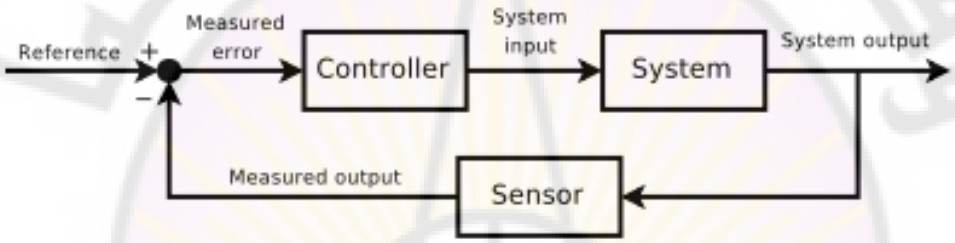
منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية




# التحكم الآلي – 1 –

الدكتور
**علي عبده السيد**
مدرس في قسم هندسة الطاقة الكهربائية

الدكتور
**أديب محمد اللحام**
مدرس في قسم هندسة الطاقة الكهربائية

جامعة دمشق
1437-1436 هـ
2016-2015 م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# التحكم الآلي – 1 –

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

# التحكم الآلي – 1 –

الدكتور
علي عبده السيد
مدرس في قسم هندسة الطاقة الكهربائية

الدكتور
أديب محمد اللحام
مدرس في قسم هندسة الطاقة الكهربائية

جامعة دمشق
1437-1436 هـ
2016-2015 م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# الفهرس


| | الصفحة |
|---|---|
| **الفصل الأول: تمهيد في هندسة التحكم الآلي** | 11 |
| 1-1 لمحة تاريخية عن هندسة التحكم الآلي | 14 |
| 1-2 المبادئ الأساسية في هندسة التحكم الآلي | 15 |
| 1-3 أمثلة عن نظم التحكم الآلي | 22 |
| 1-4 تحديد المصطلحات الأساسية | 29 |
| 1-5 تصنيف نظم التحكم | 31 |
| 1-6 خصائص نظم التحكم | 38 |
| 1-7 النظم الخطية, المستمرة, وذات المعاملات الثابتة | 41 |
| 1-8 تصميم نظام التحكم | 42 |
| 1-9 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة | 45 |
| **الفصل الثاني: التمثيل الرياضي لنظم التحكم** | 47 |
| 2-1 النماذج الرياضية البسيطة | 49 |
| 2-2 النماذج الرياضية المعقدة | 51 |
| 2-3 النمذجة الرياضية للنظم الميكانيكية | 52 |
| 2-4 النمذجة الرياضية للنظم الكهربائية | 59 |
| 2-5 النمذجة الرياضية للنظم الحرارية | 63 |
| 2-6 النمذجة الرياضية للنظم الهيدروليكية | 66 |
| 2-7 النمذجة الرياضية لمحركات التيار المستمر | 72 |
| 2-8 توابع التحويل | 78 |
| 2-9 التمثيل الصندوقي لنظام التحكم | 87 |
| 2-10 تمثيل النظم باستخدام مخطط تدفق الإشارة | 97 |
| 2-11 نظم الرتبة الأولى والثانية | 104 |

2-12 مثال تصميمي: نظام التحكم بمحرك جر كهربائي 106
2-13 محاكاة نظم التحكم باستخدام بيئة الماتلاب 108
2-14 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة 117
**الفصل الثالث: الخصائص المميزة لنظم التحكم ذات الحلقة المغلقة** 121
3-1 مقدمة 123
3-2 تحليل إشارة الخطأ 124
3-3 حساسية نظم التحكم لتغيرات البارامترات 127
3-4 تأثير إشارات الاضطراب على نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة 131
3-5 التحكم بالاستجابة العابرة 138
3-6 أخطاء الحالة المستقرة 142
3-7 تكاليف التغذية الخلفية 143
3-8 مثال تصميمي 144
3-9 دراسة خصائص نظم التحكم باستخدام بيئة الماتلاب 147
3-10 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة 156
3-11 خاتمة 160
**الفصل الرابع: الأداء الزمني لنظم التحكم ذات التغذية الخلفية** 163
4-1 مقدمة 165
4-2 توابع الدخل المستخدمة لدراسة الاستجابة الزمنية لنظام التحكم 167
4-3 دراسة الاستجابة الزمنية لنظم الدرجة الأولى 169
4-4 الخصائص الزمنية العامة للاستجابة الخطوية للنظم 173
4-5 الخصائص الزمنية العامة للاستجابة الخطوية لنظم الدرجة الأولى 176
4-6 الاستجابة الزمنية لنظم الدرجة الثانية 178
4-7 تأثير وجود القطب الثالث والصفر على استجابة النظام من الدرجة الثانية 192

4-8 علاقة موقع الجذور في المستوي اللابلاسي والاستجابة العابرة 201
4-9 خطأ الحالة المستقرة لنظم التحكم ذات التغذية الخلفية 203
4-10 استجابة النظم ذات الدرجات العليا 212
4-11 دلائل الأداء 214
4-12 تبسيط النظم الخطية 225
4-13 مثال تصميمي: نظام التحكم بالمنظار الفضائي 229
4-14 دراسة أداء النظم باستخدام بيئة الماتلاب 233
4-15 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة 237
4-16 خاتمة 239
**الفصل الخامس: تمثيل النظم الفيزيائية في فراغ الحالة** 243
5-1 متحولات الحالة 245
5-2 معادلة الحالة التفاضلية 250
5-3 المخطط الصندوقي ومخطط تدفق الإشارة في فراغ الحالة 256
5-4 نماذج صورية بديلة 269
5-5 استنتاج تابع التحويل من معادلة الحالة 275
5-6 الاستجابة الزمنية ومصفوفة العبور 276
5-7 حساب حالة النظام بدلالة إشارة التحكم 280
5-8 مثال تصميمي: نمذجة نظام التحكم في السيّر الدوار في الطابعة 282
5-9 تحليل نماذج فراغ الحالة باستخدام بيئة الماتلاب 288
5-10 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة 291
5-11 خاتمة 295
**الفصل السادس: استقرار النظم ذات التغذية الخلفية الخطية** 297
6-1 مفهوم الاستقرار 299
6-2 دالة راوث–هورفيتز للاستقرار 304

3-6 دراسة الاستقرار في النظم الممثلة في فراغ الحالة 315
4-6 مثال تصميمي: التحكم بعربة مقطورة 318
5-6 دراسة استقرار النظام باستخدام بيئة الماتلاب 320
6-6 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة 330
7-6 خاتمة 332
**الفصل السابع: طريقة المحل الهندسي للجذور** 335
1-7 مقدمة 337
2-7 مبدأ المحل الهندسي للجذور 338
3-7 إجرائية رسم المحل الهندسي للجذور 344
4-7 اختيار قيم بارامترات النظام باستخدام طريقة المحل الهندسي للجذور 368
5-7 المتحكم التناسبي– التكاملي– التفاضلي 372
6-7 أمثلة تصميمية 392
7-7 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة 411
8-7 خاتمة 414
**الفصل الثامن: الاستجابة الترددية لنظم التحكم الخطية** 415
1-8 مقدمة 417
2-8 منحنيات الاستجابة الترددية 421
3-8 الاستجابة الترددية لنظم الدرجة الأولى والثانية 429
4-8 منحنيات بود لنظم الدرجة الأولى والثانية 434
5-8 قياس الاستجابة الترددية 458
6-8 معايير الأداء للاستجابة الترددية 459
7-8 منحنيات المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة 465
8-8 أمثلة تصميمية 468
8- 9 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة 484

10-8 خاتمة 486

**الفصل التاسع: دراسة الاستقرار في المستوي الترددي** 489

9-1 مقدمة 491

9-2 إسقاط الخطوط المحيطة في المستوي اللابلاسي 492

9-3 معيار نايكويست للاستقرار 499

9-4 الاستقرار النسبي ومعيار نايكويست 515

9-5 استقرار نظم التحكم ذات التأخير الزمني 522

9-6 أمثلة تصميمية 528

9-7 المتحكمات التناسبية التكاملية التفاضلية PID في المستوي الترددي 550

9-8 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص الصلبة 552

**الفصل العاشر: تصميم نظم التحكم ذات التغذية الخلفية** 555

10-1 مقدمة 557

10-2 طرق تصميم نظم التحكم 559

10-3 دارات التعويض التسلسلي 560

10-4 تصميم دارة تقديم الصفحة بالاعتماد على منحنيات بود 566

10-5 تصميم دارة تقديم الصفحة باستخدام المحل الهندسي 573

10-6 تصميم نظام باستخدام دارات تكاملية 582

10-7 تصميم معوض تأخير الصفحة باستخدام المحل الهندسي للجذور 587

10-8 تصميم معوّض تأخير الصفحة باستخدام منحنيات بود 592

10-9 تصميم المعوّضات بالاعتماد على منحنيات بود وباستخدام الطرق التحليلية 600

10-10 النظم ذات المرشح المسبق 603

10-11 خاتمة 607

**الفصل الحادي عشر: تصميم نظم التحكم ذات التغذية الخلفية بمتحولات الحالة** 611

11-1 مقدمة 613

11-2 قابلية التحكم والمراقبة 614

11-3 تصميم نظام التحكم ذو التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة 620

11-4 تصميم المراقب 627

11-5 دمج التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة ومراقب الحالة 631

11-6 الدخل المرجعي 640

**المراجع** 644

جامعة دمشق Damascus University

# الفصل الأول: تمهيد في هندسة التحكم الآلي

# Chapter 1: Introduction to Automatic Control Engineering

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تُعدّ هندسة التحكم الآلي فرعاً من العلوم التكنولوجية، تُعنى بالتحكم بالعمليات الصناعية والأجهزة والمعدات، وتشغيلها الحاجة إلى مشغل بشري. و يُعدّ التحكم الآلي ملتقى المعارف الهندسية، إذ ينبغي مراقبة وضبط المتغيرات (المتحولات) التي تتفاعل في جميع العمليات الصناعية كي تؤدي المعدات والتجهيزات الوظائف التي شيدت من أجلها.

تدخل تكنولوجيا نظم التحكم الآلي في جميع النشاطات الصناعية, ونذكر من تطبيقاتها: محطات توليد الطاقة الكهربائية وتوزيعها، مصافي تكرير النفط، مصانع تعبئة المواد الغذائية، مصانع تعبئة العصائر، والصناعات الثقيلة مثل صناعة الاسمنت، والسيارات.... إلخ.

كما أن لتكنولوجيا نظم التحكم الآلي دوراً كبيراً في تخفيف أعباء الحياة اليومية، فنجد تطبيقات التحكم الآلي في معظم الأجهزة المنزلية، مثل: التبريد والتكييف، التدفئة، الإنارة، التجهيزات المنزلية مثل الغسالات والنشافات... إلخ.

يمكن تلخيص دور نظام التحكم في العمليات الصناعية السابقة، بالتحكم بمايلي: الضغط، الرطوبة، الحرارة، اللزوجة، التدفق، التيار أو التوتر (أو الاستطاعة)، معامل الاستطاعة، السرعة، الموضع.

زودنا التطور الذي شهدته نظرية التحكم الآلي بالأدوات اللازمة للوصول إلى الأداء الأمثل للنظم المراد التحكم بها، وتحسين إنتاجها، لذلك يتوجب على مهندسي التحكم أن يتمكنوا من المبادئ الأساسية لهذا العلم.

يتطلب استثمار وتطبيق نظرية التحكم الآلي استخدام بعض العلوم المتممة مثل الدارة الالكترونية التماثلية والرقمية، البرمجة، والشبكات الصناعية (Industrial Networks).

**1-1 لمحة تاريخية عن هندسة التحكم الآلي:**

كان منظم سرعة المحرك البخاري من أوائل الأعمال المهمة في مجال التحكم الآلي الذي قام بتصميمه العالم جيمس وات (James Watt) في العام 1765 م. هناك أعمال مهمة أخرى ساهمت في تطوير علم التحكم الآلي قام بها مينورسكي (Minorsky)، وهازين (Hazen) ونايكوست (Nyquist) وآخرون. عمل مينورسكي, في عام 1922 م، على الحاكمات الآلية المخصصة لتوجيه السفن وبرهن أن استقرار النظام يمكن أن يُحدد من المعادلات التفاضلية الموصفة للنظام. في عام 1932 م، طور نايكوست إجرائية لتحديد استقرار نظم الحلقة المغلقة (Closed-Loop Systems) بالاعتماد على استجابته في الحلقة المفتوحة, وذلك عند تطبيق إشارات جيبية على دخله. ناقش هازين (Hazen), في عام 1934 م, تصميم الحاكمات لنظم السيرفو مع القدرة على ملاحقة الدخل المتغير.

خلال السنوات الممتدة من 1940 – 1950 م، أصبح من الممكن لمهندسي التحكم استخدام الطرائق المعتمدة على الاستجابة الترددية لتصميم نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة بحيث تحقق النظم الخطية المراد التحكم بها متطلبات أداء معينة. شهدت هذه الفترة الزمنية أيضاً قيام إيفان (Evans) بتطوير طريقة المحل الهندسي للجذور أو مسار الجذور (Root-locus method) لدراسة الاستقرار.

تعتبر الاستجابة الترددية وطريقة مسار الجذور، من أهم نظريات التحكم الآلي، التي قادت إلى تصميم النظم المستقرة, أي المحققة لمعايير الاستقرار. بشكل عام، تُعدّ هذه النظم جيدة ولكن ليست المثلى, أدت هذه الحقيقة في أواخر عام 1950 م، إلى تحول مسألة تصميم نظام التحكم الآلي إلى مسألة تصميم نظام التحكم الأمثل. تتعامل نظرية التحكم الآلي التقليدية مع النظم وحيدة الدخل ووحيدة الخرج، بينما النظم الحديثة تكون عادة متعددة المداخل ومتعددة المخارج، وبالتالي فإن نظرية التحكم الآلي التقليدية تكون غير قابلة للتطبيق في هذه النظم. دفعت هذه الحقيقة لظهور طريقة فضاء الحالة للتحكم بالنظم متعددة المداخل ومتعددة المخارج، وذلك في عام 1960م.

تـم التعامـل, خـلال السـنوات الممتـدة مـن 1960– 1980م، مـع نظـم الـتحكم المثلـى (Optimal Control Systems) , ونظم التحكم القابلة للتعلم أو التدريب والمعتمدة على مفاهيم الذكاء الصنعي، وذلك للنظم الصناعية المعقدة.

من عام 1980 وحتى اللحظة تمحور التطور الذي شهدته نظرية التحكم الآلي حول مفهوم التحكم المتين (Robust Control)، والذي يعمل على تحقيق أهداف التحكم على الرغم من وجود إشارات تشويش واضطرابات تؤثر على النظام المتحكم به.

**2-1 المبادئ الأساسية في هندسة التحكم الآلي:**

سنتطرق في هذه الفقرة إلى شرح المبادئ الأساسية في هندسة التحكم، والتي تشمل مفهوم النظام، ماهية النظم ذات الحلقة المفتوحة والمغلقة، وبعض التعاريف المهمة.

بدايةً لابد من توضيح الهدف من نظام التحكم، حيث يدخل التحكم في معظم مجالات الحياة اليومية. على سبيل المثال، يتم ضبط درجة الحرارة في غرفة بواسطة ترموستات (Thermostat)، بحيث تبقى درجة الحرارة ثابتة مهما كانت درجة الحرارة الخارجية. بالتأكيد تأمين درجة حرارة ($+18C^{\circ}$) عندما تكون درجة الحرارة الخارجية ($-5C^{\circ}$) في الشتاء, ليس مطابقاً لتأمين درجة حرارة ($+18C^{\circ}$) عندما تكون درجة الحرارة الخارجية ($+25C^{\circ}$) في الصيف.

يحمل قطاع النقل الكثير من الأمثلة عن نظم التحكم. قبل عشرات السنين كان على البحار أن يقف أمام دفة السفينة حتى يحافظ على اتجاه السفينة وللتغلب على التيارات المائية والهياج البحري الذي يحاول أن يحرف السفينة عن امسارهاا، ولكن في أيامنا الحالية أصبحت تقاد السفينة بواسطة نظام تحكم آلي, ولا يتدخل البحار إلا في العمليات الصعبة مثل الدخول والخروج من المرفأ أو الحالات الطارئة. الطائرات أصبحت أيضاً تحت سيطرة نظام تحكم آلي, حيث تبقى الطائرة لفترة طويلة تحت سيطرته ( نظام القيادة الآلي)، حيث لا يتدخل الكابتن إلا خلال العمليات الصعبة مثل الإقلاع والهبوط. تحوي السيارات الحديثة أيضاً الكثير من نظم التحكم مثل منظم الإشعال، ونظام التحكم بسرعة

مساحات الزجاج وذلك تبعاً لكثافة الأمطار، والتحكم بالمصابيح تبعاً لدرجة الإنارة في الشوارع.

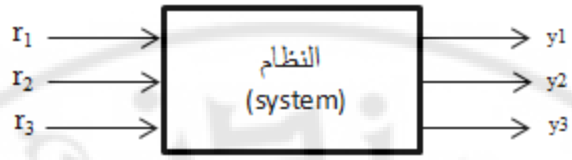
مما سبق نستطيع ملاحظة أن نظام التحكم يسعى دائماً إلى تحقيق عدداً من العمليات دون تدخل العامل البشري. في بعض الحالات، الهدف من استبدال العامل البشري هو تحقيق مكاسب اقتصادية، ولتجنيب العامل البشري القيام بأعمال مجهدة، أو الحصول على منتج بجودة أعلى.

في الواقع هناك نوعان أساسيان لنظم التحكم. في النوع الأول يقوم نظام التحكم بأتمتة النظام المراد التحكم فيه وذلك بتطبيق تتابع معين من التعليمات، معروفة مسبقاً، وبالتالي نحصل على ما يسمى بالنظام التتابعي. في هذه الحالة يمكن استثمار نظام التحكم بواسطة الحاكمة المنطقية المبرمجة أو الـ (PLC).

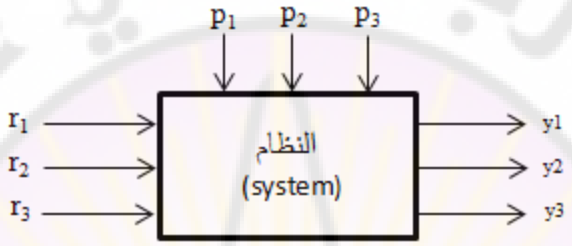
وفي النوع الثاني يقوم نظام التحكم بتنظيم قيمة مقدار فيزيائي في النظام المراد التحكم به (أو المحافظة على قيمة ثابتة له)، أو يقوم بفرض نمط تغير معين على المقدار الفيزيائي. وهنا ندخل ضمن ما يسمى بالتنظيم (Regulation). سيعالج هذا الكتاب النوع الثاني من نظم التحكم, التي سوف تطبق على النظم الخطية، المستمرة، والثابتة مع الزمن (Time-invariant) (سيتم شرح هذه المصطلحات لاحقاً في هذا الكتاب).

**1-2-1 مفهوم النظام**

يُعرّف النظام بصندوق أسود له مدخل أو عدة مداخل قابلة للتأثير, إضافة لوجود خرج أو عدة مخارج, تتيح مراقبة رد فعل النظام على الدخل. نستطيع تمثيل هذا التعريف البسيط للنظام بالمخطط المبين بالشكل (1-1). في هذا الشكل، تمثل المعاملات $r_1$، $r_2$، $r_3$ مداخل النظام، بينما تمثل $y_1$، $y_2$، $y_3$ مخارج النظام. يتغير النظام تبعاً للقوانين الفيزيائية التي تحكم سلوكه والمعتمدة على بنيته الداخلية. يتأثر النظام عادة بالبيئة المحيطة به ويؤثر فيها, لذلك يمكن تمثيل النظام بشكل أكثر واقعية، كما هو مبين في الشكل (1-2).



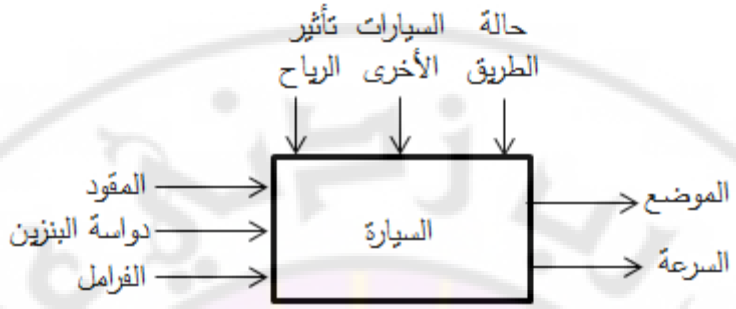

**الشكل (1-1): تمثيل النظام بشكل صندوقي.**




**الشكل (1-2): تمثيل النظام مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير البيئة المحيطة عليه.**

في الشكل (1-2)، تمثل المعاملات $p_1$، $p_2$، $p_3$ تأثير المحيط على النظام. وتسمى هذه المداخل، في معظم الأحيان، بالاضطرابات (التشويش). لنأخذ السيارة كنظام معروف للجميع, يمكن أن ينظر إلى السيارة على أنها نظام فيزيائي يملك ثلاثة مداخل: المقود الذي يسمح للسائق بتوجيه السيارة، دواسة البنزين والتي تسمح بإكساب السيارة التسارع المطلوب، والفرامل التي تسمح بإيقاف السيارة. من جهة أخرى، للسيارة مخرجان يتمثلان بموضع السيارة وسرعتها. بالتأكيد تؤثر على السيارة العديد من الاضطرابات الخارجية نذكر منها على سبيل المثال: تأثير الرياح، تواجد سيارات أخرى على نفس الطريق، وحالة الطريق. بالتالي نستطيع تمثيل السيارة بواسطة المخطط المبين بالشكل (1-3).

تسمى في هندسة التحكم الطريقة التي تستجيب فيها مخارج النظام إلى التغيرات في دخله باستجابة النظام, حيث تسعى هندسة التحكم إلى تقدير استجابة النظام باستخدام النموذج الرياضي له, بمعنى أخر تمكننا معرفة مداخل النظام بالإضافة إلى نموذجه الرياضي من حساب مخارجه.




**الشكل (1-3): تمثيل السيارة.**

**1-2-2 النظام ذو الحلقة المغلقة:**

قدمنا في الفقرة السابقة النظام المتمثل بالسيارة. لننتقل الآن إلى تحليل سلوك السائق مع الأخذ بعين الاعتبار الاضطرابات التي تعوق السيارة.

لنفرض أن السائق يقود سيارته على طريق مستقيم تماماً، في منطقة خالية من الرياح، علماً أنه الوحيد الذي يسلك هذا الطريق (بمعنى أخر: لا توجد سيارات أخرى تسلك نفس الطريق). إن هذه الشروط مثالية حيث اعتبرنا أن الاضطرابات معدومة. في هذه الحالة ليس على السائق إلا أن يوجه مقوده في الاتجاه الصحيح، ويضغط على دواسة البنزين حتى يحصل على السرعة المطلوبة. تعطى هذه الحالة الرقم /1/.

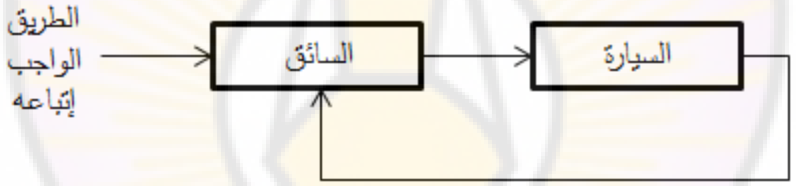
لنفرض الآن أن السائق يواجه طريقاً صاعداً. إذا كان السائق يعرف طريقه بشكل تام، ويعرف مسبقاً التغيرات التي سوف يواجهها في الطريق، فالسائق يستطيع القيادة وبدون النظر إلى الطريق، بأن يقوم فقط بمراقبة السرعة، وبتغيير توجيه المقود بالاتجاه الصحيح وفي الوقت المناسب، وذلك ليتتبع الطريق بشكل صحيح. لنعطي هذه الحالة رقم /2/.

لنترك الآن هاتين الحالتين المثاليتين ولنقترب من الواقعية. لنفترض أنه قد تم إعادة تزفيت الطريق بطول /2/ كم، وبالتالي تغيرت طبيعة الطريق أثناء مسير السيارة، إضافةً إلى تعرض السيارة للرياح، وكان هناك سيارات أخرى تسير على نفس الطريق بسرعة أقل. في هذه الحالة فإن السائق مضطر إلى النظر على الطريق لتصحيح المسار، بواسطة المقود (تذكر أن المقود هو أحد مداخل النظام التي يستطيع السائق أن يتحكم

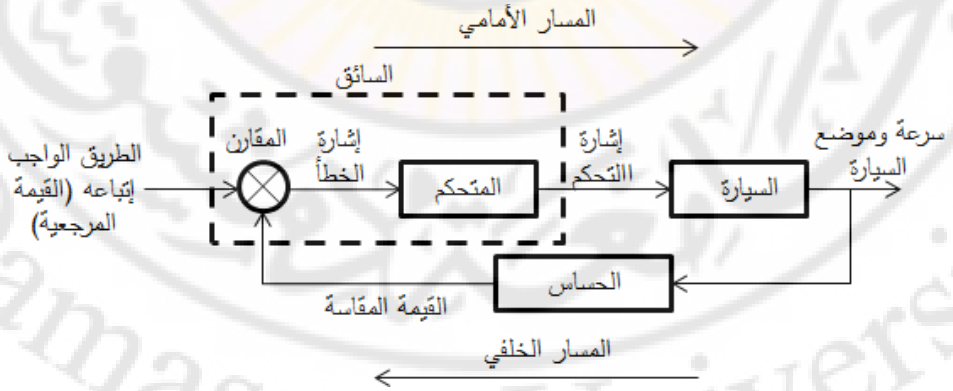
بها)، وإبطاء السيارة عندما يصادف سيارة أخرى ولا يستطيع تجاوزها. نلاحظ، في هذه الحالة الثالثة أن السائق يؤثر بشكل دائم على مداخل السيارة (المقود، دواسة البنزين، الفرامل) حتى يتأكد من اتباع المسار بشكل صحيح. يمكن القول، في هذه الحالة، إن جملة السيارة– السائق في حالة حلقة مغلقة، كما يبين الشكل (1-4).

في الحالات /1/ و /2/، حقيقة عدم النظر إلى الطريق يؤدي إلى قيادة السيارة بحالة حلقة مفتوحة، طبعاً لا داعي من التأكيد على النتائج الكارثية لتلك القيادة.

يمثل السائق في هذا النظام نظام التحكم أو المتحكم الذي يتحكم بالنظام المراد التحكم به وهو السيارة. كما هو موضح بالشكل (1-5) يؤثر المتحكم (السائق) على مداخل النظام (المقود، دواسة البنزين، الفرامل), بحيث يتحكم بخرج النظام (موضع وسرعة السيارة). يقوم السائق بمقارنة خرج النظام مع الإشارة المرجعية والمتمثلة بالطريق الواجب إتباعه ليتخذ بعد ذلك القرار الصحيح للتحكم بالسيارة.




**الشكل (1-4): نظام الحلقة المغلقة لجملة السيارة – السائق.**




**الشكل (1-5): تفصيل لمهمة السائق في نظام الحلقة المغلقة لجملة سيارة – سائق.**

يتبين من الشكل (1-5) ضرورة وجود حساس أو مقياس في نظام الحلقة المغلقة يمكن السائق من معرفة خرج النظام الحالي. يقوم في مثال السيارة، كل من مقياس سرعة السيارة وعيني السائق بهذه المهمة. يمكن ملاحظة أيضاً أن المتحكم والنظام المراد التحكم به يقعان ضمن المسار الأمامي أو (Forward Path) للحلقة المغلقة، أما الحساس فيقع ضمن المسار الخلفي أو (Backward Path) للحلقة. تتم مقارنة القيمة المقاسة لخرج النظام والقيمة المرجعية (القيمة المرغوبة) لهذا الخرج بواسطة المقارن.

يتم إدخال الفرق بين هاتين القيمتين (أو ما يُعرف بإشارة الخطأ) إلى المتحكم والذي يولد، اعتماداً على إشارة الخطأ، إشارة تُعرف بإشارة التحكم، والتي تعمل على التحكم بالنظام بحيث تصبح قيمة خرجه مطابقة للقيمة المطلوبة.

**تستخدم نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة مقاييس لقياس إشارة الخرج وتغذى خلفياً ليتم مقارنتها مع القيمة المرغوبة لإشارة الخرج (الإشارة المرجعية).**

**1-2-3 نظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة:**

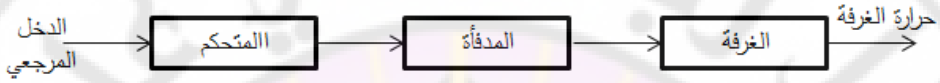
إن النظم التي يكون فيها الخرج غير مؤثر بنظام التحكم، تسمى بالنظم ذات الحلقة المفتوحة, بالعودة إلى مثال السيارة، يكون النظام في الحالات المشار إليها بالرقم /1/ و /2/، في حالة حلقة مفتوحة حيث إن السائق لا ينظر لا إلى الطريق، ولا على مقياس السرعة، وبالتالي لا توجد صلة وصل بين خرج النظام والمتحكم.

مما سبق يمكن القول إنه في النظام ذو الحلقة المفتوحة، خرج النظام لا يقاس ولا يقارن مع الدخل. لنأخذ المثال التالي على النظم ذات الحلقة المفتوحة وهو الغسالة الكهربائية. إن نقع وغسيل وتنشيف الملابس والتي تتم خلال عملية الغسيل تتم على أساس زمني، حيث إن الغسالة لا تقيس إشارة الخرج والتي هي نظافة الملابس.

من جهة أخرى، في أي نظام ذو حلقة مفتوحة كل دخل مرجعي يقابل شرطاً محدداً، وبالتالي فإن دقة النظام تعتمد على معايرة الشرط (Calibration). في حال وجود اضطرابات تصيب النظام فإن نظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة لا ينجز المهمة

المطلوبة، وبالتالي يستخدم هذا النظام فقط عندما تكون علاقة الدخل بالخرج معروفة وفي حال غياب الاضطرابات.

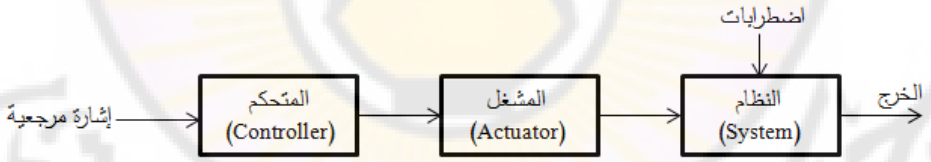
إن نظام تدفئة غرفة بواسطة مدفأة الغاز، والمبين بالشكل (1-6) أحد الأمثلة على النظم ذات الحلقة المفتوحة.




**الشكل (1-6): نظام التحكم بدرجة حرارة غرفة، ذو الحلقة المفتوحة.**

إذا تم إشعال مدفأة الغاز في الغرفة، بحيث يتم تعيير درجة الحرارة على ($20^{o}C$) فإنها ستبقى عند هذه القيمة ما لم تحدث أي اضطرابات. هذه الاضطرابات يمكن أن تحدث إذا ترك باب الغرفة مفتوحاً أو إذا تغيرت درجة الحرارة الخارجية. في حال حدوث هذه الاضطرابات، سوف تتغير درجة حرارة الغرفة. حتى تبقى درجة الحرارة ثابتة، فإن آلية التحكم بدرجة الحرارة تتطلب تغيير طاقة الخرج لمدفأة الغاز عند حدوث اضطرابات.

يبين الشكل (1-7) المخطط الصندوقي العام لنظام التحكم ذو حلقة مفتوحة.




**الشكل (1-7): المخطط الصندوقي لنظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة.**

نجد بمقارنة الأشكال (1-6) و(1-7) أن النظام المتحكم به هو الغرفة المراد التحكم بدرجة حرارتها، أما المشغل والذي يملك القدرة على التأثير على النظام فهو المدفأة.

**يستخدم نظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة وسيلة تشغيل (Actuating device) للتحكم مباشرة بالنظام المراد التحكم به وذلك بدون استخدام إشارة تغذية خلفية.**

**1-2-4 مقارنة بين نظم التحكم ذات الحلقة المفتوحة والمغلقة:**

سنقارن فيما يلي بين نظم التحكم ذات الحلقة المفتوحة والمغلقة، من حيث الحساسية للاضطربات، الاستقرار وحالة تغير الدخل.

– إن ميزة نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة هي جعل استجابة النظام غير حساسة للاضطرابات الخارجية، علماً أنه لا يمكن تحقيق هذه النتيجة باستخدام نظام تحكم ذو الحلقة المفتوحة.

– من وجهة نظر استقرار النظام، لا يُعدّ استقرار النظام ذو الحلقة المفتوحة مشكلة رئيسية، بينما يُعدّ الاستقرار من أهم المشاكل التي تواجه النظام ذو الحلقة المغلقة حيث يسعى النظام لإلغاء إشارة الخطأ، وأثناء ذلك قد تحدث اهتزازات ثابتة أو متغيرة في مطال إشارة الخرج.

– ينصح في النظم التي يكون فيها التغير الزمني للدخل معروفاً مسبقاً، باستخدام الحلقة المفتوحة، أما في النظم المعرضة لتغيرات غير متوقعة لدخل النظام، فيُفضل استخدام نظام تحكم ذو حلقة مغلقة.

**1-3 أمثلة عن نظم التحكم الآلي:**

**1-3-1 نظام التحكم بدرجة حرارة غرفة (Room Temperature Control System):**

يبين الشكل (1-8) البنية الفيزيائية لنظام التحكم بدرجة حرارة غرفة. في هذا الشكل، تقارن الإشارة الناتجة عن مقياس الحرارة (Thermometer) مع درجة الحرارة المطلوبة، يدفع وجود فرق بين هاتين الإشارتين بالمتحكم لإرسال إشارة تحكم إلى ملف صمام الغاز، فتتولد حركة خطية لذراع الصمام، وبالتالي يتم ضبط تدفق الغاز إلى المدفأة (Burner), ويتم ضبط درجة الحرارة المطلوبة يدوياً بواسطة مقاومة متغيرة أو مجزئ جهد (Potentiometer).

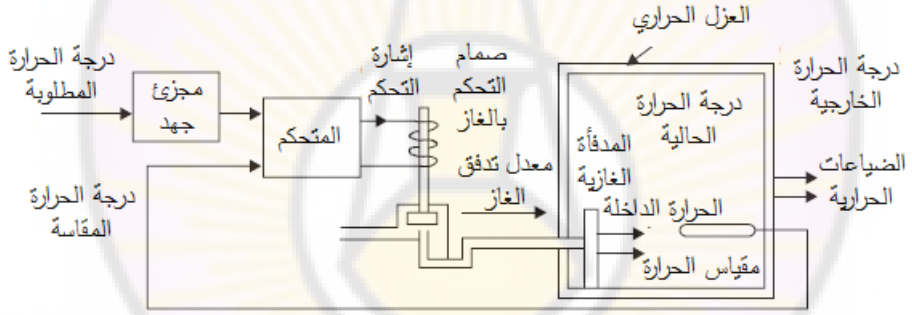
يبين الشكل (1-9) المخطط الصندوقي التفصيلي المبين للنظام في الشكل (1-8). في هذا الشكل، تم وضع الوحدات الفيزيائية للإشارة ضمن أقواس على مدار نظام التحكم

المغلق. يصل هذا النظام إلى الحالة المستقرة عندما تتساوى درجات الحرارة الحالية والمطلوبة، كما أن الحرارة داخل الغرفة توازن الحرارة المفقودة عبر جدران الغرفة.

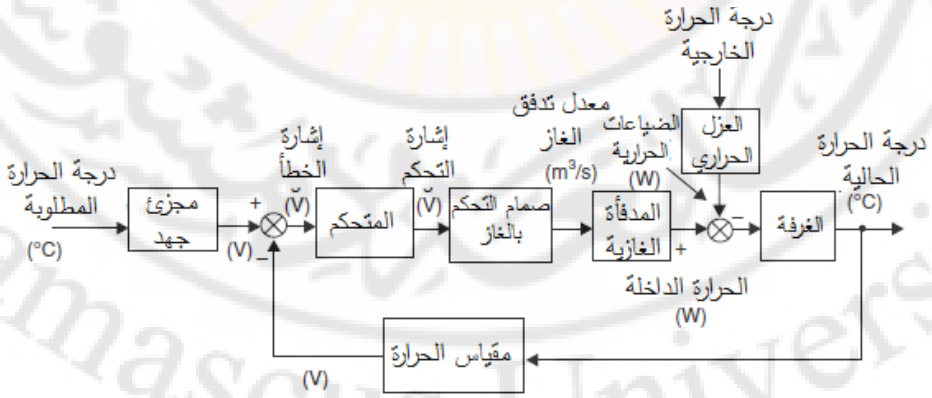
يمكن أن يعمل نظام التحكم وفق نمطين:

**أ – التحكم التناسبي:**

تكون حركة ذراع الصمام متناسبة مع إشارة الخطأ في هذه الحالة، مما يؤدي إلى تعديل مستمر للحرارة الداخلية إلى الغرفة، والتحكم الدقيق بدرجة الحرارة. يستخدم هذا النوع من التحكم في التطبيقات الهامة التي لا تسمح بتغيير حول درجة الحرارة المطلوبة بأكثر من درجة مئوية واحدة ( مثل غرف العمليات في المشافي، الغرف الصناعية المهمة، ...إلخ). في هذه التطبيقات تكون الدقة أكثر أهمية من التكلفة.




**الشكل (1-8): نظام التحكم بدرجة حرارة غرفة.**




**الشكل (1-9): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بدرجة حرارة غرفة.**

**ب – التحكم الثنائي وصل/فصل On-Off:**

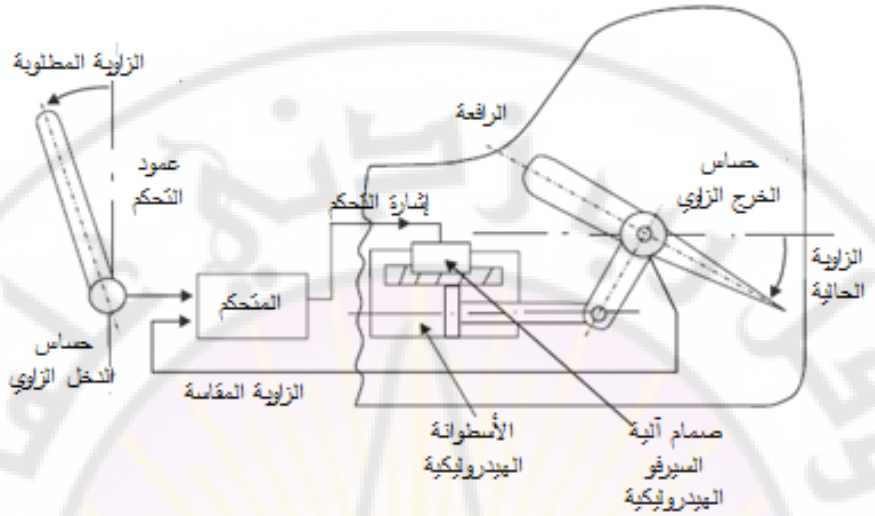
يدعى هذا النوع من التحكم أيضاً بـ (Bang-Bang Control), حيث يكون الصمام فيه إما مفتوح تماماً أو مغلق تماماً. يؤدي هذا النوع من التحكم إلى حدوث اهتزازات بمقدار /2/ إلى /3/ درجة مئوية حول درجة الحرارة المطلوبة, لكنه تحكم رخيص الثمن ويستخدم في التطبيقات منخفضة التكلفة (مثل نظم التدفئة المنزلية).

**2-3-1 نظام التحكم بالسطح الرافع للطائرة (Aircraft Elevator Control):**

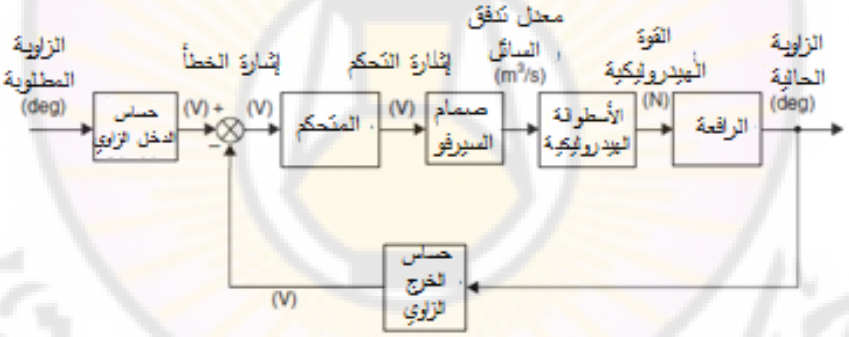
يقوم قائد الطائرة في هذا النظام بتحريك السطح الرافع للطائرة إما للأعلى أو للأسفل وذلك بتحريك عمود التحكم (Control Column) الموجود في قمرة القيادة, ويبين الشكل (1-10) نظام التحكم بالسطح الرافع للطائرة. يوجد على دخل النظام حساس زاوي يقوم بتحسس الزاوية التي قام قائد الطائرة بتحريك عمود التحكم إليها, وتقارن الإشارة المتولدة من هذا الحساس مع إشارة الحساس الزاوي المتوضع على خرج النظام والذي يقيس زاوية انحراف السطح الرافع الحالية. نتيجة لهذه المقارنة تتولد إشارة الخطأ والتي ترسل إلى المتحكم والتي على أساسها تولد إشارة التحكم. تغذى إشارة التحكم إلى الصمام الكهرو – هيدروليكي، مما يؤدي إلى حركة ذراع الصمام (Spool-valve). هذه الحركة تتناسب مع إشارة التحكم، وتسمح بدخول سائل ذو ضغط عالي إلى الاسطوانة الهيدروليكية (Hydraulic cylinder). يولد فرق الضغط على طرفي المكبس في الاسطوانة الهيدروليكية قوة التحريك (Actuating force) والتي تؤدي إلى تحريك السطح الرافع.

تكون نسبة استطاعة / وزن لآلية السيرفو الهيدروليكية عالية جداً، وهي مثالية للتطبيقات التي تتطلب تطبيق قوة كبيرة باستخدام وسائط تحريك صغيرة وخفيفة.

يبين الشكل (1-11) المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالسطح الرافع للطائرة.




**الشكل (1-10): نظام التحكم بالسطح الرافع للطائرة.**



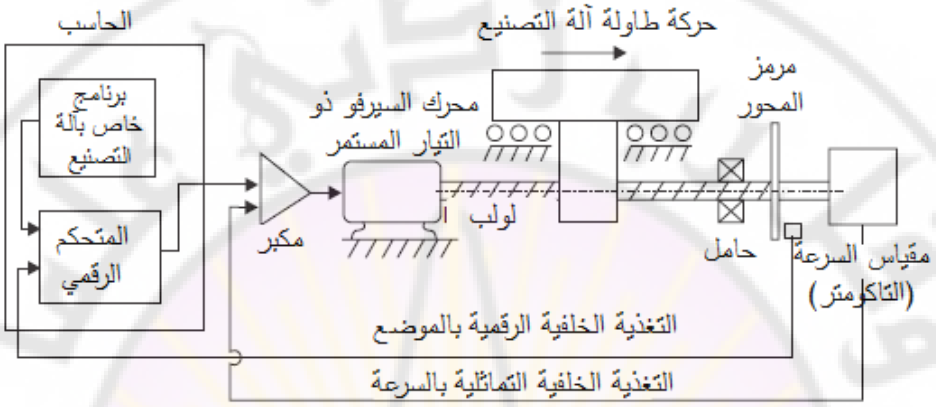

**الشكل (1-11): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالسطح الرافع للطائرة.**

### 1-3-3 التحكم الرقمي باستخدام الحاسوب بآلة تصنيع ميكانيكي:

يبين الشكل (1-12) أحد الأمثلة عن التحكم الرقمي بآلة تصنيع ميكانيكي, باستخدام الحاسوب ( Computer numerically controlled أو CNC ).

في هذا النظام، نقوم بتخزين في الحاسوب المعلومات المتعلقة بشكل القطعة التي سوف تعمل الآلة على تشكيلها, إضافة إلى الحركات التي تقوم بها الآلة لتنفيذ هذا الشكل للقطعة. هذه المعلومات تكون مخزنة بصيغة رقمية في المتحكم الرقمي (Digital Controller), وتتم مقارنتها مع إشارة التغذية الخلفية والممثلة لوضع القطعة

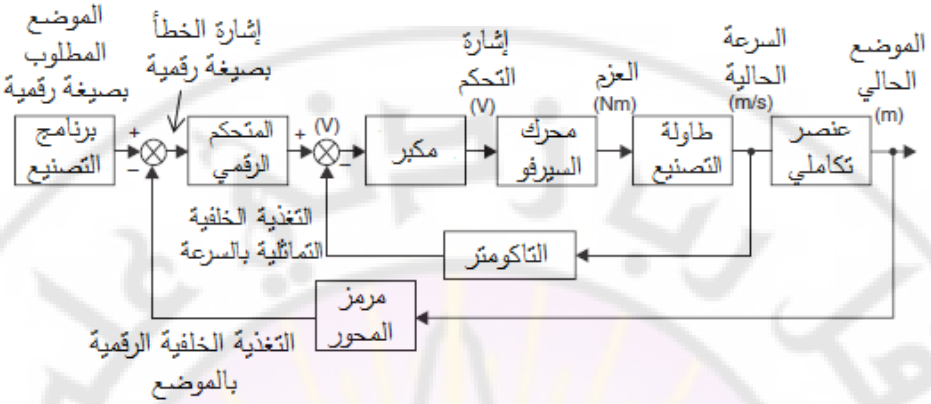
المراد تشكيلها وسرعتها. تتولد إشارة الخطأ الرقمية نتيجة مقارنة الإشارة المخزنة في الحاسب مع الإشارات المقاسة.




**الشكل (1-12): التحكم الرقمي باستخدام الحاسب بآلة تصنيع ميكانيكي.**

في هذا النظام، نقوم عن طريق البرمجية الخاصة بآلة التصنيع (Software) بتصميم شكل القطعة المراد تصنيعها، بتحديد الحركات التي يجب أن تقوم بها آلة التصنيع، لنحصل على الشكل المطلوب للقطعة المصنعة. تخزن المعلومات المدخلة إلى البرنامج في المتحكم الرقمي (Digital Controller) بصيغة رقمية, وبحيث يظهر تتابع الأعمال الواجب تنفيذها. تقارن المعلومات الخاصة بالقطعة مع إشارة التغذية الخلفية القادمة من مرمز المحور (Shaft encoder) فتتولد إشارة الخطأ الرقمية. تمثل الإشارة القادمة من مرمز المحور إشارة التغذية الخلفية المتضمنة معلومات عن موضع لولب تحريك طاولة آلة التصنيع. يولد المتحكم إشارة التحكم التماثلية، ويتم تكبيرها، لتستخدم في قيادة محرك السيرفو (DC Servo-motor). يربط إلى محور محرك السيرفو (أحياناً عن طريق علبة سرعة) لولب (Lead-screw) مربوط مع طاولة التصنيع, ومع مرمز المحور, ومع مقياس سرعة (Tachogenerator). إن الهدف من مقياس السرعة هو تزويدنا بإشارة تماثلية متناسبة مع السرعة, لتشكل حلقة تحكم داخلية تعمل على استقرار استجابة النظام.

يبين الشكل (1-13) المخطط الصندوقي للتحكم الرقمي باستخدام الحاسوب بآلة تصنيع ميكانيكي.



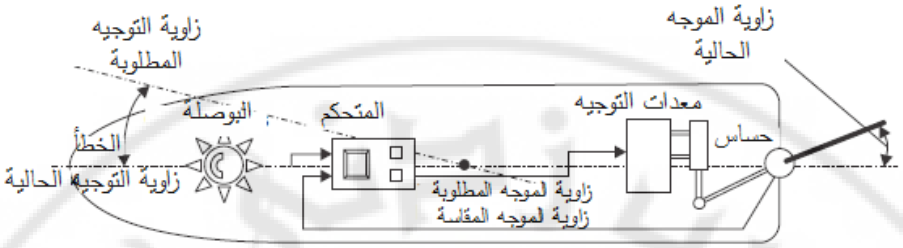

**الشكل (1-13): المخطط الصندوقي للتحكم الرقمي باستخدام الحاسب بآلة تصنيع ميكانيكي.**

**1- 3- 4 نظام التحكم بسفينة مجهزة بنظام قيادة ذاتي ( Ship autopilot control system):**

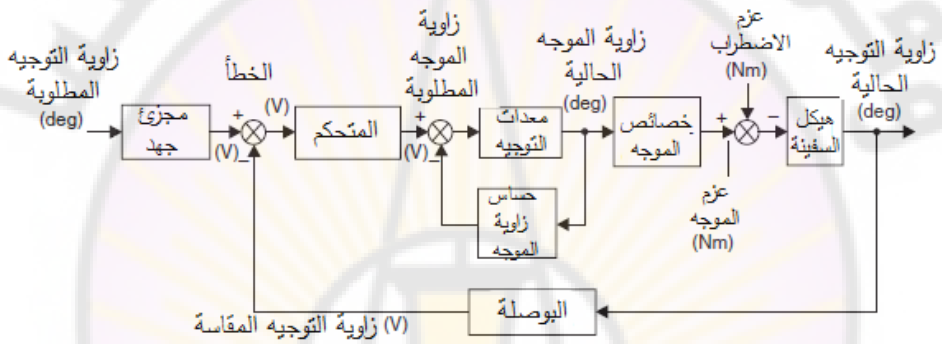
تجهز السفينة بنظام قيادة ذاتي للمحافظة على اتجاه معين, على الرغم من أن السفينة قد تكون عرضة للاضطرابات مثل الرياح، الأمواج والتيارات المائية. يشار إلى طريقة التحكم هذه بالمحافظة على المسار (Course- Keeping). يبين الشكل (1-14) العناصر الرئيسية في نظام القيادة الذاتي.

يقاس الاتجاه الحالي للسفينة بواسطة بوصلة (Gyro-Compass)، ويقارن مع الاتجاه المطلوب المحدد لنظام القيادة الذاتي بواسطة قبطان السفينة. يقوم نظام القيادة الذاتي أو المتحكم بحساب زاوية التوجيه المطلوبة ويقوم بإرسال إشارة التحكم إلى مسنن القيادة. تتم مراقبة زاوية التوجيه الحالية بواسطة حساس زاوية الموجه (Rudder angle sensor) وتقارن مع زاوية التوجيه المطلوبة ليتم تشكيل حلقة التحكم.

يُطبق الموجه عزم تحكم على جسم السفينة لتحويلها من الاتجاه الحالي إلى الاتجاه المطلوب, بالرغم من أن عزوم الرياح والأمواج والتيارات المائية قد تساعد أو تعوق عزم التحكم. يبين الشكل (1-15) المخطط الصندوقي لنظام التحكم بسفينة ذاتية القيادة.




**الشكل (1-14): نظام التحكم بسفينة مجهزة بنظام قيادة ذاتي.**

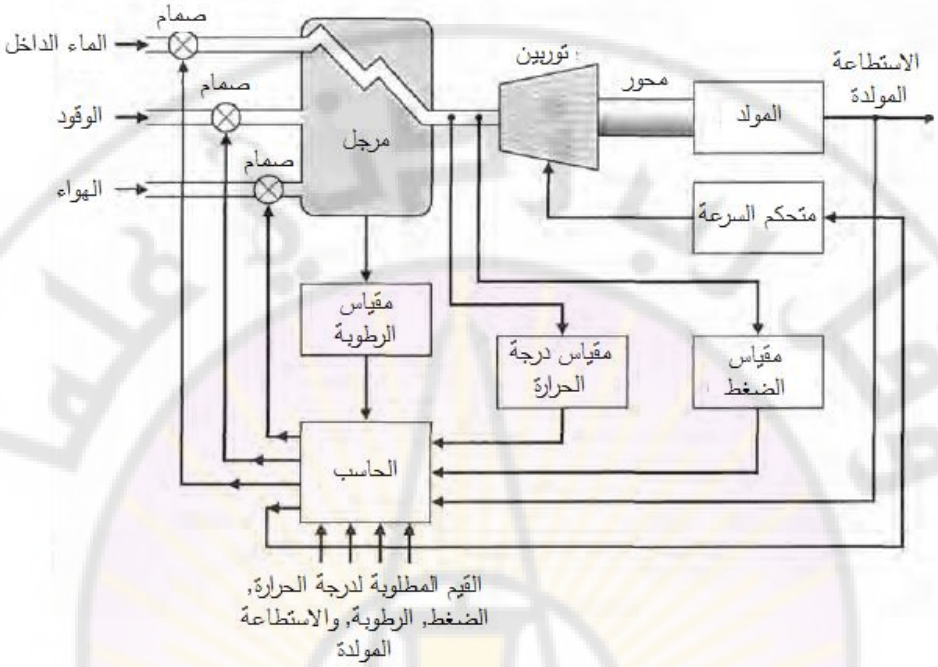



**الشكل (1-15): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالسفينة.**

### 1-3-5 نظام التحكم بنظام توليد كهربائي:

تتطلب محطات التوليد الكهربائية، وخصوصاً ذات الاستطاعة الكبيرة والتي قد تصل إلى عدة مئات من الميغاوات، نظم تحكم بمتحولات النظام وذلك للحصول على إنتاج الطاقة الأمثل.

في الشكل (1-16) نجد أن النظام يقوم بقياس درجة حرارة، ضغط، ونسبة الرطوبة في المرجل، كما يقوم بقياس الاستطاعة المولدة. يقوم المتحكم بالتحكم بالماء، والوقود والهواء الداخل إلى المرجل، كما يقوم بالتحكم بسرعة دوران التوربين.




**الشكل (1-16): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بنظام توليد كهربائي.**

**4-1 تحديد المصطلحات الأساسية:**

قبل مناقشة نظرية التحكم الآلي، لابد من تعريف بعض المصطلحات الأساسية:

– المتحول المتحكم به (Controlled Variable) والمتحول الذي يتم التأثير عليه (Manipulated Variable): يتحدد الأول بالكمية المقاسة والمتحكم بها, والثاني بالكمية التي يتم تغييرها بواسطة المتحكم (Controller) للتأثير على قيمة المتحول المتحكم به. عادة يكون المتحول المتحكم به هو خرج النظام. مما سبق نجد أن التحكم يعني قياس قيمة المتحول المتحكم به للنظام واستخدام المتحول الذي يمكن التأثير عليه وذلك بهدف تصحيح أو الحد من انحراف القيمة الحالية للمتحول المراد التحكم به عن القيمة المطلوبة.

نحتاج أيضاً في هندسة التحكم إلى مصطلحات إضافية ولكن ضرورية لوصف نظم التحكم, سنستعرضها فيما يلي:

– الجهاز (Plant): عبارة عن مجموعة من التجهيزات التي تعمل معاً بهدف إنجاز عملية محددة. عموماً، يدعى أي جسم فيزيائي يراد التحكم به مثل آلة ميكانيكية أو فرن تدفئة أو مفاعل كيميائي بالجهاز.

– العملية (Process): يقصد بالعملية النشاط أو التطور المميز بتغييرات متدرجة ومتتابعة، للوصول إلى نتيجة أو هدف محدد. يمكن أن يقصد بالعملية النشاط المصطنع، المؤلف من مجموعة من الإجراءات أو الحركات المتحكم بها، والمؤدية إلى نهاية أو نتيجة محددة. تدعى عموماً، أي فعالية يراد التحكم بها بالعملية، ونذكر على سبيل المثال العمليات الكيميائية، الاقتصادية والبيولوجية.

– النظام (System): يتكون من مجموعة من الأجزاء تعمل معاً لأداء هدف معين، علماً أن النظام ليس مقصوراً فقط على النظام الفيزيائي، بل يمكن أن يطلق النظام على ظواهر ديناميكية مثل تلك التي تظهر في الاقتصاد. لذلك فإن كلمة نظام يمكن أن تتضمن الأنظمة الفيزيائية، والبيولوجية والاقتصادية وما شابه ذلك. يمكن تعريف النظام أيضاً بأنه مجموعة مكونات مترابطة فيما بينها تؤدي وظيفة محددة.

– الاضطراب (Disturbance): هو إشارة تسعى للتأثير السلبي على قيمة خرج النظام. يمكن أن يتولد الاضطراب من داخل النظام فيدعى بالاضطراب الداخلي، أما إذا كان متولداً من خارج النظام فإنه يسمى بالاضطراب الخارجي، ويُعَدّ أحد مداخل النظام.

– التحكم ذو التغذية الخلفية (Feedback Control): هي العملية التي تسعى في حال وجود اضطرابات إلى إنقاص الفرق بين خرج النظام والدخل المرجعي، وتقوم هذه العملية على أساس قيمة هذا الفرق. غالباً ما يشار إلى نظم التحكم ذات التغذية الخلفية بالنظم ذات الحلقة المغلقة.

– التنظيم (Regulation): يمثل بنية تسعى إلى إخضاع خرج النظام لدخله والمسمى بالدخل المرجعي.

– الدخل: هو المقدار الذي يؤثر في حالة النظام.

– الخرج: هو المقدار الذي ينتج عن النظام نتيجةً لتأثير الدخل عليه.

– المقارن (Comparator) : عنصر يقوم بمقارنة القيمة الحالية للمتغير المراد التحكم به مع القيمة المطلوبة. في مثال السيارة يقوم دماغ السائق بعمل المقارن.

– المتحكم (Controller) : يقوم بمعالجة البيانات المتعلقة بالعملية المراد التحكم فيها، وإصدار الأوامر المناسبة وفق منهجية محددة.

– المشغل أو عنصر التشغيل (Actuator or Actuating Device): عنصر يقوم بتنفيذ الأوامر الصادرة عن المتحكم، بهدف التأثير على النظام المراد التحكم به.

**1-5 تصنيف نظم التحكم:**

يتم تصنيف نظم التحكم اعتماداً على خصائص عدة منها: وجود التغذية الخلفية، ودور الإنسان في نظام التحكم، نوعية الإشارة المستخدمة، تبعاً للطاقة المستخدمة، وبحسب التطبيقات المختلفة وغيرها.

**1- التصنيف حسب وجود التغذية الخلفية:**

تصنف نظم التحكم حسب استعمال التغذية الخلفية إلى نظم مغلقة ونظم مفتوحة.

**أ – <u>نظم التحكم ذات الحلقة المفتوحة</u>:**

كما رأينا آنفاً لا يتم في هذه النظم مقارنة القيمة الحالية للمتحول المراد التحكم به (الخرج) مع القيمة المطلوبة، لتحديد خرج المتحكم. تتم عملية التحكم عادةً عن طريق ضبط أو تعيير (Calibration) المتحكم لتحديد قيمة المتحول المؤثر في الخرج وبالتالي التحكم بقيمة المتحول المراد التحكم به.

من الأمثلة على هذا النظام نظام التحكم بسرعة دوران المحرك عن طريق التحكم بتوتر التغذية، علماً أن التغذية تؤمن من دارة تقويم مكونة من عناصر نصف ناقلة (ترياك). عند ضبط قيمة المقاومة المتغيرة للدارة فإن هناك جهداً ذا قيمة معينة يطبق على طرفي المحرك، وبالتالي يدور المحرك بسرعة معينة. عند تغير الظروف الخارجية مثل جهد المصدر الداخل إلى الدارة أو الحمل الميكانيكي على المحرك فإن سرعة المحرك سوف تتغير. وكذلك فإن سرعة المحرك سوف تتغير عند حدوث تغيرات داخلية مثل تغير قيم المقاومات. في كلا الحالتين فإنه للحفاظ على سرعة ثابتة فيجب إعادة ضبط أو تعيير

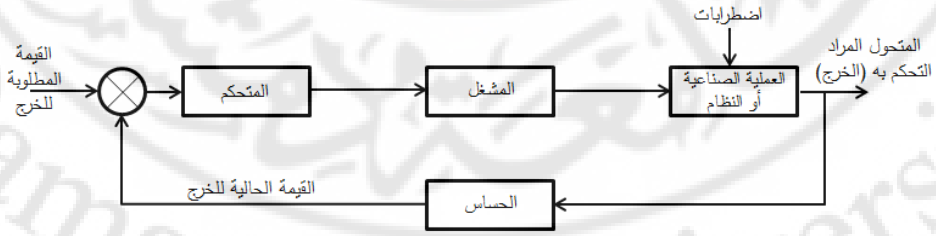
المقاومة المتغيرة في كل حالة. يبين الشكل (1-18) المخطط الصندوقي لنظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة بشكل عام وللمثال المذكور. نلاحظ من هذا الشكل أنه لا يوجد أي ربط بين خرج النظام (سرعة المحرك) ودخله (قيمة زاوية القدح المحددة حسب المقاومة المتغيرة), وبالتالي لا يوجد تأثير من الخرج على دخل النظام. نستنتج مما سبق أن هذا النظام يعطي نتائج مقبولة في الحالات التي تكون فيها ظروف التشغيل الخارجية ثابتة ومستقرة إلى حد ما، وكذلك التغيرات الداخلية في النظام قليلة.

**الشكل (1-18): المخطط الصندوقي لنظام تحكم بسرعة محرك ذو الحلقة المفتوحة.**

يمتاز هذا النظام ببساطة التركيب والتكلفة المنخفضة, ومن مساوئه أنه لا يستطيع تعديل الأخطاء الناتجة عن المؤثرات الخارجية أو الأحمال غير المتوقعة أو التغيرات الداخلية في النظام، مما يجعل خرج النظام غير ثابت على القيمة المطلوبة.

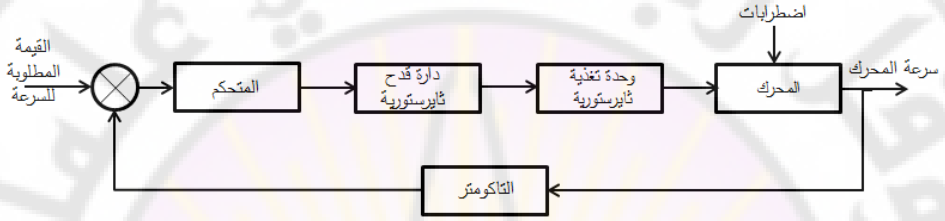
**ب – <u>نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة</u>:**

تمتاز هذه االنظم بوجود تغذية خلفية من خرجها إلى دخلها. يبين الشكل (1-19) المخطط الصندوقي لنظام تحكم بحلقة مغلقة.




**الشكل (1-19): نظام تحكم ذو حلقة مغلقة.**

يبين الشكل (1-20) نظاماً للتحكم بسرعة محرك تيار مستمر بحلقة مغلقة. يتم عن طريق التحكم بزاوية القدح للثيرستورات تغيير قيمة الجهد الواصل إلى طرفي المحرك وبالتالي سرعة المحرك. تتحدد زاوية القدح حسب جهد التحكم الخارج من المتحكم, الذي يعتمد على قيمة كل من سرعة المحرك الفعلية التي يقيسها التاكومتر والسرعة المطلوبة.




**الشكل (1-20): نظام التحكم بسرعة محرك بحلقة مغلقة.**

نورد أهم المميزات التي يوفرها نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة ما يلي: انخفاض التأثيرات الناتجة من التشويش أو الاضطراب المؤثرة في النظام وانخفاض الحساسية لتغيرات عناصر النظام.

**2- التصنيف حسب دور الإنسان في التحكم:**

تقسم نظم التحكم حسب دور الإنسان فيها إلى:

**أ – نظم تحكم يدوية:**

يقوم الإنسان في هذه النظم بدور المتحكم، وتمتاز هذه الطريقة بالسهولة وقلة التعقيد التقني, ولكن من الناحية الأخرى فإن للتحكم اليدوي مساوئ منها عدم الدقة, التأثر بحالة العامل النفسية والجسدية من ملل وإرهاق وعدم انتباه, عدم الحصول على أداء متماثل باختلاف العنصر البشري القائم على التحكم, ولا يمكن استخدامه في الظروف البيئية القاسية أو الخطرة.

**ب – نظم تحكم آلية:**

يتم التحكم بالعملية الصناعية أو بالنظم آلياً ودون تدخل الإنسان وذلك باستخدام جهاز أو مجموعة أجهزة تقوم بمهمة المراقبة والمقارنة والتحكم. وتمتاز نظم التحكم الآلية عن اليدوية:

– سرعة الاستجابة: حيث تستطيع التعامل مع الأحداث والتغيرات التي تحصل في أجزاء صغيرة من الثانية.

– يمكن استخدامها في التطبيقات المختلفة التي لا يستطيع الإنسان القيام بها بسبب الظروف البيئية القاسية أو الخطرة.

– لا تتأثر بالعوامل المؤثرة على فعالية الإنسان مثل الإرهاق وضعف الأداء مع الزمن.

– الحصول على أداء متماثل لا يختلف باختلاف العنصر البشري القائم على التحكم.

– النظم الآلية أكثر اقتصادية.

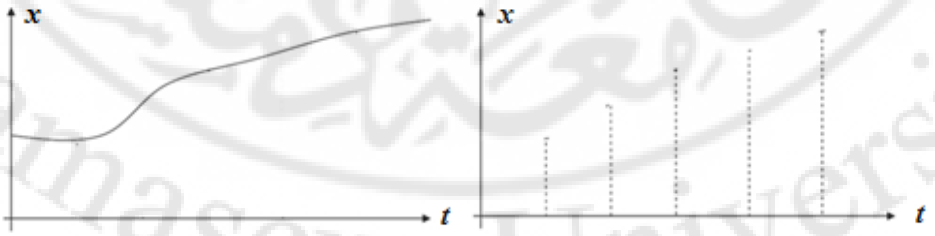
– زيادة الإنتاجية.

**3- التصنيف حسب نوعية الإشارات المستخدمة:**

تصنف الإشارات بشكل عام وتلك المستخدمة في نظم التحكم إلى:

1- إشارات تماثلية: وهي إشارات مستمرة تأخذ قيمة في أي لحظة زمنية وذلك بين قيمتين عليا ودنيا.

2- إشارات رقمية: وتأخذ الإشارة فيها قيماً محددة في لحظة محددة (لحظات التقطيع) وذلك بين قيمتين عليا ودنيا.




**الشكل (1-21): الإشارات المستخدمة: التماثلية والرقمية(أو المتقطعة).**

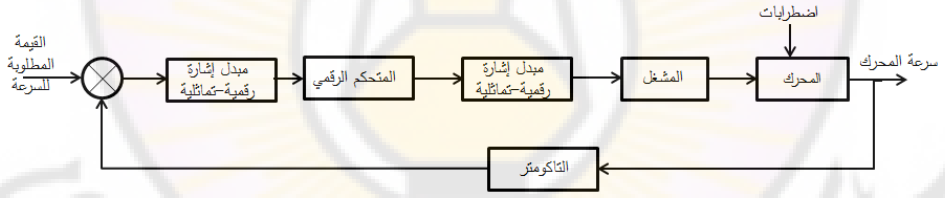
واعتماداً على هذه الإشارات يمكن تصنيف نظم التحكم إلى:

**أ – نظم تحكم تماثلية:**

تُستخدم عناصر وطرائق معالجة الإشارات التماثلية في نظم التحكم, من خلال المكبرات ومضخمات العمليات وغيرها لمعالجة الإشارات التماثلية في نظام التحكم. في هذا الكتاب، سنعالج نظم التحكم التماثلية.

**ب – نظم التحكم الرقمية أو المتقطعة:**

حيث تستخدم عناصر وطرائق معالجة الإشارات الرقمية في نظم التحكم، وقد انتشرت هذه النظم بسبب انتشار المعالجات والمتحكمات الصغرية في الصناعة وتستخدم في هذه النظم مبدلات الإشارات الرقمية– التماثلية (أو Digital-Analog Converter أو DAC) ومبدلات الإشارات التماثلية– الرقمية (أو Analog- Digital Converter أو ADC) من أجل مواءمة هذه النظم مع العالم الحقيقي الذي تأخذ فيه المتحولات المختلفة قيماً تماثلية. يبين الشكل (1-22) المخطط الصندوقي لنظام التحكم الرقمي.




**الشكل (1-22): المخطط الصندوقي لنظام التحكم الرقمي.**

**4 – التصنيف حسب التطبيقات المختلفة:**

**أ – نظم السيرفو (Servo Mechanisms):**

وهي نظم ذات حلقة مغلقة، التي يكون فيها المتحول المراد التحكم فيه هو الموضع أو السرعة، ومن الأمثلة عليها، نظام التحكم بسرعة محرك تيار مستمر أو متناوب ونظام التحكم بالموضع لمحرك خطوي.

**ب – نظم التحكم التتابعية:**

إذا كانت عملية التحكم مكونة من سلسلة من الخطوات المحددة مسبقاً، فإن هذا النظام يسمى بنظام تحكم تتابعي، ويمكن تصنيفها إلى:

**1- التحكم المتتابع الأحداث (Event Sequenced Control):**

تبدأ كل خطوة في هذا النظام والذي يسمى بعد حدوث حدث معين, حيث يكون الحدث عبارة عن تشغيل محرك أو ضاغط كهربائي أو إغلاق مفتاح حدي (Limit Switch)، أو عمل حساس حرارة أو ضغط.

**2- التحكم المتتابع بالزمن (Time Sequenced Control):**

تبدأ كل خطوة في هذا النظام والذي يسمى (Timed Discrete Event System)، عند زمن معين أو بعد زمن معين ويمثل نظام التحكم بالإشارات الضوئية في الشوارع مثالاً لهذا النظام.

**3- التحكم المتتابع بالأحداث/ الزمن:**

تبدأ كل خطوة في هذا النظام إما بعد زمن معين من حدوث حدث معين، أو بعد حدوث حدث معين. ويمكن اعتبار الغسالة الكهربائية مثالاً لذلك، فعند انتهاء عملية تعبئة الماء أو إعطاء إشارة بذلك من مفتاح المستوى، تبدأ عملية التسخين والتقليب، ثم عند الوصول إلى درجة الحرارة المطلوبة تبدأ عملية الغسيل والتنشيف بتتابع زمني حسب البرنامج المطلوب.

**جـ- نظم التحكم الرقمية بالحاسوب (Computerized- Numerical Control):**

يمثل نظام تحكم رقمي, يستخدم تعليمات محددة سلفاً للتحكم بسير عمليات التصنيع, يتم ترميزهذه العمليات كقيم عددية وتخزينها في ذاكرة الحاسوب. وتقوم آلات (CNC) بعمليات الخراطة والتفريز والتثقيب والقطع... وغيرها. يُعَدّ المثال الوارد في الفقرة 1-3-3 مثالاً نموذجياً لها.

تندرج ضمن نظم التحكم الرقمية بالحاسوب (CNC) النظم التالية:

**1- نظم التحكم الرقمية المباشرة (Direct Digital Control):**

يكون للحاسب دور أساسي في عملية التحكم, فهو يقوم مقام دارات التحكم بواسطة برامج تحكم خاصة.

**2- نظم التحكم الإشرافي وتحصيل البيانات ( Supervisory Control And Data Acquisition أو SCADA):**

حيث يقوم الحاسب بالإشراف وبمراقبة العملية الصناعية، أما التحكم الفعلي فتقوم به دارات تحكم تماثلية أو رقمية.

**د- أنظمة التحكم بالإنسان الآلي (Robotics).**

**هـ- المتحكم المنطقي المبرمج (PLC).**

**5- التصنيف حسب الطاقة المستخدمة:**

وتصنف نظم التحكم حسب الطاقة المستخدمة إلى:

**أ- نظم التحكم الكهربائية:**

تشمل الأمثلة على هذه النظم نظم التحكم بحرارة المياه في السخانات الكهربائية, أو حرارة الاتصهار في أفران الصهر الكهربائية, وهناك أيضاً نظم التحكم بسرعة المحركات الكهربائية بحيث يتم التحكم بالتوتر المغذي للمحرك أو بتردد المنبع حسب نوع المحرك. يمكن ملاحظة أنه في هذه النظم جميع المقادير المتواجدة في نظام التحكم هي مقادير كهربائية. تم تطوير الحساسات لتحويل المقادير الفيزيائية إلى مقادير كهربائية مناظرة تستطيع دارات التحكم معالجتها، كما طورت المشغلات بحيث تقوم بتحويل الأوامر الكهربائية الصادرة عن دارات التحكم إلى إجراءات عملية يمكن التأثير بواسطتها على المقادير المراد التحكم بها في النظم أو العمليات الصناعية.

**ب- نظم التحكم الميكانيكية:**

يمكن أن يستخدم للتأثير على وضع النظم:

- الهواء المضغوط (تحكم هوائي أو Pneumatic Control).
- الزيوت المضغوطة (تحكم هيدروليكي أو Hydraulic Control).

في نظم التحكم الهيدروليكية، تُستخدم طاقة الزيت المضغوط لتحويلها إلى طاقة ميكانيكية، وتمتاز بإمكانية الحصول على قوة ميكانيكية كبيرة.

في نظم التحكم الهوائية، تستخدم طاقة الهواء المضغوط لتحويلها إلى طاقة ميكانيكية للاستفادة منها في العمليات الصناعية.

**1-6 خصائص نظم التحكم:**

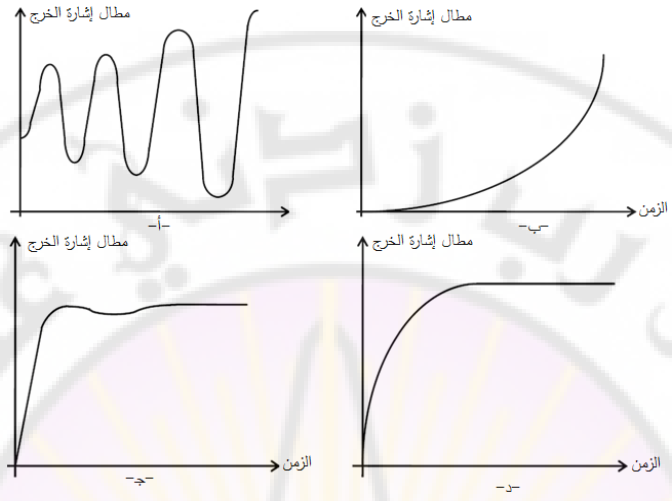
يعمل نظام التحكم بشكل فعال وصحيح إذا كانت القيمة الحالية للمتحول المراد التحكم فيه مساوية أو قريبة من القيمة المطلوبة، وبشكل عام هناك بعض الخصائص التي تؤخذ بعين الاعتبار عند تقييم أداء نظم التحكم منها:

**1- الاستقرار (Stability):**

يتحدد استقرار النظام من استقرار قيمة خرجه وعدم تغيرها مع الزمن بعد زمن معين من تطبيق إشارة الدخل الثابتة. إذا استقرت قيمة خرج النظام ولم تتغير مع الزمن فإنه يقال إن النظام مستقر. أما إذا استمرت قيمة الخرج في الزيادة أو التذبذب مع الزمن فإنه يقال إن النظام غير مستقر. يبين الشكل (1-23) أمثلة عن الإشارات المستقرة وغير المستقرة.

**2- الدقة (Accuracy):**

وهي مقياس لمقدار انحراف القيمة النهائية للمتحول عن القيمة المطلوبة في نظام التحكم. وتتفاعل كلاً من الدقة والاستقرارية بعضهما مع بعض في نظم التحكم العملية، إذ إننا قد نفقد الاستقرارية إذا حاولنا زيادة الدقة، والعكس صحيح. يمكن أن نتحقق من الدقة بتقدير الفرق بين القيمة المطلوبة والقيمة الفعلية والنهائية لخرج النظام، كما هو مبين بالشكل (1-24).

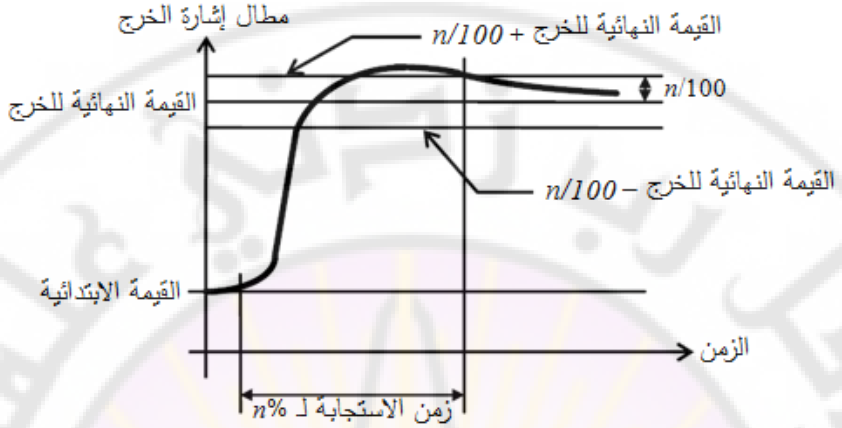



**الشكل (1-23): أمثلة عن الإشارات المستقرة (جـ- د) وغير المستقرة (أ-ب).**

**الشكل (1-24): تقدير دقة النظام.**

**3- سرعة الاستجابة (Speed of Response):**

تشكل سرعة الاستجابة مقياساً لسرعة وصول نظام التحكم إلى القيمة النهائية المستقرة بعد تطبيق إشارة الدخل. إن معيار تقدير سرعة النظام الخطي هو زمن الاستجابة لـ $n\%$, وهو الزمن اللازم لبقاء خرج النظام في حدود النسبة المئوية $\pm n\%$ من قيمته النهائية، كما هو مبين بالشكل (1-25).



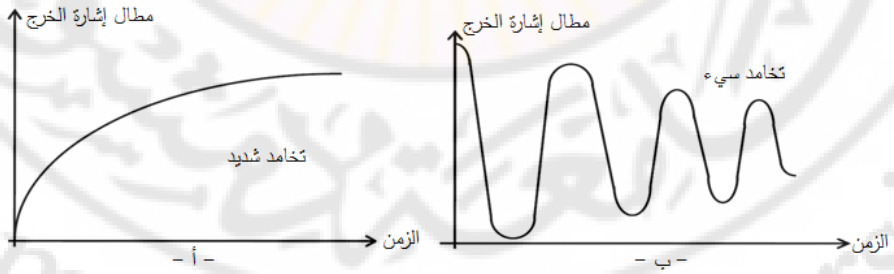

**الشكل (1-25): تقدير سرعة استجابة النظام.**

**4- الحساسية (Sensitivity):**

تعدّ الحساسية مقياساً لتأثر خرج النظام بتغييرات قيم العناصر المكونة له والظروف المحيطة (التشويشات والاضطرابات الخارجية).

**5- التخامد (Dampening):**

يمكن أن يحوي خرج النظام على بعض الاهتزازات وذلك عند مروره من قيمة إلى أخرى، علماً أن التخامد الشديد يؤدي إلى فقدان كبير في سرعة النظام كما هو مبين في الشكل (1-26–أ). توجد أيضاً علاقة وثيقة بين التخامد والاستقرار كما هو مبين في الشكل (1-26–ب) حيث يعتبر النظام غير مستقر لأن خرجه يحوي اهتزازات شديدة.



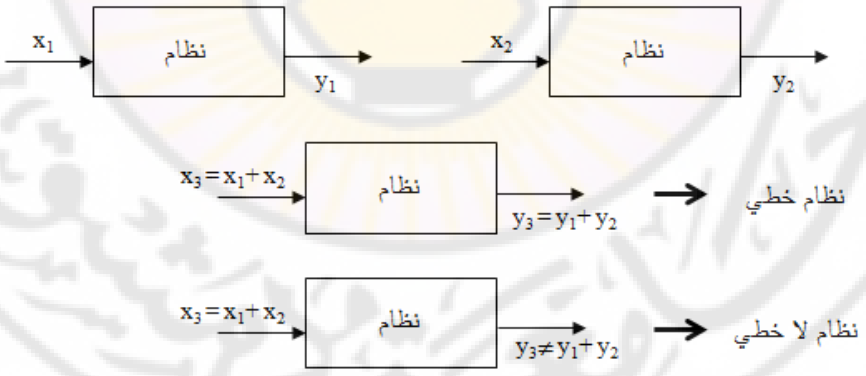

**الشكل (1-26): العلاقة بين التخامد والاستقرار.**

**7-1 النظم الخطية, والمستمرة, وذات المعاملات الثابتة:**

سنهتم في هذا الكتاب بالنظم الخطية ذات المعاملات الثابتة ( Linear Time-Invariant Systems أو LTI systems). كما سنتخصص بالنظم المستمرة. فيمايلي سنقوم بشرح كل خاصية من خصائص هذه النظم.

– النظم المستمرة: كما رأينا سابقاً أثناء تصنيف نظم التحكم، يمكن تصنيف النظم إلى نظم مستمرة والتي تتغير فيها المتحولات بطريقة مستمرة مع الزمن، ونظم متقطعة أو رقمية والتي تتغير فيها المتحولات بطريقة متقطعة مع الزمن. (راجع الشكل 1-21).

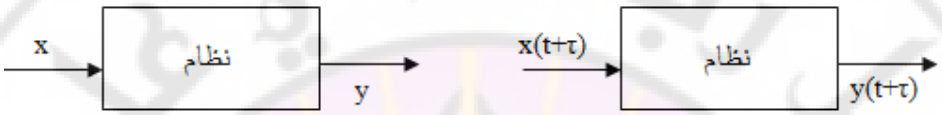
– النظم الخطية: يمكن أن يصنف نظام التحكم المستمر إما خطي (Linear) أو لاخطي (Non-Linear). يقال عن النظام أنه خطي إذا كانت علاقة الدخل والخرج علاقة خطية، وإذا كان بالإمكان تطبيق مبدأ التراكم (Super-position). يمكن شرح مبدأ التراكم كمايلي: ليكن لدينا نظام ما. عند تطبيق على الدخل الإشارة ($x_1$) نحصل في الخرج على الإشارة ($y_1$). عند تطبيق على الدخل الإشارة ($x_2$) نحصل في الخرج على الإشارة ($y_2$). يقال عن النظام بأنه خطي وذلك إذا طبقنا على الدخل الإشارة $x_3=x_1+x_2$، حصلنا على الإشارة $y_3=y_1+y_2$، وإلا كان النظام لاخطي. يبين الشكل (1-27) مبدأ التراكم.




**الشكل (1-27): مبدأ التراكم.**

– النظم ذات البارامترات الثابتة: نقول عن النظام أنه ذو بارمترات ثابتة مع الزمن إذا كانت بارامتراته ثابتة خلال فترة حياته. يبين الشكل (1-28) شرح لفكرة النظم ذات البارامترات الثابتة. في هذا الشكل، إذا طبقنا على دخل النظام الإشارة x(t) نحصل في

الخرج على الإشارة y(t). يقال عن النظام بأنه ذو بارامترات ثابتة وذلك إذا طبقنا على النظام بعد فترة زمنية (τ) نفس إشارة الدخل، حصلنا على نفس إشارة الخرج y(t) ولكن مزاحة زمنياً بمقدار (τ). في الشكل (1-28)، x(t+τ) هي نفس الإشارة x(t) ولكن مزاحة زمنياً بمقدار (τ) و y(t+τ) هي نفس الإشارة y(t) ولكن مزاحة زمنياً بمقدار (τ).




**الشكل (1-28): النظم ذات البارامترات الثابتة.**

**1-8 تصميم نظام التحكم:**

من أجل تصميم واستثمار نظام التحكم، يجب تحديد ومعرفة العناصر الأساسية التالية:

– معرفة القيمة المطلوبة (Knowledge of the desired value): من الضروري معرفة ما هو المقدار الذي نحاول أن نتحكم به، وبأي دقة، وضمن أي مجال من القيم. يتم التعبير عن هذه المعلومة ضمن محددات الأداء (Performance Specification). في النظم الفيزيائية، تُحول هذه المعلومة إلى صيغة مناسبة يمكن أن يفهمها المتحكم (إشارة تماثلية أو رقمية).

– معرفة القيمة الحالية (Knowledge of the actual value): يجب أن تقاس القيمة الحالية للخرج بواسطة حساس التغذية الخلفية، ويجب أن تكون بصيغة مفهومة للمتحكم. يجب أن يمتلك الحساس الدقة (Resolution) الضرورية، وأيضاً الاستجابة الديناميكية الضرورية وبالتالي تصبح القيمة المقاسة دقيقة.

– معرفة أداة التحكم (Actuating device): تقوم هذه الأداة بتكبير إشارة التحكم وتزويدنا بالجهد (effort) الضروري لتحريك خرج النظام أو الجهاز نحو القيمة المطلوبة. في مثال التحكم بدرجة حرارة الغرفة, كانت أداة التشغيل صمام الغاز ذو الملف اللولبي والحراق أو المدفأة الغازية, والجهد (effort) كان الحرارة الدخلة مقدرة بالوات (W).

– معرفة النظام أو الجهاز: تتطلب معظم استراتيجيات التحكم معرفة الخواص الستاتيكية والديناميكية للجهاز أو النظام. يمكن الحصول على هذه الخواص بإجراءات القياسات على الجهاز أو بتطبيق القوانين الأساسية في الفيزياء أو بكلاهما معاً.

**1-8-1 الخطوات الأساسية لتصميم نظام التحكم:**

بعد معرفة كل العناصر الموضحة أعلاه، أصبحت كل المعلومات متاحة لمصمم نظام التحكم ليقوم بعمله. أول مشكلة يتوجب على المصمم مواجهتها هي أن المعلومات المتوفرة عن النظام قد تكون غير دقيقة أو غير كاملة, وخصوصاً الخصائص الديناميكية للنظام والتي يمكن أن تتغير مع الزمن (time-variant), لذلك فإن إستراتيجية تحكم ثابتة لن تعمل. على سبيل المثال, تتغير كتلة الطائرة في منتصف الرحلة أو في نهاية الرحلة عن كتلتها في بداية الرحلة وذلك بسبب استهلاك الوقود.

إن قياس المتحولات المراد التحكم بها يمكن أن يحوي إشارة ضجيج. إن بعض الحساسات يمكن أن تزودنا بقياسات دقيقة وموثوقة, ولكن هناك حساسات, وبسبب الصعوبات في قياس متحولات الخرج, تزودنا بإشارة تحوي معلومات غير دقيقة.

بالرغم من كل تلك العقبات, يوجد طريقة منهجية قياسية يمكن أن تستخدم في تصميم معظم نظم التحكم. يبين الشكل (1-29) الخطوات الأساسية في هذه الطريقة. إن تصميم نظام التحكم هو خليط من التقنية والخبرة. سيقوم هذا الكتاب بشرح بعض الطرائق والتقنيات الحديثة والمجربة لتصميم نظام التحكم, بينما ستأتي الخبرة حتماً مع الممارسة.

**2-8-1 طرائق دراسة نظم التحكم الخطية, المستمرة, ذات المعاملات الثابتة:**

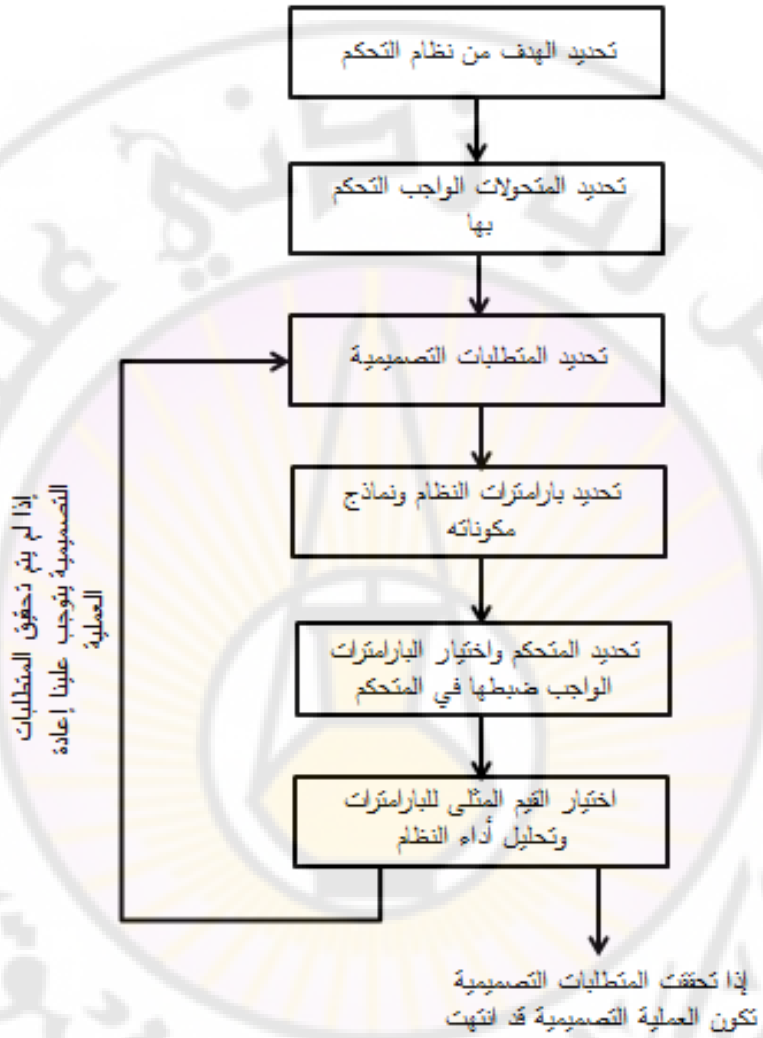
إن أغلب النظم هي نظم غير خطية, ولكن يمكن إكساب هذه النظم الخاصية الخطية وبالتالي يمكن تمثيل هذه النظم بواسطة نماذج رياضية خطية, ومن ثم نستطيع تطبيق على هذه النظم طريقة أو أكثر من طرائق التصميم المعروفة. عملياً, إن طبيعة محددات الأداء المعطاة للنظام المراد تصميم نظام تحكمه هي التي تحدد طريقة التصميم المستخدمة. إذا كانت محددات الأداء معطاة على شكل خصائص الاستجابة العابرة أو على شكل محددات الأداء في المجال الترددي, فإن الطرق المقترحة لتصميم نظام

التحكم تعتمد على المحل الهندسي لجذور المعادلة المميزة أو على الاستجابة الترددية. إذا كانت محددات الأداء معطاة بدلالة متحولات الحالة, فإنه يجب تطبيق في هذه الحالة طرائق التحكم الحديثة.

يعتمد تصميم نظام التحكم باستخدام المحل الهندسي لجذور المعادلة المميزة أو باستخدام الاستجابة الترددية على التجريب, وتطبق على النظم وحيدة الدخل ووحيدة الخرج (Single Input Single Output) أو (SISO), والخطية وذات المعاملات الثابتة مع الزمن. يحاول المصمم في هذه النظم, أن يحقق كل محددات الأداء باستخدام إجرائيات تعتمد على التجربة والتكرار لإلغاء إشارة الخطأ. بعد تصميم نظام التحكم, يفحص المصمم النظام ليتأكد من أن كافة محددات الأداء محققة. إذا كانت هذه المحددات غير محققة, يقوم المصمم بتكرار عملية التصميم حيث يقوم بضبط البارامترات أو بتعديل النظام حتى تتحقق محددات الأداء. على الرغم من أن التصميم يعتمد على إجرائية تكرارية فإن إبداع وخبرة المصمم تلعب دوراً مهماً جداً, حيث يستطيع المصمم ذو الخبرة تصميم نظام تحكم جيد وبدون الكثير من التجارب والتكرار.

عند تصميم نظام التحكم باستخدام طرائق التحكم الحديثة (طرق فضاء الحالة) فيعمل المصمم على صياغة المسألة التحكمية بشكل رياضي معين, ومن ثم يتم تطبيق نظرية رياضية على هذه الصيغة وذلك لاستنتاج نظام التحكم, علماً أن هذه الطريقة تطبق على النظم متعددة الدخل ومتعددة الخرج (MIMO أو Multi-input Multi-output), وكما يمكن أن تطبق على النظم ذات البارامترات الثابتة أو متغيرة مع الزمن. إن ميزة تصميم نظام التحكم باستخدام نظرية التحكم الحديثة (أو فضاء الحالة) بأنها تمكن المصمم من ابتكار نظام التحكم الأمثل وذلك بالنسبة لمؤشر أداء معتبر أو مفروض.

إذا أثمر التصميم عن عدة نظم تحكم مقترحة, فإن الخيار الأفضل بينها يتم على أساس عدة اعتبارات مثل الأداء, الكلفة, الحجم والوزن.

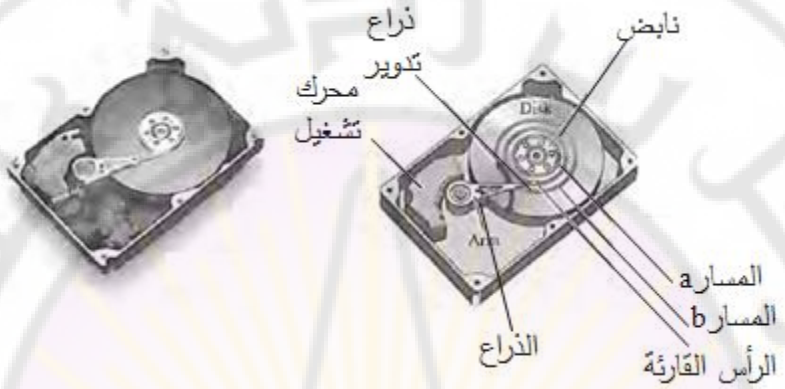



**الشكل (1-29): المخطط الانسيابي للخطوات الأساسية لتصميم نظام التحكم.**

**1-9 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

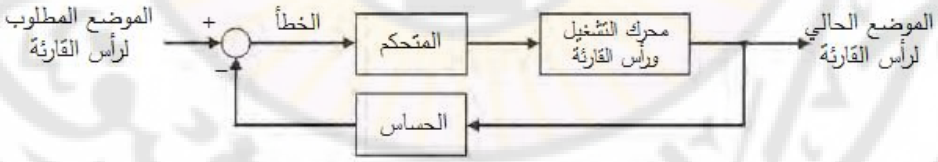
سنقوم بتطوير نظام قارئة الأقراص المدمجة عبر فصول هذا الكتاب، ابتداءً من هذا الفصل عبر تحديد الهدف من القارئة وبنيتها، انتهاءً بالتصميم النهائي لنظام التحكم بها تباعاً، وذلك في الفصول النهائية للكتاب.

يبين الشكل(1-30) بنية القارئة والمؤلفة من محرك تشغيل (Actuator Motor)، ذراع تدوير (Rotation of arm)، ذراع (arm)، ونابض (Spindle).




**الشكل (1-30): بنية قارئة الأقراص المدمجة.**

إن الهدف من نظام التحكم بالقارئة هو القدرة على تحريك رأس القارئة من المسار (a) إلى المسار (b) خلال (50) ميلي ثانية, إذا أمكن. إن البنية المبدئية لنظام قارئة الأقراص المدمجة مبين بالشكل (1-31). نلاحظ من هذا المخطط أن نظام الحلقة المغلقة يستخدم محرك لتحريك الذراع إلى المكان المطلوب على القرص المدمج.




**الشكل (1-31): نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة بسواقة الأقراص المدمجة.**

# الفصل الثاني: التمثيل الرياضي لنظم التحكم

# Chapter 2: Mathematical Models of Control Systems

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

إذا كان من الممكن تمثيل السلوك الديناميكي لأي نظام بواسطة معادلة أو مجموعة من المعادلات الرياضية، فإننا نسمي هذه المعادلة (أو مجموعة المعادلات) بالنموذج الرياضي للنظام.

يمكن أن يبنى النموذج الرياضي لأي نظام عن طريق معرفة الخصائص الفيزيائية لهذا النظام، مثل المعادلة الواصفة لسلوك كتلة في نظام ميكانيكي أو لسلوك مقاومة في نظام كهربائي. كما يمكن تحديد النموذج الرياضي لنظام عن طريق التجريب، وذلك بقياس كيفية استجابة خرج النظام لإشارات دخل معروفة.

سنقوم في هذا الفصل باستعراض أهم المعادلات والعلاقات الرياضية الواصفة للنظم الميكانيكية، الكهربائية، الحرارية، الهيدروليكية والمحركات الكهربائية. سنقوم أيضاً بتقديم طريقة تمثيل النظم باستخدام المخططات الصندوقية، وسنستعرض لأهم القواعد المتبعة لتبسيط هذه المخططات، علماً أن المخطط الصندوقي لنظام يشتق من المعادلات الرياضية الواصفة لهذا النظام، وتعد من الطرائق الشائعة الاستخدام لتمثيل النظم.

**2-1 النماذج الرياضية البسيطة:**

**2-1-1 المعادلة الرياضية الواصفة لمحرك سيارة:**

يحتاج بناء نموذج رياضي لمحرك سيارة إلى الربط بين زاوية دواسة البنزين ($\theta$) مع السرعة الأمامية للسيارة ($u$). يمكن أن يوصف النموذج في هذه الحالة بالمعادلة الرياضية التالية:

$$u(t) = a.\theta(t).....(1-2)$$

لقد تم التعبير عن $u$, $\theta$ في المعادلة بـ $u(t)$, $\theta(t)$، وذلك لأنهما تابعان للزمن. يمكن أن يحسب الثابت ($a$)، إذا كانت المعلومات التالية متوفرة:

- $T$: عزم المحرك.
- $F$: قوة جر الدولاب.

$D$ – قوة السحب الإيروديناميكية (القوة الديناميكية نتيجة لتأثير الهواء).

لدينا:

$$T = b.\theta(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-2)$$

$$F = c.T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-2)$$

$$D = d.u(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4-2)$$

يجب أن تتساوى $F$ قوة جر الدولاب مع قوة السحب الديناميكية للهواء، فيكون بالتالي:

$$D = F \quad \rightarrow \quad d.u(t) = c.T$$

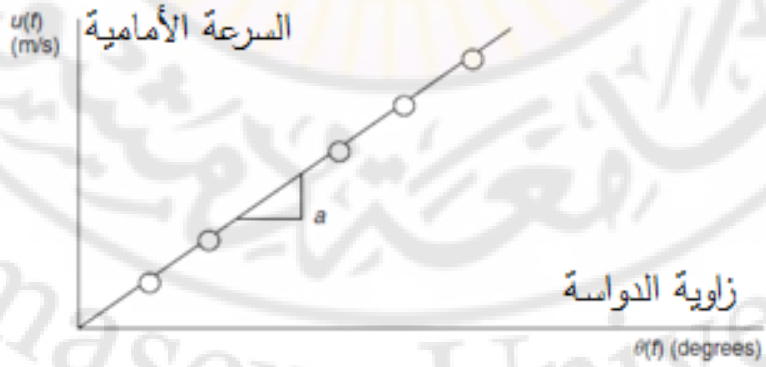
نأخذ المعادلة (2-2) بالحسبان فنحصل على: $d.u(t) = c.b.\theta(t)$

وبالتالي يكون:

$$u(t) = \left(\frac{c.b}{d}\right).\theta(t) \quad \ldots\ldots\ldots (5-2)$$

تعطي العلاقة السابقة ثابت السيارة $(a)$ ويساوي: $a = c.b/d$.

إذا كانت الثوابت $b$, $c$, $d$ غير معروفة، يمكن الحصول على نموذج السيارة بقياس السرعة الامامية $u(t)$ وذلك من أجل عدة زوايا لدواسة التسارع $\theta(t)$، ومن ثم رسم النتائج. يظهر الشكل (2-1) العلاقة بين $u(t)$ و $\theta(t)$ وذلك من أجل عدة نقاط قياس. يبين الشكل (2-1) أن العلاقة خطية بين $u(t)$ و $\theta(t)$ حيث أن قيمة $a$ هي ميل المستقيم الممثل للعلاقة بين $u(t)$ و $\theta(t)$.




**الشكل (2-1): العلاقة بين السرعة الأمامية للسيارة وزاوية الدواسة.**

**2-2 النماذج الرياضية المعقدة:**

تبين المعادلة (2-1) أنه عندما يحدث تغير في زاوية دواسة البنزين، ستتغير سرعة السيارة بشكل لحظي. في الحقيقة وكما يعلم جميع سائقي السيارات، فإن السيارة تأخذ فترة زمنية حتى تتغير سرعتها إلى القيمة الجديدة، لذلك نحتاج عند بناء نموذج ديناميكي للسيارة إلى أخذ هذه الحقيقة بعين الاعتبار.

تمثل النماذج الرياضية السلوك الديناميكي للنظم الفيزيائية حيث تستخدم المعادلات التفاضلية، وبالتالي يمكن أن يكون التمثيل الأكثر دقة للسيارة، على الشكل التالي:

$$e.\frac{du}{dt} + f.u = g.\theta(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6-2)$$

حيث: $du/dt$ هو تسارع السيارة والذي يأخذ قيمة صفرية عندما تتحرك السيارة بسرعة ثابتة. في هذه الحالة تصبح المعادلة (2-6): $f.u(t) = g.\theta(t)$ ، أي:

$$u(t) = \frac{g}{f}.\theta(t) \quad \ldots\ldots\ldots(7-2)$$

وهنا أيضاً $g/f$ ثابت السيارة، وهو مطابق للثابت $(a)$ في المعادلة (2-1).

**2-2-1 المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة:**

لنفرض أن لدينا نظاماً ذا خرج $y(t)$، ودخل $r(t)$، وذا معاملات ثابتة $a, b, c, \ldots$. إذا كان من الممكن أن توصف ديناميكية النظام بمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى كمايلي:

$$a.\frac{dy(t)}{dt} + b.y(t) = c.r(t) \quad \ldots\ldots\ldots(8-2)$$

إذا كانت ديناميكية النظام توصف بمعادلة من الدرجة الثانية، فإن النظام يمكن أن يوصف كمايلي:

$$a.\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b.\frac{dy(t)}{dt} + c.y(t) = e.r(t) \quad \ldots\ldots\ldots(9-2)$$

إذا كانت ديناميكية النظام توصف بمعادلة من الدرجة الثالثة، فإن النظام يمكن أن يوصف كمايلي:

$$a.\frac{d^3y(t)}{dt^3} + b.\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c.\frac{dy(t)}{dt} + e.y(t) = f.r(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(10-2)$$

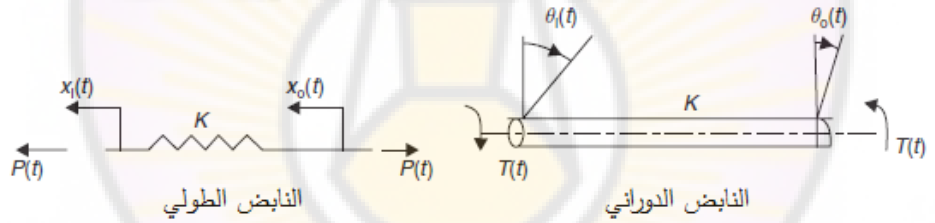
تمثل المعادلات (2-8)، (2-9) و (2-10) معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة. تتحدد درجة المعادلة التفاضلية بدرجة أعلى مشتق لـ $y(t)$ فيها. تسمى النظم التي توصف بمثل هذه المعادلات، بالنظم الخطية ويكون لها درجة توافق درجة المعادلة الموصفة لها. على سبيل المثال، المعادلة (2-8) تصف نظام من الدرجة الأولى، بينما المعادلات (2-9) و (2-10) تصف نظم من الدرجة الثانية والثالثة على التوالي.

**2-3 النمذجة الرياضية للنظم الميكانيكية:**

تحوي النظم الميكانيكية مجموعة من العناصر التي تتميز بالصلابة (Stiffness)، بالتخامد (Damping) وبالكتلة (Mass).

**2-3-1 الصلابة في النظم الميكانيكية:**

يتمدد العنصر المرن بشكل يتناسب مع القوة (أو العزم) المطبق عليه.




**الشكل (2-2): عناصر مرنة خطية**

في النابض الطولي (Translational Spring)، يتناسب تمدد النابض مع القوة المطبقة عليه، أي: القوة α التمدد.

من الشكل (2-2)، عندما $x_i(t) > x_0(t)$، يمكن أن نكتب العلاقة:

$$P(t) = K(x_i(t) - x_0(t)) \quad .....(11-2)$$

حيث $P(t)$: القوة المطبقة على النابض الطولي, $x_i(t)$ و $x_0(t)$: الطول الابتدائي والنهائي للنابض.

في النابض الدوراني (Rotational Spring)، يتناسب العزم المطبق على النابض مع التوائه, أي: العزم α الالتواء

من الشكل (2-2) ، عندما $\theta_i(t) > \theta_0(t)$، يمكن أن نكتب العلاقة:

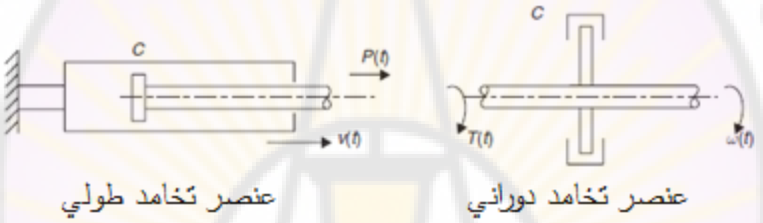
$$T(t) = K\left(\theta_i(t) - \theta_0(t)\right).....(12-2)$$

حيث $T(t)$: العزم المطبق على النابض الدوراني, $\theta_i(t)$ و $\theta_0(t)$ هي: الالتواء الابتدائي والنهائي للنابض الدوراني.

يسمى $K$ بثابت صلابة النابض، وواحدته (N/m) في المعادلة (2-11)، و (N.m/rad) في المعادلة (2-12).

**2-3-2 التخامد في النظم الميكانيكية:**

تنتج عناصر التخامد سرعة تتناسب مع القوة (أو العزم) المطبق عليها.




**الشكل 2-3: عناصر تخامد خطية**

تكون سرعة عناصر التخامد الطولية (Translational damper)، متناسبة مع القوة المطبقة عليها، أي: السرعة α القوة

يمكن أن نكتب في عنصر التخامد الطولي:

$$P(t) = C.v(t) = C\frac{dx_0}{dt}.....(13-2)$$

يمثل في الشكل (2-3)، $P(t)$ القوة المطبقة على عنصر التخامد، و $v(t)$ سرعته، و $x_0(t)$ مقدار انزياحه.

يمكن أن نكتب في عنصر التخامد الدوراني (Rotational Damping):

العزم α السرعة الزاوية.

أي:

$$T(t) = C.\omega(t) = C\frac{d\theta_0}{dt}.....(14-2)$$

يمثل في الشكل (2-3)، $T(t)$ العزم المطبق على عنصر التخامد، و $\omega(t)$ سرعته الزاوية، و $\theta_0(t)$ مقدار انزياحه الزاوي.

يمثل $C$ في المعادلتين (2-13) و (2-14) معامل التخامد, حيث أن واحدته في المعادلة (2-13) هي (N.s/m)، أما واحدته في المعادلة (2-14) هي (N.m.s/rad).

**3-3-3 الكتلة في النظم الميكانيكية:**

ينص القانون الثاني لنيوتن بأن القوة التي تتسبب بتسارع أي جسم هي عبارة عن جداء كتلة الجسم في تسارعه.

يمكن أن نكتب في النظام الطولي (Translational System)، المبين بالشكل (2-4):

التسارع α القوة.

أي:

$$P(t) = m.a(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = m\frac{d^2x_0}{dt^2} \quad .....(15-2)$$

حيث في المعادلة (2-15)، $a(t)$ تسارع النظام، و $v(t)$ سرعته، و $x_0(t)$ انزياحه.

في النظام الدوراني (Rotational System)، المبين بالشكل (2-4)، يمكن أن نكتب:

التسارع الزاوي α العزم.

$$T(t) = I.\alpha(t) = I.\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta_0}{dt^2} \quad .....(16-2)$$

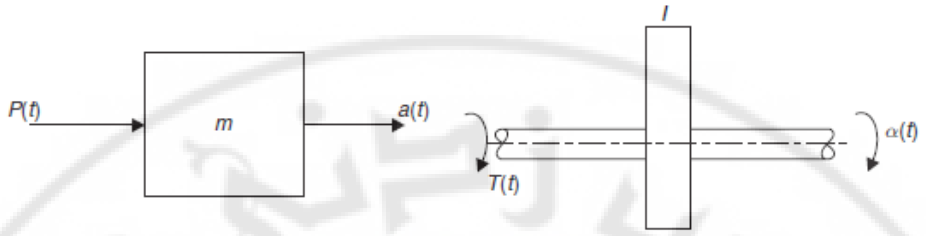
حيث في المعادلة (2-16)، يمثل $I$ عزم العطالة حول محور الدوران، $\alpha(t)$ التسارع الزاوي للنظام، $\omega(t)$ سرعته الزاوية و $\theta_0(t)$ انزياحه الزاوي.

نحدد عند تحليل النظم الميكانيكية كل القوى الخارجية المطبقة على الجسم باستخدام مخطط الجسم الحر "Free-Body Diagram"، ومن ثم نطبق قانون نيوتن في الحركة، ذو الشكل العام التالي:

في النظم الطولانية: $\sum F = m.a$

في النظم العرضانية (الدورانية): $\sum M = I.\alpha$

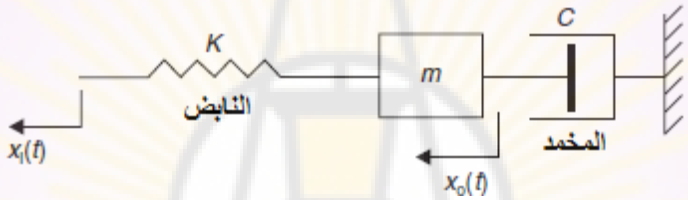
$$\begin{cases} \sum F = m.a \\ \sum M = I.\alpha \end{cases} \quad .....(17-2)$$



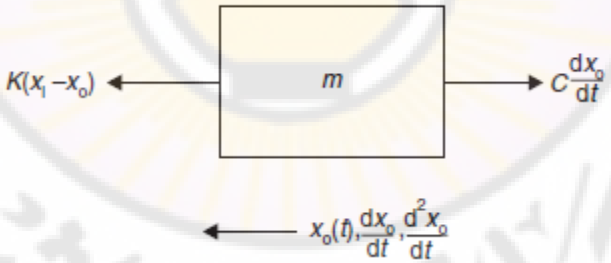

**الشكل (2-4): عناصر كتلة خطية.**

**مثال 2-1:**

لنوجد المعادلة التفاضلية التي تربط بين الانزياحات $x_i(t)$ و $x_0(t)$ في النظام المكون من نابض – كتلة – مخمد، المبين بالشكل (2-5). ما هو تأثير إهمال الكتلة.




**الشكل (2-5): النظام المكون من نابض – كتلة – مخمد.**




**الشكل (2-6): مخطط الجسم الحر للنظام المبين بالشكل 2-5.**

نستخدم المعادلات (2-11) و (2-13)، وذلك للحصول على مخطط الجسم الحر المبين بالشكل (2-6). باستخدام المعادلة (2-17) نجد معادلة الحركة التالية:

$$\sum F_x = m.a_x$$

$$K(x_i - x_0) - C\frac{dx_0}{dt} = m\frac{d^2x_0}{dt^2}$$

$$Kx_i - Kx_0 = m\frac{d^2x_0}{dt^2} + C\frac{dx_0}{dt}$$

لنعيد ترتيب المعادلة السابقة بحيث تأخذ الشكل العام المبين في المعادلة (2-9)، فتصبح المعادلة من الشكل:

$$m\frac{d^2x_0}{dt^2} + C\frac{dx_0}{dt} + Kx_0 = Kx_i(t) \quad .....(18-2)$$

وبالتالي فإن نظام نابض– كتلة– مخمد هو نظام من الدرجة الثانية.

إذا افترضنا أن الكتلة المعدومة أو $m=0$، فإن:

$$\sum F_x = 0$$

$$K(x_i - x_0) - C\frac{dx_0}{dt} = 0$$

$$Kx_i - Kx_0 = C\frac{dx_0}{dt}$$

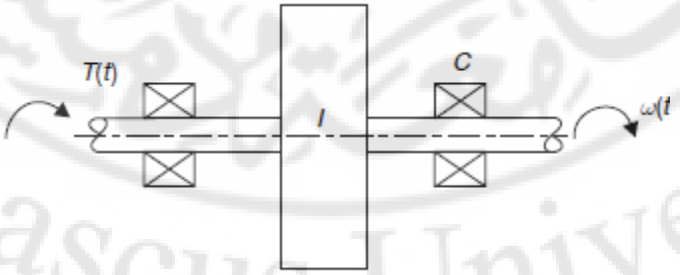
بإعادة ترتيب المعادلة السابقة نجد:

$$C\frac{dx_0}{dt} + Kx_0 = Kx_i(t) \quad .....(19-2)$$

وبالتالي يصبح النظام من الدرجة الأولى إذا أهملنا الكتلة.

**مثال 2-2:**

يبين الشكل (2-7) دولاب موازنة ذو عزم العطالة ($I$) والمحمول على مساند. يولد دولاب الموازنة عزم احتكاك يتناسب مع السرعة الزاوية $\omega(t)$ بمعامل تناسب ($C$). أوجد المعادلة التفاضلية التي تربط بين العزم المطبق $T(t)$ والسرعة الزاوية $\omega(t)$.




**الشكل (2-7): دولاب الموازنة.**

تكتب معادلة الحركة بناءً على المعادلة (2-17)، بحيث:

$$\sum M = I.\alpha$$

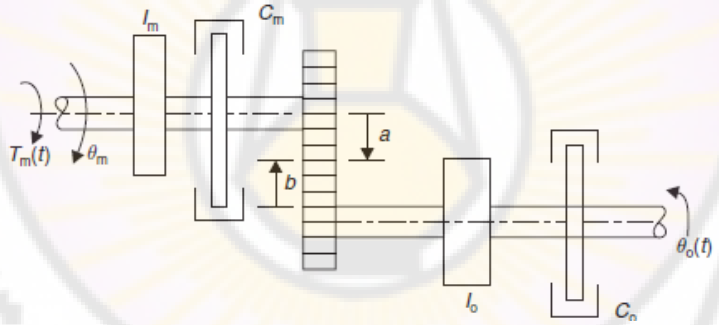
$$T(t) - C\omega = I\frac{d\omega}{dt}$$

وتؤول إلى الشكل التالي:

$$I\frac{d\omega}{dt} + C\omega = T(t).....(20-3)$$

**مثال 2-3:**

يبين الشكل (2-8) علبة تخفيض سرعة مربوطة مع محرك يولد عزم دوران $T_m(t)$. إن نسبة تخفيض علبة السرعة هي $(n)$، وعزوم عطالة المحرك على محوره، ومحور الخرج هي $I_m$ و $I_0$، ومعاملات التخامد هي على التوالي $C_m$ و $C_0$. أوجد المعادلة التفاضلية التي تربط بين عزم المحرك $T_m(t)$ ، والموضع الزاوي على خرج علبة السرعة $\theta_0(t)$.




**الشكل (2-8): علبة تخفيض السرعة.**

ملاحظة: في الشكل (2-8)، $a$ و $b$ هي أنصاف أقطار دوائر مسننات علبة السرعة، وبالتالي فإن: $n = b/a$.

تطبيقات عددية:

$$I_m = 5\times10^{-6} \quad kg.m^2$$

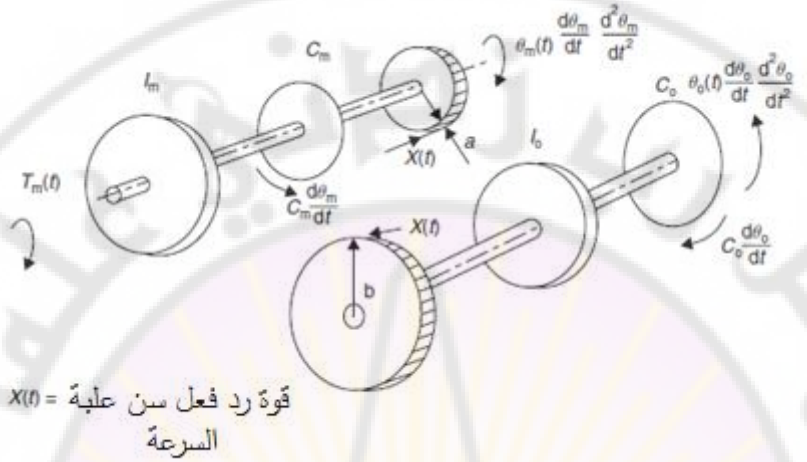
$$I_0 = 0.01 \quad kg.m^2$$

$$C_m = 60\times10^{-6} \quad Nms/rad$$

$$C_0 = 0.15 \quad Nms/rad$$

$$n = 50:1$$

يبين الشكل (2-9) مخططات الجسم الحر حول محور المحرك ومحور الخرج.




**الشكل (2-9): مخططات الجسم الحر لعلبة تخفيض السرعة.**

نكتب معادلات الحركة للنظام:

1- معادلة الحركة حول محور المحرك:

$$\sum M = I_m.\frac{d^2\theta_m}{dt^2}$$

$$T_m(t) - C_m\frac{d\theta_m}{dt} - aX(t) = I_m.\frac{d^2\theta_m}{dt^2}$$

يكون لدينا بإعادة ترتيب المعادلة المبينة أعلاه:

$$X(t) = \frac{1}{a}\left(T_m(t) - I_m.\frac{d^2\theta_m}{dt^2} - C_m\frac{d\theta_m}{dt}\right).....(21-2)$$

2- معادلة الحركة حول محور الخرج:

$$\sum M = I_0.\frac{d^2\theta_m}{dt^2}$$

$$bX(t) - C_0\frac{d\theta_0}{dt} = I_0.\frac{d^2\theta_0}{dt^2}$$

نجد بإعادة ترتيب المعادلة السابقة:

$$X(t)=\frac{1}{b}\left(I_0.\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+C_0\frac{d\theta_0}{dt}\right).....(22-2)$$

نحصل بمساواة المعادلتين (2-21) و (2-22):

$$\frac{b}{a}\left(T_m-I_m.\frac{d^2\theta_m}{dt^2}-C_m\frac{d\theta_m}{dt}\right)=\left(I_0\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+C_0\frac{d\theta_0}{dt}\right)$$

لدينا:

$$\frac{b}{a}=n\Rightarrow\theta_m(t)=n\theta_0(t)$$
$$\frac{d\theta_m}{dt}=n\frac{d\theta_0}{dt}$$
$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2}=n\frac{d^2\theta_0}{dt^2}$$

وبالتالي يكون:

$$n\left(T_m(t)-nI_m.\frac{d^2\theta_0}{dt^2}-nC_m\frac{d\theta_0}{dt}\right)=\left(I_0\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+C_0\frac{d\theta_0}{dt}\right)$$

يصبح لدينا بإعادة ترتيب المعادلة:

$$\left(I_0+n^2I_m\right)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\left(C_0+n^2C_m\right)\frac{d\theta_0}{dt}=nT_m(t).....(23-2)$$

نسمي المعاملات $\left(I_0+n^2I_m\right)$ و $\left(C_0+n^2C_m\right)$ على التوالي بعزم العطالة المكافئ $(I_e)$ ومعامل التخامد المكافئ $(C_e)$ ,وذلك بالنسبة لمحور الخرج.

نقوم بالتعويض بالقيم العددية المعطاة، فنجد:

$$I_e=\left(0.01+(50)^2\times5\times10^{-6}\right)=0.0225\ kg.m^2$$
$$C_e=\left(0.15+(50)^2\times60\times10^{-6}\right)=0.3N.m.s/rad$$

بالتعويض في المعادلة (2-23)، نجد:

$$0.0225\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+0.3\frac{d\theta_0}{dt}=50T_m(t).....(24-2)$$

**2-4 النمذجة الرياضية للنظم الكهربائية:**

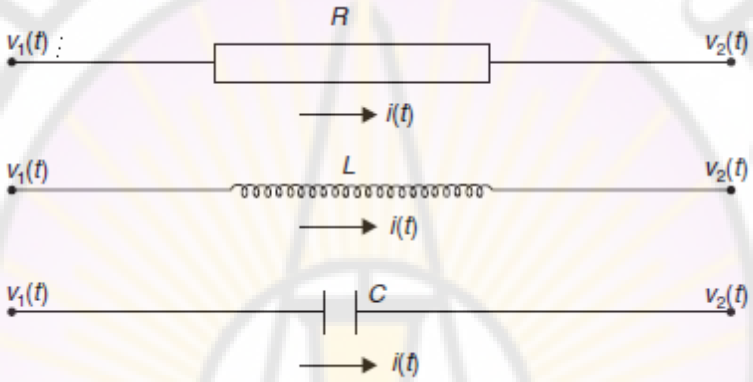
بفرض لدينا العناصر الكهربائية التالية: مقاومة، محارضة، سعة والمبينة بالشكل (2-10).

بالنسبة للمقاومة الكهربائية، نطبق قانون أوم فنحصل على المعادلة التالية:

$$\left[v_1(t)-v_2(t)\right]=R.i(t).....(25-2)$$

بالنسبة للمحارضة، تكون العلاقة بين التوتر المطبق على طرفي المحارضة والتيار المار فيه, كما يلي:

$$\left[v_1(t)-v_2(t)\right]=L.\frac{di(t)}{dt}.....(26-2)$$




**الشكل (2-10): العناصر الكهربائية**

تكون العلاقة بالنسبة للسعة الكهربائية، بين التوتر المطبق على طرفي السعة والتيار المار فيها كما يلي:

$$i=\frac{d\theta}{dt}=C\frac{d}{dt}\left[v_1(t)-v_2(t)\right].....(27-2)$$

نحصل بتكامل كلا طرفي المعادلة (2-27) على:

$$\left[v_1(t)-v_2(t)\right]=\frac{1}{C}\int idt.....(28-2)$$

**مثال 2-4:**

لنوجد المعادلة التفاضلية التي تربط بين $v_1(t)$ و $v_2(t)$ لدارة RC المبينة بالشكل (2-11).

من المعادلات (2-25) و (2-28) نجد:

$$v_1(t)-v_2(t)=R.i(t).....(29-2)$$

$$v_2(t)=\frac{1}{C}\int id(t)$$

أو:

$$C\frac{dv_2}{dt}=i(t).....(30-2)$$

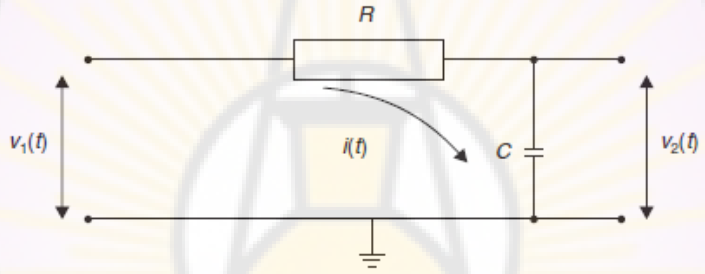
نحصل بتعويض المعادلة (2-30) في المعادلة (2-29)، على:

$$v_1(t)-v_2(t)=R.C.\frac{dv_2}{dt}.....(31-2)$$

يمكن إعادة ترتيب المعادلة (2-31)، لتصبح على الشكل التالي:

$$R.C.\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)=v_1(t).....(32-2)$$

تملك المعادلة (2-32) الشكل العام لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.




**الشكل (2-11): دارة RC**

**مثال 2-5:**

لنوجد المعادلات التفاضلية التي تربط بين $v_1(t)$ و $v_2(t)$ للدارات المبينة بالشكل (2-12).

1- الدارة (أ) من الشكل (2-12): نستخدم المعادلات (2-25) و (2-26)، فيكون:

$$v_1(t)-v_2(t)=R.i(t)+L.\frac{di}{dt}$$

$$.....(33-2)$$

$$v_2(t)=\frac{1}{C}\int idt$$

$$C\frac{dv_2}{dt}=i(t).....(35-2)$$

أو:

يكون لدينا بتعويض المعادلة (2-34) في المعادلة (2-33):

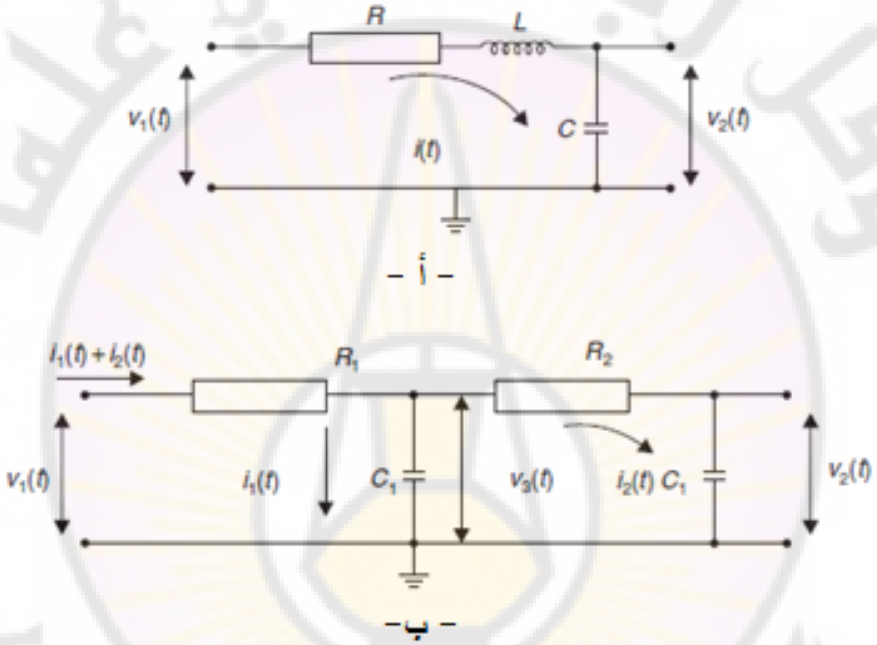
$$v_1(t)-v_2(t)=RC\frac{dv_2}{dt}+L\frac{d}{dt}\left(C.\frac{dv_2}{dt}\right)$$

أو :

$$v_1(t)-v_2(t)=RC\frac{dv_2}{dt}+LC\frac{d^2v_2}{dt^2}.....(34-2)$$

يمكن صياغة المعادلة (35-2) على شكل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$LC\frac{d^2v_2}{dt^2}+RC\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)=v_1(t).....(36-2)$$




**الشكل (2-12): الدارات الكهربائية للمثال 2-5**

2- الدارة (ب) في الشكل 2-12: معادلات الدارة:

$$v_1(t)-v_3(t)=R_1\left(i_1(t)+i_2(t)\right).....(37-2)$$

$$v_3(t)=\frac{1}{C_1}\int i_1.dt$$

أو :

$$i_1(t)=C_1\frac{dv_3}{dt}.....(38-2)$$

$$v_3(t)-v_2(t)=R_2.i_2(t).....(39-2)$$

$$v_2(t)=\frac{1}{C_2}\int i_2.dt$$

أو:

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = i_2(t) \ldots\ldots\ldots (40-2)$$

من المعادلة (2-39) نجد:

$$v_3(t) = R_2 i_2(t) + v_2(t)$$

بتعويض قيمة $i_2(t)$ من المعادلة (2-40) في المعادلة السابقة نجد:

$$v_3(t) = R_2 . C_2 \frac{dv_2}{dt} + v_2(t) \ldots\ldots\ldots (41-2)$$

لكن من المعادلات (2-41) و (2-38) نجد:

$$i_1(t) = C_1 \frac{d}{dt}\{R_2 C_2 \frac{dv_2}{dt} + v_2(t)\}$$

$$i_1(t) = R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + C_1 \frac{dv_2}{dt} \ldots\ldots\ldots (42-2)$$

بتعويض المعادلات (2-40) و (2-41) و (2-42) بالمعادلة (2-37) نجد:

$$v_1(t) - \{R_2 . C_2 \frac{dv_2}{dt} + v_2(t)\} = R_1\{R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + C_1 \frac{dv_2}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt}\}$$

نحصل بإعادة ترتيب المعادلة السابقة على المعادلة التالية والتي لها الشكل العام لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{dv_2}{dt} + v_2(t) = v_1(t) \ldots\ldots (43-2)$$

**2-5 النمذجة الرياضية للنظم الحرارية:**

سندرس النظم الحرارية عن طريق دراسة التشابه بينها وبين النظم الكهربائية حيث أن كلا النظامين يحويان عناصر مقاومة وعناصر سعوية.

**2-5-1 المقاومة الحرارية $R_T$ (Thermal Resistance):**

يُعطى التدفق الحراري عبر أي أداة توصيل بواسطة قانون فوريه:

$$Q_T = \frac{K.A(\theta_1 - \theta_2)}{l} \ldots\ldots (44-2)$$

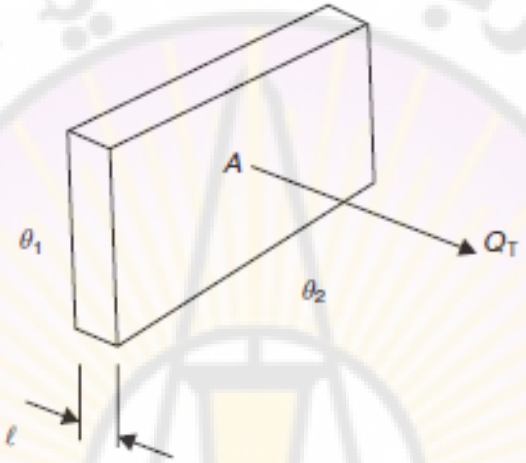
يبين الشكل (2-13) البارامترات في المعادلة (2-44) ، وهي: $\theta_1$-$\theta_2$: فرق درجة الحرارة وتقدر بالكلفن أو (K), $A$: المقطع العرضي ($m^2$), $l$: الثخانة أو السماكة ($m$), $K$: الناقلية الحرارية (W/mK), $Q_T$: التدفق الحراري ($J/S=W$).

يمكن أن تكتب المعادلة (2-44) بنفس شكل قانون أوم:

$$(\theta_1(t)-\theta_2(t))=R_T.Q_T(t).....(45-2)$$

حيث $R_T$ المقاومة الحرارية وتساوي:

$$R_T=\frac{l}{K.A}.....(46-2)$$




**الشكل (2-13): التدفق الحراري عبر صفيحة مسطحة.**

**2-5-2: السعة الحرارية $C_T$ (Thermal capacitance):**

تعطى الحرارة المخزنة في جسم ما:

$$H(t)=m.C_p.\theta(t).....(47-2)$$

حيث $H$: الحرارة مقدرة بالجول $(J)$, $m$: الكتلة بـ $(Kg)$, $C_p$: الحرارة النوعية عند ضغط ثابت ويعطى بـ $(J/Kg.K)$, $\theta$: ارتفاع درجة الحرارة وتعطى بالكلفن أو (K).

إذا قارنا المعادلة (2-47) مع المعادلة المميزة للسعة الكهربائية:

$$Q(t)=C.v(t).....(48-2)$$

نجد أن السعة الحرارية $C_T$ تعطى بـ:

$$C_T=m.C_p.....(49-2)$$

للحصول على التدفق الحراري $Q_T$, نشتق المعادلة (2-47) بالنسبة للزمن:

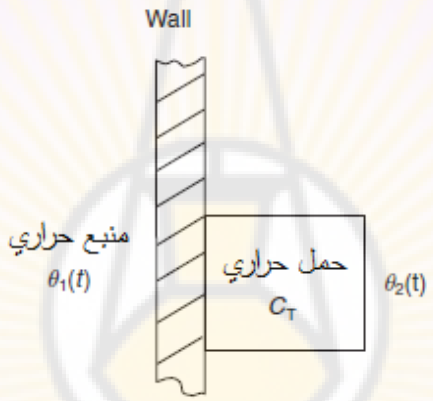
$$\frac{dH}{dt} = m.C_p.\frac{d\theta}{dt} \quad .....(50-2)$$

أو:

$$Q_T(t) = C_T.\frac{d\theta}{dt} \quad ..... (51-2)$$

**مثال 3-6:**

تتدفق الحرارة من منبع حراري عند درجة حرارة $\theta_1(t)$ عبر جدار ذي مقاومة حرارية $R_T$ إلى حمل حراري ذو سعة حرارية $C_T$، وعند درجة حرارة $\theta_2(t)$، وذلك كما هو مبين بالشكل (2-14). أوجد المعادلة التفاضلية التي تربط $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$.




**الشكل (2-14): نظام الانتقال الحراري**

1- الجدار: من المعادلة (2-45) نجد:

$$Q_T(t) = \frac{[\theta_1(t) - \theta_2(t)]}{R_T} .....(52-2)$$

2- الحمل الحراري: من المعادلة (2-51) نجد:

$$Q_T(t) = C_T.\frac{d\theta_2}{dt} .....(53-2)$$

بمساواة المعادلات (2-52) و (2-53) نجد:

$$\frac{[\theta_1(t) - \theta_2(t)]}{R_T} = C_T.\frac{d\theta_2}{dt}$$

بإعادة ترتيب المعادلة المبينة أعلاه، نحصل على معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى:

$$R_T.C_T.\frac{d\theta_2}{dt}+\theta_2(t)=\theta_1(t).....(54-2)$$

**6-2 النمذجة الرياضية للنظم الهيدروليكية:**

كما وجدنا في النظم الحرارية، من المناسب أن نسعى إلى إيجاد التشابه بين نظم السوائل والنظم الكهربائية. لكن هناك فرق هام وهو أن العلاقة بين الضغط ومعدل التدفق لسائل تحت ظروف تدفق مضطربة هي علاقة غير خطية. لكي نستطيع أن نمثل هذه النظم باستخدام معادلات تفاضلية خطية، لا بد من إكساب الصفة الخطية للمعادلات الممثلة للنظام الهيدروليكي.

قبل الدخول في طريقة إكساب صفة الخطية لنموذج لاخطي، لابد من التعرف إلى أسباب اللاخطية، والتي يمكن تلخيصها بمايلي:

– لاتحقق علاقة الدخل بالخرج خاصية التراكم، إحدى الخواص المميزة للنظام الخطي. على سبيل المثال النظام الممثل بالعلاقة: $y=x^2$ لا يحقق خاصية التراكم بالتالي فهو نظام لاخطي.

– علاقة الدخل بالخرج لاتحقق خاصية التجانس (Homogeneous Property) إحدى الخواص المميزة للنظام الخطي. على سبيل المثال النظام الممثل بالعلاقة: $y=mx+b$ لا يحقق خاصية التجانس بالتالي فالنظام لاخطي.

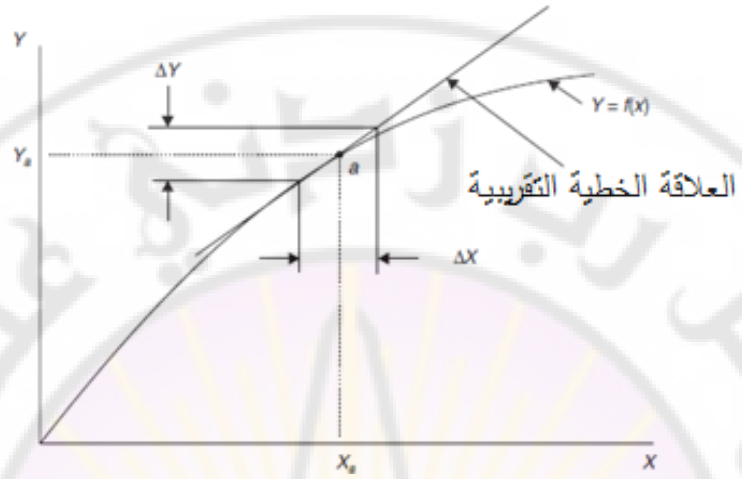
**1-6-2 إكساب الصفة الخطية للتوابع غير الخطية وذلك من أجل اضطرابات صغيرة:**
**(Linearization of nonlinear Function for Small Perturbation)**

لنعتبر التابع غير الخطي $y=f(x)$ والمبين بالشكل (2-15). لنفرض أنه من الضروري أن يعمل النظام بالقرب من النقطة $(a)$ (نقطة العمل) على المنحني والتي تملك الإحداثيات $X_a$ و $Y_a$. من أجل اضطرابات صغيرة $\Delta X$ و $\Delta Y$ حول نقطة العمل $a$، لنفرض:

$$\Delta X=x$$
$$\Delta Y=y \quad .....(55-2)$$

إذا كان ميل المنحني عند نقطة العمل هي: $\left.\frac{dY}{dX}\right|_a$, بالتالي تصبح العلاقة الخطية التقريبية:

$$y=\left.\frac{dY}{dX}\right|_a .x..... (56-2)$$




**الشكل (2-15): إكساب صفة الخطية لتابع غير خطي.**

**2-6-2 النمذجة الرياضية لبعض النظم الهيدروليكية البسيطة:**

سنعالج النمذجة الرياضية للنظم الهيدروليكية وذلك من خلال المثالين (2-7) و (2-8). يعالج المثال الأول العلاقة بين السرعة الأمامية والسرعة الزاوية لمُسير السفينة بينما يعالج المثال الثاني النمذجة الرياضية لخزان.

**مثال 2-7:**

يبين الشكل (2-16) مخطط الجسم الحر لسفينة ذات كتلة $15\times10^6$ كغ. يولد المسير في السفينة قوة دافعة تتناسب مع السرعة الزاوية ($n$) للمسير، حيث أن عامل التناسب هو $K_n = 110*10^3\ N.s/rad$. تعطى المقاومة الهيدروليكية بالعلاقة $R=C_V.V^2$ حيث قيمة $C_V$ هي ($C_V=10000N.s^2/m^2$). لنوجد باستخدام نظرية الاضطرابات الصغيرة، المعادلة التفاضلية الخطية التي تربط بين السرعة الأمامية $V(t)$ والسرعة الزاوية للمسير $n(t)$، وذلك عندما تكون قيمة السرعة الأمامية (7.5m/s).

**الشكل (2-16): مخطط الجسم الحر للسفينة**

لنعمل على إكساب معادلة المقاومة الهيدروديناميكية، الخاصية الخطية حول سرعة التشغيل $v_a$ والمساوية (7.5m/s).

$$R = C_V.V^2$$

$$\frac{dR}{dV} = 2.C_V.V$$

$$\left.\frac{dR}{dV}\right|_a = 2C_V.V_a = 2\times 10000\times 7.5$$

$$\left.\frac{dR}{dV}\right|_a = C = 150000 \ \ N.s/m$$

وبالتالي تصبح العلاقة الخطية للمقاومة الكهروديناميكية:

$$R = C.V.....(57-2)$$

باستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$T - R = m\frac{dV}{dt}$$

$$K_n.n - C.V = m\frac{dV}{dt}$$

$$m\frac{dV}{dt} + C.V = K_n.n.....(58-2)$$

بالتعويض بالقيم العددية في العلاقة (2-58) نجد:

$$\left(15\times10^{6}\right)\frac{dV}{dt}+\left(150\times10^{3}\right)V=\left(110\times10^{3}\right)n(t).....(59-2)$$

**مثال 2-8:**

يبين الشكل (2-17) خزان ماء ذو مقطع عرضي $A$. في ظروف العمل المستقرة يكون التدفق الداخل والخارج $V_a$، ويكون ارتفاع الماء في الخزان $(H_a)$, والمطلوب:

أ- في ظروف العمل المستقرة، إيجاد العلاقة الخطية لمقاومة الصمام $R_f$، علماً أن التدفق عبر هذا الصمام يعطى بالعلاقة: $V=A_V.C_d.\sqrt{2g.H}$ , حيث: $V$: معدل التدفق الحجمي $(m^3/s)$, $A_V$: مساحة مقطع الصمام $(m^2)$, $C_d$: معامل التفريغ, $g$: تسارع الجاذبية $(m/s^2)$, $H$: ارتفاع الماء فوق الصمام $(m)$.

ب- إذا كانت قيمة ارتفاع الماء في الخزان مستقرة وهي $(H_a=\ 1.5m)$. ما هي قيمة مقاومة الصمام $(R_f)$، وذلك من أجل:$(A_V=15\times10^{-3}(m^2)$ ,$g=9.81\ (m/s^2)$ ,$C_d=0.6$.

جـ- إذا زاد معدل التدفق الداخل إلى الخزان بمقدار $(v_1)$، فإن ذلك سيؤدي إلى زيادة في ارتفاع السائل $(h)$، وإلى زيادة في معدل التدفق الخارج بمقدار $(v_2)$. أوجد المعادلة التفاضلية التي تربط بين $v_1$ و $v_2$، علماً أن المقطع العرضي للخزان هو $(A=0.75m^2)$.

أ- يعطى التدفق عبر الصمام بالعلاقة:

$$V=A_V.C_d\sqrt{2g.H}$$

وبالتالي:

$$\left.\frac{dV}{dH}\right|_a=A_V.C_d.\left(2g\right)^{1/2}\times0.5H_a^{-1/2}$$

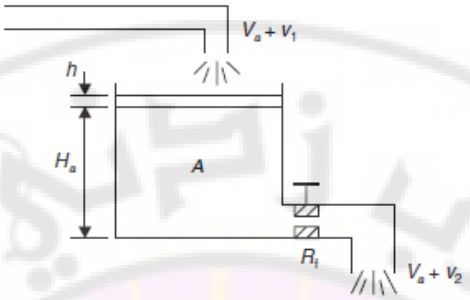
$$=A_V.C_d\sqrt{\frac{g}{2H_a}}=\frac{V^2}{h}$$

إذا كانت العلاقة الخطية بين ارتفاع السائل والتدفق الخارج عبر الصمام وفق:

$$h=R_f.V_2$$

بالمقارنة نجد:

$$R_f=\frac{1}{A_V.C_d}\sqrt{\frac{2H_a}{g}}.....(60-2)$$




**الشكل (2-17): خزان ماء بمقطع عرضي A.**

ب- بتعويض القيم العددية بالمعادلة (2-60) نجد أن قيمة مقاومة الصمام هي:

$$R_f = \frac{1}{15\times10^{-3}\times0.6}\sqrt{\frac{2\times1.5}{9.81}} = 61.45\left(\frac{s}{m^2}\right).....(61-2)$$

جـ- معادلة استمرارية التدفق للخزان:

$$A.\frac{dh}{dt} = \text{التدفق الداخل} - \text{التدفق الخارج}$$

$$A.\frac{dh}{dt} = (V_a + v_2) - (V_a - v_1)$$

$$v_1 - v_2 = A.\frac{dh}{dt}.....(62-2)$$

معادلة الصمام بعد إكسابها صفة الخطية هي:

$$h = R_f.v_2$$

$$\frac{dh}{dt} = R_f.\frac{dv_2}{dt}.....(63-2)$$

بتعويض المعادلة (2-63) في المعادلة (2-62) نجد:

$$v_1 - v_2 = A.R_f\frac{dv_2}{dt}$$

$$A.R_f.\frac{dv_2}{dt} + v_2(t) = v_1(t).....(64-2)$$

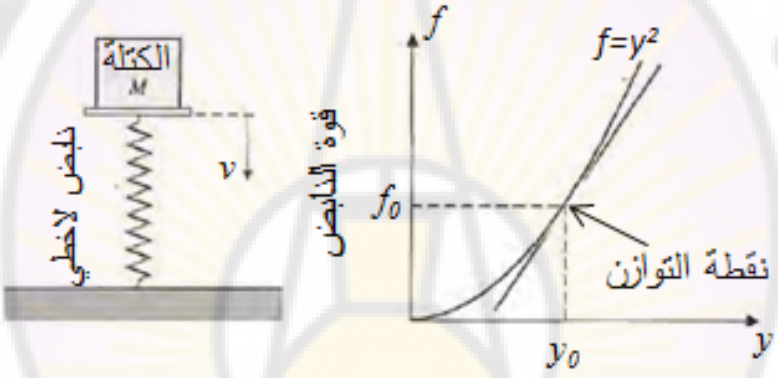
بتعويض القيم العددية نجد:

$$46.09\frac{dv_2}{dt} + v_2(t) = v_1(t).....(65-2)$$

يتم توضيح فكرة إكساب الصفة الخطية للنظم اللاخطية, من خلال معالجة المثاليين التاليين:

**مثال 2-9:**

يبين الشكل (2-18) نظام مؤلف من كتلة ($M$) متوضعة على نابض لاخطي. إن نقطة التشغيل الطبيعية للنظام ($f_0, y_0$) هي نقطة التوازن والتي تحدث عندما تساوي قوة النابض $f_0$ للمقدار ($Mg$)، حيث $g$ تسارع الجاذبية الأرضية. بما أن العلاقة الممثلة للنابض $f=y^2$، بالتالي: $y_0 = (Mg)^{\frac{1}{2}}$.




**الشكل (2-18): نظام الكتلة المتوضع على نابض لاخطي.**

يتمثل النموذج الخطي للنظام، وذلك عند الاضطرابات (الانحرافات) الصغيرة بالعلاقة:

$$\Delta f = m\Delta y$$

حيث: $m = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0} = 2y_0 = 2(Mg)^{\frac{1}{2}}$.

**مثال 2-10:**

يبين الشكل (2-19) نواس مهتز. إن العزم المطبق على الكتلة $M$ يساوي:

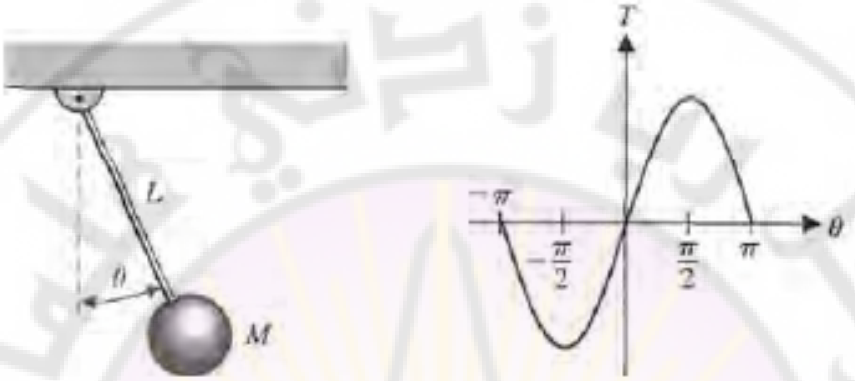
$$T = M.g.L.Sin\theta$$

حيث $g$ تسارع الجاذبية الأرضية.

إن شرط توازن الكتلة هو $\theta_0 = 0°$. يبين الشكل (2-19) العلاقة اللاخطية بين $T$ و $\theta$.

بتطبيق طريقة الانحرافات الصغيرة حول نقطة التوازن نجد أن العلاقة الخطية للنظام:

$$T - T_0 \cong M.g.L \left.\frac{\partial Sin\theta}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$




**الشكل (2-19): نظام النواس المهتز, وعلاقة الخرج بالدخل.**

عندما $T_0=0$، يصبح لدينا:

$$T = M.g.L.(Cos\theta_0)(\theta - 0°)$$

$$T = M.g.L.\theta$$

إن العلاقة التقريبية السابقة صحيحة عندما: $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$. على سبيل المثال، إن استجابة النموذج الخطي عند اهتزازات ضمن الزاوية $\pm 30^o$ قريبة جداً من استجابة النموذج اللاخطي للنواس (قيمة الخطأ بحدود 5%).

**2-7 النمذجة الرياضية لمحركات التيار المستمر:**

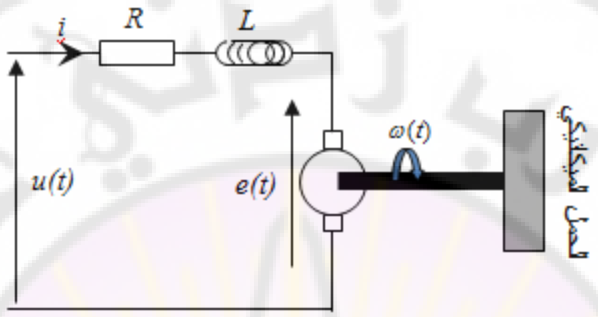
سنقوم فيمايلي، بنمذجة النوعين التاليين من محركات التيار المستمر:

- محرك التيار المستمر ذو التهييج المستقل.
- محرك السيرفو ذو التيار المستمر.

**2-7-1 محرك التيار المستمر ذو التهييج المستقل:**

يبين الشكل (2-20) الدارة المكافئة لمحرك التيار المستمر ذو التهييج المستقل. في هذه الدارة: $u(t)$: توتر التغذية, $\omega(t)$: سرعة دوران المحرك, $L$ ,$R$: مقاومة ومحارضة المتحرض, $K$: ثابت عزم المحرك, $J$: العطالة الكلية (للمحرك وللحمل), $f$: معامل

الاحتكاك, $e(t)$: القوة المحركة الكهربائية المتحرضة, $T_m(t)$، $T_r(t)$: عزم المحرك والعزم المقاوم.




**الشكل (2-20): الدارة المكافئة لمحرك التيار المستمر.**

لنقوم بكتابة المعادلات الناظمة لعمل المحرك:

- المعادلة الكهربائية:

$$u(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t).....(66-2)$$

- المعادلات الكهرومغناطيسية:

$$T_m(t) = K.i(t).....(67-2)$$

$$e(t) = K.\omega(t).....(68-2)$$

- المعادلة الميكانيكية:

$$T_m(t) = J\frac{d\omega}{dt} + T_r(t) + f\omega(t).....(69-2)$$

بتعويض المعادلات (2-67)، (2-68) و (2-69) في المعادلة (2-66)، نجد:

$$\frac{LJ}{K}\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left[\frac{RJ}{K} + \frac{Lf}{K}\right]\frac{d\omega}{dt} + \left[\frac{Rf}{K} + K\right]\omega(t) + T_r(t) = u(t)....(70-2)$$

تبين المعادلة (2-70) العلاقة بين دخل المحرك وهو توتر التهييج $u(t)$ وخرجه المتمثل بسرعة المحرك $\omega(t)$. إن المعادلة التفاضلية (2-70) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، وبالتالي فإن المحرك هو نظام من الدرجة الثانية.

**2-7-2 محرك السيرفو ذو التيار المستمر:**

يُعَدّ محرك السيرفو ذو التيار المستمر، أحد أكثر الأدوات شيوعاً في تنفيذ أوامر التحكم، يبين الشكل (2-21) بنية محرك السيرفو ذو التيار المستمر. يمكن أن يتم التحكم إما عن طريق التحكم بتيار المتحرض (Armature) أو التحكم بتيار الحقل الكهربائية.

**أ – التحكم بواسطة تيار المتحرض:**

إن هذه البنية مبينة بالشكل (2-22). إن التدفق في الثغرة الهوائية $\phi$ يتناسب مع التيار $i_f$، أي:

$$\phi = K_{fd}.i_f \quad .....(71-2)$$

حيث $K_{fd}$: ثابت ملف الحقل. يتناسب العزم المتولد على محور المحرك ($T_m$) مع جداء التدفق عبر الثغرة الهوائية وتيار الجزء الدائر:

$$T_m(t) = \phi.K_{am}.i_a(t) \quad .....(72-2)$$

حيث $K_{am}$: ثابت ملف الجزء الدائر.

في الشكل (2-22)، $e_a(t)$: توتر تهييج المتحرض، $e_b(t)$: القوة المحركة الكهربائية العكسية، $i_a(t)$: تيار المتحرض، $R_a$ و $L_a$: مقاومة ومحارضة المتحرض، $e_f$: توتر ملف الحقل الثابت، $C_P$: تيار الحقل الثابت، $T_m$: عزم المحرك، $\theta(t)$: الانزياح الزاوي لمحور المحرك، $\omega(t)$: السرعة الزاوية لمحور المحرك وتساوي $d\theta/dt$.

بتعويض المعادلة (2-71) بالمعادلة (2-72)، ينتج لدينا:

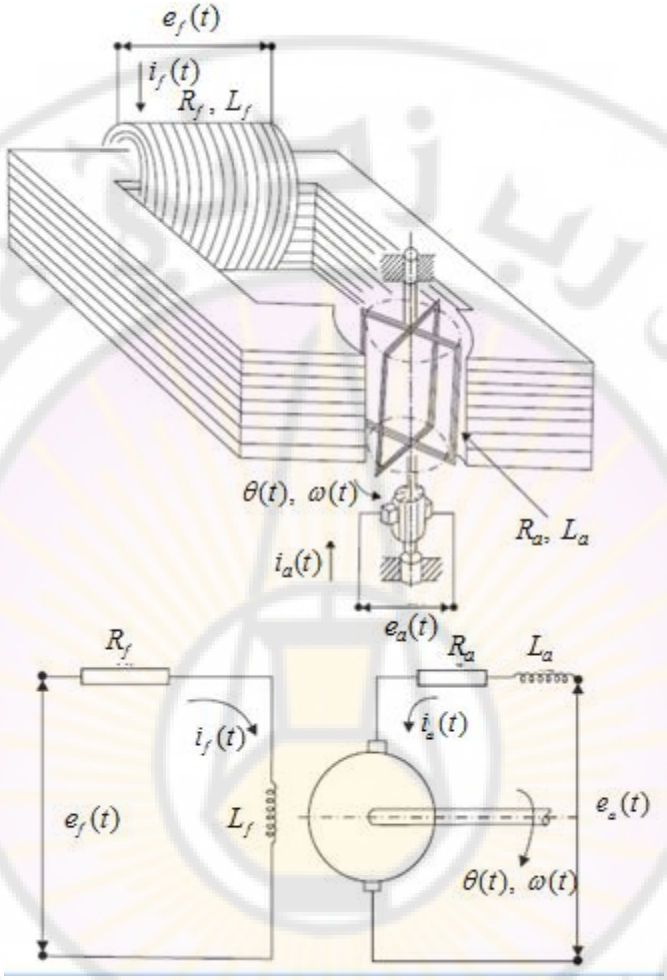
$$T_m(t) = \left(K_{fd}.i_f\right).K_{am}.i_a(t) \quad .....(73-2)$$

طالما أن $i_f$ هو مقدار ثابت، ينتج لدينا:

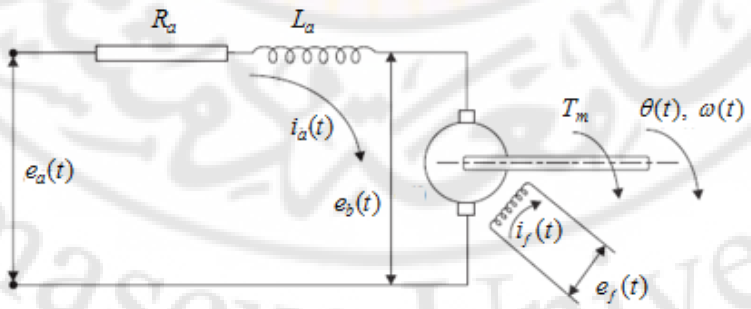
$$T_m(t) = K_a.i_a(t) \quad .....(74-2)$$

حيث $K_a$ ثابت الجزء الدوار الكلي، ويعطى بالعلاقة:

$$K_a = K_{fd}.K_{am}.i_f(t) \quad .....(75-2)$$




**الشكل (2-21): بنية محرك السيرفو ذو التيار المستمر ودارته المكافئة.**




**الشكل (2-22): محرك السيرفو ذو التيار المستمر في حالة التحكم بواسطة المتحرض.**

عندما يدور الجزء الدائر فإن سلوك المحرك يشبه سلوك مولد، وينتج قوة محركة كهربائية عكسية $e_b(t)$ متناسبة مع السرعة الزاوية للمحور:

$$e_b(t) = K_f \frac{d\theta}{dt} = K_b.\omega(t) \quad .....(76-2)$$

حيث $K_b$: ثابت القوة المحركة الكهربائية العكسية.

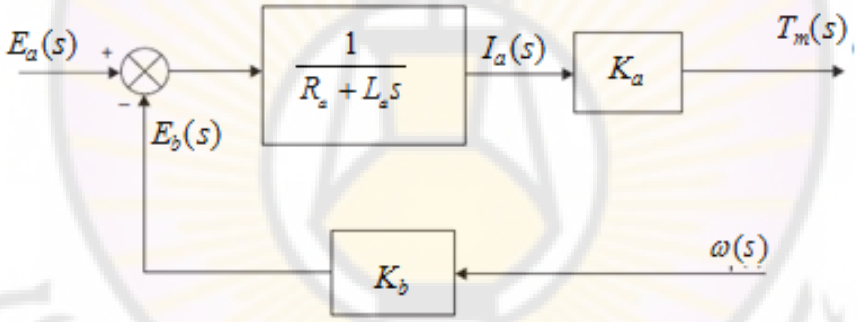
إن فرق الكمون بين طرفي حلقات الجزء الدائر:

$$e_a(t) - e_b(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a.i_a \quad .....(77-2)$$

لنطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (2-77) فنجد:

$$E_a(s) - E_b(s) = (L_a s + R_a) I_a \quad .....(78-2)$$

يبين الشكل (2-23) المخطط الصندوقي الذي يمثل المعادلات (2-74), (2-76), (2-78).



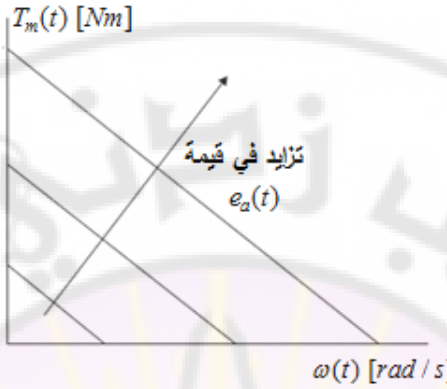

**الشكل (2-23): المخطط الصندوقي الممثل لمحرك السيرفو في حالة التحكم بتيار المتحرض.**

في ظروف العمل المستقرة، يكون العزم المتولد على محور المحرك:

$$T_m(t) = \{e_a(t) - K_b.\omega(t)\} \frac{K_a}{R_a}$$

$$T_m(t) = \frac{K_a}{R_a} e_a(t) - \frac{K_b.K_a}{R_a}.\omega(t) \quad .....(79-2)$$

من المعادلة السابقة (2-79)، يمكن استنتاج العلاقة بين $T_m(t)$ و $\omega(t)$ و $e_a(t)$ وذلك عند شروط العمل المستقرة، والمبينة بالشكل (2-24).




**الشكل (2-24): العلاقة بين $T_m(t)$، $\omega(t)$ و $e_a(t)$ في محرك سيرفو متحكم به بواسطة تيار المتحرض.**

**ب- التحكم بواسطة تيار الحقل المغناطيسي:**

يبين الشكل (2-21) المخطط العام لهذا المحرك مع التحكم بواسطة الحقل المغناطيسي, حيث تكون قيمة تيار المتحرض ثابتة. في هذه الحالة، يمكن أن نكتب المعادلة (2-73) على النحو التالي:

$$T_m(t) = (K_{fd}.K_{am}.i_a).i_f(t).....(80-2)$$

طالما أن $i_a$ ذو قيمة ثابتة، إذاً:

$$T_m(t) = K_f.i_f(t).....(81-2)$$

حيث $K_f$ هو ثابت الحقل المغناطيسي الكلي، والمعطى بالعلاقة:

$$K_f = K_{fd}.K_{am}.i_a.....(82-2)$$

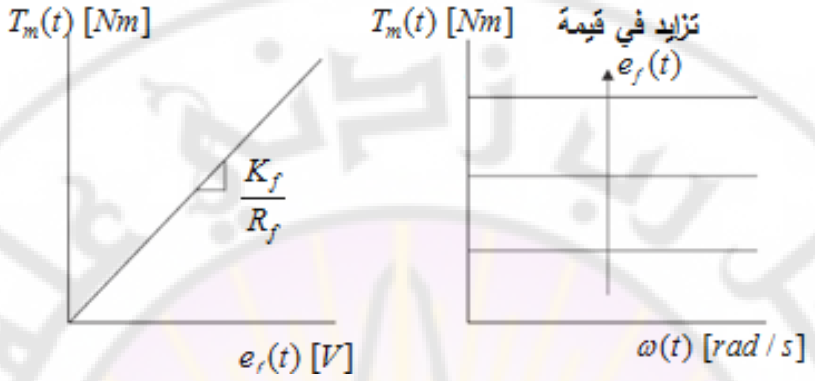
في هذه الحالة، لا تؤثر القوة المحركة الكهربائية العكسية $e_b$ على العزم المتولد، وبالتالي لا تظهر في معادلة العزم، كما توجد صعوبة في المحافظة على تيار دائر ثابت أي ($i_a = cte$). إن فرق الكمون على طرفي ملف الحقل:

$$e_f(t) = L_f\frac{di_f}{dt} + R_f.i_f.....(83-2)$$

في ظروف العمل المستقرة، يعطى العزم المتولد على محور المحرك بالعلاقة:

$$T_m(t) = (K_f/R_f).e_f(t).....(84-2)$$

يبين الشكل (2-25) العلاقة بين $T_m(t)$ و $e_f(t)$ و $\omega(t)$، وذلك عند شروط العمل المستقرة.




**الشكل (2-25): العلاقة بين $T_m(t)$، $\omega(t)$ و $e_f(t)$ لمحرك السيرفو في حالة العمل المستقرة في حالة التحكم بتيار الحقل المغناطيسي.**

**2-8 توابع التحويل:**

يُعرف تابع التحويل لأي نظام ممثل بواسطة معادلة تفاضلية، خطية وذات معاملات ثابتة، بأنه نسبة تحويل لابلاس للخرج إلى تحويل لابلاس للدخل، وذلك بافتراض أن الشروط الابتدائية معدومة. لنفرض أن لدينا نظام خطي، ذو معاملات ثابتة، محدد بواسطة المعادلة التفاضلية التالية:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ..... + a_{n-1} y^{\bullet} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + ..... + b_{m-1} x^{\bullet} + b_m x, \qquad (n \geq m) \qquad .....(85-2)$$

حيث $y(t)$: هو خرج النظام, $x(t)$: هو دخل النظام.

يتم الحصول على تابع التحويل لهذا النظام بتطبيق تحويلات لابلاس لكلا طرفي المعادلة (2- 85)، وذلك بافتراض أن الشروط الابتدائية معدومة، أي:

$$\text{تابع التحويل} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ..... + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ..... + a_{n-1} s + a_n} .....(86-2)$$

مما سبق، يمكن القول أن تابع التحويل هو العلاقة بين الدخل والخرج في المستوي اللابلاسي. يشار عادة إلى تابع التحويل بـ $G(s)$.

**2-8-1 خواص تابع التحويل:**

لنحصر تطبيق مبدأ تابع التحويل على النظم الممثلة بواسطة معادلات تفاضلية خطية، وذات معاملات ثابتة. فيما يلي، سنقدم خواص تابع التحويل:

1- تابع التحويل لنظام هو نموذج رياضي، وطريقة عملية للتعبير عن المعادلة التفاضلية التي تربط الخرج بالدخل.

2- تابع التحويل مستقل عن طبيعة ونوع إشارة الدخل.

3- إذا كان تابع التحويل لنظام معروف، فإن خرج النظام (والمسماة أيضاً استجابة النظام) يمكن أن تدرس وذلك من أجل أنواع متعددة لإشارات الدخل.

4- تسمى القيم التي تعدم بسط تابع التحويل **بأصفار النظام**.

5- تسمى القيم التي تعدم مقام تابع التحويل **بأقطاب النظام**.

**مثال 2-11:**

لدينا نظام التحكم الممثل بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$x_0^{\bullet\bullet} + 3x_0^{\bullet} + 2x_0 = 5x_i$$

لنوجد تابع تحويل النظام علماً أن $x_i$، $x_0$ هما دخل وخرج النظام على التوالي.

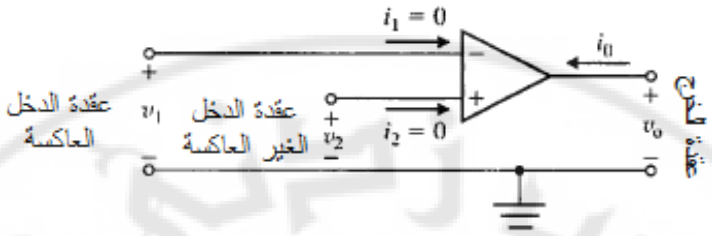
– لنطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية, وذلك عند شروط ابتدائية معدومة:

$$\left(s^2 + 3s + 2\right) X_0(s) = 5X_i(s)$$

في هذه المعادلة $X_i(s)$ و $X_0(s)$ هما تحويلا لابلاس لإشارات دخل وخرج النظام. بالتالي فإن تابع تحويل النظام: $G(s) = \dfrac{X_0(s)}{X_i(s)} = \dfrac{5}{s^2 + 3s + 2}$.

**مثال 2-12:** تابع تحويل دارة مكبر عمليات:

ينتمي مكبر العمليات إلى الدارات المتكاملة التماثلية والمستخدمة في تنفيذ نظم التحكم الخطية. تتميز مكبرات العمليات بربح كبير عندما تعمل ضمن المجال الخطي. يبين الشكل (2-26) نموذج مكبر العمليات.




**الشكل (2-26): مكبر العمليات المثالي.**

إن شروط عمل مكبر العمليات المثالية:

1- ممانعة دخل مكبر العمليات لانهائية ($Z_{in}=\infty$), بالتالي $i_1=0$ و $i_2=0$.

2- $v_2-v_1=0$ أو $v_1=v_2$.

3- تعطى علاقة دخل– خرج مكبر العمليات بالعلاقة التالية:

$$v_0 = K\left(v_2 - v_1\right) = -K\left(v_1 - v_2\right)$$

حيث يسعى $K$ نحو اللانهاية ($K\to\infty$). سنفرض في دراستنا أن مكبر العمليات الخطي يعمل عند ربح كبير وذلك عند شروط عمل مثالية.

لندرس مكبر العمليات العاكس والمبين بالشكل (2-27). في ظروف العمل المثالية. لدينا $i_1=0$، بالتالي يمكن أن نطبق قانون كيرشوف للعقد عند $v_1$ فنجد:

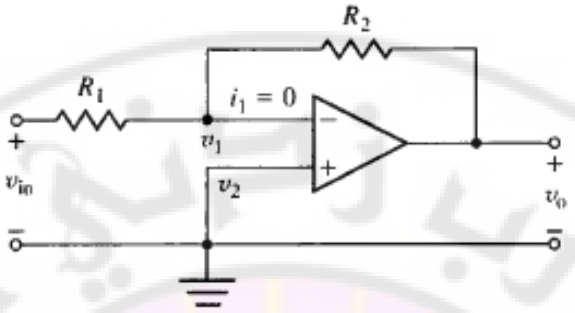
$$\left(v_1 - v_{in}/R_1\right) + \left(v_1 - v_0/R_2\right) = 0$$

طالما أن $v_1=v_2$ (ضمن شروط العمل المثالية)، و $v_2=0$، بالتالي ينتج أن $v_1=0$.

بالتعويض بالعلاقة السابقة نجد: $\quad -v_{in}/R_1 - v_0/R_2 = 0$

بإعادة ترتيب هذه العلاقة نجد: $\quad v_0/v_{in} = -R_2/R_1$

عندما $R_1=R_2$، فإن مكبر العمليات المثالي يعكس إشارة الدخل بحيث ينتج لدينا $v_0= - v_{in}$.

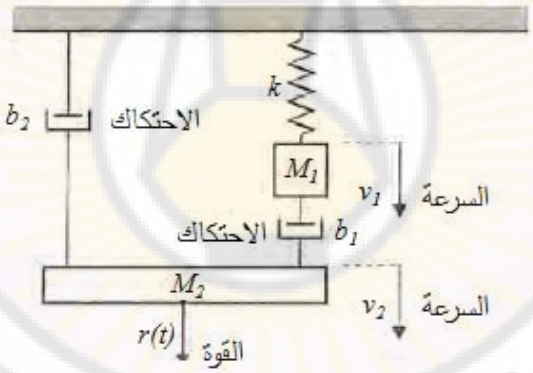



**الشكل (2-27): مكبر العمليات المثالي العاكس.**

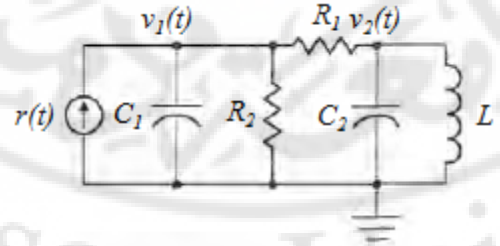
**مثال 2-13: تابع تحويل نظام ميكانيكي:**

يبين الشكل (2-28) النظام الميكانيكي المراد دراسته، أما الشكل (2-29) فيبين الدارة الكهربائية المشابهة لهذا النظام الميكانيكي حيث لدينا:

$$C_1 = M_1, \quad C_2 = M_2, \quad L = \frac{1}{k}, \quad R_1 = \frac{1}{b_1}, \quad R_2 = \frac{1}{b_2}$$




**الشكل (2-28): نظام ميكانيكي ذو كتلتين.**




**الشكل (2-29): الدارة الكهربائية المشابهة للنظام الميكانيكي المبين بالشكل (2-28).**

في الدارة المبينة بالشكل (2-29)، تكافئ التوترات $v_1(t)$ و $v_2(t)$ السرعات $v_1(t)$ و $v_2(t)$ في النظام الميكانيكي. عند شروط عمل ابتدائية معدومة، نجد:

$$M_1 s V_1(s) + (b_1 + b_2) V_1(s) - b_1 V_2(s) = R(s)$$
$$M_2 s V_2(s) + b_1 (V_2(s) - V_1(s)) + k \frac{V_2(s)}{s} = 0$$

بإعادة ترتيب هذه المعادلات نجد:

$$(M_1 s + (b_1 + b_2)) V_1(s) + (-b_1) V_2(s) = R(s)$$
$$(-b_1) V_1(s) + \left( M_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \right) V_2(s) = 0$$

نجد بافتراض أن دخل النظام هي القوة $R(s)$، وخرجه هو السرعة $V_1(s)$، أن:

$$V_1(s) = \frac{(M_2 s + b_1 + k/s) R(s)}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s + b_1 + k/s) - b_1^2}$$

بالتالي فإن تابع تحويل النظام الميكانيكي (أو الكهربائي):

$$G_1(s) = \frac{V_1(s)}{R(s)} = \frac{(M_2 s^2 + b_1 s + k)}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s^2 + b_1 s + k) - b_1^2 s}$$

إذا، أردنا إيجاد علاقة تابع تحويل النظام بافتراض أن خرج النظام هو موضع الكتلة $M_1$ (أو $x_1$) نجد:

$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{V_1(s)}{sR(s)} = \frac{G(s)}{s}$$

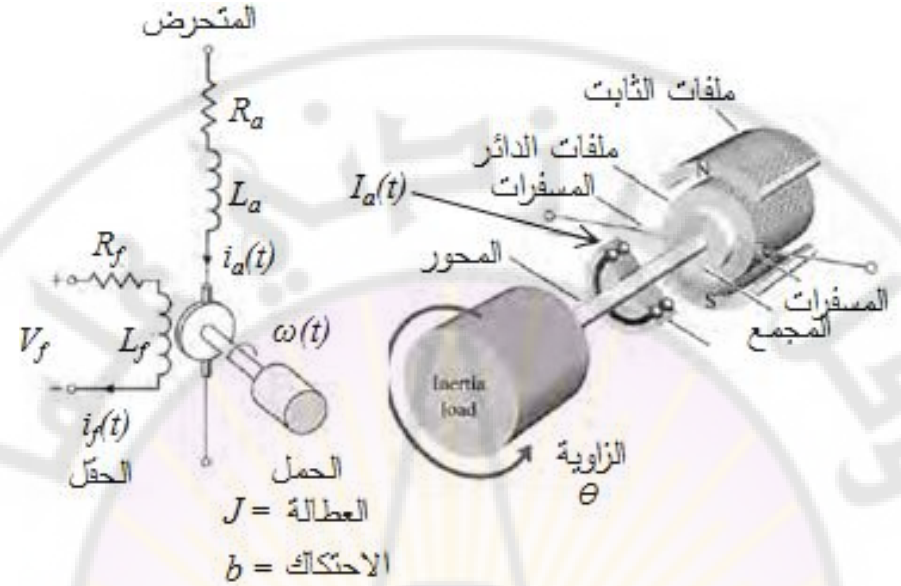
**مثال 2-14: تابع تحويل محرك السيرفو ذو التيار المستمر:**

يبين الشكل (2-30) محرك السيرفو ذو التيار المستمر.

رأينا في الفقرة 2-7-2، النموذج الرياضي لمحرك السيرفو المستمر في حالة اللاحمل، بينما سنعالج في هذا المثال النموذج الرياضي لمحرك السيرفو ذو التيار المستمر في حالة تحميله بحمولة دورانية عطالتها $(J)$.

يعطى عزم المحرك كما رأينا سابقاً بالعلاقة:

$$T_m = K_1 \phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) . i_a(t) \quad .....(87-2)$$




**الشكل (2-30): محرك السيرفو المستمر: – الدارة الكهربائية – المقطع العرضي**

– الحالة الأولى: التحكم بواسطة تيار الحقل المغناطيسي:

في هذه الحالة، تصبح العلاقة السابقة:

$$T_m(s) = (K_1 K_f I_a) I_f(s) = K_m . I_f(s) .....(88-2)$$

حيث: $i_a = I_a = cte$ , ويُعرف $K_m$ بثابت المحرك.

يرتبط تيار الحقل المغناطيسي $I_f(s)$ بتوتره $V_f(s)$ بالعلاقة:

$$V_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s) .....(89-2)$$

كما يعطى عزم المحرك في حالة التحميل بالعلاقة:

$$T_m(s) = T_L(s) + T_d(s) .....(90-2)$$

حيث $T_L(s)$: هو عزم الحمل, $T_d(s)$: هو عزم الاضطراب الخارجي المؤثر على المحرك.

يعطى عزم الحمل لحمولة دورانية ذات عطالة $J$ بالعلاقة:

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s) ....(91-2)$$

بإعادة ترتيب المعادلات السابقة نجد:

$$T_L(s) = T_m(s) - T_d(s)$$

$$T_m(s) = K_m I_f(s)$$

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + L_f s}$$

بالتالي تابع تحويل محرك السيرفو ذو التيار المستمر (في حالة التحكم بالحقل المغناطيسي) والمحمل بحمولة دورانية ذات عطالة $(J)$، يعطى بالعلاقة:

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js+b)(L_f s + R_f)} = \frac{K_m / (JL_f)}{s(s+b/J)(s+R_f/L_f)} \quad .....(92-2)$$

يمكن التعبير عن تابع تحويل محرك السيرفو المستمر بدلالة الثوابت الزمنية للمحرك، أي:

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = G(s) = \frac{K_m / (JL_f)}{s(\tau_f s+1)(\tau_L s+1)} \quad .....(93-2)$$

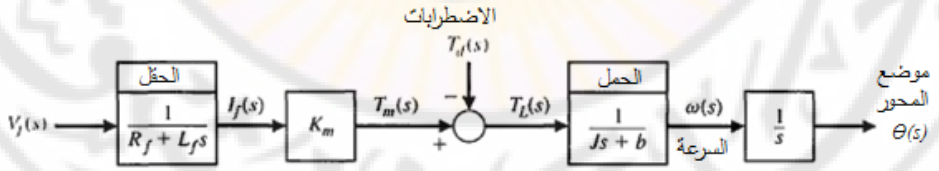
حيث:

$\tau_f = L_f / R_f$ : الثابت الزمني لملف الحقل.

$\tau_L = J/b$ : ثابت زمن الحمل.

عملياً، $\tau_L > \tau_f$ بالتالي يمكن إهمال الثابت الزمني لملف الحقل.

يبين الشكل (2-31) المخطط الصندوقي للمحرك والمكافئ لتابع التحويل المعطى بالعلاقة (93-2).




**الشكل (2-31): المخطط الصندوقي لمحرك سيرفو ذو تيار مستمر محمل (حالة التحكم بتيار الحقل المغناطيسي).**

– الحالة الثانية: التحكم بتيار المتحرض:

وجدنا سابقاً في العلاقة (2-87) أن عزم المحرك يتعلق بتيار المتحرض، بالتالي يمكن أن نكتب العلاقة التالية:

$$T_m(s) = \left(K_1 K_f I_f\right) I_a(s) = K_m . I_a(s) \ldots\ldots\ldots (94-2)$$

في العلاقة السابقة، اعتبرنا أن $I_f$ ثابت. إذا تم استخدام مغناطيس دائم في ثابت المحرك فإن $K_m$ يتبع ناقلية المادة المغناطيسية.

يرتبط تيار المتحرض بتوتر الدخل المطبق على طرفي المتحرض بالعلاقة:

$$V_a(s) = \left(R_a + L_a . s\right) . I_a(s) + V_b(s) \ldots\ldots\ldots (95-2)$$

حيث تمثل $V_b(s)$ القوة المحركة الكهربائية، والمتناسبة مع سرعة دوران المحرك، وفق العلاقة:

$$V_b(s) = K_b \omega(s) \ldots\ldots\ldots (96-2)$$

$$V_b(s) = K_b . s . \theta(s) \ldots\ldots\ldots (97-2)$$

نحصل بتعويض العلاقة (2- 97) في العلاقة (2- 95 ) على علاقة تيار المتحرض:

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b \omega(s)}{R_a + L_a . s} \ldots\ldots\ldots (98-2)$$

بجد بتعويض علاقة تيار المتحرض بعلاقة عزم الحمل:

$$T_L(s) = Js^2 \theta(s) + bs\theta(s) = T_m(s) - T_d(s)$$

نجد عند إهمال الاضطراب الخارجي $T_d$=0 أن:

$$T_L(s) = Js^2 \theta(s) + bs\theta(s) = \frac{K_m \left[V_a(s) - K_b \omega(s)\right]}{R_a + L_a . s} \ldots\ldots\ldots (99-2)$$

بالتالي، يمكن صياغة تابع التحويل على النحو التالي:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s\left[\left(R_a + L_a . s\right)\left(Js + b\right) + K_b K_m\right]} \ldots\ldots\ldots (100-2)$$

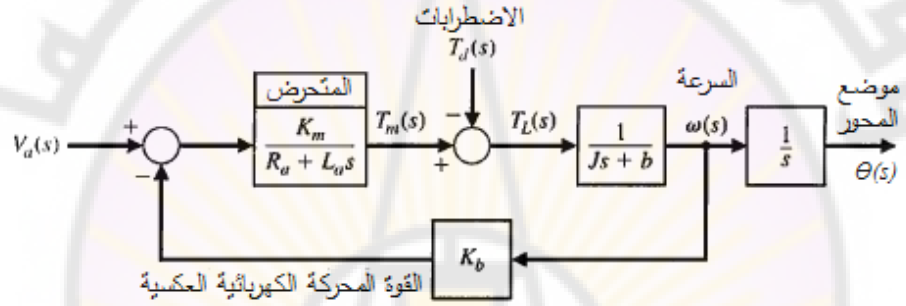
عملياً وفي العديد من محركات السيرفو المستمرة، يمكن إهمال ثابت زمن المتحرض $\tau_a = L_a / R_a$ ، وبالتالي:

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m}{s\left[R_a\left(Js+b\right)+K_bK_m\right]}=$$

$$=\frac{K_m/\left(R_ab+K_bK_m\right)}{s\left(\tau_1 s+1\right)}.....(101-2)$$

حيث يسمى $\tau_1$ بثابت الزمن المكافئ ويعطى بالعلاقة:

$$\tau_1=\frac{R_a.J}{R_ab+K_bK_m}.....(102-2)$$




**الشكل (2-32): المخطط الصندوقي لمحرك سيرفو ذو تيار مستمر محمل (حالة التحكم بتيار المتحرض).**

ملاحظة 1: يمكن اعتبار أن $K_m=K_b$ وذلك عند إهمال مقاومة الدائر. تم التوصل لهذه الملاحظة وذلك بافتراض أن استطاعة دخل الدائر تساوي استطاعة خرجه، أي:

$$\left(P_{rotor}\right)_{in}=\left(P_{rotor}\right)_{out}\Rightarrow\left(K_b\omega\right)i_a=T\omega$$

لدينا: $T=K_m.i_a$ , وبالتالي نجد:

$$K_b.\omega.i_a=K_m.i_a.\omega \quad\Rightarrow\quad K_b=K_m$$

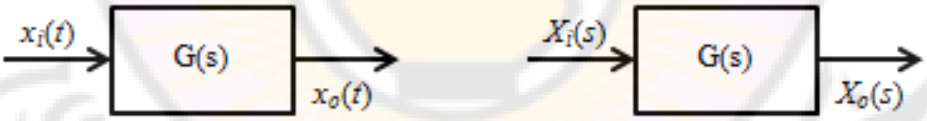
ملاحظة 2: تستخدم المحركات الكهربائية لتحريك الأحمال وذلك عند عدم الحاجة لاستجابة سريعة، وعندما يكون المطلوب استطاعة تحريك منخفضة نسبياً, بينما تستخدم المحركات الهيدروليكية لتحريك الأحمال الكبيرة.

يبين الجدول (2-1) قيم الثوابت النموذجية لمحرك سيرفو ذو تيار مستمر:

| الجدول (2-1): قيم الثوابت النموذجية لمحرك سيرفو ذو تيار مستمر | |
|---|---|
| **الثابت** | **القيمة العددية** |
| – ثابت المحرك $K_m$<br>– عطالة الدائر $J_m$ | $50\times10^{-3}$ N.m/A<br>$1\times10^{-3}$ N.m.s$^2$/rad |
| – ثابت زمن الحقل المغناطيسي $\tau_f$<br>– ثابت زمن الدائر $\tau$<br>– استطاعة الخرج العظمى | 1 ms<br>100 ms<br>.1/4 hp = 187 W |

**2-9 التمثيل الصندوقي لنظام التحكم:**

يُعَدّ المخطط الصندوقي من أهم طرائق تمثيل النظام، نظراً لبساطتها واقتصارها على إبراز العلاقة بين المتحولات التي تتفاعل في النظم (الدخل والخرج). فالعناصر المكونة للنظم تمثل بواسطة مستطيلات، وطرق نقل الإشارات تمثل بواسطة خطوط مستقيمة والأسهم تدل على اتجاه تدفق الإشارات. يوضع الدخل على يسار الصندوق والخرج على يمينه، كما موضح بالشكل (2-33).




**الشكل (2-33): التمثيل الصندوقي للنظام.**

يوضح الشكل (2-33) التمثيل الصندوقي لنظام تابع تحويله $G(s)$ وإشارة دخله $x_i(t)$ (أو $X_i(s)$ في المستوي الابلاسي) وإشارة خرج $x_0(t)$ (أو $X_0(s)$ في المستوي الابلاسي).

**1-9-2 المخطط الصندوقي لنظام:**

المخطط الصندوقي لنظام هو تمثيل تصويري للتوابع التي تمثل سلوك كل عنصر في النظام ولتدفق الإشارات في النظام. يمثل كل عنصر في النظام بواسطة صندوق يحوي داخله تابع تحويل العنصر. يصف أيضاً المخطط الصندوقي العلاقات المتبادلة التي تربط بين مختلف العناصر في النظام. الاختلاف الجذري بين المخطط الصندوقي

والتمثيل الرياضي لنظام هو أن المخطط الصندوقي يشير بشكل واضح لتدفق الإشارة في النظام المدروس. قد يحتوي المخطط الصندوقي على وصلات تجميع أو نقاط تفريع.

نقطة التجميع (Summing Point)، يشار إليها في المخطط الصندوقي بدائرة تحوي داخلها خطين متقاطعين. إشارة الجمع (+) أو الطرح (-) المتوضعة على رأس السهم تشير فيما إذا الإشارة الداخلة ستجمع إلى بقية الإشارات الداخلة أو ستطرح. من المهم التاكيد على أن الكميات التي ستضاف أو ستطرح يجب أن تكون متجانسة (لها نفس الواحدات ونفس الأبعاد). نقطة التفريع (Branch Point) هي نقطة والتي اعتباراً منها تذهب الإشارة بنفس الوقت إلى عدة صناديق أو إلى عدة نقاط تجميع.

**2-9-2 طرق تبسيط المخططات الصندوقية:**

بالنظر إلى المخططات الصندوقية لنظم التحكم المفتوحة والمغلقة تتضح ضرورة تبسيط هذه المخططات لتيسير عملية الحصول على توابع تحويل النظم الإجمالية. يبين الجدول (2-2) القواعد المتبعة لتبسيط المخططات الصندوقية.

**مثال 2-15:**

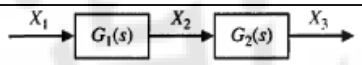
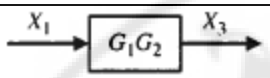
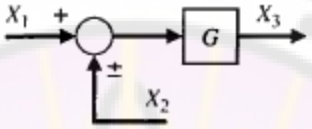
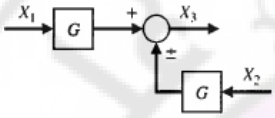
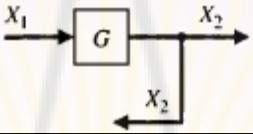
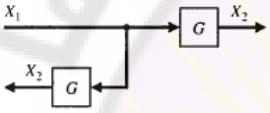
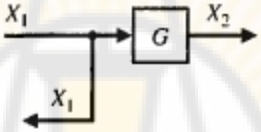
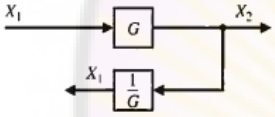
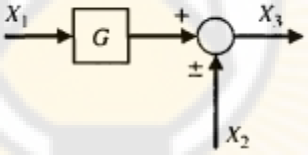
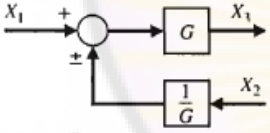
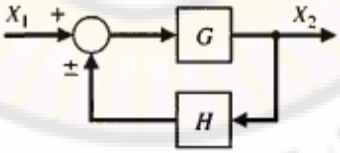
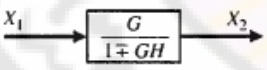
لنوجد تابع تحويل المخطط الصندوقي للنظام المبين في الشكل (2-34) مستخدماً طرق التبسيط المعطاة بالجدول (2-2).

لتبسيط المخطط الصندوقي نتبع الخطوات التالية:

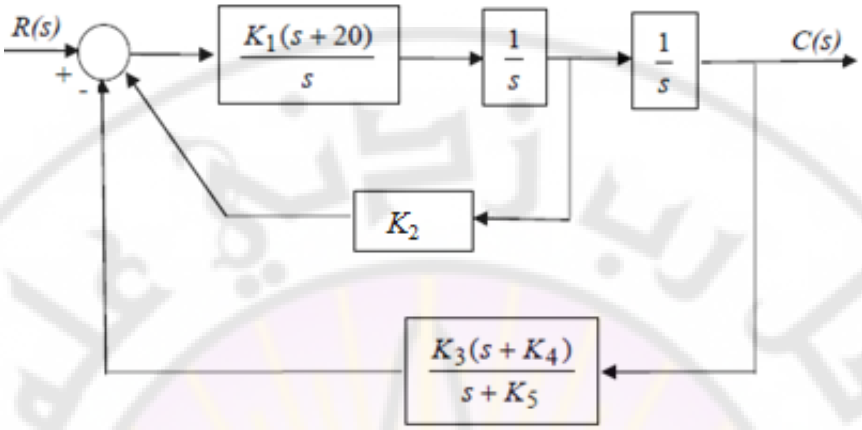
1- نبدأ بدمج تابعي التحويل $1/s$ و $K_1(s+20)/s$ الموصلين على التسلسل، في صندوق واحد. يعطى تابع تحويل الصندوق الناتج بالعلاقة: $G_1(s) = K_1(s+20)/s^2$.

2- نستبدل الحلقة المغلقة الداخلية بصندوق واحد، باستخدام قانون التغذية الخلفية، ثم نقوم بدمج الصندوق الناتج مع تابع التحويل $(1/s)$ كونهما موصلين على التسلسل. نشير لتابع التحويل الناتج بـ $G_2(s)$:

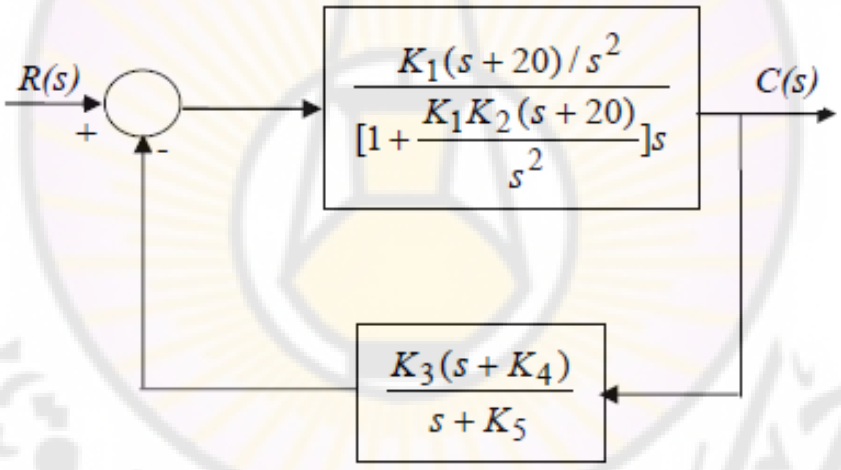
$$G_2(s) = \frac{K_1(s+20)/s^2}{\left[1+\frac{K_1K_2(s+20)}{s^2}\right]s}$$

| الجدول (2-2): القواعد المتبعة لتبسيط المخططات الصندوقية | | |
|---|---|---|
| عملية التبسيط المتبعة | المخطط قبل التبسيط | المخطط بعد التبسيط |
| نظامان موصلان على التسلسل |  |  |
| نقل نقطة التجميع من دخل العنصر إلى خرجه |  |  |
| نقل نقطة تفريع من خرج عنصر إلى دخله |  |  |
| نقل نقطة تفريع من دخل عنصر إلى خرجه |  |  |
| نقل نقطة التجميع من خرج العنصر إلى دخله |  |  |
| حلقة تغذية خلفية نموذجية |  |  |

3- من الخطوات الأولى والثانية نحصل على الحلقة المغلقة المبسطة المبينة بالشكل (2-35).




**الشكل (2-34): المخطط الصندوقي في المثال 2-15**




**الشكل (2-35): المخطط الصندوقي المبسط للمثال 2-15**

4- من الشكل (2-35) نحصل على تابع تحويل النظام الإجمالي H(s).

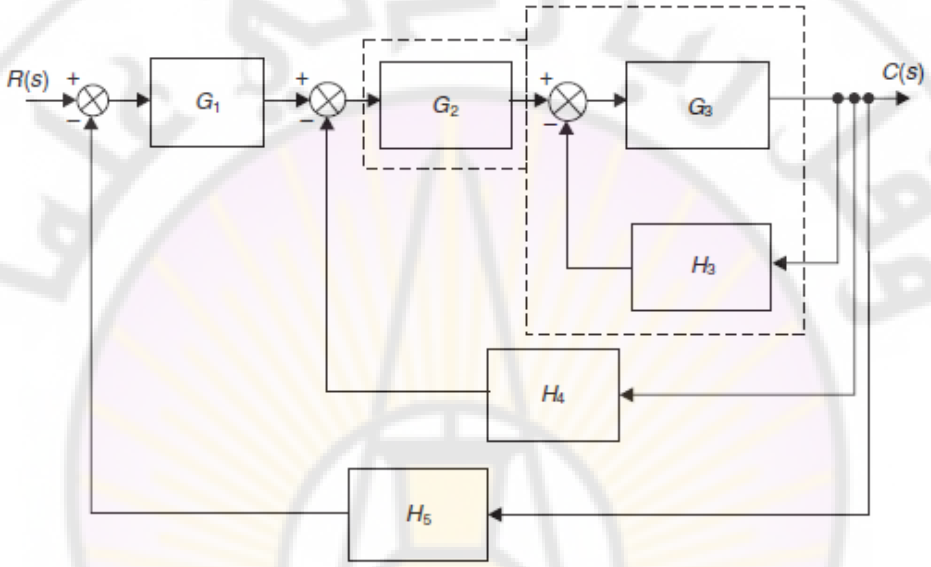
$$H(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=$$

$$=\frac{K_1(s+20)(s+K_5)}{s(s^2+K_1K_2(s+20))(s+K_5)+K_1K_3(s+20)(s+K_4)}$$

■

**مثال 2-16:**

لنوجد تابع تحويل المخطط الصندوقي للنظام المبين بالشكل (2-36). لتبسيط المخطط الصندوقي نتبع الخطوات التالية:




**الشكل (2-36): المخطط الصندوقي للنظام المقصود بالمثال 2-16.**

1- نبدأ بتبسيط الحلقة الصغرى، المؤلفة من الصناديق ذات توابع التحويل $G_3$ و $H_3$. يشار لتابع التحويل الناتج بـ $G_{1m}$.

$$G_{1m} = \frac{G_3}{1+G_3H_3}$$

2- يدمج الصندوقان $G_{1m}$ و $G_2$ المربوطان على التسلسل, ويشار لتابع التحويل الناتج عن دمجهما بـ $G_{m2}$:

$$G_{m2} = \frac{G_2G_3}{1+G_3H_3}$$

3- يقع الصندوق $G_{m2}$ في حالة تغذية خلفية سالبة مع الصندوق $H_4$. يشار لتابع التحويل الناتج عن تبسيطهما بـ $G_{m3}$:

$$G_{m3}=\frac{\dfrac{G_2G_3}{1+G_3H_3}}{1+\dfrac{G_2G_3}{1+G_3H_3}.H_4}=\frac{G_2G_3}{1+G_3H_3+G_2G_3H_4}$$

إن الصندوقين $G_{m3}$ و $G_1$ مربوطين على التسلسل. يشار لتابع التحويل الناتج عن دمجهما بـ $G_{m4}$:

$$G_{m4}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_3H_3+G_2G_3H_4}$$

4- الصندوق $G_{m4}$ في حالة تغذية خلفية سالبة مع الصندوق $H_5$. يشار لتابع التحويل الناتج عن تبسيطهما بـ $T(s)$، وهو تابع تحويل النظام ككل:

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_3H_3+G_2G_3H_4}}{1+\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_3H_3+G_2G_3H_4}H_5}$$

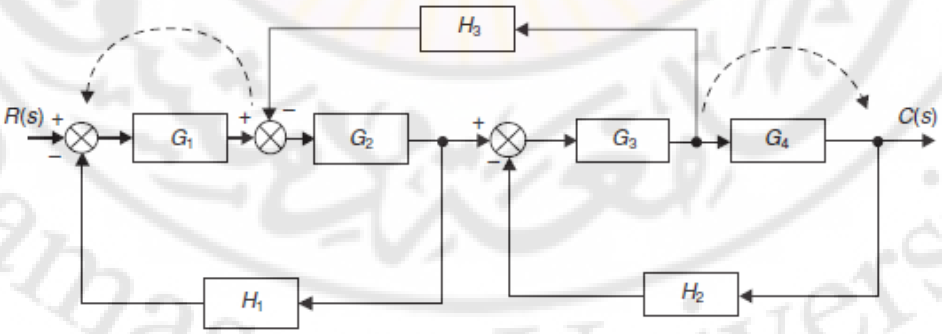
بتبسيط العلاقة السابقة نجد:

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_3H_3+G_2G_3H_4+G_1G_2G_3H_5}$$

■

**مثال 2-17:**

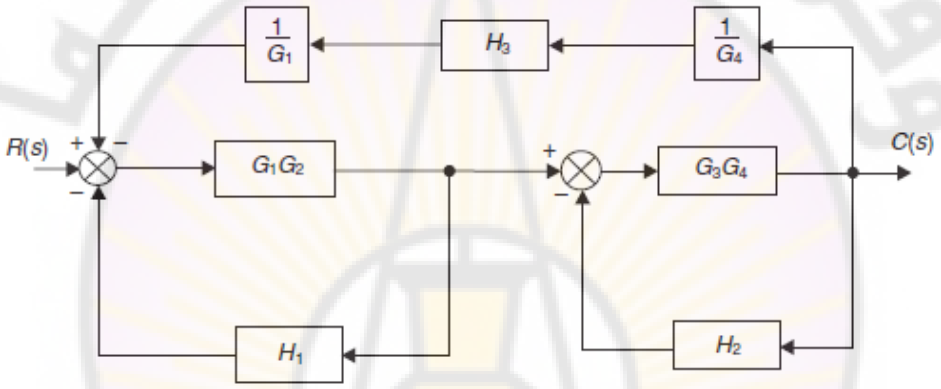
لنوجد تابع تحويل المخطط الصندوقي للنظام المبين بالشكل (2-37).




**الشكل (2-37): المخطط الصندوقي للنظام المقصود بالمثال 2-17.**

لتبسيط المخطط الصندوقي سنقوم بالخطوات التالية:

1- نقوم بنقل نقطة التجميع التي تقع إلى يمين الصندوق $G_1$ إلى يساره، وكذلك نقوم بنقل نقطة التفريع من يمين الصندوق $G_4$ إلى يساره. يبين الشكل (2-39) المخطط الصندوقي الناتج عن عملية النقل. لاحظ أنه قد تمت إضافة صناديق جديدة هي $(1/G_4)$ و $(1/G_1)$ وذلك للحفاظ على قيم الإشارات قبل وبعد النقل. نقوم بدمج العناصر $G_3$ و $G_4$ المربوطة على التسلسل وكذلك نقوم بدمج العناصر $G_1$ و $G_2$ المربوطة أيضاً على التسلسل.




**الشكل (2-38): المخطط الصندوقي بعد تنفيذ عملية النقل.**

2- نقوم بدمج العناصر $(1/G_4)$ و $(1/G_1)$ و $(H_3)$ الموصولة على التسلسل. يشار للصندوق الناتج بـ:

$$G_{1m} = \frac{H_3}{G_1 G_4}$$

3- الصندوق $G_3G_4$ في حالة تغذية خلفية سالبة مع الصندوق $H_2$. يشار إلى التحويل الناتج عن تبسيطهما بـ:

$$G_{2m} = \frac{G_3 G_4}{1 + G_3 G_4 H_2}$$

4- الصندوق $G_1G_2$ في حالة تغذية خلفية سالبة مع الصندوق $H_1$. يشار لتابع التحويل الناتج عن تبسيطهما بـ:

$$G_{3m} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1}$$

5- الصناديق ذات توابع التحويل $G_{2m}$ و $G_{3m}$ مربوطة على التسلسل. يعطى تابع التحويل الناتج عن دمجهما:

$$G_{4m}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{(1+G_1G_2H_1)(1+G_3G_4H_2)}$$

6- الصندوق $G_{4m}$ في حالة تغذية خلفية سالبة مع الصندوق $G_{1m}$. يعطى تابع التحويل الناتج عن دمجهما:

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{G_1G_2G_3G_4}{(1+G_1G_2H_1)(1+G_3G_4H_2)}}{1+\dfrac{G_1G_2G_3G_4.H_3}{(1+G_1G_2H_1)(1+G_3G_4H_2)(G_1G_4)}}$$

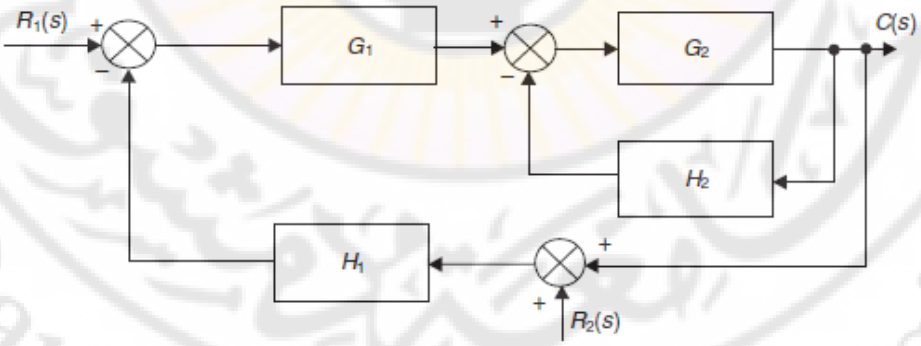
بتبسيط العلاقة السابقة نجد:

$$T(s)=\frac{G_1G_2G_3G_4}{(1+G_1G_2H_1)(1+G_3G_4H_2)(G_2G_3H_3)}$$

■

**مثال 2-18:**

لنوجد علاقة خرج النظام $C(s)$ المبين بالشكل (2-39) وذلك عندما يؤثر كلا الدخلين $R_1(s)$ و $R_2(s)$ بآن واحد.




**الشكل (2-39): النظام متعدد المداخل المقصود بالمثال (2-18).**

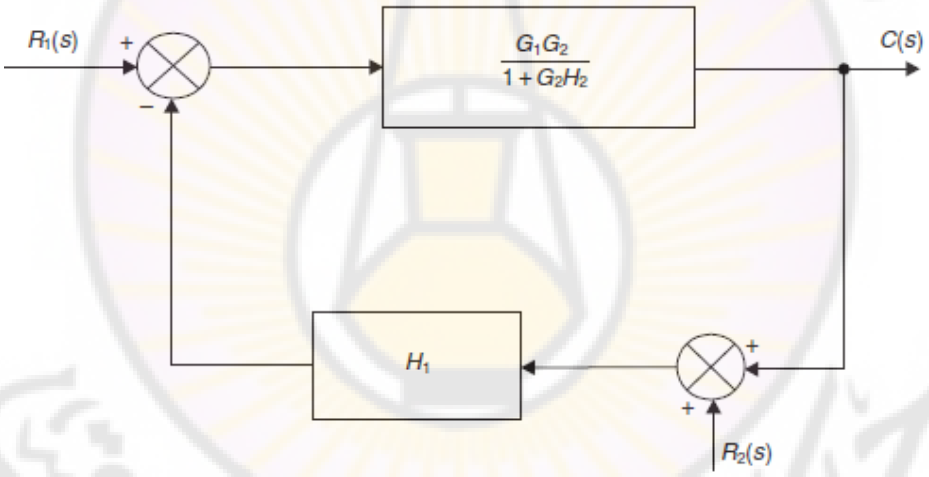
إن المخطط الصندوقي (2-39) يمكن أن يبسط ليبدو على النحو المبين بالشكل (2-40). لنطبق مبدأ التراكم وذلك على النحو التالي:

1- نضع $R_2(s)=0$، ونستبدل نقطة التجميع بـ (+1)، ينتج لدينا المخطط الصندوقي المبين بالشكل (2-41). في هذا الشكل، تمثل $C^1(s)$ استجابة النظام لإشارة الدخل $R_1(s)$. في هذه الحالة، يكون تابع تحويل النظام:

$$\frac{C^1(s)}{R_1(s)}=\frac{\dfrac{G_1G_2}{1+G_2H_2}}{1+\dfrac{G_1G_2H_1}{1+G_2H_2}}$$

بالتالي ينتج لدينا:

$$C^1(s)=\frac{G_1G_2}{1+G_2H_2+G_1G_2H_1}.R_1(s)$$




**الشكل (2-40): النظام المبسط.**

2- نفرض أن $R_1(s)=0$، ونستبدل نقطة التجميع بـ (-1)، فينتج المخطط الصندوقي المبين بالشكل (2-42). في هذا الشكل، تمثل $C^{II}(s)$ استجابة النظام لإشارة الدخل $R_2(s)$. في هذه الحالة، يكون تابع تحويل النظام:

$$\frac{C^{II}(s)}{R_2(s)}=\frac{\dfrac{-G_1G_2H_1}{1+G_2H_2}}{1-\left(\dfrac{-G_1G_2H_1}{1+G_2H_2}\right)}$$

بالتالي، ينتج لدينا:

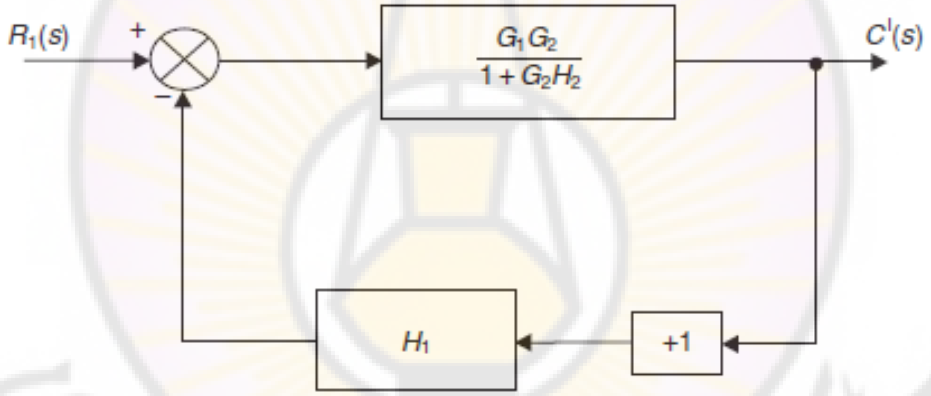
$$C^{II}(s)=\frac{-G_1G_2H_1}{1+G_2H_2+G_1G_2H_1}.R_2(s)$$

يمكن ملاحظة أن المقام في علاقتي $C^{I}(s)$ و $C^{II}(s)$ متطابق.

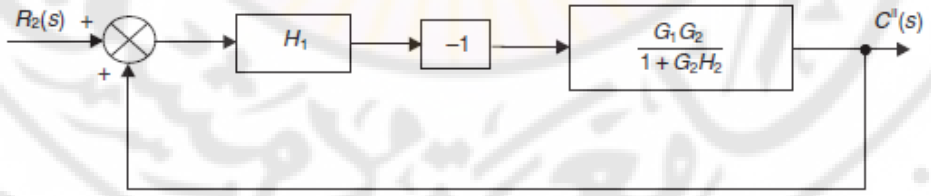
3- بتطبيق مبدأ التراكم، نحصل على الاستجابة الكلية للنظام لإشارتي الدخل $R_1(s)$ و $R_2(s)$، أي:

$$C(s)=C^{I}(s)+C^{II}(s)=\frac{G_1G_2.R_1(s)-G_1G_2H_1R_2(s)}{1+G_2H_2+G_1G_2H_1}$$

■ إن استبدال نقطة التجميع بـ (+1) أو (-1) يعتمد على الإشارة عند نقطة التجميع.




**الشكل (2-41): المخطط الصندوقي عندما تكون $R_1(s)$ هي المؤثرة فقط.**

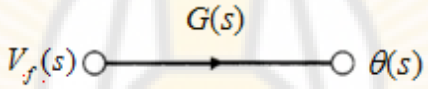



**الشكل (2-42): المخطط الصندوقي عندما تكون $R_2(s)$ هي المؤثرة فقط.**

## 10-2 تمثيل النظم باستخدام مخطط تدفق الإشارة

**(System Representation By Signal- Flow Graph)**

تُعَدّ المخططات الصندوقية إحدى الطرق الجيدة والدقيقة لتمثيل العلاقة بين متحولات النظام، ولكن مع تزايد تعقيد النظام يصبح تبسيط المخططات الصندوقية صعب. اقترح ماسون طريقة بديلة لتمثيل العلاقة بين متحولات النظام، حيث يُمثل النظام بواسطة قطع مستقيمة (Line Segments). إحدى محاسن هذه الطريقة والمسماة طريقة تدفق الإشارة (Signal- Flow Graph Method) هي إمكانية الحصول على علاقة بين الدخل والخرج، دون الحاجة للجوء إلى قواعد تبسيط المخططات. يتألف مخطط تدفق الإشارة من عقد (Nodes) موصلة فيما بينها بواسطة أسهم تحدد اتجاه تدفق الإشارة بين العقد. يسمى السهم الواصل بين عقدتين بالفرع (أو Branch). يبين الشكل (2-43) مخطط تدفق الإشارة لمحرك السيرفو ذو التيار المستمر والممثل بتابع التحويل $G(s)$ المعطى بالعلاقة (2- 92).



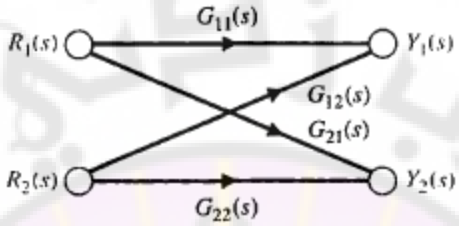

**الشكل (2-43): مخطط تدفق الإشارة لمحرك السيرفو ذو التيار المستمر.**

في الشكل (2-43)، نلاحظ أن العلاقة الناظمة بين عقدتي الدخل والخرج تكتب مباشرة فوق السهم.

في مخطط تدفق الإشارة، يمكن أن نلاحظ المصطلحات التالية:

- المسار (Path): هو الفرع أو التتابع المستمر من الأفرع والتي تسمح بالانتقال من عقدة (متحول) إلى عقدة أخرى (متحول أخر).
- حلقة (Loop): هو المسار المغلق الذي ينشأ وينتهي في نفس العقدة، بشرط عدم مصادفة عقدة ما مرتين على طول المسار المغلق.
- الحلقات غير المتماسة (Nontouching Loops): نقول عن حلقتين بأنهما غير متماستين إذا لم يكن بينهما عقدة مشتركة. بالمقابل، نقول عن حلقتين بأنهما متماستين إذا اشتركتا بعقدة مشتركة واحدة على الأقل.

لندرس الشكل (2-44)، ولنحاول الحصول على علاقات إشارات الخرج $Y_1(s)$ و $Y_2(s)$ بدلالة إشارات الدخل $R_1(s)$ و $R_2(s)$.




**الشكل (2-44): مخطط تدفق الإشارة لنظام متداخل**

من الشكل (2-44) يمكن أن نكتب:

$$Y_1(s) = G_{11}(s).R_1(s) + G_{12}(s).R_2(s).....(103-2)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s).R_1(s) + G_{22}(s).R_2(s).....(104-2)$$

بالتالي مخطط تدفق الإشارة عبارة عن طريقة تمثيلية (Pictorial Method) للمعادلات الجبرية لنظام والممثلة للترابط بين متحولات هذا النظام.

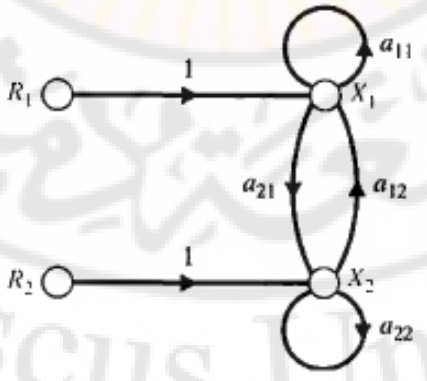
لنأخذ مثالاً أخر وليكن النظام الممثل بالمعادلات الجبرية التالية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1....(105-2)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2...(106-2)$$

في هذه المعادلات، $r_1$ و $r_2$ هما متحولات الدخل بينما $x_1$ و $x_2$ متحولات الخرج.

إن مخطط تدفق الإشارة الممثل لهذه المعادلات مبين بالشكل (2-45).




**الشكل (2-45): مخطط تدفق الإشارة لمجموعة المعادلات (2-105) و (2-106).**

يمكن إعادة ترتيب المعادلات السابقة (2- 105) و (2-106) على النحو التالي:

$$x_1(1-a_{11})+x_2(-a_{12})=r_1.....(107-2)$$

$$x_1(-a_{21})+x_2(1-a_{22})=r_2....(108-2)$$

إن الحل المشترك للمعادلات السابقة باستخدام طريقة كرامير (Cramer's rule) يعطي:

$$x_1=\frac{(1-a_{22})r_1+a_{12}r_2}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}=\frac{1-a_{22}}{\Delta}r_1+\frac{a_{12}}{\Delta}r_2.....(109-2)$$

$$x_2=\frac{(1-a_{11})r_2+a_{21}r_1}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}=\frac{1-a_{11}}{\Delta}r_2+\frac{a_{21}}{\Delta}r_1.....(110-2)$$

يعطى المميز $\Delta$ في المعادلات السابقة بالعلاقة:

$$\Delta=(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}.....(111-2)$$

$$\Delta=1-a_{11}-a_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.....(112-2)$$

في هذا المثال يمكن أن نلاحظ:

– المقام في $x_1$ و $x_2$ يساوي إلى (1) مطروحاً منها الحلقات الذاتية ($a_{11}$) و ($a_{22}$) و ($a_{12}a_{21}$)، مضافاً إليها جداء الحلقتين غير المتماستين $a_{11}$ و $a_{22}$. لاحظ أن الحلقات $a_{22}$ و $a_{12}a_{21}$ هي حلقات متماسة (كذلك الأمر بالنسبة للحلقات $a_{11}$ و $a_{12}a_{21}$).

– البسط في علاقة $x_1$ والمتعلق بـ $r_1$ يساوي إلى (1) مضروباً بـ ($1-a_{22}$) وهو الحد المتبقي من علاقة ($\Delta$) وذلك بعد استبعاد البنود المماسة للمسار (1) من $r_1$ إلى $x_1$.

– البسط في علاقة $x_1$ والمتعلق بـ $r_2$ هو ببساطة ($a_{12}$) وذلك لأن المسار $a_{12}$ يمس جميع الحلقات.

– البسط في علاقة $x_2$ يماثل تلك المشروحة أعلاه بالنسبة لـ $x_1$.

بشكل عام، إن علاقة الاعتماد الخطي $T_{ij}$ (Linear dependence) بين المتحول المستقل $x_i$ (المسمى غالباً بمتحول الدخل)، والمتحول المرتبط بالدخل $x_j$ (dependent variable) يعطى بعلاقة ربح تدفق الإشارة:

$$T_{ij}=\frac{\sum_k P_{ijk}\Delta_{ijk}}{\Delta}$$

حيث: $P_{ijK}$: ربح المسار رقم $k$ من المتحول $x_i$ إلى المتحول $x_j$ , $\Delta$: محدد المخطط, $\Delta_{ijK}$: محدد المسار $P_{ijK}$.

نلاحظ أن المجموع يتم على كامل المسارات الممكنة ذات العدد ($k$) من العقدة $x_i$ إلى العقدة $x_j$.

يعرف ربح المسار $P_{ijK}$ بأنه جداء ربح الأفرع في المسار، وذلك باتجاه الأسهم، مع مراعاة عدم اجتياز أي عقدة أكثر من مرة واحدة.

يعرف محدد المسار $\Delta_{ijK}$ بأنه المحدد $\Delta$ وذلك بعد إزالة الحلقات الماسة للمسار رقم $k$.

يحسب المحدد $\Delta$ بالعلاقة:

$$\Delta = 1 - \sum_{n-1}^{N} L_n + \sum_{\substack{n,m \\ nontouching}} L_n L_m - \sum_{\substack{n,m,p \\ nontouching}} L_n L_m L_p + ..., \quad ....(113-2)$$

حيث $L_q$ هي قيمة ربح الحلقة ($q$)، بالتالي يمكن كتابة علاقة $\Delta$ على النحو التالي:

$\Delta$= 1- (مجموع ربح جميع الحلقات) +

(مجموع الربح الناتج من جميع التركيبات المؤلفة من جداء كل حلقتين غير متماستين)−

(مجموع الربح الناتج عن جميع التركيبات المؤلفة من جداء ثلاث حلقات غير متماسة)

+.....

إن علاقة الربح، والتي عادةً ما تربط متحول الخرج $Y(s)$ مع متحول الدخل $R(s)$، يمكن صياغتها بشكل مبسط على النحو التالي:

$$T = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta} .....(114-2)$$

حيث : $T(s) = Y(s)/R(s)$ .

سنورد فيمايلي بعض الأمثلة التي تبين الفائدة من هذه الطريقة.

**مثال 2-19:**

يبين الشكل (2-46) مخطط تدفق الإشارة والمخطط الصندوقي المكافئ.

إن المسارات التي تربط الدخل $R(s)$ بالخرج $Y(s)$ هما:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 (Path1) \quad \text{و} \quad P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8 (Path2)$$

– يوجد في مخطط تدفق الإشارة أربع حلقات, حيث ربح هذه الحلقات:

$$L_1 = G_2H_2, \quad L_2 = G_3H_3, \quad L_3 = G_6H_6, \quad L_4 = G_7H_7.$$

– الحلقات $L_1$ و $L_2$ لا تمس الحلقات $L_3$ و $L_4$، بالتالي فإن المحدد $\Delta$ يحسب كمايلي:

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3+L_4)+(L_1L_3+L_1L_4+L_2L_3+L_2L_4)$$

– يحسب محدد المسار الأول وذلك بإزالة الحلقات التي تمس المسار الأول، من المحدد $\Delta$، أي: $\Delta_1 = 1-(L_3+L_4)$ و $L_1 = L_2 = 0$

– يحسب محدد المسار الثاني وذلك بإزالة الحلقات التي تمس المسار الثاني، من المحدد $\Delta$، أي: $\Delta_2 = 1-(L_1+L_2)$ و $L_3 = L_4 = 0$

بالتالي يكون تابع تحويل النظام:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4(1-L_3-L_4)+G_5G_6G_7G_8(1-L_1-L_2)}{1-L_1-L_2-L_3-L_4+L_1L_3+L_1L_4+L_2L_3+L_2L_4}$$

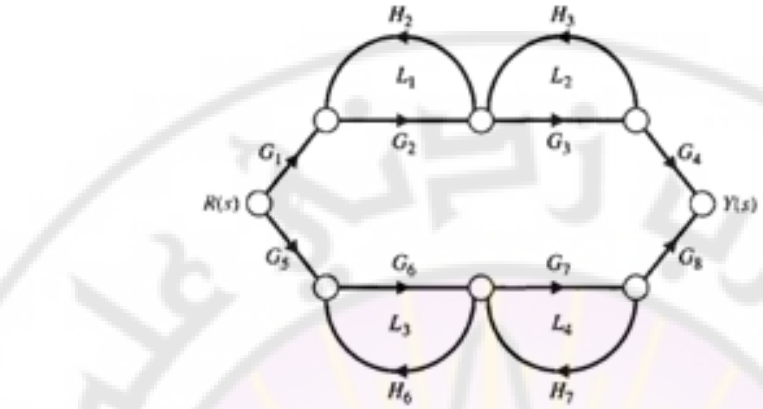
بتعويض علاقات $L_1$, $L_2$, $L_3$, و $L_4$ في العلاقة السابقة نجد:

$$Y(s) = \left[\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1-G_2(s)H_2(s))(1-G_3(s)H_3(s))} + \frac{G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)}{(1-G_6(s)H_6(s))(1-G_7(s)H_7(s))}\right].R(s)$$

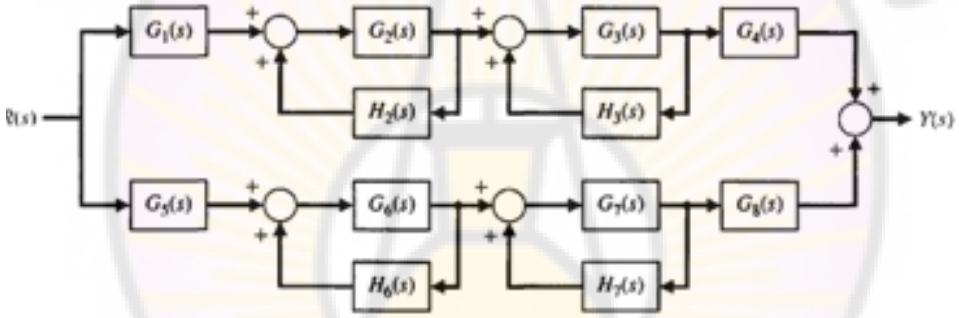
سنقوم، فيمايلي، باستنتاج تابع التحويل للنظام وذلك باستخدام المخطط الصندوقي المكافئ والمبين بالشكل (2-46-ب) وذلك لبيان تكافؤ كلا التمثيلين. من المخطط الصندوقي، نلاحظ مايلي:

– يملك النظام أربع حلقات تغذية خلفية موجبة، لذلك يتوجب علينا بدايةً تبسيطها.

– يملك النظام مسارين لذلك سنقوم بحساب تابع تحويل المسار الأول والثاني، ومن ثم استنتج تابع تحويل النظام الكلي.




– أ –




– ب –

**الشكل (2-46): أ – مخطط تدفق الإشارة لنظام ب – المخطط الصندوقي المكافئ.**

– تابع تحويل المسار الأمامي:

$$Y_1(s) = G_1(s)\left[\frac{G_2(s)}{1-G_2(s)H_2(s)}\right]\left[\frac{G_3(s)}{1-G_3(s)H_3(s)}\right]G_4(s).R(s)$$

$$= \left[\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1-G_2(s)H_2(s))(1-G_3(s)H_3(s))}\right].R(s)$$

– بنفس الطريقة نجد أن تابع تحويل المسار الخلفي:

$$Y_2(s)=G_5(s)\left[\frac{G_6(s)}{1-G_6(s)H_6(s)}\right]\left[\frac{G_7(s)}{1-G_7(s)H_7(s)}\right]G_8(s).R(s)$$

$$=\left[\frac{G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)}{(1-G_6(s)H_6(s))(1-G_7(s)H_7(s))}\right].R(s)$$

بالتالي فإن تابع التحويل الكلي للنظام:

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=\left[\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1-G_2(s)H_2(s))(1-G_3(s)H_3(s))}\right.$$

$$\left.+\frac{G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)}{(1-G_6(s)H_6(s))(1-G_7(s)H_7(s))}\right].R(s)$$

يمكن ملاحظة تطابق تابع التحويل المستنتج بكلا الطريقتين، وبالتالي كلا الطريقتين متكافئتين. ■

**مثال 2-20:**

استنتاج تابع تحويل محرك السيرفو ذو التيار المستمر (حالة التحكم بتيار المتحرض)، ذو المخطط الصندوقي المبين بالشكل (2-32)، وذلك باستخدام طريقة ماسون (أو طريقة مخطط تدفق الإشارة).

افترض أن $T_d$=0، وأن دخل النظام هو توتر المتحرض $V_a(s)$ وخرجه هو مقدار انزياح محور المحرك $\theta(s)$. يبين الشكل (2-55) مخطط تدفق الإشارة لمحرك السيرفو المستمر.

- إن تابع تحويل المسار الأمامي في هذا المخطط هو: $P_1=\frac{1}{s}.G_1(s).G_2(s)$ .
- يمس المسار الأمامي الحلقة $L_1(s)$: $L_1(s)=-K_b.G_1(s).G_2(s)$.

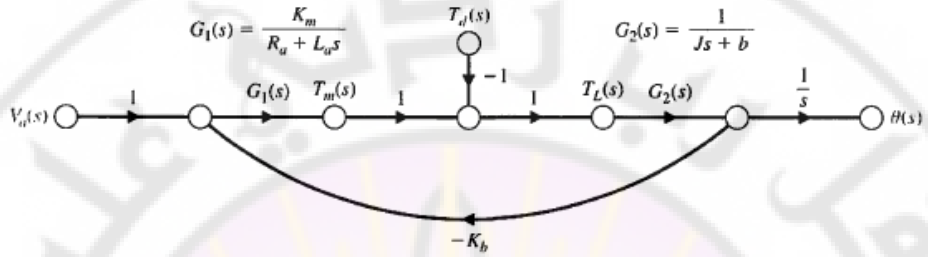
في هذا المثال, لدينا: $\Delta=1-L_1$ , $\Delta_1=1$ .

بالتالي فإن تابع تحويل المحرك:

$$T(s)=\frac{P_1(s)}{1-L_1(s)}=\frac{(1/s).G_1(s).G_2(s)}{1+K_b.G_1(s).G_2(s)}$$

$$=\frac{K_m}{s[(R_a+L_as)(Js+b)+K_bK_m]}$$

يمكن ملاحظة أننا حصلنا على نفس تابع التحويل المحسوب سابقاً في المثال 2-14, والمعطى بالعلاقة (2-100). ■




**الشكل (2-47): مخطط تدفق الإشارة لمحرك السيرفو المستمر.**

**2-11 نظم الرتبة الأولى والثانية:**

**2-11-1 نظم الرتبة الأولى (First order systems):**

يُوصف النظام من الرتبة الأولى بواسطة معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى، على الشكل التالي:

$$a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = c.r(t).....(115-2)$$

في هذه المعادلة تمثل $r(t)$ و $y(t)$ إشارتي الدخل والخرج للنظام من الرتبة الأولى.

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة السابقة وذلك عند شروط ابتدائية معدومة، نجد:

$$(as+b)Y(s) = c.R(s)$$

بالتالي، يكون تابع تحويل النظام:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{c}{as+b}$$

للحصول على الشكل العام لتابع تحويل نظام من الدرجة الأولى، نقسم البسط والمقام على $(b)$:

$$G(s) = \frac{c/b}{a/b\,s+1}$$

والذي يمكن أن يكتب على الشكل التالي:

$$G(s)=\frac{K}{1+\tau s},\quad K,\tau\in\Re^{+}.....(116-2)$$

تمثل المعادلة السابقة الشكل العام لتابع تحويل نظام من الدرجة الأولى، حيث $K$ هو ربح النظام في الحالة المستقرة و $\tau$ ثابت زمن النظام ويُعطى بالثانية.

**2-11-2 نظم الرتبة الثانية (second order systems):**

يُوصف النظام من الرتبة الثانية بواسطة معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، على الشكل التالي:

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{y(t)}{dt}+cy(t)=e.r(t).....(117-2)$$

في هذه المعادلة تمثل $r(t)$ و $y(t)$ إشارتي الدخل والخرج للنظام من الرتبة الثانية.

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة السابقة وذلك عند شروط ابتدائية معدومة، نجد:

$$\left(as^2+bs+c\right)Y(s)=e.R(s)$$

بالتالي، يكون تابع تحويل النظام:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{e}{as^2+bs+c}$$

للحصول على الشكل العام لتابع تحويل نظام من الدرجة الثانية، نقسم البسط والمقام على $c$:

$$G(s)=\frac{e/c}{a/c\,s^2+b/c\,s+1}$$

والذي يمكن أن يكتب على النحو التالي:

$$G(s)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}.....(118-2)$$

يمكن أن يكتب أيضاً تابع تحويل النظام من الدرجة الثانية بحيث يكون معامل $s^2$ مساوياً لـ (1)، أي:

$$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}.....(119-2)$$

تمثل المعادلتان السابقتان الأشكال العامة لتابع تحويل نظام من الدرجة الثانية، حيث $K$ ثابت ربح النظام في الحالة المستقرة، $\omega_n$ تردد التخامد الطبيعي ويعطى بـ $(rad/sec)$، و $\zeta$ بمعامل التخامد. سنقوم بشرح البارمترات $\zeta$ و $\omega_n$ في الفصل الرابع.

**12-2 مثال تصميمي: نظام التحكم بمحرك جر كهربائي:**

تستخدم محركات الجر الكهربائية في معظم القطارات الحديثة وقاطرات النقل الداخلية (Electric Tramway). يبين الشكل (2-48) المخطط الصندوقي لنظام التحكم بسرعة محرك كهربائي في عربة نقل (Railway Vehicle). إن الهدف التصميمي في هذا المثال هو الحصول على نموذج النظام وتابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام $\omega(s)/\omega_d(s)$، واختيار القيم المناسبة للمقاومات $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, ومن ثم حساب استجابة النظام.

تتمثل الخطوة الأولى بالحصول على تابع تحويل كل صندوق في المخطط الصندوقي. سنستخدم، فيما يلي، مولد تاكومتر (Tachometer Generator) لتوليد إشارة توتر متناسبة مع السرعة، حيث سيوصل خرج مولد التاكومتر إلى أحد مداخل مكبر العمليات (Difference Amplifier)، كما هو مبين بالشكل (2-48). إن مكبر العمليات هو عنصر لا خطي، بحيث يمكن أن يُمثل بشكل تقريبي على النحو التالي:

$$v_2 = 2e^{3v_1} = g(v_1) \quad .....(120-2)$$

إن هذا التابع هو تابع أسي حيث أن نقطة العمل الطبيعية $v_{10} = 1.5V$. باستخدام طريقة الاضطرابات الصغيرة، يمكننا الحصول على النموذج الخطي لمكبر العمليات:

$$\Delta v_2 = \left.\frac{dg(v_1)}{dv_1}\right|_{v_{10}} \Delta v_1 = 2[3\exp(3v_{10})]\Delta v_1 = 2(270).\Delta v_1 = 540\Delta v_1 \quad ....(121-2)$$

بإهمال مصطلح الـ $(\Delta)$، وبتطبيق تحويل لابلاس على العلاقة (2-121) نجد:

$$v_2(s) = 540 v_1(s)$$

بالنسبة لمكبر العمليات التفاضلي (Differential Amplifier)، لدينا:

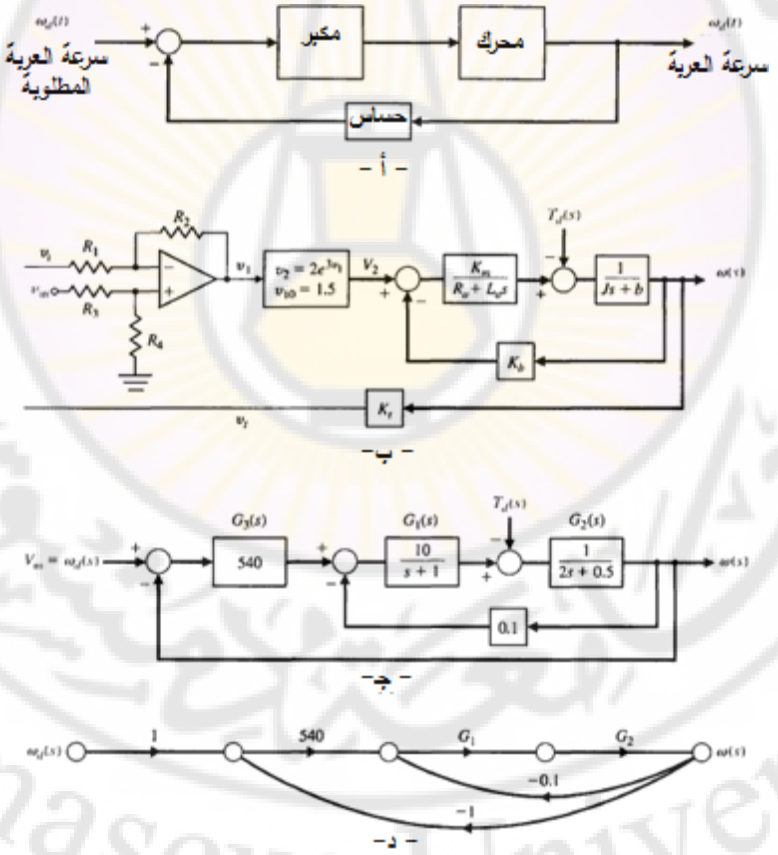
$$v_1 = \frac{1+R_2/R_1}{1+R_3/R_4} v_{in} - \frac{R_2}{R_1} v_t \quad .....(122-2)$$

في هذا المثال، نرغب بالحصول على إشارة دخل بحيث $\omega_d(t)=v_{in}$ ، حيث إن واحدة $\omega_d$ هي $(rad/s)$، وواحدة $v_{in}$ هي الفولت $(volts)$. بالتالي، عندما $v_{in}=10V$ فإن السرعة في الحالة المستقرة (Steady-State Speed) هي $\omega=10\ rad/s$. نلاحظ أيضاً أن $v_t = K_t\omega_d$, وذلك في الحالة المستقرة, وبالتالي فإن الخرج المتوقع في الحالة المستقرة:

$$v_1 = \frac{1+R_2/R_1}{1+R_3/R_4}v_{in} - \frac{R_2}{R_1}K_t v_{in} \quad .....(123-2)$$

عندما يكون النظام في حالة توازن (أي $v_1 = 0$)، وعندما $K_t = 0.1$، نجد:

$$\frac{1+R_2/R_1}{1+R_3/R_4} = \frac{R_2}{R_1}K_t = 1$$




**الشكل (2-48): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بسرعة محرك كهربائي في عربة نقل.**

يمكن تحقيق هذه العلاقة وذلك من أجل:

$$R_2/R_1 = 10 \quad , \quad R_3/R_4 = 10$$

يمكن اعتماد البارمترات المبينة بالجدول (2-2) وذلك بالنسبة لكل من المحرك والحمل.

| **الجدول (2-2): بارامترات محرك تيار مستمر (DC) كبير** | |
|---|---|
| $J = 2$ | $K_m = 10$ |
| $b = 0.5$ | $R_a = 1$ |
| $K_b = 0.1$ | $L_a = 1$ |

يمكننا الحصول على تابع تحويل النظام باستخدام قواعد تبسيط المخطط أو بتطبيق قانون ماسون:

$$\frac{\omega(s)}{\omega_d(s)} = \frac{540G_1(s)G_2(s)}{1+0.1G_1G_2+540G_1G_2} = \frac{540G_1G_2}{1+540.1G_1G_2}$$

$$= \frac{5400}{(s+1)(2s+0.5)+5401} = \frac{5400}{2s^2+2.5s+5401.5}$$

$$= \frac{2700}{s^2+1.25s+2700.75} \ldots\ldots (124-2)$$

بمقارنة تابع التحويل مع تابع تحويل من نظام الدرجة الثانية نجد أن $\omega_n = 52, \quad \zeta = 0.012, \quad K = 1$، حيث نتوقع أن تكون استجابة النظام (أو إشارة خرج النظام) شديدة الاهتزاز (Highly Oscillatory). سنرى، في الفصول التالية، أن هذه الحالة هي حالة تخامد ناقص.

**13-2 محاكاة نظم التحكم باستخدام بيئة الماتلاب**

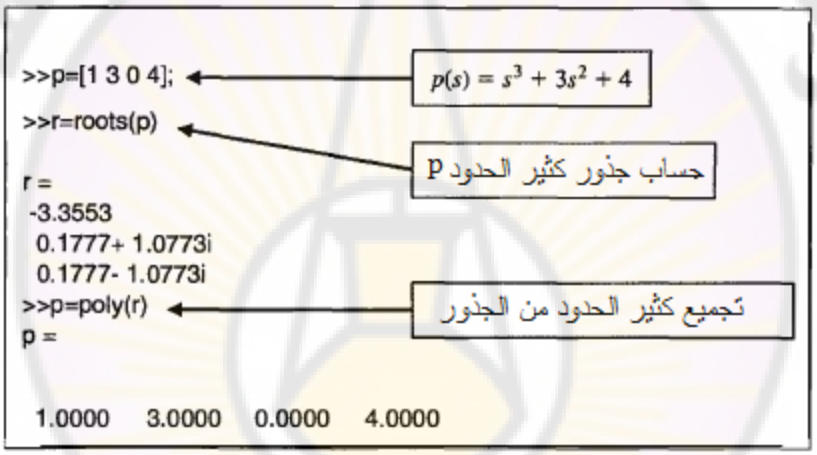
**(The Simulation of Control System using Matlab Environment)**

إن تصميم وتحليل العديد من نظم التحكم الحديث يعتمد على النماذج الرياضية لهذه النظم، حيث يوجد العديد من البيئات البرمجية التي تسمح بالقيام بهذه المهمة. في هذا الكتاب، سنركز على بيئة الماتلاب بحيث سنقوم بكتابة الملفات ذات التوسعة (*.m*) والحاوية على التعليمات والتوابع المستخدمة في تصميم وتحليل نظم التحكم.

إن التوابع المستخدمة في هذه الفقرة هي: roots, poly, conv, tf, pzmap, pole, zero, series, parallel, feedback, minereal, step.

إن معظم النظم المدروسة في هذا الكتاب تمثل بواسطة تابع تحويل الذي يأخذ شكل نسبة بسطها ومقامها على شكل كثير حدود. لتمثيل تابع تحويل، سنبدأ بكيفية تمثيل كثير الحدود. يمثل كثير الحدود بواسطة شعاع سطري (Row Vector) يحوي معاملات كثيرة الحدود بالاتجاه التنازلي. لنأخذ على سبيل المثال، كثير الحدود التالي:

$$P(s) = s^3 + 3s^2 + 4 = s^3 + 3s^2 + 0s + 4$$




**الشكل (2-49): إدخال كثير الحدود $P = s^3 + 3s^2 + 4$ وحساب جذوره.**

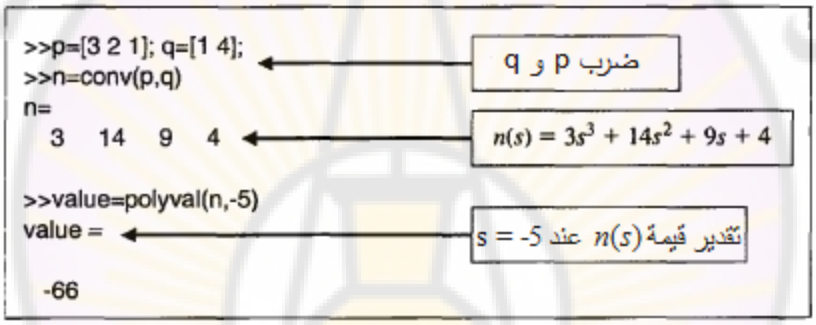
يتم إدخال كثير الحدود على النحو المبين بالشكل (2-53). في الكود البرمجي المبين بالشكل (2-49) نلاحظ:

- يمكن حساب جذور كثير الحدود (P) باستخدام التعليمة roots(P). يتم تركيب جذور كثير الحدود ضمن شعاع عمود (أو Column Vector).
- إذا كان لدينا جذور كثير الحدود على شكل شعاع عمود، وليكن r، بالتالي يمكننا الحصول على كثير الحدود P ذو الجذور المحتواة في الشعاع العمود r وذلك باستخدام التعليمة poly(r). الشعاع الناتج عن هذه التعليمة هو شعاع سطري يحوي معاملات كثير الحدود بالاتجاه التنازلي.

يمكن ضرب كثيرات الحدود باستخدام التابع (أو التعليمة) conv. لنفرض، على سبيل المثال، أننا نريد نشر كثير الحدود التالي: $n(s)=(3s^2+2s+1)(s+4)$ .

التعليمات المستخدمة مع التابع conv مبينة بالشكل (2-54)، بالتالي فإن كثير الحدود المنشور هو: $n(s)=3s^3+14s^2+9s+4$.

يمكن أيضاً استخدام التابع polyval لحساب قيمة كثير الحدود عند قيمة محددة للمتحول $s$. في البرنامج المبين بالشكل (2-50)، يملك كثير الحدود القيمة $n(s)$=-66 وذلك من أجل $s$= -5.




**الشكل (2-50): استخدام التوابع conv و polyval مع كثيرات الحدود.**

يمكن أن نعامل نماذج النظم الخطية، ذات المعاملات الثابتة زمنياً على أنها وحدة مستقلة (object). في حالة توابع التحويل، يتم خلق نموذج النظام باستخدام التابع tf.

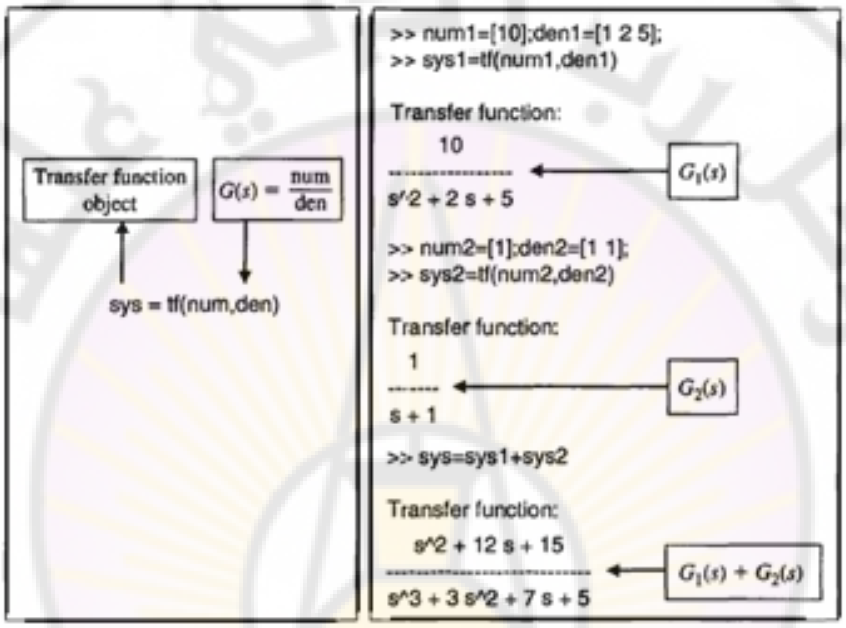
على سبيل المثال، ليكن لدينا نظامين ممثلين بواسطة توابع التحويل التالية:

$$G_1(s)=\frac{10}{s^2+2s+5},\quad G_2(s)=\frac{1}{s+1}$$

يبين الشكل (2-51) استخدام التابع tf لتمثيل التوابع $G_1(s)$ و $G_2(s)$. يمكن استخدام المعامل "+" مع تابعي التحويل $G_1(s)$ و $G_2(s)$، أي:

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=\frac{s^2+12s+15}{s^3+3s^2+7s+5}$$

في المستوي الحاوي على أصفار وأقطاب النظام، يشار إلى الأقطاب بالحرف "x"، وإلى الأصفار بالحرف "o". ■




**الشكل (2-51): استخدام التابع tf.**

يمكن حساب أصفار وأقطاب تابع على النحو المبين بالشكل (2-51).

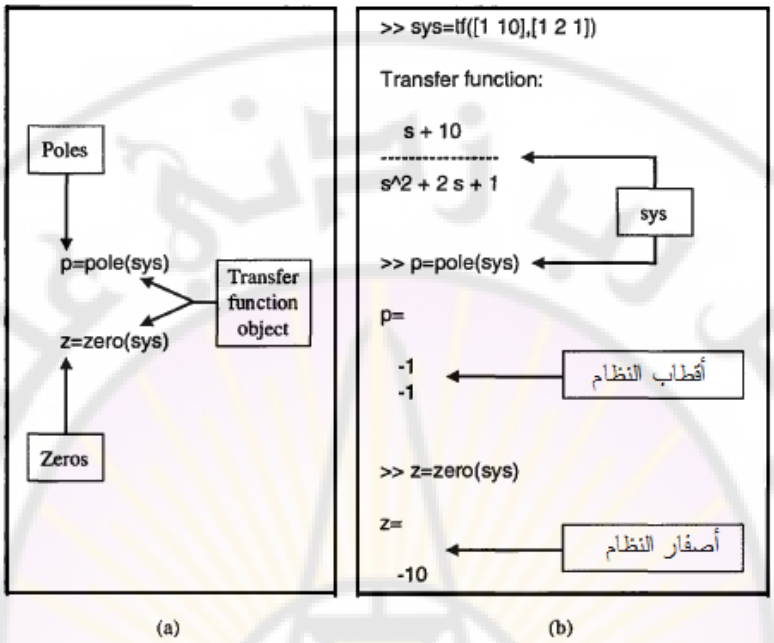
**مثال 2-21: تبسيط المخطط الصندوقي بواسطة بيئة الماتلاب:**

ليكن لدينا المخطط الصندوقي المبين بالشكل (2-52) حيث:

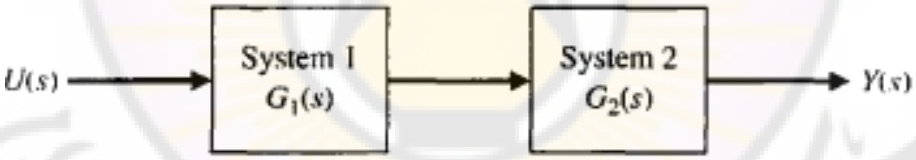
$$G_1(s)=\frac{1}{500s^2},\quad G_2(s)=\frac{s+1}{s+2}$$

لنوجد باستخدام بيئة الماتلاب التابع: $T(s)=Y(s)/U(s)$ .

لحل هذا المثال يجب استخدام التابع series وذلك لدمج التابعين $G_1(s)$ و $G_2(s)$ الموصولين على التسلسل. يبين الشكل (2-53) الكود البرمجي لحساب التابع $T(s)$، والمشار إليه في البرنامج بـ (*sys*).




الشكل (2-51): استخدام التوابع zero, pole.




الشكل (2-52): نظام تحكم ذو حلقة مفتوحة.

```
>>numg=[1]; deng=[500 0 0]; sysg=tf(numg,deng);
>>numh=[1 1]; denh=[1 2]; sysh=tf(numh,denh);
>>sys=series(sysg,sysh);
>>sys

Transfer function:
        s + 1
  ---------------
  500 s^3 + 1000 s^2
```

$G_1(s)G_2(s)$

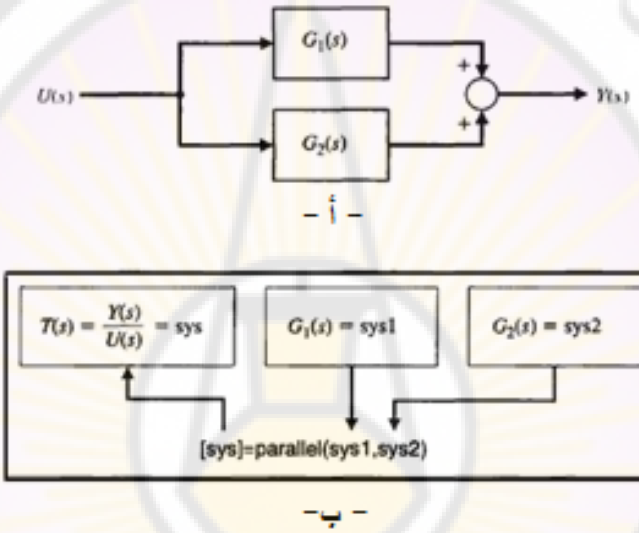
الشكل (2-53): تطبيق التابع series لدمج توابع التحويل المربوطة تسلسلياً.

يعطى التابع التحويل الكلي بالعلاقة:

$$G_1(s)G_2(s)=\frac{s+1}{5000s^3+1000s^2}=sys$$

حيث *sys* هو الاسم المسند إلى تابع التحويل في البرنامج المكتوب.

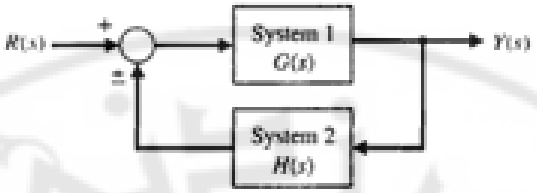
– يمكن حساب تابع التحويل الكلي لنظام مؤلف من تابعي تحويل مربوطين على التفرع وذلك باستخدام التابع parallel، وذلك كما هو مبين بالشكل (2-54).



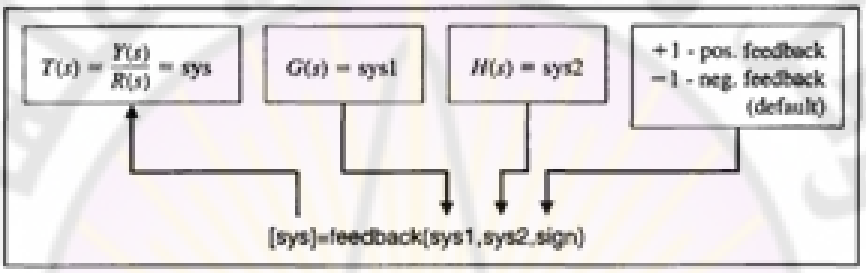

**الشكل (2-54): أ – المخطط الصندوقي التفرعي ب –استخدام التابع parallel**

– في حالة التغذية الخلفية لنظام، يتم حساب تابع التحويل النظام المغلق باستخدام التابع feedback، وذلك كما هو مبين بالشكل (2-55).

في حالة التغذية الخلفية الواحدية، يستخدم التابع feedback على النحو المبين بالشكل (2-56).

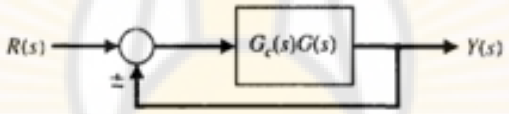



– أ –

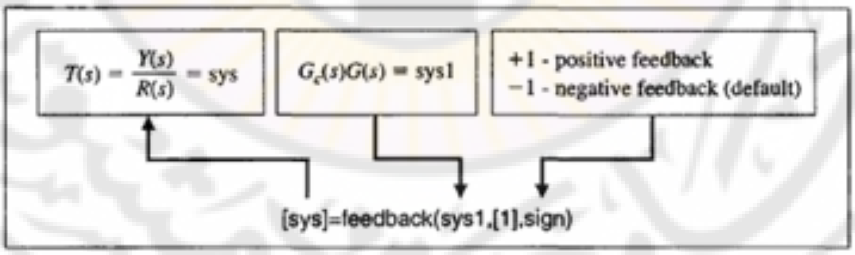



– ب –

**الشكل (2-55): أ – المخطط الصندوقي ذو تغذية خلفية ب – استخدام التابع feedback**




– أ –




– ب –

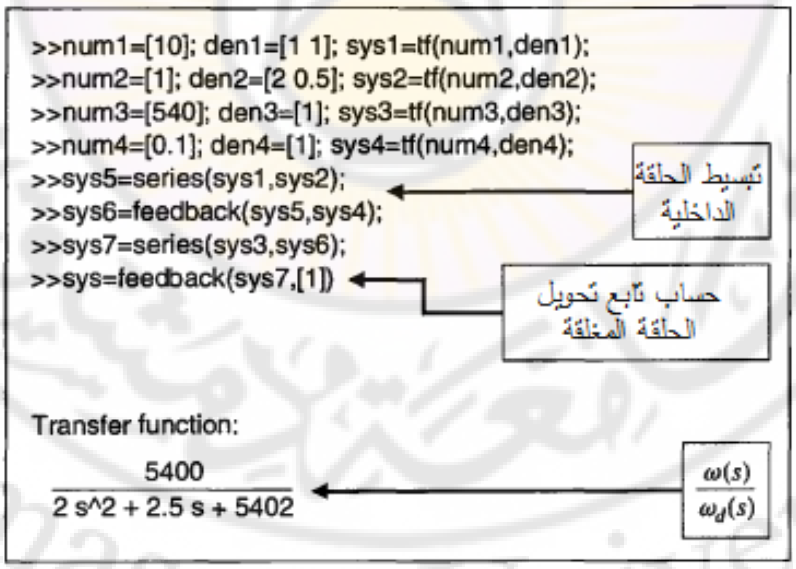
**الشكل (2-56): أ – المخطط الصندوقي لنظام ذو تغذية خلفية واحدية ب – استخدام التابع feedback.**

**مثال 2-22: نظام التحكم بمحرك جر كهربائي:**

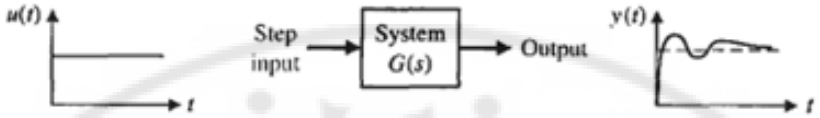
لنعد لدراسة نظام التحكم بمحرك جر كهربائي والوارد في الفقرة (2-12). إن الهدف في هذا المثال هو حساب تابع تحويل النظام، انطلاقاً من المخطط الصندوقي المبين بالشكل (2-47). كما نرغب أيضاً وانطلاقاً من تابع التحويل حساب الاستجابة $\omega(s)$ وذلك عند تطبيق إشارة دخل مرجعية $\omega_d(s)$ على شكل إشارة خطوية.

الخطوة الأولى: حساب تابع التحويل: $T(s)=\omega(s)/\omega_d(s)$, وذلك باستخدام الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المبين بالشكل (2-57).

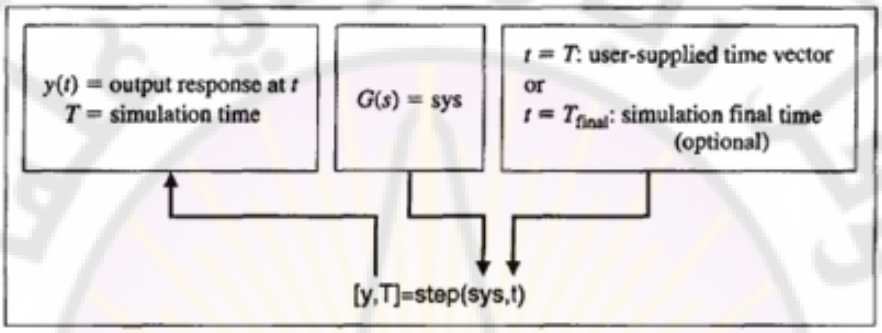
إن المعادلة المميزة للنظام (معادلة المقام في تابع التحويل) هي من الدرجة الثانية حيث $\omega_n$=52 و $\zeta$=0.012. طالما أن معامل التخامد $\zeta$ صغير فإن استجابة النظام ستكون شديدة الاهتزاز. يمكننا حساب استجابة النظام، في بيئة الماتلاب، وذلك باستخدام التابع step. يبين الشكل (2-58) طريقة استخدام التابع step , لحساب الاستجابة الخطوية الواحدية لنظام خطي. إن التابع step مهم جداً، كون معظم محددات الأداء لنظام ما تعطى عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية.




**الشكل (2-57): الكود البرمجي المستخدم لتبسيط المخطط الصندوقي لنظام التحكم لمحرك جر كهربائي.**



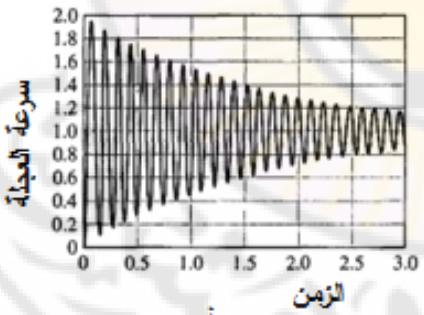

– أ –




– ب –

**الشكل (2-58): استخدام التابع step.**

لنطبق، الآن، التابع step وذلك لحساب استجابة نظام التحكم بمحرك الجر الكهربائي، وذلك كما هو مبين بالشكل (2-59).




– أ –

```
% This script computes the step
% response of the traction motor
% wheel velocity
%
num=[5400]; den=[2 2.5 5402]; sys=tf(num,den);
t=[0:0.005:3];
[y,t]=step(sys,t);
plot(t,y),grid
xlabel('Time (s)')
ylabel('Wheel velocity')
```

– ب –

**الشكل (2-59): أ – الاستجابة الخطوية لمحرك الجر ب – الكود البرمجي المستخدم لرسم الاستجابة الخطوية.**

في برنامج المحاكاة المبين بالشكل (2-59)، تم تحديد الزمن $t$ على شكل شعاع يحوي الأزمنة التي يتم حساب $y(t)$ من أجلها. يمكننا اختيار $t=t_{final}$، والذي يؤدي لحساب

الاستجابة الخطوية من $t=0$ إلى $t=t_{final}$، حيث يتم تحديد الخطوة بين اللحظتين السابقتين آلياً. لاحظ، من الشكل (2-59)، أن استجابة النظام $y(t)$ شديدة الاهتزاز حيث $y(t)\equiv\omega(t)$.

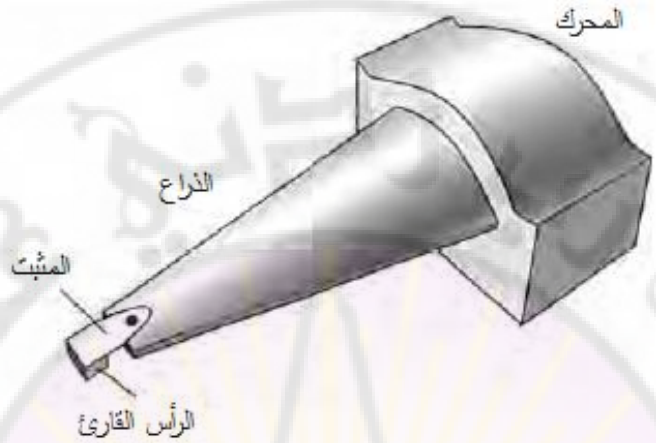
**2-14 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

لقد حددنا في الفصل الأول (الفقرة 1-8)، الهدف المبدئي من نظام قارئة الأقراص المدمجة، والذي كان توضيع رأس القارئة على المسار المطلوب (Desired Track)، والانتقال من مسار إلى أخر خلال 50 ميلي ثانية، إذا أمكن. في هذه المرحلة من التصميم سنقوم بتحديد عملية القراءة من القرص (Reading Process)، الحساس (Sensor) والمتحكم (Controller).

سنقوم أيضاً بتحديد نموذج عملية القراءة $G(s)$ والحساس. تستخدم قارئة الأقراص المدمجة محرك مستمر ذو مغانط دائمة (Permanent magnet DC motor) والذي يعمل على تدوير الذراع وذلك كما هو مبين بالشكل (2-60). إن رأس القارئة مثبت على منزلقة (Slider Device)، وموصولة إلى ذراع. لاحظ أيضاً من الشكل تواجد انحناءة قابلة للحركة (Flexure) الهدف منه هو توضيع الرأس فوق القرص مع ترك ثغرة أقل من (100 nm). يقوم الرأس بقراءة التدفق المغناطيسي (Magnetic flux) وبتزويدنا بإشارة إلى مكبر (Amplifier). إن إشارة الخطأ في الشكل (2-61) تتم قراءتها من مؤشر المسارات المسجلة مسبقاً (Prerecorded index track).

يمكن أن نلاحظ أيضاً أن تابع تحويل الحساس $H(s)=1$، وذلك بافتراض أن رأس القارئة دقيق، وذلك كما هو مبين بالشكل (2-61).

يبين الشكل (2-61) نموذج المحرك المستمر ذو المغانط الدائمة والمكبر الخطي. لقد تم تقريب نموذج المحرك المستمر ذو المغانط الدائمة إلى نموذج المحرك المستمر المتحكم به عن طريق تيار المتحرض المبين بالشكل (2-32) وذلك مع افتراض أن $K_b=0$.




**الشكل (2-60): الرأس المثبت فوق القرص مع تبيان للمثبت.**

إن النموذج المبين بالشكل (2-61) يفترض أن المثبت عريض وليس له أي تأثير على انثناء الرأس القارئ. في الفصول القادمة، سنأخذ بعين الاعتبار تأثير مثبت الرأس (Flexure). إن البارامترات المستخدمة في النموذج معطاة بالجدول (3-3).

من النموذج، وجدنا:

$$G(s) = \frac{K_m}{s(Js+b)(Ls+R)}$$

$$= \frac{500}{s(s+20)(s+1000)} \quad \text{.....(125-2)}$$

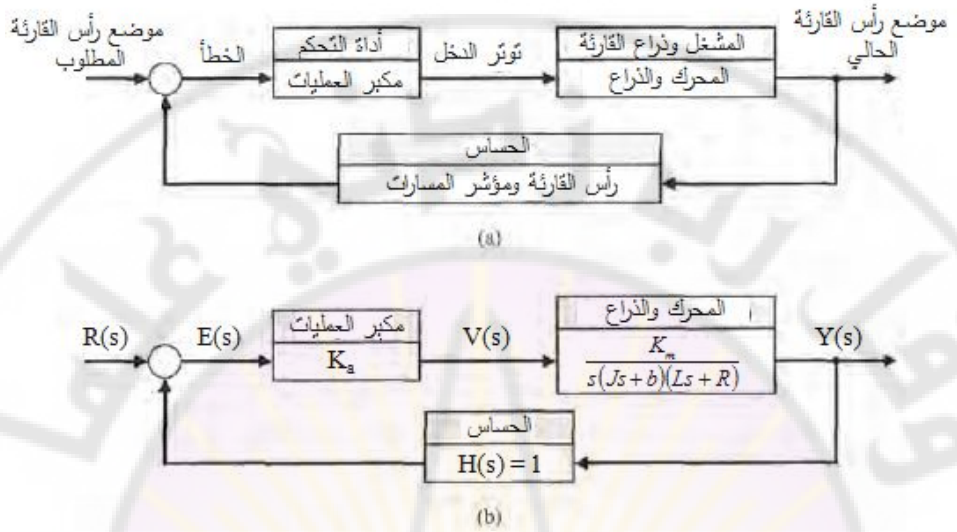
يمكن أن نكتب أيضاً: $G(s) = \dfrac{K_m/(bR)}{s(\tau_L s+1)(\tau s+1)}$

حيث: $\tau = L/R = 1\ ms, \quad \tau_L = J/b = 50\ ms$ .

طالما أن $\tau_L >> \tau$، فإننا نهمل $\tau$، بالتالي يمكن أن نكتب:

$$G(s) \approx \frac{K_m/(bR)}{s(\tau_L s+1)} = \frac{0.25}{s(0.05s+1)} = \frac{5}{s(s+20)}$$

إن المخطط الصندوقي للنظام المغلق مبين بالشكل (2-62).




**الشكل (2-61): المخطط الصندوقي لنظام قارئة الأقراص المدمجة.**

| **الجدول (2-3): القيم النموذجية لبارامترات قارئة الأقراص المدمجة.** | | |
|---|---|---|
| **البارامتر** | **الرمز** | **القيمة النموذجية (Typical Value)** |
| عطالة الذراع والرأس القارئ | $J$ | 1 $Nms^2/rad$ |
| الاحتكاك | $b$ | 20 Nms/rad |
| مكبر العمليات | $K_a$ | 10-1000 |
| مقاومة المتحرض | $R$ | 1Ω |
| ثابت المحرك | $K_m$ | 5 Nm/A |
| محارضة المتحرك | $L$ | 1mH |

باستخدام قواعد تبسيط المخططات الصندوقية نجد:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a G(s)}$$

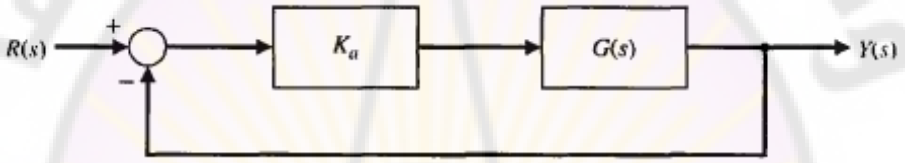
باستخدام النموذج التقريبي لـ $G(s)$، نجد:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{5K_a}{s^2+20s+5K_a}$$

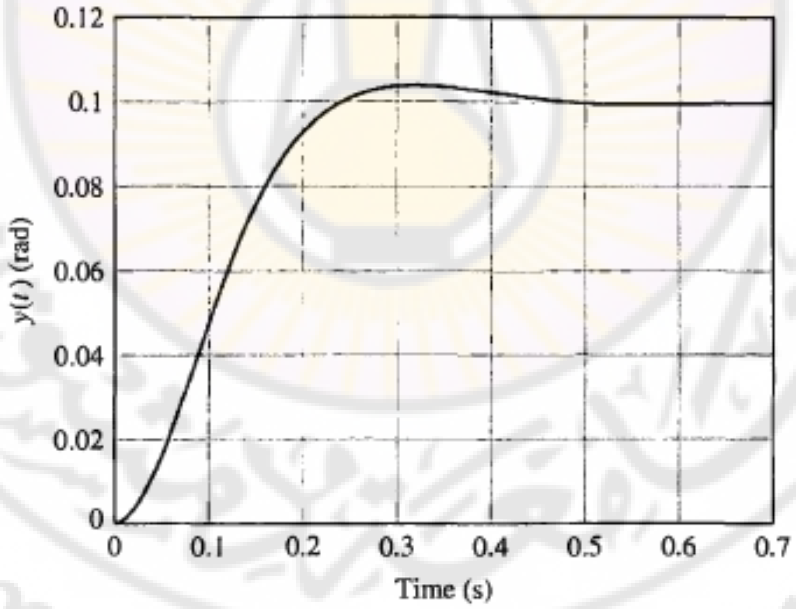
من أجل $K_a$=40، نجد:

$$Y(s)=\frac{200}{s^2+20s+200}.R(s)$$

يبين الشكل (2-63) استجابة النظام وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية $R(s)=0.1/s(rad)$.




**الشكل (2-62): المخطط الصندوقي لنظام الحلقة المغلقة**




**الشكل (2-63): استجابة النظام وذلك عند تطبيق إشارة دخل الخطوية $R(s)=0.1/s$**

# الفصل الثالث: الخصائص المميزة لنظم التحكم ذات الحلقة المغلقة

# Chapter 3: Feedback Control System Characterisitics

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

في هذا الفصل سنقوم بإكتشاف دور إشارات الخطأ في نظم التحكم ذات الحلقات المغلقة, حيث تعمل نظم التحكم المغلقة على إنقاص حساسية النظم لتغيرات البارامترات, وتقليل تأثير الاضطرابات, وضجيج القياسات على استقرار النظم. كما سنقوم بوصف خصائص الأداء للاستجابة العابرة والمستقرة للنظم المغلقة بهدف تبيان مدى تأثير الحلقة المغلقة على هذه الخصائص. بالطبع إن المكاسب المحققة نتيجة استخدام الحلقة المغلقة ستقابلها تكاليف لابد من دفعها. سنختم الفصل بمناقشة وتحليل أداء قارئة الأقراص المدمجة ذات الحلقة المغلقة.

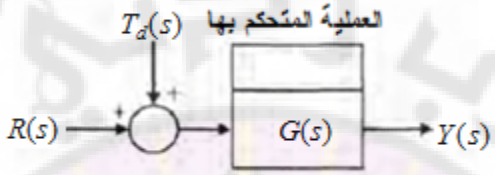
**3-1 مقدمة:**

قدمنا في الفصل الأول شرحاً لمفهومي الحلقة المفتوحة والمغلقة حيث تقوم حلقة التحكم بقياس إشارة الخرج الفعلية ومن ثم مقارنتها بإشارة الخرج المرغوب بها (الإشارة المرجعية), وتولد إشارة الفرق بين القيمة الفعلية والمرجعية لإشارة الخرج بهدف تزويدها إلى المتحكم ليقوم بما يلزم. لشرح مميزات ومحاسن الحلقة المغلقة سندرس النظم المغلقة وحيدة الحلقة (Single loop feedback system) بالرغم من أن العديد من نظم التحكم المغلقة تكون متعددة الحلقات (Multiloop systems), إلا أن المميزات والمحاسن المستنتجة من النظم وحيدة الحلقة يمكن تعميمها إلى النظم متعددة الحلقة. يبين الشكل (3-1) نظام تحكم ذو حلقة مفتوحة, حيث يمكننا ملاحظة التأثير المباشر لإشارة الاضطراب $T_d(s)$ على إشارة الخرج $Y(s)$. إذاً, في غياب حلقة التغذية الخلفية فإن نظام التحكم يكون حساس للاضطرابات ولتغير بارامترات التابع $G(s)$.

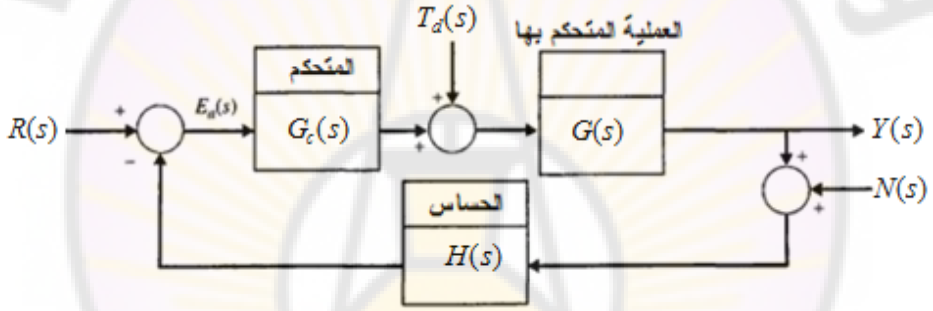
يبين الشكل (3-2) مخطط تدفق الإشارة والمخطط الصندوقي لنظام التحكم المغلق. بالطبع يمكننا ملاحظة التكاليف والتعقيد الناتج عن استخدام التغذية الخلفية, ولكن بالمقابل سنجني المميزات التالية:

- إنقاص حساسية النظام لتغيرات بارمترات العملية المتحكم بها $G(s)$.
- إنقاص تأثير الاضطرابات الخارجية.
- تخفيف تأثير ضجيج القياس.

- إنقاص أخطاء الحالة المستقرة للنظام.
- سهولة التحكم وضبط الاستجابة العابرة للنظام.




**الشكل (3-1): المخطط الصندوقي لنظام حلقة مفتوحة بوجود إشارة الاضطراب.**




**الشكل (3-2): المخطط الصندوقي لنظام التحكم ذو الحلقة المغلقة.**

سنقوم فيما يلي بشرح كيفية تطبيق التغذية الخلفية يمكن أن يُثمر النتائج المذكورة أعلاه.

**3-2 تحليل إشارة الخطأ (Error Signal Analysis):**

إن نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة, والمبينة بالشكل (3-2), تملك ثلاثة مداخل: $R(s)$, $N(s)$ و $T_d(s)$ والتي تمثل على التوالي الإشارات المرجعية, الضجيج والاضطرابات الخارجية, كما يملك خرج وحيد $Y(s)$. تُعرف إشارة الخطأ على النحو التالي:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-3)$$

لسهولة الدراسة, سندرس التغذية الخلفية الواحدية, أي سنعتبر $H(s) = 1$ وذلك في الشكل (3-2), لكن سندرس تأثير التغذية الخلفية غير الواحدية $(H(s) \neq 1)$ في الفصول اللاحقة.

بعد تبسيط المخطط الصندوقي المبين بالشكل (3-2), نجد أن خرج النظام:

$$Y(s)=\frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}R(s)+\frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)}T_d(s)-\frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}N(s).....(2-3)$$

باعتبار أن $E(s)=R(s)-Y(s)$, نجد:

$$E(s)=\frac{1}{1+G_c(s)G(s)}R(s)-\frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)}T_d(s)+\frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}N(s).....(3-3)$$

لنعرف التابع $L(s)=G_c(s)G(s)$, والمسمى بربح الحلقة (Loop gain) والذي يلعب دوراً مهماً في تحليل نظم التحكم. لنكتب الآن إشارة الخطأ بدلالة التابع $L(s)$:

$$E(s)=\frac{1}{1+L(s)}R(s)-\frac{G(s)}{1+L(s)}T_d(s)+\frac{L(s)}{1+L(s)}N(s).....(4-3)$$

يمكننا أيضاً أن نعرف التابع $F(s)=1+L(s)$, كما يمكننا أن نعرف أيضاً تابع الحساسية (Sensitivity function) بدلالة $F(s)$, على النحو التالي:

$$S(s)=\frac{1}{F(s)}=\frac{1}{1+L(s)}.....(5-3)$$

بالمقابل, يمكننا أن نعرف التابع المكمل للحساسية ( Complementary sensitivity function) بدلالة تابع ربح الحلقة:

$$C(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}.....(6-3)$$

لنكتب الآن إشارة الخطأ بدلالة التوابع $S(s)$ و $C(s)$ على النحو التالي:

$$E(s)=S(s)R(s)-S(s)G(s)T_d(s)+C(s)N(s).....(7-3)$$

بتفحص العلاقة (3-7) نجد أن من أجل تابع $G(s)$ معطى, إذا أردنا تصغير إشارة الخطأ, فيتوجب علينا تصغير كلاً من $C(s)$ و $S(s)$. بالعودة إلى علاقة $C(s)$ و $S(s)$ نجد أن كلاهما يتعلقان بتابع تحويل المتحكم $G_c(s)$, والذي يقوم مصمم نظام التحكم باختياره واللذان يرتبطان بالعلاقة التالية:

$$C(s)+S(s)=1.....(8-3)$$

وبالتالي لا يمكن تصغير $C(s)$ و $S(s)$ بنفس الوقت, لذلك لابد من اللجوء إلى نوع من التسوية بين $C(s)$ و $S(s)$.

لنقوم بتحليل معادلة الخطأ ولكن نحتاج قبل ذلك لفهم ما تعنيه عبارة تكبير أو تصغير تابع التحويل. إن مناقشة مطال تابع التحويل ستتم لاحقاً ضمن الفصول التالية وذلك عند مناقشة الاستجابة الترددية للنظام, ولكن ضمن مجال بحثنا في هذا الفصل سنصف مطال التابع $L(s)$, بواسطة طويلته في المجال الترددي والمشار إليها بـ $|L(j\omega)|$. إن تكبير $L(s)$ يعني تكبير هذه الطويلة أم تصغيرها فهي تصغير هذه الطويلة.

من الواضح, وبالاستناد إلى معادلة الخطأ (4-3), ومن أجل تابع معطى $G(s)$, يمكننا تقليل تأثير الاضطراب $T_d(s)$ إشارة الخطأ وذلك بتكبير قيمة مطال التابع $L(s)$ وذلك ضمن المجال الترددي لإشارة الاضطراب. يمكننا تفسير هذه النتيجة بالعودة إلى البند المتعلق بـ $T_d(s)$ في العلاقة (4-3) وهو: $1/[1+L(s)]$. نلاحظ أنه بتصغير قيمة هذا البند يمكننا تصغير تأثير الاضطراب على إشارة الخطأ. يتم تصغير قيمة هذا البند بزيادة قيمة مطال التابع $L(s)$. باعتبار أن $L(s)=G_c(s)G(s)$, بالتالي علينا تصميم متحكم $G_c$ ذو مطال كبير.

على العكس لإلغاء تأثير الضجيج $N(s)$ على إشارة الخطأ, يجب أن يكون مطال التابع $L(s)$ صغير وذلك ضمن المجال الترددي للضجيج. يمكننا تفسير هذه النتيجة وذلك باعتبار أن البند المتعلق بـ $N(s)$ في العلاقة (4-3) هو: $L(s)/[1+L(s)]$, وبالتالي بتصغير قيمة هذا البند يمكننا تقليل تأثير الضجيج على إشارة الخطأ. يتم تصغير قيمة هذا البند بتصغير قيمة مطال التابع $L(s)$, وهذا يقتضي تصميم متحكم $G_c$ ذو مطال صغير.

إذاً المطلوب تصميم متحكم $G_c$ ذو مطال كبير وذلك لإلغاء تأثير الاضطراب, وبنفس الوقت يجب أن يكون مطال هذا المتحكم $G_c$ صغير وذلك لإلغاء تأثير الضجيج الناتج عن القياسات. يمكننا الملائمة برن هذه المتطلبات المتناقضة بتصميم متحكم ذو مطال كبير ضمن المجالات الترددية المنخفضة (وهي المجالات الترددية المميزة لإشارة الاضطراب), وذو مطال صغير ضمن المجالات الترددية العالية (وهي المجالات الترددية المميزة لإشارة الضجيج).

سنناقش في الفقرة التالية كيفية استخدام التغذية الخلفية لإنقاص حساسية النظام لتغيرات بارامترات العملية المتحكم بها والممثلة بتابع التحويل $G(s)$. إن معالجة هذه النقطة يتطلب إلغاء تأثير الاضطراب والتشويش في علاقة الخطأ المعطاة بالمعادلة (3-2), بمعنى آخر: في المعادلة (3-2) سنفرض أن $T_d(s) = N(s) = 0$.

**3-3 حساسية نظم التحكم لتغيرات البارامترات:**

**(Sensitivity of control systems to parameter variations)**

بغض النظر عن العملية المتحكم بها والممثلة بتابع التحويل $G(s)$, فإنها ستكون عرضة لتأثير البيئة المحيطة, للتقادم, ولعدم الدقة عن حساب بعض بارامترات النظام, وبالتالي فإن جميع هذه العوامل تؤثر على عملية التحكم. في نظم التحكم المفتوحة, هذه العوامل ستنعكس على دقة إشارة الخرج ولكن في نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة سيتحسس النظام لتغيرات الخرج الناتجة عن هذه العوامل ويسعى إلى تصحيح إشارة الخرج. إذاً أحد النتائج الأولية للحلقة المغلقة هي قدرتها على إنقاص حساسية النظام لتغير بارامتراته.

من العلاقة (3-2), وبفرض أن $T_d(s) = N(s) = 0$, نجد:

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}R(s)$$

إذا استطعنا جعل المقدار $G_c(s).G(s) \gg 1$, وذلك ضمن المجال الترددي لعمل النظام, نجد أن إشارة الخرج تساوي تقريباً إشارة الدخل المرجعية, أي: $Y(s) \approx R(s)$. بالمقابل ربما يتسبب الشرط $G_c(s).G(s) \gg 1$ بظهور اهتزاز شديد في استجابة النظام (إشارة خرجه, وربما يدفعه نحو عدم الاستقرار). مما سبق حصلنا على نتيجة هامة جداً وهي أن زيادة ربح الحلقة $L(s) = G_c(s).G(s)$ ينقص من تأثير G(s) على إشارة الخرج.

لنفرض أن العملية تحت التحكم عرضة للتغيرات الناتجة عن تأثير البيئة الخارجية المحيطة بهذه العملية أو للتقادم أو لعدم الدقة في حساب بارامتراتها, بحيث أن النموذج الحقيقي للنظام هو $G(s) + \Delta G(s)$. لندرس الآن تأثير $\Delta G(s)$ على إشارة الخطأ $E(s)$. من المعادلة (3-3), وبالاعتماد على مبدأ التراكم وباعتبار أن $T_d(s) = N(s) = 0$, نجد:

$$E(s)+\Delta E(s)=\frac{1}{1+G_c(s)\big(G(s)+\Delta G(s)\big)}R(s)$$

وبالتالي فإن التغير في إشارة الخطأ:

$$\Delta E(s)=\frac{-G_c(s).\Delta G(s)}{\big(1+G_c(s)G(s)+G_c(s).\Delta G(s)\big)\big(1+G_c(s)G(s)\big)}R(s)$$

طالما أن: $G_c(s)G(s) \gg G_c(s)\Delta G(s)$, بالتالي تصبح علاقة $\Delta E(s)$ على النحو التالي:

$$\Delta E(s)=\frac{-G_c(s).\Delta G(s)}{\big(1+L(s)\big)^2}R(s)$$

من هذه العلاقة لاحظ أن التغير في إشارة الخطأ $\Delta E(s)$ قد نُقص بمقدار $(1+L(s))^2$, وهو ذو قيمة أكبر من الواحد على كامل المجال الترددي. من أجل القيم الكبيرة لمطال $L(s)$, لدينا $1+L(s)\approx L(s)$, بالتالي يمكننا تقريب علاقة $\Delta E(s)$ لتصبح:

$$\Delta E(s)\approx -\frac{1}{L(s)}.\frac{\Delta G(s)}{G(s)}R(s) \quad \text{..... (9-3)}$$

إن تكبير مطال $L(s)$ سيترجم إلى تصغير في تغير إشارة الخطأ, مما يعني أن تكبير مطال $L(s)$ تم إنقاص الحساسية اتجاه التغيرات في $\Delta G(s)$. أيضاً, تكبير مطال $L(s)$ سيؤدي إلى إنقاص قيمة تابع الحساسية $S(s)$. هذه الملاحظات تدفعنا إلى التساؤل حول كيفية تعريف الحساسية. تُعرف الحساسية على أنها نسبة التغير المئوي في تابع تحويل النظام إلى النسبة المئوية لتغير تابع تحويل العملية المتحكم بها. لنفرض أن تابع تحويل النظام:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)} \quad \text{..... (10-3)}$$

بالتالي يمكن صياغة علاقة الحساسية على النحو التالي:

$$S(s)=\frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \quad \text{..... (11-3)}$$

يمكن أن تكتب العلاقة (11-3) على النحو التالي وذلك من أجل التغيرات الصغيرة:

$$S(s)=\frac{\partial T/T}{\partial G/G}=\frac{\partial \ln T}{\partial \ln G} \quad \text{..... (12-3)}$$

إذاً:

**حساسية النظام هي نسبة التغير في تابع تحويل النظام إلى التغير في تابع تحويل العملية المتحكم بها وذلك عند حدوث تغيرات متزايدة صغيرة (Small incremental change).**

في نظم الحلقة المفتوحة تكون الحساسية للتغيرات في العملية المتحكم بها والممثلة بـ $G(s)$ مساوياً لـ (1).

في النظم المغلقة ذات تابع التحويل $T(s) = G_c(s)G(s)/[1 + G_c(s)G(s)]$, تعطى حساسية النظام بـ:

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}.\frac{G}{T} = \frac{G_c}{(1+G_cG)^2}.\frac{G}{G_cG/(1+G_cG)}$$

أو:

$$S_G^T = \frac{1}{1+G_c(s)G(s)} \quad .....(13-3)$$

من العلاقة (3-13) نجد أن حساسية النظام قد نقصت إلى قيمة أقل من حساسية النظام ذو الحلقة المفتوحة وذلك بزيادة قيمة مطال التابع $L(s) = G_c(s).G(s)$, على كامل المجال الترددي لعمل النظام. يمكن ملاحظة أن علاقة الحساسية $S_G^T$ المعطاة بالعلاقة (3-13) تتطابق مع علاقة تابع الحساسية $S(s)$ المعطاة بالعلاقة (3-5).

في الواقع غالباً ما نسعى إلى تحديد $S_\alpha^T$ حيث α هو أحد بارامترات تابع التحويل $G(s)$. باستخدام قاعدة السلسلة (chain rule) نجد:

$$S_\alpha^T = S_G^T.S_\alpha^G \quad .....(14-3)$$

غالباً ما يكون تابع تحويل النظام $T(s)$ من الشكل:

$$T(s,\alpha) = \frac{N(s,\alpha)}{D(s,\alpha)} \quad .....(15-3)$$

حيث α هو البارامتر العرضة للتغير بسبب البيئة المحيطة. بالتالي يمكن صياغة علاقة الحساسية بالنسبة للبارامتر α بإعادة كتابة العلاقة (3-12) على النحو التالي:

$$S_\alpha^T = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial \ln N}{\partial \ln \alpha}\bigg|_{\alpha_0} - \frac{\partial \ln D}{\partial \ln \alpha}\bigg|_{\alpha_0} = S_\alpha^N - S_\alpha^D \quad .....(16-3)$$

مما سبق نجد أن أحد أهم محاسن نظم التحكم ذات التغذية الخلفية هي القدرة على إنقاص تأثير تغيرات بارامترات النظام. بالنسبة لنظم الحلقة المفتوحة, يجب اختيار عناصر النظام $G(s)$ بعناية وذلك حتى نحقق متطلبات النظام بدقة بينما في النظم ذات الحلقة المغلقة يسمح باختيار عناصر النظام $G(s)$ أقل دقة من الحلقة المفتوحة طالما أن حساسية النظام قد انقصت بفضل التابع $L(s)$.

يبين المثال التالي دور التغذية الخلفية في إنقاص حساسية النظام للتغيرات في بارامتراته.

**مثال 3-1 مكبر عمليات بوجود التغذية الخلفية:**

يستخدم مكبر العمليات المبين بالشكل (3-3- أ) في العديد من التطبيقات وهو ذو ربح مقداره $(-K_a)$. يعطى توتر الخرج لهذا المكبر بالعلاقة:

$$v_0 = -K_a v_{in} \quad .....(17-3)$$

لنضيف للمكبر تغذية خلفية باستخدام مجزء جهد $R_P$, كما هو مبين بالشكل (3-3- ب). إن تابع تحويل مكبر العمليات بدون التغذية الخلفية:

$$T = -K_a \quad .....(18-3)$$

أما حساسية المكبر للتغير في ربحه, فتعطى بالعلاقة:

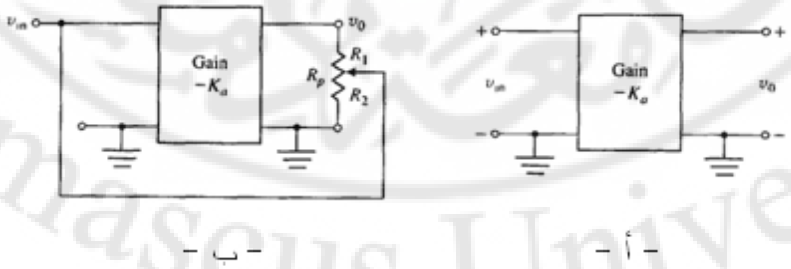
$$S_{K_a}^{T} = 1 \quad .....(19-3)$$

إن المخطط الصندوقي لنموذج مكبر العمليات بوجود تغذية خلفية مبين بالشكل (3-4), حيث:

$$\beta = R_2 / R_1 \quad .....(20-3)$$

$$R_p = R_1 + R_2 \quad .....(21-3)$$

إن قيمة $R_0 << R_p$ حيث $R_0$ مقاومة خرج مكبر العمليات.




– ب – – أ –

**الشكل (3-3): مكبر العمليات: أ– في حلقة مفتوحة ب– في حلقة مغلقة.**

يعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة للمكبر بالعلاقة:

$$T = \frac{-K_a}{1+K_a\beta} \quad .....(22-3)$$

بالتالي تعطى علاقة حساسية مكبر العمليات ذو التغذية الخلفية على النحو التالي:

$$S_{Ka}^{T} = S_{G}^{T} S_{Ka}^{G} = \frac{1}{1+K_a\beta} \quad .....(23-3)$$

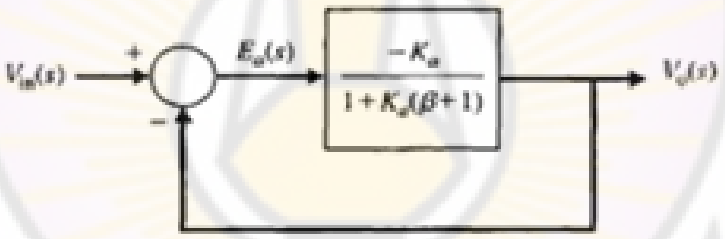
إذا كانت قيمة $K_a$ كبيرة, تكون الحساسية لتغير $K_a$ منخفضة. على سبيل المثال, إذا كانت:

$$K_a = 10^4 \quad , \quad \beta = 0.1 \quad .....(24-3)$$

تكون قيمة الحساسية:

$$S_{Ka}^{T} = \frac{1}{1+1000} \quad .....(25-3)$$

أي أن مطال الحساسية في الحلقة المغلقة هو واحد بالألف من مطال الحساسية في الحلقة المفتوحة.




**الشكل (3-4): المخطط الصندوقي لمكبر العمليات بوجود تغذية خلفية حيث $R_p \gg R_0$.**

**4-3 تأثير إشارات الاضطراب على نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة:**

إن أحد التأثيرات الهامة للتغذية الخلفية في نظم التحكم هو الإلغاء الجزئي لتأثير إشارات الاضطراب. تُعرف إشارة الاضطراب بأنها إشارة دخل غير مرغوب بها تؤثر على إشارة الخرج بشكل سلبي. إن العديد من نظم التحكم تكون عرضة لإشارات الاضطراب مسببة عدم دقة إشارة الخرج. على سبيل المثال تتأثر المكبرات الالكترونية بالضجيج المتولد داخل الدارات المتكاملة أو الترانزستورات, تتأثر أيضاً أجهزة الرادار بالرياح حيث غالباً ما توضع أجهزة الرادار في الوسط الخارجي, كذلك فإن العديد من النظم تولد إشارات ضجيج ناتج عن عدم خطية هذه النظم.

إن الفائدة من نظم التحكم ذات التغذية الخلفية هو إنقاص تأثير الاضطراب والضجيج غير المرغوب بها.

- **إلغاء الاضطرابات (Disturbance rejection):**

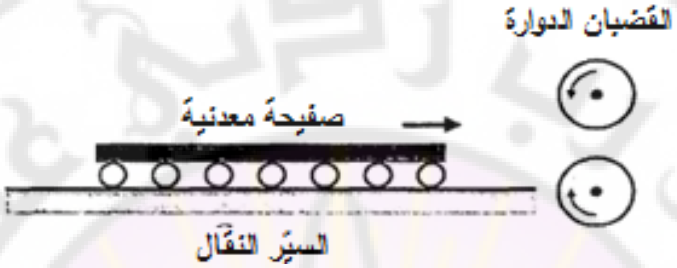
لنفرض أن إشارتي الدخل والضجيج معدومتان, أي $R(s) = N(s) = 0$. في هذه الحالة تصبح معادلة الخطأ (3-4) على النحو التالي:

$$E(s) = -S(s).G(s).T_d(s) = \frac{G(s)}{1+L(s)}T_d(s)$$

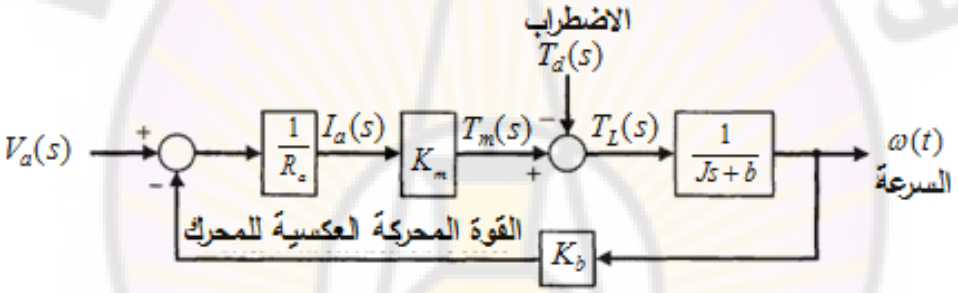
من أجل تابع تحويل معطى $G(s)$, وقيمة محددة لـ $T_d(s)$, نجد أن زيادة ربح الحلقة $L(s)$ سينقص من تأثير $T_d(s)$ على إشارة الخطأ $E(s)$. هذه الملاحظة تدفعنا للاستنتاج بأن القيمة الكبيرة لمطال تابع ربح الحلقة $L(s)$ يؤدي إلى إلغاء الاضطراب, أو بعبارة أخرى, الإلغاء الجيد للاضطراب يتطلب قيمة كبيرة لتابع ربح الحلقة $L(s)$ وذلك ضمن المجالات الترددية لإشارات الاضطراب. عملياً يكون تردد إشارة الاضطراب منخفض مما يعني أننا نريد تصميم تابع ربح حلقة ذات مطال كبير وذلك عند الترددات المنخفضة. من جهة أخرى, يكون تابع الحساسية $S(s)$ ذو مطال صغير وذلك عندما يكون مطال تابع ربح الحلقة $L(s)$ كبير. هذا يكافئ أن نقول أننا نريد تصميم متحكم $G_c(s)$ بحيث أن مطال تابع الحساسية $S(s)$ صغير عند الترددات المنخفضة.

لنأخذ المثال التالي وذلك لدراسة تأثير الاضطراب. النظام موضوع المثال, هو عبارة عن نظام التحكم بسرعة القضبان الدوارة المستخدمة لمعالجة الصفائح الحديدية ( Steel rolling mill), والمبين بالشكل (3-5). في هذا النظام, تتعرض القضبان الدوارة لتغيرات أو اضطرابات حمل كبيرة حمل. عندما تكون الصفائح الحديدية, المراد معالجتها, بعيدة تكون القضبان الدوارة في حالة لاحمل, ولكن عندما تدخل صفيحة معدنية كبيرة بين القضبان الدوارة, فإن الحمل على القضبان الدوارة يزداد فجأة إلى قيمة كبيرة. في هذه الحالة, يمكن تمثيل تأثير التحميل بواسطة إشارة خطوية على مدخل اضطراب الحمل الشكل(3-6). يمكن ملاحظة استجابة النظام مباشرة من منحنيات (السرعة – العزم)

للمحرك الذي يدّور القضبان, والمبينة بالشكل (3-7). من هذه المنحنيات نلاحظ أن أي تغير بسيط في عزم المحرك سيؤدي إلى تغير كبير في سرعة دوران المحرك.




**الشكل (3-5): نظام القضبان الدوراة المستخدمة لمعالجة الصفائح الحديدية.**



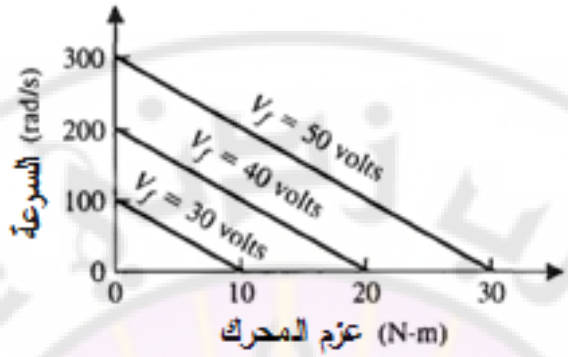

**الشكل (3-6): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بسرعة النظام في الحلقة المفتوحة.**

يبين الشكل (3-6) المخطط الصندوقي لمحرك السيرفو ذو التيار المستمر, والمتحكم به عن طريق تيار المتحرض, مع وجود اضطراب في عزم الحمل, مع إهمال محارضة ملف المتحرض. هذا المخطط الصندوقي قد تم استنتاجه عند معالجة المثال 2-14.

لنفرض أن $R(s) = 0$, ولنتفحص إشارة الخطأ $E(s) = -\omega(s)$, وذلك بوجود إشارة الاضطراب $T_d(s)$. إن تغير سرعة السرعة بسبب اضطراب الحمل:

$$E(s) = -\omega(s) = \frac{1}{Js + b + K_m K_b / R_a} \quad \text{.....(26-3)}$$

Damascus University



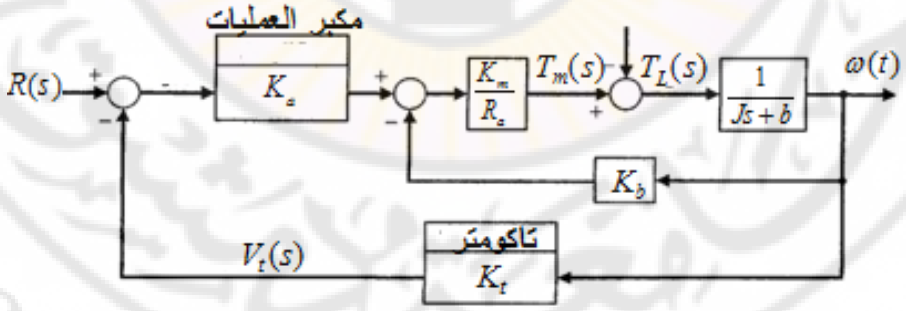

**الشكل (3-7): منحنيات السرعة – العزم للمحرك.**

إن خطأ الحالة المستقرة لإشارة السرعة $\omega(s)$ والناتج عن وجود اضطراب على عزم الحمل (أي $T_d(s) = D/s$), يُحسب بواسطة نظرية القيمة النهائية:

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{Js+b+K_mK_b/R_a}.\frac{D}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \frac{1}{b+K_mK_b/R_a} = -\omega_0(\infty).....(27-3)$$

تمثل العلاقة (27-3) القيمة النهائية لإشارة الخطأ لنظام الحلقة المفتوحة (عند غياب التغذية الخلفية بالسرعة). يبين الشكل (3-8) المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المغلقة.




**الشكل (3-8): نظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المغلقة وذلك باستخدام التاكومتر.**

يمكن تبسيط المخطط الصندوقي المبين بالشكل (3-8) ليبدو على النحو المبين بالشكل (3-9), حيث: $G_1(s) = K_aK_m/R_a$ ,$G_2(s) = 1/(js+b)$ ,$H(s) = K_t + K_b/K_a$.

لنحسب الآن إشارة الخطأ $E(s) = -\omega(s)$ لنظام الحلقة المغلقة:

$$E(s) = -\omega(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} T_d(s) \quad \text{.....(28-3)}$$

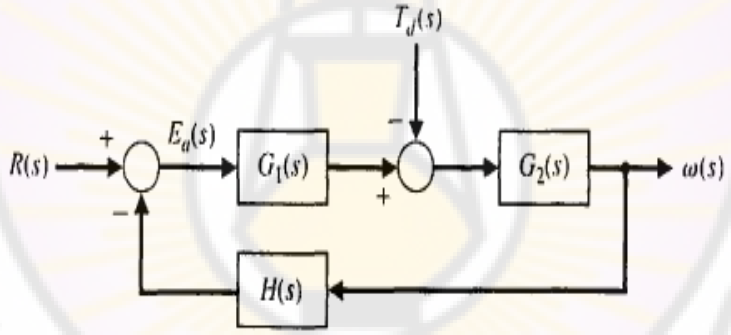
بالتالي, إذا كان $G_1 G_2 H \gg 1$ بالتالي فإن:

$$E(s) \approx \frac{1}{G_1(s)H(s)} T_d(s) \quad \text{.....(29-3)}$$

بالتالي, إذا كانت قيمة $G_1 H$ كبيرة, فإن تأثير الاضطرابات يمكن أن يتناقص بواسطة التغذية الخلفية. لنحسب المقدار $G_1 H$:

$$G_1(s)H(s) = \frac{K_a K_m}{R_a}\left(K_t + \frac{K_b}{K_a}\right) \approx \frac{K_a K_m K_t}{R_a}$$

حيث: $K_a \gg K_b$. بالتالي يجب أن نسعى دائماً للحصول على ربح كبير لمكبر العمليات ($K_a$), والمحافظة على $R_a < 2$.




**الشكل (3-9): المخطط الصندوقي المبسط لنظام الحلقة المغلقة.**

يُعطى الخطأ في النظام المبين بالشكل (3-9) بالعلاقة:

$$E(s) = R(s) - \omega(s) \qquad R(s) = \omega_d(s)$$

حيث $\omega_d(s)$ السرعة المطلوبة. لسهولة الحسابات سنفرض أن $R(s) = 0$, ومن ثم لنحسب $\omega(s)$:

$$\omega(s) = \frac{-1/(Js+1)}{1+\left(K_t K_a K_m / R_a\right)\left[1/(Js+1)\right]+\left(K_b K_m / R_a\right)\left[1/(Js+1)\right]} T_d(s)$$

$$\omega(s) = \frac{-1}{Js + b + \left(K_m / R_a\right)\left(K_t K_a / K_b\right)} T_d(s) \quad \text{.....(30-3)}$$

بالتالي يمكن باستخدام نظرية القيمة النهائية حساب إشارة الخرج في الحالة المستقرة:

$$lim_{t\to\infty}\omega(t) = lim_{s\to 0} s\omega(s) = \frac{-1}{b+\left(K_m/R_a\right)\left(K_tK_a/K_b\right)} D \quad .....(31-3)$$

عندما يكون ربح مكبر العمليات $K_a$ كبير نسبياً, تصبح قيمة الخرج في الحالة المستقرة:

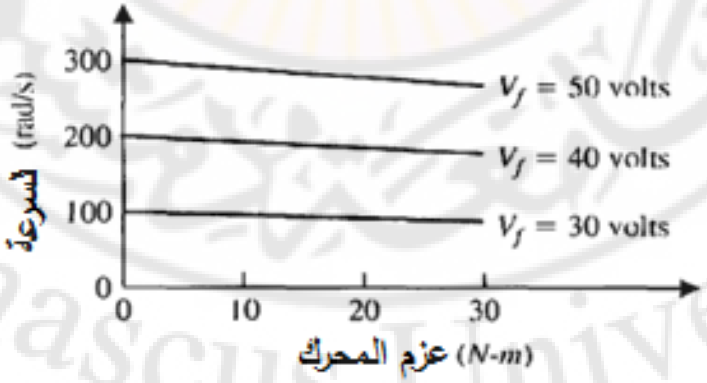
$$\omega(\infty) = \frac{-R_a}{K_tK_aK_m} D = \omega_c(\infty) .....(32-3)$$

تُعطى نسبة إشارة الخرج في الحالة المستقرة في الحلقة المغلقة الناتجة عن إشارة الاضطراب الغير مرغوب بها إلى إشارة الخرج في الحلقة المفتوحة, بالعلاقة:

$$\frac{\omega_c(\infty)}{\omega_o(\infty)} = \frac{R_ab + K_mK_b}{K_tK_aK_m} .....(33-3)$$

إن القيمة التقريبية لهذه النسبة أقل من $(0.02)$. بمعنى آخر أن تغير السرعة الناتج عن إشارة الاضطراب في حالة الحلقة المغلقة هو $(0.02)$ من قيمة تغير السرعة الناتج عن إشارة الاضطراب في حالة الحلقة المفتوحة.

إن هذه الميزة لنظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المغلقة يمكن شرحها وتفسيرها بالاستناد إلى منحنيات السرعة – العزم للنظام المغلق, والمبينة بالشكل (3-10). إن التحسينات المضافة للنظام بسبب التغذية الخلفية تتضح من المنحنيات الشبه أفقية, والتي تشير إلى أن السرعة مستقلة تقريباً عن العزم. قارن الأشكال (3-7) و (3-10) لملاحظة تأثير التغذية الخلفية بشكل مباشر من منحنيات العزم – السرعة.




**الشكل (3-10): منحنيات السرعة – العزم لنظام الحلقة المغلقة.**

- **إضعاف ضجيج القياسات (Measurement Noise Attenuation):**

لنفرض أن إشارتي الدخل والاضطراب معدومتان, أي $R(s) = T_d(s) = 0$. في هذه الحالة تصبح المعادلة (3-4) على النحو التالي:

$$E(s) = C(s)N(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} N(s)$$

من هذه العلاقة نجد كلما تناقص ربح الحلقة $L(s)$ فإن تأثير الضجيج $N(s)$ على إشارة الخطأ يتناقص. إذاً للإضعاف الفعال لضجيج القياسات نحتاج إلى تابع ربح حلقة ذو مطال صغير, ضمن المجالات الترددية المميزة لإشارات الضجيج. عملياً يكون تردد إشارات ضجيج القياسات عالي, بينما تردد إشارات الاضطراب منخفض, وهذا من حسن الحظ لأنه يعطي مصمم نظام التحكم القدرة على التخفيف من الاضطراب وبنفس الوقت إضعاف من تأثير الضجيج وذلك عن طريق تصميم متحكم ربح مطاله كبير عند الترددات المنخفضة, وربح مطاله صغير عند الترددات العالية.

إن حقيقة كون إشارات الاضطراب ذات ترددات منخفضة وإشارات الضجيج ذات ترددات منخفضة ليست عامة, بالتالي لايمكن تطبيق الطريقة المشروحة أعلاه عند تصميم جميع المتحكمات. في هذه الحالة نستخدم مرشح (Filter) لإلغاء إشارات الاضطراب ذات الترددات العالية, أما تأثير إشارة الضجيج (الناتجة عن القياسات) على إشارة الخرج فهو:

$$Y(s) = \frac{-G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)} .N(s) \quad .....(34-3)$$

عندما يكون مطال ربح الحلقة $L(s) = G_c(s)G(s)$ كبير, يمكن تقريب هذه العلاقة لتصبح:

$$Y(s) = -N(s) \quad .....(35-3)$$

إن هذه النتيجة تتوافق مع المناقشة السابقة لنا والقائلة أنه كلما صغر مطال ربح الحلقة كلما أدى ذلك إلى إضعاف ضجيج القياسات. إذاً يتوجب أن يختار مصمم النظام ربح الحلقة بعناية فائقة.

يمكن البرهان على التكافؤ بين الحساسية $S_G^T$ وبين إشارة الخطأ في الحلقة المغلقة عند تطبيق إشارة دخل $R(s)$, بالاعتماد على الشكل (3-2). تُحسب حساسية النظام لـ $G(s)$ بالعلاقة:

$$S_G^T = \frac{1}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{1}{1+L(s)} \quad .....(36-3)$$

أما تأثير الإشارة المرجعية $R(s)$ على إشارة الخطأ $E(s)$ (عندما $T_d(s) = 0$ و $N(s) = 0$), فيعطى بالعلاقة:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{1}{1+L(s)} \quad .....(37-3)$$

إذاً ومن العلاقتين (3-36) و (3-37) يمكن ملاحظة التكافؤ بين حساسية النظام وبين إشارة الخطأ الناتجة عن تطبيق إشارة الدخل المرجعية.

يمكن أن نلخص, وبالاعتماد على مناقشاتنا السابقة من هذه الفقرة, أن التأثيرات غير المرغوب بها للاضطراب ولتغير بارامترات النظام يمكن أن تُخفف بزيادة ربح الحلقة, حيث يتناقصان سوية عند زيادة ربح الحلقة.

النقطة الأخرى الواجب إيضاحها فهي تأثير الضجيج على إشارة الخطأ, لذلك لنوجد نسبة إشارة الخطأ إلى إشارة الضجيج:

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad .....(38-3)$$

من هذه العلاقة نجد أن التأثير غير المرغوب فيه لإشارة الضجيج يمكن أن يُخفف بإنقاص ربح الحلقة.

**3-5 التحكم بالاستجابة العابرة (Control of the transient response):**

إن أحد أهم الخصائص المميزة لنظم التحكم هي استجابتها العابرة التي تُعرف بأنها استجابة النظام كتابع للزمن. بما أن الهدف من نظم التحكم هو تزويدنا بالاستجابة المطلوبة, فغالباً ما يتم ضبط استجابة نظم التحكم بحيث نحصل على هذه الاستجابة.

في نظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة, من الممكن تعديل استجابة النظام بإدخال المتحكم $G_c(s)$ على التسلسل مع $G(s)$, وذلك كما هو مبين بالشكل (3-11). إذا لم يتم تزويدنا بالاستجابة المطلوبة فغالباً ما يتم استبدال العملية المتحكم بها ذات تابع التحويل $G(s)$ بعملية أخرى مناسبة بشكل أكبر. على العكس من ذلك في نظم التحكم ذات الحلقة

المغلقة يمكن ضبط الاستجابة العابرة بضبط بارامترات حلقة التغذية الخلفية. إذاً بالتالي من الضروري تصميم تابع تحويل الحلقة $L(s) = G_c(s)G(s)$ بحيث أن الاستجابة العابرة لهذا التابع تحقق الاستجابة العابرة المطلوبة.

**الشكل (3-11): المخطط الصندوقي لنظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة.**

لتعميق الفهم لهذه النقطة لنأخذ نظام تحكم معين يمكنه العمل في حلقة مفتوحة وحلقة مغلقة, وليكن نظام التحكم بسرعة محرك, والذي غالباً ما يُستعمل في العمليات الصناعية لتدوير السيور المستخدمة لنقل المواد الأولية أوالمنتجات. أيضاً, في صناعة المعادن يمكن أن يُستخدم لتدوير قضبان صقل المعادن. يبين الشكل (3-11) نظام للتحكم بسرعة محرك, ذو حلقة مفتوحة. إن تابع تحويل نظام الحلقة المفتوحة (بدون تغذية خلفية) لهذا النظام, قد تم استنتاجه مسبقاً في الفصل الثاني:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_1}{1+\tau_1 s} \quad .....(39-3)$$

حيث: $\tau_1 = R_a J/(R_a b + K_b K_m), \quad K_1 = K_m/(R_a b + K_b K_m)$ .

في صناعة المعادن تكون عطالة قضبان الصقل كبيرة جداً, بالتالي فإننا بحاجة إلى محرك كبير حيث غالباً ما يكون المحرك المستعمل هو محرك ذو تيار مستمر, متحكم به بواسطة تيار المتحرض. لنُعرض قضبان صقل المعادن (أو المحرك الذي يدور هذه القضبان) لإشارة دخل خطوية, وذلك لتمثيل حالة الانتقال بين سرعتين, أي:

$$V_a(s) = K_2 E/s \quad .....(40-3)$$

في هذه الحالة تكون استجابة الخرج:

$$\omega(s) = G(s).V_a(s) \quad .....(41-3)$$

وبالتالي تُعطى الاستجابة العابرة لتغير السرعة, بالعلاقة:

$$\omega(s) = K_1(K_2E).(1-e^{-t/\tau_1}).....(42-3)$$

إذا كانت هذه الاستجابة العابرة بطيئة جداً فيجب علينا اختيار محرك مختلف ذو ثابت زمني $\tau_1$ مختلف, بالطبع إذا كان ذلك ممكن. لكن وبسبب أن $\tau_1$ تتعلق بعطالة الحمل $(J)$, فليس من الممكن أن نحقق تبديل كبير في الاستجابة العابرة بالرغم من تبديل المحرك المستخدم. لنقوم بحساب تابع تحويل النظام المغلق المبين بالشكل (3-12):

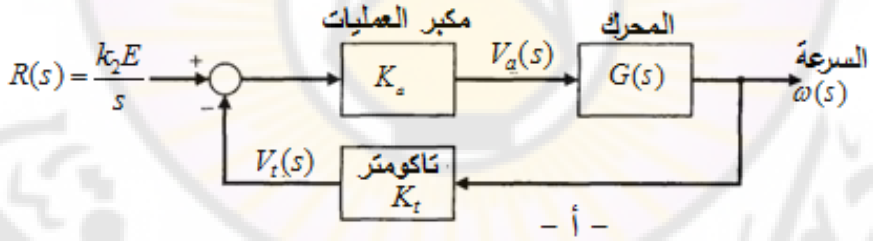
$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{K_aG(s)}{1+K_aK_tG(s)} = \frac{K_aK_1}{1+\tau_1 s+K_aK_1K_t} = \frac{K_aK_1/\tau_1}{s+(1+K_aK_1K_t)/\tau_1}.....(43-3)$$

يمكن ضبط ربح مكبر العمليات $(K_a)$ بحيث نصل إلى الاستجابة العابرة المطلوبة, مع إمكانية تغيير ربح التاكومتر $(K_t)$, إذا اقتضت الحاجة.

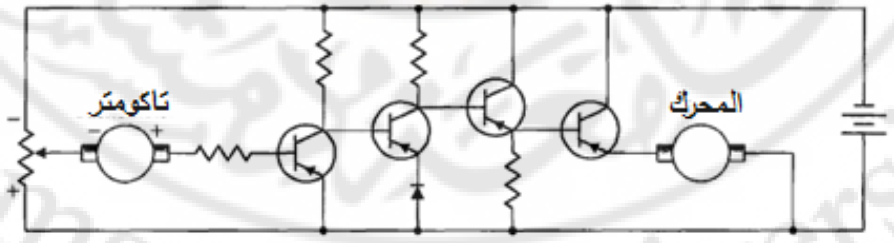
إن الاستجابة العابرة لخرج النظام المغلق وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية $(K_2E/s)$:

$$\omega(t) = \frac{K_aK_1}{1+K_aK_1K_t}(K_2E).(1-e^{-pt}).....(44-3)$$

حيث: $p = (1+K_aK_tK_1)/\tau_1$.




– أ –




– ب –

**الشكل (3-12): أ – نظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المغلقة ب – دارة التحكم بالسرعة.**

في البداية, افترضنا أن عطالة الحمل كبيرة جداً, بالتالي فإنه يمكننا تغيير الاستجابة بزيادة $K_a$. في هذه الحالة ستكون للاستجابة الشكل التقريبي التالي:

$$\omega(t)=\frac{1}{K_t}(K_2E).\left[1-\exp\left(\frac{-(K_aK_tK_1)t}{\tau_1}\right)\right].....(45\text{-}3)$$

في التطبيقات العملية, إن قطب الحلقة المفتوحة يساوي $(1/\tau_1=0.1)$, بينما في الحلقة المغلقة فإن قطب النظام يمكن أن يكون $(K_1K_tK_a/\tau_1=10)$, وذلك على أقل تقدير, مما يعني تحسن في سرعة الاستجابة مقداره $(100)$ ضعف. لتحقيق الربح $(K_1K_aK_t)$, يجب أن يكون ربح المكبر $K_a$ كبير بشكل كافي, كما أن توتر المتحرض والعزم المولد يجب أن تكون أكبر في نظام الحلقة المغلقة من نظام الحلقة المفتوحة, لهذا السبب يجب استخدام محركات باستطاعات كبيرة في النظم المغلقة أكبر من المحركات المستخدمة في النظم المفتوحة وذلك لتجنب الإشباع. يبين الشكل (3-13) استجابة نظم الحلقة المفتوحة والمغلقة, حيث يمكننا أن نلاحظ الاستجابة السريعة للنظام المغلق.

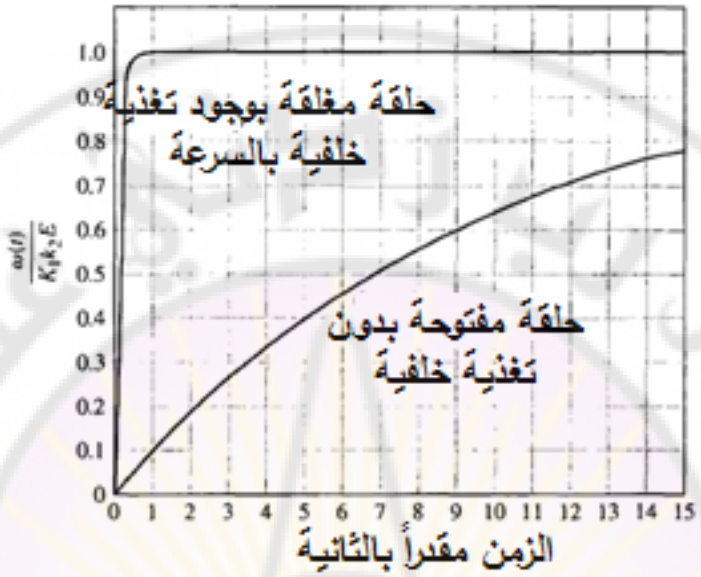
طالما أننا نناقش نظام التحكم بالسرعة, فإننا نجد أنه من المفيد أن نحدد حساسية نظم الحلقة المفتوحة والمغلقة. كما رأينا سابقا, إن حساسية نظام الحلقة المفتوحة للتغيرات في بارامترات المحرك أو مجزء الجهد $K_2$ تساوي الواحد. بالمقابل فإن حساسية نظام الحلقة المغلقة للتغيرات في $K_m$ فتساوي:

$$S_{K_m}^T=S_G^TS_{K_m}^G\approx\frac{\left[s+(1/\tau_1)\right]}{s+(1+K_aK_1K_t)/\tau_1}$$

باستخدام القيم المعطاة مسبقاً $(1/\tau_1=0.1$ و $K_1K_tK_a/\tau_1=10)$ نجد:

$$S_{K_m}^T\approx\frac{s+0.1}{s+10}$$

من هذه العلاقة نجد أن الحساسية تتبع $(s)$ وبالتالي يجب تقديرها عند قيم مختلفة للتردد. هذا النوع من التحليل سيناقش في الفصول اللاحقة, لكن يمكننا ملاحظة أنه عند الترددات المنخفضة (على سبيل المثال, $s=j\omega=j1$), فإن مطال تابع الحساسية $S_{Km}^T$ يساوي تقريباً 0.1.




**الشكل (3-13): استجابة نظم الحلقة المفتوحة والمغلقة وذلك عندما $\tau = 1$ و $K_1K_aK_t = 100$. إن زمن الوصول إلى 98% من القيمة النهائية هي 40 ثانية في الحلقة المفتوحة و 0.4 ثانية في الحلقة المغلقة.**

### 3- 6 أخطاء الحالة المستقرة (Steady-state errors):

يُعَدّ نظام التحكم ذو التغذية الخلفية, نظام ذو أهمية كبيرة لأنه يعطي المهندس المصمم إمكانية ضبط الاستجابة العابرة, بإضافة إلى إنقاص حساسية النظام للاضطرابات ولتغير البارامترات. سنرى في هذه الفقرة تأثير الحلقة المغلقة على أخطاء الحالة المستقرة, كما سنعمل على مقارنتها بأخطاء النظم ذات الحلقة المفتوحة.

يُعرف خطأ الحالة المستقرة بأنه الخطأ بعد انتهاء الحالة العابرة. يعطى خطأ نظام الحلقة المفتوحة المبين بالشكل (3-1) بالعلاقة التالية, وذلك عندما $T_d(s) = 0$:

$$E_o(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G(s)).R(s) \quad .....(46-3)$$

يبين الشكل (3-2) نظام الحلقة المغلقة, حيث يعطى خطأ هذا النظام بالعلاقة التالية, وذلك عندما $T_d(s) = N(s) = 0$ و $H(s) = 1$:

$$E_c(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}.R(s) \quad .....(47-3)$$

لنحسب الآن خطأ الحالة المستقرة وذلك باستخدام نظرية القيمة النهائية والتي تنص:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) \quad .....(48-3)$$

عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية, نجد أن أخطاء الحالة المستقرة:

- في النظام المفتوح:

$$e_o(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_o(s) = \lim_{s\to 0}(1-G(s)) = (1-G(0)) \quad .....(49-3)$$

- في النظام المغلق:

$$e_c(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_c(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G_c(s)G(s)}\right) = \frac{1}{1+G_c(0)G(0)} \quad .....(50-3)$$

تدعى قيمة $G(s)$ عندما $s=0$, بالربح الساكن (DC gain), وهو عادة أكبر من الواحد.

يملك نظام الحلقة المفتوحة خطأ حالة مستقرة كبير, بينما على العكس, يكون خطأ الحالة المستقرة لنظام الحلقة المغلقة صغير وذلك لأن ربح حلقته الساكن $(L(0) = G_c(0)G(0))$ كبير. في الفصول القادمة سنناقش خطأ الحالة المستقرة بشكل أكبر.

لنتفحص العلاقة (3-49) فنجد أنه يمكننا الوصول لخطأ حالة مستقرة معدوم للنظام ذو الحلقة المفتوحة وذلك إذا قمنا بضبط وتعيير الربح المستمر للنظام على القيمة الواحدية (أي $G(0) = 1$). هنا يتبادر للأذهان السؤال التالي: في هذه الحالة ما فائدة استخدام الحلقة المغلقة؟ للجواب على هذا لنعد إلى مبدأ حساسية النظم لتغير بارامتراتها فنجد أنه إذا تم تعيير الربح المستمر للنظام على القيمة الواحدية فإنه مع مرور الزمن ونتيجة لتأثير البيئة المحيطة ستتغير البارامترات ولن تبقى قيمة $G(0)$ مساوية للواحد, فيظهر هنا خطأ الحالة المستقرة مما يتطلب تعيير النظام من جديد. على العكس من ذلك, تقوم نظم الحلقة المغلقة بمراقبة خطأ الحالة المستقرة وتزويدنا بإشارة تحكم تعمل على إنقاص قيمة هذا الخطأ.

### 7-3 تكاليف التغذية الخلفية (The cost of feedback):

في الفقرات السابقة من هذا الفصل, تم توضيح فوائد إضافة تغذية خلفية لنظام التحكم, ولكن لابد من تكاليف إضافية ناتجة عن هذه الإضافة.

التكلفة الأولى للتغذية الخلفية هي زيادة عدد المكونات, وزيادة تعقيد النظام. لإضافة التغذية الخلفية يتوجب علينا إضافة العديد من مكونات التغذية الخلفية, ومنها الحساس, الذي هو أكثر عناصر التغذية الخلفية تكلفة, كما يُدخل ضجيج إلى النظام.

التكلفة الثانية للتغذية الخلفية هو فقدان الربح (Loss of gain). لتوضيح هذه التكلفة سنحسب ربحي الحلقة المفتوحة والمغلقة:

- ربح الحلقة المفتوحة: $G_c(s)G(s)$.
- ربح الحلقة المغلقة: $G_c(s)G(s)/[1+G_c(s)G(s)]$, وذلك عند تغذية خلفية واحدية.

بمقارنة العلاقتين السابقتين نجد أن ربح الحلقة المغلقة قد نقص بمقدار $(1/[1+G_c(s)G(s)])$, وهو نفس مقدار نقصان حساسية النظام لتغيرات البارامترات والاضطرابات. التكلفة الأخيرة للتغذية الخلفية تتجلى بإمكانية حدوث حالة عدم الاستقرار حيث أن النظام المفتوح دائماً مستقر, بينما النظام المغلق ليس دائماً مستقر. سنتعرض بالتفصيل لمسألة استقرار نظم الحلقة المغلقة في الفصول القادمة.

**3-8 مثال تصميمي:**

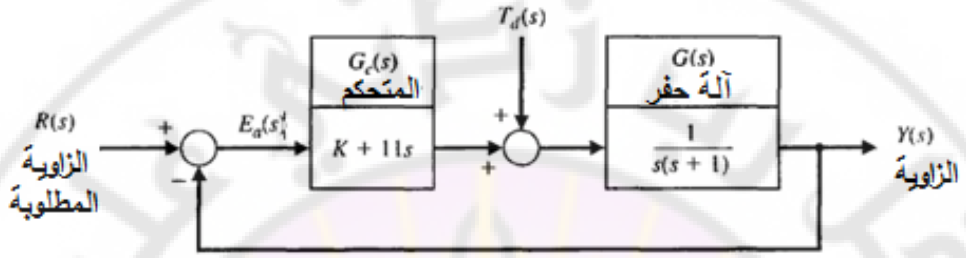
في هذه الفقرة سنقوم بمعالجة المثال التصميمي التالي: آلة حفر نفق المانش. يركز هذا المثال على استجابة نظام الحلقة المغلقة بوجود الاضطراب.

**مثال 3-2: آلات حفر نفق المانش:**

بدأ حفر النفق بين فرنسا وبريطانيا في كانون الثاني عام 1987م. يبلغ طول النفق (23.5) ميل وعلى عمق (200) قدم تحت سطح البحر. تم الانتهاء من حفر النفق في عام 1992م لينقل يومياً (50) رحلة قطار. إن هذا النفق الفريد من نوعه أتاح المجال للانتقال من باريس إلى لندن وبالعكس خلال مدة مقدارها (3) ساعات.

إن الآلات العاملة على طرفي النفق, تحفر باتجاه الوسط, ولضمان الالتقاء بدقة في منتصف النفق تم استخدام نظام توجيه ليزري وذلك للمحافظة على الآلات المتجهة بدقة إلى المنتصف. يبين الشكل (3-14) نموذج نظام التحكم بالآلات الحفر حيث $Y(s)$ يمثل

الزاوية الحالية لاتجاه آلة الحفر و $R(s)$ تمثل الزاوية المطلوبة, أما إشارة الاضطراب $T_d(s)$ فتمثل تأثير الحمل على آلة الحفر.




**الشكل (3-14): المخطط الصندوقي لنموذج نظام التحكم بآلة الحفر المدروسة.**

إن الهدف من تصميم نظام التحكم هو اختيار الربح $(K)$ بحيث أن الاستجابة لإشارة الدخل الممثلة للزاوية المطلوبة تحقق المطلوب, مع المحافظة على أقل خطأ بسبب إشارة الاضطراب $T_d(s)$. إن إشارة الخرج الناتجة عن تطبيق إشارتي الدخل $R(s)$ و $T_d(s)$ هي:

$$Y(s)=\frac{K+11s}{s^2+12s+K}R(s)+\frac{1}{s^2+12s+K}T_d(s)....(51\text{-}3)$$

لإنقاص تأثير الاضطراب يجب أن نضع قيمة الربح $K$ أكبر من (10). عند اختيار $K$=100, وإسناد القيمة الصفرية لإشارة الاضطراب, وتطبيق إشارة خطوية واحدية على الدخل $r(t)$, نحصل على الاستجابة المبينة بالشكل (3-15). عندما نسند القيمة الصفرية للإشارة $r(t)$, ونطبق إشارة خطوية واحدية على الدخل $T_d(s)$, نحصل على الاستجابة المبينة بالشكل (3-16). من هذا الشكل يمكن ملاحظة أن تأثير الاضطراب صغير جداً.

إذا أسندنا القيمة التالية للربح $(K$=20) نحصل على الاستجابة $y(t)$ المبينة بالشكل (3-16) وذلك عند تطبيق دخل خطوي واحدي على $r(t)$ و $T_d(s)$.

من الشكل (3-16) نجد أن التجاوز الأعظمي لإشارة الخرج صغير (أصغر من 4%), وكذلك تم الوصول للحالة المستقرة خلال (2) ثانية, لذلك تُفضل القيمة $K$=20. يلخص الجدول (3-1) خصائص استجابة آلة الحفر وذلك من أجل $K$=20 و $K$=100.

| الجدول (3-1): استجابة آلة الحفر من أجل $K$=20 و $K$=100 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| قيمة الخطأ في الاستجابة الخطوية | قيمة الاستجابة في الحالة المستقرة عندما $T_d(s) = 1/s$ | زمن الاستقرار | التجاوز النسبي | الربح $K$ |
| 0 | 0.01 | 0.75sec | 22% | 100 |
| 0 | 0.05 | 1.0 sec | 4% | 20 |

إن خطأ الحالة المستقرة للنظام عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية ($R(s) = 1/s$), وبافتراض أن إشارة الاضطراب معدومة ($T_d(s)=0$):

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s.\frac{1}{1+\frac{K+11s}{s(s+1)}\left(\frac{1}{s}\right)} = 0 \quad ...(52-3)$$

إما قيمة الحالة المستقرة لـ $y(t)$ عند تطبيق إشارة اضطراب خطوية واحدية ($T_d(s)=1/s$), وبافتراض أن إشارة الدخل $r(t)$ معدومة, أي $r(t)=0$:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{st\to 0}\left[\frac{1}{s(s+12)+K}\right] = \frac{1}{K} \quad ...(53-3)$$

بالتالي, وبالاعتماد على المعادلة (53-3) نجد أن قيمة الحالة المستقرة لـ $y(t)$ تساوي (0.01) عندما $K$=100, وتساوي (0.05) عندما $K$=20.

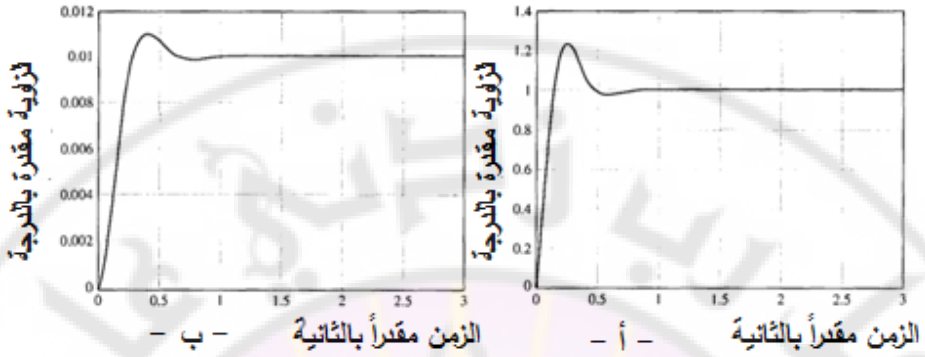
أخيراً لنتفحص حساسية النظام للتغيرات في $G$(s) وذلك باستخدام المعادلة (12-3):

$$S_G^T = \frac{s(s+1)}{s(s+12)+K} \quad ...(54-3)$$

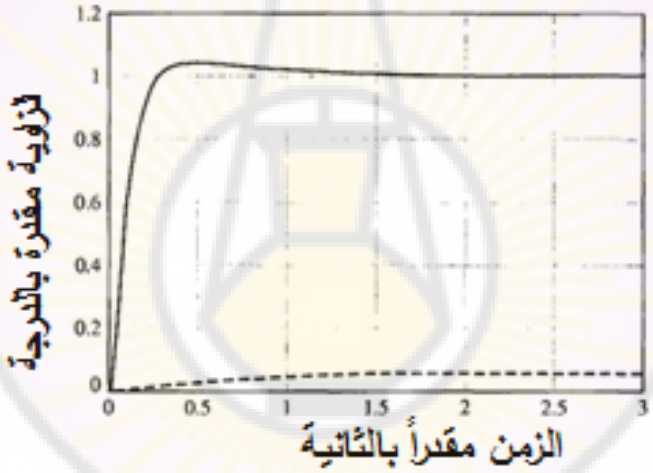
عند الترددات المنخفضة (أي $|s| < 1$), يمكن تقريب الحساسية للقيمة:

$$S_G^T \approx s/K \quad ...(55-3)$$

حيث $K \geq 20$. بالتالي فإن حساسية النظام تتناقص بزيادة الربح K. في حالتنا, سنختار $K$=20 وذلك لأسباب تصميمية (قيمة التجاوز أقل من $K$=100 وزمن الاستقرار أقل).




**الشكل (3-15): الاستجابة $y(t)$ إلى: أ – إشارة دخل خطوية على $r(t)$ , ب – إشارة دخل خطوية على $T_d(s)$, وذلك من أجل $K$=100.**




**الشكل (3-16): الاستجابة $y(t)$ وذلك عند تطبيق إشارات دخل خطوية على $r(t)$ (الخط المستمر) وعلى المدخل $T_d(s)$ (الخط المتقطع), وذلك من أجل $K$=20.**

**3-9 دراسة خصائص نظم التحكم باستخدام بيئة الماتلاب:**

**(Study control system characteristics using Matlab environment)**

في هذه الفقرة سندرس محاسن التغذية الخلفية عبر مثاليين توضيحيين. في المثال الأول سنقوم بإدخال التغذية الخلفية إلى نظام التحكم بالسرعة, المدروس في الفقرة (3-5), وسنسعى إلى إنقاص تأثير الاضطراب. سنعمل في المثال الثاني على إنقاص حساسية

النظام لتغير البارامترات, ضبط الاستجابة العابرة, وإنقاص أخطاء الحالة المستقرة (ناقشنا هذا المثال مسبقاً في الفقرة 3-8).

**مثال 3-4 نظام التحكم بالسرعة:**

يبين الشكل (3-6) المخطط الصندوقي لنظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة بسرعة محرك تيار مستمر, متحكم به بواسطة المتحرض. إن قيم البارامترات الظاهرة في هذا الشكل قد تم تلخيصها بالجدول (3-2).

**الجدول (3-2): بارامترات نظام التحكم بالسرعة**

| $R_a$ | $K_m$ | $J$ | $b$ | $K_b$ | $K_a$ | $K_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 Ω | 10 Nm/A | 2 Kg $m^2$ | 05 N m s | 0.1 V s | 54 | 1 V s |

يملك النظام دخلين هما: $V_a(s)$ و $T_d(s)$. بالاعتماد على مبدأ التراكم المطبق على النظم الخطية, يمكننا دراسة تأثير كل دخل على حدى. بالتالي لدراسة تأثير الاضطراب على النظام, نعتبر أن $V_a(s) = 0$ ونطبق إشارة على المدخل $T_d(s)$, كذلك لدراسة استجابة النظام على إشارة دخل مرجعية نعتبر أن $T_d(s) = 0$ ونطبق إشارة على المدخل $R(s)$.

يبين الشكل (3-8) نظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المغلقة وذلك باستخدام التاكومتر كمقياس للسرعة. نقول أن نظام التحكم بالسرعة يبدي مقاومة للاضطراب, وذلك إذا كان تأثير $T_d(s)$ على إشارة الخرج $\omega$ صغير.

لندرس, أولاً, نظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المفتوحة. نقوم بحساب تابع التحويل $\omega(s)/T_d(s)$, ونقوم أيضاً بحساب استجابة الخرج وذلك عند تطبيق إشارة خطوية على المدخل $T_d(s)$. يبين الشكل (3-17- أ) منحني الاستجابة الخطوية للدخل $T_d(s)$, كما يبين الشكل (3-17- ب) الكود البرمجي في بيئة الماتلاب والمستخدم لتحليل نظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المفتوحة. من العلاقة (3-26) نجد أن تابع تحويل الحلقة المفتوحة:

$$\frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{-1}{2s+1.5} = sys\_o$$

حيث $sys\_o$ يمثل تابع تحويل الحلقة المفتوحة في ملف الماتلاب ذو التوسعة ($.m$) والمبين بالشكل (3-17- ب).

طالما أن القيمة المرجوة هي $\omega(s) = 0$ (تذكر أن $V_a = 0$), بالتالي فإن خطأ الحالة المستقرة هو قيمة $\omega(s)$, والتي سنشير إليها بـ $\omega_o(s)$ وذلك للدلالة على الحلقة المفتوحة (open loop). إن خطأ الحالة المستقرة والمبين بالشكل (3-17- أ) هو تقريباً يساوي السرعة عند اللحظة $t = 7\ sec$. يمكننا الحصول على قيمة تقريبية لخطأ الحالة المستقرة وذلك بالنظر إلى آخر قيمة تم حسابها في الشعاع $y_0$ في الماتلاب, وذلك عند تنفيذنا البرنامج المكتوب. إن القيمة التقريبية للسرعة في الحالة المستقرة $\omega_o$ هي:

$$\omega_o(s) \approx \omega_o(7) \approx -0.66\ rad/s$$

يبين المنحني المبين بالشكل (3-17- أ) أن النظام وصل للحالة المستقرة.

**ملاحظة:** لنقوم بحساب السرعة $\omega_o$ باستخدام نظرية القيمة النهائية:

$$\omega_o(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-1}{2s+1.5} * \frac{1}{s} * s = \frac{-1}{1.5} = -0.66\ rad/\sec$$

هذه النتيجة تتوافق مع المنحني المبين بالشكل (3-17- أ).

بنفس الطريقة, لنقوم بدراسة نظام الحلقة المغلقة حيث سنقوم أولاً بحساب تابع التحويل $\omega(s)/T_d(s)$, ومن ثم سنحسب الاستجابة الزمنية $\omega(s)$ وذلك عند تطبيق إشارة خطوية على المدخل $T_d(s)$. إن استجابة الخرج والكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لحساب الاستجابة, مبينان بالشكل (3-18).

من المعادلة (3-30) نجد أن تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$\frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{-1}{2s+541.5} = \text{sys\_c}$$

إن خطأ الحالة المستقرة هو القيمة النهائية لـ $\omega(s)$, والمشار إليها بـ $\omega_c(s)$ وذلك للدلالة على الحلقة المغلقة (closed loop). يبين الشكل (3-18- أ) خطأ الحالة المستقرة. يمكننا الحصول على القيمة التقريبية لخطأ الحالة المستقرة وذلك بالنظر إلى آخر قيمة تم حسابها في الشعاع $y_c$ في الماتلاب, وذلك عند تنفيذنا الكود البرمجي المكتوب. إن القيمة التقريبية للسرعة, المحسوبة في البرنامج: $\omega_c(s) \approx \omega_c(0.02) \approx -0.002\ rad/s$. عموماً توقعنا في الفقرة (3-4) أن: $\omega_c(\infty)/\omega_o(\infty) < 0.02$. في هذه الدراسة نجد أن $\omega_c(\infty)/\omega_o(\infty) = 0.003$, وهذا يتوافق مع ما هو متوقع. إذاً حققنا تحسن ملحوظ في

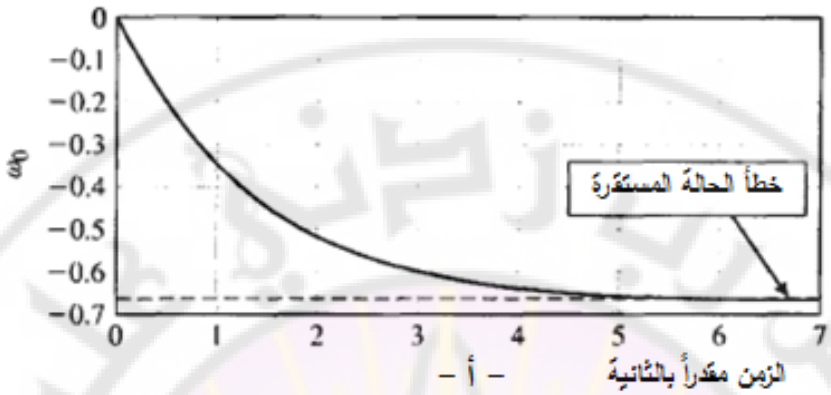
إلغاء الاضطرابات, حيث أصبح من الواضح أن إضافة التغذية الخلفية السالبة تُنقص تأثير الاضطراب على إشارة الخرج, بالتالي هذا المثال يبرهن خاصية مقاومة الاضطراب في نظم التغذية الخلفية.

**مثال 3-5 آلات حفر نفق المانش:**

يبين الشكل (3-14) المخطط الصندوقي الواصف لنظام التحكم بالالآت حفر نفق المانش. من المعادلة (3-51) نجد أن إشارة الخرج بدلالة $R(s)$ و $T_d(s)$:

$$Y(s) = \frac{K+11s}{s^2+12s+K} R(s) + \frac{1}{s^2+12s+K} T_d(s)$$

يبين الشكل (3-19) تأثير ربح المتحكم ($K$) على الاستجابة العابرة, والكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدمة لتوليد منحنيات الاستجابة. بمقارنة المنحنيات المبينة بالأشكال (3-19- أ) و (3-19- ب) نجد أن إنقاص $K$ ينقص التجاوز, كما أن إنقاص $K$ يزيد من زمن الاستقرار (بالرغم من أن هذه الحقيقة غير واضحة في الشكل (3-19), ولكن يمكننا التحقق من ذلك بالرجوع إلى البيانات المستخدمة لتوليد المنحنيات). إذاً هذا المثال يبرهن أن الاستجابة العابرة يمكن أن تتغير بواسطة ربح المتحكم ($K$). بتحليل النتائج نجد أنه من المفضل استخدام $K = 20$, لكن يجب مراعاة بعض النقاط الإضافية قبل إتخاذ القرار النهائي, حيث من المهم دراسة الاستجابة الخطوية للنظام تحت تأثير الاضطراب, والمبينة بالشكل (3-20). من هذا الشكل نجد أن زيادة قيمة $K$ ينقص قيمة $y(t)$ في الحالة المستقرة, وذلك تحت تأثير إشارة الاضطراب الخطوية. لاحظ أن قيمة $y(t)$ في الحالة المستقرة تساوي (0.05) وذلك من أجل $K = 20$, وتساوي (0.01) من أجل $K = 100$. يلخص الجدول (3-3) أخطاء الحالة المستقرة, التجاوز النسبي, وزمن الاستقرار, وذلك من أجل $K = 20$ و $K = 100$.




– أ –

```
%Speed Tachometer Example
%
Ra=1; Km=10; J=2; f=0.5; Kb=0.1;
num1=[1]; den1=[J,b]; sys1=tf(num1,den1);
num2=[Km*Kb/Ra]; den2=[1]; sys2=tf(num2,den2);
sys_o=feedback(sys1,sys2);
%
sys_o=-sys_o
%
[yo,T]=step(sys_o);
plot(T,yo)
title('Open-Loop Disturbance Step Response')
xlabel('Time (s)'),ylabel('\omega_o'), grid
%
yo(length(T))
```

تغيير إشارة تابع التحويل طالما أن الإضطراب ذو تأثير سالب في المخطط

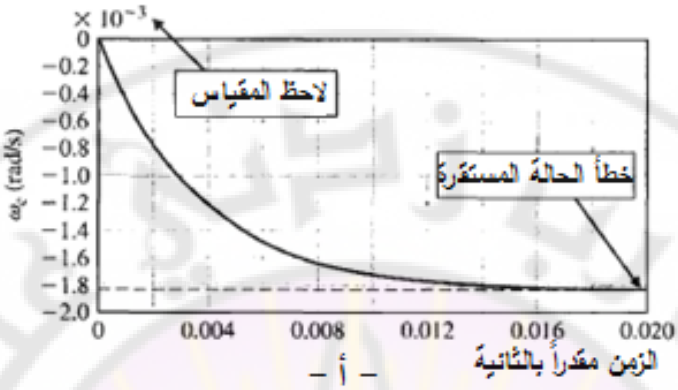
حساب الاستجابة النظام عند تطبيق إشارة اضطراب خطوية

خطأ الحالة المستقرة وهي القيمة الأخيرة للخرج

– ب –

**الشكل (3-17): أ – الاستجابة الخطوية للدخل $T_d(s)$ ب – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب والمكتوب بملف ذو توسعة (.m) لتحليل النظام المفتوح.**

Damascus University




– أ –

```
%Speed Tachometer Example
%
Ra=1;  Km=10; J=2; b=0.5; Kb=0.1; Ka=54; Kt=1;
num1=[1]; den1=[J,b]; sys1=tf(num1,den1);
num2=[Ka*Kt]; den2=[1]; sys2=tf(num2,den2);
num3=[Kb]; den3=[1]; sys3=tf(num3,den3);
num4=[Km/Ra]; den4=[1]; sys4=tf(num4,den4);
sysa=parallel(sys2,sys3);
sysb=series(sysa,sys4);
sys_c=feedback(sys1,sysb);
%
sys_c=-sys_c
%
[yc,T]=step(sys_c);
plot(T,yc)
title('Closed-Loop Disturbance Step Response')
xlabel('Time (s)'), ylabel('\omega_c (rad/s)'), grid
%
yc(length(T))
```

تبسيط المخطط الصندوقي

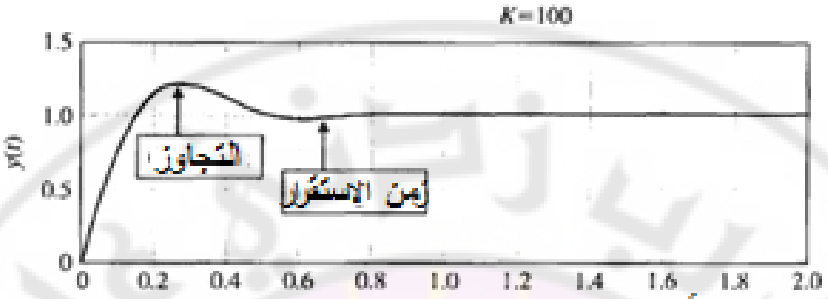
تغيير إشارة تابع التحويل طالما أن الإضطراب ذو تأثير سالب في المخطط

حساب الاستجابة النظام عند تطبيق إشارة اضطراب خطوية

خطأ الحالة المستقرة وهي القيمة الأخيرة للخرج

– ب –

**الشكل (3-18): تحليل نظام التحكم بالسرعة ذو الحلقة المغلقة: أ – الاستجابة الخطوية للدخل $T_d(s)$ ب – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لتحليل النظام المغلق.**




– أ –

– ب –

```
% Response to a Unit Step Input R(s)=1/s for K=20 and K=100
%
numg=[1]; deng=[1 1 0]; sysg=tf(numg,deng);
K1=100; K2=20;
num1=[11 K1]; num2=[11 K2]; den=[0 1];
sys1=tf(num1,den);
sys2=tf(num2,den);
%
sysa=series(sys1,sysg); sysb=series(sys2,sysg);
sysc=feedback(sysa,[1]); sysd=feedback(sysb,[1]);
%
t=[0:0.01:2.0];
[y1,t]=step(sysc,t); [y2,t]=step(sysd,t);
subplot(211),plot(t,y1), title('Step Response for K=100')
xlabel('Time (s)'),ylabel('y(t)'), grid
subplot(212),plot(t,y2), title('Step Response for K=20')
xlabel('Time (s)'),ylabel('y(t)'), grid
```

تابع تحويل الحلقة المغلقة

اختيار المجال الزمني

خلق منحنيات مع تسمية المحاور

– جـ –

**الشكل (3-19): الاستجابة الخطوية للنظام: أ – $K$ =100 ب – $K$=20 جـ – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لتوليد الاستجابة الخطوية.**

| الجدول (3-3): استجابة نظام التحكم لآلة حفر النفق, من أجل $K = 20$ و $K = 100$ | | |
|---|---|---|
| المعيار | $K = 20$ | $K = 100$ |
| التجاوز النسبي من أجل $R(s)=1/s$ | 4% | 22% |
| زمن الاستقرار | 1.0 sec | 1.0 sec |
| التجاوز النسبي من أجل $T_d(s) = 1/s$ | 5% | 1% |

إن قيم الحالة المستقرة يمكن حسابها باستخدام نظرية القيمة النهائية, وذلك عند تطبيق إشارة خطوية على المدخل $T_d(s)$, على النحو التالي:

$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s(s+12)+K}\right)*\frac{1}{s} = \frac{1}{K}$$

إذاً من أجل مقاومة الاضطراب فمن المفضل اعتماد $K$=100.

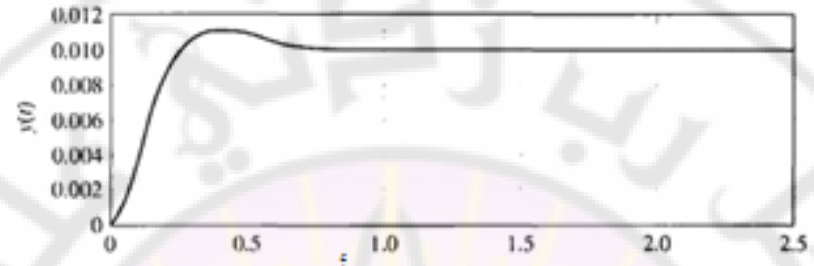
من الملاحظ في هذا التطبيق أن زيادة $K$ يؤدي إلى مقاومة أفضل للاضطرابات, ولكن من جهة اخرى فإن إنقاص $K$ يؤدي إلى معايير أداء أفضل (حيث أن التجاوز النسبي أقل). في هذه الحالة يرجع القرار في اعتماد القيمة المناسبة لـ $K$ إلى مصمم نظام التحكم حيث أن برامج التحليل مثل الماتلاب تساعد في عملية التصميم ولكنها لا تحل محل المهندس المصمم للنظام في إتخاذ القرار المناسب. النقطة الأخيرة الواجب تفحصها عن قرب هي حساسية النظام للتغيرات في بارامترات العملية المتحكم بها. تُعطى حساسية النظام بالعلاقة (3-54):

$$S_G^T = \frac{s(s+1)}{s(s+12)+K}$$

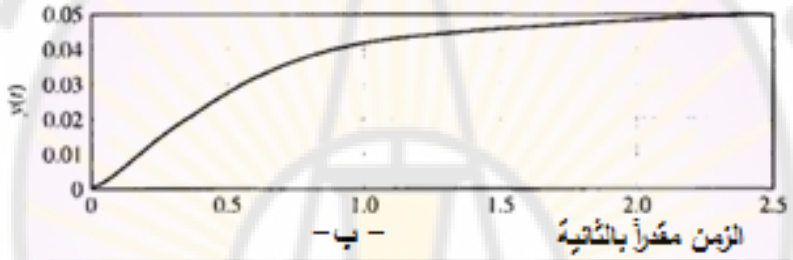
يمكننا استخدام هذه العلاقة لحساب قيم الحساسية وذلك عند قيم مختلفة لـ $s$ ومن ثم نرسم منحني حساسية النظام. عند الترددات المنخفضة يمكننا تقريب العلاقة السابقة لتصبح:

$$S_G^T \approx \frac{s}{K}$$

في هذه العلاقة فإن زيادة الربح ($K$) ينقص حساسية النظام. يبين الشكل (3-21) منحني حساسية النظام بدلالة $s = j\omega$, وذلك من أجل $K = 20$.




– أ –




– ب –

```
% Response to a Disturbance Td(s)=1/s for K=20 and K=100
%
numg=[1]; deng=[1 1 0];
sysg=tf(numg,deng);
K1=100; K2=20;
num1=[11 K1]; num2=[11 K2]; den=[0 1];
sys1=tf(num1,den); sys2=tf(num2,den);
%
sysa=feedback(sysg,sys1); sysa=minreal(sysa);   ← تابع تحويل الحلقة المغلقة
sysb=feedback(sysg,sys2); sysb=minreal(sysb);
%
t=[0:0.01:2.5];
[y1,t]=step(sysa,t); [y2,t]=step(sysb,t);
subplot(211),plot(t,y1), title('Disturbance Response for K=100')
xlabel('Time (s)'),ylabel('y(t)'), grid
subplot(212),plot(t,y2), title('Disturbance Response for K=20')
xlabel('Time (s)'),ylabel('y(t)'), grid   ← خلق منحنيات مع تسمية المحاور
```

– جـ –

**الشكل (3-20): الاستجابة الخطوية للنظام بتأثير إشارة الاضطراب: أ – $K$ =100 ب – $K$=20 جـ – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لتوليد الاستجابة الخطوية.**

**3-10 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

يجب على سواقة الأقراص المدمجة أن تضع الرأس القارئ في الموضع الصحيح, كما يتوجب عليها إنقاص تأثير تغير البارامترات, والاصطدامات والاهتزازات الخارجية. إن الاضطرابات التي يمكن أن تصيب القارئة هي الصدامات الخارجية, والتذبذبات في المحور الميكانيكي, أما البارامترات الخاصة بالسواقة يمكن أن تتغير نتيجة لتغير مكونات السواقة. في هذه الفقرة سندرس أداء سواقة الأقراص المدمجة وذلك عند حدوث اضطرابات وتغير في بارامترات السواقات. بالإضافة لذلك سنتفحص خطأ الحالة المستقرة وذلك عند تطبيق إشارة تحكم خطوية والاستجابة العابرة وذلك عند ضبط ربح المكبر $K_a$.

لندرس النظام المبين بالشكل (3-22). يستخدم هذا النظام المغلق متحكم عبارة عن مكبر عمليات بربح متغير ($K_a$).

بداية سنعمل على حساب خطأ الحالة المستقرة وذلك عندما $R(s) = 1/s$ فنجد:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} R(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}\right]\frac{1}{s} \quad .....(62-3)$$

بالتالي فإن خطأ الحالة المستقرة $e(\infty) = 0$ وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية. هذه الميزة قد حصلنا عليها بالرغم من التغيرات في بارمترات النظام.

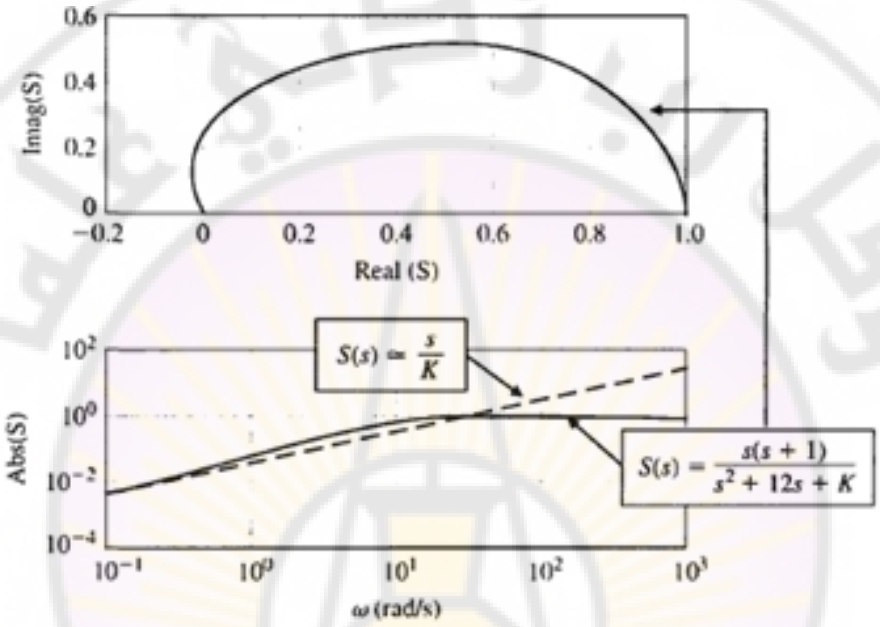
لنقوم الآن بتحديد خصائص الاستجابة العابرة وذلك عند قيمة محددة لـ $K_a$. يُعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة (عند $T_d(s) = 0$) بالعلاقة:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}$$

$$T(s) = \frac{5000 K_a}{s^3 + 1020 s^2 + 20000 s + 5000 K_a} \quad .....(63-3)$$

باستخدام الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المبين بالشكل (3-24-أ), نحصل على استجابة النظام وذلك من أجل $K_a = 10$ و $K_a = 80$ , والمبينة بالأشكال (3-24-ب).

من هذا الشكل (3-24) نلاحظ أن الاستجابة لإشارة الدخل الخطوية أسرع من أجل $K_a =$ 80, ولكنها في نفس الوقت تهتز بشكل غير مقبول.




– أ –

```
% System Sensitivity Plot
%
K=20; num=[1 1 0]; den=[1 12 K];
w=logspace(-1,3,200); s=w*i;
n=s.^2 + s; d= s.^2 + 12*s+K; S=n./d;
n2= s; d2=K; S2=n2./d2;
%
subplot(211), plot(real(S),imag(S))
title('System Sensitivity to Plant Variations')
xlabel('Real(S)'), ylabel('Imag(S)'), grid
subplot(212), loglog(w,abs(S),w,abs(S2))
xlabel('\omega(rad/s)'), ylabel('Abs(S)'), grid
```

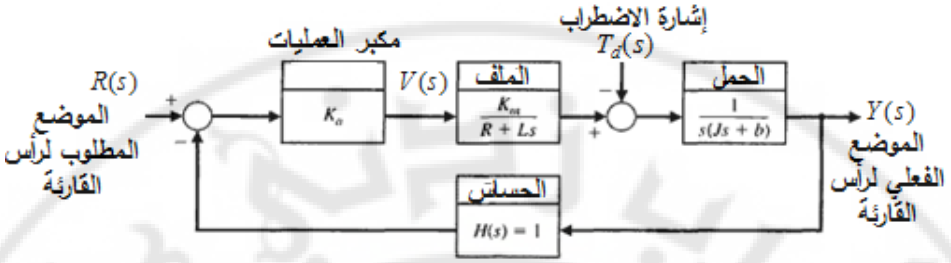
إدخال شعاع التردد بهدف حساب الحساسية

حساسية النظام

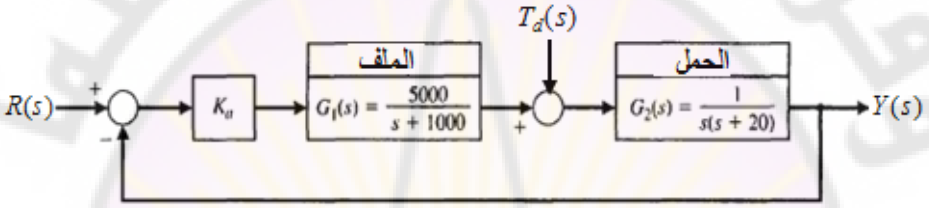
الحساسية التقريبية

– ب –

**الشكل (3-21): أ – حساسية النظام لتغيرات $s = j\omega$ ب – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لحساب الحساسية.**




**الشكل (3-22): نظام تحكم برأس القارئة في سواقة الأقراص المدمجة.**

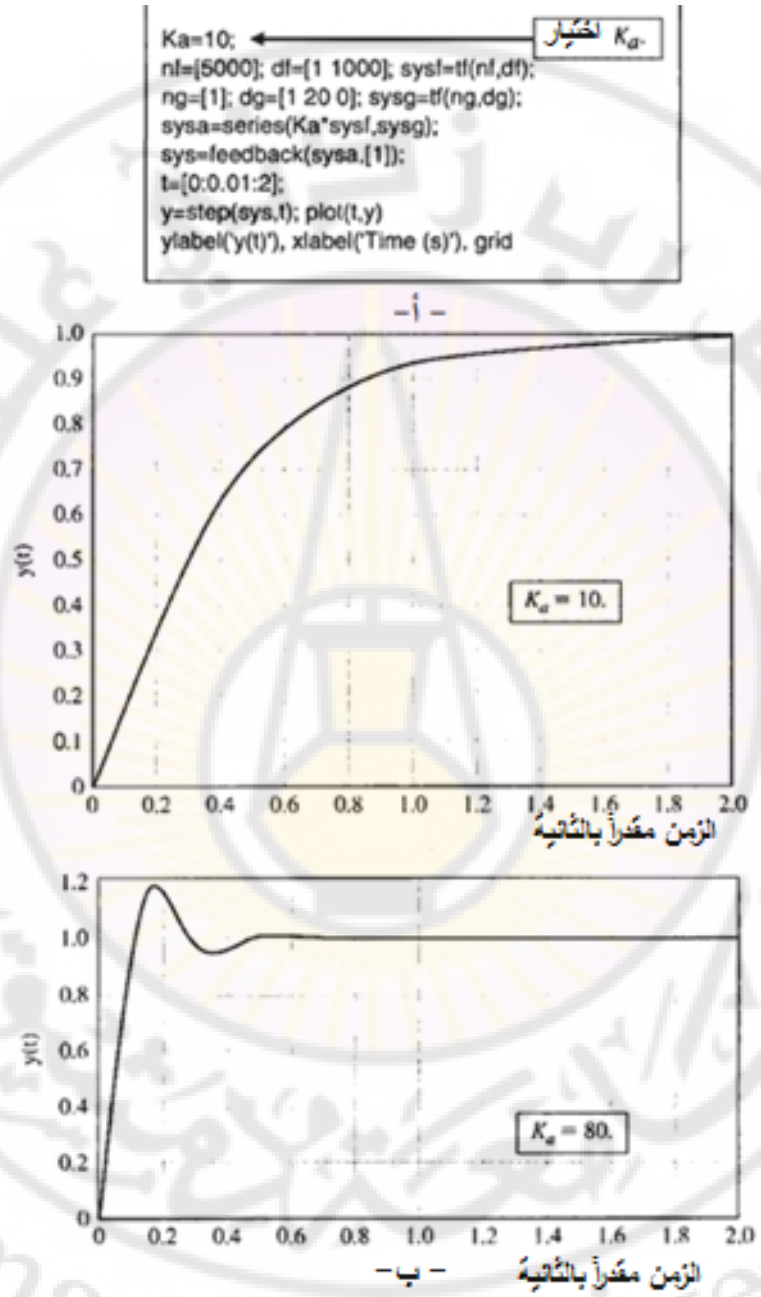



**الشكل (3-23): نظام التحكم وذلك باستخدام قيم البارمترات المعطاة بالجدول 2-3.**

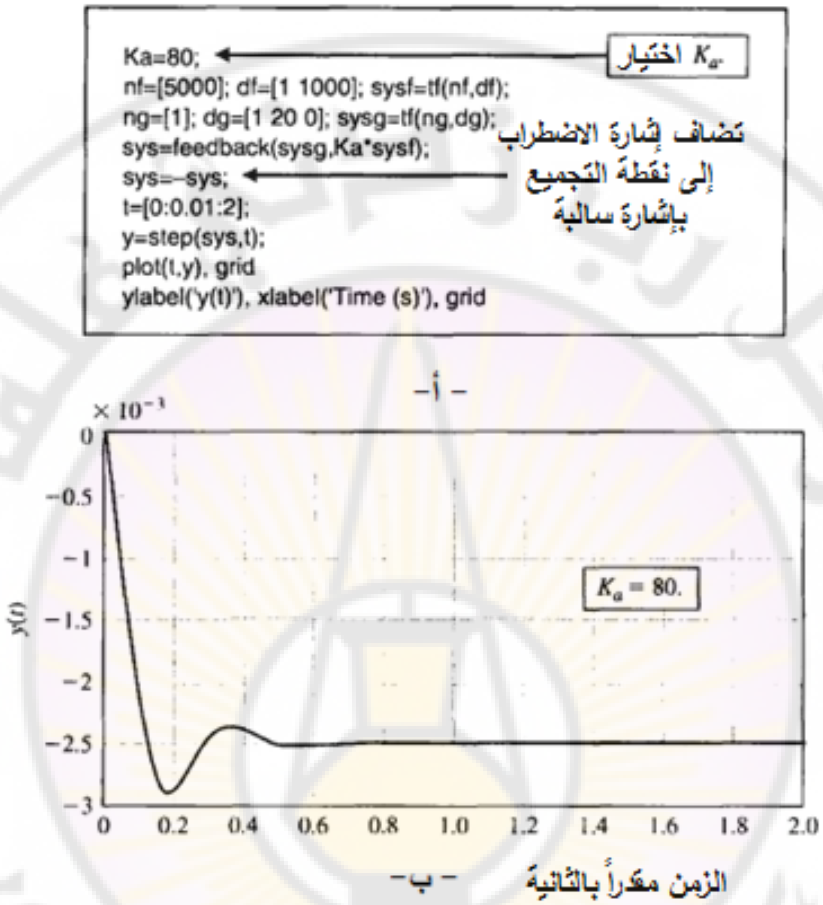
لندرس الآن تأثير الاضطراب $T_d(s) = 1/s$ وذلك عندما $R(s) = 0$. بالطبع نرغب إنقاص تأثير الاضطراب إلى أقل قدر ممكن. باستخدام النظام المبين بالشكل (3-23) نحصل على استجابة النظام وذلك عند تطبيق إشارة خطوية على مدخل الاضطراب ومن أجل $K_a = 80$:

$$Y(s) = \frac{G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} T_d(s) \quad ..(64-3)$$

بتطبيق الكود البرمجي المبين بالشكل (3-25-أ) نحصل على الاستجابة الخطوية للاضطراب المبينة بالشكل (3-25-ب), وذلك من أجل $K_a = 80$. لكي ننقص بشكل أكبر تأثير الاضطراب نحتاج إلى رفع $K_a$ أكثر من 80, ولكن الاستجابة لإشارة التحكم الخطوية ستكون مهتزة بشكل غير مقبول. في الفصل القادم سنحاول تحديد أفضل قيمة لـ $K_a$ بحيث تتحقق متطلباتنا التصميمية والتي هي استجابة سريعة وغير مهتزة.




**الشكل (3-24): استجابة نظام الحلقة المغلقة: أ – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب ب – الاستجابة الخطوية وذلك من أجل $K_a = 10$ و $K_a = 80$.**




**الشكل (3-25): استجابة الخطوية للاضطراب: أ- الكود البرمجي في بيئة الماتلاب**
**ب- الاستجابة الخطوية للاضطراب وذلك من أجل $K_a$ = 80.**

**11-3 خاتمة:**

تتمثل الأسباب الرئيسية لاستخدام التغذية الخلفية بما يلي:

1- تخفيض حساسية النظام لتغير بارامتراته.

2- تحسين مقاومة النظام للاضطرابات.

3- تحسين مقاومة النظام لإشارات الضجيج الناتجة عن القياس.

4- تخفيض أخطاء الحالة المستقرة للنظام.

5- سهولة التحكم وضبط الاستجابة العابرة.

يلعب ربح الحلقة $L(s) = G_c(s)G(s)$ دوراً أساسياً في تحليل نظم التحكمز باستخدام ربح الحلقة نستطيع تحديد توابع الحساسية والحساسية المكملة على النحو التالي:

$$C(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}, \qquad S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

كما تعطى إشارة الخطأ بالعلاقة: $E(s) = S(s)R(s) - S(s)G(s)T_d(s) + C(s)N(s)$ .

لكي نصغر قيمة $E(s)$ يجب أن نصغر كلاً من $S(s)$ و $C(s)$ . بما أن كلاُ من تابعي الحساسية والحساسية المكملة تحققان العلاقة: $S(s) + C(s) = 1$ , فيتوجب على مصمم نظام التحكم مواجهة قرار مهم يقوم على الملائمة بين مقاومة الاضطراب وإنقاص حساسية النظام لتغير البارامترات من جهة, وبين إلغاء تأثير إشارات الضجيج الناتجة عن القياسات من جهة أخرى.

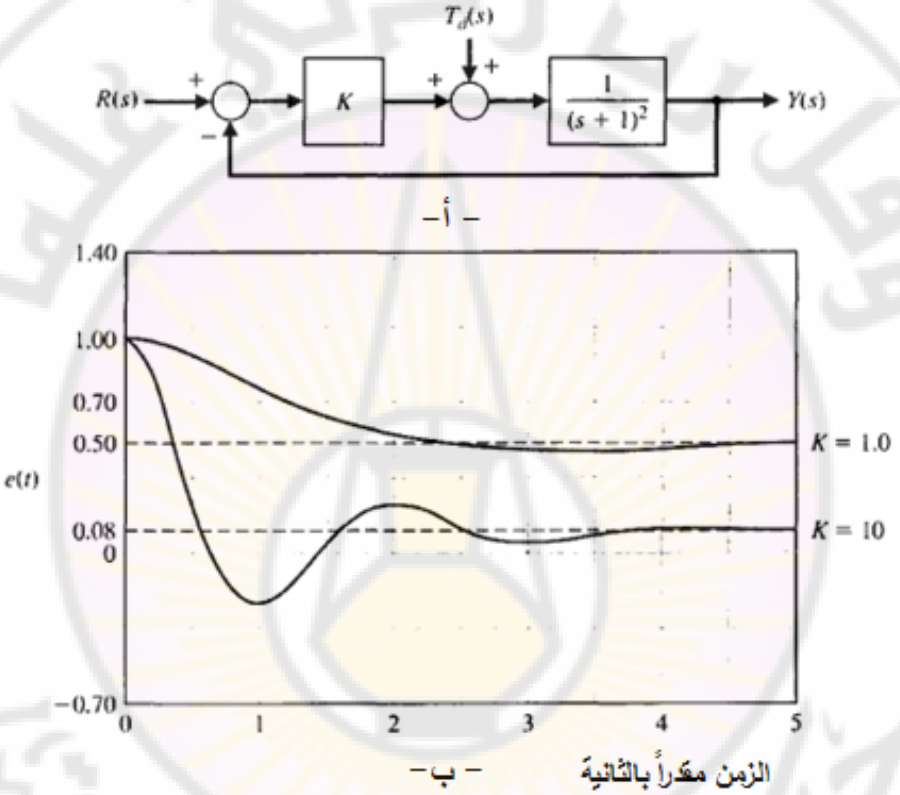
يمكن شرح فوائد التغذية الخلفية بالاعتماد على النظام المبين بالشكل (3-26). في هذا النظام يمكننا تغيير قيم الربح $K$. يلخص الجدول (3-4) نتائج تشغيل النظام ضمن حلقة مفتوحة (بعد فصل مسار التغذية الخلفية), وضمن حلقة مغلقة. من الواضح أن زمن الصعود وحساسية النظام وأخطاء الحالة المستقرة قد تناقصت مع زيادة الربح.

**الجدول (3-4): استجابة النظام المبين بالشكل 3-31-أ**

| خاصية الأداء | الحلقة المفتوحة | الحلقة المغلقة | | |
|---|---|---|---|---|
| | $K = 1$ | $K = 1$ | $K = 8$ | $K = 10$ |
| زمن الصعود (بالثانية | 3.35 | 1.52 | 0.45 | 0.38 |
| التجاوز النسبي (%) | 0 | 4.31 | 33 | 40 |
| القيمة النهائية لـ y(t) بسبب تطبيق إشارة اضطراب واحدية. | 1.0 | 0.50 | 0.11 | 0.09 |
| خطأ الحالة المستقرة النسبي وذلك عند تطبيق إشارة دخل واحدية. | 0 | 50% | 11% | 9% |
| التغير النسبي في خطأ الحالة المستقرة بسبب تناقص قيمة K بمقدار 10%. | 10% | 5.3% | 1.2% | 0.9% |

يبين الشكل (3-26-ب) أن القيمة الأكبر للربح تنقص بفعالية أكبر تأثير الاضطراب.

مما سبق نجد أن نظم التحكم ذات الحلقة المغلقة تبدي العديد من الخصائص المفيدة لذلك ليس من المفاجئ أن نجد هذه النظم في العديد من التطبيقات الصناعية.




**الشكل (3-26): أ – نظام تحكم ذو تغذية خلفية ب – الاستجابة الخطوية الواحدية لإشارة الخطأ عند تطبيق إشارة اضطراب واحدية وعندما يكون $R(s) = 0$.**

# الفصل الرابع: الأداء الزمني لنظم التحكم ذات التغذية الخلفية

# Chapter 4: The Time Performance of Feedback Control Systems

Damascus University

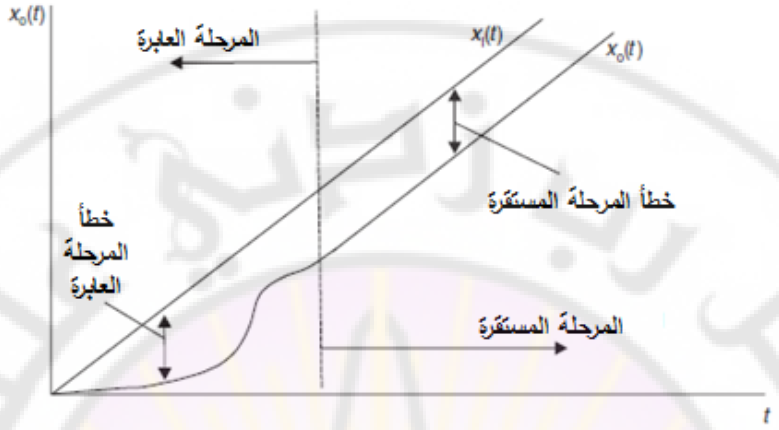
وقل رب زدني علما
Damascus University

تتمثل أهم الفوائد المرجوة من تصميم نظم التحكم المغلقة (أو ذات التغذية الخلفية) بالقدرة على ضبط الاستجابة العابرة والمستقرة للنظام. سنُعرف في هذا الفصل محددات الأداء الزمني, كما سنُعرف إشارات الدخل القياسية لاختبار استجابة نظام التحكم. سنناقش أيضاُ العلاقة بين أداء النظام ومواقع أقطاب وأصفار تابع التحويل. كما سنُعرف العلاقات بين محددات الأداء والتردد الطبيعي ومعامل التخامد لنظم الدرجة الثانية. سنعتمد أيضاُ على مفهوم الأقطاب المسيطرة (أو ذات التأثير الأكبر على سلوك النظام) لتقدير سلوك النظم ذات الدرجات العليا (أكبر من 2), عن طريق تشبيهها بالنظم من الدرجة الثانية. سندرس أيضاُ مفهوم دليل الأداء (Performance index), حيث سندرس مجموعة من أشهر دلائل الأداء الكمّية (Quantitative performance indices), والتي تمثل بدقة وبشكل كمّي أداء نظام التحكم. سنختم الفصل بتحليل الأداء للمثال التصميمي قارئة الأقراص المدمجة.

**1-4 مقدمة:**

تُعرف استجابة نظام (أو الأداء الزمني لنظام) بأنها الطريقة التي يستجيب النظام الديناميكي لدخل ما, والتي تكون عادة تابعة للزمن. يتم التقييم النظري لهذه الاستجابة في المجال الزمني, لذلك سنشير لهذا التقييم بالتحليل الزمني (أو التحليل في المجال الزمني). من الممكن حساب الاستجابة الزمنية لنظام إذا كانت المعلومات التالية متوفرة: طبيعة الدخل حيث يتم التعبير عن إشارة الدخل كتابع للزمن والنموذج الرياضي للنظام. تملك الاستجابة الزمنية لنظام مركبتين:

- الاستجابة الزمنية العابرة (Transient Time Response): هذه المركبة تتخامد في النظم المستقرة, وتسعى إلى الصفر عادة بشكل أسي مع التقدم في الزمن. تتبع هذه الاستجابة فقط لديناميكية النظام وهي مستقلة عن مطال إشارة الدخل.
- الاستجابة في الحالة المستقرة (Steady-state response): هي استجابة النظام بعد تخامد الاستجابة العابرة. تتبع هذه الاستجابة لديناميكية النظام ومطال إشارة الدخل.

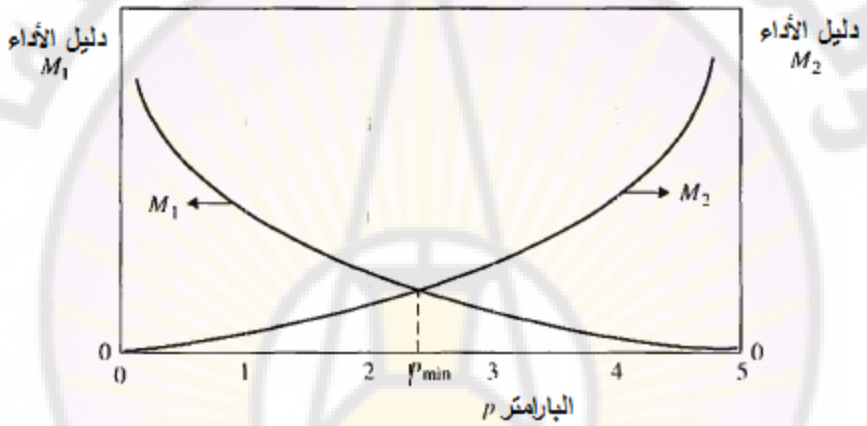



**الشكل (4-1): الاستجابة الزمنية في الحالة العابرة ة والمستقرة.**

إن الاستجابة الزمنية الكلية للنظام هي مجموع الاستجابتين العابرة والمستقرة. يبين الشكل (4-1) الاستجابات العابرة والمستقرة لنظام. يُدعى الفرق بين إشارة الدخل $x_i(t)$ (في الشكل (4-1) $x_i(t)$ عبارة عن إشارة صاعدة) واستجابة النظام $x_o(t)$, بخطأ الحالة العابرة, وذلك خلال الفترة العابرة, و بخطأ الحالة المستقرة وذلك خلال الفترة المستقرة. إن أهم الأهداف المرجوة عند تصميم نظام التحكم هو تصغير هذه الأخطاء, قدر الإمكان.

من أجل تحليل وتصميم نظام التحكم يتوجب علينا تحديد وقياس أداء هذا النظام, وبالمقارنة مع الأداء المطلوب للنظام يمكننا ضبط بارامترات هذا النظام بحيث نحصل على الاستجابة المطلوبة للنظام. تشمل محددات التصميم (أو Design Specifications) لنظم التحكم عادة العديد من دلائل الاستجابة الزمنية, وذلك عند تطبيق إشارة دخل تحكمية محددة, بالإضافة إلى دقة الحالة المستقرة المطلوبة. خلال مرحلة التصميم إذا واجهت المصمم مسألة تحقيق محددي أداء متناقضين, غالباً ما يقوم المصمم في هذه الحالة إلى الملائمة بين هذين المحددين المتناقضين. لنأخذ على سبيل المثال الحالة المبينة بالشكل (4-2). في هذا الشكل يتوجب علينا اختيار قيمة البارامتر ($p$) بحيث نحصل على أكبر قيمة لدلائل الأداء ($M_1$) و ($M_2$). للحصول على قيمة كبيرة لـ $M_1$, يتوجب علينا اختيار قيمة صغيرة جداً للبارامتر $p$, بينما على العكس يتوجب علينا اختيار

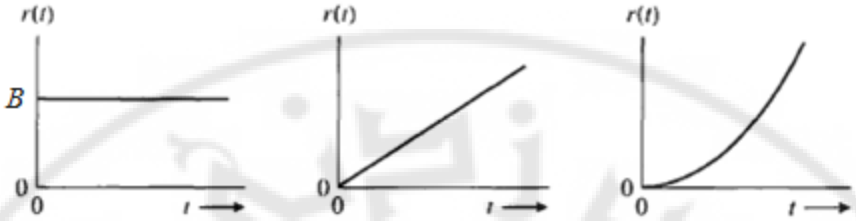
قيمة كبيرة جداً لـ $p$ وذلك للحصول على قيمة كبيرة لـ $M_2$. في هذه الحالة لابد من اللجوء إلى نوع من الملائمة حيث نختار القيمة $P_{min}$ والتي تقع عند تقاطع $M_1$ و $M_2$ لأنها تحقق أفضل ملائمة بين قيم $M_1$ و $M_2$. تشير دلائل الأداء, والتي تقيس أداء النظام, إلى نوعية النظام المراد تصميمه. بمعنى آخر تساعدنا دلائل الأداء على الإجابة على السؤال التالي: كيف ينجز النظام المهمة التي صمم من أجلها؟




**الشكل (2-4): دلائل الأداء $M_1$ و $M_2$ بدلالة البارامتر $p$.**

**2-4 توابع الدخل المستخدمة لدراسة الاستجابة الزمنية لنظام التحكم:**

سنقوم في هذه الفقرة بتقديم إشارات الدخل الشائعة الاستخدام عند دراسة الاستجابة الزمنية لنظام وسنقوم بتبيان الهدف من تطبيق كل إشارة من هذه الإشارات. في الحقيقة نقوم بدراسة خصائص النظام باستخدام الإشارات القياسية وذلك بسبب العلاقة الوثيقة والتشابه بين استجابة النظام لإشارات الدخل القياسية واستجابته ضمن ظروف التشغيل الطبيعية. إن إشارات الدخل القياسية الشائعة الاستخدام هي الإشارة الخطوية ( Step signal), الإشارة النبضية (Impulse signal), الإشارة الصاعدة (Ramp Signal), والإشارة التي تأخذ شكل قطع مكافئ (Parabolic signal), والمبينة بالشكل (4-3). يمكن أن نستخدم مصطلح التابع بدلاً من الإشارة فنقول تابع الدخل القياسي.




**الشكل (4-3): إشارات الدخل القياسية: الخطوية, الصاعدة والقطع المكافئ.**

**4-2-1 التابع النبضي (The impulse function):**

التابع النبضي عبارة عن نبضة ذات عرض $\Delta t \to 0$. تتمثل قوة التابع النبضي بمساحته, والمعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$A = height * t \ldots\ldots\ldots\ldots (1-4)$$

إن تحويل لابلاس للتابع النبضي يساوي إلى مساحته. يسمى التابع النبضي ذو المساحة الواحدية, بالتابع النبضي الواحدي.

يطبق التابع النبضي الواحدي (أو الإشارة النبضية الواحدية) على دخل النظام المدروس وذلك عندما نريد معرفة استجابة النظام عند تطبيق دخل ذو استطاعة كبيرة جداً, وذلك لفترة صغيرة جداً. تسمى استجابة النظام في هذه الحالة بالاستجابة النبضية. سنقوم في الفقرات التالية بتحليل الاستجابة النبضية للنظم من الدرجة الأولى والثانية.

**4-2-2 التابع الخطوي (The step function):**

يوصف التابع الخطوي بالعلاقة التالية:

$$x_i(t) = B \ldots\ldots\ldots\ldots (2-4)$$

يعطى تحويل لابلاس لهذا التابع بالعلاقة:

$$X_i(s) = B/s \ldots\ldots\ldots\ldots (3-4)$$

يشار إلى التابع الخطوي الواحدي ($B = 1$) عند تطبيقه على دخل نظام بالدخل ذو الوضعية الثابتة. يطبق التابع الخطوي الواحدي (أو الإشارة الخطوية الواحدية) على دخل النظام المدروس وذلك عندما نريد معرفة استجابة النظام عند انتقال إشارة الدخل من وضعية إلى وضعية أخرى. تسمى استجابة النظام في هذه الحالة بالاستجابة الخطوية.

**4-2-3 التابع الصاعد (The Ramp function):**

يعطى التابع الصاعد وتحويل لابلاس لهذا التابع بالعلاقات التالية:

$$x_i(t) = Q*t, \quad t > 0$$

$$X_i(s) = \frac{Q}{s^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4-4)$$

يشار إلى التابع الصاعد الواحدي ($Q = 1$) عند تطبيقه على دخل النظام بالدخل ذو السرعة الثابتة. يُطبق هذا التابع على دخل النظام المدروس وذلك عندما نريد معرفة استجابة النظام عند تطبيق دخل متغير بسرعة ثابتة, ولمعرفة فيما إذا كان الخرج سيستجيب لهذا الدخل المتغير وسيتغير بنفس السرعة.

**4-2-4 التابع ذو القطع المكافئ (The parabolic function):**

يوصف التابع ذو القطع المكافئ وتحويل لابلاس لهذا التابع بالعلاقات التالية:

$$x_i(t) = K*t^2, \quad t > 0$$

$$X_i(s) = \frac{2K}{s^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (5-4)$$

يشار إلى التابع ذو القطع المكافئ الواحدي ($K = 1$) عند تطبيقه على دخل النظام بالدخل ذو التسارع الثابت. يُطبق هذا التابع على دخل النظام المدروس وذلك عندما نريد معرفة استجابة النظام عند تطبيق دخل متسارع, ولمعرفة هل سيتسارع الخرج أيضاً بحيث يكون خطأ الحالة المستقرة أقل ما يمكن أم لن يستجيب بالقدر الكافي بحيث يتزايد خطأ الحالة المستقرة ويخرج النظام عن الاستقرار.

**4-3 دراسة الاستجابة الزمنية لنظم الدرجة الأولى:**

سنقوم بهذه الفقرة بدراسة الاستجابة الزمنية لنظم من الدرجة الأولى والمعطاة بتابع التحويل ذو الشكل العام:

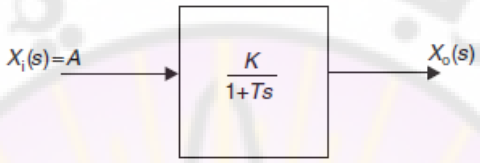
$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

وذلك عند تطبيق إشارات الدخل التالية: الإشارة النبضية, الإشارة الخطوية, والإشارة الصاعدة.

### 4-3-1 الاستجابة الزمنية لنظم الدرجة الأولى عند تطبيق إشارة دخل نبضية:

سندرس الاستجابة النبضية لنظم الدرجة الأولى من خلال المثال التالي:

**مثال 4-1:** أوجد العلاقة المعبرة عن استجابة النظام من الدرجة الأولى وذلك عند تطبيق على دخله تابع نبضي ذو مساحة A.




**الشكل (4-4): التمثيل الصندوقي لنظام من الدرجة الأولى وذلك عند تطبيق إشارة دخل نبضية.**

من الشكل (4-4) نجد:

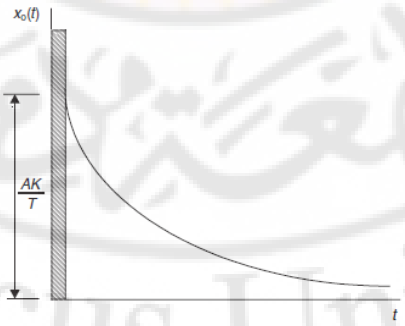
$$X_o(s)=\frac{AK}{1+Ts}=\frac{AK/T}{s+\frac{1}{T}} \quad .....(6-4)$$

$$X_o(s)=\frac{AK}{T}\left(\frac{1}{s+a}\right) \quad .....(7-4)$$

للحصول على استجابة النظام نطبق تحويل لابلاس العكسي على المعادلة (4-7) فنجد:

$$x_o(t)=\frac{AK}{T}e^{-at}=\frac{AK}{T}e^{-t/T} \quad .....(8-4)$$

يبين الشكل (4-5) التمثيل البياني للمعادلة (4-8), والمعبرة عن الاستجابة الزمنية لنظام من الدرجة الأولى وذلك عند تطبيق دخل نبضي بمطال (A).



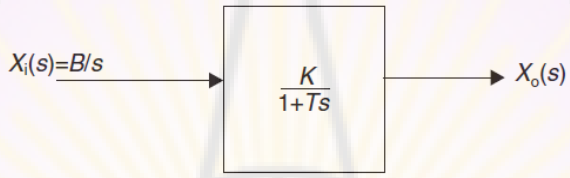

**الشكل (4-5): الاستجابة النبضية لنظام من الدرجة الأولى.**

نلاحظ من هذه الاستجابة النبضية لنظام من الدرجة الأولى أن خرج النظام يسعى للصفر وذلك عندما $t \to \infty$, وأن مطال إشارة الخرج عند اللحظة $t = 0$ تتناسب طردياً مع ثابت ربح النظام وعكسياً مع ثابت زمنه.

**2-3-4 الاستجابة الزمنية لنظم الدرجة الأولى عند تطبيق إشارة دخل خطوية:**

سندرس الاستجابة الخطوية لنظم الدرجة الأولى من خلال المثال التالي:

**مثال 4-2:** أوجد العلاقة المعبرة عن استجابة النظام من الدرجة الأولى وذلك عند تطبيق على دخله تابع خطوي ذو ارتفاع $B$.




**الشكل (4-6): التمثيل الصندوقي لنظام من الدرجة الأولى وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية.**

من الشكل (4-6) نجد:

$$X_o(s) = \frac{BK}{s(1+Ts)} = BK\left(\frac{1/T}{s(s+1/T)}\right).....(9-4)$$

للحصول على استجابة النظام عند تطبيق دخل خطوي, نطبق تحويل لابلاس العكسي على المعادلة (4-9) فنجد:

$$x_o(t) = BK\left(1-e^{-t/T}\right).....(10-4)$$

إذا كان لدينا $B = 1$ (أي طبقنا إشارة دخل خطوية واحدية), و $K = 1$ (الربح الساكن للنظام واحدي) نجد:

$$x_o(t) = \left(1-e^{-t/T}\right).....(11-4)$$

عند إسناد قيم مختلفة للنسبة $(t/T)$, نحصل على الجدول (4-1):

**الجدول (4-1): الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الأولى**

| $t/T$ | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_o(t)$ | 0 | 0.221 | 0.393 | 0.527 | 0.632 | 0.77 | 0.865 | 0.92 | 0.95 | 0.98 |

**4-3-3 التحديد التجريبي لثابت زمن نظام من الدرجة الأولى:**

الطريقة الأولى: من الجدول (4-1) نجد أن ثابت زمن النظام هو الزمن اللازم للنظام حتى يصل إلى 63.2% من قيمته النهائية.

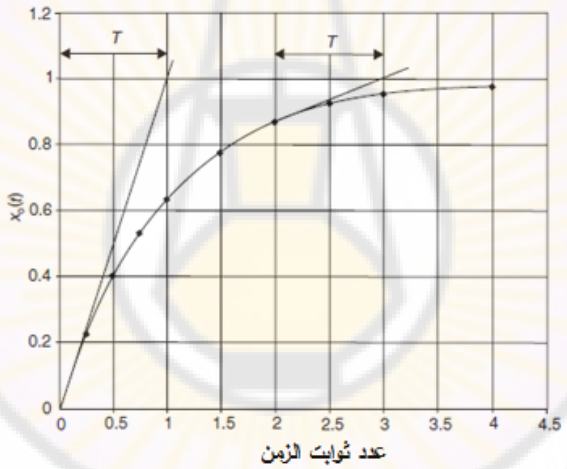
الطريقة الثانية: يتم تحديد ثابت زمن النظام من تقاطع المماس لمنحني الاستجابة الخطوية عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم الممثل للقيمة النهائية (الشكل 4-7), وبالتالي:

$$\frac{dx_o(t)}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad .....(12-4)$$

من أجل $t = 0$ نجد:

$$\frac{dx_o(0)}{dt} = \frac{1}{T}$$

يمكن تطبيق هذه الطريقة على أي مماس للمنحني المبين بالشكل (4-7):




**الشكل (4-7): الاستجابة الخطوية الواحدية لنظام من الدرجة الأولى.**

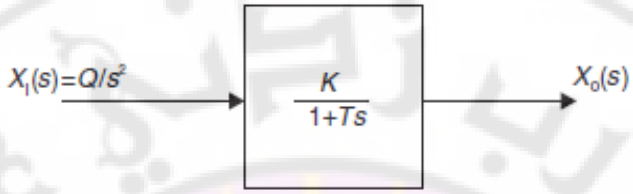
**4-3-4 استجابة نظام من الدرجة الأولى عند تطبيق إشارة دخل صاعدة:**

ستتم دراسة استجابة نظام من الدرجة الأولى عند تطبيق إشارة دخل صاعدة من خلال المثال التالي:

**مثال 4-3:** أوجد العلاقة المعبرة عن استجابة النظام من الدرجة الأولى وذلك عند تطبيق على دخله تابع صاعد ذو ميل $Q$.

من الشكل (4-8) نجد:

$$X_o(s)=\frac{QK}{s^2(1+Ts)}=QK\left(\frac{1/T}{s^2(s+1/T)}\right)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1/T}\text{.....}(13\text{-}4)$$




**الشكل (4-8): نظام من الدرجة الأولى عند تطبيق إشارة دخل صاعدة.**

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على المعادلة (4-13) نجد:

$$x_o(t)=QK\left(t-T+Te^{-t/T}\right)\text{.....}(14\text{-}4)$$

إذا كان $Q = 1$ (أي طبقنا التابع الصاعد الواحدي على دخل النظام), و $K = 1$ نجد:

$$x_o(t)=t-T+Te^{-t/T}\text{.....}(15-4)$$

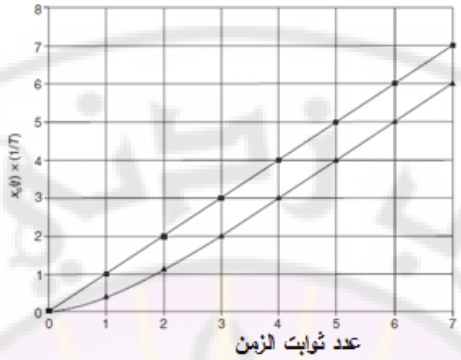
إن البند الأول في المعادلة (4-15) يمثل إشارة الدخل, أما البند الثاني فيمثل خطأ الحالة المستقرة, أما البند الثالث فيمثل خطأ الحالة العابرة. إذا أسندنا قيم مختلفة للنسبة $(t/T)$ نحصل على الجدول (4-2), والشكل (4-9). من هذا الشكل نجد أن المسافة بين الدخل والخرج وعلى طول محور الزمن في الحالة المستقرة يساوي إلى ثابت زمن النظام $(T)$.

**الجدول (4-2): استجابة نظام من الدرجة الأولى عند تطبيق تابع صاعد واحدي**

| $t/T$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i(t)/T$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $x_o(t)/T$ | 0 | 0.368 | 1.135 | 2.05 | 3.018 | 4.067 | 5 | 6 |

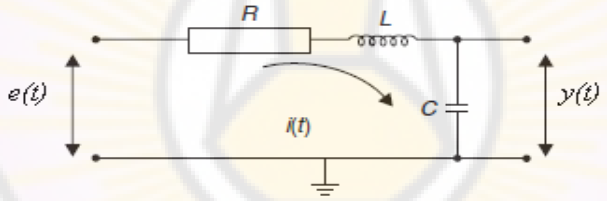
### 4-4 الخصائص الزمنية العامة للاستجابة الخطوية للنظم:

لقد درسنا في الفصل الأول خصائص نظم التحكم وهي: الاستقرار, الدقة, سرعة الاستجابة, الحساسية والتخامد. يمكن تقدير خصائص نظم التحكم وذلك عن طريق الخصائص الزمنية للاستجابة الخطوية للنظم والمتمثلة بالتجاوز, زمن القيمة العظمى الأولى, زمن الصعود, وزمن الوصول إلى $(x\%)$, وخطأ الحالة المستقرة. إن هذه المعايير تعطي فكرة دقيقة عن خصائص نظم التحكم.

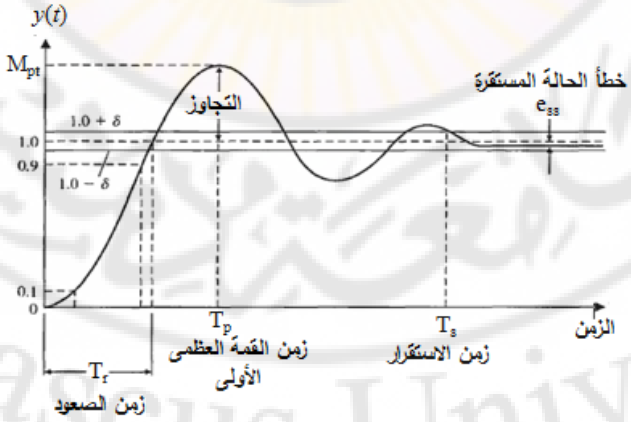



**الشكل (4-9): استجابة نظام من الدرجة الأولى عند تطبيق إشارة دخل صاعدة واحدية.**

لنأخذ المثال المبين بالشكل (4-10) والمؤلف من دارة *RLC* مغذاة بالتوتر $e(t)$. إن هذا المثال سيسمح لنا بتقديم تعريف واضح لكلاً من التجاوز, وزمن القيمة العظمى الأولى, زمن الصعود, وزمن الوصول إلى $x\%$, وخطأ الحالة المستقرة. عند تطبيق إشارة دخل خطوية فإننا نجد أن شكل التوتر على طرفي المكثف يشبه تلك المبينة بالشكل (4-11).




**الشكل (4-10): دارة *RLC* المغذاة بالتوتر $e(t)$.**




**الشكل (4-11): إشارة خرج النظام (إشارة التوتر على طرفي المكثف).**

1- **التجاوز (overshoot):** لنفرض أن $M_{pt}$: القيمة العظمى لـ $y(t)$ (القيمة المأخوذة عند القمة الأولى), $y_{ss}$ : القيمة النهائية لـ $y(t)$ (القيمة التي تصل إليها $y(t)$ عند بلوغ الحالة المستقرة).

نعرف التجاوز النسبي (percent overshoot), وكما هو مبين بالشكل (4-11) على النحو التالي:

$$Overshoot = M_{pt} - y_{ss} \quad .....(16-4)$$

وذلك إذا كان: $M_{pt} > y_{ss}$ .

نُعرف التجاوز النسبي كنسبة مئوية من القيمة النهائية:

$$Percent\ Overshoot = P.O.\% = \left( \frac{M_{pt} - y_{ss}}{y_{ss}} * 100 \right)\% \quad .....(17-4)$$

يشكل التجاوز مؤشر مهم على استقرار النظام, كما يشكل في معظم الأحيان إحدى المعايير المطلوب تحقيقها وذلك عند تصميم المتحكم (Controller).

2- **زمن القيمة العظمى الأولى ($T_p$) (Peak time or $T_p$):** كما هو مبين بالشكل (4-11), يُعرف $T_p$ بأنه لحظة حدوث القمة الأولى. في بعض الأحيان $T_p$ ليست لحظة ظهور التجاوز الأعظمي.

3- **زمن الصعود ($T_r$) (Rise time or $T_r$):** الزمن اللازم للنظام حتى يمر خرجه من قيمة 10% إلى 90% من القيمة النهائية $y_{ss}$.

4- **زمن الوصول إلى ($\delta$%):** كما يُعرف أيضاً بزمن الاستجابة لـ $\delta$ %, وهو الزمن اللازم حتى تستقر الاستجابة الخطوية ضمن المجال ($\pm\delta$ %) حول القيمة النهائية.

5- **زمن الاستقرار ($T_s$) (Settling time or $T_s$):** هو الزمن اللازم لبلوغ 98% من القيمة النهائية لإشارة الخرج. زمن الاستقرار هو أيضاً زمن الوصول إلى (±2%).

6- **خطأ الحالة المستقرة ($e_{ss}$) (Steady-state error or $e_{ss}$):** هو الفرق بين القيمة النهائية المرجوة لإشارة الخرج والقيمة الفعلية لهذه الإشارة عند حالة الاستقرار.

تشكل الأزمنة المذكورة مؤشرات مهمة على سرعة النظام, كما تشكل في معظم الأحيان معايير واجب تحقيقها عند تصميم المتحكم (Controller).

**4-5 الخصائص الزمنية العامة للاستجابة الخطوية لنظم الدرجة الأولى:**

من الشكل (4-7) الممثل للاستجابة الخطوية لنظم الدرجة الأولى, يمكن ملاحظة ما يلي:

- لا يوجد تجاوز وذلك طالما أن القيمة العظمى التي يستطيع النظام الوصول إليها هي القيمة النهائية, وبالتالي لا يوجد تجاوز نسبي.
- لا يمكن تحديد زمن القيمة العظمى الأولى ($T_p$) لأن الاستجابة لا تحوي أي قمة.

سنقوم فيما يلي استنتاج زمن الصعود, زمن الاستجابة لـ (±5%) ولـ (±10%), وزمن الاستقرار لنظام من الدرجة الأولى, كما سنقوم بحساب قيمة الخرج عند حالة الاستقرار.

حساب زمن الصعود: لنفرض أن $t_1$ الزمن الذي من أجله يكون $y(t_1) = 10\%\, y_{ss}$, $t_2$: الزمن الذي من أجله يكون $y(t_2) = 90\%\, y_{ss}$.

بما أن: $y_{ss} = lim_{t\to\infty} y(t) = BK$, بالتالي يصبح لدينا:

$$y(t_1) = 0.1BK = BK\left(1 - e^{-t_1/T}\right)$$

بالتالي: $$t_1 = -T\ln(0.9)$$

أيضاً لدينا: $$y(t_2) = 0.9BK = BK\left(1 - e^{-t_2/T}\right)$$

بالتالي: $$t_2 = -T\ln(0.1)$$

بالتالي يصبح زمن الصعود: $$T_r = t_2 - t_1 = T\ln(9) \approx 2.2T$$

$$T_r = 2.2T \quad .....(18-4)$$

حساب زمن الاستجابة لـ 10%, أي $T_{r10\%}$:

$$y(T_{r10\%}) = 0.9BK = BK\left(1 - e^{-T_{r10\%}/T}\right)$$

بالتالي: $$T_{r10\%} = -T\ln(0.1)$$

$$T_{r10\%} = 2.3T \quad .....(19-4)$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$T_{r5\%} = 3T \quad .....(20-4)$$

$$T_{r2\%} = T_s = 4T \quad .....(21-4)$$

يلخص الجدول (4-3) خصائص الحالة العابرة والمستقرة لنظام من الدرجة الأولى.

| الجدول (4-3): ملخص خصائص الحالة العابرة والمستقرة لنظم الدرجة الأولى | |
|---|---|
| **الميزة** | **العلاقة الرياضية** |
| التجاوز | 0 |
| زمن القيمة العظمى الأولى | لا يوجد |
| زمن الصعود | $2.2\,T$ |
| زمن الاستجابة لـ 10% | $2.3\,T$ |
| زمن الاستجابة لـ 5% | $3\,T$ |
| زمن الاستجابة لـ 2% | $4\,T$ |
| القيمة النهائية للخرج عند تطبيق إشارة خطوية ذات مطال $B$. | $BK$ |

من الجدول (4-3) يمكن ملاحظة أن خصائص النظام خلال المرحلة العابرة لا تعتمد على مطال الإشارة الخطوية ولكن تتعلق فقط بثابت زمن النظام $T$.

**مثال 4-4:** لنوجد الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الأولى المعطى بالعلاقة التالية:

$$G(s)=\frac{9}{s+10}.....(22-4)$$

تعطى علاقة الخرج على النحو التالي:

$$Y(s)=\frac{9}{s(s+10)}.....(23-4)$$

بالتالي فالاستجابة الخطوية (خلال المرحلة العابرة) للنظام:

$$y(t)=0.9(1-e^{-10t}).....(24-4)$$

من العلاقة (4-24) نجد أن قيمة الخرج خلال المرحلة المستقرة: $y(\infty)=0.9$ .

أما قيمة الخطأ خلال المرحلة المستقرة:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s}-\frac{9}{s(s+10)}\right]=0.1$$

**4-6 الاستجابة الزمنية لنظم الدرجة الثانية:**

سنقوم في هذه الفقرة بدراسة الاستجابة الزمنية لنظم الدرجة الثانية والمعطاة بتابع التحويل ذو الشكل العام:

$$G(s)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}.....(25-4)$$

**4-6-1 جذور المعادلة المميزة وعلاقتها بالتخامد في نظم الدرجة الثانية:**

كما رأينا سابقاً, الاستجابة العابرة لنظام مستقلة عن إشارة الدخل $X(s)$, لذلك لتحليل الاستجابة الزمنية العابرة يمكننا أن نعتبر أن دخل النظام معدوم وبالتالي يمكن كتابة المعادة (4-25) كما يلي:

$$\left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1\right)Y(s)=0$$

إذا كان $Y(s)\neq 0$, بالتالي:

$$\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1=0.....(26-4)$$

تسمى المعادلة (4-26) بمعادلة المميزة للنظام وهي عبارة عن معادلة جبرية من الدرجة الثانية في $(s)$, وهي ذات أهمية بالغة لأن نوع الاستجابة تعتمد على نوع جذورها. هناك ثلاث حالات حسب إشارة مميز المعادلة المميزة:

$$\Delta=\frac{4}{\omega_n^2}\left(\zeta^2-1\right).....(27-4)$$

يبين الجدول (4-4) أنواع السلوك العابر لنظام من الدرجة الثانية.

1- إذا كانت قيمة $\Delta>0$, أي $\zeta>1$: في هذه الحالة تكون جذور المعادلة المميزة جذور حقيقية وغير متساوية, وهذه الجذور هي:

$$s_{1,2}=\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n.....(28-4)$$

تسمى هذه الحالة بحالة الإخماد الزائد (Over damping) حيث لا يحتوي منحني استجابة الخرج اهتزازات ولا يعبر قيمة الاستقرار.

2- إذا كانت قيمة $\Delta = 0$, أي $\zeta = 1$: في هذه الحالة تكون جذور المعادلة المميزة جذور حقيقية ومضاعفة, وهذه الجذور هي:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \quad .....(29-4)$$

تسمى هذه الحالة بحالة الإخماد الحرج (Critical damping) حيث لا يحتوي منحني استجابة الخرج اهتزازات ولا يعبر قيمة الاستقرار.

3- إذا كانت قيمة $\Delta < 0$, أي $\zeta < 1$: في هذه الحالة تكون جذور المعادلة المميزة جذور عقدية مترافقة, وهذه الجذور هي:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n \quad .....(30-4)$$

تسمى هذه الحالة بحالة الإخماد الناقص (Under damping) حيث يحتوي منحني استجابة الخرج اهتزازات ويعبر قيمة الاستقرار.

إذا كانت قيمة $\zeta = 0$, في هذه الحالة تكون جذور المعادلة المميزة:

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n \quad .....(31-4)$$

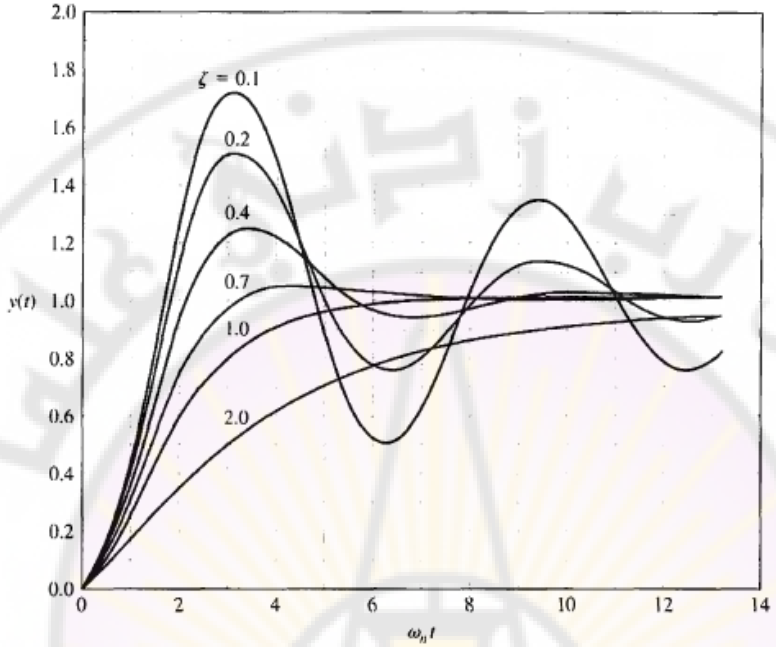
تسمى هذه الحالة للنظام بحالة عدم التخامد.

| **الجدول (4-4): السلوك العابر لنظام من الدرجة الثانية** | | |
|---|---|---|
| **المميز** | **الجذور** | **نوع الاستجابة العابرة** |
| $\Delta > 0$, أي $\zeta > 1$ | $s_1$ و $s_2$ جذور حقيقية وغير متساوية | تخامد زائد |
| $\Delta = 0$, أي $\zeta = 1$ | $s_1$ و $s_2$ جذور حقيقية ومضاعفة | تخامد الحرج |
| $\Delta < 0$, أي $\zeta < 1$ | $s_1$ و $s_2$ جذور عقدية مترافقة | تخامد ناقص |

تُعطى الاستجابة العابرة لنظام من الدرجة الثانية بالمعادلة التالية:

$$x_o(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad .....(32-4)$$

هذه المعادلة تمثل استجابة النظام من الدرجة الثانية وذلك عند تطبيق دخل خطوي, والمبينة بالشكل (4-12).




**الشكل (4-12): تأثير جذور المعادلة المميزة على استجابة نظام من الدرجة الثانية.**

**4-6-2 التخامد الحرج ومعامل التخامد:**

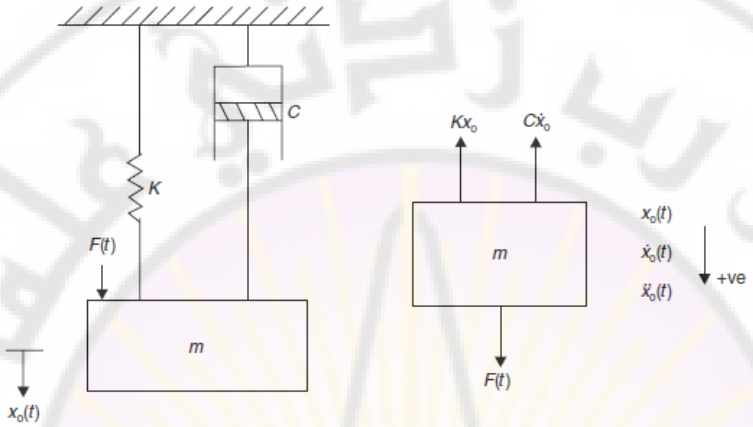
التخامد الحرج ($C_c$) (Critical damping): عندما تكون قيمة معامل التخامد ( damping factor) لنظام من الدرجة الثانية مساوية للقيمة الحرجة ($C_c$), فإن خرج النظام سيصل إلى قيمة الحالة المستقرة في أقصر وقت ممكن وبدون حدوث تجاوزات في قيم الخرج, وذلك عندما يتعرض النظام لاضطرابات. كما هو مبين بالجدول (4-4), يحدث التخامد الحرج عندما تكون جذور المعادلة المميزة حقيقية مضاعفة.

معامل التخامد ($\zeta$): تسمى نسبة التخامد في نظام من الدرجة الثانية (C) إلى قيمة التخامد الحرج ($C_c$), بمعامل التخامد, وبالتالي:

$$\zeta = \frac{C}{C_c} \quad .....(33-4)$$

بالتالي: $\zeta = 0$ لا يوجد تخامد, $\zeta < 1$ التخامد الناقص, $\zeta = 1$ التخامد الحرج, $\zeta > 1$ التخامد الزائد.

**مثال 4-5:** أوجد قيمة التخامد الحرج $(C_c)$ بدلالة $K$ و $m$ للنظام المؤلف من نابض– كتلة– مخمد المبين بالشكل (4-13).




**الشكل (4-13): أ– نظام نابض–كتلة– مخمد ب– مخطط الجسم الحر.**

من قانون نيوتن الثاني نجد: $\sum F_x = mx_o^{\bullet\bullet}$

من مخطط الجسم الحر نجد:

$$F(t) - Kx_o(t) - Cx_o^{\bullet}(t) = mx_o^{\bullet\bullet}(t).....(34-4)$$

لنطبق تحويل لابلاس على المعادلة (4-34) وذلك عند شروط ابتدائية معدومة:

$$F(s) - KX_o(s) - CsX_o(s) = ms^2X_o(s).....(35-4)$$

أو: $$\left(ms^2 + Cs + K\right)X_o(s) = F(s).....(36-4)$$

المعادلة المميزة لهذا النظام هي:

$$ms^2 + Cs + K = s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{K}{m} = 0$$

جذور المعادلة المميزة هي:

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}\left\{-\frac{C}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{m}\right)^2 - 4\frac{K}{m}}\right\}.....(37-4)$$

عند التخامد الحرج تكون قيمة المميز معدومة, وبالتالي تصبح قيم الجذور:

$$s_1 = s_2 = -\frac{C_c}{2m}$$

أيضاً عند التخامد الحرج يكون: $\Delta = 0$, وبالتالي: $\frac{C_c^2}{m^2} = \frac{4K}{m}$

$$C_c = 2\sqrt{Km} \quad .....(38-4)$$

**4-6-3 الاستجابة العامة لنظام من الدرجة الثانية عند تطبيق دخل خطوي واحدي:**

في نظام من الدرجة الثانية, يمثل $K$ ربح النظام في الحالة المستقرة, $\omega_n$: التردد الزاوي الطبيعي, $\zeta$: معامل التخامد حيث $\zeta < 1$. يبين الشكل (4-14) المخطط الصندوقي لهذا النظام وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية.

من الشكل (4-14) نجد:

$$X_o(s) = \frac{K\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)} \quad .....(39-4)$$

باستخدام تفريق الكسور, يمكن تمثيل المعادلة (4-39) على النحو التالي:

$$X_o(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad .....(40-4)$$

بتوحيد المقامات في المعادلة (4-40), وبمقارنة المعادلة الناتجة مع المعادلة (4-39) نجد:

$$K\omega_n^2 = A\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right) + Bs^2 + Cs$$

بمقارنة طرفي المعادلة السابقة نجد:

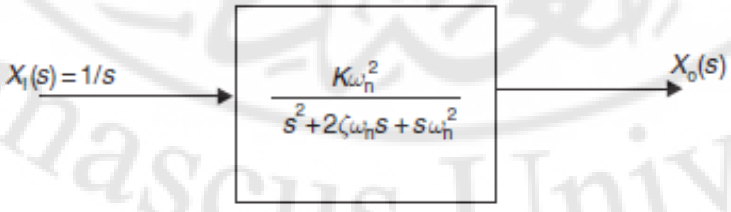
$$0 = A + B, \qquad 0 = 2\zeta\omega_n A + C, \qquad K\omega_n^2 = \omega_n^2 A$$

وبالتالي:

$$A = K, \qquad B = -K, \qquad C = -2\zeta\omega_n K$$

بتعويض قيم $A$, $B$, و $C$ في المعادلة (4-40) نجد:

$$X_o(s) = K\left[\frac{1}{s} - \left\{\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right\}\right]$$




**الشكل(4-14): المخطط الصندوقي لنظام من الدرجة الثانية.**

بإتمام المقام إلى مربع كامل نجد:

$$X_o(s) = K\left[\frac{1}{s} - \left\{\frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2}\right\}\right]$$

$$X_o(s) = K\left[\frac{1}{s} - \left\{\frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right\}\right] \quad .....(41-4)$$

إن البنود التي داخل الأقواس يمكن أن تكتب على النحو التالي:

$$term\ (1) = \frac{-s}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$

$$term\ (2) = \left\{\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right\}\left\{\frac{-2\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على البنود (1) و (2) نحصل على إشارة الخرج الزمنية:

$$x_o(t) = K\left[1 - \left\{e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right)\right\}\right]$$

$$- K\left[\left\{\frac{2\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}\left\{e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right)\right\}\right] \quad .....(42-4)$$

يمكن تبسيط المعادلة (4-42) على النحو التالي:

$$x_o(t) = K\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right\}\right] \quad .....(43-4)$$

في حالة عدم التخامد:

$$x_o(t) = K[1-\cos\omega_n t] \quad .....(44-4)$$

من المعادلة (4-44) يمكن أن نلاحظ أنه لا يوجد تخامد وأن تطبيق دخل خطوي سيدفع النظام إلى الاهتزاز باستمرار عند تردد زاوي $\omega_n\,(rad/sec)$. من المعادلة (4-43), عندما تكون قيمة $0 < \zeta < 1$, يعطى تردد الاهتزاز خلال المرحلة العابرة بالعلاقة التالية:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad .....(45-4)$$

بالتالي يمكن أن تكتب العلاقة (4-43) على النحو التالي:

$$x_o(t) = K\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\cos(\omega_d t) + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin(\omega_d t)\right\}\right].....(46-4)$$

$$x_o(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \phi)\right].....(47-4)$$

حيث: $\tan\phi = \sqrt{1-\zeta^2}/\zeta$ .

من أجل $\zeta = 1$, تصبح استجابة النظام من الدرجة الثانية لدخل خطوي واحدي:

$$x_o(t) = K\left[1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)\right].....(48-4)$$

من أجل $\zeta > 1$, يمكن حساب استجابة النظام من الدرجة الثانية لدخل خطوي واحدي وذلك من المعادلة (4-32):

$$x_o(t) = K\left[1 - \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\right)e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}\right\}\right]$$

$$+ K\left[\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\right)e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}\right\}\right].....(49-4)$$

يبين الشكل (4-12) الاستجابة الزمنية العامة لنظام من الدرجة الثانية وذلك عند تطبيق دخل خطوي واحدي, وذلك من أجل $K = 1$.

**4-6-4 الخصائص الزمنية العامة للاستجابة الخطوية لنظم الدرجة الثانية:**

أ- تحليل الاستجابة الخطوية (Step response analysis):

لندرس نظام من الدرجة الثانية ذو تخامد ناقص, وربح النظام في الحالة المستقرة واحدي (أي $K$=1), والخاضع لإشارة الدخل من الشكل:

$$x_i(t) = B.....(50-4)$$

يبين الشكل (4-15) إشارة الخرج الناتجة $x_o(t)$. يوجد طريقتان لحساب معامل التخامد:

الطريقة الأولى: إن نسبة التجاوز عند القمة الأولى:

$$P.O.\% = \frac{a_1}{B} * 100.....(51-4)$$

الآن من الشكل (4-15) نجد: $a_1 = Be^{-\zeta\omega_n(\tau/2)}$

بالتعويض في المعادلة (4-51) نجد:

$$P.O.\% = \left(Be^{-\zeta\omega_n(\tau/2)}/B\right)*100 \text{.....} (52-4)$$

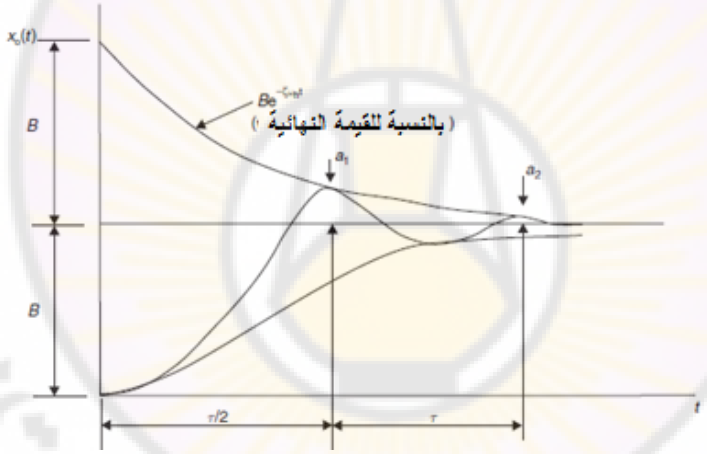
طالما أن تردد الاهتزازات العابرة هو $(\omega_d)$ بالتالي:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \text{.....} (53-4)$$

بتعويض العلاقة (4-53) بالعلاقة (4-52) نجد:

$$P.O.\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} *100 \text{.....} (54-4)$$

تعطى القمة العظمى للاستجابة بالعلاقة التالية: $M_{pt} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$ .




**الشكل (4-15): تحليل الاستجابة الخطوية.**

الطريقة الثانية: التناقص اللغاريتمي: لنأخذ نسبة قمتين متتالتين $(a_1)$ و $(a_2)$:

$$a_1 = Be^{-\zeta\omega_n(\tau/2)} \text{.....} (55-4)$$

$$a_2 = Be^{-\zeta\omega_n(3\tau/2)} \text{.....} (56-4)$$

بالتالي:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n(\tau/2)}}{e^{-\zeta\omega_n(3\tau/2)}} = e^{\{-\zeta\omega_n(\tau/2)+\zeta\omega_n(3\tau/2)\}}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = e^{\zeta\omega_n\tau} = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \text{.....} (57-4)$$

يمكن أن نستخدم المعادلة (4-57) فقط إذا كان التخامد ضعيف وكان هناك أكثر من تجاوز واحد. يمكن أن نستخدم المعادلة (4-53) لحساب تردد التخامد الطبيعي $\omega_n$:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{1-\zeta^2}} \quad .....(58-4)$$

في نظم التحكم يمكن القبول بنسبة تجاوز تتراوح بين 0% إلى 10% وهو ما يقابل قيم لمعامل التخامد هي: $0.6 < \zeta > 1$.

ب- الخصائص الزمنية للاستجابة الخطوية:

تستخدم المحددات المبينة بالشكل (4-11) وهي زمن الصعود, التجاوز, وزمن الاستقرار وذلك لتقييم الخصائص الزمنية للاستجابة الخطوية للنظام المدروس.

من الشكل (4-11), لنفرض أن خرج النظام يتراوح داخل مجال 2%± من القيمة النهائية, بالتالي نجد أن:

$$0.02B = Be^{-\zeta\omega_n T_s}$$

$$50 = e^{\zeta\omega_n T_s}$$

لنأخذ اللغاريتم الطبيعي للطرفين نجد: $\ln 50 = \zeta\omega_n T_s$

بالتالي:

$$T_s = \frac{\ln 50}{\zeta\omega_n} = \frac{3.9}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad .....(59-4)$$

يدعى البند ($1/\zeta\omega_n$) بثابت الزمن المكافئ للنظام من الدرجة الثانية في حالة الإخماد الناقص ويشار إليه بـ $T_c$.

بنفس الطريقة يمكن أن نحسب زمن الاستجابة لـ 5% و لـ 10%:

زمن الاستجابة لـ 5%:

$$T_{r5\%} = 3T_c \quad .....(60-4)$$

زمن الاستجابة لـ 10%:

$$T_{r10\%} = 2.3T_c \quad .....(61-4)$$

يمكننا حساب القيمة النهائية لإشارة الخرج بالعلاقة:

$$y_{final} = \lim_{t\to\infty} y(t) \quad .....(62-4)$$

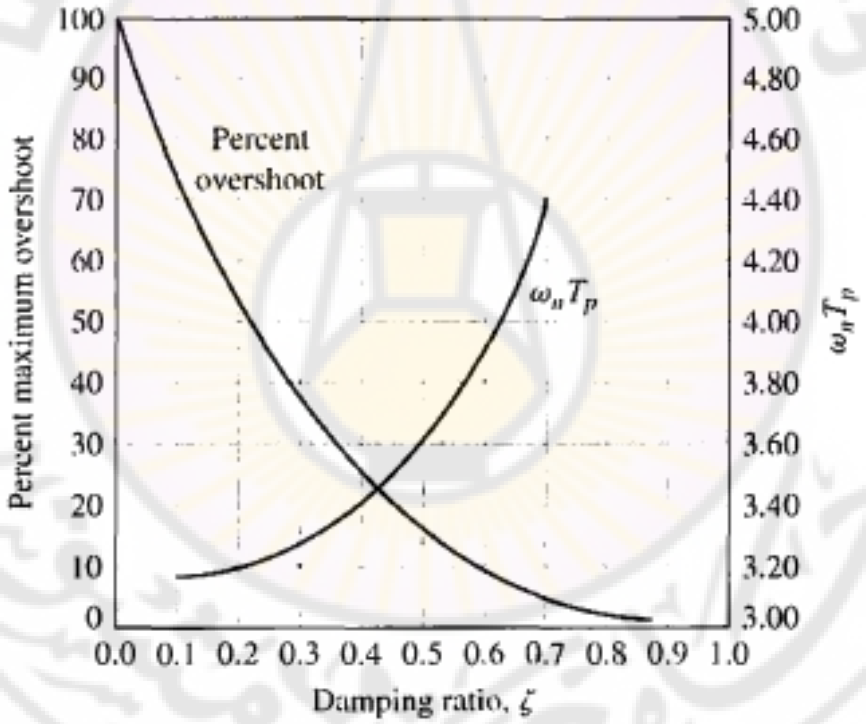
زمن حدوث القمة العظمى: من الشكل (4-11) نجد:

$$T_p = \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad .....(63-4)$$

يبين الشكل (4-16) العلاقة بين التجاوز النسبي ومعامل التخامد ($\zeta$), كما يبين أيضاً علاقة ($T_p\omega_n$) بمعامل التخامد. يلخص الجدول (4-5) قيم التجاوز النسبي لبعض القيم لمختارة لمعامل التخامد. يمكن ملاحظة ضرورة الملائمة بين نعومة الاستجابة وقيمة التجاوز المسموح بها.

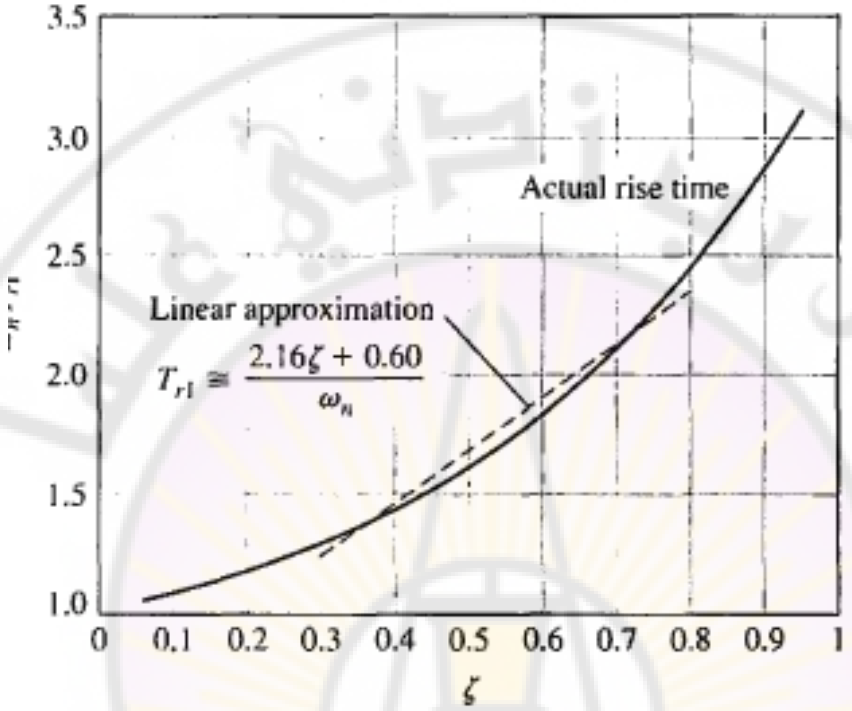
**الجدول (4-5): قيم التجاوز النسبي لبعض القيم المختارة لمعامل التخامد**

| $\zeta$ | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *P.O.*% | 0.2 | 1.5 | 4.6 | 9.5 | 16.3 | 25.4 | 37.2 |




**الشكل (4-16): علاقة التجاوز النسبي و ($T_p\omega_n$) بمعامل التخامد $\zeta$.**

يمكن أيضاً رسم العلاقة بين زمن الصعود ($T_{r1}\omega_n$) ومعامل التخامد ($\zeta$), (عندما $0.05 \le \zeta \le 0.95$) ليبدو على النحو المبين بالشكل (4-17).




**الشكل (4-17): علاقة زمن الصعود ($T_{r1}\omega_n$) بمعامل التخامد.**

يمكن تقريب علاقة زمن الصعود المبينة بالشكل (4-17) لتصبح:

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n} \quad .....(64-4)$$

إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $0.3 \le \zeta \le 0.8$. إن العلاقة التقريبية لـ $T_{r1}\omega_n$ مبينة أيضاً بالشكل (4-17). إن نعومة الاستجابة الخطوية المعطاة بالعلاقة (4-64) تعتمد على $\zeta$ و $\omega_n$. من أجل قيم محددة لـ $\zeta$, تكون الاستجابة أسرع من أجل قيم $\omega_n$ الكبيرة, كما هو مبين بالشكل (4-18). يلاحظ من هذا الشكل أن قيمة التجاوز مستقلة عن $\omega_n$. من أجل قيم محددة لـ $\omega_n$, تكون الاستجابة أسرع من أجل قيم $\zeta$ الأصغر, كما هو مبين بالشكل (4-19). يُلاحظ من هذا الشكل أن نعومة الاستجابة (زمن الصعود) محدودة بالتجاوز الذي يمكن أن يحدث.

- في حالة التجاوز الزائد, يعطى زمن الاستجابة لـ 5% و لـ 10% بالعلاقات التالية:

$$T_{r5\%} = \frac{\ln 20}{\omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} = 3T_c \quad .....(65-4)$$

حيث:

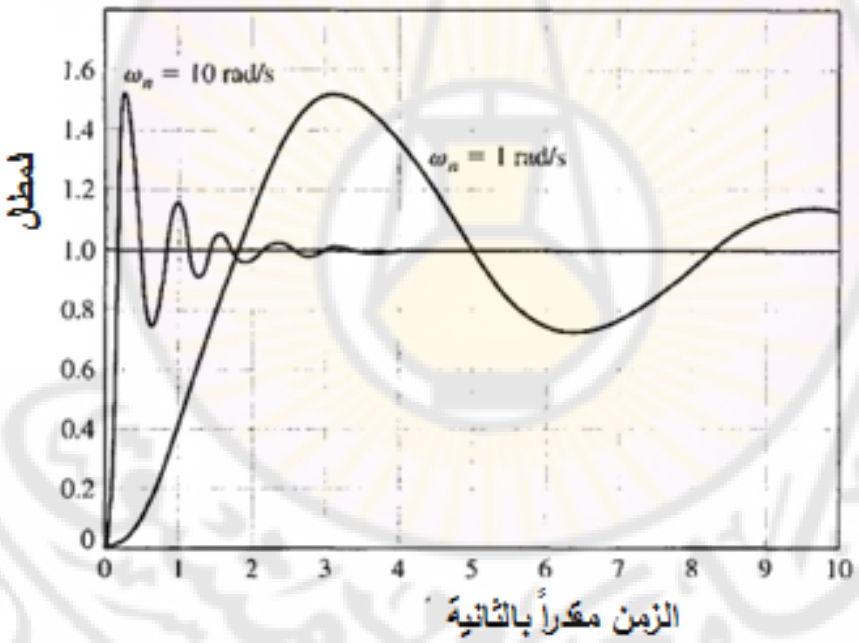
$$T_c = \frac{1}{\omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} \quad .....(66-4)$$

هو ثابت الزمن المكافئ للنظام في حالة الإخماد الزائد.

$$T_{r10\%} = \ln 10 / \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = 2.3T_c \quad .....(67-4)$$

- يعطى أيضاً زمن الاستقرار في حالة التخامد الزائد بالعلاقة التالية:

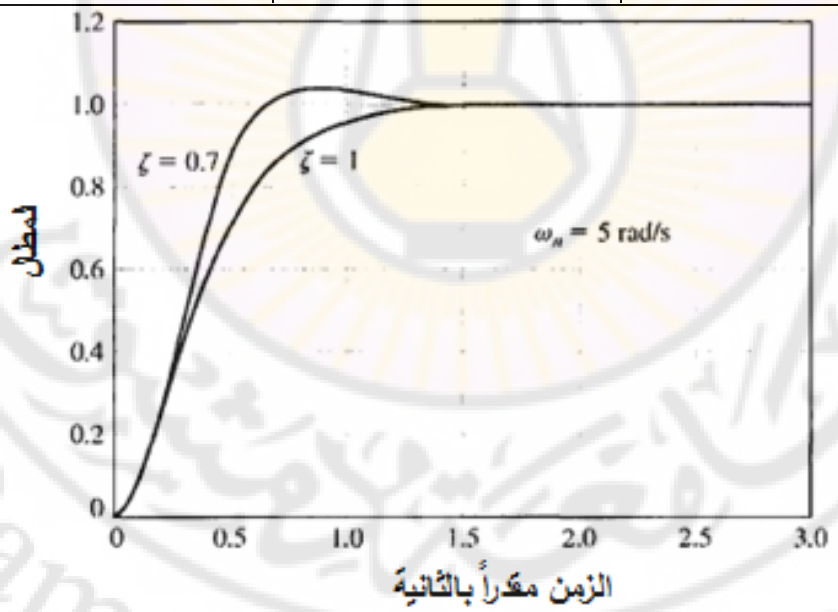
$$T_s = \ln 50 / \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = 3.9T_c \approx 4T_c \quad .....(68-4)$$




**الشكل (4-18): الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية من أجل** $\zeta = 0.2$ **و** $\omega_n = 1$ **و** $\omega_n = 10$.

يلخص الجدول (4-6) خصائص الاستجابة العابرة لنظام من الدرجة الثانية.

| الجدول (4-6): خصائص الاستجابة العابرة لنظام من الدرجة الثانية | | |
|---|---|---|
| الميزة | العلاقة الرياضية | |
| | $\zeta < 1$ | $\zeta \geq 1$ |
| التجاوز | $e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} * 100$ | لا يوجد |
| زمن القمة العظمى الأولى | $\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ | لا يوجد |
| ثابت زمن النظام $T_c$ | $1/\zeta\omega_n$ | $1/\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)$ |
| زمن الصعود | $2.2T_c$ | $2.2T_c$ |
| زمن الاستجابة لـ 10% | $2.3T_c$ | $2.3T_c$ |
| زمن الاستجابة لـ 5% | $3T_c$ | $3T_c$ |
| زمن الاستقرار | $4T_c$ | $4T_c$ |
| القيمة النهائية | $\lim_{t\to\infty} y(t)$ | $\lim_{t\to\infty} y(t)$ |




**الشكل (4-19): الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية من أجل** $\omega_n = 5$ **و** $\zeta = 0.7$ **و** $\zeta = 1.0$ .

**4-6-5 الاستجابة النبضية لنظم الدرجة الثانية:**

إن الاستجابة النبضية $h(t)$ للنظام هي مشتق الاستجابة الخطوية لهذا النظام, أي:

$$h(t) = dy(t)/dt \quad .....(69-4)$$

سنميز فيما يلي بين حالة الإخماد الزائد والحرج $\zeta \geq 1$, وحالة الإخماد الناقص $\zeta < 1$.

أ- حالة الإخماد الزائد والحرج $\zeta \geq 1$: من العلاقة (4-49) نجد:

$$h(t) = \frac{\omega_n K}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} - e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \right] \quad .....(70-4)$$

نستطيع رسم هذه الإشارة وذلك من أجل إظهار الاستجابة النبضية, حيث يتم ذلك بعد معرفة حدود المنحني وميله عند اللحظة $t = 0$ و $t = \infty$, فنجد: $h(0) = 0$ و $h(\infty) = 0$. هذا يعني أنه يوجد قمة عظمى يجب علينا البحث عنها.

$$h^{\bullet}(t) = \frac{\omega_n K}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \right]$$

$$+ \frac{\omega_n K}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \right] \quad .....(71-4)$$

لنحسب ميل المنحني عند اللحظة $t = 0$ فنجد: $h^{\bullet}(0) = \omega_n^2 K$. بالتالي ميل منحني الاستجابة النبضية عند اللحظة $t = 0$ ذو قيمة موجبة.

لنحسب زمن حدوث القمة العظمى للاستجابة النبضية, وذلك بواسطة المعادلة $h^{\bullet}(t) = 0$, فنجد:

$$t_{\max} = \frac{1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \ln \left[ \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] \quad .....(72-4)$$

ب- حالة الإخماد الناقص $\zeta < 1$: من العلاقة (4-43) نجد:

$$h(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\right) t \quad .....(73-4)$$

نستطيع رسم هذه الإشارة وذلك بهدف إظهارها, حيث يتم ذلك بعد معرفة حدود المنحني وميله عند اللحظة $t = 0$.

$$h(0) = 0 \quad \text{و} \quad h(\infty) = 0 \quad .....(74-4)$$

من العلاقات (4-73) و (4-74) نجد أن الاستجابة النبضية تهتز حول $t = 0$ وذلك بسبب تابع الجيب *Sin* في علاقة $h(t)$ مع تخامد طالما أن تابع الجيب مضروب بتابع آسي.

لنحسب الآن مشتق التابع $h(t)$:

$$h^{\bullet}(t) = \frac{-jK\omega_n}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\left(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n e^{(-\zeta+j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}\right]$$

$$+\frac{-jK\omega_n}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\left(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n e^{-(\zeta+j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}\right].....(75-4)$$

قيمة ميل المنحني $h(t)$ عند $t = 0$ ذات قيمة موجبة $\left(h^{\bullet}(0) = K\omega_n^2\right)$. لنبسط العلاقة (4-75) على النحو التالي:

$$h^{\bullet}(t) = K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi\right).....(76-4)$$

حيث: $\tan\phi = \zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$.

لنوجد اللحظة التي ينعدم فيها ميل المنحني (أي لحظة حدوث القمة العظمى), حيث $h^{\bullet}(0) = 0$:

$$t_k = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\frac{k\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta 2}}\right)\right].....(77-4)$$

بالتالي يمكن أن نحسب لحظة حدوث القمة العظمى الأولى وذلك من أجل $k = 1$:

$$t_{\max} = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta 2}}\right)\right].....(78-4)$$

**4-7 تأثير وجود القطب الثالث والصفر على استجابة النظام من الدرجة الثانية:**

**(Effects of a third pole and a zero on the second-order system response)**

إن المنحنيات المبينة بالشكل (4-16) صحيحة فقط للنظم من الدرجة الثانية ذات تابع التحويل المتطابق مع الشكل العام لنظام من الدرجة الثانية. تعتبر هذه المنحنيات مصدر هام للبيانات حيث يُمكننا من تقدير الاستجابة الخطوية للنظام, بشكل تقريبي, دون الحاجة لاستخدام تحويل لابلاس العكسي. لنأخذ على سبيل المثال, النظام المغلق الممثل بتابع التحويل التالي:

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)} \quad \text{.....(79-4)}$$

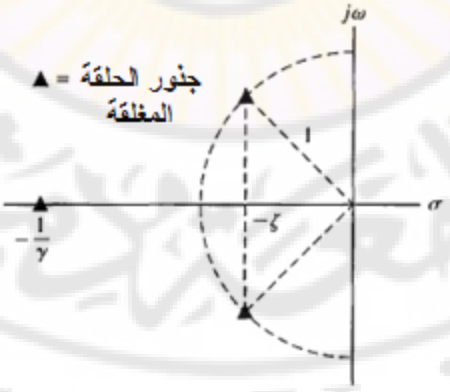
يبين الشكل (4-20) مواقع أقطاب النظام في المستوي اللابلاسي (s-plane). لقد تم الإثبات تجريبياً أن أداء نظام من الدرجة الثالثة (التجاوز النسبي $P.O.\%$ وزمن الاستقرار $T_s$) يمكن أن يُقرب إلى أداء نظام من الدرجة الثانية وذلك عندما يتحقق الشرط التالي:

$$\left|\frac{1}{\gamma}\right| \geq 10\,|\zeta\omega_n| \quad \text{.....(80-4)}$$

بمعنى آخر يمكن تقريب استجابة نظام من الدرجة الثالثة إلى استجابة نظام من الدرجة الثانية وذلك تحت تأثير الجذور المسيطرة في النظام. تُعرف الجذور المسيطرة بأنها تلك التي جزئها الحقيقي ($\zeta\omega_n$) أقل من عُشر الجزء الحقيقي للجذر الثالث ($1/\gamma$).

لنحاول الآن محاكاة الاستجابة الخطوية للنظام, وذلك باستخدام الحاسب, من أجل $\omega_n = 1$ و $\zeta = 0.45$ وعدة قيم لـ $\gamma$:

- عندما $\gamma = 2.25$, نجد أن الجزء الحقيقي للأقطاب العقدية هي (-0.45) بينما القطب الثالث يساوي (-0.444). وجد في هذه الحالة وبواسطة المحاكاة الحاسوبية, أن زمن الاستقرار يساوي (9.6) ثانية.
- عندما $\gamma = 0.9$ (أي $1/\gamma = 1.11$) وجد أن قيمة التجاوز النسبي هي 12% بينما قيمة زمن الاستقرار (8.8) ثانية.




**الشكل (4-20): مواقع الأقطاب لنظام من الدرجة الثالثة.**

من الشكل (4-16) نجد أنه إذا كانت الجذور العقدية هي المسيطرة فستكون قيمة التجاوز النسبي 20%, بينما ستكون قيمة زمن الاستقرار ($T_s = 4/\zeta\omega_n = 8.9$) ثانية. لنأخذ الآن قيمة لـ ($\gamma$) ولتكن ($\gamma = 0.05$) أي ($1/\gamma = 20$). في هذه الحالة نلاحظ أن الشرط المعطى بالعلاقة (4-80) محقق, وبالتالي فالأقطاب العقدية هي المسيطرة. باستخدام المحاكاة الحاسوبية من أجل هذه القيمة لـ ($\gamma$) نجد أن التجاوز النسبي للنظام يساوي (20.5%) أما زمن الاستقرار فيساوي (8.37) ثانية. هذه القيم تساوي تقريباً القيم المستنتجة من الشكل (4-16). يلخص الجدول (4-7) نتائج محاكاة الاستجابة الخطوية لتابع التحويل المعطى بالعلاقة (4-79).

**الجدول (4-7): تأثير القطب الثالث للنظام المعطى بالعلاقة (4-79) وذلك عندما $\omega_n = 1$ و $\zeta = 0.45$**

| $\gamma$ | $1/\gamma$ | زمن الاستقرار (ثانية) | التجاوز النسبي |
|---|---|---|---|
| 2.25 | 0.444 | 9.63 | 0 |
| 1.5 | 0.666 | 6.3 | 3.9 |
| 0.9 | 1.111 | 8.81 | 12.3 |
| 0.4 | 2.5 | 8.67 | 18.6 |
| 0.05 | 20.0 | 8.37 | 20.5 |

لنعود الآن إلى المنحنيات المبينة بالشكل (4-16). تعتبر هذه المنحنيات دقيقة لنظم الدرجة الثانية والتي لا تحوي أصفار. إذا احتوى تابع تحويل النظام على أصفار ذات قيم محددة وتقع بالقرب من الأقطاب المسيطرة فإن هذه الأصفار ستؤثر على الاستجابة العابرة للنظام.

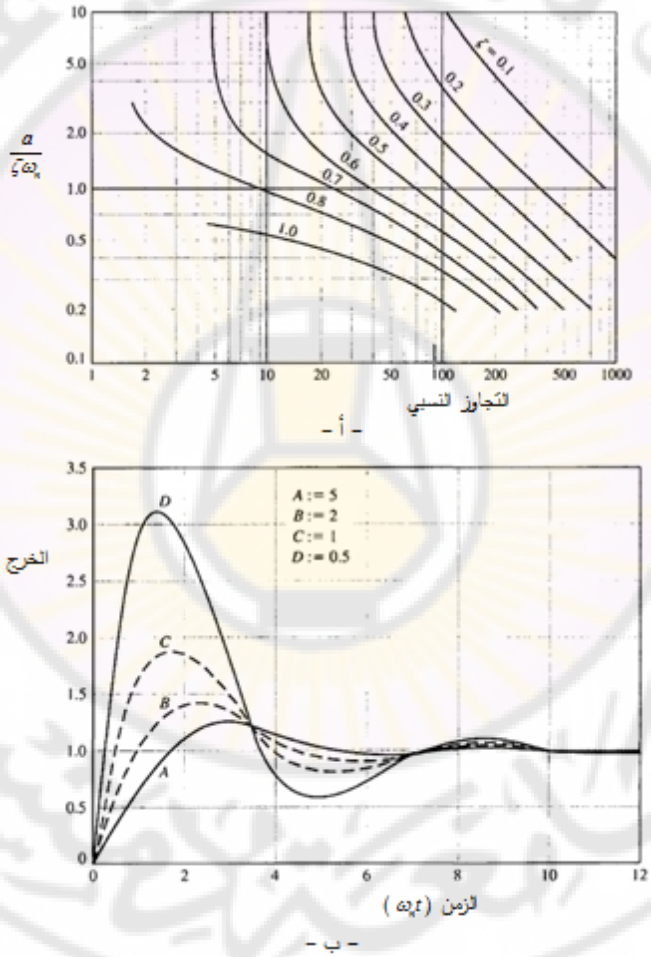
ليكن لدينا النظام التالي:

$$T(s) = \frac{\left(\omega_n^2/a\right)(s+a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

إن الاستجابة العابرة لهذا النظام الحاوي على قطبين وصفر يمكن أن تتأثر بالصفر وذلك حسب موقع الصفر في المستوي اللابلاسي. يبين الشكل (4-21) علاقة التجاوز النسبي وذلك تبعاً لـ ($a/\zeta\omega_n$), وذلك عندما ($\zeta \leq 1$).

يبين الشكل (4-21– ب) الاستجابة الخطوية للنظام وذلك من أجل قيم مختارة لـ $a/\zeta\omega_n$ . إن هذه الاستجابة قد تم تلخيصها بالجدول (4-8), حيث اعتبرنا $\zeta = 0.45$.

إن علاقة الاستجابة الزمنية لنظام بموقع أقطاب تابع تحويل الحلقة المغلقة في المستوي اللابلاسي مفيدة جداً حيث تسمح لنا باختيار بعض محددات النظام. لشرح هذه الفكرة لنقوم بدراسة المثال (4-6).

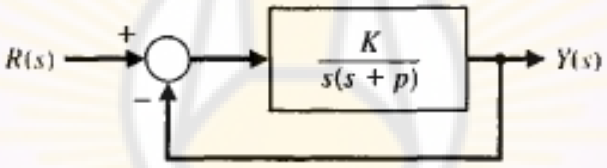



**الشكل (4-21): أ– التجاوز النسبي كتابع لـ ($\zeta$) و ($\omega_n$) لنظام من الدرجة الثانية يحوي صفر ب– الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية يحوي صفر وذلك من أجل أربع قيم لـ $a/\zeta\omega_n$ وهي: $A$=5, $B$=2, $C$=1, $D$=0.5, ومن أجل $\zeta = 0.45$.**

| الجدول (4-8): استجابة النظام الحاوي على صفر وذلك من أجل $\zeta = 0.45$ | | | |
|---|---|---|---|
| $a/\zeta\omega_n$ | $P.O.\ \%$ | زمن الاستقرار $T_s$ | زمن القمة العظمى $T_p$ |
| 5 | 23.1 | 8.0 | 3.0 |
| 2 | 39.7 | 7.6 | 2.2 |
| 1 | 89.9 | 10.1 | 1.8 |
| 0.5 | 210.0 | 10.3 | 1.5 |

**مثال 4-6: اختيار بارمترات النظام:**

يبين الشكل (4-22) نظام تحكم ذو تغذية خلفية. لنقم الآن باختيار الربح $K$ والبارامتر $p$ بحيث تتحقق المتطلبات التصميمية والتي تتلخص بأن تكون استجابة النظام العابرة أسرع ما يمكن, أما التجاوز النسبي فيجب أن لا يتجاوز 5%, كما أن زمن الاستقرار يجب أن يكون أصغر من (4) ثواني.

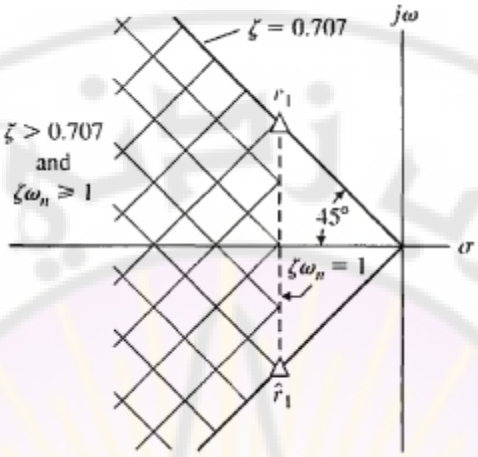



**الشكل (4-22): نظام تحكم ذو حلقة تغذية خلفية واحدية المدروس بالمثال 4-6.**

لنوجد قيمة معامل التخامد ($\zeta$) والتي تحقق تجاوز نسبي أقل من (5%) ولتكن على سبيل المثال $P.O.\%= 4.3\ \%$, فنجد $\zeta = 0.707$. إن هذه القيمة لمعامل التخامد مبينة بالشكل (4-23) على شكل خط مستقيم يصنع مع المحور الحقيقي زاوية $\zeta = 45^\circ = \cos^{-1}$.

بما أن زمن الاستقرار: $T_s = (4/\zeta\omega_n) \le 4\ \text{sec}$

إذاً نحتاج أن يحقق القسم الحقيقي للأقطاب العقدية لـ $T(s)$ الشرط التالي: $\zeta\omega_n \ge 1$. إن الجزء من المستوي اللابلاسي الذي يحقق هذا الشرط مبين بالشكل (4-23). يبين أيضاً الشكل (4-23) الجزء من المستوي اللابلاسي الذي يحقق المتطلبات التصميمية التالية: تجاوز نسبي أقل من 5% وزمن استقرار أقل من 4 ثواني وهو الجزء المهشر.




**الشكل (4-23): المتطلبات التصميمية ومواقع الأقطاب في المستوي اللابلاسي.**

من الشكل (4-23) لنأخذ الجذرين العقديين: $r_1 = -1 + j1$ , $\hat{r}_1 = -1 - j1$ . إن هذين الجذرين العقديين ينتميان للمنطقة المهشرة بالتالي فهما يحققان المتطلبات التصميمية ($T_s = 4$ sec ,$P.O.\% = 4.3\ \%$). لنحسب $\zeta$ و $\omega_n$ لهذه الجذور, فنجد: $\zeta = 1/\sqrt{2}$ و $\omega_n = 1/\zeta = \sqrt{2}$ . بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

بالتالي فإننا نحتاج إلى: $K = \omega_n^2 = 2$ و $p = 2\zeta\omega_n = 2$ .

إذاً الفهم الجيد للعلاقة بين مواقع أقطاب الحلقة المغلقة والاستجابة العابرة مهم بالنسبة لكل من محلل ومصمم نظم التحكم, لذلك سندرس هذه العلاقة معمقاً في الفقرة (4-8).

**مثال 4-7: الأقطاب المسيطرة في $T(s)$ (أو Dominant poles of $T(s)$):**

لندرس النظام ذو الحلقة المغلقة والممثل بتابع التحويل $T(s)$ التالي:

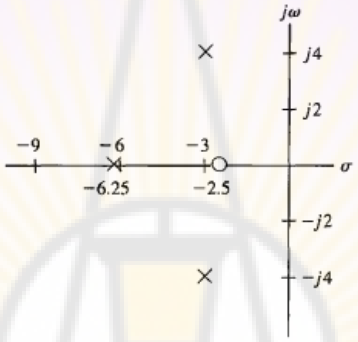
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{(\omega_n^2/a)(s+a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1+\tau s)}$$

إن كلاً من الصفر والقطب الحقيقي (Real pole) يؤثران في الاستجابة العابرة. إذا كان $a \geq \zeta\omega_n$ و $\tau << 1/\zeta\omega_n$ , فإن القطب والصفر سيؤثران بشكل طفيف على الاستجابة الخطوية للنظام.

لنفرض أن لدينا النظام ذو تابع التحويل التالي:

$$T(s) = \frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

في هذا التطبيق العددي لدينا: $\zeta\omega_n = 3$ , $\tau = 0.16$ , $a = 25$ . هذه القيم لا تحقق الشروط المذكورة أعلاه, بالتالي يؤثر الأقطاب والصفر على الاستجابة العابرة. نلاحظ أن الربح المستمر للنظام يساوي للواحد (أي $T(0) = 1$), بالتالي نتوقع خطأ حالة مستقرة معدوم, وذلك عند تطبيق دخل خطوي. يبين الشكل (4-24) مواقع أقطاب وصفر النظام.




**الشكل (4-24): مواقع الأقطاب والأصفار لنظام من الدرجة الثالثة.**

سنستخدم أولاً التقريب التالي حيث سنهمل القطب الحقيقي فنجد:

$$T(s) \approx \frac{62.5(s+2.5)}{s^2+6s+25}$$

في هذه الحالة لدينا $\zeta = 0.6$ و $\omega_n = 5$ وقطبين مسيطرين وصفر حيث $a/\zeta\omega_n = 0.833$ . بالاعتماد على الشكل (4-21-أ) نجد أن التجاوز النسبي يساوي 55%, أما قيمة زمن الاستقرار فهي:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.6*5} = 1.33 \text{ sec}$$

لنقوم الآن وباستخدام الحاسب بمحاكاة النظام من الدرجة الثالثة وبوجود الصفر, وذلك قبل إجراء التقريب, فنجد أن التجاوز النسبي يساوي (38%) وزمن الاستقرار يساوي (1.6) ثانية. بالتالي يعمل القطب الثالث في $T(s)$ على تخميد التجاوز وزيادة زمن الاستقرار. إذاً لا يمكننا إهمال القطب الثالث. ■

يلعب معامل التخامد دور أساسي في أداء نظام الحلقة المغلقة حيث رأينا أن $\zeta$ تدخل كعنصر أساسي في العلاقات الحسابية لكلاً من التجاوز النسبي, زمن الاستقرار, زمن القمة العظمى, وزمن الصعود. أيضاً لاحظنا من دراستنا السابقة أن معامل التخامد $\zeta$ هو المعامل الوحيد الذي يحدد قيمة التجاوز النسبي للاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية, وبالعكس يمكن أن يُحسب معامل التخامد من الاستجابة الخطوية للنظام. وجدنا أيضاً أن الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية تعطى بالعلاقة (4-47), وذلك عندما $K = 1$:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta)$$

حيث: $\beta = \sqrt{1-\zeta^2}$ , $\theta = \cos^{-1}\zeta$ .

بالتالي فإن تردد الزاوي للبند الجيبي المتخامد, وذلك عندما $\zeta < 1$ يساوي:

$$\omega_d = \omega_n \left(1-\zeta^2\right)^{1/2} = \omega_n \beta$$

وبالتالي يكون عدد الدورات (cycles) خلال (1) ثانية مساوياً لـ $(\omega_d / 2\pi)$, وثابت زمن البند الآسي المتخامد هو $(\tau = 1/\zeta\omega_n)$ وذلك خلال ثانية واحدة. بالتالي عدد دورات (number of cycles) الإشارة الجيبية المتخامدة خلال فترة ثابت زمني واحد يساوي:

$$(cycles/time) * \tau = \frac{\omega_d}{2\pi\zeta\omega_n} = \frac{\omega_n\beta}{2\pi\zeta\omega_n} = \frac{\beta}{2\pi\zeta}$$

بافتراض أن الاستجابة الزمنية تتخامد خلال $(n)$ ثابت زمني, بالتالي:

$$cycles\ \ visible = \frac{n\beta}{2\pi\zeta}$$

في النظام من الدرجة الثانية, زمن الاستقرار يساوي $(4\tau)$, بالتالي فإن عدد الدورات المرئية (cycles visible) من أجل $n = 4$ يساوي:

$$cycles\ visible = \frac{4\beta}{2\pi\zeta} = \frac{4\left(1-\zeta^2\right)^{1/2}}{2\pi\zeta} \approx \frac{0.55}{\zeta}$$

وذلك من أجل $0.2 \le \zeta \le 0.6$. على سبيل المثال لنتفحص الاستجابة المبينة بالشكل (4-25) وذلك عندما $\zeta = 0.4$. لنبدأ من أول أصغر نقطة عندما $y(t) = 0$ , ولنعد (1.4)

دورة (حتى تستقر الاستجابة ضمن المجال $\pm 2\%$ حول القيمة النهائية). بالتالي يمكننا تقدير قيمة $\zeta$:

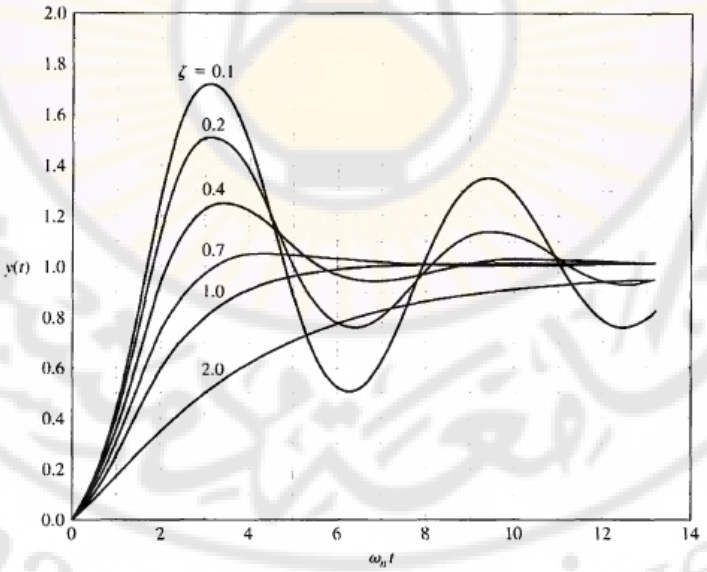
$$\zeta = \frac{0.55}{cycles} = \frac{0.55}{1.4} = 0.39$$

يمكن استخدام هذا التقريب للنظم ذات الأقطاب العقدية المسيطرة, بالتالي:

$$T(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

حيث $K = 1$.

مما سبق و جدنا إمكانية تقدير معامل التخامد ( $\zeta$ ) من الاستجابة العابرة للنظام. يمكننا استخدام طريقة ثانية لتقدير قيمة ( $\zeta$ ) وذلك بتحديد قيمة التجاوز النسبي في الاستجابة الخطوية ومن ثم استخدام الشكل (4-16) لتقدير قيمة ( $\zeta$ ). لنعود للنظام المبين بالشكل (4-25) ولنحسب قيمة التجاوز لمنحني الاستجابة ( $\zeta = 0.4$ ) فنجدها (25%). باستخدام المنحني المبين بالشكل (4-16) نجدها تساوي ( $\zeta = 0.4$ ), كما هو متوقع.




**الشكل (4-25): الاستجابة العابرة لنظام من الدرجة الثانية وذلك عند تطبيق دخل خطوي.**

**4-8 علاقة موقع الجذور في المستوي اللابلاسي والاستجابة العابرة:**

يمكن وصف الاستجابة العابرة لنظام تحكم ذو الحلقة المغلقة بدلالة موقع أقطاب تابع التحويل. سنقوم في هذه الفقرة بشرح تأثير موقع الأقطاب على الاستجابة العابرة. تذكر أنه يمكن كتابة تابع تحويل النظام المغلق على النحو التالي:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\sum P_i(s).\Delta_i(s)}{\Delta(s)}$$

حيث $\Delta(s)$ المعادلة المميزة للنظام. في النظام المغلق الواحدي المبين بالشكل (4-26) تكتب المعادلة المميزة للنظام على النحو التالي: $1+G(s)=0$.

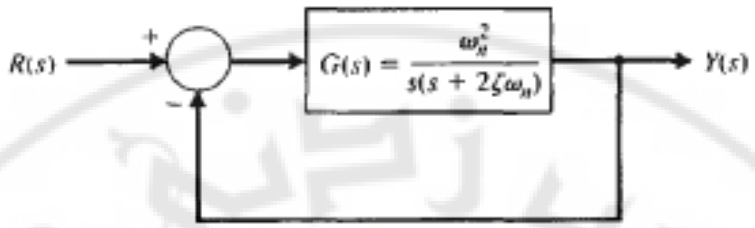
إن أقطاب وأصفار التابع $T(s)$ هي التي تحدد الاستجابة العابرة. في النظم المغلقة تُحسب أقطاب التابع $T(s)$ من جذور المعادلة المميزة $\Delta(s)=0$, أما الأصفار فتحسب من جذور المعادلة $\sum P_i\Delta_i$. يمكن صياغة علاقة إشارة خرج النظام (عندما يكون الربح مساوياً للواحد), وعندما لا يكون هناك أقطاب مضاعفة (مكررة) وذلك عند تطبيق دخل خطوي, على النحو التالي (باستخدام طريقة تفريق الكسور):

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\sum_{i=1}^{M}\frac{A_i}{s+\sigma_i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{B_k+C_k}{s^2+2\alpha s+\left(\alpha_k^2+\omega_k^2\right)}.....(81-4)$$

حيث $A_i$, $B_k$, $C_k$ ثوابت. إن جذور النظام يجب أن تكون إما جذور حقيقية $s=-\sigma_i$ أو جذور عقدية مترافقة $s_k=-\propto_k\pm j\omega_k$. بتطبيق تحويل لابلاس العكسي, نحصل على الاستجابة العابرة للنظام:

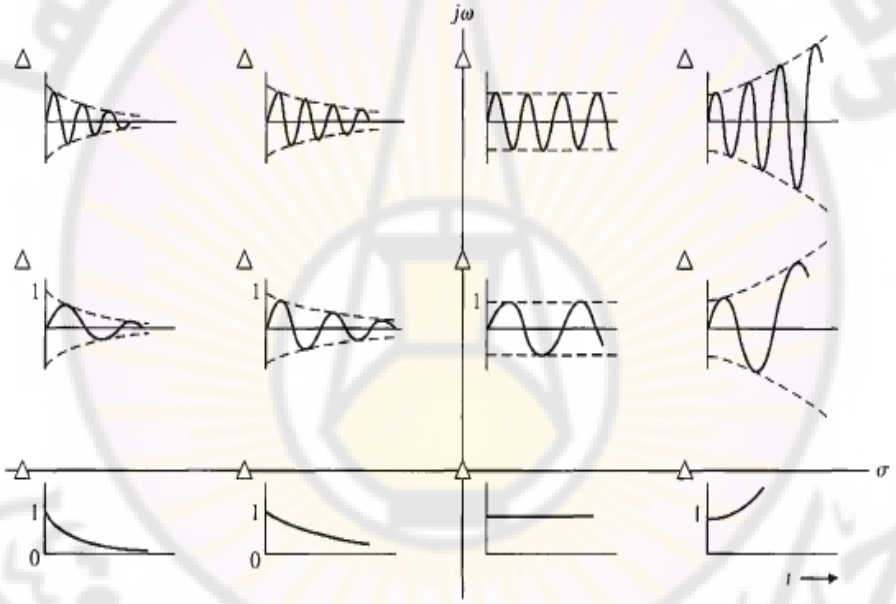
$$y(t)=1+\sum_{i=1}^{M}A_ie^{-\sigma_it}+\sum_{k=1}^{N}D_ke^{-\alpha_kt}\sin\left(\omega_kt+\theta_k\right).....(82-4)$$

حيث $D_k$ ثابت يعتمد على قيم الثوابت $\propto_k$, $\omega_k$, $C_k$, $B_k$. من العلاقة (4-82) نجد أن الاستجابة العابرة تتألف من قيمة الخرج في الحالة المستقرة, وبند أسي, وبند جيبي متخامد. حتى تكون الاستجابة مستقرة (أي ذات قيمة محدودة عند تطبيق إشارة دخل خطوية) يجب أن يقع الجزء الحقيقي للجذور العقدية $(-\propto_k)$ والجذر الحقيقي $(-\sigma_i)$ في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي.




**الشكل (4-26): نظام تحكم ذو تغذية خلفية واحدية.**

يبين الشكل (4-27) الاستجابة العابرة للنظام وذلك من أجل مواقع مختلفة للجذور.




**الشكل (4-27): شكل الاستجابة الخطوية للنظام حسب مواقع الجذور في المستوي اللابلاسي (الشكل لا يُظهر الجذور العقدية المترافقة).**

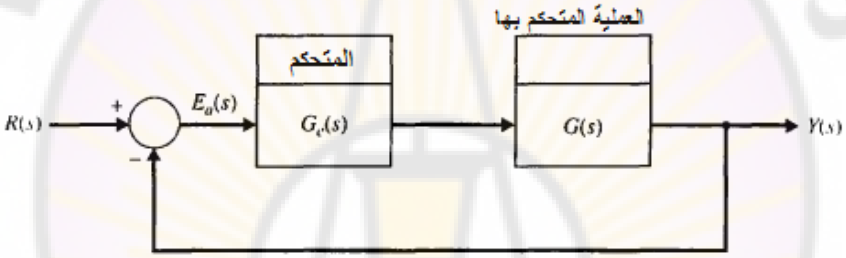
من المهم لمحلل ولمصمم نظام التحكم أن يفهم العلاقة بين مواقع أقطاب وأصفار تابع التحويل, والاستجابة الزمنية عند تطبيق إشارات الدخل المختلفة (خطوية – صاعدة – نبضية), حيث يمكنه تصور تأثير الأصفار والأقطاب على الاستجابات النبضية والخطوية للنظام فيقوم بإضافة, أو بإزالة أو بتحريك أقطاب وأصفار التابع $T(s)$ في المستوي اللابلاسي. أيضاً وبنفس الطريقة يتوجب على المصمم (designer) أن يُظهر

التغيرات الضرورية على مواقع أقطاب وأصفار التابع $T(s)$ لكي يؤثر على النحو المطلوب على الاستجابات الخطوية والنبضية للنظام.

**4-9 خطأ الحالة المستقرة لنظم التحكم ذات التغذية الخلفية:**

**(The steady-state error of feedback control systems)**

إن أحد الأسباب الرئيسية لاستخدام التغذية الخلفية هو إنقاص خطأ الحالة المستقرة للنظام. كما شرحنا سابقاً, يكون خطأ الحالة المستقرة لنظام ذو حلقة مغلقة, أصغر بعدة مرات من خطأ النظام ذو الحلقة المفتوحة. لندرس النظام ذو الحلقة المغلقة المبين بالشكل (4-28).




**الشكل (4-28): نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة (تغذية خلفية واحدية).**

كما رأينا في الفصل الثالث, تعطى إشارة الخطأ بالعلاقة:

$$E(s) = \frac{1}{1+G_c(s)G(s)}R(s)$$

حيث $T_d(s) = 0$ و $N(s) = 0$.

باستخدام نظرية القيمة النهائية يمكننا حساب خطأ الحالة المستقرة:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_c(s)G(s)}R(s)..... \quad (83-4)$$

سندرس فيما يلي خطأ الحالة المستقرة للنظام وذلك من أجل ثلاثة إشارات دخل قياسية وذلك من أجل نظام ذو تغذية خلفية واحدية. كما سندرس خطأ الحالة المستقرة وذلك للنظم المغلقة غير الواحدية $(H(s) \neq 1)$.

- **إشارة الدخل الخطوية:** يُعطى خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق إشارة دخل خطوية بمطال $(A)$, بالعلاقة:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{(A/s)}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{A}{1+\lim_{s\to 0} G_c(s)G(s)}$$

يمكن ملاحظة أن خطأ الحالة المستقرة يتحدد من شكل تابع ربح الحلقة $G_c(s)G(s)$, حيث يُكتب الشكل العام لتابع ربح الحلقة بالعلاقة:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)} \quad .....(84-4)$$

حيث يشير $\prod$ إلى جداء العوامل, و $z_i \neq 0$ , و $p_k \neq 0$ , وذلك من أجل $1 \le i \le M$, و $1 \le k \le Q$.

يعتمد تابع ربح الحلقة على عدد العناصر التكاملية $(N)$ وذلك عندما تسعى $s$ إلى القيمة صفر. إذا كان $N$ أكبر من الصفر فإن $\lim_{s\to 0} G_c(s)G(s)$ يقترب من اللانهاية وبالتالي فإن خطأ الحالة المستقرة يسعى نحو الصفر. غالباً ما يشار إلى عدد العناصر التكاملية $(N)$ في النظام برقم نوع النظام $(Type\ number)$.

من أجل النظام من النوع الصفري (أي $N$=0) يكون خطأ الحالة المستقرة:

$$e_{ss} = \frac{A}{1+G_c(0)G(0)} = \frac{A}{1+K\prod_{i=1}^{M} z_i \Big/ \prod_{k=1}^{Q} p_k} \quad .....(85-4)$$

يُشار إلى الثابت $G_c(0)G(0)$ بثابت خطأ الموضع $K_p$ (أو position error constant), حيث يعطى ثابت خطأ الموضع بالعلاقة:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_c(s)G(s)$$

بالتالي يعطى خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق دخل خطوي ذو مطال $(A)$ بالعلاقة:

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} \quad ..... \quad (86\text{-}4)$$

عند تطبيق إشارة دخل خطوية ذات مطال $(A)$, ينعدم خطأ الحالة المستقرة إذا احتوى $G_c(s)G(s)$ على أكثر من عنصر تكاملي واحد (أي $N \ge 1$) وذلك لأن:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1 + K\prod_{i=1}^{M} z_i \Big/ s^N \prod_{k=1}^{Q} p_k}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{As^N}{s^N + K\prod_{i=1}^{M} z_i \Big/ \prod_{k=1}^{Q} p_k} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (87-4)$$

يسمى خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق دخل خطوي بالخطأ الستاتيكي أو بخطأ الموضع. يعتبر الخطأ الستاتيكي أحد أهم خصائص الاستجابة الخطوية والتي تسمح بتقدير دقة نظام الحلقة المغلقة حيث كلما قّل خطأ الموضع كلما زادت دقة النظام.

- **الإشارة الصاعدة:** يُعطى خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق إشارة صاعدة بميل $(A)$ بالعلاقة:

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} \frac{s\left(A/s^2\right)}{1 + G_c(s)G(s)} = lim_{s\to 0} \frac{A}{s + sG_c(s)G(s)}$$

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} \frac{A}{sG_c(s)G(s)} \ldots\ldots\ldots (88-4)$$

من العلاقة (4-88) يمكن ملاحظة أن خطأ الحالة المستقرة يعتمد على عدد العناصر التكاملية المحتواة في $G_c(s)G(s)$, فإذا كانت $N = 0$ فخطأ الحالة المستقرة يسعى نحو اللانهاية أما إذا كان $N = 1$` فيحسب خطأ الحالة المستقرة بالعلاقة:

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} \frac{A}{K\prod_{i=1}^{M}(s + z_i) \Big/ s\prod_{k=1}^{Q}(s + p_k)}$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K\prod_{i=1}^{M} z_i \Big/ \prod_{k=1}^{Q} p_k} = \frac{A}{K_v} \ldots\ldots\ldots (89-4)$$

يسمى $K_v$ بثابت خطأ السرعة أو (velocity error constant). يُحسب ثابت خطأ السرعة بالعلاقة: $K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$

إذا احتوى تابع التحويل $G_c(s)G(s)$ على عنصري تكامل أو أكثر $(N \geq 1)$, ينعدم خطأ الحالة المستقرة. عندما يكون $N = 1$ يكون خطأ الحالة المستقرة ذو قيمة

محدودة ولكن سرعة إشارة الخرج في الحالة المستقرة يساوي سرعة إشارة الدخل, كما سنرى لاحقاً.

- **إشارة التسارع:** عند تطبيق إشارة دخل على شكل قطع مكافئ, أي $r(t) = At^2/2$, يعطى خطأ الحالة المستقرة بالعلاقة:

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} \frac{s\left(A/s^3\right)}{1+G_c(s)G(s)} = lim_{s\to 0} \frac{A}{s^2 G_c(s)G(s)} .....(90-4)$$

من العلاقة (4-90) نجد أن خطأ الحالة المستقرة ذو قيمة لا نهائية وذلك إذا احتوى $G_c(s)G(s)$ على عنصر تكاملي واحد ولكن إذا احتوى $G_c(s)G(s)$ على عنصري تكامل يصبح خطأ الحالة المستقرة:

$$e_{ss} = \frac{A}{K\prod_{i=1}^{M} z_i \Big/ \prod_{k=1}^{Q} p_k} = \frac{A}{K_a} .....(91-4)$$

يسمى $K_a$ بثابت خطأ التسارع أو (Acceleration error constant). يُحسب ثابت خطأ التسارع بالعلاقة: $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G_c(s)G(s)$

من الملاحظ من هذه العلاقة أنه إذا تجاوز عدد العناصر التكاملية الثلاثة (أي $N \geq 3$), فسينعدم خطأ الحالة المستقرة.

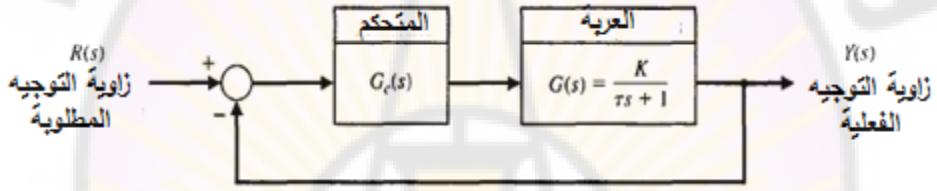
مما سبق نجد أن نظم التحكم يمكن أن توصف بدلالة رقم النوع (type number) وثوابت الخطأ $K_p$, $K_v$ و $K_a$. يلخص الجدول (4-9) تعريفات ثوابت الخطأ وخطأ الحالة المستقرة وذلك من أجل إشارات الدخل القياسية (الخطوية – الصاعدة – المتسارعة). سنقوم بشرح الفائدة من ثوابت الخطأ وذلك عبر المثال التالي.

**مثال 4-8: التحكم بمقود عربة متحركة:**

تُصمم عادة العربة المتحركة المقصودة بالمثال لمساعدة الأشخاص ذوي الاحتياجات الخاصة. يُمثل نظام التحكم بمقود هذا النوع من العربات بواسطة المخطط الصندوقي المبين بالشكل (4-29), حيث يعطى متحكم المقود بالعلاقة:

$$G_c(s) = K_1 + K_2/s \quad ..... \quad (92-4)$$

| الجدول (4-9): ملخص أخطاء الحالة المستقرة | | | |
|---|---|---|---|
| عدد العناصر التكاملية أو رقم النوع | إشارة الدخل | | |
| | الخطوية $r(t)=A$ | الصاعدة $r(t)=At$ | المتسارعة $r(t)=At^2/2$ |
| 0 | $e_{ss}=A/(1+K_p)$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | $e_{ss}=0$ | $e_{ss}=A/K_v$ | $\infty$ |
| 2 | $e_{ss}=0$ | $e_{ss}=0$ | $e_{ss}=A/K_a$ |




**الشكل (4-29): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بمقود عربة متحركة.**

يعطى خطأ الحالة المستقرة لهذا النظام عند تطبيق دخل خطوي, بافتراض أن $K_2 = 0$, بالعلاقة:

$$e_{ss}=\frac{A}{1+K_p}.....(93-4)$$

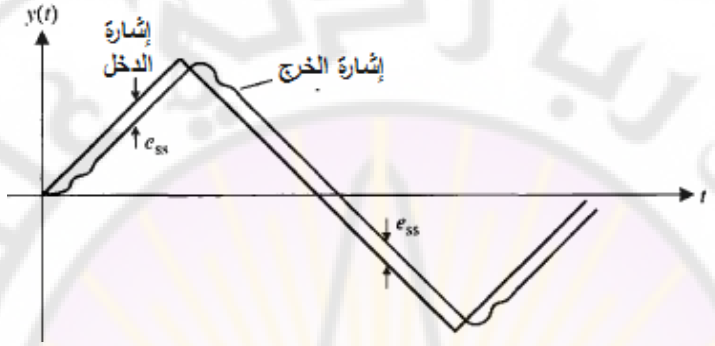
عندما تكون قيمة $K_2$ أكبر من الصفر, يصبح لدينا نظام من النوع الأول, حيث: $G_c(s)=[K_1s+K_2]/s$. في هذه الحالة يكون خطأ الحالة المستقرة معدوم وذلك بالطبع عند تطبيق إشارة دخل خطوية. إذا تم تطبيق إشارة دخل صاعدة, يُحسب خطأ الحالة المستقرة في هذه الحالة بالعلاقة:

$$e_{ss}=\frac{A}{K_v}.....(94-4)$$

حيث: $K_v=\lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)=K_2K$. يبين الشكل (4-30) الاستجابة العابرة للعربة المتحركة وذلك عند تطبيق إشارة دخل مثلثية وعندما يكون المتحكم المستخدم: $G_c(s)=[K_1s+K_2]/s$. تُظهر هذه الاستجابة العابرة بوضوح تأثير خطأ الحالة المستقرة

$e_{ss}$ والذي يتناسب عكسياً مع $K_v$. من الملاحظ أيضاً من هذه الاستجابة أن إشارة الخرج تصل إلى السرعة المطلوبة والمحددة بسرعة إشارة الدخل

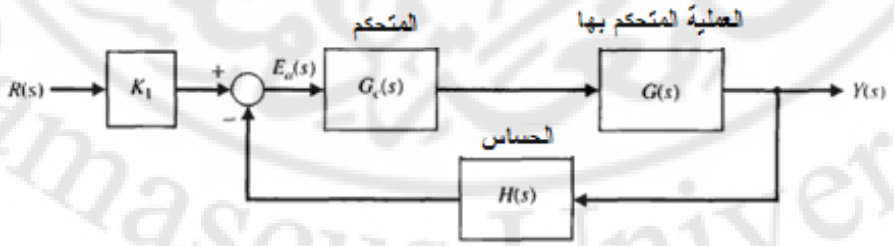
■




**الشكل (4-30): الاستجابة العابرة للإشارة المثلثية.**

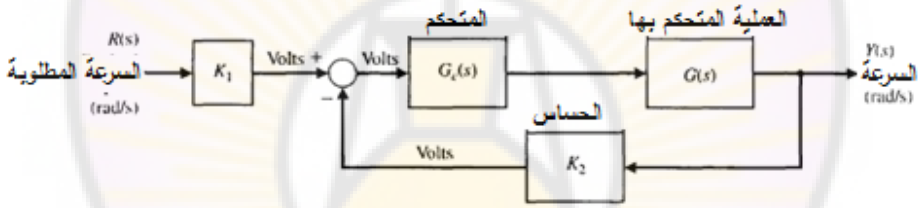
تصف ثوابت الخطأ $K_p$, $K_v$ و $K_a$ قدرة النظام على إنقاص أو الحد من خطأ الحالة المستقرة حيث تُستخدم كمؤشر عددي على أداء الحالة المستقرة. يَحسب مصمم نظام التحكم ثوابت الخطأ ومن ثم يقوم بتحديد الطرق التي من شأنها زيادة قيم ثوابت الخطأ مع المحافظة على استجابة عابرة مقبولة.

في مثالنا سنعمل على زيادة الربح $(K_2K)$ وذلك لزيادة $(K_v)$, والذي يعمل بدوره على إنقاص خطأ الحالة المستقرة $(e_{ss})$. بالمقابل زيادة الربح $(K_2K)$ تعمل على إنقاص غير متوقع لمعامل تخامد النظام المغلق $(\zeta)$, وبالتالي سيؤدي ذلك إلى اهتزاز أكبر في الاستجابة الخطوية للنظام. مما سبق يتوجب علينا القيام بملائمة تحقق لنا أكبر ثابت خطأ $(K_v)$ وبنفس الوقت أصغر قيمة لـ $(\zeta)$ بحيث ينتج اهتزاز مسموح به.

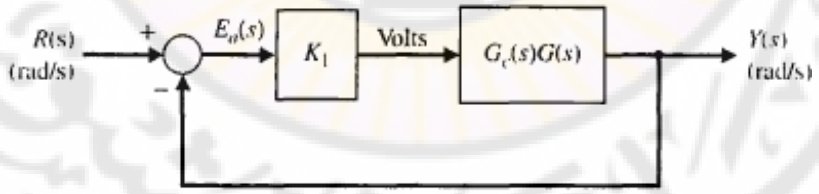



**الشكل (4-31): نظام مغلق ذو تغذية خلفية غير واحدية.**

في دراستنا السابقة, افترضنا أن النظام المغلق ذو تغذية خلفية واحدية ($H(s) = 1$). سندرس الآن النظم المغلقة ذات التغذية الخلفية غير الواحدية, والممثلة بالمخطط الصندوقي المبين بالشكل (4-31). في هذه النظم تكون واحدة إشارة الخرج $Y(s)$ مختلفة عن واحدة إشارة خرج الحساس. لنأخذ على سبيل المثال نظام التحكم بسرعة محرك والمبين بالشكل (3-32) حيث $H(s) = K_2$. إن الثوابت $K_1$ و $K_2$ تعمل على تحويل مجموعة من الواحدات حيث في مثالنا يتم التحويل من *rad/sec* إلى فولت. يمكننا اختيار قيمة $K_1$ لذلك سنختار $K_1 = K_2$, وسنعمل على نقل الصندوق ذو تابع التحويل $K_1$ إلى يمين نقطة التجميع لنحصل على المخطط الصندوقي المبين الشكل (4-33), وهو نظام مغلق ذو تغذية خلفية واحدية. بالتالي افتراضنا خلال دراستنا أن النظم المغلقة ذات تغذية خلفية واحدية هو افتراض صحيح.




**الشكل (4-32): نظام التحكم بالسرعة.**




**الشكل (4-33): نظام التحكم بالسرعة المبين بالشكل (4-32) من أجل $K_1 = K_2$.**

لنعود الآن للنظام المبين بالشكل (4-31) ولنفرض أن: $H(s) = K_2/(1+\tau s)$, حيث $K_2$ هو الربح الساكن (DC gain), أي: $\lim_{s\to 0} H(s) = K_2$. إن المعامل $K_2$ هو معامل تحويل الواحدات. إذا عيّرنا المعامل $K_2$ بحيث $K_1 = K_2$ بالتالي فإن المخطط الصندوقي للنظام

يصبح مطابق لذلك المبين بالشكل (4-33) وهذا يمكننا من حساب خطأ الحالة المستقرة.

لنبرهن هذه النقطة وذلك عن طريق دراسة خطأ النظام $E(s)$ حيث:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = [1 - T(s)]R(s) \quad \text{.....} \quad (95-4)$$

طالما أن: $Y(s) = T(s)R(s)$ وأيضاً:

$$T(s) = \frac{K_1 G_c(s)G(s)}{1 + H(s)G_c(s)G(s)} = \frac{(1+\tau s)K_1 G_c(s)G(s)}{1 + \tau s + K_1 G_c(s)G(s)}$$

بالتالي تصبح علاقة الخطأ:

$$E(s) = \frac{1 + \tau s(1 - K_1 G_c(s)G(s))}{1 + \tau s + K_1 G_c(s)G(s)} R(s)$$

بالتالي يُحسب خطأ الحالة المستقرة لإشارة دخل خطوية واحدية بالعلاقة:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1 + K_1 \lim_{s\to 0} G_c(s)G(s)} \quad \text{.....} \quad (96-4)$$

افترضنا في هذا المثال أن: $\lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = 0$.

**مثال 4-9: خطأ الحالة المستقرة:**

في النظام المبين بالشكل (4-31) وبافتراض أن:

$$G_c(s) = 40, \quad G(s) = \frac{1}{s+5}, \quad H(s) = \frac{20}{s+10} = \frac{2}{0.1s+1}$$

لنوجد قيمة $K_1$ المناسبة, ولنحسب خطأ الحالة المستقرة وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية. لحساب خطأ الحالة المستقرة يمكننا استخدام المعادلة (4-96), حيث سنفرض أن $K_1 = K_2 = 2$:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_1 \lim_{s\to 0} G_c(s)G(s)} = \frac{1}{1 + 2(40)(1/5)} = \frac{1}{17}$$

أي أن قيمة خطأ الحالة المستقرة يساوي (5.9%) من مطال إشارة الدخل الخطوية الواحدية.

**مثال 4-10: النظام المغلق ذو التغذية الخلفية غير الواحدية:**

لندرس النظام المبين بالشكل (4-34) حيث افترضنا أنه لا يمكن إدخال ربح $K_1$ بعد $R(s)$, كما فعلنا في النظام المبين بالشكل(4-31).

في هذه الحالة فإن الخطأ الفعلي للنظام هو الخطأ المعطى بالعلاقة (4-95):

$$E(s) = [1 - T(s)]R(s) .$$

لنعمل الآن على تحديد القيمة المناسبة للربح ($K$) بحيث يكون خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق دخل خطوي, أصغر ما يمكن. إن خطأ الحالة المستقرة:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s[1 - T(s)]\frac{1}{s}$$

حيث: $T(s) = \dfrac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} = \dfrac{K(s+4)}{(s+2)(s+4)+2K}$ و $T(0) = \dfrac{4K}{8+2K}$.

بالتعويض في علاقة $e_{ss}$ نجد قيمة الخطأ في الحالة المستقرة. يمكننا الوصول لخطأ حالة مستقرة معدوم وذلك عندما:

$$e_{ss} = 1 - T(0) = 0 \Rightarrow \; T(0) = \frac{4K}{8+2K} = 1$$

أي:

$$8 + 2K = 4K$$

وبالتالي القيمة $K = 4$ تؤدي لخطأ حالة مستقرة معدوم. ■

لنعمل على توسيع فكرة ثوابت الخطأ إلى نظم التحكم المغلقة غير الواحدية, ولكن قبلاً لنتذكر أن المخطط الصندوقي للنظام المغلق غير الواحدي يمكن أن يحول إلى نظام مغلق واحدي وذلك بإعادة ترتيب هذا المخطط. لندرس النظام المغلق غير الواحدي المبين بالشكل (4-31) حيث سنفترض أن $K_1 = 1$. في هذه الحالة يعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة بالعلاقة:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{Z(s)}{1 + Z(s)}$$

حيث:

$$Z(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)\big(H(s) - 1\big)}$$

لاحظ أن $Z(s)$ هو تابع تحويل الحلقة للنظام المكافئ ذو التغذية الخلفية الواحدية. بالتالي تعطى ثوابت الخطأ للنظم المغلقة ذات التغذية الخلفية غير الواحدية العلاقات:

$$K_p = \lim_{s\to 0} Z(s)$$
$$K_v = \lim_{s\to 0} sZ(s)$$
$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 Z(s)$$

لاحظ أنه عندما $H(s) = 1$ يصبح $Z(s)$ مساوياً لـ $(G_c(s)G(s))$, ونحصل على نفس علاقات ثوابت الخطأ والتي سبق أن استنتاجها من أجل التغذية الخلفية الواحدية.

**4-10 استجابة النظم ذات الدرجات العليا:**

يمكن حساب استجابة النظم ذات الدرجات العليا (أكبر من 2) باستخدام مبدأ التراكم حيث يُكتب تابع تحويل النظام على شكل مجموع عدة حدود, على أن تكون درجة كل منها إما الدرجة الأولى أو الثانية.

لشرح هذه النقطة لنأخذ نظام من الدرجة الثالثة ممثل بتابع التحويل التالي:

$$G(s) = \frac{K}{(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)} \quad .....(97-4)$$
$$a_1 \in \Re, \qquad a_2, a_3 \in C$$

يمكن كتابة التابع $G(s)$ على النحو التالي:

$$G(s) = \frac{A}{s-a_1} + \frac{Bs+C}{(s-a_2)(s-a_3)} \quad .....(98-4)$$

تعطى إشارة خرج النظام في المستوي اللابلاسي عند تطبيق إشارة دخل خطوية بالعلاقة:

$$X_0(s) = \frac{A}{s(s-a_1)} + \frac{Bs+C}{s(s-a_2)(s-a_3)} \quad .....(99-4)$$

بالعودة إلى المجال الزمني باستخدام تحويل لابلاس العكسي يصبح لدينا:

$$x_0(t) = x_{01}(t) + x_{02}(t) \quad .....(100-4)$$

سنعالج المثال التالي وذلك لتوضيح طريقة حساب استجابة النظم ذات الدرجات العليا.

**مثال 4-10:**

يبين الشكل (4-34) المخطط الصندوقي لنظام التحكم بدرجة الحرارة والحاوي على توابع تحويل لمقاومة حرارية ولصمام موصلين على التسلسل. تمثل إشارة دخل النظام $x_i(t)$

درجة الحرارة المطلوبة وإشارة الخرج $x_o(t)$ تمثل فتحة الصمام. أوجد الاستجابة الخطوية للنظام وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية, وعند شروط ابتدائية معدومة.

**الشكل (4-34): التمثيل الصندوقي لنظام التحكم بدرجة الحرارة.**

من الشكل (4-34) نجد:

$$X_0(s)=\frac{1}{s}.\frac{25}{(1+2s)(s^2+s+25)}.....(101-4)$$

$$X_0(s)=\frac{12.5}{s(s+0.5)(s^2+s+25)}$$

$$X_0(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+0.5)}+\frac{Cs+D}{s^2+s+25}.....(102-4)$$

بتوحيد المقامات في المعادلة (4-102) ومقارنة النتيجة مع المعادلة (4-101) نجد:

$$12.5=\left(s^3+1.5s^2+25.5s+12.5\right)A+\left(s^3+s^2+25s\right)B$$
$$+\left(s^3+0.5s^2\right)C+\left(s^2+0.5s\right)D.....(103-4)$$

بمساواة المعاملات في كلا الطرفين نجد:

$$(s^3): \quad 0=A+B+C$$
$$(s^2): \quad 0=1.5A+B+0.5C+D$$
$$(s^1): \quad 0=25.5A+25B+0.5D$$
$$(s^0): \quad 12.5=12.5A+B+0.5C+D$$

بالحل المشترك للمعادلات السابقة نجد:

$$A=1, \quad B=-1.01, \quad C=0.01, \quad D=-0.5$$

بتعويض قيم المعاملات السابقة في المعادلة (4-102) نجد:

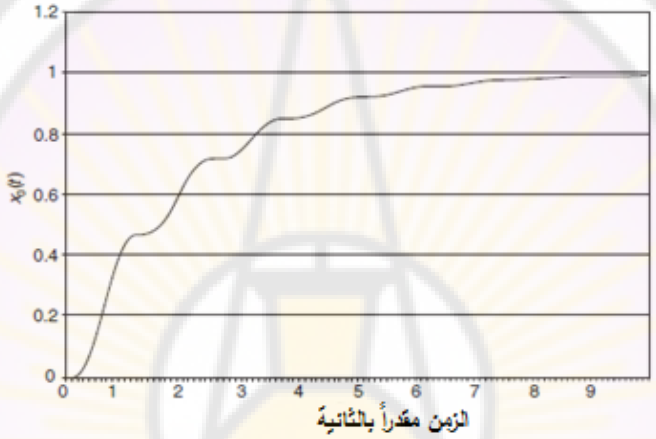
$$X_o(s)=\frac{1}{s}-\frac{1.01}{s+0.5}+\frac{0.01s-0.5}{s^2+s+25}.....(104-4)$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على المعادلة السابقة نجد:

$$x_o(t) = 1 - 1.01e^{-0.5t} - 0.01e^{-0.5t}(10.16\sin 4.97t - \cos 4.97t) \quad \text{.....(105-4)}$$

تبين المعادلة (105-4) أن الاستجابة العابرة لنظام من الدرجة الثالثة تحوي كلا الاستجابتين العابرتين لنظام من الدرجة الأولى والثانية, حيث أن الثابت الزمني لنظام من الدرجة الأولى (2) ثانية والثابت الزمني المكافئ لنظام الدرجة الثانية (8) ثانية.

إن تردد التخامد الطبيعي للنظام من الدرجة الثانية يساوي ( 4.97 *rad/sec*). يبين الشكل (35-4) الاستجابة الزمنية للنظام المدروس. ■




**الشكل (4-35): الاستجابة الزمنية لنظام من الدرجة الثانية.**

**4-11 دلائل الأداء (Performance indices):**

إن العديد من المراجع العلمية الحديثة تؤكد على الصياغة الرياضية لدلائل أداء نظم التحكم. تفترض نظم التحكم الحديثة أن المهندس المصمم يمكن أن يحدد عددياً الأداء المطلوب للنظام ومن ثم يقيس دليل على هذا الأداء لتحديد فيما إذا كان ينطبق مع الأداء المطلوب. إن القياس العددي لدلائل أداء نظام ضروري في نظم التحكم التأقلمية الحديثة (Modern adaptive control systems), في الاختيار الأمثل لبارامترات نظم التحكم, وفي تصميم نظم التحكم المثلى.

بغض النظر فيما إذا كان الهدف هو تحسين تصميم النظام أو تصميم نظام التحكم الأمثل فأنه يتوجب علينا قياس دليل الأداء. لنقوم الآن بتعريف دليل الأداء:

**دليل الأداء (Performance index) هو مقياس عددي لأداء نظام, حيث يتم اختياره بحيث يتم التركيز على المعايير المهمة لأداء للنظام.**

يعتبر النظام هو الأمثل عندما يتم ضبط البارامترات بحيث يصل دليل الأداء لأصغر قيمة ممكنة. بالإضافة لذلك يجب أن يكون دليل الأداء ذو قيمة موجبة دائماً أو صفرية. بالتالي يعتبر النظام الأفضل أو الأمثل وذلك عندما يقوم النظام بتصفير هذا الدليل.

أول دليل أداء سنقوم بتعريفه هو تكامل مربع الخطأ (أو The integral of the square of the error أو ISE), والذي يُعرف بالعلاقة التالية:

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt \qquad .....(106-4)$$

إن الحد العلوي للتكامل ($T$) ذو قيمة منتهية حيث يتم اختياره بحيث يقترب التكامل من قيمة مستقرة. جرت العادة على اختيار $T = T_s$ حيث $T_s$ زمن استقرار النظام.

يبين الشكل (4-36) الاستجابة الخطوية لنظام مغلق ذو تغذية خلفية, إشارة الخطأ, مربع إشارة الخطأ, وتكامل مربع إشارة الخطأ.

يعتبر هذا المعيار أحد الوسائط المميزة بين النظم ذات التخامد الزائد بشدة والنظم ذات التخامد الناقص بشدة. يعتبر دليل الأداء المعطى بالعلاقة (4-106) من الدلائل العملية وذلك لإمكانية حسابه بسهولة.

لننتقل لدليل أداء آخر هو تكامل القيمة المطلقة لإشارة الخطأ (أو The integral of the absolute magnitude of the error أو IAE), والذي يُعرف بالعلاقة التالية:

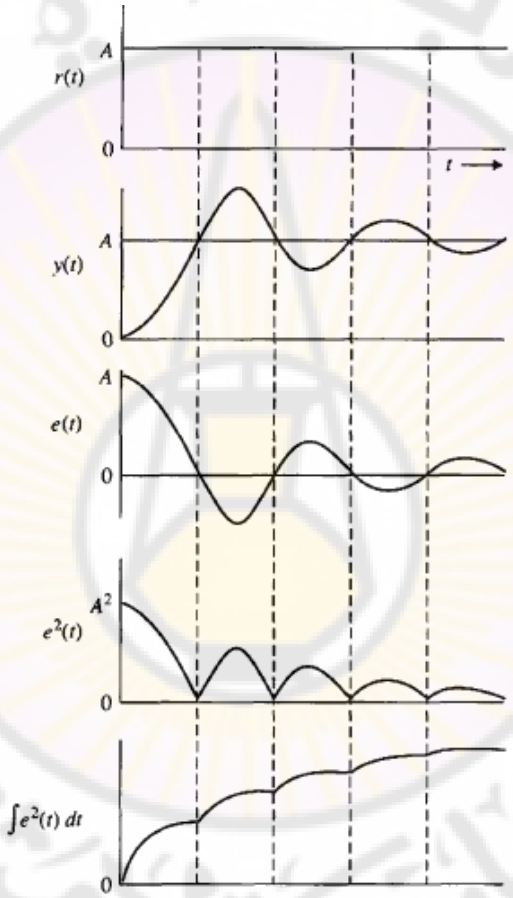
$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt \qquad .....(107-4)$$

يعتبر هذا الدليل مفيد بشكل خاص لدراسة النظم باستخدام المحاكاة الحاسوبية.

بهدف إنقاص المساهمة الكبيرة لإشارة الخطأ في قيمة التكامل المعطى بالعلاقة (4-107) وخصوصاً عند الحالة الابتدائية, بالإضافة لضرورة التأكيد على حقيقة أن الخطأ يقع متأخراً في إشارة الاستجابة العابرة للنظام, فقد تم اقتراح دليل الأداء التالي:

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt.....(108-4)$$

يمثل هذا الدليل المعطى بالعلاقة (4-108) إلى تكامل جداء الزمن بالقيمة المطلقة للخطأ (أو The integral of time multiplied by the squared error أو ITAE).




**الشكل (4-36): حساب تكامل مربع إشارة الخطأ.**

يوجد دليل أداء آخر هو ITSE, أي تكامل جداء الزمن بمربع إشارة الخطأ (أو The integral of time multiplied by the squared error):

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt.....(109-4)$$

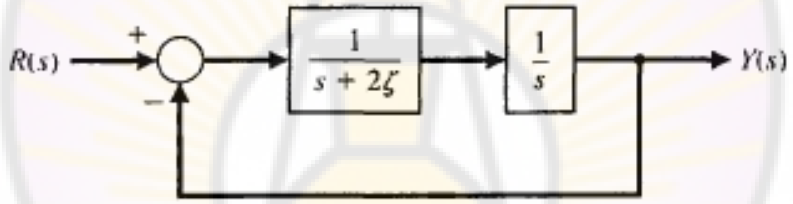
يعطى الشكل العام لتكامل الأداء بالعلاقة التالية:

$$I = \int_0^T f\left(e(t), r(t), y(t), t\right)dt \text{.....} (110-4)$$

حيث $f$ هو تابع لإشارات الخطأ, الدخل, الخرج والزمن. إن الحصول على القيم الصغرى لـ IAE أو ISE ذو معنى عملي كبير, فعلى سبيل المثال, إن تصغير دليل الأداء يمكن أن ينعكس على تقليل استهلاك الوقود وذلك عندما يكون النظام المدروس عبارة عن طائرة. لشرح فائدة دلائل الأداء لتحليل وتصميم نظم التحكم سنعالج المثاليين التاليين.

**مثال 4-11:**

يبين الشكل (4-37) نظام تحكم ذو تغذية خلفية, حيث لدينا في هذا النظام $\omega_n = 1, K = 1$.

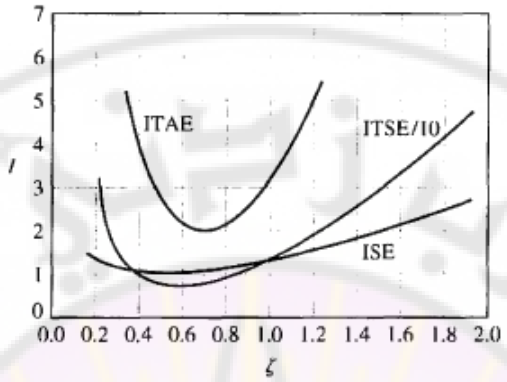



**الشكل (4-37): نظام تحكم ذو تغذية خلفية.**

يعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة لهذا النظام:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \text{.....} (111-4)$$

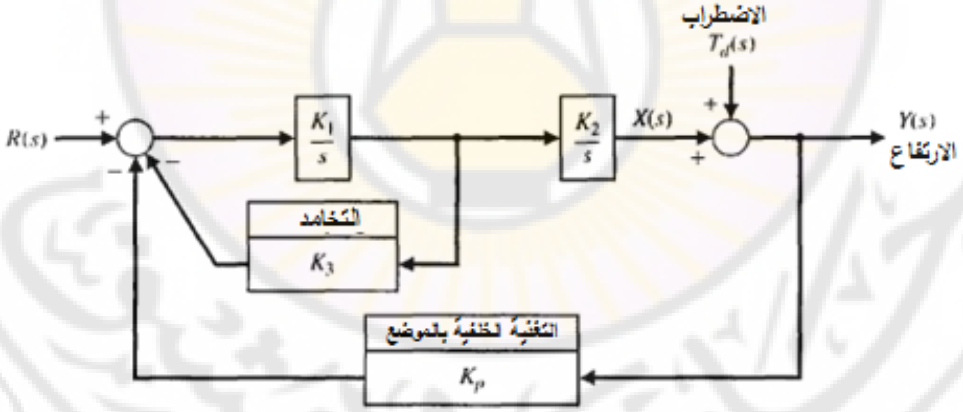
يبين الشكل (4-38) دلائل الأداء الثلاثة ISE, ITAE, ITSE, وذلك من أجل عدة قيم لمعامل التخامد $\zeta$, وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية. تبين هذه المنحنيات انتقائية الدليل ITAE بالمقارنة مع الدليل ISE. إن قيمة معامل التخامد المختارة بناءاً على دليل الأداء هو (0.7). بالعودة إلى نظام الدرجة الثانية, هذه النتيجة تعطي استجابة خطوية ناعمة حيث أن قيمة التجاوز النسبي 4.6%.




**الشكل (4-38): دلائل الأداء الثلاثة لنظام من الدرجة الثانية حيث** $\omega_n = 1, K = 1$.

**مثال 4-12: نظام التحكم بموجه تلسكوب فضائي:**

يبين الشكل (4-39) المخطط الصندوقي لنظام التحكم بموجه تلسكوب فضائي. في هذا المثال نرغب باختيار قيمة الربح $K_3$ والتي تعمل على تصغير (تقليل) تأثير الاضطراب $T_d(s)$, حيث في هذا المثال, يمثل الاضطراب $T_d(s)$ خطأ الموضع الابتدائي.




**الشكل (4-39): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بموجه تلسكوب فضائي.**

يُعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة بالنسبة للاضطراب بالعلاقة التالية:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{s(s + K_1K_3)}{s^2 + K_1K_3s + K_1K_2K_p} \quad \text{.....(112-4)}$$

إن القيم المرجعية للثوابت هي: $K_1 = 0.5$ و $K_1K_2K_p = 2.5$. بالتالي فإن التردد الطبيعي للنظام هو: $f_n = \sqrt{2.5}/2\pi = 0.25 cycles/sec$. لنقوم الآن بحساب القيمة الصغرى لـ ISE تحليلياً وذلك عند تطبيق إشارة خطوية واحدية على الدخل $T_d(s)$, وذلك وفق الخطوات التالية:

- نحسب إشارة الخرج الممثلة للموضع y(t):

$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{\beta}.\left[e^{-0.25K_3 t}\sin\left(\frac{\beta}{2}t + \Psi\right)\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (113-4)$$

حيث: $\beta = \sqrt{10 - K_3^2/4}$

- نقوم بتربيع $y(t)$, ومن ثم نجري تكامل لـ $y^2(t)$:

$$I = \int_0^\infty \frac{10}{\beta^2}.\left[e^{-0.5K_3 t}\sin^2\left(\frac{\beta}{2}t + \Psi\right)\right]dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{10}{\beta^2}.\left[e^{-0.5K_3 t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\beta t + 2\Psi)\right)\right]dt$$

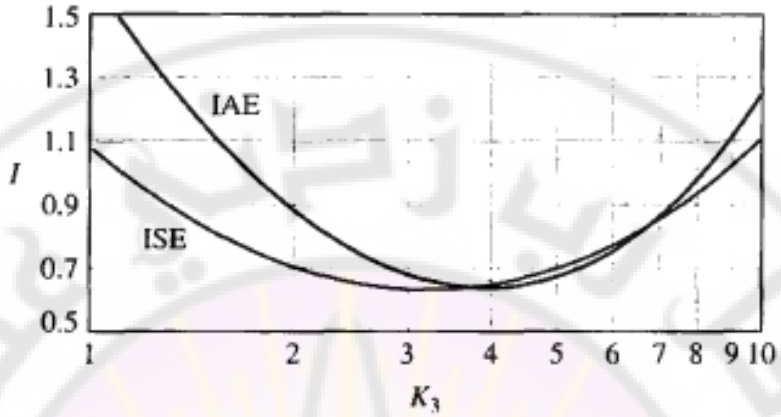
$$= \frac{1}{K_3} + 0.1K_3$$

- نقوم باشتقاق $I$ ومن ثم نعدم هذا المشتق: $\frac{dI}{dK_3} = -K_3^{-2} + 0.1 = 0$

إن القيمة الصغرى لـ ISE تقابل $K_3 = \sqrt{10} = 3.2$, والتي تقابل بدورها $\zeta = 0.5$. يبين الشكل (4-40) منحنيات الأداء ISE و IAE لهذا النظام. من هذه المنحنيات نجد أن القيمة الصغرى لـ IAE تقابل $K_3 = 4.2$ و $\zeta = 0.665$.

إن دليل الأداء ISE يمكن حسابه تحليلياً بينما دليل الأداء IAE لا يمكن حسابه تحليلياً لذلك نلجأ لقياسه من أجل عدة قيم لـ $K_3$ ومن ثم نرسم المنحني. ■

يكون نظام التحكم هو الأمثل وذلك عندما يتم تصغير دليل الأداء إلى أصغر قيمة ممكنة وبالتالي فإن القيمة المثلى للبارامترات تعتمد مباشرة على دليل الأداء المحدد, وهذا ما رأيناه في الأمثلة (4-11) و (4-12) حيث وجدنا أن القيمة المثلى للبارامترات تختلف باختلاف دليل الأداء.




**الشكل (4-40): دلائل الأداء لنظام التحكم بموجه التلسكوب الفضائي.**

ليكن لدينا نظام ذو حلقة تغذية خلفية معطى بتابع التحويل التالي:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ..... + b_1 s^1 + b_0} .....(114-4)$$

يتمتع هذا النظام بالخصائص التالية:

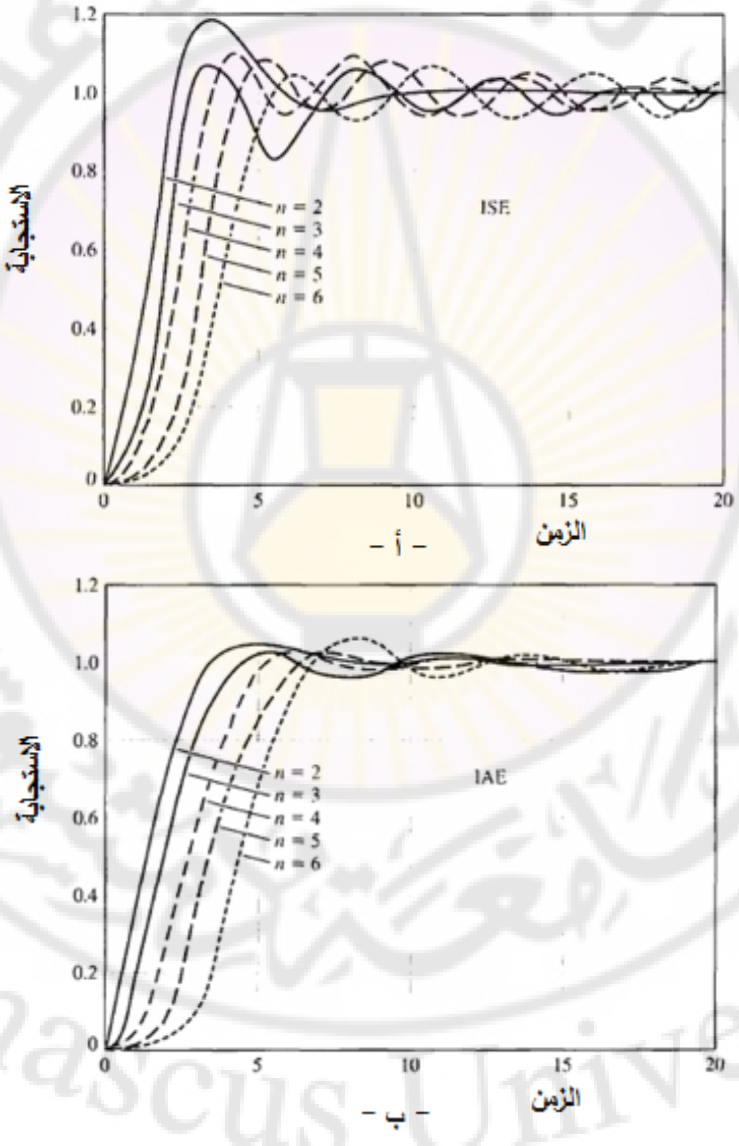
- خطأ الحالة المستقرة معدوم وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية.
- عدد الأقطاب $n$, بينما لا يملك النظام أي صفر.

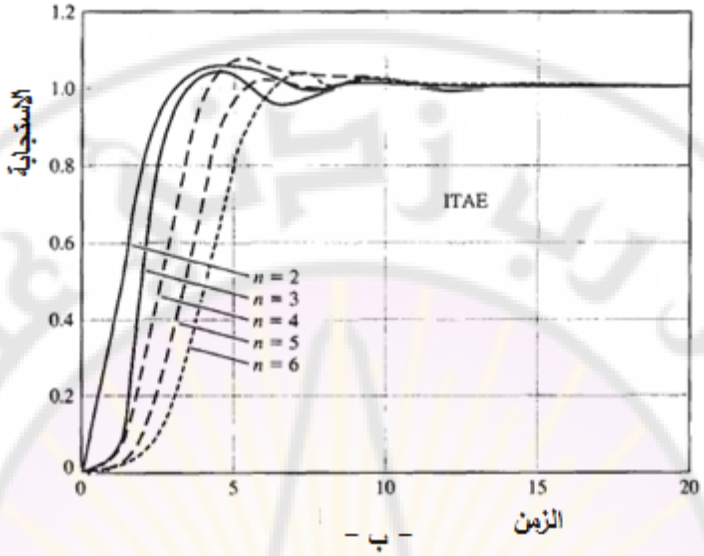
يبين الجدول (4-10) القيم المثلى لمعاملات تابع التحويل وذلك بالنسبة لدليل الأداء ITAE.

| **الجدول (4-10): المعاملات المثلى لـ $T(s)$ وذلك بالنسبة لدليل الأداء ITAE, وعند تطبيق دخل خطوي.** |
|---|
| $s + \omega_n$ |
| $s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$ |
| $s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$ |
| $s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$ |
| $s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$ |
| $s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$ |

يبين الشكل (4-41) الاستجابة الخطوية للنظام الممثل بتابع التحويل (4-114) وذلك بالاعتماد على القيم المثلى للمعاملات وبالنسبة لدلائل الأداء ISE, IAE, ITAE. في

هذه المنحنيات المحور الأفقي هو $(\omega_n t)$. بالطبع تتوفر أشكال قياسية أخرى وذلك بالنسبة لدلائل الأداء الأخرى مما يساعد مصمم نظام التحكم على تحديد مجال قيم معاملات تابع تحويل النظام المراد تصميمه. يبين المثال التالي الفائدة من الأشكال القياسية لتوابع التحويل وذلك بالنسبة لدليل الأداء ITAE.






**الشكل (4-41): الاستجابة الخطوية لتابع التحويل القياسي باستخدام القيم المثلى للمعاملات, وذلك من أجل دلائل الأداء: أ- ISE ب- IAE جـ- ITAE. المحور الأفقي هو الزمن القياسي ($\omega_n t$).**

**مثال 4-13: التحكم بكاميرتين (Two-camera control):**

يبين الشكل (4-42) النظام المراد التحكم به. يُراد في هذا النظام تصوير الشخص أو الممثل ليبدو وكأنه ضمن بيئة معينة (أبنية – شارع – منظر طبيعي) بينما هو في الواقع يقف ضمن مكان التصوير المغلق ذو الخلفية الزرقاء القاتمة. كما هو ملاحظ في هذا الشكل يتألف النظام من كاميرتين أمامية وخلفية ( Foreground and Background cameras). تقوم الكاميرا الأمامية, والتي يمكن أن تكون كاميرة فيديو أو سينمائية, بتصوير الممثل الواقف ضمن مكان التصوير. يتوجب على الكاميرة الخلفية أن تقوم بتصوير صورة الخلفية المراد إظهارها خلف الممثل علماً أن صورة هذه الخلفية موضوعة أمام الكاميرة الخلفية ويتم تصويرها بواسطة عدسات مقربة. تقوم الكاميرا الخلفية بإعادة تدوير صور الكاميرا الأمامية ليتوافق مع مقياس تصوير الصورة الخلفية وذلك بهدف إظهار حجم الممثل بشكل متوافق مع الصورة الخلفية وليبدو وكأنه يقف ضمن الصورة

الخلفية. يقوم نظام التحكم بالفيديو (video control) بإظهار الصورة المركبة (الممثل + الخلفية) ويقوم بتسجيلها. إذاً مما سبق يتألف النظام من كاميرتين إحدها تصور الممثل والأخرى تصور الخلفية. إن التحدي في هذا النظام هو التنسيق السريع والدقيق بين الكاميرتين وذلك باستخدام إشارة الحساس المركب على الكاميرا الأمامية وذلك للتحكم بمحرك السيرفو الذي يقوم بتحريك الكاميرا الخلفية. يبين الشكل (4-42) المخطط الصندوقي للنظام. في هذا النظام نريد تحريك الكاميرا الخلفية بواسطة محرك السيرفو ليتبع موضع الكاميرا الأمامية التي تقوم بتصوير الممثل. إن تابع تحويل النظام المغلق:

$$T(s) = \frac{K_a K_m \omega_0^2}{s^3 + 2\zeta\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + K_a K_m \omega_0^2} \quad \text{.....(115-4)}$$

من الجدول (4-10), إن الشكل القياسي لنظام من الدرجة الثالثة يتطلب أن يكون:

$$2\zeta\omega_0 = 1.75\omega_n, \qquad \omega_0^2 = 2.15\omega_n^2, \qquad K_a K_m \omega_0^2 = \omega_n^3$$

من الشكل (4-41- جـ) نجد أنه من أجل $n = 3$ يكون زمن الاستقرار مساوياً لـ: $\omega_n T_s = 8\text{sec}$. طالما أننا نحتاج إلى استجابة سريعة سنختار قيمة كبيرة لـ $\omega_n$ بحيث يكون زمن الاستقرار أقل من (1) ثانية لذلك سنختار $\omega_n = 10\, rad/\text{sec}$. بالاعتماد على دليل الأداء ITAE, فإن البارامترات الديناميكية للكاميرا الخلفية:

$$\omega_0 = 14.67\, rad/\text{sec}, \ \zeta = 0.597$$

كما أن قيم كلاً من ربح المحرك ومكبر العمليات يجب أن تحقق العلاقة:

$$K_a K_m = \frac{\omega_n^3}{\omega_0^2} = \frac{\omega_n^3}{2.15\omega_n^2} = \frac{\omega_n}{2.15} = 4.65$$

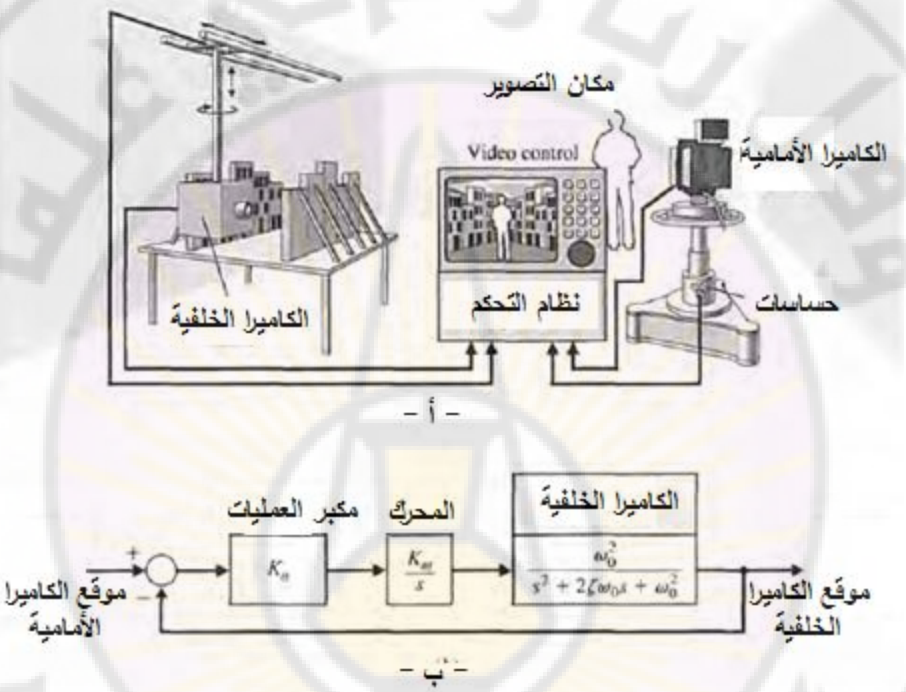
بعد تعويض القيم العددية للبارامترات نجد أن تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17.5s^2 + 215s + 1000}$$

$$= \frac{1000}{(s+7.08)(s+5.21+j10.68)(s+5.21-j10.68)} \quad \text{.....(116-4)}$$

يبين الشكل (4-43) مواقع أقطاب الحلقة المغلقة وذلك بالنسبة لدليل الأداء ITAE. إن معامل تخامد الجذور العقدية: $\zeta = 0.44$, لكن هذه الجذور العقدية ليست مسيطرة.

بمحاكاة الاستجابة الخطوية باستخدام الحاسب تُظهر أن قيمة التجاوز النسبي هي 2% بينما زمن الاستقرار يساوي 0.7 sec.



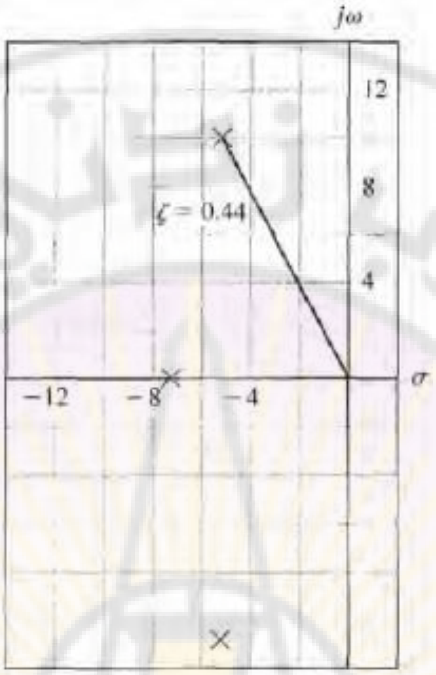

**الشكل (4-42): نظام التحكم بكاميرتين.**

يبين الجدول (4-11) القيم المثلى لمعاملات تابع تحويل الحلقة المغلقة المعطى بالعلاقة (4-117) وذلك عند تطبيق إشارة دخل صاعدة, بالنسبة لدليل الأداء ITAE:

$$T(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (117-4)$$

في هذا النظام الممثل بالتابع المعطى بالعلاقة (4-117) نجد أن:

- خطأ الحالة المستقرة معدوم وذلك عند تطبيق إشارة دخل صاعدة.
- يمتلك تابع تحويل المسار الأمامي عنصري تكامل أو أكثر, الضرورية حتى يكون خطأ الحالة المستقرة معدوم.




**الشكل (4-43): مواقع أقطاب الحلقة المغلقة بالنسبة لدليل الأداء ITAE.**

| **الجدول (4-11): القيم المثلى لمعاملات تابع التحويل $T(s)$ عند تطبيق إشارة دخل صاعدة وذلك بالنسبة لـ ITAE.** |
|---|
| $s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2$ |
| $s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3$ |
| $s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4$ |
| $s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5$ |

## 4-12 تبسيط النظم الخطية (The simplification of linear systems):

من المفيد والضروري دراسة النظم المعقدة الممثلة بواسطة توابع تحويل من الدرجات العليا وذلك عن طريق نماذج تقريبية ذات درجات أقل. على سبيل المثال, يمكن تقريب نظام من الدرجة الرابعة إلى نظام من الدرجة الثانية مما يمكننا من استخدام المنحنيات المبينة بالشكل (4-16) والممثلة لعلاقة التجاوز النسبي وزمن القمة العظمى الأولى بمعامل التخامد.

يوجد العديد من الطرق لإنقاص درجة تابع تحويل نظام. أكثر هذه الطرق بساطة هي الطريقة القائمة على إزالة بعض الأقطاب القليلة التأثير بالنسبة للأقطاب الأخرى. إن هذه الأقطاب قليلة التأثير تكون ذات جزء حقيقي سالب أكبر بكثير من الأجزاء الحقيقية السالبة لباقي الأقطاب. على سبيل المثال إذا كان لدينا نظام ذو تابع التحويل التالي:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)}$$

بالتالي يمكننا إهمال تأثير القطب s = -30, فيصبح تابع التحويل:

$$G(s) = \frac{K/30}{s(s+2)}$$

فيما بعد ندرس استجابة النظام بعد التبسيط.

يوجد طريقة أخرى تقوم على ربط الاستجابة الترددية لتابع تحويل النظام ذو الدرجة المخفضة مع الاستجابة الترددية لتابع التحويل الأصلي, بحيث تكون كلا الاستجابتين متقاربتين, قدر الإمكان. سندرس الاستجابة الترددية للنظم في الفصول القادمة, ولكن بالرغم من ذلك سنقدم, في هذه الفقرة, طريقة تخفيض الدرجة.

ليكن لدينا النظام الممثل بتابع التحويل التالي:

$$G_H(s) = K\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 s + 1}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 s + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (118-4)$$

نرغب بتخفيض درجة هذا التابع علماً أن أقطاب التابع $G_H(s)$ تقع في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, كما أن درجة البسط أصغر أو تساوي درجة المقام $(m \le n)$.

يعطى تابع التحويل التقريبي ذو الدرجة الأقل بالعلاقة التالية:

$$G_L(s) = K\frac{c_p s^p + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_1 s + 1}{d_g s^g + \ldots\ldots\ldots\ldots + d_1 s + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (119-4)$$

حيث: $p \le g < n$ . لاحظ أن ثابت الربح $(K)$ نفسه في النظام الأصلي والتقريبي وهذا يؤكد أن كلا النظامين لهما نفس استجابة الحالة المستقرة.

إن الطريقة التي ستقدم بالمثال (4-14) تعتمد على اختيار $c_i$ و $d_i$ بحيث يمتلك كلاً من $G_L(s)$ و $G_H(s)$ استجابتين ترددتيين متقاربتين. بمعنى آخر ينحرف المقدار $G_H(j\omega)/G_L(j\omega)$ بأقل مقدار ممكن عن الواحد, وذلك عند جميع الترددات.

تحسب المعاملات $c$ و $d$ باستخدام المعادلات التالية:

$$M^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} M(s) \ldots\ldots\ldots\ldots (120-4)$$

$$\Delta^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \Delta(s) \ldots\ldots\ldots\ldots (121-4)$$

حيث M(s) و $\Delta(s)$ هما كثيري الحدود الممثلين لبسط ولمقام $G_H(s)/G_L(s)$.

نعرف أيضاً:

$$M_{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} M^{(k)}(0) M^{(2q-k)}(0)}{K!(2q-k)!}, \quad q = 0, 1, 2 \ldots \ldots (122-4)$$

بنفس الطريقة يمكننا صياغة $\Delta_{2q}$. يمكننا الحصول على المعاملات $(c)$ و $(d)$ بمساواة كلاً من:

$$M_{2q} = \Delta_{2q} \ldots\ldots\ldots\ldots (123-4)$$

وذلك من أجل $q = 1, 2, \ldots$ حتى القيمة التي تسمح لنا بإيجاد جميع المعاملات غير المحددة. لندرس المثال التوضيحي التالي على استخدام هذه المعادلات.

**مثال 4-14: تبسيط النموذج:**

ليكن لدينا النظام من الدرجة الثالثة التالي:

$$G_H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{(1/6)s^3 + s^2 + (11/6)s + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (124-4)$$

لنحاول تبسيط النموذج إلى نظام من الدرجة الثانية:

$$G_L(s) = \frac{1}{d_2 s^2 + d_1 s + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (125-4)$$

لنحدد الآن كلاً من $\Delta(s)$ و $M(s)$:

$$M(s) = d_2 s^2 + d_1 s + 1$$

$$\Delta(s) = \frac{1}{6} s^3 + s^2 + \frac{11}{6} s + 1$$

لنحدد كلاً من $M^{(k)}(0)$ و $\Delta^{(k)}(0)$, وذلك من أجل $k = 0, 1, 2, 3$ فنجد:

$$M^{(0)}(s) = d_2 s^2 + d_1 s + 1 \text{.....} (4-126)$$

بالتالي: $M^{(0)}(0) = 1$ .

$$M^{(1)}(s) = \frac{d}{ds}\left(d_2 s^2 + d_1 s + 1\right) = d_1 + 2d_2 s \text{.....} (4-127)$$

بالتالي: $M^{(1)}(0) = d_1$ .

بالمتابعة نجد:

$$M^{(0)}(0) = 1, \qquad \Delta^{(0)}(0) = 1$$
$$M^{(1)}(0) = d_1, \qquad \Delta^{(1)}(0) = \frac{11}{6}$$
$$M^{(2)}(0) = 2d_2, \qquad \Delta^{(2)}(0) = 2$$
$$M^{(3)}(0) = 0, \qquad \Delta^{(3)}(0) = 1, \text{.....} (128-4)$$

نقوم الآن بمساواة $M_{2q} = \Delta_{2q}$ , وذلك من أجل $q = 1,2$ فنجد من أجل $q = 1$:

$$M_2 = (-1)\frac{M^{(0)}(0)M^{(2)}(0)}{2} + \frac{M^{(1)}(0)M^{(1)}(0)}{1} + (-1)\frac{M^{(2)}(0)M^{(0)}(0)}{2}$$
$$= -d_2 + d_1^2 - d_2 = -2d_2 + d_1^2 \text{.....} (129-4)$$

لنقوم الآن بحساب $\Delta_2$ فنجد:

$$\Delta_2 = (-1)\frac{\Delta^{(0)}(0)\Delta^{(2)}(0)}{2} + \frac{\Delta^{(1)}(0)\Delta^{(1)}(0)}{1} + (-1)\frac{\Delta^{(2)}(0)\Delta^{(0)}(0)}{2}$$
$$= -1 + \frac{121}{36} - 1 = \frac{49}{36} \text{.....} (130-4)$$

لنطبق المعادلة (4-123) وذلك من أجل $q = 1$ فنجد:

$$M_2 = \Delta_2$$
$$-2d_2 + d_1^2 = \frac{49}{36} \text{.....} (131-4)$$

بمتابعة العملية ولنطبق المعادلة (4-123) وذلك من أجل $q = 2$ فنجد:

$$M_4 = \Delta_4$$
$$d_2^2 = \frac{7}{18} \text{.....} (132-4)$$

بحل المعادلات (4-131) و (4-132) نجد: $d_1 = 1.615$ و $d_2 = 0.624$ (تم إهمال مجموعة المعادلات الأخرى من أجل $q = 3, 4, \ldots$ وذلك لأنها تعطي أقطاب غير مستقرة).

لنقوم الآن بصياغة تابع تحويل النظام ذو الدرجة المخفضة:

$$G_L(s) = \frac{1}{0.624\,s^2 + 1.615\,s + 1} = \frac{1.60}{s^2 + 2.590\,s + 1.60} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4-133)$$

إن أقطاب النظام قبل التخفيض هي ($s$ = -1, -2, -3), بينما أقطاب النظام بعد التخفيض: $s$ = -1.024 و $s$ = -1.565. ■

نقوم أحياناً بتخفيض درجة النظام, وذلك بالمحافظة فقط على الأقطاب المسيطرة للنظام قبل التخفيض $G_H(s)$. بمعنى آخر نحدد التابع $G_L(s)$ على أنه الأقطاب المسيطرة للنظام قبل التخفيض, بينما نقوم بتقريب بسط $G_H(s)$.

**4-13 مثال تصميمي: نظام التحكم بالمنظار الفضائي:**

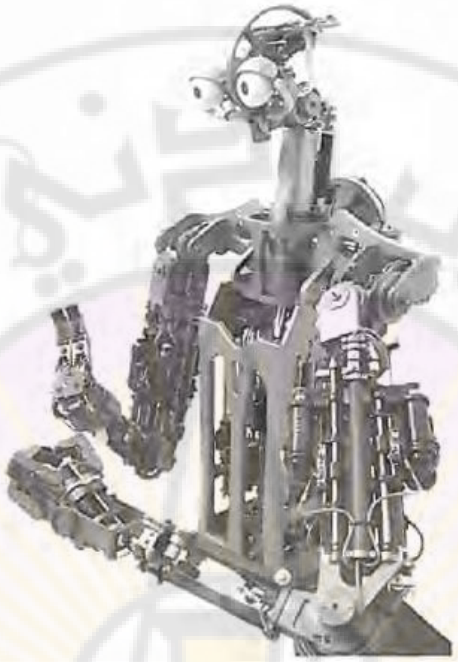
يبين الشكل (4-44) شكل المنظار الفضائي المسمى (Hubble) حيث صمم الجزء العلوي منه على شكل إنسان آلي. إن هذا المنظار يعتبر من أعقد وأغلى التجهيزات في العالم حيث أطلق في الفضاء وعلى بعد (380) ميل فوق سطح الأرض وذلك في 24 نيسان 1990. يملك المنظار مرآة يعتبر سطحها أنعم سطح مرآة قد تم تصنيعها حتى الآن. إن نظام توجيه المرآة يستطيع توجيه مركزها ليتوضع بانحراف صغير عن الموضع المراد المتمركز على بعد (400) ميل عن مركز المرآة.

لندرس نموذج نظام توجيه المنظار المبين بالشكل (4-45-أ). إن الهدف من التصميم هو اختيار قيم $K_1$ و $K$ بحيث يتحقق ما يلي:

1- التجاوز النسبي لاستجابة النظام الخطوية, أقل أو يساوي (10%).

2- قيمة خطأ الحالة المستقرة نتيجة تطبيق إشارة دخل صاعدة, أقل ما يمكن.

3- إنقاص تأثير إشارة الاضطراب $T_d(s)$ إلى أقل ما يمكن.



**الشكل (4-44): المنظار الفضائي المسمى Hubble.**

طالما أن نموذج النظام يحوي حلقة داخلية فيمكن استخدام قواعد تبسيط المخططات الصندوقية لنحصل على النموذج المبين بالشكل (4-45- ب). تُعطى إشارة خرج النظام الناتجة عن إشارتي الدخل $R(s)$ و $T_d(s)$ بالعلاقة التالية:

$$Y(s) = T(s).R(s) + [T(s)/K].T_d(s) \quad .....(134-4)$$

حيث: $T(s) = KG(s)/[1+KG(s)] = L(s)/[1+L(s)]$

تُعطى إشارة الخطأ بالعلاقة:

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1+L(s)}.T_d(s) \quad .....(135-4)$$

لنقوم, أولاً, باختيار $K$ و $K_1$ بحيث نحقق المتطلب التصميمي المتعلق بالتجاوز النسبي.

عند انعدام إشارة الاضطراب (أي $T_d(s)=0$) تصبح علاقة إشارة الخرج:

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}R(s)$$
$$= \frac{K}{s(s+K_1)+K}\left(\frac{A}{s}\right) = \frac{K}{s^2+K_1 s+K}\left(\frac{A}{s}\right) \quad .....(136-4)$$

بالعودة للشكل (4-16) أو العلاقة (4-54) نجد أنه للحصول على تجاوز نسبي أقل من عشرة بالمئة يجب أن تكون قيمة معامل التخامد ($\zeta$) تساوي (0.6) (قيمة التجاوز النسبي عند $\zeta = 0.6$ تساوي 9.5%).

لنقوم الآن بتفحص خطأ الحالة المستقرة وذلك عند تطبيق إشارة دخل صاعدة, (أي $r(t) = Bt, \ t \geq 0$):

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{B}{sKG(s)}\right\} = \frac{B}{K/K_1} \quad .....(137-4)$$

لنحسب خطأ الحالة المستقرة الناتج عن إشارة الاضطراب فنجده مساوياً لـ ($-1/K$). إذاً يتوجب علينا إسناد قيمة كبيرة لـ ($K$) وذلك للحصول على قيمة صغيرة للخطأ الناتج عن إشارة الاضطراب. أيضاً يتوجب علينا إسناد قيمة كبيرة لـ ($K/K_1$) وذلك للحصول على قيمة صغيرة للخطأ الناتج عن إشارة دخل على شكل إشارة صاعدة (انظر المعادلة 4-137). من ناحية أخرى يجب أن تكون قيمة معامل التخامد مساوية لـ (0.6) وذلك لتحقيق الشرط المتعلق بالتجاوز النسبي. لنقوم بداية باختيار قيمة $K$. لنقارن المعادلة المميزة للنظام مع المعادلة المميزة لنظام من الدرجة الثانية حيث $\zeta = 0.6$ فنجد:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2(0.6)\omega_n s + K \quad .....(138-4)$$

بمقارنة طرفي المعادلة (4-138) نجد: $\omega_n = \sqrt{K}$.

لنقوم أيضاً بمقارنة المقام في المعادلة (4-136) مع الشكل العام للمعادلة المميزة لنظام من الدرجة الثانية, حيث $\zeta = 0.6$ فنجد: $K_1 = 2(0.6)\omega_n = 1.2\omega_n$.

لدينا من المعادلة (4-138): $\omega_n = \sqrt{K}$, بالتالي ينتج لدينا: $K_1 = 1.2\sqrt{K}$.

بالتالي تصبح النسبة $K/K_1$ على النحو التالي:

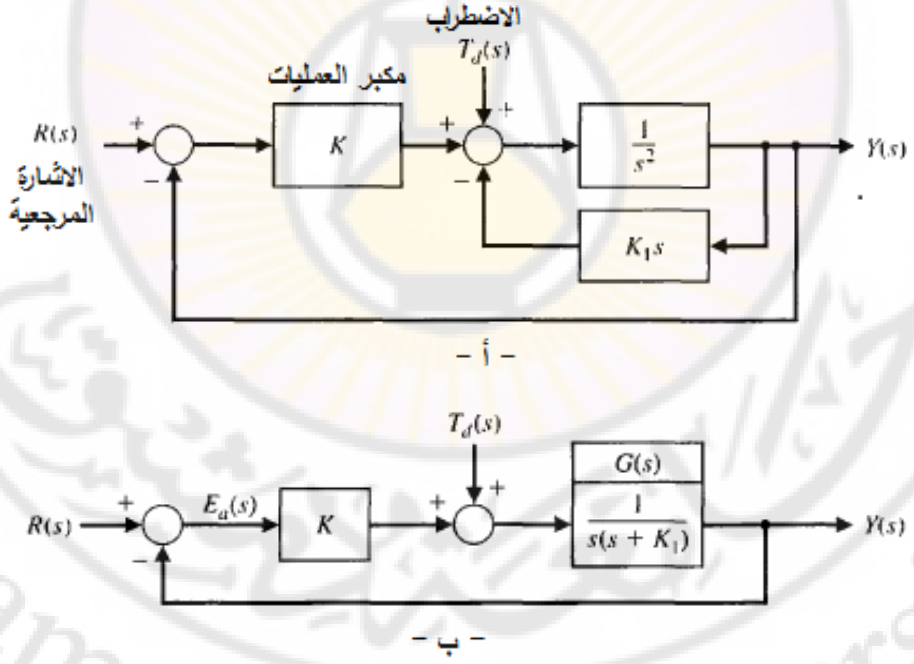
$$\frac{K}{K_1} = \frac{K}{1.2\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{1.2}$$

لنختار قيمة لـ $K$ ولتكن $K = 25$, في هذه الحالة ينتج لدينا: $\omega_n = 5$ ، $K_1 = 6$ والنسبة $K/K_1 = 4.17$. إذا اخترنا قيمة أخرى لـ $K$ ولتكن $K = 100$. في هذه الحالة ينتج لدينا: $\omega_n = 10$ ، $K_1 = 12$ والنسبة $K/K_1 = 8.33$.

عملياً يتوجب علينا الحد من قيمة $K$ وذلك حتى يبقى النظام خطياً. لنسند القيمة (100) إلى البارامتر $K$ فنحصل على المخطط الصندوقي المبين بالشكل (4-45- جـ). إن استجابة هذا النظام لإشارة تحكم خطوية واحدية ولإشارة اضطراب أيضاً خطوية مبينة بالشكل (4-45-د). من هذا الشكل يمكن أن نلاحظ أن تأثير الاضطراب صغير يمكن إهماله. أخيراً تكون قيمة خطأ الحالة المستقرة لإشارة دخل صاعدة (4-137):

$$e_{ss} = \frac{B}{8.33} = 0.12B$$

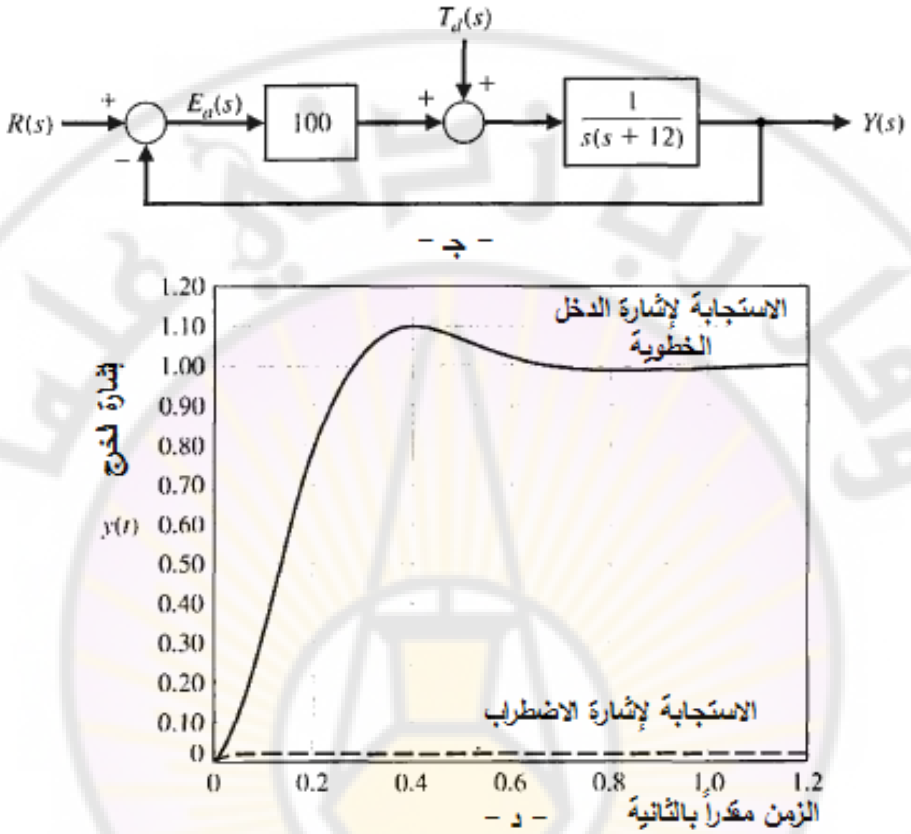
إذاً التصميم المعتمد $K = 100$ هو تصميم ممتاز يحقق المتطلبات التصميمية. ■




- أ -




- ب -




**الشكل (4-45): أ- نظام توجيه المنظار الفضائي ب- المخطط الصندوقي جـ-النظام المصمم من أجل $K = 100$. د- الاستجابة الزمنية لإشارتي دخل واضطراب واحدتين.**

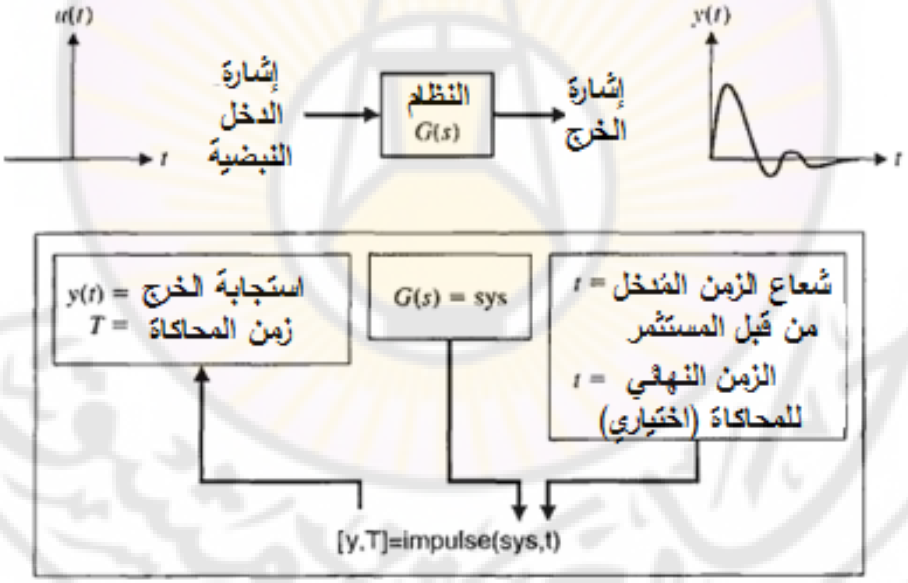
**4-14 دراسة أداء النظم باستخدام بيئة الماتلاب:**

في هذه الفقرة سنكتشف معايير الأداء الزمنية المعطاة بدلالة الاستجابة الزمنية العابرة للنظام, وكذلك أخطاء الحالة المستقرة الناتجة. سنتعرض أيضاً لنظم تبسيط النظم الخطية (تخفيض الدرجة). سنقدم أيضاً تابع جديد من توابع بيئة الماتلاب هو التابع "impulse", كما سنراجع التابع "lsim" المستخدم لمحاكاة النظام الخطي.

**معايير الأداء الزمنية:** غالباً ما تعطى معايير الأداء الزمنية بدلالة الاستجابة العابرة للنظام وذلك عند تطبيق إشارة دخل معينة. لندرس النظام من الدرجة الثانية ذو إشارة الخرج المعطاة بالعلاقة التالية:

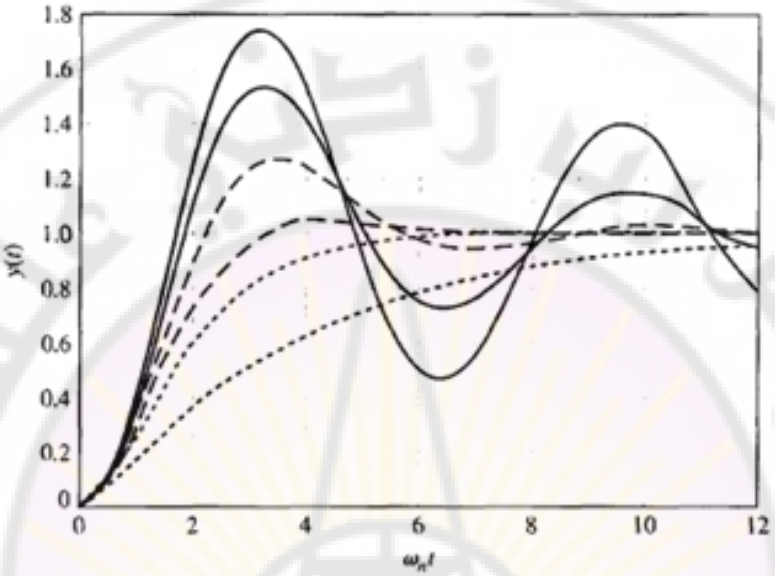
$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}.....(139-4)$$

ناقشنا سابقاً استخدام التابع "step" لحساب الاستجابة الخطوية لنظام. لنقوم الآن بدراسة الاستجابة النبضية للنظام والناتجة عن تطبيق إشارة نبضية على دخله. إن الاستجابة النبضية "impulse response" عبارة عن المشتق الزمني للاستجابة الخطوية. يتم حساب الاستجابة النبضية بواسطة التابع "impulse" في بيئة الماتلاب على النحو المبين بالشكل (4-46).




**الشكل (4-46): التابع النبضي أو Impulse function.**

يمكننا رسم منحنيات استجابة مشابهة لتلك المبينة بالشكل (4-12) باستخدام التابع "step" على النحو المبين بالشكل (4-47). يبين الشكل (4-48) الاستجابة النبضية لنظام من الدرجة الثانية.



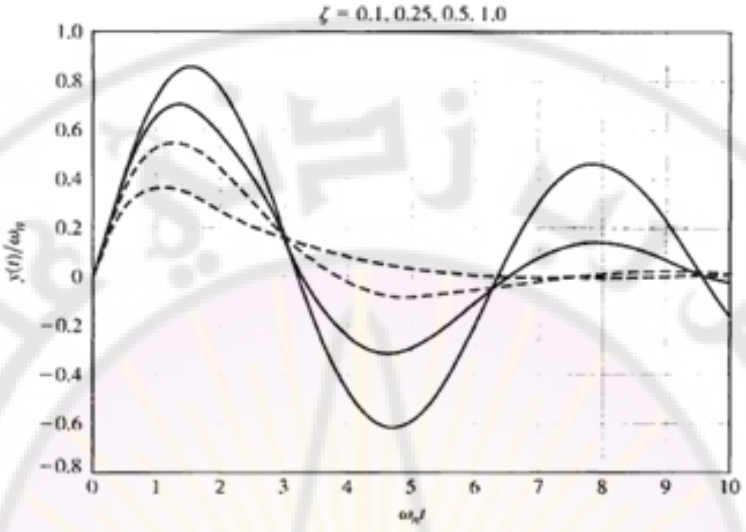

```
%Compute step response for a second-order system
%Duplicate Figure 5.5 (a)
%
t=
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1]; sys1=tf(num,den1);
zeta2=0.2; den2=[1 2*zeta2 1]; sys2=tf(num,den2);
zeta3=0.4; den3=[1 2*zeta3 1]; sys3=tf(num,den3);
zeta4=0.7; den4=[1 2*zeta4 1]; sys4=tf(num,den4);
zeta5=1.0; den5=[1 2*zeta5 1]; sys5=tf(num,den5);
zeta6=2.0; den6=[1 2*zeta6 1]; sys6=tf(num,den6);
%
[y1,T1]=step(sys1,t); [y2,T2]=step(sys2,t);
[y3,T3]=step(sys3,t); [y4,T4]=step(sys4,t);
[y5,T5]=step(sys5,t); [y6,T6]=step(sys6,t);
%
plot(T1,y1,T2,y2,T3,y3,T4,y4,T5,y5,T6,y6)
xlabel('\omega_n t'), ylabel('y(t)')
title('\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 2.0'), grid
```

حساب الاستجابة الخطوية

رسم المنحنيات مع تسمية المحاور

- ب -

**الشكل (4-47): أ- الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية ب- الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لرسم الاستجابات المبينة بالشكل (أ).**




– أ –

```
%Compute impulse response for a second-order system
%Duplicate Figure 5.6
%
t=[0:0.1:10]; num=[1];
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1]; sys1=tf(num,den1);
zeta2=0.25; den2=[1 2*zeta2 1]; sys2=tf(num,den2);
zeta3=0.5; den3=[1 2*zeta3 1]; sys3=tf(num,den3);
zeta4=1.0; den4=[1 2*zeta4 1]; sys4=tf(num,den4);
%
[y1,T1]=impulse(sys1,t);
[y2,T2]=impulse(sys2,t);
[y3,T3]=impulse(sys3,t);
[y4,T4]=impulse(sys4,t);
%
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4)
xlabel(' \omega _nt'), ylabel('y(t)/\omega_n')
title('\zeta = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0'), grid
```

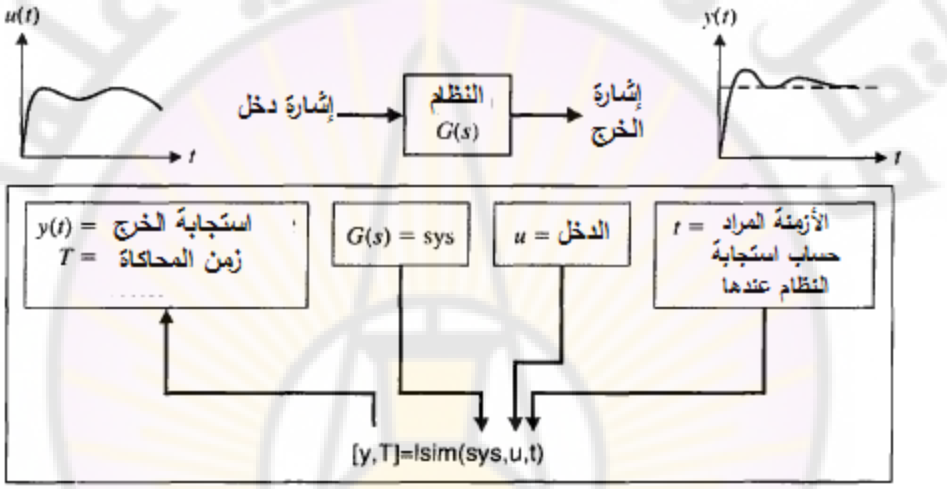
حساب الاستجابة النبضية

رسم المنحنيات مع تسمية المحاور

– ب –

**الشكل (4-48): أ – الاستجابة النبضية لنظام من الدرجة الثانية ب – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لرسم الاستجابات المبينة بالشكل (أ).**

في بعض الأحيان نحتاج إلى محاكاة استجابة النظام لإشارات دخل مختلفة عن الإشارات الخطوية والنبضية. في هذه الحالة نستخدم التابع "lsim" على النحو المبين بالشكل (4-49). ستتم دراسة استخدام هذا التابع مع نماذج فراغ الحالة في الفصل القادم لكن نريد هنا استخدام هذا التابع مع توابع التحويل. يعالج المثال (4-15) استخدام التابع "lsim" مع توابع التحويل.




**الشكل (4-49): التابع "lsim".**

**4-15 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

في الفقرة (3-10) درسنا استجابة نظام التحكم برأس القارئة في سواقة الأقراص المدمجة. لندرس مجدداً النظام الممثل بالشكل (3-23) حيث هدف الدراسة في هذه الفقرة هو تحديد الأداء المطلوب ومن ثم محاولة ضبط ربح المكبر $K_a$ بحيث نحصل على أفضل أداء.

إن هدفنا في هذا النظام هو تحقيق أسرع استجابة لإشارة دخل خطوية $r(t)$, بحيث:

1- الحد من التجاوز ومن الطبيعة المهتزة لاستجابة الخرج.

2- إنقاص من تأثير الاضطرابات على موضع رأس القارئة.

يمكن تلخيص معايير الأداء المطلوبة بالجدول (4-12).

بالعودة إلى المخطط الصندوقي المبين بالشكل (3-23), وبإهمال تأثير محارضة ملف المحرك (أي $L = 0$), وبالتعويض بالقيم المثالية المعطاة بالجدول (3-2), نحصل على المخطط الصندوقي المبين بالشكل (4-50).

عندما تكون $T_d(s) = 0$, فإن إشارة خرج النظام:

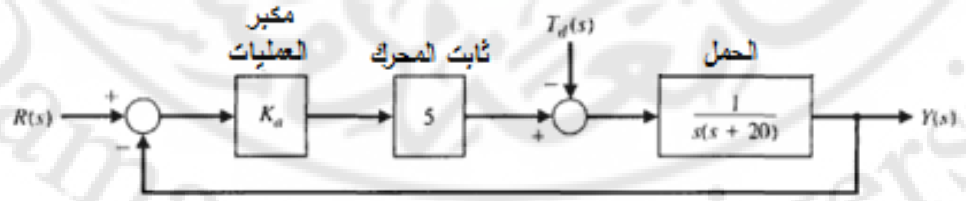
$$Y(s) = \frac{5K_a}{s(s+20)+5K_a} R(s)$$

$$= \frac{5K_a}{s^2+20s+5K_a} R(s)$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} R(s).....(140-4)$$

بالتالي لدينا: $\omega_n^2 = 5K_a$ و $2\zeta\omega_n = 20$. يمكننا رسم استجابة النظام لإشارة دخل خطوية, من أجل $K_a = 30$ و $K_a = 60$, لتبدو على النحو المبين بالشكل (4-51). يلخص الجدول (4-13) معايير الأداء عند القيم المختارة لـ $K_a$. في هذا الجدول $M_{pt}$ تمثل القيمة العظمى لإشارة الخرج الناتجة عن تطبيق إشارة اضطراب خطوية واحدية.

| **الجدول (4-12): معايير الأداء المطلوب للاستجابة العابرة.** | |
|---|---|
| **المعيار** | **القيمة المطلوبة** |
| التجاوز النسبي | أقل من 5% |
| زمن الاستقرار | أقل من 250 ميلي ثانية |
| القيمة العظمى لإشارة الخرج من أجل $T_d(s) = 1/s$ | أقل من $5*10^{-3}$ |




**الشكل (4-50): نظام التحكم بالقارئة.**

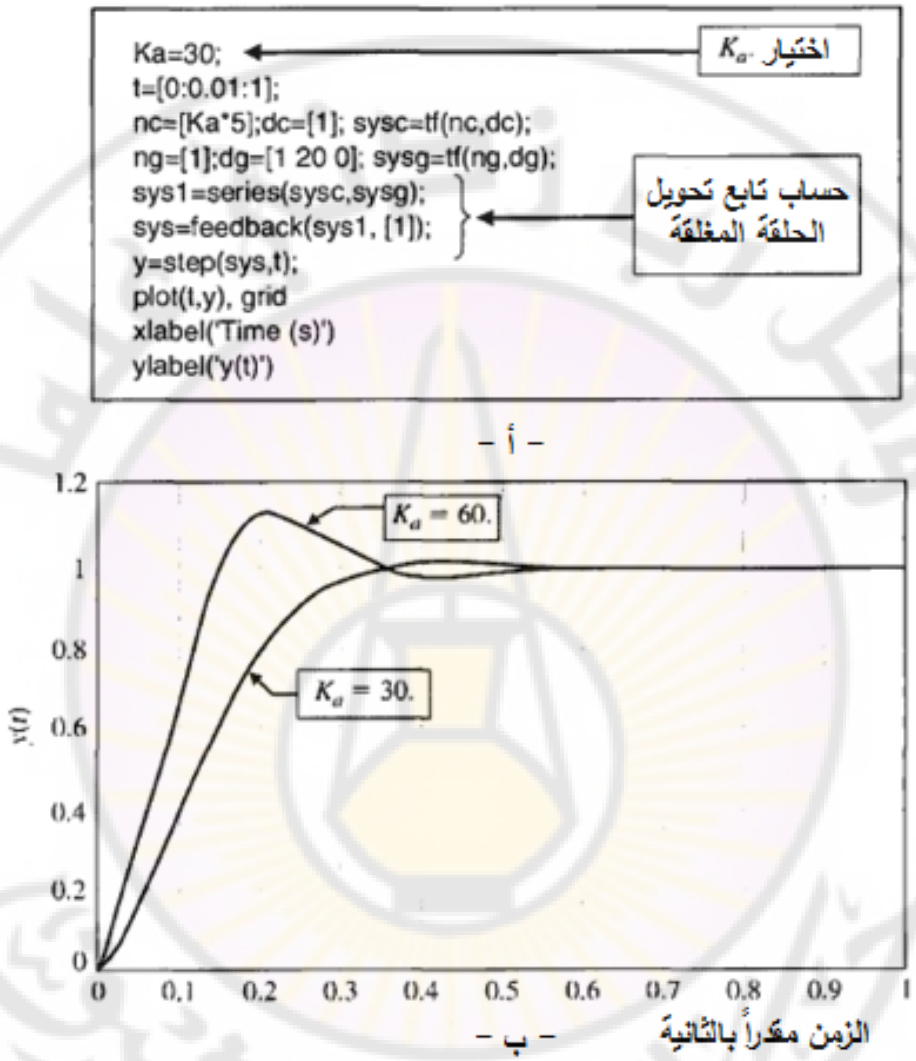
من الجدول (4-13) نجد أنه عند زيادة $K_a$, يتناقص تأثير الاضطراب حيث يمكننا ملاحظة هذه النتيجة برسم استجابة النظام $y(t)$ وذلك عند تطبيق إشارة اضطراب واحدية, والمبينة بالشكل (4-52). من الواضح من الجدول (4-13) أنه يجب علينا اللجوء إلى نوع من الملائمة وذلك لتحقيق معايير الأداء. في هذه الحالة نختار $K_a = 40$ كأفضل خيار بالرغم من أنه لا يحقق كافة معايير الأداء المطلوبة.

**4-16 خاتمة:**

في هذا الفصل عرفنا الخصائص الزمنية لأداء نظام التحكم ذو التغذية الخلفية, وناقشنا مبدأ قياس هذه الخصائص, وبيّننا فائدة إشارة الدخل القياسية. قدمنا أيضاً في هذا الفصل الخصائص الزمنية لاستجابة النظام عند تطبيق إشارة دخل خطوية, مثل التجاوز النسبي, زمن القمة, وزمن الاستقرار. ناقشنا أيضاً العلاقة بين موقع أقطاب النظام في المستوي اللابلاسي والاستجابة العابرة للنظام. قدّمنا أيضاً أهم الخصائص الزمنية للاستجابة الزمنية في الحالة المستقرة وهو خطأ الحالة المستقرة, وذلك حسب إشارة الدخل المطبقة.

**الجدول (4-13): خصائص الاستجابة الخطوية لنموذج قارئة الأقراص الصلبة.**

| $K_a$ | 20 | 30 | 40 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P.O.\%$ | 0 | 1.2 | 4.3 | 10.8 | 16.3 |
| $T_s$ (بالثانية) | 0.55 | 0.40 | 0.40 | 0.40 | 0.40 |
| $\zeta$ | 1 | 0.82 | 0.707 | 0.58 | 0.50 |
| $M_{pt}$ | $-10*10^{-3}$ | $-6.6*10^{-3}$ | $-5.2*10^{-3}$ | $-3.7*10^{-3}$ | $-2.9*10^{-3}$ |



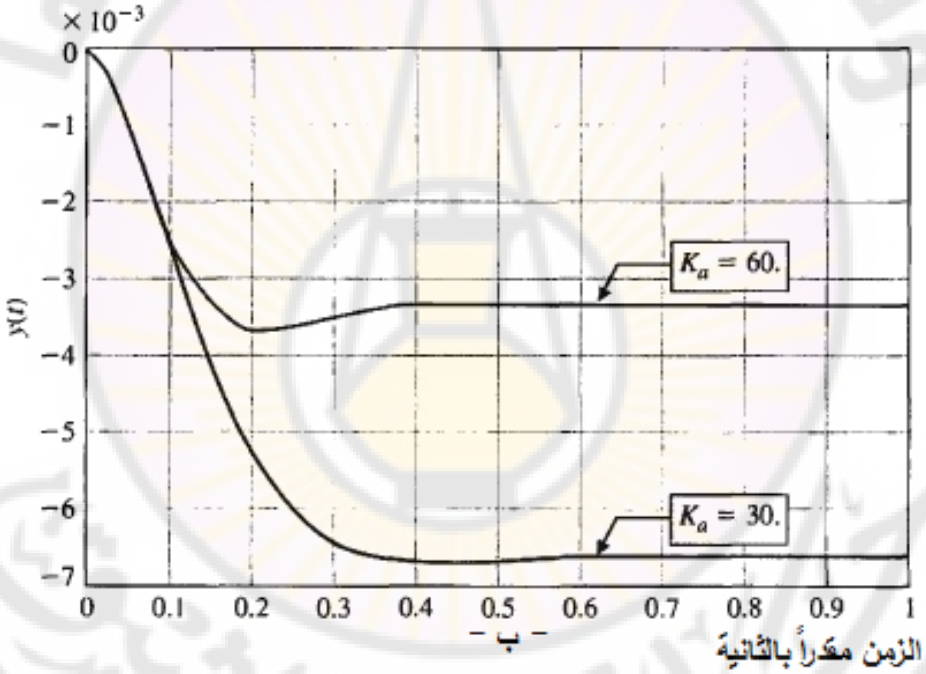

**الشكل (4-51): استجابة النظام لإشارة دخل خطوية: أ – الكود البرمجي المستخدم لرسم الاستجابة الخطوية. ب – الاستجابة من أجل $K_a = 30$ و $K_a = 60$.**

```
Ka=30;
t=[0:0.01:1];
nc=[Ka*5];dc=[1]; sysc=tf(nc,dc);
ng=[1];dg=[1 20 0]; sysg=tf(ng,dg);
sys=feedback(sysg,sysc);
sys=-sys;
y=step(sys,t); plot(t,y)
xlabel('Time (s)'), ylabel('y(t)'), grid
```

اختيار $K_a$

إدخال إشارة الاضطراب إلى المقارن بإشارة سالبة

– أ –




– ب –

**الشكل (4-52): استجابة النظام لإشارة اضطراب خطوية: أ – الكود البرمجي المستخدم لرسم الاستجابة الخطوية. ب – الاستجابة من أجل $K_a = 30$ و $K_a = 60$.**

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# الفصل الخامس: تمثيل النظم الفيزيائية في فراغ الحالة

# Chapter 5: Physical systems representation in state space

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

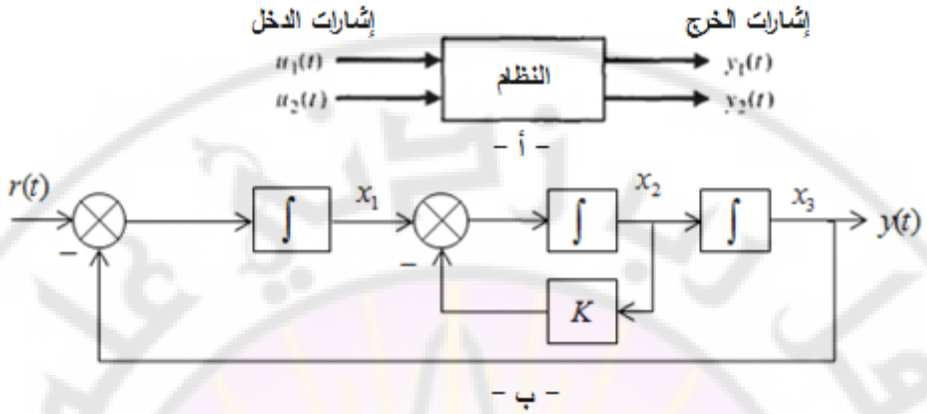
يتناول هذا الفصل تمثيل النظم الفيزيائية في المجال الزمني وذلك سواءاً أكانت هذه النظم متعددة المداخل ومتعددة المخارج (Multi-inputs Multi-outputs) أو كانت وحيدة الدخل ووحيدة الخرج (Single-input Single-output). إن النظم التي سنتعرض لها ستكون معطاة في صورة معادلات تفاضلية من الدرجة ($n$), حيث باستخدام مجموعة من المتحولات المسماة بمتحولات الحالة (State variables), نحصل على مجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى. نقوم, من ثم, بتجميع هذه المعادلات التفاضلية باستخدام المصفوفات فنحصل على ما يسمى بنموذج متحولات الحالة. سنستعرض أيضاً العلاقة بين المخطط الصندوقي ونموذج متحولات الحالة. إن طريقة النمذجة في فراغ الحالة يمكن أن يستخدم من أجل تمثيل النظم ذات البارامترات الثابتة أو المتغيرة زمنياً.

**1-5 متحولات الحالة (State variables):**

تُعرف حالة نظام بأنها مجموعة من المتحولات, والتي قيمها بالإضافة إلى إشارات دخل النظام, والمعادلات الواصفة لتغير المتحولات, تعطي الحالة المستقبلية للنظام (System future state), وخرج النظام.

ليكن لدينا نظام ديناميكي حيث توصف حالة هذا النظام بدلالة مجموعة من **متحولات الحالة** $[x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)]$. كما أسلفنا أعلاه, متحولات الحالة هي المتحولات التي تحدد سلوك النظام المستقبلي وذلك إذا علمنا الحالة الحالية للنظام بالإضافة إلى إشارات الدخل. لندرس النظام المبين بالشكل (5-1- أ), حيث $y_1(t)$ و $y_2(t)$ هي إشارات الخرج, بينما $u_1(t)$ و $u_2(t)$ هي إشارات الدخل. تم تحديد, في هذا النظام, مجموعة من متحولات الحالة $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ حيث أن معرفة القيم الابتدائية لهذه المتحولات $[x_1(0), x_2(0), \ldots\ldots, x_n(0)]$ عند اللحظة الابتدائية $t_0$, بالإضافة إلى معرفة $u_1(t)$ و $u_2(t)$, حيث $t \geq t_0$, تكون كافية لحساب القيم المستقبلية لإشارات الخرج ولمتحولات الحالة.

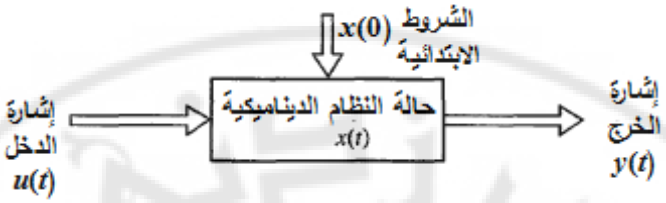
**تصف متحولات الحالة الوضع الحالي للنظام, كما يمكن أن تستخدم لتحديد الاستجابة المستقبلية وذلك عند معرفة إشارات الدخل, والمعادلات الواصفة للنظام.**




**الشكل (5-1): أ – مخطط صندوقي لنظام متعدد المداخل ومتعدد المخارج ب – مخطط صندوقي لنظام وحيد الدخل ووحيد الخرج.**

لندرس النظام المبين بالشكل (5-1-ب) والمؤلف من عناصر تكاملية وتناسبية مربوطة على التسلسل. في هذا النظام يظهر عدد من الإشارات والتي تصنف على أنها داخلية, حيث تم الدلالة عليها بـ $x_1$ , $x_2$ , $x_3$. من الطبيعي أن نرغب بالتحكم بالإشارات الداخلية بواسطة إشارة الدخل الوحيدة $r(t)$, وبالتالي لم تعد المسألة هي التحكم بإشارة الخرج ولكن أصبح المطلوب التحكم بتغيرات الإشارات الثلاثة: $x_1$ , $x_2$ و $x_3$ بآن واحد. تسمى هذه المتحولات الداخلية بمتحولات الحالة, وتشكل ما يسمى بحالة النظام (System state).

إن الشكل العام للنظام الديناميكي (dynamic system) مبينة بالشكل (5-2). أبسط مثال على متحول الحالة هو حالة لمبة موصلة إلى مفتاح (تشغيل – إطفاء أو ON - Off). يكون المفتاح عادة إما في وضعية التشغيل (ON) أو وضعية إطفاء (Off), بالتالي فإن حالة المفتاح يمكن أن تأخذ أحد القيمتين الممكنتين. بالتالي إذا علمنا الحالة الحالية (الوضعية الحالية) للمفتاح عن اللحظة $t_0$, بالإضافة إلى الدخل المطبق, يمكننا أن نحدد الحالة المستقبلية لحالة النظام (اللمبة + المفتاح).




**الشكل (5-2): التمثيل الصندوقي للنظام الديناميكي.**

سنقوم فيما يلي بشرح مفهوم مجموعة من متحولات الحالة باستخدام نظام كتلة– نابض– مخمد المبين بالشكل (5-3). إن عدد متحولات الحالة الواجب اختيارها لتمثيل النظام يجب أن يكون أقل ما يمكن, حيث في مثالنا عدد المتحولات الكافية لوصف النظام تشمل موضع وسرعة الكتلة $(M)$. بالتالي نستطيع أن نحدد مجموعة من متحولات الحالة $(x_2 , x_1)$, حيث:

$$x_1(t) = y(t), \qquad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

كما رأينا سابقاً, تعطى المعادلة التفاضلية الواصفة لسلوك النظام على النحو التالي:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = u(t).....(1-5)$$

لنعيد كتابة المعادلة (5-1) بدلالة متحولات الحالة, لتصبح على النحو التالي:

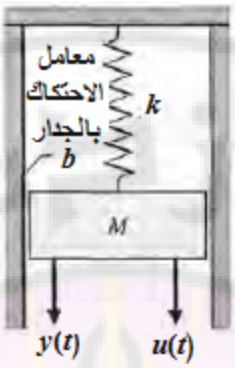
$$M\frac{dx_2}{dt} + bx_2 + kx_1 = u(t).....(2-5)$$

بالتالي يمكننا أن نكتب المعادلات الواصفة لسلوك النظام (نابض – كتلة – مخمد) على الشكل مجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2.....(3-5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}u.....(4-5)$$

تصف هذه المعادلات التفاضلية (5-3) و (5-4) سلوك حالة النظام بدلالة معدل تغير كل متحول حالة.




**الشكل (5-3): نظام نابض – كتلة – مخمد.**

لندرس, مثالاً آخر, وهو دارة *RLC* المبينة بالشكل (5-4). تُوصف حالة هذه الدارة (أو هذا النظام), بدلالة مجموعة من متحولات الحالة $(x_2\ ,\ x_1)$ حيث:

$$x_1(t) = v_c(t), \qquad x_2(t) = i_L(t)$$

تم اختيار هذه المتحولات لأن الطاقة المختزنة في الدارة توصف بدلالة هذه المتحولات:

$$E = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cv_c^2 \ldots\ldots\ldots(5-5)$$

تعطي $x_1(t_0)$ و $x_2(t_0)$ الطاقة الكلية الابتدائية للدارة وحالة النظام عند اللحظة $t = t_0$.

في أي دارة *RLC*, فإن عدد متحولات الحالة المطلوبة يساوي عدد عناصر التخزين المستقلة. بتطبيق قانون كيرشوف للتيار عند العقدة نحصل على المعادلة الواصفة لمعدل تغير توتر المكثف على النحو التالي:

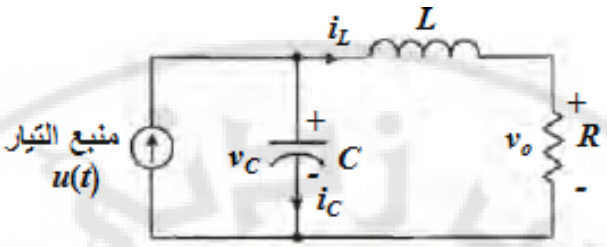
$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = u(t) - i_L \ldots\ldots\ldots(6-5)$$

بتطبيق قانون كيرشوف للتوتر في الحلقة اليمنى نحصل على المعادلة الواصفة لمعدل تغير تيار الملف على النحو التالي:

$$L\frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c \ldots\ldots\ldots(7-5)$$

يمكن حساب خرج النظام $(v_0)$ بواسطة المعادلة الجبرية الخطية:

$$v_0 = Ri_L(t)$$




**الشكل (5-4): دارة RLC.**

لنعيد كتابة المعادلات (5-6) و (5-7) على شكل مجموعة مؤلفة من معادلتين تفاضلتين من الدرجة الأولى وبدلالة متحولات الحالة $x_1$ و $x_2$ لتبدو على النحو التالي:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t) \quad .....(8-5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \quad .....(9-5)$$

أيضاً يمكن صياغة إشارة الخرج على النحو التالي:

$$y_1(t) = v_0(t) = Rx_2 \quad .....(10-5)$$

إن استخدام المعادلات (5-8) و (5-9), والشروط الابتدائية للدارة ممثلة بـ $x_1(t_0)$ و $x_2(t_0)$, يسمح بتحديد السلوك المستقبلي للدارة, بالإضافة إلى خرجها $(v_0)$.

إن متحولات الحالة في أي نظام ليست وحيدة حيث يمكننا اختيار مجموعة أخرى من المتحولات. على سبيل المثال, في دارة الـ *RLC*, يمكننا اختيار متحولات الحالة التالية:

$$x_1^*(t) = v_c(t), \qquad x_2^*(t) = v_L(t)$$

حيث $v_L(t)$ هو هبوط التوتر على طرفي الملف.

ترتبط متحولات الحالة الجديدة مع متحولات الحالة القديمة بالعلاقة التالية:

$$x_1^*(t) = v_C(t) = x_1 \quad .....(11-5)$$

$$x_2^*(t) = v_L(t) = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2 \quad .....(12-5)$$

تمثل المعادلة (5-12) العلاقة بين توتر الملف ومتحولات الحالة القديمة $v_C(t)$ و $i_L(t)$.

عموماً إن هذا الخيار لمتحولات الحالة لا يتعارض مع الملاحظة الواردة أعلاه حول طريقة اختيار متحولات الحالة, حيث أسلفنا أن متحولات الحالة تُختار بحيث يمكننا

حساب الطاقة المختزنة في النظام بدلالتها, لكن في معظم النظم يمكن حساب الطاقة المختزنة بعدة طرق وفي كل طريقة نختار متحولات حالة مختلفة.

**2-5 معادلة الحالة التفاضلية (The state differential equation):**

توصف استجابة النظام بدلالة مجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى المكتوبة بدلالة متحولات الحالة $(x_1, x_2, .., x_n)$ وبدلالة إشارات الدخل $(u_1, u_2, .., u_m)$.

يمكن صياغة المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
x_1^{\bullet} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots\ldots\ldots + b_{1m}u_m, \\
x_2^{\bullet} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots\ldots\ldots + b_{2m}u_m, \\
&\vdots \\
x_n^{\bullet} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots\ldots\ldots + b_{nm}u_m, \ldots\ldots\ldots (13-5)
\end{aligned}$$

لنكتب هذه المجموعة من المعادلات التفاضلية على شكل مصفوفات على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots (14-5)$$

تدعى المصفوفة العمود (Column matrix) الحاوية على متحولات الحالة بشعاع الحالة (state vector) ويصاغ على النحو التالي:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots (15-5)$$

تم استخدام الخط الغامق للإشارة إلى الأشعة.

يشار إلى شعاع إشارات الدخل بـ **u**. بالتالي يمكن تمثيل النظام بواسطة ما يُعرف بمعادلة الحالة التفاضلية (State differential equation) المصاغة على النحو التالي:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \ldots\ldots\ldots (16-5)$$

غالباً ما تدعى المعادلة (5-16) بمعادلة الحالة (State equation). إن المصفوفة **A** هي مصفوفة أبعادها $(n*n)$ حيث $n$ عدد متحولات الحالة, أما المصفوفة **B** فهي مصفوفة $(n*m)$ حيث $m$ يمثل عدد إشارات الدخل.

تربط معادلة الحالة التفاضلية معدل تغير حالة النظام مع حالة النظام وإشارات الدخل. من جهة أخرى, ترتبط مخارج النظام الخطي مع متحولات الحالة وإشارات الدخل بواسطة معادلة تسمى معادلة الخرج (output equation):

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad .....(17-5)$$

حيث **y** هي مجموعة إشارات الخرج المصاغة على شكل شعاع عمود:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

حيث $k$ عدد إشارات خرج النظام.

إن تمثيل فراغ الحالة (state-space representation) أو تمثيل متحولات الحالة (State-variable representation) يشمل معادلة الحالة التفاضلية ومعادلة الخرج.

بالعودة لدارة الـ $RLC$ ومعادلاتها (5-8) و (5-9) يمكننا الحصول على معادلة الحالة التفاضلية ومعادلة الخرج لدارة الـ $RLC$:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad .....(18-5)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad .....(19-5)$$

إن حل معادلة الحالة التفاضلية (state differential equation) يتم بطريقة مماثلة لطريقة حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى.

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى التالية:

$$x^{\bullet} = ax + bu \quad .....(20-5)$$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ توابع زمنية. إن حل هذه المعادلة التفاضلية (5-20) هو تابع أسي من الشكل $e^{at}$. لنأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (5-20), فنجد:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s).....(21-5)$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على المعادلة (5-21) نجد:

$$x(t) = e^{.at}x(0) + \int_0^t e^{+a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.....(22-5)$$

بالتشابه نجد أن حل معادلة الحالة التفاضلية يشبه المعادلة (5-22), وهو على الشكل:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau))\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \ .....(23-5)$$

في المعادلة السابقة, نُعرف ما يسمى مصفوفة التابع الأسي ( Matrix exponential function), والمساوية لـ:

$$\emptyset(t) = e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = I + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} \ldots\ldots (24-5)$$

يمكننا التحقق من المعادلة (5-23) وذلك بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة (5-16), لنجد:

$$\mathbf{X(s)} = [sI - A]^{-1}\mathbf{X(0)} + [sI - A]^{-1}\mathbf{BU(s)} \ .....(25-5)$$

حيث: $\phi(s) = [sI - A]^{-1}$ و $\phi(s) = Lapalace(\phi(t)) = Laplace(\exp(\mathbf{A}t))$.

لنطبق تحويل لابلاس العكسي على المعادلة (5-25), فنحصل على المعادلة (5-23). إن مصفوفة التابع الأسي ( $e^{\mathbf{A}t}$) تصف الاستجابة الحرة للنظام, وتدعى مصفوفة العبور أو مصفوفة عبور الحالة (state transition matrix) أو المصفوفة الأساسية (Fundamental matrix). بالتالي يمكن كتابة المعادلة (5-23) على النحو التالي:

$$\mathbf{x(t)} = \phi(t)\mathbf{x(0)} + \int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau \ .....(26-5)$$

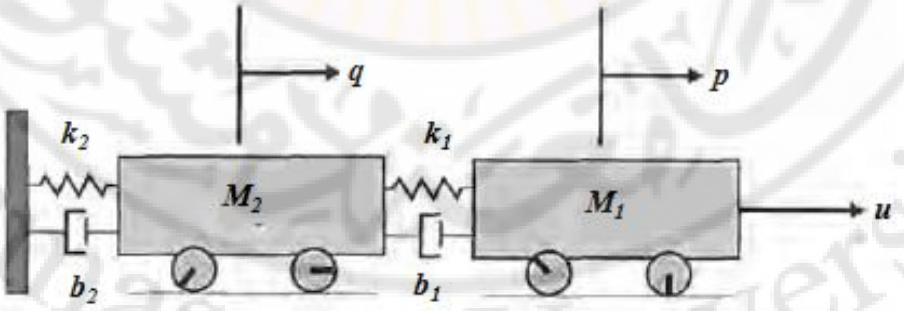
بالتالي فإن حل معادلة استجابة النظام في الحالة الحرة (عندما $\mathbf{u} = 0$), هو:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & ... & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & ... & \phi_{2n}(t) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & ... & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ . \\ . \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad .....(27-5)$$

مما سبق يمكن أن نلاحظ أن مصفوفة العبور تحسب على النحو التالي: نعدم جميع الشروط الابتدائية ما عدا متحول وحيد, ومن ثم نحسب جميع متحولات الحالة المتبقية. يشير البند $\phi_{ij}(t)$ إلى استجابة متحول الحالة $x_i$ وذلك تحت تأثير متحول الحالة $x_j$, وذلك عند انعدام جميع الشروط الابتدائية لبقية متحولات الحالة. سنستخدم في الفقرات التالية العلاقة بين الشروط الابتدائية ومتحولات الحالة وذلك لحساب بنود مصفوفة العبور, ولكن قبل ذلك سنستعرض نموذج مخطط تدفق الإشارة للنماذج الممثلة في فراغ الحالة, وكيفية استخدام هذا النموذج لدراسة استقرار النظم.

**مثال 5-1:** عربتين منزلقتين مترابطتين:

ليكن لدينا النظام الميكانيكي المبين بالشكل (5-5), حيث فيما يلي سنوضح الرموز الموضحة على الشكل: $M_1, M_2$: كتلة العربتين الأولى والثانية, $p, q$: موضع العربتين الأولى والثانية, u: قوة خارجية مؤثرة على العربات, $k_1, k_2$: ثوابت النوابض, $b_1, b_2$: معاملات التخامد.




**الشكل (5-5): النظام الميكانيكي المدروس بالمثال 5-1.**

يبين الشكل (5-6) مخطط الجسم الحر للكتلتين $M_1$ و $M_2$, حيث $p$ و $q$ تمثلان سرعة $M_1$ و $M_2$ على التوالي. يفترض مخطط الجسم الحر أن احتكاك الانزلاق معدوم.

لنطبق قانون نيوتن الثاني (مجموع القوى المؤثرة يساوي الكتلة مضروبة بالتسارع), على الكتلتين $M_1$ و $M_2$, فنجد:

من أجل الكتلة $M_1$: $M_1 p^{\bullet\bullet} = u + f_s + f_d = u - k_1(p-q) - b_1(p^{\bullet} - q^{\bullet})$

أو: $M_1 p^{\bullet\bullet} + b_1 p^{\bullet} + k_1 p = u + k_1 q + b_1 q^{\bullet} \ldots\ldots(28-5)$

من أجل الكتلة $M_2$: $M_2 p^{\bullet\bullet} = k_1(p-q) + b_1(p^{\bullet} - q^{\bullet}) - k_2 q - b_2 q^{\bullet}$

أو: $M_2 q^{\bullet\bullet} + (k_1 + k_2)q + (b_1 + b_2)q^{\bullet} = k_1 p + b_1 p^{\bullet} \ldots\ldots(29-5)$

بالتالي بامتلاكنا المعادلات (5-28) و (5-29) أصبح لدينا نموذج للنظام. لنبدأ الآن ببناء نموذج فراغ حالة, حيث سنختار متحولات التالية:

$$x_1 = p, \qquad x_2 = q$$

يمكننا أيضاً اختيار $x_1 = q$ و $x_2 = p$ , بالتالي فإن نموذج فراغ الحالة غير وحيد. أيضاً سنختار متحولات الحالة $x_3$ و $x_4$ على النحو التالي:

$$x_3 = x_1^{\bullet} = p^{\bullet} \ldots\ldots(30-5)$$

$$x_4 = x_2^{\bullet} = q^{\bullet} \ldots\ldots(31-5)$$

باشتقاق $x_3$ و $x_4$ نجد:

$$x_3^{\bullet} = p^{\bullet\bullet} = -\frac{b_1}{M_1} p^{\bullet} - \frac{k_1}{M_1} p + \frac{1}{M_1} u + \frac{k_1}{M_1} q + \frac{b_1}{M_1} q^{\bullet} \ldots\ldots(32-5)$$

$$x_4^{\bullet} = q^{\bullet\bullet} = -\frac{b_1 + b_2}{M_2} q^{\bullet} - \frac{k_1 + k_2}{M_2} q + \frac{k_1}{M_2} p + \frac{b_1}{M_2} p^{\bullet} \ldots\ldots(33-5)$$

لكن: $x_3 = p^{\bullet}, x_4 = q^{\bullet}$ , بالتالي يمكن كتابة المعادلات (5-32) و (5-33) على النحو التالي:

$$x_3^{\bullet} = -\frac{k_1}{M_1} x_1 + \frac{k_1}{M_1} x_2 - \frac{b_1}{M_1} x_3 + \frac{b_1}{M_1} x_4 + \frac{1}{M_1} u \ldots\ldots(34-5)$$

$$x_4^{\bullet} = \frac{k_1}{M_2} x_1 - \frac{k_1 + k_2}{M_2} x_2 + \frac{b_1}{M_2} x_3 - \frac{b_1 + b_2}{M_2} x_4 \ldots\ldots(35-5)$$

لنكتب المعادلات (5-30), (5-31), (5-34) و (5-35) على النحو التالي:

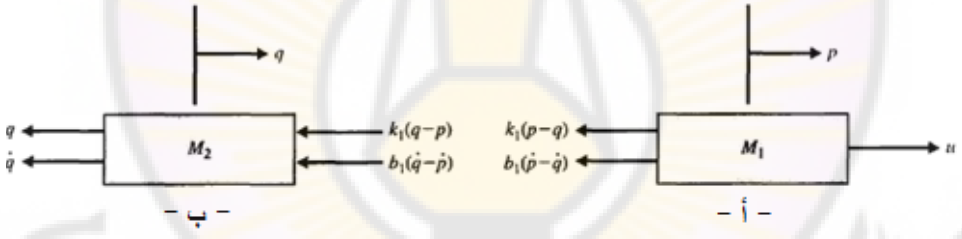
$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

حيث:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p^{\bullet} \\ q^{\bullet} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & \frac{b_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & -\frac{k_1+k_2}{M_2} & \frac{b_1}{M_2} & -\frac{b_1+b_2}{M_2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

حيث $u$ هي القوة الخارجية المؤثرة على النظام (انظر الشكل (5-6)).




**الشكل (5-6): مخطط الجسم الحر للعربات: أ – العربة 2 ب – العربة 1.**

إذا اخترنا المتحول $p$ كمتحول خرج, بالتالي تصبح معادلة الخرج:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

إذا افترضنا القيم التالية لبارامترات النظام:

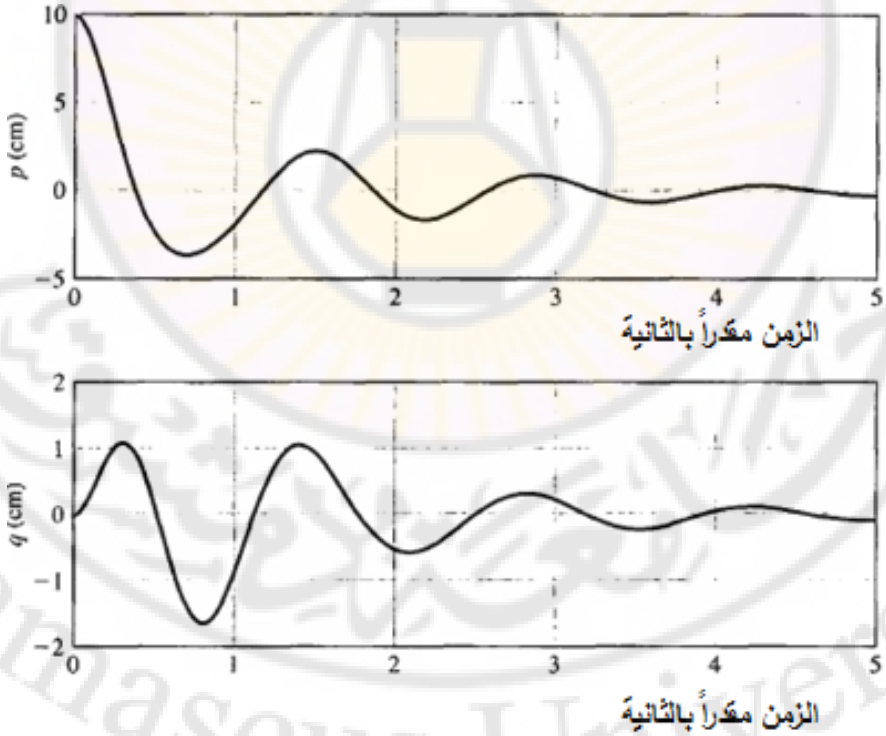
$$M_1 = 5Kg, \qquad M_2 = 20Kg$$
$$k_1 = 150N/m, \qquad k_2 = 700N/m$$
$$b_1 = 15Ns/m, \qquad b_2 = 700Ns/m$$

يبين الشكل (5-7) استجابة عربتي النظام, وذلك من أجل الشروط الابتدائية التالية:

$$u(t) = 0,\ p^{\bullet}(0) = q^{\bullet}(0) = 0,\ q(0) = 0\,cm,\ p(0) = 10cm\ .$$

### 3-5 المخطط الصندوقي ومخطط تدفق الإشارة في فراغ الحالة:

لقد تم تمثيل النظام بواسطة مجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى, أو بواسطة معادلة الحالة التفاضلية ذات الشكل العام المعطى بالمعادلة (5-16). في كلا الحالتين السابقتين من المفضل أن نستطيع تمثيل النظام بشكل تصويري ( Graphical representation), ومن ثم نستخدم هذا النموذج التصويري (Graphical model) لربط مفهوم متحول الحالة بمفهوم تابع التحويل. إن التمثيل التصويري للنظام يمكن أن يكون إما على شكل مخططات تدفق الإشارة أو مخططات صندوقية. كما رأينا في الفصل الثالث, يمكننا استخدام مفهوم تابع التحويل لربط الدخل والخرج في النظام المدروس. على سبيل المثال, إذا أردنا إيجاد العلاقة بين توتر الخرج والدخل في الدارة المبينة بالشكل (5-4), يمكننا البحث عن تابع التحويل: $G(s) = V_o(s)/U(s)$.




**الشكل (5-7): استجابة عربتي النظام من أجل الشروط الابتدائية المذكورة أعلاه.**

إن تابع تحويل دارة *RLC* المبينة بالشكل (5-4), يملك الشكل العام التالي:

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{U(s)}=\frac{\alpha}{s^2+\beta s+\gamma}.....(36-5)$$

حيث $\alpha$, $\beta$ و $\gamma$ تتبع عناصر الدارة $R$, $L$, $C$, وتتحدد قيمهم من المعادلات الواصفة للدارة. في الدارة الـ *RLC*, ومن المعادلات (5-8) و (5-9), ينتج لدينا:

$$x_1^{\bullet}=-\frac{1}{C}.x_2+\frac{1}{C}u(t).....(37-5)$$

$$x_2^{\bullet}=\frac{1}{L}.x_1-\frac{R}{L}x_2.....(38-5)$$

$$v_o=Rx_2.....(39-5)$$

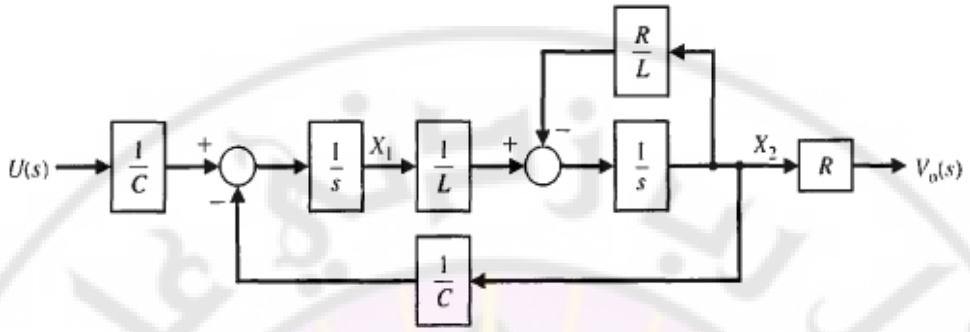
يمثل المخطط الصندوقي المبين بالشكل (5-8) المعادلات (5-37), (5-38) و (5-39) حيث يمثل $(1/s)$ التكامل الرياضي. من هذا المخطط, يمكن أن نوجد تابع التحويل:

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{U(s)}=\frac{+R/\left(LCs^2\right)}{1+R/(Ls)+1/\left(LCs^2\right)}$$

$$=\frac{+R/(LC)}{s^2+(R/L)s+1/(LC)}.....(40-5)$$

لسوء الحظ, العديد من الدارات الكهربائية, والنظم الكهروميكانيكية, ونظم التحكم ليست سهلة التمثيل مثل دارة الـ *RLC* المدروسة, حيث أحياناً من الصعب الحصول على المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى الواصفة للنظام. بالتالي من الأسهل استنتاج تابع تحويل النظام باستخدام الطرق المشروحة بالفصل الثاني, ومن ثم استخراج نموذج فراغ الحالة انطلاقاً من تابع التحويل.

يمكن استخراج المخطط الصندوقي من تابع تحويل النظام, ولكن كما لاحظنا في الفقرة (5-2) يوجد أكثر من خيار بالنسبة لمتحولات الحالة لنظام ما, وبالتالي يوجد أكثر من مخطط صندوقي ممكن لتمثيل النظام. يوجد العديد من الأشكال القانونية ( Canonical forms) لتمثيل متحولات الحالة, مثل الشكل القانوني لمتحول الطور ( The phase variable canonical form) والذي سنكتشفه في هذا الفصل.




**الشكل (5-8): المخطط الصندوقي لدارة *RLC*.**

بشكل عام, يمكننا صياغة تابع التحويل على النحو التالي:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+.....+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+.....+a_1 s+a_0}.....(41-5)$$

حيث: $n\geq m$ وجميع المعاملات $a$ و $b$ هي أعداد حقيقية.

إذا ضربنا البسط والمقام بـ $(s^{-n})$, نجد:

$$G(s)=\frac{b_m s^{-(n-m)}+b_{m-1}s^{-(n-m+1)}+.....+b_1 s^{-(n-1)}+b_0 s^{-n}}{1+a_{n-1}s^{-1}+.....+a_1 s^{-(n-1)}+a_0 s^{-n}}.....(42-5)$$

لننتقل الآن لاستنتاج تابع التحويل انطلاقاً من مخطط تدفق الإشارة. وجدنا في الفصل الثاني, أن تابع التحويل يمكن أن يُحسب من مخطط تدفق الإشارة باستخدام العلاقة:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\sum_k P_k\Delta_k}{\Delta}.....(43-5)$$

عندما تكون جميع حلقات التغذية الخلفية متماسة, وجميع المسارات الأمامية تمس حلقات التغذية الخلفية, تؤول المعادلة (5-43) إلى الشكل التالي:

$$G(s)=\frac{\sum_k P_k}{1-\sum_{q=1}^{N}L_q}....(44-5)$$

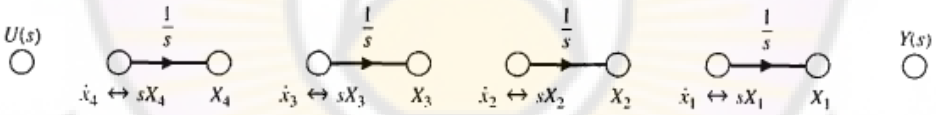
حيث: $\sum_{k} P_k$ , $\sum_{q=1}^{N} L_q$ تمثلان, على التوالي, مجموع معاملات المسار الأمامي ومجموع معاملات حلقة التغذية الخلفية.

لشرح استخراج مخطط تدفق الإشارة من تابع التحويل, لنأخذ المثال التالي:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

$$=\frac{b_0s^{-4}}{1+a_3s^{-1}+a_2s^{-2}+a_1s^{-3}+a_0s^{-4}}.....(45-5)$$

من الملاحظ من المعادلة (5-45) أن النظام من الدرجة الرابعة, بالتالي يتوجب علينا تحديد أربع متحولات حالة $(x_1, x_2, x_3, x_4)$. يجب أن يحوي المخطط على عناصر تكاملية تساوي درجة النظام, بالتالي سنستخدم أربع عناصر تكاملية في عملية تمثيل النظام. يبين الشكل (5-9) عقد مخطط تدفق الإشارة والعناصر التكاملية الضرورية لتمثيل النظام. بالاعتماد على أبسط علاقة بين العناصر التكاملية وهي علاقة الربط التسلسلي, يمكننا تمثيل تابع التحويل وذلك على النحو المبين بالشكل (5-10).



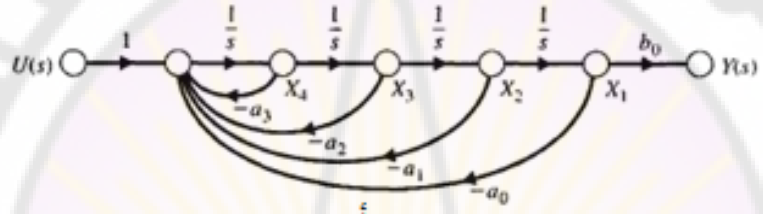

**الشكل (5-9): عقد مخطط تدفق الإشارة والعناصر التكاملية لنظام من الدرجة الرابعة.**

بتفحص الشكل (5-10) نجد أن جميع الحلقات متماسة, وبالتالي يستطيع القارئ حساب تابع تحويل المخطط وذلك باستخدام العلاقة (5-44), والتحقق أنها مطابقة لعلاقة تابع التحويل المعطاة بالعلاقة (5-45) على النحو التالي:

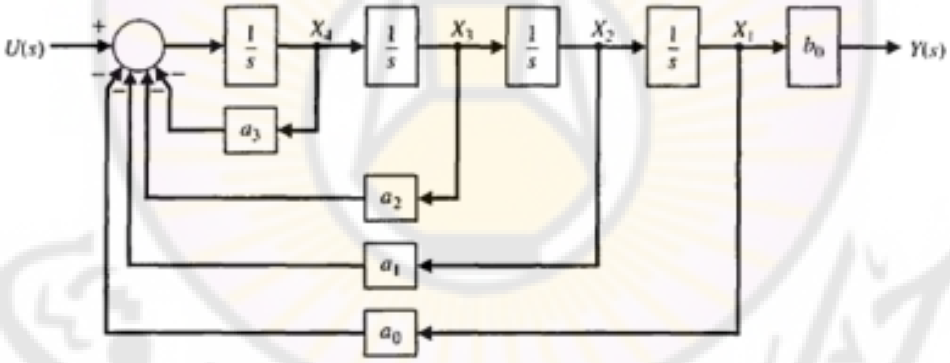
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{P_1}{1-(L_1+L_2+L_3+L_4)}$$

$$=\frac{b_0/s^4}{1-\left(\frac{a_0}{s^4}+\frac{a_1}{s^3}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s}\right)}$$

$$=\cdot\frac{b_0 s^{-4}}{1+a_3 s^{-1}+a_2 s^{-2}+a_1 s^{-3}+a_0 s^{-4}}$$




– أ –




– ب –

**الشكل (5-10): نماذج صورية للتابع $G(s)$ المعطى بالعلاقة (5-45).**

يمكننا أيضاً استنتاج المخطط الصندوقي لتابع التحويل $G(s)$, انطلاقاً من مخطط تدفق الإشارة ليبدو على النحو المبين بالشكل (5-10 – ب).

لنعود الآن إلى المعادلة (5-45) حيث سنقوم بإعادة ترتيب بنود المعادلة, ومن ثم سنقوم بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على هذه البنود لنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^4(y/b_0)}{dt^4}+a_3\frac{d^3(y/b_0)}{dt^3}+a_2\frac{d^2(y/b_0)}{dt^2}+a_1\frac{d(y/b_0)}{dt}+a_0(y/b_0)=u$$

سنعرف, أيضاً أربع متحولات حالة على النحو التالي:

$$x_1=y/b_0$$
$$x_2=x_1^{\bullet}=y^{\bullet}/b_0$$
$$x_3=x_2^{\bullet}=y^{\bullet\bullet}/b_0$$
$$x_4=x_3^{\bullet}=y^{\bullet\bullet\bullet}/b_0$$

بالتالي يمكن كتابة المعادلة التفاضلية من الدرجة الرابعة بواسطة أربع معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى, كما يلي:

$$x_1^{\bullet}=x_2,$$
$$x_2^{\bullet}=x_3,$$
$$x_3^{\bullet}=x_4,$$
$$x_4^{\bullet}=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3-a_3x_4+u:$$

أما معادلة الخرج, فتكتب كما يلي: $y=b_0x_1$

يمكن الحصول بسهولة على المخطط الصندوقي للنظام وذلك انطلاقاً من هذه المعادلات التفاضلية الأربعة لنحصل على مخطط مطابق لذلك المبين بالشكل (5-10).

لنأخذ الحالة التالية حيث أن بسط تابع التحويل هو كثير حدود في $s$, كما هو مبين بالمعادلة التالية:

$$G(s)=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$
$$=\frac{b_3s^{-1}+b_2s^{-2}+b_1s^{-1}+b_0s^{-4}}{1+a_3s^{-1}+a_2s^{-2}+a_1s^{-3}+a_0s^{-4}}.....(46-5)$$

إن بنود البسط تمثل المسارات الأمامية في علاقة ماسون, حيث تمس هذه المسارات جميع الحلقات وبالتالي بتطبيق علاقة ماسون على الشكل (5-11- أ) الممثل لمخطط تدفق الإشارة للنظام يمكننا استنتاج تابع التحويل ومن ثم التأكد من أن تابع تحويل المخطط مطابق للتابع المعطى بالعلاقة (5-46):

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{b_0}{s^4}+\frac{b_1}{s^3}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s}}{1-\left(-\frac{a_0}{s^4}-\frac{a_1}{s^3}-\frac{a_2}{s^2}-\frac{a_3}{s}\right)}$$
$$=.\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{1+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

نلاحظ أن تابع التحويل المستنتج من مخطط ماسون متطابق مع التابع المعطى بالعلاقة (5-46). من الملاحظ أيضاً أن الشكل العام لمخطط تدفق الإشارة الممثل لتابع التحويل المعطى بالعلاقة (5-46) يستخدم ($n$) حلقة تغذية خلفية بمعامل تغذية خلفية ($a_n$), و ($m$) مسار أمامي بمعامل مسار أمامي ($b_m$). يدعى الشكل العام لمخطط تدفق الإشارة وللمخطط الصندوقي المبين بالشكل (5-11) بالشكل القانوني لمتحول الطور ( Phase variable canonical form). في الشكل (5-11) تم تحديد متحولات الحالة كمخارج للعناصر التكاملية. للحصول على مجموعة المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى الممثلة للتابع $G(s)$, تم إدخال مجموعة جديدة من العقد في مخطط تدفق الإشارة, وذلك مباشرة قبل كل عنصر تكاملي. تمثل العقد المدخلة قبل العناصر التكاملية, مشتق متحولات الحالة. يبين الشكل (5-12) مخطط تدفق الإشارة بعد إدخال العقد الجديدة.

باستخدام مخطط تدفق الإشارة الجديد, يمكن أن نكتب المجموعة التالية من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والواصفة لمعادلات الحالة:

$$\begin{aligned}
x_1^{\bullet} &= x_2,\\
x_2^{\bullet} &= x_3,\\
x_3^{\bullet} &= x_4,\\
x_4^{\bullet} &= -a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3-a_3x_4+u.....(47-5)
\end{aligned}$$

في هذه المعادلة تمثل $x_1, x_2,.....x_n$ متحولات الطور (Phase variables).

يمكننا أيضاً استنتاج المخطط الصندوقي للنظام مباشرة من المعادلة (5-46), حيث سنُعرف متحول وسيط ($Z(s)$ (Intermediate variable), ومن ثم سنقوم بإعادة كتابة المعادلة (5-46) بدلالة المتحول الوسيط على النحو التالي:

$$G(s)=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}.\frac{Z(s)}{Z(s)}$$

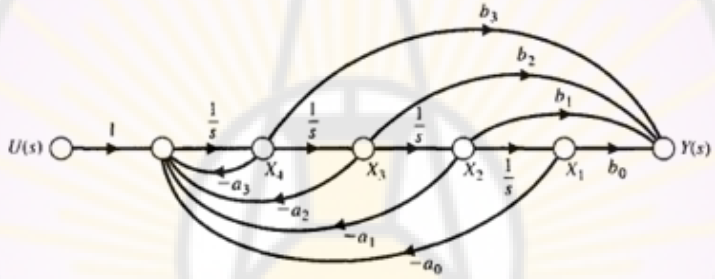
من العلاقة السابقة نجد:

$$Y(s)=\left(b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0\right)Z(s)$$
$$U(s)=\left(s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0\right)Z(s)$$

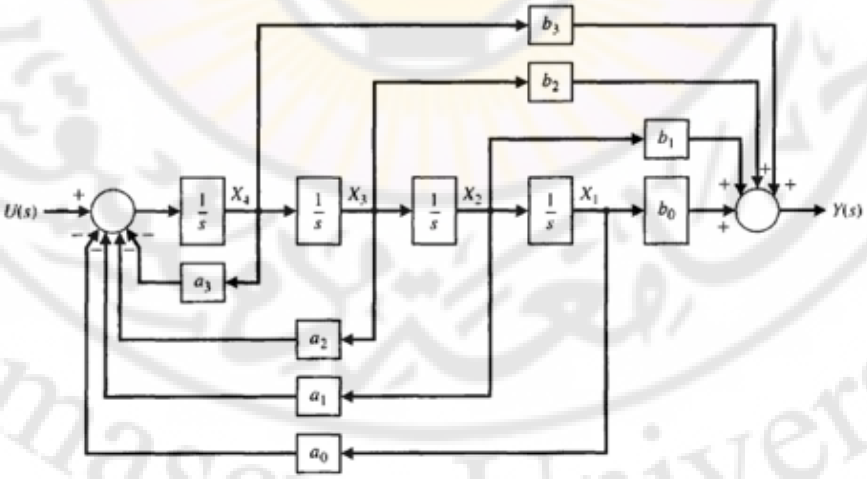
لنأخذ تحويلات لابلاس العكسية لكلا المعادلتين السابقتين فنجد:

$$y(t)=b_3\frac{d^3z}{dt^3}+b_2\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}b_1+b_0z$$

$$u(t)=\frac{d^4z}{dt^4}+a_3\frac{d^3z}{dt^3}+a_2\frac{d^2z}{dt^2}+a_1\frac{dz}{dt}+a_0z$$

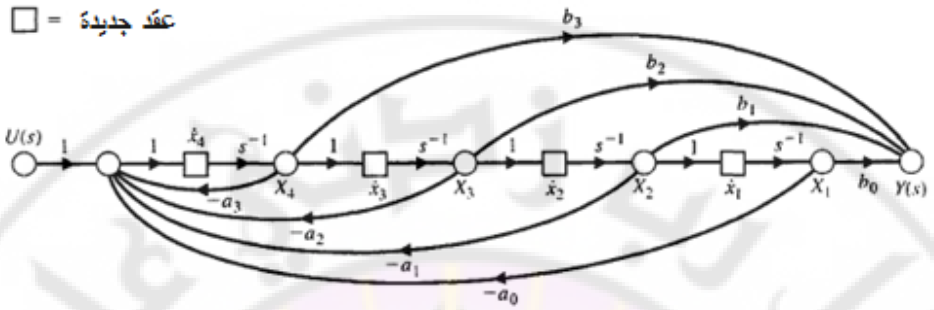



- أ -




- ب -

**الشكل (5-11): نماذج صورية للتابع *G(s)*.**




**الشكل (5-12): مخطط تدفق الإشارة بعد إدخال العقد الجديدة.**

لنحدد متحولات الحالة الأربعة على النحو التالي:

$$x_1 = z$$
$$x_2 = x_1^{\bullet} = z^{\bullet}$$
$$x_3 = x_2^{\bullet} = z^{\bullet\bullet}$$
$$x_4 = x_3^{\bullet} = z^{\bullet\bullet\bullet}$$

يمكن كتابة المعادلات التفاضلية على النحو التالي:

$$x_1^{\bullet} = x_2,$$
$$x_2^{\bullet} = x_3,$$
$$x_3^{\bullet} = x_4,$$
$$x_4^{\bullet} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + u$$

أما معادلة الخرج فهي:

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots (48-5)$$

يمكن الحصول على المخطط الصندوقي مباشرة من معادلات الحالة الأربع ومعادلة الخرج, كما هو مبين بالشكل (5-11- ب).

لنكتب معادلات الحالة باستخدام المصفوفات, على النحو التالي:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \ldots\ldots (49-5)$$

أو :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad .....(50-5)$$

أما معادلة الخرج:

$$y(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad .....(51-5)$$

إن المخططات المبينة بالشكل (5-11) ليست الوحيدة القادرة على تمثيل تابع التحويل $G(s)$, حيث هناك مخططات أخرى مكافئة تمثل التابع $G(s)$, مثل تلك المبينة بالشكل (5-13). في هذا النموذج, تم الحصول على معاملات المسار الأمامي عن طريق التغذية الأمامية لإشارة الدخل $U(s)$, لذلك يدعى هذا النموذج بالشكل القانوني للدخل المغذى أمامياً (Input feedforward canonical form).

إن إشارة الخرج, في هذا النموذج, تساوي متحول الحالة الأول $x_1$. لنحاول الآن استخراج تابع التحويل باستخدام علاقة ماسون وذلك للتأكد من مطابقة تابع التحويل الممثل بالمخطط مع تابع التحويل المعطى بالعلاقة (5-46). من الملاحظ من الشكل (5-13) أن جميع حلقات التغذية الخلفية تمس المسارات الأمامية, بالتالي:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{s^4} + \frac{b_1}{s^3} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s}}{1 - \left( -\frac{a_0}{s^4} - \frac{a_1}{s^3} - \frac{a_2}{s^2} - \frac{a_3}{s} \right)}$$

$$= .\frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{1 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

إذاً, فتابع التحويل الممثل بواسطة مخطط تدفق الإشارة مطابق للتابع المراد تمثيله $G(s)$ المعطى بالعلاقة (5-46).

باستخدام المخطط المبين بالشكل (5-13), يمكن الحصول على المجموعة التالية من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى:

$$\begin{aligned} x_1^{\bullet} &= -a_3 x_1 + x_2 + b_3 u, \\ x_2^{\bullet} &= -a_2 x_1 + x_3 + b_2 u, \\ x_3^{\bullet} &= -a_1 x_1 + x_4 + b_1 u, \\ x_4^{\bullet} &= -a_0 x_1 + b_0 u \ldots\ldots\ldots (52-5) \end{aligned}$$

يمكن صياغة المعادلات (5-52) على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} u(t) \ldots\ldots (53-5)$$

كما يمكن كتابة معادلة الخرج على النحو التالي:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + [0]u(t) \ldots\ldots (54-5)$$

بالرغم من أن الشكل القانوني لإشارة الدخل المغذاة أمامياً, والمبين بالشكل (5-13), والشكل القانوني لمتحول الطور, والمبين بالشكل (5-11), يمثلان نفس تابع التحويل إلا أن معادلات الحالة الناتجة عن كل شكل تختلف عن الشكل الآخر.

**مثال 5-2:** استنتاج معادلات الحالة:

ليكن لدينا نظام تحكم وحيد الحلقة المبين بالشكل (5-14), حيث إن تابع تحويل الحلقة المغلقة معطى بالعلاقة التالية:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}$$

أوجد ما يلي:

1- معادلات الحالة والخرج باستخدام الشكل القانوني لمتحول الطور.

2- معادلات الحالة والخرج باستخدام الشكل القانوني لإشارة الدخل المغذاة أمامياً.

- نضرب البسط والمقام في التابع $T(s)$ بـ $s^{-3}$, فنجد:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s^{-1}+8s^{-2}+6s^{-3}}{1+8s^{-1}+16s^{-2}+6s^{-3}}.....(54-5)$$

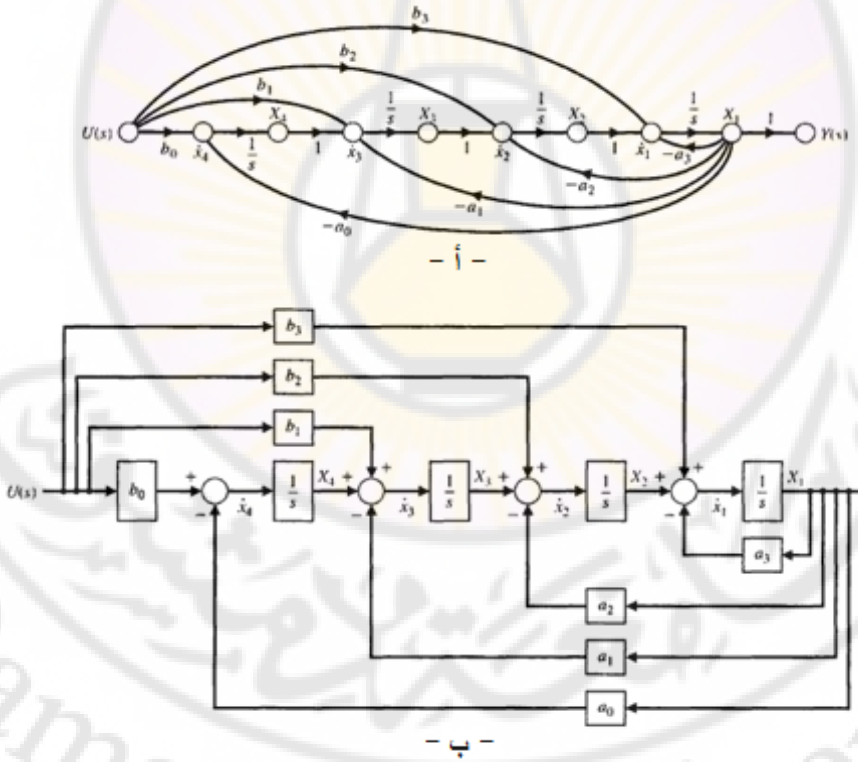
يبين الشكل (5-15) مخطط تدفق الإشارة والمخطط الصندوقي المقابلان للتابع $T(s)$, وذلك بالاعتماد على الشكل القانوني لمتحول الطور.

إن معادلة الحالة التفاضلية للنظام:

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -16 & -8\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u(t).....(55-5)$$

أما معادلة الخرج:

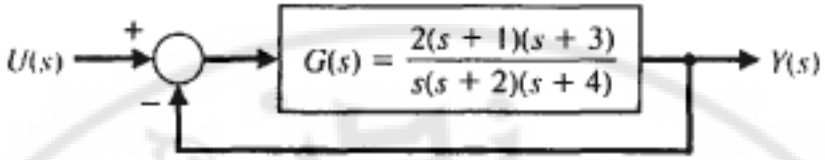
$$y(t)=\begin{pmatrix}6 & 8 & 2\end{pmatrix}\mathbf{x}.....(56-5)$$



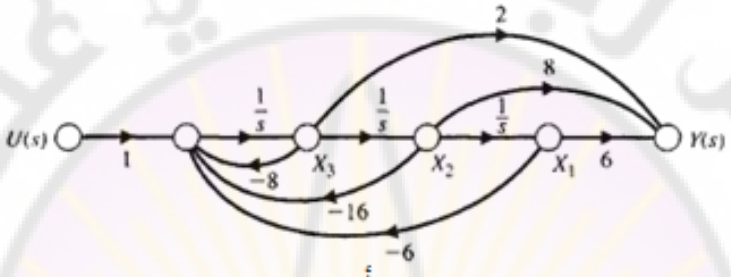

– أ –

– ب –

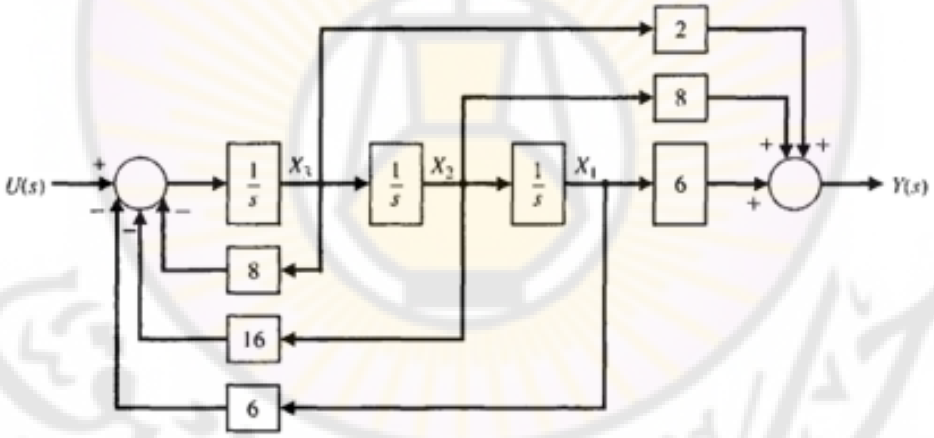
**الشكل (5-13): النماذج الصورية للتابع $G(s)$ المعطى بالعلاقة (5-46)**




**الشكل (5-14): نظام تحكم وحيد الحلقة.**




– أ –




– ب –

**الشكل (5-15): النماذج الصورية لـ $T(s)$ باستخدام الشكل القانوني لمتحول الطور.**

لنستخرج الآن النموذج المعتمد على الشكل القانوني لإشارة الدخل المغذاة أمامياً. يبين الشكل (5-16) مخطط تدفق الإشارة والمخطط الصندوقي المستنتجان.

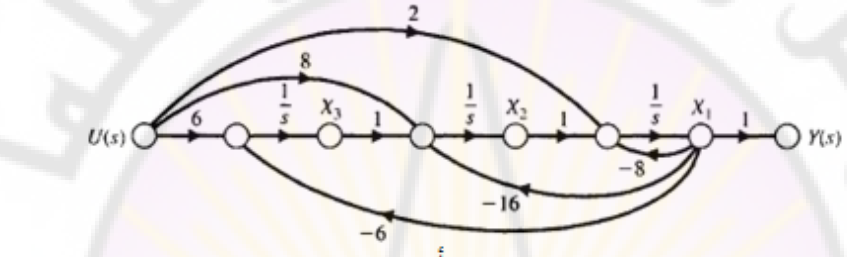
في هذه الحالة, تكون معادلة الحالة التفاضلية للنظام:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} u(t).....(57-5)$$

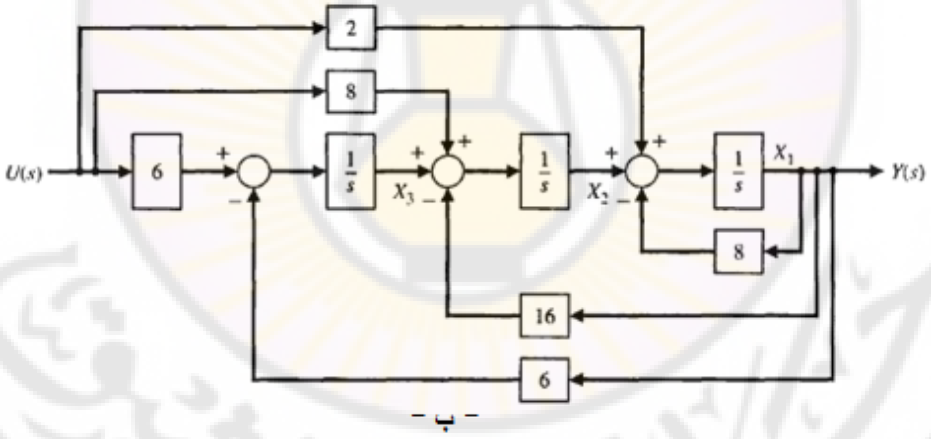
أما معادلة الخرج:

$$y(t) = x_1(t).....(58-5)$$

■




- أ -




- ب -

**الشكل (5-16): النماذج الصورية لـ $T(s)$ باستخدام الشكل القانوني لإشارة الدخل المغذاة أمامياً.**

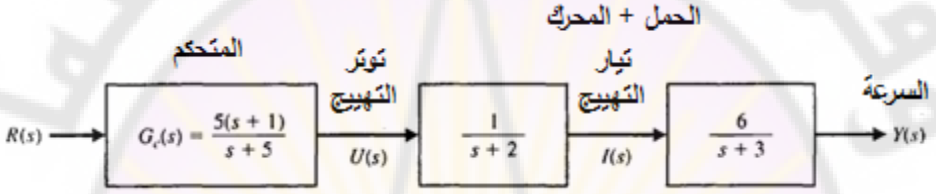
**5-4 نماذج صورية بديلة (Alternative graphical models):**

غالباً ما يدرس مصمم نظام التحكم المخطط الصندوقي والذي يمثل العناصر الفيزيائية المكونة للنظام ومتحولات النظام. لنأخذ على سبيل المثال نموذج محرك التيار المستمر (DC motor) والمبين بالشكل (5-17). إن خرج هذا النظام هو المتحول $Y(s)$ الممثل

لسرعة محور المحرك. نريد الآن اختيار المتحولات الفيزيائية كمتحولات حالة, بالتالي يمكن أن نختار : $x_1 = y(t), x_2 = i(t), x_3 = 1/4\,r(t) - 1/20\,u(t)$ ,

حيث: $y(t)$ سرعة محور المحرك (motor shaft velocity), $i(t)$ : تيار التهييج ( Field current), $u(t)$ : توتر التهييج (Field voltage).

يمكن رسم النماذج الصورية (مخطط تدفق الإشارة والمخطط الصندوقي) للنظام, وذلك باستخدام متحولات الحالة الفيزيائية الثلاثة على النحو المبين بالشكل (5-18).




**الشكل (5-17): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بسرعة محرك مستمر.**

إن هذه النماذج جيدة ومفيدة وذلك إذا كان بالإمكان قياس متحولات الحالة الفيزيائية. من الشكل (5-18) نجد أن نموذج كل صندوق في الشكل (5-17) قد تم تمثيله بشكل مفصل في الشكل (5-18). على سبيل المثال, لنأخذ تابع تحويل المتحكم:

$$\frac{U(s)}{R(s)} = G_c(s) = \frac{5(s+1)}{s+5} = \frac{5+5s^{-1}}{1+5s^{-1}}$$

حيث يمثل مخطط تدفق الإشارة بين $R(s)$ و $U(s)$, التابع $G_c(s)$.

يمكن الحصول على معادلة الحالة مباشرة من الشكل (5-18) على النحو التالي:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \quad .....(59-5)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \quad .....(60-5)$$

يوجد طريقة أخرى لتمثيل تابع التحويل وذلك إذا كان من الممكن تفريق تابع التحويل إلى كسور جزئية بسيطة. لنأخذ تابع التحويل الكلي للنظام المبين بالشكل (5-17):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{30(s+1)}{(s+5)(s+2)(s+3)} = \frac{q(s)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

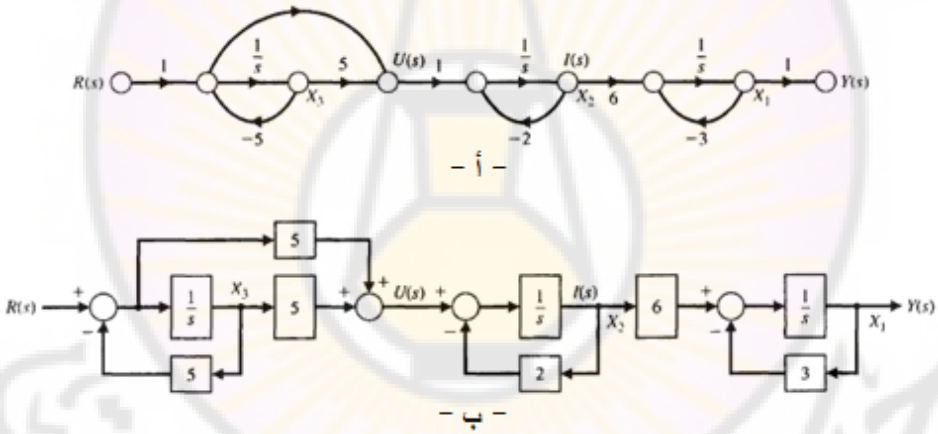
إن الاستجابة العابرة لتابع التحويل تحوي ثلاثة أنماط تتحدد بالجذور: $s_1$, $s_2$, $s_3$. هذه الأنماط تتحدد عن طريق تفريق الكسور على النحو التالي:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = -\frac{20}{s+5} - \frac{10}{s+2} + \frac{30}{s+3} \quad \text{.....(61-5)}$$

يبين الشكل (5-19) نموذج متحول الحالة الممثل للمعادلة (5-61). لنكتب الآن معادلة الحالة والخرج للنظام وذلك بالاعتماد على التمثيل المبين بالشكل (5-19), فنجد:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} -20 & -10 & 30 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{.....(62-5)}$$

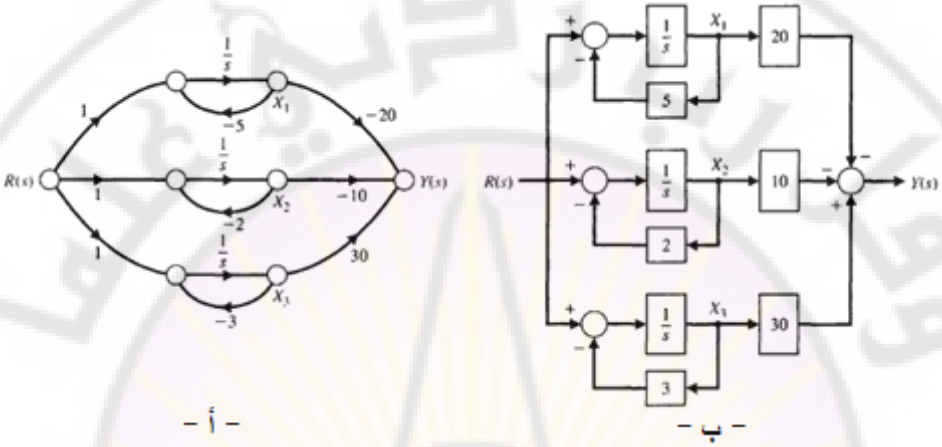



**الشكل (5-18): النماذج الصورية للنظام المبين بالشكل (5-17): أ – مخطط تدفق الإشارة ب – المخطط الصندوقي.**

في هذا التمثيل اخترنا أن يرافق متحول الحالة $x_1$ الجذر -5 = $s_1$, و $x_2$ مع الجذر -2 = $s_2$ و $x_3$ مع الجذر -3 = $s_3$, علماً أننا نستطيع أن نعتمد خيار آخر, فعلى سبيل المثال يمكن أن يترافق متحول الحالة $x_1$ مع الجذر -2 = $s_2$.

تظهر على القطر الرئيسي للمصفوفة A في معادلة الحالة المستنتجة الأقطاب الثلاثة: $-s_1$, $-s_2$, $-s_3$, لذلك يدعى هذا الشكل لتمثيل تابع التحويل بالشكل القانوني القطري

(Diagonal canonical form). يمكننا دائماً تمثيل تابع التحويل باستخدام الشكل القانوني القطري طالما يملك تابع التحويل أقطاب محددة.



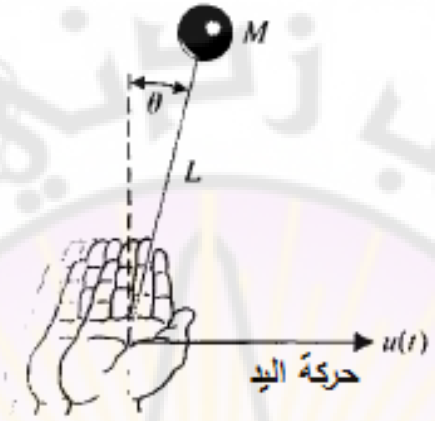

**الشكل (5-19): التمثيل بالشكل القانوني القطري لتابع تحويل النظام المعطى بالشكل (5-17).**

**مثال 5-3:** التحكم بالنواس المقلوب (Inverted pendulum control):

يبين الشكل (5-20) مسألة توازن النواس (عصا مثبت في نهايتها كرة) المقلوب على يد إنسان.إن شرط التوازن الوحيد هو: $d\theta/dt = 0, \theta(t) = 0$ .

إن مسألة توازن النواس المقلوب على يد الإنسان تشبه مسألة التحكم بزاوية صاروخ في مرحلة إطلاقه, لذلك سنقوم بتعديل مسألة توازن النواس المقلوب بحيث يتم وضعه على عربة كتلتها $(M)$, كما هو مبين بالشكل (5-21).

تتحرك العربة بحيث تكون الكتلة $(m)$ دائماً بالاتجاه الأعلى ومائلة نحو اليمين. يجب التعبير عن متحولات الحالة بدلالة الدوران الزاوي $\theta(t)$ وموضع العربة $y(t)$ . يمكن الحصول على المعادلات التفاضلية الواصفة لحركة النظام من مجموع القوى في الاتجاه الأفقي, ومن مجموع العزوم حول نقطة الارتكاز. سنفرض, فيما يلي أن $M >> m$ , وأن زاوية الدوران $\theta$ صغيرة, وبالتالي فالمعادلات خطية.




**الشكل (5-20): توازن النواس المقلوب المتوضع على يد الإنسان.**

إن مجموع القوى في الاتجاه الأفقي:

$$My^{\bullet\bullet} + ml\theta^{\bullet\bullet} - u(t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63-5)$$

حيث $u(t)$ قوة شد العربة, $l$: المسافة من الكتلة $m$ إلى نقطة الارتكاز.

أما مجموع العزوم حول نقطة الارتكاز فيعطى بالعلاقة:

$$mly^{\bullet\bullet} + ml^2\theta^{\bullet\bullet} - ml\,g\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64-5)$$

لقد تم اختيار متحولات الحالة على النحو التالي: $(x_1 x_2 x_3 x_4) = (y\, y^{\bullet}, \theta\, \theta^{\bullet})$.

يمكن كتابة المعادلات (5-63) و (5-64) بدلالة متحولات الحالة لتصبح:

$$Mx_2^{\bullet} + mlx_4^{\bullet} - u(t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65-5)$$

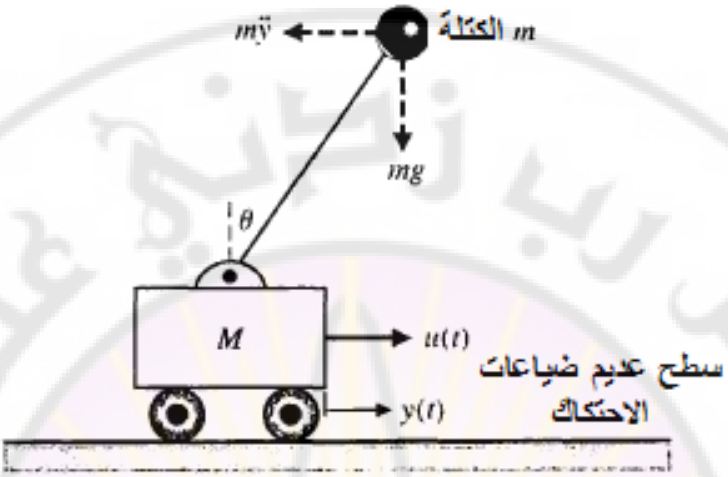
$$x_2^{\bullet} + lx_4^{\bullet} - gx_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66-5)$$

للحصول على المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى الضرورية لتمثيل الحالة, نعمل على عزل $lx_4^{\bullet}$ في المعادلة (5-66) ونعوضها في المعادلة (5-65), فنحصل:

$$Mx_2^{\bullet} + mgx_3 = u(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67-5)$$

حيث: $M >> m$. بتعويض $x_2^{\bullet}$ في المعادلة (5-66), نجد:

$$Mlx_4^{\bullet} - Mgx_3 + u(t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (68-5)$$




**الشكل (5-21): النواس المقلوب المتوضع على عربة حيث النواس يتحرك فقط في المستوي العمودي.**

مما سبق يمكن كتابة المجموعة التالية من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى التالية:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2, \\
\dot{x_2} &= -\frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u(t), \\
\dot{x_3} &= x_4, \\
\dot{x_4} &= \frac{g}{l}x_3 - \frac{1}{Ml}u(t) \qquad \text{.....(69-5)}
\end{aligned}$$

بالتالي فإن مصفوفات النظام:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/(Ml) \end{bmatrix} \qquad \text{.....(70-5)}$$

**5-5 استنتاج تابع التحويل من معادلة الحالة:**

في الفقرات السابقة, عالجنا استنتاج معادلة الحالة باستخدام نموذج تدفق الإشارة, وذلك من أجل تابع تحويل $G(s)$ معطى. لننتقل الآن إلى مسألة تحديد تابع التحويل $G(s)$ لنظام وحيد الدخل, ووحيد الخرج وذلك انطلاقاً من معادلات الحالة.

لنتذكر المعادلات (5-16) و (5-17):

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad .....(71-5)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \quad .....(72-5)$$

حيث: $y$: خرج النظام الوحيد و $u$: دخل النظام الوحيد.

بتطبيق تحويلات لابلاس على المعادلات (5-71) و (5-72), نجد:

$$s\mathbf{X(s)} = \mathbf{AX(s)} + \mathbf{B}U(s) \quad .....(73-5)$$

$$Y(s) = \mathbf{CX(s)} + \mathbf{D}U(s) \quad .....(74-5)$$

بإعادة ترتيب المعادلة (5-73) نجد: $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X(s)} = \mathbf{B}U(s)$

طالما أن: $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \phi(s)$, وبالتعويض بالمعادلة السابقة نجد:

$$\mathbf{X(s)} = \phi(s)\mathbf{B}U(s)$$

بتعويض $\mathbf{X}(s)$ في المعادلة (5-74) نجد:

$$Y(s) = [\mathbf{C}\phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s) \quad .....(75-5)$$

بالتالي يعطى تابع التحويل بالعلاقة التالية:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}\phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad .....(76-5)$$

**مثال 5-4:** تابع تحويل دارة الـ $RLC$:

لنعمل على استخراج تابع تحويل دارة الـ $RLC$ المبينة بالشكل (5-4), وذلك باستخدام معادلات الحالة والخرج (5-18) و (5-19):

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [0 \quad R]\mathbf{x}$$

لنحسب المقدار $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ فنجد:

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & s+\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

ومن ثم لنقوم بحساب $\phi(s)$:

$$\phi(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix} s+\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}$$

حيث: $\Delta(s)=s^2+(R/L)s+(1/LC)$, بالتالي يكون تابع تحويل دارة الـ $RLC$:

$$G(s)=\begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{s+\frac{R}{L}}{\Delta(s)} & -\frac{1}{C.\Delta(s)} \\ \frac{1}{L.\Delta(s)} & \frac{s}{\Delta(s)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}=\frac{R/LC}{\Delta(s)}$$

$$G(s)=\frac{R/LC}{s^2+(R/L)s+(1/LC)}$$

إن هذه النتيجة تتطابق مع المعادلة (4-5) الناتجة عن تطبيق علاقة ماسون على مخطط تدفق الإشارة.

**5-6 الاستجابة الزمنية ومصفوفة العبور:**

يعتبر من المهم الحصول على الاستجابة الزمنية لنظام تحكم ممثل في فراغ الحالة وذلك بهدف تفحص خواص الأداء الزمني لهذا النظام. كما ذكرنا سلفاً, يمكن الحصول على الاستجابة العابرة للنظام بحل معادلة الحالة التفاضلية, حيث سيكون الشكل العام للحل:

$$\mathbf{x}(t)=\phi(t).\mathbf{x}(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.....(77-5)$$

إذا كانت الشروط الابتدائية $\mathbf{x}(0)$, إشارة الدخل $\mathbf{u}(\tau)$, ومصفوفة العبور $\phi(t)$ معروفة, فيمكن حساب $\mathbf{x}(t)$.

يوجد العديد من الطرق لحساب مصفوفة العبور حيث سنتعرض لها في هذا الفصل. من بين هذه الطرق, الطريقة المعتمدة على منشور تايلور لـ $\phi(s)$, أي:

$$\emptyset(t) = \exp(\mathbf{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \ldots\ldots (78-5)$$

توجد طريقة أخرى تعتمد على حساب $\phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ ومن ثم حساب $\phi(t) = Laplace^{-1}(\phi(s))$.

كذلك يوجد طريقة تعتمد على مخطط تدفق الإشارة. في هذه الطريقة, يتم الحصول على العلاقة بين متحول الحالة $\mathbf{X}_i(s)$ والشروط الابتدائية $\mathbf{x}(0)$ بواسطة علاقة ماسون المعتمدة على مخطط تدفق الإشارة. في نظام من الدرجة الثانية, يمكن أن نكتب:

$$X_1(s) = \phi_{11}(s)x_1(0) + \phi_{12}(s)x_2(0)$$
$$X_2(s) = \phi_{21}(s)x_1(0) + \phi_{22}(s)x_2(0) \ldots\ldots\ldots (79-5)$$

إن العلاقة بين $X_2(s)$ كإشارة خرج و$x_1(0)$ كإشارة دخل يمكن أن يتم الحصول عليها بواسطة علاقة ماسون, وبالتالي نحصل على العنصر $\phi_{21}(s)$ في المصفوفة $\phi(s)$. مما سبق يمكننا حساب جميع عناصر المصفوفة $\phi(t)$ باستخدام علاقة ماسون حيث أن العنصر $\phi_{ij}(s)$ يستنتج من مخطط ماسون وذلك بافتراض $X_i(s)$ كإشارة خرج و $x_j(0)$ كإشارة دخل.

سنشرح هذه الطريقة لحساب مصفوفة العبور عبر المثال التالي.

**مثال 5-5:** حساب مصفوفة العبور:

سنقوم بدراسة الدارة الكهربائية *RLC* المبينة بالشكل (5-4) حيث سنقوم بحساب $\phi(s)$ باستخدام: 1- المصفوفة $\phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ 2- مخطط تدفق الإشارة وعلاقة ماسون.

وجدنا سابقاً أن:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

بالتالي:

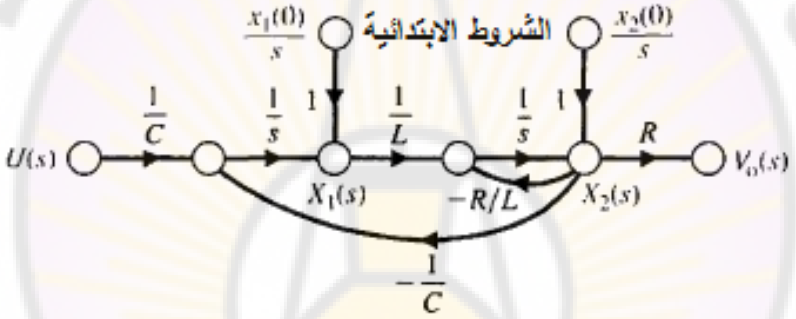
$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots (80-5)$$

بالتالي فإن المصفوفة $\phi(s)$:

$$\phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \quad .....(81-5)$$

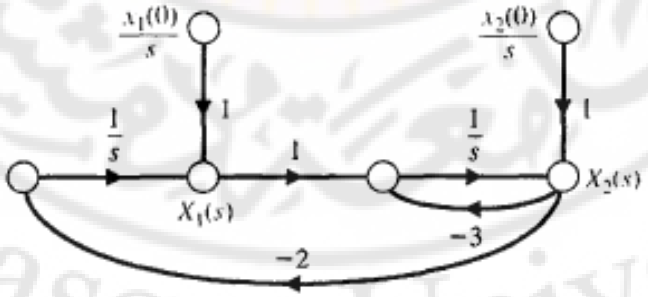
حيث: $\Delta(s) = s(s+3)+2 = s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$.

إن مخطط تدفق الإشارة لدارة الـ *RLC* المدروسة مبين بالشكل (5-8). كما رأينا في الفقرات السابقة, فإن متحولات الحالة هي: $x_1 = v_C$ و $x_2 = i_L$ . إن الشروط الابتدائية $x_1(0)$ و $x_2(0)$ تمثلان توتر المكثف الابتدائي وتيار الملف الابتدائي. إن مخطط تدفق الإشارة, الحاوية على الشروط الابتدائية لكل متحول حالة مبين بالشكل (5-22), حيث تظهر الشروط الابتدائية كقيمة ابتدائية عند خرج كل عنصر تكاملي.




**الشكل (5-22): مخطط تدفق الإشارة لدارة الـ *RLC*.**

لحساب $\phi(s)$, نضع U(s) = 0. يبين الشكل (5-23) مخطط تدفق الإشارة وذلك عندما $R = 3$, $L = 1$, C = 0.5, حيث تم حذف عقد الدخل والخرج وذلك لإنعدام تأثيره عند حساب $\phi(s)$.




**الشكل (5-23): مخطط تدفق الإشارة لدارة الـ *RLC* وذلك عندما U(s) = 0.**

لنطبق الآن علاقة ماسون على مخطط تدفق الإشارة المبين بالشكل (5-23) وذلك بهدف الحصول على $X_1(s)$ بدلالة $x_1(0)$:

$$X_1(s)=\frac{1.\Delta_1(s).[x_1(0)/s]}{\Delta(s)}.....(82-5)$$

حيث: $\Delta(s)$ محدد المخطط ويساوي: $\Delta(s)=1+3s^{-1}+2s^{-2}$ .

$\Delta_1(s)$ محدد المسار الأول ويساوي: $\Delta_1(s)=1+3s^{-1}$ .

بالتالي فإن العنصر الأول في مصفوفة العبور يساوي:

$$\phi_{11}(s)=\frac{\left(1+3s^{-1}\right)\left(1/s\right)}{1+3s^{-1}+2s^{-2}}=\frac{s+3}{s^2+3s+2}.....(83-5)$$

يتم الحصول على العنصر $\phi_{12}(s)$ وذلك انطلاقاً من مخطط تدفق الإشارة بين $X_1(s)$ و $x_2(0)$, على النحو التالي:

$$X_1(s)=\frac{\left(-2s^{-1}\right)[x_2(0)/s]}{1+3s^{-1}+2s^{-2}}$$

بالتالي:

$$\phi_{12}(s)=\frac{-2}{s^2+3s+2}.....(84-5)$$

بنفس الطريقة نوجد $\phi_{21}(s)$ و $\phi_{22}(s)$:

$$\phi_{21}(s)=\frac{(s^{-1})(1/s)}{1+3s^{-1}+2s^{-2}}=\frac{1}{s^2+3s+2}.....(85-5)$$

$$\phi_{22}(s)=\frac{(1)(1/s)}{1+3s^{-1}+2s^{-2}}=\frac{s}{s^2+3s+2}.....(86-5)$$

بالتالي فإن مصفوفة العبور في المستوي اللابلاسي هي:

$$\phi(s)=\begin{bmatrix} s+3/s^2+3s+2 & -2/s^2+3s+2 \\ 1/s^2+3s+2 & s/s^2+3s+2 \end{bmatrix}.....(87-5)$$

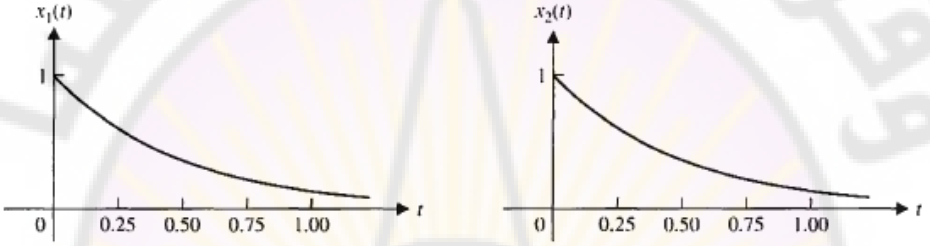
يمكن تحليل المعادلة المميزة إلى عوامل: $s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$ , بالتالي فإن مصفوفة العبور:

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} \left(2e^{-t}-e^{-2t}\right) & \left(-2e^{-t}+2e^{-2t}\right) \\ \left(e^{-t}-e^{-2t}\right) & \left(-e^{-t}+2e^{-2t}\right) \end{bmatrix}.....(88-5)$$

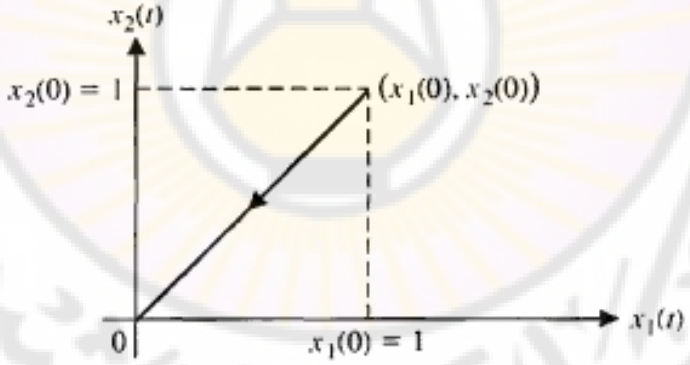
لنحسب الآن الاستجابة الزمنية لدارة الـ *RLC*, وذلك باستخدام العلاقة (5-77), حيث $x_1(0) = x_2(0) = 1$ و $u(t) = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} .....(89-5)$$

إن استجابة الدارة عند الشروط الابتدائية المذكورة مبينة بالشكل (5-24), أما مسار شعاع الحالة $[x_1(t), x_2(t)]$ في المستوي $(x_1, x_2)$ فيظهر في الشكل (5-25). ■




**الشكل (5-24): الاستجابة الزمنية لمتحولات الحالة في دارة الـ *RLC* وذلك من أجل $x_1(0) = x_2(0) = 1$.**




**الشكل (5-25): مسار شعاع الحالة في المستوي $(x_1, x_2)$.**

**5-7 حساب حالة النظام بدلالة إشارة التحكم:**

في الفقرة السابقة, قمنا بحساب حالة النظام وذلك من أجل إشارة دخل معدومة, ولكن بوجود شروط ابتدائية. في هذه الفقرة سنقوم بحساب حالة النظام وذلك من أجل إشارة دخل (تحكم) معطاة. لقد وجدنا سابقاً أن:

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t).\mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau .....(102-5)$$

تمكننا هذه العلاقة من حساب شعاع الحالة للنظام وذلك إذا كان معلوم لدينا مصفوفة العبور. لندرس على سبيل المثال النظام الموصوف بمعادلة الحالة التالية:

$$\mathbf{x}^{\bullet}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}u(t) .....(103-5)$$

لنفرض أنه تم تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية, كما أن الحالة الابتدائية للنظام معطاة بالعلاقة: $\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . في الفقرة السابقة, تم حساب مصفوفة العبور لهذا النظام:

$$e^{[A]t} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{-2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{-1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

بالتالي بتطبيق العلاقة (102-5), ينتج لدينا:

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} & \frac{-2}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \\ \frac{-1}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} & \frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t \left[\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} + \frac{4}{3}e^{-(t-\tau)} - \frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)}\right]d\tau \\ \int_0^t \left[-\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} - \frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} - \frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)}\right]d\tau \end{bmatrix}$$

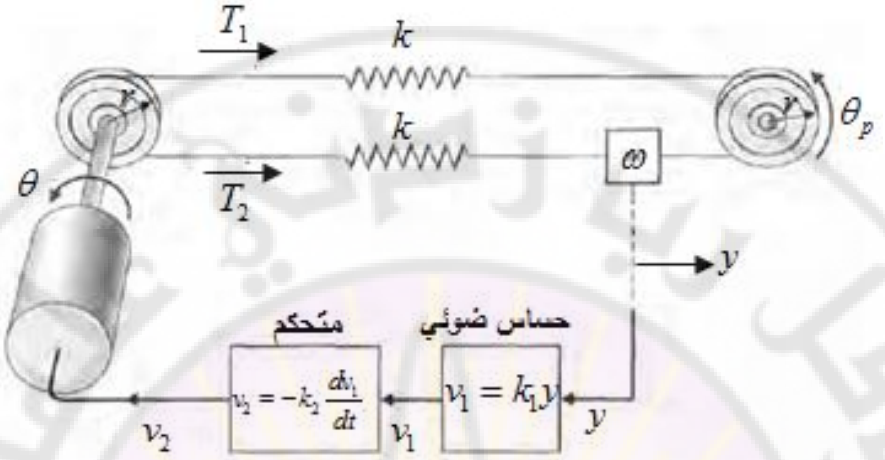
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t \left[2e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}\right]d\tau \\ \int_0^t \left[-e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}\right]d\tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2e^{-t} - 4e^{-4t} \\ -2 - e^{-t} - e^{-4t} \end{bmatrix}$$

**5-8 مثال تصميمي: نمذجة نظام التحكم في السيّر الدوار في الطابعة:**

يبين الشكل (5-26) أحد نظم التحكم بالسيّر الدوار في الطابعة, حيث أن عنصر التشغيل (المشغل) في هذا النظام هو محرك تيار مستمر. في هذا النظام, يقوم الحساس الضوئي (light sensor) بقياس مكان (أو موضع) رأس الطابعة (printing device), كما تقوم قوة شد السيّر بضبط مرونة نابض السير الدوار. إن الهدف من عملية التصميم هو تحديد تأثير ثابت نابض السير الدوار $k$ (أو Belt spring constant), واختيار بارامترات المحرك المناسبة, بكرة السيّر والمتحكم. للقيام بعملية التحليل الضرورية ولتحديد قيم الثوابت لابد لنا أولاً من تحديد نموذج السيّر الدوار. انطلاقاً من هذا النموذج يمكننا الحصول على مخطط تدفق الإشارة واختيار متحولات الحالة. في الخطوة التالية يمكننا الحصول على تابع تحويل النظام وتحديد جزء من بارامترات النظام (عدا ثابت النابض $k$). في الخطوة النهائية سنقوم بدراسة تأثير ثابت النابض $k$ وذلك ضمن الحدود الواقعية.

**الشكل (5-26): نظام التحكم في السيّر الدوار في الطابعة.**




**الشكل (5-27): نموذج نظام التحكم في السيّر الدوار في الطابعة.**

يبين الشكل (5-27) النموذج المقترح للنظام المدروس. في هذا النموذج, ثابت السيّر ($k$), نصف قطر بكرة السير ($r$), الموضع الزاوي لمحور المحرك ($\theta$), الموضع الزاوي للبكرة ($\theta_p$), كتلة (أو وزن) أداة الطباعة (رأس الطباعة) $m$ وموضعه $y(t)$. يقوم الحساس الضوئي بقياس ($y$), حيث أن خرج هذا الحساس هو التوتر ($v_1$) حيث: ($v_1=k_1y$), أما إشارة خرج المتحكم فهو إشارة التوتر ($v_2$) والتي تتبع إشارة التوتر ($v_1$). تطبق إشارة التوتر $v_2$ على ملف التهييج في محرك السيرفو ذو التيار المستمر. لنفرض أننا نستطيع استخدام العلاقة الخطية التالية:

$$v_2 = -\left[ k_2 \frac{dv_1}{dt} + k_3 v_1 \right] \text{.....} (104-5)$$

حيث اخترنا $k_2 = 0.1$ و $k_3 = 0$ حيث $k_3$ هو ثابت التغذية الخلفية بالسرعة. في هذا النظام نشير بـ ($J$) إلى ثابت عطالة النظام حيث $J = J_{motor}+J_{pulley}$ و $J_{motor}$ ثابت عطالة المحرك و $J_{pulley}$ ثابت عطالة البكرة.

في هذا النظام, نريد استخدام محرك صغير باستطاعة (1/8 hp), حيث أن ثوابت هذا المحرك بالإضافة إلى بعض ثوابت النظام مبينة بالشكل (5-1).

| الجدول (5-1): بارامترات نظام الطابعة | | |
|---|---|---|
| البارامتر | الرمز | القيمة العددية |
| الكتلة | $M$ | 0.2 Kg |
| ثابت الحساس الضوئي | $k_1$ | 1 V/m |
| نصف قطر البكرة | $r$ | 0.15 m |
| محارضة ملف الحقل | $L$ | تقريباً 0 |
| ثابت الاحتكاك للمحرك والبكرة | $B$ | 0.25 N m sec /rad |
| المقاومة الكهربائية لملف التهييج | $R$ | 2 $\Omega$ |
| ثابت المحرك | $k_m$ | 2 N m /A |
| العطالة | $J$ | 0.01 kg.m2 |

لنقوم الآن بكتابة معادلات الحركة للنظام مع ملاحظة أن: $y = -r.\theta_p$ :

- قوة الشد $T_1$ تساوي:

$$T_1 = k(r\theta - r\theta_p) = k(r\theta - y).....(105-5)$$

- قوة الشد $T_2$ تساوي:

$$T_2 = k(y - r\theta).....(106-5)$$

بالتالي فإن قوة الشد النهائية (net tension) على الكتلة $(m)$ تساوي:

$$T_1 - T_2 = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$2kx_1 = m\frac{d^2y}{dt^2}.....(107-5)$$

حيث: $x_1 = r\theta - y$ هو متحول الحالة الأول. لنفرض أن متحول الحالة الثاني هو: $x_2 = dx_1/dt$ , وبالاستناد إلى المعادلة (107-5) نجد:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2k}{m}x_1.....(108-5)$$

إن المشتق الأول لـ $x_1$:

$$\frac{dx_1}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy}{dt} = rx_3 - x_2.....(109-5)$$

حيث اخترنا متحول الحالة الثالث: $x_3 = d\theta/dt$.

نحن بحاجة الآن لمعادلة تفاضلية تصف دوران المحرك. من أجل $L = 0$, فإن تيار الحقل للمحرك $i = v_2/R$ وعزم المحرك $T_m = k_m i$, بالتالي يمكن أن نكتب:

$$T_m = \frac{k_m}{R} v_2 .....(110-5)$$

يزودنا المحرك بعزم قادر على تدوير السير الدوار, بالإضافة إلى العزم القادر على التغلب على الاضطرابات أو العزم غير المرغوب به, أي:

$$T_m = T + T_d .....(111-5)$$

لدينا:

$$T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + r(T_1 - T_2) .....(112-5)$$

حيث $T$ العزم عند محور المحور والبكرة, بالتالي:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} .....(113-5)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{T_m - T_d}{J} - \frac{b}{J}x_3 - \frac{2kr}{J}x_1$$

لدينا: $T_m = \frac{k_m}{R}v_2$ و $v_2 = -k_1 k_2 \frac{dy}{dt} = -k_1 k_2 x_2$ , بالتالي: بالتعويض علاقة $T_m$ بعلاقة $\frac{dx_3}{dt}$ نجد:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-k_m k_1 k_2}{JR}x_2 - \frac{b}{J}x_3 - \frac{2kr}{J}x_1 - \frac{T_d}{J} .....(114-5)$$

المعادلات (5-108), (5-109) و (5-114) هي المعادلات التفاضلية اللازمة لوصف النظام. لنكتب معادلة الحالة لهذا النظام:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & r \\ \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{-2kr}{J} & \frac{-k_m k_1 k_2}{JR} & \frac{-b}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} T_d .....(115-5)$$

يبين الشكل (5-28) مخطط تدفق الإشارة والمخطط الصندوقي للنظام المدروس.

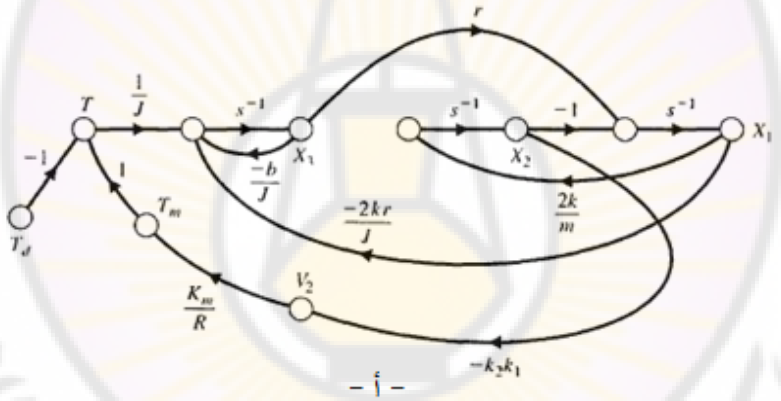
يمكننا الآن استخدام مخطط تدفق الإشارة لاستخراج تابع التحويل $X_1(s)/T_d(s)$. إن الهدف من ذلك هو إنقاص تأثير الاضطراب $T_d(s)$, حيث أن تابع التحويل يبين لنا كيفية تحقيق هذا الهدف. باستخدام علاقة ماسون, نجد:

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-r/J\, s^{-2}}{1-(L_1+L_2+L_3+L_4)-L_1L_2}$$

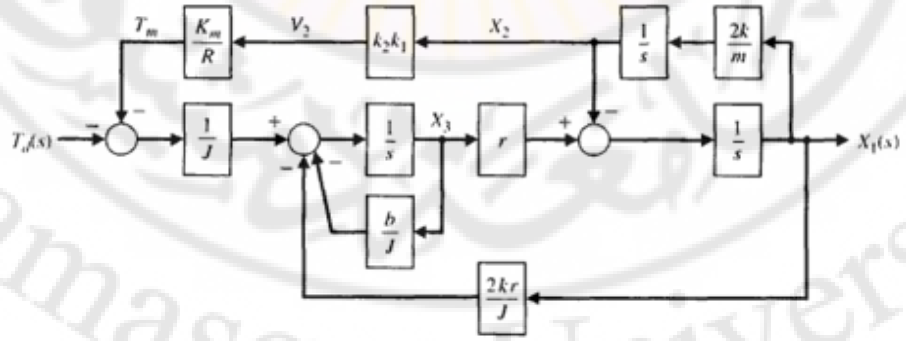
حيث: $L_1 = \frac{-b}{J}s^{-1}, L_2 = \frac{-2k}{m}s^{-2}, L_3 = \frac{-2kr^2s^{-2}}{J}, L_4 = \frac{-2kk_mk_1k_2rs^{-3}}{mJR}$

بالتعويض نجد:

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-(r/J)s}{s^3+\left(\frac{b}{J}\right)s^2+\left(\frac{2k}{m}+\frac{2kr^2}{J}\right)s+\left(\frac{2kb}{Jm}+\frac{2kk_mk_1k_2r}{mJR}\right)} \quad .....(116-5)$$




- أ -




- ب -

**الشكل (5-28): أ- مخطط تدفق الإشارة ب- المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالسير.**

يمكننا أيضاً استنتاج تابع التحويل المطلوب وذلك بإتباع طريقة تبسيط المخطط الصندوقي المبين بالشكل (5-28- ب). من الملاحظ أنه لا يوجد طريقة وحيدة واجب إتباعها عند تبسيط المخطط الصندوقي ولكن بالنهاية يوجد حل نهائي وحيد. يبين الشكل (5-29) خطوات تبسيط المخطط الصندوقي للنظام. لنعوض الآن البارامترات المعطاة بالجدول (5-1) بعلاقة تابع التحويل المعطاة بالشكل (5- 29- د), فنحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-15s}{s^3 + 25s^2 + 14.5ks + 1000k(0.25 + 0.15k_2)} \quad .....(117-5)$$

نريد اختيار ثابت النابض ($k$) والربح ($k_2$) بحيث أن متحول الحالة ($x_1$) يسعى إلى قيمة صغيرة, وذلك عند حدوث اضطراب (أي عندما $T_d(s) \neq 0$). إن الهدف من السعي لإسناد قيمة صغيرة لـ $x_1$ ذلك لأنه عندما $x_1 = r\theta - y \approx 0$ فإن $y = r\theta$ وهو المطلوب. لنطبق على الدخل الإشارة الخطوية ذات المطال ($a$), وبافتراض أن السير الدوار ذو صلابة كبيرة (أي $k \to \infty$). في هذه الحالة تصبح علاقة $X_1(s)$ على النحو التالي:

$$X_1(s) = \frac{-15a}{s^3 + 25s^2 + 14.5ks + 1000k(0.25 + 0.15k_2)} \quad .....(119-5)$$

لنطبق نظرية القيمة النهائية على العلاقة (5-119), فنحصل على:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{s\to 0} sX_1(s) = 0 \quad .....(120-5)$$

بالتالي فإن القيمة النهائية (القيمة في الحالة المستقرة) للمتحول $x_1(t)$ هي الصفر.

لقد افترضنا في العلاقة (5-120) أن $k \to \infty$ وهذه القيمة غير واقعية, بينما في الواقع تتراوح قيمة $k$ ضمن المجال $1 \le k \le 40$. لنأخذ قيمة وسطية لـ $k$ وهي $k = 20$, وأيضاً بفرض أن $k_2 = 0.1$ , حيث في هذه الحالة يصبح لدينا:

$$X_1(s) = \frac{-15a}{s^3 + 25s^2 + 290s + 5300}$$

$$= \frac{-15a}{(s + 22.56)(s^2 + 2.44s + 234.93)} \quad .....(121-5)$$

إن المعادلة المميزة لـ $X_1(s)$ تملك جذر حقيقي وجذرين عقديين. لنحسب الاستجابة الزمنية لـ $X_1(s)$:

$$\frac{X_1(s)}{a} = \frac{A}{s+22.56} + \frac{Bs+C}{s^2+2.44s+234.93} .....(122-5)$$

بالحساب نجد قيم الثوابت $A$, $B$, $C$: $A=-0.0218, B=0.0218, C=-0.4381$ .

من الواضح أن قيم $A$, $B$, $C$ صغيرة بالتالي فإن الاستجابة الزمنية عند تطبيق إشارة واحدية على الدخل $T_d(s)$ (أي عند تواجد اضطراب في الحمل) صغيرة نسبياً, ولأن قيم $A$ و $B$ أصغر مقارنة مع الثابت $C$, فيمكننا تقريب $X_1(s)$ إلى:

$$\frac{X_1(s)}{a} \approx \frac{-0.4381}{(s+1.22)^2+(15.28)^2}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على العلاقة السابقة نجد:

$$\frac{x_1(t)}{a} \approx -0.0287e^{-1.22t}\sin 15.28t .....(123-5)$$

إن الاستجابة الفعلية لـ $x_1(t)$ مبينة بالشكل (5-30). من هذا الشكل يمكن ملاحظة سعي النظام لإنقاص تأثير الاضطرابات الطارئة إلى قيمة صغيرة نسبياً, وبالتالي يكون الهدف من هذه الدراسة التصميمية قد تحقق.

**5-9 تحليل نماذج فراغ الحالة باستخدام بيئة الماتلاب:**

إن العناصر الأساسية لتمثيل فراغ الحالة هي شعاع الحالة **x**, والمصفوفات **A**, **B**, **C**, **D**. في هذه الفقرة سنستخدم توابع جديدة في بيئة الماتلاب هي: "ss" و "lsim", والتابع "expm".

ليكن معطى لدينا تابع تحويل:

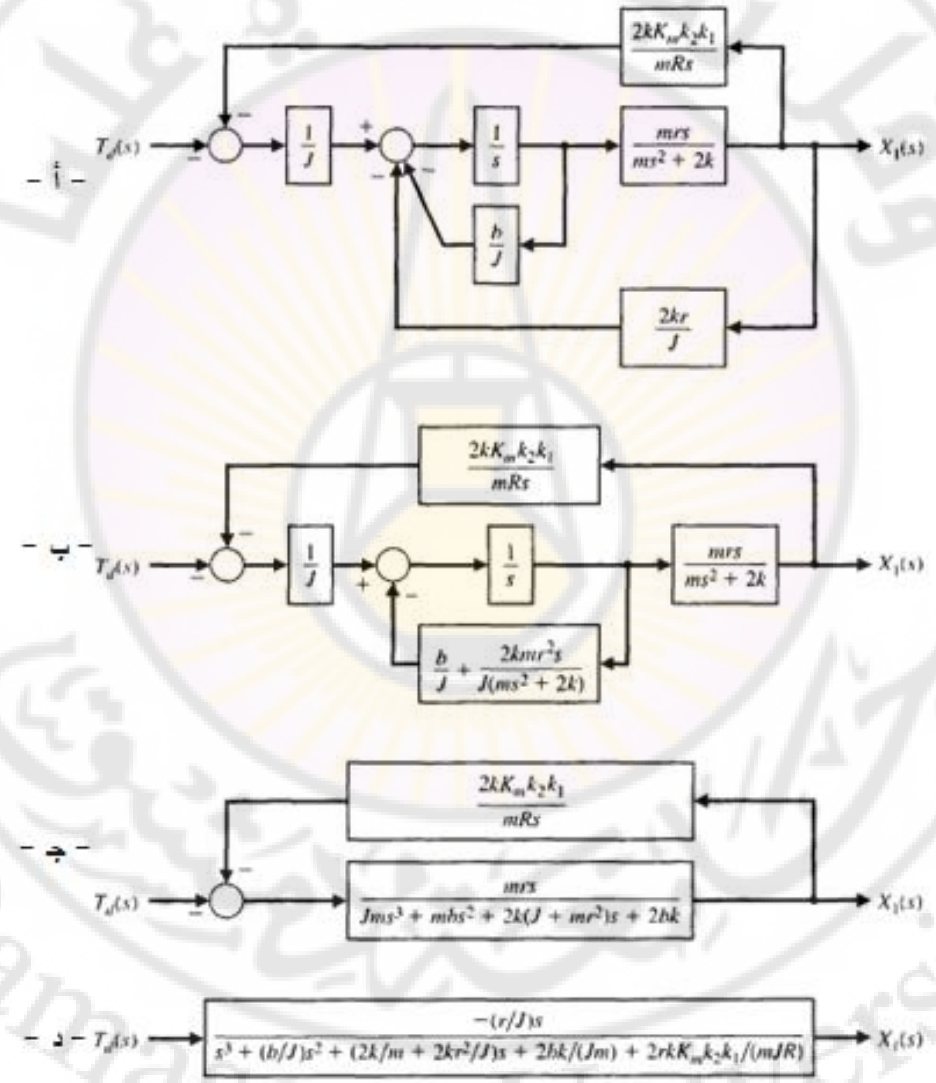
- نستخدم التابع "tf" لتحويل نموذج فراغ الحالة إلى تابع تحويل.
- نستخدم التابع "ss" لتحويل تابع التحويل إلى نموذج فراغ الحالة.

إن استعمال هذه التوابع مبين بالشكل (5-31), حيث sys_tf يمثل نموذج النظام على شكل تابع تحويل, و sys_ss نموذج النظام باستخدام فراغ الحالة.

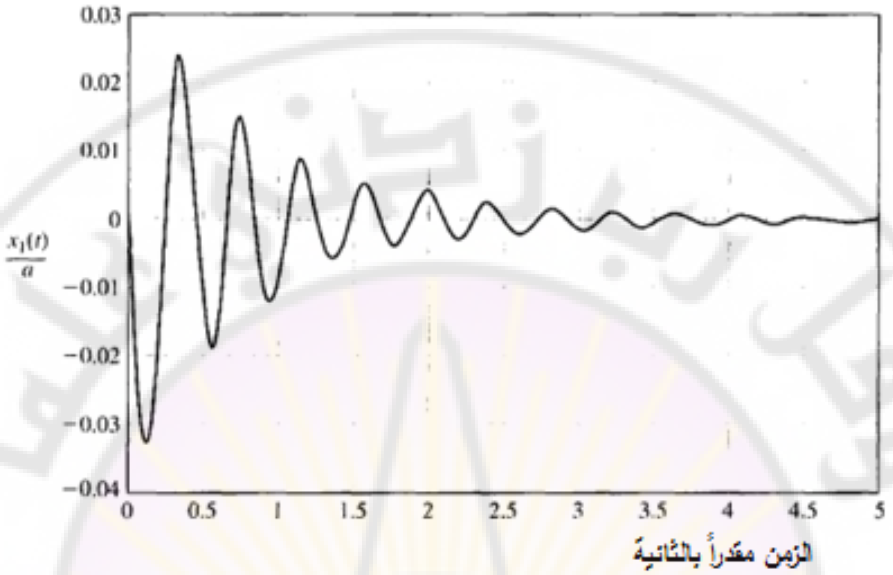
تعطى الاستجابة الزمنية للنظام الممثل في فراغ الحالة بالمعادلة (5-77):

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t).\mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

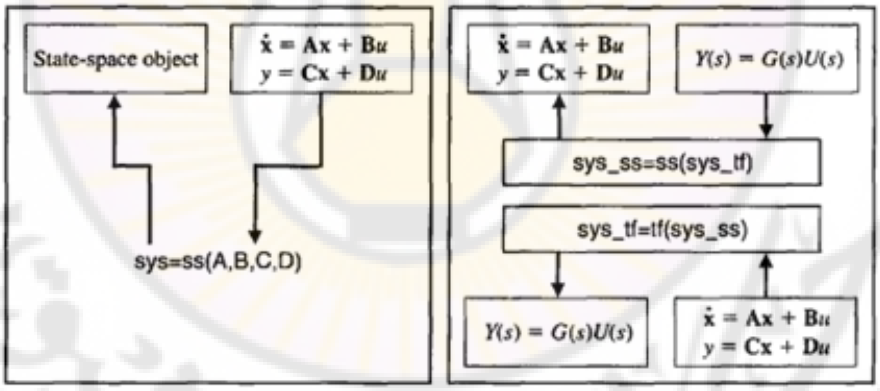
يمكننا استخدام التابع "expm" لحساب مصفوفة العبور, كما هو مبين بالشكل (5-32).
إن التابع "expm(A)" يحسب المصفوفة الآسية (matrix exponential), بينما التابع "exp(A)" يحسب العنصر $e^{a_{ij}}$ لكل عنصر $a_{ij} \in A$.




**الشكل (5-29): خطوات تبسيط المخطط الصندوقي المبين بالشكل (5-28- ب).**

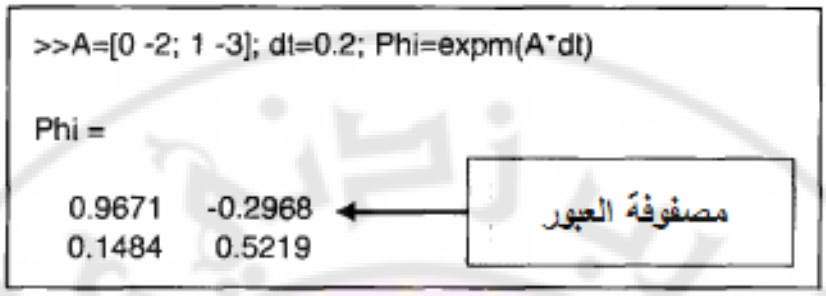



**الشكل (5-30): استجابة $x_1(t)$ لإشارة دخل خطوية (القيمة العظمى = -0.0325).**



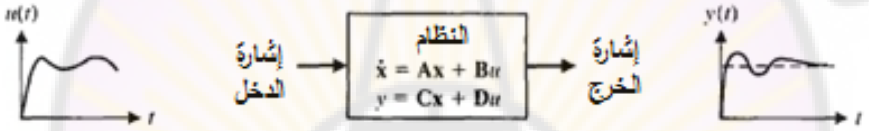

- أ -  - ب -

**الشكل (5-31): أ – استخدام التابع ss ب – استخدام التوابع ss و tf.**

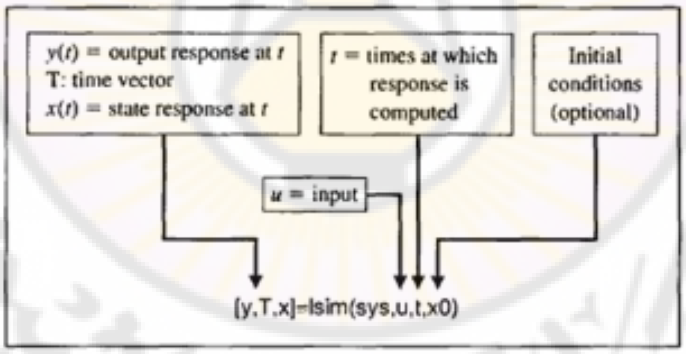



**الشكل (5-32): حساب مصفوفة العبور عند لحظة زمنية محددة** $\Delta t = dt$ .

يمكن أن تُحسب الاستجابة الزمنية للنظام الممثل في فراغ الحالة باستخدام التابع "lsim", كما هو مبين بالشكل (5-33).




– أ –



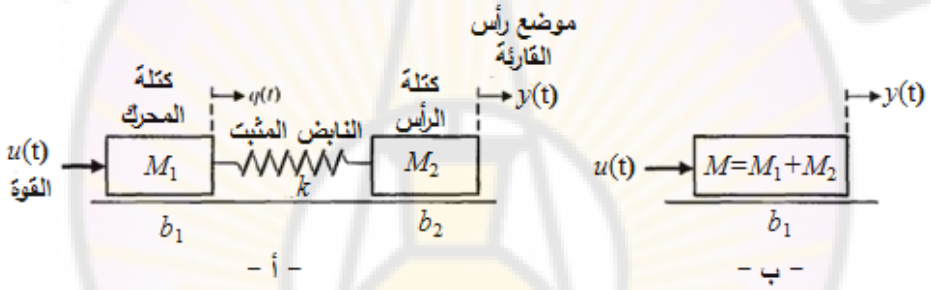

– ب –

**الشكل (5-33): استخدام التابع "lsim" لحساب استجابة خرج وشعاع الحالة للنظام.**

**5-10 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

تحوي الأقراص المدمجة الحديثة تقريباًعلى (5000) مسار كل (1) سم, حيث عرض هذه المسارات (1μm). لابد من التذكير بالحاجة الملحة لدقة موضع رأس القارئة وكذلك لدقة الحركة من مسار إلى آخر. في هذه الفقرة سنقوم بتمثيل نظام قارئة الأقراص المدمجة

في فراغ الحالة بحيث نأخذ بعين الاعتبار تأثير مثبت الرأس (flexure). لنعود ثانية إلى مثبت الرأس المبين بالشكل (2-85). طالما أننا نريد أن يكون وزن كلاً من الذراع والمثبت خفيف وذلك للحصول على سرعة عالية, يتوجب علينا اعتبار تأثير مثبت الرأس والذي يعَدّ نابضاً فولاذياً رفيعاً. لنتذكر أن هدفنا هو التحكم الدقيق برأس القارئة $y(t)$ كما هو مبين بالشكل (5- 34 – أ). في هذه الشكل $M_1$ كتلة المحرك و $M_2$ كتلة رأس القارئة, و $K$ ثابت النابض (نابض المثبت). القوة $u(t)$ تقود الكتلة $M_1$ وتُولد بواسطة محرك التيار المستمر. إذا كان النابض صلب يمكننا الحصول على النموذج التقريبي المبين بالشكل (5- 34 – ب).




**الشكل (5-34): أ – نموذج النظام ذو الكتلتين مع نابض التثبت ب – النموذج التقريبي باعتبار أن النابض صلب.**

يبين الجدول (5-2) القيم النموذجية لبارامترات النظام.

لنقوم, الآن, باستنتاج تابع تحويل النموذج المبسط والمبين بالشكل (5-34- ب). نلاحظ أن $M = M_1+M_2$, بالتالي يمكن أن نكتب:

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+b_1\frac{dy}{dt}=u(t).....(124-5)$$

بالتالي فتابع تحويل النظام:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(Ms+b_1)}$$

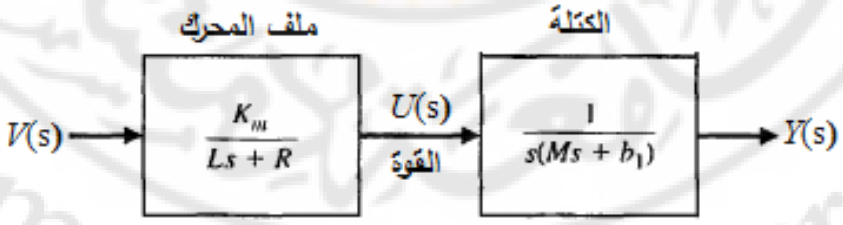
بتعويض قيم الثوابت المبينة بالجدول (5-2), بعلاقة تابع التحويل نجد:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(0.0205s + 0.410)} = \frac{48.78}{s(s+20)}$$

| الجدول (5-2): القيم المثالية لبارامترات النموذج ذو الكتلتين | | |
|---|---|---|
| البارامتر | الرمز | القيمة العددية |
| كتلة المحرك | $M_1$ | $20g = 0.02kg$ |
| نابض التثبيت | $K$ | $10 \le K \le \infty$ |
| كتلة الرأس القارئ | $M_2$ | $0.5g = 0.0005kg$ |
| موضع الرأس | $x_2$(t) | متغير ويقدر بالميلمتر |
| احتكاك عند الكتلة 1 | $b_1$ | $410*10^{-3}\,N/(m/\sec)$ |
| مقاومة الحقل | $R$ | $1\Omega$ |
| محارضة الحقل | $L$ | $1mH$ |
| ثابت المحرك | $K_m$ | $0.1025Nm/A$ |
| احتكاك عند الكتلة 2 | $b_2$ | $4.1*10^{-3}\,N/(m/\sec)$ |

يمثل المخطط الصندوقي المبين بالشكل (5-35) نموذج الرأس القارئ بالإضافة إلى نموذج المحرك. باعتبار أن $R = 1\Omega$ , $L = 1mH$ , $K_m = 0.1025$ , نجد أن تابع تحويل النظام:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{5000}{s(s+20)(s+1000)} \ldots\ldots(125-5)$$




**الشكل (5-35): نموذج الرأس القارئ بالإضافة إلى نموذج المحرك.**

لنقوم الآن باستنتاج نموذج متحول الحالة لنموذج الكتلتين المبين بالشكل (5-34- أ). في هذا النموذج, يمكننا أن نكتب المعادلات التفاضلية التالية:

- الكتلة $M_1$: $M_1 \frac{d^2 q}{dt^2} + b_1 \frac{dq}{dt} + K(q - y) = u(t)$
- الكتلة $M_2$: $M_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_2 \frac{dy}{dt} + K(y - q) = 0$

للحصول على نموذج متحول الحالة, سنختار متحولات الحالة التالية:

$$x_1 = q, x_2 = y, x_3 = \frac{dq}{dt}, x_4 = \frac{dy}{dt}$$

بالتالي فإن معادلة الحالة للنظام: $\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$

حيث:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ y \\ \dot{q} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K/M_1 & K/M_1 & -b_1/M_1 & 0 \\ K/M_2 & -K/M_2 & 0 & -b_2/M2 \end{bmatrix} .....(126-5)$$

لنوجد القيم العددية للمصفوفات **A** و **B** وذلك من أجل الاعتبارات التالية:

$$L = 0, u(t) = K_m v(t), K = 10, b_1 = 410 * 10^{-3} (N/(m/s)),$$
$$M_1 = 20g = 0.02Kg, M_2 = 0.5g = 0.0005Kg$$

فنجد:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -500 & 500 & -20.5 & 0 \\ +20000 & -20000 & 0 & -8.2 \end{bmatrix}$$

يمكن ملاحظة أن خرج النظام هو: $y(t) = x_4$ , حيث أن الاستجابة الخطوية لـ $y$ مبينة بالشكل (5-36). من هذا المنحني نجد أن استجابة خرج النظام مهتزة مما يعني أننا بحاجة إلى مثبت ذو صلابة عالية حيث $K > 100$. يبين الشكل (5-36) أيضاً الكود البرمجي في بيئة الماتلاب لرسم الاستجابة الخطوية لـ $y$. حاول استبدال قيمة $K$ بـ 200 في الكود المبين بالشكل (5-36) وذلك لاكتشاف منحني الاستجابة مع مثبت ذو صلابة عالية.

**5-11 خاتمة:**

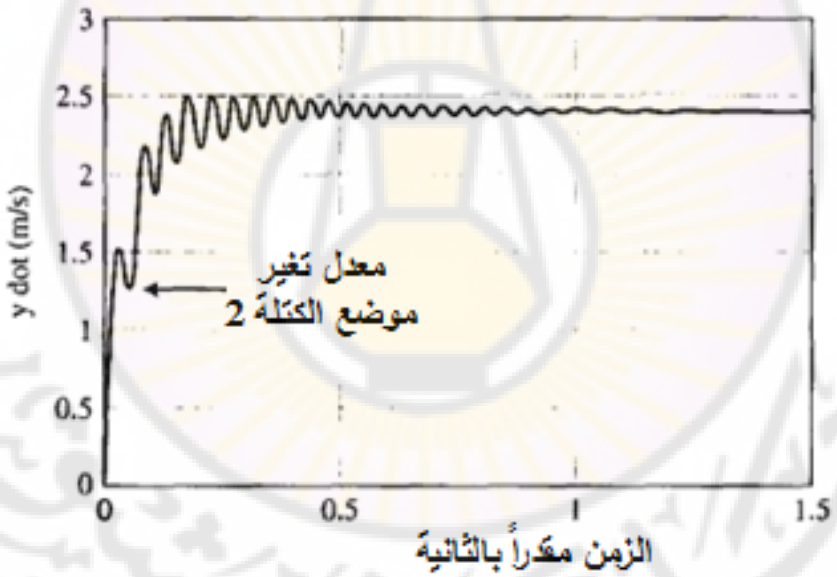
في هذا الفصل, قدمنا طريقة وصف وتحليل النظم في المجال الزمني حيث ناقشنا مفهوم حالة النظام وتعريف متحولات الحالة, وتفحصنا طريقة اختيار مجموعة متحولات الحالة. تم مناقشة أيضاً معادلة الحالة التفاضلية وحل شعاع الحالة.

أخذنا أيضاً بعين الاعتبار طرق تمثيل نموذج النظام في فراغ الحالة بواسطة مخطط تدفق الإشارة والمخطط الصندقي.

إن أحد العناصر المهمة في حساب شعاع الحالة هو مصفوفة العبور لذلك ناقشنا طرق حساب مصفوفة العبور. عالجنا أيضاً بعض الأمثلة التصميمية, وكيفية استخدام بيئة الماتلاب لتمثيل ولتحليل نموذج فراغ الحالة.

```
% Model Parameters
k=10;
M1=0.02; M2=0.0005;
b1=410e-03; b2=4.1e-03;
t=[0:0.001:1.5];
% State Space Model
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;-k/M1 k/M1 -b1/M1 0; k/M2 -k/M2 0 -b2/M2];
B=[0;0;1/M1;0]; C=[0 0 0 1]; D=[0]; sys=ss(A,B,C,D);
% Simulated Step Response
y=step(sys,t); plot(t,y); grid
xlabel('Time (s)'), ylabel('y dot (m/s)')
```

الواحدات
k: kg/m
b: kg/m/s
m: kg




**الشكل (5-36): الاستجابة الخطوية لـ $\dot{y}$ وذلك لنموذج الكتلتين حيث $K = 10$.**

# الفصل السادس: استقرار النظم ذات التغذية الخلفية الخطية

# Chapter 6: The stability of linear feedback systems

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

إن استقرار نظم التغذية الخلفية هو موضوع محوري في تصميم نظام التحكم. يملك النظام المستقر قيمة منتهية لإشارة الخرج وذلك عند تطبيق إشارة دخل ذات قيمة منتهية, حيث يُعرف هذا المفهوم للاستقرار بأنه الاستقرار ذو قيمة الدخل المنتهية وقيمة الخرج المنتهية (bounded-input bounded-output stability).

يرتبط استقرار نظام ذو تغذية خلفية مباشرة بمواقع أقطاب النظام (أو جذور المعادلة المميزة لتابع تحويل النظام), وبمواقع القيم الخاصة (eigenvalues) لمصفوفة النظام وذلك عند تمثيل النظام في فراغ الحالة. في هذا الفصل سنقدم طريقة راوث–هورفيتز (Routh-Hurwitz method) لدراسة استقرار النظم ذات التغذية الخلفية الخطية. تسمح هذه الطريقة بحساب عدد جذور المعادلة المميزة الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي, دون حساب قيم هذه الجذور, كما تسمح بتحديد قيم بعض بارامترات النظام والتي تؤدي إلى استقرار نظام الحلقة المغلقة. في النظم المستقرة, سنُعرف أيضاً الاستقرار النسبي (Relative stability) والذي يقودنا إلى تحديد درجة استقرار النظام.

سنختم الفصل بتقديم مثال تصميمي حيث سنختار بعض قيم بارامترات النظام المدروس, وهو قارئة الأقراص المدمجة بحيث يكون النظام مستقر وذلك بالاعتماد على طريقة راوث–هورفيتز.

### 1-6 مفهوم الاستقرار (The concept of stability):

يُعَدّ الاستقرار من النقاط المهمة جداً وذلك عند دراسة وتحليل وتصميم نظم التحكم ذات التغذية الخلفية. من وجهة نظر عملية نجد أن نظم التحكم ذات التغذية الخلفية غير المستقرة, تكون عديمة الفائدة. إن العديد من نظم التحكم ذات الحلقة المفتوحة تكون غير مستقرة. في هذه الحالة لابد من إدخال نظام التحكم الفعال ذو التغذية الخلفية والذي يؤدي إلى استقرار هذه النظم المفتوحة غير المستقرة, بالإضافة إلى ضبط الاستجابة العابرة للنظام. إذاً يمكننا باستخدام التغذية الخلفية دفع النظام غير المستقر إلى الاستقرار, كما يمكننا عن طريق الاختيار الدقيق لبارامترات المتحكم من ضبط الاستجابة

العابرة للنظام. في حال كان نظام الحلقة المفتوحة مستقر يكون دور المتحكم هو ضبط الاستجابة العابرة والمستقرة بحيث تتحقق خصائص الأداء المحددة من قبل المستثمر والمتجلية بخطأ الحالة المستقرة, التجاوز النسبي, زمن الاستقرار, زمن الذروة (القمة) الأولى, والخصائص الأخرى المذكورة في الفصول السابقة.

بشكل عام يمكننا القول إن نظام التحكم ذو التغذية الخلفية إما مستقر أو غير مستقر. إن هذا النوع من الخواص المتجلية بعبارة مستقر أو غير مستقر يُطلق عليها بالاستقرار المطلق (Absolute stability). بالطبع وعلى سبيل الإيجاز نطلق على النظم ذات الاستقرار المطلق بالنظم المستقرة. إذا كان النظام ذو حلقة التغذية الخلفية مستقر, يمكننا أن نحدد درجة الاستقرار عن طريق ما يسمى بالاستقرار النسبي (Relative stability).

كما سنرى لاحقاً في هذا الفصل, يمكننا أن ندرس استقرار النظام (الاستقرار المطلق) بتحديد مواقع أقطاب تابع التحويل حيث يجب أن تكون واقعة في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي وذلك حتى يكون النظام مستقر. عندما يكون النظام ممثل في فراغ الحالة فيكون النظام مستقر إذا كانت القيم الخاصة للمصفوفة A واقعة في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي. إذا كانت جميع الأقطاب (أو القيم الخاصة) للنظام واقعة في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي يمكننا عندها مناقشة الاستقرار النسبي وذلك بتفحص المواقع النسبية للأقطاب (أو القيم الخاصة).

يُعرف النظام المستقر بأنه النظام ذو استجابة الخرج محدودة القيمة وذلك عند تطبيق إشارة دخل محدودة (bounded input signal).

يمكن شرح مفهوم الاستقرار وذلك باستخدام مخروط دائري أيمن (right circular cone) متوضع على سطح أفقي. إذا تم وضع المخروط على قاعدته ومن ثم تم نقره بشكل خفيف فإن المخروط يعود إلى نقطة توازنه الأصلية. توصف هذه الوضعية وهذه الاستجابة بأنهما مستقران. إذا تم وضع المخروط على جنبه وتم تحريكه بشكل خفيف فأنه يدور دون أن يسعى إلى أن يغير من وضعيته الجانبية. يشار إلى هذه الوضعية بالاستقرار الحيادي (Neutral stability). إذا تم وضع المخروط على قمته ومن ثم تم

تركه فأنه يسقط على جانبه. يشار إلى هذه الوضعية بوضعية عدم الاستقرار. يبين الشكل (6-1) هذه الوضعيات الثلاثة.

**الشكل (6-1): استقرار المخروط.**

يمكننا أن نعرف استقرار النظم الديناميكية على نحو مشابه لاستقرار المخروط. إن استجابة النظام لانزياح ابتدائي سيؤدي إلى إما لاستجابة متناقصة, أو حيادية أو متزايدة. بالتالي وبالاعتماد على تعريف الاستقرار يكون النظام الخطي مستقر , إذا وفقط إذا القيمة المطلقة لتكامل الاستجابة النبضية $g(t)$, خلال مجال زمني لا منتهي, ذات قيمة منتهية. بمعنى آخر , يكون النظام مستقر إذا كانت قيمة التكامل التالي $\int_0^\infty |g(t)|dt$, منتهية.

إن موقع أقطاب النظام في المستوي اللابلاسي تشير إلى شكل الاستجابة العابرة. عندما تكون الأقطاب واقعة في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي فإن الاستجابة العابرة تكون متناقصة. أيضاً, عندما تكون الأقطاب واقعة على المحور التخيلي تكون الاستجابة العابرة حيادية, أما إذا كانت واقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي فإن الاستجابة العابرة تكون متزايدة. إن هذا التقسيم للمستوي اللابلاسي مبين بالشكل (6-2). إذاً يمكننا أن نلاحظ أن النظام يكون مستقر إذا كانت الأقطاب واقعة في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي.

في النظم الخطية, يمكن أن نحدد متطلبات الاستقرار بدلالة مواقع أقطاب تابع تحويل الحلقة المغلقة. إن الشكل العام لتابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$T(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{k=1}^{Q}(s+\sigma_k)\prod_{m=1}^{R}\left[s^2+2\alpha_m s+\left(\alpha_m^2+\omega_m^2\right)\right]}.....(1-6)$$

حيث $q(s)=\Delta(s)=0$ هي المعادلة المميزة للنظام, وجذور هذه المعادلة هي أقطاب النظام المغلق. إن الاستجابة النبضية للنظام (وذلك عندما N = 0) هي:

$$y(t)=\sum_{k=1}^{Q}A_k e^{-\sigma_k t}+\sum_{m=1}^{R}B_m\left(\frac{1}{\omega_m}\right)e^{-\alpha_m t}\sin\left(\omega_m t+\theta_m\right).....(2-6)$$

حيث $A_k$ و $B_k$ ثوابت تعتمد على $\sigma_k$ , $z_i$ , $\alpha_m$ , $k$ , $\omega_m$.

**الشكل (6-2): الاستقرار في المستوي اللابلاسي.**

للحصول على استجابة خرج محددة (Bounded response), فإن أقطاب الحلقة المغلقة يجب أن تقع في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي. إذاً, فالشرط الضروري والكافي حتى يكون النظام ذو التغذية الخلفية مستقر أن يكون الجزء الحقيقي لجميع أقطاب تابع تحويل الحلقة المغلقة, سالب. إذا كانت أحد الأقطاب على الأقل لا تقع في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي (جذور موجبة), يكون النظام غير مستقر. إذا وقعت بعض جذور المعادلة المميزة على المحور التخيلي, وبعضها الأخر كان واقع في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, نقول في هذه الحالة أن النظام على هامش الاستقرار (أو marginally stable). عندما يكون النظام على هامش الاستقرار فيمكننا أن نميز الحالتين التالتين:

- الحالة الأولى: عند تطبيق إشارة دخل خطوية فإن إشارة الخرج ستحوي اهتزازات غير متخامدة.
- الحالة الثانية: عند تطبيق إشارة دخل جيبية ذات تردد مساوي لتردد الأقطاب وذات مطال محدود أيضاً, فإن إشارة الخرج, في هذه الحالة, ستصبح ذات مطال غير محدود.

في النظام غير المستقر, تملك المعادلة المميزة جذر واحد على الأقل يقع في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي أو جذور مضاعفة واقعة على المحور التخيلي. في هذه الحالة تكون إشارة الخرج ذات قيمة غير محدودة وذلك مهما كانت إشارة الدخل.

لنأخذ على سبيل المثال, المعادلة المميزة التالية لنظام الحلقة المغلقة:

$$(s+10)(s^2+16)=0$$

إن النظام الممثل بهذه المعادلة يقع على هامش الاستقرار لوجود جذر مضاعف يقع على المحور التخيلي وهو $(4j)$. إذا تم تطبيق على دخل هذا النظام إشارة جيبية ذات تردد زاوي $(\omega=4)$ فإن مطال إشارة الخرج يصبح غير محدود.

إذاً للتحقق من استقرار نظام التحكم ذو التغذية الخلفية يجب علينا التحقق من جذور المعادلة المميزة $q(s)$. إذا كان الهدف من الدراسة هو فقط معرفة فيما إذا كان النظام مستقر, فإن حساب جذور المعادلة المميزة تعطي معلومات أكثر مما نحن بحاجته, لذلك فقد تم اقتراح العديد من الطرق لمعرفة فيما إذا كان النظام المدروس مستقر أم لا. من بين هذه الطرق نذكر الطريقتين التاليتين:

1- الطريقة المعتمدة على الدراسة في المستوي اللابلاسي (دالة جبرية).

2- الطريقة المعتمدة على الدراسة في المستوي الترددي (دالة ترددية).

سندرس في هذا الفصل الطريقة الأولى أما الطريقة الثانية فسنشرحها في الفصول القادمة.

**2-6 دالة راوث–هورفيتز للاستقرار (The Routh-Hurwitz stability criterion):**

لقد استولت مسألة استقرار النظم على الجزء الأكبر من اهتمام مصممي نظم التحكم. إن أول من طرح فكرة استقرار النظم الديناميكية هما العالمان ماكسويل (Maxwell) و فيشنكردسكي (Vyshenegradshii). في أواخر القرن الثامن عشر, قدم كلاً من العالمين هورفيتز وراوث, كلاً على حدى, طريقة لتحديد فيما إذا كانت النظم الخطية مستقرة. تعتمد طريقة راوث–هورفيتز للاستقرار على المعادلة المميزة للنظام. إن الشكل العام للمعادلة المميزة في المستوي اللابلاسي هو:

$$\Delta(t) = q(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + .... + a_1 s + a_0 = 0.....(3-6)$$

للتحقق من عدم استقرار النظام لابد من تحديد فيما إذا كانت أحد أقطاب النظام (أو جذور المعادلة المميزة) تقع في النصف الأيمن المستوي اللابلاسي. لنكتب المعادلة (3-6) على شكل جداء عوامل, على النحو التالي:

$$a_n(s-r_1)(s-r_2).....(s-r_n) = 0.....(4-6)$$

حيث $r_i$ هو الجذر رقم $(i)$ من المعادلة المميزة. بضرب المعاملات فيما بينها نجد:

$$q(s) = a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + ... + r_n)s^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + ...)s^{n-2}$$
$$- a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 ...)s^{n-3} + ..... + a_n(-1)^n(r_1 r_2 r_3 .....r_n) = 0.....(5-6)$$

بعبارة أخرى يمكننا كتابة المعادلة (5-6) على النحو التالي, وذلك من أجل معادلة مميزة من الدرجة $(n)$:

$$q(s) = a_n s^n - a_n(sum\ of\ all\ roots)s^{n-1}$$
$$+ a_n(sum\ of\ the\ product\ of\ the\ roots\ taken\ 2\ at\ a\ time)s^{n-2}$$
$$- a_n(sum\ of\ the\ product\ of\ the\ roots\ taken\ 3\ at\ a\ time)s^{n-3}$$
$$+ ..... + a_n(-1)^n(\ product\ of\ all\ n\ roots\ ) = 0.....(6-6)$$

بتفحص المعادلة (5-6) نلاحظ أنه حتى تقع جميع الجذور في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, فيجب أن تكون جميع معاملات المعادلة المميزة من نفس الإشارة. أيضاً يجب أن تكون جميع المعاملات ذات قيمة غير صفرية. إن هذه الشروط ضرورية لاستقرار النظام ولكنها غير كافية بالتالي يمكننا أن نعرف مباشرة أن النظام غير مستقر

وذلك إذا كانت هذه الشروط غير محققة, ولكن من جهة أخرى, إذا كانت هذه الشروط محققة فهذا لا يقتضي أن النظام مستقر. على سبيل المثال, لنأخذ النظام الممثل بالمعادلة المميزة التالية:

$$q(s) = (s+2)(s^2 - s + 4) = s^3 + s^2 + 2s + 8 \quad .....(7-6)$$

إن هذا النظام غير مستقر بالرغم من أن جميع معاملات المعادلة المميزة من نفس الإشارة (موجبة), كما سنرى لاحقاً.

تعتبر دالة راوث–هورفيتز معيار ضروري وكافي لدراسة الاستقرار في النظم الخطية, حيث تم تطوير هذه الطريقة بالاعتماد على المحددات (determinants), ولكن سنقدمها في هذا الفصل على شكل مصفوفة, حيث هو الشكل الأنسب لهذه الطريقة, وفق ما نرى.

تقوم طريقة راوث–هورفيتز على ترتيب معاملات المعادلة المميزة:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + ..... + a_1 s + a_0 = 0 \quad .....(8-6)$$

في الجدول التالي:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ s^0 & h_{n-1} & & & \end{array}$$

حيث:

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix},$$

تنص دالة راوث–هورفيتز على أن عدد الجذور ذات الجزء الحقيقي الموجب للمعادلة $q(s)$ يساوي إلى عدد مرات تغير الإشارة في العمود الأول لمصفوفة راوث. بالتالي فإن هذه الدالة تتطلب أن لا يكون هناك تغير في إشارة عناصر العمود الأول وذلك حتى يكون النظام مستقر. إن هذا الشرط هو شرط ضروري وكافي.

بالنظر إلى عناصر العمود الأول في جدول راوث, يمكننا أن نميز أربع حالات حيث كل حالة تقتضي معالجة منفصلة, وتتطلب تعديل في طريقة حساب الجدول وهذه الحالات:

1– لا يوجد أي عنصر في العمود الأول ذو قيمة صفرية.

2– يوجد في العمود الأول من الجدول عنصر صفري, ولكن بقية العناصر في هذا السطر, الحاوي على العنصر الصفري, لا تساوي الصفر.

3– يوجد في العمود الأول من الجدول عنصر صفري, ولكنه ليس الوحيد في هذا السطر حيث يحوي السطر على أصفار أخرى.

4– كما في الحالة الثالثة, ولكن يوجد أيضاً جذور مضاعفة واقعة على المحور التخيلي.

لشرح هذه الحالات, سيتم شرح كل حالة عن طريق عدة أمثلة.

**الحالة الأولى: لا يوجد أي عنصر في العمود الأول ذو قيمة صفرية:**

**مثال 6-1:** نظام من الدرجة الثانية:

تعطى المعادلة المميزة لنظام من الدرجة الثانية بالعلاقة التالية:

$$q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

يمكن صياغة جدول راوث على النحو التالي:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array}$$

حيث: $b_1 = \dfrac{a_1 a_0 - (0)a_2}{a_1} = a_0$.

بالتالي فإن الشرط الضروري لكي يكون نظام الدرجة الثانية مستقر أن تكون جميع عناصر العمود الأول أما موجبة أو سالبة. ■

**مثال 6-2:** نظام من الدرجة الثالثة:

تعطى المعادلة المميزة لنظام من الدرجة الثالثة بالعلاقة التالية:

$$q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

يمكن كتابة جدول راوث لهذا النظام على النحو التالي:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

حيث: $b_1 = \dfrac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2}, c_1 = \dfrac{b_1 a_0}{b_1} = a_0$.

حتى يكون نظام الدرجة الثالثة مستقر فيجب أن تكون جميع معاملات العمود الأول موجبة وبالتالي يجب أت يكون $b_1 > 0$, وهذا يقتضي أن يكون: $a_2 a_1 > a_0 a_3$ .

إذا كان $a_2 a_1 = a_0 a_3$ ينتج لدينا حالة الاستقرار الهامشي, حيث أن جذرين من جذور المعادلة المميزة تقع على المحور التخيلي. سيتم توضيح هذه الحالة في الحالة الثالثة حيث سيظهر صفر في العمود الأول وذلك عندما $a_2 a_1 = a_0 a_3$ .

لنأخذ المثال الأخير التالي عن الحالة الأولى والمتمثلة بعدم ظهور معامل صفري في العمود الأول:

$$q(s) = (s - 1 + j\sqrt{7})(s - 1 - j\sqrt{7})(s + 3) = s^3 + s^2 + 2s + 24 \quad .....(9-6)$$

إن المعادلة المميزة تحقق جميع الشروط الضرورية وذلك لأن جميع المعاملات موجودة وذات قيمة موجبة. لنتأكد من الاستقرار سنقوم بتشكيل مصفوفة راوث فنجد:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & 0 \end{array}$$

لقد تغير إشارة معاملات العمود الأول مرتين, وبالتالي يوجد جذرين للمعادلة المميزة يقعان في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي وبالتالي النظام غير مستقر. ■

**الحالة الثانية: يوجد في العمود الأول من المصفوفة عنصر صفري, ولكن بقية العناصر في هذا السطر لا تساوي الصفر:**

إذا كان هناك عنصر وحيد في المصفوفة مساوياً للصفر فأنه يمكننا استبدال هذا العنصر بعدد صغير موجب , $\varepsilon$, يسمح بالاقتراب من الصفر وذلك بعد الانتهاء من حساب كامل المصفوفة. على سبيل المثال, لندرس المعادلة المميزة التالية:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 \ldots\ldots (10-6)$$

لنقوم بتشكيل جدول راوث فنجد:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 2 | 11 |
| $s^4$ | 2 | 4 | 10 |
| $s^3$ | $\varepsilon$ | 6 | 0 |
| $s^2$ | $c_1$ | 10 | 0 |
| $s^1$ | $d_1$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | 10 | 0 | 0 |

حيث: $c_1 = \dfrac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \dfrac{-12}{\varepsilon}, d_1 = \dfrac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \to 6$ .

نلاحظ ظهور تغيرين في إشارات معاملات العمود الأول وذلك لأن $c_1 = -12/\varepsilon$ هو عدد سالب وذو قيمة كبيرة. بالتالي فالنظام غير مستقر ويوجد جذرين يقعان في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي. ■

**مثال 6-3:** النظام غير المستقر:

لنأخذ المثال الأخير التالي على الحالة الثانية ولندرس المعادلة المميزة التالية:

$$q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + k \ldots\ldots (11-6)$$

نرغب بتحديد قيمة الربح ($k$) والتي تؤدي إلى حدوث استقرار هامشي. لنقوم, بداية, بتشكيل جدول راوث:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 1 | $k$ |
| $s^3$ | 1 | 1 | 0 |
| $s^2$ | $\varepsilon$ | $k$ | 0 |
| $s^1$ | $c_1$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | $k$ | 0 | 0 |

حيث: $c_1 = \frac{\varepsilon - k}{\varepsilon} \to \frac{-k}{\varepsilon}$.

من مصفوفة راوث نجد أن أي قيمة لـ $k$ أكبر من الصفر, يكون النظام غير مستقر. أيضاً, ولأن المعامل الأخير في العمود الأول من المصفوفة يساوي $k$ فإن أي قيمة سالبة لـ $k$, تجعل النظام غير مستقر. بالتالي فالنظام غير مستقر وذلك مهما كانت قيمة $k$. ■

**الحالة الثالثة: يوجد في العمود الأول من الجدول عنصر صفري, ولكنه ليس الوحيد في هذا السطر حيث يحوي السطر على أصفار أخرى:**

تحدث الحالة الثالثة عندما تكون جميع عناصر السطر في الجدول مساوية للصفر. هذه الحالة تحدث عندما تكون جذور المعادلة المميزة متناظرة بالنسبة لمركز الإحداثيات في المستوي اللابلاسي. بمعنى آخر تحدث الحالة الثالثة عندما نجد في المعادلة المميزة البنود $(s+\sigma)(s-\sigma)$ أو $(s+j\omega)(s-j\omega)$. يمكن الالتفاف على هذه المشكلة باستخدام كثير الحدود المساعد (Auxiliary polynomial), $U(s)$, والمُشكل من عناصر السطر في جدول راوث الذي يسبق السطر الصفري. إن درجة كثير الحدود المساعد هي دائماً زوجية وتشير إلى عدد أزواج الجذور المتناظرة.

لشرح هذه الطريقة لندرس النظام من الدرجة الثالثة والممثل بالمعادلة المميزة التالية:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + k \ldots\ldots (12-6)$$

حيث $k$ هو ربح الحلقة وهو قابل للضبط والتعيير. إن جدول راوث لهذا النظام:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 4 |
| $s^2$ | 2 | $k$ |
| $s^1$ | $\frac{8-k}{2}$ | 0 |
| $s^0$ | $k$ | 0 |

حتى يكون النظام مستقر يجب أن يتحقق الشرط التالي: $0 < k < 8$.

عندما $k = 8$ نجد أن للمعادلة المميزة (12-6) جذرين يقعان على المحور التخيلي, وهذه الحالة تمثل حالة استقرار هامشي. نلاحظ أيضاً أنه عندما $k = 8$ نحصل على سطر جميع معاملاته صفرية, وهذه الحالة تنطبق مع الحالة الثالثة, موضوع الفقرة.

لنقوم بتشكيل كثير الحدود المساعد, $U(s)$, وذلك من السطر الذي يسبق السطر الصفري, وهو في مثالنا هو السطر المقابل لـ $s^2$. كما أسلفنا أعلاه, يحوي هذا السطر معاملات القوى الزوجية لـ $s$, أي:

$$U(s) = 2s^2 + ks^0 = 2s^2 + 8$$
$$= 2(s^2 + 4) = 2(s + j2)(s - 2j).....(13-6)$$

لنقوم الآن بتقسيم $q(s)$ على $U(s)$ وذلك لنتمكن من كتابة $q(s)$ على شكل جداء عوامل:

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 8 / 2s^2 + 8 = (1/2s + 1).$$

إذاً, عندما $k = 8$ يمكننا كتابة المعادلة المميزة على النحو التالي:

$$q(s) = (s + 2)(s + j2)(s - 2j).....(14-6)$$

من الملاحظ وجود جذرين للمعادلة المميزة يقعان على المحور التخيلي وهما متناظران بالنسبة لمركز الإحداثيات. إن هذه الحالة تقابل حالة الاستقرار الهامشي الذي يُظهر اهتزازات غير مقبولة في نظم التحكم.

**الحالة الرابعة: جذور مضاعفة للمعادلة المميزة تقع على المحور التخيلي:**

إذا احتوت المعادلة المميزة على جذور تقع على المحور التخيلي فالنظام ليس بالمستقر, وكذلك ليس في حالة عدم استقرار بل هو في حالة الاستقرار الهامشي حيث ستحوي استجابة النظام على حد جيبي غير متخامد. إذا كانت الجذور الواقعة على المحور التخيلي مضاعفة, في هذه الحالة, يكون النظام غير مستقر وتحوي استجابة النظام على حد من الشكل $t\sin(\omega t + \phi)$. إن دالة راوث–هورفيتز لا يمكنها التعامل والكشف عن هذا النوع من عدم الاستقرار.

لندرس النظام الممثل بالمعادلة المميزة التالية:

$$q(s) = (s+1)(s + j)(s - j)(s + j)(s - j) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

إن جدول راوث لهذا النظام:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 2 | 1 |
| $s^4$ | 1 | 2 | 1 |
| $s^3$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | 0 |
| $s^2$ | 1 | 1 | |
| $s^1$ | $\varepsilon$ | 0 | |
| $s^0$ | 1 | | |

حيث: $\varepsilon \to 0$. من جدول راوث نلاحظ أن معاملات السطر الأول لا تغير من إشاراتها وبالتالي فإن دالة راوث تشير إلى حالة استقرار هامشي, ولكن فعلياً هذه ليست الحالة الحقيقية للنظام. إن استجابة النظام تتزايد مع الزمن على النحو الممثل بالمعادلة التالية: $t\sin(\omega t+\phi)$. إن كثير الحدود المساعد المشكل من السطر المرافق لـ $(s^2)$ هو $(s^2+1)$, أما كثير الحدود المساعد المشكل من السطر المرافق لـ $(s^4)$ فهو: $s^4+2s^2+1=(s^2+1)^2$, وبالتالي فالمعادلة المميزة تحوي جذور مضاعفة تقع على المحور التخيلي, وبالتالي فالنظام فعلياً في حالة عدم استقرار. إذاً دالة راوث–هورفيتز لم تتمكن من الكشف عن حالة النظام وذلك عندما تتطبق حالة النظام على الحالة الرابعة.■

**مثال 6-4:** نظام من الدرجة الخامسة تقع جذوره على المحور التخيلي:

لندرس النظام الممثل بالمعادلة المميزة التالية:

$$q(s)=s^5+s^4+4s^3+24s^2+3s+63.....(15-6)$$

إن جدول راوث لهذا النظام:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 4 | 3 |
| $s^4$ | 1 | 24 | 63 |
| $s^3$ | $-20$ | $-60$ | 0 |
| $s^2$ | 21 | 63 | 0 |
| $s^1$ | 0 | 0 | 0 |

إن كثير الحدود المرافق لهذا النظام هو:

$$U(s)=21s^2+63=21(s^2+3)=21(s+j\sqrt{3})(s-j\sqrt{3}).....(16-6)$$

تشير معادلة كثير الحدود المساعد إلى امتلاك النظام لجذرين واقعين على المحور التخيلي. لنقوم بتفحص الجذور المتبقية وذلك بتقسيم $q(s)$ على $U(s)$ فنجد: $q(s)/s^2+3=s^3+s^2+s+21$. لنشكل جدول راوث لهذه المعادلة فنجد:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 21 \\ s^1 & -20 & 0 \\ s^0 & 21 & 0 \end{array}$$

لقد حدث تغييران في إشارة العمود الأول مما يشير إلى وجود جذرين واقعين في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي, وبالتالي فالنظام غير مستقر. إن الجذور الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي هي: $s=+1\pm j\sqrt{6}$. ■

**مثال 6-5:**

لناخذ النظام الممثل بمعادلة الحالة التالية:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}-\alpha & -\beta & 0\\ \beta & -\gamma & 0\\ \alpha & \gamma & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة لهذا النظام:

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\alpha & -\beta & 0\\ \beta & -\gamma & 0\\ \alpha & \gamma & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda+\alpha & \beta & 0\\ -\beta & \lambda+\gamma & 0\\ -\alpha & -\gamma & \lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$=\lambda\left[(\lambda+\alpha)(\lambda+\gamma)+\beta^2\right]$$

$$=\lambda\left[\lambda^2+(\alpha+\gamma)\lambda+(\alpha\gamma+\beta^2)\right]=0$$

تشير المعادلة المميزة بأن النظام في حالة استقرار هامشي وذلك عندما يتحقق الشرط التالي: $\alpha\gamma+\beta^2>0\quad,\alpha+\gamma>0$

وذلك لوجود جذر يقع على المحور التخيلي هو: $\lambda=0$.

لنأخذ مثال آخر, والممثل بالنواس المقلوب المعالج في الفصل السابق. إن مصفوفة النظام **A** هي:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -mg/M & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & g/l & 0\end{bmatrix}$$

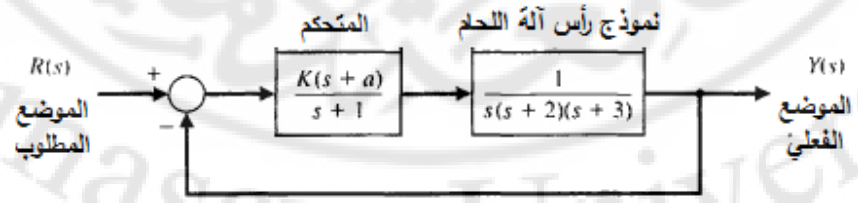
بالتالي فإن المعادلة المميزة للنظام يُمكن أن تُحسب من المحدد $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ على النحو التالي:

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & mg/M & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & -g/l & \lambda\end{bmatrix}=\lambda\left[\lambda\left(\lambda^2-\frac{g}{l}\right)\right]=\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{g}{l}\right)=0$$

تشير المعادلة المميزة إلى وجود الجذور التالية: $\lambda=0$ (جذر مضاعف), $\lambda=\sqrt{g/l}$, $\lambda=-\sqrt{g/l}$. إن ظهور جذر في النصف الأيمن المستوي اللابلاسي هو ($\lambda=\sqrt{g/l}$) يدفعنا للقول أن النظام غير مستقر, كما أن الجذر المضاعف $\lambda=0$ سيؤي إلى حصول استجابة خرج غير محدودة (an unbounded response). ■

**مثال 6-6:** التحكم بآلة اللحام:

في هذا النظام, يتم تحريك رأس اللحام إلى عدة مواقع على جسم المراد لحمه, حيث المطلوب من نظام التحكم سرعة ودقة الاستجابة. يبين الشكل (3-6) المخطط الصندوقي لنظام توضيع رأس اللحام. في هذا النظام, نرغب بتحديد قيم $k$ و $a$, بحيث يكون النظام مستقر.




**الشكل (6-3): نظام التحكم بتوضيع رأس آلة اللحام.**

إن المعادلة المميزة للنظام: $1+G(s)=1+\dfrac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}=0$

بالتالي: $q(s)=s^4+6s^3+11s^2+(K+6)s+Ka=0$

لننشئ جدول راوث:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 11 | $Ka$ |
| $s^3$ | 6 | $6+K$ | |
| $s^2$ | $b_3$ | $Ka$ | |
| $s^1$ | $c_3$ | | |
| $s^0$ | $Ka$ | | |

حيث: $b_3=\dfrac{60-K}{6}, c_3=\dfrac{b_3(K+6)-6Ka}{b_3}$.

من علاقة $b_3$ نجد أن $K<60$ وذلك حتى لا ينتج لدينا عنصر صفري في العمود الأول. أيضاً لابد أن تكون قيمة $c_3\geq 0$, بالتالي نجد:

$$(K-60)(K+6)+36Ka\leq 0$$

بالتالي فإن العلاقة بين $K$ و $a$ تصاغ على النحو التالي:

$$a\leq\frac{(60-K)(K+a)}{36K}$$

حيث قيمة $a$ موجبة. من أجل $K=40$ نجد أن قيمة $a$ تساوي: $a\leq 0.639$. ■

يعطى الشكل العام للمعادلة المميزة لنظام من الدرجة $(n)$ بالعلاقة التالية:

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+.....+a_1s+\omega_n^n=0$$

لنقسم طرفي المعادلة على $\omega_n^n$, ولنكتب المعادلة المميزة وفق الشكل القياسي الجديد وذلك باستخدام $s^*=s/\omega_n$, فنجد:

$$s^{*n}+bs^{*n-1}+cs^{*n-2}+.....+1=0$$

يبين الجدول (6-1) دالة راوث–هورفيتز للاستقرار وذلك للمعادلة المميزة القياسية المبينة أعلاه.

| الجدول (6-1): دالة راوث–هورفيتز للاستقرار | | |
|---|---|---|
| درجة النظام | المعادلة المميزة | معيار الاستقرار |
| 2 | $s^2+bs+1=0$ | $b>0$ |
| 3 | $s^3+bs^2+cs+1=0$ | $bc-1>0$ |
| 4 | $s^4+bs^3+cs^2+ds+1=0$ | $bcd-d^2-b^2>0$ |
| 5 | $s^5+bs^4+cs^3+ds^2+es+1=0$ | $bcd+b-d^2-b^2e>0$ |
| 6 | $s^6+bs^5+cs^4+ds^3+es^2+fs+1=0$ | $(bcd+bf-d^2-b^2e)e+b^2c-bd-bc^2f-f^2+bfe+cdf>0$ |

لنأخذ على سبيل المثال, المعادلة المميزة التالية:

$$s^3+5s^2+2s+8=0$$

لنقسم طرفي المعادلة على $\omega_n^3=8$, فنحصل على الشكل القياسي التالي:

$$\frac{s^3}{\omega_n^3}+\frac{5}{2}\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2}{4}\frac{s}{\omega_n}+1=0$$

أو:

$$s^{*3}+2.5s^{*2}+0.5s^{*}+1=0$$

حيث: $s^*=s/\omega_n$. في هذا المثال, وبالمقارنة مع الجدول (6-1) نجد: $b=2.5$ و $c=0.5$ بالتالي فإن شرط الاستقرار $bc-1>0$ محقق وبالتالي فالنظام مستقر.

**3-6 دراسة الاستقرار في النظم الممثلة في فراغ الحالة:**

كما رأينا في الفقرة السابقة, يتم دراسة الاستقرار في نظم التحكم ذات التغذية الخلفية عن طريق تابع تحويل النظام حيث نقوم بتطبيق دالة راوث–هورفيتز على مقام تابع التحويل, والمسمى بالمعادلة المميزة للنظام. إذا كان النظام المراد دراسته ممثل في فراغ الحالة بواسطة مخطط تدفق الإشارة, حيث في هذه الحالة يتم الحصول على المعادلة المميزة للنظام عن طريق حساب محدد مخطط تدفق الإشارة. إذا كان النظام ممثل صندوقياً

فيمكننا الحصول على المعادلة المميزة عن طريق تبسيط المخططات الصندوقية. لشرح هذه النقاط لنعالج الأمثلة التالية:

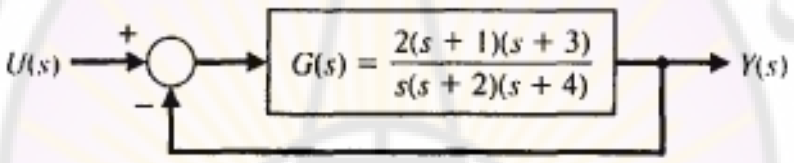
**مثال 6-7:** استقرار النظم:

ليكن لدينا النظام المبين بالشكل (6-4). إن تابع تحويل الحلقة المغلقة لهذا النظام:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s^2+8s+6}{s^3+8s^2+16s+6}....(17-6)$$

إن المعادلة المميزة لهذا النظام:

$$q(s)=s^3+8s^2+16s+6....(18-6)$$




**الشكل (6-4): نظام تحكم ذو تغذية خلفية.**

بتطبيق دالة راوث–هورفيتز على المعادلة المميزة (6-18) نجد أن النظام مستقر, وجميع جذور المعادلة المميزة تقع في النصف الأيسر في المستوي اللابلاسي. ■

**مثال 6-8:**

لندرس استقرار النظام المعطى بالمعادلة المميزة التالية:

$$s^4+2s^3+s^2+4s+2=0$$

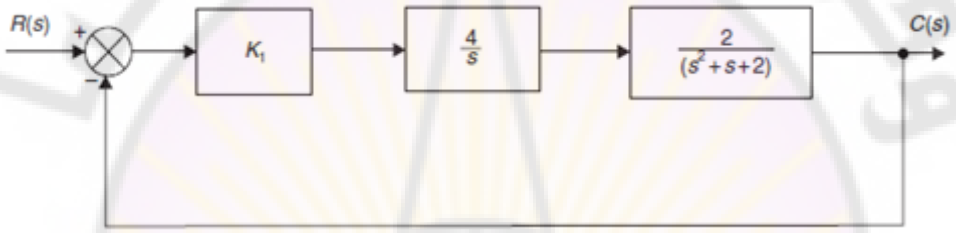
لننشئ جدول راوث:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 1 | 2 |
| $s^3$ | 2 | 4 | |
| $s^2$ | −1 | 2 | |
| $s^1$ | 8 | | |
| $s^0$ | 2 | | |

في جدول راوث, تغيرت إشارة معاملات العمود الأول مرتين, وبالتالي يوجد جذرين للمعادلة المميزة تقع في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي, وبالتالي فالنظام غير مستقر. ■

**مثال 6-9:**

ليكن لدينا نظام التحكم ذو التغذية الخلفية المبين بالشكل (6-5). لنوجد قيمة ربح المتحكم التناسبي ($K_1$) وذلك حتى يكون النظام المغلق مستقر.




**الشكل (6-5): نظام التحكم المدروس بالمثال 6-11.**

إن المعادلة المميزة لهذا النظام:

$$1+\frac{8K_1}{s\left(s^2+s+2\right)}=0$$

$$s\left(s^2+s+2\right)+8K_1=0$$

$$s^3+s^2+2s+8K_1=0$$

لننشئ جدول راوث فنجد:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 |
| $s^2$ | 1 | $8K_1$ |
| $s^1$ | $2-8K_1$ | |
| $s^0$ | $8K_1$ | |

من جدول راوث, حتى ينتج تغير في إشارة معاملات العمود الأول يجب أن يكون $K_1$>0.25. لنعيّر المتحكم على الربح $K_1 = 0.25$, ولنعوض بالمعادلة المميزة فنجد:

$$s^3+s^2+2s+2=0$$

$$\left(s^2+2\right)\left(s+1\right)=0$$

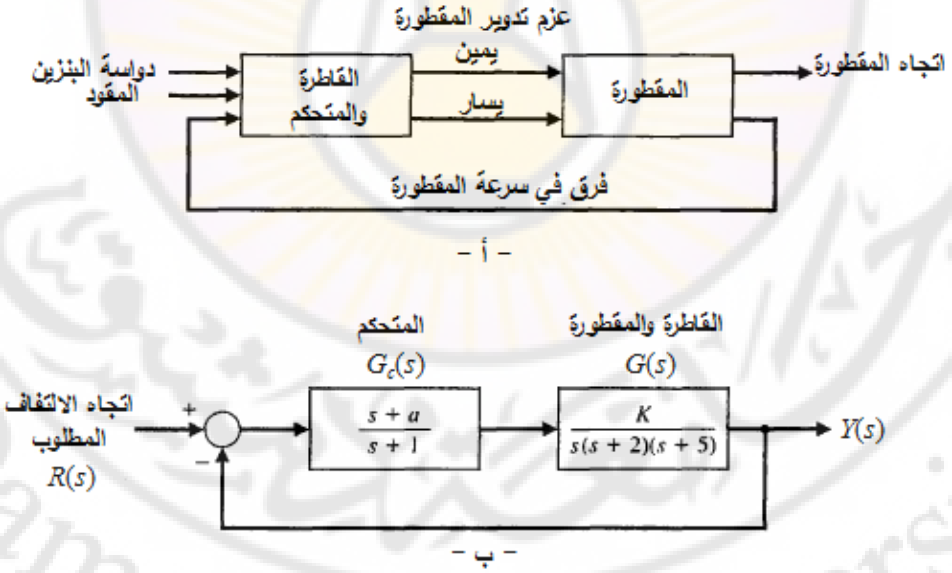
بالتالي فإن جذور المعادلة المميزة: $s=-1$ و $s=\pm j\sqrt{2}$ . في هذه الحالة, تكون معادلة الاستجابة العابرة للنظام:

$$c(t)=Ae^{-t}+B\sin\left(\sqrt{2}t+\phi\right)$$

من هذه المعادلة نجد أنه عند تعيير المتحكم التناسبي على $K$ = 0.25, يهتز النظام باستمرار عند التردد ($\sqrt{2}\,rad/s$). تذكر أن النظام في حالة استقرار هامشي. ■

**4-6 مثال تصميمي: التحكم بعربة مقطورة**

في هذه الفقرة سنعالج مسألة التحكم بعربة مقطورة, حيث سنتطرق لمسألة الاستقرار باستخدام دالة راوث–هورفيتز وسنتمكن بالنتيجة من اختيار اثنين من البارامترات الأساسية للنظام. يبين الشكل (6-6) النظام المدروس ونموذج هذا النظام. إن كلا العربتين (القاطرة والمقطورة) تعملان عند سرعتين مختلفتين. يتوجب علينا اختيار البارامترات $K$ و $a$ بحيث يكون النظام مستقر , وخطأ الحالة المستقرة, عند تطبيق إشارة دخل صاعدة أقل أو يساوي 24%, وذلك من مطال إشارة الدخل.




**الشكل (6-6): التحكم بدوران عربتين (قاطرة ومقطورة).**

إن المعادلة المميزة للنظام المغلق: $1+G_c(s)G(s)=0$ , أو :

$$1+\frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=0.....(19-6)$$

بالتالي يمكن أن نكتب:

$$s(s+1)(s+2)(s+5)+K(s+a)=0$$

$$s^4+8s^3+17s^2+(K+10)s+Ka=0.....(20-6)$$

لتحديد قيم $K$ و $a$ والتي من أجلها يكون النظام مستقر, ننشئ جدول راوث–هورفيتز :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 17 | $Ka$ |
| $s^3$ | 8 | $K+10$ | 0 |
| $s^2$ | $b_3$ | $Ka$ | |
| $s^1$ | $c_3$ | | |
| $s^0$ | $Ka$ | | |

حيث: $b_3=\frac{126-K}{8}, c_3=\frac{b_3(K+10)-8Ka}{3}$.

حتى تكون معاملات العمود الأول موجبة يجب أن تكون $Ka$ , $b_3$ , $c_3$ موجبة, مما يقتضي ما يلي:

$$K<126$$

$$Ka>0$$

$$(K+10)(126-K)-64Ka>0.....(21-6)$$

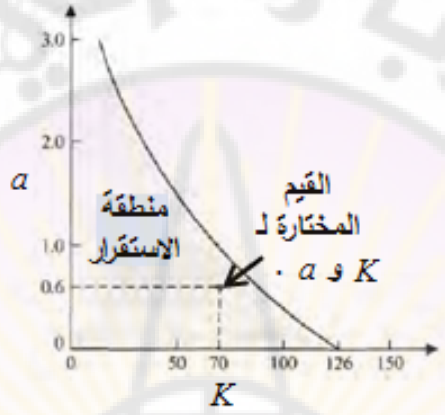
إن منطقة استقرار (عندما $K>0$) مبينة بالشكل (6-7).

إن خطأ الحالة المستقرة, وذك عند تطبيق إشارة دخل صاعدة $r(t)=At, t>0$, يعطى بالعلاقة: $e_{ss}=A/K_v$ حيث: $K_v=\lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)=Ka/10$ , بالتالي فإن خطأ الحالة المستقرة:

$$ess=\frac{10A}{Ka}.....(22-6)$$

عندما تكون قيمة الخطأ $e_{ss}$ تساوي إلى (23.8%) من قيمة $A$, فإن ذلك يقتضي أن يكون $Ka = 42$. إن هذا يتحقق في المنطقة المستقرة وفي الشكل (6-7) حيث $K = 70$ و $a = 0.6$. يمكن أن نختار نقطة أخرى من المنطقة المستقرة والتي تحقق الشرط

($Ka$ = 42) مثل النقطة ($K$ = 70 أو $a$=0.84). إذاً يمكننا اختيار من النقاط التي تقع ضمن المنطقة المستقرة وتحقق الشرط ($Ka$ = 42), ولكن يجب أن لا ننسى أن $K$ لا يمكن أن تتجاوز القيمة (126) (انظر المعادلة 21-6). ■




**الشكل (6-7): منطقة استقرار للبارامترات $K$ و $a$.**

**6-5 دراسة استقرار النظام باستخدام بيئة الماتلاب:**

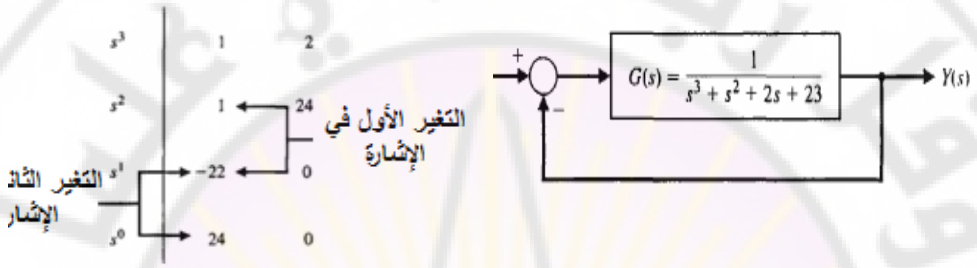
سنبدأ هذه الفقرة بمناقشة دالة راوث–هورفيتز لدراسة الاستقرار حيث سنرى كيف يمكن أن يساعد الحاسب في تحليل الاستقرار وذلك بتقديم طريقة سهلة ودقيقة لحساب جذور المعادلة المميزة. في حال كانت المعادلة المميزة تتبع أحد البارامترات وليكن $p$, سيكون من الممكن رسم المنحني الممثل لحركة الأقطاب عند تغير هذا البارامتر. سنختم الفقرة بمثال توضيحي. إن تابع الماتلاب الذي سيستخدم في هذه الفقرة هو التابع "for", والمستخدم لإعادة حساب بعض الخطوات عدد من المرات.

**استقرار وفق دالة راوث–هورفيتز:** كما أشرنا سابقاً, تعتبر دالة راوث–هورفيتز للاستقرار شرطاً ضرورياً وكافياً للاستقرار.

ليكن معطى لدينا المعادلة المميزة للنظام حيث إن معاملات هذه المعادلة قيم ثابتة. يمكن استخدام دالة راوث–هورفيتز لتحديد عدد الجذور الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي. على سبيل المثال لندرس المعادلة المميزة التالية:

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0$$

هذه المعادلة تمثل المعادلة المميزة للنظام المبين بالشكل (6-8). من جدول راوث–هورفيتز لهذا النظام المعطى بالشكل (6-9) نجد أن هناك تغيرات في إشارة معاملات العمود الأول للمصفوفة وبالتالي فكثير الحدود $q(s)$ يملك جذرين في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي والنظام غير مستقر.




**الشكل (6-8): نظام تحكم ذو حلقة مغلقة.**

**الشكل (6-9): جدول راوث–هورفيتز للنظام المبين بالشكل (6-8).**

يمكن التحقق من نتيجة راوث–هورفيتز بالحساب المباشر لجذور المعادلة المميزة, كما هو مبين بالكود البرمجي في الشكل (6-10) حيث استخدمنا التابع "pole", الذي يحسب جذور المعادلة المميزة.

```
>>numg=[1]; deng=[1 1 2 23]; sysg=tf(numg,deng);
>>sys=feedback(sysg,[1]);
>>pole(sys)

ans =

   -3.0000
    1.0000 + 2.6458i
    1.0000 - 2.6458i
```

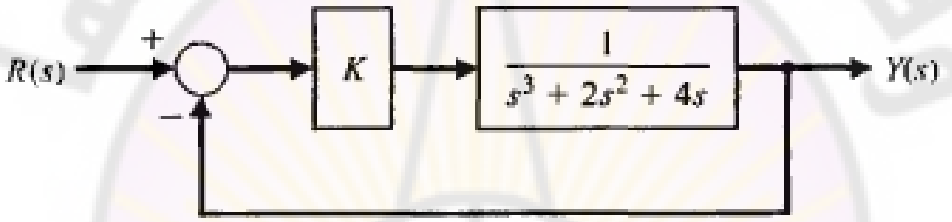
أقطاب غير مستقرة

**الشكل (6-10): استخدام التابع 'pole' لحساب جذور المعادلة المميزة للنظام المبين بالشكل (6-8).**

عندما تكون المعادلة المميزة لنظام تتبع بارامتر معين, يمكن استخدام دالة راوث–هورفيتز لتحديد مجال القيم التي يمكن أن يتغير ضمنها البارامتر مع المحافظة على استقرار النظام. لندرس النظام المغلق المبين بالشكل (6-11). إن المعادلة المميزة لهذا النظام:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

باستخدام دالة راوث–هورفيتز نجد أن $K$ يجب أن تحقق الشرط التالي: $0 < K < 8$ , وذلك حتى يكون النظام مستقر (انظر المعادلة 6-12).



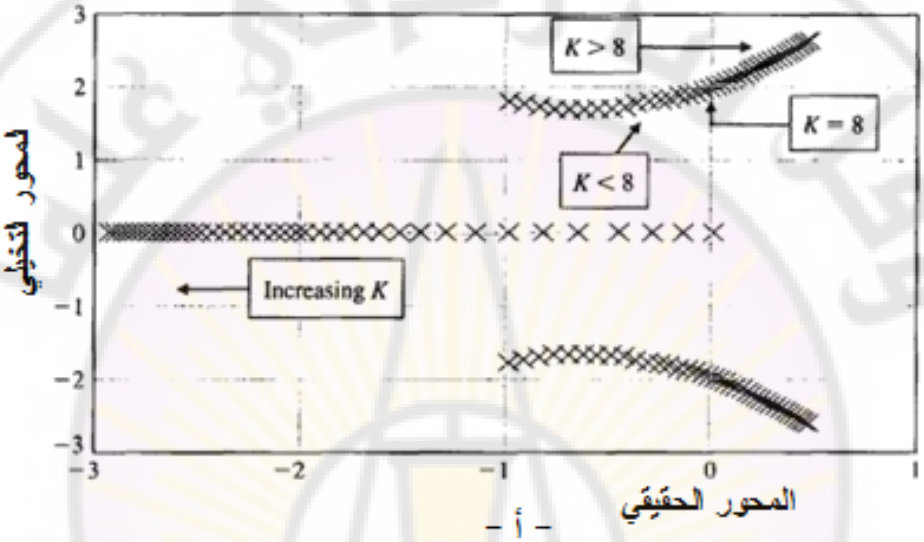

**الشكل (6-11): نظام تحكم ذو حلقة مغلقة.**

يمكن أن نتحقق بيانياً من هذه النتيجة حيث وكما هو مبين بالشكل (6-12), ننشئ عمود يحوي قيم $K$ والتي نريد من أجلها حساب جذور المعادلة المميزة, ومن ثم نستخدم التابع "roots" وذلك لحساب ورسم جذور المعادلة المميزة كما هو مبين يضاً بالشكل (6-12). من هذا الشكل يمكن أن نلاحظ أنه عندما تزداد قيمة $K$ فإن جذور المعادلة المميزة تتحرك باتجاه النصف الأيمن للمستوي اللابلاسي حيث تدخل الجذور النصف الأيمن للمستوي اللابلاسي وذلك من أجل $K > 8$.

يحوي الكود البرمجي المبين بالشكل (6-12- ب) التابع "for". هذا التابع يعطي إمكانية التنفيذ المتتابع لمجموعة من التعليمات وذلك لعدد من المرات. يبين الشكل (6-13) صيغة التابع "for" مع مثال توضيحي على استخدام هذا التابع.

تسمح لنا طريقة راوث–هورفيتز بتحديد الاستقرار المطلق لنظام خطي حيث تخبرنا عن عدد الجذور الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي. من حسن الحظ تمكننا

بيئة الماتلاب من حساب مواقع جذور المعادلة المميزة, مما يسمح لنا بالحكم على موضوع الاستقرار النسبي.



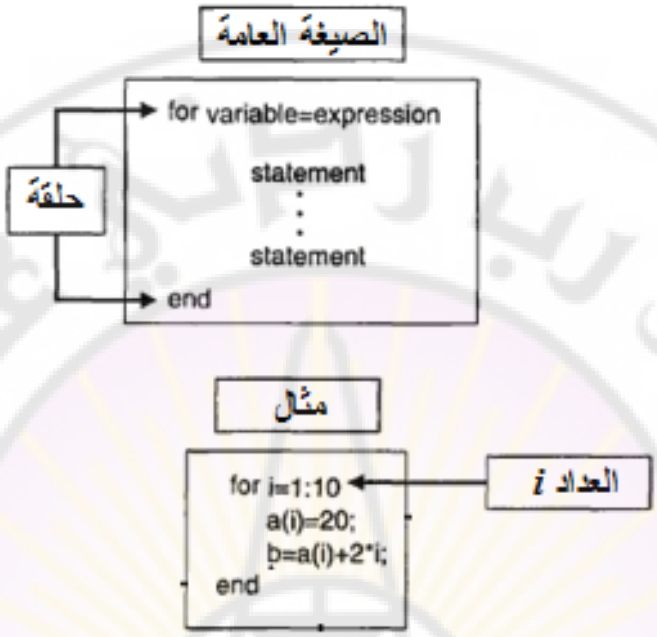

– أ –

```
% This script computes the roots of the characteristic
% equation q(s) = s^3 + 2 s^2 + 4 s + K for 0<K<20
%
K=[0:0.5:20];
for i=1:length(K)
   q=[1 2 4 K(i)];
   p(:,i)=roots(q);
end
plot(real(p),imag(p),'x'), grid
xlabel('Real axis'), ylabel('Imaginary axis')
```

الحلقة

– ب –

**الشكل (6-12): أ – رسم جذور المعادلة المميزة وذلك من أجل ب – الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لرسم الشكل (أ).**




**الشكل (6-13): التابع "for" مع مثال توضيحي.**

**مثال 6-10: التحكم بالعربة المقطورة (Tracked vehicle control):**

إن المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالعربة المقطورة مبين بالشكل (6-6). إن الهدف التصميمي هو إيجاد قيم البارامترات $K$ و $a$ بحيث يكون النظام مستقر وخطأ الحالة المستقرة عند تطبيق إشارة دخل صاعدة أقل أو يساوي 24% من مطال إشارة التحكم.

عندما عالجنا هذا المثال سابقاً استخدمنا دالة راوث–هورفيتز وذلك للبحث عن القيم المناسبة لـ $K$ و $a$ بحيث يكون النظام مستقر,حيث كانت المعادلة المميزة للنظام:

$$q(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (10+K)s + aK = 0$$

باستخدام جدول راوث وجدنا أنه حتى يتحقق الاستقرار يجب أن تتحقق الشروط التالية:

$$K < 126, \quad \frac{126-K}{8}(K+10) - 8aK > 0, \quad aK > 0$$

من أجل القيم الموجبة لـ $K$ (أي $K > 0$), نجد أننا نقيد دراستنا على المجال $0 < K < 126$ و $a > 0$. تقوم طريقتنا المعتمدة على بيئة الماتلاب برسم العلاقة بين $a$ و $K$ ومن ثم إيجاد المنطقة من المنحني التي تحقق الاستقرار. فيما بعد يتوجب علينا

إيجاد نقطة من منطقة الاستقرار $(K, a)$ تحقق الشرط المتعلق بخطأ الحالة المستقرة. إن هذه الإجرائية الموصوفة أعلاه, والمبينة بالشكل (6-22), تتطلب اختيار مجال لقيم $a$ و $K$ ومن ثم حساب جذور المعادلة المميزة وذلك من أجل قيم محددة لـ $a$ و $K$. من أجل كل قيمة لـ $K$ نوجد قيمة $a$ والتي تكون من أجلها النظام غير مستقر. سنرسم هذه النقطة $(K, a)$ وبالتالي فإن قيم $a$ التي أصغر منها يكون من أجلها النظام مستقر, بينما قيم $a$ التي أكبر منها يكون النظام غير مستقر. ستتكرر العملية حتى يتم مسح كامل المجال للبارامترات $a$ و $K$. إن رسم الثنائي $(K, a)$ يحدد الحد الفاصل بين منطقة الاستقرار واللاستقرار. إن المنطقة الواقعة إلى يسار المنحني في الشكل (6-14) تمثل منطقة الاستقرار. لنفرض أننا طبقنا إشارة الدخل التالية: $r(t)=At, t>0$. في هذه الحالة تكون إشارة خطأ الحالة المستقرة:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5)+K(s+a)}.\frac{A}{s^2} = \frac{10A}{aK}$$

حيث اعتمدنا في حساب $e_{ss}$ على علاقة الخطأ التالية:

$$E(s) = \frac{1}{1+G_c(s)G(s)}R(s) = \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5)+K(s+a)}.R(s)$$

إن المتطلب التصميمي يقتضي أن يكون خطأ الحالة المستقرة أصغر من 24% من مطال إشارة الدخل, (أي $e_{ss} < 0.24A$). إن هذا المتطلب يمكن أن يتحقق عندما:

$$\frac{10A}{aK} < 0.24A$$

$$aK > 41.67....(23-6)$$

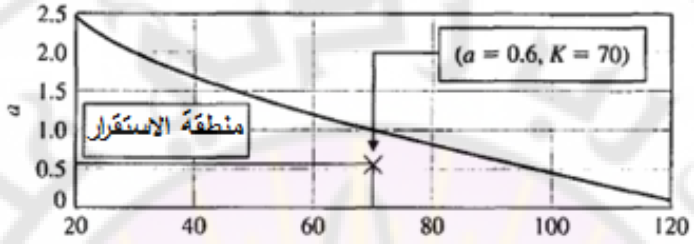
إن أي قيم لـ $K$ و $a$ تنتمي إلى منطقة الاستقرار المبينة بالشكل (6-14), وتحقق المعادلة (6-15) ستكون مقبول تصميمياً. على سبيل المثال نجد أن $K$ =70 و $a$ = 0.6 تحقق متطلبات التصميم. من أجل هذه القيم لـ $K$ و $a$, يصبح تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$T(s) = \frac{70s+42}{s^4+8s^3+17s^2+80s+42}$$

إن أقطاب الحلقة المغلقة لهذا النظام هي:

$$s=-7.0767, s=-0.5781, s=-0.1726+j3.1995, s=-0.1726-j3.1995.$$

يبين الشكل (6-15) استجابة النظام لإشارة الدخل الصاعدة الواحدية, حيث نلاحظ أن إشارة الخطأ أقل من 0.24, وهو المطلوب. ■




– أ –

```
% The a-K stability region for the two track vehicle
% control problem
%
a=[0.1:0.01:3.0]; K=[20:1:120];
x=0*K; y=0*K;
n=length(K); m=length(a);
for i=1:n
 for j=1:m
  q=[1, 8, 17, K(i)+10, K(i)*a(j)];
  p=roots(q);
  if max(real(p)) > 0, x(i)=K(i); y(i)=a(j-1); break; end
 end
end
plot(x,y), grid, xlabel('K'), ylabel('a')
```

مجال $K$ و $a$

تصفير أشعة الرسم

المعادلة المميزة

من أجل قيمة معينة لـ $K$ حدد أول قيمة لـ $a$ تسبب عدم الاستقرار

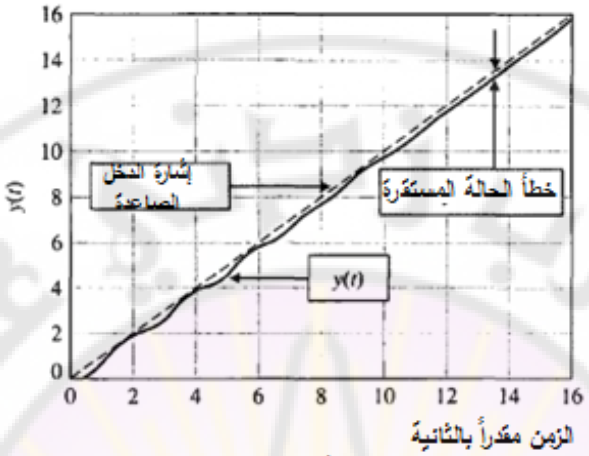
– ب –

**الشكل (6-14): أ – منطقة الاستقرار للبارمترات $K$ و $a$ في مثال العربة المقطورة. ب – الكود البرمجي المستخدم لرسم المنحني المبين بالشكل (أ).**

**مثال 6-11: تحديد منطقة الاستقرار لعملية غير مستقرة:**

يبين الشكل (6-16) نظام التحكم بطائرة. افترض أن المعاملات $z$ و $p$ ذات قيم موجبة (أي $p>0$ و $z>0$). إن النظام في حالة الحلقة المفتوحة (بدون تغذية خلفية) هو نظام غير مستقر, وذلك لأن المعادلة المميزة للطائرة والمتحكم هي:

$$s(s-1)(s+p) = s\left[s^2 + (p-1)s - p\right] = 0$$




- أ -

```
% Two-track vehicle turning control ramp response
% with a=0.6 and K=70.
%
t=[0:0.01:16]; u=t;
numgc=[1 0.6]; dengc=[1 1]; sysgc=tf(numgc,dengc);
numg=[70]; deng=[1 7 10 0]; sysg=tf(numg,deng);
sysa=series(sysgc,sysg);
sys=feedback(sysa,[1]);
y=lsim(sys,u,t);
plot(t,y,t,u,'--'), grid
xlabel('Time (s)'), ylabel('y(t)')
```

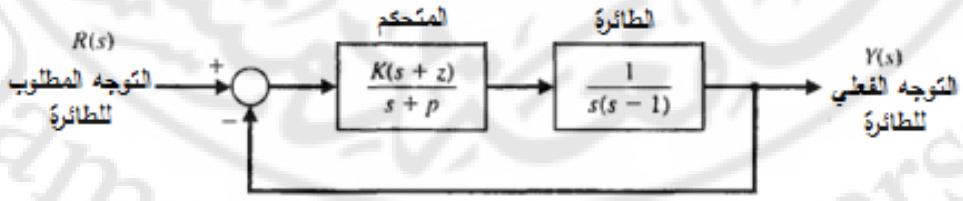
إشارة دخل صاعدة واحدية

المحاكاة الخطية

$a = 0.6$ و $K = 70$

- ب -

**الشكل (6-15): أ – الاستجابة لإشارة الدخل الصاعدة لنظام العربة المقطورة من أجل $K$=70, $a$=0.6 ب – الكود البرمجي لرسم الاستجابة المبينة بالشكل أ.**




**الشكل (6-16): نظام التحكم بالطائرة وذلك بافتراض أن $p > 0$ و $z > 0$.**

من الملاحظ من هذه المعادلة المميزة أن أحد معاملات كثير الحدود (داخل الأقواس) ذو قيمة سالبة وبالتالي فإن المعادلة المميزة تملك على الأقل جذر يقع في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي (وهو سبب عدم الاستقرار).

من جهة أخرى, تعطى المعادلة المميزة لنظام الحلقة المغلقة بالعلاقة:

$$s^3 + (p-1)s^2 + (K-p)s + Kz = 0$$

إن الهدف هو تحديد منطقة الاستقرار لكل من $K$ و $p$ و $z$. لتحقيق هذا الهدف ننشئ جدول راوث–هورفيتز:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $K-p$ |
| $s^2$ | $p-1$ | $Kz$ |
| $s^1$ | $b_2$ | |
| $s^0$ | $Kz$ | |

حيث: $b_2 = \dfrac{(p-1)(K-p)-Kz}{p-1}$.

من معيار راوث–هورفيتز نجد توجب تحقق الشروط التالية: $Kz > 0, p > 1$.

من أجل $b_2 > 0$ نجد أيضاً:

$$(p-1)(K-p) - Kz = K[(p-1) - z] - p(p-1) > 0$$

لندرس الحالتين التاليتين:

1- $z \le (p-1)$: في هذه الحالة لا يوجد أي قيمة لـ $K$ $(0 < K < \infty)$ تحقق الاستقرار.

2- $z > (p-1)$: أي قيمة لـ $K$ $(0 < K < \infty)$ تحقق الشروط المتعلقة بـ $p$ و $z$ ستحقق الاستقرار, أي:

$$K > \frac{p(p-1)}{(p-1)-z} \quad \ldots(24-6)$$

يمكن إظهار هذه الشروط بيانياً حيث يبين الشكل (6-17) الكود البرمجي في بيئة الماتلاب المستخدم لتوليد سطح الاستقرار الثلاثي الأبعاد, حيث تم استخدام تعليمة

"mesh" لتوليد السطح الثلاثي الأبعاد, وتعليمة "meshgrid" لتوليد المصفوفات المحددة لحدود الشبكة.

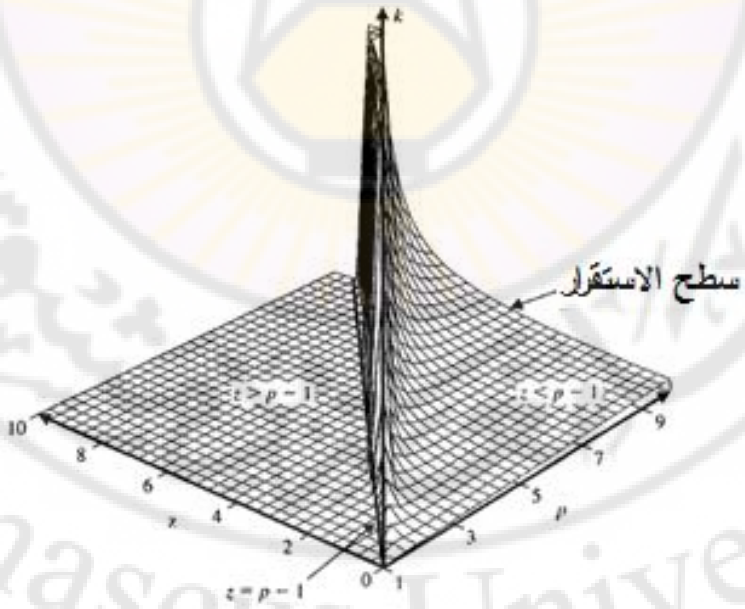
```
% Jump-jet control system 3-D stability region.
%
[p,z]=meshgrid(1.2:0.2:10,0.1:.2:10);
k=p.*(p-1)./(p-1-z);
mesh(k)
```

سطح الاستقرار

توليد منحني ثلاثي البعد

**الشكل (6-17): الكود البرمجي المستخدم لرسم منطقة الاستقرار.**

يبين الشكل (6-18) المنحني الثلاثي الأبعاد الممثل لمنطقة الاستقرار لكل من البارامترات $z$ و $p$ و $K$. لنأخذ إحدى النقاط التي تحقق الاستقرار والتي من أجلها نجد أن قيم البارامترات هي: $z=1$, $p=10$ و $K=15$.




**الشكل (6-18): منطقة الاستقرار ثلاثية البعد.**

**6-6 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

في الفصل الرابع, قمنا بتصميم نظام التحكم برأس القارئة حيث كان الربح $K_a$ قابل للضبط. في هذه الفقرة سنتفحص استقرار النظام من أجل قيمة $K_a$ والتي تم الحصول عليها عند دراسة النظام في الفصل الرابع, ومن ثم إتخاذ الإجراء اللازم الذي يأخذ بعين الاعتبار موضوع الاستقرار.

لندرس المخطط الصندوقي المبين بالشكل (6-19) وهو نفس المخطط الصندوقي للنظام المعالج في الفصل الرابع (نموذج المحرك والحمل) باستثناء أنه تم إضافة حساس تغذية خلفية بالسرعة. مبدئياً, سنعالج الحالة التي يكون فيها المفتاح "switch" في وضعية الفتح "open". في هذه الحالة يكون تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} \quad ....(25-6)$$

حيث: $G_1(s) = \dfrac{5000}{s+1000}$ و $G_2(s) = \dfrac{1}{s(s+20)}$.

إن المعادلة المميزة للنظام في هذه الحالة:

$$s(s+20)(s+1000) + 5000K_a = 0 \quad ....(26-6)$$

أو: $s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000K_a = 0.$

لننشئ جدول راوث فنجد:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 20000 |
| $s^2$ | 1020 | $5000K_a$ |
| $s^1$ | $b_1$ | |
| $s^0$ | $5000K_a$ | |

حيث: $b_1 = \dfrac{20000(1020) - 5000K_a}{1020}$.

إن الحالة التي تكون فيها قيمة المعامل $b_1$ معدومة (أي $b_1 = 0$) هي حالة الاستقرار الهامشي والتي تتحقق عندما $K_a = 4080$. لنحسب المعادلة المساعدة $U(s)$ فنجد:

$$1020s^2 + 5000(4080) = 0$$

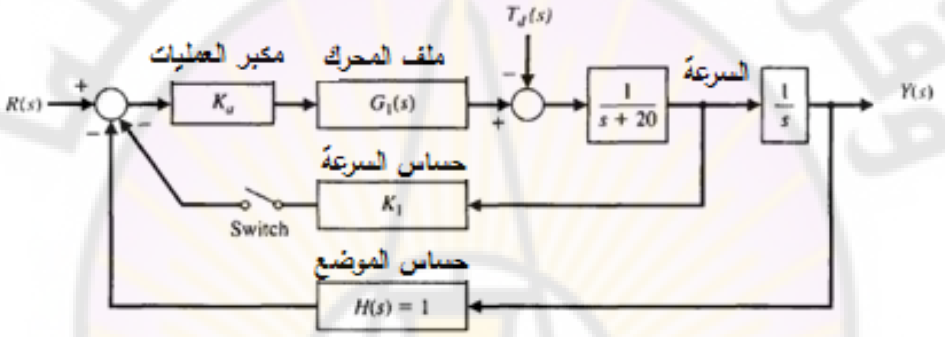
أو: $s = \pm j141.4$

حتى يكون النظام مستقر يجب أن تكون $K_a < 4080$ .

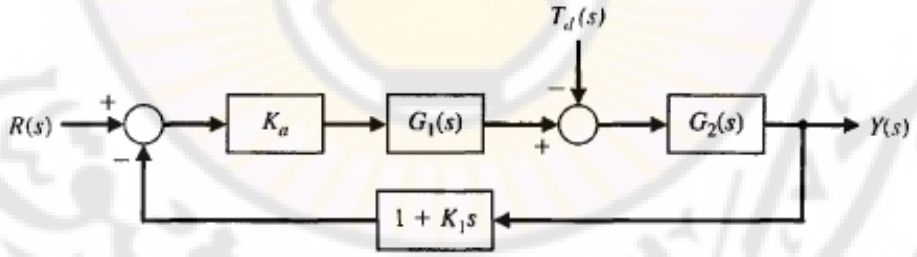
لنقوم الآن بإضافة حساس السرعة عن طريق إغلاق القاطع المبين بالشكل (6–19). في هذه الحالة يكون تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام المدروس:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + \left[K_a G_1(s) G_2(s)\right](1 + K_1 s)} \quad ....(27-6)$$

حيث أن معامل التغذية الخلفية هو $(1 + K_1 s)$, وذلك كما هو مبين بالشكل (6-20).




**الشكل (6–19): نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة مع حلقة تغذية خلفية بالسرعة.**




**الشكل (6-20): المخطط الصندوقي لنظام قارئة الأقراص مع تغذية خلفية بالسرعة.**

إن المعادلة المميزة للنظام هي: $1 + \left[K_a G_1(s) G_2(s)\right](1 + K_1 s) = 0$

أو: $s(s+20)(s+1000) + 5000K_a(1 + K_1 s) = 0$

أو: $s^3 + 1020s^2 + \left[20000 + 5000K_a K_1\right]s + 5000K_a = 0$

لننشئ جدول راوث فنجد:

$$\begin{vmatrix} s^3 & 1 & 20000+5000K_aK_1 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{vmatrix}$$

حيث: $b_1 = \dfrac{1020(20000+5000K_aK_1)-5000K_a}{1020}$.

حتى نضمن تحقق الاستقرار يجب اختيار قيم $K_1$ و $K_a$ بحيث يكون $b_1 > 0$ علماً أن $K_a > 0$. من أجل $K_1 = 0.05$ و $K_a = 100$ يمكننا أن نحدد استجابة النظام باستخدام الكود البرمجي المبين بالشكل (6-21). يلخص الجدول (6-2) خصائص الأداء الزمني للنظام المدروس. إن متطلبات الأداء المطلوبة محققة تقريباً حيث نحتاج إلى بعض التعيير الإضافي للنظام للوصول إلى زمن استقرار ($250\ ms$).

**6-8 خاتمة:**

درسنا في هذا الفصل مبدأ الاستقرار لنظم التحكم ذات التغذية الخلفية, حيث تم تعريف النظام المستقر بدلالة استجابة خرجه, وبدلالة موقع أقطاب تابع تحويل النظام في المستوي اللابلاسي. تم أيضاً التعريف بدالة راوث–هورفيتز للاستقرار. ودرسنا أيضاً الاستقرار النسبي لنظم التحكم المغلقة مع التركيز على العلاقة بين الاستقرار النسبي وموقع أقطاب وأصفار تابع التحويل في المستوي اللابلاسي.

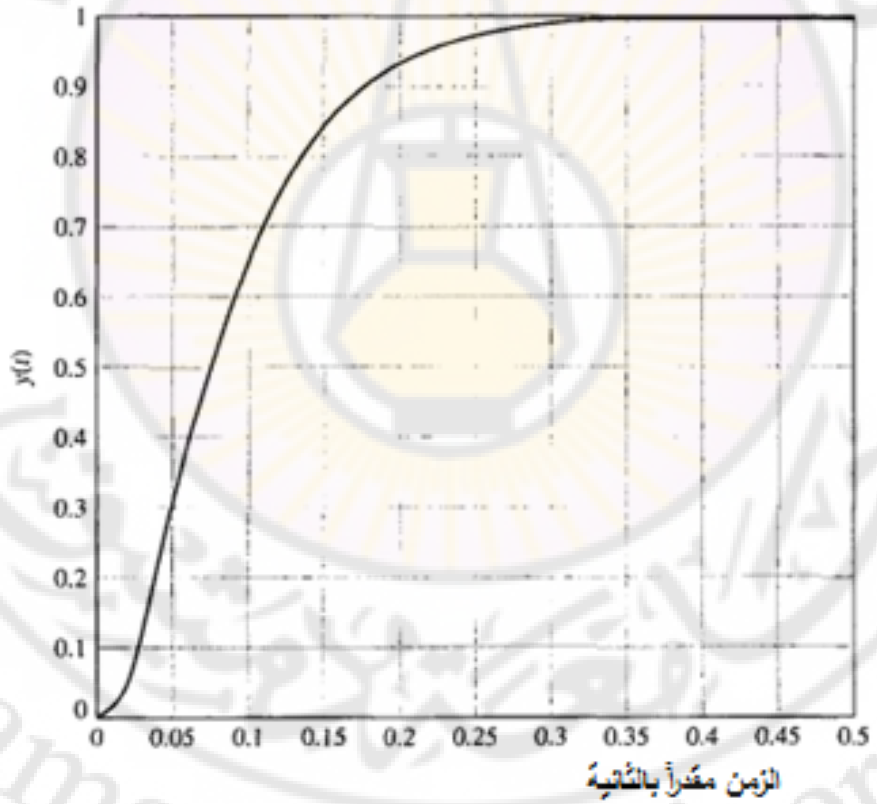
**الجدول (6-2): خصائص أداء نظام قارئة الأقراص مع مقارنة مع الخصائص المطلوبة**

| الخاصية | القيمة المطلوبة | القيمة الحقيقية |
|---|---|---|
| التجاوز النسبي | أقل من 5% | 0% |
| زمن الاستقرار | أقل من 250 ms | 260 ms |
| الاستجابة العظمى للاضطراب | أقل من $5*10^{-3}$ | $2*10^{-3}$ |

```
Ka=100; K1=0.05;
ng1=[5000]; dg1=[1 1000]; sys1=tf(ng1,dg1);
ng2=[1]; dg2=[1 20 0]; sys2=tf(ng2,dg2);
nc=[K1 1]; dc=[0 1]; sysc=tf(nc,dc);
syso=series(Ka*sys1,sys2);
sys=feedback(syso,sysc); sys=minreal(sys);
t=[0:0.001:0.5];
y=step(sys,t); plot(t,y)
ylabel('y(t)'),xlabel('Time (s)'),grid
```

اختيار قيم $K_1$ و $K_a$

– أ –




**الشكل (6-21): استجابة النظام في حال وجود تغذية خلفية بالسرعة: أ – الكود البرمجي المستخدم لرسم الاستجابة الخطوية. ب – الاستجابة الخطوية.**

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# الفصل السابع: طريقة المحل الهندسي للجذور

# Chapter 7: The Root Locus Method

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

يمكن أن يوصف أداء النظام ذو التغذية الخلفية بدلالة موقع جذور المعادلة المميزة في المستوي اللابلاسي. يسمى الرسم البياني الذي يظهر كيفية تحرك جذور المعادلة المميزة في المستوي اللابلاسي وذلك عند تغير أحد بارامترات النظام, بالمحل الهندسي للجذور. يعتبر هذا المحل الهندسي للجذور أداة فعالة لتصميم ولتحليل نظم التحكم ذات التغذية الخلفية. سنناقش في هذا الفصل طريقة رسم المحل الهندسي للجذور يدوياً, وكذلك آلياً باستخدام الحاسب, مع تبيان فعالية هذا المحل الهندسي في عملية تصميم نظم التحكم. سنوضح أيضاً إمكانية استخدام المحل الهندسي للجذور في تصميم المتحكم وذلك عند تغيير أكثر من بارامتر من بارامترات المتحكم. إن هذه النقطة بالغة الأهمية وذلك لأنه, وكما هو معروف, يمكن أن تضبط استجابة النظم المغلقة ذات التغذية الخلفية لتبدي الاستجابة المطلوبة وذلك عن طريق اختيار بارامتر أو بارامترين من بارامترات المتحكم. سيتم التعريف أيضاً بالمتحكم التناسبي, التكاملي, والتفاضلي, والمعروف بالمتحكم PID, ذو البنية الحاوية على ثلاثة بارامترات قابلة للضبط والتعيير. سيتم التطرق أيضاً لقياس حساسية جذر معين اتجاه تغير طفيف في أحد بارامترات النظام. سنختم الفصل بتصميم المتحكم لنظام قارئة الأقراص المدمجة وذلك بالاعتماد على طريقة المحل الهندسي للجذور (أو مسار الجذور).

**1-7 مقدمة:**

يرتبط كلاً من الاستقرار والاستجابة العابرة لنظم التحكم ذات التغذية الخلفية, مباشرة بموقع جذور المعادلة المميزة في المستوي اللابلاسي. من الضروري أن يتم ضبط بارامتر أو أكثر من بارامترات النظام وذلك للحصول على المواقع المناسبة لجذور النظام, بالتالي من الضروري أن يتم تحديد كيفية تحرك جذور المعادلة المميزة للنظام في المستوي اللابلاسي وذللك عند تغير أحد البارامترات, بمعنى آخر من الضروري تحديد المحل الهندسي للجذور في المستوي اللابلاسي وذلك عند تغير أحد البارامترات.

تم اقتراح المحل الهندسي للجذور من قَبَلَ العالم إيفانس "Evans" وذلك في العام 1948م, حيث تم استخدام هذا المحل الهندسي للجذور بشكل واسع في تصميم نظم

التحكم, حيث تزود طريقة المحل الهندسي للجذور مهندس التحكم بأداة لقياس حساسية جذور النظام لتغير أحد بارامترات النظام المدروس. يمكن أن يستخدم المحل الهندسي للجذور أيضاً بالترافق مع دالة راوث–هورفيتز وذلك لدراسة استقرار النظم.

**2-7 مبدأ المحل الهندسي للجذور (The root locus concept):**

يُوصف الأداء الديناميكي لنظام التحكم ذو التغذية الخلفية بدلالة تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{q(s)} .....(1-7)$$

حيث $p(s)$ و $q(s)$ هما كثيرا حدود في المستوي اللابلاسي. تحدد جذور المعادلة المميزة $q(s)$ نمط استجابة النظام. في حالة النظام المغلق وحيد الحلقة المبين بالشكل (7-1) نجد أن المعادلة المميزة تعطى بالعلاقة:

$$1 + KG(s) = 0.....(2-7)$$

حيث $K$ بارامتر ذو قيمة متغيرة. يجب أن تحقق الجذور المميزة للنظام المعادلة (7-2). طالما أن المتحول $s$ هو متحول عقدي بالتالي يمكن أن نكتب المعادلة (7-2) بالشكل القطبي على النحو التالي:

$$|KG(s)| \angle KG(s) = -1 + 0j .....(3-7)$$

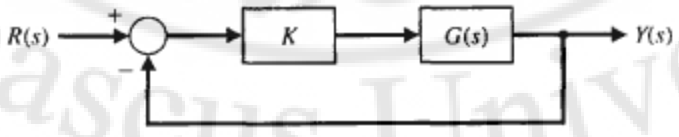
من هذه المعادلة نجد أنه من الضروري أن تكون:

$$|KG(s)| = 1$$

$$\angle KG(s) = 180^\circ . + k360^\circ ....(4-7)$$

حيث: $k = 0, \pm 1, \pm 2, .....$.

إذاً المحل الهندسي للجذور هو مسار جذور المعادلة المميزة المرسومة في المستوي اللابلاسي وذلك عند تغير أحد بارامترات النظام.




**الشكل (7-1): نظام تحكم ذو حلقة مغلقة مع وجود بارامتر متغير وحيد ($K$).**

ليكن لدينا النظام المبين بالشكل (2-7). إن المعادلة المميزة لهذا النظام:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + K = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \ldots\ldots(5-7)$$

يُحسب المحل الهندسي للجذور, عند تغير قيمة الربح $K$, بحيث تحقق كل نقطة من المحل الهندسي للجذور الشرطيين التاليين:

$$\left|KG(s)\right| = \left|\frac{K}{s(s+2)}\right| = 1 \ldots\ldots(6-7)$$

$$\angle KG(s) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ \ldots\ldots(7-7)$$

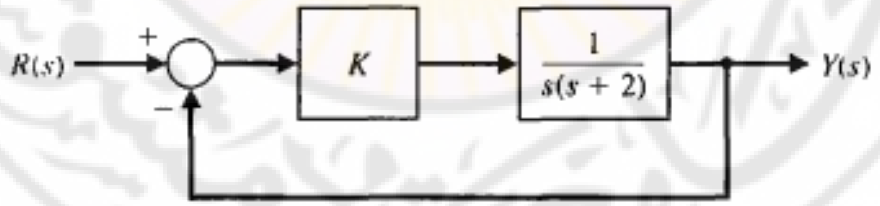
يمكن أن يتغير الربح $K$ من الصفر إلى اللانهاية.

إن جذور النظام من الدرجة الثانية (من أجل $\zeta>1$) هي:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \ldots\ldots(8-7)$$

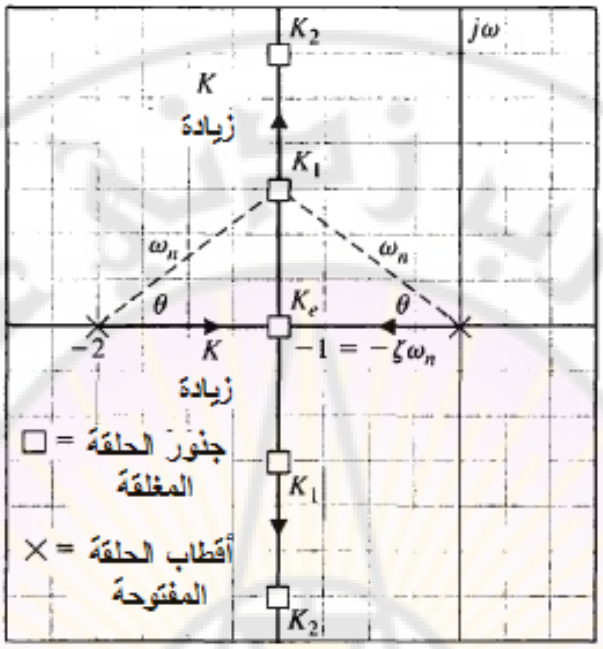
تذكر أن $\theta = \cos^{-1}\zeta$ وذلك من أجل $\zeta < 1$, حيث $\Theta$ هي الزاوية المشكلة بين الخط الواصل بين $s_1$ أو $s_2$ ونقطة المبدأ والمحور الأفقي.

بيانياً, من أجل قطبي الحلقة المفتوحة المبينان بالشكل (3-7), يكون المحل الهندسي للجذور عبارة عن خط مستقيم عمودي على المحور الأفقي وذلك حتى يتحقق الشرط المتعلق بالزوايا المبين بالعلاقة (7-7), وذلك من أجل $\zeta \leq 1$.




**الشكل (2-7): نظام تحكم ذو التغذية الخلفية الواحدية, حيث $K$ هو بارامتر متغير.**

Damascus University




**الشكل (7-3): المحل الهندسي لجذور نظام من الدرجة الثانية وذلك عندما $K_e<K_1<K_2$. المحلات الهندسية مبينة بالخطوط العريضة, حيث تشير الأسهم إلى اتجاه زيادة $K$.**

على سبيل المثال, تكون قيمة الزوايا عند الجذر $s_1$ (كما هو مبين بالشكل 7-4):

$$\angle\frac{K}{s(s+2)} = -\angle s_1 - \angle(s_1+2) = -\left[(180^\circ - \theta) + \theta\right] = -180^\circ ....(9-7)$$

إن هذا الشرط المتعلق بالزوايا يتحقق عند أي نقطة من الخط المستقيم العمودي على المحور الأفقي والمرسوم في منتصف المسافة بين القطبين (0) و (-2).

لنحسب, الآن, قيمة الربح $K$ عند نقاط محددة ($s_1$ على سبيل المثال) وذلك باستخدام المعادلة (7-6):

$$\left|\frac{K}{s(s+2)}\right|_{s=s_1} = \frac{K}{|s_1||s_1+2|} = 1 ....(10-7)$$

أو

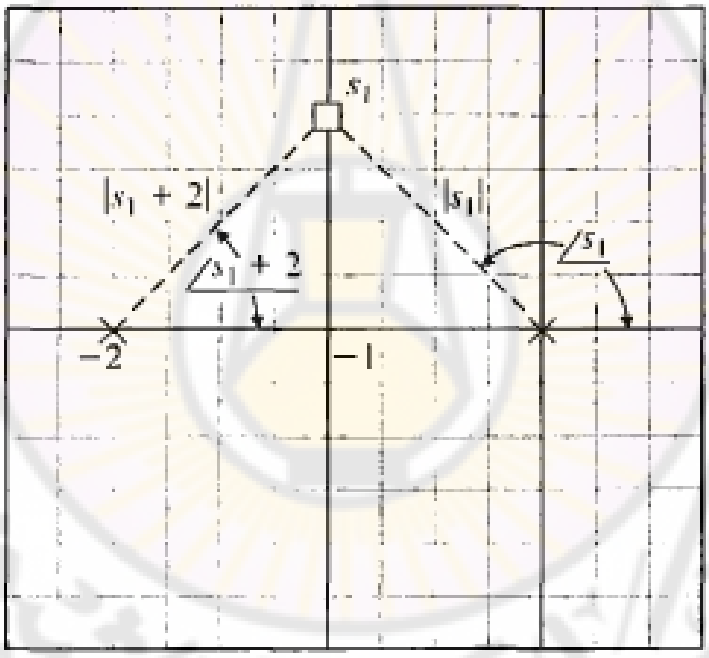
$$K = |s_1||s_1+2| ....(11-7)$$

حيث $|s_1|$ هو مطال الشعاع من مبدأ الإحداثيات إلى النقطة $s_1$, و $|s_1+2|$ هو مطال الشعاع من النقطة (-2) إلى النقطة $s_1$ .

في النظم المغلقة متعددة الحلقات, يمكننا حساب المعادلة المميزة باستخدام علاقة ماسون على النحو التالي:

$$\Delta = 1 - \sum_{n-1}^{N} L_n + \sum_{\substack{n,m \\ nontouching}} L_n L_m - \sum_{\substack{n,m,p \\ nontouching}} L_n L_m L_p + \ldots, \quad \ldots.(12-7)$$

حيث $L_n$ هي قيمة ربح الحلقة $(n)$.




**الشكل (7-4): تقدير الزاوية والربح عند النقطة $s_1$ وذلك من أجل $K = K_1$**

يمكن إعادة صياغة المعادلة (12-7) لتكتب على النحو التالي:

$$\Delta(s) = q(s) = 1 + F(s) \quad \ldots.(13-7)$$

لإيجاد جذور المعادلة المميزة, نسند إلى المعادلة (13-7) القيمة 0, أي:

$$1 + F(s) = 0 \quad \ldots.(14-7)$$

يمكن أن نكتب المعادلة (14-7) على النحو التالي:

$$F(s) = -1 + j0 \quad ....(15-7)$$

حيث يجب أن تحقق, جميع جذور المعادلة المميزة, هذه المعادلة.

بشكل عام, يعطى التابع $F(s)$ بالعلاقة:

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3).....(s+z_M)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3).....(s+p_n)}$$

بالتالي فإن الشروط المتعلقة بالمطال والزوايا لأي نقطة في المحل الهندسي للجذور:

$$|F(s)| = \frac{K|s+z_1|.|s+z_2|.....}{|s+p_1||s+p_2|...} .....(16-7)$$

$$\angle F(s) = \angle(s+z_1) + \angle(s+z_2) + .... - (\angle(s+p_1) + \angle(s+p_2) + ...)$$

$$= 180^\circ + k360^\circ .....(17-7)$$

حيث $k$ عدد صحيح. إن الشرط المتعلق بالمطال والممثل بالمعادلة (7-16), يُمكننا من تحديد قيمة $K$, وذلك من أجل قيمة محددة للجذر $s_1$. إن النقطة $s_1$ يجب أن تحقق أيضاً الشرط المتعلق بالزاوية والممثل بالمعادلة (7-17) حيث تقاس الزوايا ابتداءاً من المحور الأفقي وبعكس عقارب الساعة.

لشرح مفهوم المحل الهندسي للجذور (أو مسار الجذور), سندرس النظام من الدرجة الثانية, والمبين بالشكل (7-5). يمكن أن يدرس تأثير تغير البارامتر $(a)$ بكتابة المعادلة المميزة للمحل الهندسي للجذور وهي:

$$1 + KG(s) = 1 + K\frac{1}{s(s+a)} = 0$$

$$s^2 + as + K = 0 .....(18-7)$$

لنقسم طرفي المعادلة المميزة على $(s^2 + K)$ فنجد:

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0$$

يتحقق معيار المطال (Magnitude Criterion) عندما:

$$\frac{a|s_1|}{|s_1^2 + K|} = 1 .....(19-7)$$

وذلك من أجل الجذر $s_1$. أيضاً يتحقق معيار الزاوية عندما:

$$\angle s_1 - \left(\angle\left(s_1 + j\sqrt{K}\right) + \angle\left(s_1 - j\sqrt{K}\right)\right) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ$$

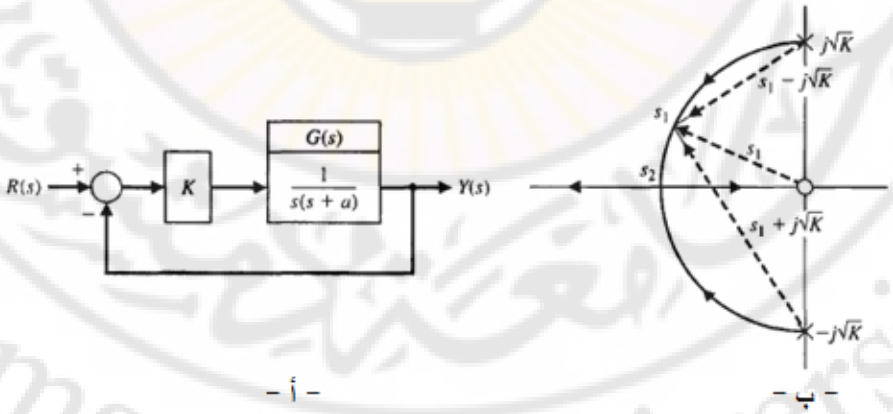
من حيث المبدأ يمكننا أن نرسم المحل الهندسي للجذور وذلك بحساب عدد من النقاط من المستوي اللابلاسي والتي تحقق معيار الزاوية. يبين الشكل (b-5-7) المحل الهندسي للمعادلة المميزة المعطاة بالمعادلة (18-7). عند الجذر $s_1$, يُحسب البارامتر $a$ من المعادلة (19-7) على النحو التالي:

$$a = \frac{\left|s_1 - j\sqrt{K}\right|\left|s_1 + j\sqrt{K}\right|}{|s_1|}$$

تنفصل جذور النظام عن المحور الحقيقي عند النقطة $s_2$ , وهذا ما يُترجم إلى استجابة خطوية ذات تخامد حرج عند هذه النقطة. عند النقطة $s_2$ تكون قيمة البارامتر $a$ :

$$a = \frac{\left|\sigma_2 - j\sqrt{K}\right|\left|\sigma_2 + j\sqrt{K}\right|}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2}\left(\sigma_2^2 + K\right) = 2\sqrt{K} \quad \ldots\ldots\ldots(21-7)$$

حيث $\sigma_2 = \sqrt{K}$ علماً أننا تمكننا من معرفة هذه القيمة ( $\sigma_2$ ) عن طريق قياس طويلة الشعاع في المستوي اللابلاسي بين مركز الإحداثيات والنقطة $s_2$. عند زيادة البارامتر $a$ إلى قيمة أعلى من القيمة الحرجة, ينتج لدينا جذرين حقيقيين, أحدهما أكبر من $\sigma_2$, والآخر أصغر من $\sigma_2$.




– أ – – ب –

**الشكل (5-7): أ- نظام من الدرجة الثانية ب- مسار الجذور للنظام كتابع للبارامتر $a$, حيث $a > 0$.**

في الفقرة التالية, سنقدم إجرائية منهجية لرسم المحل الهندسي للجذور وذلك عند تغير قيمة أحد البارامترات.

**3-7 إجرائية رسم المحل الهندسي للجذور (The root locus procedure):**

تزودنا أماكن توضع جذور المعادلة المميزة للنظام بفكرة واضحة عن استجابة النظام. لذلك سنعمل على رسم توضع جذور المعادلة المميزة بصورة بيانية (graphical manner) في المستوي اللابلاسي, نقدم فيما يلي إجرائية منهجية لرسم المحل الهندسي للجذور, والمؤلفة من سبع خطوات.

**<u>الخطوة الأولى:</u>** نكتب المعادلة المميزة على النحو التالي:

$$1+F(s)=0.....(22-7)$$

نعيد كتابة المعادلة, عند الضرورة, بحيث يظهر البارامتر $k$ المراد دراسة تأثيره, كعامل ضرب على النحو التالي:

$$1+kP(s)=0.....(23-7)$$

انطلاقاً من المعادلة (23-7) نريد تحديد المحل الهندسي للجذور عند تغير قيمة البارامتر $k$ على النحو التالي: $0\le k\le\infty$.

نقوم بكتابة $P(s)$ على شكل أصفار وأقطاب كما هو مبين بالمعادلة التالية:

$$1+k\frac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=0.....(24-7)$$

نُوضع الأقطاب $(-p_j)$ والأصفار $(-z_i)$ على المستوي اللابلاسي حيث نصطلح (x) للدلالة على الأقطاب و الإشارة (o) للدلالة على الأصفار.

نعيد كتابة المعادلة (24-7) على النحو التالي:

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+k\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0.....(25-7)$$

لاحظ أن المعادلة (7-25) هي طريقة ثانية لكتابة المعادلة المميزة للنظام. عندما $k = 0$ نجد أن جذور المعادلة المميزة هي أقطاب $P(s)$. لنتفحص ذلك عن قرب ولنسند $k = 0$ في المعادلة (7-25) فنجد:

$$\prod_{j=1}^{n}(s + p_j) = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد أن قيم $s$ تتطابق مع أقطاب $P(s)$.

لنفرض الآن أن قيم $k$ تسعى إلى اللانهاية (أي $k \to \infty$). في هذه الحالة نجد أن جذور المعادلة المميزة هي أصفار $P(s)$. للتأكد من هذه المسألة سنقسم المعادلة (7-25) على $k$ ومن ثم لنسند لـ $k$ القيمة $(\infty)$ فنجد:

$$\frac{1}{k}\prod_{j=1}^{n}(s + p_j) + \prod_{i=1}^{M}(s + z_i) = 0$$

عندما $k \to \infty$ نجد:

$$\prod_{i=1}^{M}(s + z_i) = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد أن قيم $s$ تتطابق مع أصفار $P(s)$.

مما سبق نجد أن المحل الهندسي لجذور المعادلة المميزة $1+kP(s)=0$ يبدأ من أقطاب $P(s)$ وينتهي عند أصفار $P(s)$, وذلك عندما تتغير $k$ من 0 إلى $\infty$.

في معظم التوابع $P(s)$ والتي نقابلها في دراستنا فإن العديد من أصفار $P(s)$ تقع في اللانهاية من المستوي اللابلاسي وذلك لأن هذه التوابع تملك عدد من الأقطاب أكبر من عدد الأصفار. من أجل $P(s)$ يملك $n$ قطب و $M$ صفر ولدينا $n > M$, فإن المحل الهندسي للجذور يملك $n-M$ فرع يقترب من الأصفار التي عددها $(n-M)$ والواقعة في اللانهاية.

**الخطوة الثانية:** نوضع الأجزاء من المحل الهندسي للجذور والواقع على المحور الحقيقي. يجب أن تحقق الأجزاء من المحل الهندسي للجذور والواقعة على المحور الحقيقي معيار الزاوية والمعطى بالمعادلة (7-17).

لنشرح هاتين الخطوتين المهمتين في رسم المحل الهندسي للجذور عن طريق المثال التالي:

**مثال 7-1:** ليكن لدينا النظام ذو الحلقة المغلقة الواحدية, والموصوف بالمعادلة المميزة التالية:

$$1+GH(s)=1+\frac{K(1/2\,s+1)}{1/4s^2+s}=0.....(26-7)$$

لنحاول تطبيق الخطوتين الأولى والثانية في رسم المحل الهندسي للجذور على هذا النظام.

الخطوة الأولى: يمكن أن تكتب المعادلة المميزة للنظام على النحو التالي:

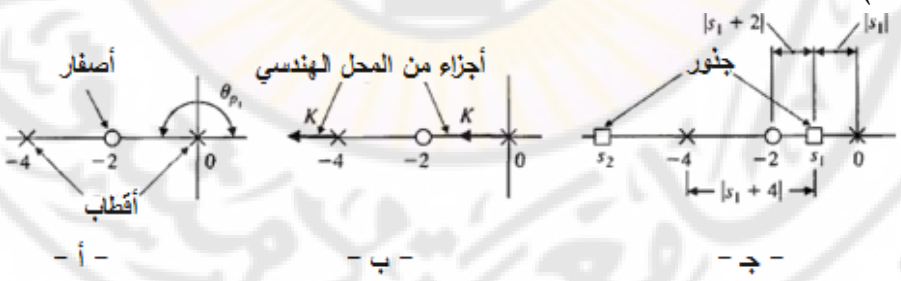
$$1+K\frac{2(s+2)}{s^2+4s}=0$$

حيث: $P(s)=\dfrac{2(s+2)}{s^2+4s}$ .

لنكتب الآن التابع $P(s)$ على شكل جداء أصفار وأقطاب لتصبح المعادلة المميزة للنظام على النحو التالي:

$$1+K\frac{2(s+2)}{s(s+4)}=0.....(27-7)$$

لتحديد المحل الهندسي للجذور وذلك عندما تتغير قيمة $K$ ضمن المجال $0 \le K \le \infty$, نقوم بتوضيع الأصفار والأقطاب على المستوي اللابلاسي, على النحو المبين بالشكل (6-7).




- أ - - ب - - جـ -

**الشكل (7-6): أ – أصفار وأقطاب النظام المدروس ب – أجزاء المحل الهندسي للجذور والواقعة على المحور الحقيقي جـ – طويلة كل شعاع عند $s_1$.**

الخطوة الثانية: إن معيار الزاوية يتحقق في الجزء من المحور الحقيقي الواقع بين النقاط (0) و (-2), وذلك لأن الزاوية عند القطب الواقع في مركز الإحداثيات ($p_1 = 0$) هي

180, والزاوية بين صفر الـ $P(s)$ والقطب 4- = $p_2$, تساوي الصفر. يبدأ المحل الهندسي للجذور من أقطاب $P(s)$ وينتهي عند أصفاره, حيث يبدو هذا المحل الهندسي للجذور على النحو المبين بالشكل (7-6). يبين الأسهم في هذا المحل الهندسي للجذور اتجاه زيادة $K$. طالما أن النظام يملك قطبين واقعين على المحور الحقيقي, وصفر وحيد واقع أيضاً على المحور الحقيقي, بالتالي فأن هناك جزء من المحل الهندسي ينتهي عند صفر النظام الواقع عند $(-\infty)$. بمعنى آخر يوجد هناك جزء يقع على المحور الحقيقي بين $(s=-4)$.و $(-\infty)$.

لتقدير قيمة $K$ عند نقطة ما من المحل الهندسي للجذور, نطبق معيار المطال المتمثل بالمعادلة (7-16). على سبيل المثال لنحسب قيمة $K$ عند الجذر $s=s_1=-1$, فنجد:

$$2K\frac{|s_1+2|}{|s_1||s_1+4|}=1$$

أو

$$K=\frac{|s_1||s_1+4|}{2|s_1+2|}=\frac{|-1||-1+4|}{2|-1+2|}=\frac{3}{2}.....(28-7)$$

لنقوم الآن بتحديد عدد الأجزاء المنفصلة من المحل الهندسي للجذور. بما أن المحل الهندسي للجذور يبدأ من الأقطاب وينتهي عند الأصفار, وبما أن عدد الأقطاب أكبر أو يساوي عدد الأصفار فإن عدد الأجزاء المنفصلة من المحل الهندسي للجذور يساوي عدد الأقطاب. يبين الشكل (7-6) أن عدد الأجزاء المنفصلة يساوي عدد الأقطاب وهو 2.

لاحظ أيضاً أن المحل الهندسي للجذور يجب أن يكون متناظر بالنسبة للمحور الأفقي وذلك لأن الجذور العقدية يجب أن تظهر على شكل أزواج من الأعداد العقدية المترافقة.

لنعود الآن لنتابع خطوات رسم المحل الهندسي للجذور. ■

**<u>الخطوة الثالثة</u>:** تملك أجزاء المحل الهندسي والواقعة قبل الأصفار المتواجدة في اللانهاية, مقاربات متمركزة بالنقطة $\sigma_A$, وتشكل زاوية مقدارها $\emptyset_A$ .

عندما يكون عدد أصفار $P(s)$ المساوي لـ $M$, أقل من عدد أقطابه المساوي لـ $n$ بمقدار $N = n\text{-}M$, بالتالي هناك $N$ جزء من المحل الهندسي للجذور يجب أن ينتهي عند

الأصفار الواقعة في اللانهاية. تملك الأجزاء من المحل الهندسي الواقعة قبل الأصفار الواقعة في اللانهاية, مقاربات خطية متمركزة على المحور الحقيقي عند النقاط المعطاة بالعلاقة التالية:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n-M} \quad .....(29-7)$$

حيث: $\sum_{j=1}^{n}(-p_j)$ يمثل مجموع أقطاب $P(s)$ و $\sum_{i=1}^{M}(-z_i)$ يمثل مجموع أصفار $P(s)$.

إن زاوية المقاربات مع المحور الحقيقي فتعطى بالعلاقة:

$$\phi_A = \frac{2k+1}{n-M} * 180, \qquad k = 0,1,2,....,n-M-1 \quad .....(30-7)$$

حيث $k$ عدد صحيح.

إن الفائدة من هذه القاعدة تتجلى بسهولة الحصول على شكل تقريبي للمحل الهندسي للجذور.

لنأخذ على سبيل المثال, النظام المبين بالشكل (7-2), والمعالج في الفقرة (7-2). يمكن أن تكتب المعادلة المميزة لهذا النظام على النحو التالي:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0$$

طالما أن n-M=2, فإننا نتوقع أن هناك جزئين من المحل الهندسي ينتهيان عند الأصفار الواقعة في اللانهاية. تتمركز هذه الأجزاء من المحل الهندسي على المحور الحقيقي عند النقطة: $\sigma_A = -2/2 = -1$, وتشكل مع المحور الأفقي الزوايا:

$$\phi_A = 90^\circ \quad (\text{من أجل } k = 0)$$

$$\phi_A = 270^\circ \quad (\text{من أجل } k = 1)$$

يبين الشكل (7-3) المحل الهندسي للجذور الناتج. لمزيد من الشروحات حول المستقيمات المقاربة سنعالج المثال التالي.

**مثال 7-2: نظام من الدرجة الرابعة:**

ليكن لدينا النظام المغلق ذو التغذية الخلفية الواحدية الموصوف بالمعادلة المميزة التالية:

$$1+GH(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}.....(31-7)$$

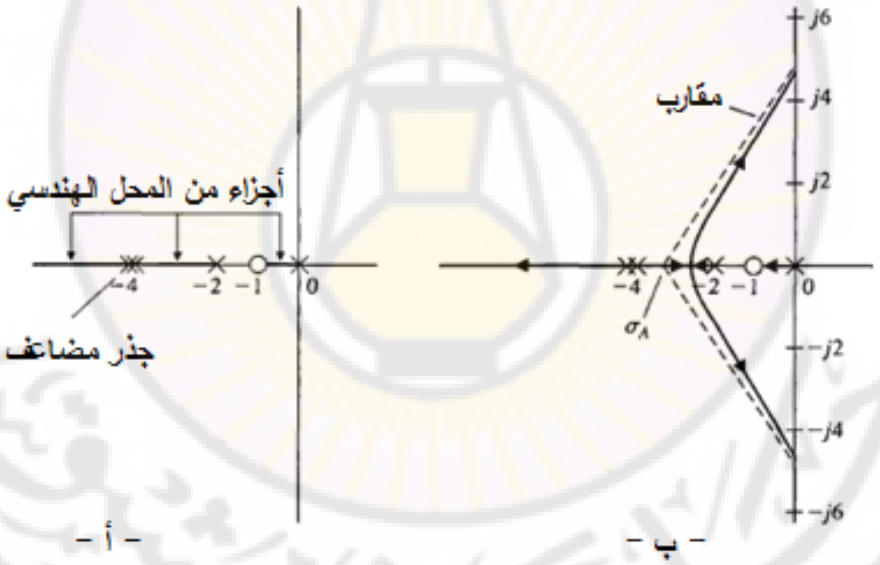
نريد في هذا المثال رسم المحل الهندسي للجذور بهدف بيان تأثير الربح $K$. إن توضع أقطاب وأصفار التابع $P(s)$ في المستوي اللابلاسي مبين بالشكل (7-7). نقطة تقاطع المقاربات مع المحور الحقيقي:

$$\sigma_A=\frac{(-2)+2(-4)-(-1)}{4-1}=\frac{-9}{3}=-3.....(32-7)$$

أما زوايا المقاربات فتساوي: $\phi_A=60^\circ$ (من أجل $k=0$)

$\phi_A=180^\circ$ (من أجل $k=1$)

$\phi_A=300^\circ$ (من أجل $k=2$)




**الشكل (7-7): نظام من الدرجة الرابعة: أ- مواقع الأصفار والأقطاب ب- المحل الهندسي للجذور.**

نلاحظ أن عدد المقاربات يساوي (3) وذلك لأن $n\text{-}M = 3$. يبين الشكل (7-7) المقاربات والمحل الهندسي للجذور. ■

لننتقل, الآن, إلى الخطوة التالية في رسم المحل الهندسي للجذور.

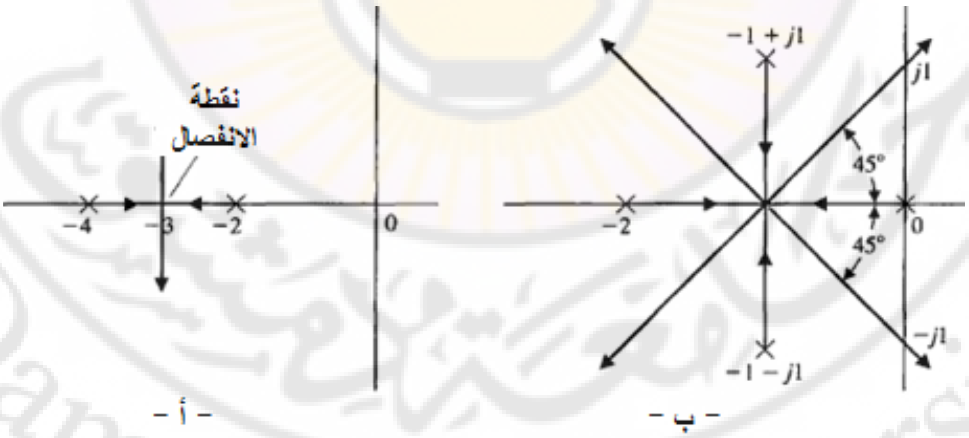
**الخطوة الرابعة:** تحديد نقاط تقاطع المحل الهندسي للجذور مع المحور التخيلي, وذلك باستخدام دالة راوث–هورفيتز.

**الخطوة الخامسة:** تحديد نقاط الانفصال عن المحور الحقيقي, إذا وجدت.

في المثال 7-2, يغادر المحل الهندسي للجذور المحور الحقيقي عند نقطة انفصال وحيدة. عموماً إن سبب انفصال المحل الهندسي للجذور عن المحور الحقيقي هو أن التغير الحاصل في الزاوية والناتج عن انزياح بسيط في قيمة البارامتر المدروس يساوي للصفر. أيضاً يغادر المحل الهندسي للجذور المحور الحقيقي إذا كان هناك جذور مضاعفة. يبين الشكل (7–8) نقاط الانفصال لنظم الدرجة الثانية والرابعة.

بشكل عام, وبسبب معيار الزوايا, تكون مماسات أجزاء المحل الهندسي للجذور عند نقطة الانفصال متباعدة بشكل متساوي, بمجموع زوايا فيما بينها مقداره ( $360^\circ$ ).

من الشكل (7-8 - أ) نجد أن جزأي المحل الهندسي للجذور يبتعدان عن بعضهما البعض, عند نقطة الانفصال, بمقدار ( $180^\circ$ ), بينما في الشكل (7-8 - ب) نجد أن الأجزاء الأربعة للمحل الهندسي للجذور تبتعد عن بعضها البعض بمقدار ( $90^\circ$ ), بالطبع عند نقطة الانفصال.




**الشكل (7-8): شرح نقاط الانفصال من أجل: أ– نظام من الدرجة الثانية ب– نظام من الدرجة الرابعة.**

يمكن حساب نقطة الانفصال عن المحور الحقيقي إما بيانياً أو تحليلياً. تتطلب الطريقة المباشرة لحساب نقطة الانفصال (سواءاً أكانت بيانياً أو تحليلياً) إعادة ترتيب المعادلة المميزة بحيث يتم عزل العامل $K$, ومن ثم تكتب المعادلة المميزة على النحو التالي:

$$P(s) = K \quad .....(33-7)$$

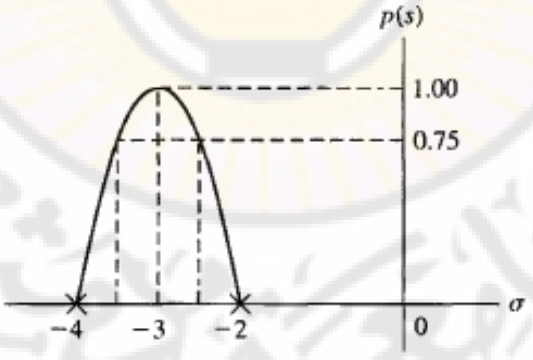
لنأخذ على سبيل المثال النظام المغلق ذو التغذية الخلفية الواحدية حيث تعطى المعادلة المميزة لهذا النظام بالعلاقة التالية:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K}{(s+2)(s+4)} = 0 \quad .....(34-7)$$

أيضاً يمكن أن تصاغ هذه العلاقة على النحو التالي:

$$K = P(s) = -(s+2)(s+4) \quad .....(35-7)$$

إن المحلات الهندسية لهذا النظام مبينة بالشكل (7-8 – أ). كما سبق نتوقع أن تكون نقطة الانفصال واقعة بالقرب من $s = \sigma = -3$, وذلك كما هو مبين بالشكل (7-9). في هذه الحالة, يكون $P(s)$ معدوماً عند الأقطاب -2 = $s$ و -4 =$s$. إن الرسم البياني لـ $P(s)$ متناظر, حيث أن القيمة العظمى لـ $P(s)$ تحدث عند $s = \sigma = -3$, وهي نقطة الانفصال.




**الشكل (7-9): حساب نقطة الانفصال بالطريقة البيانية**

تحليلياً يمكن الحصول على نفس النتيجة بالبحث عن القيمة العظمى لـ $K = P(s)$. عملياً لإيجاد القيمة العظمى لـ $P(s)$ نشتق $K = P(s)$ بالنسبة للمتحول اللابلاسي $s$, ومن ثم نسند القيمة صفر إلى المشتق وذلك على النحو التالي:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dP(s)}{ds} = 0.....(36-7)$$

تمثل العلاقة (7-36) العلاقة التحليلية للطريقة البيانية المبينة بالشكل (7-9), حيث سينتج لدينا معادلة وحيدة من الدرجة $(n+M-1)$.

تعتمد البرهنة الرياضية للمعادلة (7-36) على المعادلة المميزة للنظام:

$$1+F(s) = 1+K\frac{Y(s)}{X(s)} = 0$$

أو:

$$X(s)+KY(s) = 0.....(37-7)$$

عند حدوث زيادة طفيفة في $K$ تصبح المعادلة (7-37):

$$X(s)+(K+\Delta K)Y(s) = 0$$

لنقسم هذه المعادلة على $X(s)+KY(s)$, فينتج لدينا:

$$1+\Delta K\frac{Y(s)}{X(s)+KY(s)} = 0.....(38-7)$$

بما أن مقام المعادلة (7-38) هو ذاته المعادلة المميزة بالتالي يوجد جذر مكرر $(m)$ مرة عند نقطة الانفصال, أي:

$$\frac{Y(s)}{X(s)+KY(s)} = \frac{C_i}{(s-s_i)^m} = \frac{C_i}{(\Delta s)^m}.....(39-7)$$

بالتالي يمكن إعادة صياغة المعادلة (7-38) على النحو التالي:

$$1+\Delta K\frac{C_i}{(\Delta s)^m} = 0.....(40-7)$$

أو:

$$\frac{\Delta K}{\Delta s} = -\frac{(\Delta s)^{m-1}}{C_i}.....(41-7)$$

عندما تقترب $\Delta s$ من الصفر, تصبح المعادلة (7-41):

$$\frac{dK}{ds} = 0.....(42-7)$$

بالطبع هذه العلاقة محققة فقط عند نقاط الانفصال.

على سبيل المثال, لندرس ثانية, النظام المغلق ذو التغذية الخلفية الواحدية حيث يعطى تابع تحويل مساره الأمامي بالعلاقة:

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)}$$

في هذا المثال نجد أن $P(s)$:

$$P(s) = K = -(s+2)(s+4) = -(s^2 + 6s + 8).....(43-7)$$

لنشتق الآن المعادلة (43-7):

$$\frac{dP(s)}{ds} = -(2s+6) = 0.....(44-7)$$

وبالتالي فنقطة الانفصال هي $s = -3$.

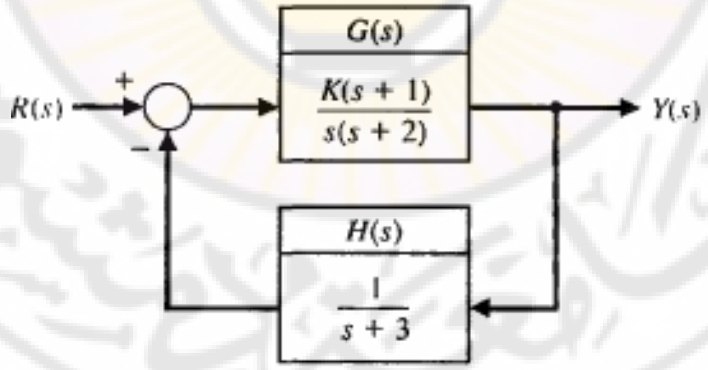
سنعالج فيما يلي مثال أكثر تعقيداً لشرح طرق حساب نقاط الانفصال حيث سنُظهر فائدة استخدام الطريقة البيانية في حساب نقاط الانفصال.

**مثال 7-3: نظام من الدرجة الثالثة:**

ليكن لدينا النظام التحكمي ذو الحلقة المغلقة, والمبين بالشكل (10-7). لندرس نقاط الانفصال في المحل الهندسي لجذور هذا النظام.

إن المعادلة المميزة لهذا النظام:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0.....(45-7)$$




**الشكل (10-7): النظام التحكمي ذو الحلقة المغلقة المدروس بالمثال 7-3.**

إن عدد أقطاب النظام $n = 3$ وعدد أصفاره $m = 1$, بالتالي لدينا مقاربين ($n$-M = 2), متمركزين عند النقطة $\sigma_a = -2$, حيث تُشكل هذه المقاربات مع المحور الحقيقي الزوايا

($\pm 90^{\circ}$). يبين الشكل (7-11) المستقيمات المقاربة والأجزاء من المحل الهندسي الواقعة على المحور الحقيقي. توجد نقطة انفصال واقعة بين $s$ = -2 و $s$ = -3, حيث يتطلب حساب قيمة نقطة الانفصال إعادة كتابة المعادلة المميزة بحيث يتم عزل الربح $K$, أي:

$$s(s+2)(s+3)+K(s+1)=0$$

أو:

$$P(s)=-\frac{s(s+2)(s+3)}{(s+1)}=K.....(46-7)$$

لنحسب الآن قيم $P(s)$ وذلك من أجل عدة قيم لـ $s$ محصورة بين $s$ = -2 و $s$ = -3, حيث أن هذه القيم مبينة بالجدول (7-1). يبين الشكل (7-11) التمثيل البياني لهذا الجدول.

**الجدول 7-1**

| $P(s)$ | 0 | 0.411 | 0.419 | 0.417 | 0.390 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | -2.00 | -2.40 | -2.46 | -2.50 | -2.60 | -3.00 |

من الشكل (7-11) نجد أن نقطة الانفصال هي: $s=-2.46$ .

لنقوم الآن بحساب نقطة الانفصال تحليلياً:

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{s(s+2)(s+3)}{(s+1)}\right)=\left(\frac{\left(s^3+5s^2+6s\right)-(s+1)\left(3s^2+10s+6\right)}{(s+1)^2}\right)=0$$

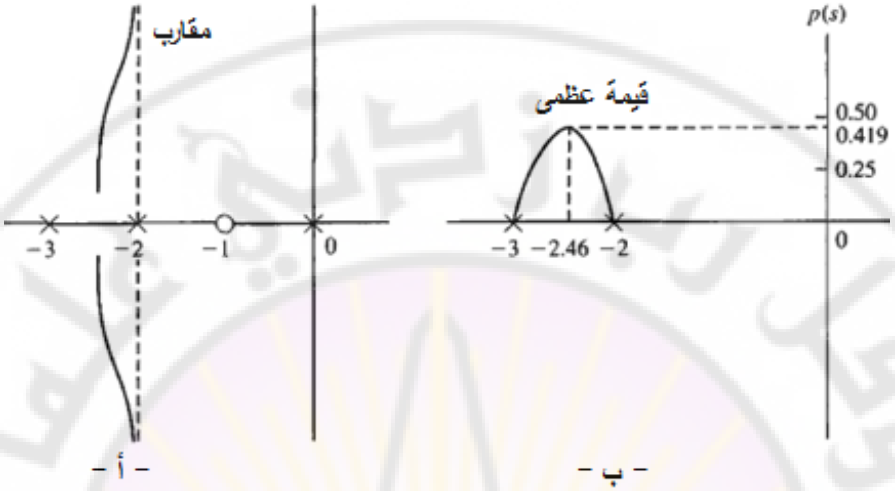
$$2s^3+8s^2+10s+6=0.....(47-7)$$

لنقوم الآن بتحديد جذور هذه المعادلة فنجد أن هناك جذرين هما:

$s$ = -2.46 و $s$ = -0.77+$j$0.79

إن القيمة الوحيدة لـ $s$, الواقعة بين $s$ = -2 و $s$ = -3, هي $s$ = -2.46, وبالتالي فهذه النقطة تمثل نقطة الانفصال. ■

**الخطوة السادسة:** تحديد زاوية مغادرة المحل الهندسي للجذور لأحد الأقطاب, وزاوية وصول المحل الهندسي للجذور إلى أحد الأصفار, وذلك بالاعتماد على معيار الزوايا.




**الشكل (7-11): أ – المستقيمات المقاربة للنظام المدروس بالمثال 7-3 ب – الطريقة البيانية لحساب نقطة الانفصال.**

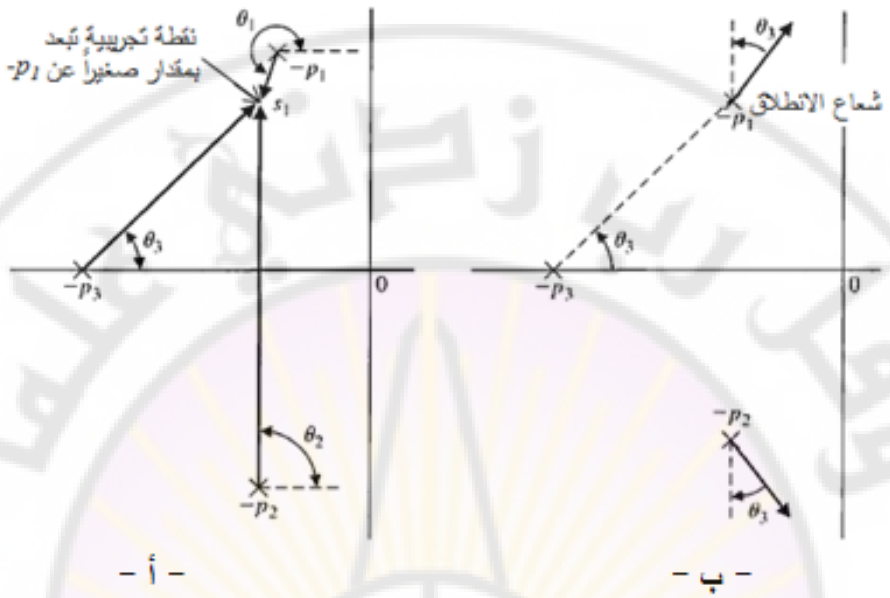
لنأخذ على سبيل المثال النظام التالي والذي يُعطى تابع تحويل مساره الأمامي بالعلاقة التالية:

$$F(s)=G(s)H(s)=\frac{K}{(s+p_3)(s2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}.....(48-7)$$

يبين الشكل (7-12) مواقع أقطاب النظام في المستوي اللابلاسي وزاويا الأشعة عند النقطة التجريبية ($-s_1$). إن الزوايا عند النقطة التجريبية ($s_1$), والمنتمية للمحل الهندسي للجذور, والتي تبعد بمقدار بسيط عن ($-p_1$) يجب أن تحقق معيار الزوايا. لاحظ أن حسابنا لموقع ($-s_1$) يعني أننا حددنا زاوية الانطلاق من القطب ($-p_1$). بما أن $\theta_2=90^\circ$ , بالتالي, وبالاعتماد على معيار الزوايا, ينتج لدينا:

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\theta_1+90^\circ+\theta_3=+180^\circ$$

بالتالي فإن زاوية المغادرة عند القطب ($p_1$) هي: $\theta_1=90^\circ-\theta_3$ , وذلك كما هو مبين بالشكل (7-12).




– أ – – ب –

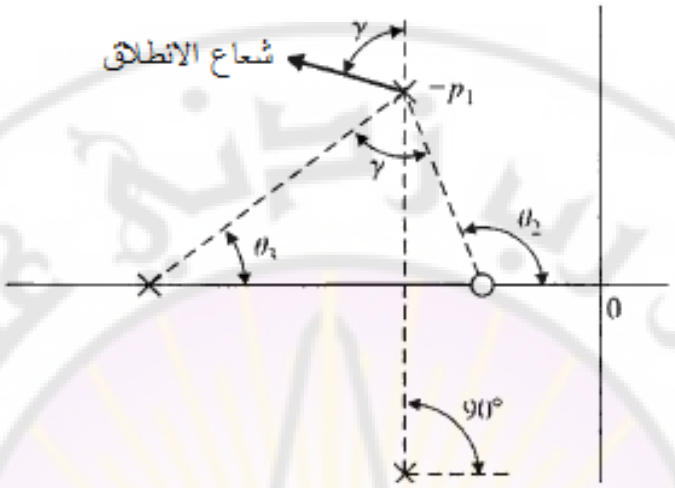
**الشكل (7-12): شرح مفهوم زاوية الانطلاق: أ– نقطة تجريبية قريبة جداً من ($-p_1$), ب– شعاع الانطلاق الحقيقي عند ($-p_1$).**

إن زاوية الانطلاق عند القطب ($-p_2$) هي نفسها زاوية الانطلاق عند القطب ($-p_1$), وذلك لأن القطبان ($-p_2$) و ($-p_1$) هما عددان عقديان مترافقان. مثال آخر عن زاوية الانطلاق مبين بالشكل (7-13). في هذه الحالة, تُحسب زاوية الانطلاق بالعلاقة التالية:

$$\theta_2 - (\theta_1 + \theta_3 + 90) = 180^\circ + k360^\circ$$

بما أن $\theta_2 - \theta_3 = \gamma$ كما هو مبين بالشكل, بالتالي فإن زاوية الانطلاق هي: $\theta_1 = 90^\circ + \gamma$. ■

**الخطوة السابعة:** تقوم الخطوة الأخيرة في إجرائية رسم المحل الهندسي للجذور على وضع اللمسات الأخيرة للمحل الهندسي للجذور والتي لم ترد في الخطوات الستة السابقة. بالطبع إذا كان المطلوب رسم المحل الهندسي الدقيق للجذور, فينصح باستخدام البرامج الحاسوبية مثل بيئة الماتلاب.




**الشكل (7-13): حساب زاوية الانطلاق**

من المفيد, في هذه المرحلة, أن نقوم بتلخيص الخطوات السبعة المستخدمة في رسم المحل الهندسي للجذور حيث يبين الجدول (7-2) ملخص هذه الخطوات. كما من الضروري أيضاً أن نقوم بتوضيح الخطوات عن طريق مثال شامل.

**الجدول (7-2): ملخص الخطوات السبعة لرسم المحل الهندسي للجذور**

| الخطوة | المعادلة أو القاعدة المستخدمة |
|---|---|
| 1. التحضير لرسم المحل الهندسي للجذور: | |
| أ) كتابة المعادلة المميزة بحيث يظهر البارامتر $K$ المراد دراسة تأثيره على شكل عامل ضرب. | $1+KP(s)=0$ |
| ب) كتابة تابع التحويل P(s) على شكل جداء أصفار وأقطاب. | $1+k\frac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=0$ |
| ج) تحديد أماكن أصفار وأقطاب P(s) في المستوي اللابلاسي حيث نشير إلى القطب بـ (x) وللصفر بـ (o). | يبدأ المحل الهندسي للجذور من الأقطاب وينتهي عند الأصفار. |

| | |
|---|---|
| د) تحديد عدد الأجزاء المنفصلة للمحل الهندسي للجذور, والمشار إليه بـ (SL).<br>ه) أجزاء المحل الهندسي للجذور متناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي الأفقي. | $SL = n$<br>$n$: عدد الأقطاب |
| 2. تحديد أجزاء المحل الهندسي للجذور المنطبقة على المحور الحقيقي الأفقي. | الجزء من المحور الحقيقي والذي يحقق معيار الزاويا. |
| 3. أجزاء المحل الهندسي الواقعة ما قبل الأصفار الواقعة عند اللانهاية تملك مقاربات متمركزة عند النقاط $\sigma_A$ الواقعة على المحور الحقيقي, وتشكل هذه المقاربات مع المحور الحقيقي الزوايا $\phi_A$. | $\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n-M}$<br>$\phi_A = \frac{2k+1}{n-M}180^\circ,$<br>$k = 0.1.2.....(n-M-1)$ |
| 4. تحديد النقاط, إذا وجدت, التي يجتاز فيها المحل الهندسي للجذور المحور التخيلي. | استخدام دالة راوث–هورفيتز المدروسة بالفصل السادس. |
| 5. تحديد نقاط الانفصال عن المحور الحقيقي, إذا وجدت. | أ) نوجد K = P(s).<br>ب) نحسب القيمة العظمى لـ P(s) أما بالطريقة التحليلية عن طريق تحديد جذور المعادلة $dP/\mathrm{ds} = 0$, أو بالطريقة البيانية. |
| 6. تحديد زاوية الانطلاق من الأقطاب وزاويا الوصول إلى الأصفار. | نستخدم معيار الزوايا:<br>$\angle P(s) = 180^\circ + k360^\circ$<br>وذلك من أجل كل قطب وصفر للنظام. |
| 7. إكمال المحل الهندسي. | |

**مثال 7-4: النظام من الدرجة الرابعة:**

ليكن لدينا النظام من الدرجة الرابعة المعطى بالمعادلة المميزة التالية:

$$1+\frac{K}{s^4+12s^3+64s^2+128s}=0, \qquad K>0$$

لنرسم المحل الهندسي للجذور لهذا النظام وذلك عند تغير قيمة الربح $K$.

سنقوم فيما يلي بإتباع الخطوات المشروحة سابقاً, والمبينة بالجدول (7-2).

الخطوة الأولى:

أ- نكتب المعادلة المميزة على الشكل التالي: $1+KP(s)=0$, وهو ما يتطابق مع الشكل المعطى.

ب-نحدد أقطاب النظام: يمكن كتابة المعادلة المميزة على النحو التالي:

$$1+\frac{K}{s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)}=0.....(49-7)$$

عندما تتغير قيمة $K$ من الصفر إلى اللانهاية فإن النظام لا يملك أي أصفار ذات قيمة منتهية.

ج- نقوم بتوضيع هذه الأقطاب في المستوي اللابلاسي كما هو مبين بالشكل (7-14).

د- نحدد عدد الأجزاء المنفصلة للمحل الهندسي للجذور, والذي يساوي /4/, وهو عدد الأقطاب.

هـ- المحل الهندسي متناظر بالنسبة للمحور الحقيقي.

الخطوة الثانية: تحديد الجزء الواقع على المحور الحقيقي:

يوجد جزء من المحل الهندسي يقع على المحور الحقيقي بين $s=0$ و $s=-4$.

الخطوة الثالثة: زوايا المقاربات:

$$\phi_A=\frac{2k+1}{4}180^\circ, \quad k=0.1.2,3$$

$$\phi_A=+45^\circ,+135^\circ,+225^\circ,+315^\circ$$

نقطة ارتكاز المقاربات على المحور الحقيقي:

$$\sigma_A=\frac{-4-4-4}{4}=-3$$

يبين الشكل (7-14) المستقيمات المقاربة.

الخطوة الرابعة: تحديد نقاط اجتياز المحور التخيلي: يمكن أن تكتب المعادلة المميزة على النحو التالي:

$$s(s+4)(s^2+8s+32)+K=s^4+12s^3+64s^2+128s+K=0.....(50-7)$$

لننشئ جدول راوث:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 64 | $K$ |
| $s^3$ | 12 | 128 | |
| $s^2$ | $b_1$ | $K$ | |
| $s^1$ | $c_1$ | | |
| $s^0$ | $K$ | | |

حيث: $b_1=\frac{12(64)-128}{12}=53.33,\quad c_1=\frac{53.33(128)-12K}{53.33}=128-0,2250K$

لأسباب تتعلق بالاستقرار, يجب أن نحد قيمة الربح $K$ على القيمة $(K = 568.89)$, وهي القيمة التي من أجلها $c_1 = 0$ (حالة الاستقرار الهامشي). في هذه الحالة تكون جذور المعادلة المميزة (Auxiliary equation):

$$53.33s^2+568.89=53.33(s^2+10.67)=$$
$$53.33(s+j3.266)(s-j3.266)....(51-7)$$

يبين الشكل (7-14) نقاط اجتياز المحل الهندسي للجذور للمحور التخيلي, حيث من الملاحظ أن المحل الهندسي للجذور يجتاز المحور التخيلي عند $s=\mp j3.266$ وذلك من أجل $K = 568.89$.

الخطوة الخامسة: تحديد نقاط الانفصال عن المحور الحقيقي:

يتم تحديد نقطة لانفصال عن المحور الحقيقي باستخدام المعادلة التالية:

$$K=P(s)=-s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)$$

علماً أن هذه النقطة تقع بين النقطتين: $s = 0$ و $s = -4$.

نوجد الموقع الدقيق لنقطة الانفصال عن طريق حل المعادلة $dP(s)/ds = 0$ أو بالاعتماد على الطريقة البيانية حيث نحسب قيمة التابع $P(s)$ من أجل عدة نقاط واقعة بين $s = 0$ و $s = -4$, كما هو مبين بالجدول (7-3).

**الجدول (7-3)**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(s)$ | 0 | 51.0 | 68.44 | 80.0 | 83.67 | 75 | 0 |
| $s$ | -4.0 | -3.0 | -2.5 | -2.0 | -1.577 | -1.0 | 0 |

من الجدول (7-3) نجد أن القيمة العظمى لـ $P(s)$ تقع عند $s = -1.577$, وبالتالي فهي نقطة الانفصال عن المحور الحقيقي, كما هو مبين بالشكل (7-14).

الخطوة السادسة: حساب زوايا الانطلاق من الأقطاب:

يمكن حساب زاوية الانطلاق من القطب ($p_1$) باستخدام معيار الزوايا على النحو التالي:

$$\theta_1 + 90 + 90 + \theta_3 = 180^\circ + k360^\circ$$

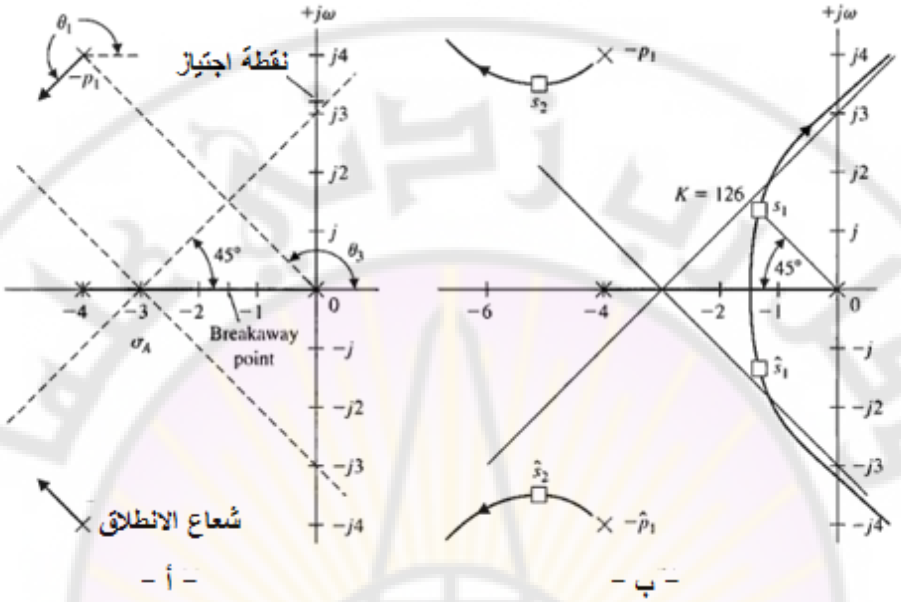
من الشكل (7-14) نجد أن $\theta_3 = 135^\circ$, بالتالي: $\theta_1 = -135^\circ = +225^\circ$.

الخطوة السابعة: لنُجمل المعلومات المستنبطة من الخطوات الستة السابقة, ولنرسم المحل الهندسي للجذور ليبدو على النحو المبين بالشكل (7-14).

لنقوم الآن بتحديد قيمة الربح $K$ لبعض النقاط الواقعة على المحل الهندسي للجذور وذلك بالاعتماد على معيار المطال. لنبدأ بالنقطة $s_1$ الناتجة عن تقاطع المحل الهندسي للجذور والمستقيم الذي يصنع زاوية مقدارها (45) مع المحور التخيلي. إن معامل التخامد $\zeta$ للنقطة $s_1$ يساوي $cos45 = 0.707$. إن حساب قيمة $K$ في النقطة $s_1$, وذلك بالاعتماد على معيار المطال, يتطلب حساب طويلة الأشعة بين $s_1$ وأقطاب الحلقة المفتوحة, أي:

$$K = |s_1||s_1 + 4||s_1 - p_1||s_1 - \hat{p}_1| = (1.9)(2.9)(3.8)(6.0) = 126....(52-7)$$

بنفس الطريقة نحسب قيمة $K$ عند الجذور $s_2$ و $\hat{s}_2$ فنجد أن: $K = 126$.




**الشكل (7-14): المحل الهندسي للجذور للنظام المدروس بالمثال (7-4): أ- الأقطاب والمقاربات ب- المحل الهندسي للجذور.**

لندرس الآن تأثير الجذور العقدية الواقعة على المحل الهندسي للجذور على الاستجابة العابرة للنظام. إن تأثير الجذور العقدية $s_2$ و $\hat{s}_2$ على الاستجابة العابرة سيكون مهملاً بالمقارنة مع الجذور العقدية $s_1$ و $\hat{s}_1$. يمكن التأكد من هذه الملاحظة بدراسة تخامد الاستجابة العابرة والناتجة عن كل زوج من الجذور العقدية.

إن التخامد الناتج عن $s_1$ و $\hat{s}_1$ هو: $e^{-\zeta_1\omega_{n1}t} = e^{-\sigma_1 t}$.

أما التخامد الناتج عن $s_2$ و $\hat{s}_2$ هو: $e^{-\zeta_2\omega_{n2}t} = e^{-\sigma_2 t}$.

يمكن ملاحظة أن $\sigma_2$ أكبر من $\sigma_1$ بخمس مرات تقريباً. في هذه الحالة فإن الجزء من الاستجابة العابرة والمتعلق بـ $s_2$ سيتلاشى بشكل أسرع بكثير من جزء الاستجابة العابرة والمتعلق بـ $s_1$. بالتالي يمكن كتابة الاستجابة الخطوية للنظام على النحو التالي:

$$y(t) = 1 + c_1 e^{-\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t + \theta_1) + c_2 e^{-\sigma_2 t}\sin(\omega_2 t + \theta_2)$$
$$\approx 1 + c_1 e^{-\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t + \theta_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (53-7)$$

إن الجذور العقدية المترافقة الواقعة بشكل أقرب إلى مركز الإحداثيات في المستوي اللابلاسي من باقي الجذور, تكون ذات تأثير كبير على الاستجابة العابرة للنظام, لذلك غالباً ما تسمى هذه الجذور بالجذور المسيطرة.

إن سيطرة البند الثاني في المعادلة (7-53) على الاستجابة العابرة يعتمد أيضاً على قيمة المعاملات $c_1$ و $c_2$, حيث تعتمد قيم هذه المعاملات على موقع الأصفار في المستوي اللابلاسي. إذاً مبدأ الجذور المسيطرة مفيد جداً لتقدير استجابة النظام ولكن يجب استخدامه بحذر حيث يجب فهم الفرضيات التي يقوم عليها هذا المبدأ. ■

**مثال 7-5: الميزان الآلي ذاتي التوازن (Automatic self-balancing scale):**

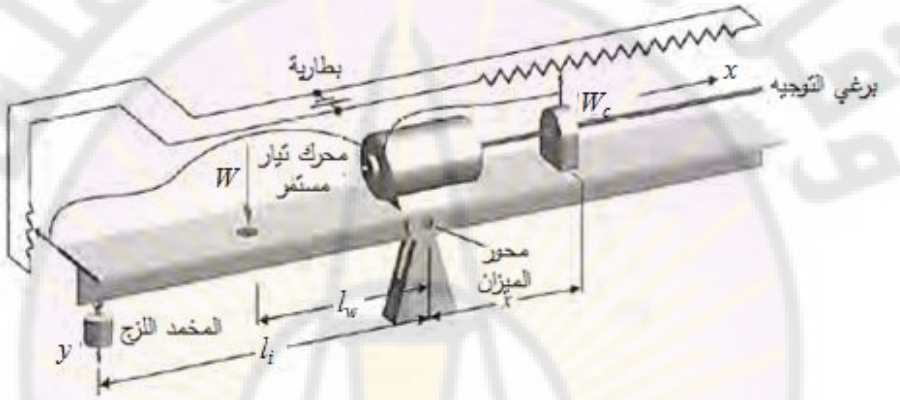
يبين الشكل (7-15) الميزان الآلي ذاتي التوازن, حيث يتم التحكم بعملية الوزن بواسطة حلقة التغذية الخلفية الكهربائية والتي تقيس التوازن الفيزيائي. يبين هذا الشكل الميزان وهو في وضعية التوازن حيث $x$ هو مقدار انزياح الكتلة الموازنة (Counterweight) $W_c$ عن حالة التوازن في حالة اللاحمل. للقيام بوزن الكتلة W, نقوم بوضعها على بعد (5) سم من محور الميزان (pivot), علماً أن طول جسم الميزان بين محور الميزان والمخمد اللزج (Viscous damper) هو $l_i = 20$ سم.

نرغب في هذا المثال القيام بما يلي:

1- اختيار بارامترات ومحددات نظام التغذية الخلفية.
2- الحصول على نموذج للنظام.
3- اختيار الربح $K$ بالاعتماد على المحل الهندسي للجذور.
4- تحديد الاستجابة العابرة للنظام وذلك بالأخذ بالحسبان وجود جذور مسيطرة.

سنختار عطالة جسم الميزان مساوية لـ $I = 0.05\,Kgm^2$. يتوجب علينا اختيار توتر البطارية كبير بشكل كافي بحيث يزودنا حساس الموضع, بدوره, بربح كافي, حيث سنختار $E_b = 24V$. سنستخدم أيضاً مسمار توجيه (Lead screw) ذو نسبة

( $20\ turns/cm$ )، ومجزئ جهد لضبط مسافة $x$ مساوية لـ $20\ cm$ . طالما أن المطلوب الحصول على توازن دقيق سنعير مجزئ الجهد الموجود على مدخل الميزان (دخل النظام) على $y = 0.5\ cm$ . سنختار أيضاً مخمد مناسب ذو معامل تخامد $b = 10\sqrt{3}\ N/(m/s)$. سنختار أيضاً الثقل الموازن $W_c = 2\ N$. يبين الجدول (7-6) القيم المختارة لبارامترات النظام.




**الشكل (7-15): الميزان الآلي ذاتي التوازن**

| **الجدول (7-6): بارامترات الميزان ذاتي التوازن** | | | |
|---|---|---|---|
| **البارامتر** | **القيمة المختارة** | **البارامتر** | **القيمة المختارة** |
| $W_c$ | $2\ N$ | $b$ | $10\sqrt{3}\ N/(m/s)$ |
| $I$ | $0.05\ Kgm^2$ | ربح مسمار التوجيه $K_s$ | $1/(4000\pi)\ m/rad$ |
| $l_i$ | $20\ cm$ | ربح مجزئ جهد الدخل $K_i$ | $4800\ V/m$ |
| $l_\omega$ | $5\ cm$ | ربح مجزئ جهد التغذية الخلفية $K_b$ | $400\ V/m$ |

**المتطلبات الواجب تحقيقها:**

1- استجابة سريعة ودقيقة بحيث تكون قيمة الخطأ في قياس الوزن معدومة, وهذا يتطلب أن يكون النظام من النوع الأول (Type one).

2- الاستجابة الخطوية ذات تخامد ناقص حيث تم تحديد $\zeta = 0.5$.

3- زمن الاستقرار أقل من (2) ثانية.

يبين الجدول (7-5) ملخص المتطلبات الواجب تحقيقها.

| الجدول (7-5): المتطلبات الواجب تحقيقها | |
|---|---|
| **المتطلب** | **القيمة المرغوبة** |
| خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق إشارة دخل خطوية | $K_p = \infty, \quad e_{ss} = 0$ |
| استجابة ذات تخامد ناقص | $\zeta = 0.5$ |
| زمن الاستقرار | أقل من (2) ثانية |

إن عملية استنتاج نموذج لأي نظام كهروميكانيكي, تتم بالاعتماد على معادلات الحركة.
عند حدوث انزياح صغير عن وضعية التوازن, تكون زاوية الانزياح:

$$\theta \approx \frac{y}{l_i} .....(54-7)$$

تُمثل حركة جسم الميزان حول محوره بواسطة معادلة العزوم: $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum torques$.

لنكتب المعادلة السابقة بدلالة زاوية الانزياح:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = l_\omega W - xW_c - l_i^2 b\frac{d\theta}{dt} .....(55-7)$$

لدينا أيضاً توتر دخل المحرك:

$$v_m(t) = K_i y - K_f x .....(56-7)$$

تُوصف أيضاً حركة مسمار التوجيه وتابع تحويل المحرك بالعلاقات:

$$X(s) = K_s\theta_m(s)$$

$$\frac{\theta_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s+1)} .....(57-7)$$

يُمثل $\theta_m(s)$ انزياح محور المحرك, مع إمكانية إهمال $\tau$ وذلك مقارنةً مع ثابت زمن النظام ككل.
يبين الشكل (7-16) المخطط الصندوقي ومخطط تدفق الإشارة للنظام المدروس والمستنتجان من معادلات النظام (7-54), (7-55), (7-56) و (7-57). نلاحظ في هذا

الشكل وجود عنصر تكاملي في المسار الأمامي للنظام وذلك قبل Y(s), وبالتالي فالنظام من الصنف الأول والذي يملك خطأ حالة مستقرة معدوم.

يمكن الحصول على تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام باستخدام علاقة ماسون حيث يُعطى تابع التحويل بالعلاقة:

$$\frac{X(s)}{W(s)}=\frac{l_\omega l_i K_i K_m K_s/(Is^3)}{1+l_i^2 b/(Is)+(K_m K_s K_f/s)+l_i K_i K_m K_s W_c/(Is^3)}$$

$$=\frac{}{.....+l_i^2 b K_m K_s K_f/(Is^2)}.....(58-7)$$

حيث البسط في تابع التحويل (58-7) هو معامل المسار من $W$ إلى $X$, والبند الثاني في المقام هو معامل الحلقة $L_1$, والبند الثالث هو معامل الحلقة $L_2$, والبند الرابع هو معامل الحلقة $L_3$, أما البند الخامس فهو معامل الحلقات الغير متماسة $(L_1L_2)$.

يمكن تبسيط تابع تحويل الحلقة المغلقة ليصبح:

$$\frac{X(s)}{W(s)}=\frac{l_\omega l_i K_i K_m K_s}{s(Is+l_i^2 b)(s+K_m K_s K_f)+W_c K_m K_s K_i l_i}.....(59-7)$$

يُحسب ربح الحالة المستقرة للنظام على النحو التالي:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{|w|}=\lim_{s\to 0} s\frac{X(s)}{W(s)}=\frac{l_\omega}{W_c}=2.5\ cm/Kg....(60-7)$$

حيث: $W(s)=|w|/s$ .

لنرسم الآن المحل الهندسي للجذور كتابع لثابت المحرك $(K_m)$, حيث سنقوم بتعويض قيم البارامترات في المعادلة المميزة والتي هي مقام المعادلة (59-7), فنحصل على المعادلة المميزة التالية:

$$s(s+8\sqrt{3})\left(s+\frac{K_m}{10\pi}\right)+\frac{96K_m}{10\pi}=0.....(61-7)$$

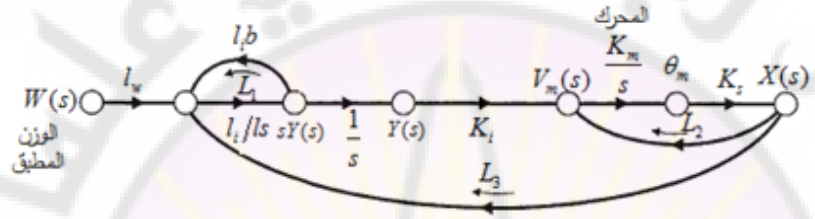
لنعيد صياغة المعادلة المميزة بحيث نقوم أولاً بعزل $K_m$ على النحو التالي:

$$s^2(s+8\sqrt{3})+s(s+8\sqrt{3})\left(\frac{K_m}{10\pi}\right)+\frac{96K_m}{10\pi}=0.....(62-7)$$

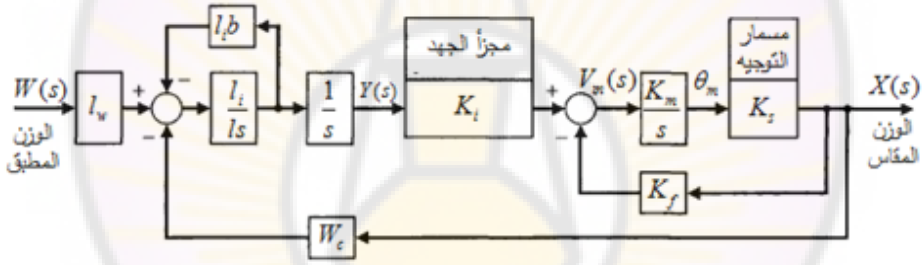
لنقوم بكتابة المعادلة المميزة وفق الصيغة العامة للمعادلة المميزة:

$$1+KP(s)=1+\frac{K_m/(10\pi)\left[s\left(s+8\sqrt{3}\right)+96\right]}{s^2\left(s+8\sqrt{3}\right)}=0$$

$$=\frac{K_m/(10\pi)(s+6.93+j6.93)(s+6.93-j6.93)}{s^2\left(s+8\sqrt{3}\right)}.....(63-7)$$




- أ -




- ب -

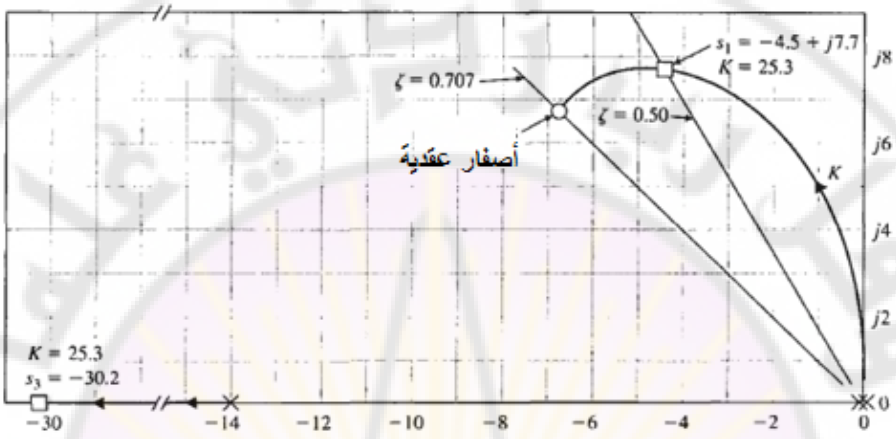
**الشكل (7-16): نموذج نظام الميزان الآلي ذاتي التوازن.**

يبين الشكل (7-17) المحل الهندسي للجذور وذلك عند تغير $K_m$. عند رسم المحل الهندسي افترضنا تغير البارامتر $K=(K_m/10\pi)$ من الصفر إلى اللانهاية. يمكن توضيع الجذور المسيطرة عند $\zeta=0.5$ وذلك عندما $K=K_m/10\pi=25.3$ , وبالتالي:

$$K_m=25.3*10\pi=795\frac{rad/s}{volt}=7600\frac{rpm}{volt}.....(64-7)$$

إذاً سنحتا ج إلى مكبر عمليات (Amplifier) لتزويدنا بالربح المطلوب. إن الجزء الحقيقي للجذور المسيطرة أقل من (-4), وباتالي فزمن الاستقرار يساوي $(4/\sigma)$ أقل من (1) ثانية وبالتالي فالشرط المتعلق بزمن الاستقرار محقق. إن الجزء الحقيقي للجذر الثالث للمعادلة المميزة يساوي ($s$ = -30.2), وهذا يؤكد حقيقة أن الجذور عند $\zeta=0.5$ هي الجذور

المسيطرة. في هذا المثال تم تحليل النظام باستخدام المحل الهندسي لجذور, كما تم اختيار القيمة المناسبة لـ $K_m$, بالتالي يمكن ملاحظة فعالية المحل الهندسي للجذور. ■




**الشكل (7-17): المحل الهندسي للجذور عند تغير قيمة $K_m$. يغادر المحل الهندسي للجذور القطب المضاعف في مركز الإحداثيات ويتجه نحو صفرّي النظام العقديين, وذلك مع زيادة $K$. يقع الجزء الآخر من المحل الهندسي للجذور إلى يسار القطب الواقع عند $s$ = -14.**

**4-7 اختيار قيم بارامترات النظام باستخدام طريقة المحل الهندسي للجذور:**

بشكل عام تُستخدم طريقة المحل الهندسي للجذور لتحديد تغير قيم جذور المعادلة المميزة وذلك عندما يتغير ربح النظام $K$ من الصفر إلى اللانهاية. في هذه الحالة نقوم بكتابة المعادلة المميزة على الشكل:

$$1+F(s)=0.....(65-7)$$

نقوم, فيما بعد, بتطبيق خطوات رسم المحل الهندسي للجذور. إن السؤال الذي يتبادر للأذهان في هذه اللحظة كيف يمكننا دراسة تأثير البارامترين $\alpha$ و $\beta$؟.

من الظاهر عند دراسة المحل الهندسي للجذور أنها طريقة تدرس تأثير تغير بارامتر واحد, ولكن لحسن الحظ يمكن توسيع الطريقة لدراسة تأثير بارامترين أو أكثر. في هذه الحالة تسمى هذه الطريقة **بطريقة اختيار قيم بارامترات النظام باستخدام طريقة المحل الهندسي للجذور**.

ليكن لدينا المعادلة المميزة التالية للنظام المدروس:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ..... + a_1 s + a_0 = 0.....(66-7)$$

يمكن دراسة تأثير المعامل $a_1$ من معادلة المحل الهندسي للجذور:

$$1 + \frac{a_1 s}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ..... + a_2 s^2 + a_0} = 0.....(67-7)$$

لنأخذ الحالة المدروسة في الفقرات السابقة وهي تبعية النظام لبارامتر واحد $\alpha$. إذا كان البارامتر $(\alpha)$ المراد دراسة تأثيره لا يظهر بشكل منفصل على شكل معامل, فمن الممكن عزله على النحو التالي:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ..... + (a_{n-q} - \alpha) s^{n-q} + \alpha s^{n-q} ..... + a_1 s + a_0 = 0.....(68-7)$$

لنأخذ على سبيل المثال المعادلة التالية:

$$s^3 + (3+\alpha) s^2 + 3s + 6 = 0.....(69-7)$$

لدراسة تأثير البارامتر $\alpha$, سنقوم بعزل هذا البارمتر ونعيد كتابة المعادلة وفق الشكل العام للمحل الهندسي للجذور وذلك على النحو المبين بالمعادلات التالية:

$$s^3 + 3s^2 + \alpha s^2 + 3s + 6 = 0.....(70-7)$$

$$1 + \frac{\alpha s^2}{s^3 + 3s^2 + +3s + 6} = 0.....(71-7)$$

ومن ثم تتم دراسة تأثير $\alpha$ وذلك على النحو الذي درسناه في الفقرات السابقة عن طريق رسم المحل الهندسي للجذور.

لننتقل الآن لدراسة الحالة, موضوع الفقرة, وهي دراسة تأثير بارامترين على النظام المدروس. في هذه الحالة يتوجب علينا دراسة المحل الهندسي للجذور مرتين, مرة من أجل كل بارامتر. إذا كانت المعادلة المميزة للنظام تتبع البارامترين $\alpha$ و $\beta$, وتُعطى بالعلاقة التالية:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + (a_{n-q} - \alpha) s^{n-q} + \alpha s^{n-q} + .....$$
$$(a_{n-r} - \beta) s^{n-r} + \beta s^{n-r} + ..... + a_1 s + a_0 = 0.....(72-7)$$

كما نلاحظ تم عزل البارامترين $\alpha$ و $\beta$ في المعادلة (7-72), وبالتالي يمكننا الآن ستحديد تأثير البارامتر $\alpha$, ومن ثم تحديد تأثير البارامتر $\beta$. لنأخذ على سبيل المثال المعادلة المميزة من الدرجة الثالثة التالية, والتي تتبع البارمترين $\alpha$ و $\beta$:

$$s^3 + s^2 + \beta s + \alpha = 0 \ldots\ldots (73-7)$$

في هذا المثال تظهر البارامترات ضمن معاملات المعادلة المميزة. يُحدد تأثير تغير قيمة $\beta$ من الصفر إلى اللانهاية من معادلة المحل الهندسي للجذور التالية:

$$1 + \frac{\beta s}{s^3 + s^2 + \alpha} = 0 \ldots\ldots (74-7)$$

من الملاحظ أن مقام المعادلة (7-74) هي المعادلة المميزة حيث $\beta = 0$. لنقوم الآن بتحديد تأثير تغير $\alpha$ من الصفر إلى اللانهاية بواسطة المعادلة التالية:

$$s^3 + s^2 + \alpha = 0$$

يمكن صياغة هذه المعادلة على النحو التالي:

$$1 + \frac{\alpha}{s^2(s+1)} = 0 \ldots\ldots (75-7)$$

باستخدام المعادلة (7-75) نقوم بدراسة تأثير تغير $\alpha$, ومن ثم نقوم باختيار قيمة محددة لـ $\alpha$ ونعوضها في المعادلة (7-74) وذلك لدراسة تأثير $\beta$. يبين الشكل (7-18 - أ) المحل الهندسي للجذور المميزة المعطاة بالعلاقة (7-75) حيث $\beta = 0$ وقيمة $\alpha$ تتغير من الصفر إلى اللانهاية, أما الشكل (7-18 - ب) فيمثل المحل الهندسي للجذور للمعادلة المميزة (7-74) وذلك من أجل قيمة محددة لـ $\alpha$ تساوي لـ $\alpha = \alpha_1$, وعندما تتغير قيمة $\beta$ من الصفر إلى اللانهاية.

سنقوم بشرح عملية اختيار قيم البارمترات باستخدام المحل الهندسي للجذور, من خلال المثال التصميمي التالي.

**مثال 7-6: التحكم برأس آلة اللحام (Welding head Control):**

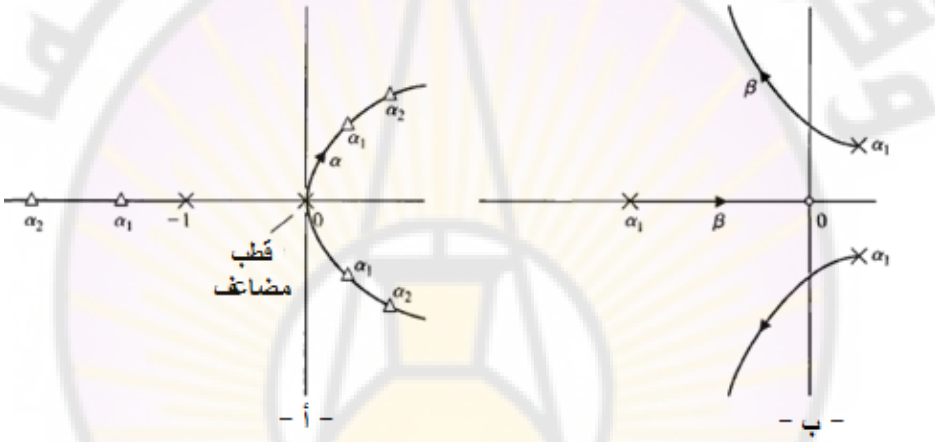
يتطلب رأس آلة اللحام نظام تحكمي دقيق وذلك لتوضيع رأس اللحام في المكان المناسب. إن النظام التحكمي المراد تصميمه يجب أن يحقق المتطلبات التالية:

1- خطأ الحالة المستقرة, الناتج عن تطبيق إشارة صاعدة, أصغر أو يساوي ($\leq 35\%$) من ميل الإشارة الصاعدة المطبقة على الدخل.

2- معامل تخامد الجذور المسيطرة على الاستجابة العابرة أكبر أو يساوي ($\geq 0.707$).

3- زمن الاستقرار أقل أو يساوي ($\leq 3$) ثانية.

يبين الشكل (7-19) بنية نظام التحكم المغلق ذو التغذية الخلفية, حيث يتوجب علينا اختيار ربح مكبر العمليات $K_1$, وربح التغذية الخلفية التفاضلي $K_2$.




**الشكل (7-18): المحلات الهندسية كتوابع للبارامترات $\alpha$ و $\beta$: أ- المحل الهندسي عندما $\beta = 0$ و $0 \leq \alpha \leq \infty$. ب- المحل الهندسي عندما $\alpha = \alpha_1$ و $0 \leq \beta \leq \infty$.**

يمكن كتابة المتطلب التصميمي المتعلق بخطأ الحالة المستقرة على النحو التالي:

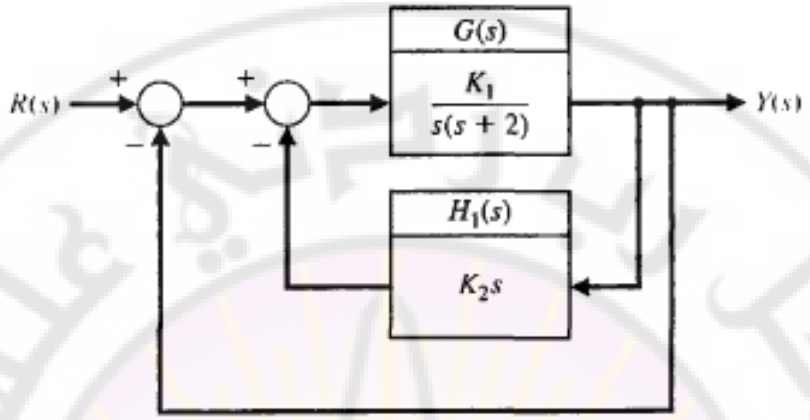
$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(|R|/s^2)}{1+G_2(s)} .....(76-7)$$

حيث: $G_2(s) = G(s)/[1+G(s)H_1(s)]$.

إن المتطلب التصميمي المتعلق بخطأ الحالة المستقرة يقتضي:

$$\frac{e_{ss}}{|R|} = \frac{2+K_1K_2}{K_1} \leq 0.35.....(77-7)$$

من هذه العلاقة يمكن أن نلاحظ أنه يتوجب علينا اختيار قيمة صغيرة لـ $K_2$ وذلك حتى تكون قيمة خطأ الحالة المستقرة صغيرة.




**الشكل (7-19): المخطط الصندوقي لنظام التحكم برأس اللحام.**

إن المتطلب التصميمي المتعلق بمعامل التخامد يقتضي أن تقع جذور النظام المغلق تحت الخط الذي يصنع زاوية $45^\circ$ مع المحور الحقيقي وفي الجزء السالب من المستوي اللابلاسي. يمكن أيضاً صياغة المتطلب المتعلق بزمن الاستقرار بدلالة الجزء الحقيقي للجذور المسيطرة على النحو التالي:

$$T_s = \frac{4}{\sigma} \le 3\,\text{sec} \ldots\ldots (78-7)$$

بالتالي يجب أن تكون قيمة الجزء الحقيقي للجذور المسيطرة $\sigma \ge 4/3$, حيث تمت الإشارة إلى هذه المنطقة في الشكل (7-20), وذلك بالإضافة إلى المتطلب المتعلق بمعامل التخامد. من الملاحظ أن الشرط $\sigma \ge 4/3$ يقتضي أننا نريد أن تقع الجذور المسيطرة إلى يسار الخط المستقيم المحدد بـ $\sigma = -4/3$.

لتحقيق جميع المتطلبات التصميمية يجب أن تقع جميع الجذور داخل المنطقة المظللة المبينة بالشكل (7-20).

إن البارامترات الواجب علينا تحديد قيمها هي $\alpha = K_1$ , $\beta = K_1K_2$. إن المعادلة المميزة للنظام:

$$1 + GH(s) = s^2 + 2s + \beta s + \alpha = 0 \ldots\ldots (79-7)$$

**الشكل (7-20): المنطقة من المستوي اللابلاسي التي تحقق المتطلبات التصميمية**

يمكن أن يُحدد المحل الهندسي للجذور وذلك عندما تتغير قيمة البارامتر $\alpha = K_1$ من الصفر إلى اللانهاية (نضع $\beta = 0$) من المعادلة التالية:

$$1 + \frac{\alpha}{s(s+2)} = 0 \ldots\ldots (80-7)$$

يبين الشكل (7-21) المحل الهندسي للجذور لهذه المعادلة المميزة. في هذا الشكل تمت الإشارة إلى الجذور المقابلة للربح $\alpha = K_1 = 20$.

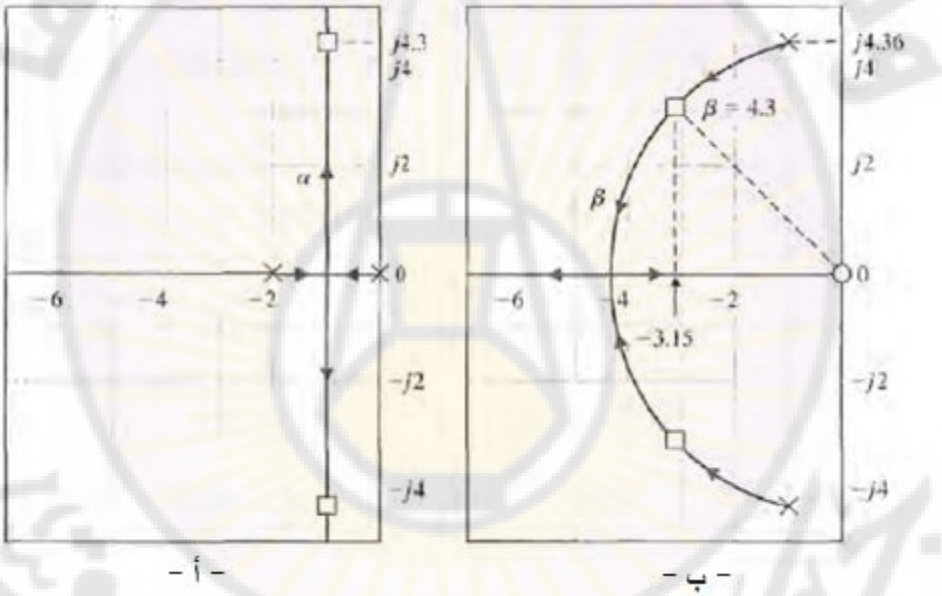
لندرس الآن تأثير تغير البارامتر $\beta = 20K_2$, وذلك بواسطة المحل الهندسي للجذور, وعبر المعادلة التالية:

$$1 + \frac{\beta}{s^2 + 2s + \alpha} = 0 \ldots\ldots (81-7)$$

حيث أن أقطاب هذه المعادلة هي الجذور التي تمت الإشارة إليها على المحل الهندسي للجذور, والمبين بالشكل (7-21), والمقابلة لـ $\alpha = K_1 = 20$.

إن المحل الهندسي للجذور للمعادلة (7-81) مبين بالشكل (7-21). من هذا الشكل نجد أن الجذور ذات معامل التخامد $\zeta = 0.707$ تقابل $\beta = 4.3 = 20K_2$ , وهذا يقابل $K_2 = 0.215$. إن الجزء الحقيقي لهذه الجذور هو: $\sigma = -3.15$ , وهذا يقابل زمن استقرار يساوي (1.27) ثانية, وبالتالي الشرط المتعلق بزمن الاستقرار محقق (أقل من 3 ثانية). لاحظ أيضاً أن الشرط المتعلق بخطأ الحالة المستقرة محقق أيضاً:

$$\frac{e_{ss}}{|R|} = \frac{2 + 20(0.215)}{20} = 0.315 = 31.5\% < 35\%$$




**الشكل (7-21): المحلات الهندسية للجذور: أ- كتابع لـ $\alpha$ ب- كتابع لـ $\beta$.**

**7-5 المتحكم التناسبي- التكاملي- التفاضلي:**

إن أحد أكثر المتحكمات شيوعاً في التحكم الصناعي هي المتحكمات التناسبية – التكاملية – التفاضلية أو المتحكمات PID, حيث يُعطى تابع تحويلها بالعلاقة:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D.s \quad .....(82-7)$$

يحوي المتحكم PID على ثلاثة بنود وهي التناسبية, التكاملية, والتفاضلية, وبالتالي فإن سبب تسمية هذا المتحكم بـ PID يرجع إلى وجود هذه البنود في تابع تحويله. تُعطى معادلة خرج المتحكم PID, في المستوي الزمني, بالعلاقة:

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t).dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad .....(83-7)$$

إذا كان $K_D = 0$ , نحصل على المتحكم التناسبي التكاملي,الموصوف بتابع التحويل:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \quad .....(84-7)$$

عندما $K_I = 0$ , نحصل على المتحكم التناسبي التفاضلي, المعطى بتابع التحويل التالي:

$$G_c(s) = K_p + K_D.s \quad .....(85-7)$$

يتم التحكم في العديد من العمليات الصناعية بواسطة المتحكمات التناسبية – التكاملية – التفاضلية أو المتحكمات (PID), حيث أن شعبية هذه المتحكمات يعود إلى بساطتها وأدائها الجيد. إن استخدام هذه المتحكمات بهدف التحكم بأحد العمليات الصناعية يتطلب تحديد الربح التناسبي, والربح التفاضلي والربح التكاملي.

يمكن اعتبار المتحكم PID على أنه ناتج عن الربط التسلسلي لمتحكم تناسبي تكاملي (PI controller), مع متحكم تناسبي تفاضلي (PD controller). للبرهان على هذه النقطة, لنفرض أن تابع تحويل المتحكم التناسبي التكاملي معطى بالعلاقة التالية:

$$G_{PI}(s) = \hat{K}_p + \frac{\hat{K}_I}{s}$$

أما تابع تحويل المتحكم التناسبي التفاضلي, فيعطى بالعلاقة:

$$G_{PD}(s) = \overline{K}_p + \overline{K}_D.s$$

عند ربط هذان المتحكمان على التسلسل, يصبح تابع تحويل المتحكم الكلي:

$$G_c(s) = G_{PI}(s).G_{PD}(s)$$
$$= \left(\hat{K}_p + \frac{\hat{K}_I}{s}\right)\left(\overline{K}_p + \overline{K}_D.s\right)$$
$$= \left(\overline{K}_p.\hat{K}_p + \hat{K}_I.\overline{K}_D\right) + \hat{K}_p.\overline{K}_D.s + \frac{\hat{K}_I.\overline{K}_D}{s}$$
$$= K_p + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

أن العلاقة بين ربح المتحكمات PI و PD, وربح المتحكم PID, تصاغ على النحو التالي:

$$K_p = \left(\overline{K}_p.\hat{K}_p + \hat{K}_I.\overline{K}_D\right)$$
$$K_D = \hat{K}_p.\overline{K}_D$$
$$K_I = \hat{K}_I.\overline{K}_D$$

يمكن أن يُصاغ أيضاً تابع تحويل المتحكم PID على النحو التالي:

$$G_c(s) = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s} = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s}$$
$$= \frac{K_D\left(s^2 + as + b\right)}{s} = \frac{K_D(s+z_1)(s+z_2)}{s} \quad .....(7-86)$$

حيث: $a = K_p/K_D$ , $b = K_I/K_D$ .

بالتالي, يُدخل المتحكم PID على النظام قطب عند مركز الإحداثيات, وصفرين يمكن أن يتم توضيعهما في أي مكان نرغب به في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي.

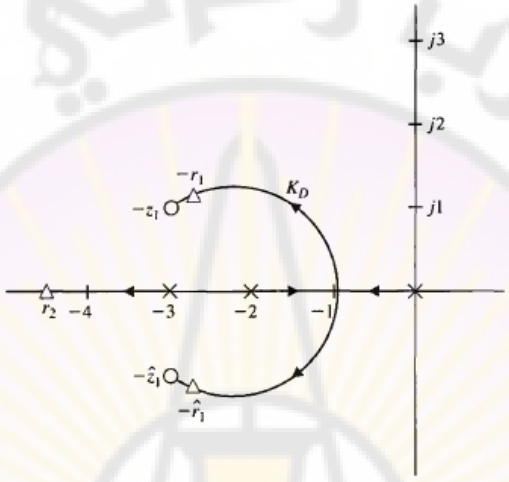
ليكن لدينا النظام المبين بالشكل (7-27), حيث:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

أما المتحكم PID المُستخدم فقد تم تعييره بحيث تتوضع أصفاره عند: $-z_1 = -3 + j1$ , و $-z_2 = -\hat{z}_1$ .

**الشكل (7-22): نظام تحكم ذو حلقة مغلقة وتغذية خلفية واحدية**

يبين الشكل (7-23) المحل الهندسي للجذور للنظام المدروس. تذكر أن المحل الهندسي للجذور يبدأ من أقطاب تابع التحويل وينتهي عند أصفاره. من الملاحظ من هذا المحل الهندسي أنه عند زيادة الربح $K_D$ فإن الجذور العقدية تقترب من أصفار النظام.




**الشكل (7-23): المحل الهندسي لجذور النظام المبين بالشكل (7-22)**

يُعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام المبين بالشكل (7-22) بالعلاقة:

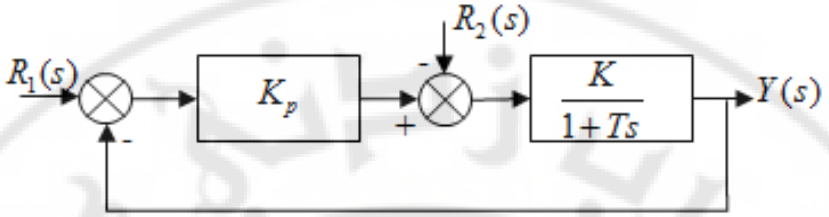
$$T(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

عند دراسة الاستجابة الخطوية لهذا النظام نجد أن:

- التجاوز النسبي للنظام أقل من 2%,
- خطأ الحالة المستقرة معدوم تقريباً,
- زمن الاستقرار أقل من 1 ثانية.

إذا كان المطلوب زمن استقرار أقل من 1 ثانية فيتوجب علينا توضيع الأصفار $z_1$ و $z_2$ بشكل أبعد إلى اليسار في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, واختيار قيمة $K_D$ بحيث تتحرك جذور النظام باتجاه أصفاره. يلخص الجدول (7-6) تأثير ثوابت ربح المتحكم PID ($K_p, K_I, K_D$) على الاستجابة الخطوية.

**مثال 7-7: التحكم بنظام من الدرجة الأولى باستخدام متحكم تناسبي:**




**الشكل (7-24): التحكم بنظام من الدرجة الأولى باستخدام متحكم تناسبي**

بتطبيق مبدأ التراكم على النظام المبين بالشكل (7-24) نجد أن إشارة خرج النظام:

$$Y(s)=\frac{(K.K_p/1+K.K_p)R_1(s)-(K/1+K.K_p)R_2(s)}{1+\frac{T}{1+K.K_p}s} \quad .....(7-87)$$

لنوجد استجابة النظام في الحالتين التاليتين:

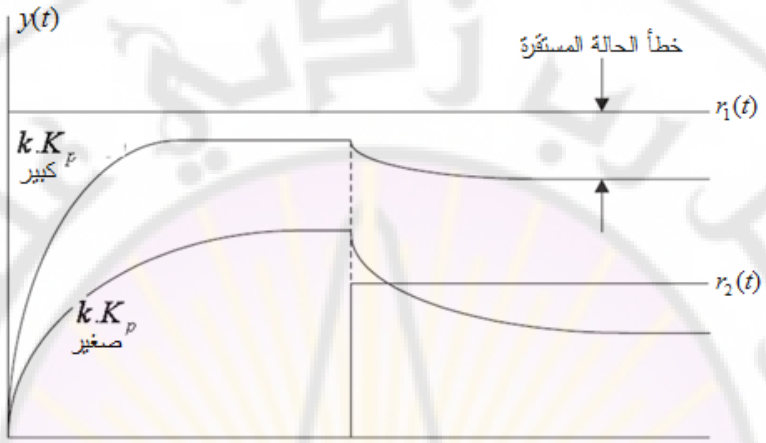
- عندما: $R_1(s)=1/s$ و $R_2(s)=0$ , نجد أن القيمة النهائية لاستجابة النظام الخطوية (القيمة في الحالة المستقرة): $y(t)=\frac{K.K_p}{1+K.K_p}$ .
- عندما: $R_1(s)=0$ و $R_2(s)=1/s$ , نجد أن القيمة النهائية لاستجابة النظام الخطوية (القيمة في الحالة المستقرة): $y(t)=\frac{K}{1+K.K_p}$ .

للحصول على خطأ حالة مستقرة معدوم, يجب أن تحقق القيم النهائية للاستجابة الخطوية الشرط التالي: $\frac{K}{1+K.K_p}=0$ , $\frac{K.K_p}{1+K.K_p}=1$ .

إن هذا الشرط يمكن أن يتحقق, وذلك إذا كان قيمة المقدار $(K.K_p)$ لانهائية. عملياً لا يمكن أن نحصل على قيمة لانهائية لهذا المقدار, لذلك فإن المتحكم التناسبي يؤدي دائماً إلى خطأ حالة مستقرة غير معدوم رغم إسناد قيمة كبيرة جداً للمقدار $(K.K_p)$.

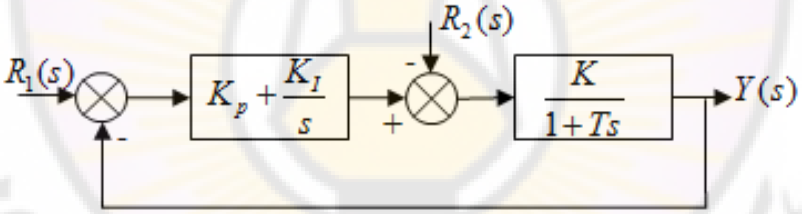
بالعودة للمعادلة (7-87), نجد أن ثابت زمن الحلقة المغلقة $T_c=T/1+K.K_p$ . إن إسناد قيمة كبيرة للمقدار $(K.K_p)$ يؤدي إلى انخفاض قيمة ثابت زمن الحلقة المغلقة,

وهذا يحسن من الاستجابة العابرة للنظام. يبين الشكل (7-25) الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الأولى مقاد بواسطة متحكم تناسبي.




**الشكل (7-25): التحكم بنظام من الدرجة الأولى باستخدام متحكم تناسبي**

**مثال 7-8: التحكم بنظام من الدرجة الأولى باستخدام متحكم تناسبي تكاملي:**




**الشكل (7-26): التحكم بنظام من الدرجة الأولى باستخدام متحكم تناسبي – تكاملي.**

لنوجد علاقة إشارة خرج النظام وذلك عندما $R_2(s) = 0$:

$$Y(s) = \frac{\left(1 + K_p / K_I . s\right)}{\left(\frac{T}{K.K_I}\right)s^2 + \frac{K_p}{K_I}\left(1 + \frac{1}{K.K_p}\right)s + 1} R_1(s) \quad .....(88-7)$$

لنوجد علاقة إشارة خرج النظام وذلك عندما $R_1(s) = 0$:

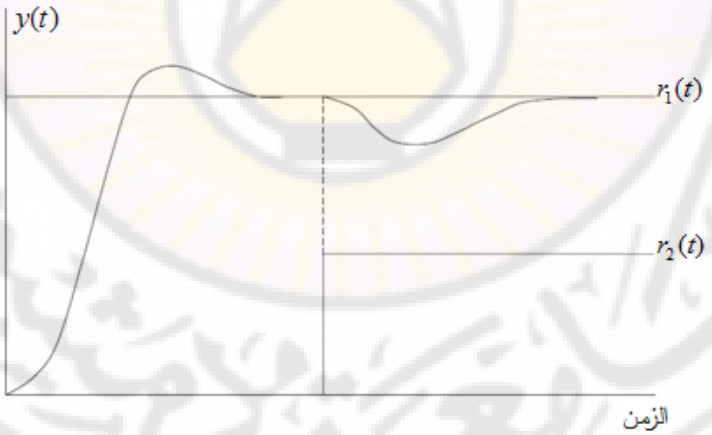
$$Y(s) = \frac{-\left(1/K_I\right)s}{\left(\frac{T}{K.K_I}\right)s^2 + \frac{K_p}{K_I}\left(1 + \frac{1}{K.K_p}\right)s + 1} R_2(s) \quad .....(89-7)$$

عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية على المدخل $R_1(s) = 1/s$, نجد: $y(t) = 1$, أما عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية على المدخل $R_2(s) = 1/s$, نجد: $y(t) = 0$. إذاً مما سبق نجد أن تطبيق إشارات خطوية على المداخل $r_1(t)$, و $r_2(t)$, فلن يكون هناك أخطاء في الحالة المستقرة. يبين الشكل (7-27) الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الأولى مقاد بواسطة متحكم تناسبي– تكاملي.

**تعيير المتحكم التناسبي – التكاملي – التفاضلي (أو المتحكم PID):**

يتطلب استثمار المتحكم PID في نظم التحكم تحديد قيم الربح التناسبي $K_p$, والتكاملي $K_I$, والتفاضلي $K_D$. تدعى عملية تحديد قيم هذه البارامترات بتعيير المتحكم PID.

إن الطريقة شائعة الاستخدام لتعيير المتحكم PID هي **الطريقة اليدوية** حيث يتم الحصول على قيم البارامترات عن طريق التجريب, مع الاعتماد بأقل ما يمكن على تحليل الاستجابات الزمنية للنظام, التي تتم إما بواسطة بيئة محاكاة مثل الماتلاب أو بالتجريب العملي على النظام, ومن ثم تقرير قيم البارامترات وذلك بالاعتماد على الملاحظة والخبرة.




**الشكل (7-27): التحكم بنظام من الدرجة الأولى باستخدام متحكم تناسبي– تكاملي**

يوجد طرق أخرى لتعيير المتحكم PID هي الطرق التجريبية والمسماة بطرق نيكولس–زيكلر لتعيير المتحكم PID (أو Ziegler-Nichols PID controller tuning). سنناقش في هذه الفقرة الطريقتين التالتيين من طرق نيكولس–زيكلر التجريبية:

- طريقة نيكولس–زيكلر المعتمدة على الاستجابة الخطوية للنظام المفتوح.
- طريقة نيكولس–زيكلر المعتمدة على الاستجابة الخطوية للنظام المغلق.

لنقوم, أولاً, بشرح الطريقة اليدوية لتعيير المتحكم PID. تقوم هذه الطريقة على الإجراء التجريبي التالي: نضع, بداية, $K_I = 0$ و $K_D = 0$, ومن ثم نقوم بزيادة البارامتر $K_p$ حتى تهتز إشارة خرج النظام ويصل النظام إلى حافة الاستقرار. حالما نحصل على قيمة $K_p$ والتي وصل عندها النظام إلى حافة الاستقرار, ننقص قيمة $K_p$ حتى نحصل على ما يسمى بالتخامد الربعي للمطال (Quarter amplitude decay), حيث يتناقص مطال إشارة الخرج إلى ربع القيمة العظمى للمطال خلال دور اهتزاز واحد. إن الطريقة المتبعة للحصول على التخامد الربعي للمطال تقوم على إنقاص قيمة $K_p$ إلى النصف. تقوم الخطوة التصميمية الثانية على زيادة قيم البارامترات $K_I$ و $K_D$ يدوياً للحصول على الاستجابة الخطوية المطلوبة. يصف الجدول (7-7), بشكل عام, تأثير زيادة البارامترات $K_I$ و $K_D$ على الاستجابة الخطوية.

**الجدول (7-7): تأثير ثوابت ربح المتحكم PID ($K_p$, $K_I$, $K_D$) على الاستجابة الخطوية**

| ثوابت المتحكم PID | التجاوز النسبي | زمن الاستقرار | خطأ الحالة المستقرة |
|---|---|---|---|
| زيادة $K_p$ | زيادة | تأثير طفيف | نقصان |
| زيادة $K_I$ | زيادة | زيادة | معدوم |
| زيادة $K_D$ | نقصان | نقصان | لا يوجد تأثير |

**مثال 7-9: التعيير اليدوي للمتحكم PID (Manual PID controller tuning):**

لندرس النظام المبين بالشكل (7-28), حيث:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+b)(s+2\zeta\omega_n)}, \quad b = 10, \quad \zeta = 0.707, \quad \omega_n = 4$$

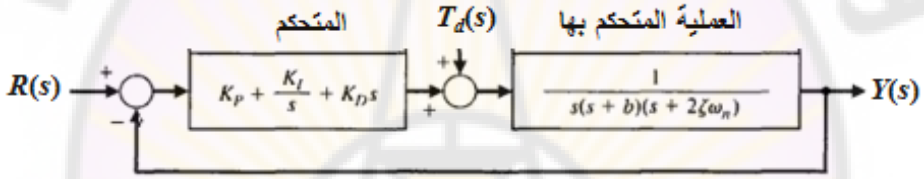
لنقوم بتعيير المتحكم PID بحيث نحصل على المتطلبات التصميمية التالية: زمن استقرار أقل من (3) ثانية وتجاوز نسبي أقل من (20%). نبدأ عملية التعيير اليدوي بوضع قيمة معدومة للبارامترات $K_I$ و $K_D$, ونزيد قيمة البارامتر $K_p$ حتى تهتز إشارة خرج النظام بشكل

دائم. يبين الشكل (7-34) أنه عند $K_p = 885.5$ حصلنا على إشارة خرج مهتزة بشكل دائم وبمطال A = 1.9 وبدور P = 0.83 ثانية.

يبين الشكل (7-29) أيضاً المحل الهندسي للجذور المقابل للمعادلة المميزة:

$$1 + K_p\left[\frac{1}{s(s+10)(s+5.66)}\right] = 0$$

يبين المحل الهندسي للجذور أنه عند $K_p = 885.5$, وقعت أقطاب الحلقة المغلقة على المحور التخيلي عند النقاط $s = \pm 7.5j$, مؤدية إلى ظهور الاستجابة الخطوية المهتزة للنظام والمبينة بالشكل (7-29 – أ).



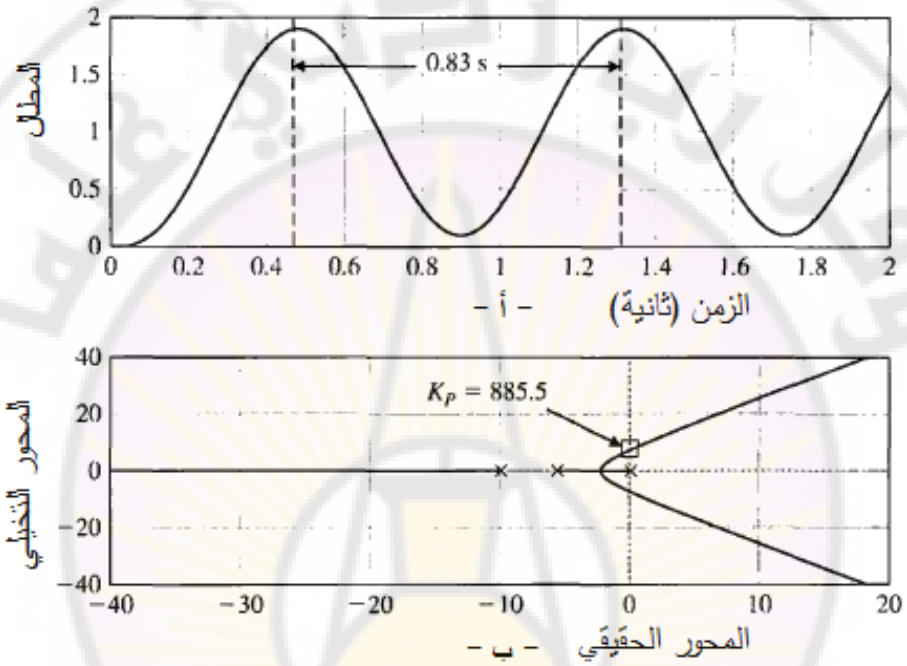

**الشكل (7-28): نظام تحكمي ذو تغذية خلفية واحدية, يعتمد على متحكم PID.**

كخطوة أولى, لننقص قيمة $K_p$ إلى النصف (أي: $K_p = 885.5/2 = 442.75$), وذلك للحصول على التخامد الربعي للمطال. يبين الشكل (7-35) الاستجابة الخطوية للنظام من أجل $K_p = 442.75$, حيث نلاحظ أن مطال القمة قد نقص إلى ربع مطال القمة عند $K_p = 885.5$, كما هو مطلوب. لنستمر بإنقاص قيمة $K_p$ وذلك بشكل ناعم, حيث ننقص القيمة من $K_p = 442.75$ إلى $K_p = 370$. يبين الشكل (7-31) المحل الهندسي للجذور وذلك من أجل $K_p = 370$, $K_I = 0$, و $0 \le K_D < \infty$. في هذه الحالة تكون المعادلة المميزة للنظام:

$$1 + K_D\left[\frac{1}{(s+10)(s+5.66)+K_p}\right] = 0$$

كما هو مبين بالشكل (7-31), نجد أن زيادة $K_D$ يؤدي إلى تحريك الأقطاب العقدية للنظام المغلق باتجاه اليسار, وهذا يؤدي بدوره إلى زيادة معامل التخامد وبالتالي إلى نقصان قيمة التجاوز النسبي. إن حركة الأقطاب إلى اليسار تزيد أيضاً المقدار ($\zeta\omega_n$),

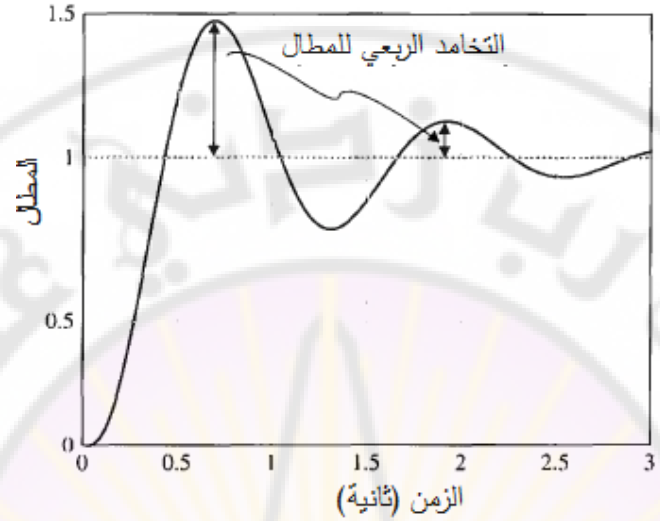
وهذا يؤدي بدوره إلى نقصان زمن الاستقرار. إن هذا التأثير لزيادة $K_D$ تتوافق مع المعلومات الواردة في الجدول (7-7).



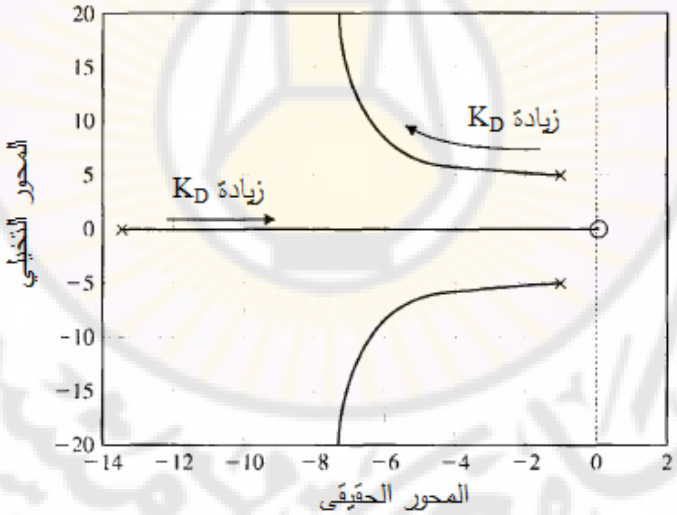

**الشكل (7-29): أ – الاستجابة الخطوية من أجل $K_p = 885.5$ , $K_I = 0$ , $K_D = 0$.**

**ب – المحل الهندسي للجذور حيث نجد أن $K_p = 885.5$ قد أدت للوصول إلى حافة الاستقرار, مع توضع الأقطاب عند $s = \pm 7.5j$.**

عند زيادة $K_D$ بشكل كبير (عندما $K_D > 75$), تبدأ الأقطاب الحقيقية بالسيطرة على الاستجابة الزمنية للنظام, وتصبح المعلومات الوارد بالجدول (7-7) غير دقيقة. يبين الشكل (7-32) التجاوز النسبي وزمن الاستقرار كتابع لـ $K_D$.




**الشكل (7-30): الاستجابة الخطوية للنظام من أجل $K_p = 370$, حيث نلاحظ التخامد الربعي للمطال.**



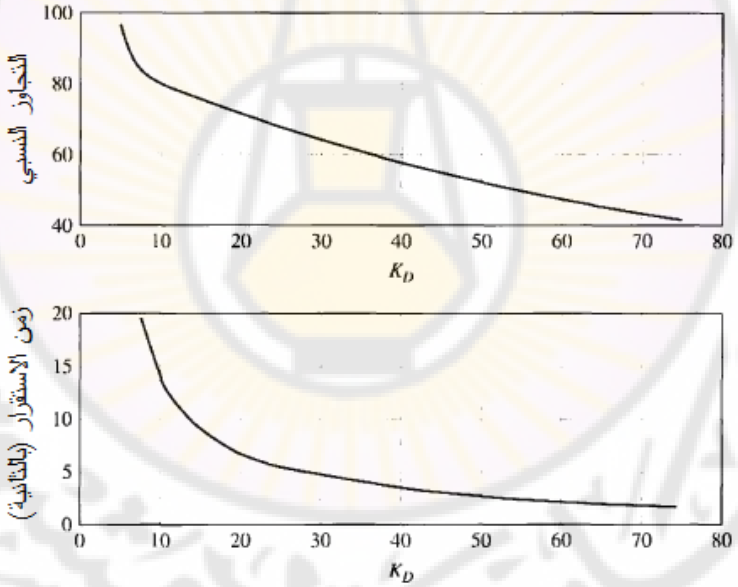

**الشكل (7-31): المحل الهندسي للجذور من أجل $K_p = 370$, $K_I = 0$, و**

$$0 \le K_D < \infty$$

إن المحل الهندسي للجذور من أجل $K_p = 370$, $K_D = 0$, و $0 \le K_I < \infty$ فيظهر بالشكل (7-33). إن المعادلة المميزة لهذا المحل الهندسي للجذور:

$$1 + K_I \left[ \frac{1}{s(s(s+10)(s+5.66)+K_p)} \right] = 0$$

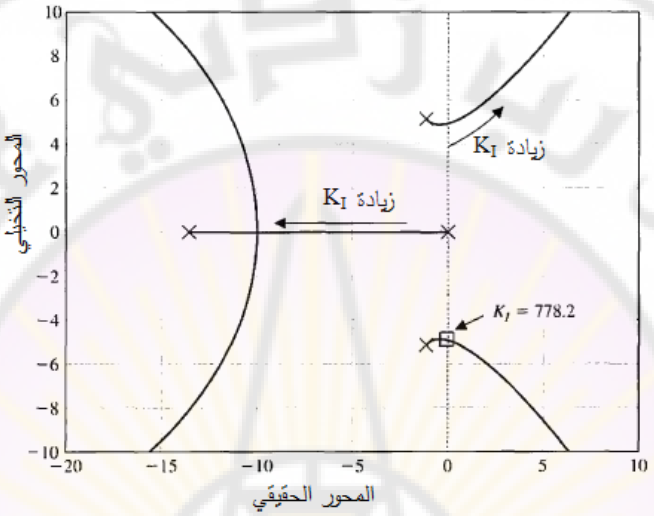
من الشكل (7-33) نجد أن زيادة $K_I$ تؤدي إلى تحريك الأقطاب العقدية المترافقة للنظام المغلق نحو اليمين. إن هذه الحركة تؤدي إلى تناقص قيمة معامل التخامد وبالتالي زيادة قيمة التجاوز النسبي للنظام. في الواقع, من أجل $K_I = 778.2$ فإن نظام المغلق يقع على حافة الاستقرار, وتقع الأقطاب عند $s = \pm 4.86j$. إن حركة الأقطاب العقدية نحو اليمين تنقص المقدار ($\zeta\omega_n$), وهذا يؤدي بدوره إلى زيادة زمن الاستقرار. يبين الشكل (7-34) علاقة التجاوز النسبي وزمن الاستقرار كتابع لـ $K_I$. إن المعلومات المستقاة من الشكل (7-34) تتوافق مع الجدول (7-7).




**الشكل (7-32): علاقة التجاوز النسبي وزمن الاستقرار كتابع للبارامتر $K_D$, وذلك من أجل $K_p = 370$, $K_I = 0$, و $0 \le K_D < \infty$.**

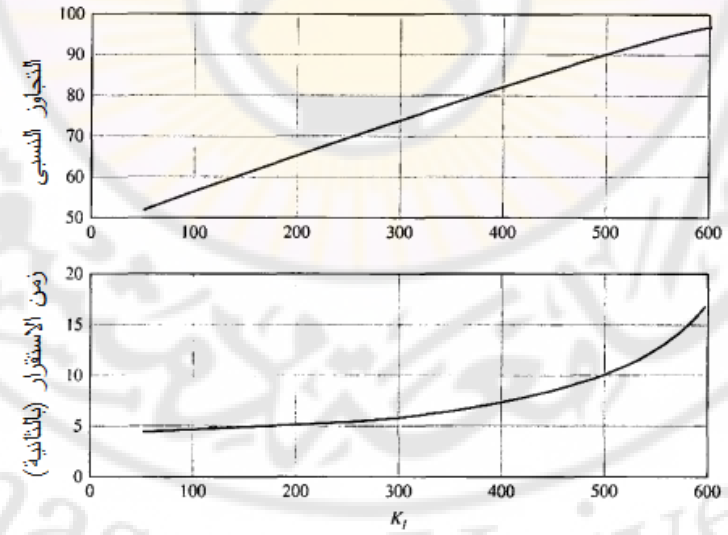
لتحقيق المتطلبات التصميمية المتعلقة بالتجاوز النسبي وبزمن الاستقرار, نختار القيم التالية لبارامترات المتحكم PID: $K_p = 370$, $K_I = 100$, و $K_D = 60$. يبين الشكل (7-35)

الاستجابة الخطوية للنظام حيث نجد أن زمن الاستقرار $T_s$ = 2.4 ثانية والتجاوز النسبي $P.O.\%$ = 12.8%, مما يعني أن المتطلبات التصميمية محققة.

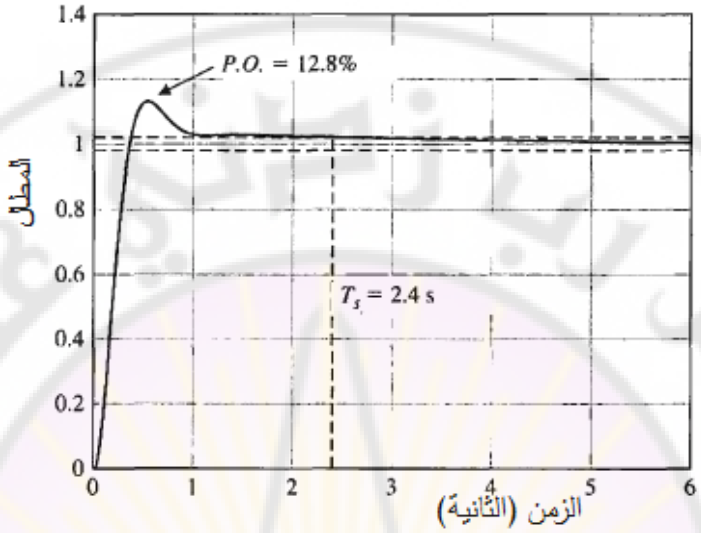



**الشكل (7-33): المحل الهندسي للجذور من أجل $K_p$ = 370, $K_D$ = 0, و**

$$0 \le K_I < \infty$$




**الشكل (7-34): علاقة التجاوز النسبي وزمن الاستقرار كتابع للبارامتر $K_I$, وذلك من أجل $K_p$ = 370, $K_D$ = 0, و** $50 \le K_I < 600$ .




**الشكل (7-35): الاستجابة الخطوية للنظام وذلك من أجل القيم التصميمية المختارة لبارامترات المتحكم PID: $K_p = 370$, $K_I = 100$, و $K_D = 60$.**

لننتقل الآن لشرح طريقة نيكولس– زيكلر التجريبية لتعيير المتحكم PID, والتي تسعى للوصول إلى استجابة خطوية سريعة لنظام الحلقة المغلقة, بدون حدوث اهتزازات مبالغ فيها, مع تحقيق إلغاء جيد للاضطرابات. سنعالج فيما يلي طريقتيين من طرق نيكولس – زيكلر لتعيير المتحكم PID. تقوم الطريقة الأولى, والمعتمدة على الحلقة المغلقة, على حساب الربح المطلق (Ultimate gain), والدور المطلق (Ultimate period). تعتمد الطريقة الثانية على الحلقة المفتوحة, وعلى منحنيات رد فعله (Reaction curves).

تقوم طريقة نيكولس – زيكلر المعتمدة على الحلقة المغلقة على زيادة الربح التناسبي $K_p$ حتى يصل نظام الحلقة المغلقة إلى حافة الاستقرار, مع الحفاظ على قيم صفرية للبارامترات $K_I$ و $K_D$. يُشار إلى هذه القيمة للربح التناسبي بـ $K_u$ , ويدعى بالربح المطلق. يُشار إلى دور الاهتزاز بـ $T_u$ , ويدعى بالدور المطلق. حالما يتم حساب $K_u$ و $T_u$ , يمكننا حساب قيم البارامترات $K_p$, $K_I$ , و $K_D$, وذلك بالاعتماد على العلاقات الواردة بالجدول (7-8).

| الجدول (7-8): تعيير المتحكم PID, وفق طريقة نيكولس – زيكلر التجريبية, وبالاعتماد على مفهوم الحلقة المغلقة | | | |
|---|---|---|---|
| نوع المتحكم | $K_p$ | $K_I$ | $K_D$ |
| تناسبي (P) | $0.5\ K_u$ | ----- | ----- |
| تناسبي – تكاملي (PI) | $0.45\ K_u$ | $0.54\ K_u/T_u$ | ----- |
| تناسبي – تكاملي – تفاضلي (PID) | $0.6\ K_u$ | $1.2\ K_u/T_u$ | $0.6\ K_u * T_u\ /8$ |

**مثال 7-10: تعيير المتحكم PID, وفق طريقة نيكولس – زيكلر التجريبية, وبالاعتماد على الحلقة المغلقة للنظام:**

لنعود لدراسة النظام المدروس بالمثال (7-9). يُوصف النظام المتحكم به بواسطة تابع التحويل التالي:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+b)(s+2\zeta\omega_n)},\ \ b = 10,\ \ \zeta = 0.707,\ \ \omega_n = 4$$

يعطى تابع تحويل المتحكم التناسبي – التكاملي – التفاضلي المستخدم بالعلاقة التالية:

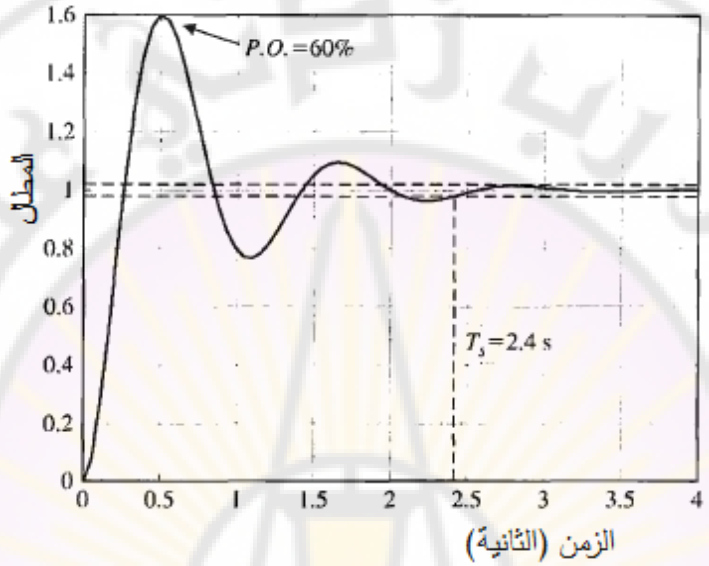
$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D.s$$

لنحسب البارامترات $K_p$, $K_I$, $K_D$ باستخدام العلاقات المعطاة بالجدول (7-8). وجدنا في المثال (7-9) أن: $K_u = 885.5$ و $T_u = 0.83$ ثانية. بالتالي:

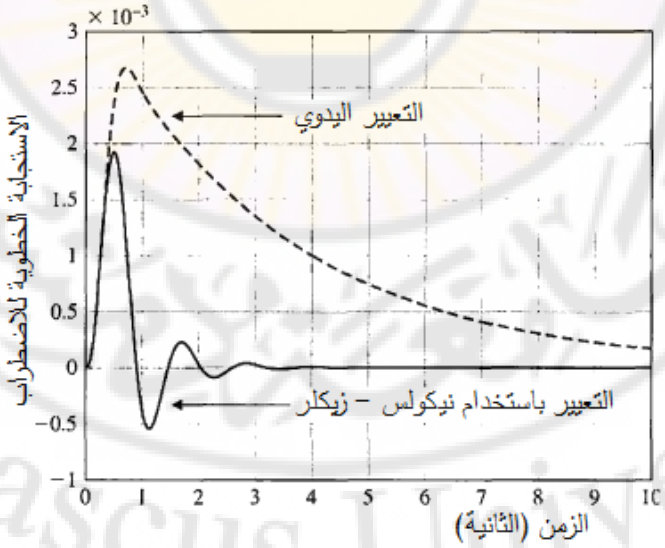
$$K_p = 0.6.K_u = 531.3,\ \ K_I = 1.2.K_u/T_u = 1280.2,\ \ K_D = 0.6.K_u.T_u/8 = 55.1$$

لنقارن الاستجابات الخطوية للنظام, والمبينة بالأشكال (7-35) و (7-36), حيث نجد أن زمن الاستقرار في كلا الاستجابتين تقريباً متساويين, ولكن التجاوز النسبي للاستجابة الخطوية الناتجة عن تعيير المتحكم PID يدوياً أقل من التجاوز النسبي في الاستجابة الخطوية الناتجة عن تعيير المتحكم PID باستخدام طريقة نيكولس – زيكلر. إن السبب في ذلك يعود أن طريقة نيكولس – زيكلر لتعيير المتحكم PID مصممة لرفض الاضطرابات المؤثرة على أداء النظام, بينما الطريقة اليدوية تهتم بالحصول على أفضل خصائص للاستجابة الخطوية. من الشكل (7-37) نجد أن استجابة النظام عند تطبيق

إشارة خطوية على مدخل الاضطراب, أفضل عند استخدام طريقة نيكولس – زيكلر لتعيير المتحكم PID. ■




**الشكل (7-36): الاستجابة الخطوية للنظام عند تعيير المتحكم PID بالاعتماد على طريقة نيكولس –زيكلر: $K_p = 531.3$, $K_I = 1280.2$, و $K_D = 55.1$.**




**الشكل (7-37): استجابة النظام عند تطبيق إشارة اضطراب خطوية.**

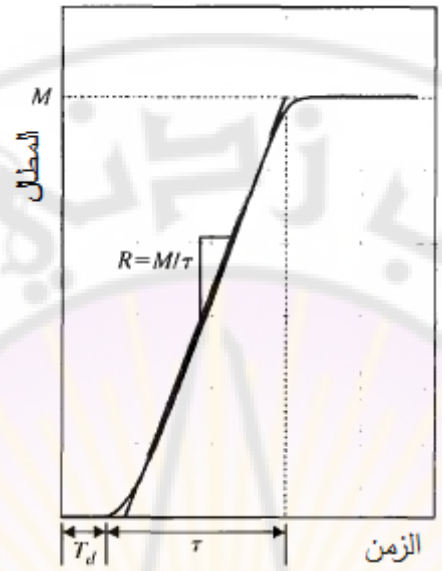
الطريقة التجريبية الثانية لنيكولس – زيكلر, هي المعتمدة على الحلقة المفتوحة. تستخدم هذه الطريقة منحني رد الفعل الذي يتم الحصول عليه بفصل المتحكم (جعله خارج حلقة التحكم), مع تطبيق إشارة دخل مرجعية خطوية أو إشارة اضطراب خطوية. في هذه الحالة إشارة خرج النظام تمثل منحني رد الفعل, حيث يفترض أن تأخذ الشكل العام المبين بالشكل (7-38). إن الاستجابة المبينة في هذا الشكل تفرض أن النظام المتحكم به هو نظام من الدرجة الأولى مع وجود تأخير زمني. إذا كان خرج النظام لا يتوافق مع الشكل (7-38) فيجب تطبيق طريقة أخرى لتعيير المتحكم PID. عموماً إذا كان النظام المتحكم به خطي ويحوي تأخير زمني فيمكن تطبيق طريقة نيكولس – زيكلر للحلقة المفتوحة مباشرة. يتميز منحني رد الفعل بمدة تأخير زمني $T_d$, والميل $R$. إن النظام الذي يبدي منحني رد فعل مماثل للشكل الظاهر في (7-38) يمكن أن يُقرب إلى نظام من الدرجة الأولى, ذو تأخير زمني, والموصوف بتابع التحويل:

$$G(s) = M\left[\frac{p}{s+p}\right]e^{-T_d s} \quad .....(7-90)$$

حيث $M$ هي مطال الاستجابة في الحالة المستقرة, $T_d$ مقدار التأخير الزمني, و $P$ يرتبط بميل منحني رد الفعل. يمكن حساب البارامترات $M$, $\tau$, $T_d$ من منحني الاستجابة الخطوية للحلقة المفتوحة, ومن ثم نستخدمها لحساب $R=M/\tau$. حالما تتم هذه الخطوات يتم حساب بارامترات المتحكم PID باستخدام الجدول (7-9). يمكن أن تستخدم هذه الطريقة أيضاً لتصميم متحكم تناسبي أو متحكم تناسبي–تكاملي.

**مثال 7-11: تعيير المتحكم PI بالاعتماد على طريقة نيكولس–زيكلر, للحلقة المفتوحة:**

لندرس منحني رد الفعل المبين بالشكل (7-39). من هذا المنحني نجد $T_d = 0.1$ ثانية و $R = 0.8$. بالاعتماد على العلاقات الوارد بالجدول (7-9) نجد أن بارامترات المتحكم التناسبي التكاملي: $K_p = 0.9/R.T_d = 11.25$, $K_I = 0.27/R.T_d^2 = 33.75$ .

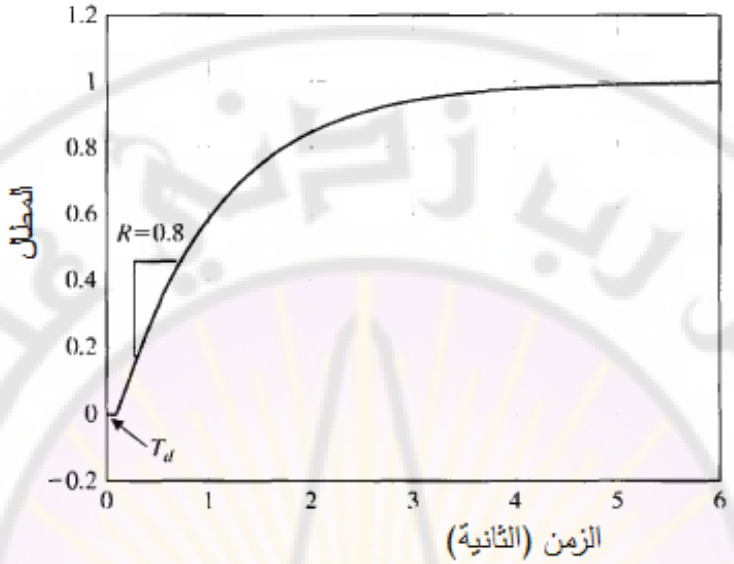



**الشكل (7-38): منحني رد الفعل مع توضيح للبارامترات R و $T_d$ الضرورية لتعيير المتحكم PID بالاعتماد على الحلقة المفتوحة.**

يبين الشكل (7-40) الاستجابة الخطوية للنظام المغلق ذو التغذية الخلفية الواحدية. في هذا الشكل نجد: $T_s$ = 1.28 ثانية و $P.O.\%=78\%$. بما أننا نستخدم متحكم تناسبي تكاملي, فكما هو متوقع, فإن خطأ الحالة المستقرة معدوم. ■

**الجدول (7-9): تعيير المتحكم PID, بالاعتماد على طريقة نيكولس-زيكلر, للحلقة المفتوحة**

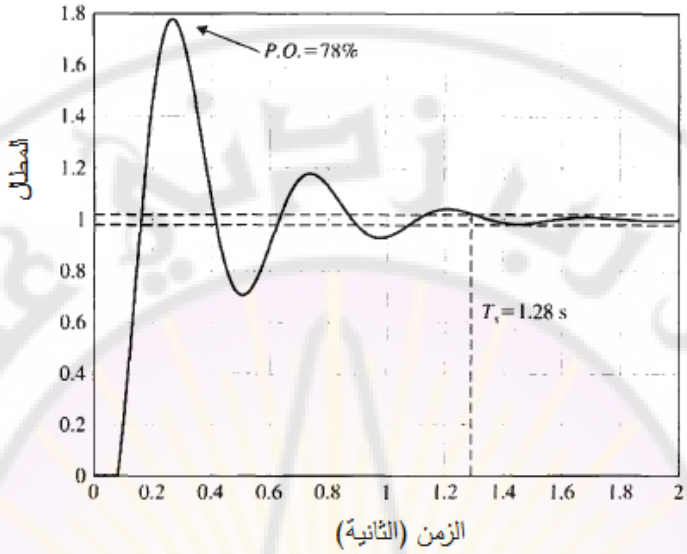
| نوع المتحكم | $K_p$ | $K_I$ | $K_D$ |
|---|---|---|---|
| تناسبي (P) | $1/R.T_d$ | ----- | ----- |
| تناسبي-تكاملي (PI) | $0.9/R.T_d$ | $0.27/R.T_d^2$ | ----- |
| تناسبي-تكاملي-تفاضلي (PID) | $1.2/R.T_d$ | $0.6/R.T_d^2$ | $0.6/R.$ |




**الشكل (7-39): منحني رد الفعل حيث $T_d$ = 0.1 ثانية و R = 0.8.**

**7-6 أمثلة تصميمية:**

سنقدم في هذه الفقرة أربعة أمثلة تصميمية. يتعلق المثال الأول بنظام التحكم بعنفة ريحية. يعتمد النظام التحكمي للعنفة الريحية على المتحكم التناسبي التكاملي ( PI controller) وذلك بهدف أن تحقق الاستجابة الخطوية للنظام الخصائص التالية: أزمنة استقرار وصعود صغيرة, وقيمة صغيرة للتجاوز النسبي. يتعلق المثال الثاني بنظام التحكم بنظام توجيه ليزري. سنبين في هذا المثال كيفية استخدام المحل الهندسي للجذور لإظهار كيفية تحرك أقطاب النظام المغلق عند تغير قيمة الربح التناسبي. يدرس المثال الثالث عملية النسخ المتماثل للإنسان الآلي. في هذا المثال سنستخدم المحل الهندسي للجذور لاختيار بارامترات المتحكم. في المثال الرابع, سيتم توسيع المحل الهندسي للجذور من بارامتر واحد إلى ثلاث بارامترات بهدف تحديد قيم بارامترات المتحكم التناسبي التكاملي التفاضلي (PID controller).




**الشكل (7-40): الاستجابة الخطوية للنظام المدروس بالمثال (7-13) والذي تم تعيير متحكمه بالاعتماد على طريقة نيكولس-زيكلر للحلقة المفتوحة.**

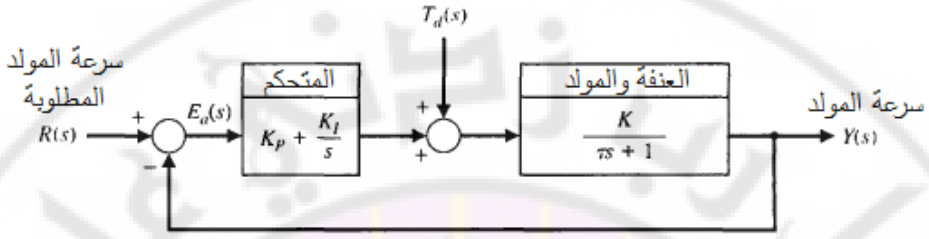
**مثال 7-12: التحكم بسرعة مولد عنفة ريحية (Wind turbine speed control):**

في هذا المثال نريد التحكم بسرعة مولد العنفة الريحية. يتم التحكم بسرعة دوران المولد عن طريق التحكم بزاوية انحراف شفرات العنفة الريحية. يبين الشكل (7-41) النموذج الأساسي لنظام التحكم بسرعة المولد [12]. يمثل تابع التحويل التالي النسبة بين زاوية انحراف الشفرات وسرعة المولد:

$$G(s) = \frac{4.2158\,(s - 827.1)(s^2 - 5.489\,s + 194.4)}{(s + 0.195)(s^2 + 0.101\,s + 482.6)} \quad \ldots\ldots\ldots (7-91)$$

إن هذا النموذج يعود لعنفة ريحية باستطاعة 600 KW, وعمود بارتفاع 36.6 m, وقطر الدائر 40 m, وسرعة اسمية للدائر 41.7 r.p.m, والسرعة الاسمية للمولد 1800 r.p.m, والمعدل الأعظمي لتغير زاوية انحراف الشفرات 18.7 deg/sec. من الملاحظ أن النموذج الخطي الموصوف بالمعادلة (7-91) يملك أصفار في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي عند $s_1 = 827.1$ و $s_{2,3} = 0.0274 \pm j0.1367$. يمكن تبسيط النموذج المعطى بالعلاقة (7-91) لتصبح على النحو التالي [35]:

$$G(s)=\frac{K}{1+\tau s},\quad K=-7200,\quad \tau=5\,\text{sec}.....(92-7)$$




**الشكل (7-41): نظام التحكم بسرعة مولد عنفة ريحية**

سنقوم فيما يلي بتصميم المتحكم التناسبي التكاملي (PI) وذلك للتحكم بسرعة مولد العنفة الريحية وذلك بالاعتماد على النموذج التقريبي المعطى بالعلاقة (7-92), ومن ثم سنبرهن أن المتطلبات التصميمية محققة لكلا النموذجين التقريبي والدقيق.

يُعطى تابع تحويل المتحكم التناسبي التكاملي بالعلاقة:

$$G_c(s)=K_p+\frac{K_I}{s}=K_p\left[\frac{s+\tau_c}{s}\right],\qquad \tau_c=K_I/K_p$$

فيما يلي يتوجب علينا تحديد البارامترات $K_p$ و $K_I$.

إن المتطلبات التصميمية للنظام:

1- زمن الاستقرار, للاستجابة الخطوية, أقل من 4 ثواني, أي: $T_s<4\text{sec}$.

2- التجاوز النسبي, في الاستجابة الخطوية, أقل من 25%, أي: $P.O.\%<25\%$.

3- زمن الصعود صغير أقل من 1 ثانية, أي: $T_r<1\text{sec}$.

إن هذه المتطلبات التصميمية تقتضي أن يكون معامل التخامد للجذور المسيطرة $\zeta>0.4$ والتردد الطبيعي لهذه الجذور $\omega_n>2.5\,rad/\text{sec}$.

إن دراسة استقرار النظام أدت إلى أن الاستقرار يتطلب تحقق الشرط التالي: $K_I<0$ و $K_p<0$.

يبين الشكل (7-42) المحل الهندسي للجذور للمعادلة المميزة:

$$1+\hat{K}_p\left[\frac{s+\tau_c}{s}.\frac{7200}{5s+1}\right]=0,\ \tau_c=2,\hat{K}_p=-K_p>0$$

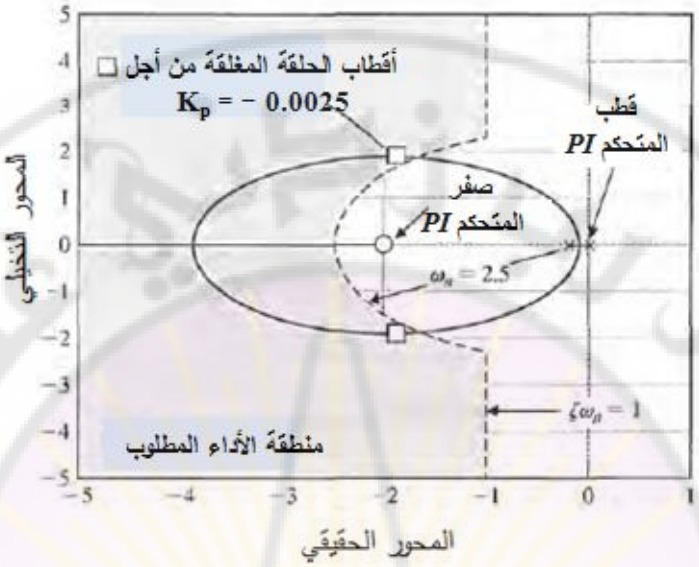
إن سبب استخدامنا للبارامتر $\hat{K}_p$ بدلاً من $K_p$ في المعادلة المميزة هي أن إجرائية رسم المحل الهندسي للجذور, والتي تم تقديمها في هذا الفصل, تفرض أن المراد دراسة تأثيره يجب أن يكون ذو قيمة موجبة, أي $K_p > 0$ . كما ذكرنا أعلاه, أدت دراسة الاستقرار إلى فرض الشرط التالي: $K_p < 0$ . هذه الحقيقة دفعتنا لاستخدام بارامتر وسيطي $\hat{K}_p$ في المعادلة المميزة, بحيث: $\hat{K}_p = -K_p$ . تم توضيع صفر المتحكم عند $-\tau_c = -2$ , حيث إن هذه القيمة المختارة هي خيار تصميمي بحت. أيضاً تم توضيع على الشكل (7-42) المنطقة التي تحقق المتطلبات التصميمية الواردة أعلاه: $\zeta > 0.4$ و $\omega_n > 2.5 rad/\sec$ و $\zeta\omega_n > 1$ (المنطقة المظللة). سنختار نقطة من المحل الهندسي للجذور, تنتمي إلى المنطقة المظللة بحيث يكون معامل تخامد الجذور العقدية للنظام المغلق, عند هذه النقطة يساوي $\zeta = 0.707$ . إن قيمة بارامتر المعادلة المميزة $\hat{K}_p$ عند هذه النقطة يساوي $\hat{K}_p = 0.0025$ . إن اعتماد هذه القيمة لـ $\hat{K}_p$ يؤدي إلى الحصول على بارامترات المتحكم PI: $K_p = -0.0025$ و $K_I = -0.005$ , وبالتالي ينتج لدينا المتحكم التناسبي التكاملي التالي:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = -0.0025\left[\frac{s+2}{s}\right]$$

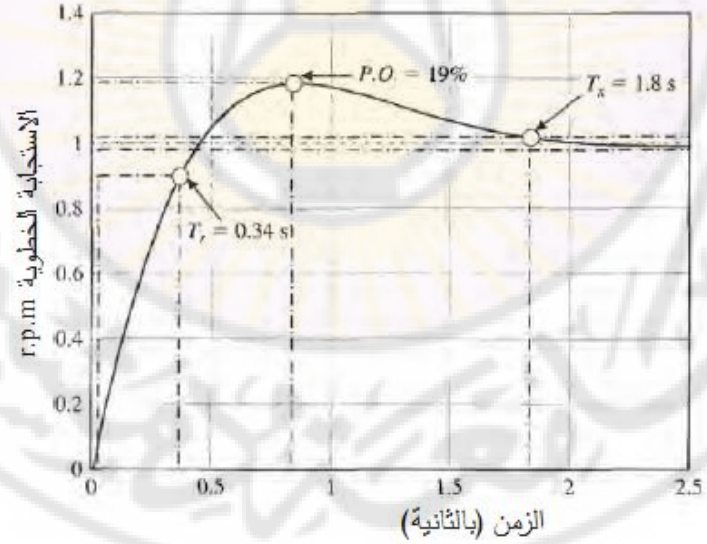
يبين الشكل (7-43) الاستجابة الخطوية للنموذج التقريبي المعطى بالعلاقة (7-92), حيث نجد أن هذه الاستجابة تتمتع بالخصائص التالية: زمن الاستقرار $T_s$ = 1.8 ثانية, زمن الصعود $T_r$ = 0.34 ثانية, وتجاوز نسبي $P.O.\%$ = 19%. إذاً المتحكم التناسبي التكاملي قادر على تحقيق جميع المتطلبات التصميمية.

لندرس الآن الاستجابة الخطوية للنموذج الدقيق المبينة بالشكل (7-44) حيث نرى أن الآخذ بالحسبان العناصر التي تم إهمالها في النموذج التقريبي أدت لحدوث اهتزازات صغيرة في سرعة الاستجابة.

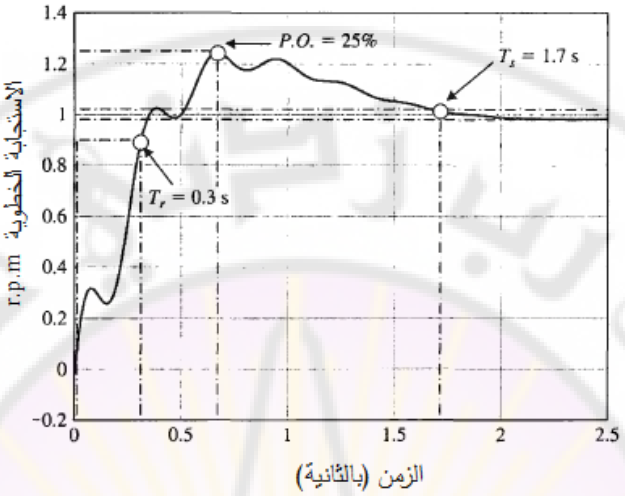
تبين الاستجابة النبضية للنظام المدروس والمبينة بالشكل (7-45) قيام المتحكم المستنتج بالإلغاء السريع والدقيق للاضطرابات وذلك ضمن فترة زمنية أقل من 3 ثواني, علماً أن هذه الاضطرابات تمثل تغير مفاجئ في زاوية الشفرات مقداره $1^\circ$.



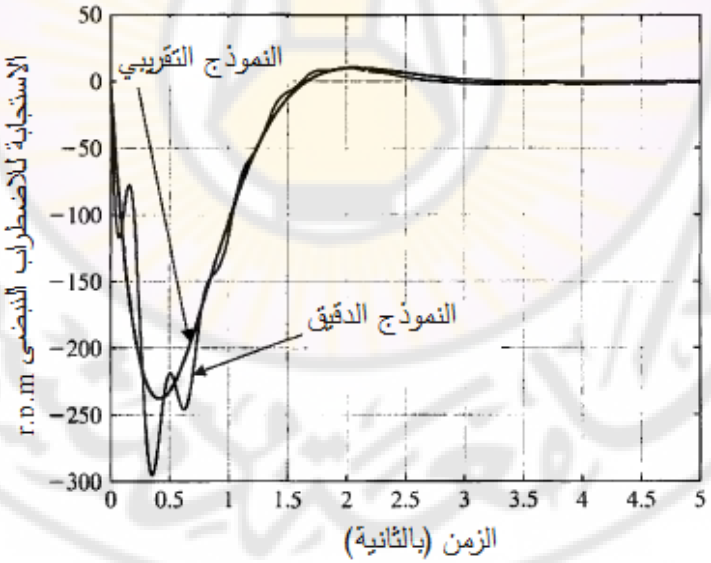

**الشكل (7-42): المحل الهندسي للجذور لنظام التحكم بسرعة مولد عنفة ريحية مقاد بواسطة متحكم تناسبي تكاملي.**




**الشكل (7-43): الاستجابة الخطوية لنظام التحكم بسرعة المولد في العنفة الريحية حيث تم اعتماد النموذج التقريبي, أما المتحكم المستخدم فهو المتحكم PI المستنتج في الدراسة النظرية.**




**الشكل (7-44): الاستجابة الخطوية لنظام التحكم بسرعة المولد في العنفة الريحية حيث تم اعتماد النموذج الدقيق, أما المتحكم المستخدم فهو المتحكم PI المستنتج في الدراسة النظرية.**




**الشكل (7-45): استجابة نظام التحكم بسرعة المولد في العنفة الريحية وذلك عند تطبيق إشارة اضطراب نبضية تمثل تغير في زاوية الشفرات مقداره $1^{\circ}$. لاحظ أن المتحكم المستنتج يلغي تأثير الاضطراب خلال فترة أقل من 3 ثواني.**

**مثال 7-13: نظام التحكم بآلة حفر ليزرية:**

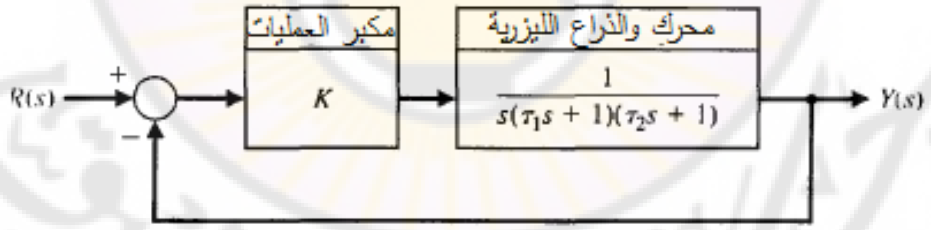
إن أحد أكثر استخدامات الليزر شيوعاً هي حفر ثقب في جسم ما. يبين الشكل (7-46) النظام المدروس حيث يستخدم النظام محرك ذو تيار مستمر (DC motor) لتوجيه جهاز الليزر. في هذا النظام يجب ضبط ربح مكبر العمليات ($K$) بحيث يكون خطأ الحالة المستقرة لإشارة الدخل الصاعدة, أقل أو يساوي ($0.1\,mm$), وذلك مع المحافظة على الاستقرار, علماً أن إشارة الدخل الصاعدة المطبقة: $r(t) = At, A = 1mm/s$.

للحصول على القيمة المطلوبة لخطأ الحالة المستقرة, واستجابة خرج مستقرة, سنختار محرك ذو ثابت زمن حقل التهييج $\tau_1 = 0.1\sec$. سنختار أيضاً أن يكون زمن المحرك والحمل $\tau_2 = 0.2\sec$.

إن تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام المدروس:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + K}$$

$$= \frac{K}{0.02s^3 + 0.3s^2 + s + K} = \frac{50K}{s^3 + 15s^2 + 50s + 50K} \quad .....(93-7)$$




**الشكل (7-46): نظام التحكم بأداة حفر ليزرية.**

يُعطى خطأ الحالة المستقرة, عند تطبيق إشارة دخل صاعدة $R(s) = A/s^2$, بالعلاقة:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{A}{K}$$

طالما أننا نرغب أن تكون قيمة $e_{ss} = 0.1\,mm$ (أو أقل), ولدينا $A = 1mm/s$, بالتالي يجب أن تكون قيمة $K$ مساوية لـ (10) (أو أكبر).

للتحقق من استقرار النظام نطبق دالة راوث–هورفيتز على المعادلة المميزة:

$$s^3 + 15s^2 + 50s + 50K = 0$$

لننشئ جدول راوث:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 50 \\ s^2 & 15 & 50K \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & 50K & \end{array}$$

حيث: $b_1 = (750 - 50K)/15$.

بالتالي حتى يكون النظام مستقراً يجب أن تحقق $K$ الشرط التالي: $0 \le K \le 15$. يبين الشكل (7-47) المحل الهندسي للجذور, وذلك من أجل $K > 0$. إن اعتماد $K = 10$ يحقق شروط الاستقرار, ويحقق المتطلب التصميمي المتعلق بخطأ الحالة المستقرة. إن جذور النظام عند $K = 10$, هي:

$$-r_2 = -13.98$$
$$-r_1 = -0.51 + j5.96$$
$$-\hat{r}_1 = -0.51 - j5.96$$

من هذه الجذور نجد أن معامل تخامد الجذور العقدية $\zeta$ يساوي (0.085) و $\zeta\omega_n = 0.51$. بافتراض أن الجذور العقدية هي الجذور المسيطرة فإننا نتوقع أن تبدي استجابة النظام الخطوية تجاوز نسبي مقداره ( 76%), وزمن استقرار (ضمن مجال ±2% من القيمة النهائية) يساوي:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.51} = 7.8\,\text{sec}$$

لنرسم الاستجابة الخطوية الفعلية للنظام, والمبينة بالشكل (7-48), فنجد أن النظام يبدي تجاوزاً نسبياً مقداره (70%), وزمن استقرار مقداره (7.5) ثانية, وبالتالي فالجذور العقدية هي فعلاً المسيطرة على استجابة النظام. إن الاستجابة الخطوية للنظام مهتزة بشدة, وبالتالي لا يمكن استخدامه في بعض تطبيقات الليزر مثل التطبيقات الطبية الجراحية.

مما سبق نجد أنه يجب أن تكون إشارة التحكم محدودة بالإشارات الصاعدة ذات السرعة المنخفضة.

**مثال 7-14: نظام التحكم بالنسخ المتماثل للإنسان الآلي:**

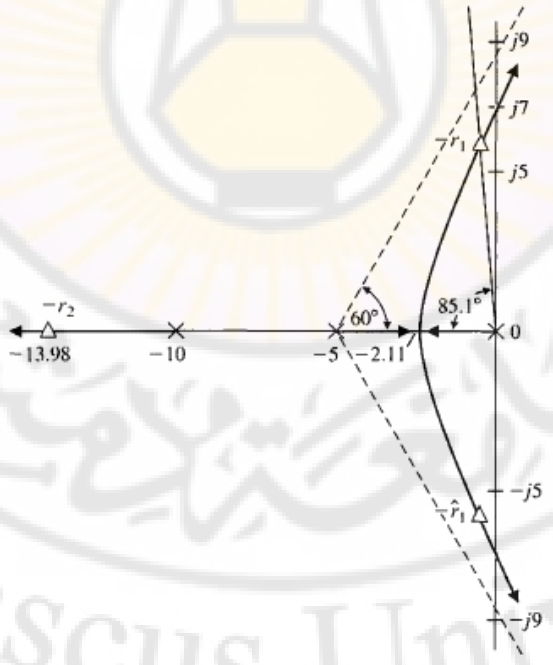
**(Robot replication control system)**

إن مبدأ النسخ المتماثل للإنسان الآلي سهل الفهم ويقوم حول الفكرة الأساسية التالية: يقوم الروبوت بمضاعفة نفسه بحيث ينتج المعمل بالنهاية نسخ متطابقة من الإنسان الآلي. يبين الشكل (7-49) الفكرة العامة لهذا النظام حيث قام الروبوت الأول بتصنيع الروبوت الثاني, ليقوم من ثم الروبوت الأول والثاني بتجميع الروبوت الثالث وهكذا دواليك. إن المتطلبات التصميمية المتعلقة بالتحكم بحركة ذراع الروبوت هي:

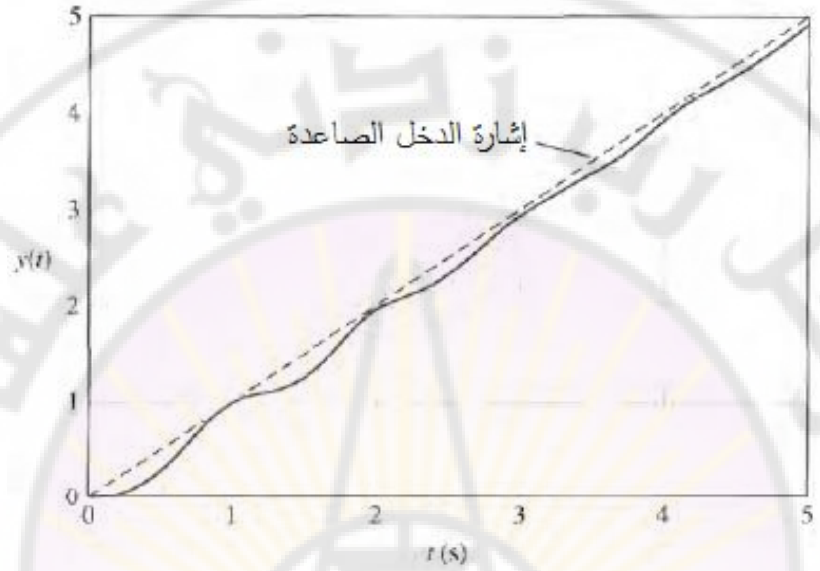
1- زمن الاستقرار ضمن ±2% من القيمة النهائية أقل من 2 ثانية.

2- التجاوز النسبي, عند تطبيق إشارة دخل خطوية, أقل من 10%.

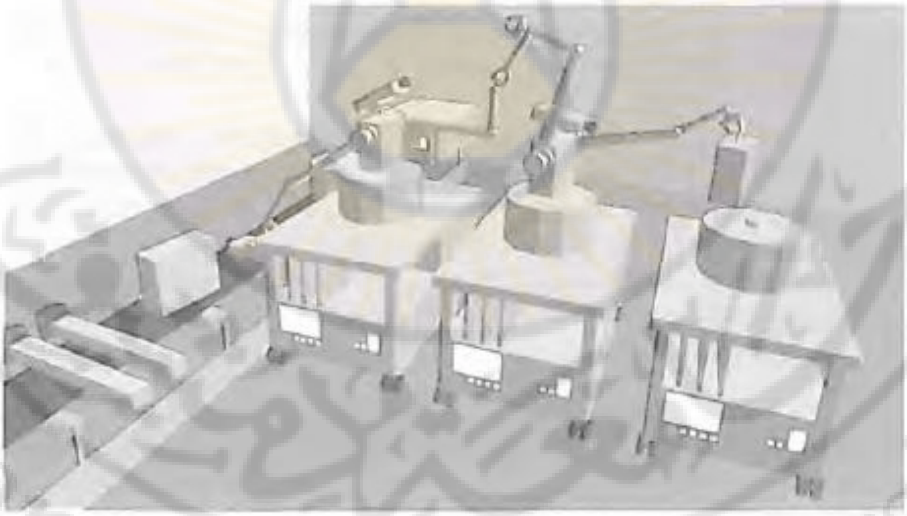
3- خطأ الحالة المستقرة, عند تطبيق إشارة دخل خطوية, معدوم.




**الشكل (7-47): المحل الهندسي للجذور لنظام التحكم بأداة حفر الليزرية.**

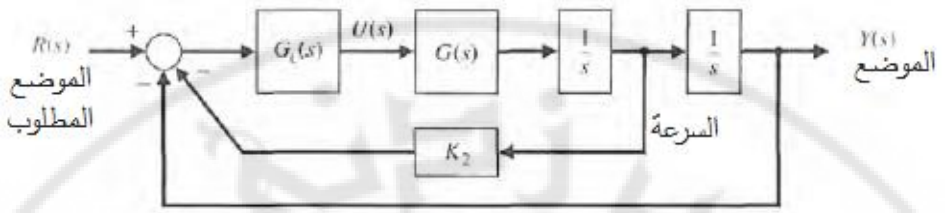



**الشكل (7-48): استجابة نظام التحكم بأداة الحفر عند تطبيق إشارة دخل صاعدة.**



**الشكل (7-49): نظام النسخ المتماثل للإنسان الآلي.**

يبين الشكل (7-50) المخطط الصندوقي للنظام المدروس مع المتحكم, حيث يُقترح في هذا المخطط الصندوقي استخدام إشارة السرعة كإشارة تغذية خلفية.




**الشكل (7-50): المخطط الصندوقي المقترح للتحكم بذراع الروبوت.**

يُعطى تابع تحويل ذراع الرجل الآلي بالعلاقة التالية:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2}.G(s)$$

حيث:

$$G(s) = \frac{\left(s^2+4s+10004\right)\left(s^2+12s+90036\right)}{\left(s+10\right)\left(s^2+2s+2501\right)\left(s^2+6s+22509\right)}$$

إن الأصفار العقدية لهذا التابع: $s=-2\pm j100$ , $s=-6\pm j300$ , أما الأقطاب العقدية فهي: $s=-1\pm j50$ , $s=-3\pm j150$ .

يبين الشكل (7-51) المحل الهندسي لجذور النظام وذلك من أجل $K_2 = 0$ (إلغاء تأثير التغذية الخلفية بالسرعة) و $G_c(s) = K_1$, حيث تتغير قيمة $K_1$ من الصفر إلى اللانهاية. إن النظام المدروس غير مستقر بسبب تواجد قطبين من أقطاب المعادلة المميزة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي وذلك من أجل $K_1 > 0$.

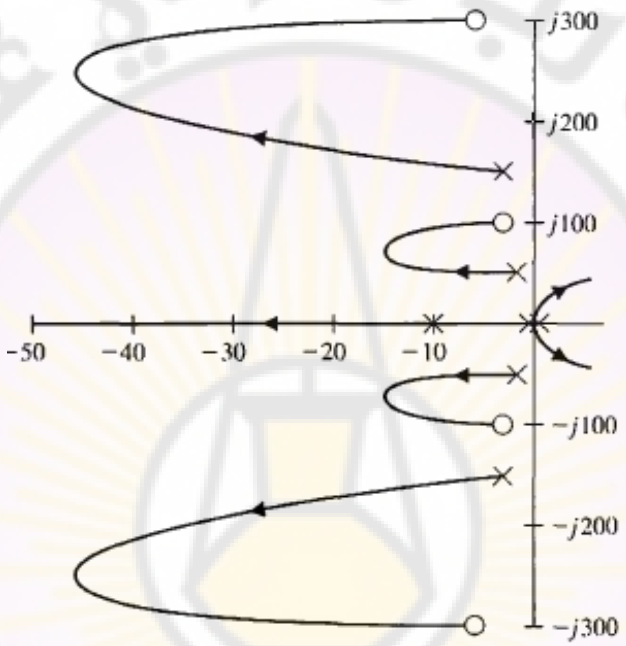
من الواضح أنه يجب الاستفادة من إشارة التغذية الخلفية بالسرعة وذلك بإسناد قيمة موجبة لـ $K_2$. بالتالي يكون تابع تحويل المسار الخلفي: $H(s)=1+K_2 s$, أما تابع تحويل النظام ككل:

$$\frac{1}{s^2}G_c(s)(s)H(s) = \frac{K_1K_2\left(s+1/K_2\right)\left(s^2+4s+10004\right)\left(s^2+12s+90036\right)}{s^2\left(s+10\right)\left(s^2+2s+2501\right)\left(s^2+6s+22509\right)}$$

حيث: $G_c(s) = K_1$.

من الملاحظ من هذه العلاقة أنه أصبح لدينا بارامترين $K_1$ و $K_2$ يتوجب ضبطهما. سنختار $5 < K_2 < 10$ وذلك بهدف توضيح صفر النظام القابل للضبط ( $s=-1/s^2$ ) بالقرب من مركز الإحداثيات.

من أجل $K_2 = 5$ وقيمة متغيرة للبارامتر $K_1$, نحصل على المحل الهندسي للجذور المبين بالشكل (7-52). من أجل $K_1 = 0.8$ و $K_2 = 5$, نحصل على استجابة خطوية تتميز بالخصائص التالية: تجاوز نسبي 12%, وزمن الاستقرار 1.8 ثانية.

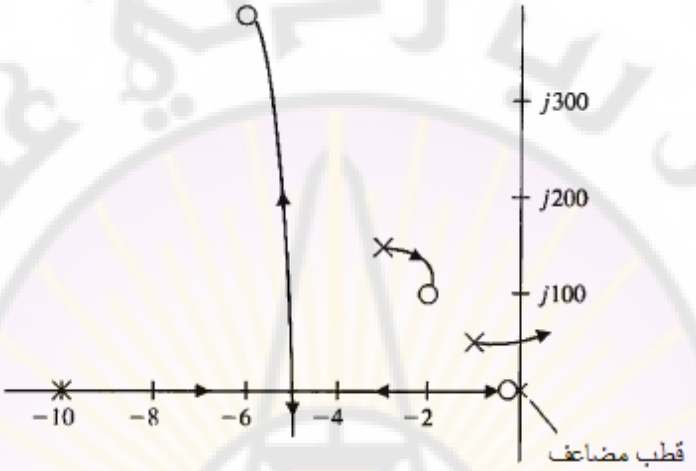



**الشكل (7-51): المحل الهندسي للجذور وذلك من أجل $K_2 = 0$ و $0 \le K_1 \le \infty$ .**

إن هذه القيم لـ $K_1$ و $K_2$ تحقق المتطلبات التصميمية المتعلقة بزمن الاستقرار والتجاوز النسبي. إذا جربنا قيم أخرى لـ $K_2$ ولتكن $K_2$ = 4 أو $K_2$ = 7 فسنحصل على استجابة خطوية ذات تجاوز نسبي أكبر من القيمة المطلوبة. إذاً هذه القيم لـ $K_1$ و $K_2$ تحقق أفضل أداء للنظام المدروس. إذا أردنا الاستمرار بعملية التصميم فيتوجب علينا استخدام متحكم $G_c(s)$ بقطب وصفر مع المحافظة على قيمة $K_2$ (أي $K_2 = 5$). أحد الأشكال الممكنة لهذا المتحكم فهو:

$$G_c(s) = \frac{K_1(s+z)}{s+p}$$

إذا اخترنا $z=1$ , $p=5$ و $K_1=5$, فإن الاستجابة الخطوية للنظام ستبدي تجاوزاً مقداره (8%) وزمن استقرار مقداره (1.8) ثانية. ■



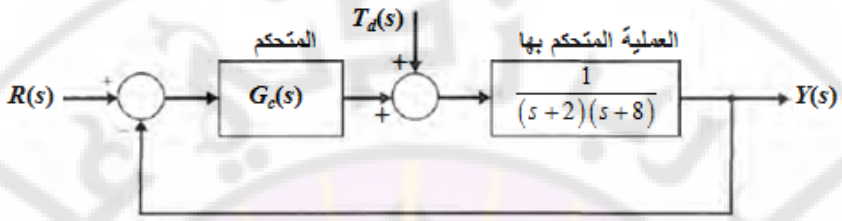

**الشكل (7-57): المحل الهندسي للجذور من أجل $G_c(s)=K_1$ وصفر عند $s=-2$.**

**مثال 7-15: التحكم بسرعة سيارة (Automobile velocity control):**

سنتعرض في هذا المثال إلى نظم الطرق السريعة المؤتمتة والمعروفة بـ IVHS (أو Intelligent Vehicle/Highway Systems). يُقصد بنظام الـ IVHS بمجموعة الدارات الإلكترونية والتي تزود سائق السيارة, ومنسق حركة الطريق السريع (Highway) بمعلومات, في الزمن الحقيقي, عن الحوادث والاختناقات المرورية والخدمات الموجودة على طرفي الطريق. تشمل أيضاً نظم الـ IVHS الوسائط التي تجعل العربة أكثر استقلالية مثل نظم تجنب الاصطدام, ونظم إتباع مسار معين. يبين الشكل (7-53) نظام التحكم بالسرعة, والذي يقوم بالتحكم بسرعة العربات بهدف المحافظة على مسافة ثابتة بين العربات. في هذا المخطط الصندوقي تمثل إشارة الخرج $Y(s)$ المسافة بين عربتين, أما إشارة الدخل $R(s)$ فتمثل المسافة المطلوبة بين العربتين. إن هدفنا في هذا المثال التصميمي هو تصميم المتحكم الذي يحافظ على المسافة المطلوبة بين العربتين مع

احتفاظ السائق بإمكانية المناورة بالسيارة المجهزة بجهاز IVHS لتسلك الطريق المطلوب.

يبين الشكل (7-54) الخطوات التصميمية لهذا المثال.




**الشكل (7-53): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بسرعة السيارة.**

في هذا المخطط نجد:

- **الهدف من نظام التحكم:** المحافظة على المسافة المطلوبة بين العربتين.
- **المتحول المتحكم به:** المسافة بين العربتين, والمشار إليه بـ $y(t)$.
- **المتطلبات التصميمية:**
  - DS1: خطأ الحالة المستقرة, عند تطبيق إشارة دخل خطوية معدوم.
  - DS2: خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق إشارة دخل صاعدة, أقل من 25%.
  - DS3: التجاوز النسبي أقل من 5% من مطال إشارة الدخل الخطوية.
  - DS4: زمن الاستقرار أقل من (1.5) ثانية, عند تطبيق إشارة دخل خطوية.

في الواقع وحتى نحقق المتطلب التصميمي الأول فإن تابع تحويل المسار الأمامي يجب أن يكون من النوع الأول (Type 1). إن تابع تحويل المسار الأمامي (قبل إضافة المتحكم) هي من النوع الصفري (Type 0), وبالتالي يجب على المتحكم المراد إدخاله في المسار الأمامي أن يرفع نوع النظام درجة واحدة على الأقل. إذاً المتحكم من النوع الأول (أي الذي يحوي عنصر تكاملي واحد) كفيل بتحقيق المتطلب التصميمي الأول DS1.

لتحقيق المتطلب التصميمي الثاني DS2 يجب أن يكون خطأ السرعة ذو قيمة ثابتة, أي:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) \geq \frac{1}{0.25} = 4 \quad .....(94-7)$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)} \quad .....(95-7)$$

حيث:

يمثل $G_c(s)$ تابع تحويل المتحكم والذي لم يحدد بعد.

يسمح المتطلب التصميمي الثالث DS3, بتحديد معامل التخامد ($\zeta$) المطلوب.

$$P.O.\% \le 5\% \quad \Rightarrow \quad \zeta \ge 0.69$$

بنفس الطريقة, ومن المتطلب التصميمي الرابع DS4, والمتعلق بزمن الاستقرار نجد:

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \le \mathbf{1.5} \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n \ge 2.6$$

يبين الشكل (7-55) المنطقة المرغوبة لتوضيع أقطاب تابع تحويل الحلقة المغلقة. إن استخدام المتحكم التناسبي (أي $G_c(s) = K$) غير ممكن لعدم قدرته على تحقيق المتطلب التصميمي (DS2), والمتعلق بخطأ الحالة المستقرة وذلك عند تطبيق إشارة دخل صاعدة, حيث نحتاج إلى قطب واحد على الأقل, متوضع في مركز الإحداثيات بحيث نستطيع تتبع إشارة الدخل الصاعدة.

لنفرض أن لدينا المتحكم التناسب التكاملي (PI) ذو تابع التحويل التالي:

$$G_c(s) = \frac{K_p s + K_I}{s} = K_p \frac{s + \frac{K_I}{K_p}}{s} \quad .....(7-96)$$

السؤال المطروح الآن هو أين نوضع الصفر $s = -K_I/K_p$ في المستوي اللابلاسي؟

أيضاً يجب أن نتساءل عن قيم البارامترات $K_p$ و $K_I$ والتي تحقق استقرار النظام.

يُعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة بالعلاقة:

$$T(s) = \frac{K_p s + K_I}{s^3 + 10s^2 + (16 + K_p)s + K_I}$$

لننشئ جدول راوث لهذا النظام فنجد:

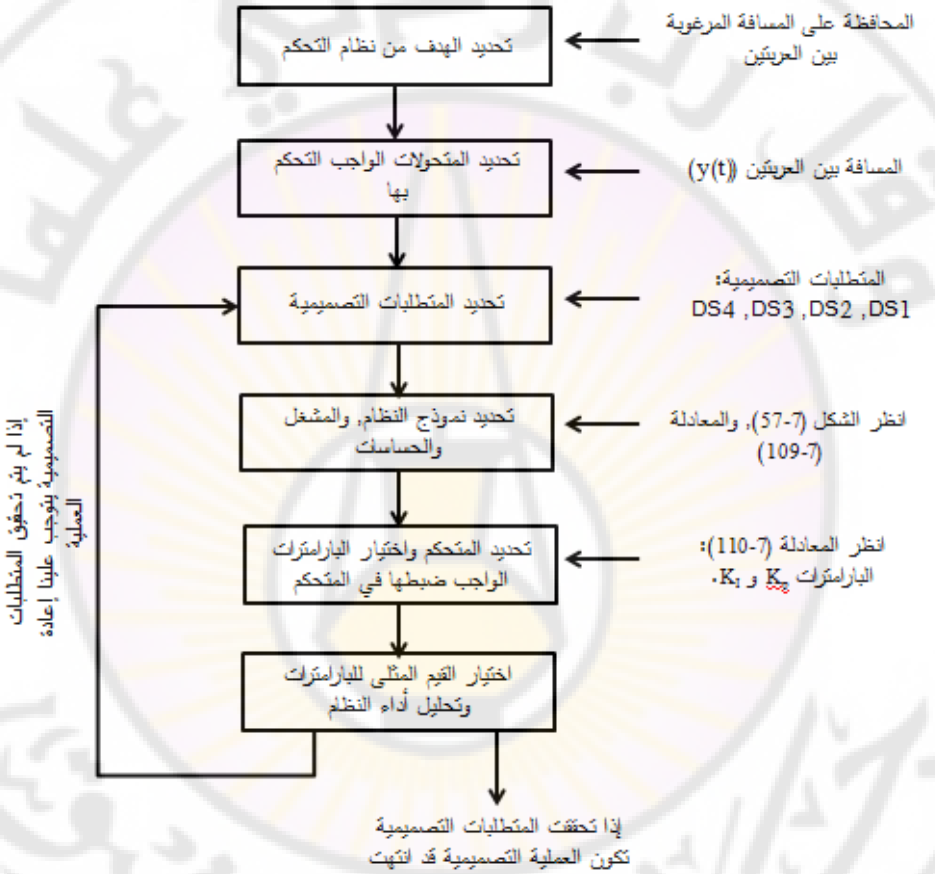
| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $16 + K_p$ |
| $s^2$ | $10$ | $K_I$ |
| $s^1$ | $10(K_p + 16) - K_I/10$ | $0$ |
| $s^0$ | $K_I$ | |

إن المتطلب الأولي لاستقرار النظام (من العمود الأول والسطر الرابع) هو:

$$K_I > 0 \quad .....(7-97)$$

أيضاً من العمود الأول والسطر الثالث يمكن أن نحصل على الشرط التالي:

$$K_p > \frac{K_1}{10} - 16 \ldots\ldots\ldots\ldots (98-7)$$




**الشكل (7-54): الخطوات التصميمية المتبعة في تصميم نظام التحكم.**

من المتطلب التصميمي الثاني DS2 وجدنا:

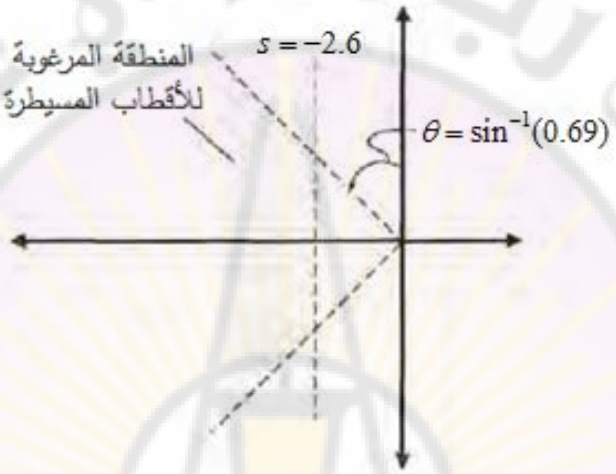
$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K_p(s+K_1/K_p)}{s}.\frac{1}{(s+2)(s+8)}$$

$$= \frac{K_1}{16} > 4 \ldots\ldots\ldots (99-7)$$

ومنه نجد:

$$K_1 > 64 \ldots\ldots\ldots\ldots (100-7)$$

إذا اخترنا قيمة لـ $K_I$ بحيث ( $K_I > 64$), نكون أيضاً قد حققنا المتراجحة (7-97). نقوم فيما بعد باختيار قيمة مناسبة لـ $K_p$ وذلك بالاعتماد على المعادلة (7-98) وبحيث $K_I > 64$.




**الشكل (7-55): المنطقة المرغوبة لتوضيع الأقطاب المسيطرة للنظام المغلق.**

لنعود إلى المتطلب التصميمي الرابع DS4. نريد في هذا المتطلب التصميمي أن نضع الأقطاب المسيطرة إلى يسار الخط $s = -2.6$ (انظر الشكل (7-55)). من المعلوم أيضاً من خبرتنا في رسم المحل الهندسي للجذور أنه يحوي على فرعين يتجهان نحو اللانهاية حيث أن الخطوط المقاربة لهذه الأفرع تشكل الزوايا $\phi = \pm 90^\circ$, ومتمركزة على المحور الأفقي في النقطة:

$$\sigma_A = \frac{\sum(-p_i) - \sum(-z_i)}{n_p - n_z}$$

لدينا: $n_z = 1$ و $n_p = 3$.

مما سبق يملك النظام ثلاثة أقطاب هي: $s = -0.28$, وصفر وحيد هو: $s = -K_I / K_p$. بالتعويض في علاقة $\sigma_A$ نجد:

$$\sigma_A = \frac{-2-8-(-K_I/K_p)}{2} = -5 + \frac{1}{2}.\frac{K_I}{K_p}$$

وفق المتطلب التصميمي الرابع, وكما أسلفنا أعلاه, نريد توضيع $\sigma_A$ إلى يسار $s=-2.6$, أي:

$$-5 + \frac{1}{2}.\frac{K_I}{K_p} < -2.6$$

$$\frac{K_1}{K_p} < 4.7 \qquad .....(101-7)$$

أو:

إذاً وكتصميم أولي نختار البارامترات $K_p$ و $K_I$, بحيث:

$$K_I > 64, \qquad K_p > \frac{K_I}{10} - 16, \qquad \frac{K_I}{K_p} < 4.7$$

لنفرض أننا اخترنا $K_I/K_p = 2.5$, بالتالي تصبح المعادلة المميزة للنظام المغلق:

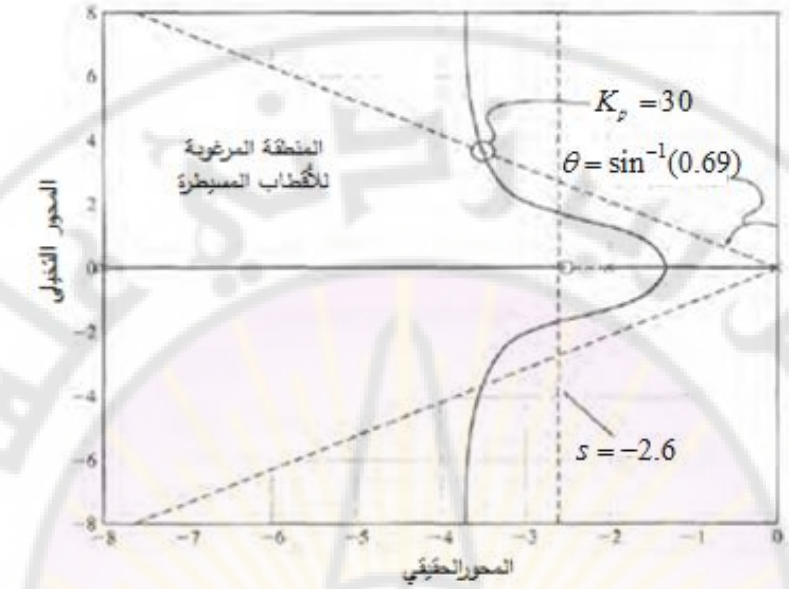
$$1 + K_p \frac{s+2.5}{s(s+2)(s+8)} = 0$$

انطلاقاً من هذه المعادلة المميزة نحصل على المحل الهندسي للجذور, المبين بالشكل (7-56). لتحقيق الشرط $\zeta = 0.69$ (المستنتج من المتطلب التصميمي DS3) نجد أنه يجب اختيار $K_p < 30$. لنختر قيمة لـ $K_p$ ولتكن $K_p = 26$. أيضاً لدينا $K_I/K_p = 2.5$, مما يقتضي أن $K_I = 65$. إن هذه القيمة تحقق الشرط المتعلق بالمتطلب التصميمي الثاني DS2 وذلك لأن $K_I = 65 > 64$.

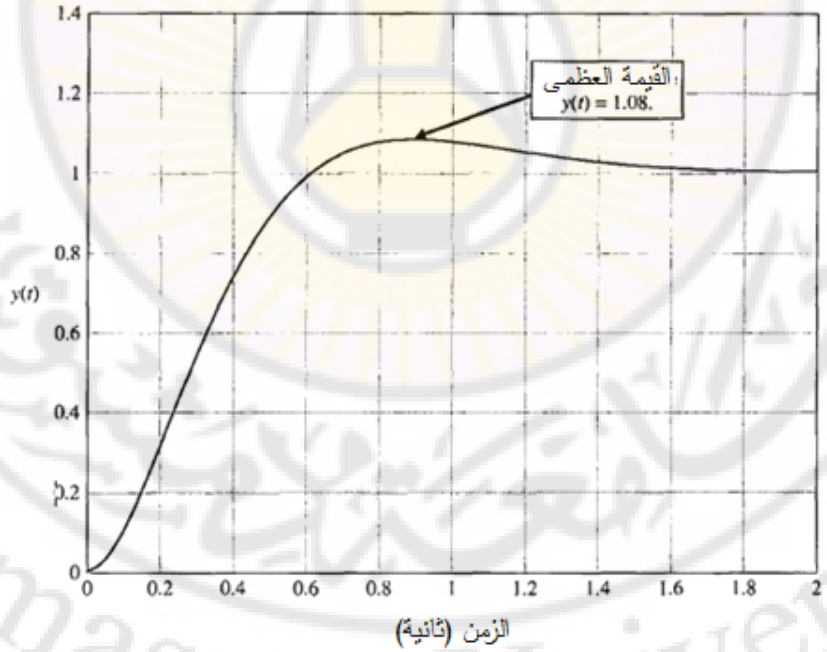
مما سبق نجد أن المتحكم التناسبي التكاملي التالي يحقق جميع المتطلبات التصميمية:

$$G_c(s) = 26 + \frac{65}{s} \qquad .....(102-7)$$

إن الاستجابة الخطوية للنظام ككل بعد اعتماد المتحكم التناسبي التكاملي الموصوف بالمعادلة (7-102) مبينة بالشكل (7-57).




**الشكل (7-56): المحل الهندسي للجذور وذلك من أجل** $K_I/K_p = 2.5$ .




**الشكل (7-57): الاستجابة الخطوية لنظام التحكم بسرعة العربة باستخدام المتحكم المعطى بالعلاقة (7-102).**

من الشكل (7-57) نجد أن الاستجابة الخطوية للنظام تبدي تجاوزاً نسبياً مقداره $P.O.\% = 8\%$, وزمن استقرار مقداره $T_s = 1.45$ ثانية. إن المتطلب التصميمي DS3 المتعلق بالتجاوز النسبي لم يتحقق بدقة ولكن المتحكم الموصوف بالعلاقة (7-102) يعد جيداً كتصميم أولي, حيث نستطيع أن نكرر الحساب من أجل عدة قيم لـ $K_p$ و $K_I$ تحقق الشروط, ومن ثم نحسب قيم التجاوز النسبي وزمن الاستقرار.

من ناحية أخرى, وبالرغم من أنه تم توضيع الأقطاب المسيطرة ضمن المنطقة المرغوبة من المستوي اللابلاسي, المبينة بالشكل (7-54), إلا أن استجابة النظام لا تحقق المتطلبات التصميمية بدقة وذلك أننا لم ندرس تأثير صفر المتحكم والذي يؤثر على استجابة النظام.

لابد أن نأخذ أيضاً بالحسبان أن النظام المدروس من الدرجة الثالثة وليس من الدرجة الثانية, وبالتالي فاستجابته لا تنطبق بشكل كامل على استجابة نظام من الدرجة الثانية. حتى يصبح النظام من الدرجة الثانية يجب توضيع صفر المتحكم عند النقطة $s = -2$ (وذلك باختيار $K_I / K_p = 2$) وبالتالي فإن تأثير القطب عند $s = -2$ سيتم إلغاؤه وينتج لدينا نظام من الدرجة الثانية بدون أصفار. في هذه الحالة ستكون استجابة النظام منطبقة على استجابة نظام من الدرجة الثانية. ■

**7-7 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

أدخلنا في الفقرة (7-6) نظام التحكم بوجود التغذية الخلفية بالسرعة. في هذا الفصل سنستخدم المتحكم التناسبي – التكاملي – التفاضلي (PID) للحصول على الاستجابة المطلوبة. سنبدأ أولاً في هذا المثال بنموذج النظام ومن ثم سنختار المتحكم وأخيراً سنختار القيم المثلى للبارامترات ومن ثم نحلل أداء النظام النظام بوجود المتحكم.

جرى, في هذا الفصل, التعريف بالمتحكم التناسبي – التكاملي – التفاضلي عن طريق تابع تحويله:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D.s$$

طالما أن تابع تحويل العملية المراد التحكم بها $G_2(s)$ تملك عنصر تكاملي, سنسند إلى $K_I$ القيمة صفر (أي $K_I = 0$). بالتالي يبقى لدينا المتحكم التناسبي – التفاضلي (PD) ذو تابع التحويل:

$$G_c(s) = K_p + K_D.s$$

إن هدفنا في هذه الفقرة هو تحديد قيم $K_p$ و $K_D$ بحيث نحقق المتطلبات التصميمية.

من الشكل (7-58) المبين للنظام المدروس نجد أن تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G_c(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

حيث: $H(s) = 1$ . بغية الحصول على المحل الهندسي للجذور كتابع لأحد البارامتر, سنكتب $G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)$ على النحو التالي:

$$G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{5000(K_p + K_D.s)}{s(s+20)(s+1000)} = \frac{5000K_D(s+z)}{s(s+20)(s+1000)}$$

حيث: $z = K_p / K_D$ .

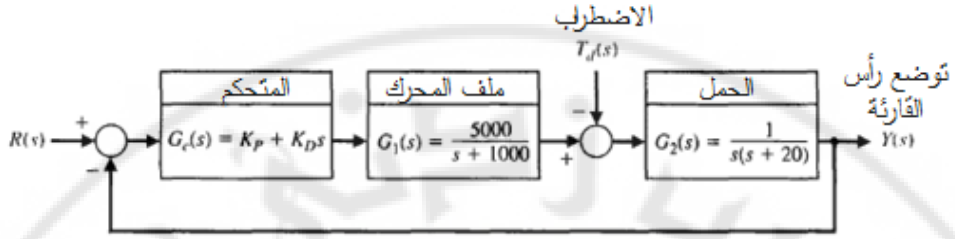
سنعتمد على $K_p$ في تحديد موقع صفر النظام ( $z$ ) في المستوي اللابلاسي, ومن ثم سنرسم المحل الهندسي كتابع لـ $K_D$. بالاعتماد على الأمثلة التصميمية المشروحة بالفقرة (7-6) سنختار $z = 1$, وبالتالي:

$$G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{5000K_D(s+1)}{s(s+20)(s+1000)}$$

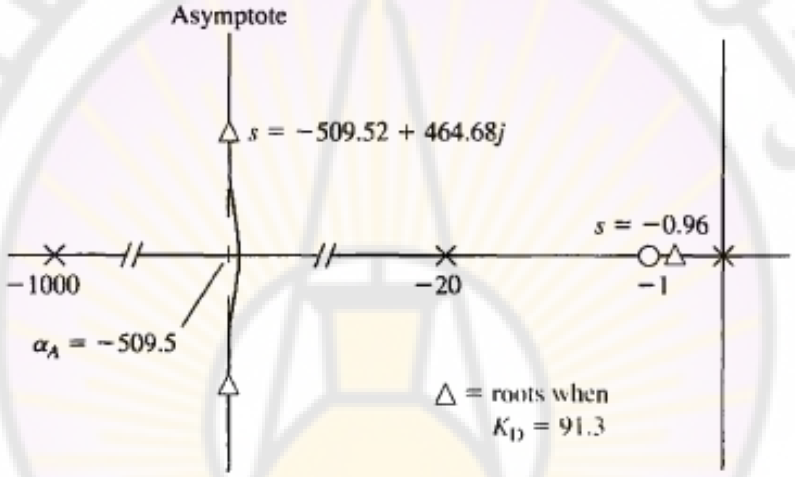
بما أن الفرق بين عدد الأقطاب وعدد الأصفار يساوي (2) بالتالي نتوقع وجود مستقيمين مقاربين يصنعان زاوية ( $\phi_A = \pm 90^\circ$ ) مع المحور الأفقي ومتمركزان عند النقطة:

$$\sigma_A = \frac{-1020 + 1}{2} = -509.5$$

يمكننا أن نكمل رسم المحل الهندسي للجذور ليبدو على النحو المبين بالشكل (7-59).




**الشكل (7-58): التحكم بقارئة الأقراص المدمجة باستخدام المتحكم (PD).**




**الشكل (7-59): المحل الهندسي للجذور لنظام قارئة الأقراص المدمجة بدلالة $K_D$.**

من أجل $K_D = 91.3$ نجد أن جذور المسيطرة للنظام $s = -509.5 \pm j464.68$ وذلك كما هو موضح بالشكل (7-59). بالاعتماد على قيم $K_D = K_p = 91.3$ نحسب الاستجابة الخطوية للنظام, حيث يلخص الجدول (7-10) خصائص هذه الاستجابة.

**الجدول (7-10): خصائص الاستجابة الخطوية لنظام القارئة المدمجة**

| الخاصية | القيمة المطلوبة | القيمة الحالية |
|---|---|---|
| التجاوز النسبي | أقل من 5% | 0% |
| زمن الاستقرار | أقل من 250 ميلي ثانية | 20 ميلي ثانية |
| الاستجابة العظمى لإشارة اضطراب واحدية | أقل من $5*10^{-3}$ | $2*10^{-3}$ |

**7-8 خاتمة:**

ترتبط الحساسية النسبية والاستجابة العابرة لنظام الحلقة المغلقة مباشرة مع مكان توضع جذور المعادلة المميزة في المستوي اللابلاسي. بناءاً عليه, بحثنا عن طريقة لتتبع حركة جذور المعادلة المميزة في المستوي اللابلاسي وذلك عند تغير أحد بارامترات النظام, وكانت هذه الطريقة هي المحل الهندسي للجذور. إن المحل الهندسي للجذور هي طريقة بيانية تسمح لنا بالحصول على مخطط أولي تقريبي لسلوك النظام وبالتالي يمكننا اختبار التصميم الأولي لنظام التحكم وتحديد التعديلات اللازمة في بنية النظام وقيم بارامتراته. يمكن أيضاً استخدام الحاسب لحساب الجذور في مواقع مختلفة من المحل الهندسي للجذور.

تم التطرق أيضاً إلى حساسية جذور المعادلة المميزة لبعض التغيرات غير مرغوبة لأحد البارامترات, وعرفنا ما يسمى بحساسية الجذر. من الواضح أن طريقة المحل الهندسي للجذور طريقة مفيدة وفعالة في تحليل وتصميم نظم التحكم الحديثة وستظل أحد أهم الإجرائيات المستخدمة في هندسة التحكم.

# الفصل الثامن: الاستجابة الترددية لنظم التحكم الخطية

# Chapter 8: Frequency response of linear control systems

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

درسنا في الفصول السابقة الاستجابة الزمنية لنظم التحكم, حيث تُمثل استجابة النظام بدلالة الزمن, ومن ثم يستنبط منها خصائص النظام المدروس في المستوي الزمني. سنتناول في هذا الفصل الاستجابة الترددية لنظم التحكم الخطية.

في الفصول السابقة وعند دراسة الاستجابة الزمنية للنظم كانت إشارات الدخل القياسية المطبقة إما الإشارة الخطوية أو الإشارة الصاعدة. في هذا الفصل, وعند دراسة الاستجابة الترددية, نجد أن إشارة الدخل الواجب تطبيقها هي الإشارة الجيبية. سنرى فيما يلي أن استجابة نظام خطي, ذو معاملات ثابتة, إلى إشارة دخل جيبية هي أيضاً إشارة جيبية لها نفس تردد إشارة الدخل, ولكن مطال وصفحة إشارة الخرج يختلفان عن مطال وصفحة إشارة الدخل, حيث أن مقدار هذا الاختلاف يعتمد على تردد إشارة الدخل. لذلك يتوجب علينا أن ندرس في هذا الفصل استجابة النظام في الحالة المستقرة وذلك عند تطبيق إشارة دخل بتردد متغير. سنعود في هذا الفصل إلى تابع تحويل النظام المدروس $G(s)$ ونستبدل كل $(s)$ في هذا التابع بـ $j\omega$, وسنقدم الطرق اللازمة لإظهار المقدار العقدي $G(j\omega)$ بيانياً, وذلك عند تغير $\omega$.

تعد منحنيات نايكوست وبود من أكثر الأدوات البيانية فعالية في تصميم وتحليل نظم التحكم, حيث سنقوم في هذا الفصل بدراسة هذه المنحنيات وطريقة رسمها. سنقدم أيضاً طريقة حساب معايير الاستجابة التي درسناها سابقاً, ولكن بدلالة الاستجابة الترددية للنظام. ثم نختم هذا الفصل بتحليل الاستجابة الترددية لنظام قارئة الأقراص المدمجة.

**8-1 مقدمة:**

في الفصول السابقة درسنا استجابة وخصائص أداء نظم التحكم في المستوي الزمني بدلالة المتحول اللابلاسي وموقع أقطاب وأصفار النظم في المستوي اللابلاسي. يوجد طريقة بديلة مهمة ومفيدة جداً في تصميم وتحليل نظم التحكم هي طريقة الاستجابة الترددية.

**تُعرف الاستجابة الترددية لنظام بأنها الاستجابة في الحالة المستقرة وذلك عند تطبيق إشارة دخل جيبية. إن إشارة الدخل الوحيدة المستخدمة في دراسة الاستجابة الترددية هي الإشارة الجيبية حيث أن إشارة خرج النظام الخطي بالإضافة إلى الإشارات الداخلية في النظام هي أيضاً إشارات جيبية, وذلك خلال المرحلة المستقرة. تختلف إشارة الخرج عن إشارة الدخل بالمطال والصفحة.**

يتم التعبير عن خصائص المرحلة المستقرة للاستجابة الترددية بواسطة مطال وفرق صفحة إشارة الخرج, والتي ترتبط مباشرة بالخصائص الديناميكية للنظام, أو بمعنى آخر: ترتبط مباشرة بتابع تحويل النظام. لنطبق إشارة الدخل الجيبية التالية:

$$r(t) = A_1 \sin \omega t .....(1-8)$$

حيث: $A$ مطال إشارة الدخل, و $\omega$ التردد الزاوي لإشارة الدخل وتعطى بـ $(rad/sec)$.

في هذه الحالة, ستكون استجابة الحالة المستقرة للنظام الخطي:

$$y(t) = A_2 \sin(\omega t - \phi) ....(2-8)$$

حيث ∅ هو فرق الصفحة بين إشارة الدخل الجيبية $r(t)$ وإشارة الخرج الجيبية $y(t)$, وذلك كما هو مبين بالشكل (8-1).

للتحقق من حقيقة أن إشارة الخرج هي أيضاً جيبية ولكن تختلف عن إشارة الدخل بالمطال والصفحة, سندرس النظام ذو إشارة الخرج $Y(s) = T(s) * R(s)$ حيث سنطبق على دخل هذا النظام إشارة الدخل الجيبية $r(t) = A \sin \omega t$. في هذا النظام لدينا:

$$R(s) = \frac{A_1 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$T(s) = \frac{m(s)}{q(s)} = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)} ....(3-8)$$

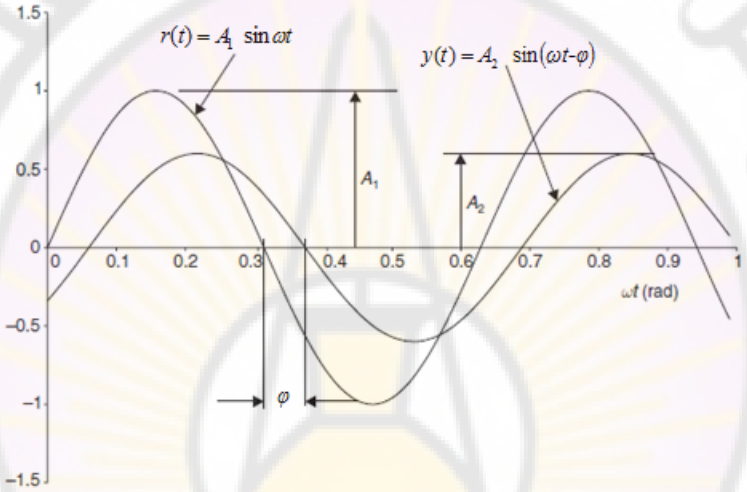
حيث $(-p_i)$ هي أقطاب النظام المدروس. لنفرض أن أقطاب هذا النظام هي أعداد حقيقية وبسيطة. يمكن كتابة إشارة خرج النظام, باستخدام قاعدة تفريق الكسور على النحو التالي:

$$Y(s)=\frac{K_1}{s+p_1}+.....+\frac{K_n}{s+p_n}+\frac{\alpha s+\beta}{s^2+\omega^2}....(4-8)$$

حيث $\alpha$ و $\beta$ ثوابت عددية.

لنعود بالإشارة Y(s) إلى المستوي الزمني وذلك باستخدام تحويل لابلاس العكسي:

$$y(t)=K_1e^{-p_1t}+.....+K_ne^{-p_nt}+Laplace^{-1}\left\{\frac{\alpha s+\beta}{s^2+\omega^2}\right\}....(4-8)$$




**الشكل (8-1): إشارات الدخل والخرج الجيبية لنظام خطي وذلك في الحالة المستقرة.**

إذا كان النظام مستقر وكانت جميع الأقطاب $p_i$ أعداد حقيقية موجبة, ينتج لدينا:

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to0}Laplace^{-1}\left\{\frac{\alpha s+\beta}{s^2+\omega^2}\right\}....(6-8)$$

وذلك لأن جميع الحدود الآسية من الشكل $K_ie^{-p_it}$ ستتخامد (تسعى نحو الصفر), عندما $t\to\infty$. بالتالي تصبح علاقة $y(t)$ في الحالة المستقرة (عندما $t\to\infty$) على النحو التالي:

$$y(t)=Laplace^{-1}\left\{\frac{\alpha s+\beta}{s^2+\omega^2}\right\}$$

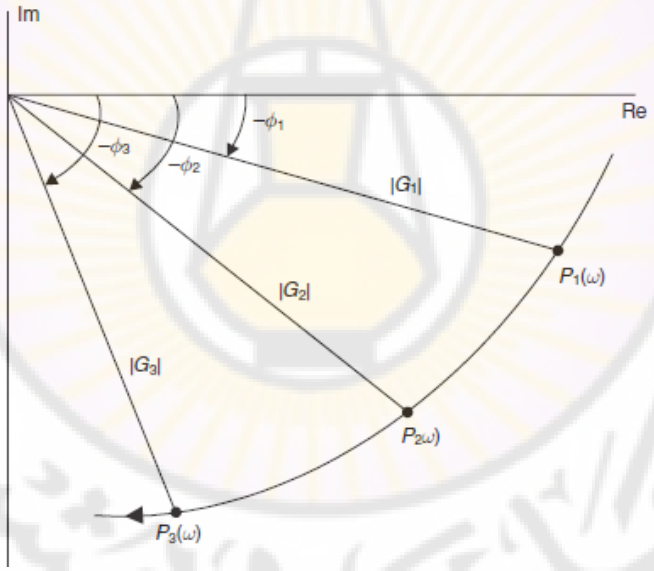
$$=\frac{1}{\omega}\left|A_1\omega T(j\omega)\right|.\sin(\omega t-\phi)$$

$$=A_1\left|T(j\omega)\right|.\sin(\omega t-\phi)....(7-8)$$

حيث: $\phi = \angle T(j\omega)$.

من العلاقة (7-8) نجد أن إشارة الخرج في الحالة المستقرة هي إشارة جيبية أيضاً مطالها ($A_2 = A_1.|T(j\omega)|$), أي طويلة إشارة الخرج تعتمد على مطال وصفحة , وذلك عند تردد معين, كما أن فرق صفحة إشارة الخرج $\phi$.

تمثل المعادلة (7-8) نقطة في المستوي العقدي وذلك من أجل قيمة ثابتة للتردد الزاوي $\omega$. عندما تتغير قيمة $\omega$ من الصفر إلى اللانهاية (أو $\omega \to \infty$) فسيتولد منحني في المستوي العقدي. هذا المنحني المبين بالشكل (8-2) هو المنحني القطبي حيث أن شكل هذا المنحني يعتمد فقط على الخصائص الديناميكية للنظام. يدعى هذا المنحني أيضاً بمنحني الاستجابة الترددية.




**الشكل (8-2): منحني الاستجابة الترددية.**

**مما سبق نجد أن النظام الخطي سيغير على خرجه من مطال وزاوية طور إشارة دخله الجيبية. إن الهدف من دراسة الاستجابة الترددية هو دراسة كيفية تغير مطال الإشارة وزاوية الطور بدلالة التردد الزاوي.**

**الميزة الأولى للاستجابة الترددية** هو توافر إشارات الاختبار الجيبية وذلك من أجل طيف واسع من الترددات والمطالات وبالتالي يمكن أن تتم عملية الدراسة التجريبية للاستجابة الترددية بسهولة. أيضاً, وكما سنرى في الفقرة 8-5, يمكننا تحديد تابع التحويل لنظام عن طريق الاستجابة الترددية لهذا النظام المستنتجة تجريبياً, بالإضافة إلى ذلك, تمنح طرق تصميم المتحكمات في المستوي الترددي, المصمم إمكانية التحكم بعرض المجال الترددي للنظام, وقياس تأثير الضجيج والاضطرابات على الاستجابة الترددية للنظام.

**الميزة الثانية للاستجابة الترددية** هي إمكانية الحصول على تابع التحويل الواصف للسلوك الترددي للنظام في الحالة المستقرة, وذلك بالاعتماد على تابع تحويل النظام $T(s)$ حيث نستبدل كل $s$ بـ $j\omega$ . إن التابع الناتج $T(j\omega)$ تابع عقدي ذو طويلة وزاوية. يمكن تمثيل مطال وزاوية التابع العقدي $T(j\omega)$ بيانياً, لتستخدم فيما بعد في تحليل وتصميم نظم التحكم.

**إن السيئة الأساسية** لاستخدام الاستجابة الترددية في تصميم وتحليل نظم التحكم هي العلاقة غير المباشرة بين الاستجابتين الزمنية والترددية للنظام. عملياً يوجد معايير تصميمية خاصة بالاستجابة الترددية حيث أن التصميم على أساسها سيؤدي للحصول على استجابة عابرة مقبولة.

**8-2 منحنيات الاستجابة الترددية:**

تستخدم منحنيات الاستجابة الترددية لدراسة الخواص الترددية لنظم التحكم حيث أن الدراسة الرياضية لهذه الخواص صعبة, لذلك يستغنى عنها بالدراسة البيانية والتي يمكن الحصول عليها بأشكال مختلفة.

سنشرح فيما يلي كيفية رسم منحنيات الاستجابة الترددية للنظام المدروس انطلاقاً من علاقة تابع تحويله. ليكن لدينا النظام الموصوف بتابع التحويل $G(s)$. يمكن كتابة علاقة تابع التحويل في المستوي الترددي على النحو التالي:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX\ (\omega) \dots\dots (8-8)$$

حيث:

$$R(\omega) = Re[G\ (j\omega)]$$
$$X\ (\omega) = Im[G\ (j\omega)]$$

يمكن كتابة العلاقة (8-8) على النحو التالي:

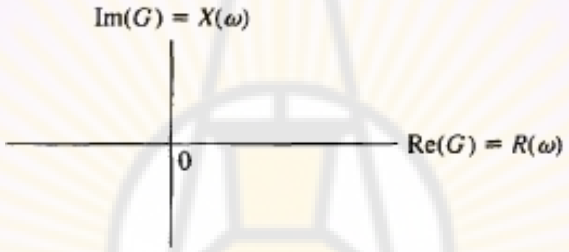
$$G\,(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\emptyset(\omega)} = |G\,(j\omega)|\angle\emptyset(\omega) \ldots\ldots (9-8)$$

حيث:

$$\emptyset(\omega) = \tan^{-1}\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

$$|G(j\omega)|^2 = [R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2$$

إن التمثيل البياني للاستجابة الترددية للنظام $G(j\omega)$ يمكن أن يتم إما بالاعتماد على المعادلة (8-8) أو المعادلة (8-9). يعتمد المنحني القطبي للاستجابة الترددية للنظام على المعادلة (8-8), حيث إن احداثيات المنحني القطبي هما القسمان الحقيقي والتخيلي لـ $G(j\omega)$, وذلك كما هو مبين بالشكل (8-3).




**الشكل (8-3): المستوي القطبي.**

**مثال 8-1: الاستجابة الترددية للمرشح RC ( Frequency response of an RC filter):**

يبين الشكل (8-4) دارة المرشح $RC$, حيث يُعطى تابع تحويل هذا المرشح بالعلاقة:

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs+1} \ldots\ldots\ldots (10-8)$$

بالاعتماد على العلاقة (8-10) نجد أن تابع التحويل في المستوي الترددي:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(RC)+1} = \frac{1}{j(\frac{\omega}{\omega_1})+1} \ldots\ldots\ldots (11-8)$$

حيث:

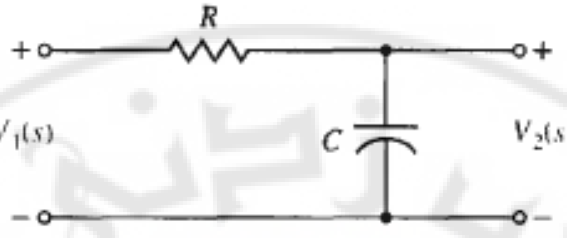
$$\omega_1 = \frac{1}{RC}$$

يتم الحصول على المنحني القطبي من العلاقة التالية:

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$= \frac{1-j(\frac{\omega}{\omega_1})}{(\omega/\omega_1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{(\omega/\omega_1)^2+1} - j\,\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{(\omega/\omega_1)^2+1} \ldots\ldots (12-8)$$




**الشكل (8-4): مرشح RC.**

تقوم الخطوة الأولى لرسم المنحني القطبي على حساب $R(\omega)$ و$X(\omega)$ وذلك عند الترددين $\omega = 0$ و $\omega = \infty$. بالتعويض بالعلاقة (8-12) نجد: $R(0) = 1$ و$X(0) = 0$, $R(\infty) = X(\infty) = 0$. يبين الشكل (8-5) هاتين النقطتين, بالإضافة إلى المحل الهندسي لـ $R(\omega)$ و$X(\omega)$ الواقع على شكل نصف دائرة متمركزة في النقطة $(0.5,0)$. عندما $\omega = \omega_1$ نجد أن $R(\omega_1) = X(\omega_1)$ و$\emptyset(\omega) = 45°$. يمكن ايضاً رسم المنحني القطبي للمرشح بكتابة المعادلة (8-11) وفق الشكل المبين بالمعادلة (8-9), أي:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle\emptyset(\omega) \dots\dots\dots (13-8)$$

حيث:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}}$$

$$\emptyset(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/\omega_1)$$

عندما $\omega = \omega_1$ نجد أن $|G(j\omega_1)| = 1/\sqrt{2}$ , وزاوية الطور $G(\omega_1) = -45°$. عندما تقترب $\omega$ من اللانهاية نجد أن $|G(j\omega)| \to 0$ و $\emptyset(\omega) \to -90°$ . بالمقابل عندما $\omega = 0$ نجد أن $|G(j\omega)| = 1$ و $\emptyset(\omega) = 0°$.

**مثال 8-2: المنحني القطبي لتابع تحويل (Polar plot of a transfer Function):**

يُعَدّ المنحني القطبي مفيداً جداً للتحقق من استقرار النظام, وذلك كما سنرى في الفصل القادم. لهذا السبب نجد من المفيد أن نعالج مثال آخر. لنأخذ تابع التحويل التالي:

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau+1)} = \frac{K}{j\omega-\omega^2\tau} \dots\dots (14-8)$$

يمكن كتابة هذه العلاقة (8-14) على النحو التالي :

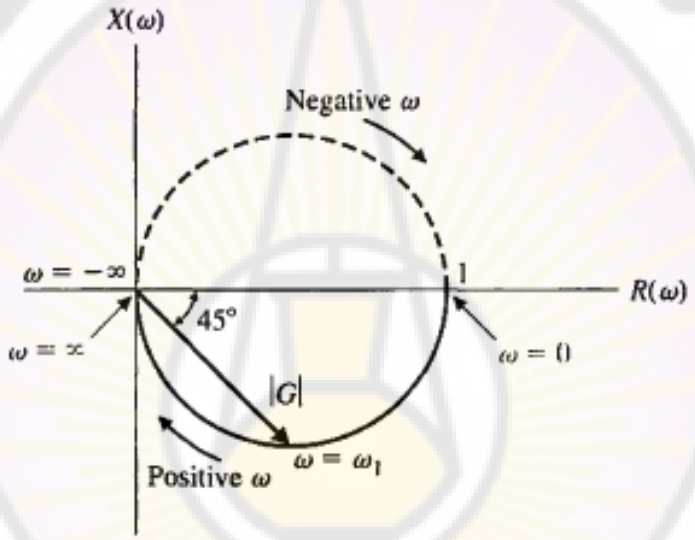
$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle\emptyset(\omega)$$

حيثُ :

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+\omega^4\tau^2}}$$
$$\emptyset(\omega) = -\tan^{-1}(-1/\omega\tau)$$

لنحسب قيم المطال $|G(j\omega)|$ والصفحة عند الترددات $\omega = 1/\tau$ , $\omega = \infty$, $\omega = 0$ .

يلخص الجدول (8-1) قيم المطال والصفحة عند هذه الترددات, كما يبيّن الشكل (8-6) المنحني القطبي للتابع $G(j\omega)$.




**الشكل (8-5): المنحني القطبي لمرشح *RC*.**

| **الجدول (8-1): قيم المطال والصفحة لتابع التحويل المدروس بالمثال 8-2 وذلك عند ترددات معينة** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | 0 | $1/2\tau$ | $1/\tau$ | $+\infty$ |
| $\|G(j\omega)\|$ | $\infty$ | $4K\tau/\sqrt{5}$ | $K\tau/\sqrt{2}$ | 0 |
| $\emptyset(\omega)$ | $-90°$ | $-117°$ | $-135°$ | $-180°$ |

يوجد طريقة ثانية لحساب المنحني القطبي تقوم على كتابة التابع $G(j\omega)$ على شكل جزء حقيقي وتخيلي, على النحو التالي:

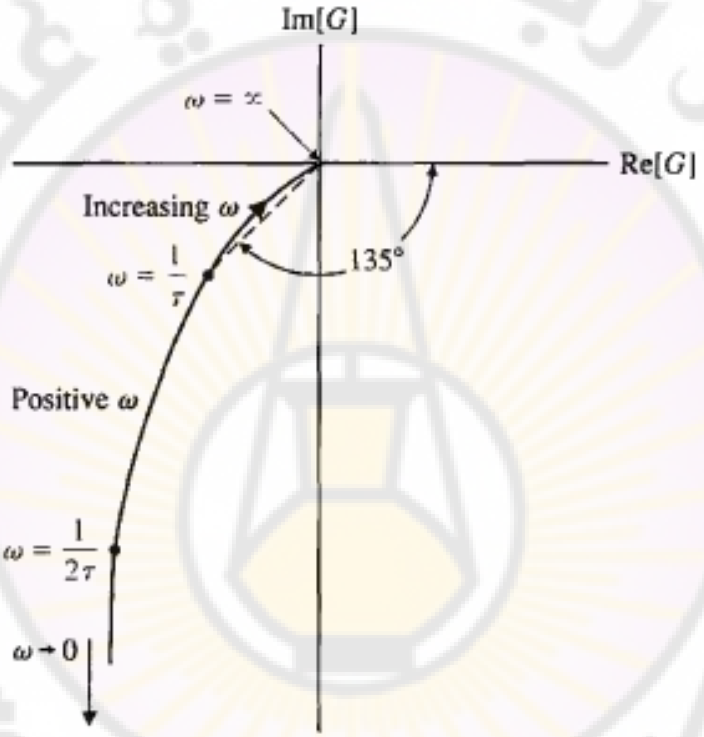
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega-\omega^2\tau} = \frac{K(-j\omega-\omega^2\tau)}{\omega^2+\omega^4\tau^2} = R(\omega) + jX(\omega) \quad \ldots\ldots (15-8)$$

حيثُ: $R(\omega) = -K\omega^2\tau/M(\omega)$ ,$X(\omega) = -\omega K/M(\omega)$ و $M(\omega) = \omega^2 + \omega^4\tau^2$.

- عندما $\omega = \infty$ نجد: $R(\omega) = X(\omega) = 0$.

- عندما $\omega = 0$ نجد: $X(\omega) = -\infty$ , $R(\omega) = -K\tau$.
- من أجل $\omega = 1/\tau$ نجد: $X(\omega) = -K\tau/2$ , $R(\omega) = -K\tau/2$.

إنّ هذه النقاط المحسوبة مبينة بالشكل (6-8).




**الشكل (6-8): المنحني القطبي للتابع** $G(j\omega) = K/j\omega(j\omega\tau + 10)$ **لاحظ أنّ** $\omega = \infty$ **عند مركز الاحداثيات.**

الطريقة الثالثة للحصول على المنحني القطبي هو حساب الشعاع $G(j\omega)$ بيانياً عند ترددات مختلفة لـ $\omega$, ورسمه في المستوي اللابلاسي, حيث نحن بصدد دراسة التابع:

$$G(s) = \frac{K/\tau}{s(s+1/\tau)}$$

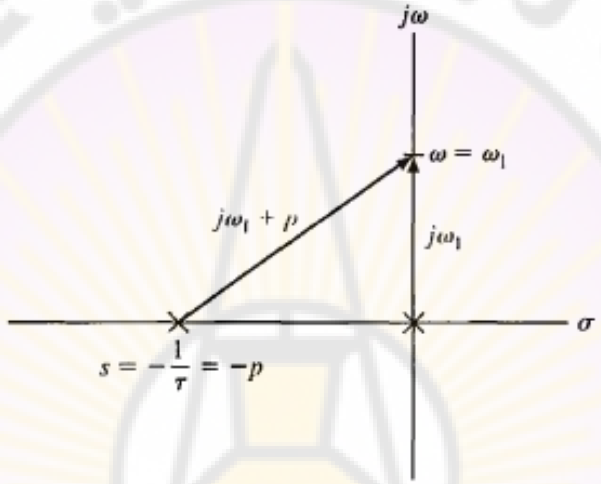
يملك هذا التابع قطبين مبينيين بالشكل (7-8). عندما $s = j\omega$ ينتج لدينا:

$$G(j\omega) = \frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+p)}$$

حيث $p = 1/\tau$. يمكن أن يُحسب مطال وزاوية التابع $G(j\omega)$ عند ترددات معينة $\omega_1$ تقع على المحور التخيلي $j\omega$ , وذلك كما هو مبين بالشكل (8-7). يُعطى مطال وصفحة التابع $G(j\omega)$ بالعلاقات:

$$|G(j\omega_1| = \frac{K/\tau}{|j\omega_1||j\omega_1+p|}$$

■ $$\emptyset(\omega) = -\angle(j\omega_1) - \angle(j\omega_1 + p) = -90° - \tan^{-1}(\omega_1/p)$$




**الشكل (8-7): شعاعين في المستوي اللابلاسي وذلك لحساب** $G(j\omega_1)$.

مما سبق يمكننا ملاحظة أنه توجد عدة طرق لرسم الاستجابة الترددية للنظام, وهي:

1- رسم المنحني القطبي بالاعتماد على المعادلة (8-14). يستخدم هذا المنحني بشكل واسع لدراسة الاستقرار وفق معيار نايكويست, لذلك يسمّى أحياناً **بمنحني نايكويست.** في الواقع تعاني المنحنيات القطبية من سيئة واضحة, وهي أنّ إضافة أصفار أو أقطاب للنظام المدروس يتطلّب إعادة حساب الاستجابة الترددية, وذلك كما لاحظنا في الأمثلة (8-1) و (8-2). بالإضافة لذلك, يعتبر حساب الاستجابة الترددية عدد من المرّات عمل مُمل, كما أنّه لا يُظهر تأثير كل قطب وصفر في النظام. إنّ مسقط نقطة ما من منحني نايكويست على المحاور الحقيقية والتخيلية هي $Re[G(j\omega)]$ , $Im[G(j\omega)]$ أمّا الزاوية $\emptyset(\omega)$ فهي الزاوية المُشكّلة بين $|G(j\omega)|$ مع المحور الحقيقي, عادةً ما يتم توجيه المنحني باتجاه تزايد $\omega$.

2- رسم منحنيات المطال, وفرق الصفحة بدلالة التردد, أي نرسم منحنيين مختلفين:
الأول: منحني الخواص الترددية للمطال, والثاني: منحني الخواص الترددية الطورية.
نشير إلى هذه المنحنيات بمنحنيات الاستجابة الترددية.

3- رسم منحنيات الخواص الترددية اللوغاريتمية, والتي تُرسم على أوراق نصف لوغاريتمية. نرسم المنحنيات اللوغاريتمية التالية:

الأول: منحني الخواص الترددية اللوغاريتمية للمطال.

الثاني: منحني الخواص الترددية اللوغاريتمية للصفحة (أو الطور).

تستخدم منحنيات الخواص الترددية اللغاريتمية لدراسة الاستقرار, وتسمى أيضاً **منحنيات بود**, نسبةً إلى العالم بود, الذي استخدم هذه المنحنيات بشكل واسع في دراسة التغذية الخلفية لمكبرات العمليات. يُعطى تابع التحويل في المستوي الترددي بالعلاقة:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\emptyset(\omega)} \dots\dots\dots (16-8)$$

يُعبّر عادةً, عن اللوغاريتم العشري للمطال بالعلاقة $20\,log_{10}|G(j\omega)|$. يسمى هذا المقدار بكسب النظام, ويقاس بالديسبل, أي:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\,log_{10}|G(j\omega)| \dots\dots\dots\dots (17-8)$$

لرسم منحنيات بود نحتا ج إلى ورق رسم بياني خاص هو الورق النصف لوغاريتمي والذي محوره الأفقي مدرّج تدريجاً لوغاريتمياً, ومقسّم إلى نطاقات, عرض كل نطاق من مضاعفات العشرة $(1,10,100,1000,\dots.)$ ويسمّى الديكاد (Decade), بينما المحور العمودي مدرّج تدريجاً عادياً.

**مخطط بود عبارة عن رسم على ورق نصف لوغاريتمي لمنحنيات كسب المطال وزاوية الطور بدلالة التردد $\omega$.**

يتم رسم منحني الكسب على محور العينات (أو المحور $y$) بالديسبل, والذي يساوي:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\,log_{10}|G(j\omega)|$$

أما محور السينات (أو المحور $x$) فيمثّل التردد, وهو مقسّم بالتدريجات اللوغاريتمية. كما يتم رسم منحني زاوية الطور على محور العينات والتردد على محور السينات المقسّم أيضاً بالتدريجات اللوغاريتمية

يمكن أن نجمّل ميزات استخدام هذه المنحنيات بما يلي:

1- تتحول الجداءات والقسمة في العلاقة الجبرية إلى حاصل جمع وطرح في العلاقة اللوغاريتمية, مما يسهل عملية الحصول على منحنيات الخواص اللوغاريتمية للنظم.

2- يمكن رسم هذه المنحنيات باستخدام الخطوط المقاربة.

3- باختيار المقياس اللوغاريتمي نستطيع دراسة تأثير التردد على النظام بمجالات ترددية عريضة جداً.

**تعريف الأوكتاف (Octave) والديكاد (Decade):**

**الأوكتاف (Octave):** مجال ترددي حده الأعلى ضعف حده الأدنى, أي $\omega_2 = 2\omega_1$, بالتالي لحساب عدد الأوكتافات في مجال ترددي معين $[\omega_1, \omega_2]$ نستخدم العلاقة التالية:

$$\mathrm{N} = \frac{log\frac{\omega_2}{\omega_1}}{log2}$$

**الديكاد (Decade):** مجال ترددي حده الأعلى عشرة أضعاف حده الأدنى أي $\omega_2 = 10\omega_1$ , بالتالي لحساب عدد الديكادات في المجال الترددي $[\omega_1, \omega_2]$, نستخدم العلاقة التالية:

$$\mathrm{N} = \frac{log\frac{\omega_2}{\omega_1}}{log10} = log\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

يبين الجدول التالي (8-2) بعض القيم الرياضية و القيمة المقابلة بالديسبل.

من الجدول (8-2) نجد:

- عندما يتضاعف المقدار تتغير القيمة المقابلة بالديسبل بمقدار 6 ديسبل.
- عندما يتغير المقدار بمقدار عشرة أضعاف تتغير القيمة المقابلة له بالديسبل بمقدار 20 ديسبل.
- عندما نقلب المقدار تتغير إشارته.

| الجدول (8-2): جدول بعض القيم الرياضية ومقابلها بالديسبل | | | |
|---|---|---|---|
| القيمة الرياضية | القيمة المقابلة بالديسبل | القيمة الرياضية | القيمة المقابلة بالديسبل |
| 0.01 | -40 | 2 | 6 |
| 0.1 | -20 | 10 | 20 |
| 0.5 | -6 | 20 | 26 |
| 0 | 1 | 100 | 40 |

### 8-3 الاستجابة الترددية لنظم الدرجة الأولى والثانية:

#### 8-3-1 الاستجابة الترددية لنظم الدرجة الأولى:

يعطى تابع تحويل نظام من الدرجة الأولى بالعلاقة :

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s} \dots\dots\dots\dots (18-8)$$

عند تطبيق إشارة دخل جيبية, نحصل على الاستجابة الترددية للنظام. لحساب معامل كسب النظام بالديسبل نقوم بتعويض كل $s$ بـ $j\omega$ في العلاقة (8-23) فنجد:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau} \dots\dots\dots\dots (19-8)$$

لنضرب كلاً من البسط والمقام في المعادلة (8-24) بمرافق المقام فنجد أن:

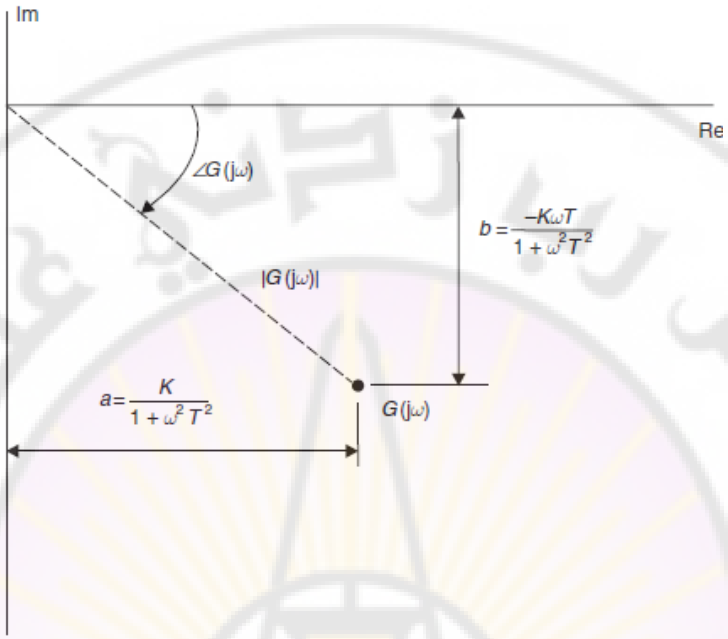
$$G(j\omega) = \frac{K(1-j\omega\tau)}{1+(\omega\tau)^2} \dots\dots\dots\dots (20-8)$$

لنكتب المعادلة (8-25) على الشكل القياسي لأي كمية عقدية $(a+jb)$, وبالتالي نجد أن:

$$a = \frac{K}{1+(\omega\tau)^2} \dots\dots\dots\dots (21-8)$$

$$a = \frac{-K\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \dots\dots\dots\dots (22-8)$$

وبالتالي يمكن أن ترسم المعادلة (8-22) في المستوي العقدي وذلك للحصول على منحني نايكويست المبين بالشكل (8-8).




**الشكل (8-8):نقطة من منحني نايكويست لنظام من الدرجة الأولى.**

من الشكل (8-8) نجد أن الإحداثيات القطبية :

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{K}{1+(\omega\tau)^2}\right) + ^2 \left(\frac{-K\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\right)^2} \dots\dots\dots\dots (23-8)$$

والتي يمكن أن تبسط على النحو التالي :

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \dots\dots\dots\dots\dots (24-8)$$

بمقارنة المعادلات (8-20) و (8-24), وبافتراض أنه لا يوجد أصفار في تابع التحويل, فإن العلاقة التالية صحيحة دائماً:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{Denominator\ of\ G(j\omega)}} \dots\dots\dots\dots\dots (25-8)$$

أما علاقة فرق الطور أو الصفحة لنظام من الدرجة الأولى:

$$\emptyset = \tan^{-1}(b/a)$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\left\{\frac{-K\omega\tau/(1+(\omega\tau)^2)}{K/(1+(\omega\tau)^2)}\right\} = \tan^{-1}(-\omega\tau) \dots\dots\dots (26-8)$$

باستخدام المعادلات (8-25) و (8-26) يمكن حساب معامل الكسب $|G(j\omega)|$ وفرق الصفحة $\emptyset$ لنظام من الدرجة الأولى, والتي يمكن تلخيصها بالجدول (8-3).

يمكن أن تُمثل النتائج المبينة بالجدول (8-3) إما في الإحداثيات القطبية (الشكل 8-9- أ) فنحصل على ما يسمى بمنحني نايكوست أو في الإحداثيات الديكارتية (الأشكال 8-9- ب, 8-9- جـ) فنحصل على ما يسمى بمنحنيات الاستجابة الترددية.

| **الجدول (8-3): معامل كسب المطال وفرق الصفحة لنظام من الدرجة ا لأولى** | | |
|---|---|---|
| $\omega$ (rad/sec) | $\|G(j\omega)\|$ | $\emptyset$ |
| 0 | $K$ | 0 |
| $1/\tau$ | $K/\sqrt{2}$ | $-45°$ |
| $\infty$ | 0 | $-90°$ |

**8-3-2 الاستجابة الترددية لنظم الدرجة الثانية:**

يعطى الشكل العام لتابع تحويل نظام من الدرجة الثانية بالعلاقة:

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n{}^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1} \dots\dots\dots\dots (27-8)$$

باستبدال $s$ بـ $j\omega$ في المعادلة (8-32) نجد:

$$G(j\omega) = \frac{K}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_n{}^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega)+1} \dots\dots\dots\dots (28-8)$$

أو:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}+j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega} \dots\dots\dots\dots (29-8)$$

لنضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقام فنجد أن:

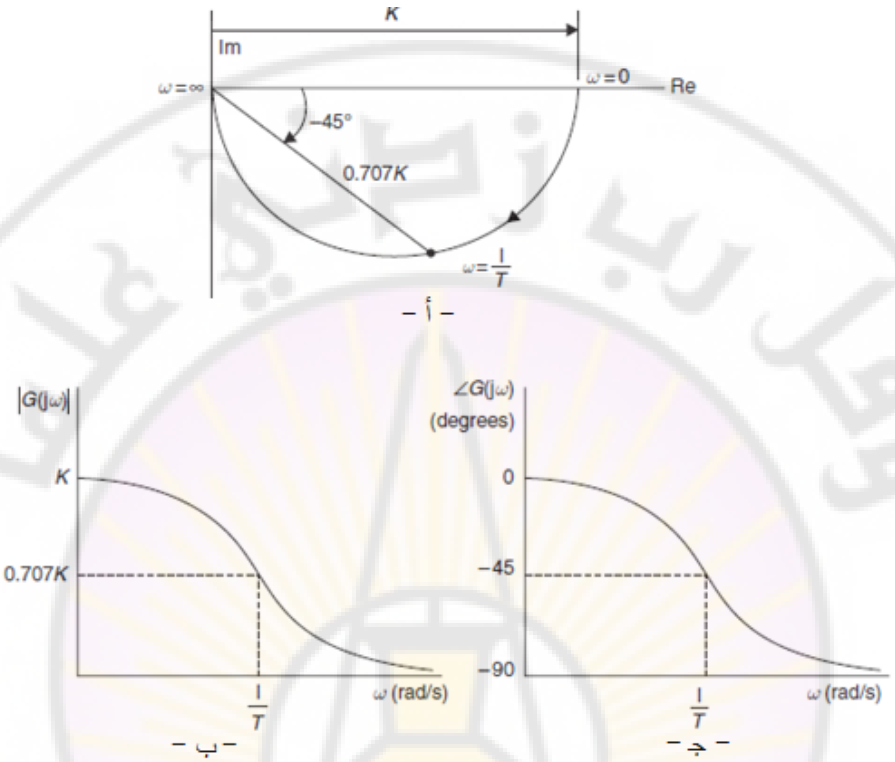
$$G(j\omega) = \frac{K\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)-j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right]}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega)^2} \dots\dots\dots\dots (30-8)$$

باستخدام المعادلات (8-30) نجد أن معامل كسب المطال لنظام من الدرجة الثانية:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega)^2}} \dots\dots\dots\dots (31-8)$$

أما فرق الصفحة لنظام من الدرجة الثانية فهو:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \dots\dots\dots\dots (32-8)$$



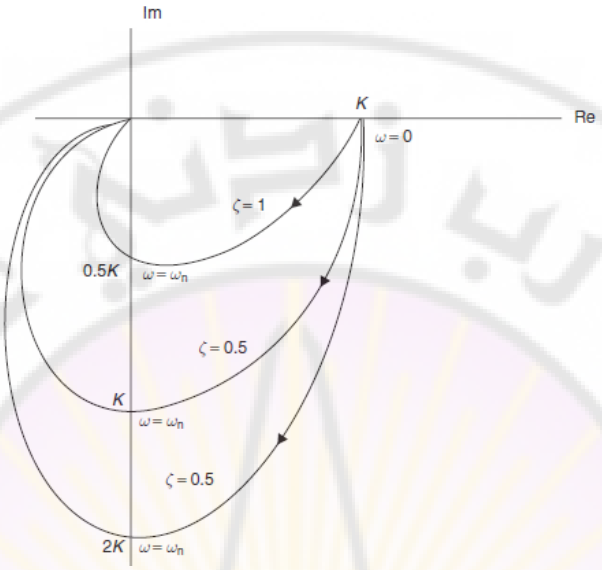

**الشكل (8-9):الاستجابة الترددية لنظام من الدرجة الأولى, أ – منحني نايكويست , ب – جـ – منحنيات الاستجابة الترددية.**

باستخدام المعادلات (8-31) و (8-32) يمكن حساب معامل الكسب $|G(j\omega)|$ وفرق الصفحة $\phi$ لنظام من الدرجة الثانية , والتي يمكن تلخيصها بالجدول (8-4).

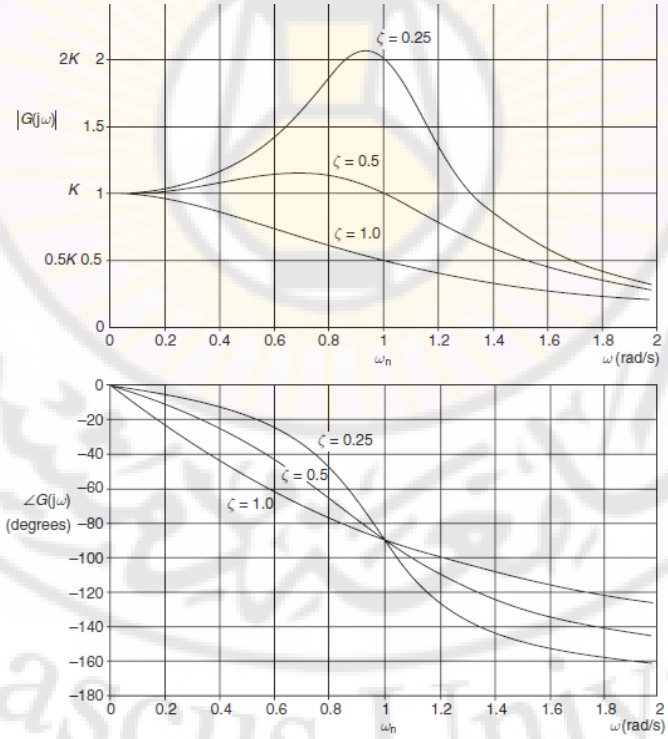
**الجدول (8-4): معامل الكسب للمطال وفرق الصفحة لنظام من الدرجة الثانية**

| $\omega$ $(rad/sec)$ | | $\emptyset$ |
|---|---|---|
| 0 | $K$ | $-0°$ |
| $\omega_n$ | $K/2\zeta$ | $-90°$ |
| $\infty$ | 0 | $-180°$ |

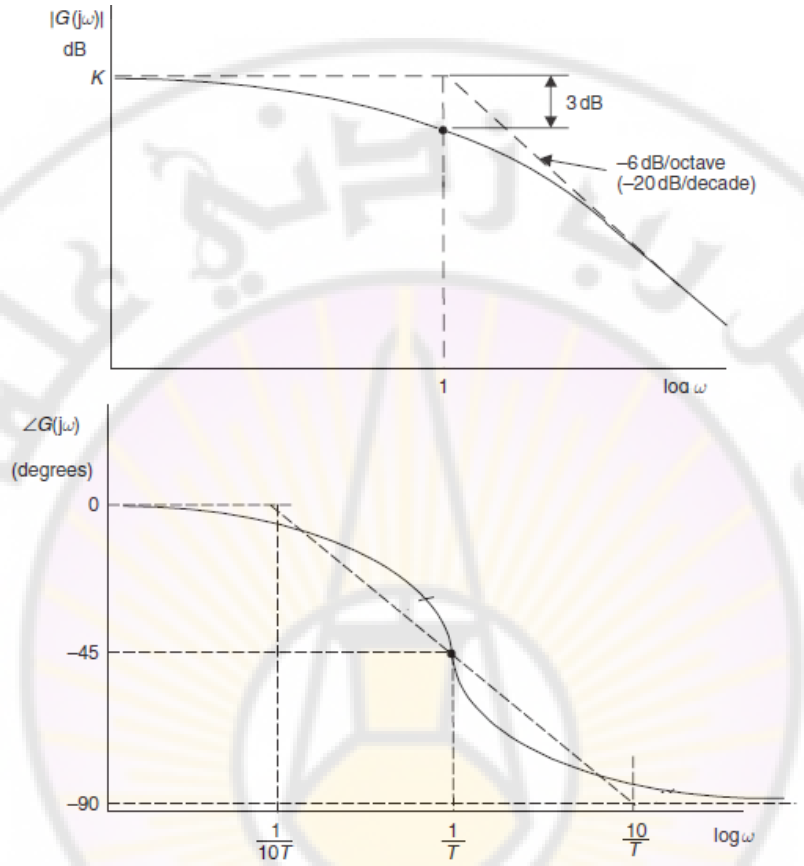
إن النتائج المبينة بالجدول (8-4) تُظهر أن معامل كسب النظام تتبع معامل التخامد $\zeta$. يمكن أن تُمثل هذه النتائج على شكل منحني قطبي المبين بالشكل (8-11), أو على شكل منحنيات الاستجابة الترددية المبينة بالشكل (8-12).




**الشكل (8-11): المنحني القطبي (منحني نايكوست) لنظام من الدرجة الثانية.**




**الشكل (8-12): منحنيات الاستجابة الترددية لنظام من الدرجة الثانية.**




**الشكل (8-13): منحنيات بود لنظام من الدرجة الأولى (ذو تأخير صفحة)**

## 8-4 منحنيات بود لنظم الدرجة الأولى والثانية:

### 8-4-1 منحنيات بود الدقيقة لنظم الدرجة الأولى (ذات تأخير الصفحة):

كما رأينا سابقاً, يعطى تابع تحويل نظام من الدرجة الأولى ذو تأخير الصفحة بالعلاقة :

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$

وجدنا أيضاً في الفقرة (8-3-1) معامل كسب المطال وفرق الصفحة لهذا النظام, والممثلتان بالعلاقتين (8-24) و (8-26). من العلاقة (8-17) يمكننا حساب معامل كسب المطال بالديسبل بالعلاقة التالية:

$$G_{dB} = 20logK - 20log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$$G_{dB} = 20logK - 10log\,[1 + (\omega\tau)^2] \dots\dots\dots (33-8)$$

أما زاوية الطور فنحصل عليها من العلاقة: $\emptyset = \tan^{-1}(-\omega\tau)$.

في هذا النظام نُعرف ما يسمى بتردد الانكسار (break frequency) ويساوي إلى $\omega_c = 1/\tau$. يمثّل هذا التردد الحدّ الفاصل بين الترددات المنخفضة (low frequencies) والترددات العالية (high frequencies).

لرسم منحني معامل الكسب للمطال يتوجب علينا اعتبار الحالتين التاليتين:

- الحالة الأولى: $\omega$ أكبر بكثير من $\omega_c$ أي $\omega \gg 1/\tau$:

$$\omega/\omega_c \gg 1 \quad \Leftarrow \quad \omega \gg \omega_c$$

وبالتالي: $G_{dB} = 20logK - 20\,log(\omega\tau)$

- الحالة الثانية : $\omega$ أصغر بكثير من $\omega_c$ أي $\omega \ll 1/\tau$:

$$\omega/\omega_c \ll 1 \quad \Leftarrow \quad \omega \ll \omega_c$$

وبالتالي: $G_{dB} = 20logK - 20\,log\,1 = 20logK = K_{dB}$

بذلك يكون منحني كسب المطال عند قيم $\omega$ التي هي أقل بكثير من $\omega_c$ عبارة عن خط مستقيم مطابق لخط $K_{dB}$. عند قيم $\omega$ التي هي أكبر بكثير من $\omega_c$ عبارة عن خط مستقيم ميله (-20 dB/decade), ويتقاطع مع خط $K_{dB}$ عند $\omega = \omega_c$.

يمكن حساب قيمة معامل كسب المطال عند تردد الانكسار بتعويض $\omega = \omega_c$ في معادلة كسب المطال على النحو التالي:

$$G_{dB} = 20logK - 10\,log_{10}\,2 = 20logK - 3dB$$

لرسم منحني زاوية الطور نلاحظ التالي :

$$lim_{\omega\to 0}\emptyset = lim_{\omega\to 0}[\tan^{-1}(-\omega\tau)] = 0°$$
$$lim_{\omega\to\infty}\emptyset = lim_{\omega\to\infty}[\tan^{-1}(-\omega\tau)] = -90°$$

ويمكن الحصول على بعض النقاط على المنحني كما يلي:

| $\omega$ | $0.1\omega_c$ | $0.5\omega_c$ | $\omega_c$ | $2\omega_c$ | $10\omega_c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | $-5.7°$ | $-26.6°$ | $-45°$ | $-63.4°$ | $-84.3°$ |

يمثل الشكل (8-13) منحنيات بود لنظام من الدرجة الأولى (ذو تأخير صفحة) حيث تمّ اعتبار $\tau = 0.5\,sec$. لاحظ أن قيم الطور سالبة, لذلك يسمى هذا النوع من النظم بأنه نظام ذو تأخير صفحة لأنه يدخل تأخير على زاوية الطور.

**8-4-2 منحنيات بود التقريبية لنظم الدرجة الأولى (ذات تأخير الصفحة):**

فيما يلي سنقدم طريقة الرسم السريع لمنحنيات بود وهي طريقة المقاربات.

- **أولاً: منحني كسب المطال اللوغاريتمي:** يتألف من مقارب التردد المنخفض, ومقارب التردد العالي, واللذان يتم الحصول عليهما من المعادلة (8-24).
- مقارب التردد المنخفض (أو Low Frequency (LF) Asymptote):

عندما $\omega \to 0$ فإن $|G(j\omega)| \to K$ , وبالتالي فإن مقارب التردد المنخفض (LF) هو خط أفقي عند $K_{dB}$.

- مقارب التردد العالي (أو High Frequency (HF) Asymptote):

عندما $\omega \gg 1/\tau$ فإن المعادلة (8-29) تقترب من القيمة:

$$|G(j\omega)| = K/\omega\tau \dots\dots\dots\dots (34-8)$$

في المعادلة (8-34) نستطيع أن نستنتج:

- عندما يزداد التردد بمقدار الضعف (زيادة في التردد مقدارها أوكتاف واحد), فإن معامل كسب المطال ينقص بمقدار النصف أو يتناقص بمقدار 6 dB.
- عندما يزداد التردد بمقدار عشرة أضعاف (زيادة في التردد مقدارها ديكاد واحد), فإن معامل كسب المطال ينقص بمقدار العُشر أو يتناقص بمقدار 20 dB.

وبالتالي فإن مقارب التردد العالي لنظام من الدرجة الأولى ذو تأخير الصفحة عبارة عن خط مستقيم ذو ميل (-6 dB/Octave) أو (-20 dB/Decade).

من المعادلة (8-34), عندما تكون $\omega = \omega_c = 1/\tau$, تكون قيمة المقارب تساوي $K$, وبالتالي تتقاطع المقاربات عند التردد $\omega_c = 1/\tau\,(rad/sec)$. من المعادلة (8-29) فإن قيمة معامل كسب المطال عند هذا التردد يساوي $|G(j\omega)| = K/\sqrt{2}$, طالما أن $1/\sqrt{2} = -3dB$ بالتالي فإن معامل كسب المطال الدقيق يمر أسفل نقطة تقاطع المقاربات عند التردد $\omega_c$ بمقدار $3dB$. يبين الشكل (8-13) منحني بود لمعامل كسب مطال النظام من الدرجة الأولى مع تأخير صفحة.

- **ثانياً: منحني بود لفرق الصفحة:** يوجد لهذا المنحني ثلاث مقاربات هي:
- مقارب أفقي عند الترددات المنخفضة مقداره (0°) .

– مقارب أفقي عند الترددات العالية مقداره $(-90°)$.

– مقارب التردد المتوسط, والذي يتقاطع مع مقارب التردد المنخفض عند التردد $\omega = 10/\tau = 0.1\omega_c$, ويتقاطع أيضاً مع مقارب التردد العالي عند التردد $\omega = 10\omega_c = 10/\tau$. بمعنى آخر يتقاطع مقارب التردد المتوسط مع مقاربات التردد المنخفض والتردد العالي على بُعد مقداره ديكاد واحد على طرفي تردد الإنكسار $\omega = \omega_c = 1/\tau$. يبين الشكل (8-13) منحني بود لفرق الصفحة لنظام من الدرجة الأولى مع تأخير صفحة.

**3-4-8 منحنيات بود الدقيقة لنظم الدرجة الأولى (ذات تقديم الصفحة):**

يُعطى تابع تحويل النظام من الدرجة الأولى ذو تقديم الصفحة بالعلاقة :

$$G(s) = K(1 + \tau s) \dots\dots\dots (35-8)$$

إن قيمة معامل كسب المطال لهذا النظام :

$$|G(j\omega)| = 20log_{10}K + 20log_{10}\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \dots\dots\dots (36-8)$$

أما زاوية الطور فنحصل عليها كما يلي :

$$\emptyset = \tan^{-1}(\omega\tau) \dots\dots\dots (37-8)$$

يكون تردد الانكسار لهذا النظام هو : $\omega_c = 1/\tau$.

لرسم منحني كسب المطال سنأخذ الحالتين التاليتين:

– **الحالة الأولى:** $\omega$ أكبر بكثير من $\omega_c$ $(\omega \gg \omega_c$ أي $\omega\tau \gg 1)$:

في هذه الحالة يمكن إهمال الواحد بالنسبة للحد $\omega\tau$ وبذلك ينتج:

$$G_{dB} = K_{dB} + 20\ log(\omega\tau)$$

حيث: $K_{dB} = 20\ log\ K$.

– **الحالة الثانية:** $\omega$ أصغر بكثير من $\omega_c$ $(\omega \ll \omega_c$ أي $\omega\tau \ll 1)$:

في هذه الحالة, يمكن إهمال الحد $\omega\tau$ وبذلك ينتج: $G_{dB} = K_{dB} = 20\ log\ K$.

مما سبق نجد أن منحني كسب المطال عند قيم $\omega$ أقل بكثير من $\omega_c$ عبارة عن خط مستقيم ينطبق على الخط $K_{dB}$, وعند قيم $\omega$ أكبر بكثير من $\omega_c$ عبارة عن خط مستقيم ميله (+20 dB/Decade) ويتقاطع مع خط $K_{dB}$ عند $\omega_c = \omega$.

– لنحسب قيمة معامل الكسب عند تردد الانكسار $\omega_c = \omega$ لنجد:

$$G_{dB} = K_{dB} + 3dB$$

للننتقل لرسم منحني زاوية الطور حيث نلاحظ من العلاقة (37-8) ما يلي:

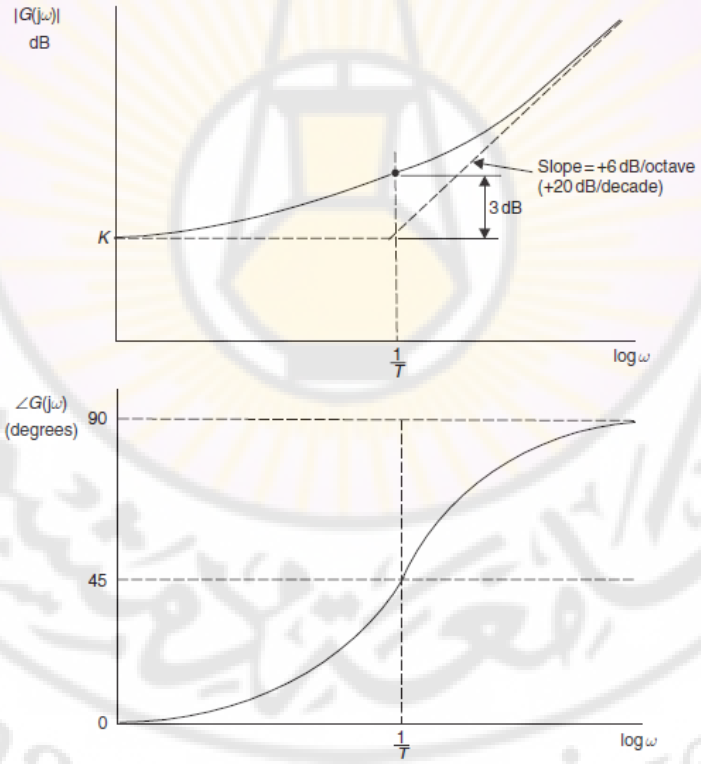
$$lim_{\omega \to 0} \emptyset = 0, \qquad lim_{\omega \to \infty} \emptyset = 90°$$

ويمكننا أيضاً, باستخدام العلاقة (37-8), حساب بعض نقاط منحني الصفحة, والمبينة بالجدول التالي:

| $\omega$ | $0.1\omega_c$ | $0.5\omega_c$ | $\omega_c$ | $2\omega_c$ | $10\omega_c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | $-5.7°$ | $-26.6°$ | $45°$ | $63.4°$ | $84.3°$ |

لاحظ أن قيم الطور موجبة, لذلك يسمى هذا النوع من النظم بنظام تقديم صفحة.

يمثل الشكل (14-8) منحنيات بود لنظام من الدرجة الأولى (ذو تقديم صفحة) حيث تمّ اعتبار $\tau = 0.5\ sec$ و $K = 1$.




**الشكل (14-8): منحنيات بود لنظام من الدرجة الأولى (ذو تقديم صفحة)حيث تمّ اعتبار $\tau = 0.5\ sec$ و $K = 1$.**

**4-4-8 منحنيات بود التقريبية لنظم الدرجة الأولى (ذات تقديم الصفحة):**

في هذا النظام تتقدم صفحة إشارة الخرج على صفحة إشارة الدخل. يعطى تابع تحويل هذا النظام بالعلاقة (8-35). كما تُعطى علاقات معامل الكسب وفرق الصفحة بالعلاقات (8-36) و (8-37). يبين الشكل (8-14) منحني بود لنظام من الدرجة الأولى مع تقديم بالصفحة, وهو مناظر لمنحنيات بود لنظام من الدرجة الأولى مع تأخير بالصفحة, وذلك حول محور التردد.

إن تابع تحويل نظام من الدرجة الأولى مع تأخير صفحة هو نفسه تابع تحويل المتحكم التناسبي التفاضلي كما رأينا في الفصل السابق.

**أولاً: منحني كسب المطال اللوغاريتمي:** يتألف من مقارب التردد المنخفض ومقارب التردد العالي:

– مقارب التردد المنخفض عبارة عن خط أفقي عند $K_{dB}$.

– مقارب التردد العالي عبارة عن خط مستقيم ذو ميل (+6 dB/Octave) أو ( +20 dB/Decade).

– تتقاطع المقاربات عند تردد الانكسار $\omega_c = 1/\tau$. يمر منحني الكسب الدقيق أعلى من نقطة تقاطع المقاربات عند التردد $\omega_c$ بمقدار $3\,dB$.

**–ثانياً : منحني بود لفرق الصفحة** : يوجد لهذا المنحني ثلاث مقاربات هي:

– مقارب أفقي عند الترددات المنخفضة مقداره (0°) .

– مقارب أفقي عند الترددات العالية مقداره (+90°).

– مقارب التردد المتوسط: يتقاطع مع مقارب التردد المنخفض عند التردد $\omega = 0.1\omega_c$, ويتقاطع أيضاً مع مقارب التردد العالي عند التردد $\omega = 10\omega_c$.

– قيمة فرق الصفحة عند تردد الانكسار يساوي +45°.

**5-4-8 منحنيات بود الدقيقة لنظم الدرجة الثانية:**

يعطى تابع تحويل نظام من الدرجة الثانية بالعلاقة:

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{{\omega_n}^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

وجدنا في الفقرة (8-3-2) معامل كسب المطال وفرق الصفحة لنظام من الدرجة الثانية والتي تمّ صياغتها بالعلاقات (8-31) و(8-32):

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+(\frac{2\zeta}{\omega n}\omega)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

**الكسب بالديسبل:** في هذه الحالة يكون الكسب بالديسبل (dB) للنظام:

$$G_{dB} = 20\,log|G(j\omega)|$$

$$G_{dB} = 20logK - 10log\,\{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}]^2\} \dots\dots (38-8)$$

لرسم منحني الكسب نأخذ الحالتين التاليتين:

**الحالة الأولى:** $\omega$ أصغر بكثير من $\omega_n$ أي $\omega \ll \omega_n$:

في هذه الحالة يكون $(\omega/\omega_n)^2 \ll 1$ وكذلك $2\zeta(\omega/\omega_n)$ أصغر بكثير من $(\omega/\omega_n)^2$, وبالتالي يكون المقدار الغالب في معامل الكسب هو:

$$G_{dB} = 20logK - 40\,log(\omega/\omega_n)$$

وبذلك يكون منحني كسب المطال عند قيم $\omega$ والتي أقل بكثير من $\omega_n$ عبارة عن خط مستقيم مطابق لخط $K_{dB}$, وعند قيم $\omega$ والتي أكبر بكثير من $\omega_n$ عبارة عن خط مستقيم ميله (-40 dB/Decade), ويتقاطع مع خط $K_{dB}$ عند $\omega = \omega_n$.

لرسم منحني زاوية الطور لنظام الدرجة الثانية نلاحظ التالي:

$$lim_{\omega\to 0}\emptyset = 0°, \quad lim_{\omega\to\infty}\emptyset = -180°, \quad lim_{\omega\to\omega_n}\emptyset = -90°$$

يمثل الشكل (8-16) منحنيات بود (كسب المطال وفرق الصفحة) لنظام من الدرجة الثانية, وذلك من أجل: $K = 1$ , $\omega_n = 0$, وقيم مختلفة لـ ζ.

**8-4-6 منحنيات بود التقريبية لنظم الدرجة الثانية:**

**أولاً : منحني بود لمعامل كسب المطال** : يملك المنحني المقاربات التالية:

– مقارب الترددات المنخفضة : عندما يكون $\omega \ll \omega_n$ فإن المقارب هو خط أفقي عند القيمة $|G(j\omega)|_{dB} = K_{dB}$.

– مقارب الترددات العالية: عندما يكون $\omega \gg \omega_n$ يمكن تقريب المعادلة (8-36) إلى الشكل التالي:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \dots\dots\dots\dots (39-8)$$

من المعادلة (8-39) نجد أن:

– عندما يزداد التردد بمقدار أوكتاف واحد, فإن معامل كسب المطال سيتناقص بمقدار الربع أو $(-12\ dB)$.

– عندما يزداد التردد بمقدار ديكاد واحد, فإن معامل كسب المطال سيتناقص بمقدار 100 مرة أو $(-40\ dB)$.

انطلاقاً من هاتين الملاحظتين فإن مقارب التردد العالي لنظام من الدرجة الثانية عبارة عن خط مستقيم ذو ميله $(-12\ dB/Octave)$ أو $(-40\ dB/Decade)$.

– تتقاطع هذه المقاربات الترددات عند التردد $\omega = \omega_n$. من المعادلة (8-36) نجد أن القيمة الدقيقة لمعامل كسب المطال عند هذا التردد تساوي: $|G(j\omega)| = K/2\zeta$.

لنحسب قيمة معامل كسب المطال بالنسبة لمقارب التردد المنخفض والتي تساوي:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20log_{10}\,(K/2\zeta)/K = 20log_{10}(1/2\zeta) \dots\dots (40-8)$$

وبالتالي:

- عندما $\zeta = 0.25$ فإن قيمة معامل كسب المطال بالنسبة لمقارب التردد المنخفض هي $(+6\ dB)$.
- عندما $\zeta = 0.5$ فإن قيمة معامل كسب المطال بالنسبة لمقارب التردد المنخفض هي $(+0\ dB)$.
- عندما $\zeta = 1$ فإن قيمة معامل كسب المطال بالنسبة لمقارب التردد المنخفض هي $(-6\ dB)$.

– **ثانياً : منحني بود لفرق الصفحة للنظام:** يوجد لهذا المنحني مقاربان:

– مقارب التردد المنخفض: عبارة عن مستقيم أفقي عند القيمة $0^{\circ}$.

– مقارب التردد العالي: عبارة عن مستقيم أفقي عند القيمة $-180°$.

– يمر فرق الصفحة من الزاوية $-90°$ وذلك عند التردد $\omega = \omega_n$.

يعتمد شكلاً منحني الصفحة على قيمة معامل التخامد $\zeta$, ويتم الحصول عليه من المنحنيات القياسية المعطاة بالشكل (8-15).

**8-4-7 منحنيات بود للعنصر التناسبي:**

أبسط عنصر يمكن أن نصادفه في نظم التحكم هو العنصر التناسبي والذي يُعطى تابع تحويله بالعلاقة :

$$G(s) = K \dots\dots\dots (41-8)$$

الكسب بالديسبل $(dB)$: يُعطى الكسب بالديسبل للعنصر التناسبي بالعلاقة:

$$G_{dB} = 20logK = K_{dB} \dots\dots\dots (42-8)$$

أما زاوية الطور لهذا العنصر فتساوي:

$$\phi = 0 \qquad ;K > 0$$
$$\phi = -180 \quad ;K < 0 \dots (43-8)$$

**8-4-8 منحنيات بود للعنصر التفاضلي:**

يعطى تابع تحويل العنصر التفاضلي بالعلاقة:

$$G(s) = K.s \dots\dots\dots (44-8)$$

الكسب بالديسبل $(dB)$: يُعطى الكسب بالديسبل لهذا العنصر بالعلاقة:

$$G_{dB} = 20log|G(j\omega)| = 20log_{10}(K\omega) \dots\dots\dots (45-8)$$

من هذه العلاقة نجد أن منحني كسب المطال بالديسبل عبارة عن خط مستقيم ميله $(20\ dB/Decade)$, يتقاطع مع الخط $0\ dB$ عند النقطة:

$$G_{dB} = 20\ log(\omega K) = 0 \Rightarrow\ \omega K = 1 \Rightarrow \omega = 1/K$$

أما زاوية الطور للعنصر التفاضلي فتساوي:

$$\emptyset = \tan^{-1}(\omega k/0) = 90° \dots\dots\dots (46-8)$$

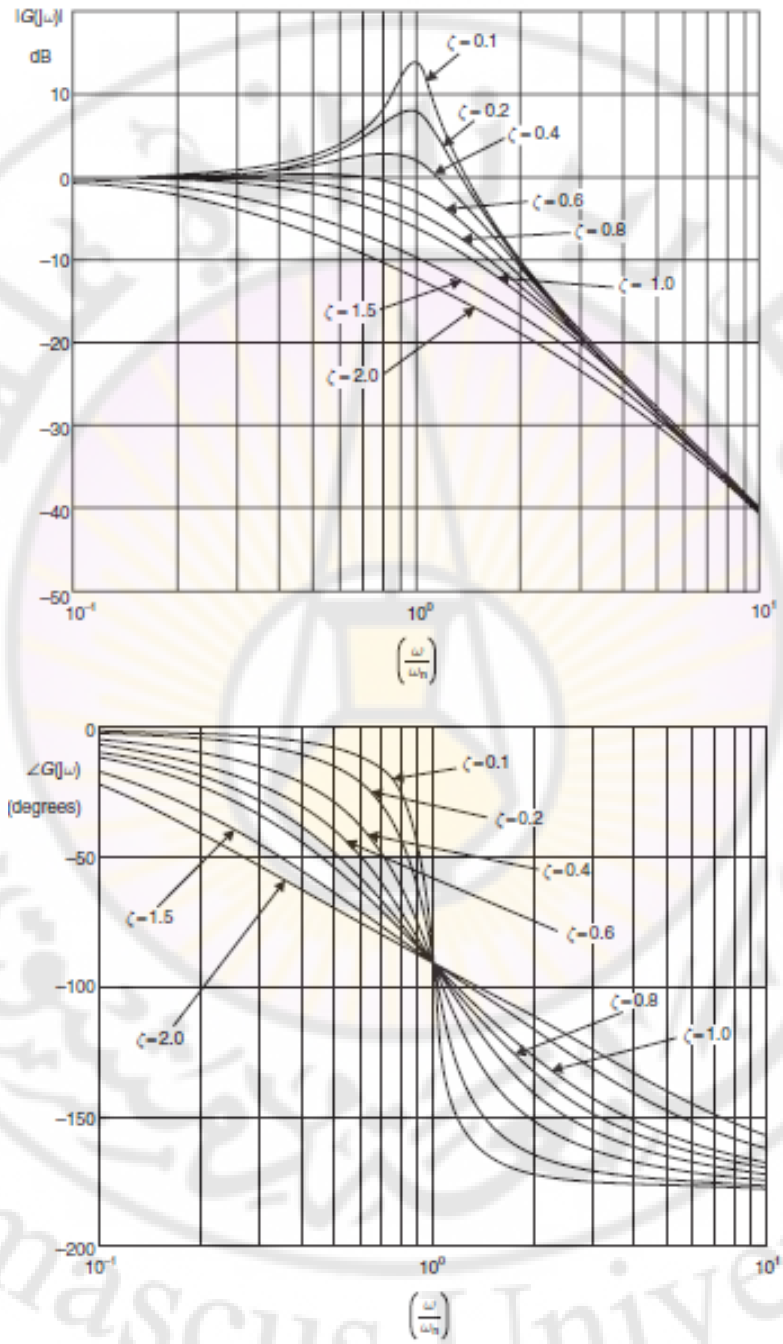
**8-4-9 منحنيات بود للعنصر التكاملي:**

يعطى تابع تحويل العنصر التكاملي بالعلاقة:

$$G(s) = \frac{K}{s} \dots\dots\dots (47-8)$$

الكسب بالديسبل $(dB)$: يُعطى الكسب بالديسبل لهذا العنصر بالعلاقة:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \dots\dots\dots (48-8)$$




**الشكل (8-15): منحنيات بود لنظام من الدرجة الثانية من أجل $K = 1$ و $\omega_n = 0$.**

من المعادلة (7-48) يمكن أن نلاحظ أنه عندما يتضاعف التردد فإن قيمة معامل كسب المطال تتناقص إلى نصف قيمتها الحالية. بمعنى آخر مقارب العنصر التكاملي عبارة عن خط مستقيم ميله $(-20\,dB/Decade)$ أو $(-6\,dB/Octave)$. لاحظ أيضاً:

عندما $\omega = 1$ فإن: $|G(j\omega)|_{dB} = K_{dB}$ .

عندما $\omega = K$ فإن: $|G(j\omega)|_{dB} = 1 = 0\,dB$.

بالنسبة لزاوية الطور للعنصر التكاملي فتساوي:

$$\emptyset = -90° \dots\dots\dots (49-8)$$

**مثال 8-3: رسم منحنيات بود لنظام ممثل بتابع تحويل وباستخدام طريقة المقاربات:**

ليكن لدينا النظام الممثل بتابع التحويل التالي:

$$G(s) = \frac{2}{1+0.5s} \dots\dots\dots (50-8)$$

لنرسم منحنيات بود التقريبية لهذا النظام وذلك باتباع طريقة المقاربات.

بالتدقيق بعلاقة تابع تحويل النظام نجد أنه عبارة عن نظام من الدرجة الاولى مع تأخير بالصفحة. بمقارنة العلاقة (8-50) مع الشكل العام لتابع تحويل نظام من الدرجة الاولى مع تأخير بالصفحة نجد أن $K = 2\ ,\ \tau = 0.5sec$, بالتالي يملك النظام المقاربات التالية:

– مقارب التردد المنخفض :عبارة عن هو مستقيم أفقي عند $K_{dB} = 6\,dB$.

– مقارب التردد العالي: عبارة عن مستقيم ميله $(-20\,dB/Decade)$.

– تتقاطع المقاربات عند تردد الانكسار : $\omega_c = 1/\tau = 2\,rad/sec$.

يبين الشكل (8-16) منحنيات بود للنظام المدروس.

**مثال 8-4: رسم منحنيات بود للنظام ذو تابع التحويل باتباع طريقة المقاربات:**

$$G(s) = \frac{4}{0.25s^2+0.2s+1} \dots\dots\dots (51-8)$$

بمقارنة تابع تحويل النظام المدروس مع تابع تحويل نظام من الدرجة الثانية فنجد :

$$\frac{1}{\omega_n^2} = 0.25 \ \Rightarrow\ \omega_n = 2\,rad/sec$$

$$2\zeta/\omega_n = 0.2 \ \Rightarrow\ \zeta = 0.2$$

$$K = 4$$

بالتالي يملك النظام المقاربات التالية:

- مقارب التردد المنخفض: عبارة عن خط مستقيم أفقي عند $K_{dB} = 20\log(4) = 12\ dB$.
- مقارب التردد العالي: عبارة عن خط مستقيم ميله $(-40\ dB/Decade)$.
- معامل كسب المطال بالنسبة لمقارب التردد المنخفض عند التردد $\omega = \omega_n$ معطى بالعلاقة (8-40):

$$|G(j\omega)|_{dB\omega=\omega_n} = 20log_{10}\frac{1}{2\zeta} = 20log_{10}\frac{1}{0.4} = 8\ dB$$

وبالتالي فإن القيمة المطلقة لمعامل كسب المطال عند التردد $\omega = \omega_n$ هي $20\ dB$.

يبين الشكل (8-17) مخطط بود للنظام المدروس. لاحظ من هذا الشكل أن منحني فرق الصفحة قد تم رسمه بقراءة فرق الصفحة من الشكل (8-15), حيث تم أخذ قيمة فرق الصفحة حول التردد $\omega_n$ بمقدار ديكاد واحد على طرفي التردد $\omega_n$.

**8-4-10 الطريقة العامة لرسم منحنيات بود:**

سنلخص في هذه الفقرة طريقة رسم منحنيات بود لنظام معطى بتابع التحويل التالي:

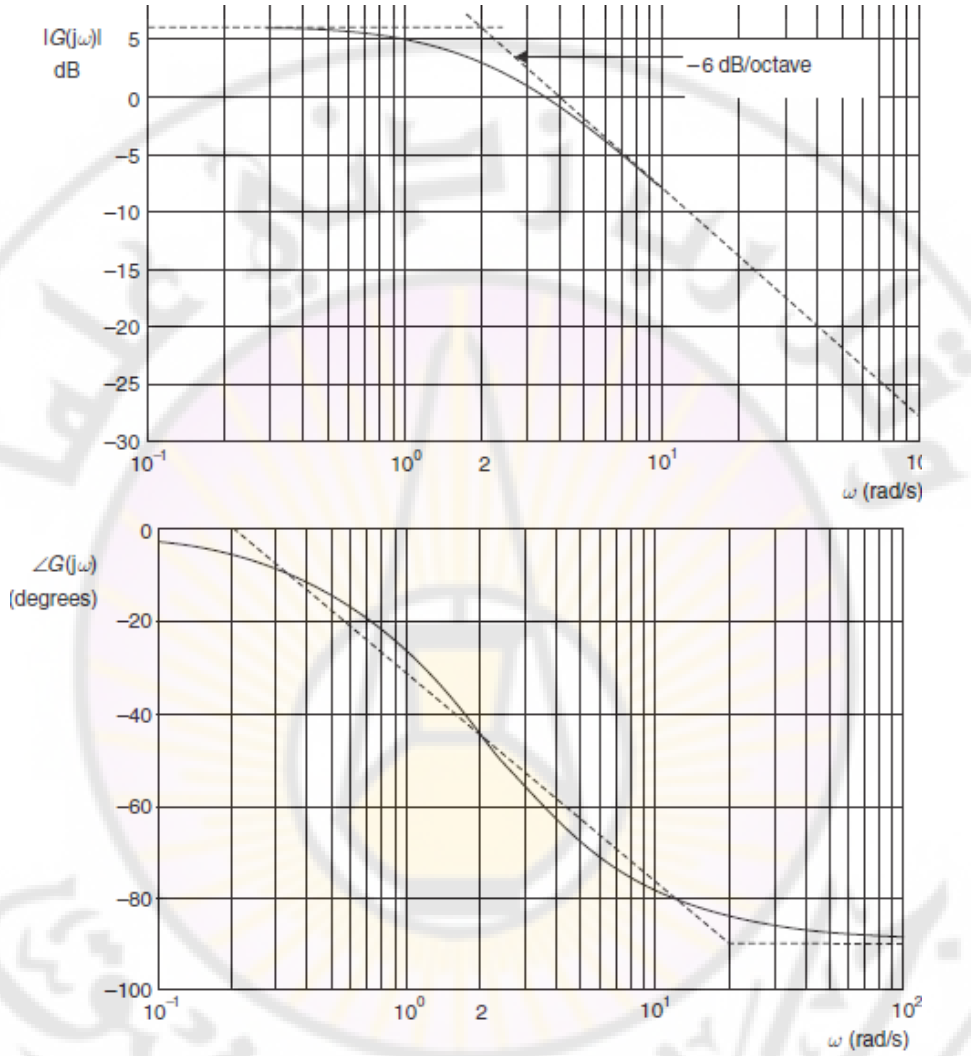
$$G(j\omega) = \frac{K_b\Pi_{i=1}^{Q}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N\Pi_{m=1}^{M}(1+j\omega\tau_m)\Pi_{k=1}^{R}\left(1+j\omega\left(\frac{2\zeta_K}{\omega_{nK}}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_{nK}}\right)^2\right)} \ldots (52-8)$$

إن تابع التحويل المعطى بالعلاقة (8-52) يملك أصفاراً عددها $Q$, وأقطاب في مركز الإحداثيات عددها $N$, وأقطاب تقع على المحور الحقيقي عددها $M$, وأزواج من الأقطاب العقدية المترافقة عددها $R$.

إن كسب المطال اللوغاريتمي لهذا النظام:

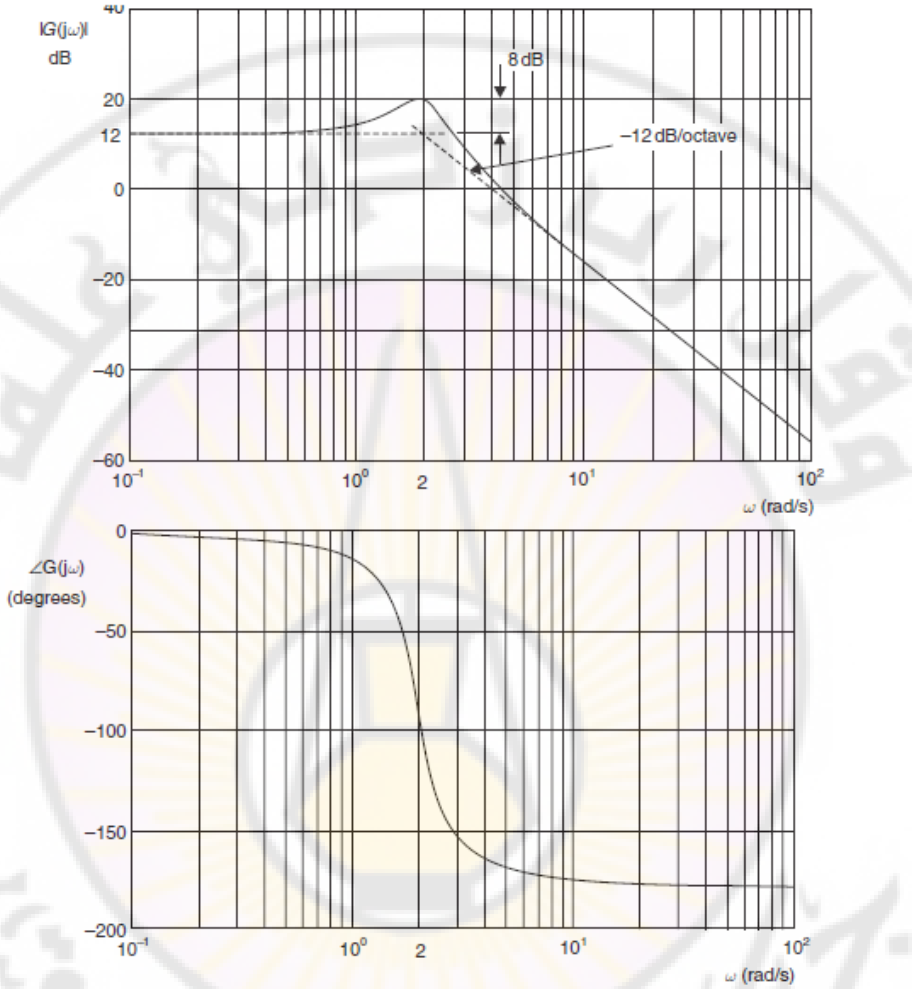
$$20log|G(j\omega)| = 20logK_b + 20\Sigma_{i=1}^{Q}log|1+j\omega\tau_i| - 20log|(j\omega)^N| - 20\Sigma_{m=1}^{M}log|1+j\omega\tau_m| - 20\,\Sigma_{K=1}^{R}log|1+\frac{2\zeta_K}{\omega_{nK}}j\omega+(\frac{j\omega}{\omega_{nK}})^2| \ldots\ldots\ldots (53-8)$$

يمكن الحصول على منحني بود لكسب المطال برسم المنحني لكل جزء من أجزاء العلاقة (8-53), ومن ثم نقوم بجمع هذه المنحنيات لنحصل على منحني بود لكسب المطال للنظام ككل.




**الشكل (8-16): منحنيات بود للنظام المعطى بالعلاقة (8-50).**

Damascus University




**الشكل (8-17): منحنيات بود للنظام ذو تابع التحويل المعطى بالعلاقة (8-51).**

يمكن الحصول على منحني بود للصفحة باستخدام العلاقة التالية:

$$\phi(\omega) = \Sigma_{i=1}^{Q} tan^{-1}(\omega\tau_i) - N(90°) - \Sigma_{m=1}^{M} tan^{-1}(\omega\tau_i)) - \Sigma_{k=1}^{R} tan^{-1}(\frac{2\zeta_K\omega_{nK}\omega}{\omega_{nK}^2-\omega^2}) \dots (54-8)$$

تعد العلاقة (8-54) عن إمكانية الحصول على منحني بود للصفحة من مجموع فرق الصفحة لكل جزء من أجزاء تابع التحويل.

من العلاقة (8-52) الممثلة للشكل العام لتابع التحويل, يمكن أن نلاحظ تواجد أربع أنواع من البنود, وهي:

1- ثابت ربح $K_b$

2- أقطاب (أو أصفار) عند مركز الإحداثيات $j\omega$.

3- أقطاب (أو أصفار) عند المحور الحقيقي $j\omega\tau + 1$.

4- أقطاب (أو أصفار)عقدية مترافقة $[(\frac{j\omega}{\omega_m})^2 + j\omega\left(\frac{2\zeta}{\omega_m}\right) + 1]$.

يمكن رسم منحنيات بود (كسب المطال وفرق الصفحة) بجمع منحنيات بود لكل جزء من الأجزاء السابقة حيث:

1- منحنيات بود لثابت الربح $K_b$: إن كسب المطال بالديسبل لثابت الربح $K_b$ يساوي $20logK_b$ أما فرق الصفحة فيساوي:

عندما $K_b > 0$ فإن $\phi = 0$

عندما $K_b < 0$ فإن $\phi = -180°$

2- منحنيات بود للأقطاب أو الأصفار الواقعة في مركز الإحداثيات: يملك القطب الواقع في مركز الإحداثيات كسب مطال معطى بالعلاقة التالية:

$$G_{dB} = 20log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega$$

وهي معادلة مستقيم ذو ميل $-20\ dB/Decade$. إن فرق الصفحة الناتج عن هذا القطب يساوي $\emptyset = -90°$. إذا كان النظام يملك $N$ قطب عند مركز الإحداثيات, فكسب المطال في هذه الحالة يحسب بالعلاقة:

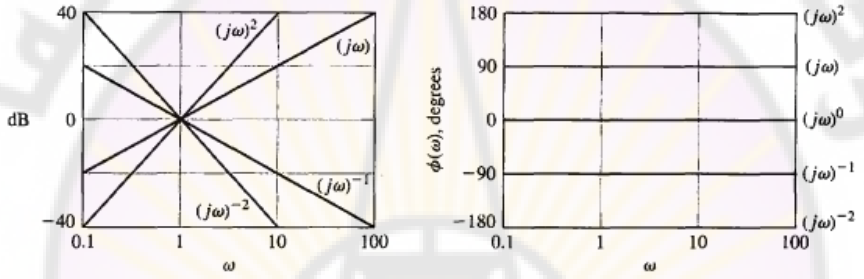
$$G_{dB} = 20log\left|\frac{1}{(j\omega)^N}\right| = -20\ N\ log\omega$$

وهي معادلة مستقيم ذو ميل $-20N\ dB/Decade$, أما فرق الصفحة الناتج عن هذه الأقطاب فيساوي $\emptyset = -90°N$. إذا كان النظام يملك صفر في مركز الإحداثيات, فهذا الصفر يؤدي إلى كسب مطال مقداره : $G_{dB} = 20log|j\omega| = +20\ log\omega$. وهي معادلة مستقيم ذو ميل $+20\ dB/Decade$. إن فرق الصفحة الناتج عن هذا الصفر

يساوي $\emptyset = +90°$. إذا كان النظام يملك $N$ صفر عند مركز الإحداثيات, فكسب المطال في هذه الحالة يحسب بالعلاقة: $G_{dB} = 20log|(j\omega)^N| = +20\text{N}\ log\omega$

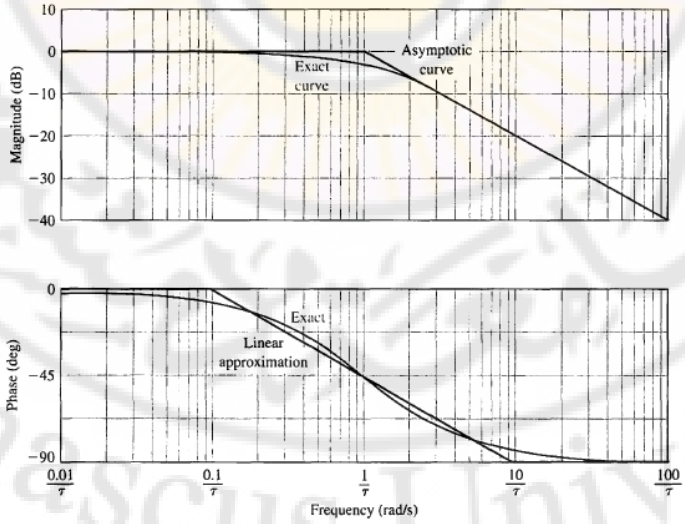
وهي معادلة مستقيم ذو ميل $+20N\ dB/Decade$, أما فرق الصفحة الناتجة عن هذه الأصفار فيساوي $\emptyset = +90N°$.

يبين الشكل (8-18) منحنيات بود لكسب المطال ولفرق الصفحة للبند $(j\omega)^{\pm N}$ , وذلك من أجل $\text{N} = 1, 2$.




**الشكل (8-18): منحنيات بود للبند $(j\omega)^{\pm N}$ في تابع التحويل $G(s)$ المعطى بالعلاقة (8-52).**

3- الأقطاب أو الأصفار الواقعة على المحور الحقيقي: تمت مناقشة هذه الحالة في الفقرات (8-2-4) و (8-4-4). يبين الشكل (8-20) منحنيات بود للبند $(1 + j\omega\tau)^{-1}$




**الشكل (8-19): منحنيات بود للبند $(1 + j\omega\tau)^{-1}$.**

4- الأقطاب أو الأصفار العقدية المترافقة (تمت مناقشة هذه الحالة بالتفصيل بالفقرة (6-4-8). يبين الشكل (20-8) منحنيات بود لكسب المطال ولفرق الصفحة لنظام من الدرجة الثانية.

في النظم من الدرجة الثانية, تحدث القيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{p\omega}$ عند تردد يسمى تردد الرنين, ويشار إليه بـ $\omega_r$. عندما يقترب معامل التخامد $\zeta$ من الصفر, يقترب التردد $\omega_r$ من التردد $\omega_n$ (أو تردد التخامد الطبيعي). يعطى تردد الرنين $\omega_r$ بالعلاقة:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2},\ \zeta < 0.707 \ldots (55-8)$$

أما القيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{p\omega}$ فتعطى بالعلاقة:

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| = \left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{-1}, \zeta < 0.707 \ldots (56-8)$$

يبين الشكل (21-8) العلاقة بين القيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{p\omega}$, وتردد الرنين, وذلك تبعاً لمعامل التخامد $\zeta$ لنظام من الدرجة الثانية.

**مثال 8-5: منحنيات بود لدارة T مزدوجة (bode diagram of a twin T network):**

سندرس في هذا المثال طريقة الحصول على الاستجابة الترددية لدارة $T$ المزدوجة المبينة بالشكل (22-8), وذلك بالاعتماد على حساب أطوال الأشعة المشروحة أعلاه.

يعطى تابع تحويل هذه الدارة بالعلاقة :

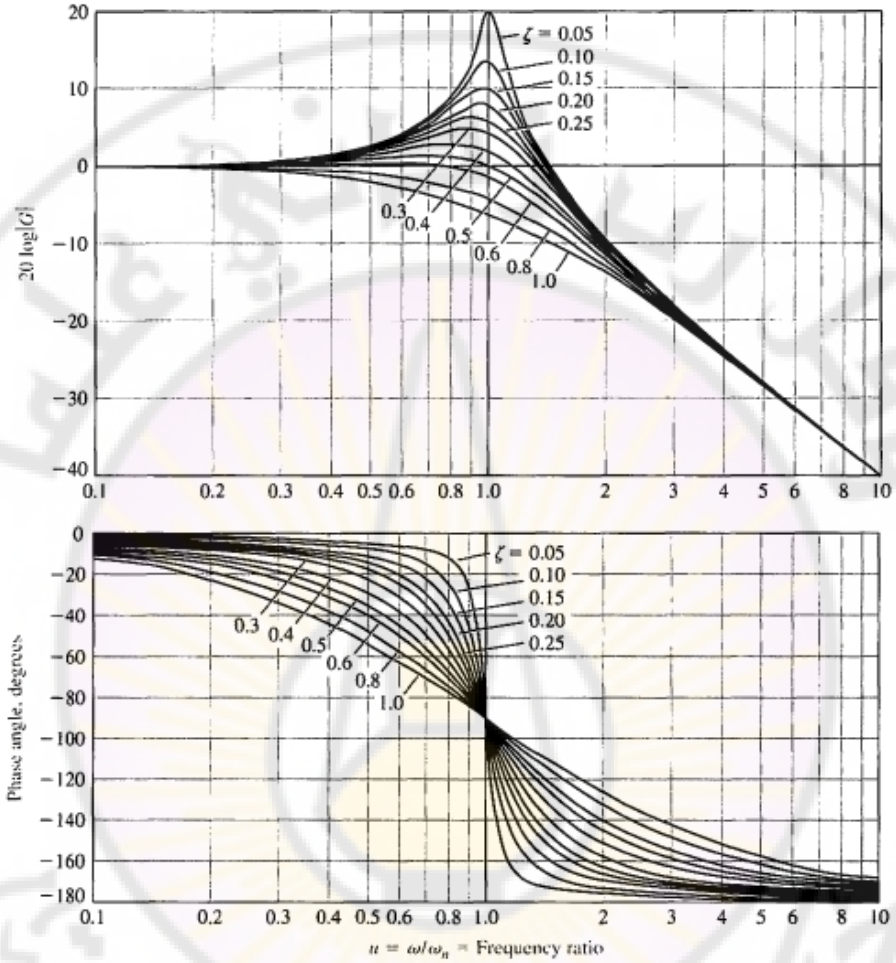
$$G(s) = \frac{v_o(s)}{v_{in}(s)} = \frac{(s\tau)^2+1}{(s\tau)^2+4s\tau+1} \ldots\ldots\ldots (57-8)$$

حيث $\tau = RC$.

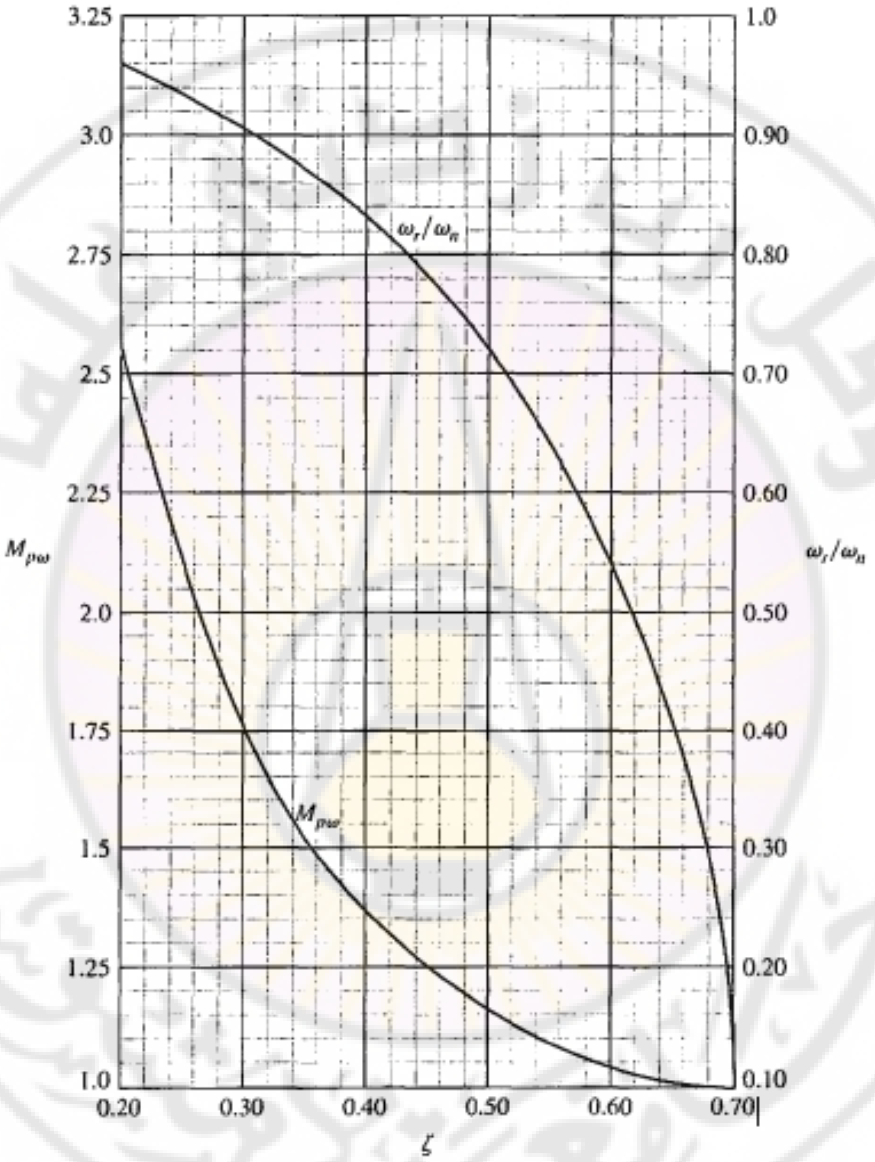
يملك هذا النظام في المستوي $s\tau$ صفرين هما $\pm j$ , وقطبين هما $(-2 \pm j\sqrt{3})$, وذلك كما هو مبين بالشكل (26-8).

عند التردد $\omega = 0$ نجد $|G(j\omega)| = 1$ , $\emptyset(\omega) = 0$, وعند التردد $\omega = 1/\tau$ نجد $|G(j\omega)| = 0$, أما زاوية الطور فتنتقل من $-90°$ إلى $90°$. عندما يسعى التردد $\omega$ نحو اللانهاية أي $\omega \to \infty$ نجد أن $|G(j\omega)| = 0$ , $\emptyset(\omega) = 0$.

بحساب قيمة المطال والصفحة عند عدة ترددات وسيطية يمكننا الحصول على الاستجابة الترددية المبينة بالشكل (23-8). ■

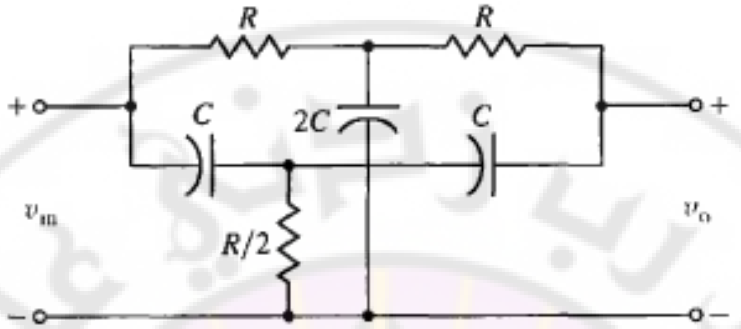



**الشكل (8-20): منحنيات بود لنظام من الدرجة الثانية.**

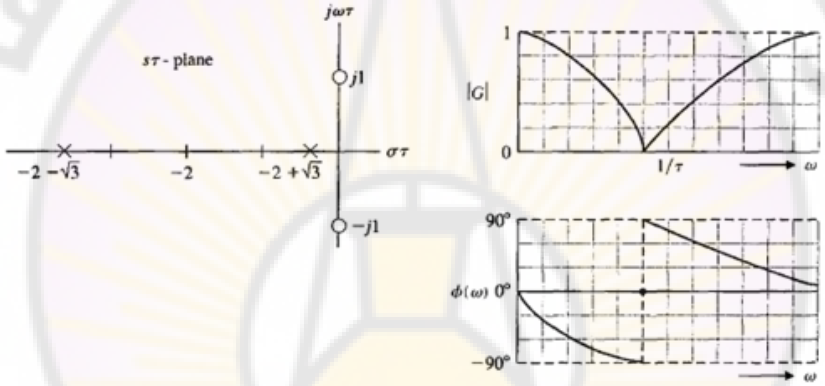



**الشكل (8-21): العلاقة بين القيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{p\omega}$, وتردد الرنين, وذلك تبعاً لمعامل التخامد $\zeta$ لنظام من الدرجة الثانية.**

Damascus University




**الشكل (8-22): دارة $T$ المزدوجة.**




**الشكل (8-23): أ− مواقع أصفار وأقطاب تابع تحويل دارة $T$ المزدوجة ب− الاستجابة الترددية.**

**مثال 8-6: رسم منحنيات بود:**

ليكن لدينا النظام ذو تابع التحويل التالي :

$$G(j\omega)=\frac{5(1+j0.1\omega)}{j\omega(1+j0.5\omega)\left(1+j0.6\left(\frac{\omega}{50}\right)+\left(\frac{j\omega}{50}\right)^2\right)} \dots\dots (58-8)$$

يتألف تابع التحويل من البنود التالية:

1− ربح تناسبي $K=5$.

2− قطب عند مركز الإحداثيات.

3− قطب عند $\omega=2$.

4- صفر عند $\omega = 10$.

5- زوج من الأقطاب العقدية المترافقة عند $\omega = \omega_n = 50$.

لنقوم, بداية, برسم منحنيات الكسب لكل بند من البنود السابقة:

1- كسب المطال بالديسبل للعنصر التناسبي هو $20log5 = 14\,dB$, وذلك كما هو مبين بالشكل (8-29).

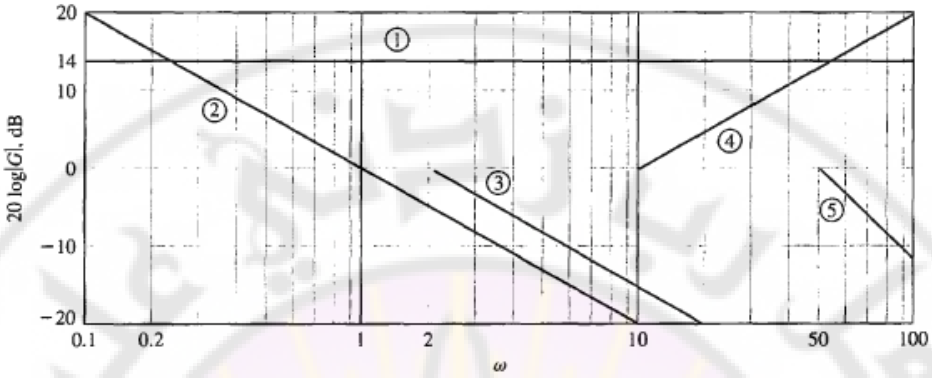
2- كسب المطال بالديسبل للقطب الواقع عند مركز الإحداثيات يمتد من التردد صفر إلى اللانهاية, ويتمثل بخط مستقيم ذو ميل $-20\,dB/Decade$ ويتقاطع مع خط $0\,dB$ عند التردد $\omega = 1$ كما هو مبين بالشكل (8-24).

3- كسب المطال بالديسبل للقطب عند التردد $\omega = 2$ (وما بعد) ويتمثل بخط مستقيم ذو ميل $-20\,dB/Decade$ كما هو مبين بالشكل (8-24).

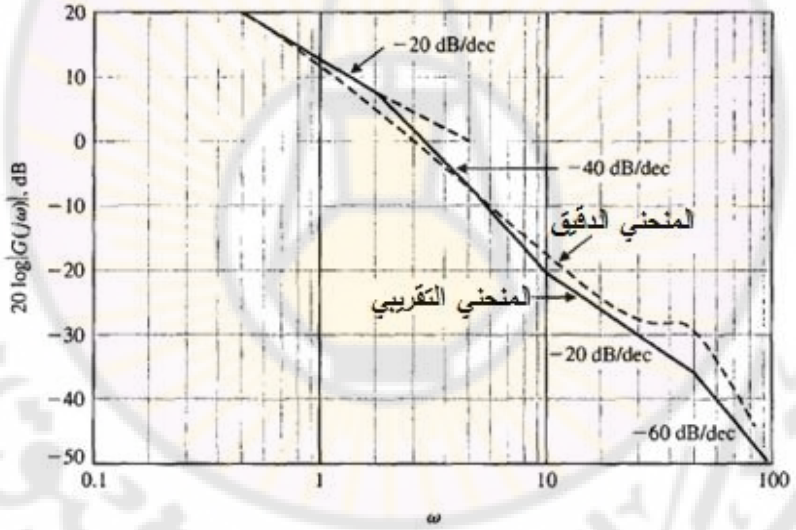
4- كسب المطال بالديسبل للصفر عند التردد $\omega = 10$, ويتمثل بخط مستقيم ذو ميل $+20\,dB/Decade$ كما هو مبين بالشكل (8-24).

5- كسب المطال بالديسبل للأقطاب العقدية ويتمثل بخط مستقيم ذو ميل $-40\,dB/Decade$ كما هو مبين بالشكل (8-24). إن تردد الانكسار لهذه الأقطاب $\omega = \omega_n = 50$.

يتم الحصول على منحني بود التقريبي لكسب المطال عن طريق جمع المنحنيات السابقة المبينة بالشكل (8-24). إن كسب المطال هو $14\,dB$, وذلك حتى التردد $\omega = 1$, حيث يتدخل القطب الواقع في مركز الإحداثيات ليصبح الميل $-20\,dB/Decade$, بعد ذلك وعند التردد $\omega = 2$ يصبح ميل منحني كسب المطال $-40\,dB/Decade$ وذلك تحت تأثير القطب المتوضع عند $\omega = 2$. عند التردد $\omega = 10$ يتغير ميل منحني كسب المطال ليصبح $-20\,dB/Decade$, وذلك تحت تأثير الصفر المتوضع عند $\omega = 10$. بالنهاية يصبح ميل منحني كسب المطال $-60\,dB/Decade$, وذلك تحت تأثير الأقطاب العقدية, وذلك ابتداءً من التردد $\omega = 50$. يبين الشكل (8-25) منحني كسب المطال الكلي للنظام المدروس.




**الشكل (8-24): المستقيمات المقاربة للأقطاب والأصفار المشكلة لتابع التحويل المعطى بالعلاقة (8-58).**




**الشكل (8-25): منحني كسب المطال التقريبي والدقيق لتابع التحويل المعطى بالعلاقة (8-58).**

لننتقل لرسم منحني بود لفرق الصفحة. سنقوم بدراسة تأثير كل بند من بنود تابع التحويل على فرق الصفحة:

1- فرق صفحة الربح التناسبي هو $0°$.

2- فرق الصفحة الناتج عن القطب المتواجد في مركز الإحداثيات هو $-90°$.

3- فرق الصفحة الناتج عن القطب المتواجد عند $\omega = 2$, مبين بالشكل (8-26), حيث نلاحظ أن فرق الصفحة عند $\omega = 2$ هو $-45°$.

4- فرق الصفحة الناتج عن الصفر المتواجد عند التردد $\omega = 10$, مبين أيضاً بالشكل (8-26), حيث نلاحظ أن فرق الصفحة عند $\omega = 10$ هو $+45°$.

5- فرق الصفحة الناتج عن الحد من الدرجة الثانية, مبين أيضاً بالشكل (8-26), وقد تم حسابه بالاعتماد على الشكل (8-15).

يتم الحصول على منحني بود التقريبي لفرق الصفحة عن طريق جمع فرق الصفحة الناتج عن كل حد من حدود تابع التحويل لنحصل على المنحني المبين بالشكل (8-26). إن هذا المنحني هو منحني تقريبي لأنه ينتج عن المستقيمات المقاربة لكل حد من حدود تابع التحويل, ولكنه يسمح بإعطاء فكرة جيدة عن فرق الصفحة الناتج عند تردد معين. من الشكل (8-26) نجد أن فرق الصفحة عند التردد $\omega = 46$ يساوي $-180°$. لنقوم الآن بحساب القيمة الدقيقة لفرق الصفحة عند هذا التردد. سنقوم, أولاً, بكتابة علاقة فرق الصفحة:

$$\emptyset(\omega) = -90° - tan^{-1}(\omega\tau_1) + tan^{-1}(\omega\tau_2) - tan^{-1}\frac{2\zeta u}{1-u^2} \dots (59-8)$$

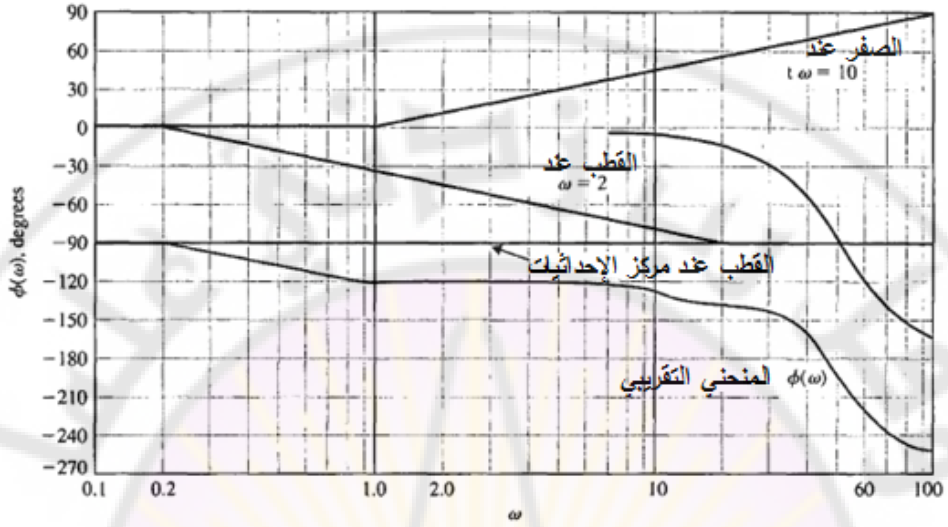
حيث: $u = \omega/\omega_n = \omega/50$ , $2\zeta = 0.6$ , $\tau_2 = 0.1$ , $\tau_1 = 0.5$.

لنعوض $\omega$ بـ 46 فنجد:

$$\emptyset(46) = -90° - \tan^{-1}(23) + \tan^{-1}(4.6) - \tan^{-1} 3.55 = -175° \dots (60-8)$$

لاحظ أن الفرق بين القيمة التقريبية والقيمة الدقيقة لفرق الصفحة عند التردد $\omega = 46$ هو $5°$, بالتالي يمكن أن نستخدم المنحنيات التقريبية للحصول على فكرة تقريبية عن كسب النظام وفرق الصفحة, وذلك عند تردد معين, ولكن للحصول على قيمة دقيقة لا بدّ لنا من اللجوء إلى العلاقات التحليلية.

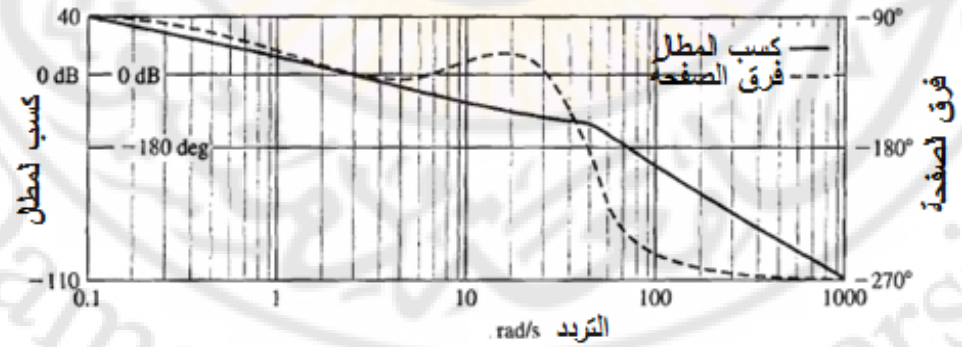
يبين الشكل (8-27) منحنيات بود الدقيقة للنظام المدروس والمولدة باستخدام بيئة الماتلاب. لاحظ أن هذه المنحنيات قد تمّ رسمها ضمن مجال ترددي مقداره 4 ديكاد. سنلخص في الجدول (8-6) القيم الدقيقة للمطال وللصفحة عند بعض الترددات.




**الشكل (8-26): منحني فرق الصفحة التقريبي للنظام الممثل بتابع التحويل المعطى بالعلاقة (8-58).**

**الجدول (8-6): القيم الدقيقة للمطال وللصفحة للنظام الممثل بتابع التحويل المعطى بالعلاقة (8-58) وذلك عند بعض الترددات**

| $\omega$ | 0.1 | 100 | 3 | 50 |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert G(j\omega)\rvert_{dB}$ | 34 | $-43$ | 0 | $-$ |
| $\emptyset$ | $-92.36°$ | $-243°$ | $-135$ | $-180°$ |




**الشكل (8-27): منحنيات بود الدقيقة للنظام الممثل بالعلاقة (8-58).**

**8-5 قياس الاستجابة الترددية (Frequency Response Measurements):**

تُطبق الاشارات الجيبية ذات التردد والمطال المتغير على دخل النظام ذو الحلقة المفتوحة أو المغلقة, وذلك للحصول على الاستجابة الترددية للنظام المفتوح أوالمغلق.

تُستخدم أداة تسمى بمحلل الموجة أو (Wave Analyzer) لقياس تغيرات المطال والصفحة وذلك تبعاً لتردد إشارة الدخل الجيبية. أيضاً يمكن استخدام أداة أخرى تسمى بمحلل تابع التحويل أو (Transfer Function Analyzer), وذلك لتحديد تابع تحويل الحلقة المفتوحة والمغلقة. يمكن أن يقيس محلل الموجة الاستجابة الترددية وذلك ضمن المجال الترددي $[0, 100\ KHz]$ حيث توجد إمكانية لهذا المحلل لقياس أقطاب وأصفار النظام, بالاعتماد على الاستجابة الترددية. تستطيع هذه الأداة أيضاً استنتاج الاستجابة الترددية لنموذج مدخل من قبل المستثمر بهدف مقارنة استجابة النموذج مع الاستجابة الحقيقية لنظام ممثل بهذا النموذج.

لنأخذ المثال التالي على طريقة استنتاج تابع التحويل لنظام, وذلك انطلاقاً من منحنيات بود لهذا النظام. يبين الشكل (8-28) منحنيات بود للنظام المدروس, والمؤلف من دارة مستقرة تحتوي على مقاومات ومكثفات.

من الشكل (8-28) نلاحظ مايلي:

- انخفاض المطال بمقدار $-20\ dB/Decade$, وذلك عند زيادة التردد $\omega$ من 100 إلى $1000\ rad/sec$.
- عند التردد $\omega = 300\ rad/sec$ نلاحظ أن الصفحة $\emptyset = -45°$, أما المطال فهو $-3\ dB$. بالاعتماد على هاتين الملاحظتين يمكن أن نستنتج ما يلي: وجود قطب في تابع تحويل النظام عند $P_1 = 300$.

من منحنيات بود, نلاحظ وجود تغير حاد في الصفحة يقدّر بحدود $+180°$, مع المرور بخط $0°$, وذلك عند التردد $\omega_n = 2450\ rad/sec$. هذه الملاحظة تقودنا إلى وجود زوج من الأصفار المضاعفة عند التردد $\omega_n = 2450\ rad/sec$. نلاحظ أيضاً, عند التردد, أن ميل منحني الكسب يتغير من $-20\ dB/Decade$ إلى $+20\ dB/Decade$.

نلاحظ أيضاً أن ميل منحني الكسب يعود إلى $+0\ dB/Decade$, وذلك عندما تتجاوز قيمة $\omega$ الـ 50000, هذه الملاحظة تقودنا إلى وجود قطب ثان للنظام بالإضافة إلى صفرين. إن هذا القطب الثاني موجود عند النقطة $P_2 = 20000$ , وذلك لأن منحني الكسب عند هذا التردد أقل بمقدار $3dB$ عن المستقيم المقارب عند هذا التردد, وكذلك فرق الصفحة عند هذا التردد يساوي إلى $+45°$ .إن فرق الصفحة عند القطب الأول هو $-90°$ , وعند الأصفار المضاعفة $+180°$ وعند القطب الثاني يساوي $-45°$.

يبين الشكل (8-28) أيضاً المستقيمات المقاربة لأقطاب وأصفار تابع التحويل المقترح $T(s)$ والمعطى بالعلاقة التالية:

$$T(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + 1}{\left(\left(\frac{s}{P_1}\right)+1\right)\left(\left(\frac{s}{P_2}\right)+1\right)} \dots\dots\dots (61-8)$$

إن الفرق في المطال بين المنحني الدقيق والتقريبي, عند التردد $\omega_n = 2450$ يساوي 10 ديسبيل. بالاعتماد على المعادلة (8-56) نجد أن $\zeta = 0.16$. تذكر أن وجود نظام من الدرجة الثانية في البسط بدلاً من المقام يؤدي إلى الحصول على نفس منحني الكسب المعطى بالشكل (8-20) ولكن بشكل مقلوب, أما فرق الصفحة فيتراوح بين 0 و $+180°$ بدلاً من 0 و $-180°$.

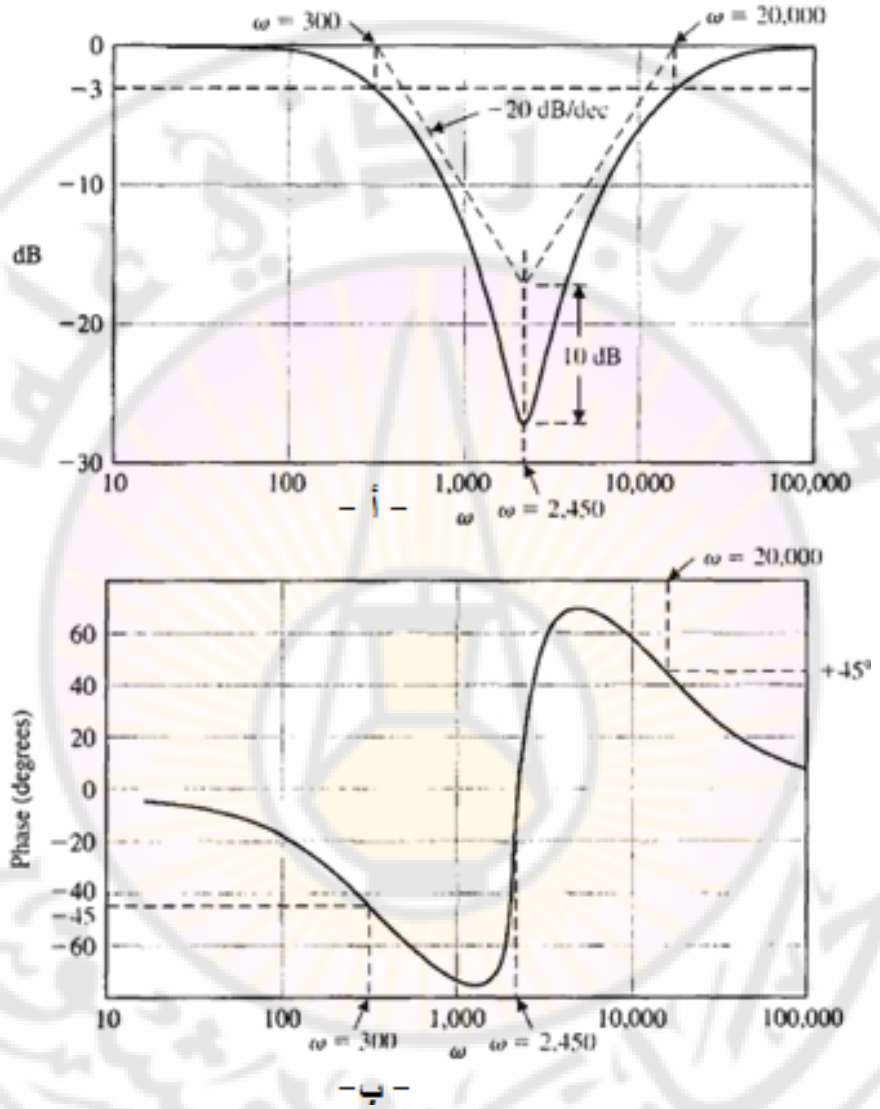
مما سبق نجد أن تابع تحويل النظام:

$$T(s) = \frac{\left(\frac{s}{2450}\right)^2 + \left(\frac{0.32}{2450}\right)s + 1}{\left(\left(\frac{s}{300}\right)+1\right)\left(\left(\frac{s}{20000}\right)+1\right)}$$

**8-6 معايير الأداء للاستجابة الترددية:**

**(Performance Specification of the frequency response):**

إن السؤال الذي يجب أن يطرح عند هذه المرحلة هو عن كيفية ربط الاستجابة الترددية للنظام بالاستجابة الزمنية العابرة لهذا النظام؟ بمعنى آخر: ليكن معطى لدينا مجموعة من المتطلبات المتعلقة بخصائص الاستجابة العابرة, والمطلوب كيف يمكن أن نحدد الاستجابة الترددية المقابلة؟

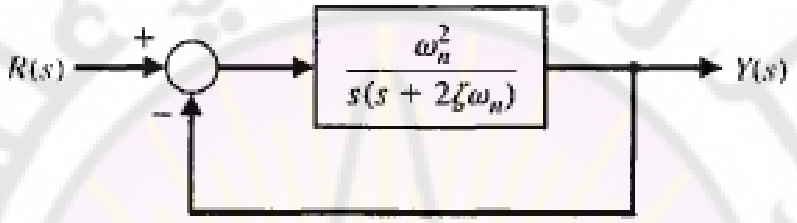



**الشكل (8-28) منحنيات بود لنظام ذو تابع تحويل غير محدد.**

لنأخذ على سبيل المثال نظام من الدرجة الثانية, والذي درسنا في الفصول السابقة خواص المرحلة العابرة لاستجابته الزمنية مثل التجاوز النسبي, زمن الاستقرار, وغيرها من الخواص. يعطى تابع التحويل النظام من الدرجة الثانية المبين بالشكل (8-29) بالعلاقة:

$$T(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} \dots\dots\dots (62-8)$$

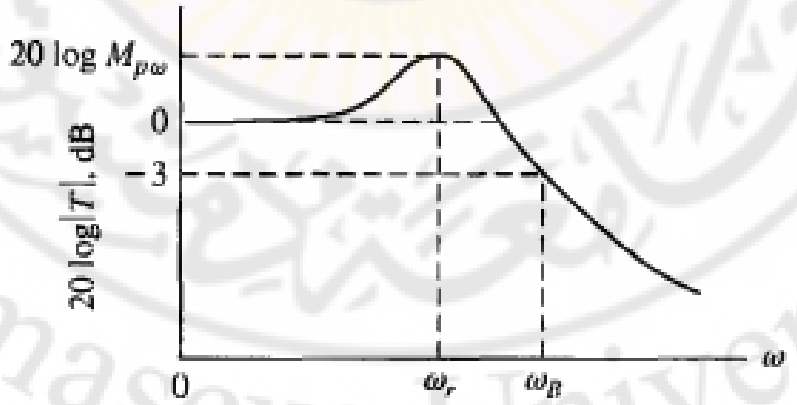
إن الاستجابة الترددية لهذا النظام مبينة بالشكل (8-29). تذكر أنه, في نظام الدرجة الثانية, توجد علاقة بين القيمة العظمى للمطال $M_{p\omega}$, والتي تحصل عند تردد الرنين $\omega_r$, وبين معامل التخامد $\zeta$.




**الشكل (8-29): نظام من الدرجة الثانية ذو حلقة تغذية خلفية.**

في الشكل (8-30) يمثل $\omega_B$ عرض المجال الترددي (Bandwidth), والذي يقيس قدرة النظام على إعادة إنتاج إشارة الدخل (بالطبع على خرجه).

**يُعرف عرض المجال الترددي $\omega_B$ بأنه التردد الذي تنخفض عنده الاستجابة الترددية للنظام بمقدار 3 ديسبل عن قيمة الاستجابة الترددية عند الترددات المنخفضة. إن قيمة عرض المجال الترددي تساوي تقريباً قيمة نصف أوكتاف, أو مايقارب $1/\sqrt{2}$ من قيمة التردد المنخفض.**




**الشكل (8-30): خصائص كسب المطال لنظام من الدرجة الثانية.**

لنحاول الآن إيجاد العلاقة بين خواص الاستجابة الترددية مثل تردد الرنين, $\omega_r$, عرض المجال الترددي $\omega_B$, والقيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{p\omega}$, وبين خواص الاستجابة العابرة.

– علاقة عرض المجال الترددي $\omega_B$ بسرعة الاستجابة العابرة: عند زيادة عرض المجال الترددي $\omega_B$ سيتناقص زمن الصعود (rise time) في الاستجابة الخطوية العابرة للنظام.

– علاقة القيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{p\omega}$ بقيمة التجاوز الحاصل في الاستجابة الخطوية للنظام: إن صلة الوصل بين $M_{p\omega}$ والتجاوز النسبي $P.O\%$ هو معامل التخامد $\zeta$ والذي يمكن قياسه عن طريق $M_{p\omega}$ أو $\omega_r$. إن معرفتنا بقيمة معامل التخامد $\zeta$ تسمح لنا بحساب قيمة التجاوز النسبي, وذلك باستخدام العلاقات المعطاة بالفصل السادس. في الواقع نلاحظ أنه كلما زادت قيمة $M_{p\omega}$, كلما زادت قيمة التجاوز في الاستجابة الخطوية.

– علاقة عرض المجال الترددي $\omega_B$ بالتردد الطبيعي لنظام الدرجة الثانية $\omega_n$. يبين الشكل (8-31) علاقة كلاً من $\omega_B/\omega_n$ بمعامل التخامد $\zeta$ لنظام من الدرجة الثانية المعطى بالعلاقة (8-62).

يُعطى الشكل العام للاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية, بالعلاقة:

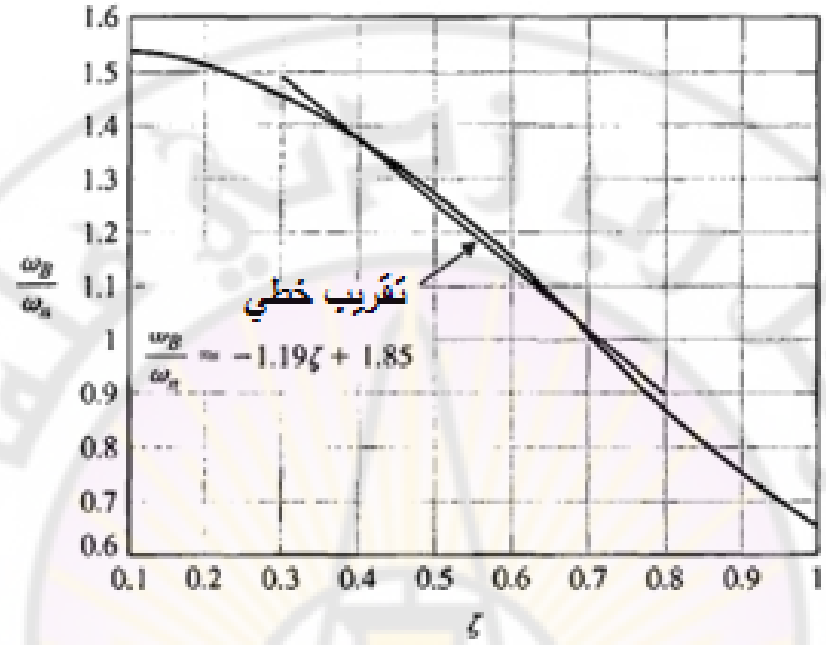
$$y(t) = 1 + Be^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t + \theta) \dots\dots (63-8)$$

من هذه العلاقة نجد أنه كلما كان التردد الطبيعي $\omega_n$ أكبر , كلما اقتربت استجابة النظام بشكل أسرع من القيمة النهائية المطلوبة, وذلك عند ثبات قيمة $\zeta$.

مما سبق يمكننا تحديد متطلبات الاستجابة الترددية المقبولة بما يلي:

1– مطال الاستجابة الترددية, عند تردد الرنين, صغير (أي قيمة صغيرة لـ $M_{p\omega}$), على سبيل المثال $M_{p\omega} < 1.5$.

2– مجال ترددي عريض نسبياً (قيمة كبيرة لـ $\omega_B$) بحيث يكون ثابت زمن النظام $\tau = 1/\zeta\omega_n$ صغير.




**الشكل (8-31): علاقة كلاً من $\omega_B/\omega_n$ بمعامل التخامد $\zeta$ لنظام من الدرجة الثانية, يمكن تقريب هذه العلاقة إلى علاقة خطية تعطى بالمعادلة**

**$\omega_B/\omega_n = -1.19\zeta + 1.85$, وذلك من أجل $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$.**

لننتقل الآن لتبيان علاقة خطأ الحالة المستقرة للنظام في المستوي الزمني مع الاستجابة الترددية للنظام. لنفرض أن تابع تحويل النظام المغلق معطى بالعلاقة التالية :

$$G(s) = \frac{K\Pi_{i=1}^{M}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N\Pi_{K=1}^{Q}(1+j\omega\tau_k)} \dots\dots\dots (64-8)$$

حيث أن $K$ هو ثابت ربح النظام, و $N$ نوع النظام (أو type N - system).

لنناقش الآن الحالتين التاليتين:

1- النظام من النوع – صفر (أي $N = 0$). في هذه الحالة, لنفرض أن تابع تحويل النظام معطى بالعلاقة:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)} \dots\dots\dots (65-8)$$

في هذه الحالة, وكما رأينا عند دراستنا لخطأ الموضع والسرعة, يملك هذا النظام خطأ موضع $K_p$ حيث $K_p = K$. يَظهر هذا الخطأ في منحنيات كسب المطال اللوغاريتمية (منحنيات بود), عند الترددات المنخفضة.

2- النظام من النوع الأول (أي $N = 1$). في هذه الحالة يكون خطأ الموضع للنظام $K_p$ معدوم, بينما يُظهر النظام خطأ سرعة $K_v$. لحساب هذا الخطأ سندرس النظام المبين بالشكل (8-29). إن خطأ السرعة لهذا النظام:

$$K_v = lim_{s\to 0}\big(sG(s)\big) = lim_{s\to 0}\left(\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\right)s = \frac{\omega_n}{2\zeta} \dots (66-8)$$

لنكتب الآن تابع تحويل النظام بدلالة $K_v$:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} = \frac{\omega_n}{s\left(\frac{s}{\omega_n}+2\zeta\right)} = \frac{\frac{\omega_n}{2\zeta}}{s\left(\frac{s}{2\zeta\omega_n}+1\right)} = \frac{K_v}{s(1+\tau s)} \dots\dots (67-8)$$

حيث: $\tau = 1/2\zeta\omega_n$.

إذا تم رسم منحنيات بود للمطال لهذا النظام فإن كسب النظام عند الترددات المنخفضة يقابل خطأ السرعة $K_v$.

لندرس على سبيل المثال النظام الممثل بتابع التحويل المعطى بالمثال (8-6):

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{5(1+j0.1\omega)}{j\omega(1+j0.5\omega)\left(1+j0.6\left(\frac{\omega}{50}\right)+\left(\frac{j\omega}{50}\right)^2\right)}$$

يمكن أن يكتب هذا التابع على النحو التالي:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{5(1+j\tau_2\omega)}{j\omega(1+j\tau_1\omega)(1+j0.6u-u^2)} \dots\dots (68-8)$$

حيث: $\tau_1 = 0.5$ ,$\tau_2 = 0.1$ ,$u = \omega/\omega_n = \omega/50$.

من أجل $\omega < 1/\tau_1$ , أي $\omega < 2$, تكون العنصران المؤثران في منحني بود, هما العنصر التناسبي $K = K_v = 5$, والعنصر التكاملي. في هذه الحالة يكون شكل تابع التحويل (من أجل $\omega < 2$):

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega} = \frac{K_v}{j\omega} \dots\dots\dots (69-8)$$

بالعودة إلى منحني بود لهذا النظام, والمبين بالشكل (8-25) نجد أن $K_v$ يساوي إلى كسب المطال عند الترددات المنخفضة. من الشكل (8-25) يمكن أن نلاحظ أيضاً أن

نقطة تقاطع منحني المطال للجزء $(K_v/j\omega)$ مع خط 0 ديسيبل هي $\omega = K_v = 5$, كما هو متوقع. يمكن تفسير هذه الملاحظة على النحو التالي:

عند التقاطع مع خط 0 ديسيبل يكون $|G(j\omega)| = 1$ وبالتالي:

$$|G(j\omega)| = \frac{k_v}{\omega} = 1 \Longrightarrow \omega = k_v$$

بما أن $k_v = 5$ , إذاً $\omega = 5$.

إذاً الاستجابة الترددية للنظام تعكس خصائص الأداء للنظام, وبالتالي وبقليل من الخبرة يمكن أن ندرس ونحلل ونصمم نظم التحكم بالاعتماد على خواصه الترددية.

**7-8 منحنيات المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة:**

**(Log magnitude and phase diagrams):**

مثّلنا الاستجابة الترددية لنظام ممثل بتابع تحويل $G(j\omega)$, بيانياً بواسطة:

1- المنحنيات القطبية, أو بما يسمى منحنيات نايكويست.

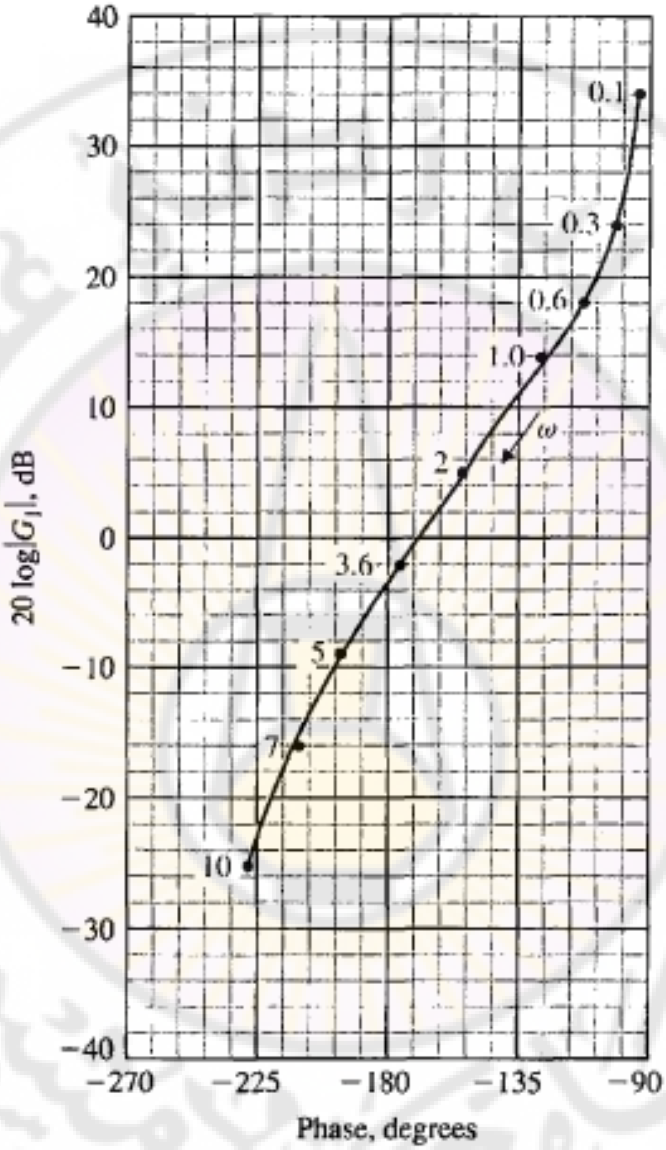
2- منحنيات بود.

هناك طريقة أخرى لتمثيل الاستجابة الترددية للنظام بيانياً وذلك باستخدام جملة إحداثية مؤلفة من المطال اللوغاريتمي للنظام مقدراً بالديسيبل (محور العينات) وصفحة النظام (محور السينات), وذلك ضمن مجال ترددي معين. إن الطريقة المثلى للحصول على هذا المنحني تقوم أولاً على رسم منحني بود, ومن ثم استخدام منحني بود لرسم منحنيات المطال اللوغاريتمي مقابل صفحة النظام.

لشرح هذه المنحنيات لنأخذ المثالين التاليين. في المثال الأول سنعالج تابع التحويل التالي:

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(0.5j\omega+1)(j\omega/6+1)} \dots\dots (70-8)$$

إن منحني المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة لهذا التابع مبين بالشكل (8-37). إن القيم المبينة على هذا المنحني تشير إلى قيم التردد $\omega$.

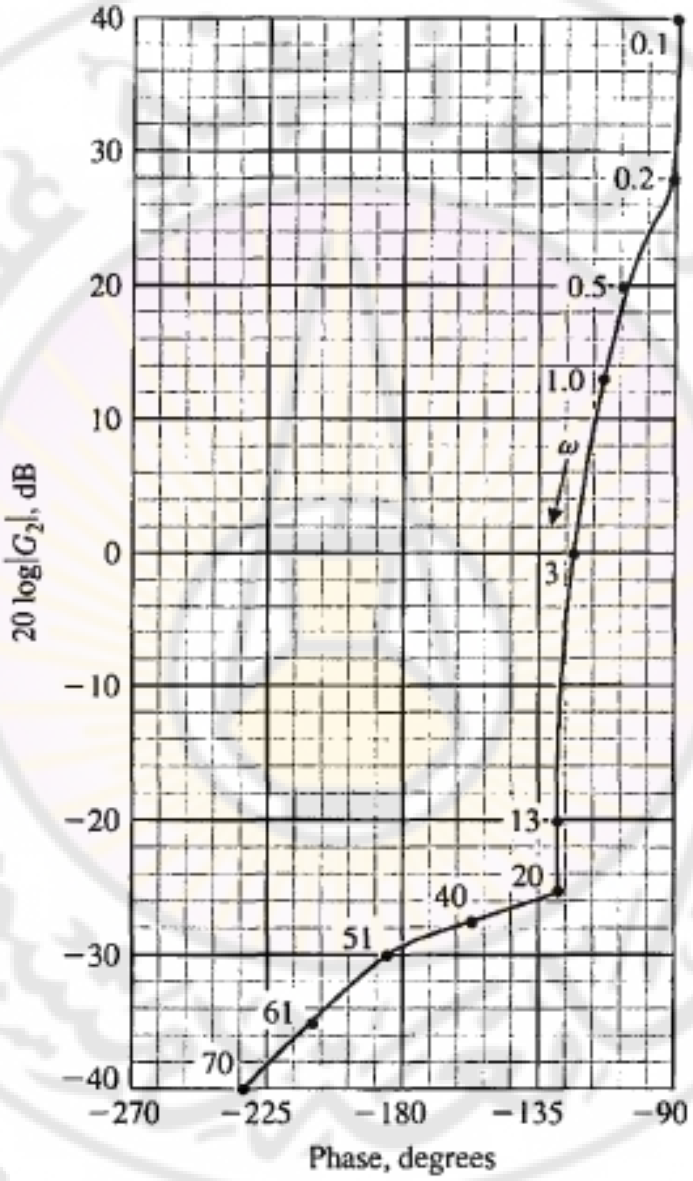



**الشكل (8-32): منحني المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة للتابع $G_1(j\omega)$ المعطى بالعلاقة (8-70).**

في المثال الثاني سنعالج تابع التحويل التالي:

$$G_2(j\omega) = \frac{5(0.1j\omega+1)}{j\omega(0.5j\omega+1)\left(1+j0.6\left(\frac{\omega}{50}\right)+\left(\frac{j\omega}{50}\right)^2\right)} \dots\dots (71-8)$$

إن منحني المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة لهذا التابع مبين بالشكل (8-33).




**الشكل (8-33): منحني المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة للتابع $G_2(j\omega)$ المعطى بالعلاقة (8-71).**

إن هذا المنحني المبين بالشكل (8-33) تم الحصول عليه باستخدام منحنيات بود لهذا التابع والمبينة بالأشكال (8-25) و (8-26). يكتسب منحني المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة أهمية كبيرة وخاصةً عند اقتراب الصفحة من $-180°$, والمطال اللوغاريتمي من 0 ديسيبل. إن المحل الهندسي للمعادلة (8-70) والمبين بالشكل (8-32) يختلف عن المحل الهندسي للمعادلة (8-71) والمبين بالشكل (8-33).

**8-8 أمثلة تصميمية (Design examples):**

في هذه الفقرة سنقدم ثلاثة أمثلة توضيحية على استخدام الاستجابة الترددية في تصميم المتحكمات. يصف المثال الأول التحكم بخلايا توليد شمسية بهدف توليد استطاعة أعظمية عند تغير الإشعاع الشمسي. يشرح المثال الثاني استخدام منحنيات المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة بالإضافة إلى منحنيات بود للحلقة المفتوحة والمغلقة, بهدف تصميم متحكم لآلة حفر. يقوم المثال الثالث والأخير بدراسة نظام التحكم بأحد أرجل روبوت سداسي الأرجل. في هذا المثال يتوجب علينا تصميم متحكم PID قابل للتنفيذ يحقق متطلبات تصميمية تتعلق بالاستجابة الزمنية (تجاوز نسبي وزمن استقرار), ومتطلبات تصميمية تتعلق بالاستجابة الترددية (عرض المجال الترددي).

**مثال 8-7: تتبع نقطة الاستطاعة العظمى لمولد شمسي**

**(Maximum power point tracking for photovoltaic generator)**

يقوم المولد الشمسي بتحويل الطاقة الشمسية إلى طاقة كهربائية, ولكن استطاعة خرج المولد الشمسي تعتمد على الإشعاع الشمسي, درجة الحرارة, والأحمال المربوطة. في هذا المثال سنناقش مشكلة تنظيم توتر خرج المولد الشمسي باستخدام حلقة تحكم مغلقة [24]. لنأخذ حلقة التحكم ذات التغذية الخلفية المبينة بالشكل (8-34). يعطى تابع تحويل المولد الشمسي بالعلاقة التالية:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \dots\dots\dots (72-8)$$

حيث $K = 300000$ و $p = 360$. هذا النموذج هو لمولد شمسي مؤلف من 182 خلية توليد باستطاعة $1100[W]$ [24].

لنفرض أن تابع تحويل المتحكم $G_c(s)$ معطى بالعلاقة :

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{\tau_1 s+1}{\tau_2 s+1}\right) \dots\dots\dots (73-8)$$

إن المتحكم المعطى بالعلاقة (73-8) هو معوض تقديم أو تأخير صفحة وذلك حسب قيم البارامترات $\tau_1, \tau_2$, لذلك يتوجب علينا حسابها بالإضافة للبارامتر $K_c$ (سنناقش هذا المتحكم بالتفصيل في الفصل العاشر). في هذا النظام, يتوجب على المتحكم تخفيض تأثير الاضطرابات والتغيرات في المولد الشمسي, وذلك بتقديم ربح عالي عند الترددات المنخفضة, كما يتوجب عليه أيضاً تخفيض تأثير ضجيج القياسات وذلك بتقديم ربح منخفض عند الترددات العالية.

لتحقيق هذه المتطلبات, سنصيغ المتطلبات التصميمية التالية:

1- $|G_c(j\omega)G(j\omega)| \geq 20dB$ من أجل $\omega \leq 10\ rad/sec$.

2- $|G_c(j\omega)G(j\omega)| \leq -20dB$ من أجل $\omega \geq 1000\ rad/sec$.

3- هامش الصفحة (phase margin) $P.M. \geq 60°$.

إن هامش صفحة النظام قبل إضافة المتحكم يساوي $36.3°$ (أي $P.M = 36.3°$), وهذا يعني أن المتحكم يتوجب عليه إضافة تقديم بالصفحة تساوي تقريباً $25°$.

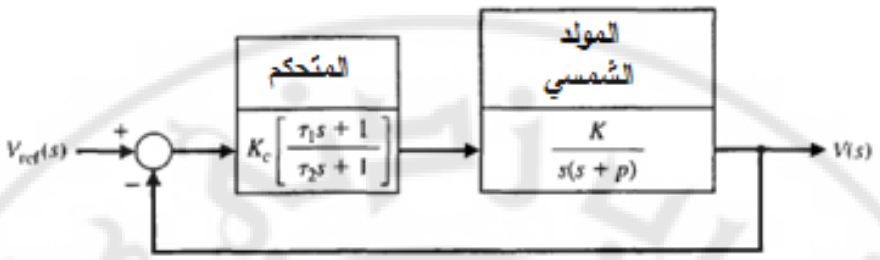
عند التردد $\omega = 1000\ rad/sec$, كسب النظام قبل إضافة المتحكم يساوي $-11\ dB$, مما يعني أنه يجب إضافة متحكم يعمل على تخفيض كسب المطال اللوغاريتمي أكثر, وذلك عند الترددات العالية, ليصبح مساوياً $-20\ dB$.

تعطى إحدى المتحكمات الممكنة, التي تحقق المطلوب بالعلاقة التالية:

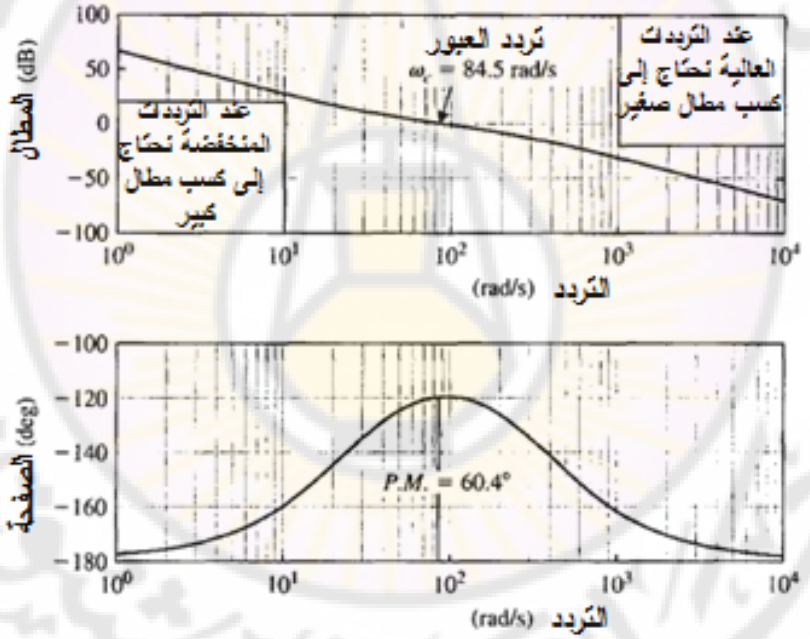
$$G_c(s) = 250\left(\frac{0.04s+1}{100s+1}\right) \dots\dots (74-8)$$

إن هامش صفحة النظام بعد إضافة المتحكم يساوي $P.M = 60.4°$. أيضاً, وكما هو مبين بالشكل (35-8), فإن المتطلبان التاليين محققين: كسب عالي عند الترددات المنخفضة, وكسب منخفض عند الترددات العالية.

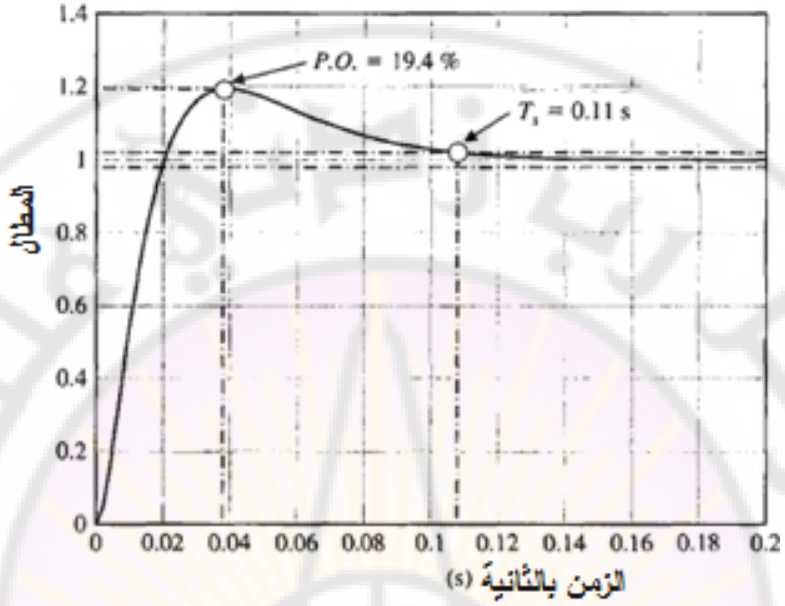
يبين الشكل (36-8) الاستجابة الخطوية للنظام المدروس. من هذا الشكل نجد أن زمن الاستقرار يساوي $T_s = 0.11\ sec$ والتجاوز النسبي $P.O.\% = 19.4\%$, وهما مقبولان للتحكم بتوتر المولد الشمسي.




**الشكل (8-34): نظام التحكم ذو التغذية الخلفية بمولد شمسي بهدف تتبع توتر مرجعي**




**الشكل (8-35): منحنيات بود لنظام المولد الشمسي المبين بالشكل (8-34) حيث $G_c(s)$ معطى بالعلاقة (8-74).**




**الشكل (8-36): الاستجابة الخطوية للنظام المدروس.**

**مثال 8-8: نظام التحكم بآلة حفر (Engraving Machine control system):**

يبين الشكل (8-37) آلة حفر المزودة بمحركين ولولب توجيه (Lead screws), بهدف تحريك رأس الحفر (Engraving scribe) على المحور $X$ [19]. يمكن أن نلاحظ أيضاً وجود محركين آخرين لتحريك رأس الحفر على المحاور $Y$ و $Z$. يبين الشكل (8-37) أيضاً المخطط الصندوقي لنظام التحكم بموضع رأس الحفر على المحور $X$ . إن الهدف من هذه الدراسة هو اختيار الربح $K$, وذلك بالاعتماد على الاستجابة الترددية, بحيث تكون خصائص الاستجابة الخطوية مقبولة.

لتمثيل الاستجابة الترددية للنظام, سنقوم أولاً برسم منحنيات بود لنظام الحلقة المفتوحة والمغلقة, ومن ثم سنستخدم منحنيات بود للحلقة المغلقة لحساب الاستجابة الزمنية للنظام, ومن ثم نقارن النتائج المتوقعة مع النتائج الحقيقية.

لرسم الاستجابة الترددية, نختار وبشكل عشوائي $K = 2$, ومن ثم نرسم منحنيات بود. إذا كانت النتيجة غير مقبولة, نقوم لاحقاً بتغيير قيمة الربح $K$.

يبين الجدول (8-7) بعض النقاط من منحني بود للتابع $G(j\omega)$ , والتي تم رسمها في الشكل (8-38).

| **الجدول (8-7) : بعض النقاط من منحني بود للتابع $G(j\omega)$** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | 0.2 | 0.4 | 0.8 | 1.0 | 1.4 | 1.8 |
| $20log\|G\|$ | | 7 | $-1$ | $-4$ | $-9$ | $-13$ |
| $\emptyset$ | $-107°$ | $-123°$ | $-150.5°$ | $-162°$ | $-179.5°$ | $-193°$ |

نحتاج الآن إلى رسم الاستجابة الترددية للنظام المغلق, ذو تابع التحويل:

$$T(s) = \frac{2}{s^3+3s^2+2s+2} \dots\dots\dots (75-8)$$

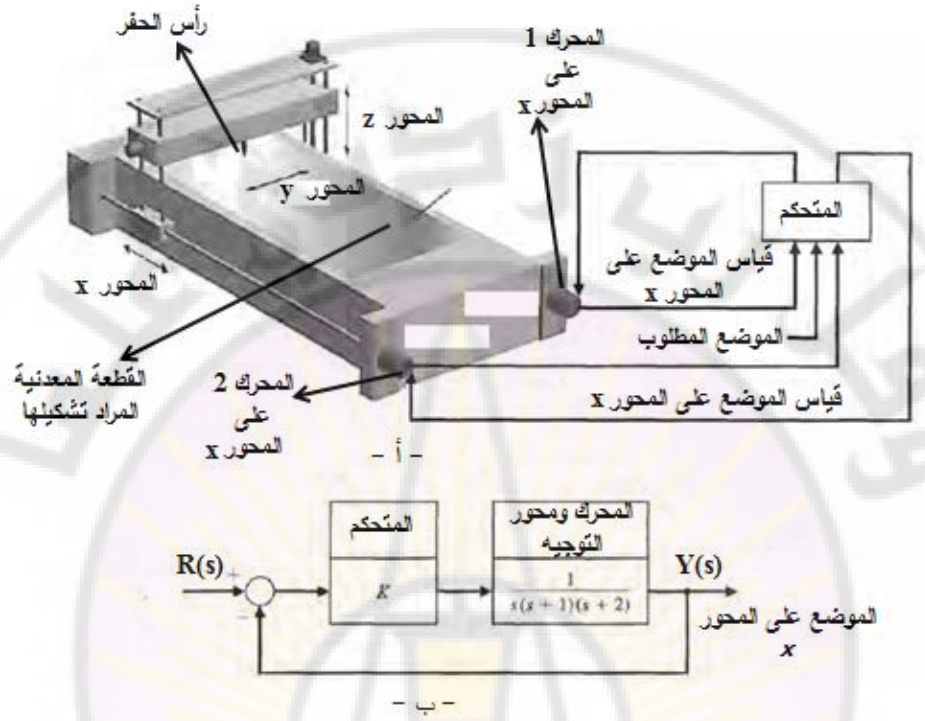
لنعوض الآن كل $s$ بـ $j\omega$ في العلاقة (8-98) لنحصل على التابع $T(j\omega)$:

$$T(j\omega) = \frac{2}{(2-3\omega^2)+j\omega(2-\omega^2)} \dots\dots\dots (76-8)$$

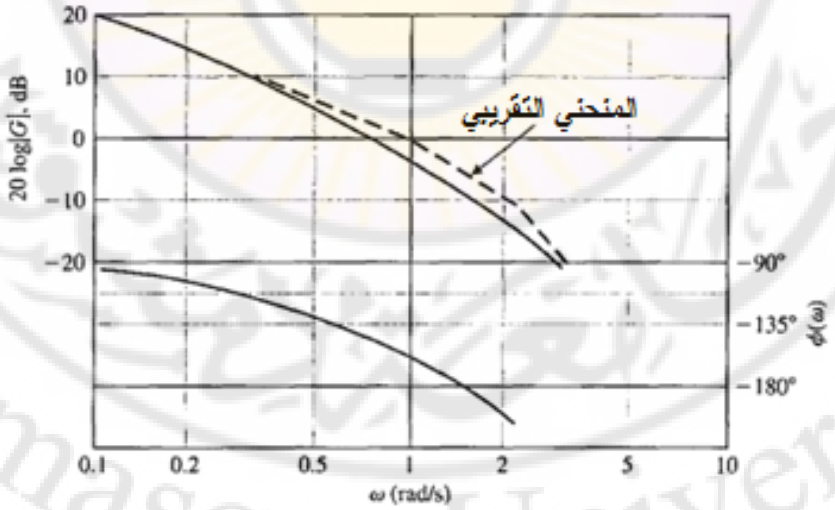
إن منحني بود لهذا النظام المغلق الممثل بالتابع $T(j\omega)$ مبين بالشكل (8-39). من هذا الشكل نجد أن القيمة العظمى لكسب المطال بالديسيبل يساوي إلى $5\ dB$, تقابل التردد $\omega_r = 0.8$, وبالتالي: $20logM_{p\omega} = 5 \Longrightarrow M_{p\omega} = 1.78$.

إذا افترضنا أن النظام ذو قطبين مسيطرين (أي النظام من الدرجة الثانية), بالتالي فإن النظام ذو استجابة ترددية مطابقة لتلك المبينة بالشكل (8-20).

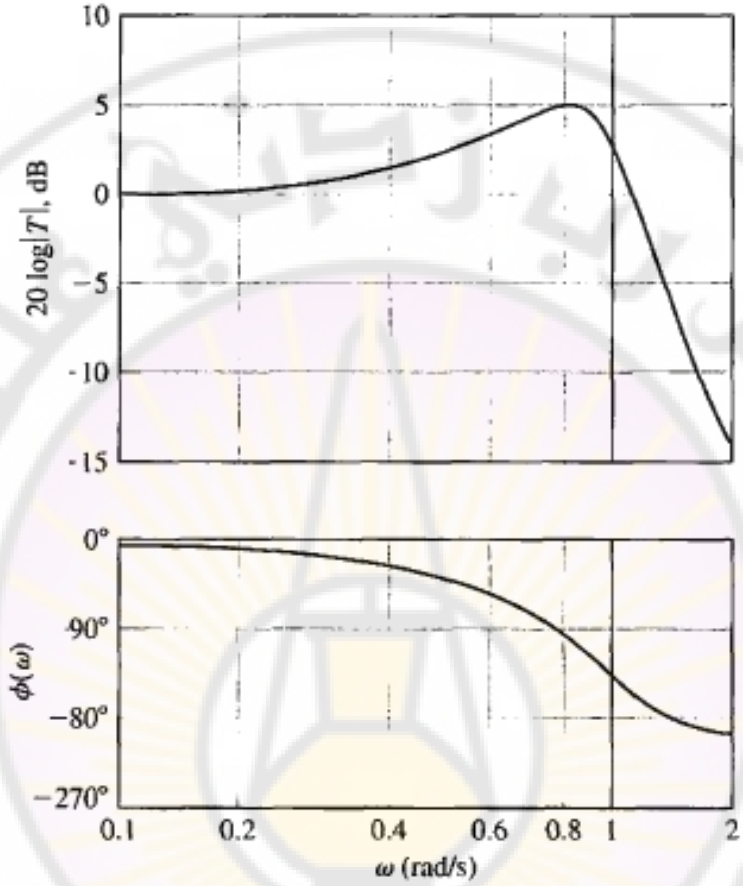
طالما أن $M_{p\omega} = 1.78$, بالتالي يمكننا استخدام المنحني المبين بالشكل (8-21) وذلك لتقدير قيمة $\zeta$ حيث نجد أن $\zeta = 0.29$. باستخدام هذه القيمة لـ $\zeta$ ومن أجل $\omega_r = 0.8$, وبالاعتماد على المنحني المبين بالشكل (8-20), يمكننا أن نقدر النسبة $\omega_r/\omega_n$ حيث نجد أن $\omega_r/\omega_n = 0.91$, وبالتالي: $\omega_n = \omega_r/0.91 = 0.8/0.91 = 0.88$ .




**الشكل (8-37): أ – نظام التحكم بآلة حفر ب – المخطط الصندوقي للنظام.**




**الشكل (8-38): منحنيات بود للتابع $G(j\omega)$.**




**الشكل (8-39): منحنيات بود للتابع $T(j\omega)$**

طالما أننا قربنا $T(s)$ إلى نظام من الدرجة الثانية, يصبح لدينا:

$$T(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2} = \frac{0.774}{s^2+0.51s+0.774} \dots (77-8)$$

بالاعتماد على الشكل (4-16) (المبين لعلاقة التجاوز النسبي بمعامل التخامد) فإننا نجد أن قيمة التجاوز عند تطبيق إشارة دخل خطوية يساوي إلى 37% , حيث $\zeta = 0.29$.

لنحسب الآن قيمة زمن الاستقرار فنجد أن:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0.29)(0.88)} = 15.7\ sec$$

إن التجاوز النسبي الفعلي للنظام (النظام من الدرجة الثالثة) هي 34%, أما زمن الاستقرار فهو $17\ sec$.

يمكن أن نرى أن تقريب النظام إلى الدرجة الثانية معقول, وبالتالي يمكن استخدامه لتحديد بارامترات النظام. إذا كان هناك حاجة إلى نظام ذو تجاوز أقل فعلينا إنقاص قيمة $K$ إلى (1), ومن ثم نعيد عملية الحساب السابقة. ■

**مثال 8-9: التحكم برجل واحدة لروبوت سداسي الأرجل:**

**(Control of one leg of a six –legged robot)**

يبين الشكل (8-40) الروبوت السداسي الأرجل. إن الهدف من هذا المثال هو تصميم نظام التحكم بموضع أحد الأرجل. إن الخطوات المتبعة في هذا المثال لتصميم المتحكم المطلوب مبينة بالشكل (8-41). يعطى النموذج الرياضي للمشغل (Actuator) ولرجل الروبوت بتابع التحويل التالي:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)} \dots\dots (78-8)$$

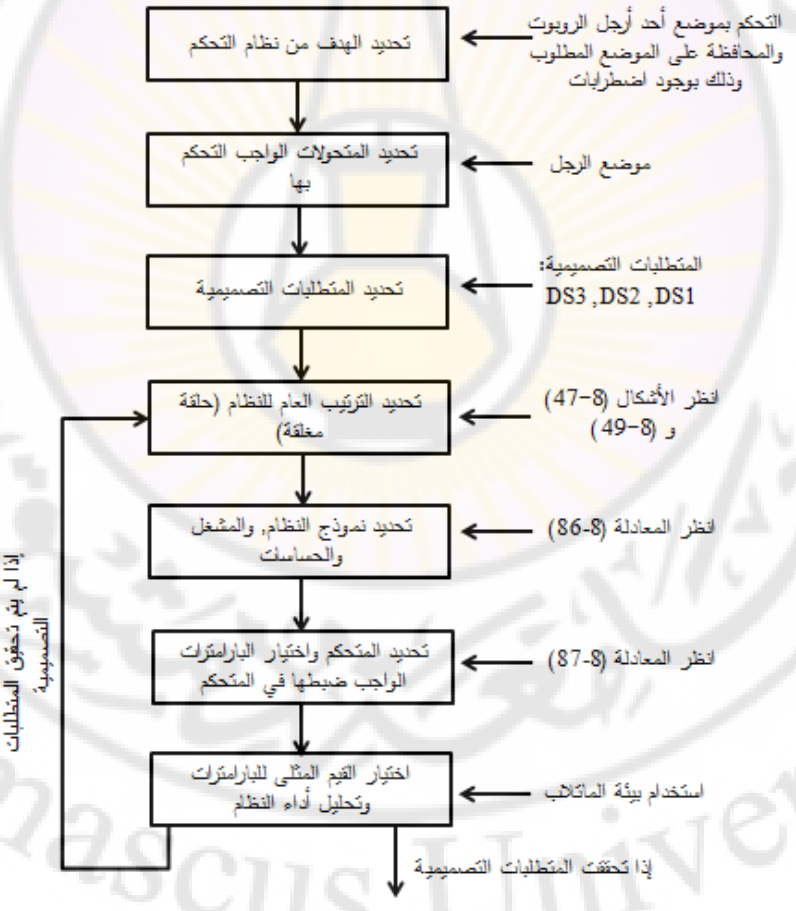
**الشكل (8-40): الروبوت سداسي الأرجل.**

إن إشارة دخل النظام هي الموضع المرغوب فيه لرجل الروبوت, أما إشارة خرجه فهي موضع الرجل الحقيقي (الوضعية العمودية فقط). يبين الشكل (8-42) المخطط الصندوقي لنظام التحكم.

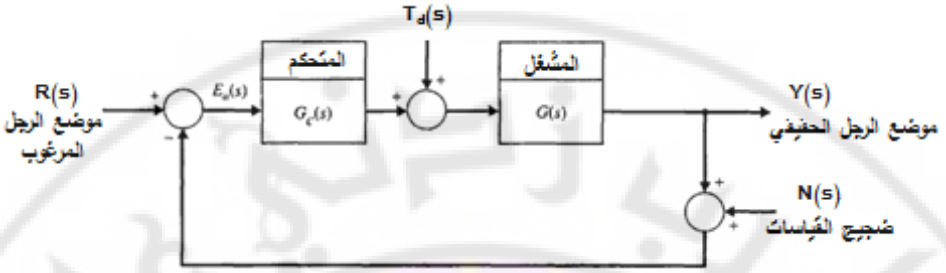
– **الهدف من نظام التحكم:** التحكم بموضع رجل الروبوت والمحافظة على هذه الوضعية بالرغم من وجود ضجيج قياس.

– **المتحكم المراد التحكم به:** موضع رجل الروبوت $Y(s)$.

نريد تحريك رجل الروبوت إلى الموضع المرغوب بأسرع ما يمكن ولكن بأقل تجاوز. بمعنى آخر: يجب أن يكون عرض المجال الترددي لنظام التحكم قليل.




**الشكل (8-41): مراحل تصميم نظام التحكم للنظام المعالج بالمثال (8-9).**




**الشكل (8-42): المخطط الصندوقي لنظام التحكم بموضع رجل الروبوت.**

– **<u>المتطلبات التصميمية للنظام:</u>**

– (DS1):عرض المجال الترددي لنظام الحلقة المغلقة أكبر من 1 Hz.

– (DS2): التجاوز النسبي أقل من 15%, وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية.

– (DS3): خطأ الحالة المستقرة معدوم , وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية.

في دراستنا التصميمية سنركز على المتطلبين التصميميي (DS1) و(DS2). بالنسبة للمتطلب التصميمي (DS3) فهو محقق كون تابع تحويل المشغل $G(s)$ من النوع الأول لكن يتوجب علينا أن نتحقق بأن تابع تحويل المسار الأمامي بعد إضافة المتحكم, أي $G(s)G_c(s)$, يبقى من النوع الأول.

لنفرض أن المتحكم معطى بتابع التحويل التالي:

$$G_c(s) = \frac{K(s^2+as+b)}{s+c} \dots\dots\dots (79-8)$$

عندما يكون $c \to 0$, نحصل على متحكم تناسبي تكاملي تفاضلي PID, حيث $K_p = K.a$ ,$K_D = K$ ,$K_I = K.b$. يمكننا في المرحلة الحالية اعتبار $c \neq 0$, وذلك بهدف إتاحة المزيد من الحرية خلال المرحلة التصميمية, أما إذا اعتبرنا $c = 0$ نحصل على المتحكم PID.

– **<u>البارامترات الواجب ضبطها في المتحكم</u>**: البارامترات هي $K, a, b, c$ .

إن المتحكم المعطى بالمعادلة (8-87) ليس المتحكم الوحيد الممكن استخدامه, حيث يمكننا على سبيل المثال استخدام المتحكم التالي:

$$G_c(s) = K\frac{s+z}{s+p} \dots\dots (80-8)$$

حيث البارامترات الواجب ضبطها في هذا المتحكم هي $K, z, p$. إن تصميم المتحكم المعطى بالعلاقة (8-80) يمكن أن تبقى كمسألة تصميمية يمكن للقارئ أن يقوم بحلها.

تعتمد استجابة نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة على أماكن الأقطاب المسيطرة في المستوي اللابلاسي. إن الطريقة التي سنتبعها في التصميم تقوم على تحديد أماكن مناسبة للأقطاب المسيطرة للنظام ذو الحلقة المغلقة. بالطبع يمكننا تحديد أماكن الأقطاب من المتطلبات التصميمية, وبالاعتماد على العلاقات التقريبية لنظام من الدرجة الثانية. حالما نحصل على بارامترات المتحكم يجب أن تقع الأقطاب المسيطرة في الأماكن المختارة بناءً على المتطلبات التصميمية, أما الأقطاب المتبقية فيتم توضيعها بحيث تكون مساهمتها في الاستجابة الكلية للنظام مهملة.

يرتبط عرض المجال الترددي $\omega_B$ بالتردد الطبيعي لنظام الدرجة الثانية $\omega_n$ بالعلاقة التقريبية التالية:

$$\frac{\omega_B}{\omega_n} \approx -1.1961\zeta + 1.8508 \ (0.3 \leq \zeta \leq 0.8) \ \ldots\ldots (81-8)$$

إن هذه العلاقة التقريبية تنطبق على نظم الدرجة الثانية فقط.

في المتطلب التصميمي الأول DS1, نجد أن:

$$\omega_B = 1\,Hz = 6.28\ rad/sec \ \ldots\ldots (82-8)$$

من المتطلب التصميمي المتعلق بالتجاوز النسبي (أي DS2), يمكننا تحديد القيمة الصغرى لـ $\zeta$, بالتالي من أجل $P.O. \leq 15\%$, نحتاج إلى:

$$\zeta \geq 0.52 \ \ldots\ldots\ldots (83-8)$$

حُسبت هذه النتيجة بالاعتماد على العلاقة (4-54) الصحيحة فقط لنظم الدرجة الثانية, والتي كانت: $P.O.\% = 100e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}$ .

إن العلاقة التصميمية الأخرى المفيدة (المعادلة 8-56), والتي تربط $M_{p\omega} = |T(\omega_r)|$ بمعامل التخامد:

$$M_{p\omega} = |T(\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} .. (\zeta < 0.707) \ldots (84-8)$$

أيضاً العلاقة بين تردد الرنين $\omega_r$, والتردد الطبيعي $\omega_n$, ومعامل التخامد معطاة بالعلاقة (8-57):

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \ldots (\zeta < 0.707) \ldots (85-8)$$

في العلاقة (8-83) وجدنا أننا نحتاج $\zeta \geq 0.52$, وبالتالي سنختار في تصميمنا $\zeta = 0.52$. بالرغم من أن زمن الاستقرار ليس ضمن المتطلبات التصميمية إلا أننا نحتاج أن تكون استجابة النظام أسرع ما يمكن مع المحافظة على تحقيق باقي المتطلبات التصميمية.

من المعادلات (5-81) و (5-82) نجد أن:

$$\omega_n = \frac{\omega_B}{-1.1961\zeta + 1.8508} = 5.11\, rad/sec \ldots\ldots (86-8)$$

بتعويض قيم التالية: $\omega_n = 5.11\, rad/sec$, $\zeta = 0.52$ بالمعادلة (8-86) نحسب قيمة $\omega_r$ فنجد أن:

$$\omega_r = 3.46\, rad/sec \ldots\ldots (87-8)$$

مما سبق إذا كان لدينا نظام من الدرجة الثانية, يجب علينا تحديد بارامترات المتحكمات بحيث يُوصف النظام المغلق بـ: $\omega_n = 5.11\, rad/\sec,\ \zeta = 0.52$

والذي يعطي سلوك ترددي يوصف بـ: $\omega_r = 3.46\, rad/sec$ , $M_{p\omega} = 1.125$

إن نظامنا المدروس في هذا المثال هو من الدرجة الرابعة, وليس الثانية, بالتالي فإن إحدى طرق التصميم المتبعة (والصحيحة بالطبع) تقوم على اختيار بارامترات المتحكم $K, a, b, c$ بحيث يكون هناك قطبين مسيطرين ومتوضعين في المستوي اللابلاسي بحيث تتحقق المتطلبات التصميمية, بينما تأثير القطبين الآخرين على الاستجابة قليل (أو مهمل). سنتبع هذه الطريقة في هذا المثال التصميمي.

هناك طريقة أخرى في التصميم تقوم على حساب نظام من الدرجة الثانية, يكون تقريبي ومحسوب من نموذج النظام من الدرجة الرابعة. في تابع التحويل التقريبي, تبقى البارامترات $K, a, b, c$ كمتحولات في هذا النموذج. إن اتباع طريقة تبسيط النظم المشروحة بالفقرة (4-12) تقودنا إلى تابع التحويل $T_L(s)$ حيث الاستجابة الترددية لهذا النموذج المبسط أقرب ما يمكن للاستجابة الترددية للنموذج الأصلي.

لنطبق طريقة حساب قطبين مسيطرين, وآخرين قليلي التأثير على استجابة النظام. في هذا النظام لدينا:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s^2 + 2s + 10)(s + c)}$$

بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة المغلقة:

$$T(s)=\frac{G_c(s)G(s)}{1+G(s)G_c(s)}==\frac{K(s^2+as+b)}{s^4+(2+c)s^3+(10+2c+K)s^2+(10c+Ka)s+Kb}\ldots\ldots(88-8)$$

إن المعادلة المميزة لهذا النظام:

$$s^4+(2+c)s^3+(10+2c+K)s^2+(10c+Ka)s+Kb=0\ldots..(89-8)$$

لنحاول الآن كتابة المعادلة المميزة على النحو التالي:

$$P_d(s)=(s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2)(s^2+d_1s+d_0)=0$$

حيث يتم اختيار قيم $\zeta,\omega_n$ بشكل تتحقق فيه المتطلبات التصميمية, وتكون جذور الحد $(s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2)$ هي الجذور المسيطرة, أما جذور $(s^2+d_1s+d_0)$ فهي الجذور غير المسيطرة. إن الجذور المسيطرة يجب أن تقع على نفس المحور العمودي في المستوي اللابلاسي, والذي يبعد عن المحور التخيلي بمقدار $(-\zeta\omega_n)$.

لنفرض أن: $d_1=2\alpha\zeta\omega_n$ بالتالي فإن جذور الحد $(s^2+d_1s+d_0)=0$ تقع في المستوي اللابلاسي على نفس المحور العمودي, والذي يبعد عن المحور التخيلي بمقدار $(-\alpha\zeta\omega_n)$. باختيارنا لـ $\alpha$ قيمة أكبر من الواحد أي $(\alpha>1)$ نكون قد حركنا جذور الحد $(s^2+d_1s+d_0)$ إلى يسار الجذور المسيطرة. كلما اخترنا قيمة أكبر لـ $\alpha$ كلما وقعت الجذور غير المسيطرة بشكل أبعد إلى يسار الجذور المسيطرة. لنأخذ قيمة معقولة لـ $\alpha$ ولتكن $\alpha=12$. أيضاً إذا اخترنا $d_0=\alpha^2\zeta^2{\omega_n}^2$ نحصل على جذرين حقيقيين هما:

$$s^2+d_1s+d_0=(s+\alpha\zeta\omega_n)^2=0$$

إن هذا الخيار ليس مطلوب, لكن يبدو لنا أن هذا الخيار معقول, وذلك لأننا نرغب أن تكون مشاركة الجذور الغير مسيطرة في استجابة النظام ضعيفة, وغير مهتزة.

مما سبق نجد أن المعادلة المميزة للنظام ستكون على النحو التالي:

$$s^4+[2\zeta\omega_n(1+\alpha)]s^3+\left[{\omega_n}^2\left(1+\alpha\zeta^2(\alpha+4)\right)\right]s^2+[2\zeta\alpha{\omega_n}^3(1+\zeta^2\alpha)]s+\alpha^2\zeta^2{\omega_n}^4=0\ldots\ldots(98-8)$$

بمساواة معاملات المعادلتين (97-8) و (98-8) نجد قيم $\alpha, K, a, b, c$:

$$2\zeta\omega_n(1+\alpha)=2+c$$
$$\omega_n{}^2\left(1+\alpha\zeta^2(\alpha+4)\right)=10+2c+K$$
$$2\zeta\alpha\omega_n{}^3(1+\zeta^2\alpha)=10c+K.a$$
$$\alpha^2\zeta^2\omega_n{}^4=K.b$$

بتعويض $\zeta = 0.52$ و $\omega_n = 5.11$ و $\alpha = 12$ نجد:

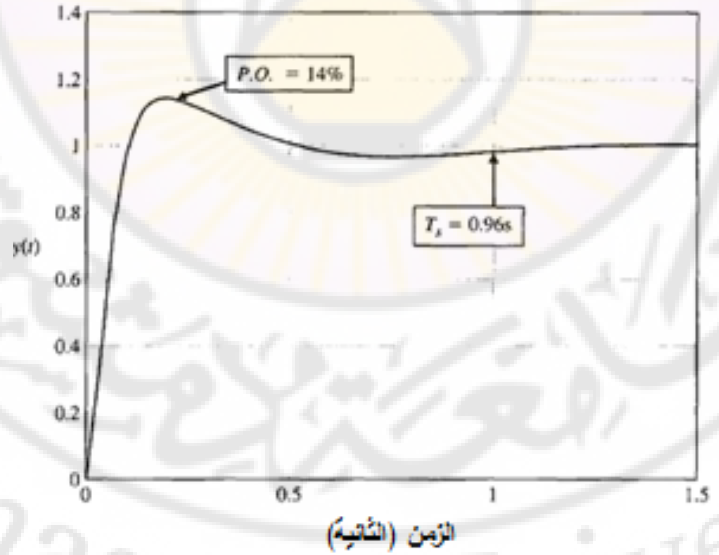
$$c = 67.13,\ K = 1239.2,\ a = 5.17,\ b = 21.48$$

بالتالي فالمتحكم الناتج هو:

$$G_c(s) = \frac{1239(s^2+5.17s+21.48)}{s+67.13} \dots\dots (90-8)$$

يبين الشكل (8-43) الاستجابة الخطوية للنظام المغلق وذلك بعد استخدام المتحكم المعطى بالعلاقة (8-99). من هذه الاستجابة نجد أن التجاوز النسبي للنظام $P.O.\% = 14\%$ , أما زمن الاستقرار فهو $T_s = 0.96$ ثانية.

يبين الشكل (8-44) منحني المطال للنظام المدروس. إن عرض المجال الترددي للنظام $\omega_B = 27.2\, rad/sec = 4.33\, Hz$. إن هذه القيمة تحقق المتطلب التصميمي الأول DS1, لكنها أكبر من القيمة $\omega_B = 1\, Hz$ المعتمدة في التصميم. إن هذا الاختلاف ناتج عن أن النظام من الدرجة الرابعة, وليس من الدرجة الثانية. كما توقعنا أيضاً كلما زاد عرض المجال الترددي كلما كان زمن الاستقرار أصغر. إن القيمة العظمى للمطال $M_{p\omega} = 1.21$, بينما توقعنا في الحسابات $M_{p\omega} = 1.125$.




**الشكل (8-43): الاستجابة الخطوية للنظام المغلق وذلك بعد استخدام المتحكم المعطى بالعلاقة (8-90).**

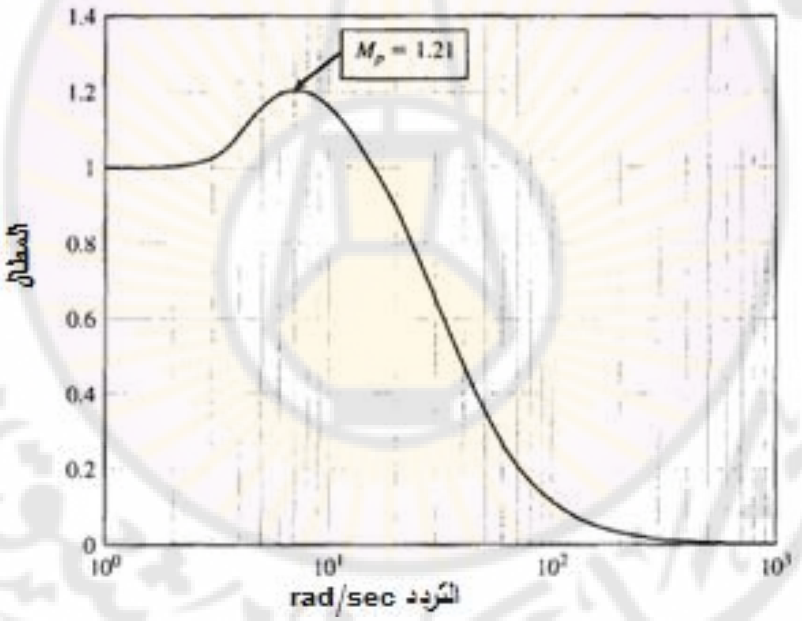
من الشكل (8-44) نلاحظ أنه كلما زاد تردد إشارة الدخل كلما نقص مطال إشارة الخرج.

للتحقق من هذه النتيجة سنرسم الاستجابة الزمنية للنظام وذلك بالحالتين التاليتين:

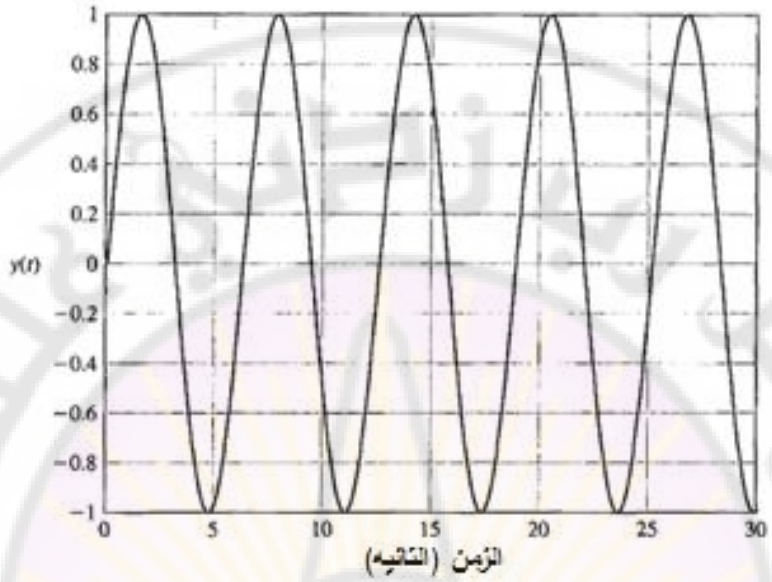
– تردد الإشارة الدخل $\omega = 1\, rad/sec$: يبين الشكل (8-45) إشارة خرج النظام حيث نلاحظ أن مطال إشارة الخرج في الحالة المستقرة يساوي (1).

– تردد الإشارة الدخل $\omega = 500\, rad/sec$: يبين الشكل (8-46) إشارة خرج النظام حيث نلاحظ أن مطال إشارة الخرج في الحالة المستقرة يساوي (0.005).

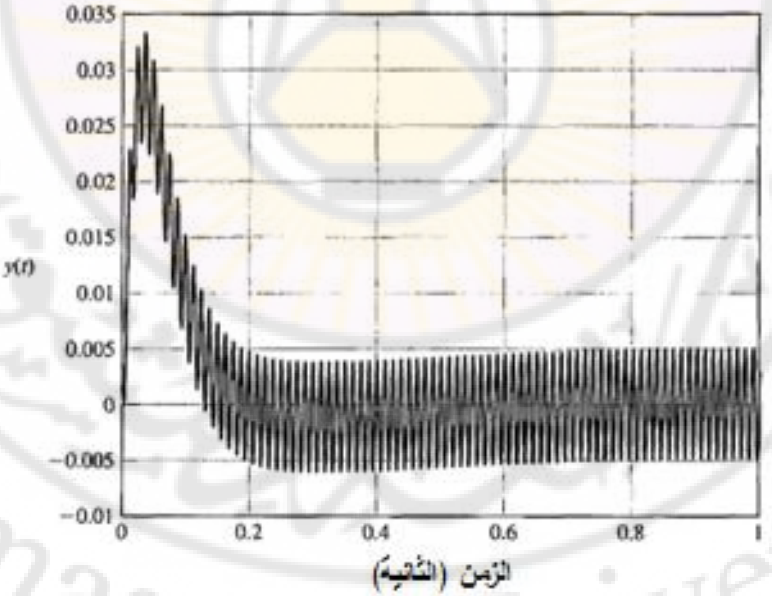
إن هذه النتائج تتوافق مع النتائج التي حصلنا عليها في الشكل (8-44) حيث من الملاحظ أنه كلما زاد تردد إشارة الدخل, كلما نقص مطال إشارة الخرج.




**الشكل (8-44): منحني المطال للنظام المدروس وذلك بعد استخدام المتحكم المعطى بالعلاقة (8-99).**




**الشكل (8-45): إشارة خرج النظام عند تطبيق إشارة دخل بتردد $\omega = 1\, rad/sec$**




**الشكل (8-46): إشارة خرج النظام عند تطبيق إشارة دخل بتردد $\omega = 500\, rad/sec$**

إن هذه الطريقة التحليلية البسيطة أتاحت لنا الحصول على بارامترات المتحكم المستخدم للتحكم بموضع رجل الروبوت. لقد برهنا أن هذا المتحكم يحقق المتطلبات التصميمية المطلوبة. ■

**9-8 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

إن سواقة الأقراص المدمجة, كما هو مبين بالشكل (2-85) تملك أداة تعليق وذلك لحمل الرأس القارئ. أيضاً كما نوهنا في الفصول السابقة يمكن أن تُمثل أداة التعليق هذه على شكل نابض وكتلة. في هذا الفصل سنقوم بالأخذ بعين الاعتبار تأثير أداة التعليق وذلك ضمن نموذج محرك – حمل [9].

يمكن أن نمثل أداة التعليق مع الرأس القارئ بكتلة $M$, ونابض $K$ ومعامل احتكاك $b$, وذلك كما هو مبين بالشكل (8-47). في هذا المثال, سنفرض أن القوة $u(t)$ التي تؤثر على أداة التعليق, هي القوة الناتجة عن تأثير ذراع السواقة على أداة التعليق. إن تابع تحويل نظام نابض – كتلة – مخمد قد درس في الفصل الثاني, حيث:

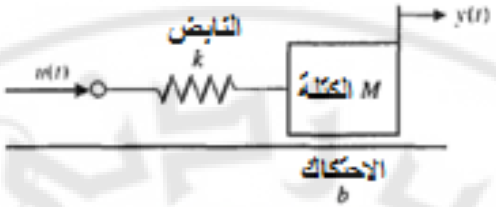
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{1}{1+(2\zeta s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2} = G_3(s)$$

تملك أداة التعليق النموذجية مع رأس القارئة الثوابت التالية: $\zeta = 0.3$ وتردد الاهتزاز الحر $f_n = 3000$ Hz, أي $\omega_n = 18.85 \times 10^3$. يبين الشكل (8-48) نموذج النظام.

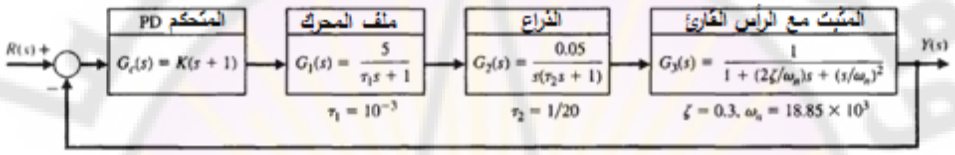
بداية, نقوم برسم منحني بود لكسب المطال للحلقة المفتوحة. يبين الشكل (8-49) هذا المنحني. لاحظ أنه عند التردد $\omega = \omega_n$, يقع منحني كسب المطال الفعلي أعلى من المنحني التقريبي بـ 10 ديسبل. إن هذا المنحني هو عبارة عن رسم للعلاقة التالية:

$$20\log|K(j\omega+1)G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)|$$

وذلك من أجل $K = 400$. لاحظ أيضاً ظهور الرنين عند التردد $\omega = \omega_n$. بالطبع نريد التخلص من هذا الرنين.



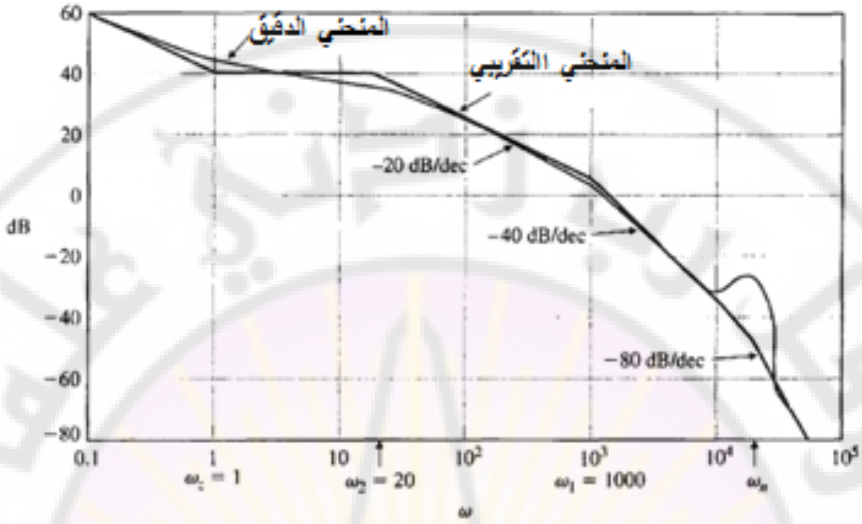

**الشكل (8-47): نموذج أداة التعليق ورأس القارئة والممثلة بنابض, كتلة واحتكاك.**




**الشكل (8-48): نموذج قارئة الأقراص الصلبة, مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير أداة تعليق الرأس القارئ.**

يبين الشكل (8-50) منحنيات بود لكسب المطال للنظام المدروس. إن عرض المجال الترددي للنظام المغلق $\omega_B = 2000\, rad/sec$. يمكننا تقدير زمن الاستقرار لهذا النظام باستخدام العلاقة التالية: $T_s = 4/\zeta\omega_n$, حيث $\zeta = 0.8$ و $\omega_B \approx \omega_n = 2000\, rad/sec$. بالتالي فإن زمن الاستقرار المتوقع يساوي 2.5 ميلي ثانية (أي $T_s = 2.5\, ms$). طالما أن $K \leq 400$ فإن الرنين يقع خارج المجال الترددي للنظام.

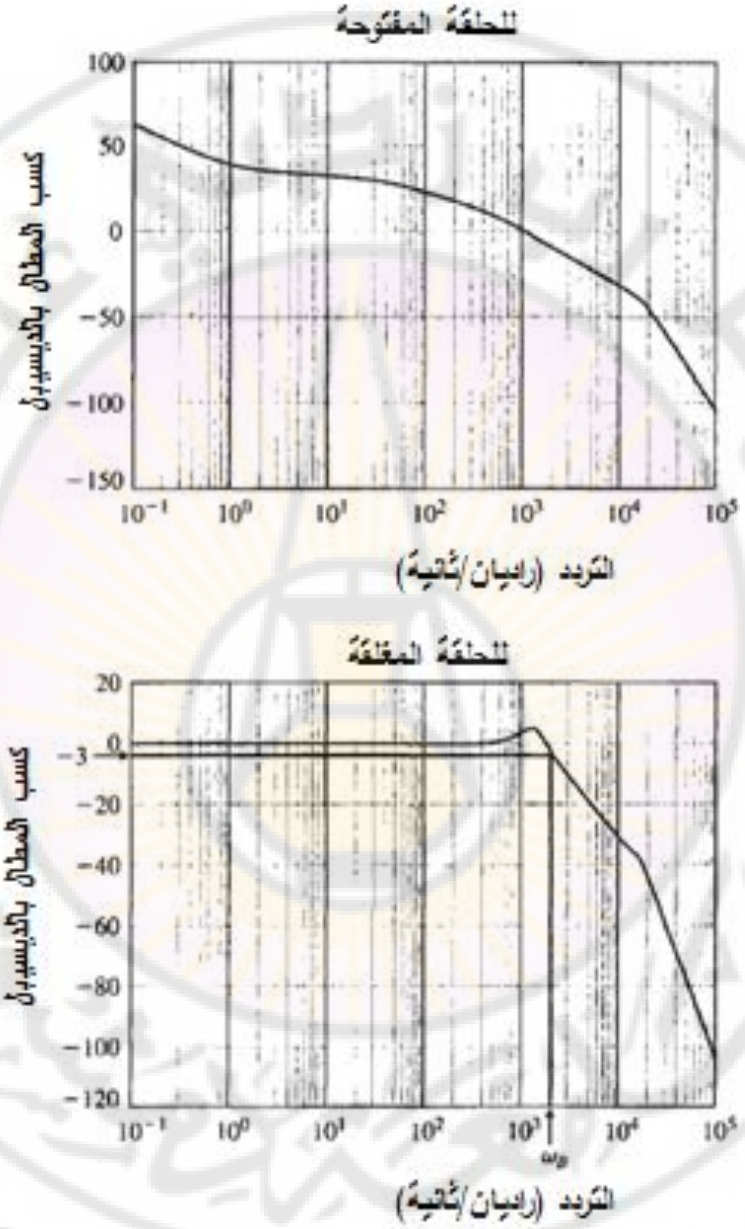
Damascus University




**الشكل (8-49): منحني بود لكسب المطال للحلقة المفتوحة.**

**10-8 خاتمة:**

في هذا الفصل, درسنا الاستجابة الترددية وخصائصها وذلك للنظم ذات التغذية الخلفية. عرفنا كذلك الاستجابة الترددية للنظام بأنها استجابة النظام بحالة مستقرة, وذلك عند تطبيق إشارة دخل جيبية. كذلك درسنا عدة طرق لرسم الاستجابة الترددية ممثلة بمنحني نايكويست وبمنحني بود. قدمنا أيضاً طريقة المقاربات لرسم منحنيات بود. ناقشنا أيضاً العديد من خصائص الاستجابة الترددية وهي القيمة العظمى للمطال $M_{p\omega}$, وتردد الرنين $\omega_r$. نوهنا أيضاً للعلاقة بين منحنيات بود وثوابت خطأ المرحلة المستقرة (خطأ الموضع $K_p$ وخطأ السرعة $K_v$). في النهاية أدخلنا تعريف منحني جديد لتمثيل الاستجابة الترددية ويمثل العلاقة بين كسب المطال اللوغاريتمي وفرق الصفحة.




**الشكل (8-50): منحني بود لكسب المطال للحلقة المفتوحة والمغلقة.**

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# الفصل التاسع: دراسة الاستقرار في المستوي الترددي

# Chapter 9: Stability study in the frequency Domain

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

درسنا في الفصول السابقة الاستقرار, وقدمنا عدة طرق لتحديد الاستقرار. في هذا الفصل سنستمر في مناقشة الاستقرار, وسنبين كيفية استخدام الاستجابة الترددية في دراسة الاستقرار. سنستخدم منحنيات بود ومنحنيات نايكويست لتعريف عدد من المفاهيم الأساسية وهي: هامش المطال, وهامش الصفحة. يُعرف معيار الاستقرار المعتمد على منحني نايكويست, بمعيار نايكويست للاستقرار, حيث سيتم شرح هذا المعيار عبر العديد من الأمثلة التوضيحية. إن تأثير وجود عناصر التأخير الزمني في النظام يؤثر على كلاً من الاستقرار وخصائص الأداء الزمني, لذلك سنناقش هذه النقطة أيضاً بالتفصيل. سنرى أيضاً أن تأخير الصفحة الناتج عن وجود عناصر التأخير الزمني يمكن أن يدفع النظام نحو عدم الاستقرار. سنختم الفصل بتحليل الاستجابة الترددية لقارئة الأقراص المدمجة.

**1-9 مقدمة:**

تعد مسألة الاستقرار من المسائل المهمة عند دراسة نظم التحكم, كما أن الاستقرار النسبي أيضاً يعتبر من النقاط المهمة, والذي يدرس فقط عندما يكون النظام مستقراً. في الفصل السابع ناقشنا مفهوم الاستقرار, وقدمنا عدة طرق لتحديد الاستقرار والاستقرار النسبي, من بين هذه الطرق طريقة راوث هورفيتز المعتمدة على المعادلة المميزة للنظام. أيضاً ناقشنا في الفصل السابع استخدام المحل الهندسي لتحديد الاستقرار النسبي للنظام. في هذا الفصل سنهتم بدراسة الاستقرار في المستوي الترددي, وبدلالة الاستجابة الترددية التي درسناها في الفصل الثامن.

يمكن الحصول على الاستجابة الترددية للنظام بطريقة تجريبية, وذلك بتطبيق إشارات دخل جيبية بترددات مختلفة على النظام, وبعد الحصول على الاستجابة الترددية, يمكننا استخدامها لدراسة الاستقرار النسبي للنظام. أيضاً, إن معيار الاستقرار في المستوي الترددي يمكن أن يكون مفيد لضبط بارامترات النظام بهدف زيادة الاستقرار النسبي.

إن معيار الاستقرار في المستوي الترددي وضع من قبل العالم نايكويست في العام 1932, والذي ما يزال يعتبر أحد الطرق الأساسية لدراسة استقرار النظم الخطية

[10, 20]. يعتمد معيار نايكويست للاستقرار على نظرية كوشي (Cauchy's theorem). تهتم هذه النظرية بإسقاط الخطوط المحيطة في المستوي اللابلاسي.

لتحديد الاستقرار النسبي للنظام المغلق, يتوجب علينا دراسة المعادلة المميزة للنظام:

$$F(s) = 1 + L(s) = 0 \dots\dots\dots (1-9)$$

حيث $L(s) = G(s)H(s)G_c(s)$, وذلك في النظم وحيدة الحلقة المبينة بالشكل (1-9). في النظم متعددة الحلقة, نحصل على المعادلة المميزة بالاعتماد على مخططات تدفق الإشارة:

$$F(s) = \Delta(s) = 1 - \Sigma L_n - \Sigma(L_m L_q) = 0$$

حيث $\Delta(s)$ محدد مخطط تدفق الإشارة. بالتالي يمكننا تمثيل المعادلة المميزة للنظم وحيدة أو متعددة الحلقة بواسطة المعادلة (1-9) حيث $L(s)$ يتبع المتحول اللابلاسي $s$. حتى يكون النظام المدروس مستقر يجب أن تقع جميع جذور المعادلة المميزة $F(s)$ في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي.

لفهم معيار نايكويست للاستقرار يتوجب علينا أولاً شرح طريقة إسقاط الخطوط المحيطة في المستوي اللابلاسي.

**9-2 إسقاط الخطوط المحيطة في المستوي اللابلاسي:**

**(Mapping contour in the s-plane)**

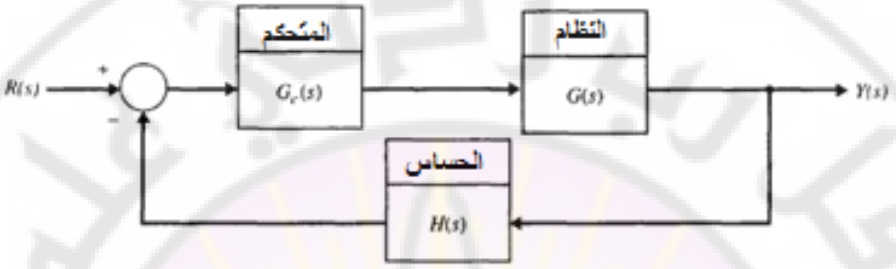
سنهتم في هذه الفقرة بطريقة إسقاط الخطوط المحيطة في المستوي اللابلاسي إلى مستوي آخر يرتبط مع المستوي اللابلاسي بالعلاقة المصاغة بالتابع $F(s)$. إذاً إسقاط الخط المحيط هو عبارة عن خط أو مسار يُنقل من مستوي إلى مستوي آخر يرتبط مع المستوي الأول بالعلاقة $F(s)$. بما أن المتحول اللابلاس $s$ هو متحول عقدي حيث $s = \sigma + j\omega$, بالتالي فإن التابع $F(s)$ هو تابع عقدي أيضاً يمكن أن يُكتب على النحو التالي: $F(s) = u + jv$ , حيث يمكن تمثيل هذا التابع في الجملة الإحداثية $(u, v)$.

لنأخذ على سبيل المثال التابع $F(s) = 2s + 1$. ليكن لدينا الخط المحيطي المغلق المبين بالشكل (2-9- أ). إن إسقاط هذا الخط المحيطي من المستوي اللابلاسي إلى المستوي العقدي $(u, v)$ وفق التابع $F(s)$, يتم على النحو التالي:

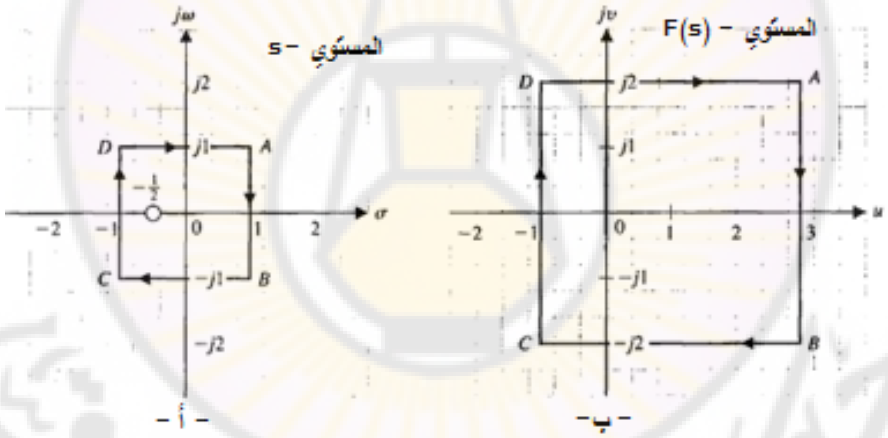
$$u + jv = F(s) = 2s + 1 = 2(\sigma + j\omega) + 1 \dots\dots (2-9)$$

بالتالي في هذه الحالة يكون لدينا:

$$u = 2\sigma + 1 \ldots\ldots\ldots (3-9)$$




**الشكل (9-1): نظام مغلق ذو تغذية خلفية وحيد الحلقة.**




**الشكل (9-2): إسقاط مربع واحدي باستخدام التابع $F(s) = 2s + 1 = 2(s + 0.5)$.**

يبين الشكل (9-2- ب) الخط المحيطي المسقط في المستوي العقدي $(u, v)$, والناتج عن إسقاط الخط المحيطي المبين بالشكل (9-2- أ), وذلك وفق التابع $F(s)$. إن الخط المحيطي الناتج ذو شكل ينطبق مع الشكل الأصلي مع بعض الإزاحات. لاحظ أيضاً أن هذا الإسقاط يحافظ على الزوايا المشكلة في المستوي اللابلاسي , لذلك يسمى هذا النوع من الإسقاط بالإسقاط التطابقي (Conformal Mapping). يمكن أن نلاحظ أيضاً أن

إسقاط خط محيطي مغلق في المستوي اللابلاسي يعطي أيضاً خطاً مغلقاً ( Closed contour) في المستوي $F(s)$.

إن النقاط $A, B, C, D$ المبينة بالشكل (9-2- ب) في المستوي اللابلاسي, أسقطت إلى المستوي $F(s)$, وسميت أيضاً $A, B, C, D$ . يُشار إلى اتجاه اجتياز الخط المغلق في المستوي اللابلاسي بـ $ABCD$. حيث تبين الأسهم اتجاه اجتياز الخط المغلق, وهو يتطابق مع اتجاه اجتياز الخط المغلق في المستوي $F(s)$.

اصطلح على اعتبار اتجاه الاجتياز موجب وذلك عندما يتوافق هذا الاتجاه مع حركة عقارب الساعة.

في دراستنا نهتم بشكل أساسي بالتابع $F(s)$ ذو الشكل الكسري في المستوي اللابلاسي $s$, لذلك من المفيد أن ندرس مثال آخر للإسقاط وذلك عندما يكون $F(s)$ تابع كسري. ليكن لدينا الخط المغلق المبين بالشكل (9-3- أ), والذي يأخذ شكل مربع. لنفرض أننا نريد إسقاط هذا المربع إلى المستوي $(u,v)$ وفق التابع الكسري $F(s)$ المعطى بالعلاقة :

$$F(s) = \frac{s}{s+2} \dots\dots (5-9)$$

يلخص الجدول (9-1) قيم بعض النقاط في المستوي اللابلاسي والمستوي $F(s)$, أما الخط المحيط الناتج بعد الإسقاط فهو مبين بالشكل (9-3- ب). إن الخط المغلق في المستوي $F(s)$ يحيط بنقطة مركز الإحداثيات وذلك لأن مركز الإحداثيات يقع داخل المنطقة المغلقة للخط المُسقط في المستوي $F(s)$.

تركز نظرية كوشي على التابع $F(s)$ , والذي يملك عدد من الأقطاب والأصفار داخل الخط المحيط في المستوي اللابلاسي. يمكننا أن نكتب التابع $F(s)$ على النحو التالي:

$$F(s) = \frac{K\Pi_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\Pi_{K=1}^{m}(s+p_k)} \dots\dots\dots (6-9)$$

حيث $-z_i$ , $-p_k$ أصفار وأقطاب التابع $F(s)$ الممثل للمعادلة المميزة, أي:

$$F(s) = 1 + L(s) \dots\dots\dots (7-9)$$

حيث: $L(s) = N(s)/D(s)$.

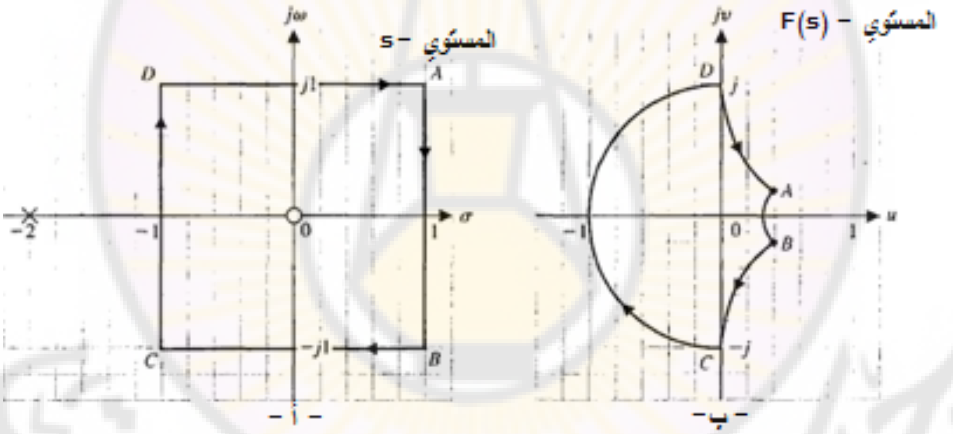
مما سبق ينتج لدينا :

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s)+N(s)}{D(S)} = \frac{K\Pi_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\Pi_{K=1}^{m}(s+p_k)} \dots\dots\dots (8-9)$$

لاحظ أن أقطاب الـ $D(s)$ هي نفسها أقطاب $F(s)$, لكن في الواقع أصفار التابع $F(s)$ هي جذور المعادلة المميزة, وهي التي تدل على استجابته.

**الجدول (9-1): قيم $F(s)$**

| | نقطة $A$ | | نقطة $B$ | | نقطة $C$ | | نقطة $D$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $1+j$ | $1$ | $1-j$ | $-j$ | $-1-j$ | $-1$ | $-1+j$ | $j$ |
| $F(s)$ | $\frac{4+2j}{10}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4-2j}{10}$ | $\frac{1-2j}{5}$ | $-j$ | $-1$ | $+j$ | $\frac{1+2j}{5}$ |




**الشكل (9-3): إسقاط الشكل (9-3 أ) وفق التابع $F(s) = s/s + 2$.**

لنأخذ على سبيل المثال التابع $F(s) = 2(s + 0.50)$, والذي يملك صفر وحيد $s = -0.5$, والمبين بالشكل (9-2أ). إن الخط المحيط في هذا الشكل مغلق ويحيط أيضاً بصفر التابع $F(s)$. بنفس الطريقة, لنأخذ مثال آخر وهو التابع $F(s) = s/s + 2$. إن الخط المحيط المبين بالشكل (9-3أ) مغلق وهو يحيط بصفر التابع $F(s)$ ولكن لا يحيط بقطبه $s = -2$. إن الإحاطة بأقطاب وأصفار التابع $F(s)$ في المستوي اللابلاسي

يمكن أن ترتبط بالإحاطة بمركز الإحداثيات في المستوي $F(s)$, وذلك عن طريق **نظرية كوشي** (Cauchy's Theorem), والتي تنص على أن:

**ليكن لدينا خط محيط $\Gamma_s$ في المستوي اللابلاسي يحيط بأصفار التابع $F(s)$ ذات العدد $z$, وكذلك يحيط بأقطاب $F(s)$ ذات العدد $p$, ولا يمر عبر هذه الأقطاب والأصفار, كما أن اتجاه الاجتياز لهذا الخط ينطبق على اتجاه دوران عقارب الساعة. إن مسقط $\Gamma_s$ إلى المستوي $F(s)$ يحيط بنقطة مركز هذا المستوي $F(s)$, وذلك عدد من المرات يساوي $(N)$ حيث $N = z - p$, و باتجاه دوران عقارب الساعة.**

لنأخذ على سبيل المثال التابع التالي $F(s) = s/s + 0.5$. إن المربع الواحدي المبين بالشكل (9-4-أ) يحيط بصفر وقطب التابع $F(s)$ وهما على التوالي: $s = 0$ و $s = -0.5$. يبين الشكل (9-4-ب) مسقط المربع الواحدي المبين بالشكل (9-4-أ) إلى المستوي $F(s)$. يمكن أن نلاحظ أن المسقط في المستوي $F(s)$ لا يحيط بمركز الإحداثيات ذلك لأن $N = z - p = 0$.

يمكن أن نفهم نظرية كوشي بطريقة أفضل, وذلك بدراسة التابع $F(s)$ بدلالة الزاوية المشكلة بين نقطة ما من الخط المحيطي $\Gamma_s$ , وأصفار وأقطاب التابع $F(s)$, علماً أن اتجاه الاجتياز لـ $\Gamma_s$ ينطبق على اتجاه دوران عقارب الساعة. لتوضيح هذه الفكرة لندرس التابع التالي:

$$F(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)} \dots\dots\dots (9-9)$$

حيث $-z_i$ و $-p_k$ أصفار وأقطاب التابع $F(s)$. يمكن صياغة التابع $F(s)$ على النحو التالي:

$$F(s) = |F(s)|\angle F(s) = \frac{|s+z_1||s+z_2|}{|s+p_1||s+p_2|}[\angle(s+z_1) + \angle(s+z_2) - \angle(s+p_1) - \angle(s+p_2)] = |F(s)|(\phi_{z_1} + \phi_{z_2} - \phi_{p_1} - \phi_{p_2}) \dots\dots\dots (10-9)$$

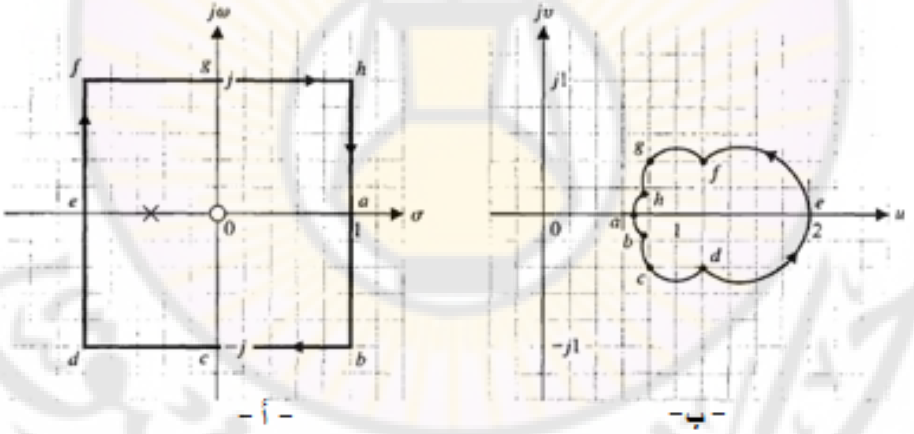
من أجل الخط المحيطي $\Gamma_s$ المبين بالشكل (9-5-أ), لنحاول تقدير قيم الزوايا $(\phi_{z_1}, \phi_{z_2}, \phi_{p_1}, \phi_{p_2})$, وذلك عند دوران النقطة $(s)$ على طول الخط المحيطي,

وباتجاه عقارب الساعة. يمكن التمييز بين الأقطاب والأصفار الواقعة داخل وخارج $\Gamma_s$. من أجل الأقطاب $(p_2, p_1)$ والصفر $(z_2)$ الواقعة خارج $\Gamma_s$ نجد أن التغير في الزوايا $(\phi_{z_2}, \phi_{p_1}, \phi_{p_2})$ معدوم. من أجل الصفر $(z_1)$ الواقع داخل $\Gamma_s$ نجد أن الزاوية تمسح زاوية مقدارها $360°$, وذلك عند دوران $(s)$ حول $\Gamma_s$ بمقدار دورة كاملة, وباتجاه عقارب الساعة. بمعنى آخر عند اجتياز $\Gamma_s$ دورة كاملة يكون مقدار الزيادة في زاوية $(z_1)$ يساوي $360°$. إذا كان هناك صفر $(z)$ واقع داخل $\Gamma_s$ يكون مقدار الزيادة في زوايا الأصفار يساوي إلى $\emptyset = 2\pi z$ راديان. باتباع نفس المناقشة السابقة نجد أنه إذا كان لدينا $P$ قطب و $Z$ صفر محاطة بالخط المحيطي $\Gamma_s$, يكون مقدار التغير في زاوية $F(s)$ (أي $\angle(F(s))$ ) مساوياً لـ $2\pi Z - 2\pi P$,أي:

$$\emptyset_F = \emptyset_z - \emptyset_p$$

أو:

$$2\pi N = 2\pi Z - 2\pi P \dots\dots\dots (11-9)$$

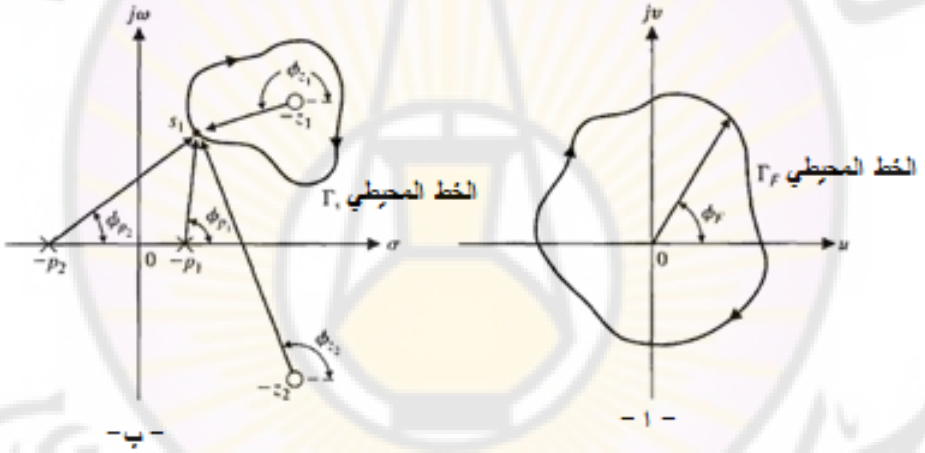



**الشكل (9-4): إسقاط مربع واحدي وفق التابع $F(s) = s/s + 0.5$**

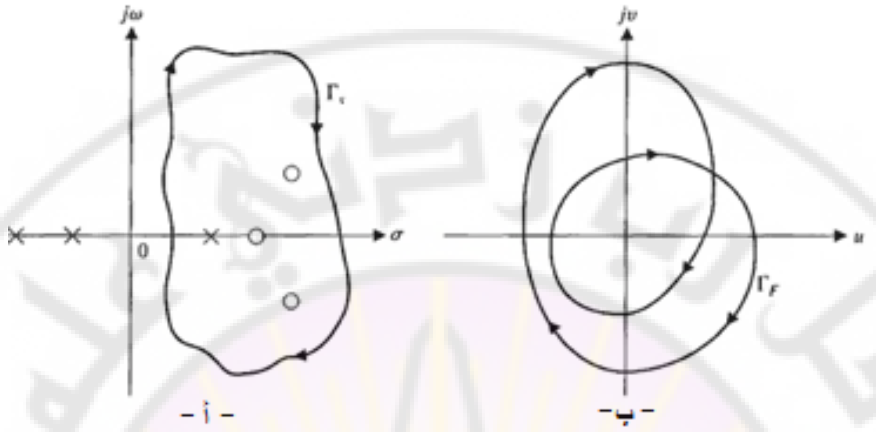
وبالتالي فإن العدد الكلي للخطوط المغلقة المحيطة بمركز الإحداثيات في المستوي $F(s)$ يساوي $N = Z - P$. في الشكل (9-5) يحيط $\Gamma_s$ بالصفر الوحيد للنظام, بالتالي فإن $\Gamma_F$ يحيط بمركز الإحداثيات في المستوي $F(s)$ مرة واحدة, وذلك عند الدوران باتجاه عقارب الساعة.

لنأخذ مثال على تطبيق نظرية كوشي, ولندرس الحالة المبينة بالشكل (9-6-أ). إن الخط المحيطي يحيط بثلاثة أصفار وقطب وحيد, وبالتالي:$N = 3 - 1 = +2$. بالتالي يحيط $\Gamma_F$ بمركز الإحداثيات مرتين وذلك عند دوران حول $\Gamma_F$ باتجاه عقارب الساعة, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-6-ب).

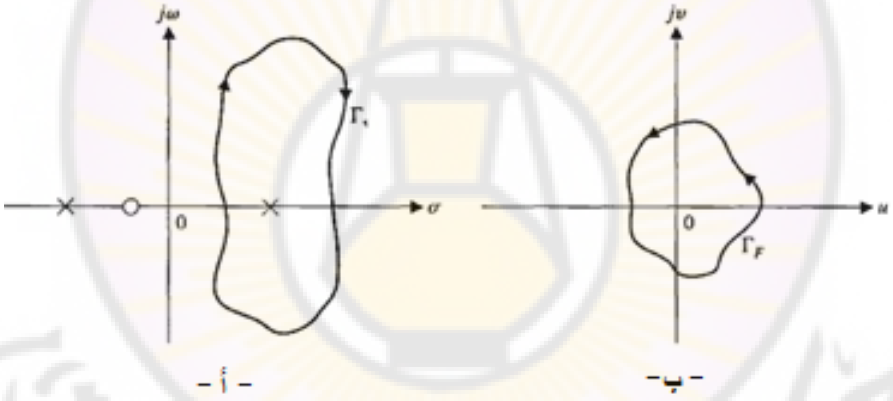
لنأخذ مثال آخر, ولندرس الحالة المبينة بالشكل (9-7-أ). إن الخط المحيطي يحيط بقطب وحيد فقط, وبالتالي: $N = z - p = -1$. بالتالي فإن $\Gamma_F$ يحيط بمركز الإحداثيات مرة واحدة, وطالما أن إشارة $N$ سالبة, بالتالي فإن الإحاطة تتحرك بعكس عقارب الساعة, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-7-ب).




**الشكل (9-5): شرح لنظرية كوشي باستخدام مبدأ الزوايا.**




**الشكل (9-6): مثال لتطبيق نظرية كوشي عندما يحيط $\Gamma_S$ بثلاثة أقطاب وصفر وحيد.**




**الشكل (9-7): مثال لتطبيق نظرية كوشي عندما يحيط $\Gamma_S$ بقطب وحيد.**

حتى الآن, قدمنا وشرحنا مبدأ إسقاط خط محيطي $\Gamma_S$, وذلك وفق التابع $F(s)$, وكذلك شرحنا نظرية كوشي, مما يجعلنا مهيئين لشرح معيار نايكويست للاستقرار.

**9-3 معيار نايكويست للاستقرار (Nyquist Stability criterion):**

لدراسة استقرار نظم التحكم, سندرس المعادلة المميزة لنظام التحكم ذات الشكل العام التالي:

$$F(s) = 1 + L(s) = \frac{K\Pi_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\Pi_{K=1}^{M}(s+p_k)} = 0 \dots\dots\dots (12-9)$$

لكي يكون النظام مستقراً, يجب أن تقع جميع أصفار $F(s)$ في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي. إذاً لدراسة الاستقرار, سنختار خطاً محيطياً $\Gamma_s$ في المستوي اللابلاسي والذي يحيط بكامل النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي, ومن ثم نستخدم نظرية كوشي لتحديد فيما إذا كان أي صفر من أصفار $F(s)$ تقع داخل $\Gamma_s$.

إن وقوع أصفار داخل $\Gamma_s$ يعني أن النظام غير مستقر. يتم تحديد عدد الأصفار الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي باستخدام نظرية كوشي على النحو التالي:

نرسم $\Gamma_F$ في المستوي $F(s)$, ونحدد عدد مرات الإحاطة بمركز الإحداثيات (أي نحدد $N$), يكون عدد أصفار $F(s)$ الواقعة داخل $\Gamma_s$ مساوياً لـ:

$$Z = N + P \dots\dots\dots\dots (13-9)$$

بالتالي إذا كان $P = 0$ وهي الحالة العامة يكون عدد الجذور التي تسبب عدم الاستقرار تساوي $N$, وهي عدد مرات الإحاطة بمركز الإحداثيات في المستوي $F(s)$.

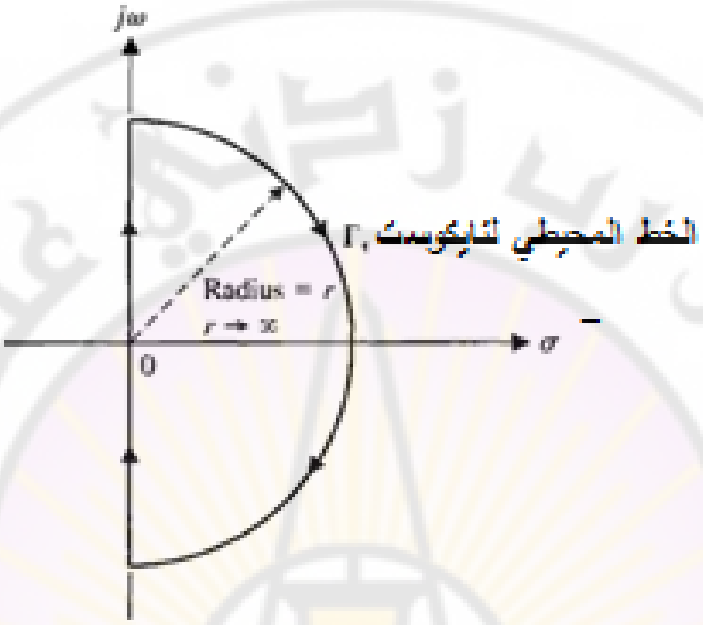
يبين الشكل (9-8) الخط المحيطي لنايكويست, والذي يحيط بكامل النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي. يسمى مسقط $\Gamma_s$ إلى المستوي $F(s)$ بمنحني نايكويست, ويشار إليه بـ $\Gamma_F$. كما لاحظنا يقوم معيار نايكويست على إسقاط نصف المستوي اللابلاسي الأيمن وفق التابع $F(s)$ حيث:

$$F(s) = 1 + L(s) \dots\dots\dots (14-9)$$

ومن ثم نحدد عدد مرات الإحاطة بمركز الإحداثيات في المستوي $F(s)$. يوجد طريقة بديلة تقوم على تحديد التابع التالي:

$$F'(s) = F(s) - 1 = L(s) \dots\dots (15-9)$$

ومن ثم نقوم بإسقاط النصف الأيمن للمستوي اللابلاسي وفق التابع $L(s)$. في هذه الحالة نحصي عدد مرات الإحاطة, وباتجاه دوران عقارب الساعة بالنقطة $-1$ بدلاً من مركز الإحداثيات وذلك لأن: $F'(s) = F(s) - 1 = L(s)$.




**الشكل (9-8): الخط المحيطي لنايكويست**

مما سبق يمكننا صياغة معيار نايكويست للاستقرار على النحو التالي:

يكون نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة مستقر, إذا وفقط إذا, كان الخط المحيطي $\Gamma_L$ في المستوي $L(s)$ لا يحيط بالنقطة $(-1,0)$, وذلك عند عدم وجود أقطاب لـ $L(s)$ واقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي (أي $P = 0$).

إذا كان عدد أقطاب $L(s)$ الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي غير معدوم, فينص معيار نايكويست في هذه الحالة على ما يلي:

يكون نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة مستقراً, إذا وفقط إذا, كان عدد مرات إحاطة الخط المحيطي $\Gamma_L$ في المستوي $L(s)$ بالنقطة $(-1,0)$ يساوي عدد أقطاب $L(s)$ الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي (أو يساوي عدد أقطاب $L(s)$ التي تملك جزء حقيقي موجب).

تبين الأمثلة التالية استخدام معيار نايكويست لدراسة الاستقرار.

**مثال 9-1 :نظام بقطبين واقعين على المحور الحقيقي في المستوي اللابلاسي:**

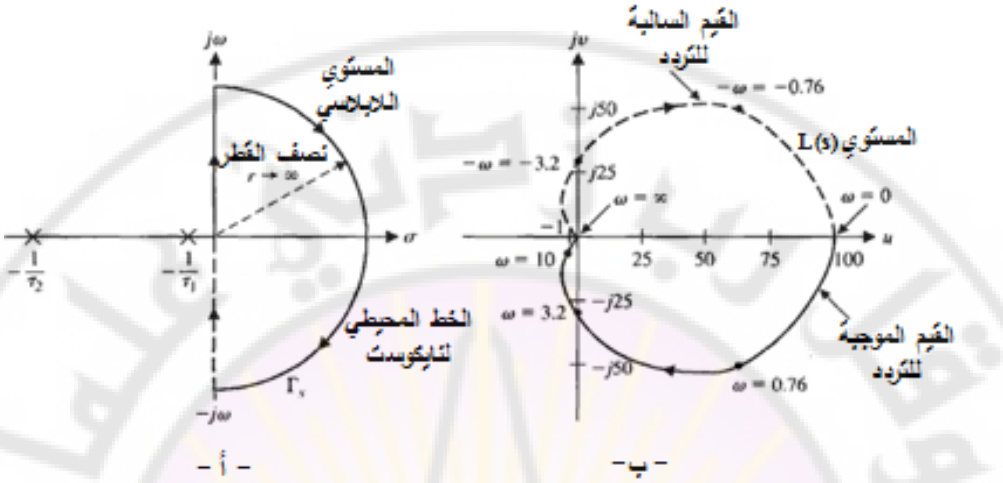
ليكن لدينا النظام التحكمي المبين بالشكل (9-1) حيث:

$$L(s) = \frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \dots\dots\dots\dots (16-9)$$

في هذه الحالة لدينا $L(s) = G_c(s)G(s)H(s)$, وسنستخدم الخط المحيطي $\Gamma_L$ في المستوي $L(s)$. يبين الشكل (9-9- أ) الخط المحيطي $\Gamma_s$ في المستوي اللابلاسي, أما الخط المحيطي $\Gamma_L$ في المستوي $L(s)$ فمبين بالشكل (9-9- ب), وذلك من أجل $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0.1$ , $K = 100$.

يلخص الجدول (9-2) قيم مطال وصفحة $L(j\omega)$, وذلك عند بعض الترددات, حيث تُستخدم هذه القيم لرسم المنحني القطبي (أو منحني نايكويست) المبين بالشكل (9-9-ب). في الشكل (9-9- ب) يمثل الخط السفلي المستمر النصف $+j\omega$ من المحور التخيلي, أما الخط العلوي المقطع فيمثل النصف $-j\omega$ من المحور التخيلي, أما نصف الدائرة ذات نصف القطر $r \to \infty$ في المستوي اللابلاسي فتقابل في المسقط $L(s)$ نقطة عند مركز الإحداثيات.

نلاحظ من العلاقة (9-16) عدم وجود أقطاب لـ $L(s)$ واقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي, أي $P = 0$. حتى يكون النظام مستقر فيجب أن يتحقق الشرط التالي: $N = Z = 0$, أي $\Gamma_L$ لا يحيط بالنقطة $(-1,0)$. بالعودة إلى المعادلة (9-16) والشكل (9-9-ب) نجد, وبغض النظر عن قيمة $K$, أن الخط المحيطي $\Gamma_L$ لا يحيط بالنقطة $(-1,0)$, وبالتالي فالنظام دائماً مستقر, وذلك من أجل جميع قيم $K > 0$. ■




**الشكل (9-9): الخط المحيطي لنايكويست وفق التابع**

$$L(s) = 100/(1+s)(1+0.1s)$$

| **الجدول (9-2): بعض قيم المطال والصفحة للتابع $L(j\omega)$** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | 0 | 1 | 2 | 10 | 20 | 100 | $\infty$ |
| $\lvert L(j\omega)\rvert$ | 100 | 70.7 | 50.2 | 6.8 | 2.24 | 0.1 | 0 |
| $\angle(L(j\omega))$ | 0 | $-50.7$ | $-74.7$ | $-129.3$ | $-150.5$ | $-173.7$ | $-180$ |

**مثال 9-2 :نظام بقطب وحيد في مركز الإحداثيات:**

ليكن لدينا النظام التحكمي المبين بالشكل (9-1) حيث:

$$L(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}$$

في هذه الحالة لدينا $L(s) = G_c(s)G(s)H(s)$. نريد تحديد الخط المحيطي $\Gamma_L$ في المستوي $L(s)$. يبين الشكل (9-10-أ) الخط المحيطي $\Gamma_s$ في المستوي اللابلاسي حيث يوجد انحناءة صغيرة جداً حول القطب المتمركز في مركز الإحداثيات. إن هذه الانحناءة تأخذ شكل نصف دائرة ذات نصف قطر $\varepsilon$, حيث $\varepsilon \to 0$. إن سبب وضع هذه الانحناءة هو محاولتنا لتطبيق شروط نظرية كوشي, والتي تشترط عدم مرور الخط المحيطي في المستوي اللابلاسي بالقطب المتمركز في مركز الإحداثيات . يبين الشكل (9-10-ب)

الخط المحيطي $\Gamma_L$ الناتج. من الواضح من هذا الشكل أن الجزء من الخط المحيطي $\Gamma_L$ من $\omega = 0^+$ إلى $\omega = \infty$, هو عبارة عن المنحني القطبي $L(j\omega)$.

لنحاول فيما يلي دراسة كل جزء من الخط المحيطي $\Gamma_S$ والمسقط المقابل في المستوي $L(s)$.

أ- مركز الاحداثيات في المستوي اللابلاسي: إن نصف الدائرة الصغيرة التي تلتف حول القطب المتمركز في مركز الإحداثيات يمكن أن تمثل على النحو التالي: $s = \varepsilon e^{j\emptyset}$ حيث تتغير قيمة $\emptyset$ من $-90°$, وذلك من أجل $\omega = 0^-$ إلى القيمة $+90°$ وذلك من أجل $\omega = 0^+$.

كون $\varepsilon \to 0$, فإن التابع $L(s)$ يأخذ القيمة التالية:

$$lim_{\varepsilon\to 0} L(s) = lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\emptyset}} = lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K}{\varepsilon} e^{-j\emptyset} \dots\dots (17-9)$$

بالتالي فإن زاوية الخط المحيط في المستوي $L(s)$ تتغير من القيمة $+90°$ , وذلك من أجل $\omega = 0_-$ إلى القيمة $-90°$ وذلك من أجل $\omega = 0_+$, مروراً بالقيمة 0 عند التردد $\omega = 0$. إن نصف قطر الخط المحيطي $\Gamma_L$ في المستوي $L(s)$ المقابل لهذا الجزء من المستوي اللابلاسي هو لا نهائي القيمة.

إن هذا الجزء من الخط المحيطي في المستوي $L(s)$ مبين بالشكل (9-10-ب) , حيث أن النقاط $A, B, C$ المبينة بالشكل (9-10-أ) أسقطت إلى المستوي $L(s)$, وأيضاً تمت الإشارة إليها بـ $A, B, C$ على التوالي.

ب- الجزء من $\omega = 0_+$ إلى $\omega = \infty$: إن مسقط هذا الجزء من $\Gamma_S$, وفق التابع $L(s)$, مبين بالشكل (9-10-ب), وتقابل المنحني القطبي ذلك لأن $s = j\omega$ وبالتالي:

$$L(s)|_{s=j\omega} = L(j\omega) \dots\dots\dots (18-9)$$

عندما تسعى $\omega \to \infty$ نجد أن:

$$lim_{\omega\to\infty} L(j\omega) = lim_{\omega\to\infty} \frac{K}{j\omega(j\omega\tau+1)} = lim_{\omega\to\infty} \left|\frac{K}{\tau\omega^2}\right| \angle[-\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tan^{-1}(\omega\tau)] \dots\dots\dots (19-9)$$

بالتالي يقترب المطال من القيمة صفر, وفرق الصفحة من القيمة $-180°$ , وذلك عندما $\omega \to \infty$.

جـ- الجزء من $\omega = +\infty$ إلى $\omega = -\infty$: إن مسقط هذا الجزء من $\Gamma_s$ عبارة عن النقطة الواقعة في مركز الإحداثيات في المستوي $L(s)$.

يمكن أن يُمثل المسقط على النحو التالي:

$$lim_{r\to\infty} L(s)|_{s=re^{j\emptyset}} = lim_{r\to\infty} \left|\frac{K}{\tau r^2}\right| e^{-2j\emptyset} \dots\dots (20-9)$$

حيث تتغير قيمة $\emptyset$ من القيمة $\emptyset = 90°$ عند $\omega = +\infty$ إلى القيمة $\emptyset = -90°$ وذلك عند $\omega = -\infty$, بالتالي فإن الخط المحيطي $\Gamma_L$ يتحرك من الزاوية $-180°$ عند $\omega = +\infty$ إلى القيمة $+180°$ وذلك عند $\omega = -\infty$, أما مطال الخط المحيطي عندما $r \to \infty$ فيساوي الصفر.

د- الجزء من $\omega = -\infty$ إلى الـ $\omega = 0_-$: يحسب مسقط هذا الجزء من $\Gamma_s$ على النحو التالي:

$$L(s)|_{s=-j\omega} = L(-j\omega) \dots\dots (21-9)$$

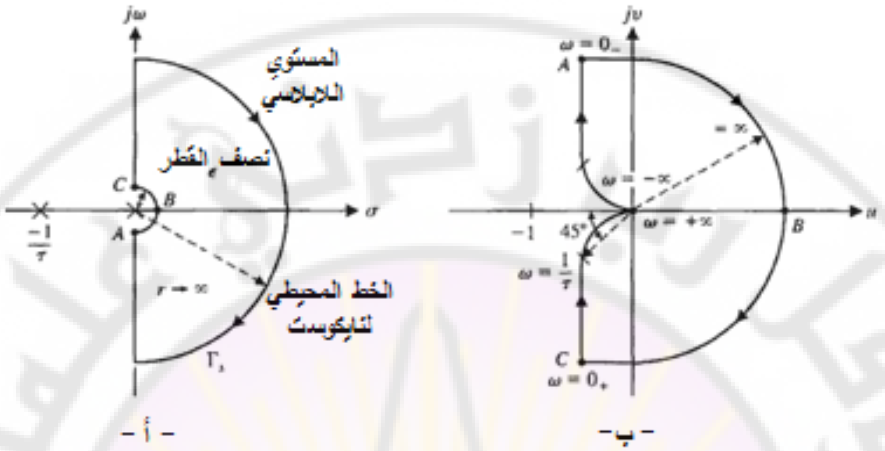
بالتالي فإن مسقط هذا الجزء هو المناظر للمنحي القطبي للجزء الواقع بين $\omega = +\infty$ و $\omega = 0_+$.

لندرس استقرار هذا النظام. نلاحظ أن النظام لا يملك أقطاب في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي (أي $P = 0$), وبالتالي لكي يكون النظام مستقر يجب أن يكون $N = Z = 0$, أي لا يجب أن يحيط الخط المحيطي $\Gamma_L$ بالنقطة (-1) في المستوي $L(s)$. لنتفحص الشكل (9-10-ب) فنجد أن $\Gamma_L$ لا يحيط بالنقطة -1, وذلك بغض النظر عن قيم $K, \tau$, وبالتالي فإن النظام مستقر بشكل دائم.

من هذا المثال يمكن أن نستنتج ما يلي:

1- إن الخط المحيطي $\Gamma_L$ ضمن المجال $-\infty < \omega < 0_-$ مناظر للخط المحيطي $\Gamma_L$ ضمن المجال $0_+ < \omega < +\infty$ , أي أن المنحني القطبي لـ $L(s)$ سيكون متناظر في المستوي $L(s)$ حول المحور $u$. بالتالي لدراسة الاستقرار, يكفي أن نرسم الخط المحيطي $\Gamma_L$ ضمن المجال $0_+ < \omega < +\infty$ .

2- إن مطال $L(s)$ عندما $s = re^{j\emptyset}$ و $r \to \infty$ , يسعى نحو الصفر. ■




- أ -  - ب -

**الشكل (9-10): منحني نايكويست ومسقط وفق العلاقة $L(s) = K/s(1+\tau s)$**

**مثال 9-3: نظام بثلاثة أقطاب:**

ليكن لدينا النظام التحكمي المبين بالشكل (9-1) حيث:

$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \dots\dots (22-9)$$

يبين الشكل (9-10-أ) الخط المحيطي لنايكويست $\Gamma_s$. نريد إسقاط هذا الخط المحيطي وفق التابع $L(s)$ المعطى بالعلاقة (9-22). أيضاً, إن مسقط الخط المحيطي $\Gamma_s$ وفق $L(s)$ متناظر, أي $L(j\omega)$ مناظر لـ $L(-j\omega)$, وبالتالي سنكتفي فيما يلي برسم المحل الهندسي لـ $L(j\omega)$. أيضاً نرسم نصف دائرة حول القطب المتمركز في مركز الإحداثيات, حيث أن مسقطها في المستوي $L(s)$ هي النقطة $L(s) = 0$. كما أسلفنا لدراسة الاستقرار يكفي أن نرسم المنحني القطبي ضمن المجال $0_+ < \omega < +\infty$ , وللقيام بذلك نعوض في العلاقة (9-22) كل $s$ بـ $j\omega$ فنجد:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)} = \frac{-K(\tau_1+\tau_2)-jK(1/\omega)(1-\omega^2\tau_1\tau_2)}{1+\omega^2(\tau_1{}^2+\tau_2{}^2)+\omega^4\tau_1{}^2\tau_2{}^2} =$$
$$\frac{K}{\sqrt{\omega^4(\tau_1+\tau_2)^2+\omega^2(1-\omega^2\tau_1\tau_2)^2}} \times \angle(-\tan^{-1}(\omega\tau_1) - \tan^{-1}(\omega\tau_2) -$$
$$(\pi 2)) \dots\dots (23-9)$$

عندما $\omega = 0_+$ نجد أن مطال المنحني في المستوي $L(s)$ لا نهائي أما الزاوية فتساوي إلى $-90°$. عندما تسعى $\omega \to \infty$ نجد:

$$lim_{\omega\to\infty} L(j\omega) = lim_{\omega\to\infty} \left|\frac{1}{\omega^3\tau_1\tau_2}\right| \angle\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \tan^{-1}(\omega\tau_1) - \tan^{-1}(\omega\tau_2)\right) = lim_{\omega\to+\infty} \left|\frac{1}{\omega^3\tau_1\tau_2}\right| \angle\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \dots\dots (24-9)$$

عندما تسعى $\omega$ إلى اللانهاية $\omega \to \infty$ فإن مطال التابع $L(j\omega)$ يسعى للصفر, أما زاويته فتسعى إلى القيمة $(-3\pi/2)$ . حتى تقترب الزاوية من القيمة $(-3\pi/2)$ فإن المحل الهندسي للتابع $L(j\omega)$ يعبر المحور $u$, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-11).

مما سبق نجد أن هناك إمكانية أن يحيط المحل الهندسي للتابع $L(j\omega)$ بالنقطة $-1$, حيث يبين الشكل (9-11) أن المحل الهندسي لـ $L(j\omega)$ يحيط بالنقطة $-1$ مرتين, بالتالي فالنظام غير مستقر حيث يوجد قطبين يقعان في النصف الأيمن للمستوي اللابلاسي.

يمكن إيجاد النقطة التي يقطع فيها المحل الهندسي لـ $L(j\omega)$ المحور الحقيقي وذلك بإسناد القيمة صفر للجزء التخيلي للتابع $L(j\omega) = u + jv$ (أي $v = 0$).

من المعادلة (9-23) نجد أن:

$$v = \frac{-K(1/\omega)(1-\omega^2\tau_1\tau_2)}{1+\omega^2({\tau_1}^2+{\tau_2}^2)+\omega^4{\tau_1}^2{\tau_2}^2} = 0 \dots\dots (25-9)$$

بالتالي عند $v = 0$ نجد: $(1 - \omega^2\tau_1\tau_2) = 0$

أو: $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$

إن الجزء الحقيقي لمطال التابع $L(j\omega)$ عند هذا التردد:

$$u = \frac{-K(\tau_1+\tau_2)}{1+\omega^2({\tau_1}^2+{\tau_2}^2)+\omega^4{\tau_1}^2{\tau_2}^2}\Big|_{\omega^2=\frac{1}{\tau_1\tau_2}} = \frac{-K(\tau_1+\tau_2)(\tau_1\tau_2)}{\tau_1\tau_2+({\tau_1}^2+{\tau_2}^2)+\tau_1\tau_2} = \frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2} \dots\dots (26-9)$$

بالتالي يكون النظام مستقراً عندما:

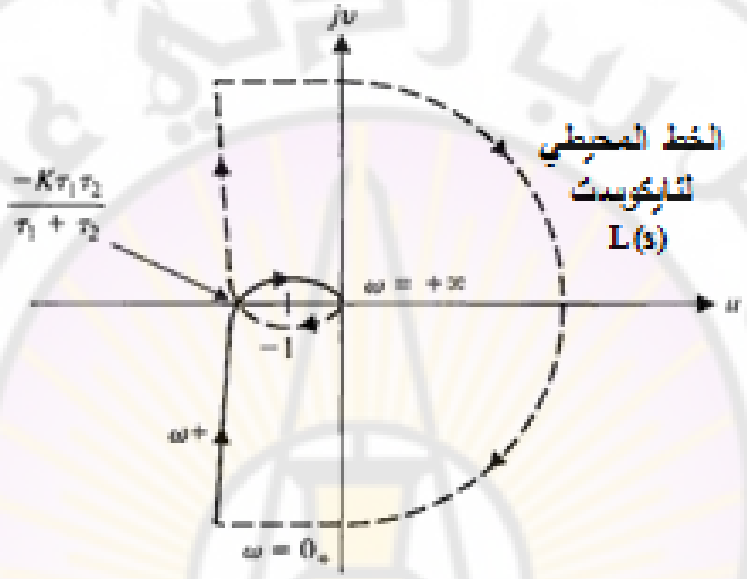
$$\frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2} \geq -1 \Rightarrow K \leq \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2} \dots\dots (27-9)$$

لنفرض أن $\tau_1 = \tau_2 = 1$ بحيث:

$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$$

من العلاقة (9-27) يكون النظام مستقرا عندما: $K \leq 2$ .

يبين الشكل (9-12) منحنيات نايكويست, وذلك من أجل ثلاث قيم لـ $K$. ■




**الشكل (9-11): منحني نايكويست للتابع المعطى بالعلاقة (9-22).**

**مثال 9-4: نظام بقطبين عند مركز الإحداثيات:**

لنعود ولندرس النظام المبين بالشكل (9-1) بهدف دراسة استقراره وذلك من أجل:

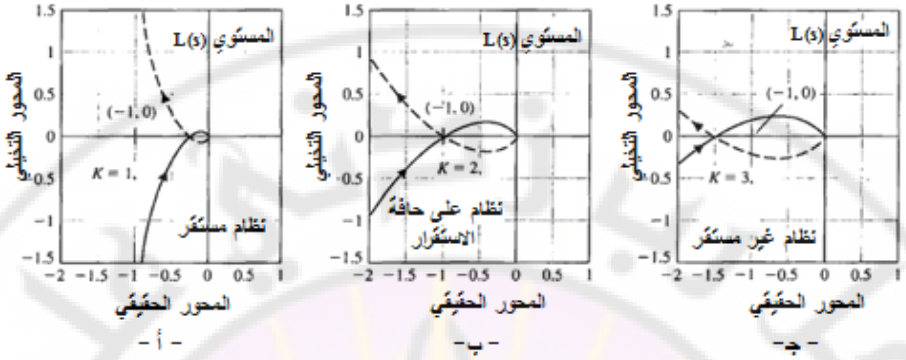
$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(1+\tau s)} \dots\dots (28-9)$$

يمكننا الحصول على المنحني القطبي لـ $L(s)$ وذلك باستبدال كل $s$ بـ $j\omega$ فنجد أن:

$$L(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2(j\omega\tau+1)} =$$

$$\frac{K}{\sqrt{\omega^4+\tau^2\omega^6}} \angle(-\pi - \tan^{-1}(\omega\tau)) \dots\dots (29-9)$$

نلاحظ من العلاقة (9-29) مهما كانت قيمة $\omega$, فإن زاوية $L(j\omega)$ تكون $(-180°)$ وما دون, أما المحل الهندسي لـ $L(j\omega)$ فيقع فوق المحور $u$.




أ- ب- جـ-

**الشكل (9-12): منحني نايكويست للتابع $L(s) = K/s(1+s)^2$ وذلك عندما**

**أ- $K = 1$ , ب- $K = 2$ , جـ- $K = 3$.**

عندما تسعى $\omega$ إلى $0_+$ نجد أن:

$$lim_{\omega\to 0^+} L(j\omega) = lim_{\omega\to 0^+} |K/\omega^2| \angle(-\pi) \dots\dots (30-9)$$

عندما $\omega$ تسعى إلى $\infty$ نجد أن:

$$lim_{\omega\to \infty} L(j\omega) = lim_{\omega\to \infty} |K/\omega^3| \angle(-3\pi/2) \dots\dots (31-9)$$

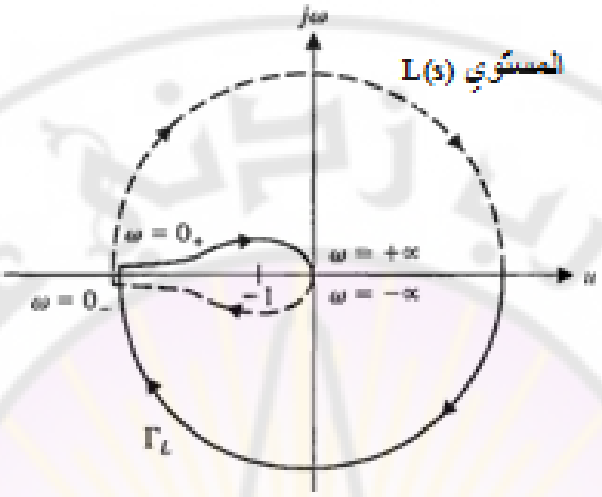
من أجل نصف الدائرة الصغيرة التي تلتف عن مركز الإحداثيات في المستوي اللابلاسي حيث $s = \varepsilon e^{j\emptyset}$, نجد:

$$lim_{\varepsilon\to 0} L(s) = lim_{\varepsilon\to 0} K/\varepsilon^2 e^{-2j\emptyset} \dots\dots (32-9)$$

حيث $-\pi/2 \le \emptyset \le +\pi/2$.

بالتالي فإن المنحني $\Gamma_L$ يتراوح من الزاوية $\omega = 0_- + \pi$ إلى $-\pi$, وذلك عندما $\omega = 0_+$, ويدور دورة كاملة مقداره $2\pi\, rad$, وذلك عندما تتغير $\omega$ من $\omega = 0_-$ إلى $\omega = 0_+$.

يبين الشكل (9-13) المنحني $\Gamma_L$. كون هذا المنحني يحيط بالنقطة $-1$ مرتين, بالتالي يوجد قطبان يقعان في النصف الأيمن للمستوي اللابلاسي, وبالتالي فالنظام غير مستقر بغض النظر عن قيمة الربح $K$.




**الشكل (9-13): منحني نايكويست للتابع $L(s) = K/s^2(1+\tau s)$ .**

**مثال 9-5: نظام بقطب يقع في النصف الأيمن للمستوي اللابلاسي:**

لندرس نظام التحكم المبين بالشكل (9-14) بهدف تحديد استقراره. بداية, سنفرض أن $K_2 = 0$, بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام:

$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = K_1/s(s-1) \dots\dots\dots (33-9)$$

يملك النظام قطب يقع في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي (أي $P = 1$), وبالتالي حتى يكون النظام مستقراً يجب أن يتحقق الشرط التالي $N = -P = -1$, أي يجب أن يدور المنحني القطبي لـ $L(s)$ حول النقطة $-1$ بعكس عقارب الساعة.

بما أن النظام يملك قطباً يقع عند مركز الإحداثيات, فيجب إضافة نصف دائرة ذات نصف قطر يسعى للصفر حول مركز الإحداثيات في المستوي اللابلاسي حيث أن تُعطى معادلة نصف الدائرة المضافة بالعلاقة: $s = \varepsilon e^{j\emptyset}$ حيث $-\pi/2 \le \emptyset \le \pi/2$.

عندما $s = \varepsilon e^{j\emptyset}$ نجد:

$$lim_{\varepsilon\to 0} L(s) = lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K_1}{-\varepsilon e^{+j\emptyset}} = lim_{\varepsilon\to 0} |\frac{K_1}{\varepsilon}| \angle(-180° - \emptyset) \dots\dots (34-9)$$

إذاً مسقط هذا الجزء إلى المستوي $L(s)$ عبارة عن نصف دائرة واقعة في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, ذات نصف قطر لا نهائي, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-15).

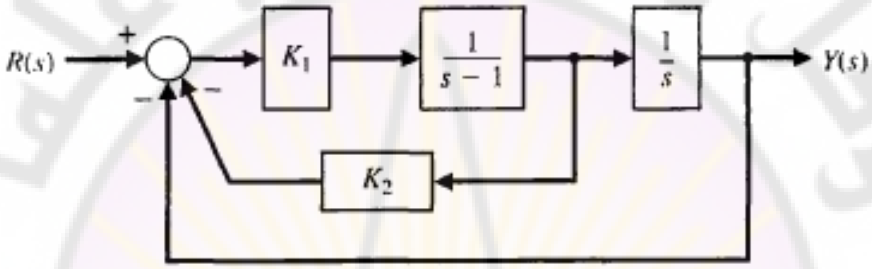
من أجل $s = j\omega$ نجد أن:

$$L(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega(j\omega-1)} = \frac{K_1}{\sqrt{\omega^2+\omega^4}}\angle[\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \tan^{-1}(-\omega)] = \frac{K_1}{\sqrt{\omega^2+\omega^4}}\angle[\left(+\frac{\pi}{2}\right) + \tan^{-1}(+\omega)] \dots\dots(35-9)$$

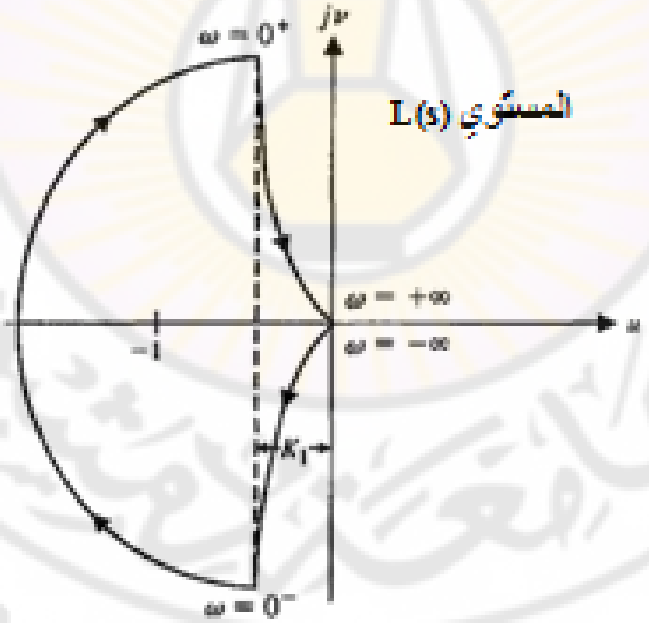
أخيراً, من أجل نصف الدائرة ذات نصف القطر $r$ حيث $r \to \infty$ نجد:

$$lim_{r\to\infty} L(s)|_{s=re^{j\emptyset}} = lim_{r\to\infty}\left|\frac{K_1}{r^2}\right| e^{-2j\emptyset} \dots\dots(36-9)$$

حيث $\emptyset$ تتغير من $\pi/2$ إلى $-\pi/2$, وباتجاه عقارب الساعة.




**الشكل (9-14): المخطط الصندوقي لنظام ذو تغذية خلفية مغلقة.**




**الشكل (9-15): منحني نايكويست للتابع $L(s) = K_1/s(s-1)$**

مما سبق نجد أن الخط المحيط $\Gamma_L$ يتغير عند مركز إحداثيات المستوي $L(s)$ بمقدار $2\pi$ راديان, وبعكس اتجاه عقارب الساعة. يلخص الجدول (9-3) بعض القيم المهمة للمنحني القطبي (أو الخط المحيطي) $L(s)$. نلاحظ من الشكل (9-15) أن $\Gamma_L$ يحيط بالنقطة $-1$ مرة واحدة وباتجاه عقارب الساعة أي $N=+1$, وبما أن لدينا $P=1$, ينتج لدينا أن:

$$z = N + P = 2 \dots\dots\dots (37-9)$$

والنظام غير مستقر بسبب وجود جذرين للمعادلة المميزة تقع في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي بغض النظر عن قيم $K_1$.

لنعود للشكل (9-14), ولنفرض أن $K_2 > 0$ , في هذه الحالة يصبح تابع التحويل:

$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K_1(1+K_2 s)}{s(s-1)} \dots..(38-9)$$

بنفس الطريقة التي ناقشنا فيها حالة $K_2 = 0$, نجد أن الجزء من منحني نايكويست $\Gamma_L$ المقابل للجزء الممثل بالمعادلة $s = \varepsilon e^{j\emptyset}$ يُحسب على النحو التالي (عندما $r \to \infty$):

$$lim_{r\to\infty} L(s)|_{s=re^{j\emptyset}} = lim_{r\to\infty} \left|\frac{K_1K_2}{r}\right| e^{-j\emptyset} \dots\dots\dots (39-9)$$

بالتالي فإن منحني نايكوست $\Gamma_L$ عند مركز الإحداثيات في المستوي $L(s)$ يتغير بمقدار $\pi$ راديان, وذلك باتجاه عكس عقارب الساعة. يقطع المنحني $\Gamma_L$ المحور $u$ عند نقطة تُحدد بالمعادلة $Im[L(j\omega)] = 0$. لنحسب أولاً $L(j\omega)$ فنجد:

$$L(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_1(1+K_2 j\omega)}{-\omega^2 - j\omega} = \frac{-K_1(\omega^2+\omega^2K_2)+j(\omega-K_2\omega^3)K_1}{\omega^2+\omega^4} \dots\dots (40-9)$$

بالتالي:

$$Im\big(L(j\omega)\big) = 0 \Rightarrow \omega - K_2\omega^3 = 0$$

$$\omega(1-K_2\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{K_2}$$

إن قيمة الجزء الحقيقي لـ $L(j\omega)$ عند هذه النقطة:

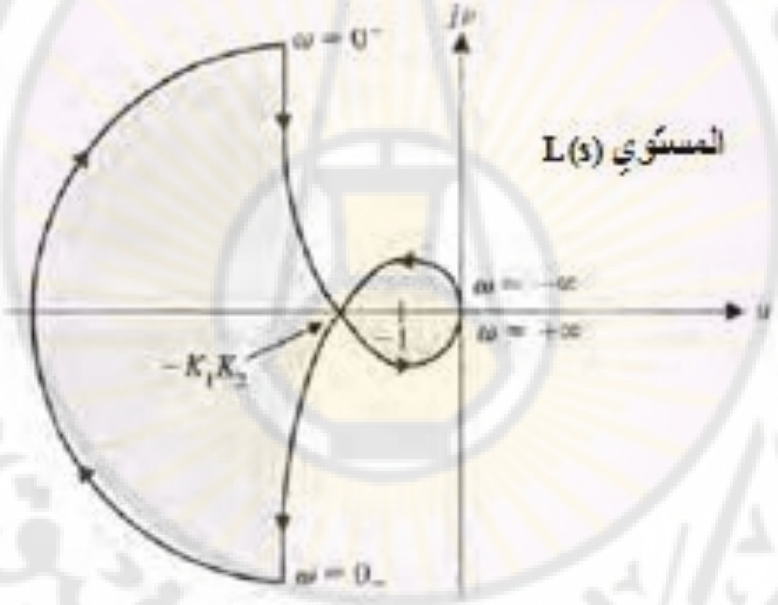
$$u|_{\omega^2=\frac{1}{K_2}} = \frac{-\omega^2K_1(1+K_2)}{\omega^2+\omega^4}|_{\omega^2=\frac{1}{K_2}} = -K_1K_2 \dots\dots (41-9)$$

بالتالي عندما $-K_1K_2 < -1$, أي $+K_1K_2 > 1$, يقوم منحني نايكويست $\Gamma_L$ بالإحاطة بالنقطة $-1$ لمرة واحدة, وبعكس اتجاه عقارب الساعة, وبالتالي يكون لدينا $N = -1$. بالتالي يكون عدد أصفار النظام الواقعة في النصف الأيمن للمستوي اللابلاسي:

$$z = N + P = -1 + 1 = 0$$

بالتالي يكون النظام مستقر عندما $+K_1K_2 > 1$. يبين الشكل (9-16) منحني نايكويست لهذه الحالة حيث من المفضل استخدام البرامج الحاسوبية مثل بيئة الماتلاب لرسم منحنيات نايكويست. ■

| الجدول (9-3): بعض قيم $L(s) = G_c(s)G(s)H(s)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| s | $j0$ | $j0_+$ | $j1$ | $+j\infty$ | $-j\infty$ |
| $\lvert L\rvert/K_1$ | $\infty$ | $\infty$ | $1/\sqrt{2}$ | 0 | 0 |
| $\angle L$ | $-90°$ | $+90°$ | $+135°$ | $+180°$ | $-180°$ |




**الشكل (9-16): منحني نايكويست لـ $L(s) = K_1(1 + K_2s)/s(s-1)$.**

**مثال 9-6: نظام بصفر وحيد واقع في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي:**

لندرس استقرار النظام المبين بالشكل (9-1) حيث:

$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K(s-2)}{(s+1)^2}$$

في هذه الحالة:

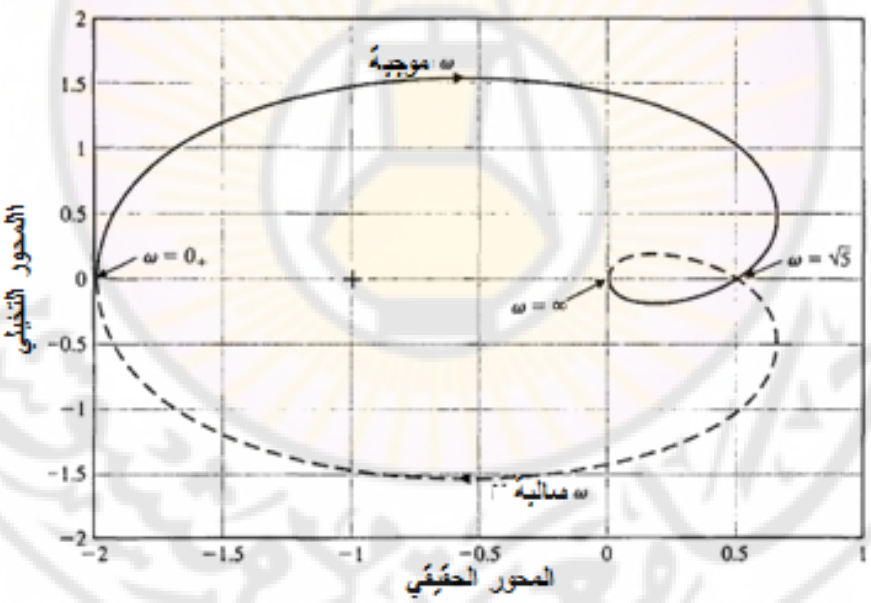
$$L(j\omega) = \frac{K(j\omega-2)}{(1+j\omega)^2} = \frac{K(j\omega-2)}{(1-\omega^2)+2j\omega} \dots\dots (42-9)$$

عندما تسعى $\omega$ إلى $+\infty$ على المحور التخيلي $j\omega$ نجد:

$$\lim L(j\omega)_{\omega\to\infty} = lim_{\omega\to\infty}(K/\omega)\angle(-\pi/2)$$

من أجل $\omega = \sqrt{5}$ نجد أن $L(j\omega) = K/2$. عندما $\omega = 0^+$ نجد أن: $L(j\omega) = -2K$.

يبين الشكل (17-9) منحني نايكويست $L(j\omega)/K$. من هذا الشكل نجد أن المنحني $L(j\omega)$ يقطع المحور الحقيقي عند النقطة $(-1 + j0)$ وذلك من أجل $K = 0.5$, بالتالي فإن النظام مستقر من أجل مجال محدد لقيم $K$ هو $0 < K \leq 0.5$. عندما $K > 0.5$ نجد أن منحني نايكويست يحيط بالنقطة $-1$ لمرة واحدة وباتجاه عقارب الساعة أي $N = 1$. بما أنه لا يوجد أقطاب لـ $L(s)$ واقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي أي $P = 0$ بالتالي: $z = N + P = 1$ والنظام غير مستقر. بالعودة إلى الشكل (17-9) نجد أن النظام غير مستقر, وذلك عندما $K > 0.5$.




**الشكل (17-9): منحني نايكويست لـ $L(j\omega)/K$ للنظام المدروس بالمثال (6-9).**

**4-9 الاستقرار النسبي ومعيار نايكويست:**

في هذه الفقرة نرغب بدراسة العلاقة بين الاستقرار النسبي والاستجابة الترددية للنظام. يزودنا معيار نايكويست بمعلومات كافية ووافية فيما يخص الاستقرار لذلك نود فيما يلي استخدام هذا المعيار للتأكد من الاستقرار النسبي.

تم تعريف معيار نايكويست للاستقرار بدلالة النقطة $(-1,0)$ في المنحني القطبي (أو منحني نايكويست), أو بدلالة النقطة 0 dB أو $-180°$ في منحنيات بود. يرتبط الاستقرار النسبي بقرب المنحني $L(j\omega)$ من نقطة الاستقرار هذه. يبين الشكل (9-18) المنحني القطبي للتابع $L(j\omega)$ المعطى بالعلاقة (9-43), وذلك من أجل عدة قيم لـ $K$.

$$L(j\omega) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1+1)(j\omega\tau_2+1)} \dots (43-9)$$

من هذا الشكل نجد أن زيادة قيمة $K$ يؤدي لاقتراب المنحني القطبي من النقطة $-1$, حيث يحيط بالنقطة $-1$ عند $K = K_3$. وجدنا في الفقرة السابقة (9-3) إن المنحني القطبي يقطع المحور $u$ عند النقطة:

$$u = \frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2} \dots\dots (44-9)$$

من أجل $u = -1$ نجد أن:

$$K = \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}$$

عند تناقص قيمة $K$ عن هذه القيمة الحرجة, يزداد الاستقرار حيث إن الهامش بين القيمة الحرجة $K = (\tau_1 + \tau_2)/\tau_1\tau_2$, والقيمة $K = K_2$, على سبيل المثال, يقيس الاستقرار النسبي للنظام. يدعى هذا المؤشر للاستقرار النسبي بهامش الربح (gain margin) ويُعرف بأنه مقلوب الربح $|L(j\omega)|$, وذلك عند التردد الذي يصل فيه فرق صفحة التابع $L(j\omega)$ للقيمة $-180°$ (والتي تقابل $v = 0$). إن هذا المؤشر والمسمى بهامش الربح, يُمثل العامل الواجب علينا زيادة ربح النظام $|L(j\omega)|$ بموجبه حتى يمر المنحني القطبي $L(j\omega)$ من النقطة $u = -1$.

في الشكل (9-18) نجد أنه عندما $K = K_2$ فإن هامش الربح يساوي مقلوب $L(j\omega)$ عندما $v = 0$. بما أن $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$, وذلك عند تكون قيمة صفحة النظام $-180°$, بالتالي فإن هامش الربح يساوي:

$$\frac{1}{|L(j\omega)|} = \left[\frac{K_2\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\right]^{-1} = \frac{1}{d} \dots\dots (45-9)$$

يمكن أن يُعرف هامش الربح أيضاً في المنحنيات اللوغاريتمية (منحني بود) على النحو التالي:

$$20\log\left(\frac{1}{d}\right) = -20\log d \ \ dB \dots\dots (46-9)$$

على سبيل المثال, عندما $\tau_1 = \tau_2 = 1$, يكون النظام مستقراً عندما $K \leq 2$. عندما $K = K_2 = 0.5$ فإن هامش الربح للنظام, في هذه الحالة, يساوي:

$$\frac{1}{d} = \left[\frac{K_2\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\right]^{-1} = 4 \dots\dots (47-9)$$

ويقابل بالقيمة اللوغاريتمية:

$$20\ log4 = 12\ dB \dots\dots\dots (48-9)$$

إن المعادلة (9-48) تعني أن هامش ربح النظام يساوي 12 ديسيبل, مما يعني أن ربح النظام يمكن أن يزداد بمقدار أربع أضعاف (أو 12 ديسيبل) قبل الوصول إلى حد الاستقرار (تجاوز حد الاستقرار يؤدي إلى عدم استقرار النظام).

مما سبق يمكن أن نُعرف هامش الربح على النحو التالي:

هامش الربح هو الزيادة في ربح النظام, وذلك عند تكون صفحة النظام مساوية لـ $-180°$, بحيث يصل النظام إلى الاستقرار الحرج (أو الهامشي), وهي الحالة التي يمر فيها منحني نايكويست من النقطة $(-1 + j0)$.

لابدّ من الإشارة هنا إلى وجود مؤشر آخر للاستقرار النسبي يسمى بهامش الصفحة (Phase margin). يُعرف هامش الصفحة بأنه زاوية صفحة النظام والتي يتم تدوير منحني نايكويست بهذه الزاوية بحيث يتم تمرير النقطة المقابلة $|L(j\omega)| = 1$ من النقطة $(-1,0)$ في المستوي $L(j\omega)$.

إن هامش الصفحة يعني مقدار تأخير الصفحة الإضافي الضروري المطلوب قبل أن يصل النظام إلى حالة عدم الاستقرار. لنحدد هامش الصفحة لمنحنيات نايكويست المبينة بالشكل (9-18). عندما $K = K_2$, يمكن إضافة الصفحة $\emptyset_2$, وذلك قبل أن يصل النظام إلى حالة عدم الاستقرار. بالمثل, عندما $K = K_1$, يمكننا إضافة الزاوية $\emptyset_1$, وذلك قبل أن يصل النظام إلى حالة عدم الاستقرار, كما هو مبين بالشكل (9-18).

يمكننا أيضاً حساب هامش الصفحة وهامش الربح باستخدام منحنيات بود, بدلاً من منحنيات نايكويست. إن النقطة الحرجة للاستقرار في المستوي $L(j\omega)$ هي $(-1 + 0j)$, وهي تقابل في منحنيات بود الكسب $0\ dB$ وزاوية الصفحة $180°$ أو $-180°$.

يبين الشكل (9-19) منحنيات بود للنظام المعطى بتابع تحويل الحلقة التالي:

$$L(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega 0.2+1)} \dots (49-9)$$

إن زاوية صفحة النظام, عندما يتقاطع خط الكسب للمطال مع خط 0 ديسيبل, تساوي إلى $-137°$, وبالتالي فإن هامش الصفحة لهذا النظام يساوي إلى $180° - 137° = 43°$ وذلك كما هو مبين بالشكل (9-19). إن كسب المطال لهذا النظام, عندما تكون صفحة النظام مساوية إلى $-180°$ , يساوي $-15$ ديسيبل, بالتالي فإن هامش ربح النظام يساوي إلى 15 ديسيبل, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-19).

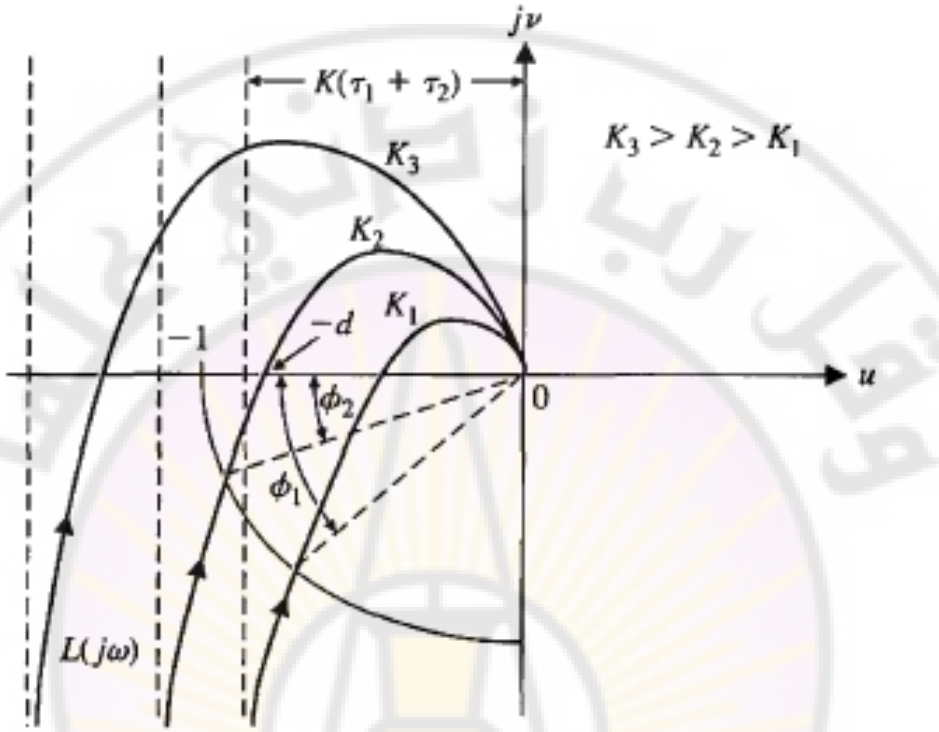
يمكن أن ترسم الاستجابة الترددية للنظام على شكل منحنيات المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة. في هذه المنحنيات تكون نقطة الاستقرار الحرج هي نقطة $0\ dB, -180°$. في هذه الحالة يمكن أن تحسب هوامش الربح والصفحة مباشرة من هذه المنحنيات.

يبين الشكل (9-20) منحني المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة للنظام ذو تابع الحلقة:

$$L_1(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)} \dots (50-9)$$

من الشكل (9-20) يمكن أن نلاحظ مباشرة أن هامش الصفحة يساوي إلى $43°$ أما هامش الربح فيساوي إلى 15 ديسيبل. يبين أيضاً الشكل (9-20) منحني المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة للنظام ذو تابع الحلقة التالي:

$$L_2(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)^2} \dots\dots\dots (51-9)$$

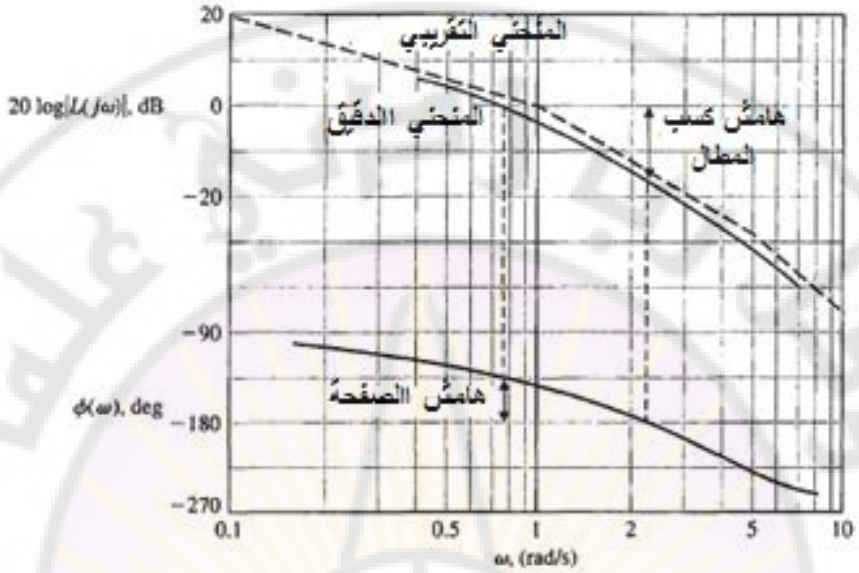



**الشكل (9-18) :منحني نايكويست لـ $L(j\omega)$ وذلك من أجل ثلاث قيم مختلفة لـ $K$.**

إن هامش الربح للتابع $L_2(j\omega)$ يساوي 5.7 ديسيبل, أما هامش الصفحة فيساوي $20°$. من الواضح أن النظام الممثل بـ $L_2(j\omega)$ أقل استقراراً وذلك بالنسبة للنظام الممثل بـ $L_1(j\omega)$. إن السؤال الذي يتبادر إلى الأذهان هو ما مقدار انخفاض استقرار النظام $L_2(j\omega)$ مقارنة مع النظام $L_1(j\omega)$؟ فيما يلي سنحاول الإجابة على هذا السؤال من أجل النظم من الدرجة الثانية, ومن ثم سنعمم النتيجة للنظم الحاوية على جذرين مسيطرين.

لنقوم بدايةً بتحديد هامش الصفحة لنظام من الدرجة الثانية ولنحاول إيجاد العلاقة الرابطة بين هامش الصفحة ومعامل التخامد $\zeta$ لنظام من الدرجة الثانية في حالة إخماد ناقص.
لنفرض أن تابع تحويل الحلقة للنظام المبين بالشكل (9-1) يعطى بالعلاقة التالية:

$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega)} \dots\dots\dots (52-9)$$




**الشكل (9-19):منحنيات بود للتابع المعطى بالعلاقة (9-49).**

تعطى المعادلة المميزة لهذا النظام بالعلاقة التالية:

$$s^2 + 2\zeta s\omega_n + \omega_n^2 = 0$$

بالتالي فإن جذور المعادلة المميزة للحلقة المغلقة:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

يمكن أن تكتب المعادلة (9-52) في المستوي الترددي على النحو التالي:

$$L(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)} \dots\dots\dots (53-9)$$

إن مطال الاستجابة الترددية عند تردد القطع $\omega_c$ يساوي الواحد, بالتالي:

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c(\omega_c^2+4\zeta^2\omega_n^2)^{0.5}} = 1 \dots\dots\dots (54-9)$$

بإعادة ترتيب المعادلة (9-54) نجد:

$$(\omega_c^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_c^2 - \omega_n^4 = 0 \dots\dots (55-9)$$

ومنه نجد أن تردد القطع يُعطى بالعلاقة: $\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2} = (4\zeta^4+1)^{0.5} - 2\zeta^2$.

يعطى هامش الصفحة لهذا النظام بالعلاقة التالية:

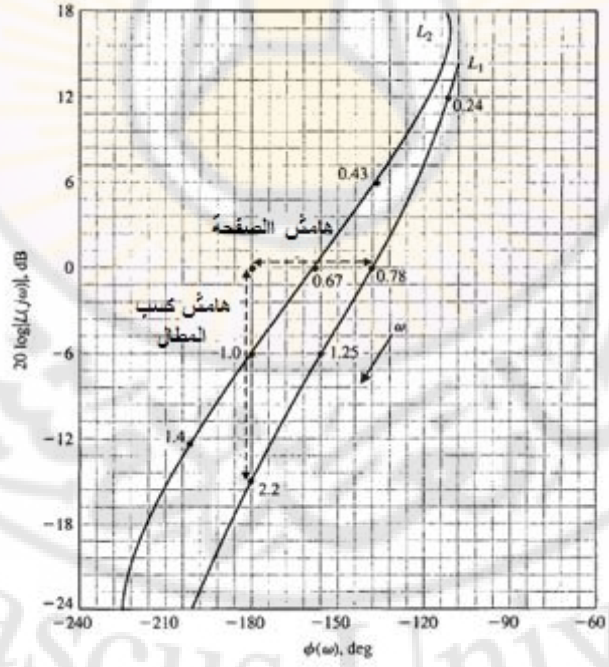
$$\phi_{P.M.} =$$

$$180° - 90° - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} = 90° - \tan^{-1}\{\frac{1}{2\zeta}\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}\} = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{\sqrt{4+\frac{1}{\zeta^4}}-2}} \ldots\ldots\ldots (56-9)$$

تمثل المعادلة (9-56) العلاقة بين معامل التخامد $\zeta$ وهامش الصفحة $\phi_{P.M.}$. هذه العلاقة تمثل الصلة بين الاستجابتين الترددية والزمنية لنظام الدرجة الثانية. يبين الشكل (9-21) علاقة معامل التخامد $\zeta$ وهامش الصفحة $\phi_{P.M.}$. يمكن تقريب العلاقة الفعلية بين $\zeta$ و $\phi_{P.M.}$ إلى العلاقة الخطية المبينة أيضاً بالشكل (9-21). تعطى المعادلة الرياضية لهذه العلاقة الخطية بالعلاقة التالية:

$$\zeta = 0.01\phi_{P.M.} = \frac{\phi_{P.M.}}{100} \ldots\ldots\ldots (57-9)$$

حيث يقاس هامش الصفحة في العلاقة (9-57) بالدرجة. إن هذه المعادلة التقريبية ذات دقة مقبولة, وذلك طالما أن $\zeta \leq 0.7$.




**الشكل (9-20): منحنيات المطال اللوغاريتمي مقابل الصفحة للتوابع $L_1, L_2$.**

**الشكل (9-21):العلاقة بين معامل التخامد وهامش الصفحة لنظام من الدرجة الثانية**

على سبيل المثال لنأخذ تابع الحلقة التالي:

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)} \dots\dots (58-9)$$

وجدنا سابقاً أن هامش الصفحة لهذا النظام $43°$, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-19), بالتالي يمكن تقريب معامل التخامد إلى القيمة التالية:

$$\zeta = 0.01\phi_{p.m} = 0.43 \dots\dots\dots (59-9)$$

بالاعتماد على الشكل (9-4) ومن أجل $\zeta = 0.43$ نجد أن التجاوز النسبي لهذا النظام, عند تطبيق إشارة دخل خطوية تساوي تقريباً:

$$P.O.\% = 22\% \dots\dots (60-9)$$

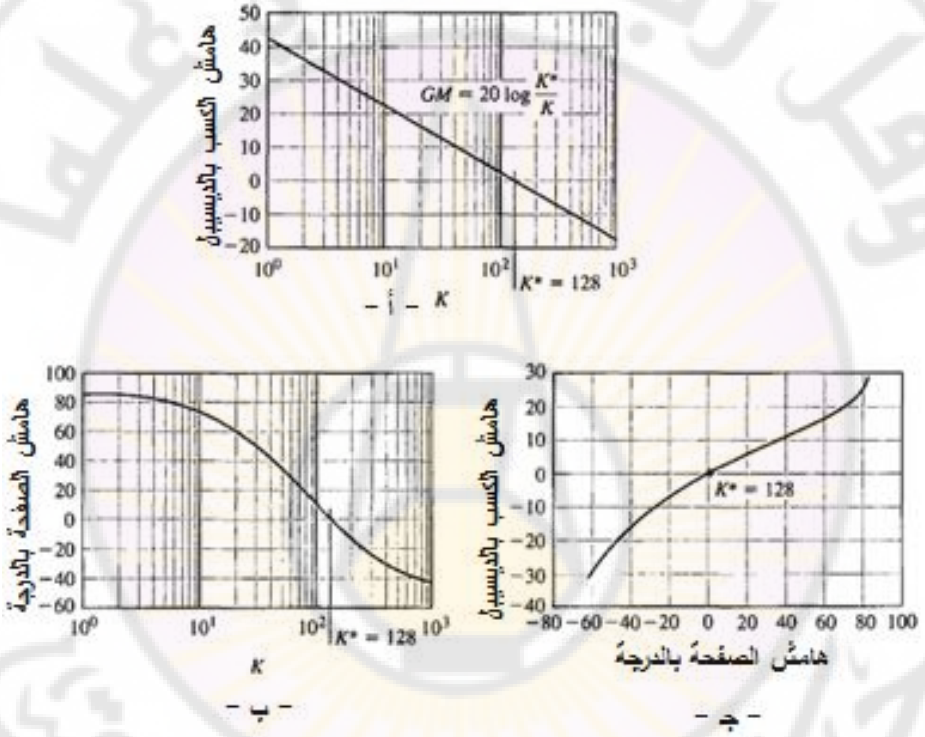
من الأفضل أن نكتب برنامجاً حاسوبياً يحسب ويرسم هامش الصفحة وهامش الربح مقابل الربح $K$ وذلك لتابع $L(j\omega)$ معطى.

ليكن لدينا النظام المعطى بالشكل (9-1) حيث إن تابع تحويل الحلقة المغلقة لهذا النظام:

$$L(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+4)^2}$$

إن قيمة $K$ المقابلة لحالة الاستقرار الهامشي هي $K = K^* = 128$. تبين الأشكال (9-22 – أ – ب) منحنيات هوامش الصفحة والربح مقابل الربح $K$. يبين الشكل (9-22 – جـ) منحني هامش الربح مقابل هامش الصفحة. لاحظ أن كلاً من هامش

الصفحة وهامش الربح يعتبران مؤشران على أداء النظام, إلا أننا غالباً ما نشدد على اعتبار هامش الصفحة كمعيار للأداء في المستوي الترددي. بالإضافة لهامش الصفحة, يعتبر المطال الأعظمي $M_{p\omega}$ للاستجابة الترددية أحد المعايير المهمة لأداء النظام في المستوي الترددي, لذلك سندرسه في الفقرة التالية.




**الشكل (9-22): أ-علاقة هامش الربح بـ $K$ ب-علاقة هامش الصفحة بـ $K$ جـ-علاقة هامش الصفحة وهامش الربح.**

**9-5 استقرار نظم التحكم ذات التأخير الزمني:**

**(The Stability of Control System with Time Delays)**

ناقشنا في الفقرات السابقة معيار نايكويست للاستقرار, وذلك للنظم الممثلة بتوابع تحويل على شكل كسور بسطها ومقامها كثيرات حدود في $(j\omega)$. إن العديد من نظم التحكم تحوي ضمن حلقاتها المغلقة على تأخير زمني (Time delay) يؤثر على استقرار هذه النظم. هذا التأخير الزمني عبارة عن الفترة الزمنية بين بداية حدث ما عند نقطة ما في

النظام, وبين التأثير الناتج عن هذا الحدث عند نقطة أخرى في النظام. لحسن الحظ يمكننا استخدام معيار نايكويست لتحديد تأثير التأخير الزمني على الاستقرار النسبي لنظام التحكم ذو الحلقة المغلقة. يمكن تمثيل التأخير الزمني بواسطة تابع التحويل التالي:

$$G_d(s) = e^{-sT} \dots\dots\dots\dots (61-9)$$

حيث $T$ يمثل التأخير الزمني.

إن معيار نايكويست للاستقرار يبقى قابلاً للتطبيق على النظم ذات التأخير الزمني, وذلك لأن المعامل $e^{-sT}$ لا يُدخل أي أصفار أو أقطاب إضافية داخل الخط المحيطي. يضيف هذا المعامل انزياح صفحة في الاستجابة الترددية, بدون أي تغير في منحني المطال للاستجابة الترددية.

يحدث هذا النوع من التأخير الزمني في النظم الحاوية على آلية حركية لأحد عناصرها, والذي يتطلب فترة زمنية ذات قيمة محددة للانتقال من نقطة (أو لحظة) إعطاء الأمر إلى نقطة تنفيذ الأمر أو لحظة قياس إشارة الخرج.

لنأخذ على سبيل المثال نظام التحكم بسحب الفولاذ, والمبين بالشكل (9-23). إن الهدف من هذا النظام التحكمي هو التحكم بسماكة الفولاذ المسحوب. في هذا النظام يقوم المحرك بضبط المسافة الفاصلة بين الدولابين الدوارين بحيث يكون خطأ السماكة (الفرق بين القيمة المطلوبة للسماكة والقيمة المقاسة للسماكة) أقل ما يمكن. إذا كان الفولاذ المسحوب يتحرك عند سرعة, ولتكن $v$, بالتالي فإن الفترة الزمنية بين لحظة ضبط الدواليب الدوارة بواسطة المحرك ولحظة قياس سماكة الفولاذ تساوي:

$$T = d/v$$

بالتالي حتى نستطيع إهمال هذه الفترة الزمنية يجب إنقاص مسافة القياس $d$ وزيادة سرعة انتقال الفولاذ المسحوب $v$. عادةً لا نستطيع إلغاء تأثير التأخير الزمني, وبالتالي فإن تابع تحويل الحلقة لهذا النظام:

$$G_c(s)G(s)e^{-sT} \dots\dots\dots\dots (62-9)$$

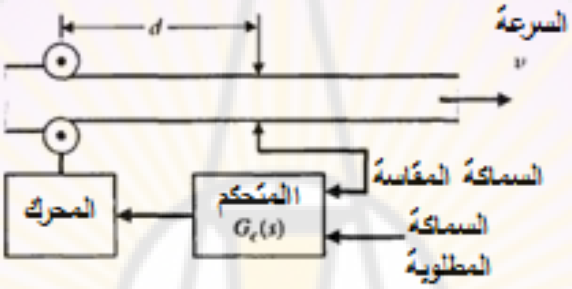
للحصول على الاستجابة الترددية لهذا النظام يجب الاعتماد على تابع تحويل الحلقة:

$$L(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)e^{-j\omega T} \dots\dots\dots (63-9)$$

يمكننا دراسة الاستقرار النسبي الآن إما برسم التابع (9-63) في المستوي $L(j\omega)$, وتحديد موقع المنحني الناتج بالنسبة للنقطة $-1$, أو برسم منحني بود للتابع (9-63) وتحديد الاستقرار النسبي بالنسبة للنقاط 0 ديسيبل, و$-180°$. إن التأخير الزمني $e^{-j\omega T}$ تؤدي إلى ظهور انزياح بالصفحة مقداره:

$$\phi(\omega) = -\omega \mathrm{T} \dots \dots \dots \dots (64-9)$$

يضاف هذا الانزياح بالصفحة, والمقدر بالراديان, إلى انزياح الصفحة الناتج عن $G_c(j\omega)G(j\omega)$. سنعالج في المثال التالي تطبيق عملي على فكرة التأخير الزمني.




**الشكل (9-23): نظام التحكم لسحب صفائح الفولاذ.**

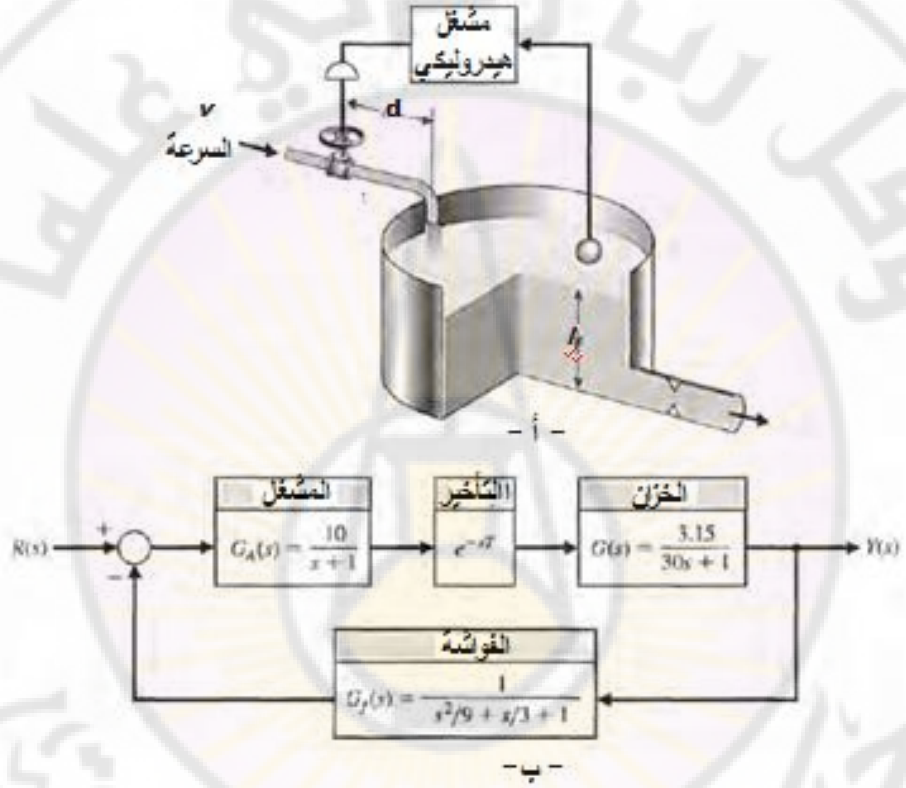
**مثال 9-7: نظام التحكم بمستوى سائل: (Liquid Level Control System)**

يبين الشكل (9-24-أ) نظام التحكم بمستوى السائل, كما يبين الشكل (9-24-ب) المخطط الصندوقي لهذا النظام. إن التأخير الزمني بين لحظة ضبط الصمام وتغير التدفق الخارج يساوي إلى $T = d/v$. إذا كان معدل التدفق يساوي $5\,m^3/sec$, وكان مقطع الانبوب يساوي $1\,m^2$, وكانت المسافة $d = 5\,m$, بالتالي فإن التأخير الزمني $T = 1\,sec$. إذاً فتابع تحويل الحلقة للنظام يساوي:

$$L(s) = G_A(s)G(s)G_f(s)e^{-sT} = \frac{31.5}{(s+1)(30s+1)[(s^2/9)+(s/3)+1]}e^{-sT} \dots \dots (65-9)$$

يبين الشكل (9-25) منحنيات بود لنظام التحكم بمستوى السائل, حيث أن منحني فرق الصفحة قد تم رسمه بدون, ومع تأثير التأخير الزمني. في هذه المنحنيات نجد أن منحني المطال يجتاز خط الـ 0 ديسيبل عند التردد $\omega = 0.8$, وبالتالي فإن قيمة هامش

الصفحة عند هذا التردد يساوي °40 وذلك عند إهمال تأثير التأخير الزمني, ولكن عند أخذ التأخير الزمني بعين الاعتبار نجد أن هامش الصفحة يساوي °30−, وبالتالي يصبح النظام غير مستقر.



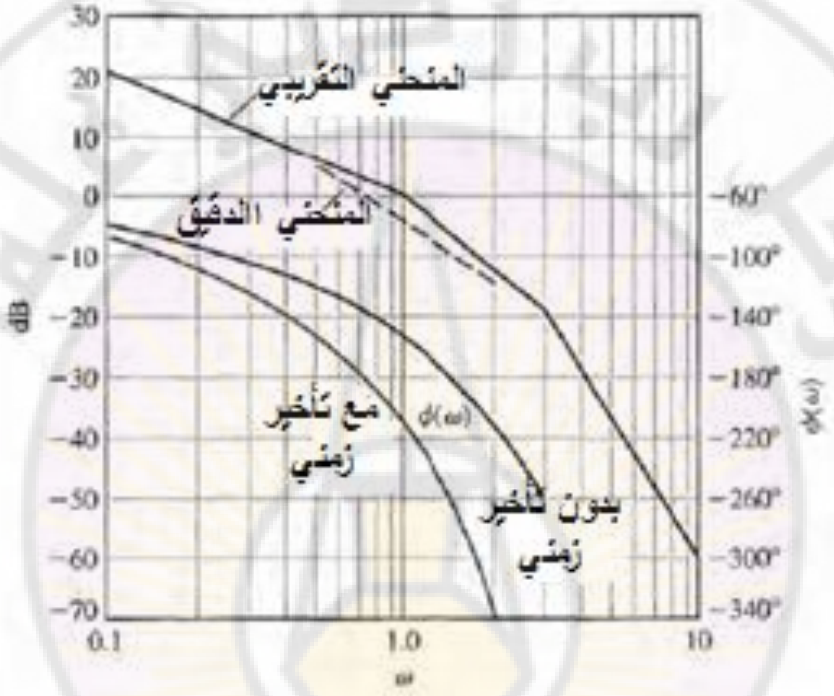

**الشكل (9-24): أ – نظام التحكم في مستوى السائل ب – المخطط الصندوقي لهذا النظام.**

مما سبق نجد أنه يجب إنقاص ربح النظام بحيث نحصل على هامش صفحة مقبول. للحصول على هامش صفحة مقداره °30 يجب إنقاص ربح النظام بمقدار $5\,dB$, وبالتالي تصبح قيمة $K$ مساوية لـ $K = 31.5/1.78 = 17.7$, حيث

$antilog(5/20) = 1.78$.

إن وجود تأخير زمني في نظام الحلقة المغلقة يؤدي إلى ظهور تأخير صفحة إضافي, وبالتالي يصبح النظام أقل استقراراً. إن عناصر التأخير الزمني موجودة في أغلب نظم

التحكم وبالتالي يجب إنقاص ربح الحلقة (Loop gain) وذلك للحصول على استجابة مستقرة, ولكن بالمقابل إنقاص ربح الحلقة يؤدي إلى زيادة خطأ الحالة المستقرة . ■




**الشكل (9-25): منحنيات بود لنظام التحكم بمستوى السائل.**

إن النظم المدروسة حتى الآن تمثل بواسطة تابع التحويل أو مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة. نلاحظ أن التأخير الزمني المعطى بالعلاقة $e^{-sT}$ حيث $T$ هو مقدار التأخير الزمني يمثّل بعلاقة رياضية غير كسرية. إن هدفنا الآن هو الحصول على تمثيل تقريبي للتأخير الزمني, وذلك على شكل تابع كسري, وأيضاً دمج التأخير الزمني ضمن التمثيل الصندوقي وذلك عند دراسة وتحليل وتصميم نظم التحكم.
يقوم تقريب باديه (Pade approximation) على استخدام منشور السلاسل للتابع $e^{-sT}$, ومن ثمّ ربط معاملات المنشور مع معاملات التابع الكسري, وذلك حسب الدرجة المختارة لهذا التابع. على سبيل المثال, لنعمل على تقريب التابع $e^{-sT}$ إلى تابع كسري من الدرجة الأولى.

لنقوم بدايةً, بنشر كلا التابعين إلى سلاسل (عادةً نقوم بنشر التابعين إلى سلاسل ماكلورين Maclaurin series حيث أن هذه السلاسل هي نفسها سلاسل تايلور للتابع المنشور حول النقطة 0), أي:

$$f(s) = f(0) + \frac{s}{1!}f'(0) + \frac{s^2}{2!}f''(0) + \cdots$$

بالتالي منشور ماكلورين للتابع $e^{-sT}$:

$$e^{-sT} = 1 - sT + \frac{(sT)^2}{2!} - \frac{(sT)^3}{3!} + \frac{(sT)^4}{4!} - \frac{(sT)^5}{5!} + \cdots (66-9)$$

يعطى منشور ماكلورين للتابع الكسري من الدرجة الأولى بالعلاقة:

$$\frac{n_1 s+n_0}{d_1 s+d_0} = \frac{n_0}{d_0} + \left(\frac{d_0 n_1 - n_0 d_1}{{d_0}^2}\right)s + \left(\frac{{d_1}^2 n_0}{{d_0}^3} - \frac{d_1 n_1}{{d_0}^2}\right)s^2 + \cdots (67-9)$$

في هذه الحالة, نريد إيجاد $n_1,\ d_1,\ d_0,\ n_0$ بحيث:

$$e^{-sT} \approx \frac{n_1 s+n_0}{d_1 s+d_0}$$

بمساواة معاملات المعادلتين (9-66) و (9-67) نجد:

$$\frac{n_0}{d_0} = 1\ ,\ \frac{n_1}{d_0} - \frac{n_0 d_1}{{d_0}^2} = -T,\ \frac{{d_1}^2 n_0}{{d_0}^3} - \frac{d_1 n_1}{{d_0}^2} = \frac{T^2}{2}, \ldots.$$

بحل هذه المعادلات نجد:

$$n_0 = d_0,\ d_1 = \frac{d_0 T}{2},\ \ n_1 = \frac{-d_0 T}{2}$$

لنفرض أن $d_0 = 1$, فنجد:

$$e^{-sT} \approx -\frac{n_1 s+n_0}{d_1 s+d_0} = \frac{-\frac{T}{2}s+1}{\frac{T}{2}s+1} \ldots\ldots\ldots (68-9)$$

لنحسب منشور ماكلورين للمعادلة (9-68) فنجد:

$$\frac{n_1 s+n_0}{d_1 s+d_0} = \frac{-\frac{T}{2}s+1}{\frac{T}{2}s+1} = 1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2} - \frac{T^3 s^3}{4} + \cdots (69-9)$$

بمقارنة المعادلة (9-69) مع المعادلة (9-66) يمكننا التأكد من أن البنود الثلاث الأولى متساوية, وبالتالي من أجل قيم $s$ الصغيرة يعتبر تقريب بادي مقبول لتمثيل التأخير الزمني. بنفس الطريقة يمكننا الحصول على تمثيل للتأخير الزمني على شكل توابع كسرية بدرجات أعلى (ثانية , ثالثة ...).

## 9-6 أمثلة تصميمية (Design Examples):

في هذه الفقرة سنقوم بمعالجة ثلاثة أمثلة تصميمية. يتطرق المثال الأول لتصميم المتحكم بزاوية انحراف الشفرات في عنفة ريحية. في المثال الثاني سنعالج فيه التحكم عن بعد بعربة استطلاع ذات الاستخدام العسكري, سنستخدم مخطط نيكولس لتصميم ربح المتحكم بحيث نحقق المتطلبات الزمنية. في المثال الثالث سندرس تصميم المتحكم للروبوت المستخدم لصبّ المعادن المنصهرة, الشائع الاستخدام في المجالات الصناعية. إن هدفنا في هذا المثال التصميمي هو تصغير الخطأ المرتكب مع وجود إشارات اضطراب وتأخير زمني. سنشرح بالطبع العملية التصميمية, والتي تقودنا إلى استنتاج متحكم من النوع التناسبي التكاملي (PI), يحقق مجموعة من المتطلبات التصميمية في المجالين الزمني والترددي.

**مثال 9-8: المتحكم التناسبي التكاملي التفاضلي في العنفات الريحية:**

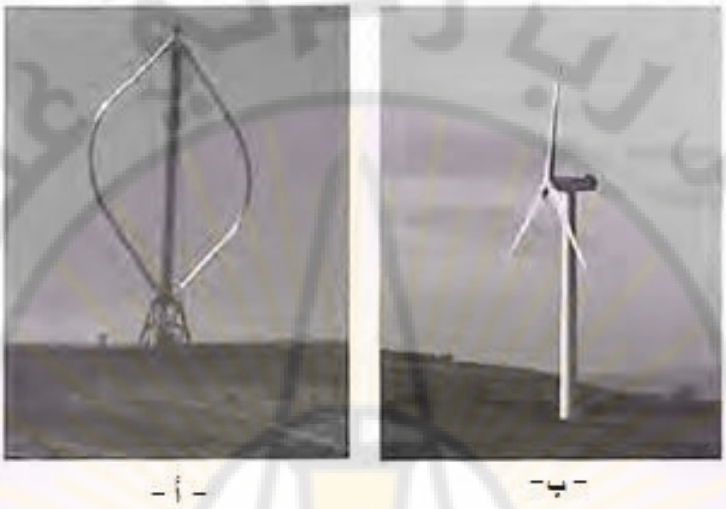
**(PID Control of wind Turbine)**

تُعَدّ طاقة الرياح من مصادر الطاقة المهمة لفعاليتها, ولصداقتها للبيئة. إن العنفات الريحية الحديثة ذات بنية مرنة تسمح بالعمل عندما تكون سرعة واتجاه الرياح متغيرة بشكلٍ دائم. في الواقع إن التحكم بالعنفات الريحية تعتبر من المهام الصعبة, إلا أننا في هذا المثال سنتطرق فقط لحالة العمل والتي تسمى "ما فوق الاسمي" أو (Over- rated).

في نمط العمل المختار تكون سرعة الرياح كبيرة بشكل كافٍ, بالتالي فإن زاوية انحراف شفرات العنفة يجب أن يكون محسوب بشكل دقيق وذلك لتجنب الاستطاعة الهائلة لطاقة الرياح والتي تتجاوز الطاقة المطلوبة. إن منطقة العمل المختارة تسمح لنا بتطبيق نظرية التحكم الخطي.

تبنى بشكلٍ عام العنفات الريحية إما بمحور أفقي أو عمودي, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-26) علماً أن العنفات ذات المحور الأفقي هي الأكثر استخداماً لتوليد الطاقة الكهربائية. تركب العنفة الريحية الأفقية على برج, وتكون مؤلفة من شفرتين أو ثلاثة مركبة على هذا البرج, تقوم بتدوير المولد كهربائي (Electric generator).

عند توفر الرياح بشكلٍ كافٍ, ولكي ننظم سرعة دوران العنفة الريحية, وبالتالي سرعة دوران المولد الكهربائي, نقوم بالتحكم بزاوية انحراف شفرات العنفة, وذلك بواسطة محرك يسمى محرك انحراف الشفرات (blade pitch motor), كما هو مبين بالشكل (9-27-أ).



-أ- -ب-

**الشكل (9-34): عنفات ريحية أ-ذات محور عمودي ب-ذات محور أفقي.**

يمكن تمثيل العنفة الريحية بشكل مبسط بواسطة تابع تحويل من الدرجة الأولى أما آلية قيادة العنفة (محرك الشفرات + علبة السرعة) فتمثل بواسطة تابع تحويل من الدرجة الثانية [18], بالتالي تصبح درجة تابع تحويل العنفة مع قيادتها من الدرجة الثالثة, ويعطى بالعلاقة:

$$G(s) = \left(\frac{1}{1+\tau_s}\right)\left(\frac{K\omega_{ng}^2}{s^2+2\zeta\omega_{ng}s+\omega_{ng}^2}\right) \dots (70-9)$$

حيث: $\omega_{ng} = 20 \text{ rad/sec}, \zeta_g = 0.005, \tau_g = 5\, sec, K = -7000$.

إن إشارة دخل نموذج العنفة هي زاوية انحراف الشفرات المطلوبة مقدرة بالراديان, بالإضافة إلى إشارة الاضطراب, أما إشارة خرجها فهي سرعة دوران الدائر مقدرة بالدورة في الدقيقة (rpm). في العنفات الريحية غالباً ما يتم التحكم بزاوية انحراف الشفرات بواسطة متحكم تناسبي تكاملي تفاضلي (PID), كما هو مبين بالشكل (9-27-ب). إن اختيار المتحكم من نوع (PID) الممثل بالعلاقة:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D.s$$

يقتضي اختيار معاملات التحكم $K_D,\ K_I,\ K_P$. إن الهدف من عملية التصميم هو تحقيق المتطلبات التالية:

- هامش ربح $G.M. \geq 6\ dB$,
- هامش صفحة $30° \leq P.M. \leq 60°$,
- زمن صعود $T_{r1} < 4\ sec$,
- زمن القمة $T_p < 10\ sec$.

نلاحظ من الشكل (9-27), أن إشارة خرج النظام هي $\omega(s)$ . إذا أردنا التحكم بالانحراف أو الانزياح عن السرعة الاسمية للعنفة, بالتالي يجب أن يكون $\omega_d = 0$ , مع الحفاظ على تطبيق إشارة دخل على مدخل الاضطراب. في هذه الحالة يكون هدف المتحكم هو إنقاص إشارة الخرج الناتجة عن الاضطراب

يعطى تابع تحويل الحلقة للنظام المبين بالشكل (9-27) بالعلاقة:

$$L(s) = K\omega_{ng}^2 K_D \frac{s^2 + \left(\frac{K_P}{K_D}\right)s + \left(\frac{K_I}{K_D}\right)}{s(1+\tau s)(s^2 + 2\zeta\omega_{ng}s + \omega_{ng}^2)}$$

لنقوم الآن بتحديد الثوابت $K_D$ و $K_P$ و $K_I$ بحيث تتحقق المتطلبات التصميمية.

يُستخدم هامش الصفحة لتحديد معامل التخامد للجذور المسيطرة, على النحو التالي:

$$\zeta = \frac{P.M.}{100} = 0.3$$

حيث إن هامش الصفحة المطلوب $P.M. = 30°$. لنستخدم الآن زمن الصعود وذلك لحساب التردد الطبيعي للجذور المسيطرة, حيث سنعتمد على العلاقة التالية:

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} < 4\ second$$

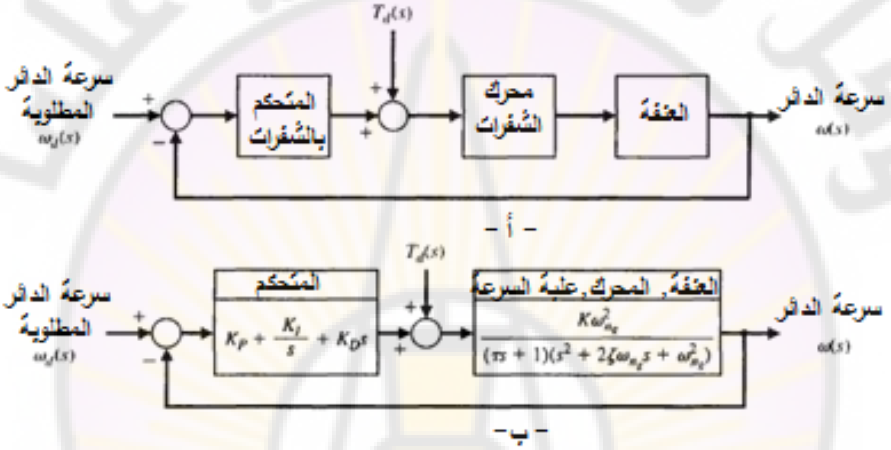
عندما $\zeta = 0.3$ نجد أن $\omega_n > 0.31$.

لنختار الآن القيم التالية لـ $\omega_n, \zeta$, ولتكن $\zeta = 0.3$ و $\omega_n = 0.4$. لنتحقق الآن أن هذه القيم تحقق زمن الصعود وزمن القمة المحددين في المتطلبات التصميمية:

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} = 3\ sec,\ T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 8\ sec$$

إذاً كلا المتطلبان التصميميان المتعلقان بزمن الصعود وزمن القمة محققين.

لنقوم الآن بتوضيع أصفار المتحكم (PID) في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, وفي المنطقة المحددة بالقيم المختارة لـ $\zeta$ و $\omega_n$. سنقوم أيضاً بتحديد قيم للنسب $K_P/K_D$ و $K_I/K_D$, ومن ثم سنختار قيمة الربح $K_D$ التي تتحقق المتطلبات المتعلقة بهوامش الربح والصفحة, وبالاعتماد على منحنيات الاستجابة الترددية (منحنيات بود حصراً).




**الشكل (9-27): أ-المخطط الصندوقي للعنفة الريحية ب-المخطط الصندوقي بهدف تصميم نظام التحكم.**

يبين الشكل (9-28) منحنيات بود للنظام من أجل $K_P/K_D = 5$ و $K_I/K_D = 20$. إن قيمة $K_D$ التي تحقق القيم المطلوبة لهوامش الربح والصفحة, قدر المستطاع, تساوي $K_D = -6.22 \times 10^{-6}$, حيث تم تحديدها بمراقبة تأثير تغير $K_D$ على هوامش الربح والصفحة, ومن ثم تم اختيار هذه قيمة.

مما سبق نجد أن العلاقة النهائية للمتحكم (PID) تعطى على النحو التالي:

$$G_c(s) = -6.22 \times 10^{-6}\left(\frac{s^2+5s+20}{s}\right)$$

إن هذا التصميم النهائي يفضي إلى النتائج التالية:

- هامش الصفحة : $P.M. = 32.9°$.
- هامش الربح : $G.M. = 13.9\,dB$.

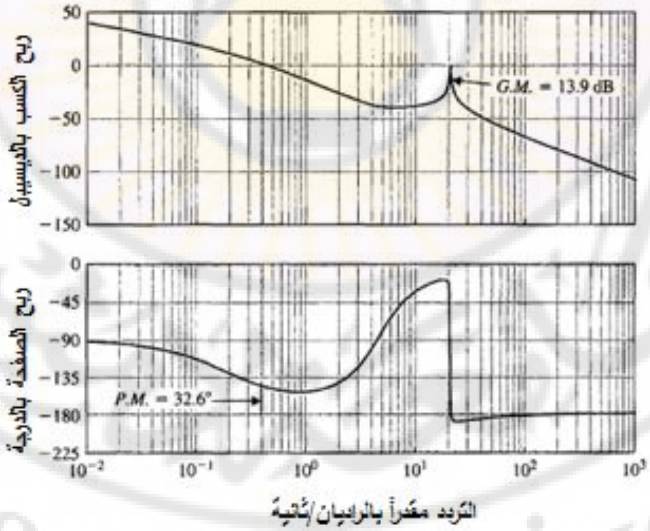
يبين الشكل (9-29) الاستجابة الخطوية للنظام بعد اعتماد التصميم النهائي, حيث تتميز هذه الاستجابة بما يلي:

- زمن الصعود $T_{r1} = 3.2\,sec$,
- زمن القمة $T_P = 7.6\,sec$.

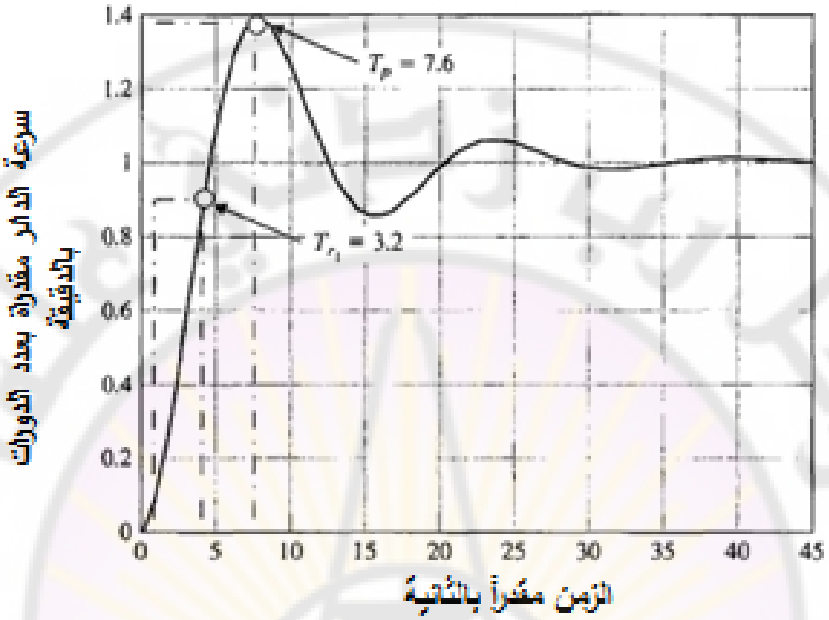
مما سبق نجد أن جميع المتطلبات التصميمية محققة.

إن الأقطاب المسيطرة لنظام التحكم ذو الحلقة المغلقة هي $\omega_n = 0.41$ و $\zeta = 0.29$, حيث نلاحظ أن هذه القيم قريبة جداً من القيم التصميمية, وهذا ما يوضح فعالية العلاقات التصميمية المستخدمة بالرغم من أن النظام المدروس ليس من الدرجة الثانية.

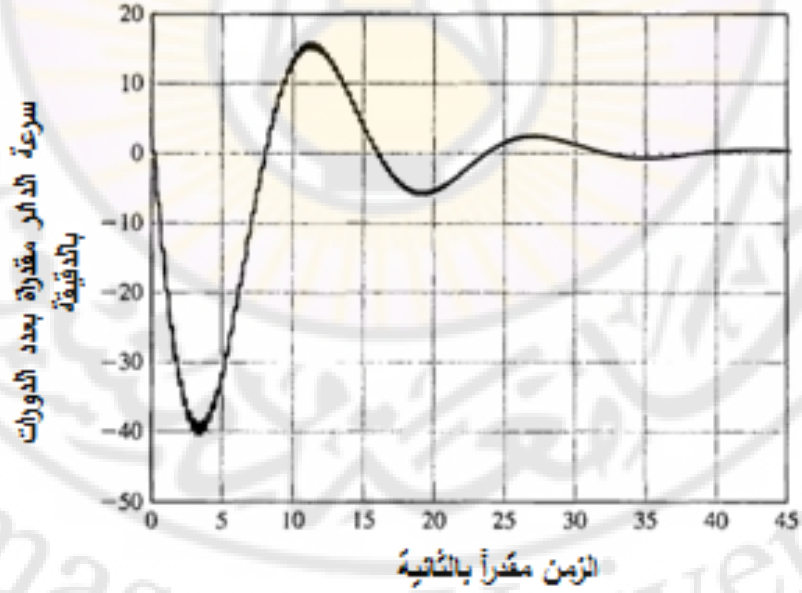
يبين الشكل (9-30) استجابة العنفة الريحية إلى إشارة الاضطراب, والتي يمكن أن تكون عبارة عن تيار هوائي مفاجئ.عملياً يمكن أن يُمثل هذا الاضطراب على شكل تغير خطوي في زاوية انحراف شفرات العنفة. يبين الشكل (9-30) أن نتيجةً لتأثير الاضطراب ستختلف سرعة دوران العنفة عن السرعة الاسمية, ولكن مع ملاحظة أنها تعود إليها بعد 25 $sec$ تقريباً. ■




**الشكل (9-28): منحنيات بود للعنفة الريحية حيث $K_p/K_D = 5$ و$K_I/K_D = 20$ و $K_D = -6.22 \times 10^{-6}$.**




**الشكل (9-29): الاستجابة الخطوية لنظام العنفة الريحية.**




**الشكل (9-30):استجابة العنفة الريحية للاضطراب الخطوي حيث نلاحظ عودة العنفة إلى سرعته الاسمية بعد $25\ sec$ تقريباً.**

**مثال 9-9: التحكم عن بعد بعربة الاستطلاع:**

**(Remotely Controlled Reconnaissance Vehicle)**

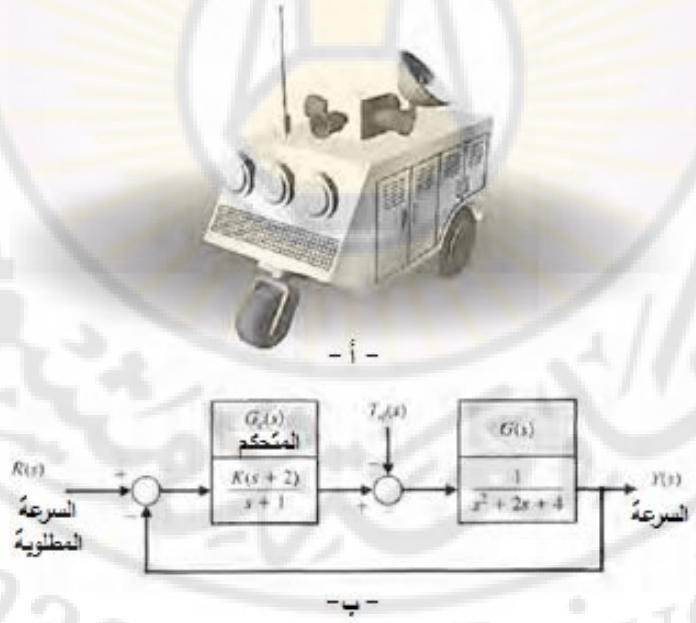
يبين الشكل (9-31-أ) العربة المتنقلة, والمستخدمة للاستطلاع في المجال العسكري, بينما يبين الشكل (9-31-ب) نظام التحكم بسرعة هذه العربة [13]. تُرسل السرعة المطلوبة $R(s)$ إلى العربة لاسلكياً, أما إشارة الاضطراب $T_d(s)$ فتمثل الحفر والصخور الواقعة على طريق العربة. إن هدفنا هو تصميم نظام تحكم يحقق ما يلي:

- خطأ حالة مستقرة صغير.
- قيمة تجاوز صغيرة, وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية, أي $R(s) = 1/s$.

لنقوم أولاً, بحساب خطأ الحالة المستقرة عند تطبيق إشارة دخل خطوية واحدية, فنجد:

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} sE(s) = lim_{s\to 0} s\left[\frac{R(s)}{1+L(s)}\right] = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+K/2}$$

حيث: $L(s) = G(s)G_c(s)$. إذا اخترنا $K = 20$, سنحصل على خطأ حالة مستقرة مقداره 9% من مطال إشارة الدخل الخطوية المطبقة.




**الشكل (9-31): أ – صورة لعربة الاستطلاع المتحكم بها عن بعد ب – نظام التحكم بسرعة عربة الاستطلاع.**

لنعوض $K = 20$ في علاقة $L(s)$, وذلك بهدف دراسة الاستجابة الترددية للنظام فنجد:

$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{10(1+s/2)}{(1+s)(1+s/2+s^2/4)}$$

يلخص الجدول (9-4) بعض نقاط الاستجابة الترددية للنظام من أجل $0 \le \omega \le 6$.

**الجدول (9-4): بعض نقاط الاستجابة الترددية للمثال (9-11)**

| $\omega$ | 0 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.8 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الربح (dB) | 20 | 18.4 | 17.8 | 16.0 | 10.5 | 2.7 | $-5.2$ |
| الصفحة (deg) | 0 | $-65°$ | $-86°$ | $-108°$ | $-142°$ | $-161°$ | $-170°$ |

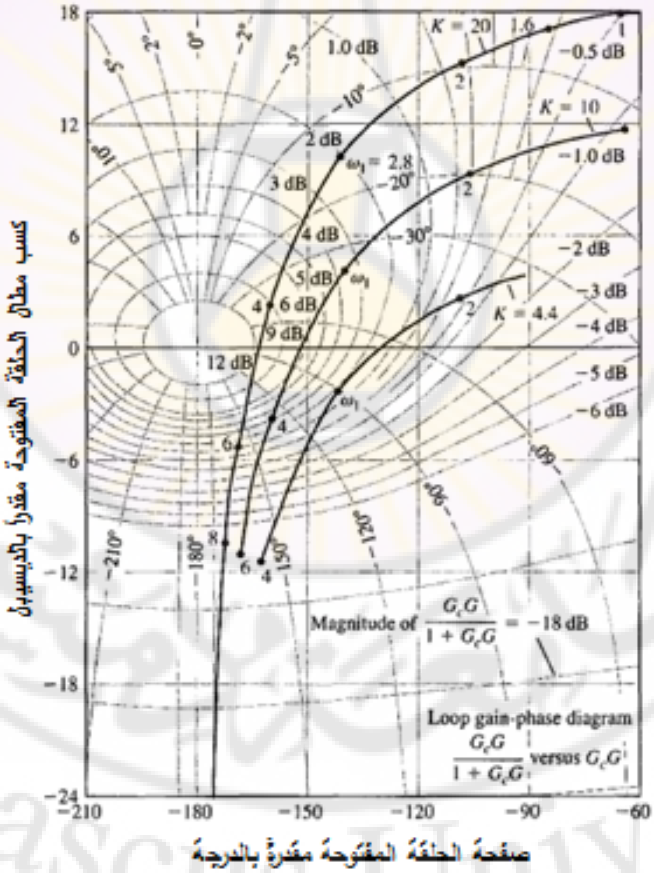
يبين الشكل (9-32) مخطط نيكولس للنظام المدروس وذلك من أجل $K = 20$. بالتمعن في هذا المخطط نجد أن المطال الأعظمي $M_{p\omega} = 12$ ديسيبل, أما هامش الصفحة فيساوي إلى $15°$. إن الاستجابة الخطوية للنظام عندما $K = 20$ هي ذات تخامد ناقص, حيث يمكننا العودة إلى المعادلة (9-57) والشكل (4-16) لنجد أن القيمة التقريبية للتجاوز النسبي هي 61%. لإنقاص التجاوز النسبي في الاستجابة الخطوية للنظام, يتوجب علينا إنقاص الربح. لنفرض أننا نريد الحد من التجاوز النسبي ليبلغ قيمة قصوى مقدارها 25%. في هذه الحالة ومن الشكل (4-16) نجد أن قيمة معامل التخامد $\zeta$ للجذور المسيطرة هي 0.4, كذلك وبالعودة إلى الشكل (8-33) نجد أن $M_{p\omega} = 1.35$ أو بمعنى آخر $20logM_{p\omega} = 2.6\,dB$. لتصغير الربح يتوجب علينا تحريك الاستجابة الترددية عمودياً, وإلى الأسفل في مخطط نيكولس, كما هو مبين بالشكل (9-32). عند $\omega_1 = 2.8$ نجد أن منحني الاستجابة يتقاطع مع منحني $2.6\,dB$.

إن مقدار تناقص الربح الناتج عن التحرك العمودي نحو الأسفل لمنحني الاستجابة على مخطط نيكولس يقدر بـ $(13\,dB)$, وهو ما يعادل مقدار (4.5). وهذا يكافئ أنه يجب إنقاص قيمة $K$ إلى القيمة $K = 20/4.5 = 4.44$. في هذه الحالة تكون قيمة الخطأ:

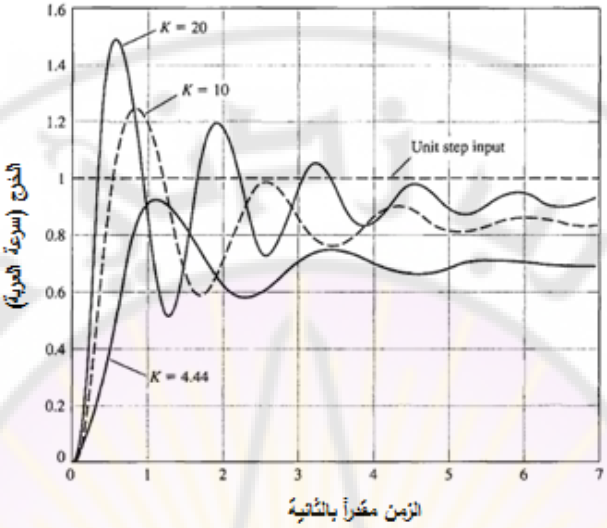
$$e_{ss} = \frac{1}{1+4.44/2} = 0.31$$

أي أن خطأ الحالة المستقرة يقدر بـ 31%.

يبين الشكل (9-33) الاستجابة الخطوية للنظام من أجل $K = 4.44$, حيث نجد أن مقدار التجاوز النسبي هو 32%. إذا أنقصنا قيمة $K$ إلى 10 أي $K = 10$ نجد أن قيمة التجاوز النسبي هي 48%, أما خطأ الحالة المستقرة فهو 17%, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-33). يلخص الجدول (9-5) خصائص الأداء للنظام المدروس وذلك من القيم المختلفة لـ $K$, حيث نجد أن $K = 10$ تمثل حالة وسط مقبولة للنظام. إذا أردنا رسم منحني الاستجابة الترددية وذلك من أجل $K = 10$, نقوم بتحريك منحني الاستجابة الترددية المقابلة لـ $K = 20$ إلى الأسفل بمقدار $20\,log2 = 6\,dB$, كما هو مبين بالشكل (9-32).




**الشكل (9-32):مخطط نيكولس للمثال (9-9) وذلك من أجل $K = 20, 10, 4.44$.**




**الشكل (9-33) :الاستجابة الخطوية للنظام المدروس وذلك من أجل القيم التالية لـ $K$:**

$$K = 20, 10, 4.44$$

**الجدول (9-5): خصائص الاستجابة الزمنية وذلك من أجل القيم المختلفة لـ $K$.**

| | 4.44 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|
| التجاوز النسبي | 32.4 | 48.4 | 61.4 |
| زمن الاستقرار بالثانية | 4.94 | 5.46 | 6.58 |
| زمن القمة بالثانية | 1.19 | 0.88 | 0.67 |
| خطأ الحالة المستقرة $e_{ss}$ | 31% | 16.7% | 9.1% |

لندرس الآن تأثير إشارة الاضطراب الخطوية الواحدية على الحالة المستقرة للنظام, وذلك بالاعتماد على نظرية القيمة النهائية, وباعتبار أن $R(s) = 0$:

$$y(\infty) = lim_{s\to 0} s\left(\frac{G(s)}{1+L(s)}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{4+2K} \dots\dots\dots (71-9)$$

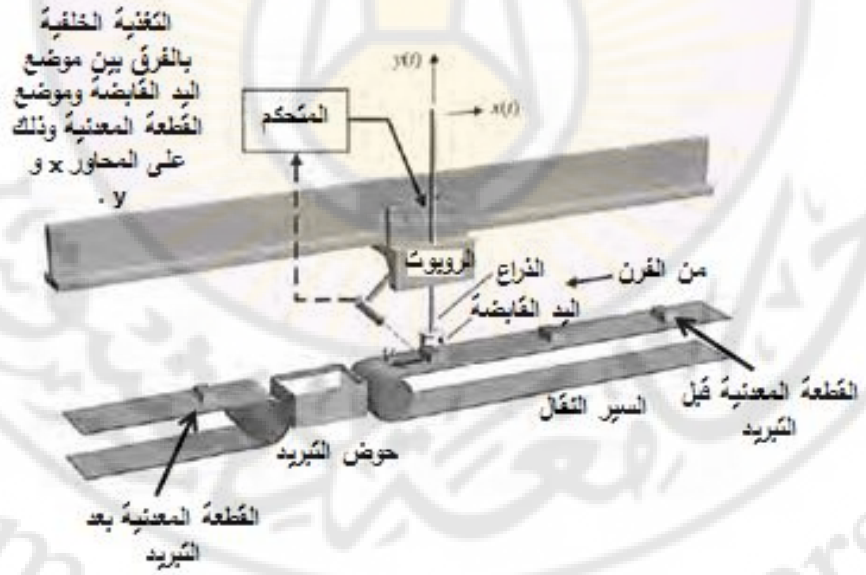
أي أن تأثير اضطراب مقدار 1 قد تم إنقاصه بمعامل مقداره $4 + 2K$, وبالتالي عندما $K = 10$ فإن $y(\infty) = 1/24$, وبالتالي فإن تأثير الاضطراب في الحالة المستقرة قد تم إنقاصه إلى 4%. مما سبق نجد أن اعتماد قيمة $K = 10$ قد أعطى نتائج مقبولة, حيث أعطى تسوية جيدة فيما يتعلق بخطأ الحالة المستقرة بين الحالة التي كان فيها $K = 20$,

والحالة التي كان فيها $K = 4.44$. من جهة ثانية إذا كانت قيم زمن الاستقرار والتجاوز النسبي كبيرة فلابد في هذه الحالة من إعادة تشكيل المنحني $L(j\omega)$ على منحني نيكولس, وذلك وفق الطرق التي سنشرحها في الفصل العاشر. ■

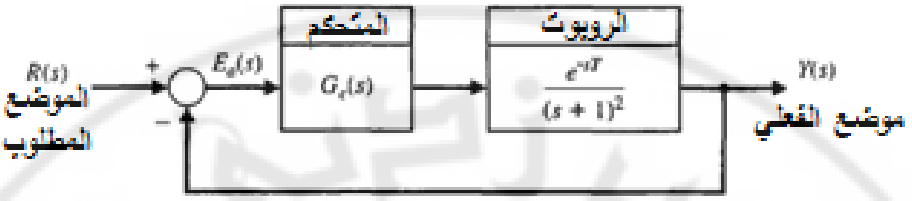
**مثال 9-10: التحكم بروبوت صب المعادن المنصهرة (Hot ingot robot control):**

يبين الشكل (9-34) الروبوت المستخدم في صب المعادن المنصهرة, حيث يقوم الروبوت بالتقاط المعادن المنصهرة الساخنة جداً, ويضعها في حوض التبريد. تم تركيب حساس بصري (vision sensor) لتحديد مكان القطعة المعدنية المنصهرة, حيث يقوم المتحكم باستخدام هذه المعلومة لتحديد مكان الروبوت أعلى قطعة المعدن المنصهرة (على طول المحور $x$). إن هذا الحساس يزود المتحكم بإشارة الموضع المطلوب $R(s)$.

يبين الشكل (9-35) المخطط الصندوقي لنظام التحكم المغلق لهذا النظام , يمكن للقارئ المهتم بنظم الروبوت أن يجد معلومات أوفر في المراجع [25, 37, 21].




**الشكل (9-34):نظام التحكم بالروبوت المستخدم في صناعة صب المعادن.**




**الشكل (9-35):المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالروبوت.**

في هذا النظام المغلق يستخدم حساس آخر لقياس موضع الروبوت على طول مساره, ولتزويد المتحكم بإشارة التغذية الخلفية عن موضع الروبوت. في هذا النظام نفترض أن إشارة موضع الروبوت المقاسة بواسطة هذا الحساس خالية من الضجيج. لنذكر من بين هذه الحساسات, على سبيل المثال, حساس الديود الليزري (Laser Diode Sensor) والحاوي في بنيته على وحدة تغذية, وديودين ضوئي وليزري, والتي تصل دقته إلى 99.9%. في الشكل (9-35) تم تمثيل الروبوت بواسطة تابع تحويل من الدرجة الثانية ذو قطب مضاعف عند $s=-1$ ومع تأخير زمني مقداره $T=(\pi/4)\,sec$, أي:

$$G(s)=\frac{e^{-sT}}{(s+1)^2} \dots\dots\dots (72-9)$$

يبين الشكل (9-36) الخطوات الأساسية في عملية تصميم نظام التحكم. يمكن تلخيص الهدف من نظام التحكم للروبوت بما يلي:

- **هدف نظام التحكم:** تصغير الخطأ المرتكب $E(s)=R(s)-Y(s)$, وذلك بوجود تأثير لإشارة اضطراب خارجية, حيث إن النظام خاضع لتأثير تأخير زمني.

لتحقيق هذا الهدف, سنقوم بتحديد المتطلبات التصميمية التالية:

- **المتطلبات التصميمية:**

(DS1): خطأ الحالة المستقرة المرتكب عند تطبيق إشارة دخل خطوية أقل من 10%.

(DS2): هامش الصفحة أكبر من 50°, حتى مع تأثير التأخير الزمني المقدر.

(DS3): التجاوز النسبي لاستجابة خطوية أقل من 10%.

سنقوم في هذا المثال على اعتبار أن المتحكم المطلوب تصميمه هو متحكم تناسبي حيث سنبين أن المتطلبات التصميمية لا يمكن أن تتحقق في آن واحد, إلا أن دراستنا

للمتحكم التناسبي ستعد مدخلاً جيداً لمناقشة بعض الظواهر المرتبطة بالتأخير الزمني, حيث ستتم المناقشة باستخدام مخطط نايكويست. إن التصميم النهائي سيعتمد المتحكم التناسبي التكاملي (PI), والقادر على تزويدنا بخصائص الأداء المطلوبة حيث سنجد أن جميع المتطلبات التصميمية قد تحققت.

كمحاولة أولى سنعتبر أن المتحكم المستخدم هو متحكم تناسبي موصوف بتابع التحويل التالي: $G_c(s) = K$. لنهمل في هذه المرحلة التأخير الزمني, بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة: $L(s) = G(s)G_c(s) = K/(s+1)^2 = K/s^2 + 2s + 1$

إن المخطط الصندوقي للنظام المدروس مبين بالشكل (9-37), وذلك بفرض أن المتحكم المستخدم هو المتحكم التناسبي. إن النظام, كما هو مبين بالشكل (9-37) من النوع الصفري وبالتالي لا نتوقع أن يكون خطأ الحالة المستقرة للاستجابة الخطوية معدوم.

يعطى تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام المدروس بالعلاقة:

$$T(s) = \frac{K}{s^2+2s+1+K}$$

بالتالي فإن الخطأ المرتكب في هذه الحالة: $E(s) = R(s) - Y(s)$.

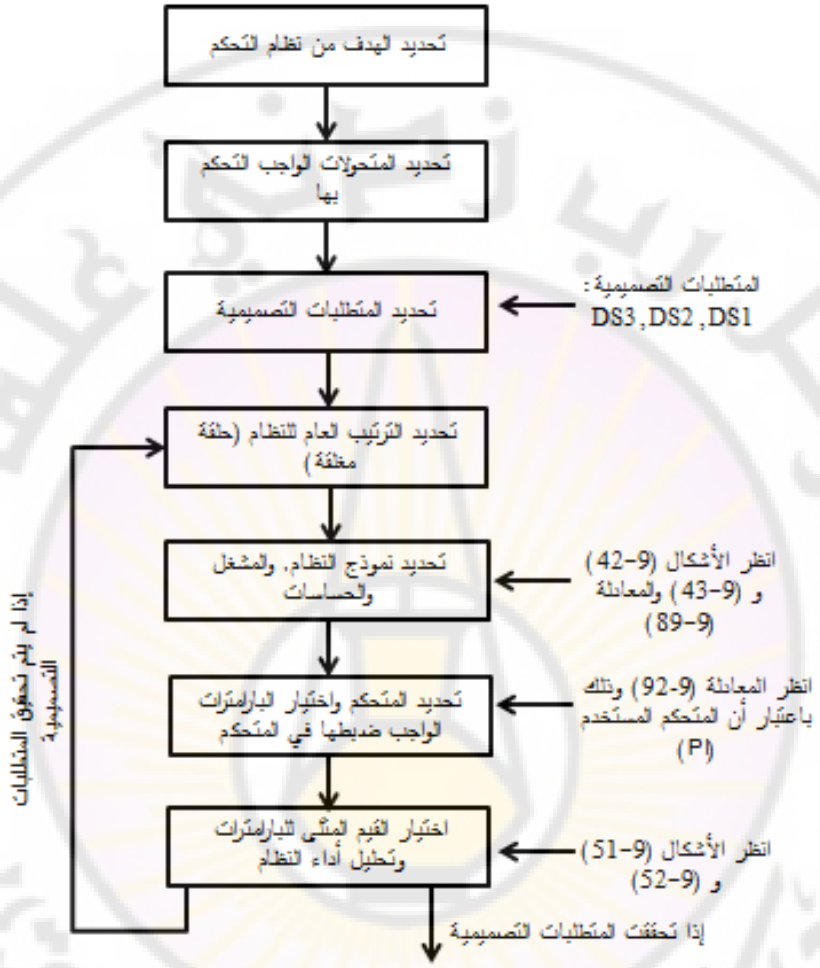
باعتبار أن إشارة دخل المطبقة هي الإشارة الخطوية $R(s) = a/s$, بالتالي:

$$E(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+1+K} . \frac{a}{s}$$

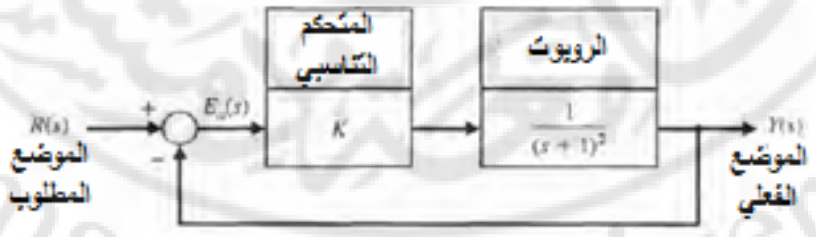
بتطبيق نظرية القيمة النهائية, علماً أنها ممكنة التطبيق كون النظام مستقر من أجل جميع قيم $K$ الموجبة, نجد:

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{\alpha}{1+K}$$

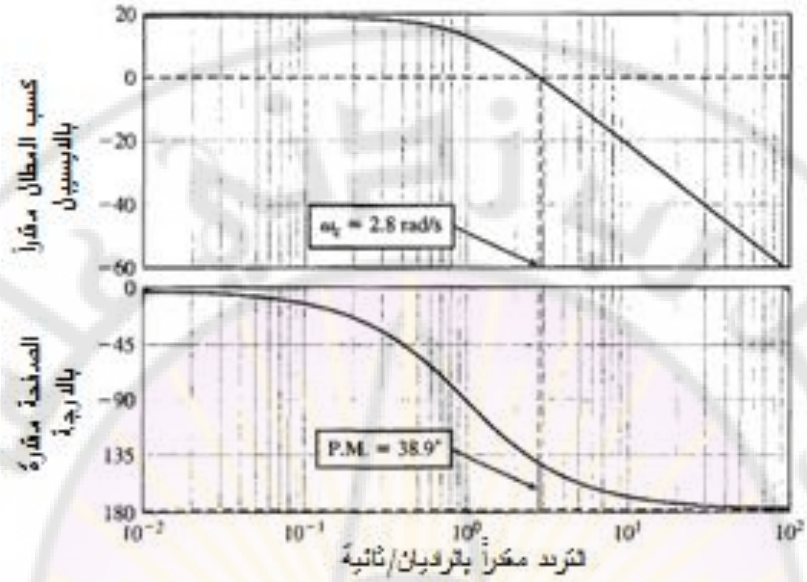
يمكن صياغة المتطلب التصميمي الأول, والذي ينص على وجوب أن يكون الخطأ المرتكب أقل من 10%, على النحو التالي: $e_{ss} \le \alpha/10$. بالحل المشترك لمعادلتي الخطأ نجد وجوب تحقق الشرط التالي: $K \ge 9$. يبين الشكل (9-38) مخطط بود للنظام المدروس وذلك باعتبار أن $K = 9$.




**الشكل (9-36): مراحل تصميم نظام التحكم مع تطبيق هذه المراحل على المثال (9-10).**




**الشكل (9-37):المخطط الصندوقي لنظام التحكم بالروبوت حيث أن المتحكم المستخدم من النوع التناسبي ومع اهمال التأخير الزمني.**




**الشكل (9-38): مخططات بود للنظام المدروس حيث $K = 9$, والتأخير الزمني مهمل.**

إذا رفعنا ربح المتحكم التناسبي إلى قيمة أكبر من 9 نجد أن نقطة تقاطع منحني الكسب مع خط 0 ديسيبل تتحرك إلى اليمين (أي أن قيمة $\omega_c$ تزداد) وبالتالي فإن هامش الصفحة المقابل $P.M.$ يتناقص. لكن السؤال الذي يتبادر إلى الأذهان هل هامش الصفحة المقدر بـ $38.9°$, من أجل $K = 9$, والذي ظهر عند التردد $\omega = 2.8\ rad/sec$, كافي لتأمين استقرار النظام وذلك إذا أخذنا بعين الاعتبار التأخير الزمني الذي تم إهماله حتى اللحظة؟ إن إضافة التأخير الزمني يتسبب بحدوث تأخير في الصفحة بدون أي تغيير في منحني الكسب. يحسب مقدار التأخير الزمني الذي يمكن أن يتحمله النظام المدروس, مع البقاء في حالة الاستقرار على النحو التالي:

$$\emptyset = -\omega T \Rightarrow \frac{-38.9\pi}{180°} = -2.8T$$

وبالتالي فإن $T = 0.24\ sec$. مما سبق إذا كانت قيمة التأخير الزمني $T$ أقل من 0.24 ثانية فإن نظام الحلقة المغلقة المدروس يبقى مستقراً. إن قيمة التأخير الزمني للنظام تساوي $T = \pi/4$ ثانية, وبالتالي في هذه الحالة النظام غير مستقر. إذاً عند رفع الربح $K$ فوق القيمة 9 سينخفض هامش الصفحة, ولكن إذا صغرنا الربح $K$ عن القيمة 9 فإن

هامش الصفحة سيزداد, ولكن خطأ الحالة المستقرة في الاستجابة الخطوية سيتجاوز القيمة المسموحة وهي 10%. إذاً نحن بحاجة إلى متحكم أكثر تعقيداً, ولكن قبل الانتقال إلى المتحكم الآخر لنرى كيف تغير منحني نايكويست نتيجة للأخذ بعين الاعتبار للتأخير الزمني. يبين الشكل (9-39) منحني نايكويست للنظام ذو تابع تحويل الحلقة:

$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{9}{(s+1)^2}$$

إن عدد أقطاب الحلقة المفتوحة أو أقطاب $L(s)$ الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي هي $P = 0$. من الشكل (9-39) نجد أنه لا توجد إحاطة بالنقطة $-1$, وبالتالي $N = 0$. بالعودة إلى معيار نايكويست للاستقرار, نعلم أن $N + P = Z$ حيث $Z$ هو عدد أصفار الحلقة المفتوحة (أو عدد أقطاب الحلقة المغلقة) الواقعة في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي. طالما أن $P = N = 0$ بالتالي ينتج لدينا $Z = 0$ , ومنه فإن نظام الحلقة المغلقة مستقر. إن النقطة المهمة الملاحظة أنه حتى لو زادت أو نقصت قيمة الربح $K$ فإن النقطة $-1$ لا يمكن أن يتم الإحاطة بها, وهامش الربح ذو قيمة لا نهائية $\infty$. بالمثل, عند غياب التأخير الزمني فإن هامش الصفحة ذو قيمة موجبة دوماً ولكن قيمة هذا الهامش تتغير مع قيمة $K$, ولكنها دائماً أكبر من الصفر.

عند إدخال التأخير الزمني في الحلقة, لا بد لنا من اللجوء إلى الطرق التحليلية, وذلك لرسم منحني نايكويست. في هذه الحالة أصبح تابع تحويل الحلقة للنظام:

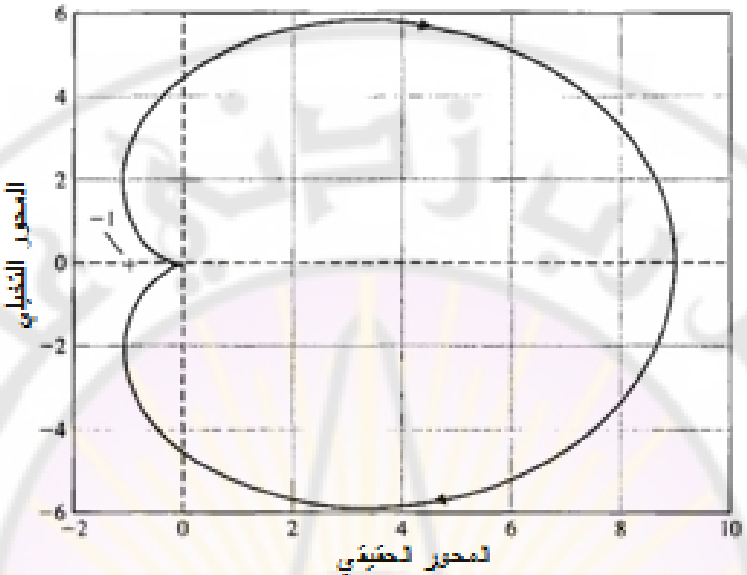
$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{K}{(s+1)^2}e^{-sT}$$

باستخدام علاقة أويلر: $e^{-j\omega T} = \cos(\omega T) - jsin(\omega T)$, وباعتبار أن $s = j\omega$ نجد:

$$L(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^2}e^{-j\omega T} = \frac{K}{\Delta}([(1-\omega^2)\,cos(\omega T) - 2\omega sin(\omega T)] - j[(1-\omega^2)\,sin(\omega T) + 2\omega cos(\omega T) \dots\dots (90-9)$$

حيث: $\Delta = (1-\omega^2)^2 + 4\omega^2$.

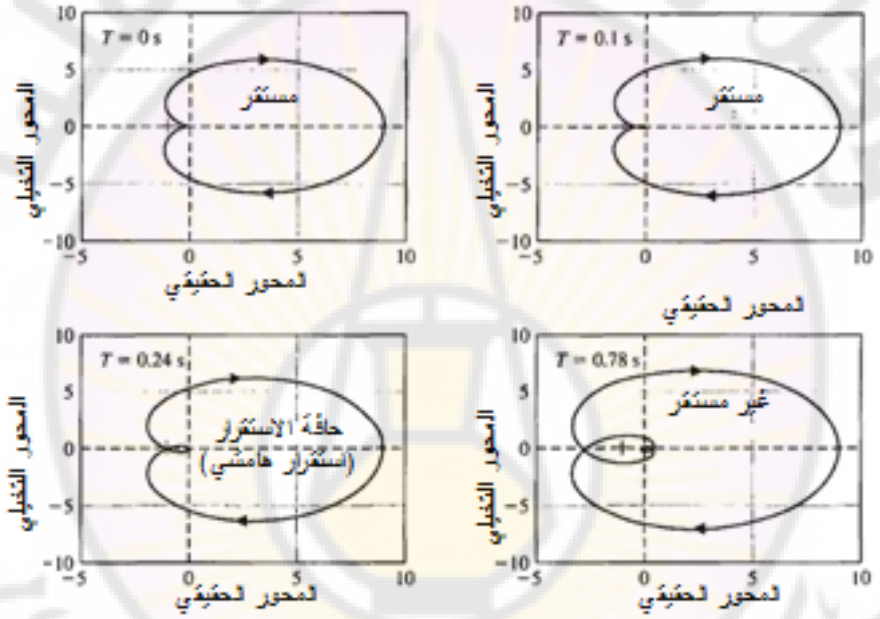
إن رسم الجزء الحقيقي $Re[L(j\omega)]$ مقابل الجزء التخيلي $Im[L(j\omega)]$, وذلك من أجل قيم مختلفة لـ $\omega$ يعطي منحني نايكويست المبين بالشكل (9-40). من أجل $K = 9$ نجد أن $N = 2$ , وبالتالي فالنظام غير مستقر لأن $Z = N + P = 2$.




**الشكل (9-39): منحني نايكويست للنظام المدروس, حيث $K = 9$ والتأخير الزمني مهمل. لاحظ أنه لا يوجد إحاطة حول النقطة $-1$.**

**الشكل (9-40): منحني نايكويست, وذلك عندما $K = 9$ و $T = \pi/4\ sec$.**

يبين الشكل (9-41) منحني نايكويست, وذلك من أجل أربع قيم مختلفة للتأخير الزمني هي: $T = 0,\ 0.1,\ 0.24,\ 0.78\ sec$. عندما $T = 0$ نلاحظ عدم وجود إمكانية للإحاطة بالنقطة $-1$, وذلك عند تغير قيمة $K$. من أجل $T = 0.1$ ثانية يكون النظام مستقر حيث $N = 0$, أما من أجل $T = 0.24$ ثانية فالنظام على حافة الاستقرار, بينما من أجل $T = 0.78$ ثانية فالنظام المغلق غير مستقر كون $N = 1$.




**الشكل (9-41): منحني نايكويست, وذلك عندما $K = 9$ و $T = 0, 0.1, 0.24, 0.78\ sec$.**

في الشكل (9-41), لنأخذ الحالة المقابلة لـ $K = 9$, $T = 0.1$ ثانية. نلاحظ أنه عندما يقطع المنحني المحور الحقيقي يكون القسم التخيلي لـ $L(j\omega)$ معدوم, أي:

$$(1 - \omega^2)\, sin(0.1\omega) + 2\omega\, cos(0.1\omega) = 0$$

وبالتالي يمكننا الحصول على علاقات الترددات $\omega$, والتي من أجل يتقاطع منحني نايكويست مع المحور الحقيقي:

$$\frac{(1-\omega^2)\, tan(0.1\omega)}{2\omega} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (73-9)$$

إن المعادلة (9-73) ذات عدد لا محدود من الحلول. إن أول عبور للمحور الحقيقي يحدث عند $\omega = 4.43\ rad/sec$ (أبعد نقطة في النصف الأيسر من المستوي). إن مطال التابع $L(j\omega)$ عند هذا التردد يساوي:

$$|L(j4.43)| = 0.0484\ K$$

حتى يكون النظام مستقراً يجب أن يكون $|L(j4.43)| < 1$, وذلك لتجنب الإحاطة بالنقطة $-1$ وبالتالي حتى يكون النظام مستقر يجب أن يكون: $K < 1/0.0484 = 20.67$, وذلك بالطبع عندما $T = 0.1$ ثانية.

كما رأينا يكون النظام مستقراً, وذلك عندما $K = 9$. إذا زدنا الربح $K$ بمعامل مقداره 2.3 يصبح $K = 9 * 2.3 = 20.67$, ويصبح النظام على حافة الاستقرار. إن هذا المعامل $\delta$ هو هامش الربح: $G.M. = 20\ log 2.3 = 7.2dB$.

لنفرض الآن أن لدينا المتحكم التناسبي التكاملي (PI), ذو تابع التحويل:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} \dots\dots (74-9)$$

إن تابع تحويل الحلقة لهذا النظام:

$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} . \frac{K}{(s+1)^2} e^{-sT}$$

من الملاحظ أن نوع النظام هو النوع الأول وبالتالي فإن خطأ الحالة المستقرة للاستجابة الخطوية معدوم, والمتطلب التصميمي الأول (DS1) محقق. لنركز الآن على تحقيق المتطلب التصميمي (DS3) والمتعلق بالتجاوز النسبي ($P.O.\% < 10\%$) والمتطلب التصميمي (DS2) والمتعلق باستقرار النظام بوجود التأخير الزمني.

من المتطلب التصميمي المتعلق بالتجاوز النسبي يمكننا أن نحدد معامل التخامد للنظام المطلوب. بالتالي يمكننا أن نجد من أجل $P.O. \leq 10\%$ يكون $\zeta \geq 0.59$. بما أن المتحكم المستخدم هو المتحكم التكاملي التناسبي (PI), أصبح للنظام صفر عند النقطة $s = -K_I/K_P$. إن هذا الصفر لا يؤثر على استقرار النظام ولكن يؤثر على خصائص أدائه. بالاعتماد على العلاقة التقريبية التالية (الصحيحة من أجل قيم $\zeta$ الصغيرة): $\zeta \approx P.M./100$, وطالما أننا نريد $\zeta \geq 0.59$, فيمكننا أن نختار هامش صفحة مساوياً لـ $60°$. يمكننا أن نكتب المتحكم التناسبي التكاملي على النحو التالي:

$$G_c(s) = \frac{K_I(1+\tau s)}{s}$$

حيث $1/\tau = K_I/K_P$, ويقابل تردد الانكسار (Break frequency) للمتحكم.

إن المتحكم التناسبي التكاملي عبارة عن مرشح ترددات منخفضة (Low-pass filter), يقوم بإضافة تأخير صفحة عند الترددات ما دون تردد الانكسار. نريد توضيع تردد الانكسار للمتحكم بقيمة أقل من تردد الاجتياز (Crossover frequency) وذلك حتى لا يتناقص هامش الصفحة بشكل كبير بنتيجة صفر المتحكم.

يبين الشكل (9-42) منحني بود للنظام بدون متحكم, أي لتابع التحويل:

$$G(s) = \frac{9}{(s+1)^2} e^{-sT}$$

حيث $T = \pi/4 = 0.78$.

إن هامش الصفحة للنظام (بدون متحكم) يساوي $P.M. = -88.34°$ , وذلك عند تردد الانكسار $\omega_c = 2.83\, rad/sec$ . طالما أننا نريد قيمة لهامش الصفحة $P.M. = 60°$, بالتالي نريد أن تكون الصفحة عند تردد الانكسار $\emptyset = -120°$. من الشكل (9-42) يمكننا أن نجد أن $\emptyset = -120°$ تحدث عند التردد $\omega \approx 0.87\, rad/sec$. إن هذه القيمة لـ $\omega$ تقريبية, ولكن ذات دقة كافية للاستمرار في إجرائية التصميم. عند $\omega = 0.87$ نجد أن المطال يساوي تقريباً $14.5\, dB$. إذا أردنا أن ينطبق تردد الانكسار على القيمة 0.87, بمعنى آخر $\omega_c = 0.87$, فيجب أن نحذف من ربح النظام مقدار $14.5\, dB$, بحيث يكون المطال يساوي 0 ديسيبل عند التردد $\omega_c = 0.87$.

في المتحكم التناسبي التكاملي المعطى بالعلاقة:

$$G_c(s) = K_P \frac{s+K_I/K_P}{s}$$

نستطيع أن نعتبر أن $K_P$ يساوي إلى ربح المتحكم التناسبي التكاملي ككل (تقريب مقبول عند الترددات العالية), بالتالي: $K_P = 10^{-(14.5/20)} = 0.188$.

لنقوم الآن باختيار $K_I$. طالما أننا نريد توضيع تردد الانكسار للمتحكم عند قيمة أقل من تردد الاجتياز (وذلك حتى نضمن عدم تأثير صفر المتحكم (PI) على الاستقرار) يمكننا أن نعتمد القانون التالي: $1/\tau = K_I/K_P = 0.1\omega_c$.

أي أننا اخترنا توضيع تردد الانكسار للمتحكم أقل بديكاد واحد من تردد الاجتياز, وبالتالي: $K_I = 0.1\omega_c K_P = 0.0164$, وذلك من أجل $\omega_c = 0.87 rad/sec$.

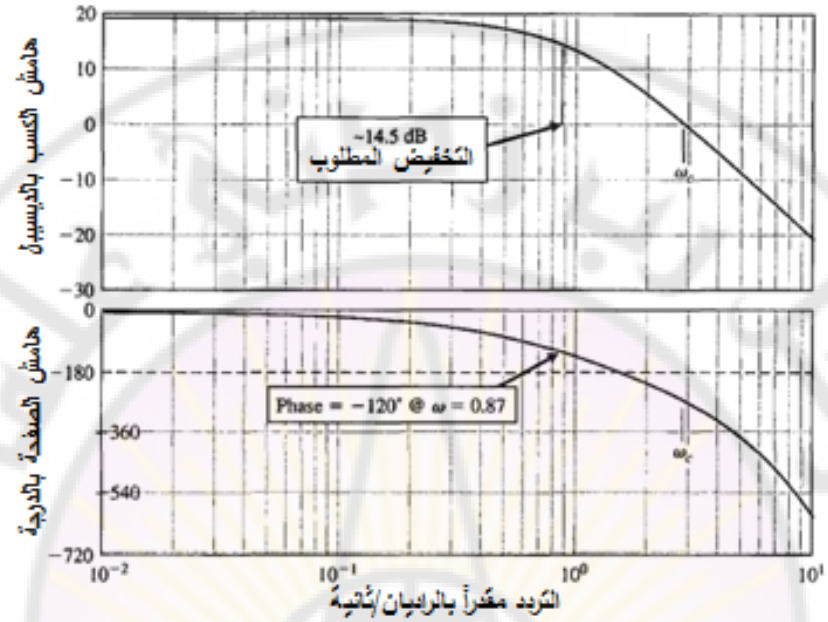
بالتالي يصبح تابع تحويل المتحكم التناسبي التكاملي المستنتج:

$$G_c(s) = \frac{0.188s+0.0164}{s} \dots\dots (75-9)$$

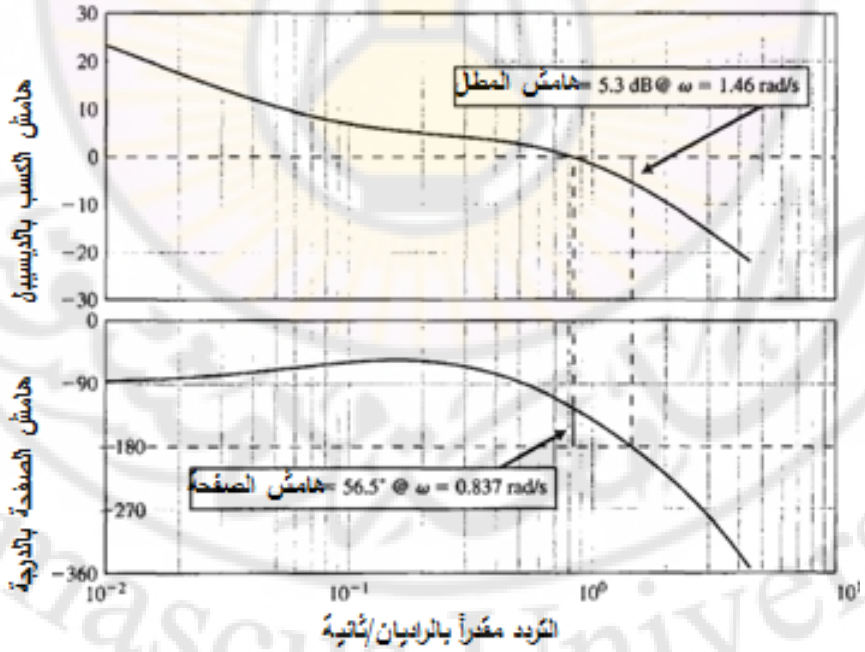
يبين الشكل (9-43) منحني بود للتابع $G(s)G_c(s)$, حيث يمكننا أن نلاحظ أن هامش الصفحة $P.M. = 56.5°$, أما هامش المطال $G.M. = 5.3\, dB$.

لنتحقق فيما إذا كانت المتطلبات التصميمية قد تحققت. إن خطأ الحالة المستقرة للاستجابة الخطوية, والمحدد بالمتطلب التصميمي DS1 محقق كون المتحكم التناسبي التكاملي أدخل عنصراً تكاملياً إلى النظام, وبالتالي أصبح نوع النظام من النوع الأول, والذي من أجله يكون خطأ الحالة المستقرة للاستجابة الخطوية معدوم. إن هامش الصفحة (بوجود التأخير الزمني) يساوي $(P.M. = 56.5°)$, وبالتالي فإن المتطلب التصميمي DS2 محقق.

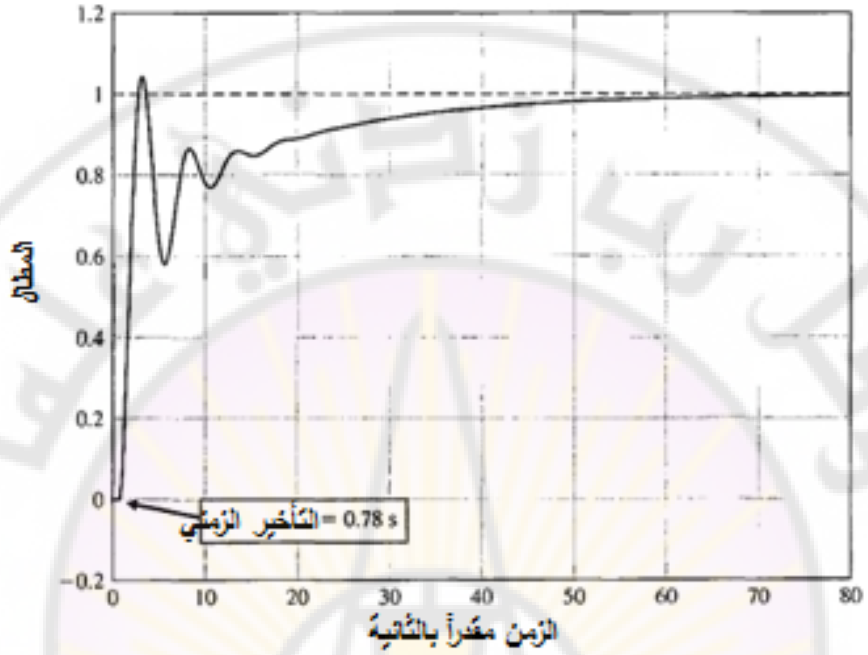
من شكل الاستجابة الخطوية للنظام بوجود المتحكم المستنتج, والمبينة بالشكل (9-44) يمكن أن نجد أن التجاوز النسبي للنظام $P.O.\% \approx 4.2\%$ وهو أقل من القيمة المرجوة 10%, وبالتالي فالمتطلب التصميمي DS3 محقق.




**الشكل (9-42): منحني بود للنظام بدون متحكم حيث $K = 9$ و $T = \pi/4$.**




**الشكل (9-43): منحني بود للنظام بوجود المتحكم المعطى بالعلاقة (9-75).**




**الشكل (9-44):الاستجابة الخطوية لنظام التحكم بالروبوت باستخدام المتحكم PI.**

**9-7 المتحكمات التناسبية التكاملية التفاضلية PID في المستوي الترددي:**

كما رأينا سابقاً تحوي المتحكمات PID على ثلاثة بنود: البند التناسبي, البند التكاملي, البند التفاضلي, حيث أن تابع تحويل هذه المتحكمات:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \dots\dots\dots (76-9)$$

إذا أسندنا القيمة صفر للمعامل $K_D$ نحصل على المتحكم التناسبي التكاملي:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \dots\dots\dots (77-9)$$

أما إذا أسندنا القيمة صفر للمعامل $K_I$ نحصل على المتحكم التناسبي التفاضلي:

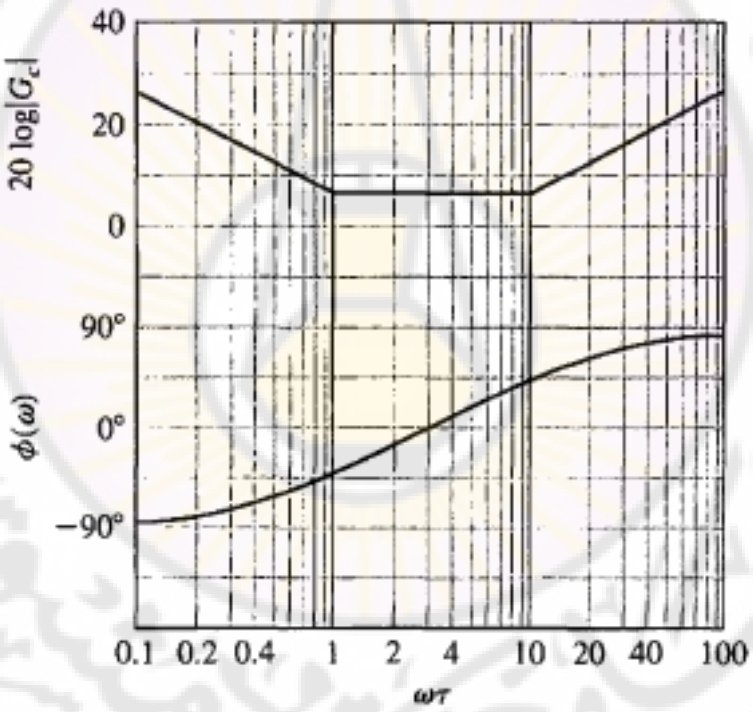
$$G_c(s) = K_P + K_D s$$

بشكل عام رأينا أن المتحكم PID مفيد لإنقاص خطأ الحالة المستقرة, ولتحسين الاستجابة العابرة للنظام المتحكم به ذو تابع التحويل $G(s)$, وذلك إذا كان لـ $G(s)$ قطب واحد أو قطبين (أو يمكن تقريبه إلى نظام من الدرجة الثانية).

يمكننا أيضاً الاعتماد على طرق الاستجابة الترددية لبيان الفائدة من المتحكم PID. يمكن إعادة كتابة تابع تحويل المتحكم PID, المعطى بالعلاقة (9-76) على النحو التالي:

$$G_c(s) = \frac{K_I(\frac{K_D}{K_I}s^2+\frac{K_P}{K_I}s+1)}{s} = \frac{K_I(\tau s+1)(\frac{\tau}{\alpha}s+1)}{s} \dots (78-9)$$

يبين الشكل (9-45) منحنيات بود للمتحكم الممثل بالمعادلة (9-78), وذلك عندما $K_I = 2$ و $\alpha = 10$. من هذا الشكل يمكن ملاحظة أن المتحكم PID ليس إلا معوض إيقاف النطاق أو (Band stop compensator) مع ربح متغير هو $K_I$.




**الشكل (9-45): منحنيات بود للمتحكم PID وذلك باستخدام طريقة المستقيمات المقاربة**

من الممكن أن يكون للمتحكم صفرين عقديين, وبالتالي فإن منحنيات بود للمتحكم ستعتمد على معامل التخامد ζ لهذه الأصفار العقدية. يمكن إظهار تأثير الاصفار على منحنيات بود, وذلك بالعودة إلى الشكل (8-21) والمتعلق بوجود الأقطاب العقدية,

وملاحظة أن منحنيات بود للمطال وللصفحة تختلف عند تغير قيم معامل التخامد $\zeta$.

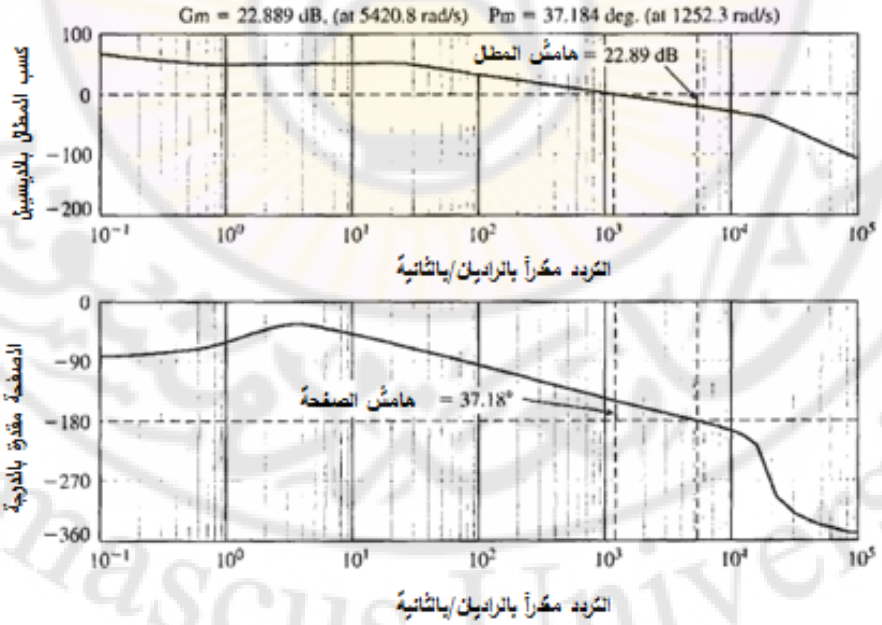
يعطى المتحكم PID ذو الأصفار العقدية بالعلاقة:

$$G_c(s) = \frac{K_I[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega-(\omega/\omega_n)^2]}{j\omega} \dots\dots (79-9)$$

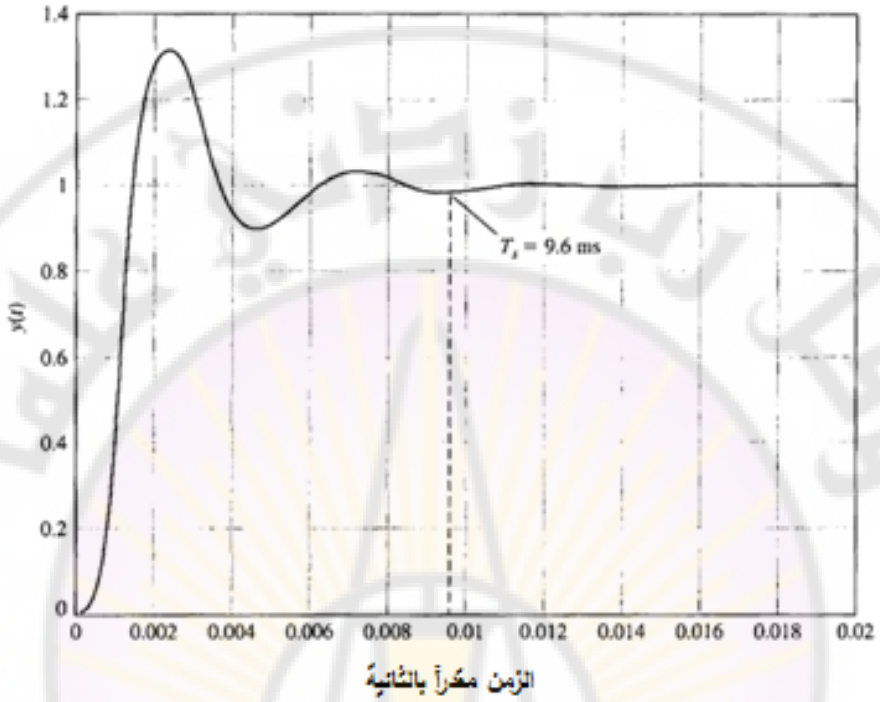
حيث نختار عادةً قيمة لـ $\zeta$ ضمن المجال $0.7 < \zeta < 0.9$.

**8-9 مثال تصميمي: نظام قارئة الأقراص المدمجة:**

في هذا الفصل سنعود ونعالج نظام قارئة الأقراص المدمجة باستخدام النموذج المبين بالشكل (8-48). إن هذا النموذج يشمل تأثير أداة التعليق, ويحتوي متحكم تناسبي تفاضلي PD بصفر عند النقطة $s = -1$. سنعمل في هذا الفصل على تحديد هوامش الربح والصفحة للنظام عند $K = 400$. يبين الشكل (9-46) منحنيات بود للنظام المبين بالشكل (8-61) وذلك من أجل $K = 400$. من هذا الشكل نجد أن هامش الربح يساوي $22.9\ dB$, أما هامش الصفحة فيساوي إلى $37.2°$. تبين الاستجابة الخطوية للنظام المبينة بالشكل (9-47) أن زمن استقرار النظام يساوي $T_s = 9.6\ ms$.




**الشكل (9-46): منحني بود للنظام المبين بالشكل (8-48).**




**الشكل (9-47): الاستجابة الخطوية للنظام المبين بالشكل (8-48).**

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# الفصل العاشر: تصميم نظم التحكم ذات التغذية الخلفية

# Chapter 10: The design of feedback control systems

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

في هذا الفصل سنتوجه إلى المسألة الأساسية في نظم التحكم ذات التغذية الخلفية وهي تصميم المعوضات (Design of compensator), حيث سنقدم عدة طرق تصميمية معتمدة على الطرق المدروسة في الفصول السابقة, بحيث يحقق النظام متطلبات الأداء المطلوبة. سنقدم في هذا الفصل تصميم متحكمات تقديم وتأخير الطور, وسنشرح هذه الطرق بواسطة عدة أمثلة تصميمية.

إن طرق تصميم متحكمات تقديم أو تأخير الطور التي ستقدم في هذا الفصل تعتمد على مسار الجذور للنظام ومنحنيات بود. سنراجع أيضاً المتحكم التناسبي التكاملي (PI) وذلك بهدف تحقيق دقة عالية للنظام المتحكم به. سنختم الفصل بطرق تصميم المتحكم التناسبي التفاضلي (PD) للمثال التصميمي المعالج في هذا الكتاب وهو قارئة الأقراص المدمجة.

**10-1 مقدمة:**

يكتسب أداء نظم التحكم ذات التغذية الخلفية أهمية خاصة حيث تمت مناقشة هذه الناحية بالتفصيل في الفصل الخامس حيث وجدنا أن نظام التحكم المغلق الجيد يكون مستقراً ويزودنا باستجابة مقبولة لإشارات الدخل, وهو أقل حساسية لتغير بارامترات النظام, وذو خطأ حالة مستقرة صغير, كما يمتلك القدرة على إنقاص تأثير الاضطرابات, وذلك بالطبع بالمقارنة مع نظام التحكم ذو الحلقة المفتوحة. إن نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة والذي يزودنا بالأداء الأمثل دون الحاجة لأي عملية ضبط هو نظام نادر الوجود حيث إن معظم نظم التحكم تحتاج لعملية ضبط وتعيير.

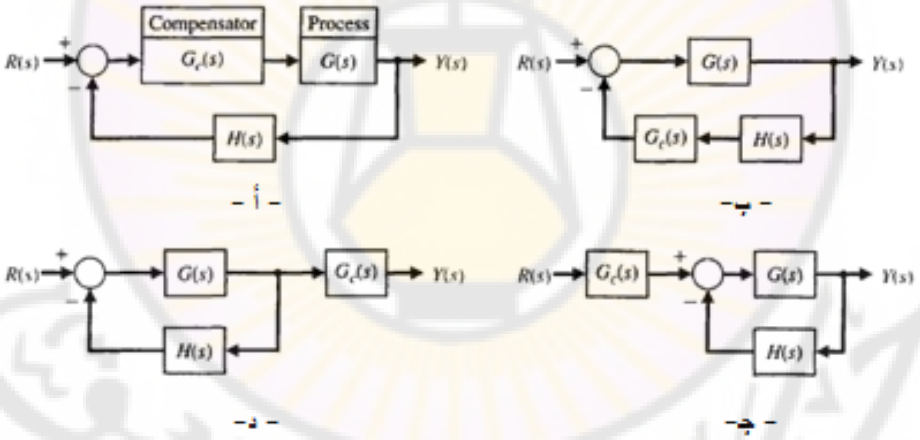
عالجنا في الفصول السابقة مسألة تصميم وضبط بارامترات النظام بحيث نحصل على الاستجابة المطلوبة وعلى المتطلبات التصميمية المطلوبة, ولكن في أغلب الأحيان تُعَدّ عملية ضبط بارامترات النظام غير كافية للحصول على الاستجابة المطلوبة, وبالتالي يجب, في بعض الأحيان,إعادة تشكيل بنية الحلقة المغلقة.

مما سبق يمكننا أن نعرف عملية تصميم نظام التحكم بأنها العملية المهتمة بترتيب بنية نظام التحكم, وبالاختيار المناسب لعناصر نظام التحكم ولبارامتراته.

على سبيل المثال, إذا كان المطلوب أن يحقق النظام المتطلبين التاليين: تجاوز نسبي أقل من 20% و $\omega_n T_p = 3.3$. إن هذين المتطلبين يفرضان قيمتين مختلفتين ومتباعدتين لمعامل التخامد $\zeta$, وبالتالي إذا لم نكن قادرين على تحقيق هذين المتطلبين ولو بشكل نسبي, فلا بد من تبديل بنية النظام. إن عملية تبديل أو ضبط نظام التحكم بحيث يحقق متطلبات أداء معينة يسمى بالتعويض (Compensation).

إذاً عملية التعويض تهدف للتغلب على عيوب ونواقص وعدم دقة نظام التحكم. يمكن أن يكون المعوض (compensator) إما أداة كهربائية أو ميكانيكية أو هيدروليكية أو هوائية, إلا أنه من الشائع استخدام المعوضات الكهربائية.

إذاً مما سبق: **المعوض هو عنصر أو دارة إضافية تدخل في نظام التحكم لتعويض نواقص الأداء المطلوب.**




**الشكل (10-1): أنواع التعويض أ – التعويض التسلسلي ب – التعويض بالتغذية الخلفية جـ – تعويض الخرج د – تعويض الدخل.**

يُشار إلى تابع تحويل المعوض بالعلاقة $G_c(s) = E_o(s)/E_{in}(s)$, حيث يمكن توضيع المعوض في عدة أماكن, وذلك حسب البنية المعتمدة لنظام التحكم. يبين الشكل (10-1) بنى نظم التحكم حسب مكان توضع المعوض, وذلك لنظام التحكم وحيد الحلقة. يسمى المعوض المتواجد في المسار الأمامي لحلقة التحكم بالمعوض التسلسلي, وذلك كما هو

مبين بالشكل (10-1- أ). تبين الأشكال (10-1 – ب– جـ – د) المعوضات المسماة بمعوضات التغذية الخلفية, معوضات الخرج ومعوضات الدخل. إن اختيار بنية المعوض يعتمد على المتطلبات التصميمية وعلى استطاعة الإشارات المتدفقة في نظام التحكم. في هذا الفصل لا يمكننا دراسة جميع البنى, لذلك سنخصّ أجزاء من الفصل القادم لمناقشة هذه البنى.

**10-2 طرق تصميم نظم التحكم:**

يمكن أن يوصف أداء نظام التحكم في المستوين الزمني والترددي. في المستوي الزمني يوصف الأداء بواسطة: زمن القمة $T_P$, التجاوز النسبي الأعظمي, و زمن الاستقرار, وذلك في الاستجابة الخطوية. كما يوصف أيضاً بواسطة أخطاء الحالة المستقرة لإشارات الدخل القياسية, والمطبقة على مداخل النظام. يمكن أن يوصف النظام أيضاً بواسطة مواقع أقطاب وأصفار تابع تحويل الحلقة المغلقة. كما رأينا في الفصل السابع, يتم الحصول على المحل الهندسي لجذور الحلقة المغلقة عن طريق تغيير أحد بارامترات النظام, والتحقق فيما إذا كانت أحد المواقع تحقق المتطلبات التصميمية للنظام, ولكن إذا لم تتواجد مواقع تحقق المتطلبات التصميمية فلا بدّ من إضافة معوّض كما في الشكل (10-1), وذلك لتغيير المحل الهندسي للجذور. بالتالي يمكننا استخدام طريقة المحل الهندسي للجذور لتحديد تابع تحويل المعوّض حيث إن المحل الهندسي للجذور الناتج للنظام ككل يحقق المتطلبات التصميمية.

يمكننا أيضاً أن نصف أداء النظام ذو الحلقة المغلقة في المستوي الترددي, حيث يوصف بدلالة القيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{P\omega}$, تردد الرنين $\omega_r$, عرض المجال الترددي, وهوامش الصفحة والربح للنظام. إن تصميم المعوض الممثل بواسطة تابع التحويل $G_c(s)$ يمكن أن يتم في المستوي الترددي بواسطة منحني نايكويست في الإحداثيات القطبية, أو بواسطة منحنيات بود, أو بواسطة منحنيات نيكولس.

إن إضافة تأثير المعوض $G_c(s)$ في منحنيات بود تتم بصورة سهلة حيث تتم مثلاً إضافة تأثير الربح بالديسيبل بشكل جبري, لذلك فإننا نفضل دراسة تصميم المعوض باستخدام منحنيات بود.

إذاً و مما سبق تتم عملية التصميم عن طريق إعادة تشكيل الاستجابة الترددية أو المحل الهندسي للجذور بحيث نحصل على متطلبات الأداء التصميمية.

**3-10 دارات التعويض التسلسلي (Cascade compensation networks):**

في هذه الفقرة سنعمل على تصميم دارات التعويض التسلسلية والتغذية الخلفية والمبينة بالأشكال (10-1- أ – ب). إن تابع تحويل الحلقة للنظام المبين بالشكل (10-1- أ) يُعطى بالعلاقة: $L(s) = G_c(s)G(s)H(s)$. يمكن اختيار المعوض$G_c(s)$ بحيث نعيد تشكيل المحل الهندسي للجذور أو الاستجابة الترددية للنظام. في كلتا الحالتين سواءً أكان الهدف إعادة تشكيل المحل الهندسي للجذور أو الاستجابة الترددية, فإن الدارة تُختار بحيث يكون تابع تحويلها:

$$G_c(s) = \frac{K\Pi_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\Pi_{j=1}^{n}(s+P_j)} \dots\dots\dots (1-10)$$

في هذه الحالة تصبح المسألة هي اختيار أقطاب وأصفار المعوّض. لشرح خصائص دارات التعويض سندرس المعوّض من الدرجة الأولى, علماً أن الطريقة المقدّمة هنا لاستخلاص المعوّض من الدرجة الأولى يمكن أن تتوسع لتشمل المعوضات ذات الدرجات الأعلى وذلك عن طريق الربط التسلسلي لعدة معوضات من الدرجة الأولى.

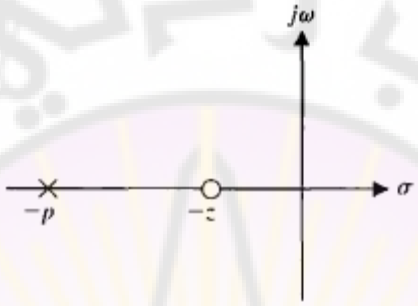
يعطى تابع تحويل المعوّض من الدرجة الأولى بالعلاقة:

$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{s+p} \dots\dots\dots (2-10)$$

في هذه الحالة تصبح المسألة التصميمية هي اختيار قيم $p, z, K$ بحيث يحقق النظام متطلبات الأداء المطلوبة. عندما يكون $|z| < |p|$, يدعى المعوّض بالمعوّض تقديم صفحة أو (phase-Lead compensator), حيث يبين الشكل (10-2) توضع الأقطاب والأصفار لهذا المعوّض في المستوي اللابلاسي. إذا كان القطب مهملاً, أي $|z| \ll |P|$,

ووقع صفر التابع $G_c(s)$ في مركز الإحداثيات, نحصل على العنصر التفاضلي (Differentiator), أي:

$$G_c(s) \approx \frac{K}{P}s \dots\dots\dots (3-10)$$




**الشكل (10-2): مخطط الأقطاب – الأصفار لدارة تقديم الصفحة.**

في هذه الحالة, تعطى الخصائص الترددية للعنصر التفاضلي المعطى بالعلاقة (10-3) بالعلاقة:

$$G_c(j\omega) = j\frac{K}{P}\omega = \left(\frac{K}{P}\omega\right)e^{j90} \dots\dots (4-10)$$

حيث إن فرق الصفحة لهذا المفاضل يساوي إلى $+90°$. بالمثل, تعطى الاستجابة الترددية لدارة التفاضل الممثلة بالعلاقة (10-2):

$$G_c(j\omega) = \frac{K(j\omega+z)}{j\omega+p} = \frac{\left(\frac{Kz}{p}\right)\left(\frac{j\omega}{z}+1\right)}{\frac{j\omega}{p}+1} = \frac{K_1(1+j\omega\alpha\tau)}{1+j\omega\tau} \dots\dots (5-10)$$

حيث: $K_1 = K/\alpha$ , $p = \alpha z$ , $\tau = 1/p$ .

يبين الشكل (10-3) الاستجابة الترددية لدارة تقديم الصفحة. تعطى علاقة الصفحة لهذه الاستجابة الترددية بالعلاقة:

$$\emptyset(\omega) = \tan^{-1}(\alpha\omega\tau) - \tan^{-1}(\omega\tau) \dots\dots\dots (6-10)$$

بما أن صفر العنصر التفاضلي يقع قبل قطبه على محور التردد, نحصل على خصائص تقديم الصفحة, وذلك كما هو مبين بالشكل (10-3). إن ميل المستقيم المقارب لكسب المطال هو $+20\ dB/decade$.

يمكن الحصول على تابع تحويل معوّض تقديم الصفحة بواسطة الدارة المبينة بالشكل (10-4). إن تابع تحويل هذه الدارة:

$$G_c(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R_2+\frac{R_2/Cs}{R_1+1/Cs}} = \frac{R_2}{R_2+R_1}.\frac{R_1Cs+1}{[R_1R_2/(R_1+R_2)]Cs+1} \dots\dots (7-10)$$

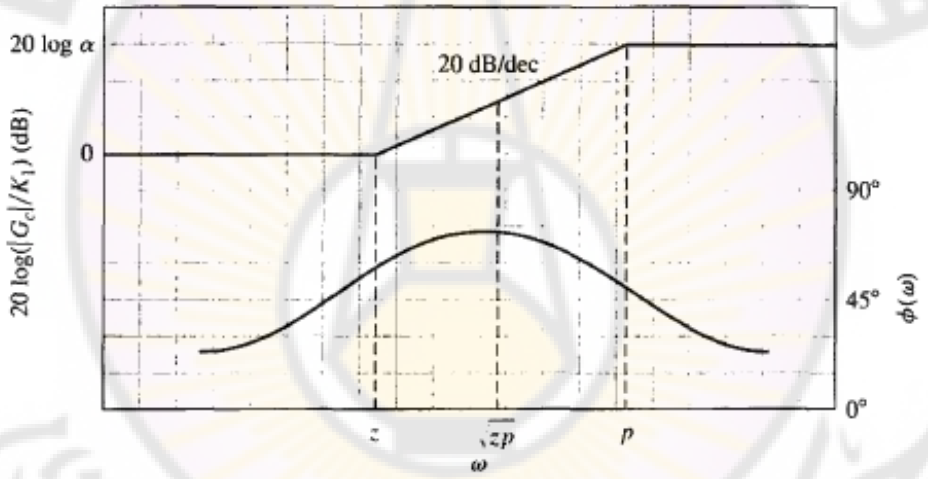
بفرض أن:

$$\tau = (R_1R_2/R_1+R_2)C \quad , \quad \alpha = (R_1+R_2)/R_2$$

بالتالي نحصل على تابع تحويل معوّض تقديم الصفحة:

$$G_c(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{\alpha(1+\tau s)} \dots\dots (8-10)$$

هذا التابع يكافئ تابع التحويل المعطى بالعلاقة (5-10) وذلك عند ربطه على التسلسل مع مكبر تناسبي ذو معامل ربح $K$.




**الشكل (3-10): منحنيات بود لدارة تقديم الصفحة.**

إن القيمة العظمى لتقديم الصفحة تحدث عند التردد $\omega_m$, الواقع في منتصف المسافة بين التردد المقابل للقطب $p = 1/\tau$ وللتردد المقابل للصفر $z = 1/(\alpha\tau)$ , وذلك على محور التردد اللوغاريتمي, أي: $\omega_m = \sqrt{z.p} = 1/\tau\sqrt{\alpha}$.

للحصول على معادلة تمثل القيمة العظمى لزاوية تقديم الصفحة, نعيد صياغة المعادلة (5-10) على النحو التالي:

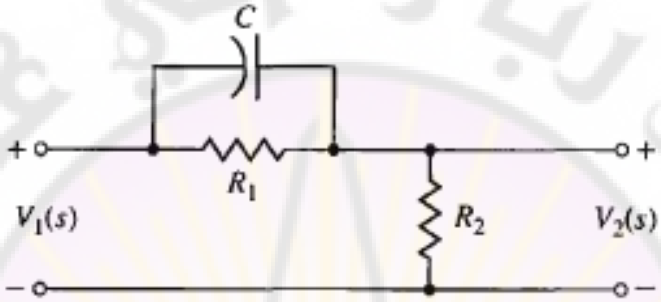
$$\emptyset = tan^{-1}\frac{\alpha\omega\tau-\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2\alpha} \dots\dots\dots (9-10)$$

بتعويض $\omega = \omega_m = 1/\tau\sqrt{\alpha}$ في المعادلة (9-10) نحصل على:

$$tan\emptyset_m = \frac{\alpha/\sqrt{\alpha}-1/\sqrt{\alpha}}{1+1} = \frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}} \dots\dots\dots (10-10)$$

بالاعتماد على العلاقة المثلثية التالية: $sin\emptyset = tan\emptyset/\sqrt{1+tan^2\emptyset}$, نجد أن:

$$sin\ \emptyset_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \dots\dots\dots (11-10)$$




**الشكل (10-4): دارة تقديم الصفحة.**

تُعَدّ المعادلة (10-11) مفيدة جداً لحساب $\alpha$ الممثلة للنسبة بين قطب وصفر المعوّض والمقابلة للقيمة العظمى المطلوبة لتقديم الصفحة. يبين الشكل (10-5) العلاقة بين $\emptyset_m$ و $\alpha$. إن القيمة العظمى لتقديم الطور التي يمكن الحصول عليها من هذه الدارة هي $70°$. من جهة أخرى طالما أن $\alpha = (R_1+R_2)/R_2$, بالتالي فإن هناك حد أعظمي لقيمة $\alpha$ التي يمكن الحصول عليها عملياً. إذا كان هناك حاجة للحصول على تقديم صفحة أكبر من $70°$ يمكننا في هذه الحالة استخدام دارتي تعويض تقديم صفحة مربوطين على التسلسل, حيث في هذه الحالة يكون تابع التحويل الكلي هو $G_{c1}(s)G_{c2}(s)$.

في بعض الأحيان نحتاج إلى إضافة دارة تعويض تأخر بصفحة النظام, حيث يبين الشكل (10-6) دارة تأخير بالصفحة. إن تابع تحويل دارة تأخير الصفحة:

$$G_c(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_2+1/(Cs)}{R_2+R_1+1/(Cs)} = \frac{R_2Cs+1}{(R_2+R_1)Cs+1} \dots\dots (12-10)$$

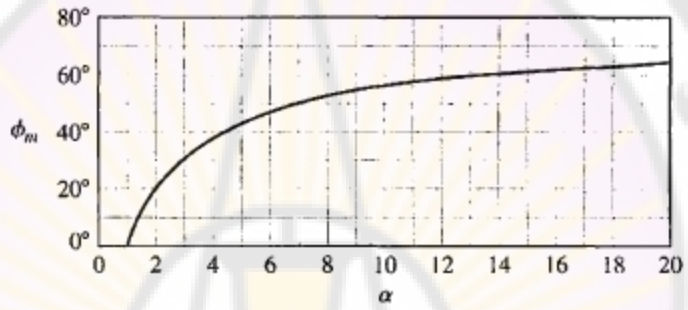
بفرض أن: $\alpha = (R_1+R_2)/R_2$ , $\tau = R_2C$, بالتالي يصبح تابع تحويل دارة تأخير الصفحة:

$$G_c(s) = \frac{1+\tau s}{(1+\tau\alpha s)} = \frac{1}{\alpha}.\frac{s+z}{z+p} \dots\dots (13-10)$$

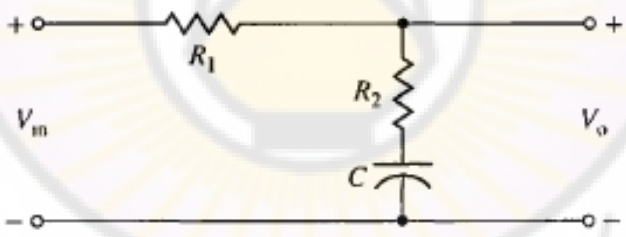
حيث: $p = 1/(\alpha\tau)$ و $z = 1/\tau$.

في هذه الحالة وبما أن $\alpha > 1$ فإن القطب يقع بالقرب من مركز الإحداثيات في المستوي اللابلاسي, كما هو مبين بالشكل (10-7). إن هذا النوع من الدارات التعويض يسمى بدارة التكامل (Integrating network), ذلك لأن استجابتها الترددية تشبه الاستجابة الترددية لعنصر التكاملي, وذلك ضمن مجال تردد محدد. يمكن الحصول على منحني بود لدارة تأخير الصفحة بالاعتماد على تابع التحويل:

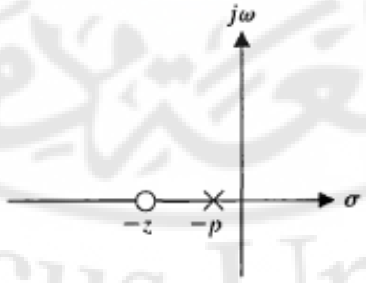
$$G_c(j\omega) = \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} \dots\dots\dots (14-10)$$




**الشكل (10-5): علاقة $\emptyset_m$ و α لدارة تقديم الصفحة.**

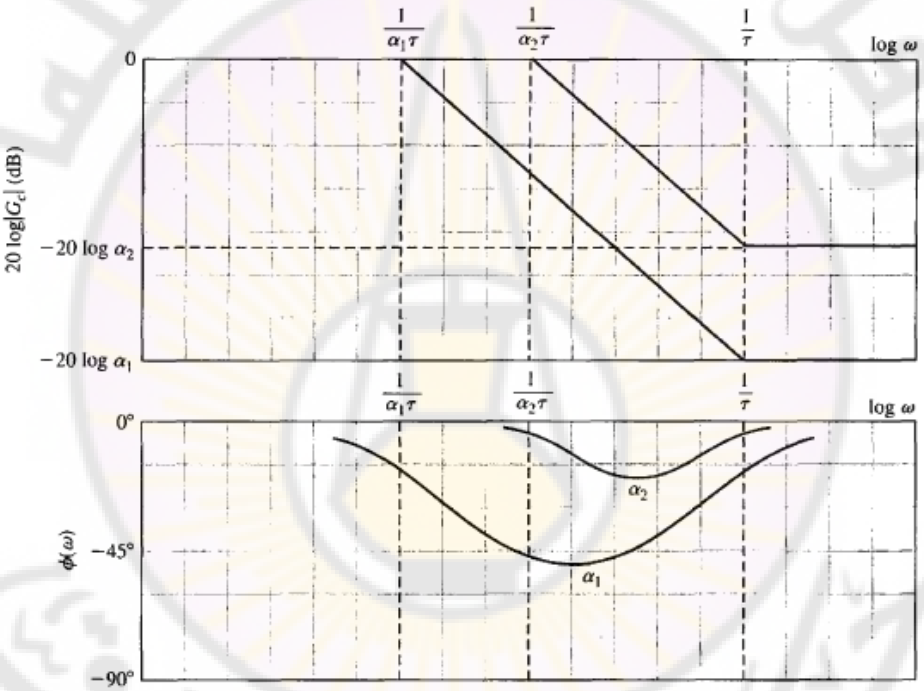



**الشكل (10-6): دارة تأخير الصفحة.**




**الشكل (10-7): مخطط أقطاب وأصفار دارة تأخير الصفحة.**

يبين الشكل (10-8) منحنيات بود لدارة تأخير الصفحة. إن شكل منحنيات بود لدارة تأخير الصفحة تشبه منحنيات بود لدارة تقديم الصفحة. إن الفرق الأساسي هو تصغير الربح وتأخير في الصفحة بدلاً من تكبير الربح وتقديم في الصفحة. لاحظ أن أشكال المنحنيات المبينة بالشكل (10-3) وتلك المبينة بالشكل (10-8) متشابهة. مما سبق يمكن أن نجد أن تأخير الصفحة الأعظمي يحدث عند التردد $\omega_m = \sqrt{zp}$.




**الشكل (10-8): منحنيات بود لدارة تأخير الصفحة.**

في الفقرات التالية, سنقوم باستخدام معوضات تقديم وتأخير صفحة بهدف الحصول على الاستجابة الترددية المطلوبة للنظام أو المحل الهندسي للجذور المطلوب. إن دارة تقديم الصفحة تبدي تقديم بالصفحة وبالتالي تساعد على تحقيق هامش مقبول لصفحة النظام ككل. بالمقابل تمكننا دارة تأخير الصفحة من إعادة تشكيل المحل الهندسي للجذور, بحيث تتوضع الجذور في الأماكن المطلوبة ويتحقق الأداء الزمني المطلوب. إن دارة

تأخير الصفحة لا تستخدم لتأخير الصفحة, الذي يعتبر أحد العوامل المسببة لعدم استقرار النظام, وإنما تستخدم للتأثير على أخطاء الحالة المستقرة [16]. في الفقرات القادمة سنناقش الطرق التصميمية المعتمدة على دارات تقديم وتأخير الصفحة.

**4-10 تصميم دارة تقديم الصفحة بالاعتماد على منحنيات بود:**

**(Phase-Lead design using the Bode diagram)**

في الواقع يُفضل استخدام منحنيات بود في تصميم دارة تقديم الصفحة على باقي منحنيات الاستجابة الترددية, حيث تضاف الاستجابة الترددية لدارة التعويض إلى الاستجابة الترددية للنظام قبل التعويض. إن السبب في ذلك يعود إلى أن تابع تحويل الحلقة للنظام المبين بالشكل (10-1 -أ) هو: $L(j\omega) = G(j\omega)G_c(j\omega)H(j\omega)$, وبالتالي نرسم أولاً منحنيات بود للتابع $H(j\omega)G(j\omega)$, ومن ثم نتفحص هذه المنحنيات لتحديد الأماكن المناسبة لـ $p$ و $z$ للتابع $G_c(j\omega)$ بحيث يعاد تشكيل الاستجابة الترددية للنظام. يُرسم منحني بود للنظام قبل التعويض $G(j\omega)H(j\omega)$, بحيث تحقق القيمة المطلوبة للربح خطأ حالة مستقرة مقبول. في الخطوة التالية سنتفحص هامش الصفحة والقيمة العظمى للاستجابة الترددية $M_{p\omega}$ وذلك لنتحقق فيما إذا كانت المتطلبات التصميمية محققة. إذا كان المتطلب المتعلق بهامش الصفحة غير محقق (هامش الصفحة غير كافي) يمكن إضافة تقديم صفحة عن طريق توضيع منحني تقديم الطور للتابع $G_c(s)$ في المكان المناسب. للحصول على تقديم صفحة أعظمي يتم توضيع $\omega_m$ لدارة تقديم الصفحة عند التردد الذي يجتاز فيه منحني الكسب خط 0 ديسيبل (راجع تعريف هامش الصفحة). إن قيمة تقديم الصفحة المضافة تسمح لنا بحساب قيمة $\alpha$ وذلك بالاعتماد على المعادلة (10-11) أو الشكل (10-5). يتم حساب صفر المعوض $z = 1/(\alpha\tau)$ بالاعتماد على حقيقة أن تقديم الصفحة الأعظمي يحدث عند التردد $\omega_m = \sqrt{zp}$, الواقع في منتصف المسافة بين تردد القطب وتردد الصفر. بما أن ربح المطال الكلي للدارة هو $20\,log\alpha$ فإننا نتوقع ربح مطال مقداره $10\,log\alpha$ وذلك عند التردد $\omega_m$.

مما سبق يمكننا تلخيص خطوات حساب دارة التعويض (تقديم الصفحة) بما يلي:

1- تقدير قيمة هامش الصفحة للنظام قبل إدخال دارة التعويض بحيث تكون قيمة ثوابت الخطأ مقبولة (أي تحقق المتطلبات التصميمية).

2- تحديد قيمة تقديم الصفحة الواجب إضافتها $\emptyset_m$ بحيث يتحقق هامش الصفحة المطلوب.

3- حساب قيمة $\alpha$ بالاعتماد على المعادلة (10-11).

4- حساب المقدار $10\,log\alpha$, وتحديد التردد وليكن $\omega$, والذي يكون عنده قيمة ربح النظام قبل التعويض مساوية لـ $10\,log\alpha-$ ديسيبل. بما أن دارة التعويض تقدم ربح مقداره $10\,log\alpha$ عند التردد $\omega_m$, يتم مطابقة $\omega = \omega_m$ بحيث أن قيمة الربح عند هذا التردد يساوي إلى 0 ديسيبل.

5- حساب القطب $p = \omega_m\sqrt{\alpha}$ والصفر $z = p/\alpha$.

6- رسم الاستجابة الترددية للنظام بعد التعويض, والتحقق من قيمة هامش الصفحة, وإعادة بعض الخطوات إذا اقتضت الحاجة. أخيراً وحتى يكون التصميم مقبولاً, يجب رفع قيمة ربح المكبر (Amplifier) لكي نأخذ بعين الاعتبار مقدار التخفيض في قيمة الربح الذي أدخله المعوّض والمقدّر بـ $1/\alpha$.

**مثال 10-1: تصميم معوّض تقديم صفحة لنظام من النوع الثاني:**

**(A Lead Compensator design for type – two – system)**

ليكن لدينا نظام التحكم ذو التغذية الخلفية وحيد الحلقة والمبين بالشكل (10-1 – أ) حيث:

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2},\ H(s) = 1 \dots\dots\dots (15-10)$$

إن النظام قبل إدخال المعوّض هو نظام من النوع الثاني, وبالتالي فإن أخطاء الحالة المستقرة, والناتجة عن تطبيق إشارات دخل صاعدة و خطوية ذات قيم مقبولة. من جهة أخرى, إن الاستجابة الزمنية الخطوية للنظام قبل التعويض تحوي اهتزازات غير متخامدة وذلك لأن:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{K_1+s^2} \dots\dots\dots (16-10)$$

بعد إضافة دارة تعويض, يصبح تابع تحويل الحلقة للنظام $L(s) = G(s)G_c(s)$. إن المتطلبات التصميمية لهذا النظام هي:

- زمن الاستقرار: $T_s \leq 4s$.
- معامل تخامد: $\zeta \geq 0.45$.

إن المتطلب المتعلق بزمن الاستقرار يقضي بأن:

$$T_s = 4/\zeta\omega_n = 4$$

ومنه: $$\omega_n = 1/\zeta = 1/0.45 = 2.22$$

إن أبسط طريقة للتحقق من قيمة $\omega_n$ لاستجابة ترددية هو ربط $\omega_n$ بعرض المجال الترددي لهذه الاستجابة $\omega_B$. من الشكل (8-36), ومن أجل $\zeta = 0.45$ نجد أن $\omega_B = 1.33\omega_n$. إذاً نحتاج أن يكون عرض المجال الترددي لنظام الحلقة المغلقة المدروسة مساوياً لـ $\omega_B = 1.33(2.22) = 3$. يمكننا التحقق من عرض المجال الترددي للنظام بعد إضافة التعويض باستخدام مخطط نيكولس.

من أجل النظام المغلق قبل إدخال التعويض نجد أن $\omega_B = 1.33\omega_n$ و $\omega_n = \sqrt{K}$, وبالتالي فإن ربح الحلقة المساوي لـ $K = \omega_n^2 = 5$ يُعَدّ كافياً. عند رسم منحني بود لنعتبر أن $K = 10$, وذلك لأخذ بعين الاعتبار هامش إضافي لزمن الاستقرار. لنرسم الآن منحني بود للنظام قبل التعويض, وذلك بالاعتماد على المعادلة:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = \frac{10}{(j\omega)^2}$$

إن منحني بود لهذا النظام مبين بالشكل (9-10). بالاعتماد على المعادلة (9-57), نجد أن هامش صفحة النظام يجب أن يساوي تقريباً:

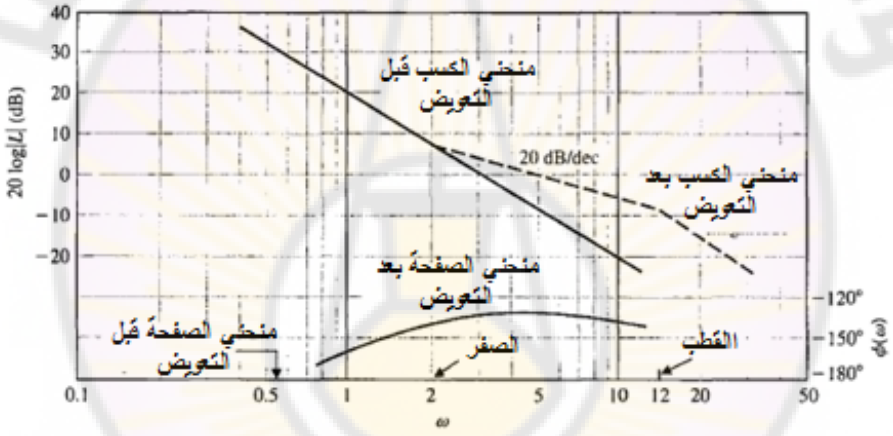
$$\emptyset_{PM} = \frac{\zeta}{0.01} = \frac{0.45}{0.01} = 45° \dots \dots (17-10)$$

إن هامش الصفحة للنظام قبل التعويض يساوي إلى 0°, وذلك لأن العنصر التكاملي المضاعف يُدخل تأخير صفحة ثابت مقداره 180°. بالتالي يجب أن نضيف تقديم صفحة مقداره 45° وذلك عند تردد اجتياز خط 0 ديسيبل للنظام بعد التعويض. لنحسب الآن قيمة α فنجد:

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = sin\emptyset_m = sin45° \dots \dots \dots (18-10)$$

ومنه: $\alpha = 5.8$. فيما يلي سنعتبر أن $\alpha = 6$, وذلك لأخذ بعين الاعتبار هامش أمان.

لنحسب الآن قيمة المقدار $10\log\alpha$ فنجد أنه يساوي إلى 7.78 ديسيبل. إذاً تضيف دارة التقديم ربح إضافي مقداره 7.78 ديسيبل عند التردد $\omega_m$, بالتالي فإن تردد الاجتياز لخط الـ 0 ديسيبل بعد إضافة المعوض هو التردد المقابل لمطال مقداره 7.78 ديسيبل قبل التعويض. في هذا المثال نجد أن هذا التردد يساوي $\omega = 4.95$. بالتالي فإن زاوية تقديم الصفحة الأعظمي التي يقدمها المعوّض تقابل التردد $\omega = \omega_m = 4.95$ وذلك كما هو مبين بالشكل (9-10). بالرجوع إلى الخطوة 5 نجد أن قطب المعوّض $p = \omega_m\sqrt{\alpha} =$ 12.0, أما صفر المعوّض فيساوي إلى $z = p/\alpha = 2.0$.




**الشكل (10-9): منحنيات بود للنظام المعالج بالمثال (10-1).**

يمكن حساب عرض المجال الترددي للنظام بعد التعويض من منحنيات نيكولس. من الشكل (9-26) نجد أن الخط المقابل لكسب مقداره $-3\,dB$ للحلقة المغلقة يقابل كسب للحلقة المفتوحة $G(j\omega)$ مقداره $-6\,dB$, وانزياح صفحة للحلقة المفتوحة مقداره $-140°$. إن عرض المجال الترددي للحلقة المفتوحة هو التردد المقابل لكسب مقداره $20\,log|G| = -6\,dB$. بالتالي فإن عرض المجال الترددي للنظام قبل التعويض يساوي إلى $\omega_B = 4.4$, بينما عرض المجال الترددي بعد التعويض يساوي $\omega_B = 8.4$. إذاً في هذا المثال يقوم المعوّض على مضاعفة عرض المجال الترددي, وبالتالي فإن الشرط المتعلق بعرض المجال الترددي هو $\omega_B > 3$ محقق.

مما سبق نجد أن التعويض في النظام قد تحقق وكذلك المتطلبات التصميمية. يعطى تابع تحويل الحلقة بعد التعويض بالعلاقة:

$$L(j\omega) = G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{10[j\omega/2.0+1]}{(j\omega)^2[j\omega/12.0+1]} \dots\dots (19-10)$$

بعد تعويض قيمة $z, p, \alpha$ في العلاقة (10-8) نجد أن $G_c(s)$ يعطى بالعلاقة:

$$G_c(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{\alpha(1+\tau s)} = \frac{1}{6}.\frac{1+s/2.0}{1+s/12.0} \dots\dots (20-10)$$

بما أن إضافة المعوّض نتج عنه تخفيض في الربح الساكن مقداره 1/6, بالتالي يجب أن يعمل المكبر في حلقة التحكم على رفع الربح الساكن بمقدار 6 أضعاف بحيث يبقى الربح الساكن للنظام مساوياً لـ 10, كما فرضت علينا المعادلة (10-19). عند إضافة منحني بود لدارة التعويض إلى منحني بود للنظام قبل التعويض على النحو المبين بالشكل (10-9), فإننا نفترض أنه بإمكاننا رفع ربح المكبر لمواجهة تخفيض الربح الناتج عن المعوّض والمقدّر بـ $1/\alpha$. يمكن قراءة قيم القطب والصفر للمعوض من الشكل (10-9), وذلك بالاعتماد على العلاقة $p = \alpha z$.

مما سبق نجد أن تابع تحويل الحلقة للنظام (تذكر أن $H(s) = 1$) يعطى بالعلاقة:

$$L(s) = \frac{10(1+s/2.0)}{s^2(1+s/12.0)} = \frac{60(s+2.0)}{s^2(s+12.0)}$$

أما تابع تحويل الحلقة المغلقة فيعطى بالعلاقة:

$$T(s) = \frac{60(s+2)}{s^3+12s^2+60s+120} \approx \frac{60(s+2)}{(s^2+6s+20)(s+6)}$$

إن قطب النظام الثالث عند $s = -6$ وصفره عند $s = -2$ يؤثران على الاستجابة العابرة للنظام. برسم هذه الاستجابة نجد أن زمن استقرار النظام يساوي 1.4 ثانية أما قيمة التجاوز النسبي فيساوي إلى 34%. ■

**مثال 10-2: تصميم معوّض تقديم الصفحة لنظام من الدرجة الثانية:**

**(A Lead Compensator design for second order system)**

ليكن لدينا النظام المغلق ذو التغذية الخلفية الواحدية المبين بالشكل (10-1- أ), حيث يعطى تابع تحويل الحلقة لهذا النظام بالعلاقة:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+2)} \dots\dots (21-10)$$

حيث $L(s) = G(s)G_c(s)$ و $H(s) = 1$.

نريد أن يبدي النظام خطأ حالة مستقرة لإشارة دخل صاعدة مساوياً لـ 5% من سرعة الإشارة الصاعدة. بالتالي هذا يقتضي:

$$K_v = \frac{A}{e_{ss}} = \frac{A}{0.05A} = 20 \dots \dots \dots (22-10)$$

من جهة أخرى نريد أن يمتلك النظام هامش صفحة مساوياً لـ $45°$ على الأقل. إن الخطوة الأولى هي رسم منحني بود لتابع تحويل النظام قبل التعويض:

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(0.5j\omega+1)} = \frac{20}{j\omega(0.j\omega+1)} \dots \dots (23-10)$$

يبين الشكل (10-10- أ) منحني بود لهذا النظام قبل التعويض. إن التردد, والذي من أجله يجتاز منحني الكسب بالديسيبل خط الـ 0 ديسيبل هو $6.2\,rad/sec$, أما هامش الصفحة عند هذا التردد فيتم حسابه من معادلة الصفحة للتابع $G(j\omega)$ والمساوية لـ:

$$\angle G(\mathrm{j}\omega) = \emptyset(\omega) - 90° - tan^{-1}(0.5\omega) \dots \dots \dots (24-10)$$

إن قيمة صفحة النظام عند تردد الاجتياز $\omega = \omega_c = 6.2\,rad/s$ تساوي:

$$\emptyset(\omega) = -162° \dots \dots . (25-10)$$

بالتالي فإن هامش الصفحة يساوي $18°$. إن تقدير هامش الصفحة باستخدام المعادلة (10-24) يعتبر أسهل من رسم منحني بود للصفحة والمبين بالشكل (10-10- أ).

مما سبق نجد أننا بحاجة لإضافة دارة تقديم صفحة ترفع هامش الصفحة إلى $45°$ وذلك عند تردد الاجتياز الجديد. بما أن تردد الاجتياز للنظام بعد التعويض أكبر من تردد الاجتياز للنظام قبل التعويض, بالتالي فإن تأخير الصفحة للنظام قبل التعويض أكبر من تأخير الصفحة للنظام بعد التعويض, وبالتالي لهذا السبب سنعمل أن يقوم المعوّض بتقديم صفحة مقداره $45° - 18° = 27°$, بالإضافة إلى زيادة بسيطة مقدارها 10% وذلك لتلافي التأخير بالصفحة للنظام بعد التعويض, أي يتوجب علينا تصميم دارة تقديم صفحة ذات تقديم صفحة أعظمي مقداره : $27° + 3° = 30°$. لنحسب $\alpha$ لهذا المعوّض:

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = \sin 30° = 0.5 \Rightarrow \alpha = 3 \dots \dots \dots (26-10)$$

يحدث تقديم الصفحة الأعظمي عند التردد $\omega_m$, لذلك سنعمل على أن يتطابق هذا التردد مع تردد الاجتياز الجديد بعد التعويض. إن كسب دارة التعويض عند التردد $\omega_m$ يساوي

$10\log\alpha = 10\log 3 = 4.8\,dB$. في التابع $G(j\omega)$, التردد المقابل للكسب $-4.8\,dB$ هو تردد الاجتياز الجديد, ويساوي $\omega_m = \omega_c = 8.4$. لنحسب الآن صفر وقطب المعوّض فنجد: $z = \omega_m/\sqrt{\alpha} = 4.8,\ p = \alpha z = 14.4$

بالتالي يعطى تابع تحويل دارة التعويض بالعلاقة:

$$G_c(s) = \frac{1}{3}.\frac{1+s/4.8}{1+s/14.4} \dots\dots\dots (27-10)$$

يجب رفع ربح الحلقة الساكن للنظام بعد التعويض بمقدار ثلاثة أضعاف وذلك لتلافي التخفيض في ربح الحلقة الساكن الناتج عن المعوّض والمقدّر بـ 1/3.

لنحسب الآن تابع تحويل الحلقة للنظام بعد التعويض فنجد:

$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{20(s/4.8+1)}{s(0.5s+1)(s/14.4+1)} \dots\dots (28-10)$$

للتحقق من هامش الصفحة للنظام نقوم بحساب قيمة الصفحة للتابع $L(s)$ وذلك عند التردد $\omega = \omega_c = 8.4$, ومن ثم نقوم بحساب هامش الصفحة. تعطى علاقة الصفحة للتابع $L(s)$ على النحو التالي:

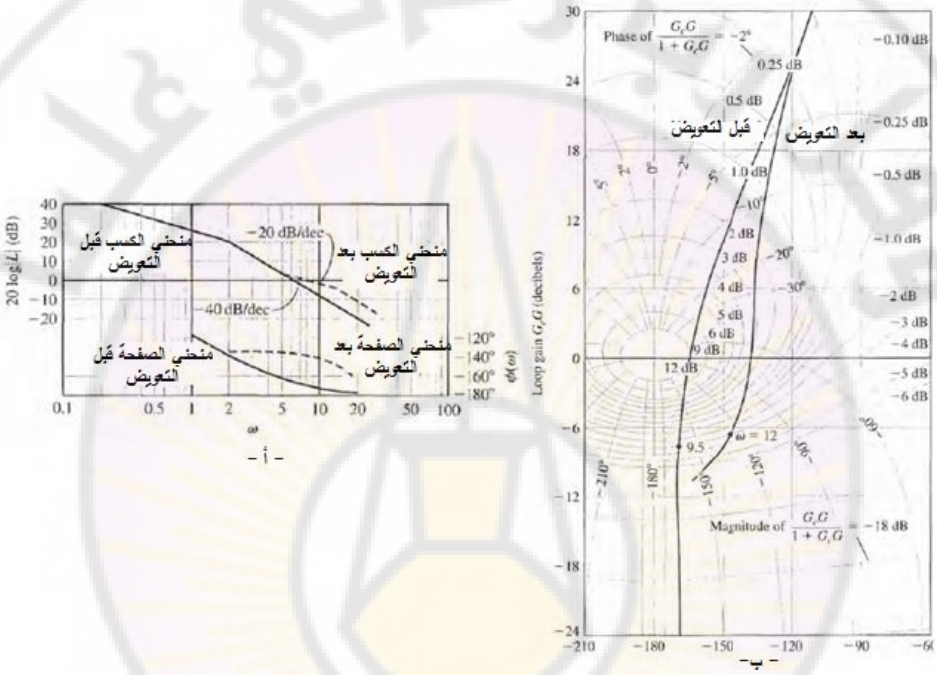
$$\emptyset(\omega_c) = -90° - tan^{-1}0.5\,\omega_c - tan^{-1}\omega_c/14.4 + tan^{-1}\omega_c/4.8$$
$$= -90° - 76.5° - 30° + 60.2° = -136.3° \dots\dots\dots (29-10)$$

بالتالي فإن هامش الصفحة للنظام بعد التعويض يساوي إلى $43.7°$. إذا أردنا أن نصل بقيمة هامش الصفحة إلى $45°$ فيجب زيادة قيمة $\alpha$ ولتكن $\alpha = 3.5$.

تبدي الاستجابة الخطوية للنظام بعد التعويض تجاوز نسبي مقداره 28%, وزمن استقرار مقداره 0.75 ثانية.

يبين الشكل (10-10 ب) منحنيات نيكولس للنظام قبل وبعد التعويض. إن إعادة تشكيل منحني الاستجابة الترددية واضح جداً على هذا الشكل. لاحظ أيضاً من هذا الشكل إن زيادة هامش الصفحة للنظام بعد التعويض ترافق بنقصان قيمة $M_{p\omega}$ من القيمة 12+ ديسيبل إلى القيمة 3.2+ ديسيبل. نلاحظ أيضاً أن عرض المجال الترددي بعد التعويض يساوي إلى $12\,rad/sec$ بينما عرض المجال الترددي قبل التعويض يساوي إلى $9.5\,rad/sec$.

بإعادة النظر بالأمثلة (10-1) و (10-2) نلاحظ أن العملية التصميمية للنظام تحقق نتائج جيدة, وذلك عندما يكون المستقيم المقارب لمطال التابع $20\,log|GG_c|$ يقطع خط الـ 0 ديسيبل بميل مقداره $-20\,dB/Decade$.




**الشكل (10-10):المنحنيات الخاصة بالمثال (10-2): أ- منحني بود ب- منحني نيكولس.**

**10-5 تصميم دارة تقديم الصفحة باستخدام المحل الهندسي للجذور:**

**(Phase-Lead network design using the root locus)**

يمكن أن تتم عملية تصميم معوض تقديم الصفحة باستخدام طريقة المحل الهندسي للجذور. يعطى تابع تحويل معوض تقديم الصفحة بالعلاقة:

$$G(s)=\frac{s+1/\alpha\tau}{s+1/\tau}=\frac{s+z}{s+p}\ldots\ldots(30-10)$$

حيث $\alpha$ ,$\tau$ محددة بواسطة عناصر دارة $RC$, وعلى النحو المبين بالعلاقة (10-7). يتم اختيار مواقع $z$, $p$ بحيث يكون المحل الهندسي للنظام بعد التعويض محقق للمتطلبات التصميمية.

تقوم الخطوات التصميمية لدارة تقديم الصفحة, بالاعتماد على المحل الهندسي للجذور على الخطوات التالية:

1- نحدّد المتطلبات التصميمية للنظام, ونترجمها إلى مواقع مطلوبة لتوضع الجذور المسيطرة في المستوي اللابلاسي.

2- نرسم المحل الهندسي للجذور قبل التعويض, وذلك بغية التحقق من أن المواقع المطلوبة للجذور المسيطرة محققة بطبيعة الحال قبل التعويض.

3- إذا كان لابدّ من استخدام المعوّض, نقوم بتوضيع صفر المعوّض مباشرةً إلى الأسفل من موقع الجذر المطلوب, أو إلى يسار أول الأقطاب الواقعة على المحور الحقيقي.

4- نحدد موقع قطب المعوّض بحيث تكون الزاوية الكلية عند الموقع المطلوب للجذر مساوية لـ °180, وبالتالي فإن هذا الموقع يقع على المحل الهندسي للجذور بعد التعويض.

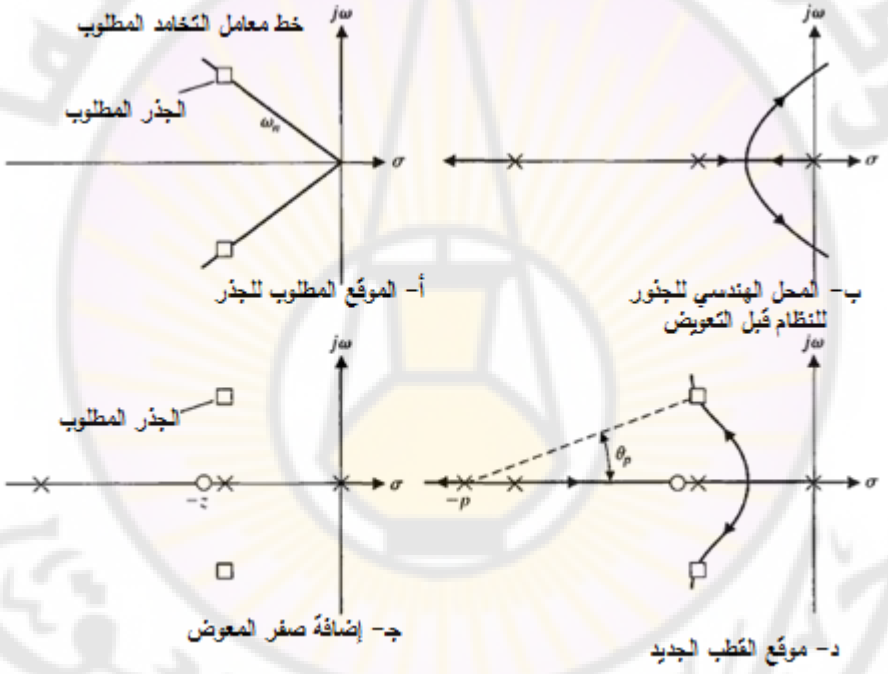
5- نحسب ربح النظام الكلي عند مواقع الجذور المطلوبة, ومن ثمّ نحسب ثابت الخطأ.

6- نعيد الخطوات إذا كانت قيمة ثابت الخطأ غير مقبولة.

إذاً وبناءاً على هذه الخطوات السابقة نقوم أولاً بتحديد مواقع الجذور المسيطرة بحيث تتحقق المتطلبات التصميمية, بمعنى آخر إيجاد قيم $\omega_n$ و $\zeta$ للجذور المسيطرة والتي تحقق المتطلبات التصميمية, وعلى النحو المبين بالشكل (10-11 – أ). يُرسم المحل الهندسي للجذور للنظام قبل التعويض على النحو الموضح بالشكل (10-11 – ب).

في الخطوات التالية نقوم بإضافة صفر المعوّض وذلك لإضافة تقديم صفحة حيث يتم توضيع هذا الصفر إلى يسار أول قطب ذو قيمة حقيقية. يجب اخذ الحذر عند إضافة صفر المعوّض لأن هذا الصفر يجب أن لا يغيّر أو يُعدل من سيطرة الجذور المرغوبة. أي لا يجب توضيع الصفر بشكل أقرب من المركز الإحداثيات من القطب المسيطر, والواقع أيضاً على المحور الحقيقي لأنه في هذه الحالة سيسيطر الصفر على استجابة

النظام. في الشكل (10-11 – جـ) نلاحظ أن الموقع المطلوب للجذر يقع مباشرةً فوق أحد أقطاب النظام حيث تم توضيع صفر المعوّض $z$ في مكان ما إلى يسار هذا القطب, وبحيث يكون أبعد من القطب من مركز الإحداثيات. بما أن موقع الجذر المطلوب ليس إلا نقطة من المحل الهندسي لجذور النظام بعد التعويض, بالتالي فإن المجموع الجبري الكلي لزوايا الأشعة عند هذه النقطة يساوي إلى $180°$, بالتالي يمكننا حساب الزاوية $\theta_P$ المبينة بالشكل (10-11 – د) بحيث يكون مجموع الزوايا مساوياً لـ $180°$.




**الشكل (10-11): التعويض في المستوي اللابلاسي باستخدام دارة تقديم الصفحة.**

بعد حساب الزاوية $\theta_P$, نقوم برسم الخط المستقيم الذي يشكل مع المحور الحقيقي الزاوية $\theta_P$, ويقطع المحل الهندسي لجذور النظام بعد التعويض عند الموقع المطلوب للجذر. إن نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المحور الحقيقي هي قطب المعوض $p$ كما هو مبين بالشكل (10-11 – د).

إن ميزة هذه الطريقة في تصميم المعوض أنها تعطي المصمم القدرة على تحديد أماكن الجذور المسيطرة وبالتالي تحديد الاستجابة العابرة للنظام, أما سيئتها فهي عدم قدرتنا على تحديد, وبشكل مباشر, لثابت الخطأ (الثابت $K_v$ على سبيل المثال) كما أتاحت لنا طريقة التصميم باستخدام منحنيات بود.

بعد الانتهاء من التصميم, نقوم بحساب ربح النظام عند الموقع المطلوب لجذر النظام, والذي يعتمد على قيم $z, p$, ومن ثم نقوم بحساب ثابت الخطأ للنظام بعد التعويض. إذا كانت قيمة ثابت الخطأ غير مقبولة, نعيد الخطوات التصميمية مع تغيير موقع الجذر المطلوب, بالإضافة إلى موقع قطب وصفر المعوّض.

سنقوم فيما يلي بإعادة دراسة المثالين (10-1) و (10-2) بهدف دراسة تصميم معوّض تقديم الصفحة بالاعتماد على طريقة المحل الهندسي للجذور.

**مثال 10-3: تصميم معوّض تقديم الصفحة باستخدام المحل الهندسي للجذور:**

**(Phase- Lead Compensator design using the root Locus)**

لنعود لدراسة النظام المعالج بالمثال (10-1) حيث يُعطى تابع تحويل الحلقة للنظام قبل التعويض بالعلاقة:

$$L(s) = \frac{K_1}{s^2} \dots \dots \dots (31-10)$$

تعطى المعادلة المميزة للنظام قبل التعويض بالعلاقة:

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K_1}{s^2} = 0 \dots \dots \dots (32-10)$$

حيث أن المحل الهندسي للنظام قبل التعويض ينطبق على المحور التخيلي $j\omega$ بالتالي نقترح تعويض هذا النظام باستخدام دارة ذات تابع التحويل التالي:

$$G_c(s) = \frac{s+z}{s+p} \dots \dots \dots (33-10)$$

حيث $|p| > |z|$. إن المتطلبات التصميمية لهذا النظام:

- زمن الاستقرار: $T_s \leq 4\,sec$.
- تجاوز نسبي في الاستجابة الخطوية للنظام $P.O. \leq 35\%$.

من المتطلبات التصميمية نجد أن $\zeta \geq 0.32$. أيضاً من المتطلب التصميمي المتعلق بزمن الاستقرار نجد:

$$T_s = 4/\zeta\omega_n = 4 \Rightarrow \zeta\omega_n = 1$$

ومنه سنختار المواقع المطلوبة للجذور المسيطرة على النحو التالي: $\widehat{r_1} = -1 \mp j2$ ,$r_1$ ,

كما هو مبين بالشكل (12-10) وذلك من أجل $\zeta = 0.45$.

**الشكل (12-10): تصميم معوض تقديم الصفحة للمثال (3-10).**

لنقوم الآن بتوضيع صفر المعوّض مباشرةً إلى الأسفل من الموقع المطلوب للجذر, أي عند النقطة $s = -z = -1$, وذلك كما هو مبين بالشكل (12-10). لنقيس الزاوية عند الموقع المطلوب للجذر فنجد أن:

$$\phi = -2(116°) + 90° = -142°$$

لنحسب الآن $\theta_P$ فنجد:

$$-180° = -142° - \theta_P \ldots\ldots\ldots (35 - 10)$$

ومنه: $\theta_P = 38°$.

لنقوم الآن برسم الخط المستقيم الذي يصنع زاوية $\theta_P$ مع المحور الحقيقي, ويقطع المحل الهندسي للجذور بعد التعويض عند الجذر المطلوب. إن هذا الخط المستقيم يقطع

المحور الحقيقي عند النقطة $s = -p = -3.6°$, كما هو مبين بالشكل (12-10), بالتالي أصبح تابع تحويل المعوّض:

$$G_c(s) = \frac{s+1}{s+3.6} \dots\dots\dots (36-10)$$

أما تابع تحويل الحلقة للنظام بعد التعويض فيعطى بالعلاقة:

$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{K_1(s+1)}{s^2(s+3.6)} \dots\dots (37-10)$$

يمكن حساب قيمة الربح $K_1$ بقياس أطوال الأشعة الواصلة بين أقطاب وأصفار النظام والموقع المطلوب للجذر, فنجد:

$$K_1 = \frac{2.23^2(3.25)}{2} = 8.1 \dots\dots\dots (38-10)$$

في النهاية يمكننا حساب ثوابت الخطأ, حيث أن وجود عنصري تكاملي في المسار الأمامي سيؤدي إلى انعدام الأخطاء في الحالة المستقرة, وذلك عند تطبيق إشارات دخل خطوية وصاعدة. يُحسب ثابت خطأ التسارع على النحو التالي:

$$K_\alpha = \frac{8.1}{3.6} = 2.25 \dots\dots\dots (39-10)$$

إن أخطاء الحالة المستقرة لهذا النظام بعد التعويض مقبولة, وبالتالي انتهت عملية التصميم. إذا أردنا تقييم دارة التعويض المصممة في المستوي اللابلاسي, والدارة المستنتجة باستخدام منحنيات بود نجد أن قيم الأقطاب والأصفار للمعوضات المستنتجة مختلفة, إلا أن أداء النظام بعد التعويض في كلا الحالتين متطابق بالتالي فإننا لا نهتم بهذا الاختلاف في قيم الأقطاب والأصفار للمعوضات. في الواقع إن السبب في هذا الاختلاف ناتج عن الخطوة التصميمية الثالثة حيث تم توضيع صفر المعوّض بشكل اختياري إلى الأسفل من الموقع المطلوب للجذر المسيطر. إذا تمّ توضيع الصفر عند النقطة $s = -2$ نجد أن القطب المستنتج في المستوي اللابلاسي يساوي تقريباً القطب المستنتج في المستوي الترددي باستخدام منحنيات بود.

تم صياغة المتطلبات التصميمية للمرحلة العابرة للنظام بدلالة التجاوز النسبي وزمن الاستقرار, حيث تُرجمة هذه المتطلبات فيما بعد إلى قيم مكافئة لـ $\zeta$ و $\omega_n$ وذلك بافتراض

أن النظام من الدرجة الثانية. إن إضافة معوّض تقديم الصفحة للنظام يُنتج لدينا نظام من الدرجة الثالثة مع صفر هو صفر المعوّض.

عند رسم الاستجابة العابرة لهذا النظام باستخدام المحاكاة الحاسوبية نجد أن التجاوز النسبي في الاستجابة الخطوية هي 46% أما زمن الاستقرار فيقدر بـ 3.8 ثانية. بمقارنة هذه القيم مع المتطلبات التصميمية نجد أن الاختلاف في قيمة التجاوز النسبي ناتج عن أن الدراسة النظرية قائمة على تقريب النظام إلى نظام من الدرجة الثانية, بينما النظام بعد التعويض نظام من الدرجة الثالثة مع صفر لا يمكن إهمال تأثيره. لإلغاء تأثير صفر النظام, يتوجب علينا إضافة مرشح قبل الحلقة المغلقة يسمى المرشح المسبق (Prefilter), لنحصل بالنتيجة على تجاوز نسبي للنظام بحدود 30%. سنناقش هذه النقطة بالتفصيل في الفقرة (10-10). ■

**مثال 10-4: تصميم معوّض تقديم الصفحة لنظام من النوع الأول:**

**(Phase- Lead Compensator design for a type – one system)**

لنعود لدراسة النظام التي تمت مناقشته في المثال (10-2) ولنعمل على تصميم معوض تقديم الصفحة باستخدام المحل الهندسي للجذور. إن تابع تحويل الحلقة للنظام:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+2)} \dots\dots\dots (40-10)$$

نريد أن تتميز استجابة النظام بالخصائص التالية: معامل تخامد الجذور المسيطرة للنظام $\zeta = 0.45$, أما ثابت خطأ السرعة للنظام فيساوي إلى 20%.

لتحقيق المتطلب التصميمي المتعلق بثابت خطأ السرعة, يجب أن يكون ربح النظام $K$ مساوياً لـ 40 أي $K = 40$. عند هذه القيمة لـ $K$ تكون جذور النظام قبل التعويض:

$$s^2 + 2s + 40 = (s + 1 + j6.25)(s + 1 - j6.25) \dots (41-10)$$

نستطيع أن نلاحظ من قيم جذور النظام أن معامل التخامد للنظام قبل التعويض يساوي إلى 0.16, وبالتالي لا بدّ من إضافة دارة تعويض.

لتحقيق زمن استقرار سريع سنختار قيمة للجزء الحقيقي للجذور المسيطرة مساوياً لـ $\zeta\omega_n = 4$, وبالتالي يصبح زمن الاستقرار $T_s = 1\,sec$. إن هذا الاختيار لقيمة الجزء الحقيقي للجذور المسيطرة يفرض أن يكون قيمة التردد الطبيعي $\omega_n$ لهذه الجذور كبيرة

$\omega_n = 9$, بالتالي فإن ثابت خطأ السرعة سيكون كبير أيضاً. يبين الشكل (10-13 – أ) موقع الجذور المسيطرة من أجل $\zeta\omega_n = 4$ و $\zeta = 0.45$ و $\omega_n = 9$.

لنوضع صفر المعوّض عند النقطة $s = -z = -4$, مباشرةً أسفل موقع الجذور المسيطرة, بالتالي فإن الزاوية عند الجذر المسيطر تساوي إلى:

$$\phi = -116° - 104° + 90° = -130° \dots\dots (42 - 10)$$

لنعمل الآن على تحديد زاوية قطب المعوّض $\theta_P$:

$$-180° = 130° - \theta_P \Rightarrow \theta_P = 50°$$

لنرسم هذه الزاوية بحيث يتقاطع الخط المستقيم مع الجذر المطلوب. إن نقطة تقاطع المستقيم الشكل لـ $\theta_P$ مع المحور الحقيقي تقع عند $s = -P = -10.6$, كما هو مبين بالشكل (10-13 – أ).

لنحسب الآن قيمة ربح النظام بعد التعويض وذلك بالاعتماد على أطوال الأشعة المشكلة بين الجذر المطلوب وأقطاب وأصفار النظام فنجد أن:

$$K = \frac{9(8.25)(10.4)}{8} = 96.5 \dots\dots (43 - 10)$$

بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة للنظام بعد التعويض:

$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{96.5(s+4)}{s(s+2)(s+10.6)} \dots (44 - 10)$$

ومنه فإن ثابت خطأ السرعة للنظام بعد التعويض:

$$K_v = lim_{s\to 0} s[G(s)G_c(s)] = \frac{96.5(4)}{(2)(10.6)} = 18.2 \dots (45 - 10)$$

إن ثابت خطأ السرعة للنظام بعد التعويض أقل من 20% وبالتالي يجب إعادة العملية التصميمية من أجل قيمة أخرى للموقع المطلوب للجذر. إذا اخترنا $\omega_n = 10$ كتمرين ذاتي للقارئ, يجب أن يجد القارئ بالنتيجة أن $K_v = 22.7$ و $p = 11.6$ و $z = 4.5$.

أخيراً لنحاول إيجاد دارة التعويض للمعوّض المعطى بالعلاقة (10-44) حيث:

$$G_c(s) = \frac{s+4}{s+10.6} = \frac{s+1/(\alpha\tau)}{s+1/\tau} \dots\dots (46 - 10)$$

إن تصميم دارة تقديم صفحة $RC$ تستثمر $G_c(s)$ معطاة بالشكل (10-4), تنتج مباشرةً من المعادلات (10-46) و (10-7):

$$G_c(s) = \frac{R_2}{R_2+R_1}\left[\frac{R_1Cs+1}{(R_1R_2/(R_1+R_2))Cs+1}\right] \dots (47 - 10)$$

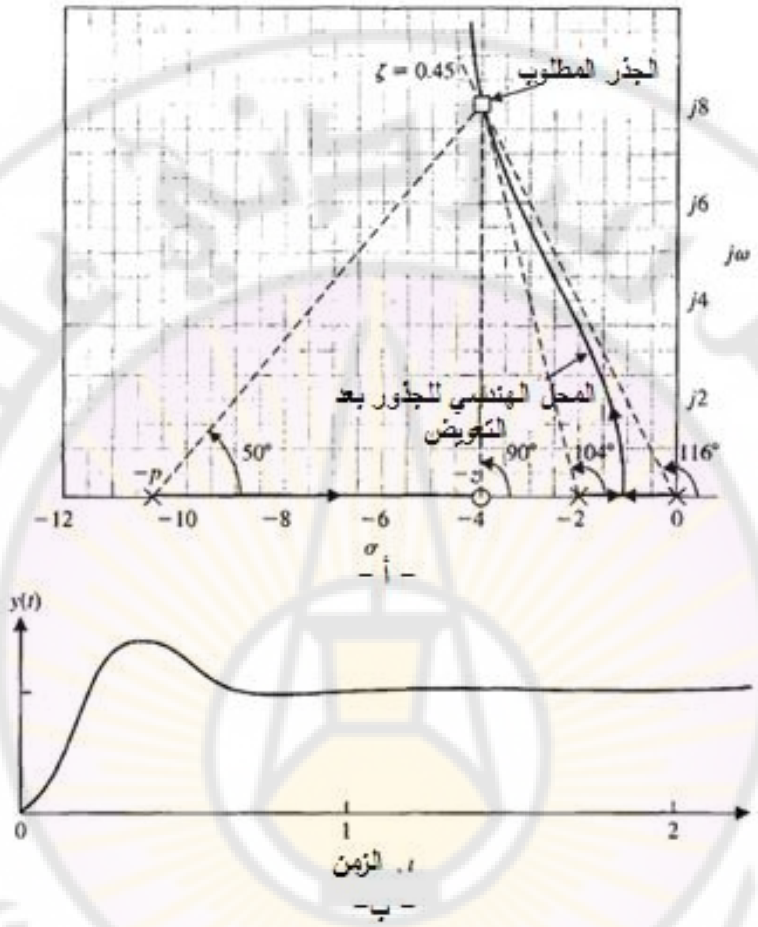
بالتالي في هذا المثال, لدينا:

$$1/R_1C = 4 \ , \ \alpha = R_1+R_2/R_2 = 10.6/4$$

بالتالي إذا اخترنا $C = 1\ \mu F$ بالتالي نجد أن قيم المقاومات التي تحقق العلاقات المبينة أعلاه هي: $R_1 = 250\ K\Omega$ و $R_2 = 152\ K\Omega$. تبين الاستجابة الخطوية للنظام بعد التعويض والمبينة بالشكل (10-13 – ب) أن التجاوز النسبي للنظام هو32% أما زمن استقراره فيساوي إلى $0.8\ sec$. ■

يُعَدّ معوّض تقديم الصفحة جيداً كونه يغير من أداء نظام التحكم حيث يعمل على إضافة زاوية تقديم صفحة وبالتالي يُحسن من هامش صفحة النظام. إن استخدام طريقة المحل الهندسي للجذور, بهدف تصميم معوض تقديم الصفحة, يُمكننا من تغيير المحل الهندسي للجذور بحيث يتم توضيع الجذور في الأماكن المطلوبة في المستوي اللابلاسي. عندما تحوي المتطلبات التصميمية شرط يتعلق بثابت الخطأ فإن تصميم المعوض بالاعتماد على منحنيات بود يعتبر أكثر ملائمة من التصميم في المستوي اللابلاسي وذلك كون ثوابت خطأ النظام في المستوي اللابلاسي تتبع خيارنا لصفر ولقطب المعوّض وبالتالي يجب علينا إعادة عملية تصميم المعوض (اختيار القطب والصفر) عدة مرات حتى نحقق الشرط المتعلق بثوابت الخطأ. من جهة أخرى يُعَدّ التصميم في المستوي اللابلاسي جيد وذلك عندما تكون المتطلبات التصميمية متعلقة بالتجاوز النسبي وزمن الاستقرار, والتي تسمح بتحديد $\zeta, \omega_n$ للجذور المسيطرة في المستوي اللابلاسي.

إن استخدام معوّض تقديم الصفحة يزيد من عرض المجال الترددي للنظام, مما يجعله أكثر عرضة للضجيج. أيضاً لا يعد معوّض تقديم الصفحة مناسباً إذا كان الهدف هو الحصول على نظم ذات حالة مستقرة دقيقة. تذكر أن الحصول على ثوابت خطأ ($K_P$ و $K_v$) كبيرة يقتضي استخدام دارات تعويض تكاملية, وهذا سيكون موضوع دراستنا في الفقرة التالية.




**الشكل (10-13): أ – تصميم دارة تقديم صفحة للمثال (10-4) في المستوي اللابلاسي**
**ب – الاستجابة الخطوية للنظام المعالج في المثال (10-4) بعد التعويض.**

**10-6 تصميم نظام باستخدام دارات تكاملية:**

**(System design using integration networks)**

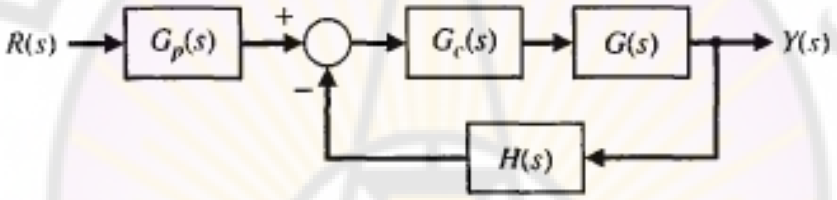
في الغالبية العظمى من نظم التحكم يكون الهدف الأولي هو الحصول على نظام ذو دقة عالية في الحالة المستقرة. الهدف الثاني هو المحافظة على أداء مقبول للنظام خلال المرحلة العابرة.

كما وجدنا في الفصول السابقة من هذا الكتاب, يمكن زيادة دقة النظام في الحالة المستقرة بزيادة ربح المكبر الموضوع في المسار الأمامي لحلقة التغذية الخلفية, ولكن

بالمقابل سيؤدي ذلك للحصول على استجابة عابرة غير مقبولة على الإطلاق, وقد نصل إلى حالة عدم استقرار للنظام. بالتالي لابدّ من استخدام دارة تعويض في المسار الأمامي لحلقة التغذية الخلفية وذلك بغية الحصول على دقة كافية خلال المرحلة المستقرة.

لندرس النظام وحيد الحلقة المبين بالشكل (10-14). تم اختيار دارة تعويض بحيث تزود النظام بثابت خطأ كبير. من أجل $G_P(s) = 1$, نجد أن خطأ الحالة المستقرة لهذا النظام:

$$lim_{t\to\infty} e(t) = lim_{s\to 0} s \frac{R(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \dots\dots (48-10)$$




**الشكل (10-14): نظام التحكم المغلق وحيد الحلقة.**

وجدنا سابقاً أن خطأ الحالة المستقرة يعتمد على عدد الأقطاب المتواجدة عند مركز الإحداثيات وذلك لتابع الحلقة $L(s) = G(s)G_c(s)H(s)$. يعد القطب المتواجد في مركز الإحداثيات عنصراً تكاملياً وبالتالي تعتمد الدقة في الحالة المستقرة على عدد العناصر التكاملية المتواجدة في التابع $L(s)$. إذا كانت دقة النظام غير كافية خلال المرحلة المستقرة فلا بدّ من إضافة دارة تكاملية ذات تابع تحويل $G_c(s)$ وذلك بهدف تعويض النقص (نقص العناصر التكاملية) في تابع تحويل الحلقة $H(s)G(s)$.

إن أحد أشكال المتحكمات الشائعة الاستخدام هي المتحكمات التناسبية التكاملية PI, ذات تابع التحويل:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \dots\dots\dots (49-10)$$

لندرس على سبيل المثال نظام التحكم بدرجة الحرارة حيث في هذا النظام:

$$G(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)},\ H(s) = 1$$

يمثل $G(s)$ تابع تحويل عملية التبادل الحراري [22].

لنحسب خطأ الحالة المستقرة للنظام قبل إضافة المعوّض, وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية ذات مطال $A$, (أي $R(s) = A/s$):

$$lim_{t\to\infty} e(t) = \lim\ s\frac{A/s}{1+G(s)} = \frac{A}{1+K_1} \dots\dots (50-10)$$

حتى تكون قيمة خطأ الحالة المستقرة $e(t)$ صغيرة, يجب أن تكون قيمة الربح $K_1$ كبيرة جداً, هذا ينعكس بدوره سلبياً على السلوك العابر للنظام. الحل يكون بإضافة عنصر تكاملي ذو تابع تحويل $G_c(s)$, وعلى النحو المبين بالشكل (10-14). لنعيد صياغة تابع تحويل المعوّض التناسبي التكاملي ليصبح على النحو التالي:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} \dots\dots (51-10)$$

يمكن الحصول على هذا المعوّض باستخدام مكامل ومكبر عمليات ذو ربح $K_P$, ومن ثم نقوم بجمع خرجيهما. لنقوم الآن بإيضاح تأثير المعوض التناسبي التكاملي على خطأ الحالة المستقرة للاستجابة الخطوية:

$$lim_{t\to 0} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{A/s}{1+G(s)G_c(s)} = lim_{s\to 0}\frac{A}{1+\frac{K_P s+K_I}{s}\cdot\frac{K_1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}} =$$

$$0 \dots\dots (52-10)$$

من هذه العلاقة يتبين لنا أن المعوض التناسبي التكاملي يقضي على خطأ الحالة المستقرة للاستجابة الخطوية. بفرض أن لدينا متطلبات تصميمية أخرى متعلقة بالأداء العابر ويتوجب على النظام المدروس أن يحققها, في هذه الحالة, يجب ضبط الثوابت $K_I$ , $K_P$ , $K_1$ بالاعتماد على المحل الهندسي للجذور الذي يرسم عند تغير الربح $K_P$ $K_I$, وبعد توضيع صفر النظام عند النقطة $s = -K_I/K_P$.

لشرح تصميم هذا النوع من المعوضات التكاملية, سندرس نظام التحكم بدرجة الحرارة بشيء من التفصيل.

**مثال 10-5: نظام التحكم بدرجة الحرارة (Temperature Control System):**

يعطى تابع تحويل الحلقة لنظام التحكم بدرجة الحرارة ذو التغذية الخلفية الواحدية, وذلك قبل إضافة المعوّض, بالعلاقة التالية:

$$L(s) = G(s) = \frac{K_1}{(2s+1)(0.5s+1)} = \frac{K_1}{(s+2)(s+0.5)} \dots\dots (53-10)$$

مع توافر إمكانية ضبط $K_1$.

للحصول على قيمة معدومة لخطأ الحالة المستقرة في الاستجابة الخطوية للنظام, سنستخدم دارة تعويض تناسبية تكاملية, ذات تابع تحويل:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \frac{s+K_I/K_P}{s} \dots\dots (54-10)$$

إن المتطلب التصميمي الثاني لهذا النظام هو الحصول على تجاوز نسبي في الاستجابة الخطوية أقل أو يساوي الـ 10%, بالتالي يجب توضيع الجذور العقدية المسيطرة للنظام عند (أو أسفل) خط $\zeta = 0.6$, على النحو المبين بالشكل (10-15). سنقوم بضبط صفر المعوّض $G_c$ بحيث يقع الجزء السالب من الجذور العقدية المسيطرة عند $\zeta\omega_n = 0.75$, وبالتالي سيكون زمن استقرار النظام $T_s = 4/\zeta\omega_n = 16/3\ sec$. الآن وكما شرحنا في الفقرة السابقة (10-4) سنقوم باختيار موقع الصفر $z = -K_I/K_P$ بحيث يكون المجموع الكلي للزوايا عند الجذر المطلوب مساوياً لـ $-180°$. إن مجموع الزوايا عند الجذر المطلوب يساوي إلى:

$$-180° = -127° - 104° - 38° + \theta_z \Rightarrow \theta_z = 89°$$

حيث $\theta_z$ هي زاوية الصفر المراد تحديده, ومنه نجد أن موقع الصفر هو $z = -0.75$.

بالنهاية سنقوم بتحديد الربح عند الجذر المطلوب, وذلك بالاعتماد على أطوال الأشعة من الأقطاب والأصفار إلى الجذر المطلوب حيث نجد أن:

$$K = K_P K_I = \frac{1.25(1.03)1.6}{1.0} = 2.08$$

يبين الشكل (10-15) المحل الهندسي للجذور بعد التعويض, كما يبين أيضاً موقع صفر المعوّض. لاحظ أنه تم توضيع الصفر $z = -K_I/K_P$ إلى يسار القطب $s = -0.5$, وذلك لتأكيد سيطرة الجذور العقدية على الاستجابة العابرة. يمكن تحديد موقع القطب الثالث للنظام بعد التعويض عند $s = -1.0$ , وبالتالي فإن هذا القطب ذو القيمة الحقيقية يساوي إلى 4/3 أمثال الجزء الحقيقي للجذور العقدية المسيطرة, وذلك كما هو مبين بالشكل (10-15).

على الرغم من أن الجذور العقدية تسيطر على استجابة النظام, إلا أن معامل التخامد للنظام أقل من $\zeta = 0.60$, وذلك بسبب القطب الثالث ذو القيمة الحقيقية والصفر.

مما سبق نجد أن تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام المبين بالشكل (10-14):

$$T(s)=\frac{G_P(s)G_c(s)G(s)}{1+G(s)G_c(s)}=\frac{2.08(s+0.75)G_P(s)}{(s+1)(s+r_1)(s+\widehat{r_1})} \dots\dots (55-10)$$

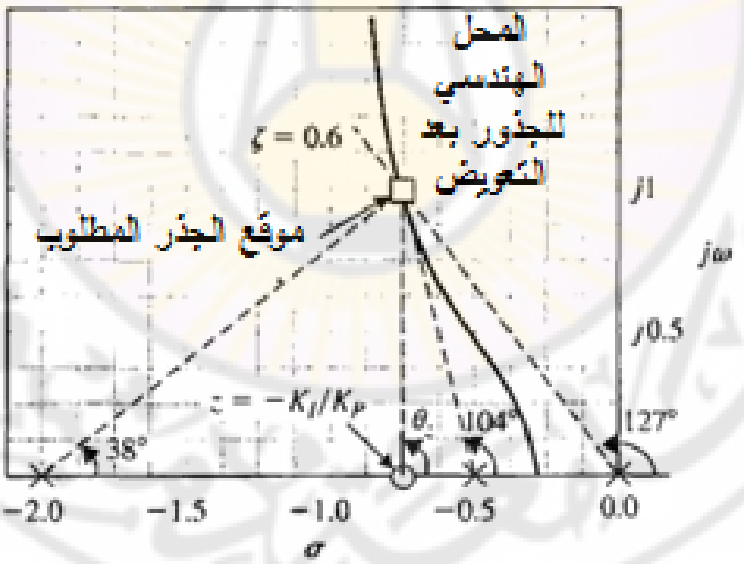
حيث: $r_1=-0.75+j$.

كما رأينا في الفصل الرابع, يعمل صفر النظام على زيادة التجاوز في الاستجابة الخطوية للنظام. إذا أردنا الوصول إلى قيمة للتجاوز النسبي مقدارها 5% فيجب إضافة مرشح قبل المعوض ذو تابع تحويل $G_P(s)$ وذلك بهدف إزالة تأثير صفر التابع $T(s)$, وبالتالي يكون تابع تحويل $G_P(s)$:

$$G_P(s)=\frac{0.75}{s+0.75} \dots\dots (56-10)$$

إن قيمة التجاوز النسبي بدون مرشح تساوي 17.6% أما بوجود المرشح فتساوي 2%.

سنناقش المرشح بشكل تفصيلي في الفقرة (10-10). ■




**الشكل (10-15):التصميم في المستوي اللابلاسي للمعوض التكاملي.**

**7-10 تصميم معوض تأخير الصفحة باستخدام المحل الهندسي للجذور:**

**(Phase-Lag compensator using the root Locus)**

إن دارة $RC$ ذات تأخير الصفحة المبينة بالشكل (10-6) هي من النوع التكاملي حيث يمكن أن تستخدم لزيادة ثابت خطأ نظام التحكم ذو التغذية الخلفية.

وجدنا في الفقرة (10-3) بأن تابع تحويل دارة $RC$ ذات تأخير الصفحة يعطى بالعلاقة:

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha}\frac{s+z}{s+p} \dots\dots (57-10)$$

وذلك كما هو مبين بالمعادلة (10-13), حيث:

$$z = 1/\tau = 1/R_2C\ ,\ \alpha = (R_1+R_2)/R_2\ ,\quad P = 1/\alpha\tau$$

يعطى خطأ الحالة المستقرة لنظام التحكم ذو التغذية الخلفية الواحدية, قبل إضافة دارة التعويض, بالعلاقة:

$$lim_{t\to\infty}e(t) = lim_{s\to 0}s\left[\frac{R(s)}{1+G(s)}\right] \dots\dots (58-10)$$

وبالتالي, وعلى سبيل المثال, يعطى ثابت خطأ السرعة لنظام من النوع الأول بالعلاقة:

$$K_v = lim_{s\to 0}s\{G(s)\} \dots\dots (59-10)$$

إذا كان $G(s)$ معطى على النحو التالي:

$$G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \dots\dots\dots (60-10)$$

بالتالي فإن ثابت خطأ السرعة لهذا النظام يساوي إلى:

$$K_v = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(p_j)} \dots\dots (61-10)$$

لنفرض الآن أننا أضفنا إلى النظام التحكمي دارة تعويض عبارة عن دارة $RC$ ذات تأخير بالصفحة ومن النوع التكاملي. لنقوم بتحديد ثابت خطأ السرعة للنظام بعد التعويض:

$$K_{v,comp} = lim_{s\to 0}s\{G(s)G_c(s)\} = lim_{s\to 0}\{G_c(s)\}K_{v,unc}$$
$$= \frac{z}{p}.\frac{1}{\alpha}K_{v,unc} = \frac{z}{p}.\frac{K}{\alpha}.\frac{\Pi z_i}{\Pi p_j} \dots\dots (62-10)$$

في هذه العلاقة $K_{v,comp}$ تشير إلى ثابت خطأ السرعة بعد إضافة دارة التعويض, أما $K_{v,unc}$ فتشير إلى ثابت خطأ السرعة قبل إضافة دارة التعويض. إن قيمة الربح عند الموقع المطلوب للجذور على المحل الهندسي للجذور بعد التعويض سيكون $K/\alpha$. إذا تم اختيار صفر وقطب المعوّض بحيث $|z| = \alpha|p| < 1$ فإن ثابت خطأ السرعة سيزداد

عند الموقع المطلوب للجذور بنسبة $z/p = \alpha$. على سبيل المثال إذا كان $z = 0.1$ و $p = 0.01$ فإن ثابت خطأ السرعة عند الموقع المطلوب للجذور سيزداد بمعامل 10 أضعاف. إذا تمّ توضيع صفر وقطب المعوّض بشكل متقارب من بعضهما البعض في المستوي اللابلاسي فإن تأثيرهما على الموقع المطلوب للجذور سيكون مهمل, بالتالي فإن توضيع قطب وصفر المعوّض بالقرب من مركز الإحداثيات في المستوي اللابلاسي سيزيد ثابت خطأ نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة بمقدار α ضعف, ولكن سيغير شكل المحل الهندسي للجذور بشكل بسيط. يملك المعامل α قيمة عظمى بحدود $\alpha = 100$, لأن قيم المقاومات والسعات المستخدمة في دارة التعويض ستصبح كبيرة جداً عند القيم الأكبر من 100 لـ $\alpha$. على سبيل المثال, من أجل $z = 0.1$ و $\alpha = 100$ سنجد من المعادلة (10-57) أن:

$$z = 0.1 = 1/R_2C \ , \ \alpha = 100 = (R_1 + R_2)/R_2.$$

إذا اخترنا القيمة التالية لسعة المكثف $C = 10\,\mu F$, بالتالي نجد القيم التالية للمقاومات $R_2 = 1M\Omega$ و $R_1 = 99\text{M}\Omega$.

إذا أردنا زيادة $\alpha$ عن القيمة 100, يتوجب علينا زيادة القيمة المطلوبة لـ $R_1$. نود التنويه أنه يمكن الوصول إلى قيمة لـ $\alpha$ تصل إلى 1000 وأكثر وذلك باستخدام المتحكمات أو المعوضات الهوائية (Pneumatic controller) والتي هي عبارة عن معوضات ذات تأخير صفحة.

فيما يلي نوجز الخطوات الواجب إتباعها لتصميم دارة تأخير صفحة.

1- نرسم المحل الهندسي للجذور قبل إضافة دارة التعويض.

2- نحدد المتطلبات التصميمية للاستجابة العابرة, ونحدد مواقع الجذور المسيطرة التي تحقق المتطلبات التصميمية, ونتحقق من أن المحل الهندسي للجذور قبل إضافة المعوّض لا يحقق المتطلبات التصميمية.

3- نحسب ربح الحلقة عند المواقع المطلوبة للجذور, ومنه نحسب ثوابت خطأ النظام.

4- نقارن ثوابت الخطأ للنظام قبل التعويض مع القيم المطلوبة لثوابت الخطأ, ومنه نحسب مقدار الزيادة الضرورية لثوابت الخطأ و لـ $\alpha$ التي تنتج من إضافة المعوّض.

5- بعد تحديد $\alpha$, نقوم بتحديد الموقع المناسب لصفر وقطب المعوّض بحيث يمر المحل الهندسي للجذور من المواقع المطلوبة للجذور. نقوم بتوضيع القطب والصفر بالقرب من مركز الإحداثيات في المستوي اللابلاسي وذلك مقارنةً مع $\omega_n$.

يمكن أن تتحقق الخطوة الخامسة وذلك إذا كانت مطالات القطب والصفر أصغر بكثير من $\omega_n$ للجذور المسيطرة. إن إحدى الطرق المستخدمة لتوضيع قطب وصفر المعوّض تقوم على الحقيقة التالية: الفرق بين زاوية القطب وزاوية الصفر المقاسة عند الموقع المطلوب للجذر أقل من $2°$.

سنقوم في المثال التالي بشرح طريقة تصميم معوّض تأخير الصفحة في المستوي اللابلاسي.

**مثال 10-6: تصميم معوّض تأخير صفحة:**

لندرس نظام التحكم ذو التغذية الخلفية الواحدية, ذو تابع تحويل الحلقة (قبل التعويض):

$$L(s) = \frac{K}{s(s+2)} \dots\dots\dots (63-10)$$

نرغب أن يكون معامل التخامد للجذور العقدية المسيطرة مساوياً لـ 0.45, كما نرغب أن يكون ثابت خطأ السرعة للنظام مساوياً لـ 20.

إن المحل الهندسي لجذور النظام قبل التعويض عبارة عن خط مستقيم عمودي على المحور الأفقي عند النقطة $s = -1$. يتقاطع المحل الهندسي للجذور مع الخط الممثل لـ $\zeta = 0.45$ عند النقطة $s = -1 \pm j2$, وذلك كما هو مبين بالشكل (10-16). لنقيس قيمة ربح الحلقة عند هذا الجذر $s = -1 \pm j2$ فنجد أن $K = (2.24)^2 = 5$. بالتالي فإن ثابت خطأ السرعة للنظام قبل التعويض: $K_v = \frac{K}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$.

إن النسبة المطلوبة لصفر إلى قطب المعوّض هي:

$$\left|\frac{z}{p}\right| = \alpha = \frac{K_{v,comp}}{K_{v,unc}} = \frac{20}{2.5} = 8 \dots\dots\dots (64-10)$$

بالنظر إلى المحل الهندسي للجذور بعد التعويض, والمبين بالشكل (10-17), نجد أنه يمكننا أن نختار $z = 0.1$ و $p = 0.1/8$.

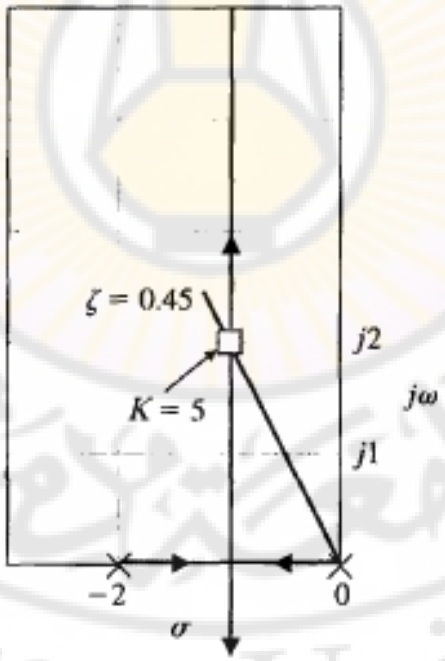
إن الفرق بين الزوايا من القطب والصفر عند الموقع المطلوب للجذر يساوي تقريباً 1°, وبالتالي تظل الجذور $s = -1 \pm j2$ هي الجذور المسيطرة. إن جزء من المحل الهندسي للجذور للنظام بعد التعويض مبين بالشكل (10-16) على شكل خط عريض, بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة للنظام بعد التعويض:

$$L(s) = G(s)G_c(s) = \frac{5(s+0.1)}{s(s+2)(s+0.0125)} \dots\dots\dots (65-10)$$

حيث:

$$K/\alpha = 5 \Rightarrow K = 40$$

لاحظ أنه قد تم تكبير الربح $K$ بمقدار $\alpha$ وذلك لأخذ بعين الاعتبار مقدار التخفيض الذي تحدثه دارة تعويض والمقدر بـ $1/\alpha$ ضعف.




**الشكل (10-16): المحل الهندسي للجذور للنظام, وذلك قبل إضافة المعوّض.**

**الشكل (10-17): المحل الهندسي للجذور بعد التعويض للمثال (10-16). يغادر المحل الهندسي للجذور المحور الحقيقي عند $\sigma = -0.95$.**

**مثال 10-7: تصميم معوّض تأخير صفحة:**

لنفرض أن لدينا نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة الواحدية, حيث أن تابع تحويل الحلقة للنظام قبل التعويض:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+10)^2} \dots\dots (66-10)$$

المطلوب أن يكون ثابت خطأ سرعة النظام مساوياً لـ 20, بينما معامل تخامد الجذور المسيطرة يساوي إلى 0.707.

لنحسب قيمة $K$ والتي تحقق $K_v = 20$:

$$K_v = 20 = \frac{K}{100} \Rightarrow K = 2000$$

باستخدام معيار راوث نجد أن جذور المعادلة المميزة تقع على المحور التخيلي عند $\mp j10$ وذلك عندما $K = 2000$. إن جذور النظام التي تحقق المتطلب التصميمي المتعلق بـ $K_v$ بعيدة جداً عن تحقيق المتطلب التصميمي المتعلق بمعامل التخامد $\zeta$, حيث من الصعوبة إحضار الجذور المميزة من المحور التخيلي إلى الخط المستقيم

الممثل بـ $\zeta = 0.707$, وذلك باستخدام دارة تقديم الصفحة, لذلك سنحاول القيام بذلك باستخدام دارة تأخير الصفحة. إن المحل الهندسي للجذور للنظام قبل إدخال المعوّض مبين بالشكل (10-18) والجذور التي تحقق $\zeta = 0.707$ هي $s = -2.9 \pm j2.9$. بقياس قيمة $K$ عند هذه الجذور نجد أن $K = 236$, وبالتالي فإن النسبة المطلوبة لصفر إلى قطب المعوض (بالاعتماد على المعادلة (10-64)):

$$\alpha = \left|\frac{z}{p}\right| = \frac{2000}{236} = 8.5$$

بالتالي سنختار $z = 0.1$ و $p = 0.1/9$ وذلك لضمان هامش من الأمان. بالنظر إلى الشكل (10-18) نجد أن الفرق بين زوايا الصفر والقطب مع الجذر المطلوب مهمل, بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة للنظام بعد التعويض:

$$G_c(s)G(s) = \frac{236(s+0.1)}{s(s+10)^2(s+0.0111)} \dots\dots (67-10)$$

حيث: $\alpha = 9,\ K/\alpha = 236$ . ■

لقد شرحنا طريقة تصميم معوّض تأخير الصفحة في المستوي اللابلاسي وذلك بالاعتماد على المحل الهندسي للجذور, حيث قام هذا المعوّض بزيادة ثابت الخطأ للنظام قبل التعويض. لننتقل الآن لتقديم طرق تصميم معوّض تأخير الصفحة بالاعتماد على منحنيات بود.

**10-8 تصميم معوّض تأخير الصفحة باستخدام منحنيات بود:**

**(Phase-Lag Compensator design using the bode diagrams)**

يمكن أن يتم تصميم دارة تعويض مع تأخير بالصفحة باستخدام منحنيات بود. إن الفائدة من استخدام منحنيات بود لتصميم المعوّض واضحة وجليّة حيث تمكننا هذه المنحنيات من إضافة الاستجابة الترددية للمعوض مع الاستجابة الترددية للنظام قبل التعويض, بهدف الحصول على نظام ذو استجابة ترددية تحقق المتطلبات التصميمية. يمكن كتابة تابع تحويل دارة تأخير الصفحة, في المستوي الترددي, على النحو التالي:

$$G_c(s) = \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\alpha\tau} \dots\dots\dots (68-10)$$

وذلك كما وجدنا في المعادلة (10-14). يبين الشكل (10-8) منحنيات بود لدارة تأخير صفحة وذلك من أجل قيمتين مختلفتين لـ $\alpha$. على هذه المنحنيات نجد أن قيمة قطب

وصفر المعوّض (دارة تأخير الصفحة) أصغر بكثير من قيمة أصغر قطب في النظام قبل التعويض (أو قبل التصحيح), وبالتالي ليست الفائدة من هذا المعوّض هو تأخير الصفحة الذي يقدمه, ولكن الفائدة الحقيقية في تخفيضه للربح المقدّر بـ $-20\,log\alpha$.

إذاً نستخدم دارة أو معوّض تأخير الصفحة لتخفيض ربح النظام, وبالتالي لتصغير تردد الاجتياز (Crossover Frequency) لخط الـ $0\,dB$ للنظام قبل التعويض. لكن بالحقيقة عند تخفيض تردد الاجتياز نجد أن هامش الصفحة قد ازداد وبالتالي يكون متطلبنا التصميمي المتعلق بهامش الصفحة قد تحقق.

**الشكل (10-18): تصميم معوّض تأخير الصفحة بالاعتماد على طريقة المحل الهندسي للجذور.**

تقوم إجرائية تصميم المعوّض ذو تأخير الصفحة, بالاعتماد على منحنيات بود, على الخطوات التالية:

1- نرسم منحنيات بود للنظام قبل التعويض, وذلك من أجل قيمة للربح تحقق المتطلب التصميمي المتعلق بثابت الخطأ.

2- نحدد هامش الصفحة للنظام قبل التعويض, فإذا كانت غير كافية نقوم بالخطوات التالية.

3- نحدد التردد والذي من أجله يكون هامش الصفحة المطلوب محقق, بمعنى آخر نحدد التردد الذي سيجتاز عنده منحني ربح المطال خط $0\,dB$ , وتكون قيمة هامش الصفحة عند هذا التردد تحقق القيمة المطلوبة. نسمي هذا التردد $\omega_c'$ (يسمح أن تقدم دارة التأخير $5°$ تأخير صفحة وذلك عند تحديد قيمة $\omega_c'$).

4- نوضّع صفر المعوض على بعد ديكاد واحد أسفل تردد الاجتياز $\omega_c'$, وهكذا نضمن أن يكون تأخير الصفحة المقدّم من دارة التأخير بالصفحة عند التردد $\omega_c'$ هو فقط $5°$.

5- نقيس مقدار تخفيض الربح الضروري عند التردد $\omega_c'$ بحيث نضمن أن يقوم منحني ربح المطال باجتياز خط الـ 0 ديسيبل عند هذا التردد.

6- نحسب قيمة $\alpha$ وذلك بالاعتماد على حقيقة أن مقدار التخفيض بربح المطال الناتج عن دارة (أو معوّض) تأخير الصفحة, عند التردد$\omega_c'$, يساوي إلى $-20\log\alpha$.

7- نحسب قطب المعوّض باستخدام العلاقات التالية:

$$\omega_P = 1/\alpha\tau = \omega_z/\alpha$$

وبالنتيجة تكون العملية التصميمية انتهت.

سنقوم في المثال التالي بشرح وتطبيق هذه الخطوات التصميمية.

**مثال 10-8: تصميم دارة (أو معوّض) تأخير صفحة:**

**(Design of Phase-Lag network or Compensator)**

لنعود لمعالجة نظام التحكم ذو التغذية الخلفية الواحدية, والذي تمت مناقشته بالمثال (10-6), ولنعمل على تصميم معوض تأخير صفحة بحيث نحصل على القيمة

المطلوبة لهامش الصفحة. يعطى تابع تحويل الحلقة للنظام قبل إضافة المعوّض بالعلاقة:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{K_v}{j\omega(0.5j\omega+1)} \dots\dots (69-10)$$

حيث $K_v = K/2$.

نريد الوصول إلى نظام التحكم ذو الحلقة المغلقة بحيث يكون هامش الصفحة مساوياً لـ $45°$ , وذلك عندما $K_v = 20$. يبين الشكل (10-19) منحنيات بود للنظام قبل التعويض (الخط الغامق). من هذا الشكل نجد أن النظام يملك هامش صفحة مقدارها $20°$ بالتالي يجب زيادة قيمة هذا الهامش. إن السماح بأن يقدم المعوض زاوية تأخير مقدارها $5°$ يدعوننا إلى البحث على المخطط على التردد المقابل للزاوية $\emptyset = 180° - (45° + 5°)$, أي $\emptyset = 130$ ليكون هذا التردد هو تردد الاجتياز الجديد. من المنحني نجد أن $\omega_c' = 1.5$. إن مقدار التخفيض الواجب إدخاله باستخدام المعوّض بحيث يكون تردد الاجتياز هو 1.5 يساوي إلى $20\,dB$. بالتالي لنحسب قيمة α التي تحقق هذا التخفيض في الربح.

$$20\,dB = 20\,log\alpha \Rightarrow \alpha = 10$$

لنقوم بتوضيع صفر المعوّض على بعد ديكاد واحد أسفل التردد $\omega_c'$, أي:

$$\omega_z = \omega_c'/10 = 0.15,$$

والقطب عند التردد $\omega_p = \omega_z/\alpha = 0.015$.

مما سبق نجد أن تابع تحويل الحلقة للنظام بعد التعويض (بعد إضافة المعوّض):

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{20(6.66j\omega+1)}{j\omega(0.5j\omega+1)(66.6j\omega+1)} \dots (70-10)$$

يبين الشكل (10-19- أ) الاستجابة الترددية للنظام بعد التعويض (الخط المقطع). من الواضح من هذا الشكل أن تأخير الصفحة أدخل تخفيض ربح المطال, الذي أثر على تردد الاجتياز وخفض من قيمته. هذا الأخير زاد, بدوره, من قيمة هامش الصفحة. من الشكل (10-19 − أ), لنتحقق من قيمة هامش الصفحة عند التردد $\omega_c' = 1.5$ لنجد أن $\emptyset_{PM} = 46.8°$ وهي قيمة تحقق المطلوب.

إذا استخدمنا مخطط نيكولس نجد أن عرض المجال الترددي للحلقة المغلقة قد انخفض من $\omega_B = 10\,rad/sec$ قبل إضافة المعوّض إلى القيمة $\omega_B = 2.5\,rad/sec$ بعد التعويض. إن هذا الانخفاض في عرض المجال الترددي يجعلنا نتوقع استجابة خطوية أبطئ للنظام بعد التعويض. يبين الشكل (10-19 – ب) الاستجابة الخطوية للنظام قبل وبعد التعويض. نلاحظ من هذه الاستجابة (بعد التعويض) أن قيمة التجاوز النسبي 25% أما زمن القمة فيساوي إلى $1.85\,sec$, بالتالي هذه القيم تحقق المتطلبات التصميمية (تجاوز نسبي أقل من 30% وزمن قمة أصغر من 2 ثانية). ■

**مثال 10-9: تصميم معوّض تأخير – صفحة:**

لنعود لمعالجة نظام التحكم ذو التغذية الخلفية الواحدية, والذي تمت مناقشته سابقاً بالمثال (10-7). يعطى تابع تحويل الحلقة للنظام قبل إضافة المعوّض بالعلاقة:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+10)^2} = \frac{K_v}{j\omega(0.1j\omega+1)^2} \dots\dots (71-10)$$

حيث: $K_v = K/100$.

المطلوب أن يكون ثابت خطا السرعة $K_v$ مساوياً إلى 20, ومعامل تخامد الجذور المسيطرة يساوي إلى 0.707. من الشكل (9-21) نجد أن القيمة المطلوبة لهامش الصفحة تساوي إلى °65. يبين الشكل (10-20) الاستجابة الترددية للنظام قبل التعويض حيث نجد أن هامش صفحة النظام قبل التعويض يساوي إلى °0. إذا سمحنا بأن يقدم معوّض تأخير الصفحة °5 بالتالي يجب علينا توضيع التردد الاجتياز عند التردد المقابل للزاوية $(-180° + (165° + 5°) = -110°)$. إن هذا التردد يساوي إلى $1.74\,rad/sec$ لذلك سنقوم بتوضيع تردد الاجتياز الجديد $\omega_c'$ عند القيمة $\omega_c' = 1.5\,rad/sec$ حيث أن قيمة مقدار تخفيض الربح الضروري لتوضيع $\omega_c = \omega_c'$ يساوي إلى $23\,dB$. لنحسب قيمة $\alpha$ التي تحقق هذا التخفيض فنجد أن:

$$23 = 20\log\alpha \Rightarrow \alpha = 14.2$$

يقع صفر المعوّض على بعد ديكاد واحد إلى الأسفل من التردد القطع الجديد, أي:

$$\omega_z = \omega_c'/10 = 0.15\ rad/sec$$

أما قطب المعوّض فيقع عند: $\omega_p = \omega_z/\alpha = 0.15/14.2$.

بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة بعد التعويض:

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{20(6.66j\omega+1)}{j\omega(0.1j\omega+1)^2(94.6j\omega+1)} \dots (72-10)$$

يبين الشكل (10-20) الاستجابة الترددية للنظام بعد التعويض. من هذا الشكل نجد أن هامش الصفحة عند التردد $\omega_c' = 1.5\, rad/sec$ يساوي $\emptyset_{PM} = 67°$, وهي القيمة التي تحقق المتطلبات التصميمية. ■

مما سبق رأينا أن دارة التعويض ذات تأخير الصفحة تستخدم لتعديل الاستجابة الترددية لنظام التحكم ذو الحلقة المغلقة , وذلك لتحقيق المتطلبات التصميمية للنظام.

بالتدقيق بالأمثلة (10-8) و (10-9) وجدنا أن المتطلبات التصميمية قد تحققت وذلك عندما اجتاز منحني بود التقريبي للنظام بعد تعويض خط 0 ديسيبل, وذلك بخط مستقيم ميله $-20\, dB/decade$. من جهة أخرى تُنقص دارة التعويض ذات التأخير بالصفحة من كسب الربح عند تردد الاجتياز الجديد بحيث يكون الشرط المتعلّق بهامش الصفحة عند هذا التردد محقق.

تقوم دارة تأخير الصفحة, وعلى العكس من دارة تقديم الصفحة, بإنقاص عرض المجال الترددي لنظام الحلقة المغلقة, وذلك من أجل المحافظة على قيم مناسبة لثوابت الخطأ.

قد يتبادر إلى الأذهان السؤال التالي: قمنا في الخطوة التصميمية الرابعة بتوضيع صفر المعوّض إلى الأسفل من التردد $\omega_c'$ بمقدار ديكاد واحد, وذلك لضمان أن المعوّض يقدم تأخير بالصفحة عند $\omega_c'$ أقل من 5°, والسؤال لماذا لا نوضع الصفر بشكل أبعد عن تردد الاجتياز $\omega_c'$ (أكثر من ديكاد واحد) ؟ يمكن الإجابة على هذا السؤال بالأخذ بالحسبان الاعتبارات المفروضة على قيم المقاومات والمكثفات في دارة التأخير (انظر المعادلة (10-12)). عند إنقاص قيم صفر وقطب دارة التأخير فإن قيم المقاومات والمكثفات تزداد بما يتناسب مع مقدار النقصان في قيم صفر وقطب المعوّض. يعطى صفر المعوّض بدلالة عناصر الدارة بالعلاقة:

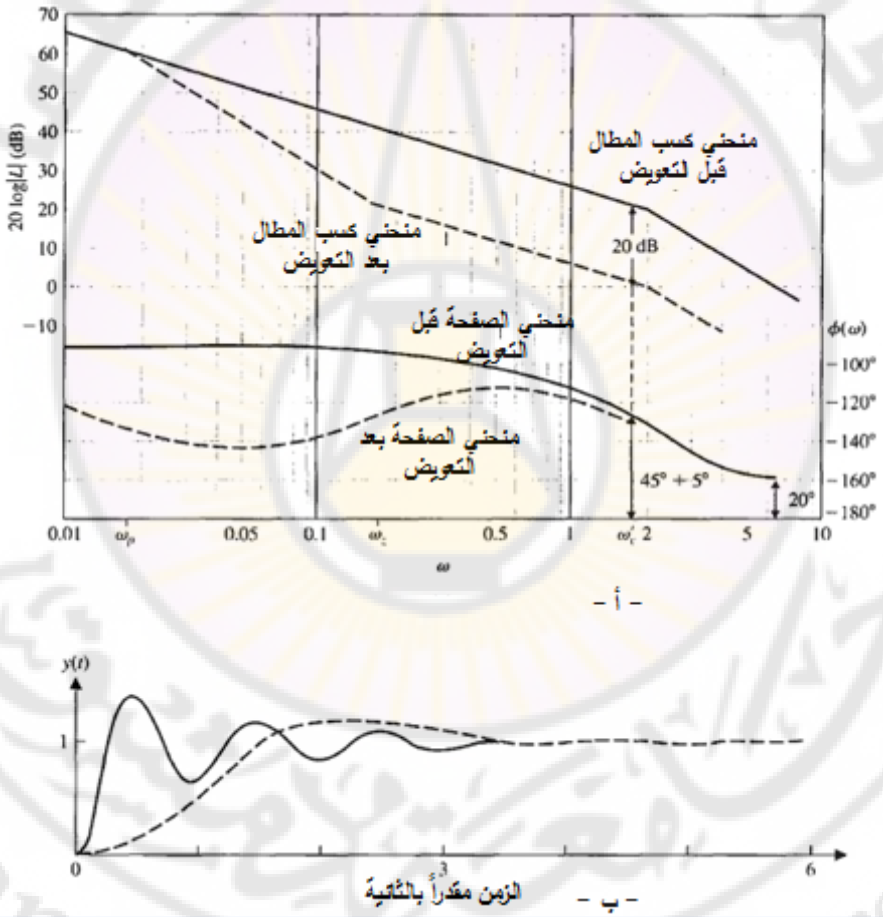
$$z = 1/R_2C, \alpha = (R_1+R_2)/R_2$$

إذا افترضنا, كما ورد في المثال (10-9), أننا يجب توضيع صفر النظام عند التردد $\omega_z = 0.15$, بالتالي في هذه الحالة فإن قيم $C, R_2$ التي تقوم بذلك هي:

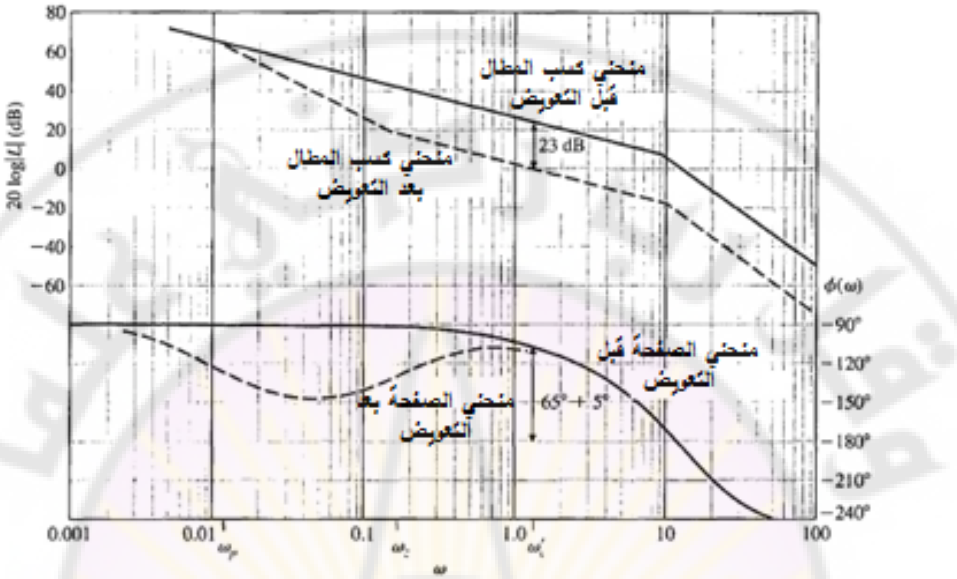
$$C = 1\mu F,\ R_2 = 6.66\,M\Omega$$

من جهة أخرى فإن قيمة $R_1$ الموافقة يجب أن تحقق العلاقة التالية: $R_1 = R_2(\alpha - 1)$.

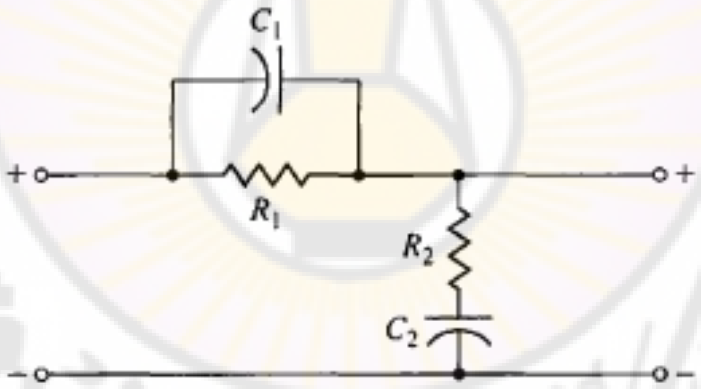
في المثال (10-9) وجدنا أن $\alpha = 14$ وبالتالي فإن قيمة $R_1$ هي $R_1 = 88\,M\Omega$. مما سبق نجد أن المصمم لن يرغب بتوضيع الصفر عند تردد أبعد عن $\omega_c'$ بأكثر من ديكاد واحد لأن ذلك يتطلب أكبر قيم لـ $C,\ R_2$ و $R_1$.




**الشكل (10-19): أ – منحنيات بود للنظام قبل وبعد التعويض ب – الاستجابة الخطوية للنظام قبل وبعد التعويض.**




**الشكل (10-20): تصميم معوّض تأخير الصفحة بالاعتماد على منحنيات بود.**




**الشكل (10-21): دارة *RC* تقديم – تأخير الصفحة.**

تغير دارة تقديم الصفحة من الاستجابة الترددية للنظام حيث يعمل على تقديم صفحة النظام وتزيد من هامش الصفحة عند تردد الاجتياز. في بعض الأحيان يرغب المصمم على الجمع بين ميزة معوض تأخير الصفحة, والمتمثلة بالتخفيض بالربح, وميزة معوض تقديم الصفحة المتمثلة بتقديم الصفحة. تسمى الدارة التي تجمع هاتين الميزتين بدارة

تقديم – تأخير الصفحة (Lead-lag network) وهي مبينة بالشكل (10-21). يعطى تابع تحويل هذه الدارة بالعلاقة:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1} \dots (73-10)$$

بفرض أن:

$$\alpha\tau_1 = R_1C_1,\ \beta\tau_2 = R_2C_2,\ \tau_1+\tau_2 = R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2,$$
$$\tau_1\tau_2 = R_1R_2C_1C_2$$

وبالتالي: $\alpha\beta = 1$, والمعادلة (10-73) تصبح على النحو التالي:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(\alpha\tau_1s+1)(\beta\tau_2s+1)}{(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)} \dots (74-10)$$

حيث: $\beta < 1$, $\alpha > 1$. إن المعاملات الأولى في بسط ومقام تابع التحويل المعطى بالعلاقة (10-74), والحاوية على الثابت الزمني $\tau_1$, تمثل جزء الدارة الذي يعمل على تقديم الصفحة, أما الجزء الثاني والحاوي على الثابت الزمني $\tau_2$, فيمثّل جزء الدارة التي تعمل على تأخير الصفحة. يتم ضبط البارامتر $\beta$ بحيث تزودنا الدارة بتخفيض الربح اللازم وذلك عند الترددات المنخفضة أما البارامتر $\alpha$ فيعمل على تزويدنا بتقديم الصفحة الإضافي عند تردد الاجتياز الجديد.

يوجد طريقة تصميم أخرى على توضيع قطب وصفر الجزء العامل على تزويدنا بتقديم الصفحة بحيث تقع الجذور المسيطرة في المواقع المطلوبة, كما سيتم استخدام الجزء العامل على تأخير الصفحة لرفع ثابت الخطأ عند المواقع المطلوبة للجذور, وذلك باختيار قيمة مناسبة لـ $1/\beta$. يتم تصميم دارة تقديم – تأخير الصفحة بواسطة الخطوات التي تمت مناقشتها في الفقرات (10-5) و (10-7). يمكن العودة للمراجع [3, 16, 40] وذلك لمزيد من التفاصيل حول استخدام وتصميم معوض تقديم –تأخير الصفحة.

**10-9 تصميم المعوّضات بالاعتماد على منحنيات بود وباستخدام الطرق التحليلية:**
**(Compensator design on Bode diagram using analytical methods)**

يتم عادةً استخدام الحواسيب لمساعدة المصمم على اختيار القيم المناسبة لبارامترات المعوّض, وهذا يقتضي تطوير برنامج حاسوبي بدل الطرق المعتمدة على التجربة والخطأ, والتي تم استعراضها في الفقرات السابقة. يوجد العديد من البرامج الحاسوبية

والتي تم تطويرها [16, 35] وذلك بهدف اختيار القيم المناسبة لبارامترات المعوّضات, وبحيث يحقق التصميم في النهاية المتطلبات التصميمية المتعلقة بالاستجابة الترددية, مثل, هامش الصفحة, على سبيل المثال.

تمّ في المراجع [16, 14] تقديم طريقة تحليلية لاختيار بارامترات معوض تقديم أو تأخير الصفحة وذلك بالاعتماد على منحنيات بود.

من أجل معوّض ذو مرحلة وحيدة, يعطى تابع التحويل بالعلاقة:

$$G_c(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \dots\dots\dots (75-10)$$

حيث يتم اختيار $\alpha < 1$ من أجل معوض تأخير الصفحة, و $\alpha > 1$ من أجل معوض تقديم الصفحة. تعطى الصفحة التي يساهم بها المعوّض عند تردد الاجتياز المطلوب $\omega_c$ (انظر المعادلة (9-10)) بالعلاقة التالية:

$$P = tan\emptyset = \frac{\alpha\omega_c\tau - \omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2\alpha} \dots\dots (76-10)$$

أما مطال الاستجابة الترددية للمعوض $M$ بالديسيبل عند تردد الاجتياز , فيعطى بالعلاقة:

$$C = 10^{M/10} = \frac{1+(\omega_c\alpha\tau)^2}{1+(\omega_c\tau)^2} \dots\dots (77-10)$$

لنعمل الآن على حل المعادلتين (76-10) و (77-10) حلاً مشتركاً, لنحصل على المعادلة التالية:

$$(P^2 - C + 1)\alpha^2 + 2P^2C\alpha + P^2C^2 + C^2 - C = 0 \dots.. (78-10)$$

من أجل المعوضات وحيدة المرحلة نجد ضرورة تحقق الشرط التالي: $C > P^2 + 1$. بحل المعادلة (78-10) نجد قيم $\alpha$, ومن ثم نستطيع إيجاد قيمة $\tau$ باستخدام العلاقة:

$$\tau = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{\frac{1-C}{C-\alpha^2}} \dots\dots (79-10)$$

سنقدم فيما يلي الخطوات اللازمة لتصميم معوض تقديم الصفحة:

1- نختار تردد الاجتياز $\omega_c$.

2- نحدد القيمة المطلوبة لهامش الصفحة, وبالتالي القيمة المطلوبة للصفحة $\emptyset$ وذلك باستخدام المعادلة (76-10).

3- نتحقق من أن $\emptyset > 0$ و $M > 0$.

4- نتحقق من أن التعويض وحيد المرحلة كافي, وذلك باختبار $C > P^2 + 1$.

5- نحدد قيمة $\alpha$ من المعادلة (10-78).

6- نحدد قيمة $\tau$ من المعادلة (10-79).

إذا أردنا أن نصمم معوّض تأخير الصفحة نعدل الخطوتين (3) و (4), أما باقي الخطوات فتبقى على حالها. تصبح الخطوات (3) و (4) بعد التعديل:

- $\emptyset < 0$ و $M < 0$.
- $C < 1/(1 + P^2)$.

**مثال 10-10: التصميم باستخدام الطريقة التحليلية:**

لنعود لمعالجة المثال المدروس بالمثال (10-1) وذلك بهدف تصميم معوض تقديم صفحة باستخدام الطريقة التحليلية. بالتمعن بمنحنيات بود للنظام قبل التعويض والمبينة بالشكل (10-9), نختار $\omega_c = 5$, كما نرغب أن يكون هامش الصفحة مساوياً لـ $45°$. يجب على المعوّض أن يعطي تقديم بالصفحة مقداره $45°$, وبالتالي:

$$P = \tan 45° = 1 \dots\dots\dots (80 - 10)$$

أما قيمة مطال استجابة المعوّض $M$ عند تردد الاجتياز يساوي $M = 8\,dB$ , وبالتالي:

$$C = 10^{8/10} = 6.31 \dots\dots (81 - 10)$$

بالاعتماد على قيم $C, P$ نحصل على المعادلة التالية:

$$-4.31\alpha^2 + 12.62\alpha + 73.32 = 0 \dots\dots (82 - 10)$$

بحلّ المعادلة (10-82) نجد أن: $\alpha = 5.84$. بحل المعادلة (10-79) نجد أن: $\tau = 0.087$, بالتالي فإن تابع تحويل المعوّض:

$$G_c(s) = \frac{1+0.515s}{1+0.087s} \dots\dots\dots (83 - 10)$$

إن قطب المعوّض يساوي إلى 11.5 أما صفره 1.94. إن هذه النتيجة تماثل تلك التي حصلنا عليها بالفقرة (10-4), وذلك بالاعتماد على الطريقة البيانية. ■

**10-10 النظم ذات المرشح المسبق (System with a Prefilter):**

في الفقرات السابقة من هذا الفصل, استخدمنا المعوضات ذات الشكل:

$$G_c(s) = \frac{s+z}{s+P}$$

هذه المعوّضات تغير من جذور المعادلة المميزة للنظام الحلقة المغلقة حيث إن تابع تحويل الحلقة المغلقة سيحوي صفر التابع $G_c(s)$. هذا الصفر سيؤثر على استجابة النظام الممثل بـ $T(s)$.

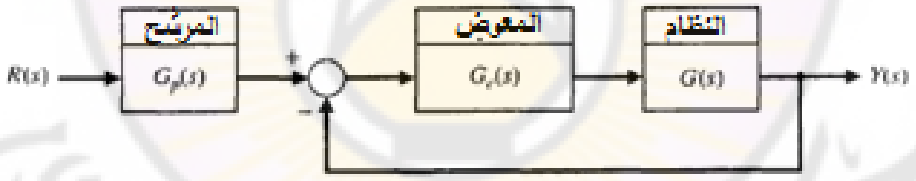
لندرس النظام المبين بالشكل (22-10) حيث أن:

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_I + K_P s}{s}$$

إن تابع تحويل الحلقة المغلقة للنظام المبين بالشكل (22-10):

$$T(s) = \frac{(K_I + K_P s)G_P(s)}{s^2 + K_P s + K_I} \ldots\ldots (84-10)$$

إن المتطلبات التصميمية الواجب تحقيقها: زمن استقرار يساوي إلى 0.5 ثانية, أما التجاوز النسبي فيساوي إلى تقريباً 4%.




**الشكل (22-10):نظام التحكم بوجود المرشح المسبق.**

لنفرض أن $\zeta = 1/\sqrt{2}$, ولنعوض في علاقة زمن الاستقرار:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \zeta\omega_n = 8 \Rightarrow \omega_n = 8\sqrt{2}$$

كما نجد أيضاً:

$$K_P = 2\zeta\omega_n = 16$$
$$K_I = {\omega_n}^2 = 128$$

بالتالي فإن تابع تحويل الحلقة المغلقة, وذلك عندما $G_P(s) = 1$ يعطى بالعلاقة:

$$T(s) = \frac{16(s+8)}{s^2 + 16s + 128}$$

يعد تأثير صفر النظام $s=-8$ على الاستجابة الزمنية للنظام مهم جداً ويجب أخذه بالحسبان. بالعودة إلى الشكل (4 -21 – أ) نجد أن قيمة التجاوز النسبي بحدود 21% علماً أن لدينا: $\zeta=1/\sqrt{2}$ و $\alpha/\zeta\omega_n=1$. تذكر أن هذا الشكل يأخذ بالحسبان تأثير وجود الصفر على الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية.

سنستخدم فيما يلي مرشحاً مسبقاً $G_P(s)$ يعمل على إلغاء تأثير الصفر للتابع مع المحافظة على ربح ساكن واحدي. يعطى تابع تحويل هذا المرشّح بالعلاقة:

$$G_P(s)=\frac{8}{s+8}$$

بالتالي أصبح تابع تحويل الحلقة المغلقة $T(s)$ بعد إضافة المرشح $G_P(s)$:

$$T(s)=\frac{128}{s^2+16s+128}$$

إن قيمة التجاوز النسبي لهذا النظام يساوي إلى 4.5%. هذه القيمة تحقق المتطلب التصميمي. بالعودة إلى الشكل (4 -21 – أ), نلاحظ أن صفر النظام عند $s=-\alpha$ ذو تأثير هام على الاستجابة الخطوية للنظام وذلك عندما $\alpha/\zeta\omega_n<5$, علماً أن $-\alpha$ هو صفر النظام و $-\zeta\omega_n$ هو الجزء الحقيقي لجذور المعادلة المميزة للتابع $T(s)$ (الجذور المسيطرة).

لنعود للمثال (10-3) والذي يناقش تصميم معوض تقديم صفحة. بفرض أن بنية الحلقة المغلقة للنظام المدروس في هذا المثال هي المبينة بالشكل (10-22), بالتالي فإن تابع تحويل هذا النظام يصبح على النحو التالي:

$$T(s)=\frac{8.1(s+1)G_P(s)}{(s+1+2j)(s+1-2j)(s+1.62)}$$

إذا كان $G_P(s)=1$, أي النظام لا يحوي مرشحاً مسبقاً, نجد أن التجاوز النسبي للاستجابة الخطوية يساوي إلى 46.6% أما زمن الاستقرار يساوي إلى 3.8 ثانية.

إذا استخدمنا المرشح المعطى بالعلاقة التالية:

$$G_P(s)=\frac{1}{s+1}$$

نجد أن التجاوز النسبي للاستجابة الخطوية يقدر بـ 6.7% أما زمن الاستقرار يساوي إلى 3.8 ثانية.

مما سبق نجد أن المرشح المسبق مفيد جداً حيث يسمح للمصمم باستخدام معوّض (الحاوي على صفر في تابع تحويله) وذلك بهدف ضبط مواقع أقطاب الحلقة المغلقة, ومن ثم يقوم المرشح بإلغاء تأثير الصفر من الاستجابة الزمنية للنظام.

بشكل عام نستخدم المرشح المسبق مع المعوضات تقديم الصفحة أو المعوضات التناسبية التكاملية, بينما لا يستخدم المرشح مع المعوضات تأخير الصفحة حيث من المتوقع أن يكون صفر هذا المعوّض ذو تأثير بسيط جداً على الاستجابة الزمنية للنظام.

للتحقق من هذه النتيجة لنعود للمثال (10-6). إن تابع تحويل الحلقة للنظام المعالج في هذا المثال:

$$G(s)G_c(s) = \frac{5(s+0.1)}{s(s+2)(s+0.0125)}$$

حيث إن المعوّض المستخدم هو معوّض تأخير الصفحة. لنحسب تابع تحويل الحلقة المغلقة لهذا النظام فنجد أن:

$$T(s) = \frac{5(s+0.1)}{(s^2+1.98s+5.1)(s+0.095)} \approx \frac{5}{s^2+1.98s+5.1}$$

إذا افترضنا أن القطب عند $s = -0.095$ والصفر عند $s = -0.1$ يلغيان تأثير بعضهما البعض, نجد أن قيمة التجاوز النسبي هي 20% أما زمن الاستقرار فيساوي إلى 4 ثانية, حيث أن البارامترات التصميمية هي $\zeta = 0.45$ و $\zeta\omega_n = 1$. إذا لم يتم اعتماد هذه الفرضية نجد أن الاستجابة الفعلية للنظام تتمتع بالخصائص التالية: تجاوز نسبي 26 % وزمن استقرار 5.8 ثانية, وذلك تحت تأثير القطب $s = -0.095$. إذاً نجد من هذا المثال أنه لا داعي لاستخدام المرشح المسبق مع النظم التي تستخدم معوضات تأخير صفحة.

**مثال 10-11: تصميم نظام من الدرجة الثالثة:**

لندرس النظام ذو البنية المبينة بالشكل (10-22) حيث:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

لنعمل على حساب $G_P(s)$ و $G_c(s)$ بحيث تتمتع الاستجابة الخطوية للنظام بما يلي:

- تجاوز نسبي أقل من 2 %.
- زمن استقرار أقل من 3 ثانية.

لتحقيق هذه الهدف سنستخدم معوض تقديم صفحة ذو تابع تحويل:

$$G_c(s) = \frac{K(s+1.2)}{s+10}$$

نختار قيمة $K$ بحيث يكون معامل التخامد الجذور العقدية المسيطرة $\zeta = 0.45$, فنجد أن هذه القيمة هي: $K = 78.7$, بالتالي نجد أن تابع تحويل النظام:

$$T(s) = \frac{78.7(s+1.2)G_P(s)}{(s+1.71+j1.71)(s+1.71-j1.71)(s+1.45)(s+11.1)} \approx \frac{7.1(s+1.2)G_P(s)}{(s^2+3.42s+5.85)(s+1.45)}$$

إذا اخترنا المرشح المسبق بحيث يكون تابع تحويله:

$$G_P(s) = \frac{p}{s+p} \dots\dots (85-10)$$

بالتالي يصبح تابع تحويل النظام:

$$T(s) = \frac{7.1p(s+1.2)}{(s^2+3.42s+5.85)(s+1.45)(s+p)}$$

يلخص الجدول (10-1) خصائص الاستجابة الزمنية للنظام بوجود المرشح المسبق. إن قيمة $p = 1.20$ تلغي تأثير الصفر, أما زمن الصعود من أجل $p = 2.40$ أصغر من زمن الصعود من أجل $p = 1.2$. إذاً يقوم المرشح المسبق بتقديم بارامتر إضافي يساعدنا على ضبط الاستجابة الزمنية للنظام بحيث نحقق المتطلبات التصميمية. ■

**الجدول (10-1): تأثير المرشح المسبق على الاستجابة الخطوية**

| التابع $G_P(s)$ | $p = 1.0$ | $p = 1.2$ | $p = 2.4$ |
|---|---|---|---|
| زمن الصعود (ثانية) | 9.05 | 2.3 | 1.6 |
| زمن الاستقرار (ثانية) | 2.90 | 3 | 3.2 |
| التجاوز النسبي (%) | 9.9 | 0 | 4.8 |

**11-10 خاتمة:**

قدمنا في هذا الفصل العديد من الطرق التصميمية لنظام التحكم ذات حلقة التغذية الخلفية. وجدنا أن ربح متحكم أو (معوّض) على التسلسل مع النظام المراد التحكم به, في المسار الأمامي لحلقة التحكم, يعمل على تغيير شكل المحل الهندسي للجذور والاستجابة الترددية للنظام المراد التحكم به.

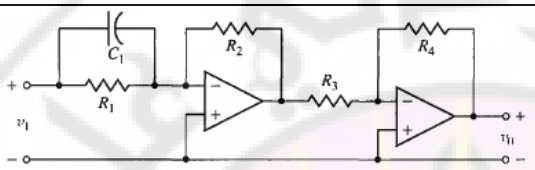
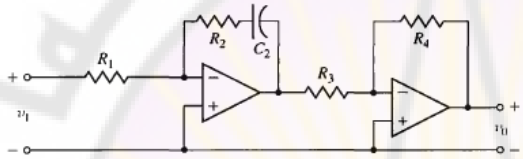
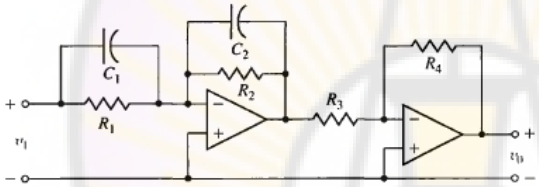
درسنا أيضاً استخدام معوضات تقديم وتأخير الصفحة, حيث تم تصميم هذه المعوضات (المتحكمات) في المستوي اللابلاسي عن طريق المحل الهندسي للجذور, وفي المستوي الترددي بواسطة منحنيات بود. لاحظنا أن معوض تقديم الصفحة يزيد من هامش صفحة النظام, وبالتالي يزيد من استقرار النظام. وجدنا أنه إذا كانت المتطلبات التصميمية تشمل ثابت خطأ النظام فإن التصميم باستخدام منحنيات بود هو الأفضل, أما إذا كانت المتطلبات التصميمية تتعلق بالتجاوز النسبي وزمن الاستقرار, ولا يوجد متطلبات تتعلق بثوابت خطأ النظام, فمن الأفضل التصميم في المستوي اللابلاسي باستخدام المحل الهندسي للجذور. إذا كانت المتطلبات التصميمية تقتضي قيماً كبيرة لثوابت الخطأ, فعندها يجب استخدام دارات أو معوضات تكاملية (تأخير صفحة). وجدنا أيضاً أن معوضات تقديم الصفحة تزيد من عرض المجال الترددي, بينما معوضات تأخير الصفحة تنقص من عرض المجال الترددي للنظام.

إن عرض المجال الترددي يعتبر هاماً جداً وخاصةً إذا كان يوجد ضجيج على دخل النظام أو داخل النظام نفسه. لاحظنا أيضاً أن المتطلبات التصميمية للنظام تتحقق وذلك إذا قطع منحني كسب المطال (المستقيم المقارب) خط الـ 0 ديسيبل, بميل مقداره $-20\ dB/Decade$.

يلخص الجدول (10-2) خصائص معوضات تقديم وتأخير الصفحة.

| الجدول (10-2): ملخص خصائص معوضات تقديم وتأخير الصفحة | | |
|---|---|---|
| | **معوّض تقديم الصفحة** | **معوّض تأخير الصفحة** |
| **الطريقة** | 1- إضافة زاوية تقديم الصفحة للمعوّض بالقرب من تردد الاجتياز, وذلك على منحنيات بود.<br>2- إضافة دارة تقديم الصفحة للوصول إلى المواقع المطلوبة للجذور في المستوي اللابلاسي | إضافة تأخير بالصفحة لزيادة ثابت الخطأ مع المحافظة على مواقع الجذور المسيطرة في المستوي اللابلاسي أو المحافظة على هامش الصفحة في منحنيات بود |
| **النتائج** | 1- زيادة عرض المجال الترددي<br>2- زيادة الربح عند الترددات العالية | إنقاص عرض المجال الترددي |
| **المحاسن** | 1- الحصول على الاستجابة المطلوبة<br>2- تحسين في خصائص الاستجابة الديناميكية (العابرة) | 1- يلغي تأثير الضجيج ذو الترددات العالية<br>2- ينقص خطأ الحالة المستقرة |
| **المساوئ** | 1- يحتاج عامل تكبير إضافي<br>2- يزيد عرض المجال الترددي مما يجعله عرضة لتأثير الضجيج<br>3- يقتضي قيم كبيرة للمقاومات $R$ وللسعات $C$ وذلك في دارة $RC$ التي تمثّل المعوّض | 1- يبطئ الاستجابة العابرة<br>2- يحتاج إلى قيم كبيرة للمقاومات $R$ وللسعات $C$ وذلك في دارة $RC$ التي تمثّل المعوّض |
| **مجال التطبيق** | عند الحاجة لاستجابة عابرة سريعة | عندما تكون قيم ثوابت الخطأ محددة ضمن المتطلبات التصميمية |
| **الوضعيات التي لا يجب أن يستخدم فيها** | عند تناقص صفحة النظام بشدة بالقرب من تردد الاجتياز | عندما يكون هامش الصفحة المطلوب يساوي الصفحة المقدمة من النظام |

يبين الجدول (10-3) دارات مكبرات العمليات المستخدمة لتنفيذ المعوضات التالية: تقديم الصفحة, التناسبي التكاملي $PI$, التناسبي التفاضلي $PD$.

| الجدول (10-3): دارات مكبرات العمليات لتنفيذ المعوّضات | | |
|---|---|---|
| نوع المتحكم | الربح $G_c(s) = V_o(s)/V_i(s)$ | الدارة |
| **PD** | $G_c(s) = \frac{R_4R_2(R_1C_1s+1)}{R_3R_1}$ |  |
| **PI** | $G_c(s) = \frac{R_4R_2(R_2C_2s+1)}{R_3R_1(R_2C_2s)}$ |  |
| **تقديم أو تأخير الصفحة** | $G_c(s) = \frac{R_4R_2(R_1C_1s+1)}{R_3R_1(R_2C_2s+1)}$<br>تقديم إذا تحقق الشرط:<br>$R_1C_1 > R_2C_2$<br>تأخير إذا تحقق الشرط:<br>$R_1C_1 < R_2C_2$ |  |

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# الفصل الحادي عشر: تصميم نظم التحكم ذات التغذية الخلفية بمتحولات الحالة

# Chapter 11: The Design of state Variable Feedback System

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

إن موضوع هذا الفصل هو تصميم المتحكمات للنظم المغلقة حيث تتم التغذية الخلفية بمتحولات الحالة, وهذا يقتضي أن يكون النظم المدروسة ممثلة في فراغ الحالة. سنقدّم بدايةً, مفهومي قابلية التحكم (System controllability) وقابلية المراقبة للنظام (System observablility). سنقدم أيضاً طريقة التصميم والمسماة طريقة توضيع الأقطاب (Pole Placement design Technique), والمعتمدة على فكرة التغذية الخلفية بمتحولات الحالة, حيث سنستخدم علاقات أكرمان (Ackermann's formula) وذلك لتحديد مصفوفة ربح التغذية الخلفية بمتحولات الحالة بحيث نوضع أقطاب النظام عند مواقع محددة تحقق المتطلبات التصميمية. يمكننا توضيع الأقطاب, حيثما نريد في المستوي اللابلاسي فقط, وفقط إذا كان النظام قابل للتحكم.

عندما لا يمكن التغذية خلفياً بجميع متحولات الحالة, يتوجب علينا استخدام مراقب الحالة (state Observer). في هذا الفصل سيتم توصيف عملية تصميم المراقب, وكذلك قابلية تطبيق علاقات أكرمان. يمكن استنتاج المعوّض في فراغ الحالة بربط التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة بفكرة المراقب.

**1-11 مقدمة:**

يمكن أن يستخدم نموذج النظام, في فراغ الحالة, لتصميم متحكم أو معوّض لهذا النظام ذو الحلقة المغلقة, حيث نهتم بشكل أساسي بالتحكم بالنظام, عن طريق إشارة التحكم $u(t)$, والتي تتبع عدة متحولات حالة مقاسة. بالتالي سنقوم بتصميم متحكم متحولات الحالة والذي يعمل بعد الحصول على معلومات عن متحولات الحالة, عن طريق القياس. إن هذا النوع من التحكم مفيد جداً لعملية أمثلة النظام (System Optimization), والذي سنتعرض له في هذا الفصل. تقوم عملية تصميم متحكم متحولات الحالة على ثلاثة خطوات رئيسية. **في الخطوة الأولى** نفترض أن جميع متحولات الحالة مقاسة, حيث سنستخدمهم في تصميم نظام التحكم عند التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة أو (full state feedback control law). إن التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة تعتبر حالة غير عملية حيث من غير الممكن عموماً قياس جميع متحولات الحالة, فقط بعض

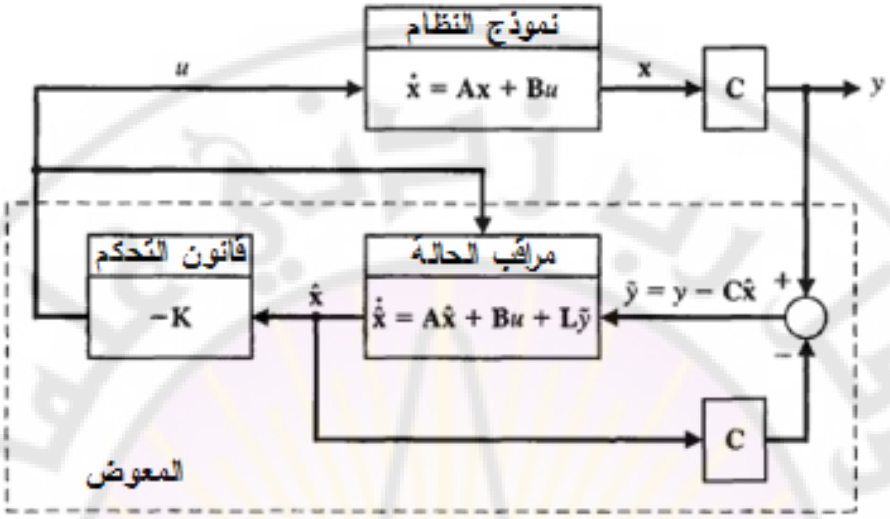
المتحولات, والتي تؤثر على مخارج النظام. **تقوم الخطوة الثانية** على بناء مراقب الحالة (State observer) وذلك لحساب أو تقدير المتحولات غير المقاسة, والمؤثرة على خرج النظام. يمكن أن تكون مراقبات الحالة إما لجميع متحولات الحالة (full state observer) أو لجزء من متحولات الحالة (reduced-order observer). تعتمد المراقبات الجزئية على فكرة أن بعض متحولات الحالة والمؤثرة على خرج النظام غير ضرورية للعملية التحكمية, وبالتالي ليس هناك حاجة لمراقبتها وتقدير حالتها. في هذا الفصل سندرس المراقب لكامل متحولات الحالة.

**تقوم الخطوة الأخيرة** في العملية التصميمية على ربط فكرة مراقب الحالة بنظام التحكم عند التغذية الخلفية بجميع متحولات الحالة, حيث غالباً ما نشير إلى متحكم متحولات الحالة, والناتج عن هذه الخطوة بالمعوّض (Compensator). إن العملية التصميمية المذكورة أعلاه تعطي المعوّض المبين بالشكل (11-1). بالإضافة إلى ذلك من الممكن أن نطبق إشارات دخل مرجعية وذلك بهدف دراسة استجابة النظام بعد تصميم المعوّض. في الفقرات التالية سنناقش الخطوات التصميمية الثلاثة.

**11-2 قابلية التحكم والمراقبة (Controllability and Observablility):**

إن السؤال الأساسي الذي يتبادر للأذهان عند تصميم معوض متحولات الحالة حول إمكانية توضيع جميع أقطاب الحلقة المغلقة, في المكان الذي نريده في المستوي العقدي. تذكر أن أقطاب الحلقة المغلقة تكافئ القيم الخاصة لمصفوفة النظام, وذلك عندما يكون النظام ممثل في فراغ الحالة.

في الحقيقة يمكن توضيع الأقطاب في الأماكن المطلوبة بحيث تتحقق المتطلبات التصميمية وذلك عندما يكون النظام قابل للتحكم (Controllable) وقابل للمراقبة (Observable), وبإتباع طريقة توضيع الأقطاب (Pole-Placement) [8]. إذاً يجب أن يكون النظام قابلاً للتحكم بشكل كامل (Completely Controllable) وقابل للمراقبة بشكل كامل (Completely Observable) حتى نتمتع بقدرة توضيع جميع أقطاب الحلقة المغلقة بالمكان الذي نريده في المستوي العقدي.




**الشكل (1-11): معوض متحولات الحالة حيث تم الربط التسلسلي لقانون التحكم عند التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة مع مراقب الحالة.**

إن مبادئ قابلية التحكم والمراقبة التي نناقشها في هذه الفقرة, وضعت في عام 1960 من قبل العالم رودلف كالمان (Rudoph Kalman) [29, 28] .

**يكون النظام قابلاً للتحكم بشكل كامل, إذا كان هنالك إشارة تحكم $u(t)$ تسمح بالانتقال من أي حالة ابتدائية $x(t_0)$ إلى أي حالة أخرى $x(t)$ وذلك خلال فترة زمنية محدودة $t_0 \le t \le T$.**

ليكن لدينا النظام الممثل بالمعادلات الحالة التالية:

$$\mathbf{x^{\bullet} = Ax + Bu}$$

يمكننا تحديد فيما إذا كان النظام قابل للتحكم وذلك بالتحقق من الشرط الجبري التالي:

$$rank[B \quad AB \quad A^2B \quad A^{n-1}B] = n \dots\dots (1-11)$$

لنعرف مصفوفة قابلية التحكم $P_c$ بدلالة المصفوفات $A, B$ على النحو التالي:

$$P_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^{n-1}B] \dots\dots (2-11)$$

إن أبعاد المصفوفة $P_c$ هي $(m * n)$, حيث $m$ عدد مداخل النظام و $n$ عدد متحولات الحالة. إذا كان محدد المصفوفة $P_c$ غير معدوم (أي أن المصفوفة $P_c$ نظامية) يكون النظام قابل للتحكم [36]. بمعنى آخر نقول عن النظام بأنه قابل للتحكم, إذا وفقط إذا,

كانت الأشعة $\underline{B}$ و $\underline{B}[A]$ و $\underline{B}[A^2]$ و ... ...و $\underline{B}[A^{n-1}]$ مستقلة خطياً, وهذا يكافئ أن محدد المصفوفة $P_c$, الحاوية على هذه الأشعة, غير معدوم.

يسمى هذا المعيار لاختبار قابلية التحكم بمعيار كالمان (Kalman criterion).

في الواقع يمكننا أن نجد نظم غير قابلة للتحكم بشكل كامل حيث توجد حالات قابلة للتحكم و حالات غير قابلة للتحكم. في هذه الحالة يمكن استخدام تجزئة كالمان لفضاء الحالة (Kalman state space decomposition) والتي تعمل على تقسيم فضاء الحالة إلى حالات قابلة للتحكم بها وحالات غير قابلة للتحكم بها. في هذا الفصل سندرس النظم القابلة للتحكم بها بشكل كامل.

**مثال 11-1 قابلية التحكم بنظام (Controllability of a System):**

لندرس النظام التالي الممثل في فراغ الحالة:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

حيث المخطط الصندوقي لهذا النظام مبين بالشكل (11-2). في هذا النظام لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ {a_2}^2 - a_1 \end{bmatrix}$$

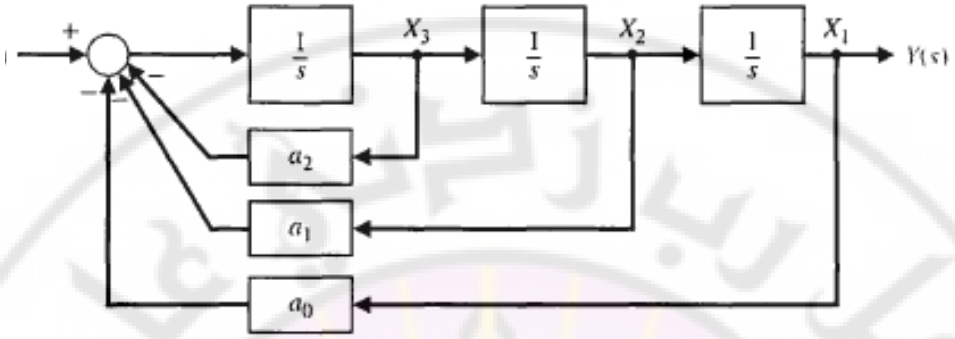
بالتالي تصبح مصفوفة قابلية التحكم $P_c$:

$$P_c = [A \quad AB \quad A^2B \quad] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & {a_2}^2 - a_1 \end{bmatrix}$$

لنحسب محدد المصفوفة $P_c$ فنجد أن:

$$\det(P_c) = -1 \neq 0$$

وبالتالي فالنظام قابل للتحكم بشكل كامل. ■




**الشكل (11-2): المخطط الصندوقي للنظام المدروس بالمثال 11-1.**

**مثال 11-2 قابلية التحكم بنظام ثنائي الحالة:**

ليكن لدينا النظام الممثل بالمعادلات التالية:

$$\dot{x_1} = -2x_1 + u$$
$$\dot{x_2} = -3x_2 + dx_1$$
$$y = x_2$$

يبين الشكل (11-3) المخطط الصندوقي لهذا النظام. لنحددّ شروط قابلية التحكم بشكل كامل لهذا النظام. لنكتب بدايةً معادلات الحالة والخرج لهذا النظام:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}u$$

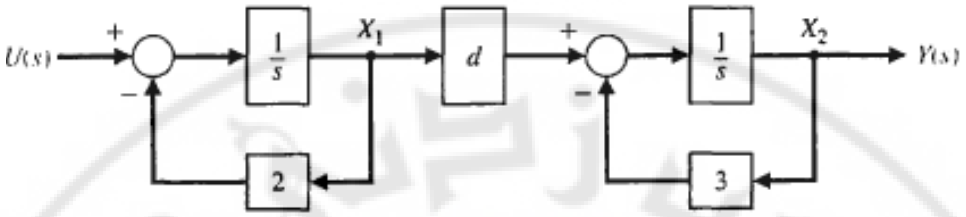
في هذا النظام, لدينا:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix}$$

لنكتب مصفوفة قابلية التحكم $P_c$:

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

إن محدد المصفوفة $P_c$ يساوي $\det(P_c) = d$, وبالتالي يكون النظام قابل للتحكم بشكل كامل من أجل أي قيمة لـ $d$ بحيث $d \neq 0$. ■




**الشكل (3-11): المخطط الصندوقي للنظام المعالج بالمثال 11-2.**

كما أسلفنا سابقا, يمكننا توضيع أقطاب الحلقة المغلقة حيثما نريد في المستوي العقدي وذلك إذا كان النظام قابل للتحكم وقابل للمراقبة. تعلمنا كيفية اختبار قابلية التحكم, لننتقل الآن لاختبار قابلية المراقبة. إن مفهوم قابلية المراقبة يعني توافر إمكانية تقدير أو حساب متحولات الحالة (أو أحد متحولات الحالة).

**يكون النظام قابل للمراقبة بشكل كامل, إذا وفقط إذا, تمكنا من تحديد الحالة الابتدائية $\mathbf{x}(0)$, وذلك خلال فترة زمنية محدودة $T$, بالاعتماد على مراقبة الخرج $y(t)$ وعلى معرفة إشارة التحكم $u(t)$ المطبقة, حيث $0 \le t \le T$.**

ليكن لدينا النظام وحيد الدخل, وحيد الخرج المعطى بمعادلات الحالة والخرج التالية:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

حيث $\boldsymbol{C}$ مصفوفة سطرية بعدها $1 * n$, $\mathbf{x}$ شعاع عمودي بعده $m * 1$. يكون النظام قابل للمراقبة بشكل كامل إذا كان محدد مصفوفة قابلية المراقبة (observablility matrix) غير معدوم حيث:

$$P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-11)$$

إن بعد المصفوفة $P_0$ هو $m * n$.

**مثال 11-3 قابلية المراقبة لنظام (Observablility of a system):**

لندرس النظام المعطى بالمثال (11-1) والممثل بالشكل (11-2). لنبني مصفوفة قابلية المراقبة $P_0$ لهذا النظام حيث:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix},\ C=[1\quad 0\quad 0],\ CA=[0\quad 1\quad 0],$$

$$CA^2=[0\quad 0\quad 1]$$

وبالتالي:

$$P_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

لنحسب محدد المصفوفة $P_0$ فنجد: $\det(P_0)=1\neq 0$, وبالتالي فالنظام قابل للمراقبة بشكل كامل. ■

**مثال 11-4 قابلية المراقبة لنظام ثنائي الحالة:**

ليكن لدينا النظام المعطى بمعادلات الحالة والخرج التالية:

$$\mathbf{x}^{\bullet}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 1]\mathbf{x}$$

يبين الشكل (11-4) المخطط الصندوقي لهذا النظام. لندرس قابلية المراقبة وقابلية التحكم لهذا النظام, وذلك باستخدام المصفوفتين $P_0$ و $P_c$.

في هذا النظام لدينا:

$$B=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\ AB=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون مصفوفة قابلية التحكم:

$$P_c=[B\quad AB]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

حيث نجد أن: $\det[P_c]=0$, وبالتالي فالنظام غير قابل للتحكم بشكل كامل.

أيضاً, لدينا في هذا النظام:

$$C=[1\quad 1]\quad ,CA=[1\quad 1]$$

لنحسب مصفوفة قابلية المراقبة:

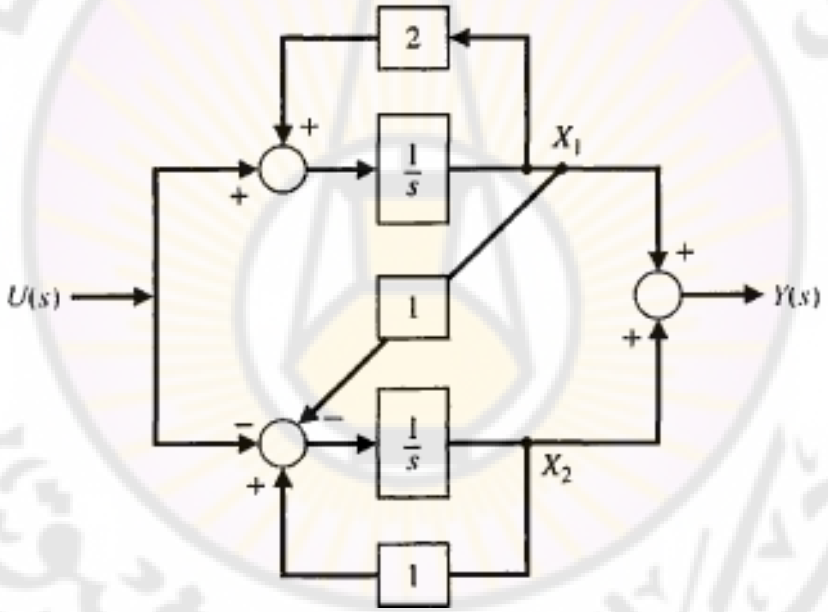
حيث نجد أن: $\det[P_0] = 0$, وبالتالي فالنظام غير قابل للمراقبة بشكل كامل.

بالعودة إلى نموذج الحالة لهذا النظام, نلاحظ أن لدينا:

$$y = x_1 + x_2$$

أيضاً لدينا: $$x_1\cdot + x_2\cdot = 2x_1 + (x_2 - x_1) + u - u = x_2 + x_1$$

من هاتين المعادلتين نلاحظ أن متحولات الحالة للنظام $x_2$ و$x_1$ لا تعتمد على إشارة التحكم $u$ للنظام, وبالتالي فالنظام غير قابل للتحكم به بشكل كامل. أيضاً نلاحظ أن إشارة الخرج $y$ تعتمد على الحالة البدائية لمتحولات الحالة, أي $x_1(0)$ و $x_2(0)$, حيث لا يمكننا أن نحدد هذه القيم الابتدائية وبالتالي فالنظام غير قابل للمراقبة بشكل كامل. ■




**الشكل (11-4): المخطط الصندوقي لنظام ثنائي الحالة.**

### 11-3 تصميم نظام التحكم ذو التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة:
### (Full-state Feedback control system Design)

في هذه الفقرة, سنعمل على تصميم نظام التحكم ذو التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة, وذلك بهدف توضيع أقطاب الحلقة المغلقة في المواقع المطلوبة, بحيث تتحقق الخصائص المطلوبة للاستجابة.

تقوم الخطوة التصميمية الأولى على فرضية أن متحولات الحالة $\mathbf{x}(t)$ معرفة دائماً مهما كانت قيمة $(t)$. يعطى دخل النظام $u(t)$ بالعلاقة:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \dots\dots\dots (4-11)$$

إن هدفنا في هذه الفقرة هو تحديد مصفوفة الربح **K**. سنبرهن فيما يلي أن النظام المغلق مستقر وذلك إذا كان نظام التحكم ذا التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة يحقق استقرار النظام, وكان مراقب الحالة (State Observer) مستقر , حيث سنناقش المراقبات في الفقرة (11-4).

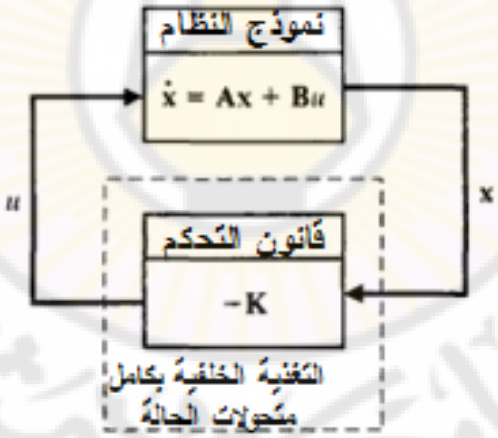
يشرح الشكل (11-5) المخطط الصندوقي لنظام التحكم ذو التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة. في هذا الشكل نجد أن معادلة النظام الممثل في فراغ الحالة:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

أما إشارة التغذية الخلفية: $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$

بالتالي في نظام الحلقة المغلقة يصبح لدينا:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \dots\dots (5-11)$$




**الشكل (11-5): المخطط الصندوقي لنظام التحكم ذو التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة (بدون إشارة دخل مرجعية).**

تعطى المعادلة المميزة لمعادلة الحالة المعطاة بالعلاقة (11-5):

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$$

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة تقع في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, يكون نظام الحلقة المغلقة مستقر. بمعنى آخر: يسعى شعاع الحالة $\mathbf{x}(t)$ نحو الصفر وذلك عندما $t \to \infty$, أي:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t}\ \mathbf{x}(t_0) \to 0 \quad \text{عندما } t \to \infty$$

حيث: $\mathbf{x}_0(t)$ شعاع الحالة الابتدائي.

من أجل نظام معطى بالمصفوفات $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, يمكننا تحديد المصفوفة $\mathbf{K}$ بحيث تتوضع جميع أقطاب الحلقة المغلقة في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي, إذا وفقط إذا, كان النظام قابل للتحكم به بشكل كامل. بمعنى آخر, إذا وفقط إذا كانت المصفوفة $P_c$ ذات رتبة كاملة.

لنضيف إشارة دخل مرجعية إلى المخطط الصندوقي المبين بالشكل (5-11), لتصبح إشارة التحكم:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + Nr(t)$$

حيث $r(t)$ هي الإشارة المرجعية.

سنناقش في الفقرة (6-11) مسألة الإشارة المرجعية $r(t)$. عندما $r(t) = 0$ و $t > t_0$ نقوم بحساب المصفوفة $\mathbf{K}$ بحيث تسعى جميع الشروط الابتدائية نحو الصفر, وفق مسار تحدده المتطلبات التصميمية. بمعنى آخر, عند استخدام التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة المشروحة في هذه الفقرة, يتم توضيع جذور المعادلة المميزة بحيث تتحقق خصائص الاستجابة العابرة المتطلبات التصميمية.

**مثال 11-5 تصميم نظام من الدرجة الثالثة:**

لندرس النظام من الدرجة الثالثة الممثل بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$$

لنختار متحولات الحالة التالية:

$$x_1 = y\,,\ \ x_2 = \frac{dy}{dt}\ \,, x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$$

بالتالي:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

تعطى مصفوفة ربح التغذية الخلفية بالحالة بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]$$

لدينا أيضاً:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

بالتالي, في النظام المغلق تصبح معادلة الحالة:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

لنحسب الآن المصفوفة $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$:

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 - K_1 & -3 - K_2 & -5 - K_3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي تصبح المعادلة المميزة للنظام:

$$\Delta(\lambda) = \det\big(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\big) = \lambda^3 + (5 + K_3)\lambda^2 + (3 + K_2)\lambda + (2 + K_1) = 0 \ldots\ldots\ldots (6-11)$$

إذا كان هدفنا هو استجابة عابرة سريعة, بتجاوز نسبي قليل. لنفرض أن الشكل المطلوب للمعادلة المميزة (راجع المعادلة (4-79) والجدول(4-5)):

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + {\omega_n}^2)(\lambda + \zeta\omega_n)$$

نختار $\zeta = 0.8$ وذلك للحصول على تجاوز نسبي صغير, ونختار $\omega_n$ بحيث يتحقق المتطلب التصميمي المتعلق بزمن الاستقرار حيث نريد $T_s = 1\,sec$, وبالتالي:

$$T_s = 4/\zeta\omega_n = 4/(0.8)\omega_n \approx 1$$

إذا اخترنا $\omega_n = 6$, تصبح المعادلة المميزة للنظام:

$$(\lambda^2 + 9.6\lambda + 36)(\lambda + 4.8) = \lambda^3 + 14.4\lambda^2 + 82.1\lambda + 172.8 \ldots (7-11)$$

بمقارنة المعادلات (6-11) و (7-11) نحصل على المعادلات الثلاث التالية:

$$5 + K_3 = 14.4$$
$$3 + K_2 = 82.1$$
$$2 + K_1 = 172.8$$

بالتالي نجد: $K_1 = 170.2$, $K_2 = 79.1$ و $K_3 = 9.4$. إن اعتماد هذه القيم تؤدي إلى نظام مغلق ذو استجابة خطوية تتمتع بالخصائص التالية: $T_s = 1\,sec$ , $P.O\% = 0\%$

وهي تحقق المتطلبات التصميمية. ■

**مثال 11-6 التحكم بالنواس المقلوب (Inverted Pendulum Control):**

لندرس نظام التحكم بنواس مقلوب مركب على عربة والمبين بالشكل (5-21). يمكننا قياس متحولات الحالة بهدف التحكم بالنظام (انظر المثال 5-3), حيث إذا أردنا قياس متحول الحالة $x_3 = \theta$, يتوجب علينا تركيب مقياس جهد (Potentiometer) مربوط إلى محور مفصل النواس. بنفس الطريقة يمكننا قياس معدل تغير الزاوية θ, أي يمكننا قياس متحول الحالة $x_4 = \theta^{\cdot}$ باستخدام مولد تاكومتر. أيضاً يمكن قياس متحولات الحالة $x_1$ , $x_2$ والتي تمثل موضع وسرعة العربة, وذلك باستخدام حساسات مناسبة. بالتالي إذا تمكننا من قياس جميع متحولات الحالة, يمكننا استخدام متحكم في مسار التغذية الخلفية حيث $u = -\mathbf{Kx}$ و **K** مصفوفة الربح. يمثل **x** شعاع الحالة, وبالتالي فإن معرفة $\mathbf{x}(t)$ والمعادلات الواصفة لديناميكية النظام, تشكل مصدر معلومات كافياً للتحكم بالنظام وللوصول به إلى حالة الاستقرار [15].

لشرح استخدام التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة, سندرس الجزء غير مستقر من نظام النواس المقلوب وذلك بهدف تصميم تغذية خلفية تعمل على إيصاله إلى حالة الاستقرار. إذا افترضنا أن إشارة التحكم $u(t)$ هي إشارة التسارع, وافترضنا أن كتلة العربة مهملة, بالتالي يمكننا التركيز على الديناميكية اللامستقرة للنواس. باعتماد الفرضيات المذكورة أعلاه تصبح المعادلة (5-69) على النحو التالي:

$$gx_3 - lx_4^{\cdot} = x^{\cdot}_2 = y^{\cdot\cdot} = u(t)$$

في هذه الحالة, وكون إشارة التحكم هي إشارة التسارع فإن موضع وسرعة العربة عبارة عن توابع تكاملية لـ $u(t)$. إن الجزء المعتبر من فضاء الحالة المدروس هو $[x_3, x_4] = [\theta, \theta^{\cdot}]$, بالتالي تصبح معادلة الحالة للنظام في هذه الحالة:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/l \end{bmatrix} u(t) \ldots\ldots (8-11)$$

إن المصفوفة **A** في المعادلة (11-8) هو الجزء اليميني الأسفل من المصفوفة $\boldsymbol{A}$ للمعادلة (5-70). إن المعادلة المميزة للنظام: $\lambda^2 - g/l = 0$, حيث يوجد جذر وحيد يقع في النصف الأيمن من المستوي اللابلاسي. للوصول بالنظام إلى الاستقرار , نولد إشارة تحكم $u(t)$ تتبع لمتحولات الحالة $x_3, x_4$, أي:

$$u(t) = -\mathbf{Kx} = -[K_1 \quad K_2]\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -K_1 x_3 - K_2 x_4$$

بتعويض علاقة إشارة التحكم بالمعادلة (8-11) نجد أن:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (1/l)(K_1 x_3 + K_2 x_4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (g + K_1)/l & K_2/l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

لنوجد المعادلة المميزة للنظام:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -(g + K_1)/l & \lambda - K_2/l \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - K_2/l) - (g + K_1)/l$$

$$= \lambda^2 - \left(\frac{K_2}{l}\right)\lambda + \frac{g + K_1}{l} \ldots\ldots (9 - 11)$$

حتى يكون النظام مستقر يجب أن يتحقق الشرطين:

$$K_2/l < 0 \quad , \; K_1 > -g$$

بالتالي تمكنا من تحقيق الاستقرار لنظام غير مستقر, وذلك عن طريق قياس متحولات الحالة $x_3$و $x_4$ واستخدام التابع التحكمي $u = -\mathbf{Kx}$. إذا أردنا تحقيق استجابة سريعة بتجاوز نسبي ضعيف, نختار $\omega_n = 10$ و $\zeta = 0.8$ وبالتالي نحتاج إلى تحقق الشروط التالية:

$$K_2/l = -16 \; , \; (K_1 + g)/l = 100$$

إذا درسنا الاستجابة الخطوية للنظام, وذلك من أجل القيم $K_2$ و $K_1$ التي تحقق الشرطين السابقين, نجد أن قيمة التجاوز النسبي تساوي إلى 1.5% أما زمن الاستقرار فيساوي 0.5 ثانية. ■

من المثالين السابقين وجدنا أن النظام ذو التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة يعمل على زيادة استقرار النظام ويعمل أيضاً على الحصول على الاستجابة المطلوبة للنظام. لننتقل الآن لمواجهة مسألة حساب المصفوفة **K** بهدف توضيع الأقطاب في المواقع المطلوبة. في النظم وحيدة الدخل –وحيدة الخرج, تعتبر علاقة أكرمان مفيدة جداً لتحديد المصفوفة **K**, حيث:

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_n]$$

$$u = -\mathbf{Kx}$$

إذا كان معطى لدينا المعادلة المميزة المطلوبة للنظام:

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

في هذه الحالة تحسب المصفوفة الربح $\mathbf{K}$ بالعلاقة:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\mathbf{P_c}^{-1} q(\mathbf{A}) \dots \dots (10-11)$$

حيث: $q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots\cdots + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}$

$\mathbf{P_c}$ مصفوفة قابلية التحكم المعطاة بالمعادلة (11-2).

**مثال 11-7 نظام من الدرجة الثانية (Second order system):**

لندرس النظام المعطى بالعلاقة:

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2}$$

لنحدّد ربح التغذية الخلفية (المصفوفة $\mathbf{K}$) وذلك بهدف توضيع أقطاب الحلقة المغلقة عند $s = -1 \pm j$.

إن المعادلة المميزة المطلوبة للنظام:

$$q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

وبالتالي: $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$.

من أجل $x_1 = y$ و $x_2 = y^{\cdot}$, تعطى معادلة الحالة للنظام بالعلاقة:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

إن مصفوفة قابلية التحكم لهذا النظام:

$$\mathbf{P_c} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

لنحسب مصفوفة الربح $\mathbf{K}$ باستخدام العلاقة (10-11):

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1]\mathbf{P_c}^{-1} q(\mathbf{A})$$

حيث:

$$\mathbf{P_c}^{-1} = \frac{+1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [2 \quad 2]$$

■

من الملاحظ أن حساب مصفوفة الربح $\mathbf{K}$ باستخدام علاقة أكرمان يتطلب حساب $\boldsymbol{P_c}^{-1}$, وبالتالي يجب أن يكون النظام قابل للتحكم به بشكل كامل حتى نتمكن من حساب

$\mathbf{P_c}^{-1}$, وذلك لأنه عندما يكون النظام متحكم به بشكل كامل فإن رتبة المصفوفة $\mathbf{P_c}$ تساوي بعد النظام $rank(P_c) = n$ و بالتالي يمكن حساب المصفوفة $\mathbf{P_c}^{-1}$. إذا كان $rank(P_c) = r < n$, لا يمكن حساب المصفوفة $\mathbf{P_c}^{-1}$.

**4-11 تصميم المراقب (Observer design):**

عندما ناقشنا تصميم التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة في الفقرة (3-11) افترضنا أن جميع متحولات الحالة متوفرة, وفي جميع اللحظات, وهذا غالباً ما يتطلب استخدام حساسات لقياس جميع متحولات الحالة. هذا يقتضي زيادة في كلفة وتعقيد النظام وذلك مع زيادة عدد الحساسات المطلوبة لقياس متحولات الحالة. لحسن الحظ, إذا كان النظام قابل للمراقبة بشكل كامل يمكننا تحديد (أو تقدير) متحولات الحالة غير مقاسة بشكل مباشر , وذلك باستخدام مراقب الحالة أو اختصاراً المراقب.

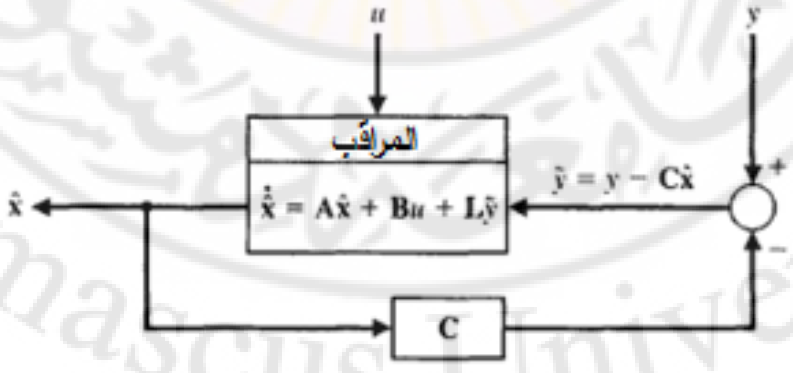
بحسب لوينبرغر (Luenberger), يعطى مراقب كامل متحولات الحالة للنظام المعطى بالمعادلات:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \qquad , y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

بالعلاقة:

$$\hat{\mathbf{x}}^{\cdot} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \dots \dots (11-11)$$

حيث $\hat{\mathbf{x}}$ هو شعاع الحالة المقدّر (أو المخمّن), أما مصفوفة $\mathbf{L}$ فهي مصفوفة ربح المراقب (Observer gain matrix) الواجب تحديدها خلال عملية تصميم المراقب. يبين الشكل (6-11) مراقب الحالة, والذي يملك دخلين $u$ , $y$ وخرج وحيد $\hat{\mathbf{x}}$.




**الشكل (6-11): مراقب الحالة الكامل (Full state Observer).**

إن الهدف من المراقب هو تزويدنا بشعاع حالة مُخمّن $\hat{\mathbf{x}}$ حيث $\hat{\mathbf{x}} \to \mathbf{x}$, وذلك عندما $t \to \infty$. تذكر أننا لا نعلم قيمة $\mathbf{x}(t_0)$ بدقة لذلك يتوجب علينا تزويد المراقب بقيمة ابتدائية لـ $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$. يُحدد خطأ تقدير المراقب (Observer estimation error) على النحو التالي:

$$e(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \dots\dots (12-11)$$

يتوجب على مصمم المراقب أن يصل لمراقب يتمتع بالخاصية التالية: $e(t) \to 0$ وذلك عندما $t \to \infty$. إن إحدى النتائج النظرية المهمة هي: عندما يكون النظام قابل للمراقبة بشكل كامل, نستطيع دوماً إيجاد المصفوفة $L$ بحيث أن الخطأ المرتكب تقريباً مستقر على القيمة المطلوبة $(e(t) \approx 0)$.

لنأخذ المشتق الزمني لخطأ التقدير المعطى بالعلاقة (11-12):

$$e^{\cdot} = \mathbf{x}^{\cdot} - \hat{\mathbf{x}}^{\cdot}$$

باستخدام نموذج الحالة للنظام والمعادلة (11-11) نجد أن:

$$e^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

$$e^{\cdot} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})e(t) \dots\dots (13-11)$$

يمكن أن نضمن أن $e(t) \to 0$ عندما $t \to \infty$, وذلك من أجل خطأ تقدير ابتدائي $e(t_0)$ معطى, وأيضاً إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة التالية تقع في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = 0 \dots\dots (14-11)$$

بالتالي أصبحت مسألة تصميم المراقب عبارة عن إيجاد المصفوفة $\mathbf{L}$ بحيث تقع جذور المعادلة المميزة (11-14) في النصف الأيسر من المستوي اللابلاسي. إن هذه المسألة ممكنة الحل فقط إذا كان النظام قابل للمراقبة بشكل كامل. بعبارة أخرى, إذا كانت رتبة المصفوفة $\mathbf{P_0}$ تساوي $n$.

**مثال 11-8 تصميم مراقب لنظام من الدرجة الثانية:**

لندرس النظام من الدرجة الثانية والمعطى بالمعادلات التالية:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

في هذا المثال يمكننا مباشرة مراقبة متحول الحالة $y = x_1$, بالتالي يبقى علينا فقط تقدير متحول الحالة $x_2$, باستخدام مراقب حالة والذي يسمى بالمراقب ذو الدرجة المخفضة (Reduced-order observer) [38, 4]. لكن وطالما أن الحساسات عرضة للضجيج فلابدّ أن ينعكس ذلك على متحولات الحالة المقاسة بتلك الحساسات لذلك سنقوم, في هذا المثال بتقدير قيمة جميع متحولات الحالة حتى المقاسة, وذلك بهدف إنقاص تأثير ضجيج الحساسات. يجب التنويه إلى إمكانية استخدام مرشح كالمان (Kalman filter) لبناء مراقب الحالة في حالة وجود ضجيج يؤثر على النظام المدروس [23, 30].

يبدأ تصميم مراقب الحالة باختبار قابلية المراقبة وذلك للتأكد من أن المراقب يمكن أن يبنى. من نموذج النظام, لدينا:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

بالتالي فإن مصفوفة قابلية المراقبة:

$$\mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

طالما أن محدد مصفوفة قابلية المراقبة $\det[\mathbf{P_0}] = 3 \neq 0$, بالتالي فالنظام قابل للمراقبة بشكل كامل. لنفرض أن المعادلة المميزة للنظام هي:

$$\Delta_d(\lambda) = \lambda^2 + 2\zeta\lambda\omega_n + {\omega_n}^2 \dots \dots (15-11)$$

يمكن أن نختار $\zeta = 0.8$ و $\omega_n = 10$, حيث أن زمن الاستقرار الناتج عن هذه القيم أقل من $0.5\ sec$. لنحسب المعادلة المميزة للنظام بوجود المراقب:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = \lambda^2 + (L_1 - 6)\lambda - 4(L_1 - 2) + 3(L_2 + 1) \dots (16-11)$$

حيث: $L = [L_1 \quad L_2]^T$.

بمساواة طرفي المعادلتين (15-11) و (16-11) نجد أن:

$$L_1 - 6 = 16, \ -4(L_1 - 2) + 3(L_2 + 1) = 100$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

بالتالي يعطى مراقب النظام بالعلاقة:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix} (y - \widehat{x_1})$$

يبين الشكل (11-7) استجابة خطأ التقدير, وذلك من أجل الخطأ الابتدائي التالي:

■ $$e = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

يمكننا أيضاً استخدام علاقة أكرمان لتوضيع جذور المعادلة المميزة للمراقب في المواقع المطلوبة. لنفرض أن مصفوفة ربح المراقب (Observer gain matrix) تعطى بالعلاقة:

$$L = [L_1 \;\; L_2 \;\; .... \;\; L_n]^T$$

إن المعادلة المميزة المطلوبة للمراقب:

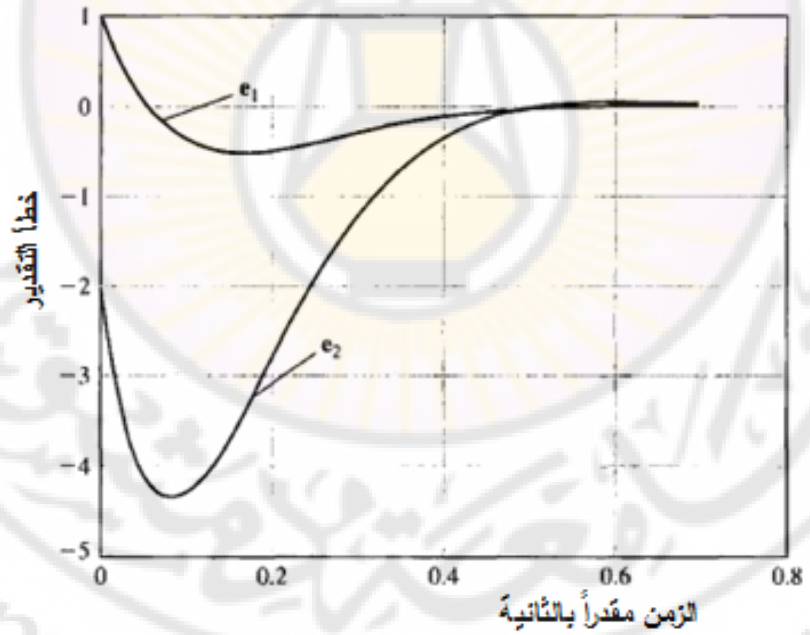
$$P(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

يتم اختيار المعاملات $\beta$ بحيث تتحقق المتطلبات التصميمية لأداء المراقب. تحسب مصفوفة ربح المراقب $\mathbf{L}$ باستخدام العلاقة التالية:

$$\mathbf{L} = P(\mathbf{A})\mathbf{P_0}^{-1}[0 \;\; .... .0 \;\; 1]^T \;\; ... \;\; .... (17-11)$$

حيث $\boldsymbol{P_0}$ مصفوفة قابلية المراقبة المعطاة بالعلاقة (3-11), أما $P(\mathbf{A})$ فتساوي:

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \beta_1\mathbf{A} + \beta_0\mathbf{I}$$




**الشكل (11-7): استجابة مراقب الحالة لنظام من الدرجة الثانية وذلك من أجل قيمة ابتدائية لخطأ التقدير $e$.**

**مثال 11-9: تصميم مراقب لنظام من الدرجة الثانية باستخدام علاقة أكرمان**

**(Second – order system observer design using Ackermann's formula)**

لنعود لدراسة النظام المدروس بالمثال (11-8), حيث تعطى المعادلة المميزة المطلوبة للمراقب بالعلاقة:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + {\omega_n}^2$$

حيث: $\omega_n = 10$ , $\zeta = 0.8$ وبالتالي $\beta_1 = 16,\ \beta_2 = 100$.

لنحسب $P(\mathbf{A})$ فنجد:

$$P(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^2 + 16\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix}$$

من المثال (11-8), وجدنا مصفوفة قابلية المراقبة:

$$\mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\mathbf{P_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

بتطبيق علاقة أكرمان المعطاة بالعلاقة (11-17) نجد مصفوفة ربح المراقب **L**:

$$\boldsymbol{L} = P(\mathbf{A})\mathbf{P_0}^{-1}[0 \dots \dots \dots 0\ 1]^T = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هذه النتيجة تتطابق مع النتيجة التي تم التوصل إليها في المثال (11-8) والمعتمدة على طريقة مختلفة عن علاقة أكرمان. ■

**11-5 دمج التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة ومراقب الحالة:**

**(Integrating Full – state Feedback and observer)**

يبنى معوّض متحول الحالة (State variable compensator) عن طريق الربط المناسب للتغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة (انظر الفقرة (11-3)) مع مراقب الحالة (انظر الفقرة (11-4)) . يبين الشكل (11-1) المعوض المبنى والناتج عن دمج التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة ومراقب الحالة.

إن الطريقة المشروحة في الفقرة (11-3) لبناء التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة كانت تعتمد على أن إشارة التحكم $u(t)$ تتناسب مع شعاع الحالة $\mathbf{x}(t)$, حيث إفترضنا إمكانية معرفة جميع متحولات الحالة, وفي أي لحظة, بمعنى آخر: الشعاع $\mathbf{x}(t)$

معروف في أي لحظة. في الفقرة (11-4) صممنا مراقب الحالة والذي يقوم بتزويدنا بشعاع الحالة المقدر $\hat{\mathbf{x}}(t)$. في هذه الفقرة يبدو لنا من المنطقي استخدام شعاع الحالة المقدّر $\hat{\mathbf{x}}(t)$ بدلاً من شعاع الحالة $\mathbf{x}(t)$, وذلك في قانون التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة, بمعنى آخر: أصبح قانون التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة:

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \dots\dots (18-11)$$

ولكن السؤال المطروح هل هذه الطريقة جيدة؟ في قانون التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة, صممت مصفوفة ربح التغذية الخلفية $\mathbf{K}$ بحيث نضمن استقرار النظام المغلق. بمعنى آخر صممت $\mathbf{K}$ بحيث تقع جذور المعادلة المميزة:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$$

في النصف الأيسر من المستوي. بالاعتماد على أن فرضية أن شعاع الحالة $\mathbf{x}(t)$ معروف بحيث يمكن تغذيته خلفياً, وأن المصفوفة $\mathbf{K}$ صممت بشكل صحيح, فإن التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة تقودنا إلى النتيجة المطلوبة, وهي $\mathbf{x}(t) \to 0$ وذلك عندما $t \to \infty$, وبغض النظر عن القيمة الابتدائية لـ $\mathbf{x}(t_0)$. فيما يلي وللبرهنة أن الاقتراح المقدّم جيد يجب أن نبرهن أن قانون التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة المعطى بالعلاقة (11-18) يحافظ على استقرار نظام الحلقة المغلقة.

لنفرض أن لدينا مراقب الحالة التالي:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

بتعويض العلاقة (11-18) في معادلة المراقب نحصل على معادلة المعوّض:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \dots\dots\dots (19-11)$$

نلاحظ أن النظام الممثل بالمعادلة (11-19) يملك الشكل العام لنظام ممثل في فراغ الحالة حيث يمثل $y$ دخل النظام, أما خرجه فهو $u$, كما هو مبين بالشكل (11-8).

لنحسب خطأ التقدير عند استخدام المعوض المعطى بالعلاقة (11-19):

$$\dot{e} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \mathbf{L}y + \mathbf{LC}\hat{\mathbf{x}}$$

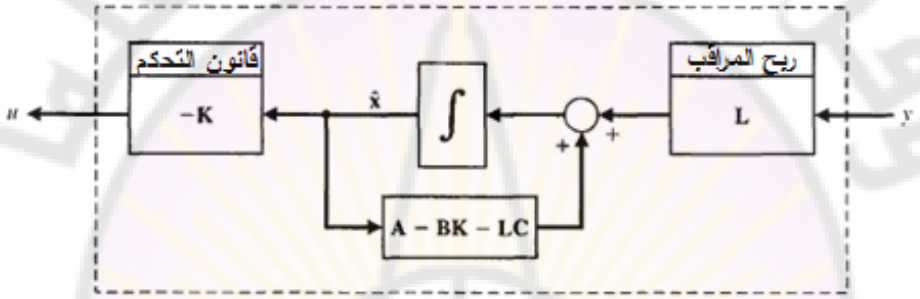
أو:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\boldsymbol{e} \dots\dots (20-11)$$

إن هذه العلاقة تتطابق مع النتيجة التي حصلنا عليها عندما حسبنا خطأ التقدير في الفقرة (11-4). كما هو واضح من العلاقة (11-20) فإن خطأ التقدير لا يتعلق بالدخل حيث لا يوجد بنود تتعلق بالدخل.

تذكر أن النظام المدروس يعطى بالعلاقات التالية:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$




**الشكل (11-8): معوض متحول الحالة والحاوي على تغذية خلفية بكامل متحولات الحالة مدمج مع مراقب الحالة.**

بتعويض قانون التغذية الخلفية $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$ في نموذج النظام نجد:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

بما أن: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \boldsymbol{e}$ بالتالي نجد أن:

$$\mathbf{x}^{\cdot} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\boldsymbol{e} \dots\dots\dots (21-11)$$

لنكتب العلاقات (11-20) و (11-21) على شكل مصفوفة, لنحصل على المعادلة التالية:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}^{\cdot}\\ \mathbf{e}^{\cdot}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K}\\ 0 & \mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{e}\end{bmatrix} \dots\dots (22-11)$$

تذكر أن هدفنا هو التحقق من أن اعتماد قانون التغذية الخلفية $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$ يحافظ على استقرار نظام الحلقة المغلقة والمراقب. إن المعادلة المميزة الممكن الحصول عليها من المعادلة (11-22) هي:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) * \det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}))$$

بالتالي إذا كانت جذور $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$, تقع في النصف الأيسر من المستوي, وهو ما تمّ العمل عليه عند تصميم التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة, وإذا كانت جذور $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = 0$ تقع أيضاً في النصف الأيسر من المستوي,

وهو أيضاً ما تمّ العمل عليه عند تصميم مراقب الحالة, بالتالي فإن النظام ككل مستقر, ومنه في الطريقة المتبعة وهي استخدام متحولات الحالة المقدرة أو المخمنة في التغذية الخلفية هي طريقة جيدة تحافظ على استقرار النظام ككل.

بعبارة أخرى, عند استخدام قانون التغذية الخلفية $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$ حيث $\mathbf{K}$ صممت باستخدام الطرق المشروحة بالفقرة (3-11), أما الشعاع $\hat{\mathbf{x}}$ فقد نتجت عن المراقب المشروح بالفقرة (4-11), فإن $\mathbf{x}(t) \to 0$ عندما $t \to \infty$ وذلك بغض النظر عن خطأ التقدير الابتدائي $e(t_0)$.

مما سبق يمكن تلخيص خطوات التصميم للمعوض في فراغ الحالة بما يلي:

1- نحدد المصفوفة $\mathbf{K}$ بحيث أن جذور المحدد $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$ تقع في النصف الأيسر من المستوي, ونوضع الأقطاب بحيث تتحقق المتطلبات التصميمية لنظام التحكم. يمكن توضيع الأقطاب حيثما نريد في المستوي العقدي فقط إذا كان النظام قابل للتحكم به بشكل كامل.

2- نحدد المصفوفة $\mathbf{L}$ بحيث أن جذور المحدد $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = 0$ تقع في النصف الأيسر من المستوي العقدي, ونوضع الأقطاب بحيث نحصل على أداء مقبول للمراقب. يمكن توضيع أقطاب المراقب حيثما نريد في المستوي العقدي فقط إذا كان النظام قابل للمراقبة بشكل كامل.

3- نوصل المراقب إلى حلقة التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة وذلك بالاعتماد على القانون:

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$$

**تابع تحويل المعوّض:** يمكن التعبير عن المعوّض المعطى بالعلاقة (11-19) على شكل تابع تحويل حيث $Y(s)$ يمثل دخل المعوّض و$U(s)$ يمثل خرج المعوّض. بتطبيق تحويلات لابلاس عند شروط بدائية معدومة على معادلات المعوّض (11-19) نجد:

$$s\hat{\mathbf{X}}(s) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{LC})\hat{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{L}Y(s)$$
$$U(s) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}(s)$$

بإعادة ترتيب المعادلات نجد أن:

$$U(s) = \left[-\mathbf{K}\left(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\right)^{-1}\mathbf{L}\right]Y(s) \ldots (23 - 11)$$

وبالتالي:

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -\mathbf{K}\big(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\big)^{-1}\mathbf{L}$$

إذا نظرنا إلى المعوّض على أنه نظام مستقل بحدّ ذاته فقد يكون هذا المعوّض مستقر أو لا يكون وذلك لأنه حتى إذا كان $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ مستقر و $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ مستقر فذلك لا يقتضي بالضرورة أن يكون $\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC}$ مستقر, إلا أن النظام ذو الحلقة المغلقة الكلي مستقر وذلك كما برهنا في المناقشات السابقة من هذه الفقرة.

**مثال 11-10: تصميم المعوّض لنظام النواس المقلوب:**

لنعود لدراسة النواس المقلوب الذي تمت معالجته بالمثال (3-5) حيث وجدنا أن نظام النواس المقلوب المركب على عربة يمكن أن يمثل بواسطة معادلة الحالة التالية:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1/M \\ \mathbf{0} \\ -1/Ml \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

حيث: $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$. تمثل $x_1$ موضع العربة, $x_2$ سرعة العربة, $x_3$ الموضع الزاوي للنواس (مقاساً اعتباراً من الوضعية العمودية), $x_4$ السرعة الزاوية للنواس, أما $u$ فيمثل الدخل المطبق على العربة.

عندما ناقشنا هذا النظام في المثال (6-11) أشرنا أنه يمكننا أن نقيس متحول الحالة $x_3 = \theta$ باستخدام مجزئ جهد (Potentiometer) مربوط إلى المحور وقياس متحول الحالة $x_4 = \dot{\theta}$ باستخدام مولد تاكومتر. لكن وبافتراض أنه لدينا حساس لقياس موضع العربة, فهل من الممكن أن نحافظ على القيمة المطلوبة لزاوية النواس $\theta = 0°$ وذلك إذا توفر لدينا فقط معلومات حول موضع العربة أي كانت لدينا $y = x_1$؟ بمعنى آخر إذا كانت معادلة خرج النظام:

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}$$

بفرض أن بارامترات النظام هي:

$$l = 0.098\,m,\ g = 9.8\,m/s^2,\ m = 0.825Kg,\ M = 8.085Kg$$

بتعويض قيم البارمترات في المصفوفات $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ نجد أن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1237 \\ 0 \\ -1.2621 \end{bmatrix}$$

لنتحقق من قابلية التحكم بالنظام وذلك عن طريق مصفوفة قابلية التحكم:

$$\mathbf{P_c} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1237 & 0 & 1.2621 \\ 0.1237 & 0 & 1.2621 & 0 \\ 0 & -1.2621 & 0 & -126.21 \\ -1.2621 & 0 & -126.21 & 0 \end{bmatrix}$$

بحساب محدد المصفوفة $\mathbf{P_c}$ نجد أن $\det[\mathbf{P_c}] = 196.49 \neq 0$, وبالتالي فالنظام قابل للتحكم به بشكل كامل.

لنتحقق أيضاً من قابلية المراقبة وذلك عن طريق المصفوفة $\mathbf{P_o}$ فنجد:

$$\mathbf{P_o} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بحساب محدد المصفوفة $P_o$ نجد أن $\det[\mathbf{P_o}] = 1 \neq 0$, وبالتالي فالنظام قابل للمراقبة بشكل كامل. بعد التحقق من قابلية التحكم والمراقبة بشكل كامل يمكننا البدء بالخطوات الثلاثة التصميمية للمعوّض.

**<u>الخطوة الأولى: تصميم قانون التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة:</u>**

إن أقطاب الحلقة المفتوحة للنظام متوضعة عند $\lambda = 0,\ 0,\ -10,\ 10$. من الواضح أن النظام المفتوح غير مستقر وذلك لتواجد قطب في الطرف الأيمن من المستوي العقدي.

لنفرض الآن أن المعادلة المميزة المطلوبة للنظام المغلق:

$$q(\lambda) = (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + {\omega_n}^2)(\lambda^2 + a\lambda + b)$$

نقوم باختيار الثنائي $(\zeta, \omega_n)$ بحيث أن أقطاب البند $(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + {\omega_n}^2)$ هي الأقطاب المسيطرة ونقوم باختيار الثنائي $(a, b)$ بحيث تقع أقطاب البند $(\lambda^2 + a\lambda + b)$ بعيداً في النصف الأيسر من المستوي العقدي, وبالتالي لا تسيطر على استجابة النظام المغلق. للحصول على زمن استقرار أقل من 10 ثانية وتجاوز نسبي ضعيف يمكن أن نختار $\omega_n = 0.5$ , $\zeta = 0.8$. من ثم نختار عامل تباعد (Separation factor) بين الأقطاب المسيطرة والأقطاب المتبقية الغير مسيطرة وليكن مقداره 20 بالتالي نجد أن

$b = 100,\ a = 16$. يبين الشكل (9-11) توضع أقطاب وأصفار النظام في المستوي العقدي. يعتبر عامل التباعد بين الأقطاب المسيطرة والأقطاب الغير مسيطرة, أحد البارامترات التي يمكن أن تأخذ قيم مختلفة وذلك خلال عملية التصميم, مع ملاحظة أنه كلما تم اختيار قيمة أكبر لعامل التباعد, كلما توضعت الأقطاب الغير مسيطرة بشكل أبعد إلى أقصى يسار المستوي العقدي, وأيضاً كلما زادت قيم عناصر مصفوفة الربح **K**.

يمكن تحديد الجذور المطلوبة للمعادلة المميزة على النحو التالي:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = (\lambda + 8 \mp j6)(\lambda + 0.4 \mp j0.3)$$

حيث أن الأقطاب عند $\lambda = -0.4 \mp \mathrm{j}0.3$ هي الأقطاب المسيطرة.

بتطبيق علاقة أكرمان نستطيع حساب مصفوفة الربح **K** فنجد أن:

$$K = [-2.2509 \quad -7.5631 \quad -169.0265 \quad -14.0523]$$

**<u>الخطوة الثانية: تصميم المراقب (Observer Design):</u>**

نحتاج إلى أن يزودنا مراقب الحالة بتقدير لمتحولات الحالة غير المراقبة بشكل مباشر. إن الهدف التصميمي للمراقب أن يزودنا بتقدير لمتحولات الحالة بشكل دقيق وبأسرع شكل ممكن وبدون الحاجة لمصفوفة ربح **L** ذات قيم كبيرة. إن مقدار كبر عناصر المصفوفة **L** يعتمد على المسألة المدروسة, فعلى سبيل المثال إذا كان مستوى الضجيج في الإشارات المقاسة كبير (وذلك يتبع الحساس المستخدم, فعلينا في هذه الحالة المحافظة على قيم صغيرة لعناصر المصفوفة **L** وذلك لتجنب التكبير لضجيج القياس. خلال العملية التصميمية للمراقب, نسعى دائماً إلى تباعد بين المواقع المطلوبة لأقطاب الحلقة المغلقة ومواقع أقطاب المراقب من مرحلة 2 إلى 10 أضعاف, وذلك كما هو مبين بالشكل (9-11).

تمّ اختيار الشكل العام للمعادلة المميزة المطلوبة للمراقب على النحو التالي:

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + c_1\lambda + c_2)^2$$

يتم اختيار الثوابت $c_1$ و$c_2$ بالشكل المناسب. كمحاولة أولى سنختار $c_1 = 32$ و $c_2 = 711.11$. إن هذه القيم تعطي استجابة بزمن استقرار أقل من 0.5 ثانية وبتجاوز نسبي أصغري وذلك من أجل قيمة ابتدائية لخطأ التقدير. باستخدام علاقة أكرمان

المعطاة بالفقرة (3-11) نجد أن مصفوفة ربح المراقب **L** والتي تؤدي لتوضيع أقطاب المراقب في الأماكن المطلوبة

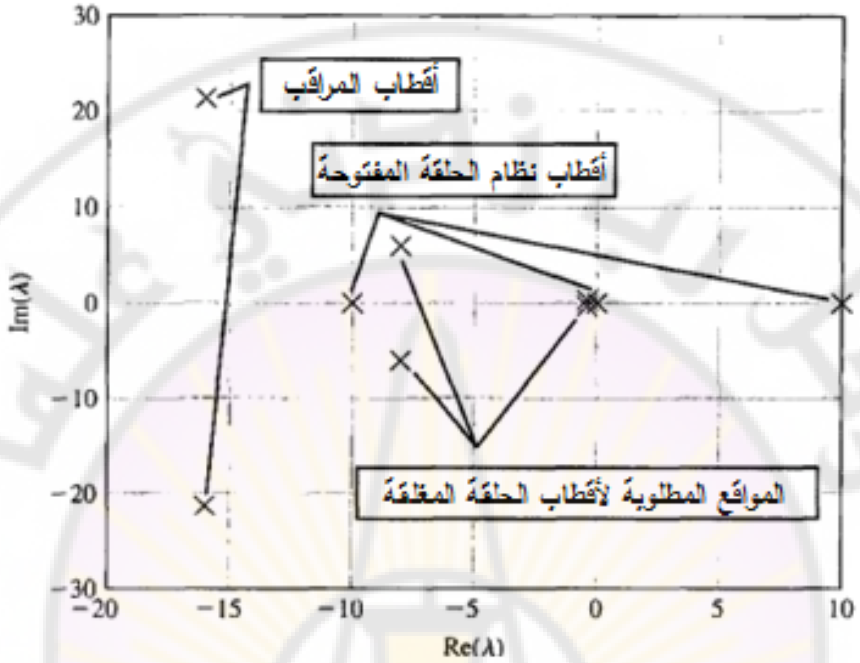
$$\det(\lambda I - (A - LC)) = (\lambda + 16 + j21.3)(\lambda + (6 - j21.3))^2$$

هي:

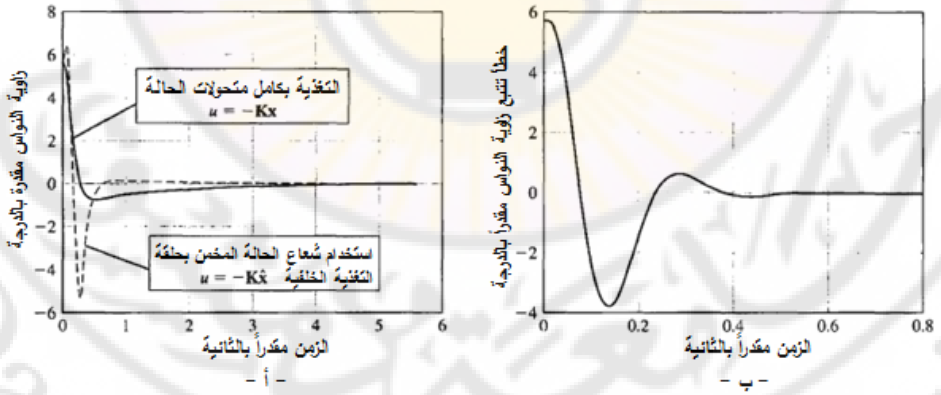
$$L = \begin{bmatrix} 64.0 \\ 2546.22 \\ -5.1911E04 \\ -7.6030E05 \end{bmatrix}$$

**الخطوة الثالثة: تصميم المعوّض (Compensator Design):**

تقوم الخطوة التصميمية الأخيرة على ربط مراقب الحالة إلى قانون التغذية الخلفية بكامل متحولات الحالة بواسطة العلاقة: $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$. يبين الشكل (10-11) استجابة نظام النواس المقلوب المصمم. يتم توضيع النواس ابتدائياً على الزاوية $\theta_0 = 5.72°$, أما العربة فهي متوقفة في الحالة الابتدائية. تم إسناد القيم البدائية للحالة المقدّرة في المراقب إلى الصفر. في الشكل (10-11 – أ) نجد أن النواس توازن في الوضعية العمودية خلال 4 ثواني. إن استجابة المعوّض (بوجود المراقب) أكثر اهتزازاً من المتحكم بدون وجود المراقب, ولكن هنا الاختلاف في الأداء متوقع طالما أن المراقب يستغرق زمن مقداره 0.4 ثانية حتى يستطيع السعي إلى خطأ تقدير حالة أصغري, كما هو مبين بالشكل (10-11 – ب). ■




**الشكل (11-9): خارطة توضع الأقطاب: أقطاب الحلقة المفتوحة – الأقطاب المطلوبة للحلقة المغلقة – أقطاب مراقب الحالة.**




**الشكل (11-10) :أداء النواس المقلوب عند استخدام المعوّض.**

**6-11 الدخل المرجعي (Reference Inputs):**

إن بنية التغذية الخلفية, والتي تمت مناقشتها في الفقرات السابقة من هذا الفصل, والمبينة بالشكل (11-1), لم تلحظ وجود إشارات دخل مرجعية. إن المعوّض المصمم في الفقرة (11-5), بدون إشارة دخل, أي $r(t) = 0$, يسمى المنظم (Regulator).

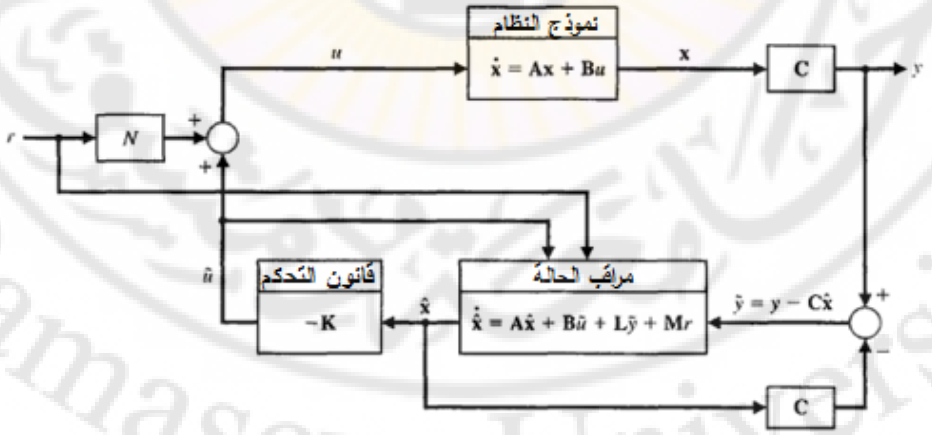
طالما أن تتبع إشارة التحكم يعتبر أحد الجوانب المهمة في نظم التحكم المغلقة ذات التغذية الخلفية, لذلك يجب أن نبحث عن كيفية إدخال إشارة مرجعية إلى المعوّض ذو التغذية الخلفية بمتحولات الحالة. في الواقع يوجد العديد من الطرق التي تسمح بتتبع إشارة دخل مرجعية حيث سنناقش في هذه الفقرة, طريقتين من أكثر الطرق المتبعة لإدخال إشارة دخل مرجعية إلى نظام التحكم.

إن الشكل العام للمعوّض في فراغ الحالة:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{u} + \mathbf{L}\tilde{y} + \mathbf{M}r$$
$$u = \tilde{u} + Nr = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + Nr \quad \ldots\ldots (24-11)$$

حيث: $\tilde{y} = y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ و $\tilde{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$.

يبين الشكل (11-11) معوّض في فراغ الحالة مع إشارة دخل مرجعية. من الملاحظ أنه عندما $\mathbf{M} = 0$ و $N = 0$ فإن المعوّض المعطى بالعلاقة (11-24) يصبح كالمنظم (Regulator) الموصوف بالفقرة (11-5), والمبين بالشكل (11-1).




**الشكل (11-11): المعوّض في فراغ الحالة مع إشارات دخل مرجعية.**

إن البارامترات التصميمية الأساسية في المعوّض والتي تتيح للنظام إمكانية تتبع إشارة الدخل المرجعية هي $N$, $\mathbf{M}$. عندما يكون الدخل المرجعي عبارة عن إشارة ذات قيمة عددية (بمعنى آخر لدينا دخل وحيد), فإن البارامتر $\mathbf{M}$ يصبح عبارة عن شعاع عمود يحوي $n$ سطر حيث $n$ عدد متحولات الحالة, أما البارامتر $N$ فهو عبارة عن قيمة عددية. يمكننا أن نواجه إمكانيتين عند اختيار البارامترات $N$, $\mathbf{M}$. في الحالة الأولى نختار $N$, $\mathbf{M}$ بحيث أن خطأ التقدير $e(t)$ مستقل عن الدخل المرجعي $r(t)$. في الحالة الثانية نختار $N$, $\mathbf{M}$ بحيث أن الخطأ المرتكب $y(t) - r(t)$ يستخدم كدخل للمعوّض. في الحالة الأولى ينتج لدينا نظام ذو حلقة تغذية خلفية حيث أن المعوّض سيتواجد في المسار الخلفي, أما في الحالة الثانية ينتج لدينا نظام مغلق حيث أن المعوّض يتوضع في المسار الأمامي للنظام.

بالاعتماد على الشكل العام للمعوّض المعطى بالعلاقة (11-24) نجد أن خطأ التقدير يمكن أن يوصف بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\tilde{u} - \mathbf{L}\tilde{y} - \mathbf{M}r$$

أو:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\boldsymbol{e} + (\mathbf{B}N - \mathbf{M})r$$

لنفرض أننا اخترنا:

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{B}N \ldots\ldots (25 - 11)$$

بالتالي فإن خطأ التقدير المقابل يعطى بالعلاقة التالية:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}$$

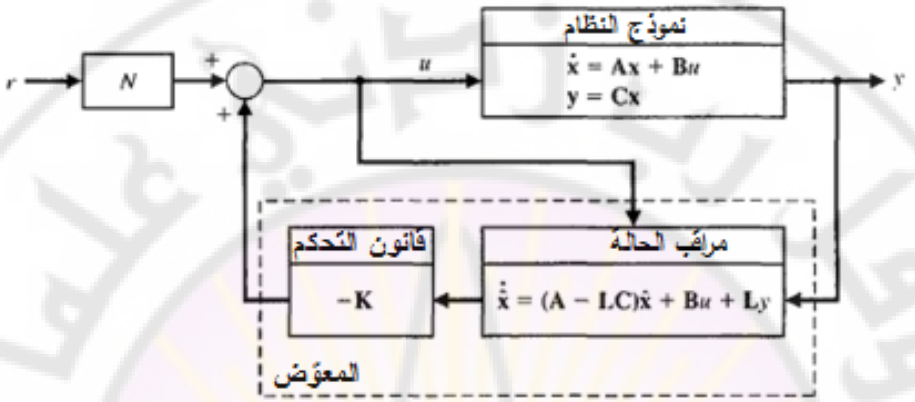
في هذه الحالة فإن خطأ التقدير مستقل عن الدخل المرجعي $r(t)$. إن هذه النتيجة تتطابق مع تلك التي حصلنا عليها في الفقرة (11-4) والتي صممنا فيها مراقب الحالة بافتراض غياب الدخل المرجعي. إن المهمة المتبقية علينا هي تحديد القيمة المناسبة لـ $N$ حيث يمكننا فيما بعد حساب المصفوفة $\mathbf{M}$ باستخدام العلاقة (11-25). على سبيل المثال قد نختار قيمة $N$ بحيث نحصل على خطأ معدوم في الحالة المستقرة وذلك عند تطبيق إشارة دخل خطوية.

عندما $\mathbf{M} = \mathbf{B}N$ نجد أن معادلة المعوّض تصبح من الشكل:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\tilde{y}$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + Nr$$

يبين الشكل (11-12) معوّض فراغ الحالة الموافق للحالة المدروسة: $\mathbf{M} = \mathrm{B}N$.




**الشكل (11-12): معوّض فراغ الحالة بوجود دخل مرجعي وذلك من أجل $\mathbf{M} = BN$.**

لننتقل للحالة الثانية والتي يكون فيها الخطأ المرتكب $r(t) - y(t)$ دخل المعوّض المراد تصميمه. لنفرض أننا اخترنا $N = 0$ و $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$, وبالتالي فإن المعوّض المعطى بالعلاقة (11-24) يصبح:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\tilde{y} - \mathbf{L}r$$
$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

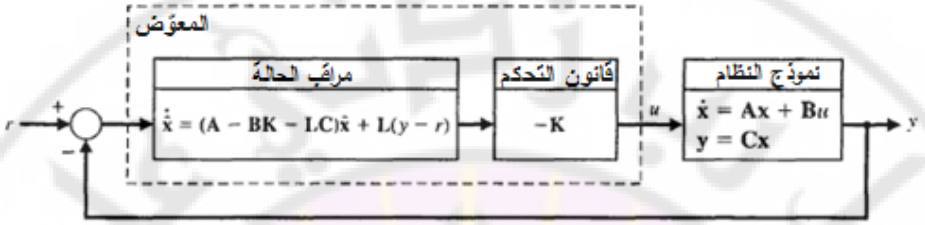
لنعيد كتابة المعادلات السابقة على النحو التالي:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}(y - r)$$
$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

في هذه الحالة لاحظ أن إشارة دخل المراقب هي $y - r$ , يبين الشكل (11-13) المعوّض الموافق لهذه الحالة المدروسة, والتي من أجلها $N = 0$ و $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$.

من الملاحظ أنه في الحالة الأولى حيث افترضنا أن $\mathbf{M} = \mathbf{B}N$, يقع المعوّض في المسار الخلفي للنظام المغلق, بينما في الحالة الثانية, والتي افترضنا فيها أن $N = 0$ و $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$ فإن المعوّض يقع في المسار الأمامي للنظام المغلق. إن هاتين الحالتين ليستا الوحيدتين حيث أن الخيار مفتوح لمصمم نظام التحكم, وذلك حسب القيم المختارة لـ $N, \boldsymbol{M}$. على سبيل المثال سنقدم في الفقرة (11-8) طريقة لتتبع الإشارات الدخل المرجعية

بحيث نضمن أن قيم محددة للأخطاء المرتكبة في الحالة المستقرة, وذلك بالاعتماد على طريقة تصميمية تسمى بطريقة تصميم نموذج داخلي (Internal Model design).




**الشكل (11-13): معوّض فراغ الحالة بوجود دخل مرجعي وذلك من أجل $M = -L$ و $N = 0$**

## المراجع الأجنبية


1- A. Cavallo, *Using MATLAB, SIMULINK, and Control System Toolbox*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. X, 1996.

2- A. E. Bryson, "Optimal Control," *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 26-33.

3- C. T. Chen, *Analog and Digital Control Systems- Design*, Oxford University. Press, New York, 1996.

4- C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed., Oxford University Press, New York, 1999.

5- D. Xue, Y. Chen, D. Atherton, *Linear Feedback Control Analysis and Design with Matlab*, 2007.

6- F. L. Chernousko, *State Estimation for Dynamic Systems*, CRC Press, Boca Raton, Fla. 1993.

7- G. Goodwin, S. Graebe. and M. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall, Saddle River, N.J., 2001.

8- G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic. Systems*, 4th edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. X, 2002.

9- H. H. Ottesen, "Future Servo Technologies for Hard Disk *Drives," Journal of the Magnetics Society of Japan*, Vol. 18,1994, pp. 31-36.

10- H. Nyquist, "Regeneration Theory," *Bell Systems Tech. J*, January 1932, pp. 126-147. Also in *Automatic Control: Classical Linear Theory*, G J Thaler, ed., Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1932, pp. 105-126.

11- H. M. James, N. B. Nichols, and R. S. Phillips, *Theory of Servomechanisms*. McGraw-Hill, New York, 1947.

12- I. Munteanu, A. I. Bratcu, N. A. Cutululis, and E. Ceanga, *Optimal Control of Wind Energy Systems,* Springer- Verlag, London, 2008.

13- J. Yan and S. E. Salcudean, "Teleoperation Controller Design," *JEEE Transactions on Control SystemsTechnology,* May 1996, pp. 244-247.

14- J. R. Mitchell, "Comments on Bode Compensator Design," *IEEE Transactions on Automatic Control,* October 1977, pp. 869-870.

15- J. Farrell, "Using Learning Techniques to Accommodate Unanticipated Faults." *IEEE Control Systems,* June 1993, pp. 40-48.

16- K. S. Yeung, et al., "A Non-trial and Error Method for Lag-Lead Compensator Design," *IEEE Transactions on Education,* February 1998, pp. 76-80.

17- L. Hatvani, "Adaptive Control: Stabilization," *Applied Control,* edited by Spyros G. Tzafestas, Marcel Decker, New York, 1993, pp. 273-287.

18- L. Y. Pao and K. E. Johnson, "A Tutorial on the Dynamics and Control of Wind Turbines and Wind Farms," *Proceedings of the American Control Conference,* St. Louis, MO, 2009, pp. 2076-2089.

19- M. G Wanzeller, R. N. C. Alves, J. V. da Fonseca Neto, and W. A. dos Santos Fonseca, "Current Control Loop for Tracking of Maximum Power Point Supplied for Photovoltaic Array," *IEEE Transactions on Instrumentation And Measurement,* Vol. 53, No. 4,2004, pp. 1304-1310.

20- M. D. Fagen, *A History of Engineering and Science in the Bell System,* Bell Telephone Laboratories, Inc., Murray Hill, N. X, 1978, Chapter 5.

21- M. W Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control,* John Wiley & Sons, New York, 1989.

22- M. Berenguel, et al., "Temperature Control of a Solar Furnace," *IEEE Control Systems,* February 1999, pp. 8-19

23- M. S. Grewal, and A. P. Andrews, *Kalman Filtering:Theory and Practice Using MATLAB, 2nd ed.,*Wiley-Interscience, 2001.

24- R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation,* John Wiley & Sons, New York, 1994.

25- R. C. Dorf. *The Encyclopedia of Robotics,* John Wiley & Sons, New York, 1988.

26- R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook,* 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.

27- R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation,* John Wiley & Sons, New York, 1994.

28- R. E. Kalman, "Mathematical description of linear dynamical systems," *SI AM J. Control, Vol 1*, 1963, pp. 152-192.

29- R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," Transactions of the American Society of Mechanical Engineering Series D, *Journal of Basic Engineering,* 1961, pp. 95-108.

30- R. G. Brown and P. Y. C. Hwang, *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering with Matlab Exercises and Solutions,* John Wiley and Sons, Inc., 1996.

31- Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, *Modern Control Systems,* Prentice Hell, 12 edition, 2011.

32- Roland S. Burns, *Advanced Control Engineering,* Butterworth-Heinemann, 2001.

33- R. L. Williams, D. A. Lawerence, *Linear State-Space Control Systems, ,* John Wiley and Sons, Inc., 2007.

34- S. Leballais, P. Cordron, *Automatique Systèmes linéaires et continus*, Dunod, 2ed edition, 2006.

35- W. R. Wakeland, "Bode Compensator Design," *IEEE Transactions on Automatic Control*, October 1976, pp. 771-773.

36- W. X Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N X, 1996.

37- X Pretolve, "Stereo Vision," *Industrial Robot*, Vol. 21, No. 2, 1994, pp. 24-31.

38- X. B. Burl, *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. X. 1999.

39- Y. Gronjon, *Automatique Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continus, à temps discret, répresentation d'état*, Dunod, 2001.

40- Z. Gajic and M. Lelic, *Modern Control System Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. X, 1996.

Damascus University

**اللجنة العلمية:**

- **الأستاذ الدكتور كمال ناجي.**
- **الأستاذ الدكتور أبي سلمان.**
- **المدرس الدكتور سلام محمود.**

**المدقق اللغوي:**

- **الدكتور محسن العبيد**

**حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات**