الدكتور وائل خنسة

الدكتورة علي أبو عمشة

بحوث العمليات (1)

الطبعة الأولى

2001-2000

جامعة دمشق - المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجية

١٤٢١ - ١٤٢٢ هـ

٢٠٠٢ - ٢٠٠٣ م

مقدمة

ظهرت بحوث العمليات كفرع علمي مستقل من فروع الرياضيات، في سياق تطوير واستحداث نماذج وأدوات وتقنيات رياضية. تسمح مختلف هذه الأدوات بنمذجة وتحليل وحل المسائل التي تطرحها منظوماتنا (المنطقية والفيزيائية) المعاصرة المعقدة، والبحث عن حلولها المثلى.

يمكن تصنيف المسائل التي تتعرض لها بحوث العمليات في ثلاثة صنوف أساسية :

1) تقنيات البرمجة الرياضية *Mathematical Programming Techniques*: ويتفرع عنها: طرائق الحساب *Calculus Methods*، حساب التغيرات *Calculus of Variations*، البرمجة اللاخطية *NonLinear Programming*، البرمجة الهندسية *Geometric Programming*، البرمجة الخطية *Linear Programming*، البرمجة التربيعية *Quadratic Programming*، البرمجة الديناميكية *Dynamic Programming*، نظرية الألعاب *Game Theory*، ... إلخ.

2) تقنيات المعالجات العشوائية *Stochastic Process Techniques*: ويتفرع عنها: نظرية القرارات الإحصائية *Statistical Decision Theory*، سلاسل ماركوف *Markov Processes*، نظرية خطوط الانتظار *Queuing Theory*، طرائق المحاكاة *Simulation Methods*، نظرية الوثوقية *Reliability Theory*، نظرية المعَوَّليَّة *Feasibility Theory*، ...إلخ.

3) الطرائق الإحصائية *Statistical Methods* : التحليل الارتدادي *Regression Analysis*، التحليل التمييزي *Discriminate Analysis*، التحليل الوظائفي *Functional Analysis*، ...إلخ.

ليس هذا التصنيف إلا واحداً من التصنيفات المكنة للفروع المعرّفة جيداً من بحوث العمليات. يمكن الحديث عن طرائق أخرى للتصنيف، كما يمكن الحديث عن فروع أخرى تقع في المنطقة "الرمادية" بين بحوث العمليات وغيرها من فروع الرياضيات والمعلوماتية (على سبيل المثال، أدوات النمذجة الرياضية البيانية كنظرية البيانات، وشبكات بتري، والشبكات العصبونية، والخوارزميات الوراثية، و ...إلخ).

تعود جذور بعض فروع بحوث العمليات إلى أيام نيوتن ولاغرانج وكوشي. إلا أن التطور الكبير في مختلف فروع بحوث العمليات وجد خطواته الأولى خلال الحرب العالمية الثانية وفي السياق العسكري (وفيه أكثر المنظومات تعقيداً)، معتمداً على العلماء البريطانيين. لقد قادت النجاحات الكبيرة لفرق بحوث العمليات البريطانية إلى اعتماد الجيش الأميركي لتجربة مشابهة. ثم انتقلت العدوى إلى معظم بلاد العالم المتقدم. وكانت الخطوة التالية، الاهتمام بالتطبيقات المدنية لهذا الفرع العلمي الجديد (بحوث العمليات) فالكثير الكثير من المسائل التي تطرحها طبيعة المهام والأعمال العسكرية، لها مشابهات في فروع المعرفة المختلفة. وهكذا فقد أصبحت بحوث العمليات والأدوات الرياضية التي تقدمها ضرورة لا غنى عنها لمعظم العلوم الأخرى، خاصة الهندسية منها.

سنتعرض في عملنا هذا لِمقدمات في بعض فروع بحوث العمليات. وسنجعل دراستنا لتلك الفروع في جزأين (كتابين)، يقوم ثانيهما على دراسة أولية لبعض الأدوات المتقدمة في بحوث العمليات. أما أولهما، وهو كتابنا الحالي، فيقوم على الأجزاء الثلاثة التالية :

- **نظرية البيانات *Graph Theory*** : نتعرض في الجزء الأول من الكتاب لِهذه الأداة التي تسهل كثيراً عملية نمذجة العديد من المسائل في فروع علمية متعددة، مثل المعلوماتية وخاصة الشبكات، ومثل علم الاقتصاد والإدارة، وذلك بفضل طبيعتها البيانية البصرية. وقد ارتأينا في هذا الكتاب ترجيح كفة الرؤية الخوارزمية لمسائل نظرية البيانات، لاعتقادنا أنها أكثر إثارة للاهتمام (وربما أكثر فائدة) لطلاب المعلوماتية، علماً

أن نظرية البيانات تضم مخزوناً غنياً من النتائج الرياضية الأخرى، مثل تلك المتعلقة بتصنيف البيانات ودراسة أشكالها.

وعلى هذا ينقسم الجزء الأول من الكتاب إلى أربعة فصول، خصصنا أولها لاستعراض أهم المصطلحات المستخدمة لاحقاً، ولشرح الطريقتين الأساسيتين في تمثيل البيانات حاسوبياً. أما الفصل الثاني فهو مخصص لخوارزميات عبور البيان وبعض تطبيقاتها، على حين يدرس الفصل الثالث خوارزميات البحث عن شجرة المسح الأصغرية. وفي النهاية نتعرّض لبعض أهم خوارزميات البحث عن أقصر الطرق داخل البيان. ونريد أن نؤكد هنا عدم شمولية هذا الجزء من الكتاب فيما يخص نظرية البيانات، وأننا سنتستعرض مسائل التدفق في كتاب بحوث العمليات 2.

- البرمجة الخطية ***Linear Programming*** : تعتبر البرمجة الخطية (التي سنعالجها في فصول ثلاثة : الخامس والسادس والسابع) واحدا من أعظم الاختراعات في حقل بحوث العمليات منذ الحرب العالمية الثانية. وهي أداة رياضية تسمح لنا بنمذجة وتحليل وحل طيف واسع من المسائل التي صاحبت التطور العلمي الكبير الذي يشهده عالمنا المعاصر.

إن الأمثلة على المسائل التي يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية أكثر من أن تعد فمنها، على سبيل المثال لا الحصر، مسائل الاستخدام الأمثل للموارد، ومسائل تخطيط الإنتاج، ومسائل توزيع الموارد، ومسائل الترتيب، والكثير الكثير غيرها من المسائل.

سنعالج في بداية الفصل الخامس (الفصل الأول من الجزء المتعلق بالبرمجة الخطية) المفاهيم والمصطلحات الأساسية للبرمجة الخطية، ونشير إلى كيفية وضع نماذج البرامج الخطية للمسائل العملية؛ ثم نتعرض لطرائق حل البرامج الخطية، فنناقش الطريقة البيانية ونبين محدوديتها، يلي ذلك دراسة المفاهيم والمبرهنات الأساسية التي تهيىء

القاعدة النظرية التي تقوم عليها الطريقة التحليلية، وهي المنهج العام لحل البرامج الخطية.

نستثمر في الفصل السادس القاعدة الرياضية التي عُرضت في الفصل الخامس لدراسة نمطين من خوارزمية سمبليكس الأولية : الأصلية والمعدلة.

أما في الفصل السابع، فندرس مفهوم الثنوية وهو مفهوم أساسي في البرمجة الخطية، ويقود إلى نتائج ذات قيمة نظرية وعملية كبيرة جداً. كما سنقوم بدراسة العلاقة بين البرامج الأولية والبرامج الثنوية، تمهيداً لوضع خوارزميات لحل البرامج الخطية تعتمد مفهوم الثنوية والأولية-الثنوية. ونتطرق إلى بعض النتائج الإضافية التي نحصل عليها من البرمجة الخطية؛ ونعالج حدود البرمجة الخطية، ونختم بدراسة أولية عن البرمجة الخطية المتعددة الأهداف.

- تعقيد المسائل ***Problems Complexity***: كانت التطبيقات العلمية الأولى للحاسوب تُجرى على معطيات قليلة، لذا لم تكن هناك أهمية لحساب عدد العمليات اللازمة لحل مسألة ما. بعد ذلك توسعت مجالات التطبيقات إلى حدٍ مذهل : فَصِرنا نسعى إما لحل مسائل مرتفعة التوافقية (التراكبية) *Combinatory* أو مسائل ذات معطيات كبيرة جداً. وسريعاً ما لاحظنا أن الحاسوب، على سرعته، له حدوداً يجب أخذها بالاعتبار. وسرعان ما ظهر السؤال التالي : كم من الزمن وكم من الذاكرة نحتاج لحل مسألة ما على حاسوب ما باستخدام خوارزمية ما؟.

لقد كانت الإجابة على هذه التساؤلات محور الاهتمام الأول لعلم تعقيد المسائل، وسمّي ذلك بتعقيد الخوارزميات (وهو غير تعقيد المسائل -هناك، في بعض الأحيان، خلطٌ بين المفهومين-). لكن ما يهمنا في العمق، أساساً، هو دراسة تعقيد المسائل لا الخوارزميات الذي سنناقشه في فصلنا الثامن والأخير، حيث نقدم بعض المفاهيم والأدوات الأساسية التي تقوم عليها دراسة تعقيد المسائل، والتي تنتهي بنا إلى تصنيف المسائل. ثمّ

ملاحظة

في بيان موجه، إذا كانت درجة دخول عقدة ما معدومة، قلنا عنها إنها منبع *Source* وإذا كانت درجة خروجها معدومة قلنا عنها إنها مصبّ *Sink*.

1. 1. 3. الطريق داخل بيان

لتكن x و y عقدتين في البيان $G[V,E]$ نسمي طريقاً *path* بين x و y، كل مجموعة من الوصلات أو الأسهم المتتالية (نهاية وصلة = بداية الوصلة التالية) التي تبدأ بـ x وتنتهي بـ y.

ويمثّل الطريق كما يلي: $< x, v_1, v_2, \ldots, v_n, y >$

ملاحظة

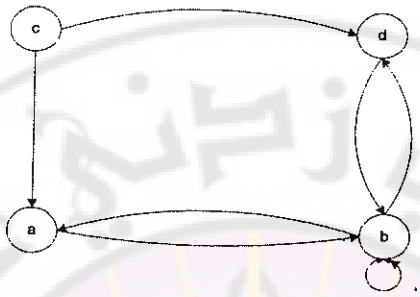
إن تعريف الطريق لا يميز بين بيان موجّه أو غير موجّه، ولكن في حالة البيان الموجّه يجب مراعاة الاتجاه عند اختيار الأسهم. ونشير إلى أنه في بعض الكتب يدعى الطريق في البيان غير الموجه بالسلسلة *Chain*.

إذا لم يكن الطريق يمرّ على أية عقدة أكثر من مرة واحدة، قلنا عنه إنه طريق بسيط *elementary path*.

مثال 1. 2

السلسلة $<a, b, d>$ في الشكل (1. 4) هي الطريق البسيط من a إلى d، والسلاسل من الشكل: $<a, b, d, b, d,..,d>$ أو $<a, b, d, b, d,..,d>$ هي أيضاً طرق بين العقدتين

ولكنها غير بسيطة.



الشكل 1. 4: الطرق و السلاسل داخل بيان.

مبرهنة 1. 2

كل طريق بين عقدتين يحوي حتما طريقا بسيطا بينهما.

البرهان: تمرين.

1. 1. 4. الحلقات والدارات

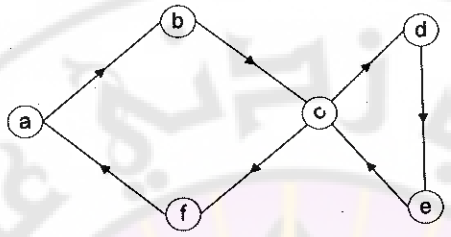
عندما ننظر إلى طريق يبدأ وينتهي في العقدة نفسها $(x = y)$ نسمي مثل هذا الطريق حلقة *cycle* إذا لم يكن البيان موجها ودارة *circuit* في الحالة الأخرى.

ويمكن بالطبع تحديد تعريف البساطة على الحلقات و الدارات كما هي معرفة من أجل السلاسل والطرق.

مثال 1. 3

- في البيان المعطى في الشكل (1. 4) $<a, b, d, b, a>$ هي حلقة تبدأ وتنتهي بـ a.

- في البيان المعطى في الشكل (1. 5) <a,b,c,d,e,c,f,a> هي دارة مركبة.
- في البيان المعطى في الشكل (1. 5) <a,b,c,f,a> هي دارة بسيطة.



الشكل 1. 5 : الدارات في البيان الموجّه

وتجدر الإشارة إلى أن البيان الذي لا يحوي حلقات يسمى *acyclic*. ولهذا يرمز في بعض المراجع إلى البيان الموجه الخالي من الدارات بـ*DAG: Direct Acyclic Graph*.

1. 1. 5. الارتباط والارتباط القوي *Connectivity*

ليكن لدينا البيان $G\ [V,E]$ الذي قد يكون موجّهاً أو غير موجّه.

تعريف الارتباط

نعرّف العلاقة C التي تربط بين عقد البيان كالتالي:

من أجل أية عقدتين x, y : $xCy \Leftrightarrow$ يوجد سلسلة تربط بين x و y أو $x = y$.

أي من وجهة النظر البيانية، يكون البيان مرتبطاً *connected* إذا كان مؤلفاً من مجموعة واحدة من العقد، التي تصل بينها مجموعة من الوصلات، ولا يحوي عقداً منفصلة.

إن تعريف الارتباط مستقل عن التوجيه، لأننا ننظر إلى سلاسل تصل بين العقد دون

النظر إلى وجهة كل وصلة.

تعريف الارتباط القوي

تخصّ ميزة الارتباط القوي البيانات الموجهة فقط وتعرّف بما يلي:

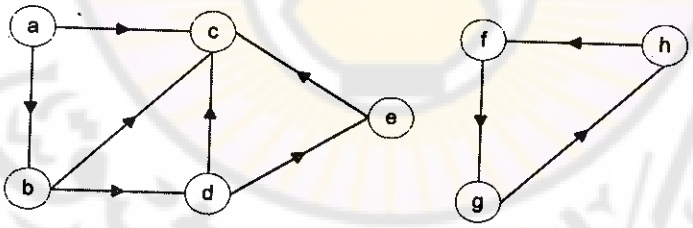
نعرّف العلاقة C_S بين عقد البيان بالتالي:

من أجل أية عقدتين y, x: $xC_sy \Leftrightarrow$ يوجد طريق من x إلى y وطريق من y إلى x

أو $x = y$

إن التحقق من الارتباط القوي لبيان أكثرُ صعوبة من الارتباط البسيط (وخاصة للبيانات الكبيرة الحجم) وسنرى لاحقاً خوارزمية تسمح بالحصول على المركبات المرتبطة بقوة في أي بيان موجه.

مثال 1. 4



الشكل 1. 6: البيانات المترابطة و غير المترابطة

في البيان الوارد في الشكل (1. 6)، يتألف البيان من مركبتين فهو إذن غير مترابط *disconnected* ولكنه مكوّن من بيانين مترابطين.

إن المركبة التي تحوي $\{g, f, h\}$ في البيان الوارد في الشكل (1. 6) هي مرتبطة بقوة، على حين أن المركبة الأخرى غير مرتبطة بقوة، لأننا مثلاً لا نستطيع الوصول من b إلى a.

1. 1. 6. البيان الجزئي وتحت البيان

ليكن لدينا البيان $G\ [V,E]$ وليكن $V' \subset V$ ، $E' \subset E$ نعرّف اعتباراً من V' مجموعة من الوصلات المجاورة للعقد الموجودة في V' ونسميها $E_{V'}$:

$$E_{V'} = \{(x, y) \in E | x \in V', y \in V'\}$$

يمكننا أن نعرّف باستخدام المجموعات السابقة ثلاثة أنواع من البيانات المحتواة داخل البيان الأصلي G:

- تحت البيان *Subgraph* المشتق من V' : $G_{V'}[V', E_{V'}]$
- البيان الجزئي *Partial graph* المبني على E' : $[V', E']$
- تحت البيان الجزئي: $[V', E' \cap E_{V'}]$

مثال 1. 5

يمكن النظر إلى خريطة الشوارع والتقاطعات في مدينة دمشق على أنها بيان عقده التقاطعات ووصلاته الشوارع التي تصل بينها.

فإذا ذهب اهتمامنا إلى جزء الخريطة الذي يغطي منطقة البرامكة، فإننا عندها نتحدث عن تحت بيان. أما إذا كنا نهتم فقط بالشوارع العريضة في دمشق (أوتوستراد) فإننا عندها نهتم ببيان جزئي.

تمرين: ليكن لدينا البيان الموضح في الشكل (1. 7). حدد طبيعة المعطيات التالية :

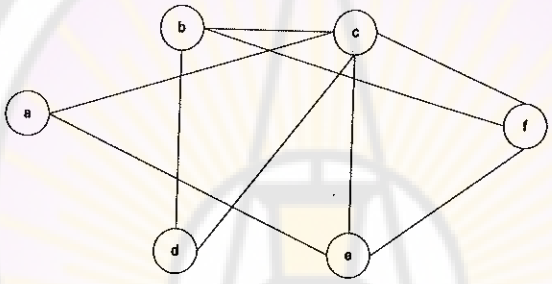
<b, c, f, e>

<c, d, b, c, e, a, c>

<b, c, f, e, a, c, b>

<a, c, b, d, c, f>

وإذا مثلت هذه المعطيات حلقات وسلاسل غير بسيطة، أعط الشكل البسيط الذي يمكن اشتقاقه منها.



الشكل 1. 7

لتثبيت المعلومات نعطي الجدول التالي:

نوع البيان	الوصل بين عقدتين متجاورتين	للذهاب من نقطة إلى أخرى	الخروج والعودة إلى العقدة نفسها	طبيعة الارتباط
غير موجه	وصلة *link*, *edge*	سلسلة *chain*	حلقة *cycle*	ارتباط عادي
موجه	سهم *arc*	طريق *path*	دارة *circuit*	ارتباط قوي

1. 1. 7. البيانات المتقابلة

ليكن لدينا البيانان $G_1[V_1,E_1]$ ، $G_2[V_2,E_2]$ (الموجهان أو غير الموجهين) نقول عن G_1 و G_2 أنهما متقابلان (أو متشاكلان) *Isomorphic* إذا وجد تقابلان من الشكل:

$$f:V_1 \to V_2 \quad ، \quad g:E_1 \to E_2$$

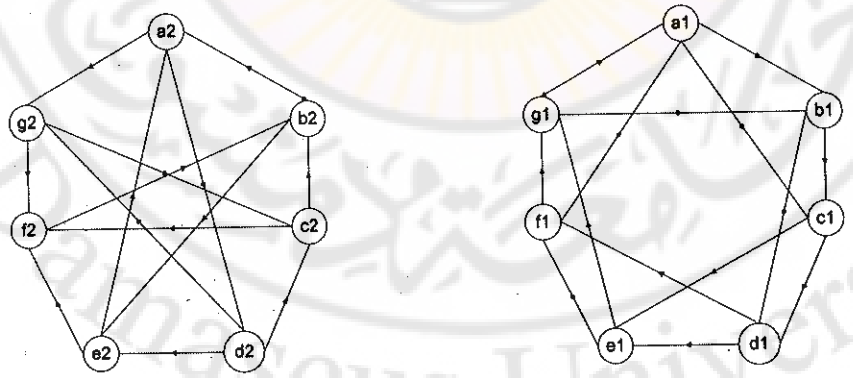
بحيث من أجل أية وصلتين (أو سهمين) متقابلتين من V_1 و V_2 حسب f، تكون العقد المجاورة لكل منهما متقابلة حسب التقابل g.

ملاحظة

يكفي البحث عن أحد التقابلين. فإذا أوجدنا f مثلاً يصبح التعريف: يكون البيانان متقابلين إذا وُجد تقابل f بحيث من أجل أية وصلة (x,y) تنتمي إلى E_1 ، تكون الوصلة $(f(x)f(y))$ موجودة في E_2.

مثال 1. 6

يعطي الشكل 1. 8 مثالاً لبيانين متقابلين (أوجد التقابل).



الشكل 1. 8. : مثال لبيانين متقابلين

1. 1. 8. تعاريف إضافية في البيانات غير الموجهة

نقول عن بيان غير موجه إنه **كامل (أو تام)** *Complete* إذا كانت كل العقد متصلة بعضها ببعض مثنى مثنى.

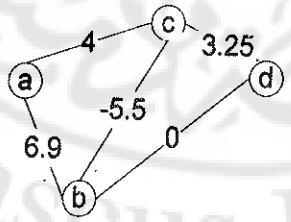
تمرين: ما عدد الوصلات في بيان كامل يحوي n عقدة ؟

ما أصغر عدد من الوصلات الضرورية لوصل n عقدة بعضها ببعض؟

نقول عن بيان غير موجه إنه **ثنائي الجزء** *bipartite* إذا كان يمكن فصل مجموعة العقد إلى مجموعتين V_1 ، V_2 بحيث تصل كل وصلة من البيان بين عقدة من V_1 وعقدة من V_2.

يسمى البيان غير الموجه والذي لا يحوي حلقات **غابة** *Forest* وإذا كان مؤلفا من بيان مترابط وحيد فنسميه عندئذ **شجرة** *Tree*.

نحتاج في كثير من الأحيان إلى إعطاء قيمة لكل وصلة، قد تكون مثلا طول طريق أو زمن تنفيذ مهمة، إلخ، وعندها نقول إن **البيان مثقل** *Weighted graph*. ويتم ذلك عادة بتعريف تابع $w: E \to R$. يعطي الشكل 1. 9 مثالا للبيان المثقل.



الشكل 1. 9 : بيان مثقل

1. 2. التمثيل المعلوماتي للبيانات

هناك طريقتان قياسيتان لتمثيل البيان داخل الحاسوب. تمثل الأولى البيان *G [V,E]* على شكل مجموعة من قوائم الجوار *Adjacency lists*. عـى حـين تمثلـه الثانيـة علـى شـكل مصفوفة جوار *Adjacency Matrix*.

ومن المحبذ عادة استخدام الطريقة الأولى لأنها توفر في استخدام الذاكـرة وخاصـة عندمـا يتعلق الأمر ببيانات ذات عدد قليل من الوصلات بالنسبة لعدد العقد *Sparse Graphs* $(|E| << |V|^2)$.

أما في حالة البيانات المليئة أو الكثيفة *Dense Graphs* (القريبة من البيان الكامل) والـتي يقارب فيها عدد الوصلات مربع عدد العقد $(|E| = O(|V^2|))$ ، فمن المفضل تمثيـل البيـان على شكل مصفوفة. كما أن التمثيل المصفوفي مناسب عندما نريـد أن نتـأكد بسـرعة مـن وجود وصلة بين عقدتين في البيان.

التمثيل باستخدام القوائم

يمثل البيان *G [V,E]* باستخدام شعاع *Adj* طوله $|V|$ ويحوي قوائم خطية تمثل كل منها قائمة الجوارات لكل عقدة من العقد. فمن أجل أية عقدة $u \in V$ ، يحوي *Adj [u]* كـل العقد v بحيث $(u,v) \in E$ وذلك ضمن قائمة خطية دون ترتيب معين لهذه العقـد (انظـر الشكل *1. 10*).

إذا كان البيان الممثل موجها فإن الطول الكلي للقوائم يكون مساويا لـ $|E|$ عـدد الأسـهم الكلي في البيان، أما إذا كان غير موجه فإن طول القوائم الكلي يساوي $2|E|$ لأن كـل

وصلة (u,v) تظهر في $Adj\ [u]$ و $Adj\ [v]$.

وفي كل الأحوال نرى أن حجم الذاكرة اللازم لتخزين تمثيل البيان $G\ [V,E]$ يحقق $O(V+E) = O(max(V,E))$.

ونشير إلى إمكان استخدام قوائم الجوار لتمثيل البيانات المثقلة، التي تحمل قيمة على كل وصلة من وصلاتها وذلك بإضافة حقل يحوي وزن الوصلة إلى كل عنصر من القوائم الخطية.

تعاني طريقة القوائم سيئة وحيدة تتمثل في عدم وجود طريقة سريعة (بزمن ثابت) للتأكد من وجود وصلة بين عقدتين، إذ يتحتم علينا في غالب الأحيان استعراض كامل القائمة $Adj[u]$ لنعرف: أكانت الوصلة (السهم) (u,v) معرفة أم لا؟

التمثيل باستخدام المصفوفات

نفترض أن عقد البيان $G\ [V,E]$ مرقمة من 1 حتى $|V|$ ومن ثم يمثل البيان باستخدام مصفوفة A أبعادها $|V|\times|V|$ وتحقق عناصرها العلاقة:

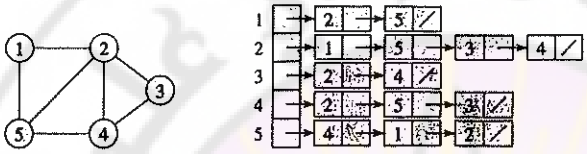
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & if\,(i,j) \in E \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وهكذا ترى أن حجم الذاكرة الذي يحجز لتمثيل بيان ما، يساوي $|V|^2$ مهما كان عدد الوصلات فيه. أي أن حجم الذاكرة من الرتبة $0\left(|V|^2\right)$ (قارن بالتمثيل بالقوائم).

بالنظر إلى المثال المورد هنا نلاحظ أنه في حالة البيان غير الموجه تكون المصفوفة متناظرة $\left(A={}^tA\right)$ ولذلك يمكننا تمثيل البيان باستخدام القسم العلوي الأيمن من المصفوفة وهذا ما يختصر نصف حجم الذاكرة الضروري تقريبا $\left(\frac{|V|(|V|+1)}{2}\right)$.

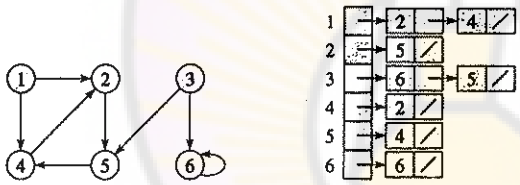
ثم إنه يمكن اختصار حجم الذاكرة لتمثيل a_{ij} باستخدام بت وحيد عوضا عن كلمة كاملة.

وكما في حالة التمثيل بالقوائم، يمكن استخدام المصفوفة لتمثيل البيانات المثقلة، فيستعاض عن *1* بقيمة الوصلة، و عن *0* التي تعبر عن غياب الوصلة باستخدام *Nil*.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

الشكل *1. 10*: التمثيل المعلوماتي لبيان غير موجه.



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

الشكل *1. 11* : التمثيل المعلوماتي لبيان موجه.

ملخص

- تسمح المصفوفة بالوصول إلى لمعلومات بسرعة (بزمن ثابت).
- تختصر اللائحة من حجم ذاكرة التخزين.
- يمكن تخزين تثقيل الوصلات في نوعي التمثيل.

تمرينات

التمرين 1. أعط طريقة لحساب درجة دخول وخروج أية عقدة من البيان الموجه G باستخدام نوعي التمثيل بالقوائم وبالمصفوفة.

أعط درجة تعقيد كل طريقة.

التمرين 2. الغرض: استخدام نموذج بياني لتمثيل الأحجية التالية و حلها.

لدينا 3 أوعية سعتها بالترتيب 8 ,5 ,3 ليتر. يحوي الوعاء الأول 8 ليتر حليبا ونريد إيجاد مجموعة عمليات الصب والنقل من وعاء إلى آخر التي تسمح بالحصول على وعاء يحوي 4 ليتر علما أن الأوعية غير مدرجة ولا يمكننا ملء كل وعاء إلا كاملا.

1) حدد الحالات التي يمكن أن نحصل عليها باعتماد التمثيل (C_1, C_2, C_3) لكل حالة حيث C_i هي حجم الحليب الذي يمكن أن نجده في كل وعاء.

2) ارسم الأسهم التي تصل بين كل حالتين يمكن المرور من إحداهما إلى الأخرى.

3) استنتج الآن المراحل للحصول على حل الأحجية (يوجد أكثر من حل ممكن).

التمرين 3. خصائص الشجرات:

ليكن لدينا البيان $G\,[V,E]$ برهن على تكافؤ الفرضيات التالية:

ا) G عبارة عن شجرة

ب) تتصل أية عقدتين من البيان بسلسلة بسيطة وحيدة

ج) G بيان متصل ولكن إذا أزلنا أية وصلة أصبح G غير متصل

د) G بيان متصل و $|E| = |V| - 1$

ه) G بيان دون حلقات و $|E| = |V| - 1$

و) G بيان دون حلقات ولكن إضافة أي وصلة إلى E تؤدي إلى خلق حلقة في البيان الناتج.

التمرين *4*. ليكن لدينا البيان الموجه $G\,[V,E]$ نعر ف مربع G: $G^2 = [V, E^2]$ بحيث $(u,w) \in E^2$ إذا كان يوجد طريق طوله *2* من u إلى w داخل G أي إذا كان يوجد عقدة v بحيث $(u,v) \in E$ و $(v,w) \in E$. أعط خوارزمية لحساب G^2 اعتبارا من G وذلك باستخدام التمثيلين الممكنين. وأعط تعقيد كل خوارزمية مقترحة.

التمرين *5*. نعرف مصفوفة الورود *Incidence* من أجل بيان موجه $G[V,E]$ بأنها المصفوفة B ذات الأبعاد $|V| \times |E|$ والتي تحقق:

$b_{ij} = -1$ إذا كان السهم j خارجا من العقدة i.

$b_{ij} = 1$ إذا كان السهم j داخلا إلى العقدة i.

$b_{ij} = 0$ في الحالات الأخرى.

ماذا تمثل المصفوفة $B'B$ ؟

الفصل الثاني

خوارزميات البحث داخل بيان

نحتاج في كثير من الأحيان، لحل مسألة ممثلة ضمن بيان، إلى النظر أو إلى استعراض جميع عقده أو جميع وصلاته. ولهذا تُسمى الخوارزميات التي سنستعرضها في هذا الفصل أيضاً باسم خوارزميات المرور عبر البيان *Graph Traversal* والتي تنطبق على البيانات الموجّهة وغير الموجّهة.

هناك من حيث الأساس طريقتان لاستعراض عقد بيان ما، تُسمى الأولى "بالبحث بالعرض أولاً" *Breadth-first search*، والثانية "بالبحث بالعمق أولاً" *Depth first search*.

2 .1. البحث بالعرض أولاً

تعتبر هذه الخوارزمية من أبسط الخوارزميات في نظرية البيان، وتمثل نموذجاً لخوارزميات أخرى سنراها لاحقاً، مثل خوارزمية ديجكسترا في البحث عن أقصر الطرق اعتباراً من عقدة ما، ومثل خوارزمية بريم في البحث عن أصغر شجرة تغطية داخل بيان.

تعتمد الفكرة الأساسية لهذه الخوارزمية، التي ستُسميها من الآن فصاعداً *BFS*، على استعراض العقد اعتباراً من عقدة مبدأ s وفق الترتيب المتصاعد لبعد العقد عن العقدة s،

حيث يمثل البعد هنا عدد الوصلات في السلسلة التي تفصل بين عقدة ما والمبدأ. ولهذا السبب نتحدث عن البحث بالعرض، لأن الخوارزمية تكتشف جميع العقد ذات البعد r قبل أن تستكشف العقد ذات البعد $r+1$.

ولما كان بالإمكان الوصول إلى عقدة ما من عدّة طرق، فإننا نحتاج إلى إضافة إشارة Tag أو لون إلى العقدة التي تُكتشف في المرحلة r، حتى لا يُعاد اكتشافها أو المرور عليها في مرحلة لاحقة. ونورد هنا الترميز الخوارزمي لـ BFS باعتماد إضافة علامة إلى العقد.

```
BFS(G,s)
for each vertex u ∈ V \ {s} do
        Tag[u] ← False
        d[u] ← ∞
        Π[u] ← nil
    Tag[s] ← true
    d[s] ← 0
    Π[s] ← nil
    Q ← {s}
    While Q ≠ 0 do
      u ← head[Q]
do for each v ∈ Adj[u]
if Tag [v] = false then
        Tag[v] ← true
        d[v] ← d[u] + 1
        Π[v] ← u
        Enqueue(Q, v)
Dequeue (Q,u)
```

شرح الخوارزمية

نقوم في بداية الخوارزمية بتهيئة العقد وجعل إشارات الزيارة *Tag[u]* مساوية لـ *false* ما عدا العقدة *s* التي سنبدأ منها الاستكشاف، ونعطي للتابع *d[u]* وهو يمثل بعد العقدة *u* عن *s* القيمة البدائية (∞) وللتابع $\Pi[u]$ الذي يمثل العقدة السابقة للعقدة *(father node) u* في الطريق من *s* إلى *u*، القيمة *nil*، وبالمثل نعطي للعقدة *s* القيمة $d[s]=0$.

بعد إنهاء التهيئة نبني خط انتظار *FIFO Queue* يحوي في الحالة البدائية فقط العقدة *s*، وهو الذي سيضطلع بتنظيم استكشاف العقد وفق القيمة المتزايدة لبعدها عن *s*. وبعد ذلك سيحوي *Q* مجموعة العقد التي اكتُشفت ولكن لم يجرِ بعد اكتشاف جميع مجاوراتها.

تتكرر الحلقة الرئيسية في الخوارزمية مالم يصبح خط الانتظار *Q* فارغاً. وفي هذه الحلقة نختار *u* لتكون العقدة الأولى في *Q* ونستكشف كل العقد التي تجاورها. فإذا كانت عقدة ما *v* مكتشفة سابقاً لا نفعل شيئاً وإلا نعتبر أن *v* اكتُشفت اعتباراً من *u* وعندها تكون العقدة *u* هي العقدة السابقة لـ *v* ويكون بعدها عن *s* مساوياً لبعد *u* مضافاً إليه *1 (d[v] = d[u] + 1)*.

إضافةً إلى ذلك ندخل *v* إلى خط الانتظار لاستكشاف جواراتها حالما يتم إخلاء كل العناصر التي تسبقها والتي يكون بعدها عن *s* مساوياً لبعد *u* عنها وذلك حسب طريقة بناء خط الانتظار.

وفي النهاية عندما ننتهي من اكتشاف جميع جوارات *u* نستطيع حذفها من خط الانتظار.

تعقيد الخوارزمية

بعد إنهاء عملية التهيئة التي تستعرض كل العقد مرة واحدة، أي بدرجة تعقيد خطية $O(|V|)$، تدخل كل عقدة إلى خط الانتظار مرة وحيدة، إذ متى صارت إشارتها *True* فإنها لن تتغير بعد ذلك. ونلاحظ أنه من أجل كل عقدة تجري زيارة كل جواراتها، وذلك طبعاً وفق الوصلات الموجودة في البيان. أي إننا في مجمل العمليات نقوم باستعراض كل الوصلات مرّة واحدة فقط، وذلك عندما تكون عقدة بداية الوصلة موجودة في رأس خط الانتظار Q؛ أي إن درجة التعقيد الكلية لاستعراض الجوارات هي $O(E)$ وبهذا يكون التعقيد الكلي لخوارزمية *BFS* من الدرجة $O(V+E)$.

ملاحظات عامة

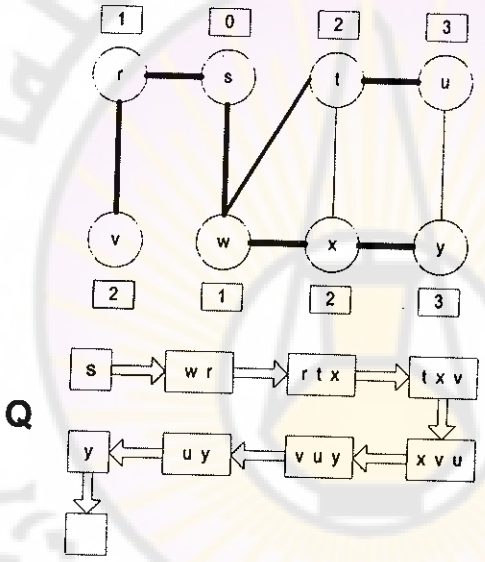
يمكن البرهان على أن *BFS* تعيد داخل الشعاع d المسافة الصغرى بين s وبين أية عقدة أخرى من البيان أي *Shortest-Path distance* التي نرمز إليها بـ $\delta(s,v)$ وذلك باعتبار أن المسافة التي تفصل بين عقدتين متجاورتين تساوي الواحد وهذا ما يشكل حالة خاصة من خوارزمية ديجكسترا التي سنستعرضها في بحث لاحق.

تسمح الخوارزمية *BFS* ببناء شجرة البحث بالعرض ذات المبدأ s وذلك اعتماداً على الشعاع Π. نُسمي هذه الشجرة $G_\Pi[V_\Pi, E_\Pi]$ حيث:

$$V_\Pi = \{v \in V : \Pi[v] \neq nil\} U \{s\}$$
$$E_\Pi = \{(\Pi[v], v) \in E : v \in V_\Pi \setminus \{s\}\}$$

ويمكن التوثق من أن G_Π هو عبارة عن شجرة، مجموعة عقدها هي العقد التي يمكن الوصول إليها اعتبارا من s؛ ومن أجل كل عقدة $v \in V_\Pi$ يوجد سلسلة وحيدة تمر بالعقد في V_Π وتسمح بالوصول من s إلى v؛ ثم إن $|E_\Pi| = |V_\Pi| - 1$ و G_Π بيان مرتبط خال من الحلقات وهذا ما يطابق تعريف الشجرة (انظر التمرين الثالث في الفصل السابق).

مثال *2. 1*



الشكل *2. 1*: مثال لتنفيذ خوارزمية ***BFS***

لنأخذ البيان المعطى بالشكل (*2. 1*). نبدأ عملية البحث بالعرض على هذا البيان اعتبارا من العقدة s ولذلك نعتبر أن عمقها يساوي الصفر و هي العقدة الأولى التي ستدخل إلى خط الانتظار Q و الذي يبرز الشكل تطوره مع تقدم تنفيذ الخوارزمية. كما

توضح الوصلات الغامقة الطريق الذي تم سلوكه لاكتشاف العقد (لاحظ أن البيان المؤلف من هذه الوصلات يشكل شجرة).

2. 2. البحث بالعمق أولا

كما يوحي اسم الخوارزمية، فإننا نحاول استكشاف البيان بزيارة العقد المتتالية حتى أقصى عمق ممكن، أي باستكشاف جوار أحدث عقدة جرى استكشافها، على عكس البحث بالعرض حيث كنا نستكشف العقد حسب الترتيب المتصاعد لعمقها، وبالعودة إلى أول عقدة لم تُستكشف جواراتها. بمعنى آخر، إن خوارزمية البحث بالعمق، التي سنُسميها *DFS* هي خوارزمية تراجعية *Backtracking algorithm*.

وكما في البحث في العرض، نضع إشارة على كل عقدة تُكتشف حتى لا يجري اكتشافها مرّة أخرى اعتباراً من طريق آخر، وتستخدم خوارزمية *DFS* لحظة اكتشاف العقدة والتي نُسميها *(d[v]: discovery timestamp)* ولحظة الانتهاء من اكتشاف كل جواراتها *(f[v]: finishing timestamp)* وذلك عوضاً عن البعد عن *s* الذي جرى تعريفه في خوارزمية *BFS*.

ونفترض في *DFS* أن اللحظات (الاكتشاف أو الانتهاء) تأخذ قيماً صحيحة في المجال $[1,2|V|]$ إذ إن كل عقدة لن تُكتشف إلا مرة واحدة، وهناك لحظة وحيدة للحكم بالانتهاء منها، وهذا ما يجعل عدد القيم الممكنة لـ *d[v]* و *f[v]* هي $2|V|$ قيمة ممكنة فقط.

وبهذا يمكن كتابة الخوارزمية على الشكل التالي: هناك إجرائية رئيسة لتهيئة العقد *DFS(G)* وهي تستدعي إجرائية ثانية نُسميها *DFS-Visit (u)* من أجل كل عقدة لم تجر بعد زيارتها.

إن مهمة *DFS-Visit (u)* هي أن تستكشف العقد داخل البيان اعتباراً من عقدة المبدأ u. ولما كانت خوارزمية البحث في العمق خوارزمية تراجعية، فمن البدهي أن تكون الخوارزمية *DFS-Visit* عودية كما هو موضح هنا.

```
DFS(G)
For each u ∈ V do
Tag [u] ← False
        Π[u] ← nil
Time ← 0
For each u ∈ V do
If Tag [u] = False then
DFS-Visit (u)
```

تعتبر u جذراً لشجرة اكتشاف جديد

```
DFS-Visit (u)
Tag [u] ← True
d[u] ← Time ← Time + 1
For each v ∈ Adj [u] do
If Tag [v] = False then
        Π[v] ← u
DFS-Visit [v]
        f[u] ← time ← time + 1
```

شرح الخوارزمية

كما في خوارزمية البحث بالعرض، يمثل $\Pi[v]$ العقدة السابقة لـ v والتي جرى اكتشاف v اعتبارا منها أي عبر الوصلة (u,v).

وبخلاف خوارزمية البحث في العرض، تشكل الوصلات التي يجري المرور عبرها لاكتشاف العقد، مجموعة من الأشجار، لا شجرة وحيدة، ويكون مبدأ الشجرة هو العقدة التي تستدعى *DFS-Visit* من أجلها في الإجرائية *DFS*.

ونلاحظ في الإجرائية أنه لا يوجد لحظتا d و f متساويتان، وإنما من أجل أية عقدة، تحقق هاتان اللحظتان العلاقة: $d[u]+1 \le f[u]$ ويوضح الشكل تطبيق الخوارزمية على بيان موجه.

زمن تنفيذ البحث بالعمق

نلاحظ أن التهيئة تأخذ زمنا متناسبا مع عدد العقد أي $O(|V|)$ وأن الإجرائية *DFS-Visit (u)* تستدعى لمرة واحدة لكل عقدة، عندما تكون إشارتها *false* وما إن يتم استدعاء الإجرائية حتى تتحول إشارتها إلى *true*.

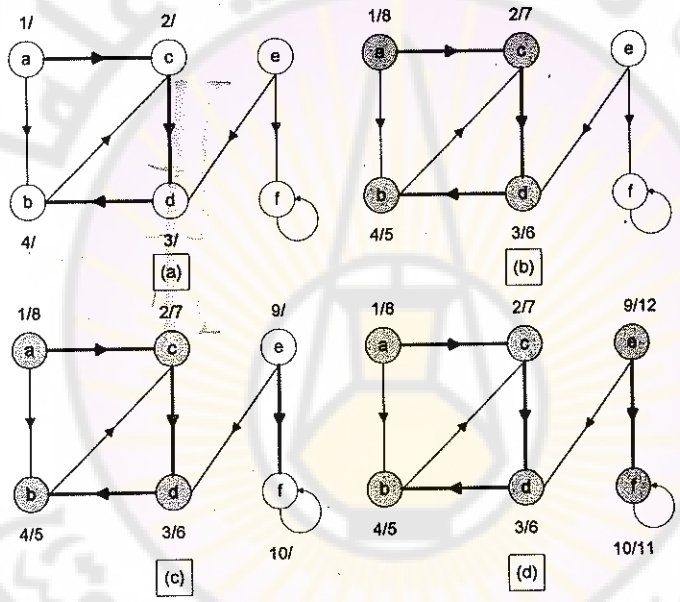
أما زمن الحلقة داخل الإجرائية *DFS-Visit (v)* فهو متناسب مع عدد العقد المجاورة لـ V أو *Adj[v]*، إذن الزمن العام لكل العقد يكون من الشكل:

$$\sum_{v \in V} |Adj[v]| = O(|E|)$$

أي إن الكلفة الكلية للخوارزمية هي من المرتبة $O(|V|+|E|)$.

مثال 2. 2

نطبق خوارزمية البحث بالعمق على البيان الموجه المعطى بالشكل (2. 2) حيث نبدأ البحث اعتباراً من العقدة a؛ وعند انتهاء الفرع الذي يبدأ بها، نختار اكتشاف الفرع الذي يبدأ بالعقدة e (لاحظ أن بيان الاستكشاف الناتج هو عبارة عن مجموعة أشجار (غابة)).



الشكل 2. 2 : مثال لتنفيذ خوارزمية *DFS*

مبرهنة 1. 1

عند تطبيق البحث بالعمق أولاً على أي بيان موجّه أو غير موجّه، تحقق لحظات الاكتشاف والانتهاء لأية عقدتين u و v إحدى العلاقات التالية:

1. المجالان $[d[u], f[u]]$ ، $[d[v], f[v]]$ مستقلان تماماً.

2. المجال $[d[u], f[u]]$ محتوى كلياً داخل المجال $[d[v], f[v]]$ و u تنتمي إلى شجرة بحث بالعمق تسبقها فيها v.

3. المجال $[d[v], f[v]]$ محتوى كلياً داخل المجال $[d[u], f[u]]$ و v تنتمي إلى شجرة بحث بالعمق تسبقها فيها u.

البرهان

- $d[u] < d[v]$: هناك حالتان:

$d[v] < f[u]$: إذن v اكتُشفت قبل الانتهاء من u لأن $f[u]$ تأخذ قيمتها في نهاية الإجرائية *DFS-Visit (u)* عند الفراغ من اكتشاف كل الشجرة التي تبدأ من u.

وبهذا نستنتج أن v تنتمي إلى هذه الشجرة.

ولما كانت v قد اكتُشفت بعد u، فإن جواراتها أو الشجرة التي تبدأ منها ستُكتشف وستُحدّد قيمة $f[v]$ قبل الفراغ من u؛ إذن $f[v] < f[u]$ و الحالة الثالثة محققة.

- $D[v] > f[u]$: يكون المجالان مستقلين تماماً (الحالة الأولى) ونستنتج من ذلك أن العقدتين تنتميان إلى شجرتين مختلفتين.

- $d[v] < d[u]$: المناقشة السابقة نفسها تؤدي إلى الاستنتاج نفسه.

نتيجة 1.2

إن v تنتمي إلى الشجرة النازلة بدءاً من u في بيان G إذا وفقط إذا تحققت المتراجحة:

$$d[u] < d[v] < f[u] < f[u]$$

2. 3. تطبيقات البحث في العمق

2. 3. 1. الترتيب التوبولوجي *Topological Sort*

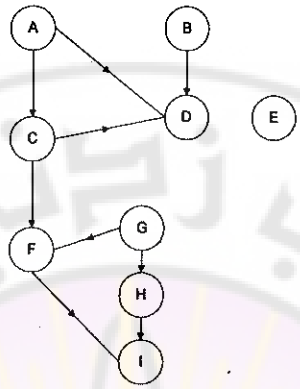
ليكن لدينا البيان الموجه $G=[V,E]$ الذي قد يمثل مجموعة مراحل لمشروع ما والعلاقات الزمنية بين هذه المراحل، بحيث تمثل المراحل كعقد البيان ونعرف السهم (u,v) إذا كانت المرحلة v تلي المرحلة u في التنفيذ.

بوجه عام لا تحوي مثل هذه البيانات أية حلقات، وإلا كان المشروع غير قابل للتنفيذ، إذ ليس من الممكن أن تسبق المهمة A المهمة B وفي الوقت نفسه يجب أن تكون المهمة B سابقة للمهمة A. وعند التحقق من خلو بيان ما من الحلقات، نحتاج إلى إعطاء ترتيب خطي للمهام، بحيث إذا كان السهم (u,v) معرفا، وردت العقدة u في الترتيب قبل العقدة v. وللقيام بهذا الترتيب نستخدم الخوارزمية التالية التي تعتمد اعتمادا أساسيا على خوارزمية البحث بالعمق أولا:

```
Topological-Sort (G)
Call DFS (G) – Compute f[u]
as each vertex u is finished
push (S,u)
Return S
```

تقوم هذه الإجرائية بتعديل إجرائية *DFS* بحيث تضاف كل عقدة انتهت معالجتها وحساب لحظة نهايتها إلى مكدس S، وتكون القائمة المرتبة داخل المكدس هي قائمة العقد مرتبة توبولوجيا.

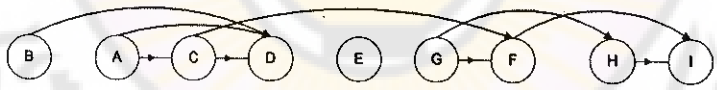
مثال 2. 3. تركيب قطع ميكانيكية متراكبة



الشكل 2. 3

نفترض أننا نريد أن نجمع منظومة ميكانيكية ما (على سبيل المثال، دراجة) مؤلفة من مجموعة من القطع المتداخلة (يعطي البيان الموضح بالشكل 2. 3. مثالا على ذلك).

لتحديد مراحل تركيب هذه القطع نقوم بتطبيق الفرز التوبولوجي لنحصل على البيان الموضح بالشكل (2. 4).



الشكل 2. 4

ملاحظة

يسمى الترتيب التوبولوجي في بعض المراجع بالترتيب الجميل *Pretty Numbering*.

خوارزمية ثانية للترتيب التوبولوجي

نقوم بترتيب العقد وفق الترتيب التصاعدي لعدد العقد الداخلة أي للدرجة $d^-(v)$.

إذا لم يكن هناك منابع (عدد عقدها الداخلةمعدوم) فالبيان يحوي حلقة حتما، ولا يمكن ترتيبه توبولوجيا.

- نختار عقدة u ذات درجة داخلة 0 ونضعها في نهاية القائمة المرتبة.
- نحذف هذه العقدة والأسهم الخارجة منها.
- ونعاود العملية حتى انتهاء كل العقد، أي حتى يصبح $L=V$

```
Pretty Numbering(G)
For each  u ∈ V  do
d[u] ← degree = In(u),
Add(Q,u)
        L ← φ
while Q ≠ φ  do
            V ← Get = Min(Q)
if d[v] > 0  then exit("no pretty numbering")
else
L ← L + {v}
for each u in Adj [v] do
d[v] ← d[v] –1
```

نستخدم في هذه الإجرائية خط انتظار ذا *1* أفضلية *Priority Queue* وهو خط انتظار تكون العناصر فيه مرتبة وفق معيار معين ونختار المعيار هنا على أنه درجة دخول العقد. أما خرج الإجرائية فهو عبارة عن قائمة مرتبة يتم إضافة العناصر إلى نهايتها.

تمرين: طبق هذه الخوارزمية على المثال السابق.

2. 3. 2. المركبات المرتبطة بقوة: *Strongly Connected Compoment*

نذكر بتعريف الارتباط القوي في بيان موجه: نقول عن بيان موجه إنه مرتبط بقوة إذا وجد طريق بين أية عقدتين من البيان.

إذا كان البيان غير مرتبط بقوة أمكننا البحث عن المركبات الجزئية داخله، والتي تكون مرتبطة بقوة. وغالبا ما تستخدم هذه الطريقة في البحث عن المركبات الجزئية المرتبطة بقوة لتحليل مسألة معقدة –ممثلة على شكل بيان كبير– إلى مجموعة من مسائل جزئية أبسط، تتمثل كل منها بمركبة مرتبطة بقوة، وتمثل فيما بعد ببيان المركبات *Component Graph*.

تستخدم الخوارزمية التي نوردها هنا خوارزمية البحث بالعمق وتستفيد من لحظات نهايات الاكتشاف التي تحسبها. كما تستخدم أيضا ما نسميه بالبيان المرافق G^t ، وهو البيان الذي ينتج عن G بقلب اتجاه كل أسهمه أي $G' = [V, E']$ حيث:

$$E' = \{(u,v) : (v,u) \in E\}$$

سنسمي الإجرائية التالية بـ *SCC*:

<u>*SCC*</u> *(G)*
DFS (G)
Get f [u]; finishing tags
Compute $G' = [V, E']$
$DFS(G')$ *in the Decreasing order of f[u]*

تستدعي الإجرائية *SCC* الإجرائية *DFS* على البيان الأصلي، ثم تستدعيه على البيان المرافق. ويعتمد الترتيب التنازلي لـ *f [u]* في استدعاء الإجرائية *DFS-Visit*. وتكون كل شجرة من الشجرات الناتجة عن المرحلة الأخيرة محتوية على مركبة قوية الارتباط وحيدة.

لن نتعرض هنا إلى برهان صحة هذه الخوارزمية و لكن نشير إلى اعتماده على التعريف الأساسي للارتباط القوي. فإذا كان البيان الأصلي يحوي طريقا من العقدة x إلى العقدة y و بالعكس فإن البيان المرافق يحوي أيضا مثل هذين الطريقين. و ترتب العقد للاستكشاف في البيان المرافق وفق الترتيب التنازلي لأن العقدة ذات زمن الانتهاء الأكبر تمثل بشكل ما جذر شجرة الاكتشاف.

تعريف 2. 1. بيان المركبات

ليكن البيان الموجه *G-[V,E]* نعرف بيان المركبات المرتبطة بقوة $G^{SCC}\left[V^{SCC},E^{SCC}\right]$ بأنه البيان الذي تمثل كل عقدة منه مركبة قوية الارتباط، ويحوي E^{SCC} السهم (C_1,C_2) إذا كان هناك سهم خارج من عقدة تنتمي إلى المركبة الممثلة بـ C_1 إلى عقدة تنتمي إلى المركبة الممثلة بـ C_2.

مثال 2. 4

نبدأ في المرحلة الأولى البحث بالعمق بدءا من العقدة c، ثم نحسب البيان المرافق و نطبق عليه خوارزمية البحث بالعمق بدءا من العقدة b ذات لحظة نهاية الاكتشاف الأكبر،

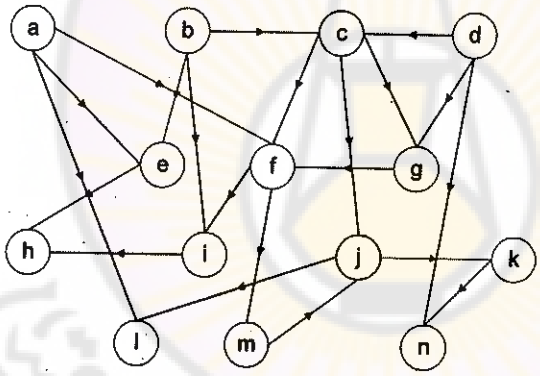
تليها العقدة c ثم العقدة g و أخيرا العقدة h. تنتمي كل شجرة من شجرات البحث بالعمق إلى مركبة مرتبطة بقوة من مركبات البيان. ويمثل البيان الأخير بيان المركبات للبيان الأصلي.

تمرينات

التمرين 1. أعط خوارزمية تسمح بأن نعرف: أيكون بيان غير موجه ثنائي الجزء؟ (استفد من مبدأ خوارزمية *(BFS)*.

التمرين 2. اكتب خوارزمية تسمح بطباعة السلسلة أو الطريق الذي تعطيه *BFS* اعتبارا من المبدأ s وحتى عقدة ما v. سنسمي الإجرائية بـ (G,s,v) *Print Path*.

التمرين 3. رتب العقد في البيان المعطى بالشكل (2. 5) ترتيبا توبولوجيا



الشكل 2. 5

التمرين 4. دراسة بيان المركبات:

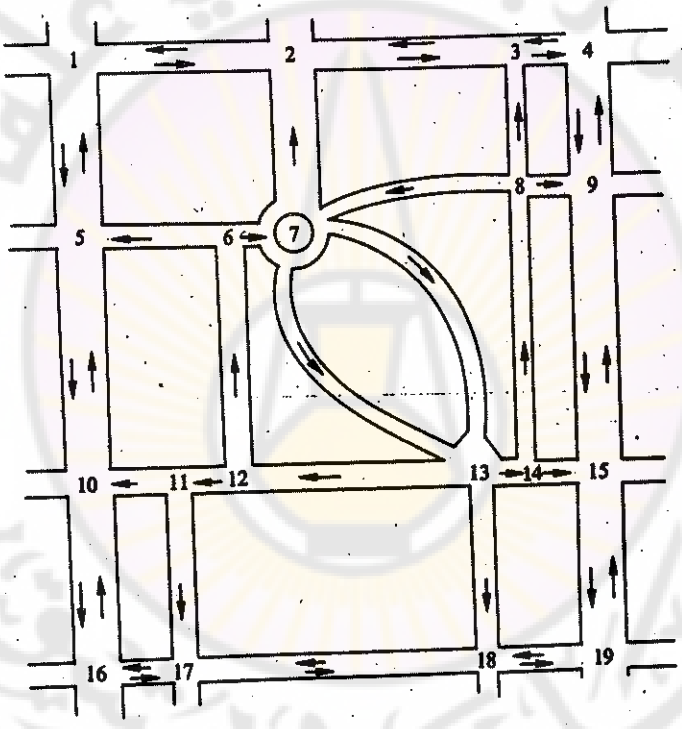
i. أعط خوارزمية ذات تعقيد $O(V+E)$ لحساب بيان المركبات.

ii. كيف يتغير عدد المركبات المرتبطة بقوة في بيان إذا زدنا سهما جديدا إلى البيان؟

iii. برهن أن G^{SCC} لا يحوي أية دارات.

التمرين 5. يقترح مهندس في محافظة مدينة ما المخطط التالي للشوارع ذات الاتجاه الوحيد في مركز المدينة. ولاعتماد هذا المخطط يجب التحقق أن أية سيارة يمكنها الوصول من أية نقطة في المدينة إلى أية نقطة أخرى.

- مثل المخطط على شكل بيان عقده هي تقاطع الشوارع، وأسهمه هي الشوارع نفسها.
- ما هي الطريقة المناسبة للإجابة عن السؤال فيما يخص إمكان الانتقال من نقطة إلى أخرى.



الشكل 2. 6

هل المخطط مقبول؟

الفصل الثالث

شجرة المسح الصغرى

نفترض في هذا الفصل أننا نتعامل مع بيانات غير موجهة، وذات تثقيل، أي إن كل وصلة لها قيمة تُسمى وزن هذه الوصلة $w: E \to R, e \mapsto w(e)$.

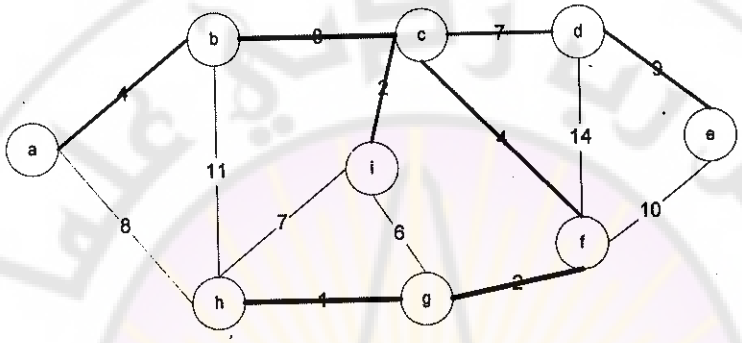
لقد رأينا في الفصل الماضي أن الشجرة هي أصغر بيان جزئي متصل يمكن أن يصل بين مجموعة عقد ما V. وإذا كان عدد هذه العقد n فإن عدد الوصلات في الشجرة هو $n-1$.

سنهتم في هذا الفصل بالبحث عن شجرة محتواة في بيان ما G وتصل بين جميع عقده، وتحقق شرط أمثلية ما. نسمي أية شجرة تصل بين العقد كلها بشجرة المسح للعقد. ونعرف وزن الشجرة (أو وزن أي بيان جزئي في البيان $G[V,E]$) بأنه مجموع أوزان جميع الوصلات التي يحويها.

وإذا كان مجموع قيم الوصلات التي تحويها هذه الشجرة أصغرياً، تحدثنا عن شجرة المسح الصغرى. ولمسألة شجرة المسح المثلى تطبيقات كثيرة، في الدارات الكهربائية على سبيل المثال، حيث نهتم بالوصل بين مجموعة من النقاط بأقل عدد ممكن من الوصلات، وبأقصر طول كلي لهذه الوصلات بغية الاقتصاد في طول الأسلاك الكهربائية المستخدمة.

مثال 3. 1

إن الشجرة ذات الخط الغامق في البيان المعطى في الشكل (3. 1) هي شجرة صغرى ولكنها غير وحيدة لأننا باستبدال الوصلة *(a,h)* بالوصلة *(b,c)* نحصل على شجرة صغرى جديدة.



مثال عن شجرة مسح صغرى

الشكل 3. 1

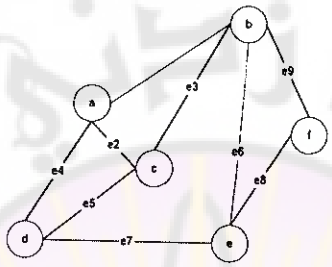
3. 1. خواص الشجرة ذات الوزن الأصغري

ليكن لدينا البيان $G[V,E]$ والشجرة المحتواة فيه $G`[V,T]$:

- لما كان $G`$ أكبر بيان جزئي يمسح جميع العقد دون حلقات، فإن إضافة وصلة واحدة $e \in E \setminus T$ إلى البيان $G`$ يؤدي إلى ظهور حلقة نسميها C_e.
- لتكن f وصلة من الشجرة $G`$ ، إذا حذفنا f انقسمت الشجرة إلى شجرتين مرتبطتين T_1, T_2. نسمي مجموعة الوصلات التي تصل بين عقدة من الشجرة الأولى و عقدة من الشجرة الثانية ما عدا الوصلة f بـ Γ_f . أي أن:

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in E \setminus T, x \in T \wedge y \in T_2\}$$

مثال 3. 2



الشكل 3. 2

لدينا في البيان المعطى بالشكل (3. 2) الشجرة $T = \{(a,c),(c,b),(c,d),(d,e)\}$

أو $\{e_2, e_3, e_5, e_7\}$

إذا أضفنا الوصلة e_4 ننشئ الحلقة $C_{e_4} = \{e_2, e_4, e_5\}$

إذا حذفنا الوصلة e_3 تنقسم v إلى مجموعتين:

$$\{a,c,d,e\} \cup \{b,f\}$$

وتتألف المجموعة Γ_{e_3} من العناصر: $\{e_1, e_6, e_8\}$

مبرهنة 3. 1

لتكن الوصلة e^* التي تحقق $w_{e^*} = \min_{e \in E} w_e$ أي إنها ذات الوزن الأصغر بين كل الوصلات، إذن يوجد حتماً شجرة مسح صغرى تحوي e^*.

البرهان

لتكن T شجرة مسح صغرى لا تحوي e^* إذاً $T \cup \{e^*\}$ يحوي حلقة C_{e^*}، وأية وصلة e' في هذه الحلقة تحقق $w_{e^*} = w_{e'}$ وإلاّ فلن تكون الشجرة T صغرى. فإذا استبدلنا e' بـ e^* حصلنا على شجرة صغرى أخرى تحوي e'.

تمثل هذه المبرهنة مبدأ خوارزمية كروسكال *Kruskal* في البحث عن شجرة المسح الأصغرية.

مبرهنة 3. 2

من أجل أية عقدة $v \in V$، لتكن e^* الوصلة ذات الوزن الأصغر التي تمر من v. هناك حتماً شجرة مسح صغرى تحوي e^*.

البرهان

لتكن T شجرة مسح صغرى لا تحوي e^*. عندها تحوي $T \cup \{e^*\}$ حلقة C_{e^*}. ولما كانت T صغرى، فإن أية وصلة في الحلقة C_{e^*} لها وزن e^* نفسه (وإلاّ فلن تكون T أصغرية) بإمكاننا إذن إضافة e^* إلى الشجرة بدلاً من الوصلة الأخرى الخارجة من v.

تمثل المبرهنة (3. 2) مبدأ خوارزمية بريم *Prim*.

3. 2. خوارزمية كروسكال *Kruskal*

تقوم هذه الخوارزميـة بـترتيب الوصـلات حسـب الأوزان المتصـاعدة، ونختـار الوصـلات ذوات أصغر وزن مادامت لا تضيف حلقة إلى البيان T الذي سيحوي الشجرة الصغرى.

تنتمي خوارزمية كروسكال إلى طائفة الخوارزميات الشرهة *greedy* المتمثلة بالخوارزميات التي تحاول بناء الحلول تدريجيا، والتي تختار في كل مرحلة الحل الجزئي الـذي يبـدو أمثليا دون النظر إلى كون مجمل الحل أمثل، ودون أن تعيد النظر في خياراتـها السـابقة. لا تعطي الخوارزميات الشرهة في الحالة العامة حلـولا مثلـى ولكـن خوارزميـة كروسـكال وخوارزمية *Prim* اللتين سنراهما الآن تعطيان حلولا مثلى.

إن الصياغة الأولية للخوارزمية بسيط للغاية:

Kruskal *(G,w)*
$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \leftarrow$ *Sort Increasing (E,w)*
$T \leftarrow \phi$
$P \leftarrow O,\ i \leftarrow 1$
while $P \neq n-1$ *do*
  if $T \cup \{e_i\}$ *has no cycle*
    $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$
    $P \leftarrow P+1$
$i \leftarrow i+1$

يجب الانتباه إلى أن أكثر الخطوات تعقيداً في هذه الخوارزمية تكمن في اختبار خلو البيان الجزئي T من الحلقات. وللقيام بذلك نقوم بترقيم المركبات المترابطة في T عند كل مرحلة، وبتغيير الأرقام عند دمج مركبتين نتيجة إضافة وصلة جديدة:

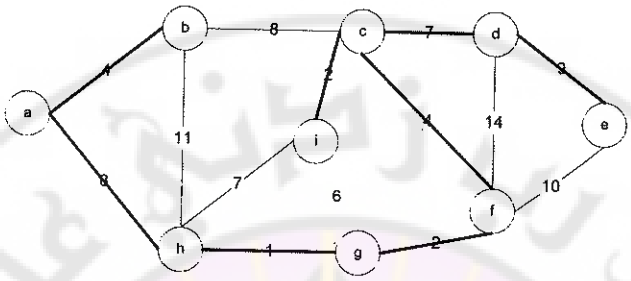
نبدأ أولاً باعتبار كل عقدة مركبة مستقلة، ونعطيها رقماً من 1 حتى $|V|$. عند إضافة وصلة جديدة نعطي لطرفي الوصلة القيمة نفسها ولتكن قيمة العقدة الصغرى؛ ونغير أرقام كل العقد المماثلة لها بالقيمة أي التي تنتمي إلى المركبة المرتبطة نفسها. وبهذا عند إضافة وصلة جديدة إذا كان طرفا العقدة لهما رقم المركبة نفسها أشار ذلك إلى خلق حلقة داخل هذه المركبة، وبذلك نرفض هذه الوصلة. وعند نهاية الخوارزمية نحصل على مركبة مرتبطة وحيدة ممثلة بالشجرة الصغرى.

وبهذا يمكن أن نعدّل الخوارزمية السابقة لتصبح:

Kruskal *(G,w)*
$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \leftarrow$ *Sort Increasing (E,w)*

for each $v \in V$ *MakeSet (v)*
$T \leftarrow \phi$
$P \leftarrow O, i \leftarrow 1$
while $P \neq n-1$ *do*
  if $Set(f_{e_i}) \neq Set(l_{e_i})$ *(where* $e_i = (f_{e_i}, l_{e_i})$*)* *then*
  $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$
  $Merge(Set(f_{ei}), Set(l_{ei}))$
  $P \leftarrow P+1$
$i \leftarrow i+1$

مثال *3. 3*



hg	ci	gf	ab	cf	ig	cd	ih	ah	bc	de	ef	bh	df
1	2	2	4	4	6	7	7	8	8	9	10	11	14

الشكل 3 .3: تطبيق خوارزمية كروسكال

يعتمد برهان خوارزمية *Kruskal* على المبرهنة (*3. 1*) وعلى الفكرة البديهية للخوارزمية باختيار الوصلات حسب الأوزان التصاعدية، أي إننا نحاول دائماً اختيار أصغر قيمة للوصلة التي ستضاف مالم تؤد إلى خلق حلقة.

تعقيد خوارزمية كروسكال

ينقسم تعقيد الخوارزمية إلى تعقيد مرحلة التهيئة، المتمثلة في ترتيب الوصلات حسب الترتيب التصاعدي وهو من المرتبة $O(|E|.\log|E|)$، إضافة إلى إنشاء المجموعات بالنسبة إلى كل عقدة أي $O(|V|)$.

ومن ثم هناك كلفة دمج المجموعات التي يمكن البرهان على أنها من المرتبة $O(|V|\log|V|$ وبهذا يمكن القول إن التعقيد الكلي لخوارزمية كروسكال هو من المرتبة $O(|E|.\log|E|)$.

3. 3. خوارزمية بريم *Prim*

تنتمي خوارزمية بريم أيضا إلى طائفة الخوارزميات الشرهة، وهي تتميز عن خوارزمية كروسكال في أن الحل الجزئي الذي تعطيه في أية مرحلة هو شجرة واحدة، بعكس كروسكال التي تعطي مجموعة من الأشجار التي يجري الربط بينها تدريجيا.

تستخدم هذه الخوارزمية خط انتظار ذا أولوية *Priority Queue* حيث تخزن العقد التي لم تضم بعد إلى الشجرة حسب الترتيب التصاعدي. المفتاح *Key* هو قيمة أصغر وصلة يمكن عبرها وصل هذه العقدة إلى الشجرة. يأخذ هذا المفتاح القيمة البدائية ∞ ويجري تعديله عند إضافة عقد جديدة إلى الشجرة قد تغير من قيمته.

بالإضافة إلى خط الانتظار الذي سنسميه Q. تستخدم الخوارزمية التابع $\Pi[v]$ الذي يعطي العقدة التي تسبق العقدة v في الشجرة. وتبدأ الخوارزمية من عقدة بدائية تختار عشوائيا ونسميها هنا r.

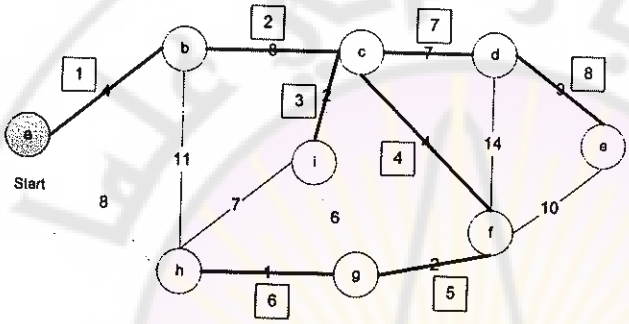
وبهذا تأخذ الخوارزمية الشكل التالي:

```
Prim (G, W, r)
Q ← V[G]
for each u ∈ Q do
        key [u] ← ∞
key [r] ← 0
Π[r] ← nil
while Q ≠ ϕ do
        u ← Extract – Min(Q)
        for each v ∈ Adj[u] do
                if v ∈ Q and w (u,v) < key [v] then
                        Π[v] ← u
                        key [v] ← w (u,v)
```

تستنتج شجرة المسح الصغرى الناتجة T من خلال الوصلات $(\Pi[u],u)$ أي إن:

$$T = \{(\Pi(v), v) : v \in V \setminus \{r\}\}$$

مثال 3. 4



الشكل 3. 4: تطبيق خوارزمية بريم

نلاحظ من تطبيق خوارزمية بريم على المثال (3. 4) نفسه ابتداء من العقدة a، تطور الشجرة بإضافة العقدة التي تصل بينها وبين أحد أطراف الشجرة أصغر وصلة ممكنة، ولهذا السبب تنتمي خوارزمية بريم إلى مجموعة الخوارزميات الشرهة.

يعتمد برهان هذه الخوارزمية على المبرهنة (3. 2) التي تقول إنه من أجل أية عقدة، هناك دائما شجرة مسح صغرى تحوي أصغر وصلة خارجة من هذه العقدة. ونحن متحققون من الحصول على شجرة، لأننا لا نضيف الوصلات إلا بين عقدة منتمية إلى الشجرة الجزئية وعقدة لم تضف بعد، وبذلك لا مجال أبدا لخلق حلقات.

تعقيد خوارزمية بريم

يعتمد تعقيد الخوارزمية على تعقيد إدارة خط الانتظار ذي الأولوية، فإذا افترضنا أن هذا الخط ممثل على شكل كومة ثنائية *binary heap* يكون زمن الوصول إلى القيمة الصغرى باستدعاء الإجرائية *Extract-Min* من رتبة $\log(|V|)$ ويكون زمن تعديل خط الانتظار بعد تعديل قيم المفاتيح أيضا من المرتبة $O(\log|V|)$.

تأخذ التهيئة زمنا متناسبا مع $|V|$، ويكون مجموع المرات التي تستدعى فيها الإجرائية *Extract-Min* من المرتبة $O(|V|\log|V|)$، أما عدد مرات تعديل المفتاح فيتناسب مع عدد الوصلات في البيان G أي إن هذه العمليات ذات كلفة من المرتبة $O(|E|\log|V|)$.

تكون الكلفة العامة للخوارزمية من المرتبة:

$$O(|V|+|V|\log|V|+|E|\log|V|)=O(|E|\log|V|)$$

تمرينات

التمرين 1. ليكن لدينا البيان المترابط $G\ [V,E]$، وتابع التثقيل $W : E \to R$ ولتكن T شجرة منتمية إلى البيان، برهن أنه يمكن إيجاد متتالية $T^{(0)},T^{(1)},...,T^{(k)}$ تحقق:

- $T^{(i)}$ هي شجرة داخل البيان G.
- إذا كان $|V| = n$ فإن $\left|E\left(T^{(i)}\right) \cap E\left(T^{(i-1)}\right)\right| = n-2$
- $W\left(T^{(0)}\right) \geq W\left(T^{(1)}\right) \geq ..... \geq W\left(T^{(k)}\right)$
- الشجرة $T^{(k)}$ هي شجرة مسح صغرى.

التمرين 2. نفترض أن مزارعا يطلب مساعدتنا لفتح شبكة ري في أرضه. يقوم هذا المزارع بتجميع مزروعاته على ثماني مجموعات موزعة على أرضه، ويريد فتح قنوات بين المجموعات بحيث يكون مجموع طول القنوات أقصر ما يمكن لتلافي الهدر. تتوفر لدينا المسافات بين التجمعات في الجدول (3. 1).

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
G_1	/	2.6	4.2	1.8	1.4	3.6	4	3
G_2		/	1.8	3.6	2.4	5.2	4.6	2.2
G_3			/	5.2	3.1	5	3.8	2
G_4				/	1.4	3.2	3	1.8
G_5					/	1.8	2.1	1.6

G_6						/	1.2	2
G_7							/	1
G_8								/

الجدول 3. 1

اقترح حلا مناسبا لمساعدة هذا المزارع.

التمرين 3. ما التعديلات التي يجب إدخالها على كل من خوارزميتي كروسكال وبريم للحصول على شجرة المسح العظمى.

طبق الخوارزميات المعدلة على المثال الوارد في الفصل.

الفصل الرابع

البحث عن أقصر الطرق

تعدّ مسائل البحث عن أقصر الطرق من أكثر المسائل وروداً في عالم بحوث العمليات إذ يؤول كثير من المسائل الأخرى إلى مسألة بحث عن طريق داخل بيان. نتعامل في هذا الفصل مع بيانات موجهة، ومزودة بتابع تثقيل قد نسميه في بعض الأحيان بتابع المسافة أو الوزن، مع أنه قد يكون سالباً، إذ قد يمثل في بعض المسائل الربح والخسارة وليس بالضرورة المسافة أو الوزن الفيزيائي. ونمثل هذا البيان بالشكل $G[V,E,w]$ حيث w هو تابع التثقيل.

نذكّر بأن طول طريق ما P داخل بيان هو مجموع أطوال الأسهم التي تكونه.

اي: $w(P)=\sum_{e\in P} w(e)$.

ونهتم في هذا الفصل بإمكان وجود طريق بين عقدتين من البيان، ثم بالبحث عن الطريق ذي الطول الأصغري، التي قد لا تكون موجودة بسبب وجود دارة ذات طول سالب على أحد الطرق بين العقدتين. و عندها تسمى هذه الدارة بالدارة الماصة *Absorbing circuit*.

تُقسم عادةً مسائل البحث عن أقصر الطرق إلى ثلاثة أشكال، إضافة إلى ثلاثة أخرى مشتقة منها:

a. تحديد طريق بسيط ذي طـول أصغـري بـين عقـدة مـا s وعقـدة أخـرى p داخـل البيان.

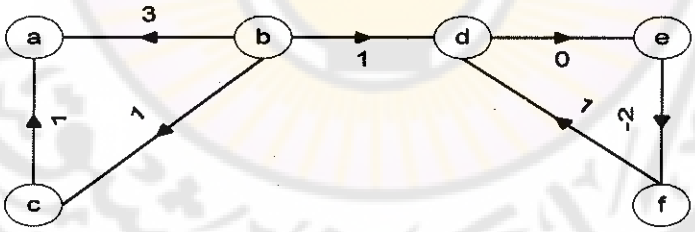
b. تحديد طريق بسيط ذي طول أصغري بين عقدة محددة s وبين كل العقد الأخـرى في البيان.

c. تحديد طريق بسيط ذي طول أصغري بين أية عقدتين x و y في البيان.

نشتق من هذه المسائل، المسائل a', b', c' الـتي تعنـى بـالبحث عـن طـرق أصغريـة غـير بسيطة بالضرورة أي يمكن أن تحوي دارات عديمة الطول أو طولها سالب.

مثال 4. 1

- لا يوجد طريق من a إلى b.
- يوجد طريق من b إلى a ولكن لا يوجـد طريـق ذات أقصـر طـول لأن الـدارة $<d,e,f,d>$ ماصة.
- يمكن إيجاد أقصر طريق من b إلى a وهو يتمثل بـ $<b,c,a>$ وذو طول 2.



الشكل 4. 1: مثال عن وجود أقصر الطرق أو عدمه.

ملاحظات

- إن عدد الطرق البسيطة داخل بيان ما منته، وهذا ما يسمح "نظرياً" باستعراضها جميعاً للبحث عن حلول المشاكل a، b، c. غير أنه من وجهة النظر العملية يزداد عدد هذه الطرق كثيراً مع ازدياد عدد العقد والأسهم داخل البيان وهذا ما يجعل فكرة استعراض هذه الطرق غير مناسبة عملياً.

- قد يكون عدد الطرق غير البسيطة التي يمكن إيجادها داخل بيان ما لا نهائياً بيد أنه يمكن حل المسائل a'، b'، c' باستخدام خوارزميات بسيطة ومثلى سوف نراها في هذا الفصل، على حين لا تتوفر مثل هذه الخوارزميات للمسائل a، b، c ولهذا السبب نبحث عادةً عن حلول للمسائل a'،b'،c' ونستنتج منها إن أمكن حلول a، b، c.

- مع أن المشكلة b' تكوّن تكراراً للمسألة a' لـ$|V|-1$ مرّة فإننا عادةً نقوم بحل المسألة b' للحصول على المسألة a' بسبب توفر خوارزميات فعالة لذلك.

- بالمثل تكون المسألة c' تكراراً للمسألة b' ولكن حلها له طرق خاصة به تسمى الطرق المصفوفية.

- قد نحتاج في بعض مسائل الأمثلة *Optimization* إلى إيجاد طريق من كل عقدة، x في بيان ما، إلى عقدة نهائية واحدة t. ولحل هذا النوع من المسائل يمكننا عكس جميع أسهم البيان وعندها تؤول هذه المسألة إلى المسألة b.

أمثلة

- خوارزمية البحث بالعرض BFS هي خوارزمية بحث عن أقصر الطرق اعتباراً من منبع s إلى كل العقد الأخرى، بافتراض أن طول كل وصلة يساوي الواحد.
- البحث عن أقصر الطرق بين موقعين في مدينة ما.
- اتخاذ قرار استبدال معدّات خلال دورة زمنية محددة.

مبرهنة 4. 1.

ليكن p الطريق الأقصر من عقدة s إلى عقدة أخرى t داخل البيان $G[V,E,w]$. فإن الطريق الذي يصل بين أية عقدتين يمر عبرهما p هو أيضاً الطريق الأقصر بين هاتين العقدتين.

البرهان: تمرين.

تمثل هذه المبرهنة الأساس لخوارزميات البحث عن أقصر الطرق، والتي تنتمي إلى طائفة خوارزميات البرمجة الديناميكية، والتي تعتمد بناء حلول المسائل تدريجياً بحيث يكون الحل المتوفر في مرحلة ما جزءاً من الحل النهائي للمسألة الكلية.

4. 1. البحث عن أقصر الطرق من عقدة s إلى جميع العقد

تعريف 4. 1.

إذا كان هناك طريق من s إلى جميع العقد في بيان ما، نسمي s بالجذر $root$ لهذا البيان. وعندها يكون ناتج البحث عن جميع أقصر الطرق هو شجرة أقصر الطرق ذات الجذر s.

مبرهنة 4. 2

ليكن لدينا التابع $l: V \to R$ المعرّف على جميع عقد البيان. الشرط اللازم والكافي ليكون l تابعَ أقصر مسافة عن s هو أن تتحقق الشروط التالية:

1) $l(s) = 0$

2) $\forall e = (u,v) \in E, \quad l(v) - l(u) \le w(u,v)$

3) البيان الجزئي المعرّف بـ $[V, E']$

حيث: $E' = \{e = (u,v) \in E \mid l(v) - l(u) = w(u,v)\}$ هو شجرة جذرها s.

البرهان

الشرط اللازم: إذا كان $l(x)$ يمثل أقصر مسافة من s إلى x فإن (i) بديهية.

إذا كان $e=(u,v)$ ينتمي إلى أقصر طريق من s إلى v فاعتمادا على المبرهنة 1 يكون: $l(v) = l(u) + w(e)$ وهذا ما يثبت (iii) وإلا فإن e لا تنتمي إلى أقصر طريق إلى v أي: $l(v) \le l(u) + w(e)$ وهذا ما يثبت (ii).

الشرط الكافي: يحقق التابع l الشروط الثلاثة، ونبرهن أنه تابع أقصر مسافة من s إلى أية عقدة.

في الواقع يمثل التابع $l(x)$ حدا أدنى لطول أقصر طريق. ولأي طريق P من s إلى x، نجد أن طول الطريق يحقق:

$$w(p) = \sum_{e=(u,v)\in P} w(e) \ge \sum_{(u,v)\in P} l(v) - l(u) = l(x) - l(s) = l(x)$$

وإذا كان الطريق منتمياً إلى البيان الجزئي $[V, E']$ يكون طوله أصغرياً لأنه يساوي $l(x)$ ومنه النتيجة.

4. 2. خوارزمية ديجكسترا Dijkstra: (الأطوال موجبة أو معدومة)

يمكن استخدام هذه الخوارزمية عندما يكون التابع w موجباً أو معدوماً لكل الوصلات، وتعتمد فكرة الخوارزمية على حساب المسافات، بإجراء تعديلات متتالية عليها حتى الوصول إلى أصغر قيمة. وعند التوصل إلى أقصر مسافة لعقدة تضاف إلى مجموعة العقد المنتهية S. وتُستنتج شجرة أقصر الطرق من تابع "الأب" $\Pi(v)$ الذي يحدد العقدة التي تسبق v في الطريق من s إليها.

تتمثل التهيئة لهذه الخوارزمية بإعطاء القيمة ∞ للتابع l من أجل كل العقد ما عدا العقدة s، وتعطى لـ Π القيمة nil. وتخزن العقد التي لم تعالج بعد في خط انتظار ذي أولوية Q حيث تُرتب حسب قيم التابع l المتصاعدة.

إن تابع l الناتج عن خوارزمية ديجكسترا هو تابع أقصر الطرق من المنبع s إلى كل عقدة من البيان، والشجرة الناتجة عن التابع Π هي شجرة أقصر الطرق.

```
Dijkstra (G, W,S)
    For each v in V do
        l[v] ← ∞
        Π[v] ← nil
    l[s] = 0
    S ← φ
    Q ← V
        While Q ≠ Φ do
```

$u \leftarrow Extract\_Min(Q)$

$S \leftarrow SU\{u\}$

For each v in Adj [u] do

If l [v] > l[u] + w(u,v) then

$l[v] \leftarrow l[u] + w(u,v)$

$\Pi[v] \leftarrow u$

البرهان

باستخدام نقض الفرض.

نفترض أن تابع أقصر الطرق l^* مختلف عن التابع l الناتج عن تطبيق الخوارزمية. وبهذا يوجد على الأقل عقدة واحدة u بحيث: $l[u] \neq l^*[u]$

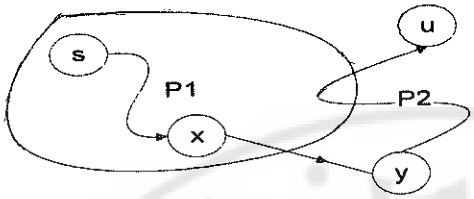
ولأن قيم l لا تتغير بعد ضم العقدة إلى المجموعة S نختار العقدة u لتكون أول عقدة تحقق $l[u] \neq l^*[u]$ لحظة دخولها إلى S وبهذا يكون $l[u] > l^*[u]$ حتما.

إن العقدة u مختلفة عن s لأن s تحقق $l^*[s] = l[s] = O$ وبهذا من المؤكد أن المجموعة S غير خالية عندما تضم u إليها لأنها تحوي على الأقل عقدة المنبع s.

إن ضم u إلى المجموعة S ينبئ بوجود طريق من s إلى u، يمكننا إذن البحث عن أقصر هذه الطرق (لأن أطوال جميع الأسهم موجبة) ولنفترض أنه P وهو مختلف عن الطريق الناتج عن الخوارزمية.

لتكن y أول عقدة من الطريق P لا تنتمي إلى S ولتكن x العقدة السابقة لها على هذا الطريق وهي طبعا في S.

وعندها يمكن فصل الطريق P حسب الشكل المرفق (الشكل 4. 2).



$$P = s \xrightarrow{p_1} x \rightarrow y \xrightarrow{p_2} u$$

الشكل 4. 2.

ولأن y تنتمي إلى أقصر طريق إلى u فإن الطريق إليها أي: $P_1 U \{(x,y)\}$ هو الأقصر أيضا وذلك حسب المبرهنة 1.

ولما كان $x \in S$ فإن قيمة $l[y]$ هي: $l[y] = l[x] + w(x,y)$

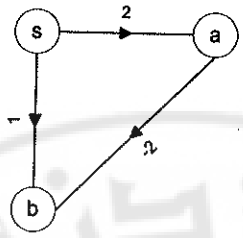
غير أن $l[x] = l^*[x]$ لأن u هي أول عقدة لا تحقق هذه المساواة ومنه نستنتج أن:

$$l[y] = l^*[y]$$

ولما كانت قيم التابع w موجبة فلدينا $l^*[y] \le l^*[u] < l[u]$ ولكن حسب الخوارزمية، ستدخل u إلى المجموعة S قبل العقدة y إذن: $l[u] \le l[y]$ ومنه نستنتج أن: $l[u] = l[y]$ ومن ثم: $l^*[u] = l[u]$. وهذا ما يناقض الفرض و يؤكد أن خوارزمية ديجكسترا تعطي أقصر الطرق.

ملاحظة

إن تطبيق خوارزمية ديجكسترا على بيانات تحوي أوزانا سالبة يعطي نتائج خاطئة، كما هو الحال في البيان البسيط المبين في الشكل (4. 3).



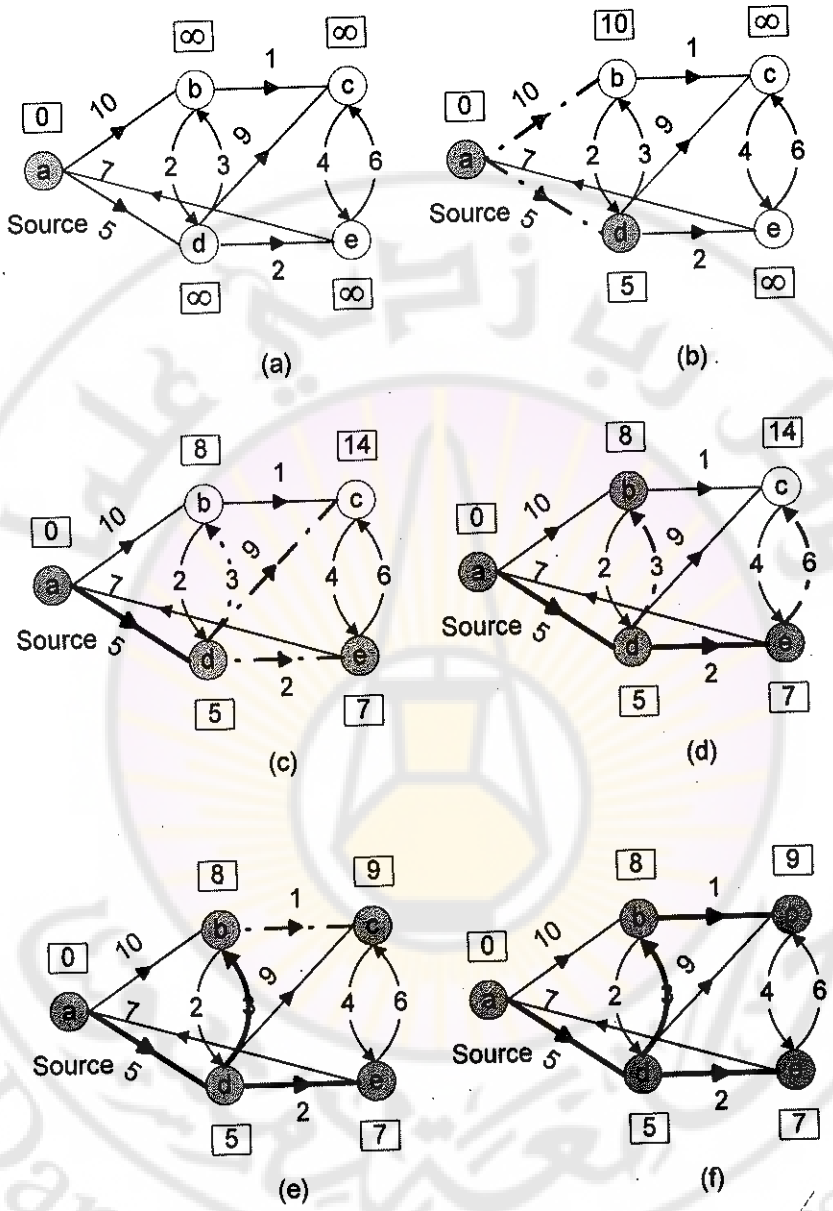
الشكل 4. 3: مثال معاكس لتطبيق خوارزمية ديجكسترا على بيان يحوي أطوال سالبة.

بفرض أن s تمثل عقدة البداية، بتطبيق الخوارزمية نحدد أولا بعد العقدة b على أنه 1 ثم نحدد بعد العقدة a على أنه 2، وبذلك تنتهي الحسابات رغم أن أقصر طريق من s إلى b هو الطريق $<s,a,b>$ ذو الطول المعدوم.

مثال 4. 2

نفترض في البيان المعطى في الشكل (4. 4) أن العقدة a هي نقطة البداية. تمثل الأسهم المقطعة في كل مرحلة، الأسهم التي تجري دراستها، أما الأسهم الغامقة فهي تلك التي تنتمي إلى شجرة أقصر الطرق.

تحوي المربعات بجانب كل عقدة قيمة مسافتها عن العقدة a. وتلون العقدة بالرمادي عندما نحصل على أقصر مسافة لها عن a.



الشكل 4. 4: مثال تطبيقي لخوارزمية ديجكسترا.

تعقيد خوارزمية ديجكسترا

نرى بسهولة أن تعقيد عملية التهيئة هو من المرتبة $O(|V|)$ لأنها تعالج كل العقد مرة واحدة، ومن ثم يتعلق تعقيد الحلقة بتعقيد التعامل مع خط الانتظار، وكيفية إعادة ترتيب العقد في كل مرة يجري فيها تغيير قيمة l لإحدى العقد. غير أنه بإمكاننا إيجاد خوارزميات ذات تعقيد $O(\log|V|)$. ونلاحظ أننا نزور كل وصلة في البيان مرة واحدة وبهذا يكون تعقيد الحلقة الكلي من مرتبة $O(|E|\log|V|)$ وتعقيد الخوارزمية من مرتبة $O(|V|+|E|\log|V|)$.

4. 3. خوارزمية بلمان Bellman (في البيانات التي تخلو من حلقات)

بإمكاننا دوما إيجاد حل لمسألة البحث عن أقصر الطرق من عقدة إلى كل العقد في البيانات التي تخلو من الحلقات *DAG: Directed Acyclic Graph* ولو كان هناك وصلات ذات أوزان سالبة، لأن هذه الوصلات لن تؤدي إلى وجود حلقات ماصة لأن البيان خال من الحلقات.

وبفضل هذه الميزة بإمكاننا حل المسألة في زمن من مرتبة *O(V+E)* بالاعتماد على الترتيب التوبولوجي للعقد (انظر الفصل الثاني)، حيث يجري المرور على كل عقدة ومعالجتها مرة واحدة فقط وفق هذا الترتيب الخطي للعقد.

```
DAG-PS(G, w, s)
    Topological-Sort (G)
    For each u in V do
        l[u] = ∞
```

$\Pi[u] = nil$

$l[s] = 0$

For each u in V <u>*according to the topological sort*</u>

<u>*do*</u>

For each $v \in Adj[u]$

If l [v] > l[u] + w(u,v) then

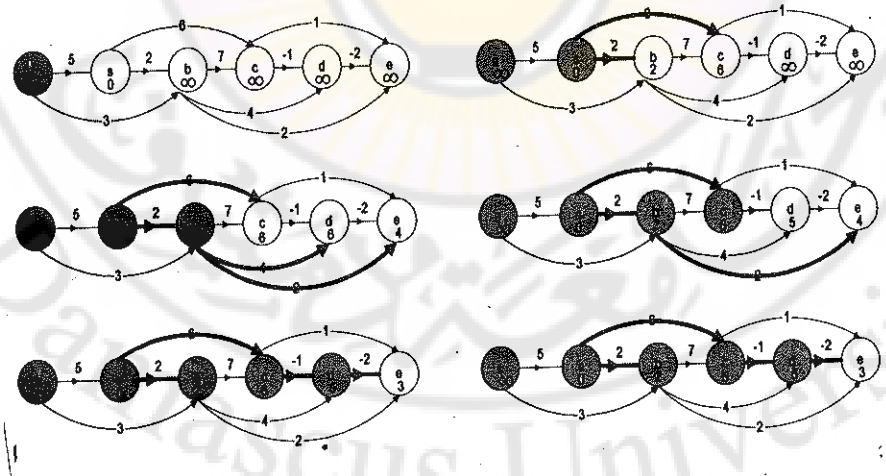
$l[v] \leftarrow l[u] + w(u,v)$

$\Pi[v] \leftarrow u$

ومن السهل التحقق أن تعقيد هذه الخوارزمية من مرتبة $O(|V|+|E|)$.

مثال *4. 3.*

نريد أن نحسب في البيان المعطى في الشكل (*4. 5*) بعد جميع العقد عن العقدة *s*. وتتطور الحسابات حسب الترتيب التوبولوجي للعقد وتمثل الوصلات الغامقة شجرة أقصر الطرق ذات الجذر *s*. نلاحظ أن بعد *a* عن *s* يساوي اللانهاية لأنه لا يوجد طريق من *s* إلى*a*.



الشكل *4. 5*: تطبيق خوارزمية بلمان على بيان لايحوي أية دارات

4. 4. الخوارزمية العامة للبحث عن أقصر الطرق

يعزى أصل هذه الخوارزمية إلى أكثر من عالم رياضي منهم فورد *Ford*، فولكرسون *Fulkerson* ودانتزيغ *Dantzig* ولا نعلم يقينا من هو المصمم الأول، وقد ترد الخوارزمية في بعض المراجع باسم خوارزمية فورد.

تسمح هذه الخوارزمية بإظهار الدارة الماصة في حال وجودها في البيان الجزئي الذي يحوي العقد التي يمكن الوصول إليها اعتبارا من عقدة المبدأ s. وفي حالة عدم وجود مثل هذه الحلقات، تعطي الخوارزمية شجرة أقصر الطرق اعتبارا من s وذلك دون شروط على قيم الأوزان النى يمكن أن تكون سالبة.

يعتمد مبدأ الخوارزمية على تحسين شجرة مبدئية غير مثلى وقد يمكن استنتاجها باستخدام خوارزمية أخرى، ديجكسترا مثلا. وذلك حتى الوصول إلى الحل الأمثل أو شجرة أقصر الطرق.

إن هذه الخوارزمية مفيدة وفعالة في المقام الأول لتعديل شجرة أقصر الطرق، عندما يجري تعديل على قيم بعض الوصلات في البيان، دون الحاجة إلى إعادة تطبيق خوارزميات لحساب الشجرة من جديد، ولهذا السبب نستخدم هذه الخوارزمية في الكثير من تطبيقات الأمثلة في الشبكات. وهي في الحقيقة لا تختلف بفكرتها عن خوارزمية السمبلكس التي تواءم و تطبق على البيانات.

General-SP(G,w,s)

$Dijkstra\ (G,w,s) \rightarrow T = [V, E']$

$\forall u \in V, \quad l[u], \Pi[u] \quad initialized$

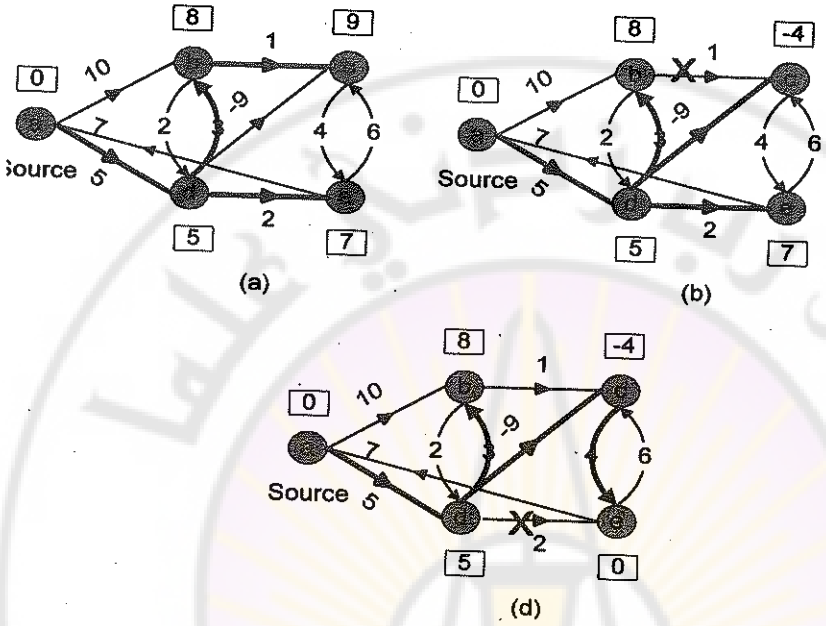
$$
\begin{array}{l}
\textit{While } e=(u,v) \in E \textit{ such that } l[v] > l[u] + w(u,v) \textit{ do} \\
\quad \textit{if } T \setminus \{(\Pi(v),v)\} \cup \{(u,v)\} \textit{ contains a cycle then} \\
\quad\quad \textit{Stop} \\
\quad \textit{Else} \\
\quad\quad \Pi[v] \leftarrow u \\
\quad\quad r \leftarrow l[v] - l[u] - w(u,v) \\
\quad\quad l[v] \leftarrow l[u] + w(u,v) \\
\quad\quad \textit{For each } x \textit{ in the subtree with root } v \textit{ do} \\
\quad\quad\quad l[x] \leftarrow l[x] - r
\end{array}
$$

من الممكن المرور على الوصلات في البيان وتعديلها أكثر من مرة، ولكن الخوارزمية ستتوقف حتما لأن عدد الأشجار الممكنة في بيان ما منته، ولما كان التعديل يصغر قيم l فإن هذه العمليات ستتوقف حتما عندما نصل إلى أصغر قيم لـ l لا يمكن تعديلها من جديد.

ويمكن البرهان أنه في أسوأ الحالات يصل تعقيد هذه الخوارزمية إلى $O\ (VE)$، غير أنه كما سبق أن ذكرنا لا تستخدم عادة إلا عند إجراء تعديلات على أوزان بعض الوصلات، ومن ثم لا يحتاج تعديل شجرة أقصر الطرق إلا إلى عدد محدود من التغييرات.

مثال *4. 4*

نعدل في الشكل (*4. 6*) وزن السهم *(d,c)* في المثال الذي طبقنا عليه خوارزمية ديجكسترا (الشكل (*4. 5*)) ليصبح *w(d,c)=-9* ونطبق الخوارزمية العامة باعتماد الشجرة المبدئية الناتجة عن تطبيق ديجكسترا على البيان الأصلي. إن هذا التغيير يغير أقصر الطرق إلى كل من العقدتين *c* و *e* وذلك بتنفيذ الحلقة لمرتين فقط.



الشكل 4. 6: مثال تطبيقي للخوارزمية العامة ابتداء من حل بدائي.

4. 5. البحث عن أقصر الطرق من أية عقدة إلى أية عقدة

نهتم في هذا الجزء من الفصل بالبحث عن أقصر الطرق البسيطة بين أية عقدتين من البيان أو ما سميناه سابقا بالمسألة (c`).

إذا لم يكن عدد الوصلات في البيان كبيرا جدا، فبإمكاننا حل المسألة بتكرار تطبيق إحدى الخوارزميات السابقة على كل عقدة من البيان على أنها عقدة المنبع. وقد تكون هذه الطريقة مناسبة أكثر من تطبيق إحدى الخوارزميات الخاصة بحل المسألة c` والتي تسمى عادة بالخوارزميات المصفوفية.

بيد أنه في حال كون عدد الوصلات مرتفعا بينما عدد العقد محدودا نوعا ما بحيث يكون $|V|^2$ غير كبير ليسمح بالتعامل مع مصفوفات من البعد $|V|\times|V|$ بسهولة في الذاكرة، قد يكون من الأفضل استخدام إحدى الخوارزميات الخاصة، وهي عديدة ولكنها بوجه عام متكافئة من حيث التعقيد، ونذكر منها: خوارزمية دانتزيغ *Dantzig* وخوارزمية فلويد–وارشال *Floyd-Warshall* التي اخترنا تقديمها هنا.

4. 5. 1. خوارزمية فلويد–وارشال Floyd-Warshall

تستخدم هذه الخوارزمية البرمجة الديناميكية لحل مسألة البحث عن أقصر الطرق من أية عقدة إلى أية عقدة في بيان موجه $G=[V,E]$ وهي ذات تعقيد $O(|V|^3)$.

نفترض برغم إمكان وجود وصلات ذات وزن سالب، عدم وجود حلقات ماصة داخل البيان.

سنحلل في المقطع التالي البنية التي تستخدمها البرمجة الديناميكية لحل المسألة الأساسية ثم نستعرض الخوارزمية.

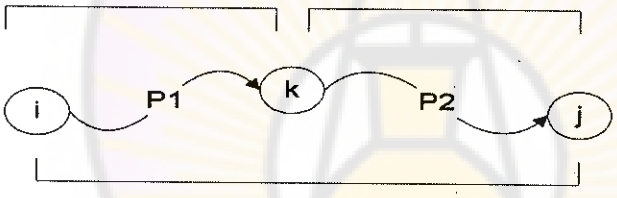
بنية أقصر الطرق

نسمي عقدة داخلية أو وسطى *intermediate* داخل طريق بسيط $P =< v_1, v_2, \ldots, v_l >$ أية عقدة داخل الطريق مختلفة عن v_1 و v_l.

تعتمد خوارزمية *FW* على الملاحظة التالية: نفترض أن عقد البيان ذات أرقام من *1* إلى n أي $V = \{1,2,..,n\}$ ونأخذ مجموعة جزئية من الشكل $\{1,2,..,k\}$ و ثم من أجل أي عقدتين $i, j \in V$ ندرس مجموعة الطرق التي تجمع بينهما، والتي تنتمي كل عقدها الداخلية إلى المجموعة $\{1,2,..,k\}$ وليكن P أقصر الطرق من بين هذه المجموعة.

بالطبع P طريق بسيط لأننا افترضنا أن G خالٍ من الحلقات الماصة. يعتمد مبدأ خوارزمية FW على دراسة العلاقة بين الطريق P وبين أقصر الطرق من i إلى j ذات العقد الداخلية التي تنتمي إلى $\{1,2,..,k-1\}$ ، وتعتمد هذه العلاقة على كون العقدة k منتمية أو لا إلى الطريق P:

- إذا لم تنتم k إلى الطريق P، كانت جميع العقد الداخلية في P منتمية إلى المجموعة $\{1,2,..,k-1\}$ وبهذا يكون أقصر الطرق بين العقدتين i و j والذي تقتصر عقده الداخلية على العقد المنتمية إلى المجموعة $\{1,2,..,k-1\}$ هو أيضاً أقصر الطرق الذي تنتمي عقده إلى المجموعة $\{1,2,..,k\}$.



الشكل 4. 7

- إذا كانت k عقدة داخلية في P، نفرق الطريق إلى طريقين $i \xrightarrow{P_1} k \xrightarrow{P_2} j$ كما هو موضح في الشكل (4. 7). ويمكننا هنا الاستنتاج بالاعتماد على المبرهنة 1 أن P_1 هو أقصر الطرق من i إلى k ذي العقد الداخلية من $\{1,2,..,k-1\}$ ، وبالمثل P_2 هو أقصر الطرق من k إلى j ذي العقد الداخلية من $\{1,2,..,k-1\}$.

الحل العددي للمسألة c`

تسمح لنا الملاحظات السابقة بإعطاء صياغة عددية لحساب أقصر الطرق. ليكن $d_{ij}^{(k)}$ وزن أقصر الطرق، من العقدة i إلى العقدة j، والذي تنتمي كل عقده الداخلية إلى $\{1,2,..,k\}$.

نعرف أيضا $d_{ij}^{(0)}$ بأنه وزن الطريق الذي يصل بين i و j دون عقد داخلية أي $d_{ij}^{(0)} = w(i,j)$.

وبهذا يمكننا إعطاء العلاقة التالية:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j) & if\ k=0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & if\ k>0 \end{cases}$$

وعندما يكون $k=n$، تحوي المصفوفة $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})_{1\le i,j\le n}$ أطوال أقصر الطرق من أية عقدة إلى أية عقدة أخرى داخل البيان G.

إذن، بالاعتماد على هذه العلاقة التدريجية يمكننا حساب القيم $d_{ij}^{(k)}$ ابتداء من $k=1$ حتى $k=n$ وذلك في إجرائية دخلها مصفوفة الأوزان $W = (w(i,j))_{1\le i,j\le n}$ وخرجها مصفوفة أقصر الطرق.

```
Floyd-Warshall(W)
    n ← dimension[W]
    D^(0) ← W

    For k ← 1   to  n  do

        For i ← 1   to  n  do

            For j ← 1   to  n  do
```

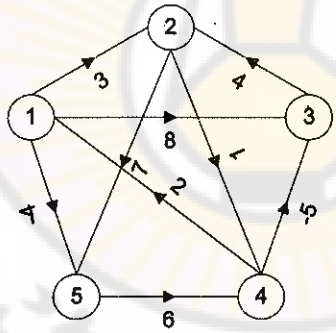
$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) \end{cases}$$

Return $D^{(n)}$

التعقيد الزمني للخوارزمية

يبدو زمن تنفيذ هذه الإجرائية واضحا من خلال حلقات التكرار المتتالية، وهو طبعا من المرتبة $O(n^3)$. وكما يبدو، فإن عدد العمليات محدود ولا حاجة إلى بنية معطيات معقدة، وهذا ما يجعل هذه الخوارزمية عملية ومناسبة، حتى من أجل البيانات ذات الحجم المتوسط.

مثال 4. 5. نريد حساب أقصر الطرق بين عقد البيان المبين بالشكل (4. 8)



الشكل 4. 8.

للقيام بذلك نطبق الخوارزمية السابقة التي تعطينا المصفوفات $D^{(1)},..,D^{(5)}$ (الشكل 4. 9)، حيث تحوي المصفوفة النهائية أقصر الطرق بين أية عقدتين. بالإضافة إلى ذلك نورد المصفوفات $\Pi^{(0)},..,\Pi^{(5)}$ (انظر الفقرة التالية)التي تسمح في كل مرحلة k في استنتاج أقصر الطرق التي تقتصر عقدها الداخلية على العقد $\{1,2,..,k\}$.

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} nil & 1 & 1 & nil & 1 \\ nil & nil & nil & 2 & 2 \\ nil & 3 & nil & nil & nil \\ 4 & nil & 4 & nil & nil \\ nil & nil & nil & 5 & nil \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} nil & 1 & 1 & nil & 1 \\ nil & nil & nil & 2 & 2 \\ nil & 3 & nil & nil & nil \\ 4 & 1 & 4 & nil & 1 \\ nil & nil & nil & 5 & nil \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} nil & 1 & 1 & 2 & 1 \\ nil & nil & nil & 2 & 2 \\ nil & 3 & nil & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & nil & 1 \\ nil & nil & nil & 5 & nil \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} nil & 1 & 1 & 2 & 1 \\ nil & nil & nil & 2 & 2 \\ nil & 3 & nil & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & nil & 1 \\ nil & nil & nil & 5 & nil \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} nil & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & nil & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & nil & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & nil & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & nil \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} nil & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & nil & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & nil & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & nil & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & nil \end{pmatrix}$$

الشكل 4. 9

بناء أقصر الطرق

لم نتطرق في الخوارزمية السابقة إلى كيفية تحديد الطريق ذي الطول الأقصر، إذ تتعدد الوسائل للقيام بذلك ونقوم عادة بحساب مصفوفة الأسبقية Π حيث:

Π_{ij} = العقدة السابقة للعقدة j على الطريق الأقصر من $i \to j$

ويجري بناء Π تدريجيا أيضا كالمصفوفة D بحساب متتالية من المصفوفات $\Pi^{(0)},\Pi^{(1)},....,\Pi^{(n)}$ بحيث تكون $\Pi = \Pi^{(n)}$ و تعرف $\Pi_{ij}^{(k)}$ بأنها العقدة السابقة لـ j في الطريق من i إلى j، الذي تنتمي جميع عقده الداخلية إلى المجموعة $\{1,2,..,k\}$. و يمكننا إعطاؤها تعريفا رياضيا:

- في حال $k = 0$ لا يحوي الطريق من i إلى j أية عقد داخلية وبهذا يكون:

$$\Pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} Nil & if \quad i = j \quad or \quad w(i,j) = \infty \\ i & if \quad i \neq j \quad and \quad w(i,j) < \infty \end{cases}$$

- في حال $k \geq 1$، إذا أخذنا الطريق $i \to k \to j$، تكون العقدة السابقة لـ j على هذا الطريق هي نفسها العقدة السابقة لـ j في الطريق من k إلى j الذي تنتمي عقده الداخلية إلى $\{1,2,..,k-1\}$ وإلا كانت العقدة السابقة لـ j على أقصر الطرق من i إليها ضمن المجموعة $\{1,2,..,k\}$ هي العقدة نفسها على الطريق الأقصر إليها، الذي تقتصر عقده الداخلية على المجموعة $\{1,2,..,k-1\}$

أي يمكننا التعبير عن ذلك بالعلاقة التالية:

$$For \quad k \geq 1, \ \Pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \Pi_{ij}^{(k-1)} & if \quad d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \Pi_{kj}^{(k-1)} & otherwise \end{cases}$$

وبإمكاننا بسهولة إدخال هذه العلاقة في الخوارزمية السابقة للحصول في النهاية على المصفوفة Π التي نستنتج منها أقصر الطرق بين أية عقدتين.

تمرينات

التمرين 1. ليكن لدينا شبكة اتصالات مؤلفة من مجموعة من المراكز الموصولة فيما بينها بقنوات اتصال. تربط بكل قناة قيمة $r(u,v)$ في المجال $[0,1]$ تمثل جاهزية القناة التي تصل بين المركزين u و v (احتمال عدم تعطلها) ونفترض أن هذه القيم مستقلة بعضا عن بعض.

أعط خوارزمية لتحديد أفضل قنوات الاتصال بين أي مركزين.

التمرين 2. الطريق ذو الاستطاعة الأعظمية

ليكن لدينا البيان الموجه $G=(V,E)$. نفترض أن كل سهم e في هذا البيان له استطاعة ثابتة $c_e \geq 0$ ونعرف استطاعة طريق ما P داخل البيان على أنها الاستطاعة الصغرى لسهم ينتمي لهذا الطريق أي: $C_P = \min_{e \in P} c_e$.

نريد البحث عن الطريق ذي الاستطاعة الأعظمية من منبع s إلى أية عقدة من البيان.

ملاحظة: يمكن استخدام مثل هذه البيانات لتمثيل مجموعة قنوات مائية تربط منبعا بمجموعة من الخزانات.

i) بين وجوه التشابه و الاختلاف بين هذه المشكلة وبين مشكلة البحث عن أقصر الطرق.

ii) اقترح تعديلا لخوارزمية *Dijsktra* للحصول على حل لهذه المشكلة.

التمرين 3. ليكن لدينا البيان $G[V,E]$ حيث $V=\{1,2,..,n\}$.

نرغب في أن نعرف أهناك طريق بين أية عقدتين i,j من V؟ ونعرف البيان $G^*[V,E^*]$ بحيث تنتمي الوصلة (i,j) إلى E^* إذا كان هناك طريق من i إلى j داخل البيان الأصلي G.

اقترح خوارزمية لحساب G^* اعتمادا على خوارزمية *Floyd-Warshall*.

التمرين 4. أعط خوارزمية تسمح اعتمادا على المصفوفة Π بطباعة الطريق بين عقدتين i و j وليكن اسمها $PrintPath(\Pi,i,j)$.

التمرين 5. لقد افترضنا لحل مسألة البحث عن أقصر الطرق بين أي عقدتين من بيان ما G خلو هذا البيان من الحلقات الماصة.

كيف يمكننا اعتبارا من خرج الخوارزمية FW اكتشاف وجود مثل هذه الحلقات؟

الجزء الثاني

البرمجة الخطية

الفصل الخامس

البرمجة الخطية

مفاهيم وأدوات رياضية أساسية

يعتبر الرياضي الروسي كانتروفيتش *Shri L. V. Kantorovich* أول من صاغ طريقة البرمجة الخطية، إلا أنها طوّرت إلا حد بعيد فيما بعد في عام *1947* على يد دانتزغ *George B. Dantzig* وذلك " لأغراض ترتيب *Scheduling* النشاطات الإجرائية المعقدة للقوى الجوية في الولايات المتحدة الأمريكية". تستخدم هذه الطريقة اليوم لحل عدد كبير من المسائل العملية. لقد زاد التقدم الكبير في الحواسيب الإلكترونية من إمكان تطبيقها في معالجة طيفٍ واسعٍ من المسائل في مجالات متعددة ومتباينة.

5. 1. معنى البرمجة الخطية

تعتبر البرمجة الخطية *Linear Programming* (*LP*) واحداً من أعظم الاختراعات في حقل بحوث العمليات منذ الحرب العالمية الثانية. تدل الكلمة (خطي) على أن العلاقات بين مركبات المنظومة يمكن أن تمثل بمعادلات *Equations* ومتراجحات *Inequalities* ودوالّ خطيةٍ *Linear Functions*. أما كلمة (برمجة) فتشير إلى أن القرّارات (خطوات المعالجة) تجري آلياً *Systematically*. ومن ثم فإن البرمجة الخطية هي تقنية من تقنيات الأمثلة (وبوجهٍ أعم، من تقنيات صنع القرار *Decision Making*) باعتبار مجموعة من القيود *Constraints*، تتصف العلاقات بين متحولاتها (الممثلة لظواهر

مختلفة) بالخطية. لقد سمّاها دانتزغ في البداية "برمجة النشاطات المستقلة في بنية خطية، لكنها اختزلت، فيما بعد، إلى "البرمجة الخطية". تُستخدم البرمجة الخطية عموماً لحل مشكلة أمثلة *Optimization* (أعظمة *Maximization* أو أصغرة *Minimization*) في إطار بعض الافتراضات. إذا أردنا وضع صيغة صورية *Formal* لتعريف البرمجة الخطية فيمكن القول إنها أمثلة لدالّة خطية من المتحولات التي تخضع لقيود على شكل معادلات و/أو متراجحات خطية. يشير التعريف السابق إلى المسائل التي يمكن معالجتها بواسطة البرمجة الخطية، فالمسائل التي يمكن استخدام تقنيات البرمجة الخطية لمعالجتها هي تلك المسائل التي يمكن نمذجتها بدالّة أمثلة خطية، تخضع لمجموعةٍ من القيود الخطية. إن الأمثلة على هذا النمط من المسائل أكثر من أن تعد فمنها، على سبيل المثال لا الحصر، مسائل الاستخدام الأمثل للموارد، ومسائل تخطيط الإنتاج، ومسائل توزيع الموارد، ومسائل الترتيب، والكثير الكثير غيرها من المسائل.

5. 2. مفاهيم ومصطلحات أساسية

كي نفهم البرمجة الخطية بعمق، علينا أن نستوعب أولاً بعض المفاهيم والمصطلحات التي تعتبر مفاتيح أساسية لفهم البرمجة الخطية. نعرض فيما يلي تعريفاً مختصراً بهذه المفاهيم والمصطلحات :

1) الخطية *Linearity*: يعني هذا المصطلح أن العلاقات بين المتحولات يعبّر عنها بسطوح مستوية (مستقيمات في الفضاء الديكارتي) أو أن هذه العلاقات هي علاقات تناسبية. أي إن مضاعفة قيمة الدخل تعني مضاعفةً لقيمة الخرج. فإذا كان إنتاج آلتين

يساوي ضعف إنتاج آلة (من نفس النوع) فإن إنتاج أربع آلات يساوي ضعف إنتاج الآلتين.

2) الدالة الهدف *Objective Function* (وتُسمى أيضاً الدالة الاقتصادية *Economic Function*) : تحدد هذا الدالة فيما إذا كان المطلوب هو البحث عن "كمية أعظمية" أو "كمية أصغرية". فهذه الدالّة هي عبارة عن تركيب خطي لمتحولات المسألة نسعى لإيجاد القيمة العظمى له أو القيمة الصغرى وذلك بحسب المسألة.

3) القيود (المتراجحات و/أو المعادلات) : إنها الحدود التي يجب أن نخطط ونقرر ضمنها، أي إنها القيود المفروضة على متحولات القرار. تأخذ هذه الحدود شكل المتراجحات ($x \geq c$ حيث x متجهة) في الحالة العامة. ليست المتراجحات هي الشكل الوحيد الذي يمكن أن تأخذه القيود، بل يمكنها أن تأخذ شكل المعادلات ($x = c$).

5. 3. الشكل العام للبرنامج الخطي

تأسيساً على ما ناقشناه سابقاً، نجد أنه من الممكن وضع البرنامج الخطي بالشكل الرياضي التالي :

❖ <u>لنختر الكميات x_j (قيم المتحولات)</u>

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ldots,n)$$

حيث x_j هو متحول حقيقي ($x_j \in IR$)*.

* تعتمد الصيغة الأصلية للبرمجة الخطية متحولات حقيقية، وهي ما سنعالجه في كتابنا هذا. عندما تقوم البرمجة الخطية على متحولات طبيعية نسميها برمجة طبيعية، أو البرمجة الخطية بأعداد طبيعية، وهي مسألة مختلفة تماما عن الصيغة الأصلية للبرمجة الخطية.

تُعرف هذا المتراجحات أيضاً بشروط اللاسلبية وهي تعني بكل بساطة أن المتحولات يجب أن تكون غير سالبة (يمكن أن تكون معدومة). لا تحد هذه الشروط من إمكانية اعتبار متحولات حقيقية سالبة. في الحقيقة، يمكن أن نبدل بالمتحول الحقيقي x_j الذي يمكنه أخذ أي قيمة حقيقية (سالبة أو موجبة أو صفرية) الفرق $x_j^+ - x_j^-$ بين المتحولين الحقيقيين الموجبين x_j^- و x_j^+.

❖ **كي نعظّم الدالة $z = f(x)$ الخطية أو الأفينية *Affine*،**

نكتب:

$$Max\ z = f(x)$$

❖ **بمراعاة القيود**

قيود التساوي أو المعادلات	$i \in I^0$	$g_i(\mathbf{x}) = 0$
قيود المتراجحات (أصغر)	$i \in I^-$	$g_i(\mathbf{x}) \le 0$
قيود المتراجحات (أكبر)	$i \in I^+$	$g_i(\mathbf{x}) \ge 0$

حيث g_i $(i \in I = I^0 \cup I^- \cup I^+)$ هي دوالٌ خطيةٌ أو أفينيةٌ للمتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

يمكننا وضع البرنامج الخطي على الشكل المختزل التالي :

$$(P)\quad \begin{cases} Max\ z = f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i \in I^0 \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0 \quad i \in I^- \\ g_i(\mathbf{x}) \ge 0 \quad i \in I^+ \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \Re^n \end{cases}$$

5. 4. مثال على صياغة نموذج برنامج خطي

يُنتج معمل نوعين من المنتجات A و B. يُجرى على كل من المنتجين ثلاث عمليات : تجميع و طلاء و اختبار. يعرض الجدول (5. 1) المعطيات المتعلقة بكل من المنتجين.

		الساعات المطلوبة لإنجاز قطعة واحدة		
	سعر مبيع الواحدة	تجميع	طلاء	اختبار
المنتج A	50	1.0	0.2	0.0
المنتج B	80	1.5	0.2	0.1

الجدول 5. 1

أما العدد الإجمالي لساعات العمل المتاحة أسبوعياً فهو :

التجميع 600

الطلاء 100

الاختبار 30

يرغب المعمل في تحديد الإنتاج الأسبوعي، لكلٍ من المنتجين، والذي يحقق له العائد الأكبر.

إن الخطوة الأولى التي يجب أن نقوم بها هي صياغة البرنامج الخطي الذي ينمذج مسألتنا. كي نقوم بذلك، لنعتمد أولاً ما يلي :

z = العائد الإجمالي

x_1 = عدد الوحدات المنتجة من المنتج A

x_2 = عدد الوحدات المنتجة من المنتج B

b_1 = عدد الساعات المتاحة أسبوعيا للتجميع

b_2 = عدد الساعات المتاحة أسبوعيا للطلاء

b_3 = عدد الساعات المتاحة أسبوعيا للاختبار

لما كان المعمل يبحث عن تحقيق العائد الأكبر، فإن البرنامج الخطي الموافق يعطى بالشكل التالي :

الدالة الهدف :

$$Max\ z = 50\,x_1 + 80\,x_2$$

القيد الذي تفرضه عملية التجميع :

$$1.0\,x_1 + 1.5\,x_2 \le 600 \qquad (1\ .5)$$

القيد الذي تفرضه عملية الطلاء :

$$0.2\,x_1 + 0.2\,x_2 \le 100 \qquad (2\ .5)$$

القيد الذي تفرضه عملية الاختبار :

$$0.0\,x_1 + 0.1\,x_2 \le 30 \qquad (3\ .5)$$

قيود اللاسلبية :

$$0 \le x_1 \text{ ، } 0 \le x_2 \qquad (4\ .5)$$

5. 5. طرق حل البرامج الخطية

إن وضع النموذج ما هو إلا الخطوة الأولى في معالجة مسألة ما، أما الخطوة التالية فهي استخدام هذا النموذج لإيجاد حل المسألة، فكيف نوجد حل برنامجٍ خطي؟. هناك طريقتان لحل البرامج الخطية :

1) الطريقة البيانية

2) الطريقة التحليلية

سنناقش في فقرتنا التالية الطريقة البيانية، أما الطريقة التحليلية فستكون موضوع بحث مطول على مدى بقية هذا الفصل والفصول التالية.

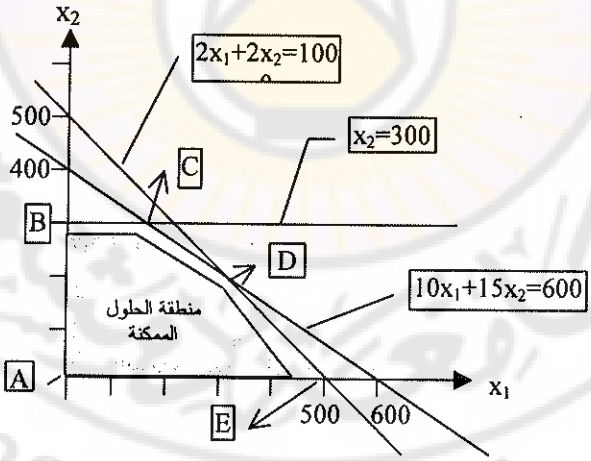
5. 5. 1. الطريقة البيانية لحل البرامج الخطية

عندما يكون عدد متحولات البرنامج الخطي اثنين فقط، فأول ما يتبادر إلى الذهن هو تمثيله بيانياً في مستوٍ مسند إلى محوري إحداثيات، بحيث يمثل أحد المحورين تغيرات المتحول الأول، ويمثل الثاني تغيرات المتحول الثاني. ففي هذه الحالة يمكن تمثيل حلول كل قيد بنصف فضاءٍ معرفٍ بمعادلة المستقيم المشتقة من هذا القيد (لا ننسى قيود اللاسلبية). وتكون حلول جملة القيود هي الفضاء الناتج عن تقاطع أنصاف الفضاءات المعرفة بكل القيود. أما القيمة المثلى لدالّة الهدف، فنحصل عليها عن طريق تحويل دالّة الهدف في فضاء حلول القيود.

لنعد إلى مثالنا السابق، ولنسند إلى المستوي محورين، محوراً أفقياً يمثل تغيرات x_1 (المنتج A) ومحوراً عمودياً يمثل تغيرات المتحول x_2 (المنتج B). إن الحلول الممكنة

للمتراجحة (5. 1) هي مجموعة كل الثنائيات التي تنتمي إلى الجزء من المستوي الواقع إلى أسفل المستقيم الممثل بالمعادلة $1.0\ x_1 + 1.5\ x_2 = 600$ (انظر الشكل 5. 1). بنفس الطريقة نجد الحلول الممكنة للمتراجحتين (5. 2) و(5. 3). إن مجموعة الحلول التي تحقق المتراجحات الثلاث في الوقت نفسه، ما هي إلا تقاطع أجزاء المستوي المحققة لكل المتراجحات في الوقت ذاته. أما المتراجحتان (5. 4) فتفرضان انتماء الحلول الممكنة إلى الربع الأول من المستوي (انظر الشكل 5. 1).

بعد رسم المستقيمات (انظر الشكل 5. 1) نجد أن منطقة الحلول الممكنة تحدد بالمضلع *ABCDE*. علينا الآن أن نوجد القيم (المنتمية إلى منطقة الحلول الممكنة) والتي تجعل الدالة z عظمى. في الحقيقة، إن القيم التي تجعل z عظمى هي القيم الموافقة لواحد (أو أكثر) من رؤوس المضلع *ABCDE* (لماذا؟). لذا علينا حساب قيمة z عند رؤوس هذا المضلع، فنحصل على الجدول (5. 2):



الشكل (5. 1)

نجد من الجدول (5. 2) أن العائد الأعظم (الحل الأمثل لمسألتنا) هو 31500 في حالة إنتاج 150 وحدة من المنتج A و 300 وحدة من المنتج B.

يمكننا أيضاً الحصول على العائد الأكبر عن طريق رسم المستقيم الموافق لدالة الهدف (من أجل أي قيمة له) ثم نقوم بتعظيمه عن طريق تطبيق قاعدة التوازي، وبإزاحته ابتداءً من مبدأ الإحداثيات.

	قيمة x_1	قيمة x_2	عائد x_1	عائد x_2	العائد الكلي
A	0	0	0	0	0
B	0	300	0	24000	24000
C	150	300	7500	24000	(Max) 31500
D	300	180	15000	14400	29400
E	500	0	25000	0	25000

الجدول 5. 2

نعلم من الجبر الخطي أن هناك ثلاثة إمكانات لوجود حل لمنظومة متراجحات القيود (لماذا؟) : هناك حل وحيد، ليس هناك حل، عدد الحلول غير منته. لمّا كان الحل الأمثل لبرنامج خطي هو من باب أولى حل لهذه المنظومة، فإن وجود حل لبرنامج خطي له الإمكانات نفسها، خاصة لإن قيمة دالّة الهدف يجب أن تكون مثلى من أجل هذا الحل، كما أن القيمة المثلى لدالة الهدف قد تكون غير محدودة ($Max(z) \to \infty$). ومن ثمّ لدينا الإمكانات الأربعة التالية لوجود حل لبرنامج خطي :

1) الحل الأمثل وحيد وهو موافق لأحد رؤوس المضلع (كما في مثالنا السابق)

2) عدد الحلول المثلى غير منته.

3) لا يوجد حل.

4) الحل غير معين ($Max(z) = \infty$).

من الواضح أنه يستحيل تمثيل قيود برنامج خطي بطريقة بيانية عندما يتجاوز عدد متحولاته الاثنين (يصعب في حالة ثلاثة متحولات، ويستحيل في حالة عدد أكبر من المتحولات)، لذا فلا يمكن اعتماد الطريقة البيانية منهجاً عاماً لحل البرامج الخطية، ومن هنا الحاجة إلى منهج آخر. تقدم الطريقة التحليلية مثل هذا المنهج. سنعالج فيما يلي من هذا الفصل المفاهيم والمبرهنات الأساسية التي تقوم عليها الطريقة التحليلية. أما الخوارزميات الناتجة عن هذه الطريقة فستكون موضوع الفصول القادمة.

5. 5. 2. الطريقة التحليلية لحل برنامج خطي

إن الهدف النهائي للطريقة التحليلية هو تقديم خوارزميات لحل البرامج الخطية (مهما كان عدد متحولاتها). لبناء مثل هذه الخوارزميات طوّرت أدوات رياضية تعتمد، أساساً، على الجبر الخطي والهندسة التحليلية. فقُرن فضاء حلول قيود البرامج الخطية بمتعددات وجوه محدبة، وبُرهن على أن حلول البرامج الخطية تنتمي إلى نقاط تقاطع وجوه متعددات الوجوه (الوجوه هي، بوجهٍ عام، سطوح مستوية).

سنقتصر في فصلنا هذا على دراسة المفاهيم والمبرهنات الأساسية المتعلقة بنظرية متعددات الوجوه، والمفاهيم والمبرهنات المتعلقة بحلول برنامج خطي. كما سندرس المفاهيم والمبرهنات التي تربط بين متعددات الوجوه وحلول البرامج الخطية.

أما مناقشة الخوارزميات الناتجة عن هذه الدراسات النظرية فستُترك إلى الفصول التالية.

5. 5. 2. 1. الشكل القياسي لبرنامج خطي

نقول إن البرنامج الخطي موضوعٌ في شكله القياسي إذا كانت قيوده (باستثناء قيود اللاسلبية) موضوعة على شكل معادلات (مساوَيات).

يمكننا وضع أي برنامج خطي في شكلٍ قياسي عن طريق إدخال متحولات إضافية تسمى متحولات الفروق.

مثال 5. 1

$$(P1)\begin{cases} Max\ z = 5x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

بإدخال متحولي الفروق $s_1 \geq 0$ و $s_2 \geq 0$ في القيد الأول والثاني، يأخذ $P1$ الشكل القياسي المكافئ $P'1$.

$$(P'1)\begin{cases} Max\ z = 5x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 - s_1 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad + s_2 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

لهذا السبب لن نعتبر، من الآن فصاعداً، إلا البرامج الخطية أي التي تأخذ الشكل لقياسي **P** التالي:

$$(\mathbf{P})\begin{cases} Max\ z = \mathbf{c}.\mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

حيث :

n = عدد المتحولات،

m = عدد القيود (في هذه الحالة المعادلات)،

A = المصفوفة الحقيقية $m * n$ (مصفوفة معاملات القيود)،

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ = متجهة سطر التكاليف،

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ = متجهة عمود الطرف الثاني من القيود،

$z = \mathbf{c}.\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j$ الدالة الهدف،

يمكننا دائما افتراض أن $rang\ (A) = m$.

في الحقيقة، لا يمكن أن يكون $rang(A) > m$، إذ حسب تعريف رتبة مصفوفة لدينا:

$$rang\ (A) \leq min(m, n)$$

أما إذا كان $rang\ (A)<m$، فيمكننا التعبير عن بعض سطور A بتركيب خطي في السطور الأخرى (راجع الجبر الخطي). في هذه الحالة تحدد قيم الطرف الثاني للقيود b_i فيما إذا كانت القيود المقابلة لها فائضة (ومن ثم يمكن حذفها) أو أنها غير متوافقة (ومن ثم فالمنظومة $A\ .\ x = b$ ليس لها حل).

5. 5. 2. 2. تعاريف أساسية

- نقول إن المتجهة $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ هي حل لـ (P) إذا وفقط إذا تحقق :

$$A\ .\ x = b$$

- نقول أن المتجهة $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ هي حل مقبول لـ (P) إذا وفقط إذا تحقق :

$$A\ .\ x = b \text{ و } x \geq 0$$

- نقول عن الحل المقبول الذي يعطي دالة الهدف قيمة عظمى إنه حل أمثل لـ (P).

5. 5. 2. 3. بعض عناصر نظرية المجموعات المحدبة ونظرية متعددات الوجوه المحدبة

تعتبر نظريتا المجموعات المحدبة ومتعددات الوجوه، الأساس النظري الذي تقوم عليه الطريقة التحليلية في بناء خوارزميات حل البرامج الخطية. من جهة أخرى لا يتسع المجال، هنا، لمناقشة مواضيع هاتين النظريتين بالتفصيل، ولا نحتاج إلا إلى بعض عناصرهما لدراسة الطريقة التحليلية لحل البرامج الخطية. لذا سنقتصر في دراستنا على تلك العناصر التي تهمنا من هاتين النظريتين.

- نقول عن المجموعة الجزئية S من IR^n إنها مجموعة محدبة إذا وفقط إذا تحقق :

$$\forall x \in S, y \in S, \lambda \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \lambda.x + (1-\lambda).y \in S$$

- يمكننا بسهولة التحقق من أن نصف–الفضاء المغلق في $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ والذي يحقق :

$$\alpha_1.x_1 + \alpha_2.x_2 + \ldots + \alpha_n.x_n \leq \beta$$

هو مجموعة محدبة.

- تقاطع عدد منته من المجموعات المحدبة من IR^n هو مجموعة محدبة.

- متعدد الوجوه (*Polytop*) المحدب من IR^n هو تقاطع عدد منته من أنصاف–الفضاءات المغلقة.

- متعدد الوجوه المكتمل (*Polydre*) المحدب من IR^n هو متعدد وجوه محدب محدود (*bounded*).

- بحسب ما سبق قوله، فإن مجموعة الحلول المقبولة لبرنامج خطي S، هي : إما متعدد وجوه محدب (في حالة كون مجال الحلول غيرَ محدود) أو متعدد وجوه مكتمل محدب (في حالة كون مجال الحلول محدوداً).

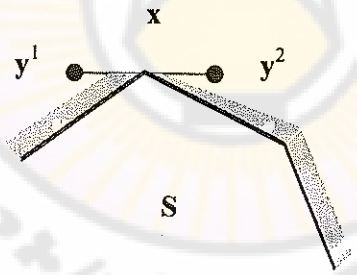
- لنعتبر k متجهةً $x^1, x^2, \ldots, x^k$ من IR^n، فإننا نسمّي تركيباً خطياً محدباً في هذه المتجهات النقاط x التي تحقق ما يلي :

$$\lambda_1 . x^1 + \lambda_2 . x^2 + \ldots + \lambda_n . x^n = x$$

حيث $\lambda j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, k)$ و $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$.

- نقول عن نقطة x من متعدد الوجوه المحدب أو متعدد الوجوه المكتمل المحدب S إنها نقطة متطرفة، إذا استحال التعبير عنها بتركيب خطي محدب بدلالة نقاط أخرى من S أي:

إذا لم يوجد y بحيث $y \in S$ و $y \neq x$ (الشكل 5. 2).



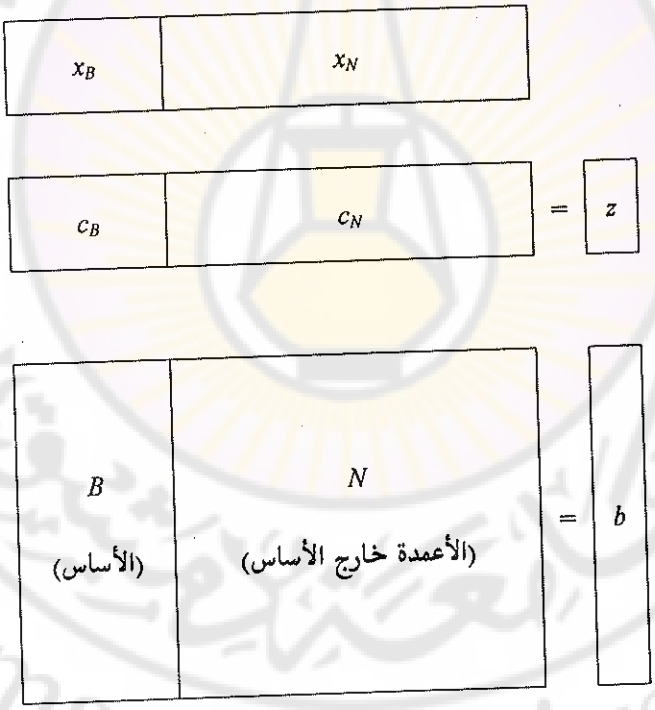
متعدد وجوه مكتمل محدب في الفضاء $IR2$. x نقطة متطرفة

الشكل 5. 2

5. 5. 2. 4. الأسس، الأسس المقبولة، الحل الموافق لأساس

- نسمي كل مصفوفة جزئية مربعة نظامية $(m * m)$ مستخرجة من A بالأساس (يوجد على الأقل أساس واحد إذ إن $rang\ (A) = m$)

- ليكن B أساسا ما. يمكننا دائما بإجراء مجموعة من التبديلات على أعمدة A، وضع A على الشكل التالي : $A = [B, N]$ حيث N ترمز إلى أعمدة A التي لا تنتمي إلى الأساس B. بنفس الطريقة يمكننا وضع x بالشكل $[x_B, x_N]$ وكذلك c بالشكل $[c_B, c_N]$ (الشكل 5. 3).



الشكل (5. 3)

كل حل لـ (P) يحقق $A \,.\, x = b$ وعلى هذا :

$$B.x_B + N.x_N = b \qquad (5\ .5)$$

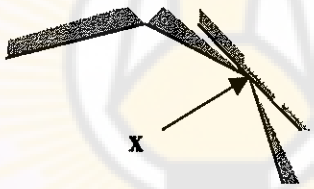
نسمي حلا موافقا للأساس B، الحل الخاص للمنظومة $(5.\ 5)$ الذي يمكن الحصول عليه بوضع $x_N = 0.x_B$ ، ومن ثم يحدد تحديدا وحيدا عن طريق المنظومة (منظومة كرامر *Cramer*) :

$$B \,.\, x_B = b \text{ ومن ثم } x_B = B^{-1} \,.\, b$$

- يقال عن حل موافق لأساس B إنه مقبول، إذا كان $x_B \geq 0$، بقول آخر إذا كان:

$$B^{-1} \,.\, b \geq 0$$

- الأساس المقبول هو أساس موافق لحل مقبول.



الشكل 5. 4

- يقال عن حل موافق لأساس إنه معتل، إذا كان للمتجهة $x_B = B^{-1} \,.\, b$ مركبات معدومة. إن دراسة الاعتلال (الشكل 5. 4) معقدة بما يكفي لكي لا نتناولها هنا. سنفترض، فيما يتبع، أن الحلول المقبولة الموافقة للقواعد غير معتلة (نحتاج إلى هذه الفرضية بوجه خاص لبرهان مبرهنة التقارب المنتهي).

نعرض فيما يلي لمجموعة من المبرهنات، التي توضح العلاقة بين متعددات الوجوه المحدبة (مكتملة وغير مكتملة) الموافقة للحلول المقبولة للبرامج الخطية، وحلول هذه البرامج الموافقة لأسس (لن نخوض في براهين هذه المبرهنات، تاركين ذلك للقارئ، فالمهمة ليست صعبة، ويمكن تحقيقها ببعض الجهد أو بالعودة إلى المراجع). سنخلص، من هذه المبرهنات، إلى أن القيمة المثلى لدالة هدف برنامج خطي تتحقق من أجل الحلول الموافقة لأسس.

مبرهنة 5. 1

ليكن S متعدد الوجوه المحدب الموافق للحلول المقبولة لبرنامج خطي ما، إن مجموعة نقاط S المتطرفة تقابل مجموعة الحلول الموافقة للأسس المقبولة.

توطئة 5. 1

كل نقطة من متعدد وجوه مكتمل محدب S ($S \subset IR^n$) هي تركيب خطي محدب لنقاط S المتطرفة.

توطئة 5. 2

للمجموعة المحدبة (متعدد الوجوه أو متعدد الوجوه المكتمل) :

$$S = \{ x \in IR^n / A \,.\, x = b, x \geq 0 \}$$

عدد منته $v(S)$ من النقاط المتطرفة، بحيث أن $v(S) \leq C_n^m$.

تبين هذه التوطئة أن عدد الحلول المقبولة لبرنامج خطي هو عدد محدود، وهو أصغر أو يساوي توافيق (n, m).

- ليكن S متعدد وجوه محدب (غير مكتمل). نقول إن المتجهة $y \geq 0$ هي متجهة لا منتهية إذا كان لأجل كل $x \in S$ لدينا $x + \lambda y \in S$ من لأي $\lambda \geq 0$. يمكننا التحقق أن y هو متجهة لا منتهية إذا وفقط إذا كان y حلا غير سالب للمنظومة : $A \cdot y = 0$ (تحقق من ذلك). إن مجموعة الأشعة اللامنتهية Y هي مجموعة محدبة (مخروط متعدد الوجوه مكتمل) ولها مجموعة منتهية من النقاط المتطرفة، نسميها المتجهات المتطرفة. كي نحصل على المتجهات المتطرفة يكفي اعتبار كل الأسس المستخرجة من A، ومن أجل كل أساس، نأخذ الأعمدة خارج الأساس A_j. كلما كان هناك حل y'_B غير سالب للمنظومة :

$$B.\, y_B = -A_j$$

كان هذا الحل متجهة متطرفة في S.

بالنتيجة يمكن أن تتمم التوطئة 5. 1 بحيث تتضمن حالة المجالات غير المحدودة. وهو موضوع التوطئة (5. 3).

توطئة 5. 3

يمكن التعبير عن أي نقطة من متعدد وجوه $S \subset IR^n$ كتركيب خطي محدب بالنقاط المتطرفة، التي يمكن أن يضاف إليها (احتماليا) تركيب خطي بمعاملات غير سالبة في الأشعة المتطرفة.

مبرهنة 5. 2

تبلغ الدالة الخطية المعرفة على متعدد وجوه مكتمل محدب $S \subset IRn$ قيمتها المثلى في نقطة متطرفة واحدة على الأقل. إذا بلغت هذه القيمة (المثلى) في عدة نقاط (متطرفة) فإنه يبلغها في كل نقطة تنتمي إلى التركيب الخطي المحدب لهذه النقاط.

تبين المبرهنة (5. 2) أنه يكفي لإيجاد القيمة المثلى لدالة هدف برنامج خطي أن نختبر قيم هذه الدالة عند كل النقاط المتطرفة لمتعدد الوجوه المحدب، المعرف بقيود هذا البرنامج الخطي. لكن علينا ألا ننسى أن عدد هذه الاختبارات كبير جدا في الحالة العامة.

بعد أن تعرفنا العلاقة بين الحلول المقبولة للبرامج الخطية، ومتعددات الوجوه المحدبة، نقدم فيما يلي دراسة لخصائص الأسس الأمثلية. فتكتمل عدتنا لمعالجة الخوارزميات الموجهة لحل البرامج الخطية.

5. 5. 2. 5. صفات الأسس الأمثلية

نستنتج من المبرهنتين (5. 1) و (5. 2) السابقتين، أنه عندما يكون لبرنامج خطي حل أمثل بمسافة منتهية، فإن هناك أساسا مقبولا B^* (أساس أمثل) بحيث أن الحل الموافق x^* هو حل أمثل. مشكلتنا الآن هي تعريف إجراء يسمح لنا بإيجاد B^*. إن هذا الإجراء، كما سنرى فيما بعد، ينتج مباشرة من المبرهنة (5. 3) التي توصف الأسس الأمثلية والحلول الموافقة الأمثلية.

مبرهنة 5. 3

لنضع الـ m متجهة–سطر $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ بالشكل :

$$\pi = c_B \,.\, B^{-1}$$

إن B هي أساس مقبول أمثل إذا وفقط إذا (نفترض غيـاب الاعتـلال، أي إن $x_B = B^{-1}.b>0$) :

$$\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - \pi.N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B.B^{-1}.N \leq 0$$

تسمى المتجهـة π متجهـة مضـاريب سمبليكـس، وتسـمى المركبـات $\bar{\mathbf{c}}_j$ للمتجهـة $\bar{\mathbf{c}}_N$ التكاليف المختزلة للمتحولات خارج الأساس.

البرهان

1) كفاية الشرط

ليكن $x = [x_B, x_N]$ حلا مقبولا ما لـ (P) (ليس مـن الضـروري أن يكـون موافقـا لأسـاس) ولتكن $z(x)$ القيمة الموافقة للدالة z.

بإجراء تغيير للمتحولات، نجد :

$$x_B = B^{-1}.\, b - B^{-1}\,.\, N\,.\, x_N$$

يمكننا التعبير عن z بالمتحولات خارج الأساس فقط، بالشكل التالي :

$$z(x) = c_B.\, B\text{-}1.b + (c_N.B^{-1} - c_B.\, B^{-1}.\, N)\,.\, x_N = z_B + c_N\,.\, x_N$$

حيث $z_B = c_B . B^{-1}.b$.

ولما كان $\bar{c}_N \leq 0$ و $x_N \geq 0$، كان : $z(x) \leq z_B$.

من جهة أخرى، تبلغ القيمة z_B لـ z بواسطة الحل الموافق للأساس المقبول التالي :

$$\mathbf{x}^0 = [\mathbf{x}_B^0, \mathbf{x}_N^0] = [B^{-1}.\ \mathbf{b}, 0]$$

لذا فإن $z_B = z(x^0) = z^*$ حيث z^* هي القيمة العظمى لـ z. وبهذا يتم برهان كفاية الشرط.

2) لزوم الشرط

لنبرهن أنه إذا وجد s بحيث $\bar{c}_s > 0$ فإنه يمكننا الحصول على حل أفضل من z_B.

لنبدأ من النقاط $\mathbf{x}^0 = [\mathbf{x}_B^0, \mathbf{x}_N^0]$ لنقم بالانتقال الذي يكون من أجله x_{ss} هو المتحول الوحيد (من بين المتحولات خارج الأساس) الذي يغير قيمته : المعدومة في الحل x^0 والتي ستأخذ القيمة $\theta > 0$.

إذن النقطة $x = [x_B, x_N]$ التي حصلنا عليها تحقق :

$$x_N = \mathbf{x}_N^0 + \theta.\ e_s = \theta.\ e_s$$

حيث e_s هي متجهة لها نفس بعد x_N وكل مركباتها معدومة باستثناء المركبة s التي تأخذ القيمة 1.

يجب اختيار θ بحيث يبقى الحل مقبولا، أي :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_B = B^{-1}.\mathbf{b} - B^{-1}.N.\mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_N \geq 0 \end{cases}$$

لنرمز بـ $\overline{N}$ إلى المصفوفة $B^{-1}.N$ و بـ $\overline{N}_s$ إلى العمود s من $\overline{N}$ وبـ $\overline{\mathbf{b}}$ إلى المصفوفة $B^{-1}.b$، فيكون لدينا:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_B = \overline{\mathbf{b}} - \theta.\overline{N}_s \\ \mathbf{x}_N \geq 0 \end{cases}$$

إذا كان $\overline{\mathbf{b}} > 0$ (فرضية اللا اعتلال) فإنه بالإمكان دائما اختيار θ (الموجبة) صغيرة إلى حد كاف بحيث يبقى $x_B \geq 0$. فيكون لدينا :

$$z(x) = z(x^0) + \overline{\mathbf{c}}_N \,.\, x_N = z(x^0) + \theta.\overline{\mathbf{c}}_N.e_s = z(x^0) + \theta.\ \overline{\mathbf{c}}_s > z(x^0)$$

على هذا x^0 ليست حلا أمثل و B ليست أساسا أمثل .□

توطئة 5. 4

لتكن B أساسا ما و x^0 الحل الموافق لهذا الأساس و $\overline{\mathbf{c}}_N = c_N - \pi.N$ (التكلفة المختزلة).
إذا وجد متحول خارج الأساس x_s بحيث $\overline{\mathbf{c}}_s > 0$ ، فلدينا أحد إمكانين:

1) إما زيادة قيمة x_s بمقدار ما نشاء بدون مغادرة مجموعة الحلول المقبولة، وفي هذه الحالة تكون القيمة المثلى لـ z غير محدودة $(+\infty)$،

2) أو إيجاد أساس آخر $\hat{B}$ وحل مقبول موافق للأساس $\hat{\mathbf{x}}$ بحيث :

$$z(x) > z(x^0)$$

البرهان

كما في برهان المبرهنة (5. 3)، لنأخذ من أجل $\theta > 0$، الحل المعطى بالمتجهة التالية :

$$x = [x_B, x_N]$$

المعرف بالشكل التالي :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_N^0 - \theta.\mathbf{e}_s = \theta.\mathbf{e}_s \\ \mathbf{x}_B = \overline{\mathbf{b}} - \theta.\overline{N}_s \end{cases}$$

هناك حالتان ممكنتان :

1) $\overline{N}_S \leq 0$

يمكن إذن لـ x_s أن تأخذ قيمة θ الكبيرة بالمقدار الذي نشاء، ويكون لدينا دائما $x_B \geq 0$.
ولما كان :

$$z(x) = z(x^0) + \theta.\ \overline{c}_s \quad \text{مع} \quad \overline{c}_s > 0$$

فقيمة z المقبلة يمكن أن تكون أيضا كبيرة بالمقدار الذي نشاء، وتكون القيمة المثلى غير محدودة).

2) $\exists i\ (1 \leq i \leq m)$ بحيث $\overline{N}_{is} > 0$

في هذه الحالة لا يمكن لـ θ أن تزداد ازديادا غير منته، والقيمة الكبرى $\hat{\theta}$ التي يمكن أن تأخذها θ تعطى بالعلاقة التالية :

$$\hat{\theta} = \underset{\bar{N}_{is} > 0}{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{N}_{is}} \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{N}_{rs}} \qquad (2.5)$$

والحل المقبول الجديد الذي نحصل عليه له المركبات التالية :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\theta} \cdot \mathbf{e}_s \\ \hat{\mathbf{x}}_B = \bar{\mathbf{b}} - \hat{\theta} . \bar{N}_s \end{cases}$$

ويكون لدينا من ثم : $z(\hat{\mathbf{x}}) = z(x^0) + \hat{\theta} \cdot \bar{c}_s > z(x^0)$.

نلاحظ أنه إذا كان الأصغري ($Min()$) المعطى بالعلاقة (2.5) وحيدا (حالة اللا اعتلال) فإن هذا الحل ($\hat{\mathbf{x}}$) له تماما m مركبة غير معدومة. في الحقيقة :

المتحول x_s الذي كان معدوما في x^0 أصبح موجبا تماما؛

– المتحول x_{rs} الذي كان موجبا تماما أخذ الآن القيمة التالية :

$$\hat{x}_r = \bar{b}_r - \hat{\theta} . \bar{N}_{rS} = 0$$

لذا فإن الحل الجديد $\hat{\mathbf{x}}$ هو حل موافق لأساس. إن هذا الحل يقابل الأساس $\hat{B}$ المستنتج من B بإبدال العمود s بالعمود r.

يرتبط الأساسان B و $\hat{B}$ بعلاقة خاصة : تستنتج $\hat{B}$ بتعويض العمود s بالعمود r في مصفوفة B ويقابلان، من ثم، نقطتين حديتين متجاورتين من مجموعة الحلول المقبولة S. لذا فإننا نقول إن هذين الأساسين هما أساسان متجاوران.□

تمنحنا التوطئة (4.5) القدرة على الحكم، على لا محدودية الحل الأمثل (لهذا البرنامج)، كما تمنحنا طريقة، في الحالة المعاكسة، لتحسين الحل الحالي *(Actual*

Solution) (عندما لا نستطيع الحكم بأن الحل الأمثل غير محـــدود). ومـن ثـم فـإن هـذه التوطئة تقدم طريقة مباشرة لحل البرامج الخطية : طريقة سمبليكس.

ستكون دراسة هذه الطريقة محور فصلنا القادم.

تمرينات

التمرين 1. استخدم الطريقة البيانية في حل البرامج الخطية التالية :

$$P_1 \begin{cases} Max\ z = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} Max\ z = x_1 + x_2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$P_3 \begin{cases} Min\ z = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$P_4 \begin{cases} Max\ z = 1.4x_1 + x_2 \\ x_1 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$P_5 \begin{cases} Max\ z = 8x_1 - 4x_2 \\ 4x_1 = 5x_2 \le 20 \\ -x_1 + 3x_2 \ge -23 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \end{cases}$$

$$P_6 \begin{cases} Max\ z = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$P_7 \begin{cases} Max\ z = 2.3x_1 + 2x_2 \\ 30x_1 + 20x_2 \le 7200 \\ 12x_2 \le 2400 \\ x_1 + x_2 \le 275 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

التمرين *2*. ضع البرامج الخطية الواردة في التمرين (*1*) في شكلها القياسي.

التمرين *3*. ضع البرنامج الخطي التالي في شكله القياسي :

$$P \begin{cases} Min\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

التمرين *4*. لتكن لدينا المعلومات التالية :

i. ربح المنتج $A = 6$ ليرات سورية

ii. ربح المنتج $B = 5$ ليرات سورية

iii. يمكن إتاحة *120* ساعة عمل أسبوعيا لصقل كلا المنتجين و *40* ساعة عمل أسبوعيا لتصفيحهما

iv. يعطى الزمن المطلوب لإنجاز القطعتين بالجدول (*5*. *3*).

	المنتج A	المنتج B
الصقل	*3*	*4*
التصفيح	*2*	*1*

الجدول *5*. *3*

أوجد البرنامج الخطي الذي ينمذج هذه المسألة، بافتراض أن الهدف هو الحصول على الربح الأعظم. ضع هذا البرنامج في شكله القياسي.

التمرين 5. تريد شركة أن تركب منتجا من نوعين من المركبات X و Y وزنه 50 كغ/ث. يمكننا استخدام على الأقل 20 كغ/ث من X وعلى الأكثر 40 كغ/ث من Y. يكلف الكغ/ث الواحد من X 25 ل.س، ويكلف الكغ/ث الواحد من Y 10 ل.س. المطلوب إيجاد الكمية المثلى من X و Y لتصنيع المنتج.

اكتب البرنامج الخطي الذي ينمذج هذه المسألة وضعه في شكله القياسي.

التمرين 6. غزارة نهر 10000 م^3/يوم، يحتوي هذا النهر على ثلاثة أنواع من الملوثات A، B، C. كمية الملوثات (كغ/م^3) التي يحتويها النهر من كل ملوث هي على التسلسل p_A، p_B، p_C. يعطي الجدول (5. 4) كفاءة وتكلفة ثلاثة أنواع من أنواع إزالة التلوث الممكنة الاستخدام لإزالة تلوث النهر.

يمكن تفسير هذا الجدول بالشكل التالي : إذا عولج x م3 بواسطة مزيل التلوث 2 فإن x ستحتوي بعد المعالجة على $0.1xp_A$ من الملوث A و $0.12xp_B$ من الملوث B و $0.5xp_C$ من الملوث C. وستكون تكلفة المعالجة بهذا المزيل (مزيل 2) $0.01x$ ل.س $(10x/1000)$. يمكننا معالجة أية كمية من الجريان بكل من المزيلات.

إذا علمت أنه يؤمل ألا يتجاوز مستوى التلوث $\overline{p}_A$ ، $\overline{p}_B$ ، $\overline{p}_C$ (موصفة بالـ كغ/م3) على الترتيب لكل ملوث، استخدم برنامجا خطيا لنمذجة مسألة تحديد كمية الماء التي يجب معالجتها يوميا بكل مزيل.

سنتأمل الآن الملوث A فقط، ونفترض أن $\overline{p}_A / p_A = 0.5$. بين أن البرنامج الخطي الذي ينمذج تحديد مستوى المعالجة الواجب التطبيق يمكن أن يعطى بالشكل التالي :

$$R \begin{cases} Min\ z = 30x_1 + 100x_2 + 180x_3 \\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_0 + 0.6x_1 + 0.1x_2 + 0.07x_3 \le 0.5 \\ x_j \ge 0 \quad j = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

الملوث	مزيلات التلوث		
	مزيل التلوث 1	مزيل التلوث 2	مزيل التلوث 3
A	0.6	0.1	0.07
B	0.7	0.12	0.1
C	0.9	0.5	0.5
التكلفة (ل.س/1000م^3)	3	10	18

الجدول 5. 4

التمرين 7. تنتج مصفاة بترول نوعين من البترول الخفيف PL_1 و PL_2 بالكميات التالية: 30 طنا/يوم و 70 طنا/يوم (على التتالي). معدل الأوكتان (مادة كيميائية) في PL_1 هو 104 ومعدله في PL_2 هو 94. يمكن خلط هذين النوعين البتروليين بالنسبة التي نشاء، يتغير معدل الأوكتان في الخليط خطيا مع معدل الأوكتان في الكميات المركبة له. يعني هذا أن الخليط الناتج من طنين من PL_1 و ثلاثة أطنان من PL_2، على سبيل المثال، والذي يزن خمسة أطنان يحتوي على معدل الأوكتان التالي:

$$(2 \cdot 104 + 3 \cdot 94) / 5 = 98$$

إن معدل الأوكتان في الخليط الذي يباع في الأسواق باسم "كيروسين" يساوي 102، أما معدل الأوكتان في الخليط الذي يباع في الأسواق باسم "ممتاز" فيساوي 96. لنفترض أن

الطلب الأعظمي على الكيروسين هو *20* طنا/يوم، وأن الطلب على الممتاز غير محدود. إن الربح الناتج عن بيع طن من الكيروسين هو *1500* ل.س، والربح الناتج عن بيع طن من الممتاز هو *1000* ل.س.

المسألة هي تحديد كميات الكيروسين والممتاز المنتجة من PL_1 و PL_2 والتي تعظم الربح (مع مراعاة قيود المسألة).

i. حدد متحولات المسألة (أربعة متحولات)

ii. بين أن القيود على معدل الأوكتان هي قيود خطية

iii. ضع المسألة في شكل برنامج خطي

التمرين *8*. برهن أن البرنامج :

$$P \begin{cases} Max\ z = \mathbf{c}.\mathbf{x} \\ \quad A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \quad \alpha_j \le x_j \le \beta_j \quad j = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

هو برنامج خطي. ضعه في شكله القياسي. عالج الحالات التي يكون فيها بعض المتحولات x_j مساوية لـ $-\infty$ وبعض الـ β_j مساوية لـ $+\infty$.

الفصل السادس

البرمجة الخطية

طريقة سمبليكس

اكتملت في الفصل الخامس العدة الرياضية اللازمة لدراسة طريقة سمبليكس في حل البرامج الخطية. لقد وجدنا في ذلك الفصل أنه إذا تمكنا من إيجاد حل أولي للبرنامج الخطي، فيمكننا اختبار كونه الحل الأمثل، أو معرفة إذا كان الحل الأمثل غير محدد أو بإمكاننا – انطلاقاً من هذا الحل– إيجاد حلٍ جديد يحسن القيمة المثلى لدالة الهدف (راجع مبرهنات وتوطئات الفصل السابق). يصح هذا لأيّ حل (نسميه حلاً حالياً). من الواضح أن هذا الإجراء يُعرّف طريقة لحل البرامج الخطية. يبقى فقط أن نحدد كيفية الحصول على الحل الأولي، وكيفية الانتقال من الحل الحالي إلى الحل التالي، حتى نصل إلى الحل الأمثل. بتحديد كل ذلك تتمكن طريق سمبليكس من إيجاد خوارزمياتٍ لحل البرامج الخطية.

سنعالج في هذا الفصل صيغتين لخوارزمية سمبليكس الأولية (سميناها أولية لأن هناك خوارزمية سنسميها الخوارزمية الثنوية وسنناقشها في فصولنا التالية): الصيغة الأصلية والصيغة المعدلة.

6. 1. تمهيد

إذا تكلمنا بلغة الهندسة فإن هذه الخوارزمية تقوم على فكرة الانتقال من نقطة متطرفة s من متعدد الوجوه المحدب، الذي يحد فضاء الحلول المقبولة لبرنامج خطي، إلى نقطة (متطرفة) مجاورة s' بحيث يكون $z(s') > z(s)$.

إذا كانت مجموعة الحلول المقبولة محدودة، فإننا نصل بعد عدد منته من التكرارات (الدورات)، إلى نقطة (متطرفة) يكون من أجلها z أعظمياً.

تحليلياً، تقوم الخوارزمية على الانتقال من حل مقبول غير معتل s إلى حل مجاور غير معتل s' (يجري الانتقال باتجاه محدد)، بحيث تزداد قيمة z.

تقتضي هذه الخوارزمية أن يكون البرنامج الخطي موضوعاً بصيغة معين ندعوه الصيغة القانونية الموافقة لأساس ما. نقدم فيما يلي تعريفاً لهذه الصيغة وطريقة للحصول عليها.

6. 2. الصيغة القانونية للبرامج الخطية

نقول عن برنامج خطي أنه موضوعٌ بصيغة قانونية موافقة لأساس المتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_m$ إذا تحقق ما يلي:

- z معبر عنه بواسطة متحولات خارج الأساس فقط (معتبرة كمتحولات مستقلة)،
- أعمدة مصفوفة القيود المقابلة لمتحولات الأساس تكوّن مصفوفة واحدية تقريباً (قد يُحتاج لإجراء بعض التبديلات).

6. 2. 1. الحصول على صيغة قانونية موافقة لأساس ما

لنأخذ، بكل التعميم الممكن، البرنامج الخطي التالي (الموضوع بصيغته القياسية):

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

يمكن كتابته بالشكل المكافئ التالي :

$$(\mathbf{P'})\quad \begin{cases} Max\ z \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - z = 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

يمكننا الآن عرضه بشكل جدول (مصفوفة) ثنائي البعد $(m+1)*(n+2)$ (يُسمى جدول سمبليكس) الموضح بالشكل (6. 1).

لنفترض، للتبسيط، أن متحولات الأساس هي $x_1, x_2, \dots, x_m$.

بضرب الجدول (المصفوفة) الموضح بالشكل (6. 1)، بالمصفوفة النظامية $(m+1)*(m+1)$ (المصفوفة تأتي قبل الجدول في عملية الجداء) الموضحة بالشكل (6. 2)، نحصل على المصفوفة الموضحة بالشكل (6. 3) والتي تعطي الصيغة القانونية للبرنامج الخطي الموافقة للأساس $x_1, x_2, \dots, x_m$ (وهي نسخة أخرى من جدول سمبليكس).

x_1	x_2	...	x_n	Z	
c_1	c_2	...	c_n	-1	0
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	0	B_1
a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	b_2
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	b_m

الشكل 6. 1

1	$-\pi = -c_B \cdot B^{-1}$
0	
0	
.	B^{-1}
.	
.	
0	

الشكل 6. 2

$x_1, \quad \ldots \quad , x_m$	$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$	Z	
$0 \quad \ldots 0 \ldots \quad 0$	$\bar{\mathbf{c}}_N = c_N - \pi \cdot N$	-1	$-z_B$
$1 \quad \ldots 0 \ldots \quad 0$		0	
$0 \quad 1 \quad 0$		0	
. . .	$\bar{N} = B^{-1} \cdot N$	.	$\bar{\mathbf{b}} = B^{-1} \cdot b$
. . .		.	
. . .		.	
$0 \quad 0 \quad 1$		0	

مصفوفة واحدية

الشكل 6. 3

ملاحظة: لقد افترضنا للتبسيط ان متحولات الأساس هي المتحولات الأولى (أدلة هذه المتحولات هي $1 \ldots m$). إذا كان لمتحولات الأساس ترتيب ما (غير هذا)، فمن الممكن بسهولة تعرف متحولات الأساس فالأعمدة المقابلة لها هي أعمدة مصفوفة واحدية (بإجراء بعض التبديلات).

في البحث عن الحل الأمثل تتبع خوارزمية سمبليكس (تأسيسا على الدراسة النظرية التي مرت حتى الآن) منهجا دوراتيا *Iterative* (دورات متتالية). ففي كل دورة تختبر حلا حاليا فإما أن تجده أمثل فتتوقف، أو تجد أن الحل الأمثل غير محدود وتتوقف، أو تجد أساسا جديدا للدورة التالية.

ما هي الإجراءات التفصيلية التي تقوم عليها الدورة في خوارزمية سمبليكس؟.

6. 3. توصيف دورة

سنفترض أن لدينا أساسا مقبولا B معرفا بالمجموعة التالية من المتحولات (متحولات داخل الأساس) $\{x_1, \ldots, x_m\}$ أي :

$$x_B = (x_1, \ldots, x_m).$$

لنفترض أن N هي المصفوفة المتممة للأساس، أي المصفوفة التي تقابل مجموعة المتحولات خارج الأساس أي :

$$x_N = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

لنتأمل أيضا الحل المقبول الموافق للمتجهة x التالية:

$$x_i = \bar{b}_i \quad i \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{(متحولات داخل الأساس)} \qquad (6.1)$$

$x_j = 0 \quad j \in \{m+1, ..., n\}$ (2 .6) (متحولات خارج الأساس)

حيث $\bar{b}_i$ هي قيمة الطرف الثاني للقيود في الدورة الحالية (يتغير من دورة إلى أخرى).

بفرض غياب الاعتلال، يكون لدينا $\bar{b}_i > 0$ ومن ثمّ فإن الحل x المعرف بالعلاقتين (6. 1) و (6. 2) هو حل مقبول. القيمة التي تأخذها دالة الهدف z من أجل هذا الحل هي القيمة المعرفة بالشكل التالي :

$$z(x) = \sum_{i \in I} c_i x_i .$$

لنحاول أن نزيد قيمة z. أي لنبحث عن أساس جديد مقبول تزداد لأجله قيمة z. بتعبير أكثر دقة، لنحاول تغيير الأساس الحالي بحيث نخرج منه متحولاً وندخل فيه متحولاً جديداً (من المتحولات خارج الأساس) بغية زيادة قيمة z.

لنتأمل، فقط، المتحولات خارج الأساس x_j. القيم الحالية لهذه المتحولات معدومة، وإذا تغيرت قيمها فلن تتغير إلا باتجاه تزايدها، أي بحيث تصبح قيمها ≥ 0 (وإلا فإن الحل القادم سيكون غير مقبول).

- إذا كانت كل المعاملات $\bar{c}_j$ (التكلفة المختزلة للمتحولات خارج الأساس خلال الدورة الحالية) غير موجبة (أصغر أو تساوي الصفر)، فإن ازدياد x_j بمقدار موجب تماماً سينقص من قيمة $z(x)$. وهكذا فإنه سيكون لدينا من أجل أي حل مقبول جديد x'، $z(x') \leq z(x)$، ومن ثمّ فإن x هو حلٌ أمثلٌ.

- وإلا (إذا كانت واحدة من المعاملات $\bar{c}_j$ موجبة تماماً)، ليكن k دليل متحول خارج الأساس لأجله $\bar{c}_k > 0$. إذا زدنا x_k بمقدار واحد فإن $z(x)$ يزداد

بمقدار $\bar{c}_k$. ولمّا كنا نسعى للحصول على أكبر قيمة ممكنة لـ $z(x)$، فإننا نختار $k = s$ بحيث $\bar{c}_s > 0$ و بحيث تكون $\bar{c}_s$ أكبر ما يمكن.

بعد القيام بهذا الاختيار، لنرَ بأي مقدار يمكن أن يزداد x_s دون أن تصبح القيمة القادمة $\hat{x}_i$ لأي من متحولات الأساس x_i سالبةً تماماً (وعندها يكون حلنا القادم غير مقبول) . من النقاش السابق نجد أن $\hat{x}_i$ تعطى بالعلاقة التالية (من أجل أي متحول داخل الأساس):

$$\hat{x}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}.x_s$$

$\bar{a}_{is}$ هي قيمة حالية (تتغير من دورة لأخرى).

ومن ثم لدينا أحد إمكانين :

- إذا كان $\bar{a}_{is} \geq 0$ ، فبالإمكان زيادة x_s بأي مقدار موجب تماما دون أن تصبح $\hat{x}_i$ سالبة تماما.

- إذا كان $\bar{a}_{is} > 0$ ، فبالإمكان زيادة x_s فقط بالمقدار $\bar{b}_i / \bar{a}_{is}$ دون أن تصبح $\hat{x}_i$ سالبة تماما.

بالنتيجة، إذا كان $\bar{a}_{is} \geq 0$ من أجل s ومن أجل كل i (i تتحول)، فإنه بالإمكان زيادة x_s بالمقدار الموجب تماما الذي نشاء، وبدون أن تصبح أي من المتحولات $\hat{x}_i$ سالبا تماما. يسمح هذا بتزايد $z(x)$ حتى اللانهاية $(+\infty)$ إذ إن $\bar{c}_s > 0$.

أما إذا وجد على الأقل i بحيث $\bar{a}_{is} > 0$، فليكن l دليلا لمتحول من متحولات الأساس يتحقق من أجله $\bar{a}_{ls} > 0$ ، وليكن :

$$\delta = \bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = Min\ \{(\bar{b}_l / \bar{a}_{ls}) \ / l \in B,\ \bar{a}_{ls} > 0\}$$

لاحظ أن $\bar{b}_l$ موجبة تماما من أجل كل i ومن ثم فإن $\delta > 0$.

نرى أنه بالإمكان زيادة x_s فقط بالمقدار $\bar{b}_r / \bar{a}_{rs}$ دون أن تصبح أي من $\hat{x}_i$ سالبة تماما.

إذا انتقلنا بمتحول خارج الأساس x_s من القيمة 0 إلى القيمة $\delta = \bar{b}_r / \bar{a}_{rs}$ دون تغيير في قيم متحولات خارج الأساس الأخرى x_j، فإن قيمة التابع z تزداد بمقدار $\bar{c}_s . \bar{b}_r / \bar{a}_{rs}$ ، أما متحول الأساس x_r فتصبح قيمته 0 بعد أن كانت $\bar{b}_r$.

بقول آخر، لقد زدنا قيمة التابع z من جهة، ومن جهة أخرى أدخلنا متحول خارج الأساس x_s في الأساس، لأن قيمته أصبحت موجبة تماما، وأخرجنا المتحول x_r من الأساس لأنه أصبح معدوما.

وهكذا ففي الخطوة التالية يصبح لدينا الأساس المقبول B' المعرف بالشكل التالي: $B'=(B\setminus\{x_r\})\cup\{x_s\}$، وتعرف مجموعة المتحولات خارج الأساس الجديد N' بالشكل التالي: $N'=(N\setminus\{x_s\})\cup\{x_r\}$، وتحسب قيمة z من متحولات الأساس الجديد.

انطلاقا من حل أولي ما موافق لأساس مقبول وبتكرار العمليات السابقة، تقوم خوارزمية سمبليكس بإيجاد حل لبرنامج خطي ما.

6. 4. خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية

نرى مما تقدم أن خوارزمية سمبليكس تقوم على الاختبارات والعمليات التالية:

ليكن P برنامجا خطيا. نفترض أن له أساسا مقبولا.

1) أوجد أساسا مقبولا من أجل الانطلاق ليكن هذا الأساس هو B^0، دورة = 0.

2) اكتب البرنامج بصيغته القانونية الموافقة للأساس الحالي B^0،

3) دورة = دورة + 1،

4) إذا كانت المتجهة $\bar{c} \leq 0$ ، توقف : حصلنا على الحل الأمثل (من أجل الحل الموافق للأساس الحالي)،

وإلا

لتكن $\bar{c}_s$ أكبر $\bar{c}_j$ (x_s متحول خارج الأساس وسندخله إلى الأساس في الدورة التالية إن لم نصل إلى حل في هذه الدورة)،

5) إذا كان $\bar{a}_{is} \leq 0$ من أجل كل i، توقف :الحل الأمثل غير محدود (يسعى إلى $+\infty$)،

وإلا

ليكن $\bar{a}_{rs}$ بحيث

$$\bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = Min\{(\bar{b}_l / \bar{a}_{ls}) \,/\, l \in B,\ \bar{a}_{ls} > 0\}$$

(x_r المتحول الذي سيخرج من الأساس)،

6) قسم السطر r (المعادلة r) على $\bar{a}_{rs}$.

ضع لأجل $i \neq l$ ولأجل كل j :

$$\bar{a}'_{ij} = \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is} . \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$$

$$\bar{b}'_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is} . \bar{a}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

(نحصل على أساس جديد بمتحولات وقيم جديدة والبرنامج الناتج هو في صيغته القانونية). عد إلى 3.□

تكون الخطوة 6 ما يسمى بعملية الارتكاز.

نؤكد ما ذكرناه سابقا من أن خوارزمية سمبليكس يمكن أن تفسر هندسيا بأنها انتقال متسلسل، من نقطة متطرفة إلى نقطة متطرفة مجاورة على حدود مجموعة الحلول المقبول. أما تحليليا فهي تحديد لمتتالية من الأسس المتجاورة $B^0, B^1, \ldots, B^q$ وللحلول المقبول الموافقة (لهذه الأسس) $x^0, x^1, \ldots, x^q$ بحيث :

$$z(x^0) < z(x^1) < \ldots < z(x^q) < \ldots$$

وجدنا فيما سبق أن عدد النقاط المتطرفة منته (التوطئة 5. 2)، و رأينا، من جهة أخرى، أن التزايد التام لـ z في خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية يمنع المرور مرتين في النقطة المتطرفة نفسها (بافتراض غياب الاعتلال). يبرهن هذا على أن عدد الدورات في خوارزمية سمبليكس منته، ومنه النظرية التالية :

مبرهنة 6. 1 (التقارب المنتهي)

تتقارب الخوارزمية الأولية الأصلية لسمبليكس، بافتراض غياب الاعتلال، بعد عدد منته من الدورات (التكرارات).

6. 5. معالجة مشكلة الاعتلال

لنفترض أن هناك اعتلال من النمط التالي $\bar{b}_r = 0$. إن قيمة المتحول $\hat{x}_s$ الذي سيدخل في الأساس في الدورة التالية تعطى بالعلاقة التالي :

$$\hat{x}_s = \bar{b}_r / \bar{a}_{rs}$$

ينتج عن ذلك أن قيمة z لا تتغير بعد تغيير الأساس. في الحقيقة، في هذه الحالة يكون لدينا :

$$z(x') = z_B + \bar{c}_s \cdot \hat{x}_s = z_B$$

ومن ثم من الممكن، بعد عدد ما من تغييرات الأساس، أن نجد أساسا سبق أن صادفناها وندخل، إذن، في دوران غير منته. يمكننا أن نتجنب هذه الحالة (وجود حالة دوران لا منته) بطرق متعددة :

1) بإجراء اضطراب بسيط في الحلول التي نصادفها. من الملاحظ أن هذا يحدث آليا بسبب أخطاء التدوير (في الحاسوب).

2) بتغيير طريقة اختيار المتحولات التي ستدخل في الأساس والمتحولات التي ستغادره : بدلا من اختيار المتحول الداخل الذي يعظم $\bar{c}_s$، نختار المتحول ذا

الدليل الأصغر من بين المتحولات التي تحقق $\bar{c}_s > 0$. في حالة اختيار المتحول الخارج، نختار المتحول ذا الدليل الأصغر. عمليا لوحظ، عند تطبيق هذه القاعدة، أن الدوران اللا منته لا ينتج، تقريبا، أبدا؛ كما لوحظ أن عدد الدورات اللازم لحل برنامج خطي يزداد ازديادا ملحوظا.

3) باستخدام إجرائية معجمية *(Lexicographique)* : نرتب الأسس وفق ترتيب معجمي، مستنتج من ترتيب أعمدتها. في كل مرة يصادف فيها الاعتلال، نقوم بتغييرات في الأساس مقابلة لمتتاليات الأسس المتزايدة معجميا. وهكذا لن نصادف أبدا أساسا صادفناه سابقا. ويضمن هذا أن تتزايد الدالة z تزايدا مستمرا، ويضمن، من ثم، تقارب الخوارزمية بعد عدد منته من الدورات. عمليا، يلاحظ أن الإجرائية المعجمية مكلفة في زمن الحساب المستهلك إلى حد بعيد.

ملاحظة : لا تزود أغلبية البرامج المعلوماتية المسوقة لحل البرامج الخطية ما يسمح لنا بمعالجة مشكلة الدوران اللا منتهي.

6. 0. الشكل الجدولي لخوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية

يعتبر الجدولان المصفوفيان (6. 1) و (6. 3) اللذان سميناهما جدولي سمبليكس واللذين استخدمناهما لعرض الصيغة القانونية الموافقة لأساس ما لبرنامج خطي، كبيري الفائدة في تنفيذ خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية. يجمع هذا الجدول (الجدول 6. 1 هو حالة خاصة من الجدول 6. 3) كل العناصر الضرورية لإجراء خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية. في الحقيقة*:

• يمكن الحصول على الحل الموافق للأساس بقراءة مباشرة : إذ لما كان $x_N = 0$ فإنه لدينا لأجل متحولات الأساس :

$$x_1 = \bar{b}_1,\ x_2 = \bar{b}_2,\ \ldots,\ x_m = \bar{b}_m$$

$$\bar{b}_1 \geq 0,\ \bar{b}_2 \geq 0,\ \ldots,\ \bar{b}_m \geq 0$$

• قيمة الدالة الهدف (من أجل الأساس B) z_B تظهر بشكل مباشر في هذا الجدول (مع إشارة –) الخلية العليا اليمنى.

يكتب السطر الأول في الحقيقة كما يلي :

$$\bar{c}_N \,.\, x_N - z = -\, c_B \,.\, B^{-1} \,.\, b$$

ولما كان $x_N = 0$، كان لدينا :

$$z_B = c_B \,.\, B^{-1} \,.\, b = [c_B \,.\, c_N] \,.\, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

• أخيرا، يمكن الحصول على التكاليف المختزلة للمتحولات خارج الأساس بالقراءة المباشرة للسطر الأول من جدول سمبليكس. يسمح هذا السطر، بوجه خاص، بالمعرفة المباشرة، فيما إذا كان الحل الموافق للأساس هو حل أمثل ($\bar{c}_j$ سالبة أو معدومة من أجل كل المتحولات خارج الأساس).

عند نهاية كل دورة من الخوارزمية الأولية الأصلية لسمبليكس علينا إيجاد الصيغة القانونية للبرنامج الخطي (المطلوب حله) و الموافق للأساس المستنتج في الخطوات السابقة من الدورة ذاتها (عملية الارتكاز). ليس من البساطة، في الحالة العامة، إيجاد الصيغة القانونية الموافقة لأساس ما. من جهة أخرى، لا

تعتبر الصيغ القانونية المتتالية الواجب إيجادها في الدورات المتعاقبة للخوارزمية الأولية الأصلية لسمبليكس حالة عامة، بل هي، كما رأينا، توافق متتالية من الأسس المقبولة المتجاورة. سنستفيد من هذه الخصوصية لاقتراح طريقة جدولية (مصفوفية) لإيجاد متتالية الصيغ القانونية للدورات المتعاقبة للخوارزمية الأولية الأصلية لسمبليكس.

6. 7. مصفوفات تغيير الأسس والصيغة الناتجة عن القلب

لما كان الأساس المقبول، المستنتج خلال دورة من دورات الخوارزمية الأولية الأصلية لسمبليكس، أساسا مجاورا للأساس المقبول التالي (في الدورة التالية) – وهو أيضا أساس مجاور للأساس المقبول السابق (في الدورة السابقة)–، أي لا يختلف معه إلا بعمود واحد، فإنه حين تغيير الأساس، حيث يبدل بالمتحول x_r المتحول x_s $(\bar{c}_s > 0)$ تحسب الصيغة القانونية الموافقة للأساس الجديد عن طريق جداء جدول سمبليكس في المصفوفة الموضحة بالشكل (6. 4) (المصفوفة تسبق الجدول في عملية الجداء).

إذا حذفنا من المصفوفة 6. 4 سطرها الأول وعمودها الأول فإننا نحصل على المصفوفة η الموضحة بالشكل (6. 5) والتي نسميها مصفوفة تغيير الأساس.

نلاحظ أن η هي مصفوفة $(m*m)$ بدل فيها بالعمود r المتجهة ذات الـ m مركبة التالية :

$$-\frac{\bar{a}_{is}}{\bar{a}_{rs}} - \quad \text{للمركبة } r \neq i$$

$$+\frac{1}{\bar{a}_{rs}} - \quad \text{للمركبة } r$$

يدعى العنصر $\bar{a}_{rs}$ عادة القطب أو المرتكز (ومنه تأخذ عملية الارتكاز اسمها) ويدعى السطر r سطر القطب والعمود s عمود القطب.

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
1 & 0 & 0 & -\dfrac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & -\dfrac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & 0 \\
0 & & 1 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & +\dfrac{1}{\bar{a}_{rs}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\dfrac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

الشكل (6. 4)

$$\eta = \begin{vmatrix}
1 & 0 & -\dfrac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & 0 \\
 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & +\dfrac{1}{\bar{a}_{rs}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & 1
\end{vmatrix}$$

الشكل 6. 5

عندما يكون أساس الانطلاق مصفوفة واحدية، فإننا نحصل بعد عدد مقداره $q+1$ من تغييرات الأساس على المتتالية التالية:

$$B^0 \to B^1 \to \dots \to B^q$$

الموافقة لمصفوفات تغيير الأساس $\eta^0 , \eta^1 , \dots , \eta^q$، يكون لدينا :

$$\eta^q * \eta^{q-1} * \dots * \eta^1 = [B^q]^{-1}$$

في التطبيق العملي ليس لنا مصلحة في إظهار المصفوفة $[B^q]^{-1}$ بوضوح (بسبب الحاجة إلى ذاكرة كبيرة نسبيا لتخزينها في الحاسوب)، لذا نقوم بتخزين المتتالية :

$$\eta^0 , \eta^1 , \dots , \eta^q$$

يكفي كي نحفظ في الذاكرة مصفوفة من هذا النمط معرفة الدليل r والعناصر غير المعدومة في العمود r. ويكون هذا ما نسميه الصيغة الناتجة عن القلب (قلب المصفوفة). تخفض هذه العملية كثيرا من كمية المعطيات المخزنة كما تخفض أيضا من عدد العمليات المحسوبة.

لما كانت خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية تحتاج إلى تخزين جدول سمبليكس كله، والعمل، في كل دورة من دوراتها، على كل عناصره، فإن الصيغة الناتجة عن القلب غير ذات فائدة لهذه الخوارزمية. على العكس من ذلك، فإن هذه الصيغة (الناتجة عن القلب) ذات أهمية عظمى بالنسبة لخوارزمية سمبليكس الأصلية المعدلة (سنرى ذلك عند التعرض لهذه الخوارزمية). فالصيغة الناتجة عن القلب تسمح بتخفيض التخزين المطلوب وعدد العمليات اللازمة لتنفيذ خوارزمية سمبليكس الأولية المعدلة.

إن العرض الجيد الذي يقدمه الشكل الجدولي (المصفوفي) لمعطيات البرنامج الخطي، وللتغيرات التي تطرأ من دورة إلى أخرى، ولإمكان تطبيق الخوارزمية الأولية الأصلية لسمبليكس عليه مباشرة، يعلل اللجوء إليه في تطبيق خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية لحل برنامج خطي (يمكن قول الشيء نفسه بالنسبة لخوارزمية سمبليكس الأولية المعدلة).

لقد افترضنا في الخوارزمية الأولية الأصلية لسمبليكس أن البرنامج الخطي له أساس مقبول، ورأينا أن مثل هذا الأساس ضروري للشروع بتنفيذ الخوارزمية (الحالة البدئية *Initial* لخوارزمية دوراتية *Iterative*) ولكن لم نقدم طريقة لإيجاد مثل هذه الأساس. سنقدم في فقرتنا التالية منهجا لإيجاد مثل هذا الأساس (أساس انطلاق لخوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية).

6. 8. أساس انطلاق لخوارزمية سمبليكس الأولية

يمكننا نظريا اختيار أي أساس مقبول كأساس للانطلاق. عمليا، ليس من السهل دائما الحصول على أساس مقبول (على سبيل المثال، حين تكون قيود البرنامج الخطي في صيغتها الأولى، قبل وضعها في صيغة قياسية)، ومن جهة أخرى، نحن نسعى دائما للحصول على مصفوفة واحدية، لذا فإننا نقوم بتحويل البرنامج الأصلي إلى برنامج يمكن الحصول منه بسهولة على أساس مقبول، مصفوفته المقابلة واحدية، وذلك باستخدام متحولات إضافية نسميها متحولات الفرق أو متحولات اصطناعية.

مثال 6. 1. حالة قيود المساواة

$$(P_1)\begin{cases} Max\ z_1 = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \quad x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ \quad -x_1 + 3x_2 \quad = -4 \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ندخل في المعادلتين متحولين اصطناعيين y_1 و y_2 ونعدل دالة الهدف z بحيث نضيف إليها تكلفتين مكافئتين للمتحولين المدخلين. نجعل قيمتي هاتين التكلفتين كبيرة جدا وسالبة $-M$ (M عدد موجب كبير جدا). ثم نحل البرنامج الجديد المكافئ التالي :

$$(P_1')\begin{cases} Max\ z_1 = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - My_1 - My_2 \\ \quad x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ \quad -x_1 + 3x_2 - y_2 \quad = -4 \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

ننبه إلى أننا أرفقنا بالمتحول المضاف y_2 إشارة (−) وذلك لأن الطرف الثاني للمعادلة ذو قيمة سالبة -4.

إن الأساس المكون من المتحولين (y_1, y_2) هو أساس مقبول للبرنامج P_1' . والحل الموافق لهذا الأساس هو :

$$y_1 = 3, y_2 = 4, x_1 = 0, x_2 = 0$$

من الواضح أن المصفوفة الموافقة لهذا الأساس هي مصفوفة واحدية (لاحظ وجود الإشارة – المرافقة لـ y_2). بتحقق الشرطين السابقين (الأساس مقبول والمصفوفة الموافقة واحدية) يمكننا القول إن الأساس المكون من المتحولين (y_1, y_2) يصلح

لأن يكـون أسـاس انطـلاق لحـل البرنـامج P_1' بخوارزميـة سمبليكـس الأوليـة الأصليـة.

يضمـن لنـا كـبر M وسـلبيتها (تكلفـة المتحولـين الاصطنـاعيين سـالبة و كبـيرة جـدا) أن تكـون قيمتـا المتحولـين الاصطنـاعيين معدومـة عنـد الحـل الأمثـل (إذا كـان لـ P_1 حلول مقبولة) ومن ثـم أن يكـون الحـل الأمثـل لـ P_1' حـلا أمثليـا لـ P_1.

مثال 6. 2. حالة القيود من النمط ≥

$$(P_2)\begin{cases} Max\ z_2 = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + 3x_2 \le -4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

نضيـف متحـول فـرق s_1 في القيـد الأول ومتحـول فـرق s_2 في القيـد الثـاني، فنحصـل على البرنـامج المكـافئ التـالي :

$$(P_2')\begin{cases} Max\ Z_2 = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + s_2 = -4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ s_1 \ge 0, s_2 \ge 0 \end{cases}$$

نلاحـظ أن المتحولـين (s_1, s_2) ليسـا أسـاس انطـلاق مقبـول : فـالحل الموافـق $s_2 = -4$ يتنـاقض مـع شـرط الـلا سـلبية. علينـا إذن، كـي نحصـل علـى أسـاس مقبـول إضافـة متحـول اصطنـاعي y_2 في القيـد الثـاني وبحيـث تكـون تكلفتـه سـالبة وكبـيرة جـدا (كمـا في المثـال 6. 1)، فنحصـل علـى البرنـامج المكـافئ التـالي :

$$(P_2'')\begin{cases} Max\ z_2 = x_1 - 2x_2 - My_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + s_2 - y_2 = -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

وتكون (s_1, y_2) أساس انطلاق مقبول، والحل الموافق لهذه الأساس هو:

$$s_1 = 3, y_2 = 4, s_2 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$$

ويقابل هذا الأساس تقريبا (لاحظ وجود الإشارة – المرافقة لـ y_2) مصفوفة واحدية. يكون الحلان الأمثلان للبرنامجين P_2 و P_2'' متطابقين (عند وجود حل أمثل للبرنامج الأصلي P_2)، كما في المثال السابق ولنفس الأسباب.

يمكننا الآن تطبيق طريقة سمبليكس في حل مسألتنا المطروحة في المثال 3. 1.

مثال 6. 3.

يمكن وضع البرنامج الخطي المنمذج للمسألة المطروحة في المثال 5. 1 (العلاقات من 5. 1 حتى 5. 4 مع دالة الهدف) بالصيغة القياسية P_3 التالية :

$$Max\ Z = 50x_1 + 80x_2$$

$$1.0x_1 + 1.5x_2 + s_1 = 600$$

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + s_2 = 100$$

$$0.0x_1 + 0.1x_2 + s_3 = 30$$

$$0 \leq x_1،\ 0 \leq x_2،\ 0 \leq s_1،\ 0 \leq s_2،\ 0 \leq s_3$$

حيث المتحولات (s_1, s_2, s_3) هي متحولات فروق. ولما كانت الأطراف الثانية للقيود كلها موجبة، فإن متحولات الفروق تكون أساسا مقبولا لهذا البرنامج. ولما كانت مصفوفتها المقابلة مصفوفة واحدية، فإنها تصلح لأن تكون أساس انطلاق لخوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية. لنختر الشكل المصفوفي لمعالجة خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية. يمكننا تمثيل معطيات البرنامج P_3 بجدول سمبليكس (الصيغة القانونية الموافقة لأساس الانطلاق) كما هو موضح في الشكل (6. 6).

	s_1	s_2	s_3	x_1	x_2	$-z$	$-z_B$
$\bar{c}_j$	0	0	0	50	80	0	0
	1	0	0	1	1.5		600
	0	1	0	0.2	0.2		100
	0	0	1	0	0.1		30

الشكل 6. 6

إن الحل المقبول الموافق لهذه الأساس هو :

$$(s_1 = 600, s_2 = 100, s_3 = 30)$$

وقيمة z الموافقة هي 0. ولأن قيم $\bar{c}_j$ كلها موجبة فالحل السابق ليس حلا أمثل. لإيجاد المتحول الذي سيدخل إلى الأساس، نأخذ المتحول الذي تكون لأجله $\bar{c}_j$ أعظمية وهو هنا x_2 الذي يقبل قيمة لـ $\bar{c}_j$ مقدارها 80. وتكون قيمة s من أجل هذا المتحول هي 5 (أي رقم عمود المتحول، وهو هنا العمود الخامس في الجدول).

نلاحظ أن كل القيم في العمود المقابل لـ x_2 هي قيم موجبة تماما، إذن لا يمكننا أن نحدد : أيسعى الحل الأمثل إلى اللانهاية؟ (ولم نحصل بعد على الحل).

لإيجاد المتحول الذي سيغادر الأساس نبحث في العمود الخامس (الموافق للمتحول x_2)عن العنصر a_{rs} الذي يتحقق من أجله :

$$b_r / a_{rs} = min\ (b_i / a_{is}) \quad (3\ .6)$$

حيث i تتحول على قيم العمود، الأخير في الجدول، المقابلة للقيم الموجبة في عمود x_2. نجد أن العلاقة (6. 3) تتحقق من أجل القيمة 0.1 التي تكون من أجلها قيمة r مساوية لـ 3، ومن ثم فإن المتحول الذي سيغادر الأساس هو المتحول المقابل للعمود الثالث وهو في مثالنا s_3. علينا الآن إيجاد مصفوفة تغيير الأساس η (أو تطبيق الخطوة 6 في خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية). سنختار هنا أن نوجد مصفوفة تغيير الأساس. يعطي الشكل (6. 7) مصفوفة تغيير الأساس η.

1	0	0	-800
0	1	0	-15
0	0	1	-2
0	0	0	10

الشكل 6. 7

لاحظ أن المصفوفة (6. 7) هي مصفوفة مربعة، عدد أعمدتها مساو لعدد المعادلات مضافا إليه واحد ($m+1$ حيث m هو رتبة مصفوفة القيود، وهو هنا عدد المعادلات). لاحظ أيضا أن هذه المصفوفة هي مصفوفة واحدية تغير فيها

العمود $r = 3$ (وهو العمود المقابل لعمود المتحول الذي سيدخل الأساس) أما العنصر u_{4r} فيها فهو مقلوب العنصر a_{rs} (القطب) في جدول سمبليكس.

من جداء المصفوفة η في جدول سمبليكس السابق نحصل على الجدول (6. 8) الذي يعطينا الصيغة القانونية الجديدة الموافقة للأساس الجديد.

	s_1	s_2	s_3	x_1	x_2	$-z$	$-z_B$
$\bar{c}_j$	0	0	-800	50	0	24000	0
	1	0	-15	1	0		150
	0	1	-2	0.2	0		40
	0	0	10	0	1		300

الشكل 6. 8

وهكذا فإن قاعدتنا الجديدة هي (s_1, s_2, x_2) والحل المقبول الموافق لهذه الأساس هو $(s_1 = 150, s_2 = 40, x_2 = 300)$ وقيمة z الموافقة هي 24000. نكرر ما قمنا به على الجدول (6. 6) فنحصل على الجدول (6. 9) (الصيغة القانونية الموافقة للأساس الناتج عن تطبيق الخوارزمية على الجدول (6. 8)) والذي ستجرى عليه عمليات الدورة 3.

	s_1	s_2	s_3	x_1	x_2	$-z$	$-z_B$
$\bar{c}_j$	-50	0	-50	0	0	31500	0
	1	0	-15	1	0		150
	2	1	1	0	0		10
	10	0	0	0	1		300

الشكل 6. 9

لما كان $\bar{c}_j \le 0$ لكل j، توقف تنفيذ الخوارزمية (لا تدخل في الدورة الجديدة)

فقد حصلنا على الحل الأمثل والمحقق من أجل:

$$x1 = 150, x2 = 300$$

وقيمة z لهذا الحل هي 31500.

لقد حصلنا على نفس النتيجة عند تطبيق الطريقة البيانية.

6. 9. خوارزمية سمبليكس الأولية المعدلة

بالعمق، لا تحمل خوارزمية سمبليكس الأولية المعدلة أي تعديل على خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية. إن طريقة التشغيل هي التي عدلت بعد تفحص ملي للعمليات الضرورية حقا لسمبليكس الأصلية.

لنفترض أننا نعرف أساسا مقبولا B للبرنامج الخطي P إلا أن P غير مكتوب في صيغته القانونية بالنسبة إلى هذا الأساس، وأننا نتجنب القيام بالحسابات اللازمة لإيجاد الصيغة القانونية. لحل البرامج الخطية في ظروف كهذه وضعت الخوارزمية المعدلة. فما هي هذه الخوارزمية؟

خطوات خوارزمية سمبليكس الأولية المعدلة

ليكن P برنامجا خطيا. نفترض أن له أساسا مقبولا.

1) أوجد أساسا مقبولا من أجل الانطلاق، وليكن هذا الأساس B^0، دورة $= 0$.

2) دورة = دورة + 1،

3) لتكن B الأساس الحالي، $x = [x_B, x_N]$ الحل الموافق للقاعدة B، احسب:

$$\overline{\mathbf{b}} = B^{-1} . \mathbf{b}$$

$$\pi = \mathbf{c}_B . B^{-1}$$

$$\overline{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - \pi . N$$

4) إذا كانت المتجهة $\overline{\mathbf{c}}_N \leq 0$ ، توقف : حصلنا على الحل الأمثل (من أجل الحل الموافق للأساس الحالي)،

وإلا (يوجد على الأقل $\overline{c}_s$ بحيث $\overline{c}_s > 0$)

5) احسب $\overline{A}_s = B^{-1} . A_s$ حيث $A_s = a_{is}$ العمود s من A،

إذا كان $\overline{a}_{is} \leq 0$ لكل i $(i = 1, \ldots, m)$، توقف :الحل الأمثل غير محدود (يسعى إلى $+\infty$)،

وإلا

احسب :

$$\hat{x} = \overline{b}_r / \overline{a}_{rs} = \underset{1/\overline{a}_{is}>0}{Min} \{\overline{b}_i / \overline{a}_{is}\}$$

6) ليكن x_r المتحول المقابل للعمود r من الأساس، والذي يحقق :

$B^{-1} . A_r = e_r$ (m متجهة كل مركباتها معدومة إلا المركبة r مساوية لـ $+1$).

إذن المتحول s يأخذ القيمة $\hat{x}_s > 0$ ويدخل الأساس وينعدم المتحول $\hat{x}_r$ (يأخذ القيمة صفر) ويخرج من الأساس. والحل الجديد $\hat{x}$ يقابل الأساس الجديد $\hat{B} = B + \{s\} - \{r\}$.
بدل $\hat{B}$ بـ B وعد إلى 2.□

يمكن القول إن الخوارزمية المعدلة تتطابق من حيث المخطط العام مع الخوارزمية الأصلية، مع الانتباه إلى أننا لا نقوم بعملية الارتكاز في الخوارزمية المعدلة، ولا نحتاج إلى وضع البرنامج الخطي في صيغته القانونية. وهكذا فإننا نحول كل عناصر جدول سمبليكس في الخوارزمية الأولية على حين نكتفي بتغيير عناصر مصفوفة المقلوب في حالة الخوارزمية المعدلة. هذا لا يعني اقتصادا دائما في عدد العمليات (بالمقارنة بالخوارزمية الأصلية)، كما يمكن أن نعتقد. إن العدد الكلي للعمليات يتبع الأجزاء المشغولة وهذا يعتمد على المسألة المطروحة.

تكمن الأهمية الأولى للخوارزمية المعدلة، في أنها تسمح بالعمل في كل دورة على المعطيات الأصلية، ومن ثم تجنبنا التضخم في أخطاء التدوير من دورة إلى أخرى، كما هو الحال مع تعديل المصفوفة A بعمليات الارتكاز.

من جهة أخرى، نصادف في الحياة العملية الكثير من المسائل التي تنمذج ببرامج خطية عدد متحولاتها أكبر بكثير من عدد قيودها. في هذه الحالة تصبح مصفوفة معاملات القيود كبيرة جدا بالمقارنة بالمصفوفة الموافقة لأساس. تحتاج الخوارزمية الأصلية إلى تخزين مصفوفة المعاملات والعمل عليها في كل دورة. أما في حالة الخوارزمية المعدلة فإمكاننا تخزين هذه المصفوفة مرة واحدة واستدعاؤها عمودا بعد الآخر (نعتمد على الصيغة الناتجة عن القلب).

لا نحتاج في الخوارزمية المعدلة إلى حساب كل الـ c_j، ويمكننا التوقف عند الحصول على أول $c_j > 0$، على حين نضطر إلى حساب كل الـ c_j في الخوارزمية الأصلية.

بالمقابل هناك بعض المسائل كمسألة النقل لها طبيعة خاصة تجعل عملية الارتكاز عملية سهلة جدا، على حين تكون حسابات الخوارزمية المعدلة صعبة جدا. يفضل لمعالجة هذا النمط من المسائل استخدام الخوارزمية الأصلية.

أخيرا، يصح على الخوارزمية المعدلة كل ما ناقشناه في الخوارزمية الأصلية، إن من حيث التقارب المنتهي، أو من حيث معالجة الاعتلال، أو من حيث الشكل المصفوفي لها، أو من حيث قاعدة الانطلاق. الخلاف الحقيقي يتجلى فقط في عدم حاجة الخوارزمية المعدلة إلى أن يكون البرنامج في صيغته القانونيه.

6. 10. تعقيد خوارزمية سمبليكس*

تظهر الدراسات الإحصائية أن خوارزمية سمبليكس الأولية (بنوعيها الأصلية والمعدلة) تتقارب بعدد من الدورات يقع بين m و $3m$ (m عدد القيود). ومن ثم فإن عدد النقاط المتطرفة المختبرة أصغر بكثير من عددها في متعدد وجوه الحلول المقبولة والذي يبلغ (كما رأينا سابقا) C_n^m. وهنا تكمن القوة العملية لهذه الخوارزمية. من جهة أخرى يمكننا اصطناع برامج خطية يزداد لأجلها عدد الدورات بشكل أسيا بتابعية عدد المتحولات. تعتبر خوارزمية سمبليكس الأولية (بنوعيها) مثالا نموذجيا للخوارزمية الفعالة، التي لا يكون عدد العمليات (الحسابات) فيها كثيري حدود بدلالة m و/أو n (طول المسألة).

لقد برهن خاشيان *Khachian T.D* في *1977* أن مسائل البرمجة الخطية هي مسائل كثيرية حدود. لقد خضعت الخوارزمية التي اقترحها (والمشتقة من

* لفهم أعمق لهذه الفقرة يجب دراسة فصل تعقيد المسائل

خوارزمية شور *Shor* ، *1977*) للعديد من الاختبارات العددية، إلا أنها على الرغم من التحسينات التفصيلية التي أجريت عليها، تبدو بعيدة عن الأداء العملي لخوارزمية سمبليكس الأولية.

يبدو أن خوارزمية كارماركر *Karmarkar* (*1984*) ذات التعقيد $O(n^{3.5} \cdot L^2)$ ، حيث n هو بعد (طول) المسألة و L هو عدد البتات اللازمة لتمثيل معطيات المسألة، تعد بتقدم كبير في طريقة سمبليكس.

هناك خوارزميات أخرى تستنتج من الطريقة التحليلية لحل البرامج الخطية. تعتمد هذه الخوارزميات على مفهوم مهم جدا هو مفهوم "الثنوية". سيهتم فصلنا القادم بتعريف هذا المفهوم ودراسته كمقدمة لوضع الخوارزميات التي تقوم عليه.

تمرينات

التمرين 1. ضع البرامج الخطية لتمرينات الفصل الخامس في صيغتها القانونية (البرامج المصرح بها أو البرامج الناتجة عن مسائل النمذجة). ما هي الأسس المقابلة لهذه الصيغ (القانونية)؟ استخدم طريقة سمبليكس الأولية (الأصلية والمعدلة) لحل هذه البرامج؟

التمرين 2. حل الجملة الخطية التالية :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 10x_4 + 2x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad + 4x_5 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 17 \end{cases}$$

بالنسبة إلى الأساس $J = \{1, 2, 3\}$.

التمرين 3. لنتأمل البرنامج الخطي التالي :

$$\begin{cases} Max\ z = 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 10x_4 + 3x_5 \\ 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 26 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$$

ولنضع $J = \{1, 3\}$.

i. هل j هي أساس ؟

ii. هل هي أساس مقبول؟

iii. هل هي أساس أمثل؟

التمرين 4. لنتأمل البرنامج الخطي التالي :

$$(P)\begin{cases} Max\ z = 5x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 36 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 24 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

i. اكتب هذا البرنامج في صيغته القياسية (لنسم متحولات الفروق x_5 و x_6).

ii. اكتب البرنامج *(P)* في صيغته القانونية الموافقة للأساس $J = \{3, 4\}$، هل هذا الأساس هو أساس مقبول؟ هل هو أساس أمثل؟

iii. لنبدل بقيمة الطرف الثاني في القيد (المتراجحة) الثاني (وهي *24*) القيمة *26*، ما هي القيمة الجديدة للحل، بأي مقدار سيزداد (أو ينقص) الربح؟

iv. ماذا يمكنك القول إذا قفزت هذه القيمة (قيمة الطرف الثاني للقيد الثاني) من *24* إلى *44*؟

v. استخدم خوارزمية سمبليكس الأولية (الأصلية والمعدلة) لحل *(P)* (من أجل القيم *24* و *26* و *44* للطرف الثاني في القيد الثاني).

التمرين *5*. لنتأمل البرنامج الخطي التالي :

$$(P_\alpha)\begin{cases} Max\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \quad = 12 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 13 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

استخدم خوارزمية سمبليكس الأولية (الأصلية والمعدلة) لحل (P_α)، ناقش الحالتين التاليتين : $\alpha = 1$ و $\alpha = 0$.

التمرين *6*. برهن باستخدام خوارزمية سمبليكس الأولية على الاقتضاء التالي :

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 3 \\ -2x + y \leq 1 \\ x \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x + y) \leq 5/2$$

برهن أنه بالإمكان الحصول على نفس النتيجة بافتراض بعض من الفرضيات اللازمة لتطبيق خوارزمية سمبليكس فقط (لا كلها). أوجد الحد الأدنى من الفرضيات اللازم لتحقق الاقتضاء السابق. تحقق من هذه النتيجة بطريقة بيانية.

التمرين 7. حل البرنامج الخطي التالي :

$$(P)\begin{cases} Max\ z = 2x_1 + 18x_2 + 5x_3 + 14x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 8x_4 = 7 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, j = 2, 3, 4,\ \ x_1 \neq 0 \end{cases}$$

التمرين 8. هل يوجد أعداد حقيقية a, b, c تحقق :

$$\begin{cases} 8a^2 + 6b^2 + 3c^2 = 10 \\ 9a^2 + 7b^2 + 2c^2 = 12 \end{cases}$$

إذا كان الجواب بالإيجاب، أوجد القيم المقابلة لـ a, b, c. أما إذا كان الجواب بالنفي فبرهن لماذا؟.

التمرين 9. برهن أنه إذا حققت المصفوفة A (مصفوفة معاملات القيود) العلاقة التالية :

$$x^T.A.x \geq 0, \quad \forall x$$

فإن الجملة : $A.x \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x \neq 0$ لها دائما حل.

التمرين 10. لنتأمل البيان $G = (X, U)$ المعرف بالشكل التالي :

- العقد هي في تقابل مع الأسس المقبولة للبرنامج الخطي (P).
- هناك قوس يصل العقدة المقابلة للأساس المقبول J بالعقدة المقابلة للأساس المقبول $\hat{J}$ إذا وفقط إذا وجدت دورة في خوارزمية سمبليكس تنقلنا من J إلى $\hat{J}$.

i. برهن أن G قد يحتوي على دارات.

ii. برهن أن العقدة المقابلة لأساس أمثل لـ *(P)* (إذا وجد مثل هذا الأساس) تشكل جذرا–معاكسا.

التمرين *11*. برهن أنه إذا كان لبرنامج خطي أكثر من حل أمثل فله أكثر من أساس أمثل.

الفصل السابع

البرمجة الخطية

المسألة الثنوية ومتممات البرمجة الخطية

سنبين، في هذا الفصل، أنه من الممكن أن نسند إلى كل برنامجٍ خطي برنامجاً خطياً آخر نسميه البرنامج الثنوي (نسمي البرنامج الأصلي بالبرنامج الأولي). وسنبرهن بعدة طرق أن هذين البرنامجين متقاربان جداً. سنرى أنه عندما نقوم بحل برنامج خطي فإننا نحل ثنويه في الوقت ذاته. إن مفهوم الثنوية هو مفهوم أساسي في البرمجة الخطية ويقود إلى نتائج ذات قيمة نظرية وعملية كبيرة جداً. في الحقيقة، يجب ألا نعتبر أن البرنامج الأولي وثنويه برنامجين متمايزين، بل يجب أن ننظر إليهما على أنهما رؤيتان للمسألة ذاتها. فمبرهنة الثنوية تنص، كما سنرى، على أنه لكل مسألة أعظمة (أصغرة) في البرمجة الخطية هناك مسألة أعظمة (أصغرة) مشابهة ووحيدة تتضمن المعطيات ذاتها التي تصف المسألة الأصلية.

بعد تعريف البرنامج الثنوي لبرنامج خطي ما، سنقوم بدراسة العلاقة بين البرامج الأولية والبرامج الثنوية، تمهيداً لوضع خوارزميات لحل البرامج الخطية تعتمد مفهوم الثنوية والأولية–الثنوية. ونتطرق إلى بعض النتائج الإضافية التي نحصل عليها من البرمجة الخطية. كما سنعالج حدود البرمجة الخطية. ونختم بدراسة أولية عن البرمجة الخطية المتعددة الأهداف.

7. 1. مفهوم الثنوية

7. 1. 1. ثنوي برنامج خطي موضوع في صيغته القياسي

لنأخذ البرنامج الخطي (الموضوع في صيغته القياسي) التالي :

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} Max\ z = \mathbf{c}.\mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

لنقرن كل قيد i $(i = 1, \ldots, m)$ بمتحول u_i موجب أو سالب أو معدوم، نسميّه المتحول الثنوي، ولنتأمل البرنامج الخطي التالي :

$$(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} Min\ w = \mathbf{u}.\mathbf{b} \\ \mathbf{u}.A \geq \mathbf{c} \end{cases}$$

حيث u هي المتجهة السطرية ذات البعد m التالية : $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

يرتبط البرنامج الخطي (D) بقوة بالبرنامج الخطي (P)، إذ نلاحظ ما يلي :

- مصفوفة قيود (D) هي منقول مصفوفة قيود (P)،
- متجهة تكاليف (P) هي متجهة الطرف الثاني في (D) والعكس بالعكس.

نسمي (D) البرنامج الثنوي للبرنامج (P). وبالمقابل نسمي (P) البرنامج الأولي.

7. 1. 2. تعريف الثنوية في الحالة العامة

من الواضح، أنه بالإمكان تعريف ثنوي برنامجٍ خطي ما، موضوعٍ تحت أي شكل كان (ليس من الضروري أن يكون في الصيغة القياسية).

يلخص الجدول (7. 1) التقابل بين البرنامج الأولي وثنويه، كما يسمح بالكتابة المباشرة لثنوي برنامج خطي ما.

البرنامج الأولي	البرنامج الثنوي
التابع الهدف Max	الطرف الثاني
الطرف الثاني	التابع الهدف Min
مصفوفة القيود هي A	مصفوفة القيود هي A^T
القيد $i \geq$	المتحول $0 \leq u_j$
القيد $i \leq 0$	المتحول $0 \geq u_j$
القيد $i = 0$	المتحول $0 < u_j$ أو $0 > u_j$
المتحول $0 \leq x_j$	القيد $j \leq$
المتحول $0 < x_j$ أو $0 > x_j$	القيد $j =$

الجدول 7. 1.

نلاحظ، بوجهٍ خاص، أن ثنوي البرنامج الثنوي هو البرنامج الأولي.

مثال 7. 1

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي :

$$\text{Primal} \begin{cases} Max\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \neq 0 \end{cases}$$

يعطى البرنامج الثنوي للبرنامج بالشكل التالي :

$$\text{Dual} \begin{cases} Min\, u_1 + 4u_2 + 3u_3 \\ \quad u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 2 \\ \quad -u_1 + 3u_2 + u_3 = -3 \\ \quad u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, x_3 \neq 0 \end{cases}$$

7. 2. تفسير المسألة الثنوية لبرنامج خطي

نقصد بالتفسير إعطاء معاني ومدلولات لمفردات (المتحولات، القيود، ... إلخ) البرنامج الخطي. في الحقيقة، لا معنى للبحث عن تفسير للبرنامج الأولي، فمفردات هذا البرنامج تحدد بالمسألة التي وضع لنمذجتها : لا نبدأ ببرنامج خطي ثم نسعى لمعرفة مدلولات مفرداته، بل نبدأ من المسألة فنختار البرنامج الأولي الأكثر تعبيرا عن مفرداتها. تختلف القضية فيما يتعلق بالبرنامج الثنوي. ففي كثير من الحالات يأتي البرنامج الثنوي كحاجة رياضية : يستنتج صوريا من البرنامج الأولي، دون البحث من حيث المبدأ عن معنى لمفرداته. وهنا تأتي أهمية إعطاء تفسير له. من جهة أخرى، يمكن النظر إلى البرنامج الأولي والبرنامج الثنوي على أنهما برنامجان متتامان، ومن ثم يسمحان لنا بدراسة العلاقات التنافسية (بين لاعبين). فينمذج البرنامج الأولي استراتيجية أحد المتنافسين، وينمذج ثنويه استراتيجية الآخر. وهذا سبب آخر للاهتمام بإيجاد معاني ومدلولات البرنامج الثنوي.

ليس من السهل، في الحالة العامة، أن نعطي تفسيرا للبرنامج الثنوي لبرنامج خطي ما. وفوق ذلك، لا يمكن إيجاد تفسير جامع لكل البرامج الخطية الممكنة (فعدد المسائل التي يمكن نمذجتها ببرنامج خطي لا نهائية التنوع). لذا سنعطي تفسيرا نموذجيا (شائعا) للبرنامج الأولي ونقدم تفسير برنامجه الثنوي، كوسيلة لتعريف قياس، يقاس عليه حين التصدي لتفسير برنامج ثنوي ما.

لنرمز بـ $I = \{1, \ldots, i, \ldots, m\}$، $m \geq 1$، إلى مجموعة ما من الموارد المتاحة، ولنرمز بـ $J=\{1, \ldots, j, \ldots, n\}$، $n \geq 1$، إلى مجموعة من المنتجات التي نرغب في تصنيعها. لنفترض أن تصنيع قطعة واحدة من المنتج j تتطلب a_{ij} قطعة (واحدة) من المورد i، وأن عدد الوحدات المتاحة من المورد i هو b_i. ولنفترض أيضاً أن تصنيع قطعة واحدة من المنتج j تؤدي إلى ربح مقداره c_j.

المطلوب إيجاد عدد الوحدات x_j من المنتج j الواجب إنتاجها لتحقيق ربح كلي أعظمي.

إن البرنامج الخطي الذي ينمذج هذه المسألة يعطى بالشكل التالي :

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} Max\ z = \mathbf{c}.\mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

حيث z هو تابع الربح الكلي، وقيمة العنصر (i,j) من المصفوفة A هو a_{ij}، و b هي متجهة لمركباتها القيم b_i.

أما البرنامج الثنوي فيعطى بالشكل التالي :

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} Max\ w = \mathbf{b}.\mathbf{u} \\ \mathbf{u}.A \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{u} \geq 0 \end{cases}$$

ويمكن إعطاؤه التفسير التالي :

تقدم شخص لشراء كل الموارد b_i، $1 \leq i \leq m$، فما هو سعر الواحدة من كل مورد الذي يمكن لصاحب الشركة أن يقبله لبيع الموارد؟. يحدد هذا السؤال ما هو المطلوب.

علماً بأن صاحب الشركة لا يقبل البيع إلا إذا تحقق ما يلي : لأجل كل قطعة مصنوعة من المنتج j ، يجب أن يحصل على سعر مبيع مساو، على الأقل، للربح c_j الذي يكسبه من صناعة هذه القطعة. يحدد هذا الشرط قيود البرنامج الثنوي.

أما المشتري فما يهمه هو الحصول على الموارد بأرخص سعر ممكن. وهذا ما يعطي التابع الهدف للبرنامج الثنوي.

7. 3. مبرهنة الثنوية

تقدم هذه الفقرة مجموعة من الأدوات الرياضية، التي تهدف إلى تعريف العلاقة بين الحلول المقبولة والمثلى لبرنامج خطي أولي، والحلول المقبولة والمثلى لبرنامجه الثنوي.

مبرهنة *7. 1.*

إذا كانت $\bar{\mathbf{x}}$ و $\bar{\mathbf{u}}$ ، على التتالي، حلين مقبولين للبرنامج الأولي ولثنويه، فإن :

$$\bar{z} = \mathbf{c}.\bar{\mathbf{x}} \le \bar{w} = \bar{\mathbf{u}}.\mathbf{b}$$

البرهان

لدينا :

$$A.\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}.A.\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{u}}.\mathbf{b}$$

ولمّا كان $\bar{\mathbf{x}} \ge 0$ و $\bar{\mathbf{u}}.A \ge \mathbf{c}$ فإن $\bar{\mathbf{u}}.A.\bar{\mathbf{x}} \ge \mathbf{c}.\bar{\mathbf{x}}$ ، ومنه المطلوب. □

تَوطئة 7. 1

إذا كان $\mathbf{x}^*$ و $\mathbf{u}^*$ حلين مقبولين، أولياً وثنوياً، يحققان $c.x^* = u^*.b$ فإن x^* هو حل أمثل للبرنامج الأولي و u^* هو حل أمثل للبرنامج الثنوي.

تكمن أهمية التوطئة (7. 1) في أنها تسمح، غالباً، بالحصول على "شهادة أمثلة" لحل ما مقترح. يعني هذا أنها تسمح بأن نتحقق : أيكون حلان مقبولان لبرنامج خطي وثنويه (على التتالي)، هما حلّين أمثلين أم لا؟. سنرى، فيما بعد، أن المبرهنة (7. 3) تقدم أداة أخرى للتحقق.

توطئة 7. 2

لتكن π^* مضاريب سمبليكس عند الحل الأمثلي $\mathbf{x}^*$ للبرنامج الأولي P (لنفترض أنه محدود). إذن π^* حل مقبول للبرنامج الثنوي و $\mathbf{c}.\mathbf{x}^* = \pi^*.\mathbf{b}$.

البرهان

بمقتضى المبرهنة (5. 3)، إذا كانت π^* مضاريب سمبليكس عند الحل الأمثل $\mathbf{x}^*$ للبرنامج الأولي P، فلدينا :

لأجل المتحول خارج الأساس x_j : $\bar{c}_j = c_j - \pi^*.A_j \le 0$

لأجل المتحول داخل الأساس x_j : $\bar{c}_j = c_j - \pi^*.A_j = 0$

حيث A_j هو العمود j من A.

لذا فإن $\pi^*.A \ge c$ ومن ثم π^* هو حل مقبول للثنوية D.

من جهة أخرى، ليكن B الأساس الأمثل لـ P المقابل لـ $\mathbf{x}^*$. فيكون لدينا :

$$\pi^* = \mathbf{c}_B . B^{-1}$$

ومن ثمّ :

$$\pi^* . \mathbf{b} = \mathbf{c}_B . B^{-1} . \mathbf{b} = \mathbf{c} . \mathbf{x}^*$$

وبموجب التوطئة (7. 1) السابقة فإن π^* هو حل أمثل للثنوية D. □

تعالج التوطئة (7. 2) حالة وجود حلول مقبولة للبرنامجين P و D. أما المبرهنة (7. 2) فتعالج كل الحالات الممكنة.

مبرهنة 7. 2 (مبرهنة الثنوية)

ليكن P برنامجاً خطياً، D برنامجه الثنوي.

a) إذا كان لـ (P) و (D) حلولٌ مقبولة، فلِكلٍ منهما حل أمثل ولدينا:

$$z^* = Max \ \mathbf{c}.\mathbf{x} = Min \ \mathbf{u}.\mathbf{b} = w^*$$

b) إذا كان لأحدهما حلٌ غير محدود فإن الآخر ليس له حل مقبول.

البرهان

تنتج a) مباشرة من التوطئة (7. 1) (في الحقيقة، يمكننا دائماً أن نعود إلى حالة يكون فيها P في صيغته القياسية). كي نبرهن b) لنفترض أن D، على سبيل المثال، غير محدودة. إذن، يوجد دائماً حل ثنوي مقبول بحيث $u.b < -M$ من أجل M كبيرة بالمقدار الذي نشاء. إذن، إذا كان لـ P حل مقبول $\bar{\mathbf{x}}$ ، فإن التوطئة (7. 1) تعلمنا بأنه يجب أن يكون لدينا $u.b \geq c.\bar{x}$ ، مهما يكن u حلاً ثنوياً مقبولاً، وهذا تناقض. □

مبرهنة 7. 3. (مبرهنة التتام)

إن الشرط اللازمَ والكافي كي يكون الحلان المقبولان $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})$ للبرنامج الأولي وثنويه على التتالي، أمثلَيْن هو :

$$\forall j = 1, ..., n \quad (\bar{\mathbf{u}}.A_j - c_j).\bar{x}_j = 0$$

البرهان

لدينا :

$$A.\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \bar{\mathbf{u}}.A.\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}.\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{u}}.\mathbf{b} - \mathbf{c}.\bar{\mathbf{x}}$$

إذن إذا كان $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})$ زوجاً من الحلول المثلى، فإن:

$$\mathbf{c}.\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{u}}.\mathbf{b}$$

ومن ثمّ فإن :

$$(\bar{\mathbf{u}}.A - \mathbf{c}).\bar{\mathbf{x}} = 0$$

لمّا كان $\bar{\mathbf{x}} \geq 0$ و $\bar{\mathbf{u}}.A - \mathbf{c} \geq 0$ ، كان انعدام الجداء السلمي يُقتضى من أجل كل j، فإن:

$$(\bar{\mathbf{u}}.A_j - c_j).\bar{x}_j = 0$$

العكس : إذا كان $(\bar{\mathbf{u}}.A - \mathbf{c}).\bar{\mathbf{x}} = 0$ فإن $\mathbf{c}.\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{u}}.\mathbf{b}$ وبمقتضى التوطئة (7. 1)، الزوج $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})$ هو زوج أمثلي. □

يمكن، أيضا، وضع مبرهنة التتام بالصيغة التالية :

إذا احتوى البرنامج الخطي على قيود لها شكل متراجحات (على سبيل المثال، الثنوي D للبرنامج P)، فيتحقق عند الحل الأمثلي ما يلي :

a) كل متحول ثنوي مقابل لقيد غير مشبع هو بالضرورة معدوم،

b) المتحول الثنوي المقابل لقيد مشبع هو بوجه عام موجب تماما (معدوم، استثنائيا، في حالة الاعتلال).

يسمى هذان الشرطان، شرطا كون *Kuhn* وتوكر *Tucker* وهما شرطان لازمان وكافيان.

إن طرائق حل البرامج الخطية التي تسمى الطرائق الأولية–الثنوية (والتي سنناقشها فيما بعد) تقوم على المبدأ التالي : ابدأ بالحلين غير المقبولين بالضرورة (x, u) (x حل للأولي و u حل للثنوي) واعمل على أن تحقق شرطي كون وتوكر.

7. 4. حساسية البرامج الخطية (المتحولات الثنوية والتكاليف الهامشية)

ليكن $P(b)$ البرنامج الخطي التالي :

$$Max\ \mathbf{c}.\mathbf{x},\quad A.\mathbf{x} = \mathbf{b},\quad \mathbf{x} \geq 0.$$

سندرس تغيرات القيمة المثلى $z(b)$ للبرنامج $P(b)$ بتابعية الطرف الثاني b.

ليكن B أساسا أمثل لـ $P(b)$ و $u = c_B.B^{-1}$ المتحولات الثنوية المثلى.

لدينا : $c_j - \mathbf{u}.A_j \leq 0$ لأجل j خارج الأساس.

لنفترض أننا سنعدل قيمة b وأننا سنعالج البرنامج الجديد التالي :

$$\mathbf{P(b')}\begin{cases} Max\ \mathbf{c}.\mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} = \mathbf{b'} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

حيث $b' = b + \Delta b$.

إن $u = c_B . B^{-1}$ مستقلة عن b وتبقى حلا ثنويا مقبولا.

في هذه الشروط، إذا حققت المتجهة الجديدة b' ما يلي: $B^{-1}.b' \geq 0$، فإن الأساس يبقى أساسا مقبولا للبرنامج الأولي والبرنامج الثنوي في الوقت ذاته، وبالنتيجة، فإنه أمثل. ومن ثم، يبقى الأساس B أساسا أمثل من أجل كل الـ Δb، بحيث :

$B^{-1}.(b + \Delta b) \geq 0$ تؤدي إلى : $B^{-1}.\Delta b \geq -B^{-1}.b$

بفرض غياب الاعتلال (أي بفرض أن $B^{-1}.b > 0$)، وبفرض أن $\|\Delta \mathbf{b}\|$ صغيرة إلى حد كاف، يكون لدينا :

$$z(b') = u . b' = u . b + u . \Delta b$$

ونستنتج من ثم أن :

$$\frac{\partial z(\mathbf{b})}{\partial b_i} = u_i$$

ينتج عن هذا أن المتحول الثنوي u_i يمثل تكلفة تغير واحدية $\Delta b_i = 1$ للطرف الثاني من القيد i (التكلفة الهامشية).

7. 5. الخوارزميات الثنوية والأولية-الثنوية

يسمح لنا مفهوم الثنوية بإيجاد خوارزميات لحل البرامج الخطية غير خوارزمية سمبليكس الأولية بنوعيها الأصلية والمعدلة.

7. 5. 1. خوارزمية سمبليكس الثنوية

تشير المبرهنات المناقشة سابقا، إلى أن خوارزمية سمبليكس الأولية، لا تعطي في الدورة حلا جديدا موافقا لأساس مقبول للبرنامج الأولي فحسب، بل تعطي أيضا حلا جديدا للبرنامج الثنوي.

رأينا أن خوارزمية سمبليكس الأولية تنتقل من حل موافق لأساس مقبول إلى آخر موافق أيضا لأساس مقبول، إلى أن نجد الحل الأمثل. يفترض تطبيق هذه الخوارزمية معرفة حل انطلاق موافق لأساس مقبول. إن معرفة مثل هذا الحل (حل الانطلاق) ليس بديهيا في الحالة العامة.

يمكن لخوارزمية سمبليكس الثنوية (على العكس من خوارزمية سمبليكس الأولية) أن تكون مفيدة في هذه الحالة. في الحقيقة، تنتقل هذه الخوارزمية من حل موافق لأساس غير مقبول لكنه أمثل، إلى آخر موافق أيضا لأساس غير مقبول لكنه أمثل، حتى تجد أساسا واحدا مقبولا. إنها تفترض إذن معرفة أساس انطلاق غير مقبول لكنه أمثل (انظر الشكل 7. 1). بتعبير آخر، يمكن القول إن الخوارزمية الثنوية تنتقل من حل ثنوي مقبول إلى حل ثنوي مقبول، حتى تجد الحل الثنوي الأمثل المقبول، وتكون بذلك قد وجدت الحل الأمثل. أما أساس انطلاق الخوارزمية الثنوية فهو حل أمثل غير مقبول للبرنامج الأولي، إلا أنه حل ثنوي مقبول غير أمثلي.

لنحل البرنامج الأساسي P باستخدام خوارزمية سمبليكس الثنوية. لنتذكر، كي نبدأ، أن الحل x الموافق لأساس، هو حل أمثل إذا تحقق $\forall j \in J : c_j \leq 0$. ففي هذه الحالة، إذا ازداد المتحول خارج الأساس x_j بمقدار موجب، فإن قيمة التابع الهدف لا يمكنها إلا أن تتناقص. على العكس، يكون الحل الموافق لأساس غير مقبول إذا كانت واحدة على

الأقل من مركبات المتجهة b سالبة تماما، ففي هذه الحالة، يكون المتحول داخل الأساس $b_i = x_i$ (المركبة ذات القيمة السالبة)، سالبا.

7. 5. 1. 1. دراسة دورة في خوارزمية سمبليكس الثنوية

لنفترض أن $x = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ حل موافق لأساس غير مقبول ولكنه أمثل، وأن متحولات الأساس B هي x_i ، $1 \le i \le m$، وأن المتحولات خارج الأساس (N) x_j، $m+1 \le j \le n$، وأن البرنامج في صيغته القياسية.

لما كان x غير مقبول، فلدينا على الأقل متحول أساس واحد $\bar{b}_i = x_i$ (قيمة حالية، تتغير هذه القيمة من دورة إلى أخرى) ذو قيمة سالبة، ولأنه أمثل فإن $\forall j \in N : \bar{c}_j \le 0$ (سنفترض أن $\bar{c}_j < 0$ ، وإلا فإن الحل الثنوي المقابل سيكون معتلا).

ستسعى خوارزمية سمبليكس الثنوية لجعل هذا الحل مقبولا مع الحفاظ على كونه أمثل. كي نحصل على ذلك، سنخرج من الأساس المتحول ذا القيمة السالبة الكبرى (لاحظ الفرق عن الخوارزمية الأولية). ليكن هذا المتحول، هو x_r. ولأنه سيغادر الأساس فإن قيمته ستصبح صفرا، بعد أن كانت $\bar{b}_r$. بنفس الوقت، نبحث عن المتحول خارج الأساس x_s الذي سيدخل إلى الأساس، مع الحفاظ على أمثلية الحل الناتج (الذي ستبدأ الدورة التالية به).

إن الحفاظ على أمثلية الحل القادم (الموافق للدورة التالية) هو الذي يحدد المتحول الأفضل x_s الذي سيدخل الأساس. في الحقيقة، إن الحفاظ على الأمثلية يقتضي أن تكون التكاليف $\hat{c}_j$ الموافقة للمتحولات خارج الأساس والداخلة في الدورة التالية (والموافقة من ثم لتغيير المتحول) سالبة أو مساوية للصفر. تعطى $\hat{c}_j$ كما يلي :

$$\hat{c}_j = \bar{c}_j - \rho.\bar{a}_{rj} \le 0 \quad m+1 \le j \le n,\ j \ne s$$
$$\hat{c}_j = \bar{c}_j - \rho.\bar{a}_{rs} = 0 \quad j = s \qquad (1.7)$$

حيث $\rho > 0$. نأمل إذن أن نجد $\rho > 0$ التي تحقق العلاقات (1. 7).

يجب أن نجد إذن $\rho = \dfrac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}}$ ، وهذا يقتضي أن يكون $\bar{a}_{rs} < 0$ ،باعتبار أن $\bar{c}_s < 0$.

بالنتيجة، نجد :

- إذا كان $\bar{a}_{rj} \ge 0$ من أجل كل $j \in N$ (المتحولات خارج الأساس)، فالحل الأمثل غير محدود،
- وإلا، نأخذ من أجل s الدليل j من N بحيث :

$$(\bar{c}_s / \bar{a}_{rs}) = Min\{(\bar{c}_j / \bar{a}_{rj}) \mid j \in N, and\ \bar{a}_{rj} < 0\}$$

إن المتحول x_s هو الذي سيدخل في الأساس وستصبح قيمته $0 < (\bar{c}_s / \bar{a}_{rs}) = \rho$ بعد أن كانت معدومة.

إذا انتقلنا بمتحول خارج الأساس x_s من القيمة 0 إلى القيمة $0 < (\bar{c}_s / \bar{a}_{rs}) = \rho$ دون تغيير في قيم متحولات أخرى x_j خارج الأساس، فإن قيمة التابع z تزداد بمقدار $\bar{c}_s . \bar{b}_r / \bar{a}_{rs}$ أما متحول الأساس x_r فتصبح قيمته 0 بعد أن كانت $\bar{b}_r$.

بقول آخر، لقد زدنا قيمة التابع z من جهة، ومن جهة أخرى أدخلنا متحولا خارج الأساس، x_s في الأساس، لأن قيمته أصبحت موجبة تماما، وأخرجنا المتحول x_r من الأساس لأنه أصبح معدوما.

وهكذا ففي الخطوة التالية يصبح لدينا الأساس المقبول `B المعرف كما يلي: $B'=(B\setminus\{x_r\})\cup\{x_s\}$، وتعرف مجموعة المتحولات خارج الأساس الجديد N' بالشكل التالي: $N'=(N\setminus\{x_s\})\cup\{x_r\}$، وتحسب قيمة z من متحولات الأساس الجديد.

انطلاقا من حل أولي ما أمثلي، بيد أنه غير مقبول، وبتكرار الدورات، تقوم خوارزمية سمبليكس الثنوية بإيجاد حل لبرنامج خطي ما.

ومن ثم تكون خطوات خوارزمية <u>سمبليكس الثنوية</u> كما يلي :

ليكن P برنامجا خطيا. نفترض أن له أساسا غير مقبول بالضرورة، لكنه أمثل.

1) أوجد أساسا أمثل لكنه غير مقبول بالضرورة من أجل البدء، وليكن الأساس B^0 ، دورة = 0.

2) اكتب البرنامج بصيغته القانونية الموافقة للأساس الحالي B

3) دورة = دورة + 1

4) إذا كانت المتجهة $\bar{b} \geq 0$ ، توقف : حصلنا على الحل الأمثل (من أجل الحل الموافق للأساس الحالي)،

وإلا فلتكن $\bar{b}_r$ القيمة السالبة الكبرى الموافقة لمتحول من متحولات الأساس (x_r المتحول الذي سيغادر الأساس في الدورة التالية إن لم نجد حلا في الدورة الحالية)،

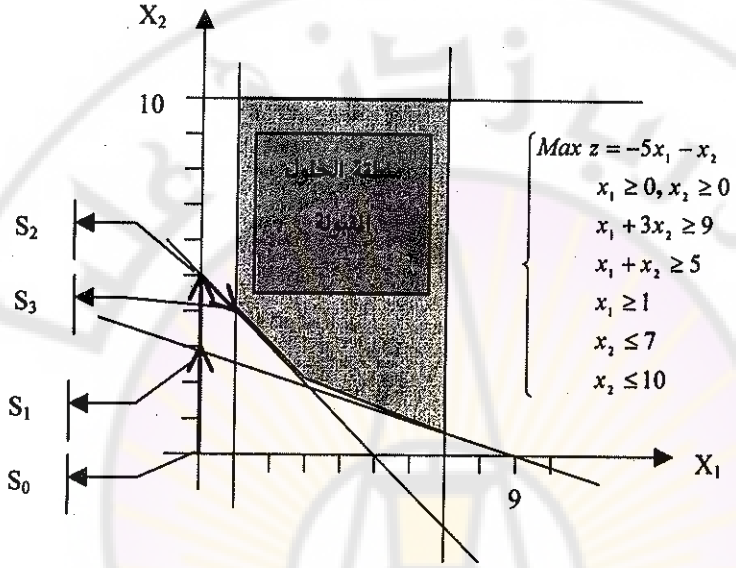
5) إذا كان $a_{rj} \geq 0$ من أجل كل $j \in N$، توقف :الحل الأمثل غير محدود = $+\infty$

وإلا ليكن a_{rs} بحيث :

$$(\bar{c}_s / \bar{a}_{rs}) = Min\{(\bar{c}_j / \bar{a}_{rj}) \mid j \in N, and\ \bar{a}_{rj} < 0\}$$

(x_s المتحول الذي سيدخل إلى الأساس في الدورة التالية)

6) طبق الفقرة 6) في خوارزمية سمبليكس الأولية (قم بعملية ارتكاز) (نحصل علـى أسـاس جديـد بمتحـولات وقيـم جديـدة والبرنـامج النـاتج هـو في صيغتـه القانونية). عد إلى 3. □



الشكل (7. 1) خوارزمية سمبليكس الثنوية

نبدأ بـ $S_0(0,0)$ ثم ننتقل إلى $S_1(0,3)$ وبعدها ننتقل إلى $S_2(0,5)$ ونصل أخيرا إلى $S_3(1,4)$. النقاط الثلاث الأولى تمثل حلولا موافقة لأسس غير مقبولة لكنها أمثلية. النقطة الأخيرة تمثل حلا مقبولا وأمثل.

7. 5. 1. 2 الشكل الجدولي (المصفوفي) لخوارزمية سمبليكس الثنوية

تكمن أهمية الشكل المصفوفي في أنه يقدم طريقة أكثر صورية، ثم إنها تضيء زوايا رؤيـة أخرى في خوارزمية سمبليكس الثنوية.

كما رأينا سابقا، تقوم خوارزمية سمبليكس الثنوية على فكرة تطبيق خوارزمية سمبليكس الأولية على البرنامج الثنوي، وبحيث تجري كل العمليات (تغيير الأسس، الارتكاز، ... إلخ) على الجدول الأولي (جدول سمبليكس الموافق للبرنامج الأولي).

لنفترض أننا نريد حل البرنامج الخطي التالي (في صيغته القياسية) :

$$\mathbf{P}\begin{cases} Max\ z = \mathbf{c}.\mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \qquad (2\ .7)$$

إن البرنامج الثنوي الموافق هو :

$$\mathbf{D}\begin{cases} Min\ w = \mathbf{u}.\mathbf{b} \\ \mathbf{u}.A \geq \mathbf{c} \end{cases}$$

تذكر أنه ليس هناك قيد على إشارة u.

لنفترض أن B أساس لـ P (مصفوفة جزئية نظامية مربعة مستخرجة من A) مقبول للبرنامج الثنوي (ليس بالضرورة مقبولا للبرنامج الأولي). بقول آخر، الحل الموافق للأساس $u = c_B.B^{-1}$ للثنوية يحقق : $u\ .\ N \geq 0$.

إذا كانت B مقبولة أوليا (مقبولة للبرنامج الأولي)، فهذا يعني أنه إذا كان :

$$x_B = B^{-1}.\ b \geq 0$$

فلدينا بحسب المبرهنة الثنوية: u هو حل أمثل للبرنامج الثنوي و $x=[x_B,0]$ هو حل أمثل للبرنامج الأولي. وإلا فالحل $x = [x_B, x_N]$ ليس بحل للبرنامج الأولي، وهذا يعني أن:

$$\mathbf{x}_B = \overline{\mathbf{b}} = B^{-1}.\mathbf{b} < 0$$

لنفترض أن المصفوفة B مكونة من الأعمدة m الأولى في A، فإن البرنامج الثنوي يكتب باستخدام الجدول (7. 2).

$b_1, b_2, \ldots, b_m$	$0\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0$	0	$\leftarrow w$

$a_{11} \ldots\ldots a_{m1}$ B^T $a_{1m} \ldots\ldots a_{mm}$	-1 $\ddots$ -1	0	c_1 $\vdots$ c_m	$\leftarrow c_B$
$a_{1m+1} \ldots\ldots a_{mm+1}$ N^T $a_{1n} \ldots\ldots a_{mn}$	0	-1 $\ddots$ -1	c_{m+1} $\vdots$ c_n	$\leftarrow c_N$
$u_1, u_2, \ldots, u_m$	$v_1, \ldots,$	$v_m, \ldots,$	v_n	

الجدول (7. 2)

حيث أدخلنا متحولات الفروق $v_j \geq 0$ $(j=1, \ldots, n)$ التي تحقق $v_j = u \cdot A_j - c_j$ (A_j هي العمود j من A).

ومتحولات الأساس هي : $u_1, u_2, \ldots, v_{m+1}, \ldots, v_n$.

بضرب الجدول (7. 2) بالمصفوفة الموضحة بالجدول (7. 3) التالية (تسبق المصفوفة الجدول في عملية الجداء).

m	$(B^{-1})^T$	0
$n-m$	$(B^{-1}.N)^T$	$-I_{n-m}$
	m	$n-m$

الجدول (7. 3)

نحصل على الصيغة القانونية لـ D الموافقة للأساس المعرف بالمتحولات $(u_1, u_2, \ldots, v_{m+1}, \ldots, v_n)$:

		$\bar{b}$				
	$0 \ldots 0$	$\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m$	$0 \ldots 0$		$-\pi.b$	$\leftarrow -w$
1	I_m	$-(B^{-1})^T$	0	$=$	$\pi^T = (c_B.B^{-1})^T$	
m						
$m+1$	0	$-(\bar{N})^T$	I_{n-m}		$-(\bar{\mathbf{c}}_N)^T$	
n						

ارتكاز

متحولات $\rightarrow$ $U_1, \ldots, u_m \quad v_1, \ldots, v_m \quad v_{m+1}, \ldots, v_n$

الجدول 7. 3

حيث $\pi = c_B.B^{-1}$ هي مضاريب سمبليكس و $\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - \boldsymbol{\pi}.N \leq 0$ هي التكاليف المختزلة للمتحولات خارج الأساس x_N . نلاحظ أن الدالّة الهدف، أيضاً، تعطى بصيغتها القانونية (كل معاملات متحولات الأساس معدومة).

إن تطبيق خوارزمية سمبليكس الأولية على هذا الجدول تزودنا بقانون تغيير الأسس التالي:

إذا كان $\bar{\mathbf{b}} = B^{-1}.\mathbf{b} \geq 0$ ، انتهى : الحل $u = c_B.B^{-1}$ هو حل أمثل للبرنامج الثنوي والحل $[x_B, x_N] = [\bar{\mathbf{b}}, 0]$ هو حل أمثل للبرنامج الأولي.

إذا وجد r بحيث $\bar{b}_r < 0$ ، فلدينا إحدى حالتين :

1) يوجد حد سالب تماما في السطر r من $\bar{N}$ (بسبب من أنه ليس هناك قيود على إشارات المتحولات u، فإن المرتكز (القطب) ينتمي قطعا للقيود $n\text{-}m$ الأخيرة من الجدول الثنوي).

نحسب إذا :

$$\frac{-\bar{c}_s}{-\bar{N}_{rs}} = \underset{j|\bar{N}_{rj}>0}{Min}\left\{\frac{-\bar{c}_j}{-\bar{N}_{rj}}\right\}$$

الذي يمكن كتابته بالشكل :

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{N}_{rs}} = \underset{j|\bar{N}_{rj}<0}{Min}\left\{\frac{\bar{c}_j}{\bar{N}_{rj}}\right\}$$

في الجدول الثنوي، يدخل المتحول v_r في الأساس، ويخرج المتحول v_s. في الجدول الأولي يدخل x_s ويخرج x_r.

2) كل حدود السطر r من $\bar{N}$ موجبة تماما. فالحل الأمثل للبرنامج الثنوي غير محدود، وهذا ما يشير، بمقتضى مبرهنة الثنوية، إلى أن البرنامج الأولي ليس له حل.

نلاحظ، اعتبارا من القاعدة السابقة، أن كل الحسابات يمكن أن تنجز على الجدول الأولي.

إن تطبيق هذه الخوارزمية يقتضي معرفة أساس انطلاق مقبول للبرنامج الثنوي. وهذا ممكن في أغلب الحالات، وبخاصة :

أ) إذا كنا قد حسبنا الحل الأمثل لبرنامج خطي P ذي طرف ثان b ونبحث عن حل أمثل جديد لأجل طرف ثان b' مختلف قليلا عن b. تكون مضاريب سمبليكس عند الحل الأمثل للبرنامج الأول حلا ثنويا مقبولا للبرنامج الثاني.

ب) إذا كنا قد حددنا الحل الأمثل للبرنامج P لكننا نرغب في الحصول على حل مقبول جديد بعد أن أضفنا إلى P بعض القيود الإضافية (وهذا مهم جدا في حالة استخدام طريقة القطع لحل برنامج خطي بأعداد طبيعية).

تتقارب الخوارزمية الثنوية بعد عدد منته من الدورات عند غياب الاعتلال. يمكن أن يعطى هذا الشرط (غياب الاعتلال) كما يلي :

$$\bar{c}_j < 0 \quad (j \text{ خارج الأساس})$$

في كل دورة.

في حالة وجود الاعتلال، يكون التقارب مضمونا أيضا باستخدام نفس الطرق التي استخدمت في حالة خوارزمية سمبليكس الأولية (قوانين اختيار المرتكز والطريقة المعجمية واضطراب التكاليف).

7. 5. 2. الخوارزمية الأولية–الثنوية

لقد اعتمدنا في وضع خوارزمية سمبليكس الثنوية على مبرهنة الثنوية. أما في الخوارزمية الأولية–الثنوية فإننا نعتمد على مبرهنة التتام (المبرهنة 7. 3) (أو نعتمد، كما رأينا، على تحقق شرطي كون وتوكر). ففي كل دورة نحصل على حلين مقبولين أحدهما أولي والآخر ثنوي، ونرى فيما إذا كانا أمثلين. فإن كانا أمثلين حصلنا على حلين أحدهما

للبرنامج الأولي والثاني لثنويه. وإلا نختر متحولين جديدين معتمدين في اختيارنا على مبرهنة التتام (المبرهنة 7. 3). ثم نغير الأسس ونبدأ دورة أخرى.

سنقدم فيما يلي دراسة للطريقة المصفوفية، فما ناقشناه حتى الآن يكفي للتعامل معها مباشرة.

كي نحل البرنامج الخطي التالي (في صيغته القياسي) :

$$\mathbf{P}\begin{cases} Max\ z = \mathbf{c}.\mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \qquad (3\ .7)$$

نفترض أننا نعرف حلا مقبولا لبرنامجه الثنوي، أي نعرف متجهة $u = (u_1, \ldots, u_m)$، تحقق :

$$u\,.\,A \geq 0$$

لما كان كل حل x لـ P يحقق $A\,.\,x = b$ فإن x هو حل أمثل لـ P إذا وفقط إذا كان حلا أمثل للبرنامج التالي :

$$\mathbf{P}\begin{cases} Max\ \tilde{z} = \tilde{\mathbf{c}}.\mathbf{x} = (\mathbf{c} - \mathbf{u}.A)\mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

يتحقق هذا، بوجه خاص، في حالة حل مقبول لـ P يحقق ما يلي :

$$x_j > 0 \Rightarrow c_j - \mathbf{u}.A_j = 0$$
$$c_j - \mathbf{u}.A_j < 0 \Rightarrow x_j = 0$$

أي مقبول لشروط التتام مع u (المبرهنة 7. 3).

وهكذا فإننا، بعدم السماح للمركبة x_j من المتجهة x بأن تصبح موجبة إلا في حال كون $\tilde{\mathbf{c}} = 0$ ، نحترم شروط التتام.

1) ليكن لدينا حل ثنوي مقبول u. سنحاول إيجاد حل مقبول x لـ P بحيث :

$$x_j > 0 \Rightarrow \tilde{c}_j = 0$$

يمكن إيجاد مثل هذا الحل عن طريق حل البرنامج الخطي التالي (الذي نسميه البرنامج الأولي المقيد):

$$PR(\mathbf{u})\begin{cases} Min\ \rho = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ A.\mathbf{x} + \mathbf{y} = b \\ \mathbf{x} \geq 0 \\ x_j = 0 \quad \forall j : \tilde{c}_j < 0 \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases}$$

ابتداء من الحل المقبول $y_i = b_i$، $(i = 1, \ldots, m)$، (يمكننا دائما افتراض أن $b_i > 0$. في الحالة المعاكسة يكفي أن نضرب السطر i في (7. 3) بـ -1).

يمكن أن نقع على إحدى حالتين :

أ) إذا تحقق الحل الأمثل لـ $PR(u)$ عند $\rho = 0$، فيوجد حل مقبول موافق لأساس x لأجل P (هذا يعني $y = 0$)، محقق لشروط التتام مع u. ومن ثم فإن (x, u) هو زوج من الحلول المثلى للبرنامج الأولي والبرنامج الثنوي، على التتالي.

ب) إذا تحقق الحل الأمثل لـ $PR(u)$ عند $\rho > 0$، فهذا يعني أنه لا يوجد حل مقبول لـ P يحقق شروط التتام مع u. علينا إذن تغيير المتحول الثنوي u كي نعرف برنامجا مقيدا جديدا $PR(u')$ له مجموعة حلول أوسع من مجموعة حلول $PR(u)$.

باستخدام الرمز $\overline{\mathbf{w}} = (\overline{w}_1, ..., \overline{w}_m)$ ، يكتب البرنامج الثنوي لـ $PR(u)$ على الشكل التالي :

$$\begin{cases} Max\ \overline{\mathbf{w}}.\mathbf{b} \\ \overline{\mathbf{w}}.A_j \le 0 \quad (j \in J(\mathbf{u})) \\ \overline{\mathbf{w}} \le 1 \end{cases}$$

حيث $\overline{\mathbf{w}}$ يمكن أن تأخذ أي إشارة (سالبة أو موجبة) و $J(\mathbf{u}) = \{j \mid \overline{c}_j = 0\}$ و 1 هو المتجهة ذات الـ m مركبة، قيمة كل مركبة مساوية لـ 1.

لدينا بالفرض :

$$Min\ \rho = \rho^* = \overline{\mathbf{w}}^*.\mathbf{b} = Max\ \overline{\mathbf{w}}.\mathbf{b} > 0$$

من جهة أخرى، تحقق متحولات الحل الثنوي الأمثل $\overline{\mathbf{w}}^* = (\overline{w}_1^*, ..., \overline{w}_m^*)$ للبرنامج $PR(u)$ شروط التتام، أي :

$$x_j > 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{w}}^*.A_j = 0$$

لنتأمل المتجهة الجديدة u' التالية:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \lambda\,\overline{\mathbf{w}}^*$$

لما كان $\tilde{c}_j = 0$ و $\overline{\mathbf{w}}^*.A_j = 0$ لكل متحول x_j داخل الأساس، فلدينا :

$$\tilde{c}_j' = c_j - \mathbf{u}.A_j + \lambda\,\overline{\mathbf{w}}^*.A_j = \tilde{c}_j = 0$$

وتبقى شروط التتام محققة مهما تكن قيمة λ.

في حال $\lambda > 0$ نجد :

$$\mathbf{u}'.\mathbf{b} = \mathbf{u}.\mathbf{b} - \lambda\,\overline{\mathbf{w}}^*.\mathbf{b} < \mathbf{u}.\mathbf{b}$$

كي نحصل على أكبر تخفيض ممكن للفرق بين الدالة الثنوية $u'.b$ والدالة الأولية $c.x$، من مصلحتنا اختيار القيمة الموجبة الكبرى الممكنة لـ λ، المتوافقة مع القيود:

$$\tilde{c}_j' = c_j + \lambda \overline{\mathbf{w}}^*.A_j \le 0 \quad (\forall j)$$

والتي تضمن بقاء u' حلا ثنويا مقبولا.

في حال $j \in J(\mathbf{u}) = \{j \mid \tilde{c}_j = 0\}$، لدينا $\tilde{c}_j = 0$ غير أن : $\overline{\mathbf{w}}^*.A_j \le 0$، ومن ثم فإن القيود المقابلة لاتحد قيمة λ.

- إذا كان لدينا لكل j لا تنتمي إلى $J(u)$:

$$\overline{\mathbf{w}}^*.A_j \le 0$$

فإن λ غير محدودة من الأعلى، ومن ثم فإن الدالة الثنوية u . b ليست محدودة من الأسفل، ونستنتج أن البرنامج (P) بلا حل (مبرهنة الثنوية).

- إذا وجد j لا ينتمي إلى $J(u)$ بحيث $\overline{\mathbf{w}}^*.A_j > 0$ فإن قيمة λ العظمى هي :

$$\lambda^* = \underset{j \mid \overline{w}^*.A_j > 0}{Min} \left\{ \frac{-\tilde{c}_j}{\overline{\mathbf{w}}^*.A_j} \right\}$$

وبتبديل u بـ $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \lambda \overline{\mathbf{w}}^*$ يكون لدينا $\tilde{c}_j' = 0$ لـ j واحدة على الأقل لا تنتمي إلى $J(u)$.

ونعود إلى 1) لحل البرنامج المقيد الجديد المقابل $PR(u')$.

في غياب الاعتلال ($\tilde{c}_j \ne 0$، لكل j خارج الأساس)، تكون λ^* التي نحصل عليها في كل دورة، موجبة تماما، ومن ثم فإن الدالة الثنوية تتناقص باستمرار، ولا نقابل أبدا الأساس ذاته مرتين. وهذا ما يبرهن على التقارب المنتهي لهذه الطريقة.

في حالة وجود الاعتلال، نوظف الطرق ذاتها التي وظفناها في حالة خوارزمية سمبليكس الأولية وخوارزمية سمبليكس الثنوية (اضطراب التكاليف، ... إلخ).

لنلاحظ أخيراً أنّ الحل الأمثل للبرنامج المقيد $PR(u)$ في كل دورة من الخوارزمية، هو حلٌ موافقٌ لأساسٍ مقبول للبرنامج المقيد $PR(u')$ الذي يليه، والذي نحصل عليه بعد تغيير المتحولات الثنوية : من المفيد إذن استخدامه كحل انطلاق لحل البرنامج $PR(u')$ بواسطة خوارزمية سمبليكس الأولية.

7. 6. أحد التطبيقات الهامة للمبرهنة الثنوية : مبرهنة فاركاس-مينكوفسكي *Farkas-Minkowsky*

لا تقتصر فائدة مبرهنة الثنوية على إيجاد خوارزميات ثنوية و ثنوية-أولية لحل البرامج الخطية، بل تجد تطبيقات عديدة لها في الجبر الخطي. كمثال على ذلك، نعرض في هذه الفقرة لأحد هذه التطبيقات الهامة : مبرهنة فاركاس-مينكوفسكي.

تعطي هذه المبرهنة شرطاً لازماً وكافياً لوجود حل غير سالبٍ لمنظومة معادلات خطية من الشكل :

$$A \,.\, x = b \quad (4 \,.7)$$

حيث A هي مصفوفة من المعاملات الحقيقية $m * n$، و :

$$b = (x_1, \ldots, x_n)^T \text{ و } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \geq 0 \text{ ،}$$

يمكن النص على هذه المبرهنة كما يلي :

مبرهنة 7. 4. (مبرهنة فاركاس-مينكوفسكي)

إن الشرط اللازم والكافي لوجود حلٍ موجبٍ $x \geq 0$ للمنظومة (7. 4) هو أن يكون :

$$u \,.\, b \geq 0$$

لِكل $u = (u_1, \ldots, u_m)$ يحقق: $u \,.\, A \geq 0$.

البرهان

من الواضح أن الشرط ضروري.

كي نبرهن أنه كافٍ، نستخدم مبرهنة الثنوية.

لنتأمل البرنامج الخطي :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} Min \ \mathbf{u}.\mathbf{b} \\ \mathbf{u}.A \geq 0 \end{cases}$$

حيث u تأخذ أي إشارة.

بفرْض أن $u \,.\, b \geq 0$ لِكل $u = (u_1, \ldots, u_m)$ تحقق : $u \,.\, A \geq 0$، يكون للبرنامج (I) الحلُ الأمثل التالي : $u = 0$.

إن الدالّة الهدف للبرنامج الثنوي (II) (ثنوي (I)) مطابقة للصفر، أما مجموعة قيوده (قيود البرنامج الثنوي II) فتعرف كما يلي :

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

ولمّا كان لـ (I) حلٌ أمثلُ منتهٍ، فإننا نستنتج، بمقتضى مبرهنة الثنوية، أن للبرنامج الثنوي مجالَ حلولٍ مقبولة غيرَ فارغ. ومن ثمّ فإن لـ (7. 4) حلاً غير سالب.□

يمكن توسيع المبرهنة السابقة (المبرهنة 7. 4) بسهولة لتشمل حالة منظومة متراجحات خطية من الشكل $A . x \leq b$، بشرط أن نفرض (إضافة إلى فرضيات المبرهنة 7. 4)، أيضا، أن $u \leq 0$.

7. 7. حدود البرمجة الخطية

على الرغم من القدرة الكبيرة لهذه الأداة فإن لها حدودا للتطبيق :

1) ليس هناك ما يضمن أن نحصل على حلول طبيعية (في الحالة العامة الحلول حقيقية). فقد نحصل بحل برنامج خطي على حل من النمط 3.5 رجل. قد يعطي التقريب حلا مقبولا في بعض الحالات (على سبيل المثال، إذا اعتمدنا 3 أو 4 بدلا من 3.5 قد يكون الحل مقبولا). إلا أن التقريب لا يعطي في الحالة العامة إلا جوابا فقيرا جدا.

إن مسألة الحصول على حلول طبيعية لبرنامج خطي، هي موضوع نوع آخر من البرمجة الخطية، يسمى البرمجة الخطية الطبيعية وهي مسألة مختلفة تماما عن مسألة البرمجة الخطية الحقيقية (سنعالج هذه المسألة في كتاب بحوث العمليات الجزء الثاني)،

2) لا يمكننا أخذ مشاكل اللاتأكد *Uncertainty* بعين الاعتبار في البرمجة الخطية. يعمل نموذج البرمجة الخطية (بالشكل الذي قدمناه فيه هنا)، فقط، عندما تكون قيم التكاليف وقيم القيود، إلخ مؤكدة وهذا غير متاح دائما في الحياة العملية.

ما يزال موضوع تطوير نماذج تعتمد البرمجة الخطية وتأخذ بعين الاعتبار قيما غير مؤكدة مجالا للكثير من الأبحاث.

3) افتراض الخطية هو قيد على البرمجة الخطية. في الحقيقة لا تتصف الكثير من المسائل التي نصادفها بهذه الصفة. فقد يكون تابع الهدف تابعا لا خطيا، أو قد يكون

هناك قيد (أو أكثر) لا خطي. نسمي عندها مسألة البحث عن أمثلة دالة الهدف بمراعاة القيود المعطاة، مسألة برمجة لاخطية أو مسألة برمجة رياضية. تقسم البرمجة اللاخطية بحسب دالة الهدف و/أو القيود إلى مجموعة أقسام نذكر منها البرمجة المحدبة (أو المقعرة)، والبرمجة المربعة و ... إلخ.

لن نعالج موضوع البرمجة اللاخطية فهي لا تدخل في منهاجنا، ثم إنها تعتبر موضوعا متقدما في النمذجة والأمثلة.

4) تخفق البرمجة الخطية في تقديم حل إذا أردنا تحقيق عدة أهداف متضاربة. في الحقيقة، لا يمكن التعبير إلا عن هدف واحد في الصيغة الأصلية للبرنامج الخطي (بواسطة دالة الهدف).

إن تطوير البرمجة الخطية لتتمكن من أمثلة أهداف متعددة متضاربة، هو موضوع البرمجة الخطية المتعددة الأهداف.

تشير هذه الحدود للبرمجة الخطية إلى حقيقة بديهية واحدة : لا يمكن حل كل مسائل النمذجة والأمثلة بواسطة البرمجة الخطية (نشير هنا إلى أن هناك عددا كبيرا من الأدوات الرياضية التي أوجدت لنمذجة وحل المسائل التي لا يمكن حلها بالبرمجة الخطية). لا تخفي هذه الحقيقة، أن النمذجة الخطية هي أداة مفيدة وقوية جدا لنمذجة وحل عدد كبير من المسائل التي تصادفنا.

7. 8. مقاربة أولية للبرمجة متعددة الأهداف

رأينا سابقا أن معالجة عدة أهداف في الوقت نفسه، هي واحد من أهم حدود البرمجة الخطية. في الحقيقة، تخفق البرمجة الخطية في تقديم حلول عندما نهدف إلى معالجة

مجموعة من الأهداف المتضاربة أو غير المنسجمة والتي لا يمكن تحقيقها معا بسبب القيود التي تفرضها الموارد المتاحة. فكما رأينا، هناك هدف واحد في صياغة البرمجة الخطية (في نموذجها الأصلي)، تعبر عنه دالة الهدف. وتظهر الصعوبة عند التصدي لمعالجة مجموعة أهداف. يمكن معالجة الأهداف غير المتضمنة في الدالة الهدف كقيود، على شكل معادلات أو متراجحات للبرنامج الخطي. لا يمكن اعتبار هذه المعالجة، معالجة مرضية. فقد لا يقود استخدام قيود المعادلات إلى حل، أما استخدام قيود المتراجحات فيؤدي إلى انحراف ذي اتجاه وحيد، وتكون كمية الانحراف بلا معنى. في كل هذه الحالات التي تتعدد فيها الأهداف، تزودنا البرمجة الخطية المتعددة الأهداف بحل يحقق الأهداف إلى أقصى حد ممكن. وفي هذا السياق تعتبر تقنية البرمجة الخطية المتعددة الأهداف متفوقة على النسخة الأصلية للبرمجة الخطية.

إن معظم المسائل التي نتصدى لحلها في وقتنا الراهن، تتطلب التوفيق بين مجموعة أهداف. فعلى سبيل المثال، بمقدار ما تهتم المؤسسة اليوم بأعظمة ربحها، بمقدار ما تهتم بتقاسم السوق مع غيرها من المؤسسات العاملة في نفس المجال، وهذان الهدفان متناقضان في الحالة العامة. تزودنا البرمجة الخطية المتعددة الأهداف بإطار لتحليل بنية الهدف بتابعية الموارد أو الحدود الأخرى للمنظومة.

قبل الحديث عن تقنيات البرمجة المتعددة الأهداف، علينا القول إن إنجاز الأهداف يجب أن يكون أقرب ما يمكن إلى الهدف الأمثل، مع انحرافات مسموح بها في كلا الاتجاهين السالب والموجب. تصاغ القيود في البرمجة المتعددة الأهداف بالطريقة نفسها التي تصاغ بها في البرمجة الخطية. أما الاختلاف فيكون في صياغة الدالة الهدف. لنفترض أن إنتاج منتج A يحتاج إلى 15 ساعة/رجل وأن إنتاج منتج B يحتاج إلى 25 ساعة/رجل، ولنفترض أيضا أن المصنع يرغب في أن يهيئ لإنتاج المنتجين قوة عمل

قريبة من الـ 50000 ساعة/رجل، فيمكننا كتابة هذا الهدف على شكل معادلة، كما يلي:

$$15\,x_1 + 25\,x_2 + d_1^- - d_1^+ = 50000$$

حيث تمثل x_1 الكمية المنتجة من المنتج A وتمثل x_2 الكمية المنتجة من المنتج B.

قد يرغب المصنع في تحقيق أهداف أخرى. تصاغ هذه الأهداف بالطريق ذاتها التي صغنا فيها الهدف السابق، مع متحولات انحراف سالبة وموجبة. لنفترض، على سبيل المثال، أن المصنع يرغب في أن تكون مبيعاته في حدود 60000 ل.س (أي يسمح بانحراف صغير على كل طرف). مع العلم أن سعر مبيع القطعة من المنتج الأول هو 100 ل.س وسعر مبيع القطعة من المنتج الثاني هو 200 ل.س. يصاغ هذا الهدف على شكل معادلة كالتالية:

$$100\,x_1 + 200\,x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60000$$

تعبر الرموز d_1^-، d_1^+، d_2^- و d_2^+ في صياغة الهدفين السابقين عن متحولات الانحراف. يعبر d^- عن الانحراف باتجاه الأدنى ويعبر d^+ عن الانحراف باتجاه الأعلى عن الهدف المطلوب. إذا كان بالإمكان تحقيق هدف القوة العاملة تماما، فيأخذ كل من المتحولين القيمة 0 في الحل النهائي. أما إذا كان بالإمكان تحقيق الهدف بعدد أقل من القوة العاملة المرغوبة فيأخذ المتحول d_1^- قيمة موجبة، في حال الحاجة إلى قوة عاملة أكبر يأخذ المتحول d_1^+ قيمة موجبة في الحل النهائي. بنفس الطريقة يمكننا نقاش الهدف الثاني (المبيعات). من جهة أخرى، بسبب من لا يمكن لمتحولي الانحراف المتعلقين بالهدف نفسه أن يأخذا قيما لا صفرية في الوقت ذاته، فإن جداء متحولات الانحراف مساو للصفر دائما.

خلافا للبرمجة الخطية (في صيغتها الأصلية)، ليست الدالة الهدف (في البرمجة المتعددة الأهداف) التي نبحث عن أمثلتها وحيدة بل هي جمع لانحرافات عن الأهداف المرجوة، ونسعى لجعل هذه الدالة أصغرية (باعتبار القيود المفروضة). ففي مثالنا السابق، إذا كانت القوة العاملة وسعر المبيع هما الهدفين الوحيدين للمصنع، فإن الدالة الهدف في البرنامج المتعدد الأهداف الموافق تكون على الشكل التالي :

$$Min\ D = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+$$

وهكذا فإن السعي لجعل الدالة الهدف أصغر فأصغر هو اقتراب أكثر فأكثر من تحقيق الأهداف. إذا أمكن تحقيق الأهداف تماما فإن قيمة تابع الهدف تكون صفرا. ومن ثم ففي البرمجة المتعددة الأهداف تقوم فروق النقص والزيادة (d_i^- و d_i^+) بإجبار متحولات القرار x_i على أن تأخذ قيمها المثلى.

يجب علينا أن نذكر أيضا أنه، خلافا للبرمجة الخطية، قد تركب الدالة الهدف في البرمجة المتعددة الأهداف من وحدات قياس غير منسجمة مثل ليرة سورية و ساعة/رجل و عدد العمال و ...إلخ.

ليست كل الأهداف على الدرجة نفسها من الأهمية، بعضها أكثر أهمية من البقية. يمكن عكس هذه الحقيقة في تثقيل الانحرافات المقابلة في الدالة الهدف. تأخذ الأهداف أوزانا متناسبة مع أهميتها.

يمكن أيضا أن نأخذ بعين الاعتبار الأولويات بين الأهداف. فإن سمحنا مثلا لهدف ما بالانحراف بأحد الاتجاهات، ولم نسمح له بالانحراف بالاتجاه الآخر (كأن نسمح بالانحراف إلى أعلى مثلا ولا نسمح بالانحراف إلى الأدنى) حذفنا المتحول الموافق للانحراف الممنوع، وأبقينا فقط على المتحول الموافق للانحراف المسموح في التابع الهدف.

يمكننا مما قدمناه في هذه الفقرة التأكيد أن البرمجة المتعددة الأهداف تتفوق على البرمجة الخطية في نسختها الأصلية، وهي مفيدة جدا لتحليل وحل مسائلنا المعاصرة (التي يقوم معظمها على أهداف متضاربة).

تمرينات

التمرين 1. لنتأمل البرنامج الخطي الموضوع في صيغته القانونية التالية :

$$\hat{P}\begin{cases} Max\ z = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 7x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 16 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

i. اضرب المتراجحة الأولى من البرنامج السابق بـ *3*، واضرب المتراجحة الثانية منه بـ *2* واجمع المتراجحتين مستنتجاً أن قيمة الدالّة الهدف لا يمكن أن تتجاوز *62*.

ii. اضرب المتراجحة الأولى من البرنامج السابق بـ y_1، واضرب المتراجحة الثانية منه بـ y_2. استنتج، مباشرة، أنه إذا حقق y_1 و y_2 الشروط الثنوية للبرنامج السابق فإن الدالّة الهدف هي أصغر أو تساوي $10\,y_1+16\,y_2$.

التمرين 2. اكتب البرنامج الثنوي للبرنامج الخطي التالي :

$$P\begin{cases} Min\ z = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

التمرين 3. ماذا يمكننا القول عن التكاليف الهامشية في الحالة التي يكون فيها الحل الأمثل الموافق لأساس معتلا؟. أعط تفسيرا هندسيا.

التمرين 4. لتكن A مصفوفة مربعة متناظرة $(A = A^T)$. نقول عن البرنامج الخطي التالي إنه برنامج متناظر :

$$\mathbf{P}\begin{cases} Max\ z = b^T.\mathbf{x} \\ \quad A.\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \ge 0 \end{cases}$$

برهن أنه إذا قبلت الجملة الخطية $A\ .\ x = b$ حلاً فإن هذا الحل هو حلٌ أمثلُ لـ P.

التمرين 5. لنتأمل البرنامج الخطي التالي :

$$P\begin{cases} Max\ z = 3x_1 + 2x_2 \\ \quad 2x_1 + x_2 \le 6 \\ \quad x_1 - x_2 \le 1 \\ \quad x_1 + x_2 \le 3 \\ \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

i. اكتب البرنامج الثنوي لـ P

ii. تحقق من أن $x_1 = 2, x_2 = 1$ هو حلٌ مقبول لـ P وأن $y_1 = 0, y_2 = 0.5, y_3 = 2.5$ هو حلٌ مقبول للبرنامج الثنوي. ماذا تستنتج؟

التمرين 6. برهن باستخدام نظرية التتام وبإنجاز أقل مقدار ممكن من الحسابات أن :

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 0$$

هو حلٌ أمثلُ للبرنامج التالي :

$$P\begin{cases} Max\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \quad 2x_3 + x_4 + 3x_5 \le 4 \\ \quad 4x_1 + x_5 \le 3 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_5 \le 2 \\ \quad 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 1 \\ \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

التمرين 7. لنتأمل البرنامج الخطي التالي :

$$P\begin{cases} Max\ z = 2x_1 + x_2 \\ \quad x_1 + 2x_2 \le 14 \\ \quad 2x_1 - x_2 \le 10 \\ \quad x_1 - x_2 \le 3 \\ \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

هل الحل $x_1 = 20/3,\ x_2 = 11/3$ هو :

i. مقبول؟

ii. موافق لأساس؟

iii. أمثل؟

التمرين 8. استخدم خوارزمية سمبليكس الثنوية وخوارزمية سمبليكس الأولية-الثنوية لحل البرامج الخطية الواردة في التمرينات السابقة وفي الفصلين السابقين.

الجزء الثالث

مدخل إلى تعقيد المسائل

الفصل الثامن

مقدمة في تعقيد المسائل

مقدمة

يتعرض بحثنا الأخير من هذا الكتاب، الذي يعّرف ببعض الأدوات والمسائل التي تهتم بها بحوث العمليات، للمعنى الدقيق للخوارزميات الجيدة الأداء أو الفعالة efficient ومن ثم للتعريف بماهية مسائل الأمثلة التوافقية السهلة والصعبة، وذلك فيما يعرف "بنظرية تعقيد الخوارزميات، والمسائل" التي تطورت في الثلاثين عاماً الأخيرة من القرن العشرين.

من الضروري أن نستوعب في مجالات بحوث العمليات، أن كون خوارزمية ما منتهيةً، غيُر كافٍ من وجهة النظر العملياتية، إذ قد تتطلب هذه الخوارزمية "زمناً طويلاً" (وهذا ما سنرى معناه الدقيق لاحقاً في هذا الفصل) لا يسمح عملياً بالحصول على النتيجة. فعلى سبيل المثال نعلم أن هناك خوارزمية أو إجرائية منتهية تسمح، اعتباراً من حالة ما لا على التعيين في لعبة شطرنج، بتحديد طريقة اللعب التي ستؤدي بالتأكيد إلى ربح اللعبة إذا كان ذلك ممكناً طبعاً، ولكن لّما كانت الطريقة الوحيدة للقيام بذلك، تعتمد على الاستكشاف الكامل لكل التحركات الممكنة لِكِلا اللاعبَيْن، فإن هذه الإجرائية تفقد كل قيمتها العملية.

تعود فكرة تعريف الخوارزميات الفعالة التي نقدمها هنا إلى الرياضي J.Edmonds الذي طرحها عام 1965. بتعبير مبسط، نقول عن خوارزمية إنها "فعالة" أو "جيدة" إذا كان عدد العمليات التي يتطلبها حل مسألة ما محدوداً بتابع كثيري حدود polynomial لوسيط يتعلق بحجم المسألة.

و يجب الانتباه إلى أن هذا التعريف لجودة خوارزمية ما، يختلف عن المتعارف عند دراسة تعقيد الخوارزميات، إذ تعد خوارزمية، ذات تعقيد من مرتبة n^{100} اعتماداً على تعريفنا هذا، جيدةً ولو وجدت خوارزمية أخرى لحل المسألة نفسها بتعقيد من المرتبةn.

واعتماداً على تعريفنا هذا للخوارزميات الفعالة، نستنتج تعريفاً للمسائل"السهلة" بأنها المسائل التي يمكن حلها باستخدام خوارزميات فعالة. ولكن ما هي النقاط التي يمكن الاعتماد عليها للحكم على مسألة بأنها "صعبة"؟ قد نقول ببساطة إنها المسائل التي لا تملك خوارزميات حل فعّالة. ولكن قد يعود عدم معرفتنا لخوارزمية حل سهلة إلى عجزنا عن اكتشافها، -لا بالضرورة- لصعوبة المسألة.

ليس من السهل في حقيقة الأمر البرهان على عدم وجود خوارزمية كثيرية حدود لمسألة ما، وحتى نظرية تعقيد المسائل التي سنتعرض لها الآن، لا تعطي جواباً مؤكداً لهذا السؤال، ولكنها تفيدنا بأن هناك صفاً من مسائل الأمثلة التوافقية (التي تسمى NP-Complete و التي سنرمز إليها فيما يلي بـ NPC) ومن بينها مسألة "حقيبة الظهر[1]" ومسألة "البائع الجوال[2]" ومسائل عديدة أخرى، تتشابه فيما بينها فيما يخص وجود

[1] مسألة حقيبة الظهر: لدينا n غرضاً كل منها له وزن a_i وقيمة c_i تمثل الفائدة المرجوة منه. نريد تحديد مجموعة جزئية من هذه الأغراض بحيث يكون وزنها الكلي أصغر من عدد معطى B وبحيث تكون الفائدة الكلية للأغراض المنتقاة عظمى.

[2] مسألة البائع الجوال: يريد بائع جوال أو مندوب مبيعات أن يزور مجموعة من n مدينة بالقيام بدورة (حلقة) على هذه المدن ليعود إلى مدينة الانطلاق على أن يكون مروره في كل مدينة مرة واحدة فقط، وبحيث يقطع الطريق الأقصر.

خوارزميات كثيرية حدود لحلها. بمعنى آخر، إذا أمكن إيجاد خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة واحدة من هذه المسائل، فيعني ذلك وجود خوارزمية كثيرية حدود لكل منها. ولكن هناك حدس ينبئ بأن مسائل هذا الصف معقدة البنية وهي لذلك "صعبة" الحل بمعنى الصعوبة التي عرفناها الآن.

إن لإيجاد صف التكافؤ من المسائل NP-Complete تأثيراً كبيراً على كيفية التعامل مع مسائل الأمثلة التوافقية من وجهتَيْ النظر النظرية والعملية. فعلى سبيل المثال عندما يتعرض الباحث أو المهندس لمسألة جديدة فإنه يحاول في البداية إيجاد خوارزمية حل كثيرية حدود. وفي حالة عجزه عن ذلك، يحاول أن يبرهن أن هذه المسألة تنتمي إلى الصف NPC وعندها نستطيع أن نتوقع أن حل مثل هذه المسالة، في حالة الأحجام الكبيرة من المعطيات، يتطلب حتماً اللجوء إلى الطرق التقريبية.

تجب الإشارة إلى أننا في هذا البحث لن نتعرض لنظرية تعقيد الخوارزميات بالتفصيل، وأنّ هدفنا الرئيس هو عرض وشرح أهم نتائجها التي نحتاج إليها عادة عندما نتعرض لمشاكل الأمثلة التوافقية.

8. 1. ما هي الخوارزمية الفعالة ؟

لعل أول فكرة تخطر على بالنا لفحص أداء خوارزمية ما هي أن نقوم نجربها على مجموعة من الأمثِلة. ولكن كيف نتحقق أن أداء الخوارزمية في حل هذه الأمثِلة يمثل أداءها في الحالة العامة؟ ألن يكون هناك حالات خاصة ينحدر فيها أداء هذه الخوارزمية؟ وما تأثير ازدياد حجم المثال في أدائها؟

لقد أظهرت التجربة صعوبة، أو حتى استحالة، الحصول على عينة ممثلة لجميع المسائل التي يمكن أن تحلها خوارزمية ما. إذ يكفي مثلاً أن نعلم أن بعض الخوارزميات

لها أداء أفضل بكثير على عينات الأرقام المسحوبة عشوائياً، من أدائها على الأرقام التي قد تمثل مسألة واقعية والتي تكون عادة مرتبطة بعضاً ببعض بعلاقة ما.

و لهذا السبب توقفت محاولات العلماء للبحث عن مقياس لأداء الخوارزميات اعتباراً مما قد نسميه "الأداء الوسطي"، وتوجهوا إلى دراسة الأداء في أسوأ الحالات، وذلك بـ "ربط كل خوارزمية بحد أعلى لعدد العمليات اللازمة لحل مسألة ما بدلالة حجم معطيات هذه المسألة". وقبل أن نأتي على تفصيل هذه الفكرة، من الجدير بالملاحظة أن سلوك الخوارزميات أو أداءها في الحالات الواقعية، لا يبتعد كثيراً عن أدائها في أسوأ الحالات، وهذا ما يجعل من مقياسنا هذا مناسباً برغم وجود استثناء واحد متمثل في خوارزمية السمبلكس ذات الأداء النظري الأسي، التي تعطي حلولاً مقبولة في أزمنة أقصر من ذلك بكثير.

لنأخذ الآن مثالاً لإيضاح فكرة الخوارزمية الفعالة:

إن لمسألة البحث عن أصغر عدد في مجموعة من N عدداً خوارزميةً بديهية، تتمثل في مقارنة القيمة الأولى بالثانية، ثم مقارنة القيمة الصغرى بالقيمة الثالثة وهكذا دواليك حتى تنتهي من استعراض الـ N قيمة، مع القيام بـ N-1 مقارنة بينها ويمكن البرهان على أن هذه الخوارزمية مثلى لأنه لا يمكننا الحصول على القيمة الصغرى دون القيام بـ N-1 مقارنة بين الأعداد. لنأخذ الآن المسألة الثانية المتمثلة في مسألة البائع الجوال الذي يبحث عن أقصر حلقة ممكنة ضمن شبكة من الطرق تربط بين M مدينة يريد أن يزورها. هناك خوارزمية بسيطة تتمثل في إنشاء قائمة من N=(M-1)! دارة ممكنة، وتربط كل دارة بطولها الكلي، ثم نستخدم خوارزمية البحث عن أصغر قيمة للحصول على حل للمسألة الأصلية.

ولكن ما الذي يجعلنا نقول إن الخوارزمية الأولى فعالة والثانية غير فعالة؟ إن ذلك يبدو واضحاً إذا ربطنا عدد العمليات اللازمة لحل المسألة بعدد المعطيات البدائية. لنفترض أننا نستخدم حاسوباً ذا سرعة 10^9عملية/ثا ولنقارن أزمنة الحل لكلتا المسألتين (الجدول 8. 1).

M = عدد المدن	10	20	30	40	50	60
M^2 = عدد المعطيات	100	400	900	1600	2500	3600
زمن الحصول على أصغر عدد من M^2 (بالمكرو ثانية)	0.1	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6
زمن الحصول على أصغر عدد من (M-1)! (بالسنوات)	10^{-8}	1	10^{16}	10^{30}	10^{45}	10^{52}

أزمنة البحث عن أصغر عدد بين M^2 عدد وبين (M-1)! عدد

جدول 8. 1

يمكن أن نعيد هذا الاختلاف في الأداء بين المسألتين إلى طبيعة مسألة البائع الجوال ذات البنيه التوافقية التي اعتباراً من M(M-1) عدد يمثل كل منهما المسافة بين مدينتين تولد مجموعة هائلة من الحلول الممكنة ((M-1)!).

لِنُعط الآن تعريفاً لماهية الخوارزمية كي نستطيع فيما بعد الحديث على وجهٍ أدق عن الخوارزمية الفعالة.

تعريف (8. 1) الخوارزمية

ليكن لدينا المسألة P التي نريد حلها. الخوارزمية هي إجرائية يمكن تحليلها إلى مجموعة من العمليات الأساسية، التي تحول سلسلة محارف، تمثل معطيات مثال معطى من المسألة P، إلى مجموعة محارف تمثل حل هذا المثال.

إن الغرض الرياضي الذي يمثل الخوارزمية هو في الواقع آلة مجردة abstract (على سبيل المثال آلة تورينغ) أو قد نراه كبرنامج حاسوبي مكتوب بأية لغة كانت. و نحن لا نتوقع من البرنامج أو من الآلة أن تعطينا حل المسألة العامة، باستخدام وسائط ومتحولات كما هو الحال في المسائل الرياضية، ولكن ما إنْ تُحدِّد معطيات المسألة لحالة ما، حتى نتوقع أن تكون الخوارزمية قادرة على إعطائنا الحل المقابل لهذه المعطيات.

نقيس فعالية خوارزمية بمقارنة زمن تنفيذها، المتمثل بعدد العمليات البسيطة التي ستقوم بها، مع حجم المثال الذي تعالجه، الذي يُعبَّر عنه بعدد المحارف الضرورية لتوفير معطياته. وهنا تبرز أسئلة ثلاثة:

- ما هي العمليات البسيطة التي سنأخذها بعين الاعتبار؟
- ما هو الترميز المتبع لقياس حجم المثال؟
- ما هي التوابع التي تربط بين حجم المثال وعدد العمليات اللازمة والتي تسمح لنا بالحكم على الخوارزمية بأنها فعالة؟

قبل الإجابة عن هذه الأسئلة، سنعطي تعريفاً للتابع كثيري الحدود وندرس بعض أهم خصائصه.

تعريف 8. 2 التابع كثيري الحدود

ليكن لدينا تابعان $f,g : N \to N$ ، نقول إن f محدود بـ g أو O(g) إذا كان هناك ثابت c بحيث:

$$|f(n)| \le c\,|g(n)|\ ,\forall\ n\in N$$

نقول إن تابعاً ما هو كثيري حدود polynomial إذا كان محدوداً بكثير حدود لـ n أو إذا كان هناك ثابتان c وk بحيث :

$$|f(n)| \le c\,n^{\,k}\ ,\ \forall n\in N$$

نقول عن تابع كثيري حدود f إنه من المرتبة p إذا كان p أصغر عدد طبيعي k يحقق المتراجحة السابقة.

لنذكّر هنا ببعض خصائص كثيرات الحدود:

- إن صف كثيرات الحدود مغلق لِعملية تركيب التوابع، فإذا كان f وg كثيري حدود من المرتبة p وq فإن f(g(n)) هو كثير حدود من المرتبة pq.
- إن كثير الحدود يتزايد بسرعة أقل من أي تابع أسي. أي في حال a>1. ولأيٍّ ثابت b:

$$\exists n_0 : \forall n \ge n_0\ \ n^b < a^n$$

إن هذه الخاصية تعطي كل الأهمية لكثيرات الحدود. فإذا افترضنا أننا نقارن خوارزمية تحتاج لإجراء n^3 عملية لحل مسألة ما، بخوارزمية أخرى تحتاج لـ 2^n عملية؛ وإذا قارنا حجم المسائل التي يمكن أن تحلّها كل خوارزمية في زمن ثابت معطى، نرى الفرق في الأداء. وبتعبير آخر إذا استطعنا زيادة سرعة الحاسوب الذي يقوم بتطبيق هذه الخوارزميات 1000 مرّة مثلاً، فإننا نستطيع زيادة حجم المسألة التي تعالجها

الخوارزميةُ الأولى 10 مرات، على حين لا نستطيع زيادتها باستخدام الخوارزمية الثانية إلا بإضافة عشرة إلى حجم المعطيات.

من هذه المقارنة نستطيع أن نستنتج ما الذي سنسميه بالخوارزمية الفعالة (التعريف 8. 3).

تعريف 8. 3 الخوارزمية الفعالة

نقول عن خوارزمية أنها كثيرية حدود polynomial إذا كان عدد العمليات البسيطة التي يجب إجراؤها لحل مسألة ذات حجم n تابعا كثيري حدود لـ n وفي هذه الحالة نقول إن الخوارزمية "فعالة" efficient إذا وفقط إذا كانت كثيرية حدود.

إن هذا التعريف يجيب عن التساؤل الثالث، ولإتمامه لا بد من الإجابة عن السؤالين الآخرين.

لحساب عدد العمليات الأساسية لحل مسألة ما، يكفي أن نأخذ بعين الاعتبار العمليات الحسابية الأربع والعمليات المنطقية و عملية المقارنة، ولا داعي لتفصيل هذه العمليات إلى عمليات أبسط يقوم بها الحاسوب (تعليمات لغة المجمع) أو عمليات آلة تورينغ، لأنه بإمكاننا البرهان أن عدد العمليات الحسابية هو تابع كثيري حدود لعمليات حسابية أبسط ولذلك لا داعي للنزول إلى المستوى الأدنى. من ناحية أخرى، لا يمكن الاكتفاء بحساب عدد التعليمات التي يمكن كتابتها باستخدام لغة برمجة عالية المستوى، لأنه كلما ارتفع مستوى اللغة صعب إمكان استنتاج عدد العمليات الفعلية التي أجريت اعتبارا من التعليمات. ولعل من أهم أسباب هذه الصعوبات البرمجة العودية.

نقول عن ترميز للمعطيات إنـه "**معقـول**" reasonable إذا كـان حجـم الذاكـرة الضـروري لتخزين عدد طبيعي N مساوياً لـ $\lceil \log(N+1) \rceil$ حيث $\lceil x \rceil$ هو أصغر عدد طبيعي أكـبر أو يساوي x. و ذلك مهما كان أساس اللوغاريتم الذي عادة ما يؤخذ مسـاوياً 2 كـالتمثيل الحاسوبي أو 10 كالتمثيل المعتاد. إننا لا نعطي أهمية لأساس اللوغاريتم لأن العلاقة بـين مختلف التمثيلات هي جداءٌ في ثابت، وهي لا تغير من طبيعة التمثيل. أما التمثيـل غـير المعقول للمعطيات فهو مثلاً التمثيل الأحادي الـذي يتطلـب، لتخزيـن العـدد N، ذاكـرةً حجمها N.

إذن نقول عن خوارزمية إنها فعالة إذا كان عدد العمليات البسيطة، اللازمة لحل مسـألة ذات حجم معطيات n باستخدام ترميز معقول، تابعاً كثيري حدود لـ n.

إن المثال 8. 1 هو مثالٌ بسيطٌ يوضح المفاهيم السابقة.

مثال 8. 1 جمع عددين طبيعيين A وB

لتمثيل معطيات هذه المسألة، نستخدم فقط الأرقام من 0..9 والفاصلة المنقوطة للفصل بـين العددين، ونفترض أن كل رمز يشغل خانة ذاكرة وحيدة، وبهذا تكون الذاكرة المحجوزة هي :

$$n=[\log_{10}(A+1)] + [\log_{10}(B+1)]+1$$

بإمكاننا إجراء عملية الجمع بطريقتين مختلفتين : الأولى هي الجمع العـادي لكـل خانـة إلى مقابلتـها، أو الجمـع بطريقـة العـد علـى الأصـابع؛ فلنقـارن بينـهما بحسـاب عـدد العمليات اللازمة لكل طريقة بدلالة n.

- طريقة الجمع العادية: لِكل خانة، هناك عمليةُ جمع أو اثنتان إذا كان هنالك بـاقٍ، إضافةً إلى المقارنة بـ 10، وبذلـك يكـون عـدد العمليـات الكلـي محـدوداً بـ n^3. أي إن الخوارزمية كثيرية حدود.

- طريقة العد على الأصابع: نستخدم تمثيل المعطيات السابق نفسه ونجمعها وفق الخوارزمية التالية:

```
while A>0 do
A‹ A-1; B‹ B+1
```

إن عدد العمليات اللازم لإجراء الجمع مساو لـ A وفي أسوأ الأحوال إذا كان B=0 $A=10^k$، يبلغ عدد العمليات 10^k، على حين حجم المسألة هو k+3؛ إذن فالخوارزمية ليست كثيرية حدود.

باستخدام التمثيل الأحادي للأعداد يصبح حجم الذاكرة الضروري لتخزين الأعداد مساوياً لـ n=A+B+1 وعندها تصبح خوارزمية العد على الأصابع كثيرية حدود بدلالة n ولكن التمثيل الأحادي الذي اخترناه غير مقبول!

بعد أن توصلنا الآن إلى التمييز بين الأشكال المختلفة لتخزين المعطيات، و اعتمادنا لأحد التمثيلات المعقولة، ونظراً لعدم وجود مشاكل في التخزين، مع توفر ذواكر الحاسوب الضخمة و الزهيدة السعر، فإننا سنقصر اهتمامنا هنا على التعقيد الزمني للخوارزميات. و نميز الآن بين الخوارزميات الكثيرية الحدود و الخوارزميات الأخرى التي نسميها أحياناً بالخوارزميات الأسية (والتي تحوي توابع أخرى مثل $n^{\log n}$ لا يمكن حدها بكثير حدود). ولهذا التمييز النظري بين الخوارزميات صفة عملية، إذ تثبت التجربة أن الخوارزميات الكثيرية الحدود هي فعلاً أسرع و أفضل أداء (أكثر فعالية) من الخوارزميات الأسية. بالطبع بإمكاننا الاعتراض على ذلك إذا قارنا خوارزمية من مرتبة $O(n^{1000})$ بخوارزمية من مرتبة $O(1.1^n)$ إذ علينا الوصول إلى قيمة n غاية في الكبر، لتكون الخوارزمية الأولى أفضل من الخوارزمية الثانية. ولكن في الحالة العامة لا تتعدى درجة كثير الحدود 5 أو 6 وهي عادة من الدرجة الثانية أو الثالثة لا أكثر، ولهذا السبب نستطيع القول إن الخوارزميات الكثيرية الحدود فعالة، على حين الخوارزميات

الأسية تصل سريعاً إلى حدود لا يمكن عندها استخدامها لطول الزمن الـذي يتطلبـه حـل المسألة.

8. 2. صف المسائل NP

تعريف 8. 4

نقول عن مسألة إنها تنتمي إلى الصف P إذا كان هناك خوارزمية كثيرية حـدود تسـمح بحلها. ونقول إن مسائل هذا الصف هي "**مسائل سهلة**".

إن ما يهمنا الآن هو إعطاء معنى محدد "للمسألة الصعبة" أو بدقة أكـبر، للمسـائل الـتي نعتقد أنها صعبة اعتماداً على مبررات عديدة. ونحـن نعـني طبعـاً بالصعوبـة هنـا أنـه لا يمكن إيجاد خوارزميات كثيرية حدود لحل هذا النوع من المسائل.

ونقتصر هنا على مجموعة جزئية من المسائل الصعبة، المتمثلة بتلك التي إذا أوجدنا لهـا حلاً فإن تمثيل هذا الحل يكون كثيري حدود بدلالة المعطيات البدائية.

فعلى سبيل المثال، قد يطلب منا تحديد كل الطرق التي تصل بين عقدتـين v و d داخـل بيان مثقل، وذات طول أصغر من (1+ε) مرة من طول أقصر طريق بـين هـاتين العقدتـين. وتكمن صعوبة هذه المسألة في عجزنا عن إعـداد قائمـة بـهذه الطـرق خـلال زمـن كثـيري حدود، إذ من الممكن أن يكون طول القائمة التي تمثل الحل، غير كثـيري حـدود بدلالـة معطيات البيان البدائية.

كمثال معاكس آخر، نذكر المسألة المسماة بمسألة "**مجموعة العقـد المستقرة**" أو المسـتقلة Independent Set المتمثلة بإعطاء قائمة بكل المجموعات الجزئية من مجموعة عقد بيـان

G[V,E] والتي تحقق الشرطين: عدد عناصر كل مجموعة يساوي عددا ثابتا k، ولكل مجموعة من هذه المجموعات، كل وصلة من وصلات البيان تمس على الأكثر عقدة من المجموعة (أي إن هذه العقد غير متجاورة بالنظر إلى وصلات البيان). وهنا أيضا تكمن الصعوبة في حجم الحل المطلوب حسابه، وعدم كونه كثيري حدود بدلالة المعطيات.

لن نتعرض هنا إذن لهذا النوع من المسائل، وسنقتصر على المسائل ذات الحلول التي تتطلب ذاكرة تخزين كثيرية حدود، مثل تحديد طريق واحد بين عقدتين v و d ذي طول محدد، أو إعطاء مجموعة مستقرة واحدة عدد عناصرها k. حتى إننا سنوجه اهتمامنا إلى نوع خاص من هذه المسائل وهي "مسائل المعرفة" (أو التعرف) Recognition Problems التي يكون حلها أحد الجوابين نعم/لا أو صح/خطأ.

مثال 8. 2 مسألة التحقق المنطقي

ليكن لدينا المجموعة $x = \{x_0, ..., x_n\}$ من المتحولات المنطقية وصيغة منطقية بدلالة هذه المتحولات من الشكل $E = c_1 \wedge c_2 \wedge .. \wedge c_m$

حيث تكون كل جملة منطقية: c_i من الشكل $c_i = u_{j_1} \vee u_{j_2} \vee .. \vee u_{j_{k(i)}}$ وكل u_i عبارة عن متحول من x أو متممه.

تتمثل مسألة التحقق المنطقي بالإجابة عن التساؤل حول وجود قيم للمتحولات x بحيث تكون E محققة.

فعلى سبيل المثال إذا أخذنا $E = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge x_3$

فالجواب إيجابي، وذلك لأن القيم التالية للمتحولات تحقق E:

$$x_1 = 0 \text{ or } 1 \text{ , } x_2 = 1 \text{ , } x_3 = 1$$

أما في حالة الصيغة $E = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge x_3 \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ فالجواب سلبي.

مثال 8. 3. مسألة الـk عقدة مستقرة

ليكن لدينا البيان غير الموجه G [V,E] وعدد طبيعي k. ونريد أن نحدد إذا كان G يحوي مجموعة من k عقدة من V بحيث تمس كل وصلة من E عقدة على الأكثر من هذه المجموعة، أو ما سميناه سابقا بالعقد المستقرة.

مثال 8. 4. مسألة الحلقة الهاملتية

نتساءل حول احتواء بيان غير موجه على حلقة بسيطة تمر من كل العقد.

تقتصر حلول مسائل المعرفة على الإجابة بنعم أو لا، دون الحاجة إلى إيجاد القيم التي تحقق الجواب، بعكس مسائل الوجود التي تتطلب ذلك. في حالة المثال (8. 2) لا حاجة إلى عرض قيم المجموعة x التي تحقق الصيغة E في حالة الرد بالإيجاب. كما لا حاجة إلى عرض المجموعة الجزئية من عقد البيان التي تحقق سؤال المثال (8. 3)، ولا نريد تحديد الحلقة الهاملتية في المثال (8. 4). لهذا السبب، لا تعتبر مسائل المعرفة جزءا من مسائل الأمثلة التوافقية التي عادة ما تتطلب عرض حل s من مجموعة الحلول الممكنة S التي تحقق القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لتابع ما. ولكن يمكن ربط كل مسألة أمثلة توافقية بمسألة معرفة مستنتجة منها كما في التعريف (8. 5).

تعريف 8. 5.

ليكن لدينا مسالة الأمثلة التوافقية التالية :

البحث عن حل $\hat{s} \in S$ بحيث $f(\hat{s}) = \underset{s \in S}{Min}[f(s)]$ (أو $f(\hat{s}) = \underset{s \in S}{Max}[f(s)]$)

و ليكن لدينا العدد a، نعرف مشكلة المعرفة المرتبطة بمشكلة الأمثلة كالتالي:

هل يوجد $\hat{s} \in S$ بحيث $f(\hat{s}) \le a$ (أو $f(\hat{s}) \ge a$)

مثال 8. 5

إذا كان لدينا n مدينة والمسافات بينها، وعدد a فإن مسألة المعرفة بوجود حلقة حول هذه المدن ذات كلفة أصغر أو تساوي a، هي مسألة المعرفة المقابلة لمسألة البائع الجوال.

مثال 8. 6

ليكن لدينا البيان غير الموجه G[V,E] وعدد طبيعي $k \le |V|$ فإن التساؤل حول وجود مجموعة عقد مستقرة عددها أكبر أو يساوي k يمثل مسألة المعرفة المرتبطة بمسألة البحث عن مجموعة العقد المستقرة العظمى.

مثال 8. 7

ليكن لدينا البرنامج الخطي:

$$\begin{cases} Ax \le b, x_i \in N \\ cx = z(Min) \end{cases}$$

فإذا عرفنا $A' = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ و $b' = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ كان التساؤل حول وجود متجهة x ذات مركبات صحيحة يمثل مسألة المعرفة المقابلة للبرنامج الخطي بالأعداد الصحيحة.

يتمثل الدافع وراء الاهتمام بمسائل المعرفة في النتيجة "البديهية" المنصوص عليها في المبرهنة (8. 1).

مبرهنة 8. 1

إذا كانت مسألة المعرفة المرتبطة بمسألة أمثلة توافقية ما صعبة، فإن مسألة الأمثلة هي نفسها صعبة.

البرهان

لنفترض أن بحوزتنا خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة الأمثلة. تسمح هذه الخوارزمية نفسها بحل مسألة المعرفة المرافقة لها، إذ يكفي مقارنة الحل الأمثل الناتج بالقيمة a المعرفة من أجلها مسألة المعرفة:

تفيد هذه المبرهنة أن أية مسألة أمثلة توافقية، هي على الأقل مماثلة في الصعوبة لمسألة المعرفة المرتبطة بها. وفي كثير من الأحيان يمكننا البرهان أن مسألة المعرفة ليست في الحقيقة أسهل من مسألة الأمثلة الموافقة لها. وهذه هي الحال مثلا في مسألة البائع الجوال أو المجموعة المستقرة داخل بيان ما (انظر التمارين). ولهذا، نرى اعتمادا على المبرهنة السابقة أنه يكفي لدراسة صعوبة المسائل أن ندرس تعقيد مسائل المعرفة.

سنقوم الآن بالتقديم لصف جديد من المسائل نسميه NP وهذا الرمز لا يعني أبدا Non Polynomial ولكن Non Determinist Polynomial كما سيأتي شرحه الآن :

يمكن إعطاء تعريف أولي للصف NP باستخدام مفهوم "المراقب". لنفترض أننا نعرف أن الرد على مسألة معرفة ما هو بالإيجاب. فإذا كان بإمكاننا إقناع شخص آخر بهذا الجواب خلال زمن كثيري جدود كانت المسألة منتمية إلى الصف NP. ويجب التأكيد هنا أن هذا المبدأ يقتصر على إثبات صحة الجواب الإيجابي على مسألة المعرفة ولو لم يكن بإمكاننا خلال زمن كثيري حدود إيجاد الحل s، من مجموعة حلول المسألة، الذي من أجله يكون الجواب على مسألة المعرفة بالإيجاب. كل ما نطلبه هو – في حالة

حصولنا بطريقة ما على الحل s– أن يبرهن على أنه يحقق مسألة المعرفة في زمن كثيري حدود.

مثال 8. 8

تنتمي كل الأمثلة التي مررنا عليها قبل قليل إلى هذا الصف من المسائل:

1) الحلقة الهاملتية : يمكن إقناع المراقب بوجود حلقة هاملتية داخل بيان ما G بعرض مثل هذه الحلقة داخله.

2) البائع الجوال : إذا زودنا بدورة ما حول المدن يمكننا خلال زمن كثيري حدود حساب كلفة هذه الدورة ومقارنتها بالعدد a من مسألة المعرفة.

3) مسألة المجموعة المستقرة داخل بيان : من أجل $X' \subset X$ نستطيع في زمن كثيري حدود التحقق من أن $|X'| \leq k$ ونتحقق أهنالك وصلات داخل البيان G ينتمي طرفاها إلى المجموعة X'؟.

4) البرمجة الخطية : إذا أعطينا المتجهة $(x_1, x_2, ..., x_n) \in N^n$ نستطيع التحقق خلال زمن كثيري حدود أن $A'x \leq b'$ أو لا.

يعطي مبدأ المراقب تعريفا فطريا للصف NP أما من الوجهة النظرية فتضم مسائل هذا الصف مجموعة المسائل التي يمكن حلها باستخدام آلة تورينغ اللاحتمية Non-Determinist Turing Machine.

إن مفهوم الخوارزميات غير الحتمية (التي تبرمج على آلة تورينغ اللاحتمية المجردة) هو أيضا مفهوم مجرد، ولا يمكن الاستفادة منه وتطبيقه على الحاسوب، ولكن له أهمية نظرية كبيرة. ويسمح هذا المفهوم في المقام الأول بتعريف صف المسائل NP بدقة.

تستخدم الخوارزميات اللاحتمية تعليمة "الاختيار" Choice التي تطبق على مجموعة منتهية، وتختار عنصرا منها دون أن تحدد أبدا كيف يختار هذا العنصر. ويكون

الجواب على مسألة تعرف ما مرتبطا بالعنصر الذي يختار، في كل تستدعى يتم فيها التعليمة Choice. تتميز الخوارزميات اللاحتمية بقدرتها على إجراء الاختيارات المناسبة التي تعطي في النهاية الجواب الإيجابي إذا كان يمكن تحقيقه.

مثال 8. 9. ترتيب n عددا

نصوغ هذه المسألة في إطار مسائل المعرفة كما يلي :

لنفترض أن لدينا n عددا : $a_1,...,a_n$ ونتساءل إذا كان هناك أحد التباديل المعرفة على $\{1,....,n\}$ وليكن p بحيث : $a_{P(1)} \le a_{p(2)} \le ... \le a_{p(n)}$

طبعا نحن متوثقون من وجود p ولكن لنفترض أن الطريقة الوحيدة للإجابة عن السؤال هي بحساب التبديل p.

وللقيام بذلك نعطي الخوارزمية التالية التي يتكون دخلها من قائمة بالأعداد أما خرجها فهو التبديل p الذي يسمح بترتيب الأعداد ترتيبا متصاعدا.

<u>Non Deterministic Sort</u> $(a_1,...,a_n)$

$p(1) \leftarrow choice(\{1,..,n\}), S \leftarrow \{P(1)\}$

$k \leftarrow 2$ to n do

$p(k) \leftarrow choice(\{1,...,n\} \setminus S)$

$S \leftarrow SU\{p(k)\}$

if $a_{p(k-1)} > a_{p(k)}$ then

    $answer \leftarrow False$

else

    $answer \leftarrow True$

نظرا إلى تحققنا من وجود الخيار الجيد الذي يسمح بترتيب العناصر فإن الخوارزمية تنتهي دوما مع الجواب True. ونسترعي الانتباه هنا إلى أن تعقيد هذه الخوارزمية من المرتبة O(n) على حين لا يمكن الحصول على خوارزمية ترتيب حتمية بأقل من O(n log n) ولكن هذا ممكن هنا لأننا نفترض أن الآلة اللاحتمية قادرة دوما على اتخاذ القرار الصحيح للوصول إلى الإجابة "نعم".

مثال 8. 10 (مسألة التحقق المنطقي)

يمكن كتابة خوارزمية لاحتمية للإجابة على هذه المسألة على الشكل التالي :

```
Non Deterministic SAT (E)
For k ← 1 to n do
  x_k ← choice({0,1})
if E(x_1,...,x_n) = 1 then
  answer ← true
else answer ← False
```

وهكذا نرى أن الخوارزميات اللاحتمية تتطلب قدرا من الحدس أو السحر بحيث يتخذ اتخاذ القرار في كل استدعاء لـ "choice" بما يتناسب مع القرارات السابقة، ومع القرارات اللاحقة، للوصول إلى الجواب. وهذا طبعا ما يجعل هذه الخوارزميات غير قابلة للتحقيق ولكنها تسمح نظريا بتعريف صف المسائل NP.

تعريف 8. 6

تنتمي مسألة ما إلى الصف NP إذا كان بالإمكان حلها في زمن كثيري حدود باستخدام خوارزمية لاحتمية.

بالطبع تعتبر الخوارزميات "الاعتيادية" حالة خاصة من الخوارزميات اللاحتمية. لذلك فإن أية مسألة معرفة يمكن الإجابة عليها باستخدام خوارزمية كثيرية حدود تنتمي إلى الصف NP أي إن الصف P محتوى في الصفNP. ولكن الصف NP يحوي مسائل أخرى (منها مسألة البائع الجوال ومسألة المجموعة المستقرة ومسألة حقيبة الظهر وغيرها) لا نعرف لها خوارزميات حل كثيرية حدود. ولكن حتى الآن لم يبرهن على أن $P \neq NP$ و ينظر إلى هذه اللامساواة على أنها حدس Conjecture يعتقد المختصون صحته بقوة.

ملاحظة هامة

لا يوجد تناظر في مسائل المعرفة بين الجواب الإيجابي (نعم) والجواب السلبي (لا) إذ قد لا نكون قادرين في حالة مسألة ما من الصف NP على الجزم في زمن كثيري حدود أن الجواب سلبي.

- فعلى سبيل المثال لا يمكننا الحصول على خوارزمية كثيرية حدود تثبت أن مسألة التحقق المنطقي لاحل لها.
- ولا يمكننا إثبات عدم وجود حلقة ذات كلفة أقل من a في حالة مسألة البائع الجوال.
- أو عدم وجود مجموعة مستقرة عددها k داخل G.
- أو أن البرنامج الخطي $Ax \leq b$ لا يقبل حلولا بالأعداد الطبيعية.

بطريقة أخرى لا يمكننا البرهان على أن مسائل المعرفة التالية لا تنتمي الى الصف NP و لكننا نسلم بذلك:

- التحقق المنطقي السلبي : هل صحيح أنه لا يوجد قيم للمتحولات المنطقية بحيث تتحقق العلاقة المنطقية E؟
- مسألة البائع الجوال السلبية : هل صحيح أن البيان G لا يقبل مجموعة مستقرة من k عنصر أو أكثر؟
- مسألة البرنامج الخطي السلبية : هل صحيح أن البرنامج $Ax \le b$ لا يقبل حلا ذا قيم طبيعية؟

يمكن فهم عدم التناظر هذا بسهولة من خلال مبدأ "المراقب". فإذا كان من السهل إقناع أحدهم بالجواب الإيجابي بعرض الحل (من مجموعة الحلول) الذي يحقق هذا الجواب، فليس أمامه من أجل الجواب السلبي إلا استعراض جميع هذه الحلول وإثبات أنها لاتحقق مسألة المعرفة المعنية.

سنعطي الآن مثالا على مسألة معرفة لم نتوصل "بعد" للبرهان على أنها أو أن مكملتها (المسألة السلبية) تنتمي إلى الصف NP وتسمى هذه المسألة الـ K-مجموعة جزئية :

ليكن لدينا مجموعة منتهية E حيث $|E| = n$ وتابع $c : E \to N$ وعدد طبيعي $k \le 2^n$ وعددا طبيعيا آخر لا على التعيين B.

ومن أجل أية مجموعة جزئية F من E نعرف $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$

تتطلب المسألة أن نعرف : أهناك على الأقل k مجموعة جزئية E_i بحيث $c(E_i) \le B$؟ ونحن لا نعرف وجود خوارزمية كثيرية حدود تسمح بالتحقق من أن الجواب هو "نعم".

فالطريقة التي نمتلكها تتمثل بحساب قيم $c(E_i)$ لـ k مجموعة جزئية E على الأقل.

ولهذا فنحن غير متحققين حاليا أن هذه المسألة لا تنتمي الى الصف NP ولكن ما نحن متحققون منه هو أننا لا نعرف أنها تنتمي إليه.

لهذا السبب نعتقد أن الصف NP يحوي مجموعة من المسائل أكثر صعوبة من الصف P هذا إذا كانت المسلمة $P \neq NP$ صحيحة. تكون هذه المجموعة من المسائل الصعبة صف تكافؤ نسميه NP-Complete و نتعرف به الآن.

8. 3. صف المسائل NP-Complete (NPC)

يعتقد معظم الرياضيين العاملين في دراسة تعقيد المسائل، أن المجموعة التي تكون الفرق بين المسائل NP والمسائل P هي مجموعة غير فارغة ($NP \setminus P \neq \varnothing$). تكون هذه المجموعة صف المسائل التي ندعوها المسائل NP-Complete ونسعى في فقرتنا هذه لتحديد معالم هذا الصف من المسائل.

إن الصفة الأساسية التي يتصف بها هذا الصف هي " لا يمكننا، في حال معظم مسائل هذا الصف، الرد بالنفي أو الإيجاب على السؤال التالي : هل يوجد خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة تنتمي إلى هذا النوع من المسائل؟". كل ما يمكننا قوله إنه لا يوجد حتى الآن خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة من النمط NPC. كي نحدد معالم صف المسائل NPC سنوجد علاقة تكافؤ تعرف صفوف تكافؤ على مسائل المعرفة، من وجهة نظر وجود خوارزميات كثيرية حدود لحلها أو عدم وجودها، بالمعنى التالي : إذا أمكن حل واحدة من هذه المسائل بواسطة خوارزمية كثيرية حدود فبالإمكان حل كل مسائل الصف NPC بواسطة خوارزميات كثيرية حدود. كي نعرف علاقة التكافؤ سنبدأ بتعريف مفهوم "الاختزال الكثيري الحدود"، فهذا المفهوم هو مفتاح تعريف علاقة التكافؤ.

تعريف 8. 7

لتكن P_1 و P_2 مسألتي معرفة. نقول إن "P_1 تختزل (في زمن كثيري حدود) إلى P_2" إذا وجدت خوارزمية لأجل P_1 تستدعي – كبرنامج جزئي – خوارزمية لحل P_2 و كانت خوارزمية حل P_1 كثيرية حدود إذا اعتبرنا خوارزمية حل P_2 عملية بسيطة في خوارزمية حل P_1.

مثال 8. 11

لنأخذ مسألة الحلقة الهاملتية في البيان $G = [E, V]$. لنسند إلى G البيان $R = [E, \hat{V}, c]$ حيث $[E, \hat{V}]$ هو البيان التام و :

$$c(v) = \begin{cases} 0 & si \quad v \in V \\ 1 & si \quad v \in \hat{V} \setminus V \end{cases}$$

يقبل G، إذن، حلقة هاملتية إذا وفقط إذا وجد في R حلقة ذات طول معدوم. بهذه الطريقة، نعرف اختزالا كثيري حدود لمسألة الحلقة الهاملتية، إلى مسألة المعرفة المرتبطة بمسألة البائع الجوال.

مبرهنة 8. 2

إذا أمكن اختزال المسألة (P) بزمن كثيري حدود إلى المسألة (P') وإذا أمكن حل (P') بخوارزمية كثيرية حدود، فإنه يمكن حل (P) بخوارزمية كثيرية حدود.

البرهان

نتيجة مباشرة للتعريف 8. 7.

ملاحظة : إن علاقة الاختزال كثيري الحدود هي علاقة متعدية. أي إنه إذا أمكن اختزال (P) بزمن كثيري حدود إلى (P_1) وأمكن اختزال (P_1) بزمن كثيري حدود إلى (P_2) فيمكن اختزال (P) بزمن كثيري حدود إلى (P_2). هذه الخاصة، مثلها مثل المبرهنة (8. 2)، هي نتيجة مباشرة لحقيقة أن صف كثيرات الحدود هو صف مغلق.

إن الاختزال الكثيري الحدود الوارد في المثال (8. 11)، هو اختزال بسيط عمليا. لقد أسندنا إلى المسألة P_1 (مسألة الحلقة الهاملتية)، بزمن كثيري حدود، المسألة P_2 (حالة خاصة من مسألة البائع الجوال) بطريقة يكون فيها الجواب على P_1 "صح" إذا وفقط إذا كان الجواب على P_2 هو "صح". ندعو هذه العملية بـ "التحويل الكثيري الحدود" وهو حالة خاصة من الاختزال كثيري الحدود ويمكن تعريفه كما يلي :

تعريف 8. 8 تعريف التحويل الكثيري الحدود

نقول عن مسألة (P) إنها تقبل تحويلا كثيري حدود إلى المسألة (P') إذا وجد تحويل h(x) لمعطيات المسألة (P) وتحويل g(y) لنتائج المسألة (P') حيث h و g دالتان كثيرتا الحدود وبحيث يمكن حل المسألة (P) بحل المسألة (P'):

$$\begin{array}{ccc} P & \rightarrow & P' \\ x & \xrightarrow{h(x)} & x' \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \xrightarrow{g(y)} & y' \end{array}$$

سنستخدم التحويل كثيري الحدود تكرارا فيما يلي من هذا الفصل.

تعريف 8. 9

نقول عن مسألة معرفة إنها مسألة "NPC" إذا أمكن اختزال كل مسألة من مسائل الصف NP إليها بزمن كثيري حدود.

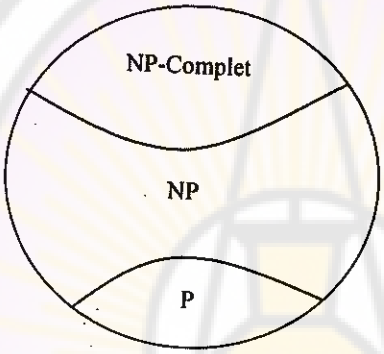
إن خاصية "NPC" هي خاصية شديدة القوة فهي تعني، باعتبار كل ما تقدم، أنه إذا كان لدينا خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة "NPC" فبالإمكان إيجاد خوارزمية كثيرية حدود لحل كل مسألة من مسائل الصف NP. هذا يعني أنه بالإمكان الرد بالإيجاب على الحدس P = NP. هذه الخاصية قوية إلى درجة أنه من غير الواضح أيوجد هناك مسائل NPC؟. يعود الفضل إلى كوك Cook الذي، بتأكيده وجود مسائل NPC، وضع أسس نظرية تعقيد المسائل.

لقد برهن كوك أن مسألة التحقق هي مسألة NPC. يتجاوز برهان هذه المبرهنة الإطار الذي وضعناه لبحثنا. لذا لن نقدمه هنا وسنكتفي بعرض فكرته. في الحقيقة، لقد برهن كوك أن كل خوارزمية (كل آلة تورينغ) تحل مسألة من مسائل الصف NP يمكن اختزالها بزمن كثيري حدود إلى حالة من حالات مسألة التحقق.

يمكن إذن تجزئة صف مسائل المعرفة NP إلى ثلاث مجموعات جزئية : صف المسائل P، صف المسائل NPC وصف المسائل الأخرى. من الواضح أنه إذا كان الحدس P ≠ NP غير صحيح فإن الصفين الجزئيين الأخيرين هما صفان فارغان. يمكننا القول، إذن، إن المسائل NPC هي أكثر المسائل صعوبة من بين المسائل NP (دائما إذا كان P ≠ NP، الشكل 8. 1).

إن الصف الجزئي للمسائل NPC هو صف كثير الغنى، إذ إننا استطعنا تبيان أن معظم المسائل التي لا نعرف لها خوارزمية كثيرية حدود، ومن ثم، معظم مسائل المعرفة المرفقة

بمسائل الأمثلة التوافقية، هي مسائل تنتمي إلى هذا الصف الجزئي (صف المسائل NPC). لنذكر من بين هذه المسائل مسألة البائع الجوال ومسألة حقيبة الظهر ومسألة المجموعات المستقرة والبرمجة الخطية الطبيعية و ... إلخ. سنرى أمثلة أخرى في الفقرات القادمة وفي التمرينات. تقوي هذه الخاصية من مصداقية الحدس، فقد درس الكثير من المسائل الشديدة التنوع (ذات الطبائع المتباينة) من قبل الكثير من الباحثين وللعديد من السنين دون نجاح يذكر (على الأقل فيما يخص الحصول على خوارزمية كثيرية حدود).



الشكل 8. 1

نذكر من بين المسائل P مسألة أقصر طريق، ومسألة التدفق الأعظمي، ومسألة الشجرة ذات الوزن الأعظمي، ومسألة المزاوجة، ومسألة البرمجة الخطية. هناك القليل، نسبيا، من المسائل التي لم تحدد بعد حالتها (أي مسائل معرفة تنتمي إلى الصف NP ولم نستطع بعد أن نحدد : أتنتمي إلى الصف P أم تنتمي إلى الصف NPC). تكون المسألة "هل العدد الطبيعي n ليس بعدد أولي؟" مثالا على المسائل التي لم تحدد حالتها. هناك مثال ثان على المسائل التي لم تحدد حالتها بعد، هو مسألة التقابل بين بيانين. هناك حدس بأن المسألتين السابقتين تنتميان إلى الصفP. ولكن لنشر هنا إلى أن المسألة

التي يطلب فيها أن نحدد : أيقبل البيان G_1 بيانا جزئيا متقابلا مع بيان G_2؟ هي مسألة NPC.

إن برهان انتماء مسألة معرفة ما إلى الصف NPC ذو أهمية كبيرة جدا، فبمجرد إنجاز هذا البرهان سنكون على يقين "شديد" من أنه ليس هناك خوارزمية كثيرية حدود لحل هذه المسألة.

مبرهنة 8. 3

إذا كانت المسألة (P) هي مسألة NPC وإذا استطعنا إيجاد اختزال كثيري حدود من (P) إلى (P')، فإن (P') هي أيضا مسألة NPC.

البرهان

لتكن (P'') مسألة ما من الصف NP. لما كانت (P) هي مسألة NPC، فإن (P'') تختزل بزمن كثيري حدود إلى (P). من جهة أخرى، لدينا بالفرض (P) تختزل بزمن كثيري حدود إلى (P'). ولما كانت علاقة الاختزال هي علاقة متعدية فإن (P'') تختزل بزمن كثيري حدود إلى (P') وبالتالي فإن (P') هي مسألة NPC.

تعريف 8. 10

تدعى مسألة الأمثلة التوافقية (P) مسألة "صعبة" NP-Hard إذا وجد اختزال كثيري حدود من مسألة التحقق إلى (P).

لذا فإن المسائل الصعبة هي "على الأقل بصعوبة المسائل NPC" وكل مسألة أمثلة توافقية (مثل مسألة البائع الجوال وحقيبة الظهر) هي مسألة صعبة NP-Hard، إذا كانت مسألة المعرفة المرافقة لها هي مسألة NPC.

8. 4 بعض المسائل الـ NPC

يهدف هذا المقطع إلى إعطاء القارئ، ابتداء من بعض الأمثلة، فكرة عن نمط المحاكمة التي تستخدم لتبيان مسألة ما : أهي مسألة NPC. إن المخطط العام لذلك هو المخطط المقترح في المبرهنة 8. 3: نبين أن المسألة (P) التي نعرف بأنها مسألة NPC (في البداية، نفترض أن المسألة الوحيدة المعروف أنها NPC هي مسألة التحقق) تختزل بزمن كثيري حدود إلى المسألة المدروسة (P').

في الحقيقة، إن الاختزال الكثيري الحدود الذي سيستخدم هنا هو التحويل كثيري الحدود الذي تحدثنا عنه سابقا (التعريف 8. 8) : ستحول معطيات المسألة (P) بخوارزمية كثيرية حدود إلى معطيات للمسألة (P') بطريقة يكون لأجلها جواب المسألة (P') "صح" إذا وفقط إذا كان الجواب على المسألة (P) هو "صح" (المثال 8. 11 التالي للتعريف 8. 7). ستكون هذه البراهين طويلة نسبيا وستكون فكرة التحويل المستخدم شديدة الدقة والحذق في بعض الأحيان. إلا أن تلك البراهين وأفكار التحويل ليست شديدة الصعوبة، من جهة وهي تستحق الدراسة لأنها أبنية غير مسبوقة من جهة أخرى.

سنبين أن المسائل الخمس التالية هي مسائل NPC:

1) مسألة مجموعة العقد المستقرة.

2) مسألة الغلاقة Clique : ليكن لدينا البيان $G = (E, V)$ وعـدد طبيعـي k، علينـا أن نحدد : أهناك $E' \subset E$ بحيث أن $|E'| = k$ و $G_{E'}$ هو بيان تام (أو غلاقة)؟، هذا يعني أن عقد 'X متجاورة مثنى مثنى.

3) مسألة التغطية : ليكن لدينا البيان $G = (E, V)$ وعدد طبيعي k، علينـا أن نحـدد : أهناك $E' \subset E$ بحيث أن $|E'| = k$ و كـل قـوس في G له علـى الأقـل نهايـة واحـدة في 'X؟.

4) مسألة الحلقة الهاملتية.

5) مسألة البائع الجوال (أو بالأحرى مسألة المعرفة المرافقة لها).

مبرهنة 8. 4

مسألة مجموعة العقد المستقرة هي مسألة NPC.

البرهان

لقد رأينا أن هذه المسألة تنتمي إلى صف المسـائل NP. لنـأخذ حالـة مـن حـالات مسـألة التحقق معرفة انطلاقا من مجموعة المتحولات المنطقية التالية:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

بواسطة العبارات المنطقية $C_1, C_2, \ldots, C_m$ مع :

$$C_i = u_{j_1} \vee u_{j_2} \vee \ldots \vee u_{j_{k(i)}}$$

حيث u_{j_q} هي متحولات من X متممة أو غير متممة. سنبرهن أنه بالإمكان بناء بيان G = (V, A) له خاصية امتلاك مجموعة مستقرة مـن العقـد عددهـا m إذا وفقـط إذا أمكـن

إسناد قيم 0 أو 1 إلى متحولات X وبحيث تكون قيمة E مساوية لـ 1. يجري بناء G كما يلي :

1) نسند إلى كل متحول u_j يظهر في عبارة C_i عقدة في G نرمز إليها بـ (I, u_j).

2) تكون العقدتان متجاورتين في G إذا قابلتا نفس العبارة المنطقية أو قابلتا متحولين متطابقين لكنهما متتامان

بطريقة أدق :

1) $V = \{ (i, u_j) \mid u_j \in Ci\}$

2) (i, u_j) و $(i', u_{j'})$ متجاورتان إذا كان $i = i'$ أو إذا كان :

$$u_{j'} = \bar{x}_k \text{ و } u_j = x_k$$

ولما كان G يحتوي على $\sum_{i=1}^{m} k(i)$ عقدة (حيث k(i) يمثل عدد المتحولات المنطقية في العبارة C_i)، فإن عدد العمليات الضرورية لبناء G هو كثيري حدود بتابعية المعطيات.

إذا وجد إسناد *x للقيم 0 أو 1 في متحولات X بحيث E = 1، فإنه لكل عبارة C_i يوجد متحول u_j (على الأقل) يأخذ القيمة 1. ومن ثم فإن الأزواج (i, u_j) المقابلة تكون، بالبناء، مجموعة مستقرة عدد عقدها m.

بالعكس، إذا كانت V' مجموعة عقد مستقرة من G بحيث $|V'| = m$ فإن كل عبارة منطقية C_i فيها متحول u_j مقابل لعقدة من عقد V'. لتكن (i, uj) هي هذه العقدة. لنضع :

$$x_k^* = \begin{cases} 1 & si \quad u_j = x_k \\ 0 & si \quad u_j = \bar{x}_k \end{cases}$$

إن الإسناد المقبل لمتحولات X يعطي E القيمة 1.

مثال 8. 12

لأجل مسألة التحقق :

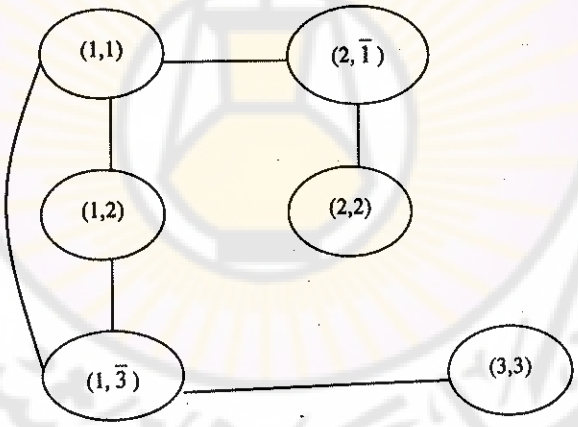
$$E = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3)$$

لنأخذ البيان الموضح بالشكل 8. 2. تشكل العقد (1، 1) و (2، 2) و (3، 3)، في هذا البيان، مجموعة مستقرة من الرتبة الثالثة (عدد عناصرها مساو لـ 3) وتقابل الحل $x_1=x_2=x_3=1$.

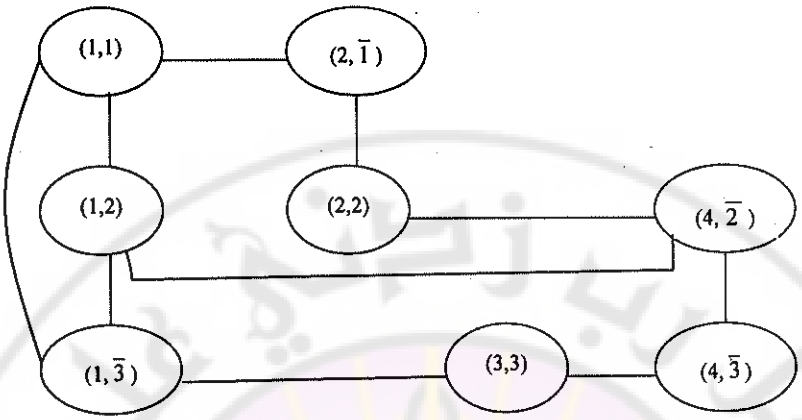
لأجل مسألة التحقق :

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

نحصل على البيان الموضح في الشكل 8. 3. يمكننا التحقق بسهولة من أن هذا البيان لا يقبل مجموعة مستقرة من الرتبة 4.



الشكل 8. 2



الشكل 8. 3

مبرهنة 8. 5

مسألتا الغلاقة والتغطية هما مسألتان NPC.

البرهان

إذا كانت X' مجموعة مستقرة من العقد في البيان G = (X, E)، فإن X' هي غلاقة في البيان المتمم G = (X, $\bar{E}$)، المعرف كما يلي :

$(x', x'') \in \bar{E}$ إذا وإذا فقط كان $(x', x'') \notin E$

ومن ثم فمسألة المجموعة المستقرة تحول ببساطة إلى مسألة غلاقة. إذا كانت X' مجموعة مستقرة في G، فإن X \ X' هي تغطية. ومن ثم فمسألة المجموعة المستقرة تحول ببساطة إلى مسألة تغطية.

مبرهنة 8. 6

مسألة الحلقة الهاملتية هي مسألة NPC.

البرهان

رأينا، سابقا، أن هذه المسألة تنتمي إلى الصف NP. كي نبرهن على المبرهنة، سنحول مسألة التغطية إلى مسألة حلقة هاملتية. سنبني (بواسطة خوارزمية كثيرية حدود)، انطلاقا من بيان $G = (X, E)$ وعدد طبيعي k، بيانا آخر $H = (X, F)$ يحوي على حلقة هاملتية إذا وفقط إذا قبل G تغطية من الرتبة k. لنضع $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. نسند إلى كل قوس $e_i=(u,v)$ من G بيانا $B_i = (Y_i, M_i)$. كل بيان من البيانات $B_1, B_2, \ldots, B_m$ يملك 12 عقدة وهي متقابلة فيما بينها. يوضح الشكل 8. 4 بنية هذه البيانات. سيبنى البيان H انطلاقا من تجميع خاص للبيانات B_1 حيث تكون مجموعة عقده X هي :

$$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m$$

بالنتيجة، يكون لدينا :

$$|X| = k + 12m$$

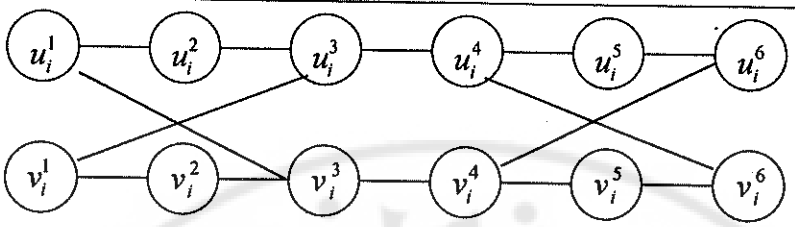
يبقى أن نحدد كيفية تجميع البيانات B_i فيما بينها ومع العقد $a_1, a_2, \ldots, a_k$. كي نقوم بذلك نسند إلى كل عقدة v من البيان G دليلين :

) $i_1(v)$ = دليل القوس المجاور لـ v ذي القيمة الصغرى

2) $i_2(v)$ = دليل القوس المجاور لـ v ذي القيمة العظمى

ثم إنه بإمكاننا، دون أن نخسر التعميم، افتراض عدم وجود عقد معزولة أي :

$$1 \le i_1(v) \le i_2(v) \le m$$



الشكل 8. 4

من جهة أخرى، إذا كان i دليل قوس مجاور لـ v و إذا كان $i < i_2(v)$، فإننا نرمز بـ $i_3(v, i)$ إلى دليل القوس المجاور لـ v "الذي يلي" i، أي بحيث يكون:

$$i_3(v, i) > i$$

$$i_3(v, i) > i' > i \Leftarrow e_{i'} \text{ ليست مجاورة لـ } v$$

يمكننا الآن توصيف أقواس H (المختلفة عن أقواس B_i) :

❖ لدليل j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ وعقدة v من G، نسند :

$(a_j v_i^1)$ حيث $i = i_1(v)$

$(a_j v_i^2)$ حيث $i = i_2(v)$

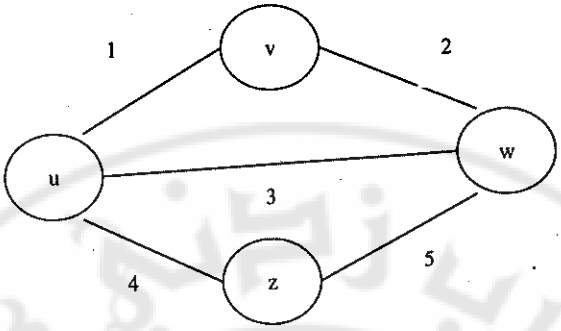
❖ لقوس e_i مجاورة لعقدة v وفي حال كون $i < i_2(v)$، نسند:

$(v_i^6 v_{i'}^1)$ مع $i' = i_3(v, i)$

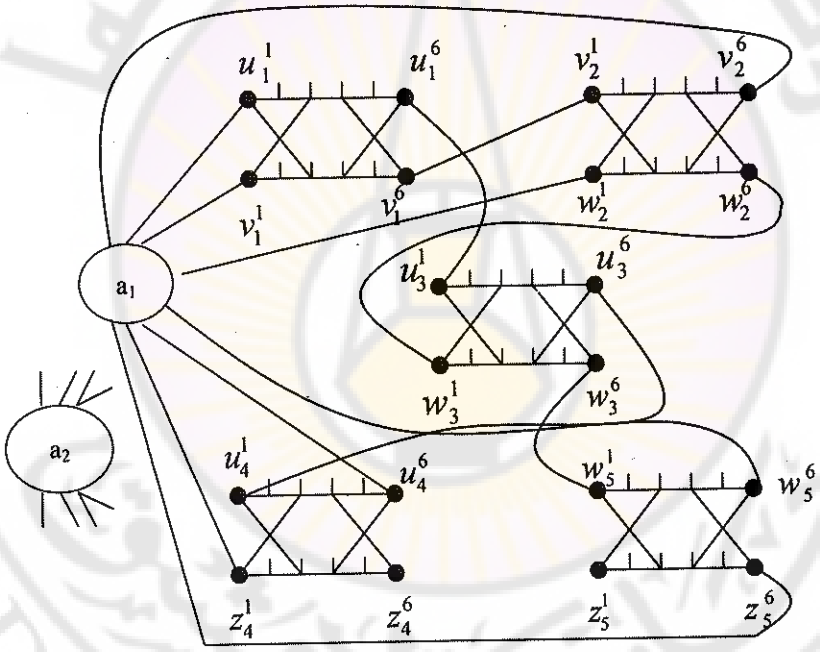
إذا كانت $n = |V|$، فإن عدد أقواس H سيكون :

$$2kn + 14m + \sum_{v \in V} [dG(v) - 1] = 2kn + 16m - n$$

ولما كان هذا البناء ليس سهلا، فقد أوضحنا في الشكل (8. 6) البيان H الذي نحصل عليه من البيان G الموضح بالشكل (8. 5) وفي حال $k = 2$.



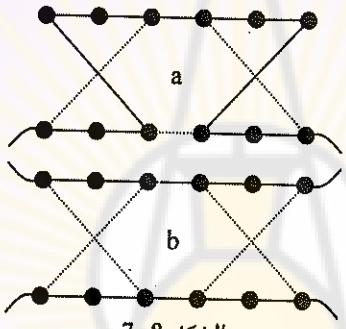
الشكل 8. 5



الشكل 8. 6 (a_2 مجاورة لنفس العقد التي تجاور a_1)

نلاحظ أن أي حلقة هاملتية في H لا يمكن أن تتقاطع مع البيانات B_i إلا تبعا لإحدى الصيغتين a و b الموضحتين بالشكل 8. 7. نستنتج من هذه الملاحظة الطريقة التي نحول فيها مسألة الدارة الهاملتية في H إلى مسألة تغطية 'V من الرتبة k في البيان G. نرقم،

بطريقة اعتباطية، عقد 'V ونسند إلى العقدة التي رقمها j في 'V سلسلة C_i في H تربط a_i إلى a_{i+1}. تمر هذه السلسلة على البيانات B_i المرفقة بـ الأقواس المجاورة لـ u_i تبعا للترتيب المتزايد للأدلة. نتبع في زيارتنا لـ B_i الصيغة a إذا كانت u_i هي العقدة الوحيدة في 'V التي تجاور e_i، ونتبع الصيغة b إذا كان هناك عقدتان في 'V تجاوران e_i. على العكس، إذا كانت C حلقة هاملتية في H، فإننا نسند إليها تغطية من الرتبة k في G عن طريق اعتبار سلاسل C (الجزئية) المتوضعة بين حدوثين للعقدة المنتمية للمجموعة $\{a_1, \ldots, a_k\}$ إن أقواس E المقابلة للبيانات B_i المزورة بهذه السلسلة تجاور العقدة نفسها في G (بسبب طريقة بناء البيانات).



الشكل 8. 7

ندعو القارئ إلى بناء الحلقة الهاملتية في البيان الموضح بالشكل (8. 6) والمقابل للتغطية {u, w} في البيان الموضح بالشكل (8. 5).

نتيجة

مسألة البائع الجوال هي مسألة صعبة NP-Hard.

البرهان

يمكن، ببساطة، تحويل مسألة الحلقة الهاملتية إلى مسألة المعرفة الموافقة لمسألة البائع الجوال.

تمرينات

التمرين 1. قيم عدد العمليات البسيطة على البتات bit الضرورية لمقارنة وجمع وجداء عددين A, B. بين أنه إذا كان لخوارزمية ما عدد من العمليات (مقارنة، جمع، جداء) كثيري حدود بدلالة الذاكرة المطلوبة لتخزين المعطيات، فإن عدد العمليات العنصرية لهذه الخوارزمية هو أيضا كثيري حدود للذاكرة المطلوبة لتخزين المعطيات.

التمرين 2. برهن أن مسألة جداء مصفوفتين تقبل خوارزمية كثيرية حدود.

التمرين 3. بين أن المسألة "هل البيانان G و 'G هما بيانان متقابلان؟" تنتمي إلى NP. ماذا تعتقد بالنسبة للمسألة "هل البيانان G و 'G هما بيانان غير متقابلين؟".

التمرين 4. بين أن المسألة "هل العدد الطبيعي N ليس بعدد أولي؟" تنتمي إلى NP. ماذا تعتقد في شأن المسألة "هل العدد الطبيعي N هو عدد أولي؟"؟

التمرين 5. تسمى مسألة التحقق التي تقوم فيها كل عبارة منطقية بالضبط على حدين منطقيين، بمسألة التحقق من المرتبة الثانية. بين أن هذه المسألة تنتمي إلى P.

اقتراح : استخدم التحويل المتبع في برهان النظرية (8. 4)، ثم أعط خوارزمية لحل مسألة مجموعة العقد المستقرة من الرتبة m في البيان الذي حصلت عليه وبرهن، أخيرا، أن هذه الخوارزمية هي خوارزمية كثيرية حدود.

التمرين 6. برهن أنه إذا عرفنا خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة المعرفة المرافقة لمسألة المجموعة المستقرة الأعظمية، فبإمكاننا إيجاد خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة المجموعة المستقرة الأعظمية ذاتها.

اقتراح : لتكن STABL(G, k) الإجرائية التي تحل مسألة المعرفة المرافقة. برهن أنه بعدد منته من استدعاء هذه الإجرائية يمكننا تحديد رتبة مجموعة مستقرة أعظمية (بحث ثنائي Dichotomy). مستنتجا أنه يمكننا وضع خوارزمية كثيرية حدود تسند إلى كل بيان (وكحالة خاصة، البيانات الجزئية في G) رتبة المجموعة المستقرة الأعظمية فيه. برهن، أخيرا، أنه يمكن استخدام هذه الخوارزمية لإيجاد مجموعة مستقرة أعظمية بزمن كثيري حدود.

التمرين 7. حل المسائل الثلاث التالية :

i) برهن أن وجود خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة المعرفة المرافقة لمسألة البائع الجوال يعني إمكان وجود خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة تحديد طول دورة مثلى.

ii) برهن أن وجود خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة تحديد طول دورة مثلى لأجل مسألة البائع الجوال يعني إمكان وجود خوارزمية كثيرية حدود لحل مسألة تحديد دورة مثلى (يمكننا اختبار ما يحدث عندما نخفض بالتتالي أطوال كل قوس بمقدار 1).

iii) لماذا نقول في حالة مسألة البائع الجوال إن مسألة المعرفة المرافقة هي أصعب من مسألة الانطلاق؟.

التمرين 8. ليكن G(X, U) بيانا موجها، برهن أنه بالإمكان بناء بيان غير موجه H (Y, E) بحيث توجد دارة هاملتية في G إذا وفقط إذا وجدت حلقة هاملتية في H. هل مسألة الدارة الهاملتية في بيان موجهة هي مسألة NPC؟

التمرين 9. نعني بمسألة السلسلة الهاملتية من x إلى y في بيان G(X, Y) المسألة التي يطلب فيها أن نحدد : أتوجد سلسلة عنصرية تحتوي على |X| - 1 قوس تربط x إلى y؟.

بين أن هذه المسألة هي مسألة NPC.

مسرد المصطلحات

العربية	الإنكليزية	الفرنسية
	ألف	
إجرائية	Procedure	Procédure
إجرائية معجمية	Lexiographic Procedure	Procédure Lexiographique
اختزال كثيري حدود	Polynomial Reduction	Réduction Polynomiale
أخطاء التدوير	Rounded Errors	Erreurs d'Arrondi
أساس	Basis	Base
أساس أمثل	Optimal Basis	Base Optimale
أساس مقبول	Feasible Basis	Base Réalisable
أصغرة	Minimization	Minimisation
أصغري	Minimum	Minimum
اضطراب	Disturbance	Perturbation
اعتلال	Degeneracy	Dégénérescence
أعظمة	Maximization	Maximisation
أعظمي	Maximum	Maximum
آلة تورينغ	Turing Machine	Machine de Turing
آلة تورينغ الحتمية	Deterministic Turing Machine	Machine de Turing Déterministe
آلة تورينغ اللاحتمية	NonDeterministic Turing Machine	Machine de Turing Non-Déterministe
أمثلة	Optimization	Optimisation

أمثلة توافقية	Combinatorial Optimization	Optimisation Combinatoire
أمثلي	Optimum	Optimum
انحراف	Deviation	Déviation

باء

بحوث العمليات	Operational Research	Recherche Opérationnelle
برمجة خطية	Linear Programming	Programmation Linéaire
برمجة خطية طبيعية	Integer Linear Programming	Programmation Linéaire en Nombres entiers
برمجة لاخطية	NonLinear Programming	Programmation NonLinéaire
برمجة متعددة الأهداف	Goal Programming	Programmation Multiobjectif
برنامج أولي مقيد	Restricted Primal Program	Programme Primal Restreint
برنامج ثنوي	Dual Program	Programme Dual

تاء

تابع (دالة)	Function	Fonction
تابع (دالة) كثيري حدود	Polynomial Function	Fonction Polynomiale
تبديل	Permutation	Permutation
تحويل كثيري حدود	Polynomial Transformation	Transformation Polynomiale
ترتيب المهام	Scheduling	Ordonnancement
ترميز	Coding	Codage
تعقيد الخوارزميات	Algorithm Complexity	Complexité des Algorithmes
تعقيد المسائل	Problem Complexity	Complexité des Problèmes
تقارب منته	Finite Convergence	Convergence Finie
تكلفة	Cost	Coût
تكلفة مختزلة	Reduced Cost	Coût Réduit

تكلفة هامشية (ثانوية)	Marginal(Secondary) Cost	Coût Marginal
ثاء		
ثنوي	Dual	Dual
جيم		
جدول	Tableau	Tableau
جدول سمبليكس	Simplex Tableau	Tableau Simplexe
جذر–معاكس	Anti-root	Anti-racine
جملة خطية	Linear System	Sysème Linéaire
جملة قيود	Constraints System	Sysème de Contraintes
جملة متراجحات	Inequalities System	Système d'Inégalités
حاء		
حالة بدئية	Initial State	Etat Initial
حدس	Conjecture	Conjecture
حل	Solution	Solution
حل أمثل	Optimal Solution	Solution Optimale
حل أولي (انطلاق)	Initial Solution	Solution de Départ (initial)
حل بياني	Graphic Solution	Solution Graphique
حل ثنوي	Dual Solution	Solution Duale
حل ثنوي أمثل	Optimal Dual Solution	Solution Duale Optimale
حل ثنوي مقبول	Feasible Dual Solution	Solution Duale réalisable
حل حالي	Current Solution	Solution Courante
حل غير محدود	Unbounded Solution	Solution nonBornée
حل غير منته	Infinite Solution	Solution inFinie
حل محدود	Bounded Solution	Solution Bornée
حل معتل	Degenerated Solution	Solution Dégénérée

حل مقبول	Feasible Solution	Solution Réalisable
حل منته	Finite Solution	Solution Finie
حل موافق لأساس	Basic Solution	Solution de Base
حل موافق لأساس أمثل	Optimal Basic Solution	Solution de Base Optimale
حل موافق لأساس مقبول	Basic Feasible Solution	Solution de Base Réalisable
حلقة	Cycle	Cycle

خاء

خط انتظار ذو أولوية	Priority Queue	File d'Attente avec Priorité
خطي	Linear	Linéaire
خطية	Linearity	Linéairté
خوارزمية	Algorithm	Algorithme
خوارزمية أسية	Exponential Algorithm	Exponential Algorithme
خوارزمية أولية-ثنوية	Primal-Dual Algorithm	Algorithme Primal-Dual
خوارزمية تراجعية	Backtracking Algorithm	Algorithme de retour arrière
خوارزمية ثنوية	Dual Algorithm	Algorithme Dual
خوارزمية دوراتية	Iterative Algorithm	Algorithme Itérative
خوارزمية سمبليكس الأولية	Primal Simplex Algorithm	Algorithme Primal du Simplexe
خوارزمية سمبليكس الأولية الأصلية	Original Primal Simplex Algorithm	Algorithme Primal Original du Simplexe
خوارزمية سمبليكس الأولية المعدلة	Revised Primal Simplex Algorithm	Algorithme Primal Révisé du Simplexe
خوارزمية شرهة	Greedy Algorithm	Algorithme Glouton

Algorithme Efficace	Efficient Algorithm	خوارزمية فعالة
Algorithme Polynomial	Polynomial Algorithm	خوارزميـــة كثيريـــة حدود
Algorithme Polynomial	Polynomial Algorithm	خوارزميـــة كثيريـــة حدود

دال

Circuit	Circuit	دارة
Circuit Absorbant	Absorbing Circuit	دارة ماصة
Fonction Affine	Affine function	دالة أفينية
Fonction économique	Economic Function	دالة اقتصادية
Fonction Objective	Objective Function	دالة الهدف
Fonction Linéaire	Linear Function	دالة خطية
Degrée Sortant	Degree_Out	درجة خروج عقدة
Degrée Entrant	Degree_In	درجة دخول عقدة
Degrée du Nœud	Vertex Degree	درجة عقدة
Itération	Iteration	دورة

راء

Rang de Matrice	Rang of Matrix	رتبة مصفوفة

سين

Chaîne	Chain	سلسلة
Arc	Arc	سهم

شين

Arbre	Tree	شجرة
Arbre Minimal de recouvrement	Minimum Spanning Tree	شجرة المسح الصغرى
Conditions de Complémentairité	Complementarity Conditions	شروط التتام

شكل قانوني	Canonical Form	Forme Canonique
شكل معياري	Standard Form	Forme Standard
شكل ناتج عن القلب	Inverse Produced Form	Forme Produit de l'Inverse

صاد

صف تكافؤ	Equivalence Class	Classe d`équivalence

طاء

طريق، مسار	Path	Chemin
طريقة بيانية	Graphical Method	Méthode Graphique
طريقة تحليلية	Analytical Method	Méthode Analytique
طريقة سمبليكس	Simplex Method	Méthode de Simplexe

عين

عقدة	Vertex, Node	Nœud
عقدة داخلية أو وسطى	Intermediate Vertex	Nœud Intermédiaire
علاقة تكافؤ	Equivalence Relation	Relation d'Equivalence
علامة	Tag	Marque
علامة زمنية	Timestamp	MarqueTemporelle
عملية ارتكاز	Pivot Operation	Opération de Pivotage

غين

غلاقة	Clique	Clique

قاف

قاعدة التوازي	Parallel Ruler	Règle de Parallélisme
قيد	Constraint	Contrainte
قيمة مثلى	Optimum Value	Valeur Optimum
قيود خطية	Linear Constraints	Contraintes Linéaires

كاف

Tas Binaire	Binary Heap	كومة ثنائية
	لام	
Incertitude	Uncertainty	لاتأكد
	ميم	
Complémentairité Théorème	Complementarity Theorem	مبرهنة التتام
Variables Artificielles	Artificial Variable	متحول اصطناعي
Variables d'écart	Slack Variable	متحول الفرق
Variable Duale	Dual Variable	متحول ثنوي
Varibles Hors-Base	NonBasic Variable	متحول خارج الأساس
Varibles de Base	Basic Variable	متحول داخل الأساس
Variables Déviantes	Deviational Variables	متحولات انحراف
Inégalités	Inequalities	متراجحات
Polytope	Polydron	متعدد وجوه
Polytope Convexe	Convexe Polydron	متعدد وجوه محدب
Polyédre Convexe	Closed Bounded Polydron	متعدد وجوه مكتمل محدب
Ensemble Convexe	Convexe Set	مجموعة محدبة
Ensemble Concave	Concave Set	مجموعة مقعرة
Cône	Cone	مخروط
Pivot	Pivot	مرتكز (قطب)
Composante	Component	مركّبة
Composante Fortement Connexe	Strongly Connected Component	مركبة مرتبطة بقوة
parcours de graphe	Graph Traversal	مرور عبر البيان
Problème d'Incertitude	Uncertainty Problem	مسائل اللاتأكد
Problème du "Voyageur de Commerce"	Traveling Salesman Problem	مسألة البائع الجوّال

مسألة التحقق (المنطقي)	Satisfiability Problem	Problème de Satisfaisabilité
مسألة التغطية	Cover Problem	Problème de Recouvrement
مسألة الدارة (الحلقة) الهاملتية	Hamilton Circuit (Cycle) Problem	Problème du Circuit (Cycle) Hamiltonien
مسألة العقد المستقرة	Stable (Independent) Set of Summits Problem	Problème de Stable
مسألة النقل	Transportation Problem	Problème du Transport
مسألة ثنوية	Dual Problem	Problème dual
مسألة حقيبة الظهر	Knapsack Problem	Problème de "Sac à Dos"
مسألة معرفة	Recognition Problem	Reconnaissance Problème
مصب	Sink	Puit
مصفوفة	Matrix	Matrice
مصفوفة تغيير الأساس	Basis Changing Matrix	Matrice de Changement de Base
مصفوفة متممة	Complementary Matrix	Matrice Comlémentaire
مصفوفة مربعة	Sequare Matrix	Matrice Carrée
مصفوفة نظامية	Regular Matrix	Matrice régulière
مصفوفة واحدية	Unit matrix	Matrice Unité
مضاريب سمبليكس	Simplex Multipliers	Multiplicateurs du Samplexe
معادلات	Equations	Equations (Egalités)
منبع	Source	Source
منطقة الحلول الممكنة	Feasible Solution Region	Domaine de Solution Réalisable
منظومة (جملة)	System	Système
منظومة خطية	Linear System	Système Linéaire
منظومة قيود	Constraints System	Système de Contraintes
منظومة متراجحات	Inequalities System	Système d' Inégalités

نون

نصف–فضاء	Half-Plane	Demi-Space
نصف–فضاء مغلق	Closed Half-Plane	Demi-Space Fermé
نقطة متطرفة	Extreme Point	Point Extrême

واو

وصلة	Edge, Link	Arête

الفهرس