frac{dx}{dt}=\omega\,g\,t^2\cos\lambda$$

وبالتكامل مجدداً وباعتبار أن الجسم الساقط، في اللحظة $t=0$ يقع على شاقول A وبالتالي أن: $x=0$ نحصل على:

$$x=\tfrac{1}{3}\omega\,g\,t^3\cos\lambda$$

مما يعطي الانحراف نحو الشرق بدلالة زمن السقوط.

إذا تركنا الجسم يسقط من ارتفاع h، يمكننا إعادة كتابة قيمة h من أجل السقوط الحر: $h=\tfrac{1}{2}g\,t^2$ بحيث إن:

$$x = \tfrac{1}{3}\omega\left(\frac{8h}{g}\right)^{1/2}.\cos\lambda = 1.53\times10^{-5}\,h^{3/2}\cos\lambda$$

وكمثال على ذلك إذا سقط الجسم من ارتفاع 100 m فلدينا:

$$x = 1.53\times10^{-2}.\cos\lambda$$

فهي إذن كمية صغيرة نسبياً بالمقارنة مع مسافة السقوط.

إن التسارع المتجه نحو الجنوب والناجم عن الحد النابذ هو:

$$\omega^2.r.\cos\lambda.\sin\lambda = 3.34\times10^{-2}.\cos\lambda.\sin\lambda$$

وباستخدام $h = \tfrac{1}{2}g\,t^2$ يكون الانحراف مساوياً:

$$y = \tfrac{1}{2}(\omega^2.r.\cos\lambda.\sin\lambda)t^2 = 2\,\omega\,r\,(h/g).\cos\lambda.\sin\lambda$$

$$y = 0.342\,h.\cos\lambda.\sin\lambda$$

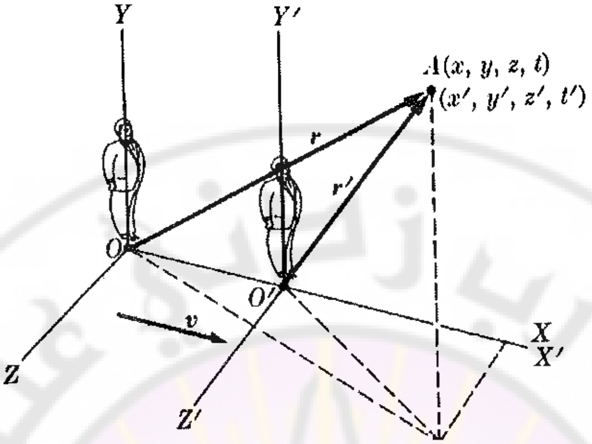
6.6 تحويل لورنتس:

في أواخر القرن التاسع عشر، حينما كان لا يزال يفترض أن الفضاء الخالي من المادة مملوء بالأثير، كان هناك نقاش واسع حول حركة الأجسام في الأثير والصورة التي تغير فيها هذه الحركة سرعة الضوء مقاسة على سطح الأرض. كان قد افترض من قبل أن اهتزازات هذا الأثير الافتراضي ترتبط بالضوء على الصورة نفسها التي ترتبط فيها اهتزازات الهواء بالصوت. فعلى فرض أن الأثير ساكن، نجد أن الضوء ينتقل بالنسبة للأثير بسرعة $c = 2.9974\times10^{8}\,m\,s^{-1}$ فإذا تحركت الأرض عبر الأثير دون أن تحدث فيه اضطراباً ينبغي على سرعة الضوء بالنسبة للأرض أن تكون تابعة لجهة الانتشار، ينبغي مثلاً أن تكون مساوية $c - v$ من أجل الأشعة الضوئية المنتشرة في اتجاه الأرض نفسه و $c + v$ في الاتجاه المعاكس، ولكن إذا كان الشعاع الضوئي، المراقب من الأرض، عمودياً على حركة الأرض فينبغي أن تكون سرعته بالنسبة إلى الأرض $\sqrt{c^2 - v^2}$ (كما مرّ معنا في المسألة المحلولة 6.2 الطلب d).

لقد بدأ العالمان الأمريكيان مايكلسون وموريلي عام 1881 بسلسلة من التجارب التاريخية الخالدة لقياس سرعة الضوء في الاتجاهات المختلفة بالنسبة إلى الأرض، وكانت مفاجأة كبرى لهما حينما وجدا أن سرعة الضوء هي نفسها في الاتجاهات جميعها، على الرغم من أن تحويل غاليليه يبيّن لنا أنه لا يمكن لجسم أن تكون له السرعة نفسها بالنسبة إلى مراقبين متحركين بحركة نسبية منتظمة ، وأن السرعة النسبية تتعلق باتجاه حركة المراقب، والمعادلات (6.9) و (6.10) تظهر ذلك على الخصوص. هناك تفسير آخر ممكن، وهو أن الأرض تجر معها الأثير كجو تابع لها؛ وبالتالي يكون الأثير بجوار الأرض ساكناً بالنسبة إلى الأرض. إن هذا التفسير ضعيف الاحتمال، لأن انجرار الأثير هذا سيتجلى في ظواهر أخرى مرتبطة بانتشار الضوء، وأن مثل هذه الظواهر لم تلاحظ قط. ولكل هذه الأسباب فلقد استبعد الفيزيائيون فكرة الأثير. واللغز الذي طرحته تجربة مايكلسون وموريلي حل عام 1905 عندما عرض أينشتاين مبدأ النسبية الذي يؤكد أن: جميع قوانين الطبيعة ينبغي أن تكون نفسها (أي تبقى لا متغيرة) من أجل جميع المراقبين المتحركين بحركة نسبية انسحابية منتظمة.

لقد افترض أينشتاين أن سرعة الضوء لا متغير فيزيائي له القيمة نفسها من أجل المراقبين جميعهم، وكما سنرى فيما بعد، إن هذا ضروري عندما نطبق مبدأ النسبية على قوانين الكهرطيسية. في هذه الفرضية، لا يمكن لتحويل غاليليه أن يكون هو الصحيح وبصورة خاصة المعادلة الرابعة من (6.8) $t'=t$ لا تبقى صحيحة. ولما كانت السرعة هي مسافة مقسومة على الزمن، فينبغي علينا تعديل الزمن وكذلك المسافة إذا أردنا أن تبقى نسبة الاثنين ثابتة من أجل المراقبين المتحركين بحركة نسبية كما هو الحال من أجل سرعة الضوء. وبتعبير آخر ليس للمجال الزمني بين حادثتين مبرراً في أن يكون هو نفسه من أجل مراقبين متحركين بحركة نسبية. ينبغي إذن استبدال تحويل غاليليه بتحويل آخر، حتى تكون سرعة الضوء لا متغيرة. وكما في حالة تحويل غاليليه نفترض أن المراقبين O و 'O يتحركان بسرعة نسبية V وأن حركتيهما تتجهان وفق المحورين OX و 'O'X وأن المحاور OZ ، OY و 'OY' OZ هي

على الترتيب متوازية فيما بينهما، (الشكل 6-14). يمكننا الافتراض كذلك أن المراقبين قد عايرا ساعتيهما بحيث إن $t = t' = 0$ عندما كانا في النقطة نفسها.



الشكل (6-14) جملتا المقارنة في الحركة النسبية الانسحابية المنتظمة.

لنفترض أنه في اللحظة $t = 0$ وفي الموضع المشترك للمراقبين، أصدر توهج ضوئي. فبعد مرور الزمن t يرى المراقب O أن الضوء وصل النقطة A ويكتب $r = c\,t$ حيث c هي سرعة الضوء. وكما أن:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

يمكننا أن نكتب أيضاً:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (6.30)$$

و بالشكل نفسه يرى المراقب 'O أن الضوء بلغ النقطة نفسها A في الزمن t' ولكن بالسرعة C أيضاً. فيكتب إذن: $r' = c\,t'$ أو:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad (6.31)$$

علينا الآن الحصول على تحويل يربط المعادلتين (6.30) و (6.31). يوحي لنا تناظر المسألة أن $y' = y$ و أن $z' = z$. ومن ناحية أخرى ، وكما أن $OO' = v\,t$ من أجل المراقب O ينبغي أن يكون $x = v\,t$.

إذا كان $x'=O$ (النقطة O'). وهذا يوحي بجعل $x'=k(x-vt)$ حيث k ثابت ينبغي تعيينه. ولما كان t' يختلف عن t ينبغي أيضاً الافتراض أن $t'=a(t-bx)$ حيث a و b ثابتتان يلزم تعيينهما (من أجل تحويل غاليليه $b=0$ و $k=a=1$) وبإجراء كل هذه التبديلات في المعادلة (6.31) يصبح لدينا:

$$k^2(x^2-2vxt+v^2t^2)+y^2+z^2=c^2a^2(t^2-2bxt+b^2x^2)$$

أو بالشكل:

$$(k^2-b^2a^2c^2)x^2-\ 2(k^2v-ba^2c^2)\,xt+y^2+z^2$$
$$=(a^2-k^2v^2/c^2)\,c^2t^2$$

ينبغي أن تكون هذه النتيجة مطابقة للمعادلة (6.30)، وعليه:

$$k^2-b^2a^2c^2=1 \qquad k^2v-ba^2c^2=0$$
$$a^2-k^2v^2/c^2=1$$

بحل مجموعة المعادلة هذه نحصل على:

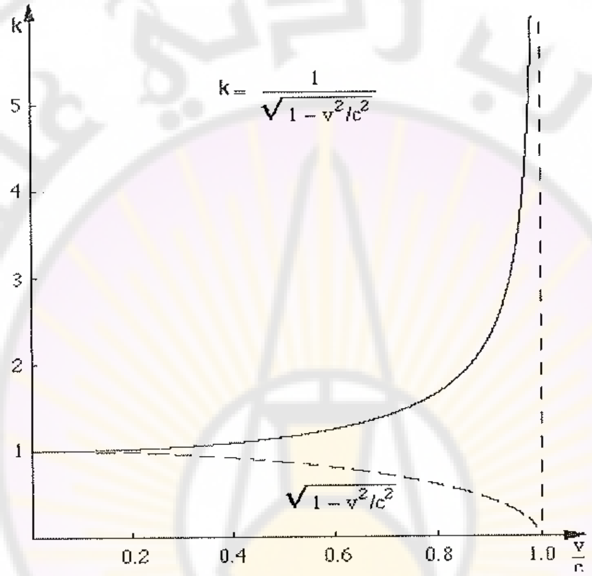
$$k=a=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad b=v/c^2 \tag{6.32}$$

والتحويل الجديد، المتفق مع عدم تغير سرعة الضوء، هو إذن:

$$x'=k\,(x-v)=\frac{x-v\,t}{\sqrt{1-v^2/v^2}}$$
$$y'=y$$
$$z'=z \tag{6.33}$$
$$t'=k(t-bx)=\frac{t-v\,x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

تدعى هذه المجموعة من العلاقات تحويل لورنتس؛ لأن الفيزيائي الهولندي هندريك لورنتس حصل عليها للمرة الأولى نحو عام 1890 بدراسة مسألة الحقل الكهرطيسي لجسيم متحرك.

إذا لاحظنا أن c هي سرعة كبيرة جداً بالمقارنة مع الغالبية العظمى للسرع التي نصادفها على الأرض، حيث إن النسبة v/c صغيرة جداً وإن الحدين v^2/c^2 و vx/c^2 هما، على العموم، مهملان وإن k، عملياً، مساوية الواحد (انظر الشكل 15-6)، إذن فلا يوجد عملياً، اختلاف بين تحويلي لورنتس وغاليليه. ويمكننا متابعة استخدام هذا الأخير في أغلب المسائل التي نصادفها إلا أنه عندما نكون بصدد جسيمات سريعة جداً مثل الالكترونات في الذرات أو جسيمات الأشعة الكونية فيلزم علينا استخدام تحويل لورنتس، أو التحويل النسبوي.



الشكل (15-6) تغير k مع v/c

ولكن حتى ولو كانت النتائج العددية المعطاة بتحويل لورنتس، في الغالبية العظمى من الحالات، لا تختلف كثيراً عن النتائج التي نحصل عليها بتحويل غاليليه، إلا أن تحويل لورنتس، من الوجهة النظرية يمثل تغييراً مهماً جداً لمفاهيمنا، وخاصة فيما يتعلق بالمكان والزمان.

مسألة محلولة 4:

أوجد تحويل لورنتس الذي يسمح بالتعبير عن الإحداثيات x ، y و z والزمن t مقاسة من قبل مراقب O بدلالة الإحداثيات 'x و 'y و 'z والزمن 't مقاسة من قبل مراقب 'O.

الحل:

هذا هو تحويل لورنتس المعاكس للذي يعبّر عنه بالمعادلات (6.33). وبالطبع لا تبدى العلاقة الثانية والثالثة أية صعوبة. هناك طريقة مباشرة لمعالجة المعادلة الأولى والرابعة وهي أن نعتبرهما جملة معادلتين، وبعملية جبرية مباشرة نحلهما من أجل t و x بدلالة t' و x'. إلا أننا سنترك هذه الطريقة للطالب كتمرين ولنستعمل تعليلاً آخر أكثر فيزيائية. فمن وجهة نظر المراقب 'O يتراجع المراقب O في الاتجاه 'X– بسرعة v– وهكذا يحق للمراقب 'O استخدام نفس تحويل لورنتس ليحصل على x و t مقاستين من قبل O بدلالة قيمتي x' و t' المقاستين من قبل 'O. ولأجل ذلك يستبدل المراقب 'O فقط v بـ v- في المعادلات (6.33) ويغير x و t بـ x' و t' وهكذا نجد:

$$
\begin{aligned}
x &= k\frac{x'+v\,t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\\
y &= y'\\
z &= z' \qquad\qquad (6.34)\\
t &= \frac{t'-v\,x'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}
\end{aligned}
$$

مما يعطي تحويل لورنتس المعاكس.

6.7 تحويل السرع:

لنبحث الآن عن قاعدة مقارنة السرع. إن لسرعة A المقاسة من قبل O، المركبات:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad V_z = \frac{dz}{dt} \qquad (6.35)$$

وكذلك فإن مركبات سرعة A، مقاسة من قبل 'O هي:

$$V'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} \quad V'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} \quad V'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$$

لنلاحظ الآن أننا نستعمل dt' وليس dt لأن t و t' لم يعودا متساويين.

ولدينا، بتفاضل المعادلات (6.33):

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dt$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$
$$dt' = \frac{dt - v\,dx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 - vV_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dt$$

لقد استبدلت dx في المعادلتين الأولى والأخيرة بـ $V_x dt$ وفق المعادلة (6.35). إذن بتقسيم المعادلات الثلاث الأولى على المعادلة الرابعة نحصل على:

$$V'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2},$$
$$V'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} \qquad (6.36)$$
$$V'_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{V_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}$$

تشكل هذه المجموعة من المعادلات قانون لورنتس لتحويل السرع، أي قانون مقارنة السرع لجسم مقاسة من قبل مراقبين يتحركان بحركة نسبية انسحابية منتظمة. نجد من جديد المعادلة (6.10) في حالات السرع النسبية الصغيرة جداً بالنسبة إلى سرعة الضوء. فمن أجل الجسيمات المتحركة وفق اتجاه المحور X لدينا $V_x = V, \quad V_y = V_z = 0$ لذلك، مع $V'_{x'} = V'$ ولأن المركبتين الأخيرتين لـ V' معدومتان ، تصبح المعادلة (6.36) إذن:

$$V' = \frac{V - v}{1 - vV/c^2} \qquad (6.37)$$

للتحقق من أن المعادلة (6.37) متفقة مع الفرضية القائلة إن سرعة الضوء هي نفسها من أجل مراقبين O و 'O، نعتبر حالة إشارة ضوئية تنتشر وفق المحور X. في هذه الحالة

$V=c$ في المعادلة (6.37) و:

$$V'=\frac{c-v}{1-vc/c^2}=c$$

إذن يقيس المراقب 'O هو أيضاً السرعة c . باستخراج V من المعادلة (6.37) نحصل على:

$$V=\frac{V'+v}{1+vV'/c^2} \tag{6.38}$$

وهو التحويل العكسي للمعادلة (6.37). لنلاحظ أنه إذا كانت 'V و V كلتاهما أصغر من c فإن V كذلك هي أصغر من c ؛ وبالإضافة إلى ذلك لا يمكن لـ v أن تكون أكبر من c؛ لأن المضروب $\sqrt{1-v^2/c^2}$ يصبح حينئذ خيالياً، وليس في مقدورنا، في الوقت الحاضر إعطاء أي مدلول فيزيائي لمثل هذا المضروب. فسرعة الضوء هي إذن السرعة العظمى التي يمكن ملاحظتها.

ينبغي أن نلاحظ أيضاً أن المعادلتين (6.37) أو (6.38) تربطان سرعتي الجسم نفسه مقاستين من قبل مراقبين يتحركان بحركة نسبية. في حين أن مراقباً معيناً يقوم بتركيب سرع مختلفة في جملة المقارنة الخاصة به وفق القواعد التي وضعت في الفصل الثالث.

مسألة محلولة 5:

تحقق من أن قانون تحويل السرع للمعادلات (6.36) يتفق مع الفرضية القائلة إن سرعة الضوء هي نفسها من أجل أي مراقبين ، وذلك بأن نعتبر شعاعاً ضوئياً ينتشر:

(a) وفق المحور Y في الجملة XYZ .

(b) وفق المحور 'Y في الجملة 'X'Y'Z .

الحل:

(a) علينا أن نجعل في هذه الحالة $V_y=0$,$V_x=0$ و $V_z=0$ تصبح المعادلة (6.36) إذن:

$$V'_{x'}=-v \qquad V'_{y'}=c\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad V'_{z'}=0$$

والسرعة بالنسبة إلى X'Y'Z' هي حينئذ:

$$V' = \sqrt{V'^2_{x'} + V'^2_{y'}} \quad = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c$$

والمراقب O' يقيس كذلك السرعة c من أجل الضوء، وهذا ما وجب فرضه لوضع تحويل لورنتس. من أجل المراقب المتحرك O'، يبدو الضوء منتشراً بالنسبة إلى جملة المقارنة X'Y'Z' في الاتجاه الذي يصنع مع المحور X زاوية تعطى بـ:

$$tg\,\alpha' = \frac{V'_{y'}}{V'_{x'}} = \frac{-c}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

(b) لنعتبر الآن الحالة التي يرى فيها المراقب O' الشعاع الضوئي ينتشر وفق المحور Y'، عندئذ $V'_{x'} = 0$ وتعطي الصيغتان الأوليتان للمعادلات (6.36):

$$0 = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2} \quad , \quad V'_{y'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}$$

نستخرج من المعادلة الأولى $V_x = v$ التي إذا وضعت في المعادلة الثانية تعطي:

$$V'_{y'} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

بينما من أجل المراقب O، الذي يقيس سرعة الضوء مساوية c، فلدينا:

$$c = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{v^2 + V_y^2}$$

أو $$V_y = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

والتي ، إذا وضعت في الصيغتين السابقتين لـ $V'_{y'}$ تعطي $V'_{y'} = c$. وهكذا نتحقق مرة أخرى من أن المراقب O' يقيس كذلك c من أجل سرعة الضوء. والاتجاه الذي يرى المراقب O الشعاع الضوئي وفقه يصنع مع المحور X زاوية α تعطي بـ :

$$tg\,\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{c}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

يمكن مقارنة نتائج هذه المسألة مع نتائج المسألة المحلولة (6.2) الذي يتعلق بالصوت والذي استخدمنا فيه تحويل غاليليه.

مسألة محلولة 6:

احصل على العلاقة بين تسارعي جسيم مقاسين من قبل مراقبين يتحركان بحركة نسبية. وللتبسيط نفترض أنه في اللحظة التي يجري فيها المقارنة يكون الجسيم ساكناً بالنسبة إلى المراقب 'O.

الحل:

إن المركبة وفق المحور OX لتسارع الجسيم ، مقاسة من قبل 'O هي:

$$\alpha'_{x'} = \frac{dV'_{x'}}{dt'} = \frac{dV'_{x'}}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

وباستعمال قيمة $V'_{x'}$ المستخرجة من العلاقة الأولى للمعادلات (6.36) وبإدخال القيم المناسبة للمشتقات، لدينا:

$$a'_{x'} = \left[\frac{a_x}{1 - vV_x / c^2} + \frac{(V_x - v)va_x / c^2}{(1 - vV_x / c^2)^2}\right]\frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - vV_x / c^2}$$

$$= a_x \frac{(1 - v^2 / c^2)^{3/2}}{(1 - vV_x / c^2)^3}$$

في اللحظة التي يكون فيها الجسيم ساكناً بالنسبة إلى 'O ، $V_x = v$ و:

$$a'_{x'} = \frac{a_x}{(1 - v^2 / c^2)^{3/2}} = k^3 a_x$$

وبحساب مماثل نجد أن:

$$a'_{z'} = \frac{a_z}{1 - v^2 / c^2} = k^2 a_z \qquad a'_{y'} = \frac{a_y}{1 - v^2 / c^2} = k^2 a_y$$

تختلف هذه النتيجة عن النتيجة التي تم الحصول عليها انطلاقاً من المعادلة (6.14) في حالة تحويل غاليليه، لأن التسارع هذه المرة ليس نفسه من أجل مراقبين يتحركان بحركة نسبية

منتظمة. بعبارة أخرى إن شرط عدم تغير سرعة الضوء في جميع جمل المقارنة المتحركة بحركة نسبية منتظمة بالنسبة لبعضها يلغي عدم تغير التسارع.

من المهم جداً معرفة العلاقة بين قيمتي التسارعين الملاحظتين من قبل O و 'O لدينا:

$$a'^2 = a'^2_{x'} + a'^2_{y'} + a'^2_{z'}$$

$$= \frac{a_x^2}{(1-v^2/c^2)^3} + \frac{a_y^2}{(1-v^2/c^2)^2} + \frac{a_z^2}{(1-v^2/c^2)^2}$$

$$= \frac{a_x^2 + (a_y^2 + a_z^2)(1-v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)^3}$$

$$= \frac{a^2 - v^2(a_y^2 + a_z^2)c^2}{(1-v^2/c^2)^3}$$

وكما أن: $\vec{v} \times \vec{a} = -va_z\vec{u}_y + \vec{u}_z v a_y \ \vec{u}_z \qquad v = v\,\vec{u}_x$

نستنتج من ذلك أنه:

$$(v \times a)^2 = \boldsymbol{v^2(a_y^2 + a_z^2)}$$

إذن :

$$a'^2 = \frac{a^2 - (v \times \boldsymbol{a})^2 / c^2}{(1-v^2/c^2)^3} \tag{6.39}$$

وهذه العلاقة المطلوبة.

عندما يكون التسارع موازياً للسرعة يكون: $\vec{v} \times \vec{a} = 0$

و : $a' = a/(1-v^2/c^2)^{3/2}$

تتوافق هذه النتيجة مع القيم التي وجدناها من أجل a_x و $a'_{x'}$. حين يكون التسارع متعامداً مع السرعة يكون $(v \times a)^2 = v^2 a^2$ و $a' = a/(1-v^2/c^2)$ وهذه نتيجة صالحة من أجل a_y, a_z و $a'_{y'}, a'_{z'}$.

6.8 نتائج تحويل لورنتس:

يوحي لنا المضروب $k = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ الذي يظهر في المعادلة (6.33) أن أطوال الأجسام ومجالات الزمن بين حوادث معينة يمكنها ألا تكون نفسها عندما تقاس من قبل مراقبين يتحركان بحركة نسبية. سنعالج الآن هذه النقطة المهمة.

(1) تقلص الأطوال:

يمكن تعريف طول جسم بأنه المسافة بين نهايته، إلا أنه تحرك الجسم بالنسبة للمراقب الذي يريد قياس طوله ، فينبغي عليه تعيين موضع النهايتين في الوقت نفسه، لنعتبر قضيباً ساكناً بالنسبة إلى 'O وموازياً للمحور 'O'X وعندما نرمز بـ a و b لنهايته فإن طوله، مقاساً من قبل 'O، هو $L' = x'_b - x'_a$. إن التزامن غير ضروري لـ 'O لأنه يرى القضيب ساكناً، غير أن على المراقب O الذي يرى القضيب متحركاً، قياس الإحداثيتين x_a و x_b للنهايتين في اللحظة نفسها t فيحصل $L = x_b - x_a$. ونجد بتطبيق العلاقة الأولى من المعادلات (6.33) أن:

$$x'_a = \frac{x_a - v\,t}{\sqrt{1-v^2c^2}}$$

وأن:

$$x'_b = \frac{x_b - v\,t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

بطرح العلاقتين يكون لدينا:

$$x'_b - x'_a = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad L = \sqrt{1-v^2/c^2}\,L' \qquad (6.40)$$

ولأن الحد $\sqrt{1-v^2/c^2}$ هو أصغر من الواحد فنحن في حالة يكون فيها L أصغر من 'L بمعنى آخر، إن المراقب الذي يرى الجسم متحركاً يقيس طولاً أقصر مما يقيسه المراقب الذي يرى الجسم ساكناً. وبتعبير آخر: الأجسام المتحركة تبدو أقصر: سكون L > حركة L.

(2) تمدد الزمن:

يمكن تعريف المجال الزمني بأنه الزمن الذي ينقضي بين حادثتين، مقاساً من قبل مراقب. والحادثة هي ظاهرة معينة تحدث في نقطة خاصة من الفضاء وفي لحظة معينة. وهكذا وحسب هذين التعريفين، عندما يصل نواس إلى أعلى نقطة له خلال اهتزازة واحدة فهذا يشكل حادثة. وبعد مرور فترة من الزمن يعود إلى الموضع نفسه، وهذه هي حادثة ثانية : إن الزمن الذي يمر بين هاتين الحادثتين هو عندئذ مجال زمني. فالمجال الزمني: هو إذن الزمن اللازم لفعل شيء ما: للنواس لكي يهتز، أو للإلكترون كي يدور حول النواة، أو للجسيم المشع كي يتفكك أو للقلب حتى يدق ... إلخ.

لنعتبر حادثتين تحصلان في المكان نفسه x' بالنسبة إلى المراقب O'، إن المجال الزمني بين هاتين الحادثتين هو $T'=t'_b-t'_a$.

أما من أجل المراقب O الذي يتحرك المراقب O' بالنسبة له بسرعة ثابتة v في اتجاه الإحداثيات X الموجبة، يكون المجال الزمني $T = t_b - t_a$.

ولإيجاد العلاقة بين الأزمنة التي تحصل فيها الحادثتان كما يسجلها المراقبان نستخدم المعادلة الأخيرة من المعادلات (6.34) مما يعطينا:

$$t_a = \frac{t'_a + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad , \quad t_b = \frac{t'_b + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

لنلاحظ أننا نكتب نفس x' في الصيغتين. إذن بطرح t_a من t_b نجد:

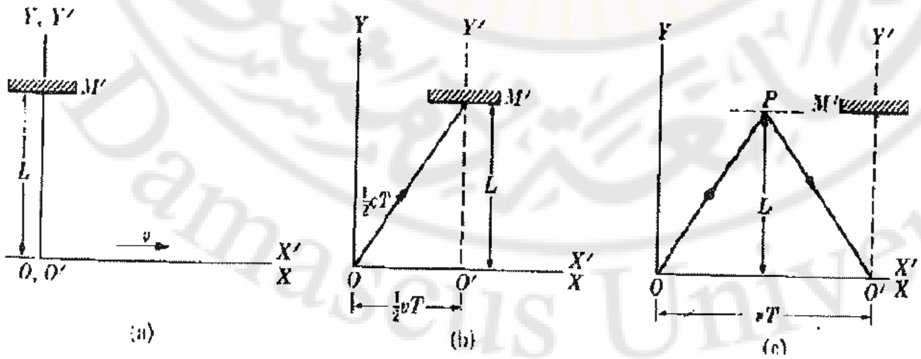
$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{أو} \quad t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (6.41)$$

تمثل T' الآن المجال الزمني الذي يقيسه المراقب O' الساكن بالنسبة إلى النقطة التي تحدث عندها الحادثتان و T المجال الزمني الذي يقيسه المراقب O الذي تكون هذه النقطة، بالنسبة له، متحركة عندما تحدث الحادثتان. بمعنى آخر: يرى المراقب O الحادثتين تحدثان في موضعين مختلفين من الفضاء. ولما كان الحد $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ أكبر من الواحد فتدل المعادلة

(6.41) أن T أكبر من T': تبدو الظواهر، عندما تحدث في جسم متحرك بالنسبة إلى المراقب أنها تدوم زمناً أطول مما لو كان الجسم ساكناً بالنسبة للمراقب، بمعنى آخر: سكون T < حركة T .

من المفيد تحليل تمدد الزمن، وتقلص الأطوال بصورة أكثر تفصيلاً؛ لأن هذه النتائج مناقضة إلى حد كبير لما كنا ننتظره. سنرى بصورة مباشرة تماماً أن تمدد الزمن، وتقلص الأطوال هما نتيجتان مباشرتان لـ "عدم تغير" سرعة الضوء. لنعتبر مراقبين O و O' يتحركان بحركة نسبية على طول المحور X بسرعة v. في الشكل (6-16) M' هي مرآة ساكنة بالنسبة إلى O' وعلى بعد L من المبدأ مقاس وفق المحور Y'، وهذا هو البعد نفسه الذي يقيسه O لأن المرآة عمودية على منحى الحركة. لنفترض أنه في اللحظة التي يكون فيها O و O' متطابقين، أصدر توهج ضوئي من مبدئهما المشترك نحو المرآة. فمن أجل الجملة التي ترى المرآة متحركة ستنعكس الإشارة الضوئية مرتدة وفق زاوية متعلقة بسرعة المرآة وبالمسافة L .

لنفترض T و T' الزمنين المسجلين من قبل O و O' والموافقين لعودة الإشارة الضوئية إلى O' بعد انعكاسها على المرآة. في الجملة O' يعود الضوء إلى المبدأ بينما في الجملة O ، يعود الضوء ليقطع المحور X على بعد v T من المبدأ. بالنسبة إلى O' يكون مسار الإشارة الضوئية O'M'O'=2L ويكون قد مر الزمن T'=2L/c؛ لأن O' يحصل على c كقياس لسرعة الضوء. يقابل هذا المجال الزمني حادثتين حصلتا في النقطة (O') نفسها بالنسبة إلى O'.



الشكل (6-16)

أما بالنسبة إلى المراقب O، الذي يقيس هو أيضاً c كسرعة للضوء، فيكون مسار الإشارة الضوئية 'OPO ويوجد إذن من أجل O علاقة زمنية تكتب (حسب الشكل 6-16b):

$$(\tfrac{1}{2}cT)^2 = (\tfrac{1}{2}vT)^2 + L^2$$

وبإصلاح العلاقة:

$$T = (2L/c)/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

إذن $T = T'/\sqrt{1-v^2/c^2}$ وهي تماماً المعادلة (6.41).

لنلاحظ أننا حصلنا على تمديد الزمن بفرضنا فقط أن سرعة الضوء لا متغيرة من أجل جميع المراقبين العطالين.

لنعتبر الآن المرآة 'M موضوعة على المحور 'X وموجهة عمودياً على هذا المحور. نضعها على بعد 'L من 'O ولنفرض أن المرآة ساكنة في الجملة 'O. يبيّن الشكل (6-17) هذا الترتيب. ومن جديد عندما يتطابق O و 'O ترسل إشارة ضوئية إلى المرآة. ونقيس من جديد الزمنين T و 'T اللذين يستغرقهما الضوء ليعود إلى 'O. فمن أجل 'O الذي يقيس c كسرعة للضوء يكون المجال هو $T' = 2L'/c$. يمكن للمسافة 'O'M ألا تكون نفسها من أجل المراقب O وسندعوها إذن المسافة L. نجد بعد ذلك الزمن t_1 الذي يستغرقه الضوء للذهاب من 'O حتى المرآة، حسب العلاقة:

$$ct_1 = L + vt_1$$

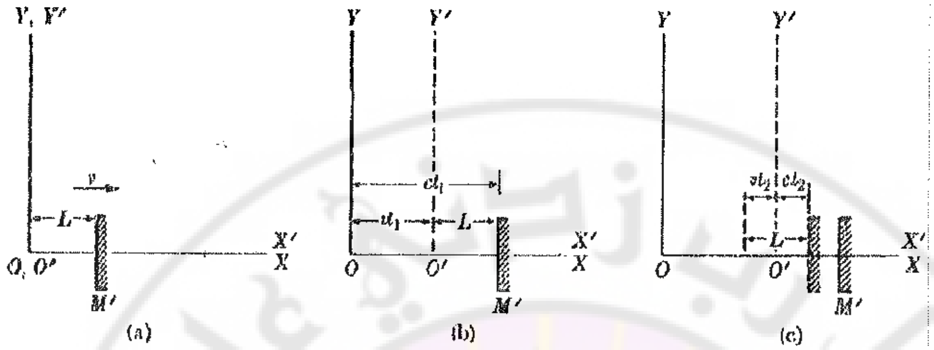
أو $t_1 = L/(c-v)$ ؛ لأن 'M تكون قد قطعت المسافة vt_1.

بعد الانعكاس يقيس O الزمن t_2 الذي استغرقه الضوء ليصل إلى 'O الذي يكون قد انتقل المسافة vt_2 أثناء هذا الزمن (انظر الشكل 6-17c) .

وبالتالي $ct_2 = L + vt_2$ أو $t_2 = L/(c-v)$. وإجمالاً يستغرق الضوء لكي يصل 'O زمناً مقاساً من قبل O يساوي:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2}$$

لكن T و T' يقابلان حادثتين تحدثان في الموضع نفسه بالنسبة إلى O' إذن فهما يرتبطان بالمعادلة (6.41). وبالتالي:



الشكل (6-17)

$$\frac{2L/c}{1-v^2/c^2} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$L = \sqrt{1-v^2/c^2}\,L'$$

هذه المعادلة تمثل المعادلة (6.40)؛ لأن L' هو طول لا يتحرك بالنسبة إلى O'. نرى بهذين المثالين الخاصين أن لعدم تغير سرعة الضوء من أجل جميع المراقبين العطاليين أثراً خاصاً تماماً على النتائج التي يحصل عليها المراقبون المتحركون بحركة نسبية.

مسائل

6.1 يسير قطاران A و B على خطين متوازيين بسرعة $70\ km\ hr^{-1}$ و $90\ km\ hr^{-1}$ على الترتيب. احسب السرعة النسبية لـ B بالنسبة إلى A عندما:

(a) يتحركان بالاتجاه نفسه.

(b) يتحركان باتجاهين متعاكسين.

أعد الحل في حالة: الخطان يصنعان بينهما زاوية ?60 .

6.2 تسير سيارتان على طريقين متعامدين، الأولى: نحو الشمال والثانية: نحو الشرق. سرعتاهما بالنسبة إلى الأرض $60\ km\ hr^{-1}$ و $80\ kmhr^{-1}$. على الترتيب احسب سرعتيهما النسبية. هل تتعلق السرعة النسبية بموضع السيارتين على طريقهما ؟ أعد المسألة بفرض أن السيارة الثانية تتحرك نحو الغرب.

6.3 تبحر سفينة في الاتجاه 60?N W بسرعة $4\ km\ hr^{-1}$ بالنسبة للماء. إن اتجاه التيار هو بحيث إن الحركة الحاصلة بالنسبة للأرض تتم نحو الغرب بسرعة $5\ kmhr^{-1}$. احسب سرعة التيار واتجاهه بالنسبة إلى الأرض.

6.4 إن سرعة زورق متحرك ذاتياً في ماء هادئ تساوي $55kmhr^{-1}$. يرغب السائق في الذهاب إلى نقطة واقعة على بعد 80 km بالاتجاه S 20?E. وهناك تيار قوي بسرعة $20\ km\ hr^{-1}$ في الاتجاه S 70?W.

(a) احسب وفق أي اتجاه ينبغي توجيه الزورق لكي يسير على خط مستقيم.

(b) عين مدة عبور الطريق.

6.5 يعبر قطار محطة بسرعة $30\ m\ s^{-1}$. وهناك كرة تتدحرج على أرض عربة القطار بسرعة $15\ m\ s^{-1}$ تتجه: (a) في اتجاه حركة القطار.

(b) في الاتجاه المعاكس.

(c) عمودية على الحركة. أوجد في كل حالة سرعة الكرة بالنسبة إلى مراقب واقف على الرصيف.

6.6 يتحرك جسيم بسرعة $500\ ms^{-1}$ بالنسبة إلى الأرض متجهاً نحو الجنوب مباشرة في نقطة خط عرضها 45?N:

(a) احسب التسارع النابذ للجسيم.

(b) احسب تسارع كوريوليس للجسيم.

(c) أعد المسألة نفسها من أجل نقطة على خط العرض 45?S .

6.7 يجري نهر نحو الجنوب (نحو الشمال) بسرعة $9\ kmhr^{-1}$ في نقطة من خط العرض N 45? أوجد تسارع كوريوليس. برهن أنه في نصف الكرة الشمالي (الجنوبي) يدفع الماء نحو الحافة اليمنى (اليسرى). يولد هذا الفعل تآكلاً أشد بقليل على الحافة اليمنى (اليسرى) كما لوحظ في بعض الحالات.

6.7 يتحرك مراقبان O' O بحركة نسبية انسحابية بسرعة 0.6c ويكونان منطبقين على بعضهما من أجل $t = t' = 0$ بعد مرور خمس سنوات، حسب O، كم من الزمن ينبغي لإشارة ضوئية للذهاب من O إلى 'O ؟ وعلى اعتبار أن هذه المعلومات معروفة من قبل O و 'O، كم مر من الزمن حسب 'O، منذ اللحظة التي كان فيها O و 'O منطبقين؟ إذا كان يوجد ضوء في O مشتعلاً منذ سنة واحدة. عين منذ كم من الزمن هو مشتعل حسب 'O. أعد الحل في حال كون تكون السرعة النسبية مساوية 0.9c.

6.8 مراقب يقف على رصيف محطة قطار يمر به قطار سرعته v=0.8c يقيس هذا المراقب طول الرصيف ويجده 60m ويلاحظ هذا المراقب أيضاً أن مقدمة القطار ومؤخرته ينطبقان مع نهايتي الرصيف.

a- ما هو الزمن الذي يستغرقه مرور القطار بنقطة ثابتة على الرصيف بالنسبة للمراقب الواقف على الرصيف؟

b- ما هو الطول الحقيقي للقطار، (كما يقيسه أحد ركاب القطار)؟

c- ما هو طول الرصيف كما يقيسه أحد ركاب القطار؟

d- ما هو الزمن الذي يستغرقه مرور القطار بالنسبة لنقطة ثابتة على الرصيف كما يقيسه أحد ركاب القطار؟

e- بالنسبة لراكب القطار سوف يجد أن مقدمة القطار ومؤخرته لن تنطبقا على طرفي الرصيف في اللحظة نفسها. أوجد الفارق الزمني بين لحظة انطباق مقدمة القطار على أول الرصيف وانطباق مؤخرته على آخر الرصيف؟

6.9 صاروخ طوله وهو ساكن 60m يبتعد عن الأرض حسب خط مسقيم، وهو مجهز بمرآتين عند نهايته. ترسل إشارة ضوئية من الأرض فتنعكس على المرآتين وتعود. تستقبل الإشارة الأولى بعد مرور 200 s، و الثانية تتأخر بمقدار 1.74 μs عن الأولى. أوجد بعد الصاروخ عن الأرض، وسرعته بالنسبة إلى الأرض.

6.10 يريد باحث استخدام طريقة مايكلسون - مورلي لقياس سرعة الريح بإرسال إشارات صوتية وفق مسارين متعامدين . يفترض أن سرعة الصوت تساوي $300\ m\ s^{-1}$ وطول المسار 100 m. ما هي السرعة الصغرى للريح التي يمكنه كشفها إذا استطاع أن يقيس فرقاً في الزمن $\Delta t \geq 0.001 s$ ؟

6.11 برهن أنه إذا كانت V و 'V قيمتي شعاعي السرعة لجسيم مقاستين من قبل مراقبين O و 'O متحركين على المحور X بسرعة نسبية v فلدينا حينئذ:

$$\sqrt{1-V'^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-V^2/c^2)}}{1-vV_x/c^2}$$

و

$$\sqrt{1-V^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-V'^2/c^2)}}{1-vV'_x/c^2}$$

6.12 علبة مكعبة، ضعلها L_0 مقاس من قبل مراقب 'O ساكن بالنسبة لها تتحرك بسرعة v موازية لأحد الأضلاع، بالنسبة إلى مراقب آخر O. برهن أن الحجم الذي يقيسه O يساوي $L_0^3\sqrt{1-v^2/c^2}$

الفصل السابع

تحريك الجسيم

7.1 مقدمة.

7.2 قانون العطالة.

7.3 كمية الحركة.

7.4 مبدأ انحفاظ كمية الحركة.

7.5 تعريف جديد للكتلة.

7.6 قانونا نيوتن الثاني والثالث، مفهوم القوة.

7.7 نقد مفهوم القوة

7.8 وحدات القوة.

7.9 قوى الاحتكاك.

7.10 قوى الاحتكاك في الموائع.

7.11 الجمل ذات الكتلة المتغيرة.

7.12 الوزن الظاهري.

7.13 الحركة المنحنية.

7.14 عزم كمية الحركة.

7.15 القوى المركزية.

تحريك الجسيم

Dynamic of particle

7.1 مقدمة:

يهتم علم الحركة بوصف حركة الأجسام مثل السرعة والتسارع، ولا يهتم بالسبب الذي أدى لحركة الجسيم بهذا الشكل أو بغيره، على سبيل المثال حركة مستقيمة منتظمة أو دائرية منتظمة أو متسارعة ...الخ، وسنبحث فيما يلي في الأسباب التي تجعل الجسيمات تتحرك بهذا الشكل أو ذاك. لماذا تسقط الأجسام القريبة من سطح الأرض بتسارع ثابت؟ لماذا تتحرك الأرض حول الشمس على مدار معين؟ لماذا ترتبط الذرات لتشكل الجزئيات؟ لماذا يهتز النابض بعد أن يُشد؟ نريد أن نفهم هذه الحركات، وكثيراً من الأشياء الأخرى التي نشاهدها باستمرار حولنا. وهذا الفهم ليس مهماً فقط من أجل مساعدتنا على معرفة الطبيعة؛ وإنما كذلك من أجل التطبيقات العملية والهندسية. فإذا فهمنا بشكل عام كيف تنشأ الحركات أصبح بإمكاننا بناء آلات وأدوات تعمل بالشكل الذي نريده. تدعى دراسة العلاقة بين حركة جسم والأسباب التي تؤدي إلى هذه الحركة بعلم التحريك أو الديناميك .

تدلنا تجربتنا اليومية على أن حركة جسم ما هي النتيجة المباشرة للتأثيرات المتبادلة بينه وبين الأجسام الأخرى التي تحيط به. فحين يضرب اللاعب الكرة فهو يؤثر بها ويغير حركتها. ومسار القذيفة ليس سوى نتيجة تأثيرها المتبادل مع الأرض. وحركة الإلكترون حول النواة تنتج عن التأثير المتبادل بينه وبين النواة، وربما مع الإلكترونات الأخرى أيضاً. توصف

التأثيرات المتبادلة بشكل جيد بواسطة مفهوم رياضي يدعى القوة. إن دراسة الديناميك هي في الحقيقة تحليل العلاقة الموجودة بين القوة وتغيرات حركة الجسم.

إن قوانين الحركة التي سنبحثها فيما يلي إن هي إلا تعميمات ناتجة عن التحليل الدقيق للحركات التي نشاهدها حولنا، وعن توسيع مشاهداتنا على بعض التجارب المثالية أو المبسطة.

7.2 قانون العطالة (قانون نيوتن الأول)

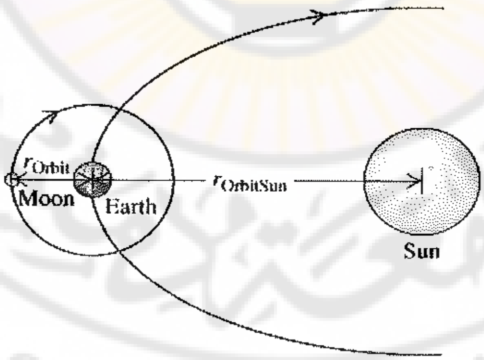
الجسيم الحر هو ذلك الجسيم غير الخاضع لأي تأثير متبادل، وإذا شئنا الدقة فإن هذا الجسيم غير موجود؛ لأن كل جسيم يخضع لتأثيرات متبادلة مع الجسيمات الأخرى جميعها في العالم. والجسيم الحر ينبغي أن يكون إما معزولاً تماماً أو أن يكون وحيداً في العالم. وفي مثل هذه الحال سيكون من المستحيل مراقبته؛ لأنه لدى المراقبة سيكون هناك حتماً تأثير متبادل بينه وبين المراقب، ومع ذلك، ومن الناحية العملية، يمكن اعتبار بعض الجسيمات حرة إما لأنها بعيدة بعداً كافياً عن الجسيمات الأخرى بحيث يكون تأثيرها المتبادل معها مهملاً، أو لأن تأثيراتها المتبادلة مع الجسيمات الأخرى تعادل بعضها بحيث تكون محصلتها صفراً .

لنذكر الآن قانون العطالة الذي ينص على أن :الجسيم الحر يتحرك دائماً بسرعة ثابتة، أي دون تسارع وبكلمات أخرى، **الجسيم الحر إما يتحرك على خط مستقيم بسرعة ثابتة أو أن يبقى ساكناً (بسرعة معدومة).** وهذا القانون يدعى كذلك **قانون نيوتن الأول**؛ لأن أول من صاغه كان إسحق نيوتن (1642-1727) Isaac Newton وهو أول ثلاثة قوانين صاغها نيوتن في القرن السابع عشر.

لنتذكر أن الحركة نسبية،كما رأينا سابقاً، وبالتالي فإننا حين نذكر قانون العطالة يجب أن نشير إلى أية جملة مقارنة ننسب حركة الجسيم الحر. إننا نفترض أن حركة الجسيم تتم بالنسبة إلى مراقب هو نفسه جسيم حر أو جملة حرة بمعنى أنه غير خاضع لأي تأثير متبادل مع بقية

العالم. إن مراقباً من النوع يدعى بالمراقب العطالي وجملة المقارنة التي يستعملها تدعى جملة المقارنة العطالية ونحن نفترض أن جمل المقارنة العطالية لا تدور؛ لأن وجود الدوران يؤدي إلى وجود تسارعات (أو إلى تغيرات في السرعة ناتجة عن التغيرات في الاتجاه) وبالتالي إلى وجود تأثيرات متبادلة مما يناقض تعريفنا للمراقب العطالي الذي ينبغي أن يكون "جسيماً حراً" أي دون تسارع. وحسب قانون العطالة فإن مراقبين عطاليين مختلفين يمكن أن يتحرك أحدهم بالنسبة للآخر بسرعة ثابتة. ومشاهداتهم ستكون بالتالي مرتبطة مع بعضها بواسطة تحويل غاليليه أو تحويل لورنتس تبعاً لمقدار سرعهم النسبية .

إن الأرض، بسبب دورانها اليومي، وتأثيرها المتبادل مع الشمس والكواكب الأخرى ، ليست جملة مقارنة عطالية. ومع ذلك ففي كثير من الحالات يكون أثر دوران الأرض مهملاً ويمكن اعتبار جمل المقارنة المرتبطة بمخابرنا الأرضية دون خطأ كبير، أنها جمل مقارنة عطالية. والشمس كذلك ليست جملة مقارنة عطالية، فهي بسبب تأثيرها المتبادل مع الأجرام الأخرى في مجرتنا ترسم مداراً منحنياً حول مركز المجرة (الشكل 1-7) ومع ذلك، باعتبار أن حركة الشمس تقترب كثيراً من الحركة المستقيمة المنتظمة إذا ما قورنت بحركة الأرض، (فالتسارع المداري للأرض أكبر بـ 15 مليون مرة من تسارع الشمس المداري) فإن الشبه بين الشمس وبين جملة المقارنة العطالية أكبر بكثير .



الشكل (1-7): إن جملة المقارنة المرتبطة ليست جملة عطالية بسبب دوران الأرض اليومي، وبسبب حركتها المتسارعة حول الشمس. والشمس كذلك ليست جملة مقارنة عطالية بسبب حركتها حول مركز المجرة، إلا أنه من أجل التطبيقات العملية يمكن استخدام كل من هذين الجسمين لتعريف جملة عطالية .

لنعط فكرة عن بعض التجارب التي تجري في مخابرنا على الأرض والتي تؤكد قانون العطالة. إن كرة موضوعة على سطح أفقي دون احتكاك تبقى ساكنة ما لم نؤثر عليها، وهذا يعني أن سرعتها تبقى ثابتة، قيمتها صفر. وحين تضرب الكرة فإنها تخضع لحظة ضربتها لتأثير متبادل، وتكتسب سرعة لكنها تصبح حرة من جديد، وتتحرك حسب خط مستقيم بالسرعة التي اكتسبتها أثناء الصدمة. وإذا كانت الكرة صلبة وكروية تماماً وكان السطح أفقياً ودون أي احتكاك فإننا نستطيع أن نفترض أن الكرة ستتابع حركتها إلى مالا نهاية بالصورة نفسها لكن الأمر لا يجري عملياً بهذا الشكل؛ لأن الكرة تتباطأ بالتدريج وتتوقف أخيراً. وإننا نقول إنه حدث تأثير متبادل إضافي بين الكرة والسطح وهذا التأثير المتبادل، المسمى بالاحتكاك، سنعالجه فيما بعد.

7.3 كمية الحركة:

أحد التوابع الأساسية والهامة المستخدمة في دراسة حركة جسيم أو جملة جسيمات يدخل مفهوم كمية الحركة للجسيم. سبق أن أعطينا في الفصل الثاني تعريفاً عملياً للكتلة بقولنا إنها عدد يعطى لكل جسيم أو لكل جسم وأننا نحصل عليه بمقارنة الجسم بجسم آخر عياري. فالكتلة إذن هي عامل يميز جسيماً عن آخر. وتعريفنا العملي للكتلة يعطينا قيمة هذا العامل بفرض أن الجسيم ساكن. لكننا لا نعلم حسب هذا التعريف، فيما إذا كانت الكتلة تبقى نفسها حين يتحرك الجسيم، وينبغي إذن لكي نكون دقيقين أن نستعمل عبارة كتلة السكون. لنفترض، رغم ذلك، في الوقت الحاضر أن الكتلة مستقلة عن حالة الحركة، ولنسمها اختصاراً الكتلة. فيما بعد، سنجري تحليلاً أدق لهذا المفهوم المهم، وسنتأكد من أن فرضيتنا هذه هي تقريب جيد طالما أن سرعة الجسيم صغيرة جداً بالنسبة إلى سرعة الضوء.

نعرّف كمية حركة جسيم بأنها جداء كتلته في سرعته، وإذا رمزنا لها بالحرف $\vec{p}$ أمكننا أن نكتب:

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \tag{7.1}$$

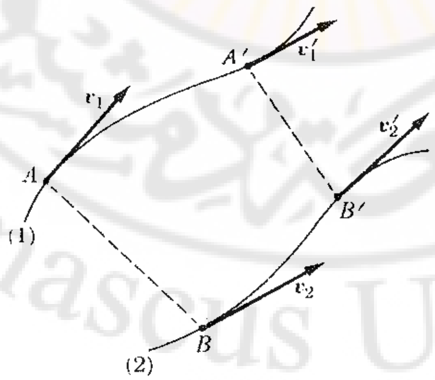
يتضح أن شعاع كمية الحركة مرتبط بشعاع السرعة، وبالتالي فهو يقع على نفس الحامل ويتفق معه بالجهة. في الكثير من مجالات الفيزياء يطلق على كمية الحركة للجسيم اسماً آخر مثل اندفاع الجسيم. إن كمية الحركة هي عبارة عن مفهوم فيزيائي بالغ الأهمية؛ لأنها تحتوي المقدارين اللذين يصفان الحالة الديناميكية للجسيم وهما: كتلته وسرعته. يعبر عن كمية الحركة في جملة الوحدات الدولية بالمتر.كغ في الثانية $m\ kg\ s^{-1}$ (وهي وحدة لم يعط لها أي اسم خاص).

يمكننا أن نرى من بعض التجارب البسيطة أن كمية الحركة هي بالفعل مقدار ديناميكي أغنى بالمعلومات من السرعة لوحدها. فعلى سبيل المثال: إن إيقاف أو تسريع شاحنة محملة لهو أصعب من إيقاف أو تسريع شاحنة فارغة لها السرعة نفسها، ذلك أن كمية حركة الشاحنة المحملة أكبر.

إنه بإمكاننا الآن إعطاء صيغة جديدة لقانون العطالة، بقولنا: يتحرك الجسيم الحر دائماً بحيث تبقى كمية حركته ثابتة.

7.4 مبدأ انحفاظ كمية الحركة:

إن من أولى نتائج قانون العطالة أن مراقباً عطالياً يميز بسهولة أن جسيماً ما ليس حراً (أي أنه في تأثير متبادل مع جسيمات أخرى) إذا شاهد أن سرعة أو كمية حركة هذا الجسيم ليست ثابتة، أو بكلمة أخرى إذا كان الجسيم متسارعاً.



الشكل (7-2) التأثير المتبادل بين جسيمين.

لنعتبر الآن حالة مثالية: لنفترض أنه بدلاً من أن نراقب جسيماً معزولاً في الكون، كما يقتضي قانون العطالة، نراقب جسيمين خاضعين فقط لتأثيرهما المتبادل المشترك، وإنهما عدا عن ذلك معزولين عن بقية العالم. وبسبب تأثيرهما المتبادل فإن سرعة كل منهما لا تبقى ثابتة إنما تتغير مع الزمن، ومسارهما، بشكل عام منحنيان، كما يبينه المنحنيان (1) و (2) في الشكل(7-2)، في لحظة معينة t يكون الجسيم 1 في النقطة A وتكون سرعته v_1 بينما يكون الجسيم 2 في B وسرعته v_2. وفي لحظة تالية t' يصبح الجسيمان على التوالي في 'A و 'B وتصبح سرعتاهما v'_1 و v'_2 . فإذا رمزنا لكتلتي الجسيمين بـ m_1 و m_2 فإننا نقول إن كمية الحركة الكلية للجملة كانت في اللحظة t :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad (7.2)$$

وفي اللحظة t'، أصبحت كمية الحركة الكلية :

$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \qquad (7.3)$$

لقد احتفظنا لدى كتابتنا هذه المعادلة الأخيرة بفرضيتنا القائلة إن كتل الجسيمات مستقلة عن حالة حركتها، ولهذا فقد استعملنا الكتل نفسها كما في المعادلة (7.2) ولو لم يكن الأمر كذلك لوجب علينا أن نكتب :

$$\vec{p}' = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

إن النتيجة المهمة لتجاربنا هي أنه مهما كانت اللحظتان t و t'، فإننا نجد دوماً، كنتيجة للمشاهدة، أن $p = p'$. وبعبارةٍ أخرى: "إن كمية الحركة الكلية لجملة مؤلفة من جسيمين خاضعين فقط لتأثيرهما المتبادل المشترك تبقى ثابتة".

تشكل هذه النتيجة مبدأ انحفاظ كمية الحركة، أحد المبادئ الأكثر أهمية والأكثر عمومية في الفيزياء. لنعتبر مثلاً ذرة الهيدروجين، المؤلفة من إلكترون يدور حول البروتون، ولنفترض أنها

معزولة بحيث لا ينبغي علينا أن نعتبر سوى التأثير المتبادل بين الإلكترون والبروتون. إن مجموع كميتي حركة الإلكترون بالنسبة لجملة إحداثيات عطالية يبقى ثابتاً. لنعتبر كذلك بالطريقة نفسها الجملة المؤلفة من الأرض والقمر. فلو كان بالإمكان إهمال التأثيرات المتبادلة العائدة للشمس وللأجرام السماوية الأخرى ، لكان مجموع كميتي حركة الأرض والقمر، بالنسبة لجملة إحداثيات عطالية، ثابتاً.

بالرغم من أننا ذكرنا مبدأ انحفاظ كمية الحركة دون أن نعتبر سوى جسيمين، إلا أن هذا المبدأ يطبق كذلك على أي عدد كان من الجسيمات التي تشكل جملة معزولة، أي الجسيمات التي لا تخضع سوى لتأثيراتها المتبادلة المشتركة فيما بينها، والتي ليست لها تأثيرات متبادلة مع أجزاء العالم الأخرى. ولذلك فإن مبدأ انحفاظ كمية الحركة في شكله العام ينص على: ***أن كمية الحركة الكلية لجملة معزولة من الجسيمات تبقى ثابتة .***

لتكن مثلاً، جزيئة هيدروجين، مؤلفة من ذرتي هيدروجين (أي من إلكترونين وبروتونين) فإذا كانت الجزيئة معزولة، وبالتالي لن نعتبر سوى التأثيرات المتبادلة بين هذه الجسيمات الأربعة فإن مجموع كميات حركتها بالنسبة لجملة مقارنة عطالية سيكون ثابتاً . وبالشكل نفسه، لنعتبر منظومتنا الشمسية المؤلفة من الشمس والكواكب وتوابعها ، فإذا كان بإمكاننا إهمال التأثيرات المتبادلة مع الأجرام السماوية الأخرى لكانت كمية الحركة الكلية للمنظومة الشمسية بالنسبة لجملة عطالية، ثابتة.

لا نعرف أي استثناء لهذا المبدأ العام لانحفاظ كمية الحركة. وفي الواقع ، ففي كل مرة يبدو فيها وكأن هذا المبدأ قد خرق في تجربة ما، فإن الفيزيائي يبحث في الحال عن جسيم مجهول أو غير ظاهر، لم يلحظه، يمكن أن يكون هو المسؤول عن هذا الخرق الظاهري لانحفاظ كمية الحركة. لقد قاد مثل هذا النوع من البحث الفيزيائيين لاكتشاف النيترون والنيترينو والفونون وعدد آخر من الجسيمات العنصرية. سنضطر فيما بعد لإعادة صياغة مبدأ انحفاظ كمية الحركة بشكل مختلف بعض الشيء، إلا أنه سيكون بإمكاننا في الغالبية العظمى من المواضيع التي سنناقشها استعماله بالصيغة التي ذكرناها في هذا الفصل.

يمكننا أن نعبر رياضياً عن انحفاظ كمية الحركة بكتابة المعادلة التالية:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... = const. \tag{7.4}$$

التي تعني أنه في جملة معزولة، فإن تغير كمية حركة جسيم ما، خلال فترة زمنية يساوي ويعاكس تغير كمية حركة باقي الجملة خلال الفترة الزمنية نفسها. وهكذا ففي حالة جزيئة الهيدروجين المعزولة مثلاً، فإن تغير كمية حركة أحد الإلكترونين يساوي ويعاكس مجموع تغيرات كمية حركة الإلكترون الآخر والبروتونين.

أما في الحال الخاصة لجسيمين فقط فإن:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const \tag{7.5}$$

أو:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \tag{7.6}$$

وبالتالي :

$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}'_2$$

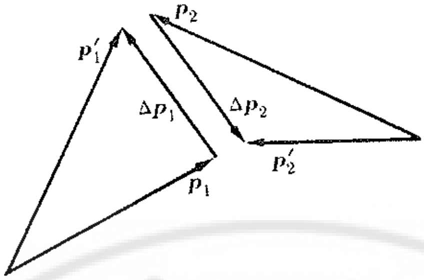
$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2) \tag{7.7}$$

أو إذا سمينا $\vec{p}' - \vec{p} = \Delta\vec{p}'$ تغير كمية الحركة بين اللحظتين t و t' أصبح بإمكاننا أن نكتب:

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \tag{7.8}$$

تدل هذه النتيجة على أنه من أجل جسيمين بينهما تأثير متبادل ، فإن تغير كمية حركة أحد الجسيمين خلال فترة زمنية معينة يساوي ويعاكس تغير كمية حركة الجسيم الآخر خلال الفترة الزمنية نفسها، (الشكل 3-7). يمكن التعبير عن هذه النتيجة كذلك بالقول : *إن التأثير المتبادل يولد تبادلاً في كمية الحركة.*

بحيث إن كمية الحركة التي "يخسرها" أحد الجسيمين في أثناء التأثير المتبادل تساوي كمية الحركة التي "يربحها" الجسيم الآخر.



الشكل (3-7) تبادل كمية الحركة بنتيجة التأثير المتبادل بين جسيمين.

إن قانون العطالة الذي ذكرناه في الفقرة (7.2) ليس إلا حالة خاصة من مبدأ انحفاظ كمية الحركة. فحيث إنه ليس لدينا سوى جسيم واحد معزول بدلاً من عدد من الجسيمات، فإنه لا يعود للمعادلة السابقة (7.4) سوى حد واحد ، وتصبح $\vec{p} = const.$ ، أو ما يكافئ ذلك $\vec{v} = const.$ وهذا هو بالضبط قانون العطالة.

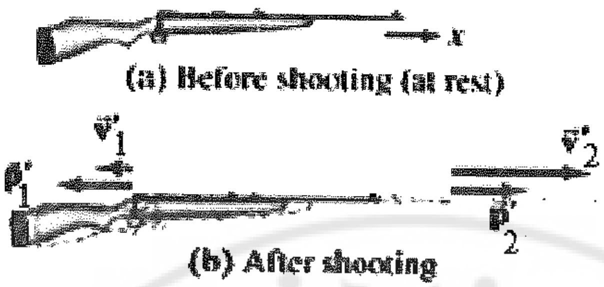
إننا نجد حولنا باستمرار أمثلة على انحفاظ كمية الحركة. وما ارتداد السلاح الناري إلا أحدها. في البداية الجملة المؤلفة من البندقية والرصاصة تكون ساكنة، وكمية حركتها الكلية صفر، وحين تطلق البندقية يوازن ارتداد البندقية إلى الخلف كمية الحركة المتجهة إلى الأمام التي تأخذها الرصاصة .

وحين تنشطر نواة مطلقة (مثلاً) إلكتروناً ونيترينو، فإن كمية الحركة الكلية للإلكترون والنتيرينو والنواة الناتجة تساوي الصفر؛ لأن الجملة كانت ساكنة في الأصل بالنسبة لجملة مقارنة عطالية مرتبطة بالمخبر. و الشيء نفسه يحدث إذا انفجرت قنبلة في أثناء سقوطها، إذ تكون كمية الحركة الكلية لجميع الشظايا بعد الانفجار مباشرة مساوية لكمية حركة القنبلة في اللحظة السابقة للانفجار مباشرة.

مسألة محلولة 1:

تُطلق بندقية كتلتها 0.80 kg كما هو موضّح بالشكل (4-7) رصاصة كتلتها 0.016 kg وتبلغ سرعتها ($700ms^{-1}$). والمطلوب حساب سرعة ارتداد البندقية.

الحل :



الشكل (4-7)

في البداية كانت البندقية والرصاصة في حالة السكون (a) وكانت كمية حركتهما الكلية معدومة بعد الانفجار، انطلقت الرصاصة نحو الأمام بكمية حركة:

$$p_1 = m_1 v_1 = (0.016) \times (700) = 11.20\ m\,kg\,s^{-1}$$

ينبغي إذن أن ترتد البندقية بكمية حركة مساوية ومعاكسة (b)، وبالتالي يكون لدينا:

$$p_1 = p_2$$

$$p_2 = m_1 v_1 = 11.20\ mkgs^{-1} = m_2 v_2$$

و بما أن $m_2 = 0.80\,kg$

إذن: $$v_2 = \frac{11.20}{0.80} = 14.0\ ms^{-1}$$

7.5 تعريف جديد للكتلة:

باستخدام التعريف (7.1) لكمية الحركة وعلى افتراض أن كتلة الجسيم تبقى ثابتة يمكننا أن نعبّر عن تغير كمية حركة جسيم خلال الفترة الزمنية Δt بالشكل:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\left(m\,.\vec{v}\right) = m.\,\Delta\vec{v}$$

وذلك بافتراض أن كتلة الجسيم تبقى ثابتة وبالتالي فإن المعادلة (7.8) تكتب:

$$m_1\ \Delta\vec{v}_1 = m_2\ \Delta\vec{v}_2$$

أو، إذا لم نعتبر سوى القيم المطلقة:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|} \qquad (7.9)$$

مما يدل على أن نسبة كتلتي الجسيمين تتناسب عكساً مع القيمة المطلقة لنسبة تغير سرعتيهما. تسمح لنا هذه النتيجة بأن نعرف الكتلة ديناميكياً. وبالفعل، إذا كان الجسيم 1 هو الجسيم "العياري" أمكن تعريف كتلته على أنها وحدة الكتلة فإذا تركنا الجسيم الآخر، الذي ندعوه الجسيم 2، في تأثير متبادل مع الجسيم العياري وطبقنا العلاقة السابقة، تمكنا من الحصول على كتلته m_2. تبين لنا هذه النتيجة أن تعريفنا العملي السابق للكتلة، يمكن أن يستبدل بهذا التعريف الجديد المستخرج من مبدأ انحفاظ كمية الطاقة ومن فرضية أن الكتلة لا تتغير مع السرعة.

7.6 قانونا نيوتن الثاني والثالث، مفهوم القوة:

نراقب، في العديد من الحالات، حركة جسيم وحيد، وذلك إما لأننا لا نملك الوسيلة لمراقبة الجسيمات الأخرى التي توجد بينه وبينها تأثيرات متبادلة، أو لأننا نجهلها. في مثل هذه الحالة يكون من الصعب استعمال مبدأ انحفاظ كمية الحركة. إلا أنه توجد مع ذلك طريقة للتغلب على هذه الصعوبة وذلك بإدخال مفهوم القوة. ويطلق اسم ديناميك الجسيم (أو تحريك الجسيم). على النظرية الرياضية المقابلة.

تربط المعادلة (7.8) بين تغير حركة الجسيم 1 وتغير كمية حركة الجسيم 2 خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t' - t$ فلو قسمنا طرفي هذه المعادلة على Δt لكان لدينا:

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \tag{7.10}$$

مما يدل على أن التغيرات الوسطية لشعاع كمية الحركة خلال الفترة الزمنية Δt متساوية بالقيمة ومتعاكسة. فإذا جعلنا Δt صغيرة جداً أي إذا أخذنا نهاية المعادلة (7.10) عندما $\Delta t \to 0$ فإننا نحصل على:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \tag{7.11}$$

أي أن مشتقي شعاعي كمية الحركة للجسيمين متساويان ومتعاكسان في كل لحظة t وهكذا يمكننا أن نرى - باستخدام أمثلتنا السابقة - أن مشتق كمية الحركة للإلكترون في ذرة

الهيدرُوجين المعزولة يساوي ويعاكس كمية حركة البروتون. كذلك، على اعتبار أن الأرض والقمر يشكلان جملة معزولة ، نرى أن مشتق كمية حركة الأرض بالنسبة للزمن يساوي ويعاكس كمية حركة القمر.

يسمى مشتق كمية الحركة بالنسبة للزمن لجسيم ما "بالقوة". وبعبارة أخرى أن القوة "المؤثرة" على جسيم هي:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (7.12)$$

إن كلمة "المؤثرة" تؤدي أحياناً إلى خطأ، ذلك أنها توحي بأن شيئاً ما مطبق على الجسم. إن القوة عبارة عن مفهوم رياضي هو بالتعريف مساو لمشتق كمية حركة جسيم ما، وهذا المشتق ناتج بدوره عن التأثير المتبادل فإذا كان الجسيم حراً، كان. $\vec{p} = const$ وكان $\vec{F} = d\vec{p}/dt = 0$ يمكننا القول إذن إنه لا تؤثر أية قوة على الجسيم الحر.

إن العلاقة (7.12) هي **قانون نيوتن الثاني**، إلا أن هذا، كما نرى، أقرب إلى التعريف منه إلى القانون، وهو نتيجة مباشرة لمبدأ انحفاظ كمية الحركة.

إننا إذا استعملنا مفهوم القوة تمكنا من كتابة العلاقة (7.11) بالشكل:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (7.13)$$

حيث: $\vec{F}_1 = d\vec{p}_1/dt$ هي القوة المؤثرة على الجسيم 1 بسبب كونه في تأثير متبادل مع الجسيم 2 و $\vec{F}_2 = d\vec{p}_2/dt$ هي القوة المؤثرة على الجسيم 2 بسبب كونه في تأثير متبادل مع الجسيم 1. نستنتج مما سبق أنه:

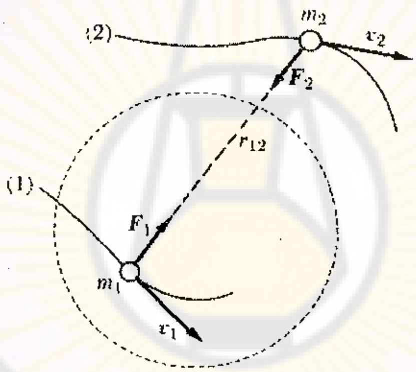
عندما يكون بين جسيمين تأثير متبادل فإن القوة التي تؤثر على أحد الجسيمين تساوي وتعاكس القوة التي تؤثر على الآخر.

وهذا هو **قانون نيوتن الثالث**، وهو كذلك نتيجة لتعريف القوة ولمبدأ انحفاظ كمية الحركة. وهذا القانون يدعى أحياناً بقانون الفعل ورد الفعل.

يمكن في كثير من المسائل التعبير عن $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بتابعية الشعاع $\vec{r}_{12}$ الذي يدل على الموضع النسبي لكلا الجسيمين، وربما بتابعية سرعتهما النسبية كذلك . لنلاحظ من العلاقة (7.9)

أنه إذا كانت m_2 كبيرة جداً بالنسبة إلى m_1 فإن تغير سرعة الكتلة m_2 يكون صغيراً جداً بالنسبة لتغير سرعة m_1 ، ويمكننا عندئذ أن نفترض أن الجسيم 2 يبقى ساكناً في جملة مقارنة عطالية معينة. ويمكننا عندئذ أن نتحدث عن حركة الجسيم 1 تحت تأثير القوة $\vec{F}_1$ ، الشكل(7-5)، ويمكننا اعتبار أن القوة $\vec{F}_1$ غير تابعة سوى لموضع أو لسرعة m_1. في مثل هذه الحالات تكون العلاقة (7.12) مفيدة بشكل خاص. وعلى سبيل المثال فهذه حالة الأجسام التي تتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية، أو حالة الإلكترون الذي يتحرك بالنسبة للنواة داخل الذرة .

إن تعيين $\vec{F}(r_{12})$ بالنسبة للكثير من التأثيرات المتبادلة التي نجدها في الطبيعة، هو إحدى أكثر قضايا الفيزياء أهمية. وإن كون الفيزيائي قادراً على إيجاد أشكال تحليلية للقوة $\vec{F}(r_{12})$ لمختلف التأثيرات المتبادلة في الطبيعة، هو بالذات ما جعل مفهوم القوة مفيداً إلى هذا الحد.



الشكل (5-7) بسبب انحفاظ كمية الحركة ، فإن الفعل ورد الفعل متساويان ومتعاكسان.

والآن نفرض أن جسيماً كتلته m يتحرك بسرعة $\vec{v}$ وتؤثر القوة $\vec{F}$ والتي هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم فإن قانون نيوتن الثاني اعتماداً على التعريف (7.1) لكمية الحركة تمكننا أن نكتب علاقة القوة بالشكل:

$$\vec{F} = k.\frac{d(m.\vec{v})}{dt} \qquad (7.14)$$

حيث k ثابت التناسب.

وفي حالة ثبوت الكتلة m نستطيع كتابة العلاقة بالشكل:

$$\vec{F} = m\,.k.\vec{a} \qquad \text{أو} \qquad \vec{F} = k.\,m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (7.15)$$

حيث إن $\frac{d\vec{v}}{dt}$ هي تسارع الجسيم $\vec{a}$، ويمكننا اختيار الثابت k بحيث يساوى الوحدة، وذلك باختيار الوحدات. بحيث إذا أثرت وحدة القوى على جسيم كتلته وحدة الكتل، أكسبته تسارعاً مقداره وحدة تسارع. ويأخذ قانون نيوتن الثاني عند ثبوت كتلة الصورة البسيطة:

$$\vec{F} = m\,.\vec{a}$$

في حالة الأجسام التي تتغير كتلتها أثناء الحركة مثل الصواريخ فإن المعادلة السابقة لا تصلح للتطبيق. و باستخدام صيغة التفاضل لحاصل ضرب تابعين فإن:

$$\overrightarrow{F} = k\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = km\frac{d\vec{v}}{dt} + k\frac{dm}{dt}\vec{v}$$

وسنقتصر هنا على دراسة الجسيمات ثابتة الكتلة في أثناء الحركة؛ أي الجسيمات التي لها $\frac{dm}{dt} = o$ أما الحالات التي فيها $\frac{dm}{dt} \neq o$ فستؤجل دراستها.

يمكننا أن نصوغ العلاقة (7.15) بقولنا: إن القوة تساوي جداء الكتلة في التسارع، إذا كانت الكتلة ثابتة.

لنلاحظ أنه في هذه الحالة يكون للقوة نفس منحى التسارع. ومن العلاقة (7.15) نرى أنه إذا كانت القوة ثابتة فإن التسارع $\vec{a} = \vec{F}/m$ يكون ثابتاً أيضاً ، وتكون الحركة متغيرة بانتظام. إن هذا هو ما يحدث بالنسبة للأجسام الساقطة قريباً من سطح الأرض: تسقط الأجسام جميعها بالتسارع نفسه $\vec{g}$ وبالتالي فإن قوة الثقالة (الجاذبية) ، والمسماة الثقل، هي

$$\vec{W} = m\,\vec{g} \qquad (7.16)$$

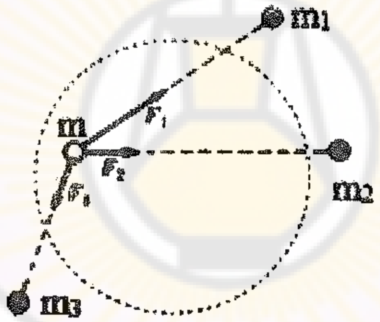
وبشكل أدق كان ينبغي أن نكتب $\vec{W} = m\,\vec{g}_0$ حيث: $\vec{g}$ و $\vec{g}_0$ مرتبطتان بالعلاقة (6.27) .

لقد فرضنا لدى كتابة العلاقة (7.12) أن الجسيم ليس في تأثير متبادل إلا مع جسيم آخر واحد كما ينتج من المناقشة السابقة للعلاقة (7.12) والموضّحة على الشكل(7-5)، وعلى كل

حال إذا كان بين جسيم m وجسيمات ....,m_1, m_2, m_3 تأثيرات متبادلة فإن كل واحد من هذه الجسيمات يسبب تغيراً في كمية حركة m معبراً عنه بالقوة المقابلة...,$\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ ، الشكل (6-7)، تبعاً للعلاقة السابقة. إن السرعة الكلية لتغير كمية حركة الجسيم m هي إذن:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = \vec{F}$$

إن المجموع الشعاعي في الطرف الأيمن يدعى القوة المحصّلة $\vec{F}$ المؤثرة على m. لقد سبق أن طبقنا هذه القاعدة في حساب القوة المحصّلة في الفصل الرابع. إننا في الشكل(6-7) لم نشر إلى التأثيرات المتبادلة الممكنة بين m_2 و m_1 وكذلك بين m_1 و m_3 وبين m_2 و m_3 .. إلخ ؛ لأن هذه التأثيرات المتبادلة ليس لها شأن فيما نحن فيه. ولقد افترضنا كذلك أن التأثير المتبادل على سبيل المثال، بين m و m_1 لا يتأثر بوجود m_2 و m_3 و m_4 ... وبعبارة أخرى لقد افترضنا عدم وجود تداخل.



الشكل (6-7) القوة المحصلة المؤثرة على الجسيم .

سنفترض في الفقرات التالية من هذا الفصل، حيث سنناقش حركة جسيم، أن القوة المحصلة $\vec{F}$ ليست تابعاً إلا لإحداثيات الجسيم، متجاهلين بذلك حركة الجسيمات الأخرى التي لها معها تأثير متبادل. إن هذا التقريب المفيد جداً يشكل ، كما ذكرنا سابقاً، ما يسمى بتحريك (أو ديناميك) الجسيم.

وفيما يلي بعض أنواع القوى التي تظهر كثيراً في التطبيقات:

1) قوى تظهر عند تلامس الأجسام، ومنها قوى الاحتكاك، وردود الأفعال، كذلك القوى التي تظهر في الخيوط والقضبان التي تصل بين الأجسام على هيئة شد أو ضغط.

2) قوى تخضع لقانون هوك أي قوى الشد والضغط في الخيوط المرنة والنوابض. وينص قانون هوك على أنه إذا أردنا أن تحدث استطالة x في النابض أو في خيط مرن زيادة عن الطول الطبيعي أو الأصلي للخيط أو النابض ℓ لزم أن نشده بقوة شد F تتناسب مع الاستطالة x أي إن: $F = k.x$ ويسمى الثابت k بمعامل الصلابة وهو الشد اللازم لإحداث استطالة طولها الوحدة وهو يتوقف على المادة.

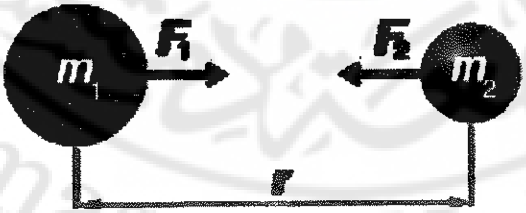
3) قوى مقاومة وسط متصل،كالهواء، لحركة الجسيمات وفيه عادة تكون المقاومة تابعة للسرعة $F = f(v)$

4) قوى تابعة للزمن مثل القوى الناشئة من حركة دورية مستمرة كالحركة التوافقية: $F = f(t)$.

5) قوى الثقالة، وتُعطى بالعلاقة: $\vec{W} = m\,\vec{g}$.

6) قوى تخضع لقانون التجاذب العام الذي ينص على أن كل جسمين يتجاذبان بقوة تتناسب طرداً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكساً مع مربع البعد بينها، وتؤثر في المستقيم الواصل بينهما فإذا كانت كتلتا الجسمين هما m_1, m_2 والمسافة بينهما r، الشكل(7-7)، فإن قوة التجاذب $\vec{F}$ تتعين من العلاقة:

$$\vec{F} = G\,\frac{m_1\,.m_2}{r^2}\;\vec{u}_r$$



الشكل (7-7)

حيث $\vec{u}_r$ متجه وحدة في الاتجاه من m_1 إلى m_2, G ثابت عام يسمى ثابت التجاذب العام ويمكن تحديد قيمته تجريبياً. وإذا قيست القوة بالنيوتن والكتلة بالكيلوغرام والمسافة بالمتر فإن ثابت التجاذب العام يكون:

$$G = 6.673 \, x \, 10^{-11} \text{ N. m}^2 \text{ . kg}^{-2}$$

7.7 نقد مفهوم القوة:

لنتفحص الآن، بشكل نقدي، مفهوم القوة. لقد أدخلنا هذا المفهوم (أي $\vec{F} = d\vec{p} / dt$) في العلاقة (7.12) كمفهوم رياضي مناسب لوصف سرعة تغير كمية الجسيم (مع الزمن) بنتيجة التأثيرات المتبادلة بينه وبين الجسيمات الأخرى ، إلا أن لدينا في الحياة العادية مفهوماً مختلفاً بعض الشيء للقوة فنحن "نشعر" أنه توجد قوة (في الواقع تأثير متبادل) حين يضرب اللاعب الكرة، أو حين تدق المطرقة مسماراً ، أو حين يوجه الملاكم ضربة مباشرة إلى خصمه أو حين يؤثر ثقل بالشد على حبل. ومن الواضح أنه يصعب التوفيق بين هذه الصورة الشعورية للقوة وبين القوة، أو التأثير المتبادل بين الأرض والشمس. إلا أنه في كلتا الحالتين لدينا تأثير متبادل بين جسمين. ويمكن للطالب أن يقول: حسناً، لكن هناك مسافة كبيرة بين الأرض والشمس بينما اللاعب "يمس" الكرة. وهنا بالضبط ليست الأمور على هذه الدرجة من الاختلاف كما يمكن أن تبدو. فمهما بدا لنا الجسم الصلب متماسكاً أو مضغوطاً إلا أن ذراته جميعاً منفصلة عن بعضها وتحتل أماكنها المعينة بفضل التأثيرات المتبادلة ، بالشكل نفسه الذي تحتل فيه الكواكب مواضعها المحدّدة بسبب تأثيراتها المتبادلة مع الشمس.

إن قدم اللاعب لا تمس أبداً الكرة بالمعنى المجهري للكلمة حتى ولو اقتربت جزيئاتها كثيراً من جزيئات الكرة محدثة اضطراباً مؤقتاً في ترتيبها بسبب التأثيرات المتبادلة. وهكذا فإن جميع القوى الطبيعية تقابل تأثيرات متبادلة بين أجسام واقعة على مسافة معينة، ففي بعض الحالات تكون المسافة صغيرة بالنسبة لمقاييسنا لدرجة أننا نميل إلى التفكير أنها صفر. **وفي** حالات أخرى تكون المسافة كبيرة جداً بالنسبة للمقاييس الإنسانية. ومن وجهة النظر

الفيزيائية ليس هناك أي فرق أساسي بين هذين النوعين من القوى. علينا إذن أن نستعمل المفاهيم الحسية أو الجهرية (الماكروسكوبية) كمفهوم "التماس" بكثير من الحذر حين تتعلق الأمور بظواهر في المجال الذري.

إن كون جسيمين في تأثير متبادل بينما هما مفصولان عن بعضهما بمسافة معينة يعني أنه ينبغي علينا أن نتصور ميكانيكية لنقل التأثير المتبادل.

سنبحث فيما بعد هذه الميكانيكية، لكننا نستطيع الآن أن نقول فقط إن مناقشتنا تطلب مراجعة العلاقة (7.5)، حيث إن هذه العلاقة بالشكل المكتوبة فيه تفترض أن التأثير المتبادل بين جسيمين آني. إلا أن التأثيرات المتبادلة تنتشر بسرعة، محدودة بلا شك، مساوية لسرعة الضوء، ولكي نأخذ التأخير في التأثير المتبادل الناتج عن السرعة المحدودة لانتشاره بعين الاعتبار سيكون من الضروري إضافة حد إضافي في العلاقة (7.5) وحين نفعل هذا ينتقل مفهوم القوة إلى المحل الثاني من الأهمية، ويفقد قانون الفعل ورد الفعل معناه. وعلى كل حال، وطالما أن الجسيمات تتحرك ببطء شديد بالنسبة لسرعة الضوء، أو طالما أن تأثيراتها المتبادلة ضعيفة جداً فإن العلاقة (7.5) والنظرية المستنتجة منها تشكل تقريباً ممتازاً لوصف الواقع الفيزيائي.

7.8 وحدات القوة:

إننا نرى من العلاقتين (7.12) و (7.15) أنه يجب أن نعبر عن وحدة القوة بتابعية وحدات الكتلة والتسارع . وهكذا ففي جملة الوحدات الدولية تقاس القوة بالمتر كغ/ثا^2 ($m kg\, s^{-2}$) وتدعى هذه الوحدة نيوتن ويرمز لها بالحرف N أي ($N=m\ kg\ s^{-2}$) وهكذا فإننا نعرّف **النيوتن** بأنه القوة التي إذا طبقت على جسم كتلته كيلو غراماً واحداً سببت تسارعاً بمقدار متر واحد في الثانية المربعة.

ما تزال تستعمل أحياناً وحدة القوة في الجملة السغثية (CGS) المسماة دينة (dyne) والمعرّفة بأنها القوة التي إذا طبقت على جسم كتلته كيلو غراماً واحداً سببت تسارعاً بمقدار سنتمتر

واحد في الثانية المربعة، أي $dyne = cm.\ g.\ s^{-2}$ وبما أن $1\ kg = 10^3 g$ و $1m = 10^2\ cm$ فإن النيوتن يساوي $10^5\ dynes$.

هناك وحدتان إضافيتان. وهما تعتمدان على العلاقة (7.16) التي تعرف ثقل جسم. إحدى هاتين الوحدتين هي الكيلو غرام الثقلي (kgf) وهي القوة المساوية لثقل كتلة مقدارها 1kg. وبالفعل إذا جعلنا $m=1kg$ في العلاقة (7.16) نحصل على:

$1Kgf = 9.8N$ وبالطريقة نفسها فإن الليبرة الثقيلة، اختصاراً lbf تعرف على أنها ثقل جسم كتلته ليبرة واحدة.

وكذلك إذا جعلنا $m = 1\ lbf$ في العلاقة (7.16) نجد $lbf = 4.45N$.

لنلاحظ أن الكتلة المقاسة بالكيلوغرامات أو بالليبرات والثقل المقاس بالكيلوغرام الثقلي أو بالليبرة الثقيلة يعبر عنهما بالعدد نفسه.

وبالرغم من أن الثقل هو قوة، ويجب أن يعبر عنه بالنيوتن إلا أنه جرت العادة وخاصة في الاستعمالات الصناعية والمنزلية، أن يعبر عنه بالكيلوغرام الثقلي. وعملياً يجري الحديث عن قوة مقدارها كذا كيلو غراماً، وليس كيلوغراماً ثقلياً.

مسألة محلولة 2:

تصعد سيارة كتلتها 1000kg طريقاً مائلة، الشكل (8-7)، وتميل عن مستوى الأفق بزاوية 20?. والمطلوب: عيّن القوة التي يولدها المحرك، وذلك حين تتحرك السيارة (a) بحركة منتظمة، (b) بتسارع مقداره $0.2\ ms^{-2}$. أوجد كذلك القوة التي تؤثر بها الطريق على السيارة في كل من الحالتين السابقتين.

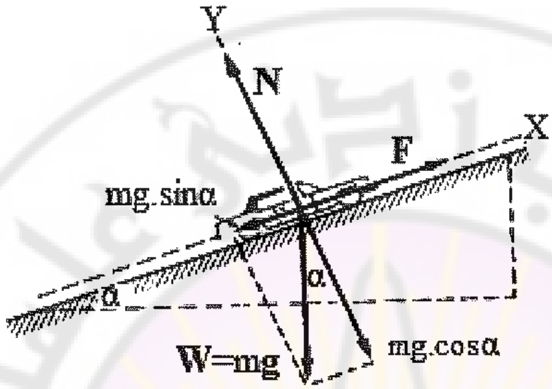
الحل:

لتكن m كتلة السيارة، إن القوى المؤثرة عليها ممثّلة على الشكل (8-7). هناك ثقلها $\vec{W} = m\ \vec{g}$ المتجه نحو الأسفل، والقوة $\vec{F}$ الناشئة من المحرك والمتجهة نحو الأعلى، وأخيراً القوة $\vec{N}$ الناشئة من الطريق وهي عمودية عليها. إذا استعملنا المحورين المرسومين على الشكل وطبقنا العلاقة (7.15) نجد أن الحركة وفق المحور X تحقق المعادلة:

$$F = m(a + g\sin\alpha) \quad \Leftarrow \quad F - mg\sin\alpha = ma$$

و وفق المحور OY لا يوجد حركة لذلك:

$$N = mg\cos\alpha \quad \Leftarrow \quad N - mg\cos\alpha = 0$$



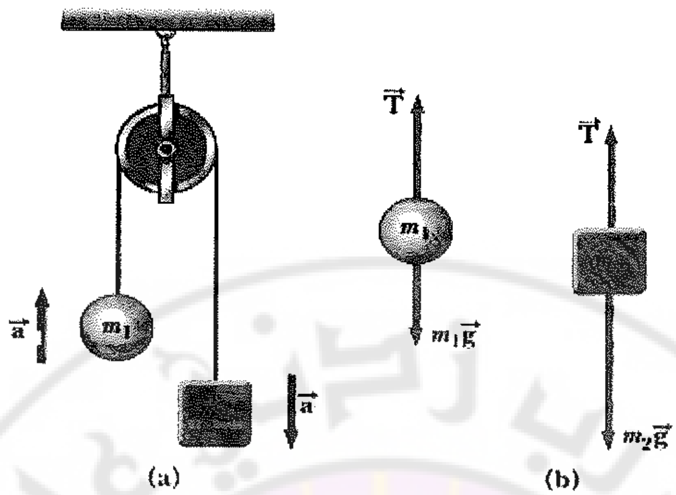
الشكل (7-8)

إننا نلاحظ أن القوة $\vec{N}$ التي يولدها الطريق مستقلّة عن تسارع السيارة، وهي تساوي، بإدخال القيم العددية، 9210N وبالعكس فإن القوة $\vec{F}$ التي يولدها المحرك تعتمد على تسارع السيارة.

فحين تتحرك السيارة بحركة منتظمة $a = 0$ و $F = mg\sin\alpha$ فهي تساوي في مثالنا 3350N، وحين تتحرك السيارة بتسارع $0.2\ ms^{-2}$ فإن F تساوي عندئذ 3550N.

مسألة محلولة 3:

عيّن تسارع حركة الكتلتين m_1, m_2 المعلقتين بطرفي خيط غير قابل للامتطاط، ومهمل الكتلة يمّر على بكرة مهملة الكتلة (ماكنة أتود) والممثلتين على الشكل(7-9a)، بفرض أن $m_2 > m_1$. ثم عين قوة توتر الخيط.



الشكل (7-9)

الحل :

لنفترض أن الحركة تجري في الاتجاه المشار إليه بالسهم، و بما أن $m_2 > m_1$ فإن حركة الكتلة m_2 الهبوط، وحركة الكتلة m_1 الصعود، وحسب فرضيات المسألة فإن كلتا الكتلتين تتحركان بالتسارع نفسه $\vec{a}$. إن القوى الخارجية المؤثرة على كل كتلة مبيّنة في الشكل(7-9b). وهي ثقلها $m_2 \vec{g}$, $m_1 \vec{g}$ على الترتيب، و $\vec{T}$ قوة توتر الخيط وهي مطبّقة على الكتلتين. بتطبيق قانون نيوتن الثاني على كل كتلة باعتبار جهة المحور **وفق جهة حركة كل** كتلة، عندئذٍ يكون لدينا:

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$T - m_2 g = m_2 a$$

من هاتين المعادلتين نجد:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

وهذه هي قيمة تسارع الكتلتين المشترك. أما توتر الخيط فهو:

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

هناك جهاز شبيه بذلك الممثل على الشكل(9-7) يدعى آلة أتود (Atwood) يستعمل أحياناً لدراسة قوانين الحركة المتسارعة بانتظام. وإحدى مزايا هذا الجهاز أنه باختيار m_1 قريبة جداً من m_2، يمكن جعل التسارع a صغيراً جداً، مما يجعل عملية مراقبة الحركة أسهل بكثير.

مسألة محلولة 4:

جسم كتلته 10kg واقع تحت تأثير قوة $F=(120t\ +40)\ N$ يتحرك حسب خط مستقيم. في اللحظة $t=0$ كان الجسم في $x_0 = 5m$ وكانت سرعته $v_0 = 6m$ أوجد سرعته، وموضعه في أية لحظة تالية.

الحل :

باستعمال العلاقة (7.15) نحصل على: $120t + 40 = 10a$

$$a = (12t + 4)\ \ ms^{-2}$$

من أجل الحركة المستقيمة $a = dv / dt$ إذن: $dv / dt = 12t + 4$

بالتكامل نجد:

$$\int_6^v dv = \int_0^t (12t + 4)\ .dt$$

$$v = (6t^2 + 4t + 6)$$

وبجعل $v = dx / dt$ وبالتكامل من جديد نجد:

$$\int_5^x dx = \int_0^t v\ .dt = \int_0^t (6t^2 + 4t + 6).\ dt$$

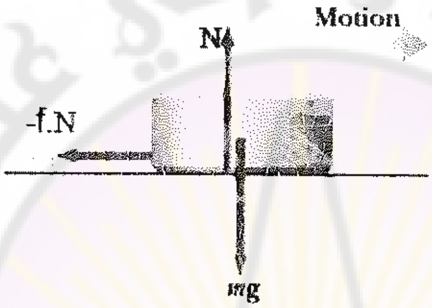
وهذا يعطي: $x = (3t^3 + 2t^2 + 6t + 5)$

وهذا ما يسمح لنا بإيجاد الموضع في أية لحظة كانت.

7.9 قوى الاحتكاك

في كل مرة يكون فيها جسمان متماسان، كما في حالة كتاب موضوع على الطاولة توجد مقاومة تعاكس الحركة النسبية لهذين الجسمين. لنفرض على سبيل المثال، أننا ندفع الكتاب على طول الطاولة وتعطيه سرعة معينة، بعد أن نترك الكتاب نراه يتباطأ وأخيراً

يتوقف. إن هذه الخسارة في كمية الحركة تدل على أن هناك قوة تعاكس الحركة، وهذه القوة تدعى قوة الاحتكاك. وهي ناتجة عن التأثير المتبادل بين جزيئات الجسمين والتي تدعى أحياناً باسم التحام أو التصاق حسبما يكون الجسمان من مادتين مختلفتين أو من مادة واحدة. إن هذه الظاهرة معقدة وتعتمد على عدد من العوامل كحالة وطبيعة كل من السطحين ، والسرعة النسبية ... إلخ .



الشكل (10-7) قوة الاحتكاك تعاكس الحركة، وتعتمد على القوة الناظمية.

ويمكننا أن نتأكد تجريبياً من أن قوة الاحتكاك F_f لها مقدار بحيث إنه من أجل معظم التطبيقات يمكن اعتبارها متناسبة مع القوة الناظمة N التي تطبق جسماً على آخر (الشكل 10-7)، وثابتة التناسب تدعى عامل الاحتكاك ويرمز لها بالحرف f لدينا العلاقة التالية التي تربط بين المقادير:

$$F_f = f.N \tag{7.17}$$

إن قوة احتكاك الانزلاق تعاكس دوماً حركة الجسم، واتجاهها بالتالي معاكس لاتجاه السرعة. يمكننا كتابة العلاقة (7.17) بشكل شعاعي علماً بأننا نحصل على شعاع الوحدة في اتجاه الحركة إذا قسمنا شعاع السرعة على مقدار السرعة $\vec{u}_v = \vec{v}/v$. إن هذا يسمح لنا أن نكتب علاقة قوة الاحتكاك بشكلها الشعاعي:

$$\vec{F}_f = -f.N.\vec{u}_v$$

على سبيل المثال، ففي حالة الشكل(10-7) إذا كانت $\vec{F}$ القوة المطبقة والتي تحرك الجسم نحو اليمين (والناشئة مثلاً عن شد حبل مربوط بالجسم) فإن القوة المحصلة الأفقية المتجهة نحو اليمين هي:

$$\vec{F} - f \,.\, N \,.\, \vec{u}_v$$

وبتطبيق العلاقة (7.15) نجد معادلة حركة الجسم:

$$m\,\vec{a} = \vec{F} - f \,.\, N . \vec{u}_v$$

يوجد بشكل عام نوعان من عوامل الاحتكاك:

- عامل الاحتكاك السكوني(f_s) وهو الذي إذا ضرب بالقوة الناظمية أعطى أصغر قوة تلزم لجعل الجسم الساكن أصلاً يتحرك بالنسبة إلى الجسم الآخر الذي يمسه.
- وعامل الاحتكاك الحركي(f_C) وهو الذي إذا ضرب بالقوة الناظمية أعطى القوة اللازمة لحفظ الجسمين في حركة نسبية منتظمة أحدهما بالنسبة للآخر. وقد وجد تجريبياً أن f_S أكبر من f_C من أجل المواد جميعها التي أجريت عليها التجارب حتى الآن. وفي الجدول (1-7) قائمة بقيم f_S و f_C من أجل عدد من المواد.

إن الاحتكاك هو مفهوم إحصائي، ذلك أن القوة تمثل مجموع عدد كبير جداً من التأثيرات المتبادلة بين جزيئات الجسيمين المتماسين. ومن الواضح أنه يستحيل أخذ هذه التأثيرات المتبادلة بين الجزيئات المفردة بعين الاعتبار، ولهذا فإنها تعين بصورة جماعية بالوسائل التجريبية، وتمثل تقريباً بمعامل الاحتكاك.

الجدول (1-7): معامل الاحتكاك للسطوح الجافة*

f_c	f_s	المواد
0.42	0.78	فولاذ على فولاذ (قاسي)
0.57	0.74	فولاذ على فولاذ (طري)
0.95	0.95	رصاص على فولاذ
0.36	0.53	نحاس على فولاذ
0.53	1.10	نيكل على نيكل
0.15	1.10	فونت على فونت
0.04	0.04	تيفلون على تيفلون

سنبيّن في الأمثلة التالية كيف تحل مسائل الديناميك التي يدخل فيها الاحتكاك بين الأجسام الصلبة.

مسألة محلولة 5:

جسم كتلته 0.80 kg موجود على سطح مائل بزاوية ?30 ما هي القوة الواجب تطبيقها على الجسم لكي يتحرك (a) نحو الأعلى؟ (b) نحو الأسفل؟ كما هو موضّح في الشكل(7-11ab) ،نفرض في كلتا الحالتين أن الجسم يتحرك حركة منتظمة أولاً ثم نفرض أنه يتحرك بتسارع مقداره ($0.10ms^{-2}$). عامل احتكاك الانزلاق على السطح هو (0.30).

الحل :

لنعتبر أولاً أن الجسم يتحرك نحو الأعلى. إن القوى المؤثرة على هذا الجسم والممثلة على الشكل (7-11a) هي: الوزن $\vec{W} = m\ \vec{g}$ المتجه شاقولياً نحو الأسفل، والقوة المطبقة $\vec{F}$ (التي نفرضها متجهة نحو الأعلى) وقوة الاحتكاك $\vec{F}_f$ والتي تعاكس دوماً الحركة، والتي ينبغي

* *إن القيم المذكورة ينبغي أن ينظر إليها فقط على أنها قيم وسطية ، وذلك أن عوامل الاحتكاك هي كميات جهرية تعتمد على الخواص الجهرية للمادتين ، وهي بالتالي تتأرجح كثيراً .*

أن تكون بالتالي في هذه الحالة متجهة نحو الأسفل. عندما نحلل الوزن حسب المركبة على طول المستوي والمركبة العمودية على المستوي فإن حركة الجسم في المستوي تكتب، باستعمال العلاقة (7.15).

$$m\,\vec{a} = \vec{F} - \vec{u}_v\,.f\,.N$$

وحسب العلاقة (7.17) ينبغي أن نكتب $F_f = f_N$ لكننا نرى على الشكل (7-11 a) أن القوة الناظمية التي تضغط الجسم على المستوى هي $m\,g\cos\alpha$

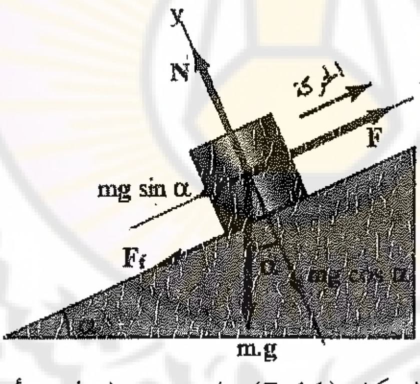
إذن:
$$F_f = f\,m\,g\,\cos\alpha$$

وتصبح معادلة الحركة:

$$F - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) = ma$$

ويمكن استعمال هذه المعادلة بطريقتين. إذا كنا نعرف التسارع a أمكننا إيجاد القوة المطبقة F. وبالعكس إذا كنا نعرف F أمكننا إيجاد التسارع ففي الحالة الأولى لدينا:

$$F = m[a + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)]$$



الشكل (7-11) الجسم يتحرك نحو الأعلى (a)

فإذا كانت الحركة مثلاً منتظمة، a = 0، بإدخال القيم العددية المقابلة نجد $F = 5.95N$ وعندما يتحرك الجسم بتسارع $0.10\ ms^{-2}$ نحصل على $F = 6.03\ N$.

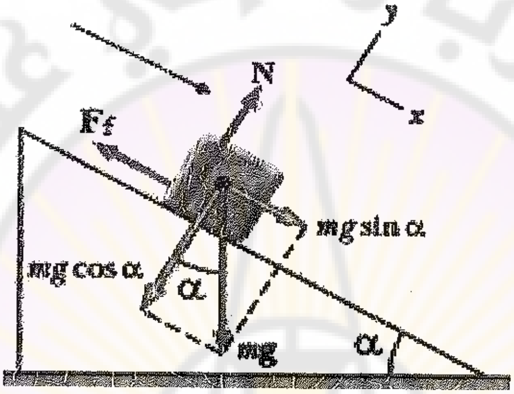
حين ينزل الجسم على المستوى المائل، فإن وضع القوى يكون كما هو مبيّن على الشكل (7-11b)، فقد افترضنا هنا أن $\vec{F}$ موجهة نحو الأسفل، ولكن كان بإمكاننا أن نفترض

فرضية معاكسة، إلا أن قوة الاحتكاك $\vec{F}_f$ يجب أن تكون نحو الأعلى لكي تعاكس الحركة. فإذا اخترنا جهة الهبوط كجهة موجبة أمكننا أن نتحقق من أن معادلة الحركة في هذه المرة هي:

$$F + mg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) = m\,a$$

وبإصلاح العبارة نجد:

$$F = m\,[a - g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)]$$



الشكل (7-11) الجسم يتحرك نحو الأسفل (b)

فإذا كانت الحركة منتظمة $(a = 0)$، نحصل، بإدخال القيم العددية، على: $F = -1.88\ N$، بينما إذا كان الجسم ينزلق بتسارع $0.10\ ms^{-2}$ فإننا نحصل على $F = -1.80\ N$، إن إشارة الناقص في كل من الحالتين تدل على أن القوة متجهة نحو الأعلى وليس نحو الأسفل كما افترضنا.

7.10 قوى الاحتكاك في الموائع:

حين يتحرك جسم في مائع، غاز أو سائل، بسرعة صغيرة نسبياً فإنه يمكن الحصول بتقريب أولي على قوة الاحتكاك بفرض أنها تتناسب مع السرعة وإن جهتها معاكسة لها. ويمكننا أن نكتب:

$$F_f = -K\,\eta\,v \qquad (7.18)$$

إن العامل K يعتمد على شكل الجسم. مثلاً، في حالة كرة نصف قطرها R تؤدي الحسابات إلى:

$$K = 6\pi R \qquad (7.19)$$

وهذه العلاقة تعرف باسم قانون ستوكس (Stokes).

أما العامل η فيعتمد على الاحتكاك الداخلي في المائع (أي قوى الاحتكاك بين مختلف طبقات المائع التي تتحرك بسرع مختلفة) وهذا الاحتكاك الداخلي يدعى كذلك باللزوجة، ويدعى η بعامل اللزوجة. يعبر عن عامل اللزوجة في جملة الوحدات MKSC بالنيوتن. ثانية في المتر المربع ($N\ s\ m^{-2}$) ويمكن التوصّل لذلك كما يلي:

حسب قانون ستوكس يعبر عن الثابتة K بالمتر (وهذا صحيح من أجل أجسام ذات أشكال مختلفة أيضاً) وحسب العلاقة (7.18) ينبغي أن يعبر عن η بـ $N/m\ (ms^{-1})$ وهذه هي الوحدة نفسها التي ذكرناها.

وإذا تذكرنا أن $N = m\ kg\ s^{-2}$ أمكننا أن نعبّر عن اللزوجة أيضاً بالوحدة $m^{-1}.\ kg.\ s^{-1}$.
ويمكن كذلك أن يعبر عن اللزوجة بـ $cm^{-1}.\ g.\ s^{-1}$ وهذه الوحدة تدعى بواز (*Poise*) ويرمز لها بالحرف P والبواز هي عُشْر وحدة اللزوجة في MKSC لأن:

$$1\ m^{-1}\ kg\ s^{-1} = (10^2 cm)^{-1}(10^3 g)\ s^{-1} = 10\ cm^{-1}\ g\ s^{-1} = 10\ P$$

إن عامل لزوجة السوائل يتناقص حين ترتفع حرارة السائل بينما في حالة الغاز فإن عامل اللزوجة يتزايد مع درجة الحرارة. وإن الجدول(2-7) يبين قيم عامل اللزوجة لبعض الموائع.

حين يتحرك جسم في مائع لزج تحت تأثير قوة $\vec{F}$، فإن القوة المحصّلة هي:

$$\vec{F} - K\eta\vec{v}$$

ومعادلة الحركة هي:

$$m\vec{a} = \vec{F} - K\eta\vec{v} \qquad (7.20)$$

الجدول(2-7) اللزوجة (بالبواز)*:

السائل	$\eta \times 10^{2}$	الغاز	$\eta \times 10^{4}$
الماء (0°)	1.792	الهواء (0°)	1.71
الماء	1.005	الهواء	1.81
الماء (40°)	0.656	الهواء (40°)	1.90
الغليسرين	8.33	الهيدروجين	0.93
زيت الخروع	9.86	الأمونياك	0.97
الكحول	0.367	غاز الفحم	1.46

فإذا فرضنا أن القوة $\vec{F}$ ثابتة، فإن التسارع a يولد زيادة مستمرة في v وزيادة مقابلة في احتكاك المائع بحيث إنه في النهاية يصبح الطرف الأيمن مساوياً للصفر. في هذه اللحظة يصبح التسارع مساوياً للصفر كذلك ولا يعود هناك أي تزايد في السرعة؛ لأن الاحتكاك يعادل تماماً القوة المطبقة. ويتابع الجسم حركته في اتجاه القوة إنما بسرعة ثابتة تدعى السرعة الحدية، أو السرعة النهائية، وهي تعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{F}}{K\,\eta} \tag{7.21}$$

تعتمد السرعة الحدية إذن على η وعلى K، أي على لزوجة المائع وعلى شكل الجسم. ففي حالة السقوط الحر تحت تأثير الثقالة $\vec{F} = m\,\vec{g}$ تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\vec{v}_L = \frac{m\,\vec{g}}{K\,\eta} \tag{7.22}$$

ينبغي أن نصحح هذه العلاقة الأخيرة بإضافة قوة الدافعة التي يؤثر بها المائع حسب قانون أرخميدس، والتي تساوي لثقل المائع الذي يزيحه الجسم. فلو كانت m_f كتلة هذا المائع المزاح بواسطة الجسم، لكان ثقله $m_f\,\vec{g}$ بحيث إن الدافعة نحو الأعلى هي:

---

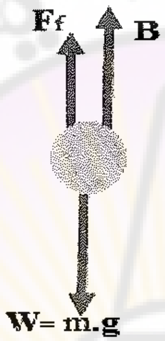
* جميع القيم هي من أجل درجة الحرارة ? 20 ، إلا القيم التي ذكرت بجانبها درجة الحرارة .

وإن القوة الفعلية الموجهة نحو الأسفل تصبح: $\vec{B} = -m_f\ \vec{g}$

$$m\ \vec{g} - m_f \vec{g} = (m - m_f)\ \vec{g}$$

وهذا يعطي أخيراً:

$$v_L = \frac{(m - m_f) g}{K\eta} \qquad (7.23)$$



الشكل (12-7) القوى المؤثرة على جسم يسقط في مائع.

إن القوى الثلاث المؤثرة على الجسم في هذه الحالة، ممثّلة على الشكل (12-7) أما إذا كانت الأجسام ذات أبعاد كبيرة وسرع عالية فإن الاحتكاك المائع يكون متناسباً مع قوى أعلى للسرعة، ويصبح ما جاء في هذه الفقرة غير كاف لوصف الظواهر الفيزيائية في هذه الحالات.

مسألة محلولة 6:

أوجد السرعة الحدية لقطرة المطر. خذ قطر القطرة 10^{-3} m وكثافة الهواء بالنسبة للماء 10^{-3} $\times 1.3$.

الحل:

إذا اعتبرنا قطرات الماء كروية نصف قطرها r نستطيع أن نجد أن لكتلة القطرة القيمة:

$$m = \rho_f\ V = \tfrac{4}{3}\pi\ r^3 \rho$$

حيث ρ كثافة الماء. فإذا كانت ρ_f ترمز لكثافة المائع (في هذه الحالة: الهواء) كان لدينا أيضاً:

$$m_f = \rho_f V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f$$

بحيث إن:

$$m - m_f = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_f)$$

وبما أننا افترضنا أن القطرات كروية، إذن $K = 6\ \pi r$ حسب المعادلة (7.19) .

وبتطبيق العلاقة (7.23) نجد أن السرعة الحدية تعطى بـ:

$$v_L = \frac{2\left(\rho - \rho_f\right) r^2 . g}{9\eta}$$

فإذا بدلنا القيم العددية، بما فيها $\eta = 1.81 \times 10^{-5}\, Nsm^{-2}$ و $\rho = 10^3\, kg\, m^{-3}$ وجدنا $v_L = 30\, ms^{-1}$ أي حوالي $107\, kmhr^{-1}$. وأن قطرة أكبر من هذه لن تكون لها سرعة حدية مختلفة كثيراً بسبب الاعتبارات التي ذكرناها في الفقرة السابقة لهذه المسألة.

مسألة محلولة 7:

احسب سرعة جسيم يتحرك في مائع لزج بدلالة الزمن وبفرض أن العلاقة (7.20) تطبق في حالة قوة ثابتة، وأن الحركة تتم حسب مستقيم.

الحل :

بما أن الحركة مستقيمة، يمكننا أن نكتب المعادلة (7.20) (علماً بأن $a=dv/dt$) بالشكل:

$$m\frac{dv}{dt} = F - K\eta\, v$$

بحيث أن:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m}\left(v - \frac{F}{K\eta}\right)$$

وبفصل المتحولات نجد:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v - F / K\eta} = -\frac{K\eta}{m} \int_0^t dt$$

أو

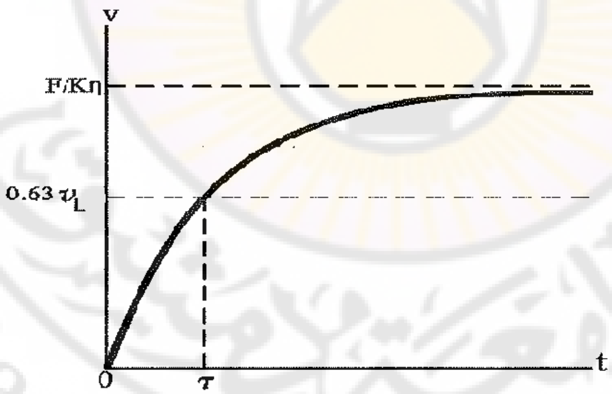
$$\ln\left(v - \frac{F}{K\eta}\right) - \ln\left(v_0 - \frac{F}{K\eta}\right) = -\frac{K\eta}{m} t$$

فإذا تذكرنا أن $\ln e^x = x$ نجد أن:

$$v = \frac{F}{K\eta} + \left(v_0 - \frac{F}{K\eta}\right) e^{-(K\eta/m)t}$$

إن الحد الثاني يتناقص بسرعة وسرعان ما يصبح مهملاً، وبالتالي فإن السرعة تصبح ثابتة ومساوية $F / K\eta$ مما يتفق مع المعادلة (7.21). وبتعبير آخر: السرعة الحدية لا تتعلق بالسرعة الابتدائية. إذا فرضنا $v_0 = 0$ وجدنا:

$$v = \frac{F}{K\eta}(1 - e^{-(K\eta/m)t})$$



الشكل (13-7) السرعة بدلالة الزمن لجسم يسقط في مائع لزج.

لقد مثلنا على الشكل (13-7) تغير v مع t. يعرّف زمن الاسترخاء بأنه $\tau = m / K\eta$ وهو الزمن الذي تصبح v في نهايته مساوية 63% من v_L.

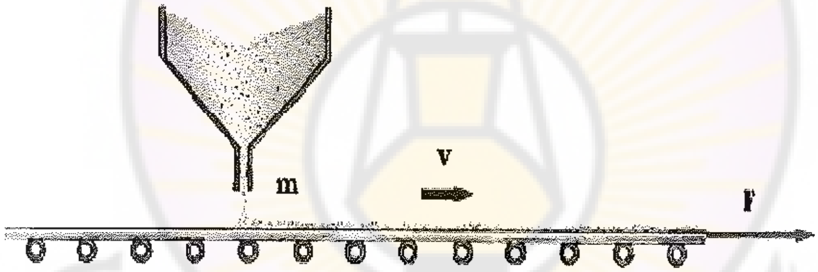
7.11 الجمل ذات الكتلة المتغيرة:

يمكننا أن نعتبر أن الغالبية العظمى للجمل في الفيزياء هي جمل ذات كتل ثابتة. وبالرغم من ذلك ففي بعض الحالات تكون الكتلة متغيرة. وأبسط مثال على ذلك هو مثال قطرة المطر فخلال سقوطها يمكن أن يتكاثف بخار الماء على سطحها، كما يمكن للماء أن يتبخر محدثاً بذلك تغيراً في الكتلة. لنفرض أن كتلة القطرة هي m بينما تسقط بالسرعة v وأن بخار الماء ذي السرعة v_0 يتكاثف على القطرة بالسرعة dm/dt .

إن التغير الكلي لكمية الحركة هو مجموع $(m.\, dv/dt)$ المقابل لتسارع القطرة و $(dm/dt)\ (v-v_0)$ العائد إلى تزايد كمية حركة بخار الماء. إن معادلة حركة القطرة هي إذن، باستعمال العلاقة (7.14)

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

ولحل هذه المعادلة من الضروري افتراض فرضيات عن الطريقة التي تتغير بها الكتلة مع الزمن.



الشكل (14-7)

لنأخذ، كمثال آخر على الكتلة المتغيرة، البساط الناقل الذي توضع عليه المواد من أحد طرفيه، ويفرغها من الطرف الآخر. لنعتبر مثلاً جملة البساط الناقل الممثلة على الشكل (14-7) حيث توضع مادة ما بشكل مستمر على البساط الناقل بمعدل dm/dt ($kg\ s^{-1}$) ينتقل البساط بسرعة v وتطبق عليه قوة F لتحريكه فإذا رمزنا بـ M لكتلة البساط و بـ m لكتلة المادة الموضوعة عليه حتى اللحظة t فإن كمية الحركة الكلية للجملة في هذه اللحظة تكون $P = (m+M)\, v$ وتكون القوة المطبقة على البساط إذن:

$$F = \frac{dP}{dt} = v\,\frac{dm}{dt}$$

لنلاحظ أن القوة في هذه الحالة عائدة كلياً إلى تغير الكتلة وليس إلى تغير السرعة، إلا أن المثال الأكثر أهمية هو مثال الصاروخ الذي تتناقص كتلته؛ لأنه يستهلك الوقود الذي يحمله.

مسألة محلولة 8:

ناقش حركة صاروخ.

الحل:

إن الصاروخ هو قذيفة لكنه بدلاً من أن يتلقى دفعة بدائية من الغاز داخل المدفع فإنه يندفع بقوة مستمرة آتية من خروج الغازات الناتجة في حجرة الاحتراق داخل الصاروخ نفسه. وتكون في الصاروخ لدى انطلاقه كمية من الوقود تستهلك بالتدريج، وبالتالي تتناقص كتلة الصاروخ.

لتكن v سرعة الصاروخ بالنسبة لجملة إحداثيات عطالية - نفترض أنها بتقريب جيد - هي الأرض ولتكن v' سرعة خروج الغازات بالنسبة للأرض أيضاً. إن سرعة خروج الغازات بالنسبة للصاروخ هي إذن:

$$v_e = v' - v$$

إن هذه السرعة معاكسة دوماً للسرعة v وهي عادة ثابتة. لتكن m كتلة الصاروخ بما في ذلك الوقود، في لحظة معينة. خلال فترة زمنية قصيرة dt، تتغير كتلة الجملة بالمقدار الصغير dm وهو مقدار سالب؛ لأن الكتلة تتناقص وخلال الفترة الزمنية نفسها تتغير السرعة بالمقدار dv ؛ لإن كمية حركة الجملة في اللحظة t هي $\vec{p} = m\,\vec{v}$. وكمية الحركة في اللحظة $t+dt$ هي، بملاحظة أن $-dm$ هي القيمة الموجبة لكتلة الغازات المنطلقة:

$$\vec{p}' = \underbrace{(m + dm)\,(\vec{v} + d\vec{v})}_{\text{صاروخ}} + \underbrace{(-dm)\,\vec{v}'}_{\text{غاز}} = m\,\vec{v} + m\,d\vec{v} - (\vec{v}' - \vec{v})\,dm$$

أو

$$\vec{p}' = m\,\vec{v} + m\,d\vec{v} - \vec{v}_e\,dm$$

حيث أهملنا الحد المتناهي في الصغر من الدرجة الثانية $dm.\, dv$. إن تغير كمية الحركة خلال الزمن dt هو:

$$d\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = m\, d\vec{v} - \vec{v}_e\, dm$$

وتغير كمية حركة الجملة في وحدة الزمن هو:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt}$$

فإذا كانت F ترمز إلى القوة الخارجية المؤثرة على الصاروخ، فإننا نحصل على معادلة الحركة بتطبيق العلاقة (7.12) أي:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt} = \vec{F} \tag{7.24}$$

يدعى الحد الثاني من الطرف الأيسر من المعادلة السابقة عادة بدفع الصاروخ؛ لأنه مساو "القوة" الآتية من الغازات المنطلقة. لحل هذه المعادلة ينبغي علينا أن نفترض فرضية تتعلق بالسرعة v_e . يفترض عادة أن v_e ثابتة. وإذا أهملنا مقاومة الهواء وتغير الثقالة مع الارتفاع، أمكننا أن نكتب $\vec{F} = m\,\vec{g}$ بحيث يصبح لدينا:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\vec{v}_e}{m} \frac{dm}{dt} = \vec{g} \tag{7.25}$$

وللتبسيط سنعتبر حركة شاقولية. في هذه الحالة v متجهة نحو الأعلى و g نحو الأسفل، والمعادلة (7.25) تصبح :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} = -g$$

إذا ضربنا الطرفين بـ dt وكاملنا ابتداء من بداية الحركة ($t = 0$) حين كانت السرعة v_0 والكتلة m_0 ، حتى لحظة اختيارية t، كان لدينا :

$$\int_{v_0}^{v} dv + v_e \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -g \int_0^t dt \quad \Rightarrow$$

$$v - v_0 + v_e \ln\frac{m}{m_0} = -g\ t \Rightarrow\ v = v_0 + v_e \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - g\ t \qquad (7.26)$$

فإذا كانت t هي الزمن اللازم لحرق كل الوقود، كانت m هي الكتلة النهائية في المعادلة (7.26) و v هي السرعة العظمى التي يبلغها الصاروخ. وبشكل عام تكون $v_0 = 0$ ويكون الحد الأخير (في كثير من الحالات) مهملاً.

وعلى سبيل المثال، إذا كانت كتلة الصاروخ الابتدائية 3.000 طن، وكتلته النهائية 2.780 طن حين يحترق الوقود كله، وإذا كانت الغازات تطلق بمعدل $1.290\ kg\ s^{-1}$ ، يكون لدينا عندئذ $t = 155\ s$ وإذا افترضنا أن سرعة انطلاق الغازات هي $55\ m\ s^{-1}$ وأن $v_0 = 0$ فإن الطابق الأول من الصاروخ يبلغ سرعة قصوى هي:

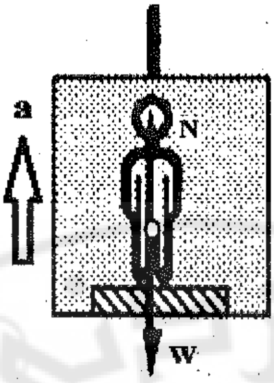
$$v = 55 \ln\frac{3000}{2780} - (9.8)(155)$$
$$v = 55 \ln 1.08 - 1520 = 2710\ ms^{-1}$$

وهذه السرعة تعادل تقريباً $9.750 kmh^{-1}$ ، إن هذه المعطيات هي من صاروخ سانتور ذي المحركات الخمسة التي يستطيع كل منها أن يعطي قوة دفع تعادل 0.7 طناً ثقلياً عند الإقلاع.

7.12 الوزن الظاهري:

بعض الظواهر اليومية التي يمكن أن تحدث لنا مثل الشعور الذي ينتاب راكب مصعد عندما يبدأ الحركة نحو الأعلى أو الأسفل، الشكل (15-7)، إذ يشعر بأن وزنه قد تغير فجأة. وهو ما يحدث أيضاً لراكب الطائرة لحظة الإقلاع أو الهبوط. إن هذا الشعور باختلاف **الوزن** يدعى بالثقل الظاهري. وسوف ندرس هذه الظاهرة هنا فقط على حركة المصاعد.

لدراسة هذه الظاهرة نفرض شخصاً كتلته m يقف على ميزان أفقي موضوع بداخل المصعد. عندما يكون المصعد في حالة السكون يشير الميزان إلى القيمة $\vec{w}=m.\vec{g}$. وفي حالة حركة المصعد بحركة متسارعة بانتظام يمكن أن نميز حالتين، وهما:



الشكل (7-15)

a)- حركة المصعد نحو الأعلى:

يخضع الشخص الموجود داخل المصعد لقوتين وهما ثقله $m\vec{g}$ ورد فعل الميزان $\vec{N}$ وبحسب قانون نيوتن الثاني نكتب:

$$m\vec{g}+\vec{N}=m.\vec{a} \qquad (I)$$

وبإسقاط العلاقة (I) نجد:

$$N-mg=ma$$
$$N=mg+ma=m(g+a)$$

وهذه المعادلة تدل على أن الوزن المقروء w' والذي يساوي N يكون أكبر من الثقل الحقيقي عندما $a>o$ وهو ما ندعوه بالثقل الظاهري. أما إذا كان $a<o$ فإن الثقل الظاهري يكون أقل من الثقل الحقيقي.

b) - حركة المصعد نحو الأسفل:

في هذه الحالة تأخذ المعادلة (I) بعد الإسقاط الشكل:

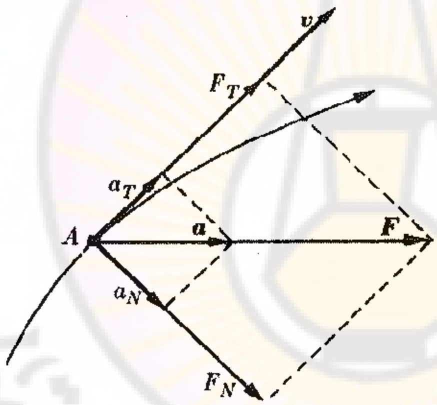
$$w-N=ma$$
$$N=w-ma=mg-ma=m(g-a)$$

فإذا كان المصعد متسارعاً في حالة الهبوط أي $a>o$ فإن الوزن المقروء يساوي إلى N وهو أقل من الوزن الحقيقي، أي أن الوزن الظاهري أقل من الوزن الحقيقي.

وفي حالة تباطؤ حركة المصعد أي $a < o$ فإن الثقل الظاهري يكون أكبر من الثقل الحقيقي. أما إذا تحرك المصعد بحركة منتظمة أي $a = o$ سواء نحو الأعلى أو الأسفل، فإن الميزان يشير إلى الثقل الحقيقي كما لو أن المصعد ساكن.

7.13 الحركة المنحنية:

لقد عالجنا حتى الآن الحركة المستقيمة، لنعتبر الآن حالة الحركة المنحنية. إذا كان للقوة منحني السرعة نفسه كانت الحركة حسب خط مستقيم. ولتوليد حركة منحنية ينبغي أن تشكل القوة المحصلة زاوية مع السرعة، بحيث يكون للتسارع مركبة عمودية على السرعة، مما يفسر تغير منحى الحركة. ومن ناحية أخرى فإننا نذكر أن القوة موازية للتسارع. إن العلاقات بين مختلف هذه الأشعة في الحركة المنحنية يوضحها الشكل(16-7).



الشكل (16-7) العلاقة بين المركبتين المماسية والناظمة للقوة وللتسارع في الحركة المنحنية.

من العلاقة $\vec{F} = m\,\vec{a}$ ومن العلاقتين (5.44) نستنتج أن مركبة القوة المماسة للمسار أو القوة المماسية هي:

$$F_T = m\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad F_T = m\ a_T \qquad (7.27)$$

وأن مركبة القوة العمودية على المسار، أو القوة الناظمية، أو الجاذبة هي:

$$F_N = m\frac{v^2}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad F_N = m\ a_N \qquad (7.28)$$

حيث ρ هي نصف قطر انحناء المسار. إن القوة الجاذبة موجهة دوماً نحو مركز تقعر المسار. والقوة المماسية هي المسؤولة عن تغير مقدار السرعة، بينما القوة الجاذبة مسؤولة عن تغير المنحى، فلو كانت القوة المماسية معدومة لما كان هناك تسارع مماسي، ولكانت الحركة دائرية منتظمة. ولو كانت القوة الجاذبة معدومة لما كان هناك تسارع ناظمي ولكانت الحركة مستقيمة.

وفي الحالة الخاصة للحركة الدائرية يكون ρ هو نصف قطر الدائرة R ويكون $v = \omega . R$ بحيث إن القوة تكون أيضاً:

$$F_N = m.\omega^2 .R \tag{7.29}$$

وأيضاً:

$$F_N = m\frac{v^2}{R}$$

وإن التسارع الوحيد في الحركة الدائرية المنتظمة هو a_N، والذي يمكن كتابته بالشكل الشعاعي $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ ويكون لدينا بالتالي:

$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (m\,\vec{v})$ وحيث إن $\vec{p} = m\vec{v}$ إذن:

$$\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{p} \tag{7.30}$$

وهذه علاقة رياضية مفيدة بين القوة والسرعة الزاوية وكمية الحركة لجسيم يقوم بحركة دائرية منتظمة.

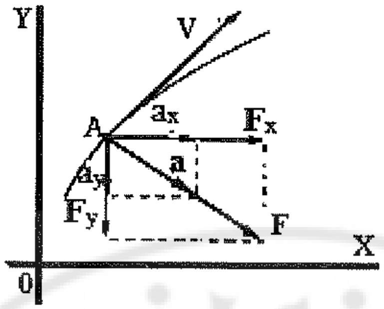
قد يكون في بعض الأحيان من المناسب أكثر استعمال المركبات القائمة للقوة $\vec{F}$، الشكل (7-17) فمثلاً في حالة الحركة المستوية يمكن تحليل العلاقة الشعاعية $\vec{F} = m\,\vec{a}$ إلى المعادلتين التاليتين:

$$F_x = ma_x \qquad F_y = ma_y$$

أو إلى الشكلين التاليين:

$$F_y = m\frac{dv_y}{dt} \quad \text{و} \quad F_x = m\frac{dv_x}{dt} \tag{7.31}$$

وبتكامل هذه المعادلات يمكننا الحصول على سرعة وموضع الجسيم في كل لحظة.



الشكل (17-7) العلاقة بين المركبات القائمة للقوة وللتسارع في الحركة المنحنية.

وبشكل عام، بما في ذلك حالة الكتلة المتغيرة، ينبغي أن نستعمل $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ إلا أن P، لكونها موازية للسرعة، هي مماس للمسار، يمكننا إذن أن نكتب $\vec{p} = p\ .\vec{u}_T$ وباستخدام العلاقة (5.42) يصبح لدينا:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}\vec{u}_T + \frac{d\vec{u}_T}{dt}p = \frac{dp}{dt}\vec{u}_T + \frac{v\ p}{\rho}\vec{u}_N$$

وبدلاً من العلاقتين: (7.27) و (7.28) يكون لدينا إذن:

$$F_N = \frac{p\ v}{\rho} \quad و \quad F_T = \frac{dp}{dt}$$

مسألة محلولة 9:

تُجعل عادة الطرق وخطوط السكك الحديدية مائلة على الأفق في المنعطفات ،الشكل (18-7) ، لتوليد القوة الجاذبة الضرورية للسيارة التي تتحرك على هذا المنعطف. أوجد زاوية الميل هذه بدلالة سرعة العربة على المنعطف.

الحل :

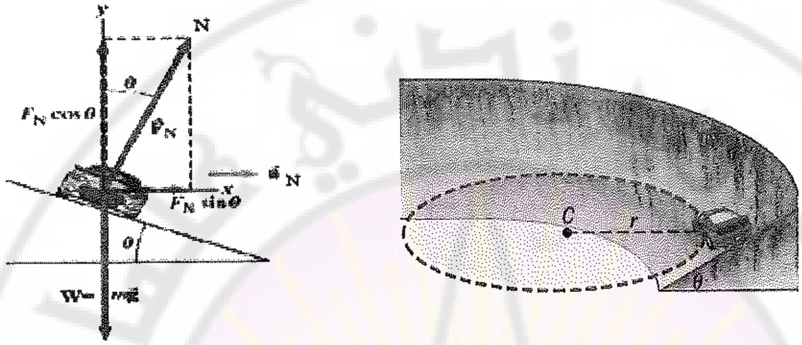
يمثل الشكل (18-7) الطريقة التي تجعل بها المنعطفات مائلة (إلا أن الزاوية هنا مبالغ بها). إن القوى المؤثرة على السيارة هي: الوزن $W = m.g$ ورد الفعل الناظمي N للطريق. محصلتهما F_N ينبغي أن تكون كافية لتوليد القوة الجاذبة المعطية بالعلاقة (7.28) .

لدينا العلاقة: $F_N = mv^2 / r$

حيث r : هو نصف قطر المنعطف.

ومن الشكل نحصل على:

$$tg\,\alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{v^2}{r.g}$$



الشكل (7-18) رفع جانب الطريق عند المنعطف لتوليد قوة جاذبة.

فالنتيجة إذن مستقلة عن كتلة الجسم. وحيث إن α تبقى ثابتة بمجرد بناء الطريق، فإن هذه العلاقة تعطي السرعة الصحيحة للسير في المنعطف بحيث لا تكون هناك أية قوة جانبية تؤثر على السيارة. أما من أجل السرع التي هي أصغر أو أكبر قليلاً فليست هناك مشكلة في المنعطف؛ لأن الطريق يؤمن قوة التوازن اللازمة. إلا أنه حين تكون السرعة أكبر بكثير فإن السيارة تسعى للخروج من المنعطف.

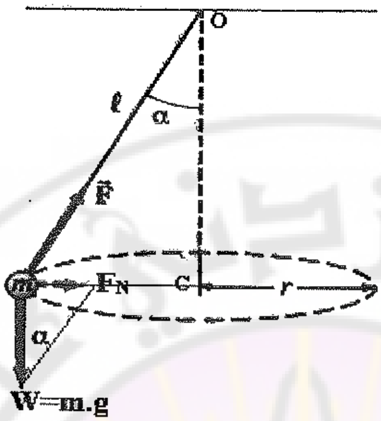
مسألة محلولة 10:

تُجعل كتلة m معلقة بخيط طوله L في نقطة ثابتة تدور حول الشاقول بسرعة زاوية ω. أوجد الزاوية التي يصنعها الخيط مع الشاقول. يدعى مثل هذا الجهاز بالنواس المخروطي، الشكل(7-19).

الحل :

إن الجملة ممثّلة على الشكل (7-19) الكتلة m تتحرك حول الشاقول OC راسمة دائرة نصف قطرها

$$r = CA = OA\sin\alpha = L\sin\alpha$$



الشكل (19-7) النواس المخروطي.

أما القوى المؤثرة على A فهي التالية:

ثقله $W = m.g$ وتوتر الخيط F. ومحصّلتهما F_N ينبغي أن تساوي بالضبط القوة الجاذبة اللازمة لكي ترسم الدائرة، لدينا إذن، باستخدام العلاقة (7.29)

$$F_N = m\omega^2 R = m\ \omega^2 L\sin\alpha$$

وحسب الشكل لدينا إذن: $$tg\,\alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{\omega^2 L\sin\alpha}{g}$$

ولدينا $$tg\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}$$

فالزاوية α هي إذن أكبر كلما كانت السرعة أعلى، وهذا ما تثبته التجربة، ولهذا السبب فإن النواس المخروطي بقي يستعمل لزمن طويل كمنظم للسرعة في الآلات البخارية فهو يغلق وصول البخار حين تتجاوز السرعة حداً معيناً مسبقاً، وبفتحه حين تنقص السرعة عن هذه القيمة.

مسألة محلولة 11:

احسب القوى الناظمية والمماسية التي تؤثر على قذيفة تطلق أفقياً من سطح بناء.

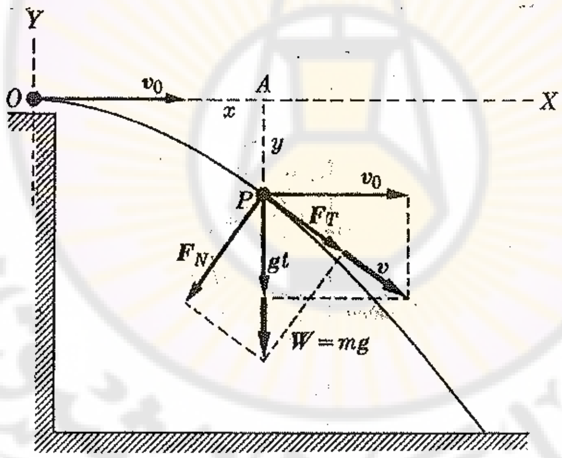
الحل :

إذا أطلقت القذيفة بسرعة ابتدائية v_0 (الشكل 20-7) فإن سرعتها الأفقية في المنطقة P تبقى v_0 أما سرعتها الشاقولية فتكون g.t ، حيث t هو الزمن اللازم للقذيفة لكي تسقط المسافة y أو لكي تقطع المسافة الأفقية $x = v_0 \,.t$. إن السرعة الكلية للقذيفة هي إذن:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

وبالتالي فإن العلاقة (7.27) تعطينا القوة المماسية:

$$F_T = m\frac{dv}{dt} = \frac{m\,g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$



الشكل (7-20)

ولإيجاد القوة الجاذبة بإمكاننا استخدام العلاقة (7.28) إلا أن هذا يتطلب الحساب المسبق لنصف قطر تقوس منحني المسار الذي هو قطع مكافئ. يمكننا في هذه الحالة تجنب هذا الحساب؛ لأننا نعلم أن القوة المحصلة هي:

$$W = m.g = \sqrt{F_T^2 + F_N^2} \quad \Rightarrow$$

$$F_N = \sqrt{W^2 - F_N^2} = \frac{m\,g\,v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

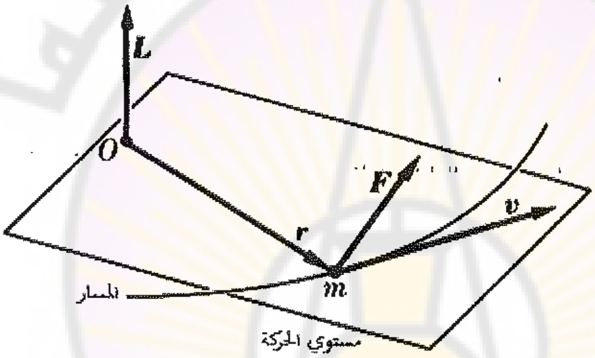
7.14 عزم كمية الحركة:

إن عزم كمية الحركة (أو العزم الحركي) بالنسبة إلى نقطة O (الشكل 21-7) لجسيم كتلته m يتحرك بالسرعة v (وله بالتالي كمية حركة $\vec{p} = m\,\vec{v}$) يعرف بالجداء الشعاعي:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{7.32}$$

أو:

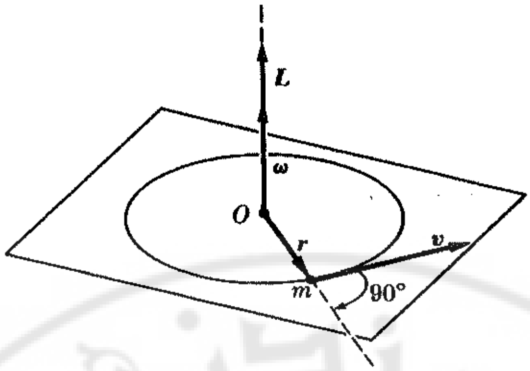
$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$



الشكل (21-7) عزم كمية حركة الجسيم.

فعزم كمية الحركة هو إذن شعاع عمودي على المستوي المعين بالشعاعين r و v وعزم كمية حركة الجسيم يتغير بصورة عامة مقداراً ومنحى حين يتحرك الجسيم، إلا أنه إذا كانت حركة الجسيم تتم في مستوٍ، وكانت النقطة O واقعة في هذا المستوي، فإن منحى عزم كمية الحركة يبقى ذاته، أي عمودياً على المستوي حيث يكون الشعاعان r و v في المستوي. وفي حالة الحركة الدائرية (الشكل 22-7) إذا كانت O هي مركز الدائرة فإن الشعاعين r و v متعامدان، و $v = \omega\, r$ بحيث إن:

$$L = m\,.r\,.v = m\,.r^2\,.\,\omega \tag{7.33}$$



الشكل (22-7) العلاقة بين السرعة الزاوية وعزم كمية الحركة في الحركة الدائرية.

إن منحى $\vec{L}$ هو منحى ω نفسه والمعادلة (7.33) يمكن أن تكتب بشكل شعاعي:

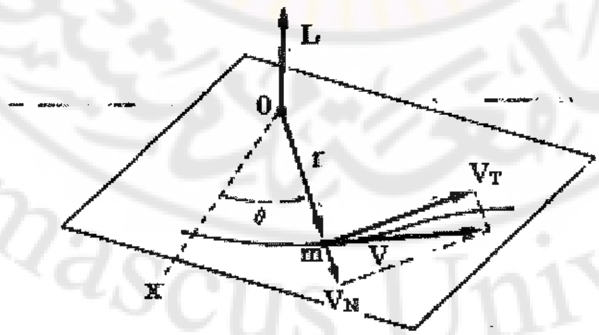
$$\vec{L} = m\, r^2\, \vec{\omega} \tag{7.34}$$

إذا لم تكن الحركة المستوية دائرية؛ إنما منحنية، فيمكننا تحليل السرعة إلى مركبتيها القطرية والأفقية (أو المماسية والناظمية) $\vec{v} = \vec{v}_N + \vec{v}_T$ كما في الشكل(23-7) ويمكننا أن نكتب عزم كمية الحركة بالشكل:

$$\vec{L} = m\, \vec{r} \times (\vec{v}_N + \vec{v}_T) = m\, \vec{r} \times \vec{v}_N$$

وذلك لأن $\vec{r} \times \vec{v}_N = 0$ (حيث الشعاعان متوازيان). ونحصل بالتالي على قيمة $\vec{L}$، $L = m\, r\, v_T$ أو أيضاً، حيث إن $v_0 = r(d\theta / dt)$ نجد :

$$L = m\, r^2\, \frac{d\theta}{dt} \tag{7.35}$$



الشكل (23-7) العلاقة بين عزم كمية الحركة والمركبة العرضية للسرعة.

إن هذه العبارة الأخيرة مماثلة للعبارة (7.33) التي حصلنا عليها من أجل الحركة الدائرية، وذلك لأن $\omega = d\theta / dt$. لكن في الحالة العامة r ليست ثابتة. وإذا تذكرنا المعادلة التي تعطي الجداء الشعاعي أمكننا أن نكتب عزم كمية حركة جسيم بالشكل:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

أو بدلالة مركباته:

$$L_x = yp_z - zp_y \ , \quad L_y = zp_x - xp_z \ , \quad L_z = xp_y - yp_x \qquad (7.36)$$

يمكننا أن نلاحظ بسهولة أنه في حالة الحركة المستوية، مثلاً في المستوى XY لدينا $z = 0$ و $p_z = 0$ بحيث إن $L_x = L_y = 0$ ولا تبقى سوى المركبة L_z

وهكذا نجد من جديد أن عزم كمية الحركة عمودي على المستوى، كما سبق وأشرنا لذلك من قبل بمحاكمة مختلفة.

لنأخذ الآن مشتق العلاقة (7.32) بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (7.37)$$

وبما أن: $d\vec{r} / dt = \vec{v}$ وأن: $\vec{p} = m\vec{v}$ موازٍ دائماً لـ v لذلك نجد:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$$

ومن ناحية أخرى $d\vec{p} / dt = \vec{F}$ حسب العلاقة (7.12) وتصبح العلاقة (7.37) إذن $d\vec{L} / dt = \vec{r} \times \vec{F}$ فإذا تذكرنا أنه حسب التعريف (4.5) عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة O هو $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ نحصل في النهاية على:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \qquad (7.38)$$

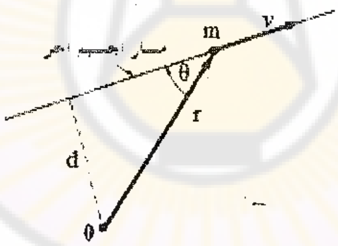
إن العلاقة (7.38) شبيهة جداً بالعلاقة (7.12) حيث حل عزم كمية الحركة $\vec{L}$ محل كمية الحركة $\vec{p}$ وحل العزم $\vec{\tau}$ محل القوة $\vec{F}$. وهي علاقة أساسية من أجل معالجة الحركات الدورانية ، وهي تنص على أن: **مشتق كمية حركة جسيم بالنسبة للزمن يساوي عزم القوة المطبقة عليه.** وهذا يعني أن تغير عزم كمية الحركة $d\vec{L}$ خلال فترة زمنية قصيرة dt مواز للعزم τ المطبق على الجسيم.

7.15 القوى المركزية:

إذا كان العزم المطبق على جسيم صفراً ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$) فينبغي أن يكون لدينا حسب العلاقة (7.38) ، $d\vec{L}/dt = 0$ أي أن $\vec{L}$ شعاع ثابت .

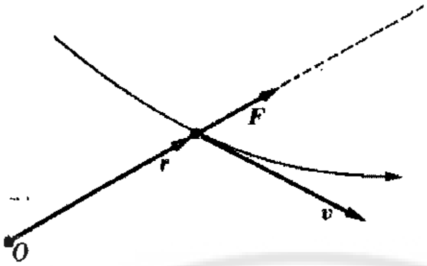
إذن عزم كمية حركة جسيم هو شعاع ثابت إذا كان عزم القوى صفراً، يتحقق هذا الشرط إذا كان $\vec{F} = 0$ ، أي إذا كان الجسيم حراً. لدينا من الشكل (24- 7)

$L = m.v.r.\sin\theta = m.v.d$ حيث: $d = r\sin\theta$ إن هذا المقدار يبقى ثابتاً؛ لأن العوامل الداخلة فيه جميعها هي مقادير ثابتة حيث إن مسار الجسيم الحر مستقيم وأن سرعته ثابتة.



الشكل (7-24) عزم كمية الحركة ثابت من أجل جسيم حر.

يتحقق الشرط $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ كذلك إذا كانت $\vec{F}$ موازية لـ r أو بكلمة أخرى إذا كان منحى $\vec{F}$ يمر بالنقطة O. إن القوة التي يمر منحاها دوماً بنقطة ثابتة تدعى بالقوة المركزية (الشكل 7-25) إذن عندما يتحرك جسم تحت تأثير قوة مركزية فإن عزم كمية حركته يبقى ثابتاً، والعكس صحيح. ويمكن صياغة ذلك بشكل آخر: عندما تكون القوة مركزية فإن عزم كمية الحركة بالنسبة لمركز القوة هو ثابت للحركة، وبالعكس.



الشكل (7-25) عزم كمية الحركة ثابت في حالة الحركة تحت تأثير قوة مركزية.

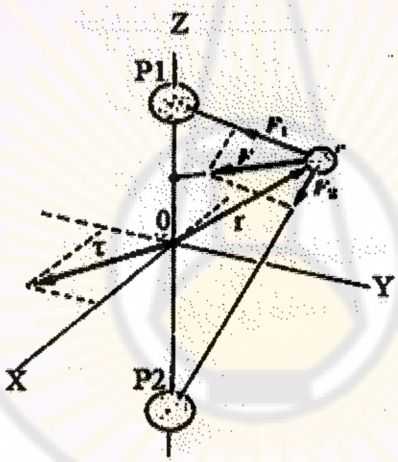
إن هذه النتيجة مهمة جداً؛ لأن كثيراً من القوى في الطبيعة هي قوى مركزية، فعلى سبيل المثال، تتحرك الأرض حول الشمس بتأثير قوة مركزية متجهة دوما نحو مركز الشمس. إن عزم كمية حركة الأرض بالنسبة إلى الشمس هو مقدار ثابت، والإلكترون في ذرة الهيدروجين يتحرك بشكل رئيس تحت تأثير القوة المركزية الناتجة عن التأثير المتبادل الكهربائي مع النواة وهذه القوة متجهة دوما نحو النواة. وعزم كمية حركة الإلكترون بالنسبة للنواة هو إذن ثابت.

أما في الذرات متعددة الإلكترونات فإن القوة المؤثرة على كل إلكترون ليست مركزية تماماً؛ لأنه بالإضافة إلى التأثير المتبادل المركزي مع النواة هناك أيضاً التأثيرات المتبادلة مع الإلكترونات الأخرى، إلا أنه يمكن بصورة عامة اعتبار أن القوة الوسطية المؤثرة على الإلكترون مركزية. ويمكن كذلك بالنسبة لبعض النوى. بتقريب أولي، نفترض أن مركباتها (البروتونات، والنيترونات) تتحرك تحت تأثير قوى مركزية وسطياً.

وعلى العكس من ذلك، ففي جزيئة ما لا تكون القوة المؤثرة على الإلكترون مركزية؛ لأنها تنتج من الجذب الذي تولده، مختلف النوى ومن دفع الالكترونات الأخرى، إن عزم كمية حركة الإلكترون ليس ثابتا إذن، فجزيئة ثنائية الذرة تشكل حالة مهمة (الشكل 7-26) يدور الإلكترون e حول نواتين $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ وهو خاضع للقوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ واللتين محصّلتهما $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ تقع دوماً في المستوى المعين بالشعاع $\overrightarrow{Oe} = \vec{r}$ وبالمستقيم الواصل بين النواتين والذي سنعتبره المحور Z إن العزم المحصل، بالنسبة لمركز ثقل الجزيئة O، المؤثر على الإلكترون هو (إذا أهملنا التأثيرات المتبادلة الأخرى بين الالكترونات):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}$$

ومن الشكل(26-7) نرى أن هذا العزم عمودي على المستوى المعين بشعاع الموضع $\vec{r}$ وبالمحور Z فالعزم يقع إذن في المستوى XY أو أن $\vec{\tau}_z = 0$ وينتج من هذا وفق العلاقة (7.38) أن: $dL_z / dt = 0$ وأن $L_z = const$ وبالتالي بالرغم من أن عزم كمية حركة الإلكترون ليس ثابتاً إلا أن مركبته على محور الجزيئة أو المحور Z يبقى ثابتاً، وليست هذه النتيجة صحيحة من أجل جزيئة ثنائية الذرة فقط؛ وإنما هي كذلك من أجل أي جزيئة خطية أو بشكل أعم، من أجل الحركة تحت تأثير قوة تتقاطع دوما مع محور ثابت. إن مثل هذه القوة تدعى بالقوة المحورية إذن: عندما تكون القوة محورية، فإن مركبة عزم كمية الحركة على هذا المحور تبقى ثابتة. إن هذه النتيجة مفيدة جدا لدى دراسة الذرات والجزيئات.



الشكل (26-7) في حالة الحركة تحت تأثير قوة محورية تكون مركبة عزم كمية الحركة وفق المحور ثابتة.

إن الحركة الناتجة عن تأثيره قوة مركزية تقع دوماً في مستوٍ واحد؛ وذلك لأن $\vec{L}$ ثابت لذلك باستخدام العلاقة (7.35) فإن:

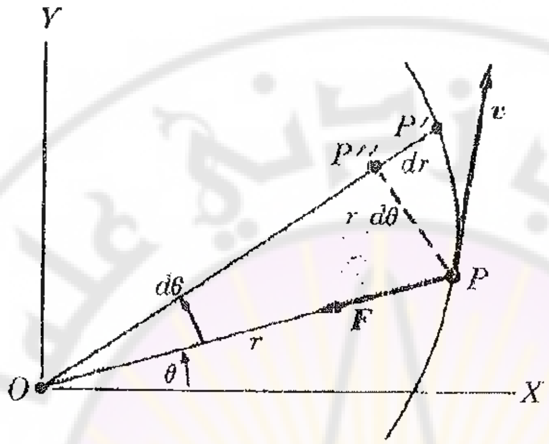
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = const. \qquad (7.39)$$

حين ينتقل الجسيم من الموضع P إلى الوضع 'P الشكل (27-7) فإن شعاع نصف القطر r يمسح السطح المظل، والذي يقابل المثلث 'OPP وبالتالي:

$$dA = \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

والسطح الممسوح في واحدة الزمن:

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$



الشكل (7-27) تحت تأثير القوى المركزية يمسح شعاع الموضع سطوحاً متساوية في أزمنة متساوية.

إذا قارنا هذه النتيجة بالعلاقة (7.39) وجدنا أن $dA/dt = const$. مما يدل على أنه في الحركة الناتجة عن تأثير قوة مركزية يمسح شعاع نصف القطر سطوحاً متساوية في أزمنة متساوية. إن لهذه النتيجة أهمية تاريخية لما لها من علاقة باكتشاف قوانين حركة الكواكب وهي تعرف باسم قانون كبلر الثاني.

مسألة محلولة 12:

أوجد في حالة القذيفة في المسألة المحلولة (11) عزم كمية الحركة والعزم حول النقطة o تحقق من صلاحية العلاقة (7.38).

الحل:

بمجرد أن نختار المحورين ox أو oy كما هو مبيّن على الشكل (7-20) فإن إحداثيات النقطة P تكون:

$$y = AP = -\tfrac{1}{2} g \, t^2 \quad ، \quad x = OA = v_0 \, t$$

وتكون مركبات سرعة P هي:

$$V_y = -g\, t \qquad V_x = v_0$$

فإذا تذكرنا أن $\vec{p} = m\vec{v}$ واستخدمنا المعادلة الثالثة من (7.36) أمكننا أن نكتب:

$$L_z = x\, p_y - y\, p_x = m\,(x\, v_y - y\, v_x) = -\tfrac{1}{2} m\, g\, v_0\, t^2$$

أما مركبات القوة المطبقة على P فهي:

$$F_y = -mg \quad \text{و} \quad F_x = 0$$

وباستعمال العلاقة (4.8) فإننا نحصل على:

$$\tau_z = x F_y - y F_x = -m\, g\, v_0\, t$$

ويستطيع الطالب أن يتحقق من أنه في هذه الحالة $dL_z / dt = \tau_z$ بحيث إن العلاقة (7.38) تطبق.

مسألة محلولة 13:

قدّر عزم كمية حركة الأرض حول الشمس، وكذلك عزم كمية حركة الإلكترون حول النواة في ذرة الهيدروجين. افترض في كلتا الحالتين للتبسيط أن المدار دائري بحيث إنه يمكن تطبيق علاقات الشكل (7-22).

الحل :

إن كتلة الأرض هي 5.98×10^{24}kg وبعدها الوسطي عن الشمس هو: 1.49×10^{11}m وإن دور دوران الأرض حول الشمس هو 3.16×10^{7}s وحسب العلاقة (5.51) فإن السرعة الزاوية الوسطية للأرض حول الشمس هي إذن:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{3.16 \times 10^{7}\, s} = 1.98 \times 10^{-7}\, s^{-1}.$$

وحسب العلاقة (7.33) فإن عزم كمية حركة الأرض هو بالتالي:

$$\begin{aligned} L &= m r^2 \omega \\ &= (5.98 \times 10^{24})(1.49 \times 10^{11})^2 (1.98 \times 10^{-7}) = 2.67 \times 10^{40}\ m^2\, kg\, s^{-1} \end{aligned}$$

ومـن ناحيـة أخـرى فللإلكـترون في ذرة الهيـدروجين كتلـة مقـدارها 9.11×10^{-31}kg وبعـداً وسـطياً عـن النـواة مقـداره 5.29×10^{-11}m وسـرعة زاويـة مقـدارها 4.13×10^{16}s^{-1} وكـذلك باستعمال العلاقة (7.33) من جديد نجد عزم كمية حركة الإلكترون حول النواة:

$$L = mr^2\omega$$
$$= (9.11\times10^{-31})(5.29\times10^{-11})^2(4.13\times10^{16}) = 1.05\times10^{-34} \quad m^2\, kg\, s^{-1}$$

إن هذه القيمة العددية هي إحدى الثوابت الأكثر أهمية في الفيزياء، ويرمز لها بالرمز $\hbar$. إن عـزم كميـة حركـة الجسـيمات الذريـة والعنصـرية يعـبر عنهـا عـادة بوحـدات $\hbar$. والكميـة $h = 2\pi\ \hbar$ تسمى ثابتة بلانك.

مسائل

7.1 جسم كتلته 3.2 kg يتحرك نحو الغرب بسرعة 6.0 m s^{-1} وجسم آخر كتلته 1.6 kg يتحرك نحو الشمال بسرعة 5.0 m s^{-1} . يدخل الجسمان في تأثير متبادل أحدهما مع الآخر، وبعد ثانيتين تصبح حركة الأول نحو N30?E (أي بالاتجاه شمال شرق بزاوية ?30 مع الشمال) وبسرعة 3.0 ms^{-1} والمطلوب إيجاد:

(1) مقدار سرعة الجسم الثاني واتجاهه.

(2) كمية الحركة الكلية للجسمين في البداية وبعد انقضاء الثانيتين.

(3) تغير كمية حركة كل من الجسمين.

(4) تغير سرعة كل من الجسمين.

(5) مقدار تغيرات السرع تحقق من العلاقة (7.9).

7.2 يتحرك جسيم كتلته 0.2 kg بسرعة 0.4 ms^{-1} وفق المحور X ثم يصطدم بجسيم ساكن كتلته 0.3 kg. بعد التصادم أصبح الجسيم الأول يتحرك بسرعة 0.2 m s^{-1} باتجاه يصنع زاوية $40^?$ مع المحور X. عيّن:

(a) مقدار سرعة الجسيم الثاني، ومنحاه بعد التصادم.

(b) تغير سرعة وكمية حركة كل من الجسمين.

(c) تحقق من العلاقة (7.9) .

7.3 لنعتبر جملة الأرض والقمر (ونهمل حركة هذه الجملة حول الشمس). يدور القمر في 28 يوماً حول الأرض على دائرة نصف قطرها 4.2×10^8 m ، والمطلوب:

(a) ما هو تغير كمية حركة القمر في 14 يوماً ؟

(b) كم ينبغي أن يكون تغير كمية حركة الأرض في الفترة الزمنية نفسها ؟

(c) هل الأرض ثابتة في الجملة أرض - قمر ؟

(d) كتلة الأرض أكبر بـ 80 مرة من كتلة القمر . ما هو تغير سرعة الأرض في 14 يوماً .

7.4 تلقى قنبلة يدوية بشكل أفقي بسرعة $8\ m\ s^{-1}$ وتنفجر إلى ثلاث شظايا متساوية. تتابع الشظية الأولى حركتها الأفقية بسرعة $16\ ms^{-1}$ وتندفع الثانية نحو الأعلى بزاوية 45؟ بينما تندفع الثالثة بالزاوية نفسها نحو الأسفل. أوجد مقداري السرعة للشظيتين الثانية والثالثة.

7.5 يتحرك قمر اصطناعي موازٍ للأرض بسرعة $8\ kms^{-1}$ فإذا كنا نريد إلقاء حمل كتلته 50 kg مباشرة إلى الأرض بقذفه أفقياً من القمر الاصطناعي. احسب سرعة القمر بعد قذف الحمل إذا كان ، كتلته الكلية (بما فيها الحمل) هي 450 kg (ما هي سرعة الحمل بالنسبة إلى الأرض مباشرة بعد القذف).

7.6 عربة كتلتها 1.5 kg تسير على سكتها بسرعة $0.2\ m\ s^{-1}$ إلى أن تصطدم بحاجز ثابت في نهاية السكة. ما هو تغير كمية حركة العربة والقوة المطبقة عليها إذا كانت خلال 0.1 s:

(a) تصبح ساكنة .

(b) ترتد بسرعة $0.1 m\ s^{-1}$ ؟ ناقش انحفاظ كمية الحركة في التصادم .

7.7 تبلغ كتلة سيارة 1500 kg وسرعتها الابتدائية $60\ kmhr^{-1}$ حين تكبح السيارة لتوليد تباطؤ ثابت تقف السيارة خلال 1.2 min . عين القوة المطبقة على السيارة .

7.8 كم من الوقت ينبغي أن تؤثر قوة ثابتة مقدارها 80 N على جسم كتلته 12.5 kg لإيقافه علماً بأن سرعته الابتدائية هي: $72\ km\ hr^{-1}$.

7.9 جسم كتلته 10 g يسقط من ارتفاع 3 m على كومة رمل فيدخل فيها إلى عمق 3cm قبل أن يقف. ما هي القوة التي أثر بها الرمل على الجسم ؟

7.10 يقف رجل على سطح سيارة شاحنة تسير بسرعة $36\ km\ hr^{-1}$ بأية زاوية وبأي اتجاه ينبغي أن يميل الرجل لكي يتجنب السقوط إذا كانت سرعة الشاحنة تصبح في ثانيتين:

. 45 km hr^{-1} (a)
. 9 km hr^{-1} (b)

7.11 يهبط مصعد فارغ كتلته 5000 kg شاقولياً بتسارع ثابت منطلقاً من وضع السكون، ويقطع 30 m خلال الـ 10 s الأولى. احسب توتر الحبل الحامل للمصعد.

7.12 رجل كتلته 90 kg في مصعد. أوجد القوة التي تؤثر بها أرض المصعد عليه عندما:

(a) يصعد المصعد بسرعة منتظمة .

(b) يكون للمصعد تسارع متجه نحو الأعلى مقداره $3\ m\ s^{-2}$.

(c) يكون له تسارع مماثل متجه نحو الأسفل.

(d) ينقطع الحبل ويسقط المصعد سقوطاً حراً .

7.13 جسم كتلته 2 kg يتحرك دون احتكاك على سطح أفقي تحت تأثير قوة أفقية:

$$F = 55 + t^2$$

حيث تقدر F بالنيوتن و t بالثواني. احسب سرعة الكتلة في اللحظة $t = 5\ s$ (يكون الجسم في وضع السكون في اللحظة $t = 0$) .

7.14 إن القوة المحصلة المؤثرة على جسم كتلته m هي $F = F_0 - k\,t$ حيث: F_0 و k ثابتتان أما t فهي الزمن. أوجد التسارع. وبالتكامل أوجد المعادلات للسرعة وللموضع.

7.15 يتحرك جسم، كان في البداية ساكناً في x_0 ، على خط مستقيم تحت تأثير القوة:

$$F = -k / x^2$$

بين أن سرعته في النقطة x هي: $v^2 = 2(k/m)(1/x - 1/x_0)$ يمكن استعمال هذه الطريقة لتعيين سرعة جسم يسقط على الأرض من ارتفاع كبير .

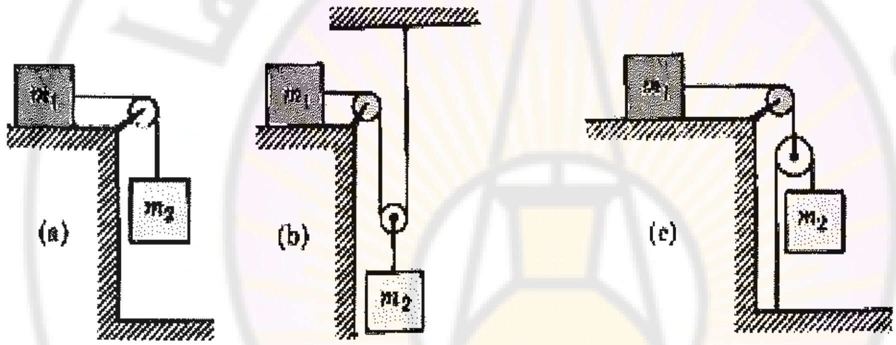
7.16 يتحرك جسم كتلته 1kg دون احتكاك على مستوي مائل بزاوية ?30 على الأفق. بأي تسارع يتحرك الجسم إذا طبقت عليه قوة 8 N موازية للمستوي ومتجهة (1) نحو الأعلى (2) نحو الأسفل ؟

7.17 سيارة شاحنة كتلتها 5000 kg تسير نحو الشمال بسرعة $30 m\ s^{-1}$ ثم تدور، في 20 s، في طريق متجهة N 70° E والمطلوب حساب:

(a) تغير كمية حركتها.

(b) مقدار القوة الوسطية المؤثرة على الشاحنة، ومنحاها.

7.18 احسب تسارع الجسمين m_1 و m_2 وتوتر الحبال، الشكل (7-28) جميع البكرات لها ثقل مهمل، وتتحرك دون احتكاك ، والأجسام تنزلق دون احتكاك. أي الجمل يمكن أن يجعل m_1 تتسارع أكثر من السقوط الحر؟ حل جبرياً أولاً ثم طبق على الحالة التي تكون فيها : $m_1 = 4\ kg$, $m_2 = 6\ kg$.

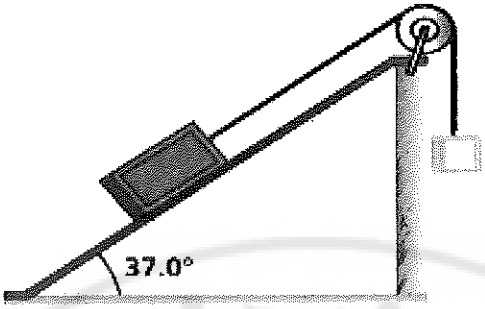


الشكل (7-28)

7.19 تتصل كتلتان بحبل مهمل الكتلة وغير قابل للامتطاط وذلك عن طريق بكرة كما هو موضح في الشكل(7-29). تبلغ الكتلة الأولى المعلقة 16 kg، أما الكتلة الثانية 8 kg فهي تميل على المستوي بزاوية 37° وبمعامل احتكاك (0.23). تتحرّر الكتلتان وتبدأ حركتهما. المطلوب:

1- إيجاد قيمة تسارع الكتلتين.

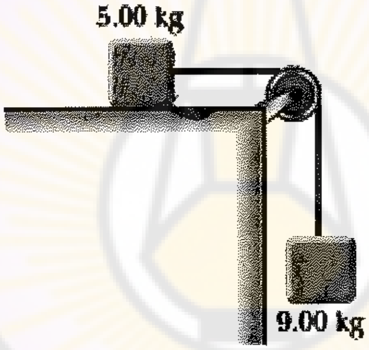
2- إيجاد قيمة توتر الحبل المتصل بالكتلتين.



الشكل (7-29)

7.20 جسم كتلته 5 kg يتحرك على منضدة أفقية بدون احتكاك ، متصل بجسم آخر كتلته 9 kg بحبل عن طريق بكرة كما هو موضح بالشكل (7-30) والمطلوب:

- حدد القوى المؤثرة على كل جسم.
- أوجد تسارع الجسمين وتوتر الحبل.



الشكل (7-30)

7.21 كتلتــه 0.2 kg ترتفــع، على مســتوي مائل بزاوية 30° على الأفــق، بســرعة 12 $m\ s^{-1}$ فإذا كان عامل الاحتكاك مساوياً 0.16 عيّن إلى أية مسافة تتحرك الكتلة قبل أن تتوقف. ما هي سرعة الكتلة حين تعود إلى أسفل المستوى المائل؟

7.22 أوجد السرعة الحدية لكرة نصف قطرها 2 cm وكثافتها $1.50\ g.\ cm^{-3}$ تسقط في الغليسرين (الذي كثافته = $1.26\ g\ cm^{-3}$). أوجد كذلك سرعة الكرة حين يكون تسارعها $100\ cms^{-2}$.

7.23 جسم كتلته 45 kg يقذف، شاقولياً بسرعة ابتدائية مقدارها $60\ m\ s^{-1}$ يجد الجسم مقاومة من الهواء مقدارها $F = -3v / 100$ حيث F بالنيوتن و v سرعة الجسم مقدر بالـ $m\ s^{-1}$. كم من الزمن يلزم حتى يبلغ الجسم أقصى ارتفاع؟ وما هو الارتفاع الأعظم؟

7.24 يسقط جسم، كان ساكناً في البداية، من ارتفاع 108 m في 5 s أوجد سرعة الحدية إذا كانت المقاومة متناسبة مع السرعة.

7.25 يقف رجل كتلته 70 kg على ميزان في مصعد متحرك نحو الأعلى فيقرأ وزنه 850 N، ما هو تسارع المصعد؟

7.26 ما الوزن الظاهري لشخص كتلته 75 kg يتزلج على مستوٍ مائل بزاوية ?37 بدون احتكاك؟

7.27 قذفت كرة كتلتها 0.125 kg رأسياً إلى أعلى بسرعة قدرها 8 m/s ، احسب التغير في كمية حركتها عندما تصبح على ارتفاع 2 m عن نقطة القذف، وهي صاعدة للأعلى.

7.28 عربة سكة حديد كتلتها 2000 kg تتحرك بسرعة m/s (2.5). اصطدمت بحاجز في نهاية الخط فارتدت إلى الخلف بسرعة m/s (1.5). والمطلوب:

a) التغير في كمية حركتها نتيجة لهذا التصادم.

b) معدل التغير في كمية تحرك العربة إذا حدث هذا التغير في زمن قدره 0.5 ثانية.

7.29 تتحرك كرة كتلتها 1/10 kg في خط مستقيم على سطح أفقي أملس بسرعة مقدارها 2.2 m/s فإذا اصطدمت الكرة بحاجز شاقولي ثابت وارتدت إلى الوراء في خط سيرها الأول بسرعة قدرها 0.8 m/s .احسب الطاقة الحركية التي فقدتها الكرة بسبب التصادم.

7.30 جسم كتلته 180 gr يتحرك في خط مستقيم، فإذا تغيرت سرعته من 9 km/s إلى 63 km/hr في الاتجاه نفسه. احسب التغير في كمية حركته.

7.31 احسب عزم كمية حركة الأرض حول الشمس. وكذلك عزم كمية حركة الإلكترون حول النواة في ذرة الهيدروجين، بفرض أن المدارات دائرية في كلتا الحالتين. تعطى $M=5.98\times10^{24}\ kg$ (كتلة الأرض)، بعد الأرض عن الشمس $1{,}49\times10^{11}\,m$. $m=9.11\times10^{-31}\ kg$(كتلة الإلكترون)، بعد الإلكترون عن النواة $5{,}29\times10^{-11}\ m$ وسرعته الزاوية $4{,}13\times10^{16}\ rad/s$.

7.32 يندفع الوقود من صاروخ كتلته في لحظة معينة 850 kg بمعدل 2.3 kg/s وبسرعة 2800m/s بالنسبة للصاروخ. أوجد نفث الصاروخ، وتسارعه في تلك اللحظة.

7.33 يطلق صاروخ شاقولياً وتخرج منه كتلة من الغاز بمعدل $5\times10^{-2}\,m_0\,kg\,s^{-1}$ حيث m_0 هي كتلة الصاروخ الابتدائية. فإذا كانت سرعة خروج الغاز بالنسبة للصاروخ هي $5\times10^{3}\,m\,s^{-1}$ ، أوجد سرعة الصاروخ وارتفاعه بعد مضي 10 s.

7.34 سقطت كرة كتلتها 80 gr سقوطاً حراً من السكون من ارتفاع 120 cm عن أرض صلبة، فارتدت بعد الصدمة بالأرض إلى ارتفاع 70cm رأسياً إلى الأعلى. والمطلوب:

1: أوجد مقدار التغير في كمية حركة الكرة نتيجة لاصطدامها بالأرض.

2: إذا حدث هذا التغير في زمن قدره 1/10 من الثانية فأوجد معدل التغير في كمية الحركة.

3: بفرض أن الأرض رملية، وأن الكرة لم ترتد ، وإنما غاصت هذه الكرة لمسافة 4cm في الرمل عندئذٍ أوجد مقامة الرمل التي لاقتها الكرة في أثناء غوصها بفرض أن هذه المقاومة ثابتة.

الفصل الثامن

العمل والطاقة

8.1 مقدمة.

8.2 العمل.

8.3 الاستطاعة.

8.4 وحدات العمل والاستطاعة.

8.5 الطاقة الحركية.

8.6 عمل قوة ثابتة في المقدار والمنحى.

8.7 الطاقة الكامنة.

8.8 انحفاظ طاقة جسيم.

8.9 الصدم.

8.10 الحركة المستقيمة تحت تأثير القوى التي تشتق من كمون.

8.11 الحركة تحت التأثير القوى المركزية التي تشتق من كمون.

8.12 مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة.

8.13 القوى التي لا تشتق من كمون.

الفصل الثامن

العمل والطاقة

Work and energy

8.1 مقدمة:

سنعالج في هذا الفصل مختلف مواضيع ديناميك جسيم ولن نراقب بالتالي، سوى جسيم واحد، فحين نحل المعادلة الأساسية في ديناميك جسيم (أي $\vec{F} = d\vec{p}/dt$) فإن بإمكاننا دائماً إجراء التكامل مرة أولى إذا كنا نعرّف القوة بدلالة الزمن لأنه ابتداءً من هذه المعادلة يمكن الحصول بالتكامل على:

$$\int_{P_0}^{P} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\ dt \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\ .dt = \vec{I} \qquad (8.1)$$

إن الكمية $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}.dt$ التي تظهر في الطرف الأيمن تدعى الدفع. والعلاقة (8.1) تشير إلى أن:

"تغير كمية حركة الجسيم يساوي الدفع". وبما أن الدفع هو جداء قوة في زمن، فإن قوة كبيرة جداً تؤثر خلال زمن قصير يمكن أن تولد التغير نفسه في كمية الحركة الذي تولده قوة صغيرة خلال زمن أطول. فعلى سبيل المثال، حين يضرب اللاعب كرة، فهو يؤثر بقوة كبيرة خلال زمن قصير جداً، وينتج عن ذلك تغير كبير في كمية حركة الكرة، ولكي ينتج تغير مماثل لكمية الحركة ينبغي أن تؤثر قوة الثقالة على الكرة خلال زمن أطول بكثير.

إذا بدلنا $\vec{p}$ بالكمية المكافئة لها $m\vec{v}$ يصبح من الممكن إجراء التكامل من جديد والحصول على موضع الجسيم بدلالة الزمن ونحصل على:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{I} \quad \Leftrightarrow \qquad m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{I}$$

فإذا تذكرنا أن: $\vec{v} = d\vec{r}\,/\,dt$ كان بإمكاننا أن نكتب:

$$\int_{r0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{r}\left(v_0 + \frac{1}{m}\vec{I}\right) dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\ t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} I\ d\vec{r}$$

وهذا يعطينا $\vec{r}$ بدلالة t. وفي المسائل المهمة التي نصادفها في الفيزياء لا نعرف القوة المؤثرة على الجسيم بدلالة الزمن؛ وإنما نعرفها بدلالة الموضع المعين بواسطة الشعاع $\vec{r}$ أو بواسطة الإحداثيات x و y و z. وبكلمة أخرى نعرّف $\vec{F}(r)$ أو $\vec{F}(x,y,z)$ وبالتالي فإننا لا نستطيع حساب التكامل الموجود في العلاقة (8.1) إلا إذا كنا نعرف x و y و z وبدلالة الزمن أي إلا إذا كنا قد حللنا المسألة التي نحاول حلها بواسطة المعادلة (8.1) وللخروج من هذه الحلقة المفرغة الظاهرية يجب اللجوء إلى طرق رياضية أخرى تقودنا إلى تعريف مفهومين جديدين: العمل والطاقة وتسمح لنا هذه الطرق الفعالة بحل المسائل حتى في الحالة التي لا نعرف فيها القوة، ولكن حيث نستطيع افتراض فرضيات معقولة تتعلق بخواصها.

مسألة محلولة 1:

تسقط كرة كتلتها 0.1 kg من ارتفاع 2 m، وبعد أن تلامس الأرض تقفز إلى ارتفاع 1.8 m عيّن الدفع الذي تتلقاه الكرة خلال السقوط، والدفع الذي تتلقاه حين تصطدم بالأرض.

الحل:

بالاعتماد على العلاقة (5.12) لإيجاد سرعة الكرة حين تصل إلى الأرض أي:

$v_1 = \sqrt{2g\,h_1}$ حيث: $h_1 = 2m$

$$v_1 = 6.26\ ms^{-1}$$

و بما أن السرعة متجهة نحو الأسفل ينبغي أن نكتب:

$$\vec{v}_1 = -(6.26)\,\vec{u}_y$$

وإن كمية الحركة الابتدائية صفر، وبالتالي فإن تغير كمية الحركة الكلي خلال السقوط هو:

$$m\,\vec{v}_1 - 0 = -(0.626)\,\vec{u}_y$$

وهذا هو الدفع العائد إلى الثقالة يمكن كذلك حساب هذا الدفع مباشرة باستخدام التعريف

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}.dt$$

وفي هذه الحالة: $t = v_1 / g = 0.639\, s$ $\qquad t_0 = 0$

لدينا كذلك: $\vec{F} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{u}_y = -(0.98)\,\vec{u}_y$

وهكذا يعطينا الحساب المباشر من جديد القيمة $-(0.626)\,\vec{u}_y$ من أجل الدفع بسبب الثقالة خلال زمن قصير جداً، ونحن لا نعرف هذه القوة لكننا نستطيع الحصول على الدفع بحساب كمية حركة الكرة حين تقفز، بما أنه تصل إلى الارتفاع $h_2 = 1.8\,m$ فإن سرعتها لدى القفز هي:

$$v_2 = \sqrt{2g\,h_2} = 5.94\,ms^{-1}$$

أو بشكل شعاعي $\vec{v}_2 = (5.94ms^{-1})\,\vec{u}_y$ لأن الجسم يتحرك نحو الأعلى. ويعبر عن تغير كمية الحركة كما يلي:

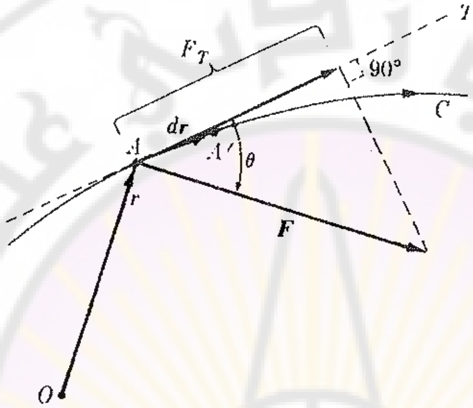
$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = (1.22)\,\vec{u}_y$$

وهذا هو الدفع. وبمقارنة هذه القيمة بنتيجة السقوط الحر وبملاحظة أن التصادم مع الأرض قد تم خلال فترة زمنية قصيرة جداً، فإننا نستنتج أن القوة التي تؤثر في الحالة الثانية هي أكبر بكثير. ولو كان بإمكاننا قياس هذه الفترة الزمنية لاستطعنا الحصول على القوة الوسطية المؤثرة على الكرة.

8.2 العمل:

لنعتبر جسمياً A ينتقل على طول منحن C تحت تأثير قوة $\vec{F}$ (الشكل 8-1) ينتقل الجسيم خلال زمن قصير جداً dt من A إلى A' والانتقال $\overrightarrow{AA'} = d\vec{r}$ يعرّف العمل الذي قامت به القوة $\vec{F}$ خلال هذا الانتقال بالجداء السلّمي:

$$dW = \vec{F} \, . d\vec{r} \tag{8.2}$$



الشكل (8-1) العمل يساوي جداء الانتقال في مركبة القوة وفق الانتقال.

فإذا رمزنا للمقدار $d\vec{r}$ (أي للمسافة المقطوعة) بـ ds فإننا نستطيع أن نكتب كذلك المعادلة (8.2) بالشكل:

$$dW = F \, .ds. \cos\theta \tag{8.3}$$

حيث: θ هي الزاوية التي يصنعها منحنى القوة $\vec{F}$ مع الانتقال $d\vec{r}$ وبما أن $F\cos\theta$ هي المركبة F_T للقوة على المماس للمسار فإنه يكون لدينا:

$$dW = F_T \, . ds \tag{8.4}$$

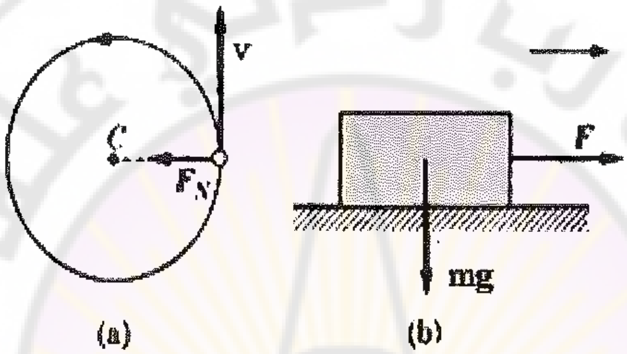
ويمكن التعبير عما سبق بقولنا إن: "العمل يساوي إلى الانتقال مضروباً بمركبة القوة على منحنى الانتقال".

لنلاحظ أنه إذا كانت قوة عمودية على الانتقال $(\theta = 90^\circ)$ فإن العمل الذي تقوم به هذه القوة صفر. وهذه هي، مثلاً حالة القوة المركزية $\vec{F}_N$ في الحركة الدائرية (الشكل 8-2a) أو حالة قوة الثقالة $m\vec{g}$ حين ينتقل الجسم على مستوٍ أفقي (الشكل 8-2b).

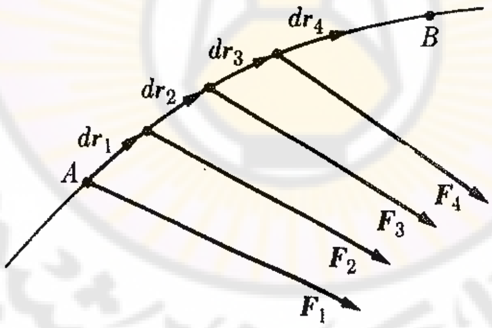
إن المعادلة (8.2) تعطي العمل من أجل انتقال لا متناه في الصفر أما العمل الكلي المنجز خلال انتقال الجسيم من A إلى B الشكل(3-8) فهو عبارة عن مجموع جميع الأعمال اللامتناهية في الصغر المنجزة خلال الانتقالات المتتالية أي أن:

$$W = \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 . d\vec{r}_3 + \dots \quad \Rightarrow$$

$$W = \int_A^B \vec{F} . d\vec{r} = \int_A^B F_T \; ds \qquad (8.5)$$



الشكل (2-8) القوة التي لا تعمل.

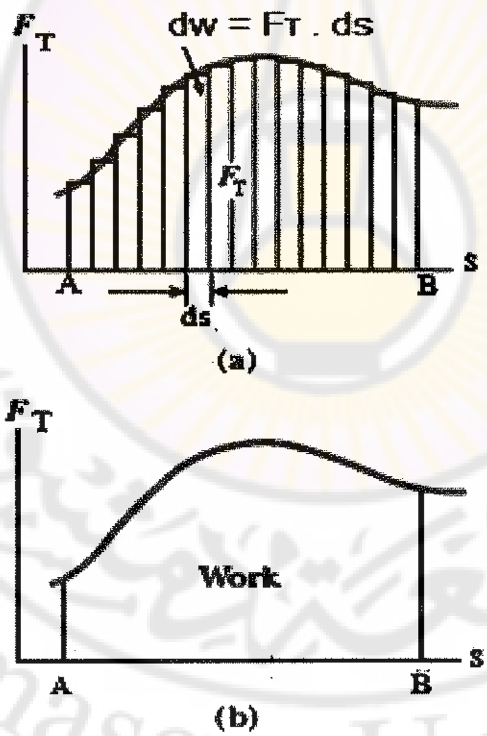


الشكل (3-8) العمل الكلي هو مجموع عدد كبير من الأعمال الصغيرة.

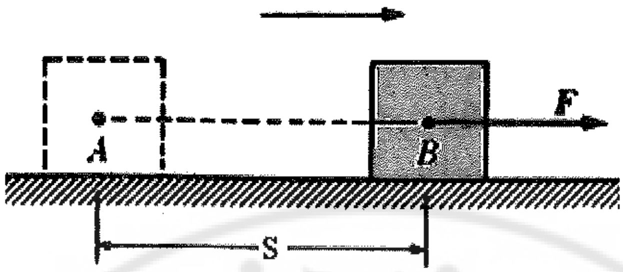
وقبل أن نحسب هذا التكامل ينبغي علينا أن نعرف $\vec{F}$ بدلالة x و y و z وينبغي علينا أيضاً بشكل عام أن نعرف معادلة المسار الذي يتبعه الجسم في انتقاله. وهناك إمكانية أخرى، وهي أن نعرف $\vec{F}$ و x و y و z بدلالة الزمن أو بدلالة أي متحول آخر.

من المناسب في بعض الأحيان تمثيل F_T بيانياً، وفي الشكل (4-8) مثلنا F_T بدلالة المسافة s. إن العمل ($dW = F_T .ds$) المنجز خلال انتقال صغير ds يقابل سطح المستطيل الصغير. وبهذا الشكل يمكن إيجاد العمل الكلي المنجز على الجسيم في الشكل (3-8) خلال انتقاله بين A و B وذلك بتقسيم السطح (الشكل 8-4a) إلى مستطيلات صغيرة ثم بجمع مساحاتها وبتعبير آخر: إن العمل المنجز يعطى بالمساحة الكلية في الشكل (8-4b). هناك حالة خاصة مهمة عندما تكون القوة ثابتة بالمقدار والمنحنى، ويكون انتقال الجسم حسب خط مستقيم منطبق على منحى القوة (الشكل 5-8) عندئذ $F_T = F$ والمعادلة (8.5) تصبح:

$$W = \int_A^B F .ds = F \int_A^B ds = F . s \tag{8.6}$$



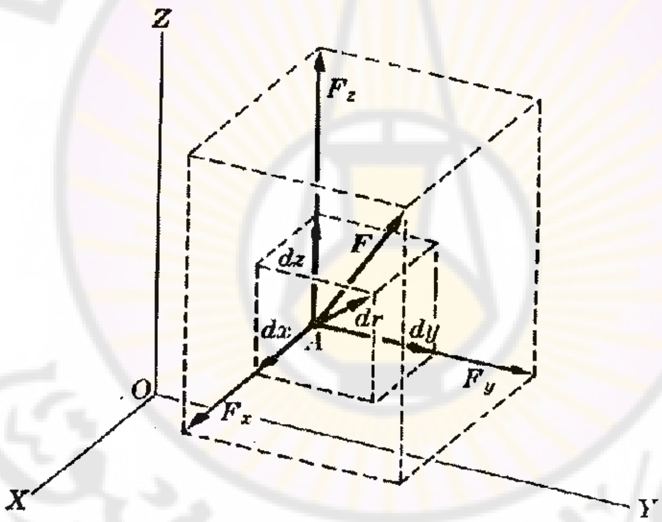
الشكل (4-8) العمل الكلي المنجز من A إلى B ويساوي المساحة المحصورة تحت المنحني.



الشكل(5-8) عمل قوة ثابتة بالمقدار والمنحنى.

إذا كانت F_x, F_y, F_z هي المركبات المتعامدة للقوة F وكانت dx و dy و dz هي مركبات dr (الشكل 6-8) فإن تطبيق العلاقة (3.20) يعطينا:

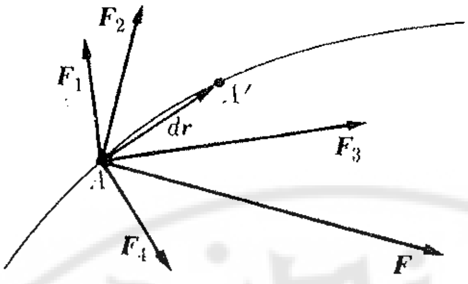
$$W = \int_A^B \left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz\right) \tag{8.7}$$



الشكل (6-8) العمل الذي تنجزه قوة يساوي إلى مجموع الأعمال التي تنجزها مركبات القوة المتعامدة.

وحيث تؤثر عدة قوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ على الجسيم فإن العمل الذي تقوم به كل قوة خلال الانتقال $\overrightarrow{AA'} = d\vec{r}$ (الشكل7-8) هو:

$dW_1 = \vec{F}_1 . d\vec{r} = dW_2 = \vec{F}_2 . d\vec{r} = dW_3 = \vec{F}_3 . d\vec{r}$ وهكذا.



الشكل (8-7) حين تؤثر عدة قوى على جسيم يكون عمل المحصلة هو مجموع أعمال المركبات.

لنلاحظ أن $d\vec{r}$ هي نفسها من أجل جميع القوى؛ لأنها جميعها تؤثر على الجسيم نفسه. ونحصل على العمل الكلي الذي تقوم به كافة هذه القوى على الجسيم بجميع الأعمال المتناهية في الصغر dW_1, dW_2, dW_3 التي تنجزها كل من هذه القوى، وهكذا فإن:

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 + \ldots \qquad (8.8)$$

$$= \vec{F}_1 . d\vec{r} + \vec{F}_2 . d\vec{r} + \vec{F}_3 . d\vec{r} + \ldots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots) . d\vec{r}$$

$$= \vec{F} \, . d\vec{r}$$

حيث $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$ هي القوة المحصّلة.

إن النتيجة الأخيرة للمعادلة (8.8) ليست سوى العمل الذي تقوم به القوة المحصّلة المؤثرة على الجسيم، وهذا يبيّن أن العمل المحصّل لعدة قوى مطبقة على الجسيم نفسه يساوي لمجموع أعمال هذه القوى.

8.3 الاستطاعة:

في التطبيقات العملية لا تكون لقيمة العمل المنجز فائدة كبيرة، بل نهتم أكثر بمعدل إنجاز العمل خلال فترة من الزمن. لذلك ندخل مفهوماً فيزيائياً جديداً يربط العمل المنجز بالزمن الذي تم فيه إنجاز هذا العمل، ألا وهو الاستطاعة والذي نعرفه بأنه العمل المنجز خلال زمن محدد، وبالتالي نعرف الاستطاعة الوسطية بالعلاقة :

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (8.9)$$

أما الاستطاعة الآنية نعرفها كما يلي :

$$P = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

باستخدام المعادلة (8.2) و المعادلة (5.17) نستطيع أن نكتب:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (8.10)$$

أي إن الاستطاعة تساوي إلى الجداء السلّمي لشعاع القوة المطبقة على الجسيم في شعاع سرعته.

8.4 وحدات العمل والاستطاعة:

يعبّر عن العمل بجداء القوة في الانتقال ففي جملة الوحدات الدولية يعبّر عن العمل بالنيوتن متر، وتدعى هذه الوحدة بالجول *Joule* ويرمز لها بالحرف J فالجول هو إذن العمل الذي تقوم به قوة مقدارها نيوتن واحد حين تحرك جسيماً مسافة متر على منحى القوة. فإذا تذكرنا أن النيوتن $N = mkgs^{-2}$ نجد أن الجول $J = N\,m = m^2kgs^{-2}$:

وقد اختير اسم الجول نسبة للعالم الإنكليزي جيمس بريسكوت جول.

ويعبّر عن العمل في جملة الوحدات CGS بالدينة.سنتمتر (*dyne cm*) ، وتدعى هذهالوحدة بالأرغة erg وبما أن $1\ \mathrm{N} = 10^5$ dynes و $1\ m = 10^2\ cm$ فإنه يكون لدينا: $1J = 10^7 ergs$.

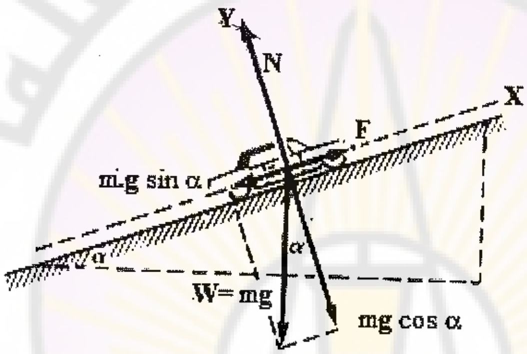
ينبغي تبعاً للتعريف (8.9) أن يعبّر عن الاستطاعة بشكل نسبة بين وحدة العمل و وحدة الزمن ففي الجملة الدولية يعبر عن الاستطاعة بالجول في الثانية، وهذه الوحدة **تدعى** الواط Watt ويرمز لها W فالواط: هو استطاعة آلة تقوم بعمل بمعدل جول في الثانيـــة، وبما أن ($J = m^2.kg.s^{-2}$) فإن $W = J.s^{-1} = m^2.kg.s^{-3}$ وقد اختير اسم الواط نسبة للمهندس الإنكليزي جيمس واط الذي طور الآلة البخارية، وتستعمل عادة مضاعفات للواط الكيلو واط (kW) والميغاواط (MW)، وهناك وحدة أخرى للاستطاعة تدعى الحصان البخاري اختصاراً hp الذي يساوي تقريباً 736W. أما الكيلو واط الساعي فهو وحدة

أخرى للتعبير عن العمل وهو يساوي العمل، الذي تنجزه خلال ساعة آلة استطاعتها كيلو واط واحد لدينا إذن:

$$1kW\,hr = (10^3 W)\,(3.6\times10^3 s) = 3.6\times10^6\ J$$

مسألة محلولة 2:

تصعد سيارة كتلتها 1200 kg طريقاً طويلة مائلة 5^o بسرعة ثابتة مقدارها $36\ kmhr^{-1}$ والمطلوب: حساب العمل الذي يقوم به المحرك في 5 دقائق، واستطاعة هذا المحرك مع إهمال كل الاحتكاكات.



الشكل (8-8)

الحل:

تتم حركة السيارة على طول الطريق بفضل القوة F التي يؤثر بها المحرك والقوة $W\sin\alpha$ العائدة إلى ثقل السيارة (الشكل 8-8) يمكننا أن نكتب مستخدمين العلاقة:

$$W = mg$$

$$F - mg\sin\alpha = ma$$

وحيث إن الحركة منتظمة إذن: $a = 0$ وبالتالي:

$$F = mg\sin\alpha = 1.023\times10^3\,N$$

وسرعة السيارة هي:

$$v = 36\,kmhr^{-1} = 36(10^3 m)(3.6\times10^3 s)^{-1} = 10ms^{-1}$$

وفي خمس دقائق (أو 300 s) تنتقل مسافة:

$$s = (10\ ms^{-1})\ (300\ s) = 3\times10^{5}\, m$$

وإذا استخدمنا العلاقة (8,6) فإن العمل الذي يقوم به المحرك هو:

$$W = F.s = (1.023\times10^{3}\ N)\ (3\times10^{3}\ m) = 3.069\times10^{6}\ J$$

الاستطاعة الوسطية يمكن أن تحسب بطريقتين مختلفتين، يمكننا أن نقول أولاً:

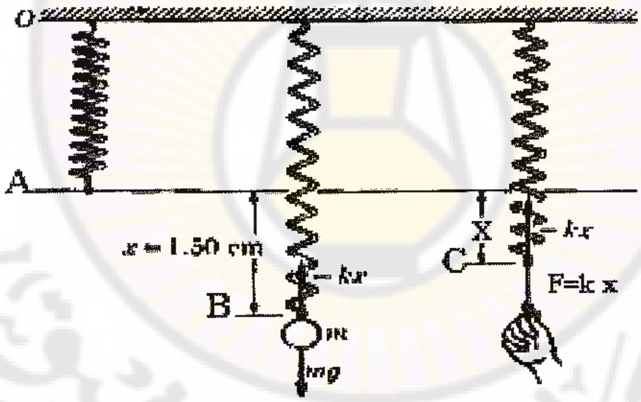
$$P = \frac{W}{t} = \frac{3.069\times10^{6}}{3\times10^{2}} = 1.023\times10^{4}W$$

ويمكننا أن نقول أيضاً إن:

$$P = F.v = (1.023\times10^{3}\ N)\ (10\ ms^{-1}) = 1.023\times10^{4}\ W$$

مسألة محلولة 3:

احسب العمل اللازم لشد النابض الممثّل على الشكل(9- 8) لمسافة 2 cm دون تسارع. مع العلم أنه حين نعلق كتلة 4 kg بالنابض، فإن طوله يزداد بمقدار 1.50 cm .



الشكل (9-8) العمل المبذول لدى شد النابض.

الحل:

حين لا يكون أي جسم معلقاً بالنابض، فإن طول النابض هو من O حتى المستوى الأفقي A وقد تأكدنا تجريبياً أنه لكي نشد نابضاً لمسافة صغيرة x من دون تسارع تلزم قوة تتناسب مع المسافة أي:

$$F = k.x$$

فإذا شد النابض من دون تسارع، فإنه يولد قوة مساوية ومعاكسة وهذا هو مبدأ الميزان ذي النابض أو الربيعة المستعملة كثيراً لقياس القوى، ولكي نعين ثابتة التناسب k فإننا نستفيد من الحقيقة القائلة إن النابض يمتط بمقدار: $x = 1.50\,cm = 1.50 \times 10^{-2}\,m$ عندما تؤثر عليه القوة العائدة إلى ثقل الجسم.

إن القوة F في هذه الحالة هي الثقل $mg = 39.2\,N$ وبالتالي إذا جعلنا $mg = k.x$ فإننا نحصل على

$$k = \frac{39.2\,N}{1.50 \times 10^{-2}\,m} = 2.61 \times 10^{3}\,N.m^{-1}$$

فلكي نشد النابض مسافة x، من دون تسارع نطبق الآن قوة $F = k.x$.يمكن فعل ذلك بشد حبل بالنابض ببطء. إن القوة تزداد حتماً بشكل منتظم كلما ازدادت x ولكي نجد العمل المنجز يجب أن نستعمل العلاقة (8.5) التي تعطي:

$$W = \int_0^{z} F\,.\,dx = \int_0^{x} k\,.x\,dx = \tfrac{1}{2}k\,x^2$$

وهو العمل المنجز من أجل انتقال ما x. وبإدخال القيم العددية المعطية لكل من x و k نحصل على العمل اللازم لشد النابض مسافة 2cm أي: $W = 5.22 \times 10^{-1}\,J$

مسألة محلولة 4:

تؤثر قوة $F = 6.t$ N على جسيم كتلته 2 kg فإذا كان الجسيم ساكناً في البداية، أوجد العمل الذي تقوم به القوة خلال الثانيتين الأوليتين.

الحل:

في المثال السابق كان من السهل حساب العمل؛ لأننا كنا نعرف القيمة بدلالة الموضع ($F = k.\,x$) أما في هذا المثال فعلى العكس، نحن لا نعرف القوة إلا بدلالة الزمن ($F = 6t$) لا نستطيع إذن، أن نحسب مباشرة العمل بواسطة التكامل $W = \int F.dx$ إنما ينبغي علينا أولاً أن نجد الانتقال بدلالة الزمن، وذلك باستخدام معادلة الحركة $F = m\,.a$ إذن:

$$a = F / m = 3t\ m.s^{-2}$$

وإذا استعملنا العلاقة (5.6) مع $v_0 = 0$ لأن الجسيم كان ساكناً في البداية أمكننا أن نكتب:

$$v = \int_0^t (3t)\, dt = 1.5t^2 \quad m.s^{-1}$$

فإذا استعملنا الآن العلاقة (5.3) مع $x_0 = 0$ ووضعنا مبدأ الإحداثيات في نقطة البدء فإننا نحصل على:

$$x = \int_0^t (1.5t^2)\, dt = 0.5t^3\ m$$

بمجرد أن حصلنا على الموضع x بدلالة الزمن t، يمكن أن نتابع الحل بطريقتين مختلفتين:

1- نحل المعادلة السابقة بالنسبة إلى المتحول t فنحصل على:

$$t = (x / 0.5)^{1/3} = 1.260 x^{1/3}$$

والقوة تكون عندئذ:

$$F = 6t = 7.560\ x^{1/3}\ N$$

فإذا استخدمنا العلاقة (8.5) نجد:

$$W = \int_0^x (7.650 x^{1/3})\, dx = 5.670\ x^{4/3}$$

عندما $t = 2s$ يكون:

$$x = 0.5(2)^3 = 4\,m$$

$$W = 36.0\ J$$

2- يمكننا كذلك أن نتابع الحل بطريقة أخرى: من $x = 0.5t^3$ لدينا $dx = 1.5t^2 dt$ وباستعمال تعبير القوة بدلالة الزمن $F = 6t$ يمكننا أن نكتب:

$$W = \int_0^t (6t)(1.5t^2 dt) = 2.25t^4\ J$$

فإذا جعلنا $t = 2s$ نجد $W = 36.0\ J$ مما يتفق مع النتيجة السابقة.

8.5 الطاقة الحركية:

عندما يخضع جسيم مادي كتلته m لتأثير قوة أو جملة من القوى الثابتة، فإنه يكتسب تسارعاً ثابتاً $\vec{a}$ وتكون حركته متسارعة بانتظام. ولنفترض أن حركته تتم بتأثير

محصلة القوى وفق المحور X. واستناداً إلى معادلات الحركة المتسارعة بانتظام نستطيع أن نكتب :

$$a = \frac{v - v_o}{t}$$

وكذلك:

$$x = \frac{v + v_o}{2} t \qquad (8.10)$$

وبما أنه في اللحظة $t = o$ يكون الجسيم في الوضع $x_o = o$ فإن العمل الذي تقوم به محصلة القوى لنقل الجسيم مسافة x استناداً للمعادلة (8.6) هو:

$$W = F . x \qquad (8.11)$$

وباستخدام قانون نيوتن الثاني نستطيع التعبير عن المعادلة (8.11) بالشكل:

$$W = m.a.x$$

$$W = m.\left(\frac{v - v_o}{t}\right).\left(\frac{v + v_o}{2}\right) t \qquad (8.12)$$

$$W = \frac{1}{2} m.(v^2 - v_o^2) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_o^2$$

إن المقدار الذي يمثل نصف جداء كتلة الجسيم في مربع سرعته ندعوه بالطاقة الحركية للجسيم، ونعبّر عنه رياضياً بالشكل:

$$E_k = \frac{1}{2} m.v^2 \qquad (8.13)$$

وبالتالي نستطيع التعبير عن المعادلة (8.12) كما يلي :

العمل الذي تقوم به محصلة جملة من القوى فاعلة في جسيم يساوي إلى تغير الطاقة الحركية لهذا الجسيم .

من جهة ثانية يمكن التوصل إلى النتيجة السابقة المعادلة (8.12) بشكل آخر، إذا كانت القوة $\vec{F}$ تابعة للموضع، وباستخدام الفرض السابق بأن الحركة تتم وفق المحور الإحداثي x فإن العمل الذي تقوم به القوة المطبقة على الجسيم يعطى وفقاً للمعادلة (8.5) بالشكل :

$$W = \int_{x_o}^{x} F \, . dx \tag{8.14}$$

وباستخدام قانون نيوتن الثاني بعد وضع قيمة شعاع التسارع كما يلي :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \, . \, \frac{dx}{dt} = v \, \frac{dv}{dx} \tag{8.15}$$

بوضع المعادلة (8.15) في (8.14) نجد :

$$W = \int_{x_o}^{x} m \, v \frac{dv}{dx} \, dx = \int_{v_o}^{v} m \, v dv = \frac{1}{2} \, mv^2 - \frac{1}{2} mv_o^2 \tag{8.16}$$

والمعادلة الأخيرة مطابقة تماماً للمعادلة (8.12) .

لذلك نستطيع تعميم النتيجة السابقة على أية قوة تفعل في جسيم ما، بأن العمل الذي تقوم به هذه القوة يساوي إلى تغير الطاقة الحركية لهذا الجسيم. والذي نعبر عنه رياضياً كما يلي:

$$W = \Delta E_k \tag{8.17}$$

وهو ما يعبّر عن نظرية الطاقة الحركية والعمل.

نظراً لضرورة تناسق الوحدات بين طرفي المعادلة (8.17) فقد وجدنا أن العمل يقدر بوحدة هي الجول في الجملة الدولية، فما هي وحدة قياس الطاقة الحركية؟ فكما وجدنا من المعادلة (8.14) أن الطاقة الحركية هي جداء الكتلة في مربع السرعة لذلك فإن واحدة قياس الطاقة الحركية في الجملة الدولية هي:

$$E_k = \frac{1}{2} \, mv^2 = kg \, (\frac{m}{s})^2 = kg \, \frac{m}{s^2} \, . \, m = N \, . m = J$$

أي إن وحدة قياس الطاقة الحركية هي الجول أيضاً في الجملة الدولية، وبالتالي فإن المعادلة (8.17) صحيحة.

المعادلة (8.13) تعطي قيمة الطاقة الحركية لجسيم مادي كتلته m. أما في حالة جملة مؤلفة من مجموعة جسيمات فإننا نستطيع تعميم المعادلة (8.13) بحيث تصبح كما يلي:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \, m_i \, v_i^2 \tag{8.18}$$

أي إن الطاقة الحركية لجملة من الجسيمات المادية تساوي مجموع الطاقات الحركية لجميع جسيمات هذه الجملة بشكل منفصل.

من المعادلتين (8.13) و(8.18) نجد أن الطاقة الحركية لا تتعلق بجهة السرعة للجسيم أو الجسيمات. وهو ما نعبر عنه بأن العمل يساوي إلى تغير الطاقة الحركية سواء أكانت القوة ثابتة أم متغيرة ومستقل عن شكل المسار.

مسألة محلولة 5:

احسب مباشرة باستخدام معطيات المسألة الرابعة الطاقة الحركية التي يكتسبها الجسيم خلال الزمن t.

الحل:

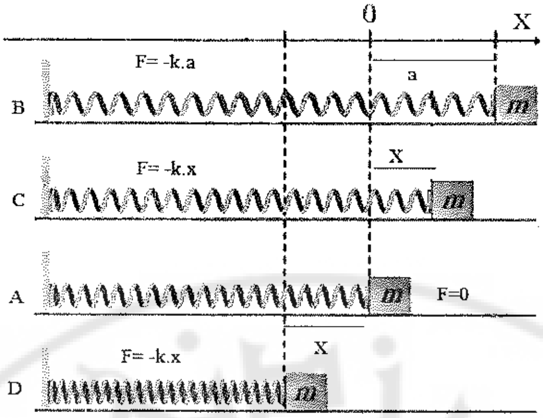
لنتذكر من حل المسألة الرابعة أن السرعة في اللحظة t هي: $v = 1.5t^2 ms^{-1}$ والطاقة الحركية للجسيم هي إذن:

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(2\,kg)\,(1.5t^2\ ms^{-1})^2 = 2.25t^4\ J$$

إن طاقة الجسيم الحركية الابتدائية صفر في اللحظة $t = 0$ وبالتالي فإن الطاقة الحركية التي يكتسبها الجسيم خلال الزمن t هي $E_k - E_{k,0} = 2.25t^4 J$ وهذا يساوي بالضبط إلى العمل w الذي ينجز على الجسيم وذلك وفق النتيجة الثانية للمسألة 4 .

مسألة محلولة 6:

يوضع نابض (المثال 8.3) في وضع أفقي، كما يبيّن الشكل (8-10) ، تُزاح الكتلة m نحو اليمين مسافة a ثم تترك. احسب طاقتها الحركية حين تكون على مسافة x من واضع التوازن.



الشكل (8-10)

الحل:

حسب ما شرحناه في المسألة الثالثة يؤثر النابض بقوة $F= -k.x$ على الكتلة m حين تكون على مسافة (a) من وضع التوازن. (إشارة الناقص تدل على أن القوة التي يولدها النابض تتجه نحو اليسار حين يزاح الجسم نحو اليمين) في وضع التوازن يكون $x = 0$ وإذن $F = 0$ وفي الوضع (b) الذي ستترك فيه الكتلة $x = a$ و $F = - k.a$ والسرعة صفر $(v_0 = 0)$؛ مما يؤدي إلى طاقية حركية ابتدائية مساوية للصفر لنسم v السرعة في موضع وسطي x. إذا استخدمنا العلاقة (8.11) نجد:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \int_a^x F.dx = \int_a^x (-k\,x)\,dx = \tfrac{1}{2}k\,(a^2 - x^2)$$

أو

$$v = \sqrt{(k/m)(a^2 - x^2)}$$

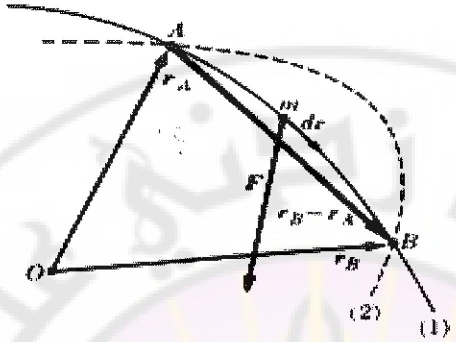
وهذا ما يعطي سرعة الجسيم بدلالة الموضع.

8.6 عمل قوة ثابتة في المقدار والمنحى:

لنعتبر جسيماً m يتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F}$ ثابتة في المقدار والمنحى. الشكل (8-11). يمكن أن تكون هناك قوة أخرى مؤثرة على الجسيم، ثابتة أو غير ثابتة، لكننا لا

نهتم بها حالياً. حين ينتقل الجسيم من A إلى B حسب المسار (1) فإن عمل القوة $\vec{F}$ هو :

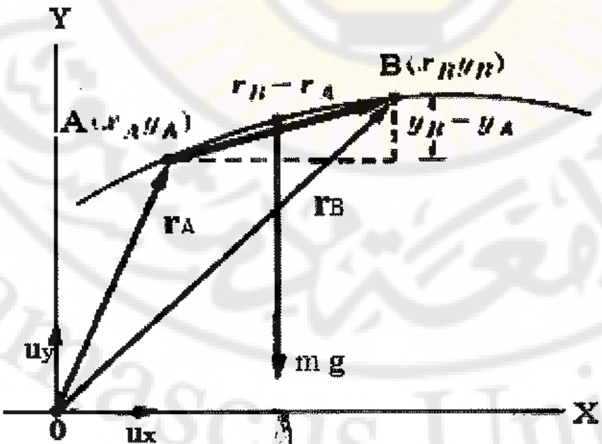
$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}.(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \qquad (8.19)$$



الشكل (8-11) العمل الذي تنجزه قوة ثابتة في المقدار والمنحنى.

والنتيجة المهمة التي تنتج من هذه العلاقة هي أن العمل في هذه الحالة مستقل عن الطريق الذي يصل بين النقطتين B وA فمثلاً إذا سلك الجسيم الطريق (2) الذي يصل أيضاً بين AوB بدلالة من الطريق (1) فإن العمل يبقى نفسه؛ لأن الفرق الشعاعي $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$ هو ذاته لنلاحظ أنه يمكن كتابة المعادلة (8.19) بالشكل:

$$W = \vec{F}.\vec{r}_B - \vec{F}.\vec{r}_A \qquad (8.20)$$



الشكل (8-12) العمل الذي تقوم به قوة الثقالة.

وأن العمل يساوي إذن إلى الفرق بين قيمتي المقدار $\vec{F}.\vec{r}$ في طرفي الطريق. وإننا نجد تطبيقاً مهماً للمعادلة (8.19) في حالة العمل الذي تقوم به قوة الثقالة (الشكل 12-8) ففي هذه الحالة:

$$\vec{F} = m.\vec{g} = -m.g\,\vec{u}_y$$

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\,\vec{u}_x + (y_B - y_A)\,\vec{u}_y \qquad (8.21)$$

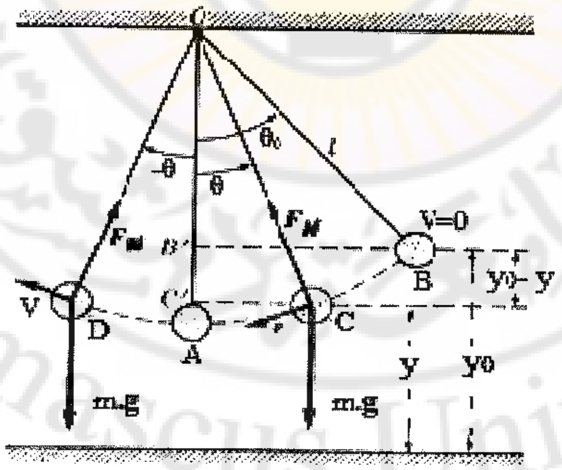
فإذا بدّلنا (8.21) في المعادلة (8.19) بالاستفادة من العلاقة (3.19) من أجل الجداء السلّمي نجد:

$$W = -m.g\,(y_B - y_A) = m.g\,y_A - m.g\,y_B \qquad (8.22)$$

في المعادلة (8.21) ليس هناك بالطبع أي شيء يدل على المسار، والعمل لا يتعلق إلا بالفرق $y_B - y_A$ بين ارتفاعي النهايتين.

مسألة محلولة 7:

كتلة مقدارها 2kg مربوطة بخيط طوله 1m تزاح عن الشاقول بزاوية 30° ثم تترك. أوجد سرعتها عندما يصنع الخيط زاوية 10° مع الشاقول، من الجهة نفسها ومن الجهة المقابلة.



الشكل (13- 8) علاقات الطاقة في حركة النواس.

الحل:

الكتلة المعلقة بالخيط تدعى عادة بالنواس. حين تكون الكتلة مزاحة بزاوية θ_0 ثم تترك (الشكل 13-8) تكون سرعتها الابتدائية صفراً وهي ترسم، تحت تأثير ثقلها $m.\vec{g}$ وتوتر الخيط $\vec{F}_N$ قوساً من دائرة وهي تقترب من النقطة A. بعد أن تجتاز A تتحرك نحو اليسار حتى تبلغ موضعاً مناظراً. وابتداءً من هنا تستمر الحركة جيئة وذهاباً، وهي حركة النواس الاهتزازية المعروفة.

للحصول على v باستخدام نظرية الطاقة الحركية العلاقة (8.11) ينبغي علينا أن نحسب أولاً العمل الذي تقوم به القوى المؤثرة على الجسيم. إن القوة الجاذبة $\vec{F}_N$ لا تعمل لأنها في كل نقطة عمودية على السرعة، أما عمل قوة الثقالة mg فيمكن أن يحسب بواسطة العلاقة (8.16) أي:

$$W = mg\, y_0 - mg\, y = mg\,(y_0 - y)$$

إذا قسمنا الآن الارتفاعات ابتداء من مستو أفقي اختياري نحصل على:

$$y_0 - y = B'C' = OC' - OB'$$

لكن:

$$OC' = l\cos\theta \qquad OB' = l\cos\theta_0$$

لدينا إذن:

$$y_0 - y = l\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$W = mg\,(y_0 - y) = mg\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

إن الطاقة الحركية في نقطة C هي: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ وفي B هي صفر باستخدام العلاقة (8.13) نحصل إذن على:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

لنلاحظ أن هذه النتيجة مستقلة عن الكتلة. وإذا أدخلنا القيم العددية نجد:

$$v = \sqrt{2(9.8\, ms^{-2})\ (1m)\ (\cos 10^{\circ} - \cos 30^{\circ})} = 1.526\ ms^{-1}$$

أما من أجل الوضع المناظر D الذي يشكل زاوية ?10- مع الشاقول فنحصل على النتيجة نفسها.

8.7 الطاقة الكامنة:

ليست المسألة التي عالجناها في الفقرة السابقة سوى مثال على صنف واسع، ومهم من القوى التي ندعوها بالقوى التي تشتق من كمون (أو القوى المحافظة) وذلك لأسباب سيتم شرحها في الفقرات التالية من هذا الفصل.

تشتق القوة من كمون إذا كانت الطريقة التي تتعلق فيها بشعاع والموضع r أو بالإحداثيات x و y و z للجسيم هي بحيث إن العمل W يمكن دوما أن يعبر عنه كحاصل طرح قيمتين للمقدار نفسه $E_p(x,y,z)$ مأخوذتين في نقطة البداية ونقطة النهاية والمقدار $E_p(x,y,z)$ يسمى الطاقة الكامنة وهو تابع لإحداثيات الجسيم فإذا كانت $\vec{F}$ قوة تشتق من كمون فإن:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B} \qquad (8.23)$$

لنلاحظ أننا كتبنا $E_{p,A} - E_{p,B}$ وليس $E_{p,B} - E_{p,A}$ أي أن العمل المنجز يساوي إلى E_p في نقطة البداية ناقصاً E_p في نقطة الوصول وبعبارة أخرى: إن الطاقة الكامنة هي تابع للإحداثيات بحيث إن الفرق بين القيمتين اللتين تأخذهما في البداية وفي النهاية يكون مساوياً إلى العمل المقدم للجسيم لكي ينتقل من موضعه البدائي إلى موضعه النهائي.

وإذا أخذنا الدقة الكاملة فإن الطاقة الكامنة E_p يجب أن تعتمد على إحداثيات الجسيم كما يجب أن تعتمد كذلك على إحداثيات كل الجسيمات الأخرى في العالم التي لها معها تأثيرات متبادلة إلا أننا، كما سبق وذكرنا في الفصل السابع لدى معالجة ديناميك الجسيم، نفترض أن بقية العالم ثابتة على العموم وبالتالي لا تدخل في E_p سوى إحداثيات الجسيم المعتبر.

ينبغي على الطالب أن يدرك لدى مقارنة العلاقة (8.23) بالعلاقة (8.14) التي تم الحصول عليها من أجل الطاقة الحركية، أن العلاقة (8.14) صحيحة بشكل عام مهما كانت القوة $\vec{F}$. فمن الصحيح دوماً أن $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ بينما أن شكل التابع $E_p(x,y,z)$ يعتمد على طبيعة القوة $\vec{F}$، وأن الشرط المفروض بواسطة العلاقة (8.23) لا يمكن أن تحققه أية قوة كانت. فقط تلك القوى التي تحققه تدعى بالقوة التي تشتق من كمون، مثلاً بمقارنة المعادلة (8.23) مع المعادلة (8.22) نلاحظ أن قوة الثقالة تشتق من كمون وأن الطاقة الكامنة للثقالة هي:

$$E_p = mg\,.\,y \qquad (8.24)$$

و بالشكل نفسه، حسب المعادلة (8.21) نرى أن الطاقة الكامنة المقابلة لقوة ثابتة هي:

$$E_p = -\vec{F}\,.\,\vec{r} \qquad (8.25)$$

إن الطاقة الكامنة معرّفة دوماً بحدود ثابتة اختيارية؛ لأننا إذا كتبنا مثلاً (mg y + C) بدلاً من العلاقة (8.24) فإن العلاقة (8.22) تبقى ذاتها لأن الثابتة C التي تظهر في الحدين تختصر. وبإمكاننا، بسبب هذه الثابتة الاختيارية أن نحدد الصفر، أو سوية المبدأ للطاقة الكامنة في المكان الذي يناسبنا فعلى سبيل المثال، في مسائل سقوط الأجسام يعتبر سطح الأرض هو سوية المبدأ الأكثر ملائمة، وتؤخذ قيمة الطاقة الكامنة إذن مساوية للصفر على سطح الأرض أما من أجل القمر الطبيعي أو الاصطناعي، فيعين صفر الطاقة الكامنة عادة في اللانهاية.

ملاحظة: "إن العمل الذي تقوم به قوى تشتق من كمون مستقل عن المسار".

يمكننا أن نرى هذا من معادلة التعريف (8.17) لأنه مهما كان الطريق الواصل بين النقطتين B.A فإن الفرق $E_{p,A} - E_{p,B}$ يبقى نفسه لأنه لا يعتمد إلا على إحداثيات A و B. وبصورة خاصة إذا كان المسار مغلقاً (الشكل 8-14) بحيث إن نقطة النهاية تنطبق على نقطة البداية (أي أن A و B هما نقطة واحدة) فإن $E_{p,A} = E_{p,B}$، والعمل صفر. وهذا يعني أنه خلال جزء من الطريق يكون العمل موجباً وخلال الجزء الآخر يكون سالباً ومساوياً

بالقيمة المطلقة، مما يعطي كمجموع نتيجة مساوية الصفر، حين يكون المسار مغلقاً فإن التكامل الذي في العلاقة (8.23) يكتب بالشكل $\oint$. والدائرة الصغيرة على إشارة التكامل تدل على أن المّسار مغلق. إذن فمن أجل القوى التي تشق من كمون:

$$W_0 = \oint F.dr = 0 \tag{8.26}$$

الشكل (8-14) العمل الذي تقوم به قوة تشتق من كمون على طول طريق مغلق هو صفر.

وبالعكس، يمكن البرهان على أن الشرط المعطى بالعلاقة (8.26) يمكن أن يتخذ كتعريف للقوة التي تشتق من كمون وبعبارة أخرى إذا كانت القوة $\vec{F}$ تحقق الشرط (8.26) من أجل مسار مغلق ما، فيمكن عندئذ البر هان على أن العلاقة (8.23) صحيحة.

لكي تتحقق العلاقة (8.23) من الضروري أن يكون:

$$\vec{F}.d\vec{r} = -dE_p \tag{8.27}$$

لأنه عندئذ:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -\int_A^B dE_p = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = E_{p,A} - E_{p,B}$$

مما يتفق مع العلاقة (8.23). لنلاحظ أن الإشارة ناقص التي تظهر في العلاقة (8.27) ضرورية إذا كنا نريد الحصول على $E_{p,A} - E_{p,B}$ بدلاً من $E_{p,B} - E_{p,A}$

بما أن $F.dr = F.ds.\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين القوة والانتقال فإننا نستطيع أن نكتب، بدلاً من العلاقة (8.27):

$$F\cos\theta = -\frac{dE_p}{ds} \tag{8.28}$$

إلا أن $F\cos\theta$ هي، كما سبق وشرحنا بصدد الشكل (1- 8)، مركبة القوة حسب اتجاه الانتقال ds إذن، إذا كنا نعرف $E_p(x,y,z)$ فيمكننا الحصول على مركبة F حسب أي منحنى، وذلك بحساب المقدار $-dE_p/ds$ والذي هو المشتق مسبوقاً بإشارة ناقص لـ E_p بالنسبة للمسافة مقاسة حسب ذلك المنحنى.

وهو ما ندعوه بالمشتق حسب المنحنى (أو المشتق المتجه) لـ E_p. وحين يكون شعاعاً بحيث إن مركبته حسب منحنى ما تساوي المشتق حسب ذلك المنحنى لتابع، فإن ذلك الشعاع يدعى تدرج التابع، ونقول إذن إن $\vec{F}$ هو تدرّج E_p مسبوقاً بإشارة ناقص ونكتب العلاقة (8.28) بالشكل العام:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$$

حيث $(grad)$ تعني تدرّج وإذا كنا نهتم بالمركبات المتعامدة لـ F على المحاور OX و OY و OZ فإن: $F\cos\theta$ في المعادلة (8.28) تصبح F_x و F_y و F_z، ويصبح الانتقال ds كذلك dx و dy و dz بحيث يكون:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \tag{8.29}$$

أو

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z \tag{8.30}$$

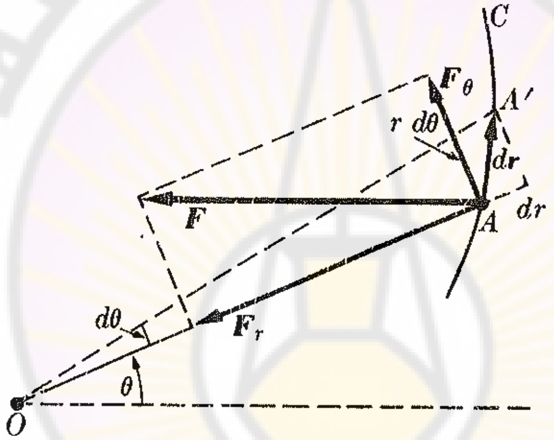
لنلاحظ أننا عندما نكتب العلاقة (8.30) فإننا نستعمل رمز المشتق الجزئي لأول مرة في هذا الكتاب وهذا ضروري باعتبار أن الطاقة الكامنة $E_p(x,y,z)$ هي بشكل عام تابع لثلاثة متحولات x, y, z. إلا أنه عندما ينتقل الجسيم مسافة dx على المحور X مثلاً فإن الإحداثيين y و z يبقيان ثابتين وأيضاً بدلاً من كتابة dE_p/dx ينبغي أن نستعمل الاصطلاح $\partial E_p/\partial x$ الذي اتخذه الرياضيون في هذه الحالة.

أما إذا كانت الحركة مستوية وكنا نستعمل الاحداثيين r و θ (الشكل 15-8) فإن الانتقال على طول شعاع نصف القطر r هو dr والانتقال العمودي عليه هو: $r.d\theta$ إن مركبتي القوة القطرية والعمودية عليها هما إذن :

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta} \qquad (8.31)$$

لنلاحظ أننا نستعمل من جديد مفهوم المشتق الجزئي.



الشكل (15-8)

هناك حالة مهمة تكون فيها الطاقة الكامنة E_p تابعة للمسافة r وغير تابعة للزاوية θ، أو بعبارة أخرى لدينا $E_p(r)$ بدلا من $E_p(r_1,\theta)$. عندئذ يكون لدينا $\partial E_p / \partial\theta = 0$ وحسب العلاقة (8.31) يكون $F_\theta = 0$ فالقوة في هذه الحالة ليس لها مركبة عرضية؛ وإنما فقط المركبة القطرية، بحيث إن القوة مركزية، وأن حاملها يمر، دائماً بالمركز .وبالعكس، إذا كانت القوة مركزية فليست هناك سوى المركبة القطرية $F_\theta = 0$ مما يستدعي كون $\partial E_p / \partial\theta = 0$ وبالتالي أن E_p مستقلة عن θ والقوة المركزية بالتالي لا تعتمد على بعد الجسيم عن المركز. ويمكننا صياغة هذه النتيجة المهمة بقولنا: "إن الطاقة الكامنة المرتبطة بقوة مركزية لا تعتمد إلا بعد الجسيم عن مركز القوة والعكس صحيح".

إذا لم تكن القوى مركزية فهناك عزم بالنسبة للنقطة O معطي بالعلاقة $\tau = F_\theta . r$ حيث إن القوة القطرية لا تسهم في العزم. فإذا استعملنا العلاقة الثانية من (8.31) فإننا نجد أن العزم بالنسبة للنقطة O هو:

$$\tau = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta} \qquad (8.32)$$

وهذه عبارة عامة تعطي العزم باتجاه عمودي على المستوى الذي تقاس فيه الزاوية θ وحيث إن العزم يولد تغيراً مقابلاً في عزم كمية الحركة فإننا نستنتج أنه:

عندما تعتمد الطاقة الكامنة على زاوية، فهناك عزم مطبق على الجملة يولد تغيراً في عزم كمية الحركة في اتجاه عمودي على مستوى الزاوية.

مسألة محلولة 8:

احسب الطاقة الكامنة المرتبطة بالقوتين المركزيتين التاليتين:

$$F = k\,r \quad \text{(a)}$$
$$F = k/r^2 \quad \text{(b)}$$

في كلتا الحالتين إذا كانت k سالبة فالقوة جاذبة، وإن كانت k موجبة فالقوة دافعة.

الحل:

باستخدام العلاقة (8.31) من أجل الحالة (a):

$$dE_p = -k\,r\,dr \quad \text{أو} \quad F = -\partial E_p / \partial r = kr$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$E_p = \int -k\,r\,dr = -\tfrac{1}{2} k\,r^2 + C$$

إن ثابت التكامل C يعين بإعطاء قيمة لـ E_p من أجل وضع معين. في هذه الحالة جرت العادة أن

نجعل $E_p = 0$ من أجل $r = 0$ بحيث تكون: $C = 0$ و $E_p = -\tfrac{1}{2} k\,r^2$

وحيث أن $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ يمكننا أيضا أن نكتب:

$$E_p = -\tfrac{1}{2} k\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

وباستخدام العلاقة (8.29) نجد أن المركبات الديكارتية للقوة هي:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = k\,y \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = k\,z \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = k\,x$$

وهذه هي النتيجة المتوقعة لأن القوة المركزية $F = k\,r$ نكتب بشكل شعاعي كما يلي:

$$\vec{F} = k\,\vec{r} = k(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z)$$

أما من أجل الحالة (b) فلدينا: $F = -\partial E_p / \partial r = k / r^2$

أو $dE_p = -k(dr / r^2)$ وبإجراء التكامل نحصل على :

$$E_p = \int -k\,\frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r} + C$$

وقد جرت العادة من أجل الطاقات المتناسبة مع $1/r$ أن نعين C بجعل $E_P = 0$ من أجل $r = \infty$ بحيث تكون: $C = 0$ و $E_P = k / r$.

8.8 انحفاظ طاقة جسيم:

حين تكون القوة المؤثرة على جسيم تشتق من كمون نستطيع من العلاقة (8.23) والعلاقة العامة (8.18) أن نستنتج أن: $E_{k.B} - E_{k.A} = E_{P.A} - E_{P.B}$

أو بالشكل:

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_P)_A \tag{8.33}$$

تدعى الكمية $E_k + E_P$ الطاقة الكلية للجسيم ويرمز لها بالحرف E؛ وبعبارة أخرى إن الطاقة الكلية لجسيم تساوي مجموع طاقته الحركية وطاقته الكامنة، أو:

$$E = E_k + E_p = \tfrac{1}{2} m v^2 + E_P(x, y, z) \tag{8.34}$$

إن العلاقة (8.33) تدل على أنه:" إذا كانت القوى تشتق من كمون فإن الطاقة الكلية للجسيم تبقى ثابتة ". وذلك لأن الحالتين المشار إليهما بـ A و B اختياريان. يمكننا إذن أن نكتب من أجل أي وضعية للجسيم:

$$E = E_k + E_p = const. \tag{8.35}$$

وبتعبير آخر: إن طاقة الجسيم محفوظة، وهذا هو السبب في أن القوى التي تشتق من كمون تدعى القوى المحافظة، مثلا في حالة السقوط الحر لجسيم وجدنا العلاقة (8.18) أن:

$$E_P = mg \, . \, y$$

وانحفاظ الطاقة يعطي:

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 + mg \; y = const \qquad (8.36)$$

فإذا كان الجسيم في الأصل على الارتفاع y_0، وكانت سرعته البدائية صفراً، فإن طاقته الكلية هي: $mg \, y_0$ و لدينا :

$$\tfrac{1}{2} m v^2 + mg \; y = mg \, . \, y_0$$

بإصلاح العلاقة نجد:

$$v^2 = 2g\,(y_0 - y) = 2g\,h$$

$$v = \sqrt{2g\,h} \qquad (8.37)$$

حيث: $h = y_0 - y$ ارتفاع السقوط.

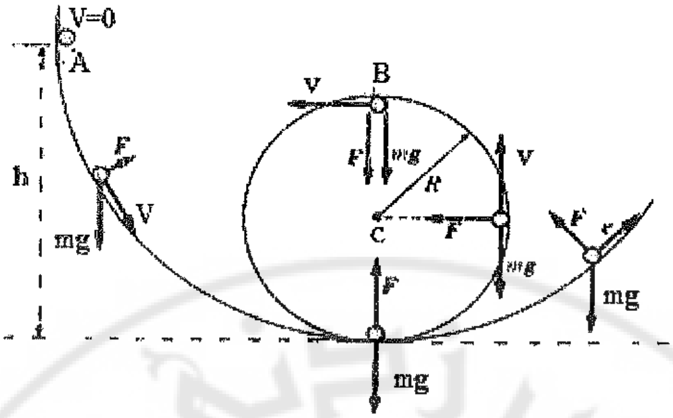
إن هذه النتيجة هي العلاقة التي نعرفها جيداً عن السرعة المكتسبة خلال السقوط الحر من الارتفاع h. ينبغي علينا أن نلاحظ أن العلاقة (8.36) ليست مقتصرة على الحركة الشاقولية، فهي صحيحة كذلك من أجل حركة قذيفة منطلقة بزاوية مع الشاقول.

يجب أن نلاحظ أنه من أجل طاقة كلية معطاة، فإن قيمة السرعة (مهما كان منحى الحركة) في نقطة معينة تتعين من العلاقة (8.35) . وهذا واضح بشكل خاص من حالة الحركة تحت تأثير قوة الثقالة كما تبين ذلك العلاقة.

مسألة محلولة 9:

عيّن أصغر ارتفاع والذي يجب أن تنطلق منه كرة لكي تُتم دورة، كما هو موضح في الشكل (8-16) نفترض أن الكرة تنزلق من دون تدحرج، ومن دون احتكاك.

الحل:



الشكل (16-8)

نفترض أن الكرة تُركت في النقطة A على الارتفاع h فوق أسفل الدائرة التي في الشكل (16-8) تكتسب الكرة سرعة أثناء هبوطها وتبدأ بفقدان شيء منها في أثناء صعودها الدائرة، ففي نقطة من مسارها تكون القوة المؤثرة على الكرة هي الثقل mg والقوة F التي يولدها سطح المنزلق (إن القوة F تتجه نحو مركز الدائرة لأن المنزلق "يدفع" لكنه لا "يجذب"). وفي أعلى نقطة من الدائرة تكون mg و F وكلاهما متجهان نحو O وحسب العلاقة (7.28) ينبغي أن يكون لدينا:

$$F + mg = \frac{mv^2}{R}$$

حيث R نصف قطر دائرة المنزلق. وبما أن F لا يمكن أن تكون سالبة فإن السرعة الدنيا للكرة في B لكي ترسم دائرة ينبغي أن تقابل $F = 0$ أو $mg = mv^2 / R$

وهذا ما يعطي: $$v^2 = g\,R$$

إذا كانت السرعة أصغر من $\sqrt{g\,R}$ فإن فعل الثقل نحو الأسفل يكون أكبر من القوة الجاذبة اللازمة، وتنفصل الكرة عن الدائرة قبل أن تبلغ النقطة B وترسم عندئذ قطعاً مكافئاً قبل أن تسقط على الدائرة من جديد. لكي نحصل على الارتفاع h المناسب، لنلاحظ أنه في النقطة A تكون لطاقة الكلية:

$$E_A = (E_k + E_p)_A = m\,g\,h$$

حيث إن: $v = 0$.

وفي B حيث: $y = 2R$ و $v^2 = gR$ يكون:

$$E_B = (E_k + E_p)_B = \frac{1}{2}m(gR) + mg(2R) = \frac{5}{2}mgR$$

وهكذا بمساواة قيمتي E_A و E_B نحصل على $h = \frac{5}{2}R$ وهو الارتفاع الأدنى لنقطة انطلاق الكرة إذا كانت تريد إتمام الدائرة وهذه النتيجة تبقى صحيحة ما دمنا نستطيع إهمال قوى الاحتكاك أما إذا كانت الكرة تتدحرج فينبغي عندئذ استعمال الطرق المشروحة في تحريك الجسم الصلب.

8.9 الصدم:

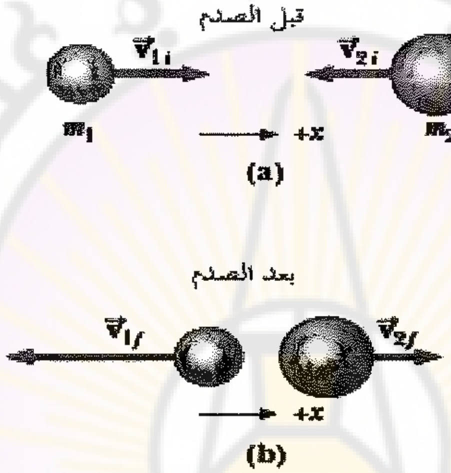
مرّ معنا، في الفصلين الخامس والسابع، أن حركة أي جسيم حر تبقى كما هي سكون أو سرعة ثابتة، ما لم تؤثر عليه قوى خارجية تكسبه تسارعاً يؤدي إلى تغيير سرعته، وبالتالي إلى تغيير كمية حركته. فإذا قذفنا كرة باتجاه جدار ثابت فإنها سوف ترتد عنه بعد أن تصطدم به، مما يعني أن الجدار قد أثر بها بقوة يمكن معرفتها وتحديدها تماماً من تحديد مقدار تغير كمية حركة الكرة. إن دراسة عملية التصادم التي تتم بين الجسيمات أو الأجسام ببعضها مهمة لمعرفة القوى المتبادلة بينها. وتتميز هذه الظاهرة بأنها بسيطة من حيث القوانين التي تتحكم بها، إلا أنها تقدم معلومات مهمة جداً عن طبيعة الأجسام وطبيعة الحركة وما يحدث نتيجة التصادم من حيث الطاقة.

إذا أخذنا كرات مصنوعة من مواد مختلفة مثل العاج والخشب والصلصال، وتركناها تسقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية على أرض ملساء وجدنا أنها ترتفع بعد اصطدامها بالأرض إلى مسافات مختلفة أكبرها لكرة العاج وأقلها للصلصال لذلك يقال إن الأجسام تختلف مرونتها، وإذا ارتدت الكرة إلى ارتفاعها الأصلي نفسه قيل إن الكرة تامة المرونة وإذا لم ترتد نهائياً لأية مسافة قيل إنها غير مرنة. وتعرف مرونة الأجسام بمعامل يسمى عامل المرونة أو معامل الارتداد e.

للأجسام التامة المرونة $e=1$ وللأجسام غير المرنة $e=0$. والأجسام جميعها التي نقابلها في الطبيعة تقع قيمة عامل مرونتها بين الحدين. أي أنه لأي جسم يكون لدينا:

$$o \leq e \leq 1$$

- لنأخذ حالة جسمين معزولين كتلتيهما m_1 , m_2 وسرعتيهما v_{1i} , v_{2i} على الترتيب قبل الصدم ويتحركان باتجاه بعضهما بحيث يلتقيان ويحدث بينهم صدماً، الشكل (8-17). فتصبح سرعة الأول v_{1f} وسرعة الثاني v_{2f}.



الشكل (8-17)

استناداً للمعادلة (8-7) يمكن أن نكتب:

$$\Delta P_1 = -\Delta P_2 \tag{8.38}$$

أو بالشكل:

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = o \tag{8.39}$$

إن المعادلة (8.39) تعني أن تغير كمية حركة الجملة يساوي الصفر، أي كمية حركة الجملة قبل الصدم تساوي إلى كمية حركة الجملة بعد الصدم (انحفاظ كمية الحركة) المعادلة (8.39) يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \tag{8.40}$$

فإذا كانت E_{pi} – تمثل الطاقة الكامنة للجملة قبل الصدم و E_{pf} - الطاقة الكامنة بعد الصدم، وفي الحالة العامة يمكن لـ E_{pf} أن تختلف عن E_{pi}. وبحسب انحفاظ الطاقة الكلية للجملة يمكن أن نكتب:

$$E_{ki} + E_{pi} = E_{kf} + E_{pf} \tag{8.41}$$

ولكن الطاقة الحركية للجملة قبل الصدم، وبعده تعطى بالمعادلات:

$$\begin{aligned} K_i &= \tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, v_{2i}^2 \\ K_f &= \tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, v_{2f}^2 \end{aligned} \tag{8.42}$$

نعرف المقدار Q المعطى بالعلاقة:

$$Q = E_{ki} + E_{kf} = E_{pi} + E_{pf} \tag{8.43}$$

بالتعويض:

$$Q = (\tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1f}^2) - (\tfrac{1}{2}\, m_2\, v_{2i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2\, v_{2f}^2) \tag{8.44}$$

بأنه الفرق بين قيمتي الطاقة الحركية للجملة قبل الصدم وبعده، أو أنه الفرق بين قيمتي الطاقة الكامنة قبل وبعد الصدم. فعندما تكون قيمة المقدار Q معدومة يعني لا يحدث تغير في الطاقة الحركية نتيجة الصدم ونعرّف الصدم في هذه الحالة بالصدم المرن. ويمكن كتابة المعادلة (8.44) بالشكل:

$$\tfrac{1}{2}\, m_2\, v_{2i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2\, v_{2f}^2 = \tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1f}^2 \tag{8.45}$$

وبالتالي نستطيع القول: إن شرط كون الصدم مرناً هو أن تحقق المعادلتين (8.40) و (8.45) معاً. وللسهولة يمكن أن نميز عند دراسة الصدم المرن حالتين.

1- الصدم المرن على خط مستقيم:

ليكن جسيمان يتحركان بالاتجاه نفسه وفق خط مستقيم، الشكل (18-8). بحسب المعادلتين (8.40) و (8.45) في الصدم المرن نكتب:

$$m_1\, \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1\, \vec{v}_{1f} + m_2\, \vec{v}_{2f} \tag{8.46}$$

$$\tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1\, v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2\, v_{2f}^2 \tag{8.47}$$

وبإصلاح المعادلتين الأخيرتين تصبح:

$$m_1 (\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{1f}) = m_2 (\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) \tag{8.48}$$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \tag{8.49}$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) (v_{2f} + v_{2i}) \tag{8.50}$$

بتقسيم المعادلة (8.50) على المعادلة (8.48) بفرض $v_{1i} \neq v_{1f}$, $v_{2i} \neq v_{2f}$ نحصل:

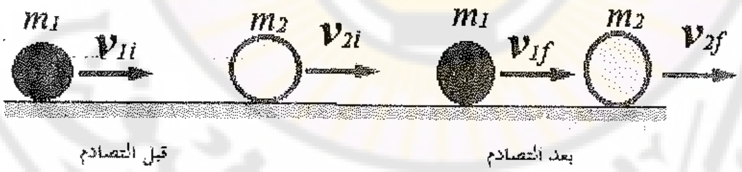
$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} \tag{8.51}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f} \tag{8.52}$$

وبحل كل من المعادلتين (8.46) و(8.47) نستطيع حساب سرعة الجسمين بعد الصدم، والتي تعطى بالمعادلتين:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \tag{8.53}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \tag{8.54}$$



الشكل (8-18)

المعادلة (8.52) تعبر عن مبدأ مهم وهو أن قيمة السرعة النسبية للجسيمين قبل الصدم، يساوي تماماً إلى السرعة النسبية للجسيمين بعد الصدم. الطرف الأيسر يمثل سرعة التقرب بين الجسيمين بينما الطرف الأيمن يمثل سرعة التباعد. يعطى معامل الارتداد في الصدم وفق خط مستقيم بالعلاقة:

$$e = \left(\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} - v_{2i}} \right) \qquad (8.55)$$

وبما أن الصدم مرن والمعادلة (8.52) محققة، فإن قيمة معامل الارتداد e تكون مساوية للواحد.

انطلاقاً من المعادلتين (8.53) و(8.54) نناقش بعض الحالات الخاصة:

1) الحالة الأولى: عندما تكون $m_2 >> m_1$ فإن المعادلتين (8.53) و (8.54) تصبح سرعة كل من الجسمين بعد الصدم:

$$v_{1f} = -v_{1i} + 2v_{2f} \quad , \quad v_{2f} = v_{2i} \qquad (8.56)$$

وبحسب الفرض تكون النسبة $m_1 / m_2 << 1$ حيث نستطيع إهمالها من العادلة مما يبين أن سرعة m_2 لا تتغير بعد الصدم. و أما إذا كانت الكتلة الثانية ساكنة قبل الصدم؛ أي $v_{2i} = o$ فإن $v_{2f} = o$ أيضاً بعد الصدم؛ وبالتالي، $v_{1f} = v_{1i}$ أي أن الجسيم الصغير يرتد بالسرعة الابتدائية نفسها. بينما يبقى الكبير ساكناً في مكانه؛ وهو ما يحدث عند اصطدام كرة بجدار ثابت.

2) الحالة الثانية عندما $m_1 >> m_2$ فإن المعادلتين (8.53) و (8.54) تصبحان:

$$v_{1f} = v_{1i} \quad , \quad v_{2f} = 2v_{1i} - v_{2i} \qquad (8.57)$$

وذلك لأن النسبة $m_2 / m_1 << 1$ حيث يمكن إهمالها في العادلة. فإذا كانت m_2 ساكنة قبل الصدم تصبح المعادلة (8.57) بالشكل: $v_{1f} = v_{1i}$, $v_{2f} = 2v_{1i}$ أي الجسيم الكبير يتتابع بالسرعة نفسها بعد الصدم، بينما الجسيم الصغير يندفع بسرعة مساوية إلى ضعف سرعة الجسيم الصادم.

3) الحالة الثالثة عندما $m_1 = m_2$ فإن معادلتي السرعة بعد الصدم تصبح:

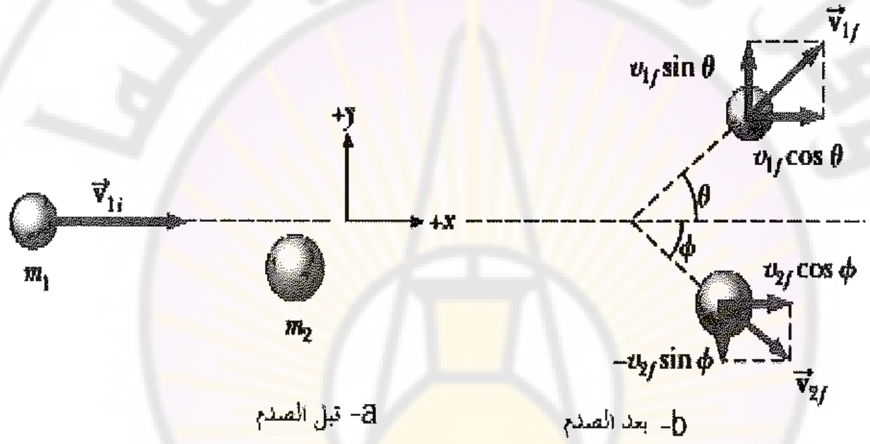
$$v_{1f} = v_{2i} \quad , v_{2f} = v_{1i} \qquad (8.58)$$

أي إن الجسيمين يتبادلان السرعة نتيجة للتصادم. وعندما تكون: $v_{2i} = 0$ فإن $v_{1f} = 0$ أي إن الجسيم الأول يصبح ساكناً بعد الصدم.

2- الصدم في المستوي:

يحدث هذا النوع من الصدم عندما تكون متجهات سرعات الجسيمات المتصادمة غير واقعة على محور واحد، وإنما تأخذ اتجاهات مختلفة في المستوي، ندعوه بالصدم في المستوي. لندرس هذه الحالة على جسمين كتلتيهما m_2, m_1 على الترتيب، وبفرض أن m_2 ساكن قبل الصدم بينما سرعة الجسم الأول قبل الصدم v_{1i} الشكل (8-19) بحسب المعادلة (8.40) نستطيع أن نكتب:

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \tag{8.59}$$



الشكل (8-19)

وبما أن الصدم يتم في المستوي؛ فإن أشعة السرعة الثلاثة $\vec{v}_{1i}, \vec{v}_{1f}, \vec{v}_{2f}$ تأخذ اتجاهات مختلفة في المستوي. بإسقاط المعادلة (8.59) على المحورين الإحداثيين y, x كما في الشكل (8-19) نجد:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\varphi \tag{8.60}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\varphi \tag{8.61}$$

وباستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة الحركية نكتب:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{8.62}$$

وبالتالي فإن المعادلات (8.60) ، (8.61)، (8.62) تمثل معادلات حركة الجسيمات في حالة الصدم في المستوي.

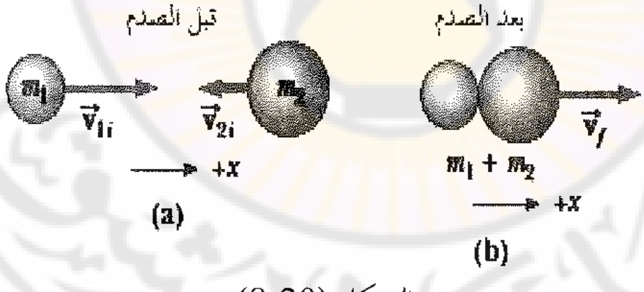
3- الصدم غير المرن:

بالعودة إلى المعادلة (8.44) فعندما يكون المقدار Q لا يساوي الصفر $Q \neq o$، أي إن مبدأ انحفاظ الطاقة الحركية قبل الصدم وبعده غير محقق فإننا ندعو الصدم في هذه الحالة بالصدم غير المرن. وهذا يعني أن هناك ضياعاً في الطاقة الحركية نتيجة لعملية الصدم. فإذا كانت قيمة $Q<o$ يعني أن الطاقة الحركية تتناقص نتيجة الصدم، بينما تزداد الطاقة الكامنة، وهذا ما ندعوه بالصدم غير المرن من النوع الأول. أما عندما $Q>o$ فإن الطاقة الحركية تزداد نتيجة الصدم بينما الطاقة الكامنة تتناقص فإن الصدم يكون غير مرن من النوع الثاني.

في حالة الصدم غير المرن يبقى مبدأ انحفاظ كمية الحركة محققاً. وبنتيجة الصدم يشكل الجسيمان المتصادمان بعد الصدم جسيماً واحداً الشكل (8-20). ويمكن أن نكتب:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \qquad (8.63)$$

تمثل المعادلة (8.63) معادلة الصدم غير المرن.



الشكل (8-20)

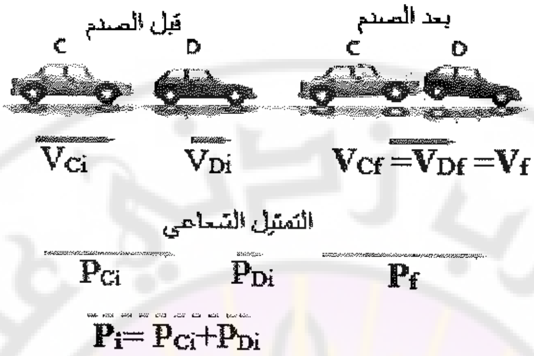
مسألة محلولة 10:

تسير سيارة كتلتها 1875 kg بسرعة 23m/s خلف سيارة كتلتها 1025 kg وتسير بسرعة 17 m/s على طريق جليدية بالاتجاه نفسه، الشكل (8-21). تلتصق السيارتان مع بعضهما. ما هي سرعة السيارتين، وهما تتحركان مع بعضهما مباشرة بعد الاصطدام؟

الحل:

إن كمية الحركة قبل التصادم تساوي كمية الحركة بعد التصادم، أي:

$$P_i = P_f$$



الشكل (8-21)

$$P_{Ci} + P_{Di} = P_{Cf} + P_{Df}$$

$$m_C v_{Ci} + m_D v_{Di} = m_C v_{Cf} + m_D v_{Df}$$

$$v_{Cf} = v_{Df} = v_f$$

$$m_C v_{Ci} + m_D v_{Di} = (m_C + m_D) v_f$$

$$v_f = \frac{m_C v_{Ci} + m_D v_{Di}}{(m_C + m_D)}$$

بتعويض القيم المعطاة نجد:

$$v_f = \frac{(1875)(23) + (1025)(17)}{(1875 + 1025)} \Rightarrow v_f = 21 \ m/s$$

8.10 الحركة المستقيمة تحت تأثير القوى التي تشتق من كمون:

في الحالة العامة للحركة المستقيمة، لا تعتمد الطاقة الكامنة إلا على إحداثي واحد، وليكن x والعلاقة (8.34) لانحفاظ الطاقة تصبح:

$$E = (E_k + E_p)_A = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(x) \qquad (8{،}64)$$

حيث E الطاقة الكلية وهي ثابتة ستبين لنا هذه المعادلة الفائدة العملية من مفهوم الطاقة.

ففي الحركة المستقيمة $v = dx/dt$ والعلاقة السابقة (8.36) تصبح:

$$E = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) \tag{8.65}$$

فإذا حللناها بالنسبة إلى dx/dt وجدنا:

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ \frac{2}{m} \left[E - E_p(x) \right] \right\}^{1/2} \tag{8.66}$$

في مثل هذه الشروط يمكننا أن نكتب هذه المعادلة بشكل يكون معه المتحولان t وx مفصولين بحيث لا يظهر المتحول x إلا في طرف واحد من المعادلة، والمتحول t في الطرف الآخر. ففي حالتنا هذه تصبح معادلتنا بالشكل التالي:

$$\frac{dx}{\left\{ (2/m)[E - E_p(x)] \right\}^{1/2}} = dt$$

بإجراء التكامل (وبجعل $t_0 = 0$ للتبسيط) نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\left\{ (2/m)[E - E_p(x)] \right\}^{1/2}} = \int_0^t dt = t \tag{8.67}$$

تسمح لنا هذه المعادلة بالحصول على علاقة بين x وt؛ أي بحل مسألة الحركة المستقيمة للجسيم؛ وبالتالي ففي كل مرة نستطيع فيها أن نجد التابع الممثل الطاقة الكامنة [وهذا سهل نسبياً إذا كانت علاقة القوة بتابعية x ؛ لأننا نستعمل ببساطة المعادلة (8.29) للحصول على $E_p(x)$]، فإن انحفاظ الطاقة الذي يعبر عنه بالمعادلة (8.67) يعطينا مباشرة حل مسألة الحركة المستقيمة.

مسألة محلولة 11:

استخدم العلاقة (8.67) لحل مسألة الحركة المستقيمة تحت تأثير قوة ثابتة.

الحل:

في هذه الحالة F ثابتة، إذا أخذنا المحور X باتجاه منحى القوة، بالعلاقة الأولى من (8.29) تعطينا عندئذ $F=-dE_p/dx$ أو $E_p=-F\,dx$ وبإجراء التكامل نحصل على:

$$E_p=-F.x+C$$

وبجعل $E_p=0$ من أجل $x=0$ نحصل على $C=0$ إذن: $E_p=-F.x$

وهذه هي عبارة الطاقة العائدة إلى قوة ثابتة. وهذا يتفق مع العلاقة (8.25) إذا جعلنا فيه $\vec{F}=F.\vec{u}_x$ أي أن القوة باتجاه المحور OX وإذا استعملنا العلاقة (8.40) وجعلنا فيها للتبسيط $x_0=0$ فإننا عندئذ نحصل على:

$$\frac{1}{(2/m)^{1/2}}\int_0^x\frac{dx}{(E+F.x)^{1/2}}=t \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{F}(E+F.x)^{1/2}-\frac{2}{F}E^{1/2}=\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}.t$$

ومنها نستخرج x:

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t^2+\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}.t$$

حيث إن $F/m=a$

وإن $E=\frac{1}{2}mv^2+F.x$ هي الطاقة الكلية، ونجد من أجل $t=0$ وعندما $x=0$، فإن الطاقة E هي بكاملها حركية وتساوي $\frac{1}{2}mv_0^2$ إذن: $2E/m=v_0^2$ ونحصل في النهاية من أجل x على:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

وهي عبارة مماثلة لتلك التي تم الحصول عليها سابقاً في العلاقة (5.11) بجعل $x_0=0$ و $t_0=0$ إن هذه المسألة بسيطة جداً بحد ذاتها بحيث يمكن حلها بسهولة بطرق الفصل الخامس وقد أعطيناها هنا لكي توضح طريقة حل معادلات الحركة باستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة.

8.11 الحركة تحت تأثير القوى المركزية التي تشتق من كمون:

في حالة قوة مركزية عندما لا تعتمد E_P إلا على r تصبح المعادلة (8.34) بالشكل:

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 + E_p(r) \tag{8.68}$$

واعتبارا من هذه المعادلة يمكن تعيين شعاع السرعة من أجل أية قيمة للمسافة وفي كثير من الحالات يكون التابع $E_P(r)$ متناقصاً بالقيمة المطلقة عندما تتزايد r، وهكذا فعلى مسافات كبيرة من المركز تكون $E_P(r)$ صغيرة لدرجة يمكن معها إهمالها، ويكون مقدار السرعة ثابتاً ومستقلاً عن منحى الحركة. لنلاحظ أننا حين نعالج الحركة تحت تأثير القوى المركزية، أن هناك مبدئين للانحفاظ، الأول: يتعلق بانحفاظ عزم كمية الحركة، والآخر: هو انحفاظ الطاقة المعبّر عنه بالمعادلة السابقة (8.68) حين نستعمل الإحداثيات القطبية r و θ ونتذكر أن مركبتي السرعة هما:

$$v_\theta = r\, d\theta / dt \quad \text{و} \quad v_r = dr / dt$$

يمكننا أن نكتب حسب المعادلة (5.63):

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

إلا أنه حسب مبدأ انحفاظ عزم كمية الحركة وباستعمال العلاقة (7.35) $L = mr^2 d\theta / dt$ نجد:

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{(mr)^2}$$

حيث L هو عزم كمية الحركة الثابت إذن: $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{(mr)^2}$

فإذا أدخلنا هذه النتيجة في المعادلة (8.68) وجدنا:

$$E = \tfrac{1}{2} m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + E_p(r) \tag{8.69}$$

إن هذه العلاقة تكون قريبة جداً من العلاقة (8.65) التي سبق أن حصلنا عليها من أجل الحركة المستقيمة، مع السرعة dr / dt إذا فرضنا، طالما أننا ندرس الحركة القطرية، أن الجسيم يتحرك تحت تأثير الطاقة الكامنة "المؤثرة":

$$E_{r,eff(r)} = \frac{L^2}{2m r^2} + E_p(r) \qquad (8.70)$$

نسمي الحد الأول $E_p(r) = L^2 / 2mr^2$ بالكمون النابذ حيث إن القوة المرتبطة به استعمال العلاقة (8.31) هي: $F_c = -\partial E_{p,c} / \partial r = L^2 / mr^3$ والتي، لكونها موجبة، تتجه بالجهة الصادرة عن المركز أي أنها (قوة نابذة) بالطبع ليست هناك أية قوة نابذة تؤثر على الجسيم غير تلك التي يمكن أن تنتج عن الكمون الحقيقي $E_p(r)$ في الحالة التي يكون فيها نابذاً، وبالتالي فإن القوة النابذة F_c ليست سوى مفهوم رياضي مفيد. ومن وجهة النظر الفيزيائية يصف هذا المفهوم ميل الجسيم، حسب مبدأ العطالة إلى الحركة حسب خط مستقيم وأن يتجنب بالتالي أن التحرك على منحنٍ إذا أدخلنا المعادلة (8.60) في المعادلة (8.69) وجدنا:

$$E = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p,eff(r)}$$

وإذا استخرجنا dr / dt وجدنا:

$$\frac{dr}{dt} = \left\{ \frac{2}{m} [E - E_{p,eff}(r)] \right\}^{1/2} \qquad (8.71)$$

وهذا ما يطابق شكلياً المعادلة (8.66) التي حصلنا عليها من أجل الحركة المستقيمة إذا فصلنا المتحولين r و t وكاملنا (بجعل $t_0 = 0$ للتبسيط) فإننا نحصل على :

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left\{ (2/m)[E - E_{p,eff}(r)] \right\}^{1/2}} = \int_0^t dt = t \qquad (8.72)$$

هذا ما يعطينا المسافة بدلالة الزمن (أي $r(t)$)، لدينا إذن حل مسألة الديناميك في حالة الحركة القطرية.

إذا استخرجنا $d\theta / dt$ من عبارة عزم كمية الحركة $L = mr^2 d\theta / dt$ فإننا نجد:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2} \qquad (8.73)$$

وإذا أدخلنا بعد ذلك $r(t)$ المستخرجة من المعادلة (8.72) في المعادلة (8.73) فإننا نجد L/mr^2 بدلالة الزمن وبإجراء التكامل نجد:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{L}{m r^2} dt \qquad (8.74)$$

أو :

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{m r^2} dt$$

لقد حصلنا على θ بدلالة الزمن أي: $\theta(t)$ وبهذا الشكل نكون قد تمكننا من حل المسألة بصورة كاملة، وذلك بالحصول على الحركة الزاوية وعلى الحركة القطرية بدلالة الزمن.

إلا أننا نكون، في بعض الأحيان، مهتمين بمعادلة المسار إذا قسمنا المعادلة (8.71) على المعادلة (8.73) طرفاً لطرف، أمكننا أن نكتب:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\{(2/m)[E - E_{p,eff}(r)]\}^{1/2}}{L/m r^2} \qquad (8.74)$$

أو بفصل المتحولين r و θ وبإجراء التكامل:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{(m/L) r^2 \{(2/m[E - E_{p,eff}(r)]\}^{1/2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0 \qquad (8.75)$$

تعطي هذه العلاقة التي تربط r و θ ومعادلة المسار في الإحداثيات القطبية، وبالعكس، إذا كنا نعرف معادلة المسار، وهذا ما يسمح لنا بحساب $dr/d\theta$ فإن المعادلة (8.74) ستتيح لنا بحساب الطاقة الكامنة وبالتالي القوة.

لقد بيّنت لنا هذه الفقرة كيف تسمح مبادئ انحفاظ عزم كمية الحركة و انحفاظ الطاقة بحل مسألة حركة الجسيم تحت تأثير قوة مركزية وسيتضح للطالب من الآن أن هذه المبادئ ليست مجرد مهارة رياضية؛ وإنما هي أدوات حقيقية وفعّالة لحل مسائل الديناميك وينبغي علينا أن

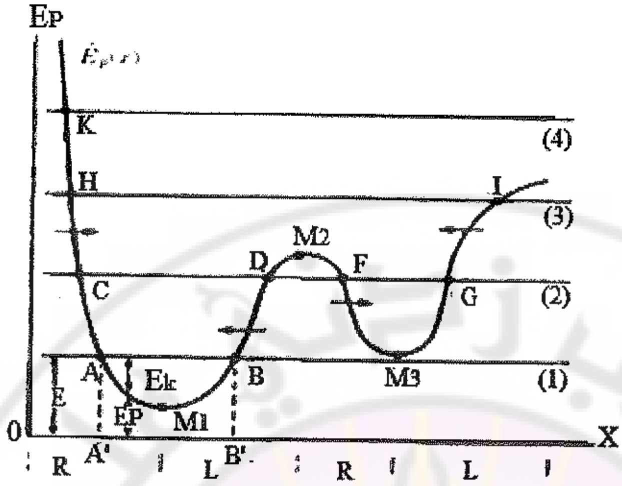
نلاحظ أنه حين تتم الحركة تحت تأثير قوة مركزية، فإن مبدأ انحفاظ الطاقة لا يكفي لوحده لحل المسألة. ينبغي أن نستعمل بالإضافة إليه مبدأ انحفاظ عزم كمية الحركة أما في حالة الحركة المستقيمة فانحفاظ الطاقة يكفي لحل مسألة، وسبب ذلك أن الطاقة هي مقدار سلّمي ولا يمكن أن تفيد في تعيين منحى الحركة بينما في الحركة المستقيمة يكون المنحى معيناً منذ البداية.

8.12 مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة:

إن للمنحنيات البيانية التي تمثل $E_p(x)$ بدلالة x في الحركات المستقيمة أو ذات البعد الواحد، و $E_p(r)$ بدلالة r في مسائل القوة المركزية فائدة كبيرة من أجل فهم حركة الجسيم حتى من دون حل معادلة الحركة ففي الشكل (8-20) رسمنا منحنياً ممكناً للطاقة الكامنة في حالة حركة ذات بعد واحد. إننا حين نستعمل المعادلة الأولى من المعادلات (8.29) نجد أن القوة التي تؤثر على الجسيم مهما كانت x تعطي بالعلاقة $F=-dE_p/dx$ ولكن E_p/dx وهو ميل المنحني $dE_p(x)$ يكون الميل موجباً حين يكون المنحني متزايداً أو متجهاً نحو الأعلى، ويكون سالباً حين يكون المنحني متناقصاً أو متجهاً نحو الأسفل، إذن تكون القوة F (ذات الإشارة المعاكسة للميل) سالبة أو متجهة نحو اليسار، حين تكون الطاقة الكامنة متزايدة وتكون موجبة أو متجهة نحو اليمين حين تكون الطاقة الكامنة متناقصة وقد مثلنا ذلك على الشكل (8-22) بواسطة أسهم أفقية بواسطة المناطق المختلفة المذكورة في الأسفل.

في المواضع التي تكون فيها الطاقة الكامنة في نهاية عظمى أو صغرى كما في M_1, M_2, M_3 لدينا dE_p/dx إذن: $F=0$ ، وبعبارة أخرى هذه المواضع هي مواضع توازن.

وتقابل المواضيع التي تكون من أجلها $E_p(x)/dx$ في نهاية صغرى توازناً مستقراً؛ لأنه إذا حرك الجسيم قليلاً عن موضع توازنه فإن قوة تؤثر عليه لتعيده إلى هذا الموضع أما المواضع التي تكون فيها $E_p(x)/dx$ في نهاية عظمى فإن التوازن يكون غير مستقر؛ لأن انحرافاً بسيطاً عن موضع توازنه إلى ناحية أو أخرى يولد قوة تسعى إلى حرفه أكثر عن هذا الموضع.



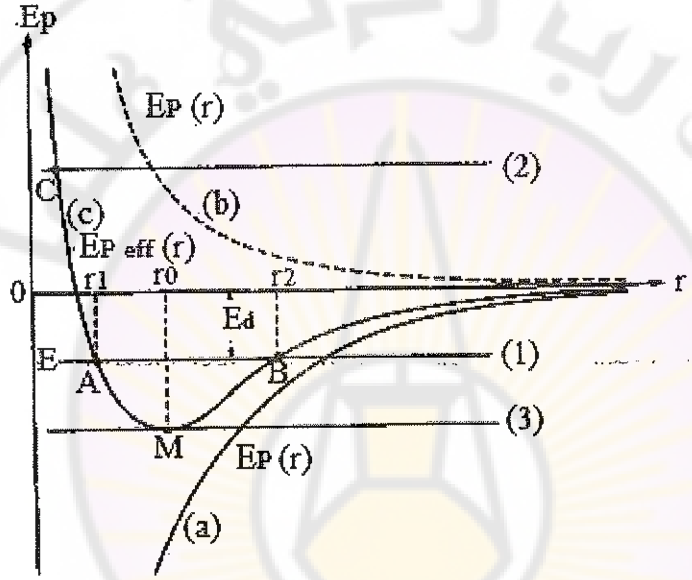
الشكل (22-8) العلاقة بين الحركة على خط مستقيم والطاقة الكامنة.

لنعتبر الآن جسمياً طاقته الكلية E كما يشير إلى ذلك الخط الأفقي (1) على الشكل (22-8) إن الطاقة الكامنة E_p من أجل أي موضع x تعطى بترتيب المنحي والطاقة الحركية، $E_k = E - E_p$، تعطى ببعد المنحني $E_p(x)$ عن المستقيم ذي الترتيب E. إن المستقيم E يقطع $E_p(x)$ في نقطتين A و B. وإلى اليسار من A وإلى اليمين من B تكون الطاقة E أصغر من الطاقة الكامنة $E_p(x)$. ففي هذه المنطقة إذن ينبغي للطاقة الحركية $E_k = E - E_p$ أن تكون سالبة، وهذا مستحيل؛ لأن $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ هي بالتعريف موجبة. إذن فحركة الجسيم محدودة بالمنطقة AB، والجسيم ينوس بين $x = B'$ و $x = A'$. أما في هاتين النقطتين فإن السرعة تنعدم والجسيم يغير اتجاه حركته. وتدعى هاتان النقطتان بنقاط الارتداد.

إذا كانت طاقة الجسيم أعلى من ذلك، ولتكن ممثّلة بالمستقيم (2) فهناك منطقتان ممكنتان للحركة الأولى، تنوس بين C و D والأخرى تنوس بين F و G .

إلا أنه إذا كان الجسيم موجوداً في إحدى هاتين المنطقتين فليس بوسعه القفز إلى الأخرى لأن عليه أن يجتاز المنطقة DF التي ينبغي من أجلها للطاقة الحركية أن تصبح سالبة، والتي هي بالتالي منطقة ممنوعة. ونقول إن المنطقتين اللتين تكون الحركة فيهما مسموحة،

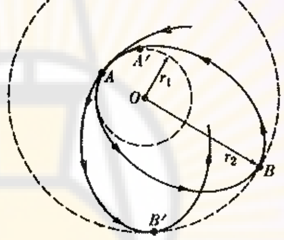
مفصولتان بحاجز كموني. أما من أجل سوية الطاقة (3) فإن الحركة اهتزازية بين H و I. وأخيراً من أجل سوية الطاقة (4) لا تعود الحركة اهتزازية ويتحرك الجسيم بين K واللانهاية فإذا كان الجسيم مثلاً يتحرك في الأصل نحو اليسار فإنه "يرتد" حين يصل K وينطلق نحو اليمين ولا يعود بعد ذلك أبداً. إذا اعتبرنا حركة الجسيمات الذرية التي ينبغي من أجلها استعمال الميكانيك الكوانتي فإن الوصف السابق يحتاج عندئذ لبعض التعديل.



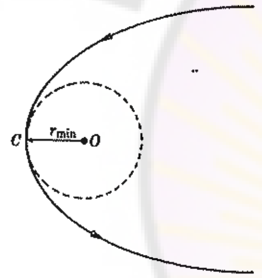
الشكل (23-8) علاقات الطاقة من أجل حركة تحت تأثير قوة مركزية.

لنعتبر الآن الحالة المهمة للقوى المركزية ولنفرض وجود طاقة كامنة $E_p(x)$ تقابل قوة جاذبة من أجل أي مسافة، وبعبارة أخرى $F=-\frac{\partial E_p}{\partial r}$ سالبة و $E_p(r)$ تابع متزايد كما يشير إلى ذلك المنحني (a) من الشكل (23- 9). إن الكمون النابذ $E_{p,c}=L^2/2mr^2$ ممثل بالمنحني المنقط (b) والحد النابذ صغير جداً من أجل مسافات كبيرة لكنه يزداد بسرعة كبيرة من أجل المسافات الصغيرة. وفي كثير من الحالات المهمة في الفيزياء يكون الكمون النابذ هو الغالب من أجل المسافات الصغيرة، وتنتج طاقة كامنة مؤثرة $E_{p,eff}=E_{p,c}+E_p(r)$ لها الشكل الممثل بالمنحني (c) .

إذا كانت الطاقة الكلية E للجسيم ممثلة بالمستقيم الأفقي (1) فإن نصف قطر المدار ينوس بين القيمتين الصغرى والعظمى r_1 , r_2 وسيكون للمدار الشكل الممثّل في (8-24) أما لو كانت لطاقة الجسيم قيمة تقابل المستقيم (2) من الشكل (8-23) فإن المدار لا يكون مغلقاً والجسيم القادم من اللانهاية يقترب حتى النقطة C إلى أقرب مسافة $r_{\min}$ ثم يبتعد من جديد من دون أمن يعود بعد ذلك أبداً كما هو واضح من الشكل (8-25) أما إذا كانت الطاقة تقابل النهاية الصغرى لـ $E_{p,eff}$ كما يشير إلى ذلك المستقيم (3) فليس هناك سوى تقاطع واحد، وتبقى المسافة بني الجسيم والمركز ثابتة والجسيم يرسم مسارا دائرياً نصف قطر r_0. لنلاحظ أن أصغر مسافة اقتراب تزداد بازدياد عزم كمية الحركة، وذلك نظراً لتأثير الطاقة الكامنة النابذة $E_{p,c}(r)$.



الشكل (8-24) الشكل العام للمسارات من أجل حركة تحت تأثير قوي مركزية.



الشكل (8-25) اقصر مسافة اقتراب

إذا استطاع جسيم طاقته الكلية تساوي السوية (1) من الشكل (8-23) أن يمتص، بطريقة ما، كمية من الطاقة، وبالتالي أن يقفز إلى السوية (2) فإنه سيبتعد عن مركز القوة، أو بعبارة أخرى "ينفصل" عن مركز القوة وقد أشير إلى الطاقة الدنيا اللازمة لجسيم لكي ينفصل اعتباراً من السوية (1) على الشكل (8-23) بـ E_d . ومن ناحية أخرى إذا كان الجسيم في الأصل في سوية الطاقة (2) وخسر طاقة لدى مروره بالقرب من مركز القوى فإنه يمكن أن يقفز إلى السوية (1) ويبقى بالتالي على مدار مغلق. ونقول عندئذ إنه" اختطف" من قبل مركز القوة، وإننا نصادف مثل هذه الحالات على سبيل المثال، في تشكل الجزيئات وفي انشطارها.

8.13 القوى التي لا تشتق من كمون:

يمكننا من النظرة الأولى أن نجد في الطبيعة قوى لا تشتق من كمون، فالاحتكاك هو مثال على ذلك. إن احتكاك الانزلاق يعاكس دوماً الانتقال، وعمله يعتمد على الطريق المسلوك وحتى لو كان المسار مغلقاً فإن العمل لا يساوي الصفر، بحيث إن المعادلة (8.26) لا تكون صالحة بالشكل نفسه فإن الاحتكاك المائع يعاكس السرعة، ويعتمد على السرعة لا على الموضع. وإن جسيماً ما يمكن أن يكون خاضعاً في الوقت ذاته لقوى تشتق، وأخرى لا تشتق من كمون.

فعلى سبيل المثال، الجسيم الساقط في مائع يخضع لقوة الثقالة التي تشتق من كمون وللاحتكاك المائع الذي لا يشتق من كمون. فإذا رمزنا بـ E_p للطاقة الكامنة المقابلة للنوع الأول من القوى وبـ 'W للعمل الذي تقدمه القوى الأخرى (هذا العمل على العموم سالب؛ لأن قوى الاحتكاك تعاكس الحركة) كان العمل الكلي المقدم للجسيم حين ينتقل من A إلى B هو:

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} + W'$$

فإذا استفدنا من العلاقة (8.13) أمكننا أن نكتب:

$$E_{k,B} - E_{k,B} = E_{P,A} - E_{p,B} + W'$$

أو:

$$(E_k - E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W' \qquad (8.76)$$

إن المقدار $E_k + E_p$ في هذه الحالة لا يبقى ثابتاً؛ وإنما يزداد (أو ينقص) حسبما يكون 'W سالباً أو موجباً، وعدا عن ذلك، ليس بإمكاننا تسمية $E_k + E_p$ طاقة الجسيم الكلية لأن هذا المفهوم لا يمكن تطبيقه في هذه الحالة حيث إنه لا يشمل كل القوى الموجودة. ولا يحتفظ مفهوم الطاقة الكلية لجسيم بمعناه إلا إذا كانت جميع القوى تشتق من كمون. ومع ذلك فالعلاقة (8.76) مفيدة حين نرغب في مقارنة الحالة التي تكون فيها القوى التي تشتق من كمون هي وحدها المؤثرة (بحيث يكون $E_k + E_p$ الطاقة الكلية) مع الحالة التي تكون

فيها قوى إضافية لا تشتق من كمون. ونقول عندئذ إن المعادلة (8.76) تعطي الربح أو الخسارة في الطاقة العائدين إلى القوى التي لا تشتق من كمون.

إن وجود القوى التي لا تشتق من كمون، كقوى الاحتكاك لا يستدعي بالضرورة إمكانية وجود تأثيرات متبادلة لا تشق من كمون بين الجسيمات الأساسية ينبغي علينا أن نتذكر أن قوى الاحتكاك لا تقابل تأثيراً متبادلاً بين جسيمين؛ وإنما هي مفاهيم إحصائية أصلاً فاحتكاك الانزلاق على سبيل المثال هو نتيجة عدد كبير من التأثيرات المتبادلة الفردية بين جزيئات الجسمين المتماسين. وإن كل واحد من هذه التأثيرات المتبادلة يمكن أن يعبّر عنه بواسطة قوة تشتق من كمون. إلا أن الأثر الجهري لا يشتق من كمون؛ وذلك للسبب التالي: بالرغم من أن الجسم، بعد أن يكون قد أتم مساراً مغلقاً يكون من وجهة النظر الجهرية قد عاد إلى موضعه الابتدائي، إلا أن الجزيئات الفردية لا تكون قد عادت إلى حالتها الأصلية. وبالتالي فإن الحالة النهائية ليست مماثلة ،مجهرياً، للحالة الابتدائية وهي ليست مماثلة لها حتى بالمعنى الإحصائي.

يمثل العمل 'W إذن انتقالاً في الطاقة لكونه يتقبل حركة جزيئية على العموم، غير عكوس. والسبب في أننا لا نستطيع استعادة هذا العمل يأتي من الصعوبة حتى من وجهة النظر الإحصائية، في إعادة كل الحركات الجزيئية إلى حالتها الابتدائية. وفي بعض الحالات، رغم ذلك، يمكن استعادة الشروط الابتدائية للحركات الجزيئية إحصائياً وبعبارة أخرى، حتى لو كانت الحالة النهائية ليست مطابقة مجهرياً للحالة الابتدائية، فإن الحالين متعادلتان إحصائياً. وهذه هي على سبيل المثال حالة غاز يتمدد ببطء شديد وهو يقدم عملاً فإذا جعلنا الغاز بعد التمدد يعود إلى شروطه الفيزيائية الابتدائية وذلك بضغطه ببطء شديد فإن الحالة النهائية تكون مماثلة إحصائياً للحالة الابتدائية والعمل المبذول أثناء الضغط يساوي ويعاكس عمل التمدد والعمل الكلي بالتالي معدوم.

مسألة محلولة 12:

يسقط جسم في مائع لزج منطلقاً من وضع السكون على ارتفاع y_0 احسب سرعة ضياع طاقته الحركية وطاقته الكامنة العائدة للثقالة.

الحل:

حين يكون الجسم على ارتفاع **y ويسقط بالسرعة v** فإن مجموع طاقته الحركية، والكامنة هو: $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$ وسرعة ضياع **الطاقة أو** الطاقة الضائعة في وحدة الزمن) بفعل قوى اللزوجة التي لا تشتق من كمون هي **إذن:**

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}mv^2 + mg\,y)$$

ملاحظة: يمكن الرجوع إلى المسألة **السادسة** من **الفصل** السابق وأن يعبر عن v^2 و y بدلالة الزمن. وبحساب المشتقات السابقة **بعد ذلك يمكن** حل المسألة.

إلا أننا نريد هنا أن نبيّن كيف يمكن حل المسألة بطريقة أخرى حسب العلاقة (8.44) إذا كانت النقطتان **A** و **B** قريبتين **جداً من بعضهما أمكننا** أن نكتب المعادلة:

$$d(E_k + E_p) = dW' = F'.dx$$

حيث: F' هي القوة التي لا تشق من كمون وفي مثالنا F' هي قوة الاحتكاك المائع لها. الشكل $F_f = -k\,\eta\,v$ المذكور في العلاقة (7.18) إذن:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = F'\frac{dx}{dt} = (-k\eta\,v)v = -k\eta\,v^2$$

ونأخذ من اجل v ،النتيجة التي حصلنا عليها في المسألة المحلولة (7) في الفصل السابق.

$$v = \frac{F}{k\eta}[1 - e^{-(k\eta/m)t}]$$

حيث: $F = mg$ هي ثقل الجسم (مصححاً بالنسبة لدفع المائع). إذن:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = -\frac{m^2g^2}{k\eta}[1 - e^{-(k\eta/m)t}]^2$$

إن إشارة الناقص لسرعة ضياع الطاقة تعني أن لجسم يفقد من طاقته الحركية وكطاقة ثقله الكامنة. إلا أن هذه الطاقة ليست، مع ذلك ضائعة؛ وإنما انتقلت إلى جزيئات المائع بشكل يستحيل معه استعادتها وبعد مضي زمن معين يصبح التابع الأسي عملياً صفراً، ويمكننا عندئذ أن نكتب:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_P) = -\frac{m^2 g^2}{k\eta}$$

وأن نبين بالتالي أن الطاقة تضيع بسرعة ثابتة. ويسمى هذا الوضع بالحالة المستقرة. من المفيد النظر إلى هذه النتيجة بطريقة أخرى، لقد رأينا في المسألة المحلولة (7) أنه بعد زمن معين تصبح السرعة ثابتة ومساوية $F / k\eta$ حيث: $F = mg$ فالطاقة الحركية تبقى إذن ثابتة، والطاقة الكامنة وحدها $E = mg.y$ هي التي تتغير، يمكننا إذن أن نكتب:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_P)_{ss} = \frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt}(mg\ y) = mg\,\frac{dy}{dt}$$

الدليل ss يعني أن المسألة هي مسألة حالة مستقرة (steady state) وحيث dy / dt هي السرعة الحدية المعطية بالعلاقة (7.21) يمكننا أن نكتب:

$$dy / dt = F / k\eta = -mg / k\eta$$

إن إشارة الناقص تأتي من أن y تقاس نحو الأعلى وأن السرعة الحدية متجهة نحو الأسفل إذا بدلنا هذه القيمة في العبارة السابقة نجد:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_P)_{ss} = mg\left(-\frac{mg}{k\eta}\right) = -\frac{m^2 g^2}{k\eta}$$

أي النتيجة نفسها التي تم الحصول عليها سابقاً وهكذا فإننا نلاحظ أنه بعد مضي وقت معين فإن كل طاقة الثقالة الكامنة التي يفقدها الجسم تستهلك بشكل حركة جزيئة في المائع، وما هذا إلا طريقة أخرى لأن نقول إن قوة الثقالة المتجهة نحو الأسفل تنعدم بفضل القوة المساوية والمعاكسة لها الناتجة عن لزوجة المائع.

مسائل

8.1 احسب عمل القوة الثابتة 12N حين تنتقل نقطة تأثيرها 7m إذا كانت الزاوية بين منحى القوى، والانتقال هي: (a) °0 ، (b) °60 ، (c) °90 ، (d) °145 ، (e) °180.

8.2 احسب العمل الذي ينجزه رجل يجر كيس طحين كتلته 65 kg مسافة 10 m على الأرض بقوة 25 kgf ثم يرفعه إلى شاحنة على ارتفاع 75 cm عن سطح الأرض ما هي الاستطاعة الوسطية إذا كانت العملية كلها تتم في 2 min ؟

8.3 جسم كتلته 4 kg يصعد على مستوٍ مائل بزاوية ?20 على الأفق. وتؤثر القوى التالية على الجسم قوة أفقية مقدارها 80N، وقوة موازية للمستوي المائل مقدارها 100N وتساعد على الحركة وقوة احتكاك ثابتة مقدارها 10N تعاكس الحركة، ينزلق الجسم مسافة 20 m على المستوي. احسب العمل الكلي الذي تنجزه جملة القوى المؤثرة على الجسم، واحسب كذلك عمل كل قوة على حدة.

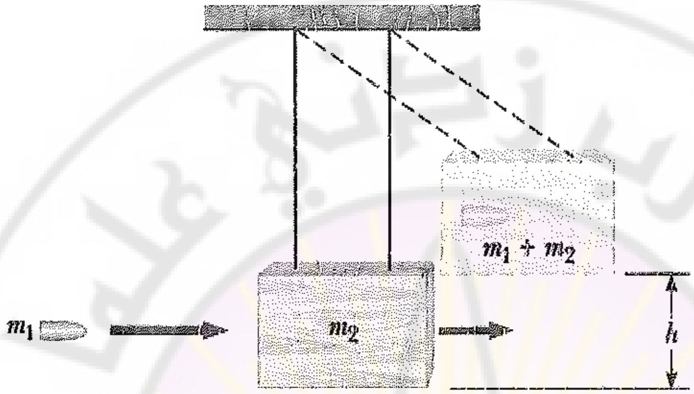
8.4 جسم كتلته 0.10 kg يسقط من ارتفاع 3m على كومة من الرمل إذا كان الجسم يغطس في الرمل إلى عمق 3cm قبل أن يتوقف فما هي القوة الثابتة التي يؤثر بها الرمل على الجسم؟.

8.5 يصعد رجل كتلته 80 kg سطحاً مائلاً يشكل زاوية ?10 مع الأفق بسرعة $6\ kmhr^{-1}$. احسب استطاعة الرجل.

8.6 . تتسلق سيارة كتلتها 1600 kg منحدراً ميله ?3 بسرعة ثابتة مقدارها $45km\ hr^{-1}$. ما هي استطاعة المحرك؟ وما هو العمل المنجز في 10s؟ بإهمال قوى الاحتكاك.

8.7 سيارة ثقلها 100 kgf تحرك على طريق أفقية، وتصل إلى سرعتها العظمى البالغة $32ms^{-1}$ عندما يعمل المحرك بأقصى استطاعة البالغة 50 حصاناً بخارياً واحسب سرعة السيارة العظمى حين يصعد منحدراً ميله 5% نفترض أن مقاومة الهواء ثابتة.

8.8 تخترق رصاصة m_1 كتلتها 10 g وسرعتها 150 m/s قطعة خشبية m_2 كتلتها 500g ومعلقة بالسقف بواسطة حبل خفيف طوله 1m، بحيث تستقر الرصاصة فيه، عندها تتحرك القطعة الخشبية والرصاصة معاً كنواس بسيط، ويرتفعان لمسافة h كما هو موضّح بالشكل (8-26). ما مقدار الطاقة الضائعة في هذا الصدم، وما هو الارتفاع h ؟



الشكل (8-26)

8.9 قوة ثابتة مقدارها 60 dynes تؤثر خلال 12s على جسم كتله 10 g فإذا كانت للجسيم سرعة ابتدائية مقدارها $60\ cms^{-1}$ لها اتجاه القوة نفسه. والمطلوب حساب:

(a) العمل الذي قامت به القوة.

(b) الطاقة الحركية النهائية.

(c) الاستطاعة.

(d) زيادة الطاقة الحركية.

8.10 (a) ما هي القوة الثابتة التي ينبغي أن يؤثر بها محرك سيارة كتلها 1500kg لكي تجعل سرعتها تزداد من $4.0km\ hr^{-1}$ إلى $40km\ hr^{-1}$ في مدى 8s ؟

(b) عيّن تغير كمية الحركة وتغير الطاقة الحركية.

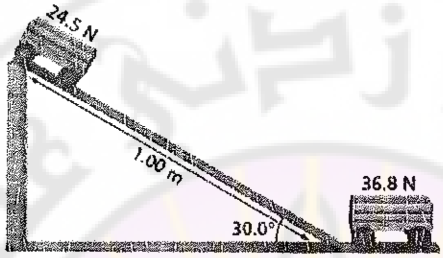
(c) عيّن الدفع الذي تتلقاه السيارة، والعمل الذي تقوم به القوة.

(d) احسب الاستطاعة الوسطية للمحرك.

8.11 تتحرر عربة وزنها 24N من ارتفاع 1m على مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية 30° كما يبيّنه الشكل(27-8) .تتحرك العربة نحو أسفل المستوي المائل حتى ترتطم بعربة ثانية وزنها 36.8N والمطلوب:

1) حساب السرعة للعربة الأولى في أسفل المستوي المائل.

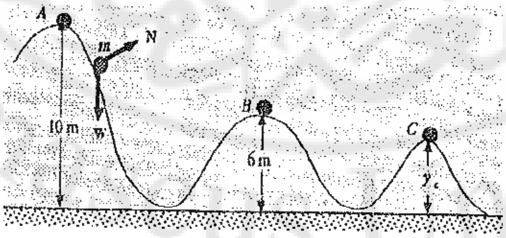
2) في حال التصاق العربتين، ما هي السرعة الابتدائية التي سوف تتحركان بهما؟



الشكل (27-8)

8.12 كرة فولاذية كتلتها 1Kg مربوطة بطرف خيط طوله 1m تدور على دائرة شاقولية مركزها الطرف الآخر للخيط، بسرعة زاوية مقدارها $120\ rad\ s^{-1}$. احسب الطاقة الحركية إذا كانت الطاقة الكلية هي التي تبقى ثابتة بدلاً من السرعة الزاوية، فما هو تغير الطاقة الحركية؟ وما هو تغير السرعة الزاوية، وذلك من أعلى الدائرة إلى أسفلها، نفترض أن قيمة السرعة الزاوية المعطية هي في أعلى الدائرة؟

8.13 ينزلق جسم كتلته 1kg على المنحني المبيّن بالشكل (28-8) مبتدأ عند النقطة A من السكون. أوجد سرعته عند النقطة B ،وكذلك ارتفاع النقطة C إذا وصل إليها بسرعة 2m/s بفرض أن الاحتكاك مهمل.



الشكل (28-8)

8.14 يبلغ كتلة متزلج 62 kg، يتزلج هابطاً من مرتفع يميل على الأفق بزاوية ?37 الشكل (8-29)، وعامل الاحتكاك بين المزلجة والثلج قيمته 0.15، والمطلوب إيجاد سرعة المتزلج بعد 5s من بدء حركته.

الشكل (8-29)

8.15 عبّر بالإلكترون فولط eV عن الطاقة الحركيـــة لإلكترون كتلـة الإلكترون تساوي: $9.10^9 \times 10^{-31}$kg ويتحرك بســـرعة 10^6 ms^{-1} وكذلك بالنســـبة إلى بروتون كتلتـــه kg 1.675×10^{-27} .

8.16 أوجد سرعة إلكترون في أنبوب التلفزيون إذا كان يصطدم بالشاشة بطاقة حركية مقدارها 1.8×10^4 eV .

8.17 أوجد سرعة بروتون يخرج من مسرع جسيمات بطاقة 3×10^5 eV.

8.18 إذا كانت E_k هي الطاقة الحركية بالإلكترون فولط و V هي السرعة بالأمتار في الثانية، بيّن أنه توجد العلاقتان:

$E_k = 2.843 \times 10^{-12}V^2$ من أجل الإلكترون.

$E_k = 5.228 \times 10^{-9}$ V^2 من أجل البروتون.

8.19 تتحرك كتلة 10 kg تحت تأثير القوة $F = [(5t)\vec{u}_x + (3t^2 - 1)\vec{u}_y]$ فإذا كان الجسم في اللحظة $t = 0$ ساكناً في المبدأ والمطلوب:

(a) أوجد كمية الحركة، والطاقة الحركية للجسم من أجل $t = 10s$.

(b) احسب الدفع، والعمل الذي تنجزه القوة ابتداءً من $t = 0$ حتى $t = 10s$.

(c) قارن بالنتائج التي حصلت عليها في (a).

8.20 يتحرك جسيم تحت تأثير القوة الجاذبة $F = -k r^2$ المسار هو دائرة نصف قطرها r بيّن:

أن الطاقة الكلية هي: $E = -k/2r$

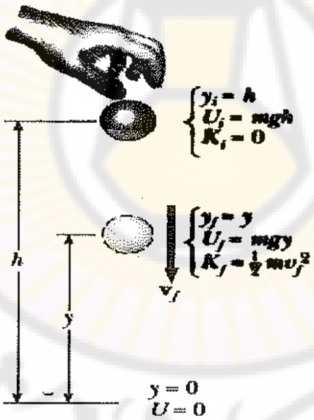
وأن السرعة هي: $v = (k/mr)^{1/2}$

وأن عزم كمية الحركة هو: $L = (m k r)^{1/2}$

8.21 تركت كرة كتلتها m سقطت من ارتفاع h على سطح الأرض سقوطاً حراً، الشكل (8-30)، بإهمال مقاومة الهواء، والمطلوب:

أولاً- حدد سرعة الكرة عندما تصبح على ارتفاع y فوق سطح الأرض.

ثانياً- أوجد كمية الحركة المتولدة من سقوط الكرة بفرض أن كتلتها تساوي gr 100 وتسقط سقوطاً حراً من مسافة قدرها 175 cm، علماً أن $g = 9.8\ m/s^2$.



الشكل (8-30)

8.22 تقذف كرة كتلتها 0.4kg أفقياً من قمة هضبة ارتفاعها 120m بسرعة ابتدائية مقدارها $6ms^{-1}$ والمطلوب حساب:

(1) الطاقة الحركية الابتدائية للكرة.

(2) طاقتها الكامنة الابتدائية.

(3) طاقتها الحركية حين تبلغ الأرض.

(4) سرعتها لدى بلوغ الأرض.

8.23 تترك قنبلة كتلتها 10 kg من طائرة تطير أفقياً بسرعة $270\ km\ hr^{-1}$ فإذا كانت الطائرة على ارتفاع 100 m والمطلوب حساب:

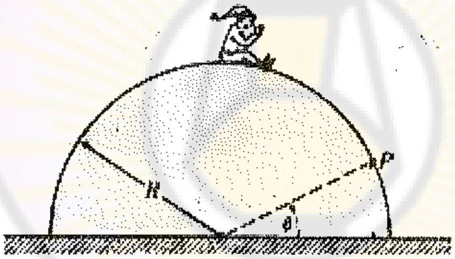
(a) الطاقة الحركية الابتدائية للقنبلة.

(b) طاقتها الكامنة الابتدائية.

(c) طاقتها الكلية.

(d) سرعتها حين تصل إلى الأرض، طاقتها الحركية، وطاقتها الكامنة بعد 10s من تركها من الطائرة.

8.24 يجلس طفل كتلته m على كومة نصف كروية من الجليد الشكل (31- 8) فإذا ترك الطفل ينزلق (نفترض أن الحركة تتم دون احتكاك) ففي أية نقطة P ينفصل عن الكومة ؟

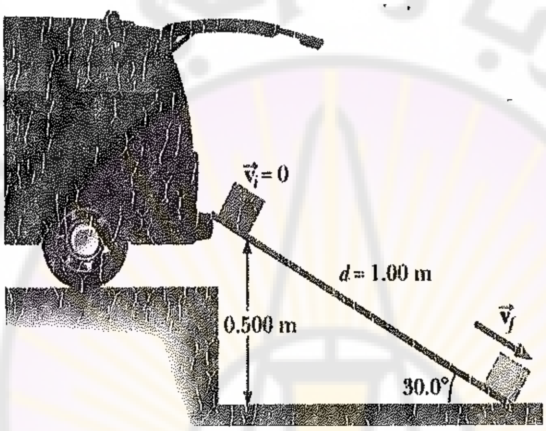


الشكل (31- 8)

8.25 تنزلق زحافة كتلتها 20 kg على منحدر منطلقة من ارتفاع 20 m فإذا كانت ساكنة في البداية، وأصبحت سرعتها $16\ ms^{-1}$ حين وصلت أسفل المنحدر، احسب ضياع الطاقة الناشئ عن الاحتكاك.

8.26 تقذف كرة كتلتها 0.5 kg شاقولياً نحو الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها $20\ ms^{-1}$ فتصل إلى ارتفاع 15m. احسب ضياع الطاقة الناشئ عن مقاومة الهواء.

8.26 يترك صندوق كتلته 3kg لينزلق على لوح خشبي موضوع بمؤخرة سيارة مخصصة لحمل البضائع، طول هذا اللوح 1m ويستند على الأرض بزاوية ?30.0، كما هو مبيّن في الشكل(8-32).يبدأ الصندوق حركته من قمة اللوح، ويواجه مقاومة احتكاك تساوي 5N، يستمر الصندوق في حركته لمسافة قصيرة على الأرض بعد تجاوزه اللوح. المطلوب: حدد سرعة الصندوق أسفل اللوح. والمطلوب ما هي المسافة التي يقطعها الصندوق إذا بقيت مقاومة الاحتكاك 5N ؟



الشكل (8-32)

8.27 كرتان كتلتهما 10gr، 8g تتحركان في اتجاه خط مركزيهما، وفي اتجاهين متضادين بالسرعتين 8m/s و 4m/s على الترتيب، فإذا علم أن الارتداد بينهما $e = \frac{1}{3}$. أوجد سرعة كل من الكرتين بعد التصادم مباشرة، وكذلك الدفع المتبادل بين الكرتين، و الطاقة الحركية المفقودة في التصادم.

8.28 كرة تتحرك بسرعة 20 m/s تصادمت مع مستوي أملس ثابت وفي اتجاه يصنع زاوية ?30 مع المستوي، فإذا كان معامل المرونة بين الكرة والمستوي $e = \frac{2}{5}$ ، أوجد مقدار سرعة الكرة واتجاهها بعد الصدم.

ملحقات

Appendixes

ملحق (I) أهم الجداول الفيزيائية

1 - جدول التحويلات الفيزيائية:

Conversions[a]

Length

1 in. = 2.54 cm (exact)
1 m = 39.37 in. = 3.281 ft
1 ft = 0.304 8 m
12 in. = 1 ft
3 ft = 1 yd
1 yd = 0.914 4 m
1 km = 0.621 mi
1 mi = 1.609 km
1 mi = 5 280 ft
1 μm = 10^{-6} m = 10^{3} nm
1 lightyear = 9.461×10^{15} m

Area

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 ft^2 = 0.092 9 m^2 = 144 $in.^2$
1 $in.^2$ = 6.452 cm^2

Volume

1 m^3 = 10^6 cm^3 = 6.102×10^4 $in.^3$
1 ft^3 = 1 728 $in.^3$ = 2.83×10^{-2} m^3
1 L = 1 000 cm^3 = 1.057 6 qt = 0.035 3 ft^3
1 ft^3 = 7.481 gal = 28.32 L = 2.832×10^{-2} m^3
1 gal = 3.786 L = 231 $in.^3$

Mass

1 000 kg = 1 t (metric ton)
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.66×10^{-27} kg = 931.5 MeV/c^2

Force

1 N = 0.224 8 lb
1 lb = 4.448 N

Velocity

1 mi/h = 1.47 ft/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
1 m/s = 100 cm/s = 3.281 ft/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s

Acceleration

1 m/s^2 = 3.28 ft/s^2 = 100 cm/s^2
1 ft/s^2 = 0.304 8 m/s^2 = 30.48 cm/s^2

Pressure

1 bar = 10^5 N/m^2 = 14.50 lb/$in.^2$
1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
1 atm = 14.7 lb/$in.^2$ = 1.013×10^5 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.45×10^{-4} lb/$in.^2$

Time

1 yr = 365 days = 3.16×10^7 s
1 day = 24 h = 1.44×10^3 min = 8.64×10^4 s

Energy

1 J = 0.738 ft · lb
1 cal = 4.186 J
1 Btu = 252 cal = 1.054×10^3 J
1 eV = 1.6×10^{-19} J
1 kWh = 3.60×10^6 J

Power

1 hp = 550 ft · lb/s = 0.746 kW
1 W = 1 J/s = 0.738 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

Some Approximations Useful for Estimation Problems

1 m $\approx$ 1 yd
1 kg $\approx$ 2 lb
1 N $\approx \frac{1}{4}$ lb
1 L $\approx \frac{1}{4}$ gal
1 m/s $\approx$ 2 mi/h
1 yr $\approx \pi \times 10^7$ s
60 mi/h $\approx$ 100 ft/s
1 km $\approx \frac{1}{2}$ mi

2 - جدول رموز الأحرف اليونانية:

The Greek Alphabet

Alpha	Α	α	Iota	Ι	ι	Rho	Ρ	ρ
Beta	Β	β	Kappa	Κ	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	Τ	τ
Delta	Δ	δ	Mu	Μ	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	Ε	ϵ	Nu	Ν	ν	Phi	Φ	ϕ
Zeta	Ζ	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	Χ	χ
Eta	Η	η	Omicron	Ο	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

3 - جدول بعض الثوابت الفيزيائية:

Physical Constants

Quantity	Symbol	Value	Approximate Value
Atomic mass unit	u	$1.66053886 \times 10^{-27}$ kg	1.66×10^{-27} kg
Avogadro's number	N_A	6.0221415×10^{23} mol^{-1}	6.022×10^{23} mol^{-1}
Boltzmann's constant	k	$1.3806505 \times 10^{-23}$ Pa·m^3/K	1.38×10^{-23} Pa·m^3/K
Constant in Coulomb's law	K	$8.987551788 \times 10^{9}$ N·m^2/C^2	9.0×10^{9} N·m^2/C^2
Elementary charge	e	$1.60217653 \times 10^{-19}$ C	1.602×10^{-19} C
Gas constant	R	8.314472 Pa·m^3/mol·K	8.31 Pa·m^3/mol·K
Gravitational constant	G	6.6742×10^{-11} N·m^2/kg^2	6.67×10^{-11} N·m^2/kg^2
Mass of an electron	m_e	$9.1093826 \times 10^{-31}$ kg	9.11×10^{-31} kg
Mass of a proton	m_p	$1.67262171 \times 10^{-27}$ kg	1.67×10^{-27} kg
Mass of a neutron	m_n	$1.67492728 \times 10^{-27}$ kg	1.67×10^{-27} kg
Planck's constant	h	$6.6260693 \times 10^{-34}$ J·s	6.63×10^{-34} J·s
Speed of light in a vacuum	c	2.99792458×10^{8} m/s	3.00×10^{8} m/s

4 - جدول رموز أربع كميات فيزيائية ومعادلة الأبعاد لها:

Dimensions and Units of Four Derived Quantities

Quantity	Area	Volume	Speed	Acceleration
Dimensions	L^2	L^3	L/T	L/T^2
SI units	m^2	m^3	m/s	m/s^2
U.S. customary units	ft^2	ft^3	ft/s	ft/s^2

5 - جدول جملة الوحدات الدولية لبعض المقادير الفيزيائية:

Base Quantity	SI Base Unit Name	SI Base Unit Symbol
Length	Meter	m
Mass	Kilogram	kg
Time	Second	s
Electric current	Ampere	A
Temperature	Kelvin	K
Amount of substance	Mole	mol
Luminous intensity	Candela	cd

6 - جدول الاختصارات و الرموز القياسية للوحدات الأساسية:

Standard Abbreviations and Symbols for Units

Symbol	Unit	Symbol	Unit
A	ampere	K	kelvin
u	atomic mass unit	kg	kilogram
atm	atmosphere	kmol	kilomole
Btu	British thermal unit	L	liter
C	coulomb	lb	pound
°C	degree Celsius	ly	lightyear
cal	calorie	m	meter
d	day	min	minute
eV	electron volt	mol	mole
°F	degree Fahrenheit	N	newton
F	farad	Pa	pascal
ft	foot	rad	radian
G	gauss	rev	revolution
g	gram	s	second
H	henry	T	tesla
h	hour	V	volt
hp	horsepower	W	watt
Hz	hertz	Wb	weber
in.	inch	yr	year
J	joule	Ω	ohm

7 - جدول يوضّح قيم بعض المعطيات الفيزيائية شائعة الاستخدام:

Physical Data Often Used[a]	
Average Earth–Moon distance	3.84×10^8 m
Average Earth–Sun distance	1.496×10^{11} m
Average radius of the Earth	6.37×10^6 m
Density of air (20°C and 1 atm)	1.20 kg/m^3
Density of water (20°C and 1 atm)	1.00×10^3 kg/m^3
Free-fall acceleration	9.80 m/s^2
Mass of the Earth	5.98×10^{24} kg
Mass of the Moon	7.36×10^{22} kg
Mass of the Sun	1.99×10^{30} kg
Standard atmospheric pressure	1.013×10^5 Pa

8 - جدول مضاعفات وأجزاء القيم:

Some Prefixes for Powers of Ten

Power	Prefix	Abbreviation	Power	Prefix	Abbreviation
10^{-24}	yocto	y	10^1	deka	da
10^{-21}	zepto	z	10^2	hecto	h
10^{-18}	atto	a	10^3	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^6	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^9	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	milli	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

9 - جدول الوحدات لبعض المقادير الفيزيائية:

Symbols, Dimensions, and Units of Physical Quantities *continued*

Quantity	Common Symbol	Unit[a]	Unit in Terms of Base SI Units
Capacitance	C	farad (F)	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$
Charge	q, Q, e	coulomb (C)	$A \cdot s$
Charge density			
Line	λ	C/m	$A \cdot s/m$
Surface	σ	C/m^2	$A \cdot s/m^2$
Volume	ρ	C/m^3	$A \cdot s/m^3$
Conductivity	σ	$1/\Omega \cdot m$	$A^2 \cdot s^3/kg \cdot m^3$
Current	I	AMPERE	A
Current density	$\mathbf{J}$	A/m^2	A/m^2
Density	ρ	kg/m^3	kg/m^3
Dielectric constant	κ		
Length	ℓ, L	METER	m
Position	$x, y, z, \mathbf{r}$		
Displacement	$\Delta x, \Delta \mathbf{r}$		
Distance	d, h		
Electric dipole moment	$\mathbf{p}$	$C \cdot m$	$A \cdot s \cdot m$
Electric field	$\mathbf{E}$	V/m	$kg \cdot m/A \cdot s^3$
Electric flux	Φ_E	$V \cdot m$	$kg \cdot m^3/A \cdot s^3$
Electromotive force	$\mathcal{E}$	volt (V)	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Energy	E, U, K	joule (J)	$kg \cdot m^2/s^2$
Entropy	S	J/K	$kg \cdot m^2/s^2 \cdot K$
Force	$\mathbf{F}$	newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
Frequency	f	hertz (Hz)	s^{-1}
Heat	Q	joule (J)	$kg \cdot m^2/s^2$
Inductance	L	henry (H)	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$
Magnetic dipole moment	μ	$N \cdot m/T$	$A \cdot m^2$
Magnetic field	$\mathbf{B}$	tesla (T) (= Wb/m^2)	$kg/A \cdot s^2$
Magnetic flux	Φ_B	weber (Wb)	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$
Mass	m, M	KILOGRAM	kg
Molar specific heat	C	$J/mol \cdot K$	$kg \cdot m^2/s^2 \cdot mol \cdot K$
Moment of inertia	I	$kg \cdot m^2$	$kg \cdot m^2$
Momentum	$\mathbf{p}$	$kg \cdot m/s$	$kg \cdot m/s$
Period	T	s	s
Permeability of free space	μ_0	N/A^2 (= H/m)	$kg \cdot m/A^2 \cdot s^2$
Permittivity of free space	ϵ_0	$C^2/N \cdot m^2$ (= F/m)	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^3$
Potential	V	volt (V) (= J/C)	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Power	$\mathcal{P}$	watt (W) (= J/s)	$kg \cdot m^2/s^3$
Pressure	P	pascal (Pa) (= N/m^2)	$kg/m \cdot s^2$
Resistance	R	ohm (Ω)(= V/A)	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$
Specific heat	c	$J/kg \cdot K$	$m^2/s^2 \cdot K$
Speed	v	m/s	m/s
Temperature	T	KELVIN	K
Time	t	SECOND	s
Torque	τ	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2/s^2$
Velocity	$\mathbf{v}$	m/s	m/s
Volume	V	m^3	m^3
Wavelength	λ	m	m
Work	W	joule (J)(= $N \cdot m$)	$kg \cdot m^2/s^2$

10 - جدول الطاقات الحركية لبعض الأجسام:

Kinetic Energies for Various Objects

Object	Mass (kg)	Speed (m/s)	Kinetic Energy (J)
Earth orbiting the Sun	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.66×10^{33}
Moon orbiting the Earth	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Rocket moving at escape speed[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automobile at 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Running athlete	70	10	3 500
Stone dropped from 10 m	1.0	14	98
Golf ball at terminal speed	0.046	44	45
Raindrop at terminal speed	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Oxygen molecule in air	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

11 - جدول معطيات المجموعة الشمسية:

Solar System Data

Body	Mass (kg)	Mean Radius (m)	Period (s)	Distance from the Sun (m)
Mercury	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}
Earth	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}
Mars	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}
Jupiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}
Saturn	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}
Uranus	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}
Neptune	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}
Pluto	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}
Moon	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—
Sun	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—

12 - جدول كثافة بعض المواد الشائعة:

Densities of Some Common Substances at Standard Temperature (0°C) and Pressure (Atmospheric)

Substance	ρ (kg/m^3)	Substance	ρ (kg/m^3)
Air	1.29	Ice	0.917×10^{3}
Aluminum	2.70×10^{3}	Iron	7.86×10^{3}
Benzene	0.879×10^{3}	Lead	11.3×10^{3}
Copper	8.92×10^{3}	Mercury	13.6×10^{3}
Ethyl alcohol	0.806×10^{3}	Oak	0.710×10^{3}
Fresh water	1.00×10^{3}	Oxygen gas	1.43
Glycerin	1.26×10^{3}	Pine	0.373×10^{3}
Gold	19.3×10^{3}	Platinum	21.4×10^{3}
Helium gas	1.79×10^{-1}	Seawater	1.03×10^{3}
Hydrogen gas	8.99×10^{-2}	Silver	10.5×10^{3}

ملحق (II) ملحق رياضي

1- جدول: بعض العلاقات الرياضية المهمة:

$$x = \ln a \Rightarrow a = e^{x}$$

$$x = \log a \Rightarrow a = 10^{x}$$

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$\log (ab) = \log a + \log b$$

$$a^{x} . a^{y} = a^{(x+y)}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$$

$$1 + tg^{2} \theta = \frac{1}{\cos^{2} \theta}$$

$$\sin^{2} \theta + \cos^{2} \theta = 1$$

$$\cos^{2} \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\sin^{2} \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin (\propto \pm \beta) = \sin \propto \cos \beta \pm \cos \propto \sin \beta$$

$$\sin \propto + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\propto + \beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\propto - \beta}{2}\right)$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^{2} \theta - \sin^{2} \theta$$

$$\cos (\propto \pm \beta) = \cos \propto \cos \beta \mp \sin \propto \sin \beta$$

$$\cos \propto + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\propto + \beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\propto - \beta}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx} x^{n} = n x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx} \sin a x = a \cos a x$$

$$\frac{d}{dx} e^{nx} = e^{nx} \qquad \frac{d}{dx} e^{ax^{n}} = nax^{n-1} e^{ax^{n}}$$

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{x}$$

$$\int x^{n} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax \qquad \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

$$1 \int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}} = \ln \left(x + \sqrt{a^{2}+x^{2}} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = arc \sin \frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a} arc \, tg \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(a^{2}+x^{2})^{3/2}} = \frac{1}{a^{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}}$$

Power series **(convergent for range of x shown):**

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{all } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{all } x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{all } x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

2- جدول: بعض الرموز الرياضية المستخدمة ومعانيها باللغة الانكليزية.

Symbol	Meaning
$=$	is equal to
$\equiv$	is defined as
$\neq$	is not equal to
$\propto$	is proportional to
$\sim$	is on the order of
$>$	is greater than
$<$	is less than
$\gg (\ll)$	is much greater (less) than
$\approx$	is approximately equal to
Δx	the change in x
$\sum_{i=1}^{N} x_i$	the sum of all quantities x_i from $i = 1$ to $i = N$
$\|x\|$	the magnitude of x (always a nonnegative quantity)
$\Delta x \to 0$	Δx approaches zero
$\frac{dx}{dt}$	the derivative of x with respect to t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	the partial derivative of x with respect to t
$\int$	integral

ملحق (III)

العناصر الكيميائية والجدول الدوري

Periodic Table of Elements

1 H																	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba		72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra		104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo

57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

قائمة المصطلحات العلمية

- A –

الإنكليزية	العربية
Absolute	مطلق
Absolute Zero	صفر مطلق
Acceleration	تسارع
Angular Acceleration	تسارع زاوي
Coriolis Acceleration	تسارع كوريولس
Constant Acceleration	تسارع ثابت
Centripetal Acceleration	تسارع جاذب
Normal Acceleration	تسارع ناظمي
Relative Acceleration	تسارع نسبي
Resultant Acceleration	تسارع محصل
Tangential Acceleration	تسارع مماسي
Average Acceleration	تسارع وسطي
Action	فعل
Contact Action	فعل التماس
Air	هواء
Air Resistance	مقاومة الهواء
Areas Law	قانون السطوح
Altitude	ارتفاع
Amplitude	مطال، سعة
Angular	زاوي

Angular Velocity	سرعة زاوية
Atmosphere	جو
Atom	ذرة
Atwood's machine	آلة أتود
Attraction	تجاذب
Analytic	تحليلي

- B -

Balance	ميزان
Bar	قضيب
Base	قاعدة
Barycenter	مركز الفعل
Branch	فرع

- C -

Calculus	حساب
Center	مركز
. Mass Center	مركز الكتلة
. Gravity Center	مركز الثقل
. Inertia Center	مركز العطالة
Center field	حقل مركزي
Center farce	قوة مركزية
Centrifugal force	قوة جاذبة
Change of state	تغير الحالة
Collision	تصادم
Elastic Collision	تصادم مرن

Inelastic Collision	تصادم غير مرن
Conservation	انحفاظ
- of angular momentum	انحفاظ كمية الحركة الزاوية
Conservation of energy	انحفاظ الطاقة
Conservation theorems	نظريات الانحفاظ
Classical	تقليدي
Classical Mechanics	ميكانيك تقليدي
Critical	حرج
Coefficient	معامل
- Friction Coefficient	معامل الاحتكاك
-Viscous Coefficient	معامل اللزوجة
Conductor	ناقل
Continuity	استمرار
Constant	ثابت
Components	مركبات
Couple	مزدوجة
Cross	مقطع
Cycle	حلقة، دورة
Coordinates	إحداثيات
Cartesian Coordinates	إحداثيات ديكارتية
Curve	منحنٍ

- D -

Density	كثافة
Depth	عمق

Displacement	إزاحة
Displacement Vector	شعاع الإزاحة
Dynamic	تحريك
Dynamic of Particles	تحريك الجسيمات
Dimension	بعد
Direction	اتجاه
Disk	قرص
Distribution	توزع
Distribution of velocities	توزع السرع
Distribution of kinetic energy	توزع الطاقة الحركية
Division	قسمة
Data	معطيات
Double	مضاعف
Dyne	دنية
Dispersion	تبديد
Differential	تفاضل
Differential element	عنصر تفاضلي
Direction cosines	جيوب تمام الاتجاه

- E -

Ecliptic	مدار الشمس
Effective	فعال
Elastic	مرن
Ellipse	قطع ناقص
Energy	طاقة

-Kinetic Energy	طاقة حركية
-Internal Energy	طاقة داخلية
-Potential Energy	طاقة كامنة
-Total Energy	طاقة كلية
-Mechanical Energy	طاقة ميكانيكية
-Rotational Energy	طاقة دورانية
Entropy	إنتروبية
Equation	معادلة
Equilibrium	توازن
Equilibrium of bodies	توازن الأجسام
Equilibrium of Particle	توازن الجسيم
Equilibrium Position	وضع التوازن
-Stability Equilibrium	توازن مستقر
Equivalent	مكافئ
Equinox	نقطة الاعتدال
Erg	الأرغة

- F –

Fluid	سائل
Field	حقل
Gravitational Field	حقل الثقالة
Filter	مرشح
Force	قوة
-Nonconervative Force	قوة غير محافظة
-Moment of Force	عزم القوة

-Attraction Force	قوة جاذبة
-Central Force	قوة مركزية
-Centrifugal Force	قوة نابذة
-Elastic Force	قوة مرنة
-Friction Force	قوة احتكاك
-Internal Force	قوة داخلية
-Binding Force	قوة ترابط
-Nuclear Force	قوة نووية
Frequency	تواتر
-Angular Frequency	تواتر زاوي
Frame	جملة
Frame of reference	جملة مقارنة
Friction	احتكاك
-Kinetic Friction	احتكاك حركي
-Static Friction	احتكاك سكوني
-Slinding Friction	احتكاك من دون انزلاق
Flux	تدفق
Factor	عامل
Formation	تشكيل
Function	تابع
Free	حر

- G -

Gas	غاز
Galaxy	مجرة

Gradient	تدرج
Gradient vector	شعاع التدرج
Gravitational	ثقالي

- H -

Harmonic	توافقي
Harmonic motion	حركة توافقية
Head – on collision	تصادم أسي
Heat	حرارة
Hook's Law	قانون هول
Hydro static	توازن السوائل
Hypothese	فرض
Heavy	ثقيل
Height	ارتفاع
Helical	لولبي
Helical motion	حركة لولبية
Helical orbit	مدار لولبي
Helicoidal Path	مسار لولبي
Hertz	هرتز
Hole	ثقب
Hollow	أجوف
Hyperbola	قطع زائد

- I -

Impulse	الدفع
Inelastic	غير مرن

Inertia	العطالة
Interaction	تفاعل متبادل
Ions	إيونات
Isotopes	نظائر
Index	دليل
Isotropic	متناهٍ
Incertitude	ارتياب
-Absolute Incertitude	ارتياب مطلق
-Relative Incertitude	ارتياب نسبي
Intensity	شدة
Integral	تكامل
Isolated	معزول
Isolated System	جملة معزولة
Incidence	ورود
Incoherence	غير مترابط
Incommensurable	غير قابل للقياس
Independent	مستقل
Inhomogeneous	غير متجانس
Initial	ابتدائي
Initial Energy	طاقة ابتدائية
Initial Speed	سرعة ابتدائية
Initial Particle	جسيم أولي
Inner product	جداء داخلي

Instability	غير مستقر
Interface	سطح بيني
Interference	تداخل
Invariant	لا متغير
Isotype	متماثل

- J -

Joule	جول
Junction	وصلة

- K -

Keplers Laws	قوانين كبلر
Kick	ارتداد
Kilo	كيلو
-Kilo bar	كيلو بار
-Kilo gram	كيلو غرام
-Kilo meter	كيلو متر
-Kilo calorie	كيلو حريرة
Kelvin	كلفن
Kinematics	علم الحركة
-Kinetic energy	طاقة حركية
-Kinetic equation	معادلة حركية
-Kinetic pressure	ضغط حركي
-Kinetic theory	نظرية حركية

- L -

Laboratory	مختبر
Lacuna	فجوة

Launching	قذف، إطلاق
Landslide	انزلاق
Latent	كامن
- Latent energy	طاقة كامنة
- Latent Heat	حرارة كامنة
Lateral	جانبي
Lateral collision	تصادم جانبي
Latitude	خط العرض
Law	قانون
Law of conservation	قانون الانحفاظ
Layer	طبقة
Length	طول
Lens	عدسة
Level	مستوى
Light	ضوء
Light source	منبع ضوئي
Limit	حد
Limited	محدود
Lines	خطوط
Lines of force	خطوط القوة
Lines of field	خطوط الحقل
Linear	خطي
Linear equation	معادلة خطية

Linear momentum	اندفاع خطي
Linear correlation	ارتباط خطي
Linear dependence	تابعية خطية
Line of action	خط الفعل
Line of force	خط القوة
Liquid	سائل
Local	موضعي
Location	موضع
Logarithmic	لوغارتمي
Loss	ضياع
Low	منخفض

- M -

Machine	آلة
Macroscopic	جهري
Macroscopy	دراسة جهرية
Magnetic	مغناطيسي
Main	رئيس
Main path	مسار رئيس
Major axis	المحور الكبير
Major diameter	القطر الأكبر
Mass	كتلة
Mass center	مركز الكتلة
Mass density	كثافة الكتلة
Mass Less	عديم الكتلة

Mass Velocity	سرعة الكتلة
Material	مادي، مادة
Maximum	أعظمي
Mean	وسطي
Mean energy	طاقة وسطية
Mean velocity	سرعة وسطية
Mean value	قيمة وسطية
Measure	قياس
Mechanic	ميكانيك
Mechanical	ميكانيكي
Mechanical force	قوة ميكانيكية
Mechanical stress	إجهاد ميكانيكي
Mega hertz	ميغا هرتز
Meridian	خط الزوال
Metal	معدن
Metastable	شبه مستقر
Metastable equilibrium	توازن شبه مستقر
Metric	متري
Metric system	نظام متري
Metrology	علم القياس
Microscope	مجهر
Microscopic	مجهري
Milliliter	ميلي لتر

Minimum	أصغري
Minute	دقيقة
Missile	صاروخ
Mixed	مختلط
Mobile	متحرك
Mode	نمط
Model	نموذج
Mole	مول
Molecular	جزيئي
Moment	عزم
Moment of force	عزم القوة
Moment of Inertia	عزم العطالة
Moment of momentum	عزم الاندفاع
Momentum	الاندفاع
Momentum conservation	انحفاظ الاندفاع
Momentum vector	متجهة الاندفاع
Moon	قمر
Motion	حركة
Mounting	تركيب

- N -

Nanometer	نانومتر
Natural	طبيعي
Natural logarithm	لوغاريتم طبيعي
Natural numbers	أعداد طبيعية

Sum	مجموع
Surface	سطح
Surface tension	توتر سطحي
Symmetry	تناظر، تماثل
System	منظومة، مجموعة

- T -

Table	جدول، قائمة
Tangent	مماس
Tangential	مماسي
Technology	تقانة
Temperature	درجة الحرارة
Tensile	شد
Tensile strength	مقاومة الشد
Tension	توتر
Theoretical	نظري
Theory	نظرية
Time	زمن
Timer	موقت
Torque	عزم
Torsion	فتل
Track	مسار، أثر
Trajectory	مسار
Transformation	تحويل، تحول
Triangle	مثلث

Tube	أنبوب

- U -

Ultrasonic	فوق صوتي
Undetermined	غير محدد
Uniform	منتظم
Uniform acceleration	تسارع منتظم
Uniform velocity	سرعة منتظمة
Unit	وحدة
Universal	عام، شامل

- V -

Vacancy	شاغر، ثغرة
Vacuum	فراغ، خلاء
Vapor	بخار
Variable	متحول، متغير
Vector	شعاع، متجه
Velocity	سرعة
Vibration	اهتزاز
Viscosity	لزوجة
Viscosity coefficient	معامل اللزوجة
Volume	حجم

المراجع العلمية

قائمة المراجع العربية

1 - قسام توفيق، معصراني بسام، **الفيزياء العامة (1)**، منشورات جامعة دمشق – الطبعة الخامسة - 2002-2003.

2 - الشوفي كنج، **الميكانيك الفيزيائي (1)**، منشورات جامعة دمشق – كلية العلوم – 2004-2005.

3 - تارج .س.، **الميكانيكا النظرية**، منشورات دار مير - موسكو– الطبعة الخامسة– 1986.

5 - آل رشي رياض، بشير كرمان محمد، **الفيزياء العامة (1)**، منشورات جامعة حلب– 1986.

6 - الحصري أحمد، حموليلا مصطفى، عوض فوزي، **مسائل محلولة في الفيزياء**، الجزء الأول، الميكانيك الفيزيائي و الصوت ،منشورات مؤسسة الرسالة، بيروت – 1985.

قائمة المراجع الإنكليزية

1- Alonso M. , Finn E. J. , Fundamental University **Physics**, volume I, Mechanics, 2d printing, Addison Wesley publishing Co., Inc., 1969.

2- Giancoli D.C., **Physics for Scientists and Engineers** , 3^d Edition, prentice hall, 2000.

3- Hugh D. Young, Roger A. Freedman, "**University Physics with modern physics**", 12^{th} Edition, Pearson Addison-Wesley, 2007 .

4- Heuvelen. Alan Van, - **Physics – A general Introduction**, Little,Brown and company1982.

5- John W. Jewett, Jr. Raymond A. Serway.**Physics for Scientists and Engineers** , Seventh Edition,2008.

6- Kane Joseph W., Sternheim Morton M. Physics, John Wiley and Sons, Inc., 1978.

7- Raymond A. Serway, and Robert J. Beichner, "**Physics for scientist and engineers with modern physics**", Fifth edition, Saunders college publishing, 2000.

8- Resnick R., Halliday D., **Physics, part I**, John Wiley and Sons, Inc., 1966.

9- Resnick R., Halliday D.,Walker J.,**Fundamental of Physics**, John Wiley and Sons, Inc., 5th Edition, 1997.

Damascus University
Publication
Faculty of Science

GENERAL PHYSICS
(1)

BY

Dr. Hammoud AL-OURABI

Dr. Hassan Kamleh

مطبعة جامعة دمشق