

جامعة دمشق
مديرية الكتب والمطابعات
المكتبة

الدكتور المهندس
انطون شوقي محفل
استاذ في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
بجامعة دمشق

ميكانيك
السوائل والتكتيكي
جزء
الجزء الأول

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق

Damascus University



مقدمة الطبعة الثانية

بعد أن نفذت نسخ الطبعة الأولى التي صدرت عام ١٩٧٦ ، وبغية وضع هذا الكتاب في متناول الطلاب والمهندسين المهتمين بميكانيك السوائل في أسرع وقت ممكن ، فقد تقرر إصدار الطبعة الثانية بطريقة التصوير بعد أن تم تصحيح الأخطاء الطبعية وإدخال تعديلات طفيفة جداً على النص في بعض الفقرات . وقد أرجأنا إجراء بعض التعديلات الجذرية إلى الطبعة القادمة .

إننا نأمل أن تلاقي هذه الطبعة نفس الاستحسان الذي لاقته الطبعة الأولى ، وسنضمن عالماً ملاحظة تردنا تتعلق بالنص أو تبويب مواد الكتاب لندرسها ونأخذها بالاعتبار في الطبعة القادمة .

دمشق - تشرين أول ١٩٨١

المؤلف

جامعة دمشق
Damascus University



تقديم

قصدت من وضع هذا الكتاب تحقيق هدفين رئيسيين : اولهما ان يكون مرجعا عربيا لطلاب الهندسة الميكانيكية يعتمدون عليه في دراسة مقرر ميكانيك السوائل ، وثانيهما ان يساعد المهندس الميكانيكي الممارس في ايجاد مفاتيح الحلول للمسائل المطروحة عليه والمتعلقة بالتطبيقات المتعددة والمتشعبة لهذا العلم .

ان تطبيقات ميكانيك السوائل الحديث تدخل في فروع الهندسة الميكانيكية كافة ، وفي فروع هندسية أخرى (انظر المقدمة) . وأمام تشعب هذه التطبيقات وتداخلها وتباينها الظاهري ، واستحالة معالجتها بالتفصيل في كتاب واحد كانت موضوعات الكتاب العلمية مركزة على مسائل نموذجية توضح القوانين والعلاقات الأساسية التي تخضع لها جميع هذه التطبيقات ، وتبرز الربط الوثيق بين النظرية والتطبيق العملي ، الامر الذي توخينا الاشارة اليه في عنوان الكتاب من خلال مفهوم كلمة « تكتيكي » .

وقد قضت الظروف ، ان يصدر هذا الكتاب بجزأين . اشتمل الجزء الاول على مقدمة وخمسة فصول . وتتضمن المقدمة لمحة تاريخية عن تطور ميكانيك السوائل ، وتوضح موقعه من العلوم الاخرى ، واتجاهات وطرق بحثه ودراسته ، بالإضافة الى بحث هو بمثابة مدخل الى علم القيم الفيزيائية والجمل القياسية عليه يساعد الطالب على التأكد من صحة العلاقات الفيزيائية ويجنبه الوقوع في الاخطاء الحسابية التقليدية عند الانتقال من جملة قياس لآخرى . ويعالج الفصل الاول الصفات الفيزيائية - الميكانيكية للسوائل ، والثاني توازن السوائل الثابتة ومتغيرة الحجم (هيدرو - وايروستاتك) ، والثالث حركة السوائل العامة (كينيماتك) ، والرابع تحريك السوائل المثالية (هيدرو دينامك) ، اما الفصل الخامس فقد أفرد لمعالجة طرق ميكانيك السوائل المستخدمة في حل مسائل الجريان المثالي الأساسية .

أما الجزء الثاني من الكتاب ، الذي سيصدر لاحقا ، فيعالج تحريك السوائل الحقيقية وفصولا مختارة من تطبيقات ميكانيك السوائل .

وتحقيقاً لمبدأ التصميم الهندسي المعروف فقد رتبنا فصول الكتاب وفقراته بحيث يتم الانتقال من السهل إلى الصعب فالأصعب . وحيث أن دراسة ميكانيك السوائل تبدأ في السنة الثانية فقد اعتبرنا المستوى العلمي الذي بلغه الطالب ، وبخاصة في الرياضيات والفيزياء والميكانيك التكنيكي ومقاومة المواد وأسس الكهرباء ، مقدمة ضرورية لاستيعاب بعض نصوص الكتاب . وقد أتبعنا كل فقرة أساسية بمجموعة من أسئلة المراجعة والتمارين المحولة تتيح للطالب أن يختبر نفسه بنفسه ليتأكد من استيعابه للمادة النظرية وقدرته على تطبيقها .

وقد تمتعت في طباعة الكتاب استعمال حروف بحجمين مختلفين . ويمكن للقارئ في المرة الأولى أن يتجاوز مقاطع النص المطبوعة بحرف صغير . إلا أنها ضرورية لمن يريد التعمق في مادة الفقرة والاهتمام بالمصادر المختصة التي وردت في الكتاب بصيغة أرقام عربية محصورة ضمن قوسين متوسطين ، مثلاً [3] . أما الأرقام العربية المحصورة ضمن أقواس صغيرة ، مثلاً (2,15) ، فتشير إلى المعادلات الرياضية التي رُفِعت متسلسلة بالنسبة لكل فقرة رئيسية ليتسنى العودة إليها بسهولة .

بالرغم من الجهد المبذول في تصحيح ملازم الكتاب فقد وقعت بعض الأخطاء المطبعية التي تم حصرها في جدول خاص يرجى الرجوع إليه قبل البدء بقراءة الكتاب . وقد يكون هناك أخطاء أخرى فالتنا ملاحظتها نأمل أن لا يغيب عن فطنة القارئ .

ختاماً يطيب لي أن أشكر كل من ساعد على إخراج الكتاب واسهم في إعداد أشكاله ورسومه العديدة . وخص بالشكر الجزيل عمال وإدارة مطبعة جامعة دمشق الذين بذلوا كل ما في وسعهم لتلبية رغباتي في إخراج الكتاب بالشكل الأفضل الممكن .

انطانيوس عقل

دمشق في أيار ١٩٧٦

فهرس المحتويات

مقدمة

الصفحة		
١	لمحة تاريخية عن تطور ميكانيك السوائل	١.١
٨	ميكانيك السوائل التكنيكي ، تطبيقاته وطرق بحثه ودراسته	٢.١
١٤	تبويب ميكانيك السوائل وفروعه	٣.١
١٨	مدخل الى علم القيم والجعل القياسية	٤.١
١٩	القيم الفيزيائية العددية ووحدات القياس ومبادلاتها	١.٤.١
٢٧	العلاقة بين القيمة العددية ووحدة القياس، معادلة المقاس	٢.٤.١
٢٢	جملة المواحدات المالية والتكنيكية	٣.٤.١
٢٦	اسئلة مراجعة وتمارين	٥.١

الفصل الأول

الصفات الفيزيائية - الميكانيكية للسوائل

٣٧	تصنيف السوائل	١.٢
٤٠	اللوجة	٢.٢
٤٧	حافة الاجهاد الهيدروستاتيكية	٣.٢
٤٩	تصنيف القوى المؤثرة في السائل	١.٢.٢
٥٣	مفهوم الضغط في نقطة من السائل	٢.٢.٢
٥٧	مفهوم ضغط البخار	٤.٢
٥٩	الكثافة والحجم النوعي والوزن النوعي	٥.٢
٦٠	قابلية الانضغاط ومعامل المرونة	٦.٢
٦٣	التوتر السطحي والخاصية الشعرية	٧.٢
٧٢	معادلات تغير الحالة للغازات الكاملة	٨.٢
٧٥	قانون تغير الحالة الايزوثيرمي	١.٨.٢
٧٦	قانون تغير الحالة الايزوباري	٢.٨.٢
٧٦	قانون تغير الحالة الاديباتي	٣.٨.٢
٧٧	قانون تغير الحالة البوليثروبي	٤.٨.٢
٧٨	اسئلة مراجعة وتمارين	٩.٢

الفصل الثاني

توازن السوائل غير القابلة وال قابلة للانضغاط

(هيدروستاتيك وايروستاتيك)

الصفحة

٨٢	توازن السوائل الثابتة الحجم (المتجانسة)	١.٢
٨٢	التوازن في حقل الجاذبية الارضية	١.١.٢
٨٤	توزع الضغط في سائل متجانس - المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية	٢.١.٢
٨٧	توزع الضغط في سائل غير متجانس - شروط التوازن المستقر	١.٢.١.٢
٩٠	تطبيقات للمعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية	٢.٢.١.٢
٩٠	الاعوية المنطرفة	٢.٢.١.٢
٩١	مبدأ قياس الضغط - المانومتر والبارومتر	٢.٢.١.٢
١٠٣	حساب قوى الضغط على جدران الاعوية المستوية	٢.٢.١.٢
١٠٧	حساب قوى الضغط على جدران الاعوية المنحنية	٢.٢.١.٢
١١٤	قوة الرفع الهيدروستاتيكية (دافعة أوهفستيمين)	٢.٢.١.٢
١١٧	شروط التوازن المستقر للأجسام الطافية	٢.٢.١.٢
١٢٤	توزع الضغط في سائل مهمل الوزن - قانون باسكال	٢.٢
١٢٦	الكبس الهيدروليكي	٢.٢.٢
١٢٨	سداء التحكم الهيدروليكي	٢.٢.٢
١٣٠	توزع الضغط في سائل تحت تأثير حقل قوي عام - المعادلة الهيدروستاتيكية العامة	٢.٢.٢
١٣٧	توازن سائل ثقيل في حقل القوة النابذة	٢.٢.٢
١٤٥	توازن سائل ثقيل في اثناء يؤثر عليه تسارع خطي منتظم	٢.٢.٢
١٤٨	مسئلة مراجعة وتمارين	٢.٢
١٥٥	توازن السوائل المتغيرة الحجم (غير المتجانسة)	٢.٢
١٥٥	شروط التوازن والاستقرار الستاتيكي	٢.٢
١٦٠	توازن الهواء الجوي (ايروستاتيك)	٢.٢.٢
١٦٠	توازن الهواء الجوي تحت شروط ايزوترمية	٢.٢.٢
١٦٢	توازن الهواء الجوي تحت شروط ادياباتيكية	٢.٢.٢
١٦٤	توازن الهواء الجوي النظامي	٢.٢.٢
١٦٨	مسئلة مراجعة وتمارين	٢.٢

الفصل الثالث

حركة السوائل غير القابلة والقبالة للانصهار

(هيدروكينيماتيكا وإيروكينيماتيكا)

المفاهيم والقوانين العامة

المصطلح		
١٧٠	المفاهيم الأساسية لحركة السوائل	٥
١٧٠	حقل الجريان وحقل السرعة	١,٥
١٧٢	طريقة لاغرانج لدراسة حركة السوائل	٢,٥
١٧٣	طريقة أويلر لدراسة حركة السوائل	٣,٥
١٧٧	تصنيف حركات السوائل (الجريانات)	٤,٥
١٧٧	الجريانات غير المستقرة والمستقرة	١,٤,٥
١٨٠	الجريانات الثلاثية ، الثنائية ، والاحادية المقاس	٢,٤,٥
١٨٢	الجريانات الصفاحية والمضطربة	٣,٤,٥
١٨٥	الجريانات تحت الصوتية ، الحوتية ، وفوق الصوتية	٤,٤,٥
١٨٦	خط المسار ، خط التيار ، أنبوبة التيار	٥,٥
١٩٣	أسئلة مراجعة وتمارين	٦,٥
١٩٥	معادلة الاستمرار أو قانون الحفاظ المادة	٦
١٩٦	معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)	١,٦
٢٠١	معادلة الاستمرار العامة	٢,٦
٢٠٧	أسئلة مراجعة وتمارين	٣,٦
٢٠٩	الحركة العامة للسوائل	٧
٢٠٩	مفهوم التشوه والدوران	١,٧
٢١٨	شرط الغلو من الدوران	٢,٧
٢٢٤	المفاهيم الأولية والقوانين الأساسية للحركة الاقصارية	٣,٧
٢٢٤	مفهوم الجولان	١,٣,٧
٢٣٠	خط الاقصار وأنبوبة الاقصار	٢,٣,٧
٢٣٢	اقتلافة بين الجولان والدوران - قانون ستوكس التكاملي	٣,٣,٧
٢٣٧	قانون طومسون عن ثبات الجولان مع الزمن	١,٣,٧
٢٤٢	قوانين هلمهولتز	٥,٣,٧
٢٤٤	قانون بيو - سافار لحساب حقل السرعة المحرقة	٦,٣,٧
٢٤٨	أسئلة مراجعة وتمارين	٤,٧

الفصل الرابع

تحريك السوائل المثالية غير القابلة للانضغاط (هيدروديناميك)

الصفحة

٢٥١	قوانين التحريك الأساسية للجريانات وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)	٨
٢٥٢	معادلة أويلر الحركية وحيدة البعد	١,٨
٢٥٣	معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان	١,١,٨
٢٥٥	معادلة أويلر الحركية ناظميا على اتجاه الجريان	٢,١,٨
٢٥٧	معادلة برنولي	٢,٨
٢٥٧	معادلة برنولي كتكامل لمعادلة أويلر الحركية	١,٢,٨
٢٦٤	معادلة برنولي العامة وحيدة البعد	٢,٢,٨
٢٦٥	معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة	٢,٢,٨
٢٦٦	معادلة برنولي للحركة النسبية	٤,٢,٨
٢٧٠	تطبيقات على معادلة برنولي	٢,٨
٢٧١	انبوبة هنتوري	١,٢,٨
٢٧٤	تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير الكثافة	٢,٢,٨
٢٧٩	تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير ضغط زائد	٢,٢,٨
٢٨٢	تولد ضغط السحب في الجريان ومبدأ المضخات النافورية	٤,٢,٨
٢٨٦	السلطوح المقاصلة وتشكل الامامير	٥,٢,٨
٢٩٠	قياس الضغط والسرعة والتيار الحجمي	٦,٣,٨
٢٩٠	الضغط الحثائي ، والتحريك الكلي ومعامل الضغط	١,٦,٣,٨
٢٩٥	أجهزة قياس الضغط	٢,٦,٣,٨
٣٠٢	أجهزة قياس غزارة التدفق (التيار الحجمي)	٣,٦,٣,٨
٣٠٦	تفريغ خزان مع مراعاة تغير ارتفاع السطح اثر للسائل	٧,٢,٨
٣١٢	الجريان في ملف حلزوني	٨,٣,٨
٣١٦	أسئلة مراجعة وتمارين	٤,٨
٣٢٢	قانون الدفع المخطئ وقانون الدفع الدوراني	٥,٨
٣٢٥	اشتقاق قانون الدفع المخطئ وقانون الدفع الدوراني لجريان مستقر	١,٥,٨
٣٢٣	تطبيقات على قانون الدفع المخطئ والدوراني	٢,٥,٨
٣٢٣	حساب قوة الضغط المؤثرة على جدار كوع	١,٢,٥,٨
٣٢٦	حساب قوة رد فعل النافورة ومعامل التضييق لفتحة بوردا	٢,٢,٥,٨
٣٢٨	قوة ضغط نافورة حرة على جدار ثابت ومتحرك	٢,٢,٥,٨
٣٤٢	حساب الفقد الصدمي نتيجة تغير مفاجئ المقطع	٤,٢,٥,٨
٣٤٥	تحديد المقاومة الإجمالية لجسم	٥,٢,٥,٨

الصفحة

٢٥٢	حساب قوة الرفع الهيدروديناميكية - قانون كوتا - يوكوبسكي	٦.٢.٥.٨
٢٦٥	معادلة أويلر العنقية	٧.٢.٥.٨
٢٦٨	النظرية التافورية لحساب المرواح والرفاصات المولوية	٨.٢.٥.٨
٨٠	حساب السرعة النهائية لصاروخ - قانون زيوكوفسكي	٩.٢.٥.٨
٢٨٢	تطبيق قانون الدفع المخطئ على جريان شبه مستقر	١٠.٢.٥.٨
٣٨٦	مسئلة مراجعة وتمارين	٦.٨
٣٩٢	المعادلات الأساسية للجريانات المثالية ثنائية وثلاثية البعد	٩
٩٣	معادلات أويلر الحركية العامة	١.٩
١٩٦	الحلول الممكنة لمعادلات أويلر الحركية	٢.٩
٢٩٦	الشروط الحدية وشروط البدء	١.٢.٩
٢٩٨	صيغة عملية لمعادلات أويلر الحركية	٢.٢.٩
٤٠٠	تكامل معادلات أويلر في حالة الجريانات الدورانية	٢.٢.٩
٤٠٣	تكامل معادلات أويلر في حالة الجريانات اللادورانية	٤.٢.٩
٤٠٣	كل جريان مثالي هو حل لمعادلات أويلر الحركية	١.٤.٢.٩
٤٠٥	معادلة برنولي العامة للجريانات الكمونية	٢.٤.٢.٩
٤٠٨	المضمون الفيزيائي لكون السرعة U مفهوم الكتلة الهيدروديناميكية	٣.٩
٤١٠	الجريانات الكمونية ثنائية البعد المستوية	١٠
٤١١	تابع الكمون Φ : معادلة لابلاس وإمكانات حلها	١.١٠
٤١٣	تابع التيار Ψ : مضمونه الفيزيائي وعلاقته مع Φ	٢.١٠
٤١٨	مسئلة عن الجريانات الكمونية المستوية البسيطة	٣.١٠
٤١٩	الجريان الانسحابي المنتظم	١.٢.١٠
٤٢١	النبع والبالوعة في المستوي	٢.٢.١٠
٤٢٤	الأعصار المستوي	٣.٢.١٠
٤٢١	نبع وبالوعة بشدة واحدة : الثنائية المستوية	٤.٢.١٠
٤٢٩	النبع الإعصاري	٥.٢.١٠
٤٤٢	توزع سطحي من النبايع والبالوعات	٦.٢.١٠
٤٤٥	توزع سطحي أعصاري	٧.٢.١٠
٤٤٩	مسئلة مراجعة وتمارين	٤.١٠
٤٥٤	الجريانات الكمونية المتناظرة دورانيا	١١
٤٥٥	المعادلات التفاضلية الأساسية للجريانات الكمونية المتناظرة دورانيا	١.١١
٤٥٩	مسئلة عن الجريانات الكمونية البسيطة المتناظرة دورانيا	٢.١١
٤٥٩	الجريان الانسحابي المنتظم المتناظر دورانيا	١.٢.١١
٤٦٠	النبع النقطي والبالوعة النقطية	٢.٢.١١
٤٦٢	الثنائية النقطية	٣.٢.١١
٤٦٤	توزع خطي من النبايع أو البالوعات النقطية	٤.٢.١١
٤٦٧	مسئلة مراجعة وتمارين	٣.١١

الفصل الخامس

مسائل الجريان الأساسية وطرق حلها

الصفحة

١٢	طريقة النقاط المتساوية	١٢
١٠١٢	أسس الطريقة	١٠١٢
١٠١٢	القوى المؤثرة على النقاط المتساوية في جريان انسيابي	١٠١٢
٢٠١١٢	التخديس المباني لصورة الجريان الاجمالي الناتج عن تضام	٢٠١١٢
٤٧٨	جربانات كلية	٤٧٨
٤٨٠	دراسة الجريان حول اجسام مستوية	٤٨٠
٤٨٠	الجريان حول جسم نصفى	٤٨٠
٤٨٦	الجريان حول اجسام دائرية	٤٨٦
٢٠٢٠١٢	الجريان الايجولاني حول اسطوانة دائرية وحساب كتلتها	٢٠٢٠١٢
٤٨٨	الهيدروديناميكية	٤٨٨
٤٩٤	الجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية وحساب تأثير ماجنوسى	٤٩٤
٥٠٠	الجريان حول بروفييل متناظر (عديم الانحناء) وفيل السماكة	٥٠٠
٦٠٢٠١٢	الجريان حول بروفييل جناح حامل قليل الانحناء وعديم السماكة	٦٠٢٠١٢
٥٠٨	طريقة برونياوم	٥٠٨
٥١٤	الجريان بزاوية ودود حول بروفييل جناح حامل قليل السماكة والانحناء	٥١٤
٥٣١	الجريان حول بروفييل جناح حامل كبير السماكة والانحناء	٥٣١
٥٣٣	الجريان عبر شبك بروفييلات مستقيم	٥٣٣
٥٤٦	دراسة الجريان حول اجسام متناظرة دورانيا	٥٤٦
٥٤٦	الجريان حول جسم نصفى متناظر دورانيا	٥٤٦
٥٥٠	الجريان حول اجسام دائرية	٥٥٠
٥٥٢	الجريان حول كرة وحساب كتلتها الهيدروديناميكية	٥٥٢
٥٥٧	اسئلة مراجعة وتمارين	٥٥٧
١٣	طريقة النوايع المركبة لحساب اقجربانات المكونية المستوية	١٣
١٠١٣	الاعداد المركبة وتمثيلها	١٠١٣
٢٠١٣	تابع الكمون المركب والسرعة المركبة	٢٠١٣
٢٠١٣	أمثلة عن نوايع الكمون المركبة البسيطة	٢٠١٣
١٠١٣	الجريان الانسيابي المنظم	١٠١٣
٢٠١٣	التبع والبالوعة والاعصار الكمونى	٢٠١٣
٢٠١٣	المتساوية المستوية والجريان حول اسطوانة	٢٠١٣

المصفحة

٥٧٤	الجريان ضمن الفراغ الزاوي لجدارين مستويين	٤,٢,١٣
٥٧٦	قانونا بلازيوس - تشابليجين لحساب محصلة قوى الضغط وعزمها	٤,١٣
٥٧٩	التمثيل المطابق	٥,١٣
٥٧٩	المفاهيم والمبادئ الأساسية لطريقة التمثيل المطابق	١,٥,١٣
٥٨٥	أمثلة عن نواحي التمثيل المطابق	٢,٥,١٣
٥٨٥	تابع تمثيل بوكوفسكي	١,٢,٥,١٣
٥٩٧	تابع تمثيل كوينغ	٢,٢,٥,١٣
٥٩٩	طريقة الهودوغراف	٣,٢,٥,١٣
٦٠٦	أسئلة مراجعة وتمارين	٦,١٣
٦١١	الطريقة البنيانية (الهندسية) لحساب الجريانات المستوية	١٤
٦١٧	الطرق التماثلية	١٥
٦١٧	الاسس الفيزيائية والرياضية	١,١٥
٦٢١	التماثل مع الحقل الكهروديناميكي والكهرطيسي	٢,١٥
٦٢٦	التماثل مع الشفاء الصايوني	٣,١٥
٦٢١	التماثل مع الجريان الزاحف أو الرشحي	٤,١٥
٦٢٣	التماثل مع الحقل الحراري	٥,١٥
٦٢٣	أسئلة مراجعة وتمارين	٦,١٥
٦٢٦	فهرس أهم الرموز والأدلة المستخدمة	
٦٥٢	فهرس المصادر	
٦٦٩	معجم المصطلحات العلمية	
١٤	جدول الخطأ والصواب	







المقدمة

١.١ لمحة تاريخية عن تطور ميكانيك السوائل

إن الاستمرارية الصاعدة التي تتطلبها عملية التطور والنمو للإنسان والمجتمع والعلوم أيضاً لا تتحقق فقط بتوجيه الأنظار على الاهداف البعيدة، وانما تحتاج أيضاً إلى رجعة للماضي، يتم فيها تقويم النتائج ودراسة الأساليب والوسائل التي أدت إلى هذه النتائج، وكذلك التعرف على الرواد الأوائل الذين تخطوا بأفكارهم ونتائجهم حدود زمانهم فأصبحوا مثلاً عالياً يجنبنا الاقتداء بهم عدم الوقوع فريسة لعطالة الإرتياح الذاتي أو الغرور بنتائجنا. وهذا ما نهدف إليه هذه الألمحة التاريخية المقتضبة عن تطور ميكانيك السوائل.

إن ميكانيك السوائل هو أحد العلوم الأساسية الهندسية، التي انشقت منذ بداية القرن التاسع عشر عن العلوم الأساسية العامة كالفيزياء والكيمياء، لتركز الاهتمام على إيجاد الحلول العملية للمسائل التي تهم تطور التكنيك. وقد مرّ هذا العلم بمراحل مختلفة من التطور والنمو قبل أن يصل إلى المستوى الرفيع الذي يحتله اليوم. وكان طبيعياً خلال هذه المراحل أن تتباين وتيرات التطور وفقاً للمستوى العلمي والتكنيكي، وأن يتبدل أو يختفي العديد من المفاهيم والنظريات والطرق لتحل محلها أخرى أكثر دقة وواقعية.

لنتذكر مثلاً أنه حتى أواخر القرن الماضي تقريباً كان يسود الاعتقاد باستحالة طيران الأجسام الأثقل من الهواء! واليوم لا يحطربال أحدنا ونحن

نطير في طائرة نفثة حديثة على ارتفاع آلاف الأمتار وبسرعات تجاوزت سرعة الصوت ، أنه فقط منذ حوالي 77 عاماً حاول العالم الألماني ليلينثال (1896 - 1848) O . Lilienthal أن يحذو حذو الطيور فركب أجنحة اصطناعية وطار لأول مرة بتاريخ 16.8.1894 لمسافة 350 m مبرهنًا صحة دراسته الشهيرة : « طيران الطيور كأساس لفن الطيران » ، التي نشرها عام 1889 . واعتبر ذلك في حينه نصراً علمياً كبيراً . كما أنه من الصعب تحديد أوجه الشبه بين عنفة فرنسيس المركبة على سد الفرات العظيم والعنفة التي عرضها فرنسيس J. Francis لأول مرة عام 1849 والتي اعتبرت فتحاً جديداً في بناء الآلات الهيدروليكية .

يبد أن عرضاً تاريخياً مقتضباً لتطور ميكانيك السوائل يتجلى بأوضح ما يمكن من خلال تتبع المراحل التي مرت بها مسألة حساب المقاومة Drag لجسم يتحرك في سائل ، وهي المسألة الرئيسية التي كانت جهود الباحثين ، ولا تزال ، منصبة على حلها .

لقد ظهرت أولى المحاولات لصياغة قانون المقاومة في القرن السابع عشر ، حيث تطلبت ذلك ضرورة دراسة السقوط الحر للأجسام ومشكلة النواس الذي كان يستعمل كجهاز للقياس . وكانت تسود وقتئذ ، وحتى نهاية ذلك القرن ، آراء أوسطو (384 - 322 b. Ch.) Aristoteles القائلة بأن زمن سقوط الأجسام يتناسب عكساً ووزنها ، أي أن الأجسام الثقيلة تسقط أسرع من الأجسام الخفيفة . ولتفنيد هذا الرأي قام العالم الإيطالي المشهور غاليلي (1564 - 1642) G. Galilei في عام 1638 بتجارب عديدة على أجسام مختلفة الوزن أسقطها من برج بيزا ، واستطاع بنتيجتها أن يبرهن لأول مرة في التاريخ أن المقاومة التي تتلقاها الأجسام المتحركة في السوائل تتناسب طردياً مع كثافة السائل ومع سرعة الجسم ، ولكنه لم يقم بالحساب العددي للمقاومة .

وفي أوائل القرن الثامن عشر توصل العالم الإنجليزي نيوطن I. Newton (1642 - 1727) نتيجة لتجارب عديدة أجراها على سقوط كرة في سوائل مختلفة إلى إكتشاف القانون الأساسي للمقاومة :

$$F_w = c_w \cdot A V^2 \quad (1.1)$$

حيث c_w معامل المقاومة ، ρ كثافة السائل ، A مقطع الجسم عمودياً على اتجاه الحركة ، V سرعة الجسم . وهذا يعني أن :

المقاومة تتناسب طردياً مع كثافة السائل ومساحة مقطعه العمودي على اتجاه الحركة ومع مربع السرعة .

وعلى نيوطن هذا القانون بمساعدة نظرية التصادم ، حيث اعتبر السائل مؤلفاً من جزيئات كتلية غير مرنة تفقد عند اصطدامها بالجسم كامل سرعتها [16] .

في أواسط القرن الثامن عشر استطاع القبطان الإفريقي بوردا Borda عام 1763 أن يؤكد نتيجة تجارب عديدة أجراها على أجسام مختلفة صحة قانون المقاومة المربع لنيوطن ، ولكنه رفض تفسيره على أساس نظرية التصادم وادّعى حجراً الأساس للنظرية الهيدروديناميكية للمقاومة ، التي تعتبر أن المقاومة التي تتلقاها الأجسام المغمورة المتحركة في السوائل تنشأ بسبب قوى الاحتكاك وقوى الضغط . والفرق الجوهرى بين النظريتين هو أنه حسب نيوطن فإن مقدمة الجسم فقط تؤثر على المقاومة ، بينما يكون حسب النظرية الهيدروديناميكية المؤخرة الجسم أيضاً تأثير حاسم على تحديد المقاومة الإجمالية ، كما تؤكد ذلك النظريات والتجارب الحديثة .

في النصف الثاني من القرن الثامن عشر تركزت الأبحاث النظرية على دراسة حركة السوائل غير اللزجة ، وبذلك وضع حجر الأساس للهيدروديناميك النظري الذي يفتخر حتى الآن بأسماء مؤسسيه من أمثال

ليونهارد أويلر L. Euler (1707 - 1783) ، دانيال برنولي D. Bernoulli (1700 - 1783) . يوسف لاغرانج J. Lagrange (1736 - 1831) وغيرهم
 فقد نشر أويلر عام 1775 دراسته المشهورة « المبادئ العامة لحركة
 السوائل » التي استخرج فيها لأول مرة المعادلات التفاضلية الأساسية
 لحركة السوائل المثالية ، والتي تعرف اليوم باسم : معادلات أويلر التحريكية .
 وهو أول من أدخل مفهوم الضغط Pressure فتلاشت بذلك نظرية التصادم
 لنيوتن . كما ترتبط باسمه المعادلة العنيفة الأساسية التي توضح مبدأ نقل
 القدرة في آلات الجريان . أما برنولي فقد استخرج قانونه المشهور عن
 العلاقة بين السرعة والضغط والارتفاع المكاني ؛ بينما صاغ لاغرانج نظرية
 الجريانات الكمونية Potential flow (راجع الفصل الرابع) .

وخلال القرن التاسع عشر تطور ميكانيك السوائل النظري حتى وصل
 إلى درجة الكمال تقريباً . فقد صاغ هلمهولتز H. Helmholtz (1821-1894)
 نظرية الحركة الإعصارية Vortex motion عام 1858 ، التي طورها فيما
 بعد بوكفسكي N. Joukowski (1847 - 1921) في روسيا وبواندل
 L. Prandtl (1875 - 1953) في ألمانيا وأصبحت أساساً لنظرية الجناح
 الحامل Airfoil theory . كما وضع والكين W. Rankine (1820 - 1872)
 عام 1862 نظرية الينابيع والبالوعات Theory of sources and sinks التي
 طبقت فيهما بعد لحساب هياكل السفن والمناطيد وطورت حتى أصبحت
 اليوم إحدى أهم الطرق الحديثة لميكانيك السوائل المعروفة باسم طريقة النقاط
 الشاذة . وقدم هلمهولتز عام 1873 عملاً إبداعياً عن نظرية التشابه للجريانات
 Flow Similarity ، الذي لم تكتشف أهميته إلا منذ وقت قريب جداً
 [43] . واستطاع أيوي G. Airy (1801 - 1896) صياغة نظرية متكاملة
 لحركة الأمواج السطحية لاتزال معتمدة حتى وقتنا الحاضر [9] .

ولكن بالرغم من هذا التطور الهائل لميكانيك السوائل النظري فإنه
أخفق في حساب مقاومة الأجسام المتحركة أو الضياع في القدرة والضغط
للجريان في الأنابيب والأقنية . فقد حاول دالمبير (1717-1783) d'Alembert
حساب مقاومة الأجسام في جريانات كونية فحصل على نتيجة مزهلة :
المقاومة تساوي الصفر . وهذا ما يعرف بتناقضة دالمبير d'Alembert's
paradox . وأدرك الباحثون بعد فترة طويلة أن سبب هذه النتيجة المزهلة
هو إهمال المعامل الفيزيائي المسؤول عن المقاومة وهو اللزوجة Viscosity ،
فحاولوا إدخالها في معادلات الحركة . وتمكن العالم الإفرنسي نافيير
(1785 - 1836) M. Navier عام 1826 بناء على فرضيات فيزيائية متعددة
من صياغة المعادلات التحريكية العامة للسوائل اللزجة ، التي اشتقها بدقة عام
1846 العالم الإنجليزي ستوكس (1819-1903) G. Stokes . وبالرغم من أن
هذه المعادلات التفاضلية غير الخطية المعروفة اليوم باسم معادلات نافيير -
ستوكس (راجع الفصل السادس) تشكل الأساس لدراسة حركة السوائل
الحقيقية (اللزجة) فإن صعوبة حلها بالمقارنة مع معادلات أويلر لم تنح
في ذلك الوقت سوى إمكانية تطبيقها على حالات خاصة جداً مثل حساب
المقاومة لكرة في جريان بطيء جداً يعرف باسم جريان ستوكس . كذلك
لم تسفر المحاولات الجديدة لحساب المقاومة في جريانات غير لزجة عن
نتائج مرضية . فقد وضع هلمهولتز عام 1868 وكوشهوف G. Kirchhoff
(1824 - 1887) عام 1869 أسس نظرية خطوط التيار الحرة ، وحسب
كوشهوف على أساسها المقاومة التي تتلقاها صفيحة عرضانية على اتجاه
الجران فوجد أن معامل المقاومة $c_w = 0,88$ بينما التجارب أثبتت أن :
 $c_w \approx 2,0$ [16] .

وكان طبيعياً أمام هذا الواقع ألا تحظى نتائج الهيدروديناميك النظري

إلا بأهمية تطبيقية ضئيلة وخاصة عند المهندسين الذين اضطروا لتطوير فرع خاص بهم أطلقوا عليه الهيدروليك ، يعتمد في الدرجة الأولى على القيام بتجارب كثيرة وحصر نتائجها في قوانين تجريبية. أو نصف تجريبية صالحة للتطبيق العملي . واستدعت عملية التطور هذه إنشاء وتطوير المنشآت والطرق التجريبية وأجهزة القياس ، وبذلك أرسيت دعائم ميكانيك السوائل التجريبي . ولعبت الأتقنية الهوائية Wind tunnel لدراسة وقياس القوى المؤثرة على جسم في تيار هوائي دوراً هاماً في هذا المضمار ، لا يزال قائماً حتى الآن . إن أول قناة هوائية بنيت في روسيا عام 1890 من قبل زيولكوفسكي (1857-1935) K. Ziolkowski ، الذي لقب فيما بعد بأبي الصواريخ ، وبنيت في نفس العام قناة في الدانمرك ، وأخرى في فرنسا عام 1896 وفي إنجلترا عام 1899 .

ولمعت في مجال الهيدروليك أسماء كثيرة منها : بوازيل J. Poiseuille (1799 - 1869) في فرنسا ، هاجن G. Hagen (1797 - 1884) في ألمانيا ، وينولدز O. Reynold (1842 - 1912) في إنجلترا ، الذين يرتبط بأسمائهم اكتشاف نوعين من الجريانات : الصفائحي والمضطرب Laminar and turbulent . فقد استطاع هاجن وبوازيل حساب الخسارة في قدرة الجريان الصفائحي في الأنابيب ، بينما يعتبر رينولدز مؤسس نظرية الاضطراب Turbulence theory التي لا تزال تتوسع وتعمق وتقدم مادة لا تنضب للبحث العلمي حتى وقتنا الحاضر . أما بتروف (1836-1920) N. Petrow في روسيا فقد وضع أسس النظرية الهيدروديناميكية للتزيت (راجع الفصل السادس) .

في أواخر القرن التاسع عشر وبسبب الاختلاف الجوهرى من حيث الطريقة والمهدف بين الهيدروديناميك النظري والهيدروليك فقد انشطر

ميكانيك السوائل إلى هذين الفرعين شبه المستقلين عن بعضهما ، مما أثر على تطويره جداً . ويعود الفضل الأكبر لإعادة توحيد هذين الفرعين في مطلع هذا القرن للعالم الألماني الفذ لودفيج براندل الذي جمع بين دقة نادرة في الملاحظة وقدرة فائقة للتجريد الرياضي ، وبذلك استطاع عام 1904 اكتشاف نظرية الطبقة الحدية Boundary - layer theory ، التي فتحت وبصورة مفاجئة باب الولوج لمسائل ، منها مسألة المقاومة ، كان من المؤكد أنها مستحيلة الحل بالطرق التجريبية البحتة أو الرياضية الصرفة . كما مهدت الطريق للمعالجة العددية لبعض الحقول المجاورة لميكانيك السوائل مثل النقل الحراري والمادي بواسطة الجريانات . ولذا فإن « تاريخ اكتشافها يعتبر عن حق تاريخ ميلاد ميكانيك السوائل الحديث » [64] .

لقد أسس براندل مدرسة جديدة للبحث العلمي تعتمد على ضرورة الربط الوثيق بين النظرية والتجربة . فالوضوح النظري يحدد البرنامج التجريبي بما هو ضروري وملح ويوجهه في الاتجاه الذي نتوقع الحصول منه على أجوبة للاستفسارات النظرية ، ونؤكد بالتجربة مدى صحة ومطابقة نتائجها النظرية مع الواقع . ولقد رسخ تلاميذ براندل من أمثال بيتس A. Betz ، شليختنج H. Schlichting ، نيكورادسي J. Nikuradse ، وزملاؤه من أمثال فون كارمان Th. v. Kármán دعائم هذه المدرسة حتى أصبحت طريقتها هي الأسلوب المعتمد حالياً في كافة فروع البحث العلمي . واستطاع براندل نفسه بمساعدة بعض التجارب الأساسية القليلة المبينة على أساس نظري التوصل إلى نتائج حاسمة نذكر منها على سبيل العد لا الحصر : نظرية الجناح الحامل ، نظرية الجريانات تحت وفوق الصوتية ، نظرية الاضطراب وغيرها . وبكفي لتبيان الأهمية المتصاعدة لنظرية الطبقة الحدية أن نذكر أنه في العشر سنوات الأولى من اكتشافها كان معدل عدد الأبحاث التي تناولتها

بحثاً واحداً في العام ، بينما بلغ هذا المعدل 120 بحثاً عام 1954 [64] ، وهو يتجاوز اليوم ذلك الرقم بكثير .

بعد هذه اللوحة التاريخية المختصرة يجدر بنا أن نسأل : أين أصبح موقع ميكانيك السوائل الحديث من بقية العلوم الأخرى ، وما هي أهم تطبيقاته وطرقه التي تهتم المهندس الميكانيكي بشكل عام والمختص بشكل خاص ، وكيف يتمكن الطالب أو المبتدي من دراسته وفهم قوانينه ؟

٢.١ ميكانيك السوائل التكنيكي ، تطبيقاته وطرق بحثه ودراسته

إذا كان الميكانيك العام يعالج في الماضي بشكل متكامل مسائل توازن وحركة المادة بحالاتها الثلاثة : الصلبة والمائعة والغازية ، أنظر مثلاً [67] ، فإن التطور الكبير لهذا العلم خلال قرننا الحالي قد أدى إلى تقسيمه لعلمين مستقلين تقريباً هما :

ميكانيك الجسم الصلب : ويدرس حالة المادة الصلبة على أساس التعويض عن الكتل بنقاط مادية ويكتفي أحياناً بدراسة نقطة واحدة فقط ؛ ولهذا سمي أيضاً ميكانيك النقاط المادية Mechanics of point particles .
ميكانيك السوائل : ويدرس المادة في حالتها المائعة والغازية على أساس أنها مؤلفة من جزيئات مادية موزعة في الحالة العامة بانتظام وبشكل مستمر ، ولهذا سمي أيضاً ميكانيك الوسط المستمر Mechanics of continuum .

وتضاف صفة « تكنيكي » أو « تطبيقي » لكل منهما إذا كانت الموضوعات موجهة بصورة أساسية للتطبيقات الهندسية .

وتتضح من هذا حقيقتان : الأولى أن موضوعات ميكانيك السوائل متشعبة ومتعددة ، ربما تعبر عنها كلمة هيراقليد (Heraklit (544 - 483 b. Ch

المشهورة : « Panta rhei » أي « كل ما يجري » ، والثانية أن القوانين الأساسية للميكانيك العام المعروفة في أقسامه الرئيسية : التوازن ، الحركة والتحريك ، التي تعالج سلوكية المادة : تبقى محافظة على صحتها تماماً في ميكانيك السوائل . فمثلاً ينطبق على كل جزيئة سائلة القانون الأساسي للتحريك : القوة = الكتلة $\times$ التسارع . ولكن لابد من التحذير ، خاصة بالنسبة للمبتدئ وغير المختص ، من محاولة التطبيق الأعمى لقوانين ميكانيك الجسم الصلب على الأجسام السائلة ، وخاصة في حالة الجريان . إذ أنه لو كان الأمر كذلك لفقد ميكانيك السوائل صفته كعلم مستقل . وبالرغم من أن ميكانيك السوائل التكنيكي يبقى فرعاً من الميكانيك العام ، إلا أن التطور الهائل الذي أصابه في السنوات الأخيرة جعله يتخطى حدوده الأصلية ويتداخل في علوم غير ميكانيكية في الأصل مثل : الترموديناميك Thermodynamics ، الكيمياء الحركية Chemical Kinetics التي تدرس تفاصيل التفاعلات الكيميائية ، فيزياء البلازما Plasma Physics وغيرها [12] ، مما أدى إلى نشوء فروع اختصاصية جديدة لميكانيك السوائل (راجع ٣.١) .

ولقد ازدادت أهمية ميكانيك السوائل التكنيكي بسبب تداخله في فروع علمية وتكنيكية متعددة ومختلفة فأصبح يمثل بالنسبة لتدريس هذه الفروع علماً أساسياً ، وبالنسبة لأبحاثها العلمية علماً مساعداً لا غنى عنه :

وتتجلى أهمية ميكانيك السوائل التكنيكي بالنسبة للمهندس بالسؤال المباشر أو غير المباشر عن إمكانية شحن السوائل بالقدرة وتحويلها لأنواع أخرى أو نقلها أو تخزينها . ولأخذ فكرة بسيطة عن هذه الإمكانيات فإننا نذكر أن هناك :

١ - سوائيل تنقل القدرة الميكانيكية وتستغل إما بشكل مباشر كما في مثال النقل الهيدروليكي أو الهوائي Hydraulic and pneumatic transport أو غير مباشر كما في مثال آلات الجريان (العنفات والمضخات) Turbomachinery .

٢ - سوائيل تنقل القدرة الحرارية وذلك إما في جريانات حرة كما في مثال الجريان حول سطوح باردة أو ساخنة ، أو في جريانات قسرية كما في مثال الجريان في نواقل حرارية (التدفئة المركزية !) .

٣ - سوائيل تخزين القدرة الكيميائية كما في مثال مواد الاحتراق المائية والغازية .

٤ - سوائيل ناقلة أو موصلة للقدرة الميكانيكية كما في مثال إنتشار الموجات للضغط العالي أو المنخفض ، أو الناتجة عن الانفجارات أو الموجات المائية .

٥ - سوائيل لا تستغل قدرتها كما في مثال الهواء الجوي ، جريان المياه الجوفية ، الجريان الرشحي والجريان عبر المصافي .

وفي مجال الهندسة الميكانيكية ، التي تهتمنا بصورة خاصة ، فإن تطبيقات ميكانيك السوائيل متعددة ومختلفة ، لأن العديد من العمليات التي تحدث في الآلة تتأثر بشكل أساسي بجريان السوائيل . ففي بناء الطائرات يسعى المصمم لإعطائها شكلاً مناسباً بحيث تكون قوة الرفع Lift المتولدة أعظمية والمقاومة أصغرية . وفي بناء آلات الجريان ، وسواء كانت آلات عمل كالمضخات والضواغط أو آلات قوة كالعنفات ، وسواء كان السائل هواءً أو غازاً أو ماءً ، فإن مردود عملية تحويل القدرة التي يحملها التيار الجاري في الآلة يتأثر بصورة حاسمة بشكل ريش الدولاب الدائر Impeller ودولاب التوجيه Guide wheel ، وكذلك بشكل المغلف Casing . وفي مجال نقل الموائع والغازات كالنفط ومياه الشرب والغاز الطبيعي عبر أنابيب تصل اليوم بين قارات

بأكملها وكذلك بالنسبة لشبكات توزيعها فإن المهم تصميم هذه الأنابيب ومتمماتها من أكواع وتفرعات وصمامات وغيرها بحيث تكون القدرة الضائعة أصغرية . كما تزداد أهمية النظرية الهيدروديناميكية والهيدروستاتيكية لتزييت المضاجع الانزلاقية Bearing lubrication مع الازدياد المضطرد لسرعة دوران الآلات من محركات انفجارية وآلات تشغيل وعنفات . وتبرز ضرورة السعي لإيجاد التصميم الأفضل لهذه المضاجع من حقيقة أن القدرة الضائعة بالاحتكاك في مضجع عنفة غازية يصل إلى مئات الكيلو واطات [72] ، [73] .

بالنسبة لمحطات القوى البخارية أو الغازية فإن مردود تحويل القدرة الحرارية إلى ميكانيكية يتأثر لدرجة كبيرة بعمليات الاضطراب أثناء احتراق مادة الوقود وامتزاجها بالهواء [69] . ويكتسب هذا الموضوع أهمية كبرى في صناعة المحركات الانفجارية لعلاقته المباشرة بتقليل استهلاك الوقود [68] .

كذلك تزداد أهمية دراسة الجريانات المتعددة الطور ، التي تستخدم فيها قدرة السائل لنقل أو فصل مواد صلبة ، كما هو الحال في عمليات التجريف الهيدروليكي ، وتفرغ وشحن الحبوب وتنقية هواء المصانع من الغبار .

ويبدو للوهلة الأولى أن هذه الأمثلة القليلة من تطبيقات ميكانيك السوائل متباعدة لارابط بينها ، وبالتالي فإن دراسة هذا العلم يحتاج لسنوات طويلة ، أو أنه ليس بالمستطاع خلال فترة زمنية محددة سوى الحصول على معلومات وافرة ولكن سطحية . والحقيقة أن هذا الاستنتاج خاطيء ، لأن كافة التطبيقات تخضع لعدد قليل من القوانين الأساسية . وسرى من خلال دراستنا أن كافة عمليات وظواهر الجريان المعقدة التي تدخل

في تطبيقات ميكانيك السوائل المختلفة تقوم على أسس عامة تجمع بينها ، أي أنه بالإمكان إرجاع هذه العمليات والظواهر المعقدة إلى عمليات بسيطة أولية Elementary processes وإيجاد الصياغة الرياضية لمعادلاتها ومن ثم حساب القوى والعزوم المؤثرة . وتنجلي هذه الحقيقة باستخدام أشكال أساسية للأجسام في آلات مختلفة ، كما تنجلي أيضاً في طبيعة الجريان حول أجسام مختلفة . فليس من الصعب التأكد أن بروفيل Profile جناح الطائرة لا يختلف بشيء يذكر عن بروفيل ريشة الدولاب الدائر أو الثابت لعنفة أو مضخة أومروحة . وبالتالي فإننا نستفيد من نظرية الجناح الحامل بهدف حساب القوى والعزوم الناتجة عن الجريان حول الجناح في مجالات تطبيقية تبدو متباينة مثل بناء الطائرات وآلات الجريان . ومن جهة أخرى فإن طبيعة الجريان حول أجسام مختلفة هي واحدة تقريباً . فحول الجسم تشكل طبقة حدية لا يمكن فيها إهمال قوى الاحتكاك وتزايد فيها السرعة من الصفر على سطح الجسم وحتى قيمة معينة . وخارج هذه الطبقة يسود جريان مثالي عديم الاحتكاك . وقد أثبتت الأبحاث النظرية والتجريبية أن توزيع السرعة Velocity profile في الطبقة الحدية يتعلق بالدرجة الأولى بتدرج الضغط باتجاه الجريان وليس بشكل الجسم . وبالتالي فإنه يمكن من معرفة توزيع السرعة الحصول على معطيات هامة عن قوى الاحتكاك والمقاومة التي يتعرض لها الجسم .

لنأخذ مثلاً آخرًا يتعلق بنشوء الاضطراب والأعاصير ، أخذ يكتسب في الآونة الأخيرة أهمية متزايدة . ففي الفضاء الجوي توجد أعاصير تبلغ أقطارها عدة آلاف من الكيلومترات وتؤثر كمنطق ضغط منخفض بشكل حاسم على حالة الطقس . بينما تبقى أقطار الأعاصير المتشكلة في الطبقة الحدية حول الأجسام أو في الأقنية في حدود 100 mm - 1 . إن

هذه الأعاصير تستهلك دائماً قدرة ، وأحياناً تكون قدرتها ذات قوة تدميرية هائلة تؤدي إلى كوارث قومية كما في حالة الأعاصير الاستوائية . ولكن طبيعة تشكل هذه الأعاصير وشكلها الخارجي متشابهة في كافة الحالات ، ولذلك فإن دراسة العمليات الأساسية لتشكيلها سيقود إلى إمكانية التحكم بمسارها بهدف تقليل أضرارها بالنسبة لحالة الطقس أو الضياع في القدرة أو حتى الاستفادة منها في عمليات المزج والنقل الحراري والاحتراق .

ويستخدم ميكانيك السوائل في حل المسائل المتعددة المطروحة عليه طرقاً متطورة حسابية وتجريبية . وقد ساعد انتشار مراكز الحاسبات الإلكترونية على تحرير طاقة كبيرة للمهندسين والباحثين ، كانت تهدر سابقاً في زمن المساطر والحاسبات العادية من أجل تسطير قوائم عددية طويلة جداً ، فأصبحت توجه اليوم للبحث العلمي والعمل الهندسي المبدع من أجل حل المسائل الأساسية للجريان . كما أن إدخال عناصر القياس الإلكترونية واستخدام الحاسبات العددية قد زاد من دقة القياس وسهل جداً التقويم العددي للنتائج القياسية .

على أساس ماسبق بنيت الطريقة الحديثة لدراسة وتدريس ميكانيك السوائل التكنيكي والتي تتضمن في جوهرها التركيز على الفهم العميق للأسس والنواظم الفيزيائية العامة التي تجمع بين التطبيقات المختلفة . فالطالب يتمرن على استخدام أساليب البحث العلمي ، وينمي باستمرار ملكة تفكيره ، بحيث يتعلم كيف يصل من ملاحظة الظواهر إلى التجريد وصياغة العلاقة الرياضية ، ومن ثم إيجاد الحل المسبق للمسألة المطروحة بنطبق الطرق الحسابية والتأكد من النتائج بإجراء تجارب معقولة . إن هذا

النهج سيجعل مهندس المستقبل قادراً على التفكير المستقل والإبداع وبالتالي مؤهلاً ليس فقط لدراسة وحساب نماذج الآلات التي مرت معه أثناء دراسته ، وإنما لتطوير هذه الآلات وابتكار نماذج وطرائق جديدة . ويتبين من ذلك أن دور المدرس هو أبعد ما يكون عن تلقين المعلومات الجاهزة لطلابه . إن هذا الدور تحدده كلمة الفيلسوف الألماني كانت (1724 - 1804) I. Kant التي قدم بها إحدى محاضراته : « إن ما ينتظر من المعلم هو أن يربي في مستمعيه أولاً الإنسان المتفهم وبعدها العاقل وأخيراً العالم . وميزة هذه الطريقة هي أنه عندما لا يتاح للطلاب الوصول للمرحلة الأخيرة ، كما يحدث عامة ، فإنه يكون قد استفاد من الإرشادات ، وإذا لم يكن ذلك من أجل المدرسة فحتماً من أجل الحياة ، لأنه سيصبح أكثر تمزناً وذكاء . أما إذا عكست هذه الطريقة فإن التلميذ سيتلقى نوعاً من التعقل قبل أن يتكوّن فهمه ، ويحمل علماً مستعاراً ملصوقاً عليه وغير نامٍ فيه ، بينما قدرته الذاتية لا تزال غير مشعرة كالسابق ، ولكن بنفس الوقت ، وبدافع جنون الحكمة ، يكون قد أصبح أكثر فساداً » .

٣.١ تبويب ميكانيك السوائل وفروع

إن لميكانيك السوائل ، كما لكل فرع علمي آخر ، طرقات مميزة ولغة مشتركة تقريباً يتكلم ويكتب بها ممثلوه متبعين في إختيار وعرض المواضيع مبدأ معيناً في التبويب والمعالجة . هذا المبدأ يجب أن يكون مبنياً على أساس أنه خلال التعمق المضطرد في المادة العلمية يمكن دائماً الاستفادة مما سبق تعلمه في فهم وتطبيق الجديد منها [12] .

توجد كتب كثيرة عن ميكانيك السوائل تنبئ عناوينها باتجاهات تطوره وفروعه التي يمكن تصنيفها وفق الأسس التالية :

آ - الموضوع وطريقة المعالجة : وهنا نميز بين اتجاهين رئيسيين الأول يهتم بالناحية النظرية ، ويعتمد على قسط كبير من الرياضيات العالية ويركز على سوق البراهين الرياضية الدقيقة والإشتقاقات المعقدة للعلاقات والقوانين المتعلقة بمسائل الجريان ، ويطلق عليه الهيدروميكانيك النظري [1] أو الهيدروديناميك النظري [2] أو الإيرو ديناميك النظري [3] . والثاني يهتم بالناحية الهندسية التطبيقية ، ويكتفي بعلاقات رياضية بسيطة نسبياً من أجل استخراج قوانين جاهزة للإستخدام العملي والوصول لحلول تقريبية ذات دقة كافية لمسائل الجريان التي تدخل في تطبيقاته ، وذلك بمراعاة الظواهر والتأثيرات الثانوية على الجريان الأساسي بإدخال معاملات أو توابع تصحيح يتم تحديدها نظرياً أو تجريبياً . ويبرز هذا الاتجاه في عناوين الكتب المختلفة التي يركز كل منها على ناحية تطبيقية معينة مثل ميكانيك السوائل التطبيقي [7, 7a] ، ميكانيك السوائل التكنيكي [8] ، الهيدرو - والإيرو ميكانيك التكنيكي [9] ، ميكانيك السوائل مع تطبيقات هندسية [10] ، [11] ، ميكانيك السوائل العملي [15] وحديثاً جداً تكنيك الجريان Flow technique [12, 13, 14] ، حيث يقصد بكلمة « تكنيك » علم تطبيقي .

لقد تبلور هذان الاتجاهان بوضوح في السنوات الأخيرة بحيث أنه بعد الثلاثينيات قلما صدر كتاب لم تلحق بعنوانه صفة تنبه عن هوية إتجاهه [4a] [4] [6] . ومع هذا فهما مرتبطان بوثوق مع بعضهما ، ذلك أن ميكانيك السوائل التكنيكي يعتمد على المعلومات والحلول النظرية لميكانيك السوائل النظري ، الذي يتلقى بدوره من الأول مواضع أبحاثه المثيرة التي يطرحها الواقع العملي .

ب - حالة الوسط السائلي وسلوكيته : لقد درجت على هذا الأساس

إنطلاقاً من كون الوسط السائل مائعاً أو غازاً ، في حالة سكون أو حركة ،
تسمية القزوع التالية لميكانيك السوائل :

الهيدروستاتيك : ويدرس توازن الماء والموائع الأخرى في حالة
السكون. [5] .

الهيدروكينيماتيك : ويدرس الحركة البحتة للماء والموائع الأخرى .
الهيدروديناميك : ويدرس تحريك الماء والموائع الأخرى أي توازن
القوى والعزوم في حالة الجريان .

الهيدروليك : وهو قسم من الهيدروديناميك يعالج مسائل الجريان
وحيدة البعد . كما هو الحال في الأنابيب والأقنية [19] ، [20] ، [21] ، [22] .

الأيروستاتيك : ويدرس بصورة أساسية توازن الهواء الجوي [5]

الأيروكينيماتيك : ويدرس الحركة البحتة للهواء والغازات الأخرى .
الأيروديناميك : ويدرس تحريك الهواء حتى سرعات أقل من سرعة
الصوت ، أي حتى تغيرات متوسطة للكثافة ، ويعتبر أساساً لعلم الطيران
[17] ، [18] ، وآلات الجريان الحديثة [25] .

الغازديناميك : ويدرس تحريك الهواء والغازات الأخرى عند سرعات
قريبة وأكبر من سرعة الصوت ، أي عندما يكون تغيير الكثافة كبيراً
وكبيراً جداً [23] [24] .

ج - قد اخل ميكانيك السوائل مع فروع علمية أخرى . وقد أدى
هذا التداخل إلى نشوء فروع اختصاصية منها مثلاً :

ميكانيك السوائل الحراري : وفيه يتم ربط قوانين الترموديناميك
والأيروديناميك مع بعضها .

ميكانيك السوائل الكهروايسي : وفيه تدرس الجريانات في البلازما ،

التي هي عبارة عن سائل عالي التأين High ionized fluid نتيجة تطبيق حقول مغناطيسية وكهربائية . وحسب ما يكون السائل مائعاً أو غازاً يطلق على هذا الفرع الهيدروديناميك المغناطيسي Magnetohydrodynamics (MHD) أو الغاز ديناميك المغناطيسي (MCD) Magnetogasdynamics . وقد تركزت في الآونة الأخيرة الأبحاث في هذا المجال على المولد الهيدروديناميكي المغناطيسي MHD - Generator والكهربائي EHD-Generator لأنهما يفتحان آفاقاً جديدة لتوليد القدرة الكهربائية من القدرة الحرارية للبلازما مباشرة وبدون أجزاء آلية متحركة [70] [74] .

لقد انحدر ميكانيك السوائل من الميكانيك العام ، ولا يزال البعض يعتبره جزءاً منه . ولذلك يبدو منطقياً مما سبق أن نحافظ تسمية الأقسام الرئيسية لهذا العلم الكلاسيكي وهي : التوازن (Statics) ، الحركة (Kinematics) ، والتحرك (Dynamics) على دلالتها كاملة في ميكانيك السوائل ، وأن يعتمد عليها التبويب الرئيسي لمادته العلمية في كافة الفروع . كما يشير ربط هذه المفاهيم بكلمتي «هيدرو» و «أيرو» المشتقتين من الكلمتين اليونانيتين «hydor» وتعني «ماء» و «aërs» وتعني «هواء» إلى تبويب فرعي ينطلق من كون الماء والهواء ممثلين رمزيين للحالة المائعة والغازية ، ويبرز في نفس الوقت أهميتهما العملية . ولكن هذا التبويب يطمس في الواقع حقيقة أن الهواء مثلاً حتى سرعات تعادل ثلث سرعة الصوت (حوالي 100 m/s) يمكن اعتباره عملياً كالماء سائلاً غير قابل للانضغاط .

إن الكتاب الذي تقدمه مكتوب بالدرجة الأولى لطلاب الهندسة الميكانيكية ، كما يدل على ذلك عنوانه . وسنعمد في تبويبه الأساسي على سلوكية الوسط السائلي ، وفي تبويبه الفرعي على بعض الصفات الفيزيائية -

الميكانيكية للسوائل ، مع اعتبار أن كلمة « سائل » تشمل الحالة المائعة والغازية والتمييز بين سائل قابل وغير قابل للانضغاط . كما كان السعي عند اختيار الموضوعات العلمية مركزاً على ما هو أساسي ونموذجي منها ، وبحيث تبرز عند معالجتها العلاقات والقوانين الأساسية التي تعتمد عليها التطبيقات الهندسية المختلفة ، مع الابتعاد قدر الإمكان عن سرد المعلومات بشكل قاموسي وتقديم « روشينات » جاهزة . ومن منطلق أن العمل التصميمي الهندسي يستخدم أولاً الطرق البسيطة ومن ثم الطرق الأكثر تعقيداً ، فقد رتب الموضوعات العلمية بحيث عولجت أولاً الجريانات البسيطة وحيدة البعد ومن بعدها الجريانات ثنائية وثلاثية البعد ؛ كما مهدت دراسة الجريانات عديمة الاحتكاك لدراسة الجريانات الحقيقية .

٤.١ مدخل إلى علم القيم والحمل القياسية

إن العلاقات والقوانين التي يستخدمها ميكانيك السوائل هي علاقات بين قيم فيزيائية ، أي قيم يمكن قياسها والتعبير عنها بقيم وواحدات قياس . والمهندس ، بطبيعة الحال ، لا يكفي بالحصول على علاقات عامة فقط واقتراح الحلول النوعية للمسائل التي يعالجها ، وإنما عليه ، وهو في مرحلة التصميم إجراء الحسابات الضرورية وتسجيل نتائجها على مخططاته بشكل أرقام صالحة تمثل أبعاداً معينة .

إن التعرف على طبيعة العلاقات بين القيم الفيزيائية والعديدية وواحدات القياس وعلى أسس تكوين الحمل القياسية المتعددة سيساعد حتماً على تجنب الأخطاء الحسابية ، التي يقع بها الطالب عادة وحتى المهندس الذي اعتاد على استخدام وحدات قياس معينة ، ويرر أيضاً الضرورة التي أدت لإدخال جملة وحدات القياس العالمية .

١.٤.١ القيم الفيزيائية والعددية ووحدات القياس ومعاييرها

للتعبير عن جوهر المسائل والظواهر الفيزيائية تستخدم مفاهيم عامة مجردة مناسبة مثل الطول ، الكتلة ، الزمن ، درجة الحرارة وغيرها ، كل منها يمثل نوعاً معيناً من القيم الفيزيائية بدون أية صفة عددية :

نوع القيمة الفيزيائية هو تعبير كيفي عام عن مضمون فيزيائي معين

بينما يمثل مقدار القيمة الفيزيائية أو اختصاراً القيمة ، تعبيراً كيفياً وكمياً معيناً لموضوع فيزيائي أو رياضي . ويكون حسب [36] [38] [39] :

$$(1.2) \quad \text{القيمة} = \text{القيمة العددية} (\text{أو عدد القياس}) \times \text{واحدة القياس}$$

إن القيم التالية :

الإحداثي $x = 3 \text{ dm}$ ؛ نصف القطر $r = 52 \text{ mm}$ ؛ ارتفاع سحب المضخة $h = 6 \text{ m}$ تمثل مقادير مختلفة لنفس نوع القيمة الفيزيائية ، وهو « الطول » . بينما تتبع القيم التالية : الوزن $F_G = 6 \text{ kp}$ ؛ المسافة $s = 3 \text{ m}$ ؛ المدة $t = 20 \text{ h}$ لأنواع قيم فيزيائية مختلفة هي : « القوة » ؛ « الطول » ؛ « الزمن » .

يستخدم علم القيم ، مثل الجبر ، لغة الرموز الحرفية لتمييز القيم الفيزيائية واختصار الصياغة الرياضية للمعادلات . فإذا رمزنا بـ G لقيمة ما فإن الصياغة الرياضية للعلاقة (1.2) تصبح حسب [36] [38] [39] :

$$(1.3) \quad G = \{G\} [G]$$

حيث حصرت القيمة العددية ضمن قوسين كبيرين وواحدة القياس ضمن قوسين متوسطين . ويمكن لهذه العلاقة أن تمثل قيمة عامة أو خاصة

حسب ما تكون القيمة العددية ووحدة القياس غير محددين أو محددين كما في
المثالين التاليين :

$r = 52 \text{ mm} \Leftrightarrow$ نوع القيمة : الطول ؛ القيمة العددية : $\{r\} = 52$ ؛
وحدة القياس : $[r] = \text{mm}$

$F_G = 6 \text{ kp} \Leftrightarrow$ نوع القيمة : القوة ؛ القيمة العددية : $\{F_G\} = 6$ ؛
وحدة القياس : $[F_G] = \text{kp}$.

إن القيمة العددية ، كما يتضح من (1.3) ، ليست إلا العدد الناتج
من مقارنة القيمة الفيزيائية مع وحدة القياس لنفس نوع القيمة ، بينما
تمثل وحدة القياس قيمة عددية $\{G\} = 1$ ثابتة يمكن اختيارها اعتباطياً
بالنسبة لكل نوع قيمة . فوحدة قياس الطول يمكن أن تكون المليمتر
 $[\text{mm}]$ أو السنتيمتر $[\text{cm}]$ ، ووحدة قياس القوة الكيلوبوند $[\text{kp}]$
أو النيوتن $[\text{N}]$ ، ووحدة قياس الزمن الثانية $[\text{s}]$ أو الساعة $[\text{h}]$.

إن الفيزياء الحديثة تستخدم اليوم ما يزيد عن 40 إلى 50 نوعاً مختلفاً
من القيم الفيزيائية بغض النظر عن ثوابت المادة المختلفة والمتعددة جداً
[36] . وهذا ناتج عن تعدد واختلاف المسائل والظواهر الفيزيائية
الإفرادية التي نتعرض لها والتي يؤثر على كل منها نوعان أو أكثر من
القيم الفيزيائية التي ترتبط بعلاقات وقوانين تعبر عن جوهر الظاهرة ،
وتسمى معادلات القيم الفيزيائية . فإذا نظرنا إلى هذه المعادلات والقوانين
كعلاقات مستقلة عن بعضها فإن تصنيفها يبدو من باب المستحيل . وفي
الحقيقة فإن كافة القوانين الفيزيائية الإفرادية تتركز بشكل أساسي على مبدأ
السببية Causality principle ، بمعنى أن نفس الأسباب تؤدي إلى نفس
النتائج وبالعكس ، وبالإمكان إرجاعها إلى عدد قليل جداً من القوانين
الفيزيائية الأساسية أو القوانين الطبيعية التي تتميز في الحالة العامة بصيغتها

الرياضية البسيطة [36] . فمثلاً معادلات ماكسويل (1831-1879) J. Maxwell
تعبّر بشكل مركز عن كل ما يتعلق بالظواهر الكهربائية والمغناطيسية ،
وقانون التحريك الأساسي لنيوتن يعبر عن العلاقة العامة بين القوة والكتلة
والتسارع .

نستنتج مما سبق أن كافة أنواع القيم الفيزيائية يمكن أيضاً إرجاعها
إلى عدد قليل ومحدد من أنواع القيم الفيزيائية الأساسية المستقلة . ويتحدد
عدد هذه الأنواع K بالنسبة لظاهرة معينة من العدد الإجمالي M لأنواع
القيم الفيزيائية التي تتعلق بها الظاهرة وعدد المعادلات المستقلة N التي
تخضع لها الظاهرة بموجب القوانين الفيزيائية ، حيث يكون [14] :

$$K = M - N \quad (1.4)$$

فاذا فرضنا مثلاً أن ظاهرة فيزيائية تخضع للمعادلتين :

$$F = m \frac{V}{t} \quad ; \quad V = \frac{s}{t} \quad (1.5)$$

فإن أنواع القيم المؤثرة هي : القوة F ، الكتلة m ، السرعة V ،
الزمن t ، والمسافة s ، وبالتالي يكون : $M = 5$ ، $N = 2$ ، $K = 3$.
وهذا العدد يكفي بالنسبة لكامل حقل الميكانيك .

إن اختيار أنواع القيم الأساسية يمكن أن يتم بشكل اعتباطي . ولكن
من الأنسب أن يتم اختيارها بحيث يتحقق الشرطان التاليان [14] :

- ١- يجب أن يكون ممكناً الحصول على تصور كفي واضح عن أنواع
القيم الأساسية .

- ٢- يجب أن تكون هناك طريقة معروفة تسمح بإجراء مقارنة كمية
بين مقداري قيمتين أساسيتين من نفس النوع .

وبعد تثبيت أنواع القيم الأساسية فإن بقية الأنواع يتم اشتقاقها بمساعدة

معادلات التعريف Definition equations والتناسب Proportionalities وتسمى أنواع القيم المشتقة [39] . ويتضمن الجدول (١.١) قائمة بأهم هذه المعادلات .

إن معادلات التعريف لا تتضمن معارف فيزيائية جديدة ، ولكنها تعرف أنواع قيم جديدة بدلالة أنواع معروفة . فالسرعة مثلا تعرف بدلالة المسافة المقطوعة (نوع القيمة الطول !) والمدة التي استغرقها قطعها (نوع القيمة الزمن !) . وباستثناء نوع القيمة المراد تعريفه (اشتقاقه) فإن كافة أنواع القيم الأخرى في معادلة التعريف تكون معلومة .

بالمقابل فإن معادلات التناسب هي التعبير الرياضي لقوانين طبيعية يتم الحصول عليها أو التأكد منها بواسطة التجربة ، ويمثل معامل التناسب دائماً ثابتة مادة ، يتم تعريفها بمساعدة أنواع القيم المعلومة الداخلة في المعادلة . فمثلا يمثل معامل التناسب بين إجهاد القص τ وتدرج السرعة ناظماً على السطح $\partial v / \partial n$ في قانون نيوتن البسيط لاحتكاك السوائل ثابتة مادية يطلق عليها اللزوجة التحريكية (راجع ٢.٢) .

إن التمييز بين أنواع قيم أساسية ومشتقة ينطبق أيضاً ، حسب (1.3) ، على القيم ووحدات القياس . فإذا فرضنا ، في الحالة العامة ، أن القيمة G ترتبط مع القيم G_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) بعلاقة جدائية من الشكل :

$$G = a G_1^a G_2^b G_3^c \dots \quad (1.6)$$

حيث a معامل عددي يمكن أن يكون ذا طبيعة فيزيائية أو هندسية ، فيمكن حسب (1.3) كتابة كل قيمة كجداء للقيمة العددية في واحدة القياس ، وبالتالي ينتج :

$$\{G\} [G] = a \{G_1\}^a [G_1]^2 \cdot \{G_2\}^b [G_2]^b \cdot \{G_3\}^c [G_3]^c \dots \quad (1.7)$$

الجدول ١.١ : قائمة بأهم معادلات التعريف والتناسب للقيم المشتقة بدلالة القيم الأساسية
(معادلات القيم الأساسية) حسب فالوت [38] [14] [39] *

القيمة المشتقة	معادلة القيم الأساسية	القيمة الأساسية
زاوية مركزية φ	$\varphi = \Delta U/r$	الطول L
سطح A	$A = \iint_{(A)} dx dy$	(القيمة الأساسية للهندسة)
حجم V	$V = \iiint_{(V)} dx dy dz$	
سرعة V	$V = ds/dt$	الزمن t
تسارع b	$b = dV/dt$	(القيمة الأساسية للحركة)
تردد f	$f = 1/\Delta t$	
تردد دائري (سرعة زاوية) ω	$\omega = 2\pi f$	
كثافة = كتلة نوعية ρ	$F = \rho V b$	
حجم نوعي v	$v = 1/\rho$	
كتلة m	$m = \rho V$	
وزن (ثقل) F_g	$F_g = mg$	
وزن نوعي γ	$\gamma = \rho g$	
ضغط p	$F_p = p A$	القوة F
إجهاد قص τ	$F_\tau = \tau A$	(القيمة الأساسية للتحريك)
معامل المرونة E	$\sigma = E \cdot \Delta l/l = E \epsilon$	
(ϵ الاستطالة النسبية)		
عمل W	$W = \int_{(s)} F ds$	
استطاعة P	$P = dW/dt$	
قدرة حركية W_{kl}	$W_{kl} = m \frac{V^2}{2}$	

* الحروف الناقصة تمثل رموزاً لقيم شعاعية.

الجدول ١.١ : تممة

القيمة المشتقة	معادلة القيم الأساسية	القيمة الأساسية
B كمية حركة ؛ I دفع M_I عزم دوران J عزم عطالة η لزوجة تحريكية ν لزوجة حرركية	$B = m V =$ $M_I = s \times F$ $J = \int_V \rho r^2 dV$ $\tau = \eta \cdot \partial v / \partial n$ $\nu = \eta / \rho$	القوة F (القوة الأساسية التحريك)
ΔT فرق في درجة الحرارة (درجة حرارة نسبية) T_2 درجة الحرارة في نقطة ما β معامل التمدد الطولي R ثابتة الغاز C حرارة النوعية (C_v مع ثبات الحجم، C_p مع ثبات الضغط) Q_T كمية حرارة C_T سعة حرارية U قدرة داخلية (كامنة) $\dot{Q}_T$ تيار حراري	$\Delta T = T_2 - T_1$ $L = L_0 (1 + \beta \Delta T)$ $p = \rho R T$ $C = \frac{W}{m \Delta T}$ $Q_T = C m \Delta T$ $C_T = C m$ $dU = d Q_T + dW$ $\dot{Q}_T = dQ/dt$	درجة الحرارة المطلقة T (القيمة الأساسية لعلم الحرارة)
H_e شدة الحقل الكهربائي D انزياح كهربائي (كثافة الشحنة) $\epsilon \epsilon_0$ ثابتة العازلية الكهربائية U_e توتر جهد (كهربائي)	$H_e = F/Q_e$ $Q_e = \int_{(A)} D dA$ $D = \epsilon \epsilon_0 H_e$ $U_e = \int_{(s)} H_e d s$	كمية الشحنة الكهربائية Q_e (القيمة الأساسية لعلم الكهرباء)

القيمة المشتقة	معادلة القيم الأساسية	القيمة الأساسية
شدة تيار كهربائي I_e	$I_e = d Q_e / dt$	كثافة الشحنة
كثافة تيار كهربائي J_e	$I_e = \int_{(A)} J_e d A$	الكهربائية Q_e (القيمة الأساسية لحلم الكهرباء)
مقاومة كهربائية R_e	$U_e = R_e I_e$	
تخريض مغناطيسي B_m (كثافة السالة المغناطيسية)	$\oint_{(S)} H_e ds = \frac{d}{dt} \int_{(A)} B_m d A$	
شدة الحقل المغناطيسي H_m	$\int_{(S)} H_m ds = \int_{(A)} J_e d A$	
معامل الناقلية الكهربائية σ_e	$J_e = \sigma_e H_e$	
سعة كهربائية C_e	$I_e = C_e d U_e / dt$	
معامل التخريض الذاتي L_e	$U_e = L_e d I_e / dt$	

هذه المعادلة يمكن شطرها إلى معادلة الواحدات القياسية :

$$[G] = \xi [G_1]^a \cdot [G_2]^b \cdot [G_3]^c \dots \quad (1.8)$$

وإلى معادلة القيم العددية :

$$\{G\} = \frac{a}{\xi} \{G_1\}^a \cdot \{G_2\}^b \cdot \{G_3\}^c \dots \quad (1.9)$$

يطلق على ξ « معامل واحدات القياس » [39] ، وتحدد قيمته إما باختيار

كافة واحدات القياس ، أو باختيار قيمة ξ نفسها (يفضل $\xi = 1$) :

وبالتالي تتحدد واحدة قياس G ، وبعدها يصبح « معامل القيمة العددية »

$$z = a / \xi \quad (1.10)$$

معلوماً والمعادلة (1.9) محددة .

إن معادلة الواحدات تعبر عن كيفية ارتباط واحدة قياس قيمة معينة

مع واحدات القيم الأخرى التي تتعلق بها ، فهي تصلح إذن بعد اختيار ϵ لتعريف أو تحديد واحدة قياس مجهولة بدلالة الواحدات الأخرى المعلومة . أما معادلة القيم العددية فهي في الواقع علاقة بين قيم وليست علاقة فيزيائية . ونلاحظ أنه بالنسبة لعلاقة قيم فيزيائية ، مثل (1.6) ، يمكن بسبب حرية اختيار العدد z الحصول على عدد لا نهائي من معادلات القيم العددية المتكافئة . ولكن في الحالة الخاصة والمفضلة التي يكون فيها $\epsilon = 1$ فإنه ينتج من (1.9) وبعد اغفال الأقواس الكبيرة :

$$*C* = \prod_1^n *G_1*^{\alpha} *G_2*^{\beta} *G_3*^{\gamma} \dots \quad G = \prod_1^n G_1^{\alpha} G_2^{\beta} G_3^{\gamma} \dots \quad (1.11)$$

وبالتالي فإنه في هذه الحالة تكون معادلة القيم العددية مطابقة شكلاً لمعادلة القيم الفيزيائية ويمكن أن تعبر الرموز G_n إما عن القيمة الفيزيائية أو القيمة العددية .

يصدف في حالات عديدة عند إجراء قياسات تجريبية بهدف إيجاد العلاقة بين عدة قيم فيزيائية أن يهمل عن قصد أو غير قصد تأثير قيمة أو أخرى . وحيث أن واحدات القياس في التجربة تكون عادة معلومة فإن القيم العددية المقاسة تعطي معادلة قيم عددية نقرضها من الشكل :

$$\{G\} = \alpha \{G_1\}^{\alpha} \{G_2\}^{\beta} \{G_3\}^{\gamma} \dots \quad (1.12)$$

ونسأل عن معادلة القيم الفيزيائية التي يمكن اعتبارها أساساً لهذه المعادلة . إذا قسمنا معادلة القيم الفيزيائية (1.6) على معادلة الواحدات (1.8) ينتج :

$$\frac{G}{[G]} = \frac{\alpha}{\epsilon} \left(\frac{G_1}{[G_1]} \right)^{\alpha} \left(\frac{G_2}{[G_2]} \right)^{\beta} \left(\frac{G_3}{[G_3]} \right)^{\gamma} \dots \quad (1.13)$$

هذه المعادلة يسميها فالوت [14] [39] معادلة قيم مفصلة cutted up ، وهي ليست ، إلا معادلة قيم عددية ، لأن كل كسر فيها يمثل قيمة عددية ،

وبالتالي فهي مطابقة للعلاقة (1.9) . وعليه إذا بدلنا في العلاقة (1.12) القيمة العددية بالكسر الناتج من تقسيم القيمة الفيزيائية المقابلة على واحدتها القياسية فإننا نحصل على معادلة قيم مفصلة من الشكل (1.13) ، ولكنها تتضمن المعامل x بدلا من $\frac{a}{x}$. فإذا تأكدنا أن وحدات القياس المستعملة في التجربة تعطي معادلة واحداث صحيحة يدخل فيها طبعاً x ، فإن ذلك يعني أن كافة القيم قد روعيت في (1.12) ، ونحصل منها على معادلة قيم فيزيائية من الشكل (1.6) بعد ضرب x في x وإغفال الواحدات .

على أساس ما تقدم فإنه يجب التمييز بين : معادلة القيم الفيزيائية (1.6) ، معادلة القيم العددية (1.9) ، معادلة القيم المفصلة (1.13) ، معادلة الواحدات العامة (1.8) معادلة الواحدات الخاصة مثل $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$.

وحيث أن واحداث قياس مختلفة لا تزال قيد الاستخدام فإنه من الضروري تحديد العلاقة بين القيمة العددية وواحدة القياس لتسهيل عملية التحويل من واحدة لأخرى .

٢.٤.١ المعرف بين القيم العددية وواحدة القياس ، معادلة القياس

عند تغيير واحدة القياس تتغير القيمة العددية ولكن القيمة تبقى محفوظة على مضمونها الكمي والكيفي طالما بقي جداء القيمة العددية في واحدة القياس حسب (1.3) ثابتاً ، وهذا ما يطلق عليه مطلب ثبات القيمة [14] Invariance demand :

$$G = \{G'\} [G'] = \{G''\} [G''] = \dots = \{G\} [G] \quad (1.14)$$

وينتج معامل التحويل من واحدة لأخرى :

$$\alpha = \frac{\{G'\}}{\{G''\}} = \frac{[G']}{[G'']} \quad (1.15)$$

وتكون النتيجة :

عند تغيير واحدة القياس فإن القيم العددية تتناسب مع بعضها بعكس تناسب واحداتها ، أي أن القيمة العددية تصغر كلما كبرت واحدة القياس .

إن المسافة s مثلاً كمية فيزيائية تبقى ثابتة إذا قيست بواحدات مختلفة ولكن قيمتها العددية تتغير .

$$s = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm} \Rightarrow \alpha = \frac{80}{8} = \frac{\text{dm}}{\text{cm}} = 10$$

ولكي يبقى معامل التحويل α لواحدتين معينتين ثابتاً يجب أن تكون القيم التي تحقق مطلب الثبات ذات تدرّيج عددي له نفس نقطة الصفر [14] ، كما هو الأمر مثلاً بالنسبة لواحدة قياس القوة أو كمية الحرارة :

$$\left. \begin{aligned} F = 1 \text{ kp} &= 9,80665 \text{ N} = 9,80665 \text{ kg m s}^{-2} \\ Q = 1 \text{ kcal} &= 4186,8 \text{ J} = 4186,8 \text{ Nm} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

بينما يكون مطلب الثبات غير محقق بالنسبة لدرجة الحرارة مثلاً عند تغيير واحدة القياس من $[^{\circ}\text{C}]$ إلى $[^{\circ}\text{K}]$:

$$T_1 = 100^{\circ}\text{C} = 373,15^{\circ}\text{K} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{100}{373,85} = 0,3656$$

$$T_2 = 200^{\circ}\text{C} = 473,15^{\circ}\text{K} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{200}{473,45} = 0,423$$

وبالتالي $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

إن تبديل واحدات القياس يتطلب الانتباه إلى فاحية مهمة يوضحها المثال (1.16) ، فعند الانتقال من kp إلى N أدخل المعامل العددي 9,80665 ،

بينما كان هذا المعامل مساوياً للواحد عند الانتقال من N إلى $kg\ m\ s^{-2}$. كما أدخل المعامل العددي 4186,8 عند الانتقال من $kcal$ إلى J ، بينما كان مساوياً للواحد بالنسبة للانتقال من J إلى Nm . هذا الاختلاف ناتج بسبب أن معامل الواحدات العددي ϵ الذي يظهر في معادلة الواحدات العامة (1.8) يأخذ قيماً مختلفة في حال الاختيار الحر للوحدات . ولكن من الممكن اختيار الواحدات القياسية بحيث يصبح $\epsilon = 1$. وفي هذه الحالة الخاصة والمفضلة تنتج معادلة تعريف واحدة قياس القيمة C من (1.8) :

$$[G] = [G_1]^{\alpha_1} [G_2]^{\alpha_2} [G_3]^{\alpha_3} \dots \quad (1.17)$$

وتسمى الواحدات التي يتم اشتقاقها أي تعريفها على هذا الأساس **واحدات مترابطة Coherent units** . ونحصل عليها بوضع كافة القيم العددية في معادلة القيم مساوية للواحد . فإذا جعلنا في (1.14) :

$$\{G'\} = \{G^*\} = 1 \Rightarrow [G'] = [G^*] \quad (1.18)$$

ويستج بالتالي من (1.16) أن :

$$N = kg\ m\ s^{-2} \quad ; \quad J = Nm = kg\ m^2\ s^{-2} \quad (1.19)$$

هي واحدات مترابطة بينما :

$$kp = 9,80665\ N \quad ; \quad kcal = 4186,8\ J \quad (1.20)$$

هي واحدات غير مترابطة يتم تحديدها بمعادلات تعريف معينة :

الواحدات المترابطة هي التي تكون كافة القيم العددية في معادلات تعريفها مساوية للواحد ، بينما يكون المعامل العددي للوحدات غير المترابطة مختلفاً عن الواحد .

إن الواحدات المترابطة يمكن اختصارها من معادلة القيم الفيزيائية

التي تكتب بصيغة مشابهة للعلاقة (1.7) ونبقى بالتالي معادلة القيم العددية فقط . وعليه فإن النتيجة التي توصلنا إليها على ص ٢٦ يمكن صياغتها بالشكل التالي :

فقط في حال استخدام وحدات مترابطة تكون معادلة القيم العددية مطابقة شكلاً لمعادلة القيم الفيزيائية .

لذلك يفضل دائماً استخدام وحدات مترابطة . إلا أنه ليس من الضروري بالنسبة لحقل معين من الفيزياء أو التكنيك استخدام وحدات مترابطة فقط ، ولكن الحساب العددي في هذه الحالة ، وخاصة عند تبديل بعض الوحدات يتطلب تجنباً للأخطاء الوضوح الكلي لمفهوم المقاس (البعد) Dimension . فماذا يعني ؟

المقاس يعبر عن مضمون معادلة الوحدات العامة

لتوضيح هذا المفهوم نأخذ مثلاً معادلة الوحدات العامة للعمل أو القدرة :

$$[W] = [F] [s] = [m] [V]^2 = [m] [s]^2 [t]^{-2} \quad (1.21)$$

ف نجد أن جداء القوة في المسافة وكذلك جداء الكتلة في مربع السرعة أو جداء الكتلة في مربع المسافة مقسوماً على مربع الزمن كلها من حيث المقاس تمثل عملاً أو قدرة . ولكن من جهة أخرى فإن عزم الدوران كجداء القوة في زراعها هو من حيث المقاس عمل أيضاً ، بالرغم من أن نوع القيمة الأخير مختلف . ومن هنا نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

يكون لقيمتين من نفس النوع مقاس واحد ويمكن جمعهما ، بينما لايتوجب أن تكون قيمتان لهما نفس المقاس من نفس النوع وبالتالي لايجوز جمعهما .

من جهة أخرى نقول أن ضاغط المضخة مثلاً يمثل من حيث المقاس

طولا (إرتفاعاً) ولكن واحدة قياس الطول هي المتر . ولهذا لا يجوز استخدام مفهوم « المقاس » بدلا من مفهوم « الواحدة » [14] .

المقاس لا يتضمن معطيات عددية محددة ، وإنما معطيات كيفية يتم استنتاجها من معادلة المقاس Dimensional equation ، التي تنتج مباشرة من معادلة الواحدات العامة (1.17) باستبدال الأقواس المتوسطة بأقواس حادة [39] :

$$(G) = \langle G_1 \rangle^a \langle G_2 \rangle^b \langle G_3 \rangle^c \dots \quad (1.22)$$

أو باستبدال التعابير المحصورة ضمن الأقواس برموز تمثل الحروف الأولى لأنواع القيم [14] . فمثلا إذا رمزنا للكثافة D وللكتلة M وللطول L تنتج معادلة المقاس للكثافة :

$$D^1 = M^3 L^{-3} \quad (1.23)$$

ونلاحظ في هذه العملية أن أس كل حد في معادلة الواحدات العامة يبقى نفسه في معادلة المقاس . ولكنه يتغير عند تبديل الواحدات ، كما يتبين من مثال الزوجة التحريكية :

$$\left. \begin{aligned} \text{في جملة القياس العالمية} \quad [\eta] = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1} &\Rightarrow \langle \eta \rangle = \langle M \rangle^1 \langle L \rangle^{-1} \langle t \rangle^{-1} \\ \text{في جملة القياس التكنيكية} \quad [\eta] = \text{kp} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} &\Rightarrow \langle \eta \rangle = \langle P \rangle^1 \langle L \rangle^{-1} \langle t \rangle^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

إن لمعادلة المقاس أهمية بالغة تنجم من وجوب كون طرفيها لهما نفس المقاس . وهذا يعتبر مقياساً للتأكد من الصحة النوعية لمعادلة القيم الفيزيائية وصفة مميزة أخرى لها بالمقارنة مع معادلة القيم العددية . فإذا كانت معادلة المقاس محقة فإن معادلة القيم الفيزيائية التابعة لها تكون أيضاً صحيحة . وفي حالة العكس تكون قد أغفلت في معادلة القيم الفيزيائية بعض القيم التي يتم تحديدها بواسطة تصحيح معادلة المقاس ، وذلك إما بتصحيح أس بعض

خحدود هذه المعادلة أو إضافة حدود جديدة وتحديد أسها ، وهذا ما يشكل مضمون التحليل البعدي Dimensional analysis . وينصح في كل مرة يبرز فيها أدنى شك في صحة أية معادلة قيم التأكد من صحة معادلة مقاسها .

إن معادلة المقاس تقود إلى التمييز بين قيم بعدي Dimensional ولابعدي Dimensionless . في الحالة الأولى يجب أن يكون في معادلة المقاس أس واحد على الأقل لنوع قيمة أساسية مختلفاً عن الصفر ، بينما يكون في الحالة الثانية أس كافة أنواع القيم في معادلة المقاس مساوياً للصفر ، وواحدة قياسها بالتالي تساوي الواحد .

إن القيم اللابعدي ذات أهمية كبيرة في ميكانيك السوائل ، حيث أن الاتجاه العام في معالجة العديد من مسائله يعتمد على استخدام قيم لابعدي يطلق عليها أعداداً مميزة أو أعداد تشابه Similarity Nr. وهي تمثل عادة نسبة قيمتين من نفس النوع لبعضهما .

أخيراً فإنه بمساعدة معادلة المقاس نستطيع في معادلة قيم فيزيائية استخدام وحدات مترابطة وغير مترابطة . وفي هذه الحالة يجب ضرب معادلة القيم بثابتة المقاس التي تنتج من معادلة تعريف الوحدات ، وتمثل مقداراً ، جداء قيمته العددية في واحدة القياس يساوي الواحد . مثل ذلك المكافئ الحراري الميكانيكي في جملة القياس التكنيكية :

$$\frac{1}{426,79} \frac{\text{kcal}}{\text{kpm}} = 1 \quad (1.25)$$

أو معامل التحويل بين النيوتن N والكيلوبوند kp :

$$\frac{1}{9,80665} \frac{\text{kp}}{\text{N}} = 1 \quad (1.26)$$

١.٤.٣ جملة الواحدات العالمية والتكنيكية

بعد أن يتم تحديد أنواع القيم والواحدات الأساسية فإنه بالإمكان ، كما بينا أعلاه ، اشتقاق مجموعة من أنواع القيم وواحدتها بشكل منهجي ، وبحيث تغطي حقلاً معيناً من الفيزياء أو التكنيك . يطلق على مجموعة القيم هذه جملة القياس ، وعلى مجموعة الواحدات جملة وحدات القياس System of units وأشهرها جملة القياس الفيزيائية المطلقة ، وجملة القياس التكنيكية التي مر ذكرها .

إن الواحدات الأساسية لحقل الميكانيك في جملة القياس الفيزيائية هي : المتر [m] للطول ، الثانية [s] للزمن ، والكيلوغرام [kg] للكتلة ، التي تم اختيارها على أساس أنها لا تتغير مع المكان . وتختلف جملة القياس التكنيكية عنها فقط في اختيار الواحدة الأساسية الثالثة ، حيث تستخدم واحدة القوة ، الكيلوبوند [kp] (قديماً الكيلوغرام - ثقلي) ، بدلاً من واحدة الكتلة (الجدول ٢.١) . وهذا الاختيار له سيئة أساسية وهو أن الثقل تابع للتسارع الأرضي ، وبالتالي يتغير مع المكان بعكس الكتلة .

الجدول ٢.١ : القيم والوحدات الأساسية لجملة القياس التكنيكية الجديدة

نوع القيمة الأساسية		الواحدة الأساسية	
التسمية	الرمز	التسمية	الرمز
الطول	L	المتر	m
الزمن	t	الثانية	s
القوة	F	الكيلوبوند (بدلاً من الكيلوغرام - ثقلي)	kp (kgr)

ونظراً للصعوبات الناجمة عن استخدام وحدات مختلفة ، فقد تركزت المطالبة منذ فترة طويلة على ضرورة وضع جملة وحدات موحدة ودقيقة يعترف بها الجميع . وبعد مناقشات واقتراحات متعددة أقر الاجتماع العام الحادي عشر للمقاييس والأوزان .

CGPM = Conférence Général des Poids et Mesures

المتخذ في باريس عام 1960 مما اصطلح على تسميته جملة الواحدات العالمية (SI) $\text{Système International d'Unités}$ [14] [39] ، وبنيت على أساسها جملة القياس العالمية أو جملة القياس الفيزيائية – التكنيكية ، نظراً لأنها انبثقت من جملة القياس الفيزيائية والتكنيكية المشار إليهما ، ومن منطلق أن التكنيك يقوم على أساس الفيزياء . ويتضمن الجدول (٣.١) أهم القيم والوحدات الأساسية لهذه الجملة ، كما يتضمن الجدول (٤.١) البادئات التي تضاف إلى بداية اسم كل واحدة للحصول على مضاعفاتها أو أجزائها . فمثلاً بدلاً من واحدة الطول المتر نستخدم الكيلومتر : $10^3 \text{ m} = \text{km}$ ، أو السنتيمتر $10^{-2} \text{ m} = \text{cm}$.

وبالنظر لأن العديد من القيم العددية معطاة بوحدات جملة القياس الفيزيائية أو التكنيكية ، والكثير من أجهزة القياس المستخدمة معيرة على أساس إحدى هاتين الجهتين ، فمن الطبيعي أن يتم إدخال جملة القياس العالمية تدريجياً . ولتسهيل ذلك فقد كتبت مقالات عديدة حول كيفية استخدامها [40] . ولكن الإلحاح في ضرورة استخدامها دفع العديد من الدول لاستصدار قوانين تلزم بذلك [41] .

الجدول ٣.١ : أنواع القيم والوحدات الأساسية بجملة القياس العالمية (SI)

الوحدات الأساسية		نوع القيمة الأساسية		المجال الفيزيائي
الرمز	التسمية	الرمز	التسمية	
m	المتر	L	الطول	هندسة حركة تحويل
s	الثانية	t	الزمن	
kg	الكيلوغرام	m	الكتلة	
A	الأمبير	I _e	شدة التيار	علم الكهرباء
°K	درجة كيلفين	T	درجة الحرارة	علم الحرارة
Cd	الكاندېلا	J	شدة الضوء	الشدة الضوئية

الجدول ٤.١ : البادئات القانونية لأسماء الوحدات للحصول على مضاعفاتها وأجزائها [36]

البادئة لاسم الوحدة	الرمز	المعامل قبل الوحدة	البادئة لاسم الوحدة	الرمز	المعامل قبل الوحدة
تترا Tetra	T	10 ¹²	ديسي Deci	d	10 ⁻¹
جيجا Giga	G	10 ⁹	سنّي Centi	c	10 ⁻² % بالثمة
ميغا Mega	M	10 ⁶	ميلي Milli	m	10 ⁻³ % بالألف
كيلو Kilo	K	10 ³	ميكرو Micro	μ	10 ⁻⁶
هكتو Hecto	h	10 ²	نانو Nano	n	10 ⁻⁹
ديكا Deca	da	10 ¹	بيكو Pico	P	10 ⁻¹²

٥.١ أسئلة مراجعة وتمارين

- س ١.١ : اشرح أسس بناء الجمل القياسية وسبب تعددها .
- س ٢.١ : اشرح العلاقة بين معادلة القيم الفيزيائية ومعادلة القيم العددية ومعادلة الواحدات القياسية .
- س ٣.١ : بين أهمية معادلة المقاس لتأكيد من صحة القوانين الفيزيائية .
- س ٤.١ : عرف الواحدات القياسية المترابطة . هل يمكن استخدامها مع وحدات غير مترابطة ؟
- ت ١.١ : اكتب الواحدات القياسية في جملة القياس التكنيكية والعالمية لأنواع القيم الفيزيائية التالية : القوة ، الكتلة ، الكثافة ، اللزوجة التحريكية ، العمل ، الاستطاعة ، الاجهاد .
- ت ٢.١ : حوّل معامل الانتقال الحراري $\alpha = 500 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{K}$ إلى $\text{J/m}^2\text{s}^\circ\text{K}$ بمساعدة ثابتة المقاس .
- ت ٣.١ : برهن بمساعدة معادلة المقاس أن عدد رينولدز ، الذي يساوي نسبة جداء السرعة في الطول في الكثافة على اللزوجة التحريكية يمثل عدداً لا بعدياً (عدد تشابه) .

الفصل الأول

٢ الصفات الفيزيائية - الميكانيكية للسوائل

إن معرفة الصفات الفيزيائية وخاصة الميكانيكية للسوائل لها أهمية كبيرة في تطبيقات ميكانيك السوائل . ولذا يهدف هذا الفصل شرح أهم هذه الصفات ، وتوضيح بعض المفاهيم والتعاريف التي سيتكرر ورودها في الفصول المقبلة .

٢ . ١ تصنيف السوائل

يبحث ميكانيك السوائل في توازن وحركة وتحريك السوائل . والسوائل هي أجسام مادية مترابطة باستمرار ولكنها تتميز عن الأجسام الصلبة بسهولة انزياح جزيئاتها المادية فيما بينها ، وبالتالي بسهولة تغير أشكالها . فبينما ينزم تطبيق قوى كبيرة نسبياً من أجل تغيير شكل الجسم الصلب (الفولاذ !) ، فإن السائل (الماء !) لا يبدي عند تغيير شكله سوى مقاومة ضعيفة جداً . تتعلق بسرعة هذا التغير ، وتنعلم تماماً إذا توفر الوقت الكافي له . فالسائل الساكن يغير شكله دون أية مقاومة .

وتختلف السوائل ، التي تشمل حالة المادة المائعة والغازية ، عن بعضها بالمقاومة التي تبديها ضد تغير الحجم . فالإناء الذي سعته نصف لتر لا يمكنه أن يستوعب لترأ من الماء أو الزيت مهما حاولنا ضغطه ؛ وإذا صيبتنا هذه

الكمية في إناء سعته ليترين فإنها تملأ نصفه فقط ، حتى لو فرغنا الهواء فوقها . وبالمقابل فإن كمية معينة من الهواء أو البخار تملأ دائماً كاملاً حجم الإناء الذي توضع فيه ، كبيراً كان أم صغيراً . وعلى هذا الأساس نميز بين سائل ثابت الحجم أو غير قابل للانضغاط Incompressible وسائل متغير الحجم أو قابل للانضغاط Compressible . وتكون كثافة الأول ثابتة عملياً $\rho = \text{const.}$ ، بينما كثافة الثاني متغيرة وتابعة للضغط ودرجة الحرارة $\rho = f(p, T)$.

طبعاً لا يوجد حد فاصل تماماً بين السوائل غير القابلة والقابلة للانضغاط . فالماء مثلاً تحت تأثير ضغوط عالية جداً يغير حجمه بشكل طفيف يعادل عند 0°C حوالي 0,05% من حجمه الأصلي لكل ضغط جوي . هذا التغير الطفيف في الحجم ، الذي يهمل في أغلب الحالات العملية ، يجب مراعاته أحياناً كما في عملية حقن الوقود في محرك الديزل ؛ (راجع ٦٠٢) .

ومن جهة أخرى فقد أكدت التجارب أن تغير الحجم الذي يتعرض له سائل قابل للانضغاط أثناء حركته النسبية حول جسم ثابت ، أو أثناء حركة هذا الجسم فيه وهو ساكن ، يمكن إهماله عملياً ، طالما أن السرعة النسبية للسائل أو الجسم هي أقل بكثير من سرعة الصوت في السائل . فالهواء مثلاً يغير كثافته بحدود 1% فقط عند لا تتجاوز سرعته 50 m/s عند ضغط ودرجة حرارة نظاميين . في هذه الحالة ، التي تنطبق مثلاً على جريان الهواء حول سيارة حديثة ، يمكن اعتبار الهواء سائلاً غير قابل للانضغاط .

إن المقاومة الصغيرة نسبياً التي تبديها السوائل عند تغير أشكالها تدعو إلى استنتاج أن القوى المماسية أو قوى الاحتكاك ، الناتجة عن إجهادات القص ، والمؤثرة بين الجزيئات المتماسية أثناء حركتها ، صغيرة أيضاً ، وبالتالي يمكن

إهمالها كخطوة تقريبية أولى. وعلى هذا بنيت فرضية السوائل المثالية
: Ideal fluid

السائل المثالي هو سائل ثابت الحجم وعديم الاحتكاك ، تؤثر بين
جزئياته المتماسية والمتحركة قوى ناظمية (ضغط) فقط ، بينما تكون
القوى المماسية (قوى الاحتكاك) معدومة .

لقد اعتمد ميكانيك السوائل الكلاسيكي في دراساته النظرية على السوائل
المثالية ، وقدم نتائج مرضية عملياً بالنسبة لحالات عديدة مثل حركة الأمواج
تكون النافورات وغيرها . ولكنه أخفق تماماً في حساب المقاومة للأجسام ،
حيث توصل إلى نتيجة مخالفة للواقع كلياً تنص على « أن كل جسم يتحرك
بانتظام في سائل مثالي لانهاضي الإمتداد لا يتلقى أية مقاومة (تناقضه دالمبير) »
[28] . ولكن الخبرة تؤكد أن كل جسم يتحرك في سائل يتلقى مقاومة .
وهذا يعود لحقيقة أنه في السوائل الحقيقية أو الطبيعية Natural fluid
تؤثر سواء بين طبقات السائل ، أو بينه وبين سطح الجسم ، بالإضافة للقوى
الناظمية قوى مماسية أيضاً .

يطلق على الصفة الفيزيائية التي تتميز بها السوائل الحقيقية بأنها تبدي
مقاومة ضد تغير شكلها ، وبالتالي مقاومة للأجسام المتحركة فيها ، اللزوجة
Viscosity (راجع ٢.٢) .

السائل المثالي ينزلق على سطح الجسم إنزلاقاً وتكون له سرعة مماسية
معينة . بينما يلتصق السائل الحقيقي على سطح الجسم وتغير سرعته المماسية
باتجاه الناحية على السطح من الصفر وحتى قيمة عظمى ، وهذا ما يطلق عليه
شرط الالتصاق . وحتى في الحالات التي تكون فيها لزوجة السائل صغيرة ،
وبالتالي القوى المماسية أيضاً صغيرة لدرجة يمكن إهمالها ، فإن شرط الالتصاق
يبقى قائماً ويؤدي في حالات عديدة إلى فوارق كبيرة بين قوانين الجريان

للسوائل المثالية والحقيقية. وإليه يعود بصورة خاصة السبب الفيزيائي الأساسي للفارق الشاسع بين قانون المقاومة في السوائل الحقيقية والمثالية .

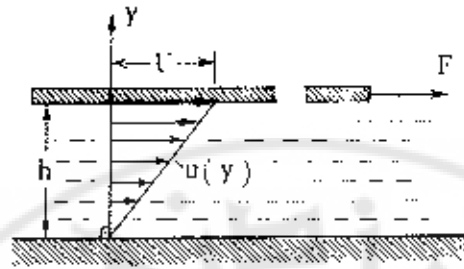
بالإضافة لما تقدم فهناك بعض الصفات العامة التي يمكن تصنيف السوائل على أساسها ، فنميز حسب [12] بين :

- سائل متجانس Homogeneous ، عندما تكون كل جزيئاته الحجمية تتمتع بنفس الصفات .
- سائل غير متجانس عندما تكون للجزيئات الحجمية للسائل صفات مختلفة كما ونوعاً .
- سائل متعدد الطور Retrogeneous ، عندما يكون السائل مؤلفاً من عدة أطوار Phase منفصلة عن بعضها ، ويمثل الطور مادة (أو مزيجاً من المواد) كل أجزائها لها نفس الصفات الفيزيائية . (مثال : أجسام صلبة في الماء أو الغبار في الهواء !) .
- سائل لإزوتروبي Isotrop ، أي موحد الخواص في كافة الاتجاهات .
- سائل لاإزوتروبي عندما تختلف صفاته مع الاتجاه .

٢.٢ اللزوجة

اللزوجة هي الصفة الفيزيائية المميزة للسوائل الحقيقية بأنها تقاوم تغير شكلها.

ولذلك فإن كل جسم يتحرك في سائل حقيقي يتلقى مقاومة تستلزم بذل قوى خارجية للتغلب عليها ، وكل سائل حقيقي يجري ضمن أجسام كالأنابيب يخسر جزءاً من قدرته الميكانيكية .
لتوضيح ماهية اللزوجة نتصور التجربة البسيطة التالية ، الشكل (١.٢) :



الشكل ١.٢ : الجريان بين صفيحتين مستوئيتين ومتوازيتين (جريان كونييت) لتوضيح مفهوم لزوجة السائل

نعتبر صفيحتين متوازيتين أفقيتين وطوليتين جداً البعد بينهما h ونحصران سائلاً لزجاً . إذا سحبنا الصفيحة العلوية في مستويها بسرعة U ، فإن التجربة تبين أن السائل يبقى ملتصقاً بكلتي الصفيحتين . وبالتالي فإن سرعته على سطح الصفيحة السفلية تساوي الصفر ، بينما تساوي على سطح الصفيحة العلوية سرعة هذه الصفيحة نفسها U . وعليه يمكن اعتبار توزيع سرعة السائل بين الصفيحتين خطياً ، وبهذا تكون سرعة السائل في نقطة ما بين الصفيحتين متناسبة طردياً مع البعد y عن الصفيحة السفلية :

$$u(y) = U \cdot \frac{y}{h} \quad (2.1)$$

وينتفق شرط الالتصاق :

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow u = 0 \\ y = h \Rightarrow u = U \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

ولكي تبقى حركة الصفيحة العلوية مستمرة ومنظمة فإنه يلزم تطبيق قوة مماسية F باتجاه حركتها كافية للتغلب على قوى احتكاك السائل فقط ، باعتبار أن قوى الضغط متوازنة فيما بينها . فإذا أجريت تجارب متعددة بسرعات U وأبعاد h مختلفة فإن نتائج القياسات تؤكد أن القوة المماسية المحسوبة

بالنسبة لواحدة السطح المبلل تتناسب طردياً مع السرعة U وعكساً مع البعد h . فإذا رمزنا بالحرف τ لقوة الاحتكاك المؤثرة على واحد السطح ، تنتج العلاقة التالية :

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{U}{h} \quad (2.3)$$

τ يمثل قوة على سطح ، ووحدة قياسه $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ أو $\left[\frac{kp}{m^2}\right]$ فهو إذن إجهاد يطلق عليه إجهاد الاحتكاك أو إجهاد القص Shear stress تيمناً بالتسمية المماثلة في مقاومة المواد . أما معامل التناسب η فيمثل ثابتة مادية لها قيمة محددة بالنسبة لسائل معين تحت ظروف خارجية معينة يطلق عليها اللزوجة التحريكية (الديناميكية) Dynamic viscosity ، ووحدة قياسها تنتج من (2.3) في الجملة العالمية والتكنيكية :

$$[\eta] = \left[\frac{\tau h}{U} \right] = N s m^{-2} = kg m^{-1} s^{-1} = \frac{1}{9.81} \cdot \frac{kp s}{m^2} \quad (2.4)$$

وفي جملة القياس الفيزيائية (e.g.s) تستخدم واحدة البواز $[P]$ أو السنتيوايز $[cP]$ ، وكذلك $[dyn s cm^{-2}]$. وترتبط هذه الواحدات مع الواحدات الأخرى بالعلاقة :

$$1 \frac{N s}{m^2} = 10 \frac{dyn s}{cm^2} = 10 \frac{g}{cm s} = 10 P = 10^3 cP \quad (2.5)$$

إذا قسمنا طرفي العلاقة (2.3) على الكثافة ρ (راجع ٥.٢) ينتج :

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{U}{h} \quad (2.6)$$

حيث يطلق على

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (2.7)$$

اسم سرعة إجهاد القص Shear stress velocity ، وتلعب دوراً هاماً
في الجريانات المضطربة ، بينما يسمى الكسر :

$$v = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.8)$$

اللزوجة الحركية (الكينيماتيكية) Kinematic viscosity ، وتمثل النسبة
بين ثابتي مادة ، وتلعب دوراً مهماً في كافة الجريانات التي تؤثر فيها
قوى الاحتكاك وقوى العطالة . أما واحدتها القياسية فتنتج في الجملة
العالمية أو التكنيكية :

$$[v] = m^2 s^{-1} \quad (2.9)$$

كما يستعمل الستوكس [St] والستيستوكس [cSt] (نسبة للعالم ستوكس)
حيث تقوم العلاقة :

$$1 m^2 s^{-1} = 10^4 St = 10^6 cSt = 10^4 cm^2 s^{-1} \quad (2.10)$$

وفي جملة القياس التكنيكية تستعمل واحدة قياس أخرى هي درجة انجلر
Engler [°E] ، وتساوي النسبة بين الزمن الذي يستغرقه تفريغ كمية معينة
من السائل المعتبر من إناء قياس خاص إلى الزمن الذي يستغرقه تفريغ نفس
الكمية من الماء . وتطبق عدة قوانين تحويل لهذه الواحدة تمثل معادلات قيم
عددية [8] [12] منها :

قانون فون ميسس V. Mises :

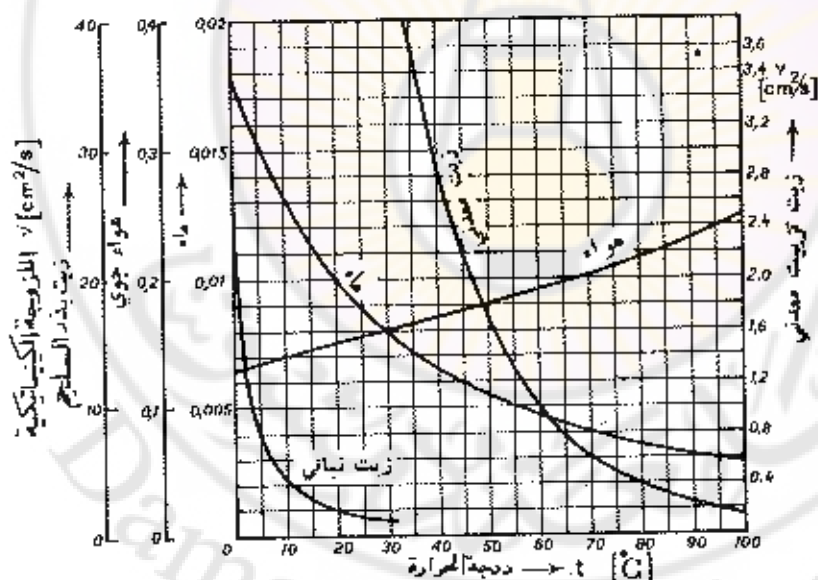
$$\frac{v}{[St]} = \frac{v}{[cm^2 s^{-1}]} = 0.0864 \{^{\circ}E\} - \frac{0.08}{\{^{\circ}E\}} \quad (2.11)$$

وقانون فوجل Vogel :

$$\frac{v}{[St]} = \{^{\circ}E\} 0.076^{1-\frac{1}{\{^{\circ}E\}}}$$

حيث تعني {°E} القيمة العددية للزوجة بدرجات انجلر .

بالنسبة للسوائل غير القابلة للانضغاط (الموائع) فإن الزوجة الحركية η لاتتعلق عملياً بالضغط ، ولكنها تتناقص بشدة مع ارتفاع درجة الحرارة . وينطبق نفس الشيء تقريباً على ν لأن الكثافة لاتتغير إلا قليلاً جداً مع درجة الحرارة . وبالنسبة للسوائل القابلة للانضغاط (الغازات) فإن η لاتتعلق أيضاً بالضغط ، كما برهن ذلك ماكسويل عام 1876 [8] ، ولكنها تزداد مع ارتفاع درجة الحرارة ، بينما ν ، وبسبب أن الكثافة ρ تتناقص بشدة مع إزدياد درجة الحرارة وتزداد مع ارتفاع الضغط ، فإنها تزداد بشدة مع ارتفاع T وتتناقص مع ازدياد p . وبين الشكل (٢ . ٢) تغير ν بالنسبة لعدد من السوائل . وفي [19] توجد قوائم بقيم ν تشمل أهم الموائع والغازات ذات الأهمية التكنيكية .



الشكل ٢.٢ : تغير الزوجة الحركية مع درجة الحرارة بالنسبة لعدد سائل حسب [8] [21]

على أساس اللزوجة يمكن التفريق بين سوائل صغيرة اللزوجة كالماء والهواء ، وأخرى كبيرة اللزوجة كالزيوت المعدنية والجليسرين ، الجدول (١.٢) . وتبدي الأولى مقاومة ضعيفة لتحرك الأجسام فيها ، ولذلك يمكن كخطوة تقريبية أولى إهمال لزوجتها واعتبارها سوائل مثالية . وعلى العموم فإنه يمكن تصنيف السوائل إلى :

سوائل مثالية : $\eta = 0$ ؛ سوائل حقيقية : $\eta > 0$

الجدول ١.٢ : مقارنة بين اللزوجة التحريرية والحركية لعدد من السوائل عند

$$p = 760 \text{ Torr} , t = 20^\circ \text{C}$$

السائل	$\eta \cdot 10^6$ kp s m^{-2}	$\nu \cdot 10^6$ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
هواء	1,84	15,1
ماء	103	1,01
زئبق	157,5	0,115
مازوت	362	4,14
زيت محرك	8713,8	94
جليسرين	87040	680

إن العلاقة (2 . 3) تنطبق في الواقع على جريان بسيط جداً كاليمين في الشكل (١.٢) يطلق عليه نسبة لمكتشفه جريان كوثيت Couett-flow . فإذا بدلنا في هذه العلاقة تغير السرعة باتجاه الناظم $\frac{U}{h}$ بتدرج السرعة $\frac{du}{dn}$ نتجت علاقة أعم :

$$\tau = \eta \frac{du}{dn} \quad (2.12)$$

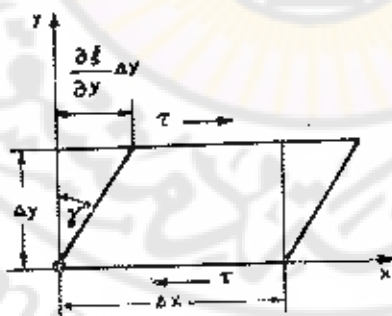
بطلق عليها قانون نيوتن للاحتكاك : الذي ينطبق على كافة الجريانات الحقيقية الصفائحية والتي لا يلزم أن يكون توزيع السرعة فيها خطياً وفق العلاقة (2.1) . بمساعدة قانون نيوتن (2.12) يمكن إجراء مقارنة مفيدة بين احتكاك الأجسام السائلة والصلبة . فبينما قوى الاحتكاك بين السطوح الصلبة الساكنة غير معدومة ، فإنها لا تظهر في السوائل إلا في حالة الحركة لأن $\frac{du}{dy} = 0$ في حالة السكون . وينطبق على الجسم الصلب المرن قانون

هوك Hooke :

$$\tau = G \gamma ; \quad \gamma \approx \tan \gamma = \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (2.13)$$

حيث G معامل الانزياح الزاوي أو معامل إجهاد القص ، γ التغير الزاوي للزاوية القائمة أصلاً نتيجة التشوه ، ξ الانزياح في اتجاه x (الشكل ٣.٢) . وعليه فإن إجهاد القص للجسم الصلب المرن يتناسب طردياً مع مقدار تغير الشكل . أما في حالة السوائل حيث الانزياح الجزئي $\xi = u$ فينتج من (2.12) :

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} = \eta \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \eta \frac{d\gamma}{dt} \quad (2.14)$$



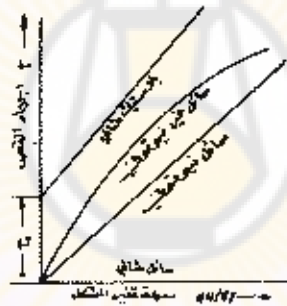
الشكل ٣.٢ : التشوه الزاوي الجزئي مستطيلة نتيجة الانزياح $\xi(y)$ باتجاه x بتأثير إجهاد القص τ .

وبهذا نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

إجهاد القص في السوائل يتناسب طردياً مع سرعة تغير شكل الجسم ، ويساوي الصفر في حالة السكون ، بينما في حالة الجسم الصلب فيتناسب طردياً مع مقدار تغير الشكل

التي سنعود إليها عند اشتقاق قانون ستوكس العام للاحتكاك .

هناك سوائل لا تخضع لقانون نيوتن مثل المواد الغروية [Colloidal] والبلاستيكية يطلق عليها السوائل غير النيوتونية وتكون فيها العلاقة بين إجهاد القص وتدرج السرعة غير خطية ويلزم أحياناً لإجهاد قص ابتدائي τ_0 يعادل إجهاد حد السيولة Yield stress لتأخذ طبيعة سيالة (الشكل ٤.٢) . ويسمى الفرع العلمي الذي يدرس هذه المواد ريولوجيا Rheology [1] [6] .



الشكل ٤.٢ : السوائل النيوتونية وغير النيوتونية .

٣.٢ حالة المواد الريولوجية

في ميكانيك السوائل كما في مقاومة المواد يتركز الاهتمام على معرفة الإجهادات داخل الجسم المعتبر . ويعرف الإجهاد Stress بأنه القوة المؤثرة على واحدة السطح ويمثل بشعاع . ويكون لدينا إجهاد مماسي أو إجهاد

قص عندما يكون شعاع القوة F عمودياً على شعاع الناظم على السطح A (٢.٢) ، وإجهاد ناظمي أو ضغط عندما يكون F موازياً A (٢.٣.٢) .
وتمثل مجموعة الإجهادات المؤثرة على المقاطع المختلفة المارة في نقطة معينة حالة الإجهاد لتلك النقطة .

حسب النظرية الحركية للمادة Kinetic theory of materials تكون الذرات Atoma في حركة دائمة وتظهر قدرتها الحركية بشكل حرارة . وتقوم ذرات الأجسام الصلبة بحركة اهتزازية حول أماكن ثابتة ، بينما تتبادل الذرات المتجاورة للسوائل المائعة أماكنها كثيراً أو قليلاً ، ولا توجد في السوائل الغازية أماكن محددة للذرات مطلقاً . فإذا كان السائل في حالة إجهاد فإن تبادل الأمكنة بين الذرات يتم بحيث ينشأ انزياح في اتجاه فروق الإجهادات . ويؤدي هذا الانزياح في حالة السكون إلى الاختفاء السريع أو البطيء لفروق الإجهادات . أما في حالة الحركة فإنه ينشأ عن الانزياح إجهادات تكون أكبر كلما كان تغير الشكل أسرع [1] [7] .

إن دراسة حالة الإجهاد في السوائل تعتمد على نفس المبادئ والقوانين العامة لتوازن القوى المطبقة في ميكانيك الجسم الصلب . ويبرر البعض ذلك بواسطة ما يسمى « مبدأ التصلب » الذي ينطلق من الفكرة التالية : « إن توازن أية جملة كتلية لا يتأثر من جراء تثبيت بعض أجزائها المتحركة ، وعليه يمكن في سائل متوازن أن نتصور منطقة جزئية قد « تصلبت » ، بمعنى تجمدت ، بدون تغير في حجم السائل أو كثافته ، دون أن يؤثر ذلك على حالة التوازن ، ويمكن بعدها تطبيق قوانين التوازن للجسم الصلب على هذه المنطقة المتصلبة » [1] . فإذا كان السائل في حالة سكون فعلي فإن استخدام مبدأ التصلب لا يخلق أية صعوبة : أما في حالة الحركة فيمكن أن يقود بسهولة إلى صعوبة كبيرة بسبب أنه لا يمكن أن يوجد أي شيء

متصلب في السائل . والحقيقة أنه ليست هناك ضرورة ملحة للجوء لفكرة التصلب لأن « كل جملة مادية متوازنة تملك إمكانيات حركة داخلية ولكنها لا تستغل بسبب حالة التوازن ، تنطبق عليها قوانين التوازن للميكانيك العام » [١] . لذلك فإن الطريقة السائدة لدراسة الإجهادات في السوائل الساكنة أو المتحركة تعتمد على مبدأ القطع ، الذي أدخله اينشتاين أولر ويعتبر رغم بساطته الظاهرية أحد أهم إنجازاته العبقريّة [67] . هذا المبدأ الذي يتيح لنا تخيل الرؤية داخل المادة ، حيث لا يمكن للعين أو التجربة أن تتغلغل ، يتلخص بما يلي : « نقتطع من الجسم (الصلب أو السائل) عنصراً حجمياً وندرس توازن القوى المؤثرة عليه في حالة السكون ؛ أو علاقة هذه القوى بالتسارعات الكتلية في حالة الحركة » .

إن مبدأ القطع ، المعروف جيداً في مقاومة المواد أيضاً ، سيقدم لنا خدمات جلّتي عند دراسة توازن وحركة السوائل . ولذلك فمن المفيد معالجة أهم المنطقات التي يعتمد عليها .

١.٣.٢ نصيب القوى المؤثرة في السائل

إن القوى بفهمها العام ليست إلا تأثيراً متبادلاً بين الكتل يعبر عنه مبدأ نيوتن للفعل ورد الفعل . فالكتلة m_1 تجذب مثلاً الكتلة m_2 بقوة F ، بينما الكتلة m_2 تجذب m_1 بقوة مضادة تساوي F بالمقدار وتعاكسها بالاتجاه .

لنعتبر جملة كتلية أو كما تسمى أيضاً جملة فيزيائية ذات حدود مميزة نغزلها بشكل ما عن الكتل الأخرى . هذه الحدود يمكن أن تكون حقيقية ، مثل السطح الخارجي للسائل أو جدران الأوعية التي تحتويه ، أو وهمية ، كأن نتصور أن الجملة الكتلية قد اقتطعت من داخل جسم سائل ،

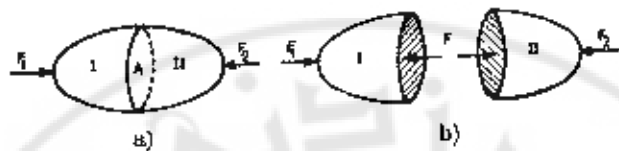
وحررت بعد التعويض عن تأثير السائل المحيط بها بقوى مناسبة بحيث أن سلوكية السائل (حالة توازنه مثلاً) لا تتغير. إن القوى المؤثرة على مثل هذه الحملة تقسم إلى نوعين : قوى خارجية تظهر كتأثير بين إحدى كتل الحملة المعنية وكتلة خارجية قريبة من الحملة ولكنها غير تابعة لها ، وقوى داخلية تظهر كتأثير متبادل بين كتلتين تابعتين للحملة المعنية . وواضح أن كل قوة خارجية تظهر مرة واحدة فقط ، بينما كل قوة داخلية تظهر مرتين كقوتين متضادتين . وعليه فإن محصلة كافة القوى الداخلية المؤثرة على الحملة تكون معدومة ، بينما لا تنعدم محصلة القوى الخارجية إلا إذا كانت الحملة في حالة توازن ، وينعدم عندها عزم المحصلة أيضاً . فإذا كانت F_{xi} ، F_{yi} ، F_{zi} تمثل مركبات القوى الخارجية باتجاه المحاور الديكارتية x ، y ، z و M_i يمثل عزم هذه القوى بالنسبة لمحور دوران معين فينتج في حالة التوازن :

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 ; \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0 ; \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0 ; \sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (2.15)$$

ولكن شروط التوازن هذه لا تعطينا أية فكرة عن حالة الإجهاد داخل إحدى كتل الحملة المعنية لأن القوى الداخلية المؤثرة بين الذرات الكتلية هي المسؤولة عنها . وبالتالي فإن الحساب الدقيق للإجهادات الداخلية تستلزم معرفة القوى الداخلية الإفرادية التي تؤثر بها الذرات على بعضها ، مع أخذ حركتها الدائمة بعين الاعتبار . وفي الحالة العامة فإنه بدلاً من هذا الحساب المعقد يكتفى بحساب القيم الوسطية للإجهادات . ولكن كيف يمكن حساب القوى الداخلية طالما أن شروط التوازن (2.15) تطبق على القوى الخارجية فقط ؟ والجواب :

بمساعدة مبدأ القاطع يتم تحويل القوى الداخلية إلى خارجية وحسابها بتطبيق شروط التوازن .

وللتوضيح نعتبر الحملية الكتلية المبينة في الشكل (٢.٥.٢) F_2, F_1 .
تمثلان قوتين خارجيتين تعوضان عن تأثير الكتل الخارجية . بواسطة
المقطع الوهمي A يصبح لدينا جملتين I و II .

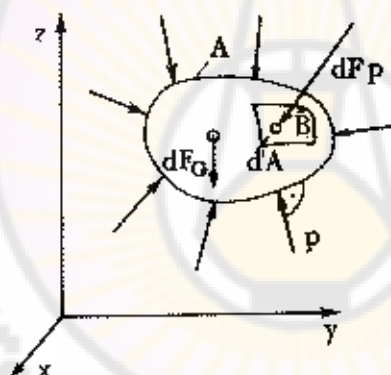


الشكل ٢.٥ : توضيح مبدأ القطع لحساب القوى الداخلية

فإذا أبعدنا الحملية II ، الشكل (٢.٥.٢) ، واعتبرنا الحملية I (طبعاً العكس
ممكناً أيضاً) فإن كافة القوى التي كانت تؤثر بها جزيئات الحملية II على جزيئات
I ، والتي كانت قبل القطع قوى داخلية ، تظهر الآن بشكل قوى خارجية
محصلةها F . فإذا كانت الحملية قبل القطع في حالة توازن ، فإن الحملية I تبقى
أيضاً متوازنة ، وبالتالي يجب أن تكون محصلة القوتين F_1 ، F_2 تساوي الصفر .
فإذا كانت F_1 معلومة فيمكن على هذا الأساس حساب القوة المحصلة
الوسطية للقوى الداخلية المؤثرة في المقطع A أو أي مقطع آخر أو خط تقاطع .
نتصور الآن أننا اقتطعنا من داخل سائل ما جزيئاً حقيقياً dV شكله
غير محدد وحررناه من السائل المحيط به ، الشكل (٢.٦) . هذا الجزيء
يمثل جملة فيزيائية فراغية ذات حدود وهمية ممثلة بالسطح الخارجي المغلق
للجزيء . إن القوى الداخلية الناتجة عن التأثير المتبادل بين الجزيء والسائل
المحيط به تظهر بشكل قوى خارجية موزعة على كامل السطح الخارجي
للجزيء . ولذا يطلق عليها القوى السطحية وتتألف في الحالة العامة من قوى
مماسية وناظمية تنتج عنها إجهادات مماسية (إجهادات قص) وإجهادات
ناظمية (ضغوط) . وتنعدم الإجهادات المماسية إذا كان السائل ساكناً أو
كان مثاليًا (عديم اللزوجة) .

بالإضافة إلى القوى السطحية فمن الممكن أن تؤثر على الجزيء الحجمي قوى ليس لها علاقة بوجود السائل المحيط به . هذه القوى تكون موزعة على كامل حجم أو كتلة الجزيء ويطلق عليها القوى الحجمية F_V أو الكتلية وأحياناً الخفية . وتنتمي إليها مثلاً قوة الثقالة أو قوة الجاذبية الأرضية F_G الناتجة عن تأثير كتلة الكرة الأرضية على الكتلة المعتبرة ، القوى المغناطيسية والكهربائية ، القوة النابذة F_Z وغيرها . وتنشأ القوى الكتلية إما بسبب تسارعات كامنة مستقلة عن الحملة المعتبرة كالتسارع الأرضي ، أو بسبب تسارعات متعلقة بالحملة ككل نتيجة حركتها ، كالتسارع النابذ [12] . وهي تخضع للقانون الأساسي للتحريك فمثلاً :

$$F_r = m b ; F_V = F_G = m g ; F_r = F_Z = m r \omega^2 , \quad (2.16)$$



الشكل ٢.٦ : القوى السطحية والحجمية المؤثرة في السائل

حيث $b = g$ التسارع الأرضي ، $b = r \omega^2$ التسارع النابذ . ومنه ينتج بسهولة أن القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة ، أي نسبة القوة الحجمية على الكتلة ، تساوي إلى التسارع في اتجاه القوة .
إن القوى السطحية والكتلية مجتمعة تحدد سلوكية الجزيء الحجمي الحركية أو السكونية . وحيث أن القوى الحجمية تعتبر بحكم المعطاة فإن

معرفة حالة الإجهاد مرهونة بحساب القوى السطحية . وقد تعرفنا في الفقرة (٢.٢) على ماهية الإجهادات المماسية ويلزم الآن التعرف على الإجهادات الناعمية .

٢.٣.٢ مفهوم الضغط في تفاعل من السائل

لتوضيح مفهوم الضغط نقتطع من سائل مثالي جزيئاً حجمياً كما في الشكل (٦.٢) . إن تأثير السائل المحيط بهذا الجزيء ينحصر في هذه الحالة بالقوى السطحية الناعمية فقط ، لأن القوى المماسية (قوى الاحتكاك) تكون معدومة بسبب كون السائل عديم اللزوجة ، وكذلك قوى الشد باعتبار أن السائل في الحالة العامة لا يستطيع تقاها .

إذا كان ΔA عنصراً سطحياً يمر من النقطة B الواقعة على السطح الخارجي للجزيء الحجمي و ΔF_p القوة الناعمية المؤثرة عليه فيكون تعريفاً:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta A} = \frac{dF_p}{dA} \quad (2.17)$$

هو ضغط السائل ، أو اختصاراً الضغط المؤثر في النقطة B . فإذا كان الضغط موزعاً بانتظام على السطح ، ويتحقق ذلك كلما كان السطح صغيراً ، نتج لدينا علاقة أبسط :

$$p = \frac{F_p}{A} \quad (F_p \parallel A) . \quad (2.18)$$

ضغط اذن إجهاد ناعمي يعبر عن شدة تأثير السائل المحيط على نقطة معينة من السطح الخارجي للجزيء المقتطع . ونتج واحدة قياسه :

$$[p] = \left[\frac{F_p}{A} \right] = \text{Nm}^{-2} , \quad (2.19)$$

أو بالمقارنة مع جمل قياس أخرى :

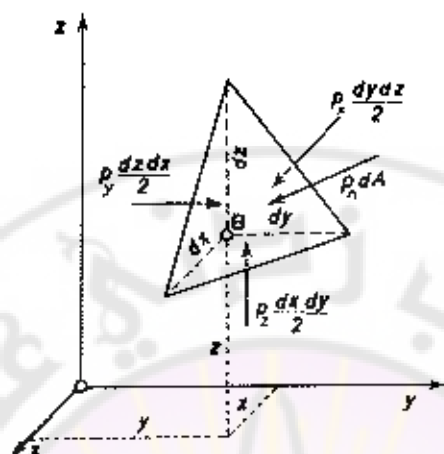
الحملة العالمية	الحملة التكنيكية	الحملة الفيزيائية
1 N m^{-2}	$\frac{1}{9,81} \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$	$= 10 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$
	$\frac{1}{9,81} \text{ mm WC}$	$= 10^{-6} \text{ bar}$
	$\frac{10^{-4}}{9,81} \text{ at}$	$= \frac{10^{-4}}{9,81 \cdot 1,0333} \text{ atm} = 0,987 \cdot 10^{-6} \text{ atm}$
		$= \frac{760 \cdot 10^{-4}}{9,81 \cdot 1,0333} \text{ Torr} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ Torr}$
		$= 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm MC}$

(2.20)

حيث تعني [atm] ضغط جوي فيزيائي ؛ [mm WC] ميليمتر عمود سائل ماء ؛ (mm MC) ميليمتر عمود سائل زيتي (راجع ٢.٣.١.٣) .

لتحديد حالة الإجهاد في النقطة B نقتطع من داخل السائل المثالي هراً ثلاثياً منتظماً متناهي الصفر أطوال حروفه الموازية لمحاور الأحداثيات الديكارتية الثابتة x, y, z هي على التوالي dx, dy, dz والنقطة B (x, y, z) تشكل إحدى زواياه ، الشكل (٧.٢) . نطبق على هذا الجزيء الحجمي مبداء المير الذي يقضي بأن القوى السطحية والحجمية ، بالإضافة لقوى العطالة ، يجب أن تكون في حالة توازن .

إن القوى الحجمية المؤثرة على الجزيء ، كقوة الثقالة مثلاً ، وكذلك قوى العطالة ، تتناسب مع حجم الهرم ، فهي إذن صغيرة من المرتبة الثالثة ؛ أما القوى السطحية فتتناسب مع السطح ، فهي إذن صغيرة من المرتبة الثانية . وعليه يمكن إهمال القوى الكتلية وقوى العطالة واعتبار القوى السطحية ، المثلة هنا بقوى ناظمية فقط ، محققة لشروط التوازن .



الشكل ٧.٢ : توازن هرم ثلاثي منتظم، متناهي الصغر
لتحديد حالة الاجهاد في النقطة B

ليكن p_x, p_y, p_z الضغوط المؤثرة على أوجه الهرم في اتجاه المحاور x, y, z ، p_n الضغط المؤثر على وجه الهرم المائل الذي مساحته dA . ولنفرض أن α, β, γ هي الزوايا المشكلة بين الناطم على dA والمحاور x, y, z ، وأن dA_x, dA_y, dA_z هي السطوح المتعامدة على هذه المحاور. نطبق شروط التوازن على الهرم (الشكل ٧.٢) فينتج :

$$\left. \begin{aligned} p_x \cdot dA_x - p_n \cdot dA \cos \alpha &= 0 \\ p_y \cdot dA_y - p_n \cdot dA \cos \beta &= 0 \\ p_z \cdot dA_z - p_n \cdot dA \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

من جهة أخرى ينتج من علاقة اتجاه التجيب :

$$\begin{aligned} dA_x &= dA \cos \alpha = \frac{dy \, dz}{2} ; \quad dA_y = dA \cos \beta = \frac{dz \, dx}{2} ; \\ dA_z &= dA \cos \gamma = \frac{dx \, dy}{2} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

ومن مقارنة هاتين العلاقتين نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

(2. 23)

التي تنص على أن الضغط في النقطة R في الاتجاهات المتعامدة مع سطوح الهرم الأربعة يبقى ثابتاً . وحيث أن اتجاه السطح المائل للهرم قد اختير على غير تعيين فإنه يمكن تعميم هذه النتيجة التي تتميز بها حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية :

تتميز حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية بأن الضغط كإجهاد ناظمي له قيمة ثابتة في كافة اتجاهات المقاطع المارة في النقطة المعنية ، وهو يمثل قيمة عددية Scalar .

وبالعكس من ذلك فإن الإجهاد الناظمي للجسم الصلب حسب قوانين مقاومة المواد يتعلق باتجاه المقطع ويمثل مركبة تنزور Tensor (التنزور) هو قيمة مركبة من قيم موجهة ، أي أشعة ، بشكل جدائي ولكنها لا ترتبط مع بعضها كمجاءات عددية أو شعاعية [12] . ويلزم لتحديد حالة الإجهاد العامة في نقطة معرفة الإجهادات الناظمية في ثلاثة اتجاهات مختلفة ، وتمثل حالة الإجهاد بيانياً بمجسم قطع ناقص ، وتسمى الإجهادات المتعامدة على المستويات المارة من محاوره الرئيسية الثلاثة الإجهادات الرئيسية . بينما يلزم لتحديد حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية معرفة قيمة عددية واحدة للضغط ، ويأخذ مجسم حالة الإجهاد شكل كرة .

إن العلاقة (2. 23) تنطبق على السوائل الساكنة (الحقيقية والمثالية) بشكل عام ، وتعني أن الضغط هو تابع مكاني صرف : $p = f(x, y, z)$ كما تنطبق على السوائل المثالية المتحركة ، ولكن الضغط يكون هنا في الحالة العامة تابع للزمن أيضاً : $p = f(x, y, z, t)$. وتجدر الإشارة أن هذه النتيجة تنطبق أيضاً على نقطة واقعة على حدود حقيقية للجزيء .

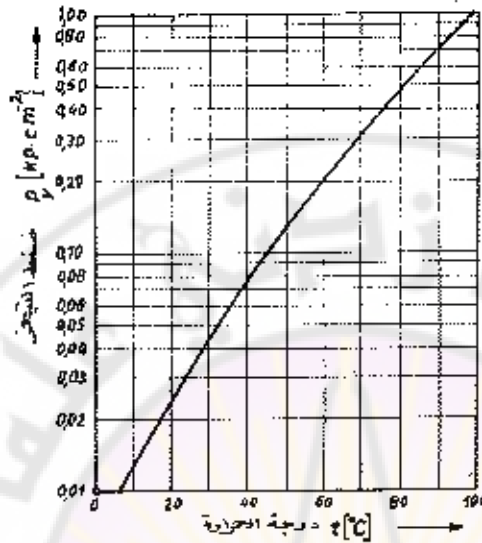
المعتبر مثل جدران الوعاء الذي يحتوي السائل . فقوة الضغط لاتتعلق باتجاه سطح الجدار ولا بحشوته وإنما تؤثر ناظماً عليه وتساوي p_dA .

٤.٢ مفهوم ضغط التبخر

يطلق على العملية التي يتحول فيها جزء من سائل (مائع) تحت تأثير ضغط معين ودرجة حرارة معينة من الحالة المائعة إلى الغازية اسم ظاهرة التبخر . ولكي تتم هذه العملية يجب أن تنفذ ذرات من داخل السائل وتخرج سطحه الخارجي . وهذا يتطلب إنجاز عمل للتغلب على قوى الإجهاد السطحي للذرات السطحية الخارجي للسائل (راجع ٧.٢) .

وتعلمنا فيزياء المادة أن ذرات كل سائل تكون ذات سرعات مختلفة جداً . وبدني أن الذرات الأسرع هي التي ستخرج أولاً السطح الخارجي للسائل أثناء عملية التبخر ، ويفتقدها السائل بالتالي ، مما يؤدي إلى تخفيض السرعة الوسطية للذرات . وينتج من ذلك إنخفاض لدرجة الحرارة . ولهذا يكون الماء المكشوف دائماً أبرد قليلاً من محيطه الخارجي ، وتبرد أجسامنا أكثر إذا كانت مبللة .

عندما تبدأ عملية التبخر لسائل يشغل حيزاً معيناً من إناء مغلق تماماً فإن الجزيئات المتبخرة تأخذ حجم الفراغ فوق السائل ، وتصل بعد فترة زمنية إلى كثافة معينة تتوقف عندها عملية التبخر . في هذه الحالة يصبح عدد الذرات المتبخرة يساوي تماماً لعدد الذرات المتكثفة ، وبالتالي يكون هناك توازن بين السائل وبخاره ونصل إلى حالة الإشباع Saturation state . ويطلق على ضغط البخار فوق سطح السائل اسم ضغط التبخر أو ضغط الاشباع p_v .



الشكل ٨.٢ : تغير ضغط تبخر الماء مع درجة الحرارة

إن ضغط التبخر يتعلق بدرجة الحرارة ويزداد معها ، الشكل (٨.٢) .
ولكل سائل عند درجة حرارة معينة ضغط تبخر معين . فعند درجة حرارة 20°C يبلغ ضغط التبخر للماء $p_v = 0,0238 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ ، وللجازولين $p_v = 0,0156 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ وللكرولين $p_v = 0,1224 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$.
أنه بالنسبة للسوائل المركبة مثل الجازولين ومواد الاحتراق السائلة الأخرى فإن ضغط التبخر يتعلق ، بالإضافة لدرجة الحرارة والصفات الفيزيائية - الكيميائية ، بنسبة حجم السائل لحجم البخار [21] .

إن معرفة ضغط التبخر لها أهمية عملية كبيرة بالنسبة لحالات الجريان التي يبلغ فيها الضغط قيمة قريبة من ضغط التبخر ، حيث يرتبط بذلك نشوء ظاهرة التكيف Cavitation التي يجب في الحالة العامة تجنبها في كافة المنشآت الهيدروليكية .

٥.٢ الكثافة والحجم النوعي والوزن النوعي

تعرف الكثافة المادية للسائل أو باختصار الكثافة ρ بأنها كتلة واحدة

الحجم :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.24)$$

وواحدة قياسها :

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3} = \frac{1}{9,81} \frac{kp \cdot s^2}{m^3} \quad (2.25)$$

ويعرف الحجم النوعي ν بأنه حجم واحدة الكتلة ، وبالتالي فهو يساوي إلى مقلوب الكثافة :

$$\nu = \frac{1}{\rho} \quad (2.26)$$

بينما الوزن النوعي γ فيساوي إلى وزن واحدة الحجم :

$$\gamma = \rho g \quad (2.27)$$

حيث g التسارع الأرضي . وتنتج واحدة القياس :

$$[\gamma] = \frac{kg}{m^3 \cdot s^2} = \frac{1}{9,81} \frac{kp}{m^3} \quad (2.28)$$

إن تغير حجم السائل تحت تأثير الضغط أو الحرارة يؤدي إلى تغير موضعي لكثافة هذا السائل التي يمكن أن تتغير أيضاً مع الزمن . وهذا ماينطبق في الحالة العامة على السوائل القابلة للانضغاط كالهواء مثلاً ، ولذا توصف بأنها غير متجانسة [1] ويكون حسب (2.24) :

$$d\rho \sim d\left(\frac{1}{\nu}\right) \neq 0 \quad (2.29)$$

بينما تبقى كثافة السوائل غير القابلة للانضغاط عملياً ثابتة وتوصف بأنها متجانسة ويكون :

$$d\rho = 0 \quad (2.30)$$

ولكن هناك سوائل غير قابلة للانضغاط أيضاً مثل الماء الغالي أو الهواء المشحون بمواد صلبة تكون كثافتها متغيرة مع الزمان والمكان وتوصف بأنها مركبة أو متعددة الطور Heterogeneous ويكون بالنسبة لكل مركبة أو طور للسائل حسب [12] :

$$d\rho \sim d m. \quad (2.31)$$

وتتناقص الكثافة ، والوزن النوعي أيضاً ، مع ازدياد درجة الحرارة . ويكون هذا التناقص بالنسبة للهواء ، كمثال نموذجي للغازات ، أكبر منه في حالة الماء بسبب الاختلاف في تماسك الذرات لكل منهما ، الجداول (٢.٢) .

الجدول ٢.٢ : تغير الوزن النوعي γ والكثافة ρ للماء والهواء مع درجة الحرارة

عند ضغط جوي $p_0 = 760 \text{ Torr}$ حسب [9]

درجة الحرارة $t [^{\circ}\text{C}]$	-20	0	10	20	40	60	80	100	200
$\gamma [\text{kp m}^{-3}]$	—	1000	1000	998	992	983	972	958	—
$\rho [\text{kp s}^2 \text{m}^{-4}]$	—	101,9	101,9	101,7	101,1	100,2	99,1	97,8	—
$\gamma [\text{kp m}^{-3}]$	1,40	1,29	—	1,20	1,12	1,06	1,00	0,95	0,746
$\rho [\text{kp s}^2 \text{m}^{-4}]$	0,142	0,132	—	0,123	0,115	0,108	0,102	0,096	0,076

٦.٢ قابلية الانضغاط ومعامل المرونة

يعتبر التغير النسبي للحجم بالنسبة لوحدة الضغط كقياس لقابلية السائل على الانضغاط ، ويعرف معامل الانضغاطية Coefficient of compressibility عند درجة حرارة ثابتة بالكسر :

$$K_c = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \Big|_{t=\text{const}} \quad (2.32)$$

حيث V الحجم البدائي ، dp تفاضل الضغط الذي نتج عنه تغير في الحجم بمقدار dV ، وإشارة الناقص للتدليل على أن زيادة الضغط تؤدي إلى تصغير الحجم .

في الحالة العامة يؤخذ مقلوب K_e ويطلق عليه معامل المرونة الحجمي Bulk modulus of elasticity تيمناً بمعامل المرونة المعروف في مقاومة المواد :

$$K_E = \frac{1}{K_e} = - \frac{dp}{dV/V}, \quad (2.33)$$

وهو يمثل ثابتة مادة تختلف من سائل لآخر وله واحدة قياس الضغط :

$$[K_E] = \frac{N}{m^2} = \frac{1}{9.81} \frac{kp}{m^2}. \quad (2.34)$$

فإذا أدخلنا الحجم النوعي v بدلا من الحجم V ، وراعينا أن الكتلة بفعل الانضغاط تبقى ثابتة فإن العلاقة (2.33) تصبح بمساعدة (2.24) و (2.26) :

$$K_E = - \frac{dp}{dv/v} = - \frac{dp}{d(\ln v)} = + \frac{dp}{d\rho/\rho} = \frac{dp}{d(\ln \rho)}, \quad (2.35)$$

التي تنتج بسهولة إذا انتبهنا أن :

$$dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = - \frac{d\rho}{\rho^2}$$

لحساب K_E نطبق (2.35) على جزيء حجمي متناهي الصغر ، حيث يلزم في الحالة العامة معرفة العلاقة بين الضغط والكثافة وخاصة في حالة سائل غازي (راجع ٣.٨.٢ مثلاً) . أما في حالة سائل مائع فيمكن أن نأخذ زيادة الضغط Δp وتغير الحجم ΔV بدلا من dp و dv حيث تصبح (2.33) :

$$K_E \approx - \frac{\Delta p}{\Delta V/V}. \quad (2.36)$$

أما مقارنة قيم K_E العددية للسوائل والأجسام الصلبة ، الجدول (٣.٢) ، فيقود إلى الاستنتاج التالي :

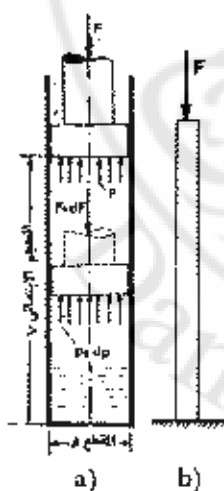
السوائل المائعة أكثر مرونة من الأجسام الصلبة ، والسوائل الغازية هي أكثر مرونة بكثير من الموائع .

الجدول ٣.٢ : مقارنة معامل المرونة للسوائل والأجسام الصلبة حسب [74] [12]

الساائل أو الجسم الصلب	$K_E [kp\ cm^{-2}]$
أبتر	9 100
ماء	21 100
كبروسين (Jp - 1)	14 050
زيت عتقات متوسط	17 600
زئبق	330 000
ألومنيوم	700 000
فولاذ	2 300 000

يستفاد من خاصية المرونة للسوائل في النوابض الهيدروليكية أو الهوائية (البنيوماتيكية) ، وتشبه من حيث منحيتها المميز النوابض المعدنية القاسية أو اللينة [12] . ويتألف النابض الهيدروليكي ، الشكل (٩.٢-أ) ، من اسطوانة تحتوي سائلا كالزيت أو الماء مثلا ويتحرك فيها مكبس سطح قاعدته A ومجهز بممانعة خاتمية لمنع تهريب السائل . فإذا تزايد الحمل المؤثر على النابض بمقدار dF ينتج عنه تزايد في الضغط بمقدار $dp = dF/A$ ، وينتقل المكبس بمقدار dl ، وتكون قساوة النابض :

$$c = \frac{dp}{dl} \quad (2.37)$$



الشكل ٩.٢ : نابض هيدروليكي (أ) ومقارنته مع نابض معدني بشكل قضيب مضغوط (ب) .

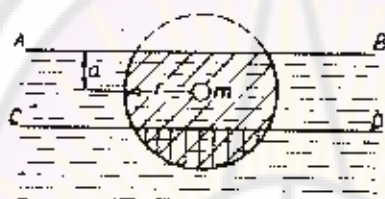
إن التوابض الهيدروليكية تعادل التوابض الخلزونية الإسطوانية من حيث النسبة بين عمل التابض ووزنه التي تبلغ حوالي $\frac{kp \cdot cm}{kp}$ 340--350 ولكنها تمتاز بصغر حجمها . ولذلك شاع استعمالها في آلات التشغيل وخاصة آلات الضغط والسحب وكذلك كمخمد صدمات . ويعمد إلى ضغط السائل مسبقاً حتى يكون مردود التابض عالياً بالنسبة لكل حمل يتعرض له [74] .

إن معامل المرونة K_E يزداد مع إزدياد درجة الحرارة عند نفس الضغط ، فهو يبلغ بالنسبة للماء مثلاً عند درجة حرارة $0^\circ C$ ؛ وضغط $p = 5 \text{ kp/cm}^2$: $K_E = 18900 \text{ kp/cm}^2$ ، وترتفع هذه القيمة إلى $K_E = 22170 \frac{kp}{cm^2}$ عند $t = 20^\circ C$ ، $p = 5 \text{ kp/cm}^2$ [21] . فإذا اعتبرنا كقيمة وسطية للماء $K_E = 20000 \text{ kp/cm}^2$ فإن حجمه ينقص حسب (2.36) ما مقداره 0.05% $\Delta V/V = 1/20000$ بالنسبة لكل زيادة ضغط مقدارها 1 kp/cm^2 . وهذا ما يجعلنا نعتبر الماء وبقية الموائع الأخرى سوائل ثابتة الحجم أو غير قابلة للانضغاط عملياً .

٧.٢ التوزن السطحي والخاصية الشعرية

إن السطح الحر المتشكل كحد فاصل بين سائلين متلاصقين غير متمازجين (ماء - زيت ، ماء - هواء) يسمى دائماً ليكون أصغرياً ، تماماً كما يفعل غشاء مطاطي رقيق مشدود بانتظام [1] . وسبب هذا التصرف يعود لكون كل ذرة من السائل ، سواء كانت في الداخل أو على السطح الخارجي الحر ، تخضع لتأثير قوى جذب الذرات المحيطة بها المسماة قوى الترابط الذرية Molecular cohesion forces .

نفرض كما في الشكل (١٠.٢) أن الجزيئة m تقع على عمق a من السطح الخارجي الحر للسائل ساكن الممثل بالمستوي الأفقي $A - B$. وليكن $D - C$ مستوياً موازياً لـ $B - A$ ومتناظراً معه بالنسبة لـ m . إن تأثير قوى الترابط الذرية على الجزيئة m لا يظهر إلا ضمن مجال صغير جداً حولها نصف قطره r . فإذا كان $a > r$ فإن قوى الترابط الذرية المؤثرة على الجزيئة من كافة الجهات تفني بعضها وتبقى الجزيئة في حالة توازن . أما في الحالة التي تكون فيها $a < r$ (الشكل ١٠.٢) فإن قوى الترابط الذرية المؤثرة ضمن المستويين $B - A$ و $D - C$ فقط تفني بعضها ، ويبقى تأثير قوى



الشكل ١٠.٢ : لتوضيح نشوء التوتر السطحي

جذب الجزيئات الواقعة تحت المستوي $D - C$ (تهشير مضاعف في الشكل) التي تحاول جذب m إلى الداخل . ومن هنا يتضح أن السطح الحر للسائل لا يحتفظ إلا بالجزيئات الضرورية جداً لللازمة لتكوين « قشرة السطح » بأصغر مساحة ممكنة . ولهذا السبب تكون قطرات المطر وفقاعات الصابون ذات شكل كروي لأن سطحها الخارجي في هذه الحالة بالنسبة لحجم معين يكون أصغرياً .

إن المركبات المماسية لقوى الترابط الذرية الموازية للسطح الخارجي الحر للسائل والمتعامدة مع الخطوط المحددة لهذا السطح تجعله في حالة إجهاد شد ، يطلق عليه عامة إجهاد السطوح المحددة Interfacial tension أو التوتر السطحي Surface tension :

التوتر السطحي σ_0 يمثل قوة الشد F الموازية للسطح الخارجي للسائل بالنسبة لكل واحدة طول من الخط المحد s لهذا السطح والتي يجب القيام بعمل من أجل التغلب عليها أثناء تكبيره .

$$\sigma_0 = \frac{dF}{ds} = \text{const} (dF \perp ds) \quad (2.38)$$

وواحدة قياسه :

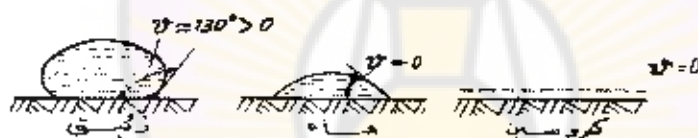
$$[\sigma_0] = \left[\frac{F}{s} \right] = N \cdot m^{-1} = \frac{1}{9,81} \frac{kp}{m} \quad (2.39)$$

إن قيمة σ_0 تبقى ثابتة في كل نقطة من السطح الخارجي الحر للسائل المعتبر وفي كل الاتجاهات ، ولا تتغير مع تغير السطح بعكس إجهاد الشد للغشاء المطاطي . لذا فإن التوتر السطحي يمثل إحدى خواص السائل . وتتعلق قيمته بدرجة الحرارة وبقوة جذب الوسط المتاخم للسطح الخارجي [12] ، الجدول (٤.٢) .

الجدول ٤.٢ : التوتر السطحي لبعض السوائل عند $t = 20^\circ C$ حسب [9] [12]

$\sigma_0 \cdot 10^3 [N \cdot m^{-1}]$	$\sigma_0 \cdot 10^3 [kp \cdot m^{-1}]$	السائلان المتاخمان
72,5	7,4	ماء / هواء
25 ... 30	2,54 3,06	زيت / هواء
472	48,2	زئبق / هواء
25,5	2,60	كحول / هواء
18,2	1,85	ماء / زيت زيتون
48	4,9	ماء / بتروليوم
375	38,2	زئبق / ماء

إن جزيئات السائل القريبة جداً من السطح المحد بين سائلين متناخمين وغير متمازجين (ماء-هواء ، ماء-زيت !) تخضع لتأثير قوى الترابط الذرية لكل منهما . وبالتالي تتغير قيمة θ ويتغير أيضاً شكل السطح المحد نفسه إذا تغير الوسط المتناخم . وعلى هذا الأساس يمكن تفسير العديد من مشاهداتنا اليومية . فإذا سقطت قطرة زيت في الهواء على الماء ، الذي هو أثقل من الزيت ، فإن هذه القطرة لاتبث أن تتحول إلى طبقة رقيقة تغطي السطح الخارجي للماء . ونلاحظ نفس الحالة إذا وضعنا قطرة ماء على سطح الزئبق . وبالعكس من ذلك فإن قطرة من الماء تبقى محافظة على شكلها إذا وضعت فوق سطح سائل أخف مثل فحمات الكبريت . ونلاحظ نفس الظاهرة إذا وضعنا قطرات من سوائل مختلفة على سطح جسم صلب . فعلى صفيحة زجاجية أفقية تبقى قطرة الزئبق محافظة على شكلها الكروي تقريباً ، بعكس قطرة الماء التي تفقد شكلها بسرعة ، أو قطرة البتروليوم التي ترحف منتشرة

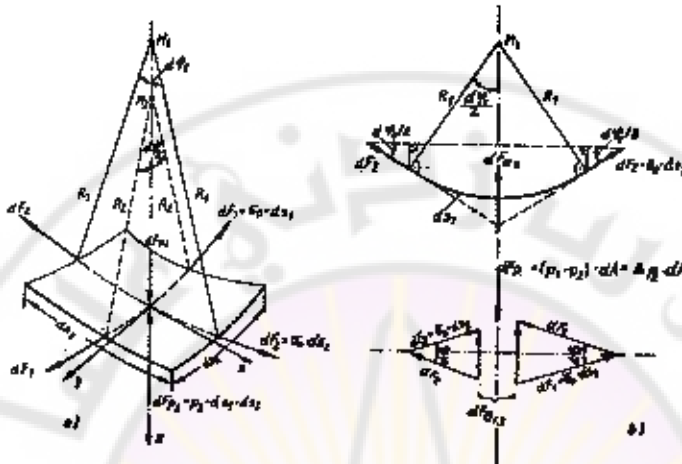


الشكل ١١.٢ : تشكل قطرات سوائل مختلفة على صفيحة زجاجية

بشكل طبقة رقيقة فوق الصفيحة ، الشكل (١١.٢) . ومن هنا نستنتج أن هناك سوائل مبللة للأجسام الصلبة ، مثل الماء والبتروليوم ، تكون زاوية الحافة أو زاوية التماس بين سطحها الخارجي والسطح الصلب $\theta > 0$ ؛ وسوائل غير مبللة مثل الزئبق تكون زاوية تماسها $\theta > 0$.

لكي يتمكن من حساب الظواهر المتعلقة بالتوتر السطحي نطبق شروط التوازن على عنصر سطحي dA بشكل مستطيل أطوال أضلاعه da_1 ، da_2 ، نقتطعه من السطح الخارجي المقوس للسائل ، لأنه في حالة السطوح الخارجية

المستوية تتوازن قوى التوتر السطحي فيما بينها . وليكن R_1 , R_2 نصفي قطر الإنحناء ، $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ زاويتي الانقراج ، الشكل (١٢.٢) .



الشكل ١٢.٢ : القوى المؤثرة على عنصر سطحي مقوس (a) . مستويا مثلي القوى ينفردان بمضاهيها بشكل قائم وتكون محصلة قوى التوتر السطحي ومحصلة قوى ضغط القوس واقعتان على خط تقاطع المستويين (b) .

على حدود الخزيء تظهر قوى الشد الداخلية للسطح الخارجي كقوى خارجية حيث تؤثر على الضلعين ds_1 القوتان $dF_1 = \sigma_0 ds_1$ وعلى الضلعين ds_2 القوتان $dF_2 = \sigma_0 ds_2$ (الشكل ١٢.٢ a) ونتيج محصلة قوى التوتر السطحي الأربعة dF_0 كقوة باتجاه الناطم على العنصر السطحي ، وتكون متوازنة مع محصلة قوى الضغط dF_p المؤثرة على الوجه المحدب والمقعّر للعنصر السطحي [1] . ومن تطبيق شروط التوازن ينتج حسب الشكل (١٢.٢ b) :

$$dF_0 = 2 \left[\sigma_0 ds_1 \sin \frac{d\varphi_1}{2} + \sigma_0 ds_2 \sin \frac{d\varphi_2}{2} \right] - dF_p = (p_1 - p_2) ds_1 ds_2 = \Delta P_0 \cdot ds_1 ds_2$$

حيث p_1 الضغط الداخلي ، p_2 الضغط الخارجي . . . وحيث أن زاويتي الانقراج صغيرتان جداً فيمكن اعتبار :

$$\sin \frac{d\phi_{1,2}}{2} \approx \frac{d\phi_{1,2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{dR_{1,2}}{R_{1,2}}$$

وينتج بالتالي ضغط التقوس أو ضغط الخاصية الشعرية Capilar pressure بعد الإختصار :

$$\Delta P_c = \sigma_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (2.40)$$

وإذا اعتبرنا ارتفاع تقوس السطح عن المستوي x, y هو z فيكون الانحناء معطى بالعلاقة [42] :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}} ; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} ,$$

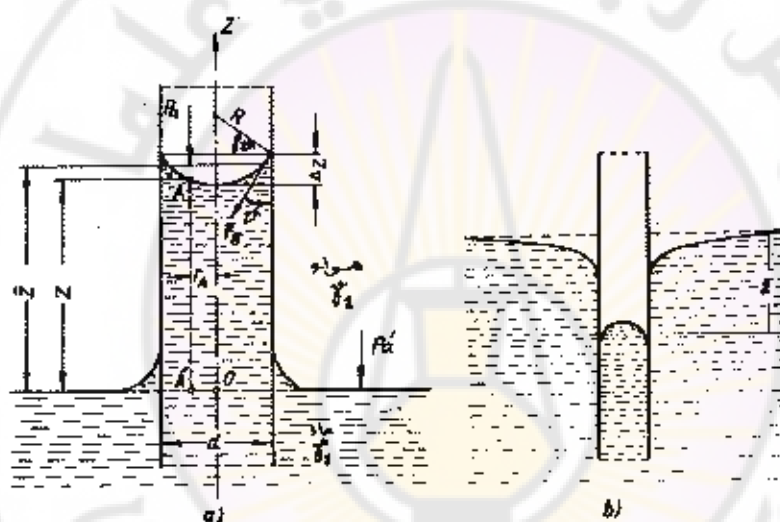
وحيث أنه عند قيم $\frac{\partial z}{\partial x}$ صغيرة يكون $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \ll 1$ فإن العلاقة (2.40) تصبح من الشكل :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\Delta P_c}{\sigma_0} . \quad (2.41)$$

ونلاحظ أنه في حالة السطوح الخارجية الحرة المستوية . . عندما يكون $R_{1,2} \rightarrow \infty$ أي $z \rightarrow 0$ ، ينعدم ضغط التقوس وكذلك التوتر السطحي . ويعتبر ضغط التقوس موجباً عندما يكون اتجاه تأثيره لداخل السائل وبالتالي في حالة كون السطح الخارجي محدباً الى الخارج ، وسالباً في حالة كونه مقعراً الى الخارج (الشكل ١٣.٢) .

إن العلاقة (2.40) تسمح لنا بتفسير وحساب ظاهرة هامة معروفة باسم الخاصية الشعرية Capillarity نلاحظها عندما نغمس أنبوبة شعرية في إناء فيه سائل مائع . فإذا كان السائل مبللاً لجدران الأنبوبة (ماء !) يرتفع

فيها فوق مستوى سطح السائل في الأناء ، وإذا كان غير مبلل للجدران (زئبق) ينخفض فيها تحت مستوى سطح السائل ، الشكل (١٣.٢) . وكما تؤكد التجارب فإن ارتفاع (أو انخفاض) السائل في الأنبوبة يختلف من سائل إلى آخر ويتناسب عكساً مع قطر الأنبوبة ، ويكون السطح الخارجي للسائل داخل الأنبوبة مقعراً باتجاه الداخل شبيهاً بشكل هلال Meniscus في حالة الماء أو الكحول مثلاً ، أو محدباً باتجاه الخارج في حالة الزئبق .



الشكل ١٣.٢ : السائل المبلل للجدران كالنماء يرتفع في الأنبوبة الشعرية (a) والسائل غير المبلل للجدران كالزئبق ينخفض في الأنبوبة الشعرية (b) .

لحساب ارتفاع صعود السائل (مثلاً الماء) ، في الأنبوبة نعتبر حسب الشكل (١٣.٢) النقطة A من السطح الهلالي على بعد r_a من محور الأنبوبة التي قطرها $d = 2r$. وليكن h ارتفاع A عن سطح سوية السائل الأفقي خارج الأنبوبة ، γ_1 الوزن النوعي للسائل المعتبر (الماء) ، γ_2 الوزن النوعي للهواء . فإذا كان p_a هو ضغط الهواء الخارجي عند A فيكون

الضغط المؤثر في النقطة A' ، مسقط A على مستوى سطح السائل خارج الأنبوبة ، يساوي إلى الضغط في A زائداً وزن عمود السائل بارتفاع $Z = \overline{AA'}$ ناقصاً ضغط التقوس باعتباره سالباً في هذه الحالة :

$$P_{A'} = P_a + \gamma_1 Z - \sigma_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) .$$

وحيث أن السطح الأفقي المار من A' هو سطح ضغط ثابت (راجع ١.١.٣) ، وبافتراض P_a هو ضغط الهواء الخارجي المؤثر عليه والذي يزيد على P_a بمقدار وزن عمود الهواء بارتفاع Z ، فينتج :

$$P_{A'} = P_a' = P_a + \gamma_2 Z = P_a + \gamma_1 Z - \sigma_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

ومنه :

$$Z (\gamma_2 - \gamma_1) = \sigma_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (2.42)$$

في الحالة العملية يكون $\gamma_1 \gg \gamma_2$ ، فإذا أهملنا γ_2 ، واعتبرنا السطح الهلالي كروي الشكل تقريباً وبالتالي $R_1 = R_2 = R$ ، فإن ارتفاع الصعود الوسطي للسائل في الأنبوبة $\bar{Z}$ ينتج من (2.42) ، وبرموز الشكل (١٢.٢ - a) :

$$\bar{Z} = \frac{2 \sigma_0}{\gamma_1 R} = 2 \frac{\sigma_0 \cos \theta}{\gamma_1 r} . \quad (2.43)$$

إن زاوية التماس θ يمكن حسابها من ارتفاع التقوس الأعظمي ΔZ للسطح الهلالي :

$$\Delta Z = R (1 - \sin \theta) = r \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (2.44)$$

فإذا كانت $\bar{Z}$ ، r ، θ معلومة عن طريق القياس مثلاً فإنه يمكن من العلاقة (2.43) حساب σ_0 ، الذي يطلق عليه أيضاً معامل الخاصية الشعرية

: Capilarity coefficient

$$\sigma_0 = \frac{R}{2} \cdot \gamma_1 Z = \frac{\gamma_1 Z}{2} \frac{r}{\cos \theta} \quad (2.45)$$

وتأخذ العلاقات السابقة أشكالاً بسيطة إذا اعتبرنا السطح الهلالي بشكل نصف كرة ، حيث تصبح $\theta \approx 0$ ، وبالتالي ينتج من (2.43) :

$$Z = \frac{2 \sigma_0}{\gamma_1 r} = \frac{4 \sigma_0}{\gamma_1 d} , \quad (2.46)$$

حيث d قطر الأنبوب الشعري . فإذا بدلنا في هذه العلاقة :

$$\gamma_1 = 10^3 \text{ kp/m}^3 , \sigma_0 = 7,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kp}}{\text{m}}$$

فينتج إذا حسبنا d ، Z بالمليمتر :

$$Z = \frac{29,6}{d} [\text{mm}] .$$

وعليه فإن ارتفاع الصعود في الأنابيب الشعرية يتناسب عكساً وقطر الأنبوبة ، كما سبق وذكرنا ، ويمكن حساب به بصورة تقريبية :

$$\left. \begin{array}{l} \text{الماء} \quad Z \approx 30/d [\text{mm}] \\ \text{الكحول} \quad Z \approx 10/d [\text{mm}] \\ \text{الزئبق} \quad Z \approx 13/d [\text{mm}] \end{array} \right\} , \quad (2.47)$$

وتبلغ هذه الارتفاعات نصف قيمتها في حالة صفيحتين مستويتين متوازيين ، لأن نصف قطر الانحناء R_0 في العلاقة (2.40) يصبح لانهاية وبالتالي ينعدم الحد $1/R_0$.

ولعله من المفيد التنبيه أن العلاقة (2.46) يمكن استخراجها ببساطة على أساس مبدأ القدرة . فعندما نغمس أنبوبة شعرية في سائل بللت جدرانها به مسبقاً فإن العمل اللازم dW لرفع كتلة جزئية من السائل مقدارها $dm = \rho_1 \pi r^2 dZ$

يساوي عند نهاية ارتفاع الصعود الوسطي Z إلى القدرة المتحررة لقوى التوتر السطحي dW_σ نتيجة اختفاء جزء من السطح الخارجي المحد للسائل أثناء عملية الصعود مقداره $2\pi r dz$. وينتج بالتالي :

$$dW = dW_\sigma \Rightarrow \gamma_1 \pi r^2 dz g \bar{Z} = \sigma_0 2\pi r dz ,$$

ومنه ، بعد الانتباه أن $\gamma_1 = \rho_s g$ ، تنتج نفس العلاقة (2.46) .
إن العلاقات المستخرجة أعلاه تنطبق من حيث المبدأ أيضاً على ظاهرة الانكماش الشعري Capilar depression التي نلاحظها في حالة السوائل غير المبللة للجدران ، الشكل (١٣.٢ - b) ، حيث يمكن حساب ارتفاع الهبوط في الأنبوب الشعري وزاوية الخافة التي تبلغ في حالة الرئيق حسب [1][9][12] $\theta \approx 130^\circ > \frac{\pi}{2}$ ، (الشكل ١١.٢) .

إن ظاهرة الخاصية الشعرية معروفة منذ القديم . فقد اعتمد عليها لورد ريليه Lord Rayleigh عام 1879 لتفسير تفكك تيار نافورة اسطوانية يتحرك ببطء في الهواء إلى قطرات صغيرة ، ذلك أن قوى التوتر السطحي بمحاولتها تصغير سطحه الخارجي تجعله غير مستقر مما يؤدي إلى تفككه لقطرات كروية الشكل . كذلك فإن عملية امتصاص شعيرات جلور النباتات للمواد المنحلة في التربة ، وصعود السوائل في الأجسام المسامية كالورق والاسفنج وغيره ، تعتمد على الخاصية الشعرية .

٨.٢ معادلات تغير الحالة للغازات المثالية

تتميز السوائل الغازية بقابليتها الكبيرة للانضغاط ، حيث أنه يمكن زيادة ضغط مناسبة حصر كتلة غازية معينة في حجم صغير ، كما تستطيع نفس الكتلة أن تتمدد وتغلا حجماً أكبر من حجمها الأصلي إذا كان

الضغط المؤثر عليها أصغر من ضغط الهواء الجوي الخارجي . والغازات لا تغير حجمها وبالتالي كثافتها تحت تأثير الضغط فقط ، وإنما تحت تأثير درجة الحرارة أيضاً وبشدة . والمعروف بالخبرة أن درجة حرارة الغاز تزداد عند الانضغاط ، وتنقص عند التمدد ، إذا لم يتوفر الوقت الكافي للتبادل الحراري مع الوسط المحيط بالغاز .

إن النظرية الحركية للمادة تعطي تفسيراً واضحاً لتصرف الغازات بهذا الشكل . فذرات الغاز التي لا تلتزم بأماكن محددة تتصادم مع بعضها البعض ومع الجدران الصلبة بسرعات عالية جداً . وينشأ الضغط كحصول تأثير هذه الصدمات ، بينما تتناسب درجة الحرارة مع القدرة الحركية الوسطية للذرات [39] . فإذا ضغط الغاز تزداد سرعة الجزيئات نتيجة التصادم والانعكاس المرن ، وبذلك تزداد القدرة الحركية ، وتزداد معها درجة الحرارة ، ويحدث العكس عند التمدد .

في الحالات العملية التي يمكن فيها إهمال الانضغاطية ، كما هو الأمر بالنسبة للجريانات ذات السرعات المتوسطة ، أو في حالة السكون عندما لا يحدث أي تغير في الحجم ، فإن دراسة السوائل الغازية لا تختلف من حيث المبدأ عن دراسة السوائل غير القابلة للانضغاط . وتكون حالة الإجهاد الأيروستاتيكية ماثلة لحالة الإجهاد الهيدروستاتيكية . أما في حالة الجريانات ذات السرعات العالية جداً التي يعالجها الغازديناميك ، مستعيناً بقوانين الترموديناميك ، فإن إهمال الانضغاطية يقود إلى نتائج خاطئة جداً .

لقد ذكرنا على ص ٦١ أن الغازات أكبر مرونة بكثير من السوائل المائعة ، والواقع أن مرونتها كبيرة لدرجة يصعب تحديد معامل مرونتها الحجمي K_E كثابتة مادية [12] . فحسب العلاقة (2.35) يلزم لحساب K_E معرفة العلاقة التي تربط بين الكثافة ρ (أو الحجم النوعي v) والضغط

p بالإضافة لدرجة الحرارة t ، وبالتالي بين القيم التي تحدد حالة الغاز .
وهنا يميز علم الترموديناميك بين الغازات الكاملة Perfect gas وغير الكاملة :

$$\text{الغاز الكامل هو الذي يحقق بالنسبة لكافة الضغوط العلاقة :} \quad (2.48)$$

$$p v = R T$$

التي يطلق عليها معادلة الحالة State equation أو قانون جي - لوساك - ماريوت ، نسبة لمكتشفها (1778-1850) E. Mariotte و L. Gay - Lussac (1620-1684) ، وهي لا تنطبق تماماً على الغازات غير الكاملة ، ولكنها تعطي نتائج أكثر دقة كلما صغر الضغط [37] . ويجدر الانتباه أن تعريف الغازات الكاملة ليس له علاقة بتعريف السوائل المثالية ص ٣٩ ، وأن الغاز الكامل يمكن أن يكون سائلاً حقيقياً أو مثالياً . وتعني في العلاقة (2.48) :

$$T [^{\circ}\text{K}] = 273,15 + t ^{\circ}\text{C} \approx 273 + t \quad (2.49)$$

درجة الحرارة المطلقة لأنها تقاس من الصغر المطلق عند $t = -273^{\circ}\text{C}$ ،
وواحدة قياسها درجة كيلفين $[^{\circ}\text{K}]$ ؛ بينما تمثل R ثابتة مادية يطلق عليها
ثابتة الغاز وتساوي العمل الذي ينجزه 1 kg (أو 1 kp) من الغاز عند
تسخينه مقدار 1° تحت ضغط ثابت . في جملة القياس العالمية حيث $v = 1/p$
تصبح العلاقة (2.48) من الشكل :

$$\frac{p}{p} = R T \quad (2.50)$$

وتنتج واحدة قياس ثابتة الغاز :

$$[R] = \frac{\text{N m}}{\text{kg grd.}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{kg grd.s}^2} = \frac{1}{9,81} \frac{\text{kp m}}{\text{kg grd.}} \quad (2.51)$$

وفي جملة القياس التكنيكية حيث يعرف الحجم النوعي بأنه حجم واحدة

الوزن $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\gamma}$ ، تصبح (2.52) :

$$\frac{P}{\rho g} = R T \quad (2.52)$$

وتنتج واحدة قياس ثابتة الغاز :

$$[R] = \frac{\text{kp m}}{\text{kp grd.}} \quad (2.53)$$

ونلاحظ بالمقارنة مع (2.51) أن القيمة العددية لـ R لا تتغير إذا قيس بـ $[\text{kp m/kp grd.}]$ أو $[\text{kp m/kg grd.}]$ ، الجدول (٥.٢) .

الجدول ٥.٢ : ثابتة الغاز R بالنسبة لبعض الغازات حسب [37]

الغاز	$R [\text{kp m/kp } ^\circ\text{K}] \equiv$ $R [\text{kp m/kg } ^\circ\text{K}]$
هواء جاف	29,27
هواء نصف رطب	29,40
الأكسجين	26,49
الآزوت	30,26
الهيدروجين	420,55

من معادلة الحالة يمكن استنتاج عدة قوانين معروفة في علم الترموديناميك باسم قوانين تغير الحالة [37] ، لها أهمية بالنسبة لدراستنا المقبلة .

١.٨.٢ قانون تغير الحالة الإيزوثيرمي

إذا تغيرت حالة الغاز وبقيت درجة الحرارة ثابتة ، نقول إن التغير يتم بشروط إيزوثيرمية . وهذا يعني أنه يلزم أن يتوفر الوقت الكافي لكي

تساوى درجة حرارة الغاز ، التي ترتفع أثناء الانضغاط وتنقص أثناء التمدد ، مع درجة حرارة الوسط المحيط به . ونحصل على قانون تغير الحالة الايزوثيرمي Isothermal change of state من معادلة الحالة (2.48) بوضع $T = \text{const}$ ، حيث ينتج باستخدام (2.50) :

$$p v = p / \rho = \text{const} \quad (2.54)$$

وهو ما يسمى قانون بويلي — ماريوت نسبة للعالمين (1627 – 1691) R. Boyle الذي اكتشفه عام 1662 ، وماريوت الذي اكتشفه عام 1679 مستقلاً عن الأول .

٢.٨.٢ قانون تغير الحالة الايزوباري

إذا تغيرت حالة الغاز وبقي الضغط ثابتاً ، نقول إن التغير يتم بشروط ايزوبارية . وينتج قانون تغير الحالة الايزوباري Isoobaric change of state من (2.48) بوضع $p = \text{const}$:

$$T / v = T / \rho = \text{const} \quad (2.55)$$

الذي يسمى أيضاً قانون جي — لوساك ، الذي اكتشفه عام 1802 ، حيث وجد أن كل الغازات تحت ضغط ثابت تغير حجما بنفس النسبة ، إذا رفعت درجة حرارتها من صفر إلى مائة درجة .

٣.٨.٢ قانون تغير الحالة اديوياتي

في الحالات التي يكون فيها الغاز معزولاً تماماً عن الوسط الخارجي ، أو التي يتم فيها تغير حالته (انضغاط أو تمدد) بسرعة لا يتوفر عندها الوقت اللازم لأي تبادل حراري يؤدي إلى تعادل درجة الحرارة بين الغاز والوسط

المحيط به ، فنقول أن تغير الحالة يتم بشروط أديباتية . ويمكن بمساعدة قوانين الترموديناميك : [37] مثلاً ، البرهان أن قانون تغير الحالة الأديباتي Adiabatic change of state يعطي بالعلاقة :

$$p v^{\kappa} = p / \rho^{\kappa} = \text{const} \quad (2.56)$$

حيث $\kappa = c_p / c_v$ يمثل نسبة الحرارة النوعية للغاز عند ضغط ثابت على الحرارة النوعية عند حجم ثابت ويطلق عليه الأس الأديباتي . وتبلغ قيمته بالنسبة للهواء الجاف $\kappa = 1.405$.

٤.٨.٢ قانون تغير الحالة البوليتروبي

في الحياة العملية وبالنسبة للغازات شبه الكاملة ، كما هو الأمر في العمليات التي تحدث في اسطوانات الآلات التي نستخدمها أو في الجو الخارجي ، فإن تغير الحالة لا يمكن أن يخضع تماماً لقانون تغير الحالة الايزوثيرمي ، الذي يشترط تبادلاً حرارياً كاملاً مع الوسط الخارجي ، ولا لقانون تغير الحالة الأديباتي ، الذي يشترط عزلاً كاملاً عن الوسط الخارجي ، فهما يمثلان إذن قانونين حديين لتغير الحالة يحصران بينهما قانون تغير الحالة البوليتروبي Polytropic change of state الذي يعبر عنه في الحالة العامة بالعلاقة :

$$p v^n = p / \rho^n = \text{const} \quad (2.57)$$

حيث n هو الأس البوليتروبي ، ويكون في الحالات العملية محققاً $1 < n < \kappa$. ويمكن من (2.57) اشتقاق كافة قوانين تغير الحالة الأخرى حسب قيمة n . فمثلاً من أجل $n = 1$ نحصل على العلاقة (2.54) ، ومن أجل $n = 0$ على العلاقة (2.55) ، ومن أجل $n = \kappa$ على العلاقة (2.56) . وتوجد في [17] [37] تفاصيل أكثر عن قيمة n بالنسبة للحالات المختلفة .

٩.٢ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.٢ : ما هي اللزوجة ؟ اكتب تعريفها الرياضي وعدد وحداتها القياسية . كيف تتغير اللزوجة التحريكية والحركية للماء والهواء مع الضغط والحرارة ؟

س ٢.٢ : ما هو الفرق بين السائل المثالي والحقيقي والغاز الكامل ؟

س ٣.٢ : قارن بين مفهوم الاحتكاك وإجهاد القص في الأجسام السائلة والصلبة .

س ٤.٢ : عرف الضغط الستاتيكي في نقطة وبين الفرق بين حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية وحالة الإجهاد العامة .

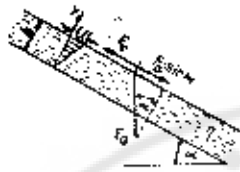
س ٥.٢ : ما هي قوانين تغير الحالة للغازات الكاملة ؟

س ٦.٢ : على طرفي أنبوب زجاجي شعري معكوف بشكل حرف U ومجهز بصمام في منتصفه توجد فقاعتان من الصابون مختلفتا الحجم . اشرح ماذا يحدث عند فتح الصمام .

س ٧.٢ : اشرح مبدأ عمل النابض الهيدروليكي . هل يمكن مقارنته بالنابض المعدني ؟

ت ١.٢ : بين صفيحتين أفقيتين متوازيين مستطيلتي الشكل مقاييس كل منهما $50 \times 60 \text{ cm}$ توجد طبقة رقيقة من الزيت سماكتها $h = 0.01 \text{ cm}$. عندما نميل الصفيحتين زاوية مقدارها $\alpha = 20^\circ$ تبدأ الصفيحة العلوية التي تزن $F_g = 5 \text{ kp}$ بالانزلاق للأسفل بسرعة $U = 10 \text{ cm/s}$. احسب اللزوجة التحريكية للزيت بالبواز .

الحل : في لحظة انزلاق الصفيحة العلوية تكون مركبة قوة الوزن في اتجاه الحركة متوازنة مع قوة الاحتكاك .



الشكل ١.٢

وباعتبار أن توزيع السرعة بين الصفيحتين خطي ينتج حسب الشكل (١٠٢) ومن العلاقة (2.3) :

$$F_f = \tau A = \eta \frac{U}{h} A = F_g \sin \alpha$$

حيث A مساحة الصفيحة . وتنتج اللزوجة التحريكية :

$$\eta = \frac{F_g \sin \alpha h}{U A} = \frac{5.0342 \cdot 0.01}{10 \cdot 50 \cdot 60}$$

$$\eta = 0.57 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kp s}}{\text{cm}^2} = 5.7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kp s}}{\text{m}^2} =$$

$$= 5.592 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 0.5592 \text{ P} .$$

ت ٢.٢ : بين المضجع الخاتمي لمحور شاقولي ومسنده الأفقي توجد طبقة رقيقة منتظمة من الزيت سماكتها h . احسب عزم الدوران اللازم للتغلب على مقاومة الاحتكاك عندما يدور المحور بسرعة زاوية ثابتة ω ، إذا كانت اللزوجة التحريكية للزيت η ، ونصف القطر للمضجع R_1 ، والمحور R_2 .

مثال عددي :

$$n = 300 \text{ rpm}, R_2 = 10 \text{ cm}, R_1 = 20 \text{ cm}, \eta = 0.09 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kp s}}{\text{cm}^2}, h = 0.01 \text{ cm}$$

الحل : مقاومة الاحتكاك تنتج عن إجهاد القص τ . وحيث أنه بحكم

شرط الالتصاق تتغير السرعة من الصفر على المسند وحتى قيمة السرعة

المحيطية $u = r\omega$ على المضجع

وبشكل خطي (جريان كوثيت)

فيتنتج من (2.3) :

$$\tau = \eta \frac{u}{h} = \eta \frac{r\omega}{h} ; R_2 \leq r \leq R_1$$

وننتج قوة الاحتكاك الجزئية

بالنسبة لخاتم رقيق من الزيت على

بعد r وبسماكة dr ، الشكل

(ت ٢.٢) :

$$dF_r = \tau dA = \frac{\eta \omega 2\pi}{h} r^2 dr ,$$

ويكون العزم الجزئي لهذه القوة :

$$dM_r = \frac{2\pi\eta\omega}{h} r^3 dr ,$$

وعزم الاحتكاك الكلي الذي يجب التغلب عليه :

$$M_r = \int_{R_2}^{R_1} dM_r = \frac{2\pi\eta\omega}{h} \int_{R_2}^{R_1} r^3 dr = \frac{\pi\eta\omega}{2h} (R_1^4 - R_2^4) = \frac{\eta\pi^2 n}{60h} (R_1^4 - R_2^4) ,$$

حيث n عدد الدورات في الدقيقة .

وبتعميـض القيم العددية ينتج : $M_r \approx 0,67 \text{ kp m}$

ت ٣.٢ : نغمس أنبوبة شعرية قطرها $d = 1 \text{ mm}$ في حوض فيه

ماء وأخرى في حوض فيه زئبق . احسب ارتفاع السائل في الأنبوبتين إذا

كانت زاوية التماس في حالة الماء $\theta = 0$ وفي حالة الزئبق $\theta \approx 130^\circ$.

هل يتغير الارتفاع إذا كانت الأنبوبة مائلة ؟

الحل : حسب العلاقة (2.43) ينتج الارتفاع في الأنبوبة الشعرية :

$$z = \frac{4 \sigma_0 \cos \theta}{\gamma d} .$$

من الجدول (٤.٢) نجد :

$$\sigma_0 = 48,2 \cdot 10^{-6} \text{ kp/mm} \quad \text{؛} \quad \sigma_0 = 7,4 \cdot 10^{-6} \text{ kp/mm}$$

وبالتالي يكون في حالة الماء حيث $\cos \theta = 1$ ، $\gamma = 10^{-6} \text{ kp/mm}^3$:

$$z_w = \frac{4 \cdot 7,4 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{10^{-6} \cdot 1} = 29,6 \text{ mm} .$$

وفي حالة الزئبق حيث $\cos \theta = -0,643$ ، $\gamma = 13,6 \cdot 10^{-6} \text{ kp/mm}^3$:

$$z_m = - \frac{4 \cdot 48,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,643}{13,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1} = -9,1 \text{ mm} ,$$

أي أن الزئبق ينخفض في الأنبوبة الشعرية كسائل غير مبلل للجدوان . وحيث أن z تمثل الارتفاع الشاقولي فإن قيمتها لا تتغير بتميل الأنبوبة .

٤ . ٢ : خزانت يحتوي على $V_1 = 0,4 \text{ m}^3$ من الهواء بضغط مطلق

$p_1 = 4 \text{ kp/cm}^2$. احسب الضغط اللازم p_2 ومعامل المرونة الحجمي K_E

لكي يصبح حجم الهواء $V_2 = 0,1 \text{ m}^3$ ، إذا فرضنا أن تغير الحالة يتم

(أ) تحت شروط إيزوترمية ، ب) تحت شروط أديباتية .

الحل : (أ) من قانون تغير الحالة الإيزوترمي (2.54) ينتج :

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 4 \frac{0,4}{0,1} = 16 \text{ kp/cm}^2$$

وينتج معامل المرونة الحجمي K_E حسب (2.33) :

$$K_E = - \left. \frac{dp}{dv} \right|_{t = \text{const}}$$

ولكن من (2.54) يكون :

$$\frac{dp}{dv} = - \frac{\text{const}}{v^2} = - \frac{p}{v}$$

ومنه :

$$K_E = p = p_2 = 16 \text{ kp/cm}^2 .$$

(ب) من قانون تغير الحالة الأديباتي (2.56) ينتج باعتبار $x = 1,4$ للهواء :

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^x = 4 \left(\frac{0,4}{0,1} \right)^{1,4} = 28 \text{ kp/cm}^2 .$$

ويكون :

$$\frac{dp}{dv} = - x \cdot \text{const} \cdot v^{-(x+1)} = - x p/v$$

وبالتالي فإن معامل المرونة الحجمي :

$$K_E = x p = x p_2 = 1,4 \cdot 28 = 39,2 \text{ kp/cm}^2 .$$

وبصورة عامة يمكن البرهان بالنسبة لتغير الحالة البوليتروبي :

$$K_E = n p \quad ; \quad 1 < n < 1,4 .$$

* * *

Damascus University

الفصل الثاني

توازن السوائل غير القابلة والقابلة للانضغاط (هيدروستاتك وإروستاتك)

ينطلق علم التوازن من إعتبار الجسم السائل في حالة سكون مطلق أو نسبي بالنسبة لحدوده ، التي يفترض أنها كتيمة لا يتحركها السائل والتي يمكن أن تكون حقيقية أو وهمية . ساكنة أو متحركة . وحيث أنه في هذه الحالة لا يطرأ على السائل أي تغيير في الشكل فإن القوى المماسية تكون معدومة ، وبالتالي فإن القوى المؤثرة على السائل تنحصر بقوى الضغط الناعمية والقوى الحجمية . وتهدف دراسة شروط التوازن لمعرفة توزيع الضغط في السائل وحساب قوى الضغط المؤثرة على حدود السائل وكذلك تحديد شروط التوازن المستقر . وسندرس أولاً توازن السوائل الثابتة الحجم ومن ثم السوائل المتغيرة الحجم .

٣ توازن السوائل الثابتة الحجم (المتجانسة)

سنفرض أن السائل المعتبر متجانس وبالتالي فهو ذو كثافة ثابتة $\rho = \text{const}$ ووزن نوعي ثابت تقريباً $\gamma = \rho g = \text{const}$ ، وسندرس توازنه تحت تأثير قوى حجمية مختلفة .

١.٣ التوازن في حقل الجاذبية الأرضية

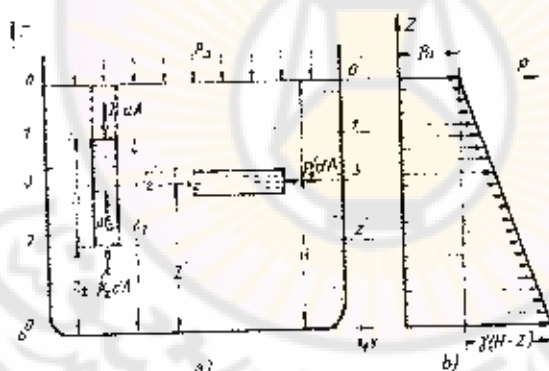
نعتبر أن القوة الحجمية الوحيدة المؤثرة على السائل المعتبر هي قوة الجاذبية الأرضية أو قوة الثقالة $F_v \equiv F_g = mg$ ، حيث g التسارع الأرضي الذي

يفرض أنه ثابت في المكان المعتبر . وباعتبار أن كتلة الكرة الأرضية في الحالة العامة أكبر بكثير من كتلة السائل المعتبر فإن P_0 تعتبر دائماً كقوة شاقولية موجبة الأسفل .

١.١.٣ توزيع الضغط في سائل متجانس - المعادلة الهيدروستاتيكية

الأساسية

نعتبر سائلاً متجانساً في حوض شكله بدون تحديد ومفتوح للأعلى، ونفرض للسهولة أن قعر الحوض مستوياً ومنطبقاً على مستوى الإحداثيات x, y الأفقي، بينما نأخذ المحور z شاقولياً للأعلى (الشكل ١.٣ - أ) . في حالة السكون فإن هذه الجبهة الفيزيائية الموائمة من السائل ومن جدران الوعاء كحدود حقيقية لها تكون متوازنة ، وبالتالي فإن كل جزيء حجمي يقطع من السائل والذي يخضع لتأثير قوى الضغط السطحية وقوة الثقالة الحجمية هو أيضاً متوازن .



الشكل ١.٣ : استخراج المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (أ)

الضغط في سائل ثقل متجانس يزداد خطياً مع العمق عن السطح

السائب للسائل (ب)

لحساب توزيع الضغط في السائل يكفي أن ندرس تغير الضغط في الاتجاه الأفقي $\partial p / \partial x$ والشاقولي $\partial p / \partial z$.

نقطع من داخل السائل اسطوانة محورها واقع في المستوي الأفقي $3-3'$ الذي يرتفع عن قعر الخوض z' ، و سطح كل من قاعدتيها dA صغير جداً بحيث يمكن إعتبار الضغط موزعاً عليها بانتظام (الشكل ١.٣ - a) . نطبق شروط التوازن على هذه الاسطوانة ونسقط كافة القوى على محورها فنجد بسهولة أن مساحات كافة قوى الضغط المؤثرة على قميص الاسطوانة والمتعامدة على محورها ، وكذلك مسقط قوة الثقالة الشاقولية ، معدومة . وبالتالي يجب أن نحقق فوقاً الضغط $p_1 dA$ و $p_2 dA$ المؤثرتان على قاعدتي الاسطوانة شرط التوازن :

$$p_1 dA = p_2 dA \Rightarrow p_1 = p_2 = p' = \text{const} \Rightarrow \partial p / \partial x = 0 . \quad (3.1)$$

أي أن الضغط في كل نقطة من نقاط المستوي الأفقي $3-3'$ له قيمة ثابتة . ويطلق على أمثال هذه المستويات ، أو السطوح عامة ، التي تجمع بين كافة النقاط ذات الضغط المتساوي اسم سطوح الضغوط المتساوية أو سطوح الضغط الثابت Surface of const. Pressure أو سطوح الكمون الثابت Equipotential Surface (راجع ٣.٣) . وحيث أن اختيار المستوي الأفقي $3-3'$ كان اعتباطياً فإن النتيجة السابقة يمكن تعميمها على كل مستو أفقي آخر ، بما في ذلك السطح السائب للسائل $0-0'$ الذي يؤثر عليه الضغط الجوي الثابت p_a .

نقطع الآن من داخل السائل اسطوانة محورها شاقولي ومحصورة بين المستويين الأفقيين $1-1'$ و $2-2'$ اللذين يرتفعان عن قعر الخوض z_1 ، z_2 ، فيكون ارتفاع الاسطوانة $h = z_1 - z_2$ (الشكل ١.٣ - a) . فإذا كان سطح كل من قاعدتي الاسطوانة dA ، فإن القوى الشاقولية المؤثرة عليها هي : قوة الضغط على القاعدة العلوية $p_1 dA$ واتجاهها للأسفل ؛ قوة الضغط على القاعدة السفلية $p_2 dA$ واتجاهها للأعلى ؛ قوة الثقالة وتجه للأسفل . وحيث أن مساحات كافة قوى الضغط الجانبية على محور الاسطوانة معدومة ، فإن شروط توازن القوى الشاقولية تستلزم أن يكون :

$$p_2 dA - p_1 dA - \rho g (z_1 - z_2) dA = 0 ,$$

ومنه بعد الاختصار على dA ووضع $\gamma = \rho g$:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \gamma (z_1 - z_2) = \gamma h . \quad (3.2)$$

أي أن فرق الضغط بين نقطتين واقعتين على مستويين أفقيين يساوي إلى وزن عمود من السائل إرتفاعه يساوي البعد الشاقولي بين المستويين ومقطعه واحدة قياس السطح .

العلاقة (3.2) معروفة باسم المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية. وهي تنطبق بشكل عام على كل سائل متجانس واقع في حقل الجاذبية الأرضية . فإذا وضعنا بصورة خاصة $p_1 = p_2 = p_a$ ، حيث p_a الضغط الجوي على السطح السائب للسائل على إرتفاع H من مستوي القياس المعتبر y, x ؛ p الضغط على إرتفاع z من نفس مستوي القياس فينتج من (3.2) العلاقة :

$$p = p_a + \gamma (H - z) = p_a + \gamma h , \quad (3.3)$$

التي تسمح بحساب الضغط عند أي عمق h من السطح السائب للسائل ، الشكل (١٠٣ - ب) . ونجد بسهولة أنه من أجل $z = \text{const}$ يكون $p = \text{const}$ ؛
بينما تغير الضغط بالاتجاه الشاقولي :

$$dp = - \gamma dz , \quad (3.4)$$

وهي الصيغة التفاضلية للمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية التي تتضمن مايلي :

في سائل ثقيل متجانس يزداد الضغط خطياً مع العمق وبمقدار γ لكل واحدة طول ، ويمثل كل مستو أفقي سطحاً للضغط الثابت .

هذه النتيجة لا تتعلق بالشكل الهندسي للحوض الذي يحتوي السائل ، أي بحدود الجملة الفيزيائية المعتبرة وخاصة الحدود الجانبية . وبالتالي فإن الضغط المؤثر على قعر مختلفة المساحات لأوعية مختلفة الأشكال والأحجام وبلاؤها نفس السائل يتعلق فقط بارتفاع السائل عن القعر . كما تنطبق العلاقة (3.4) على السوائل

القابلة للإضغاط (الغازات) الساكنة ، ولكن يلزم في حال عدم إمكانية
لإعمال تغير الوزن النوعي مع الارتفاع ، أي عندما لا يمكن اعتبار السائل
متجانساً ، معرفة العلاقة $\gamma = f(z)$ من أجل حساب توزيع الضغط .

٢.١.٣ توزيع الضغط في سائل غير متجانس ، شروط التوازن

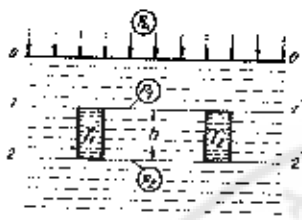
المستقر

يتميز السائل غير المتجانس بأن وزنه النوعي غير ثابت . وبالإمكان أن
تتصور أن تغير الوزن النوعي ، الذي يمكن أن يكون مستمراً أي تابعاً
للارتفاع $\gamma = f(z)$ ، أو فجائياً بمعنى أنه ينتقل فجأة من قيمة إلى أخرى ،
يحدث بسبب تغير موضعي في درجة حرارة السائل ، أو بسبب حل أملاح
بنسب مختلفة في مناطق مختلفة من السائل ، أو بسبب خلط سوائل غير متجانسة
ذات أوزان نوعية مختلفة .

تعللنا التجارب أنه إذا تواجدت عدة سوائل غير متجانسة ، أوزانها النوعية
مختلفة ، في إناء واحد ، فإنها تتوضع فوق بعضها في حالة السكون بشكل طبقات
تفصلها سطوح أفقية وتكون طبقة السائل الأخف في الأعلى والأثقل في الأسفل ،
وحتى لو غيرنا هذا التوضع بمخلطها مثلاً ، فإنها تعود إليه إذا تركت ساكنة
(الزيت يطفو دائماً على سطح الماء !) . إذن فإن توزيع طبقات السائل بهذا
الشكل يدل على حالة توازن المستقر . وسنبعث أولاً شروط التوازن المستقر
لسائل غير متجانس ومن ثم ندرس توزيع الضغط فيه .

نقتطع من داخل سائل غير متجانس ساكن في حوض مفتوح الأعلى وشكله
على غير تعيين اسطوانة صغيرة محورها أفقي ونطبق عليها شروط التوازن ، كما
فعلنا في الفقرة (١.١.٣) ، فنجد بسهولة أنه في هذه الحالة أيضاً تكون
المستويات الأفقية سطوحاً للضغط الثابت . نختار من هذه المستويات المستويين
1'-1 ، 2'-2 ، حيث يؤثر الضغط p_1, p_2 ، الشكل (٢.٣) . نقتطع الآن

اسطوانتين صغيرتين متجاورتين محصورتين بين هذين المستويين ، محورهما شاقولي ،



وارتفاع كل منها h يفترض أن يكون صغيراً

بحيث يمكن اعتبار الوزن النوعي للأسطوانة

الأولى γ_1 والثانية γ_2 ثابتين . نطبق شروط

التوازن على الإسطوانتين فينتج حسب المعادلة

الهيدروستاتيكية الأساسية (3.2) :

الشكل ٣.٣ : شروط التوازن

المستقر - أثقل ثقيل غير متجانس ؛

في كل مستو أفقي $p = \text{const}$

$\gamma = \text{const}$

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 h = \gamma_2 h \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 ; (3.5)$$

أي أن الوزن النوعي للأسطوانتين يجب أن

يكون متساوياً ، وإلا فإن السائل لا يكون في حالة توازن مستقر ويبدأ في

الحركة ، تماماً كما يحدث عند تسخين إناء فيه ماء .

إن النتيجة السابقة تبقى صحيحة في الحالة التي يصبح فيها عدد أزواج

الأسطوانات المتجاورة لانهائياً وارتفاعها المشترك صغيراً جداً $h \rightarrow 0$ ،

وبالتالي ينطبق المستوي الأفقي $1' - 1$ على $2' - 2$ ، ونصل إلى النتيجة

العامّة التالية :

يكون سائل ثقيل غير متجانس في حالة توازن مستقر عندما يكون في كل

مستو أفقي الضغط ثابتاً $p = \text{const}$ والوزن النوعي ثابتاً $\gamma = \text{const}$.

هذه النتيجة تفسر لنا لماذا يكون السطح الفاصل بين سائلين غير متماثلين

أفقياً ، وأنه في حالة التوازن المستقر يتوضع السائل الأثقل في الأسفل لكي

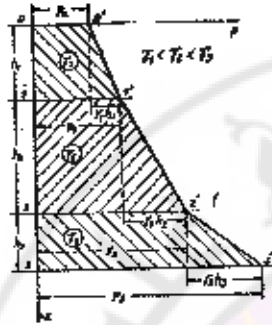
يكون مركز الثقل الكلي أخفض ما يمكن .

لحساب توزيع الضغط في سائل غير متجانس ووزنه النوعي يتغير بشكل فجائي

نعتبر عدداً n من السوائل غير المختلجة ذات الأوزان النوعية المختلفة :

$\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \dots > \gamma_n$ متوضعة بشكل طبقات في حوض جدرانها

ثابتة ومفتوح إلى الأعلى حيث يؤثر الضغط الجوي p_0 . فإذا فرضنا أن سماكة طبقات السوائل $h_1, h_2, \dots, h_n$ فيكون الضغط على السطح الفاصل بين السائل الأول والثاني حسب (3.2) :



$$p_1 = p_0 + \gamma_1 h_1$$

وبين السائل الثاني والثالث :

$$p_2 = p_1 + \gamma_2 h_2 = p_0 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$$

ونصل بالنتيجة إلى قيمة الضغط المؤثر على قعر الحوض :

الشكل ٣.٣ : مخطط توزيع الضغط في ثلاثة سوائل غير متجانسة أوزانها النوعية مختلفة .

$$p_n = p_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \quad (3.6)$$

وحيث أنه توزيع الضغط في كل طبقة سائل خطي فإن مخطط توزيع الضغط حسب (3.6) يمثل منعنياً منكسراً مؤلفاً من قطع مستقيمة ، الشكل (٣.٣) .

بالنسبة لسائل غير متجانس وزنه النوعي يتغير باستمرار مع العمق : $\gamma = f(z)$ فإن حساب توزيع الضغط ينتج مباشرة من العلاقة (3.6) إذا حولنا المجموع إلى تكامل واعتبرنا أن الوزن النوعي في طبقة رقيقة من السائل $h_i = dz$ يبقى ثابتاً تقريباً :

$$p = p_0 + \int_0^z \gamma dz \quad (3.7)$$

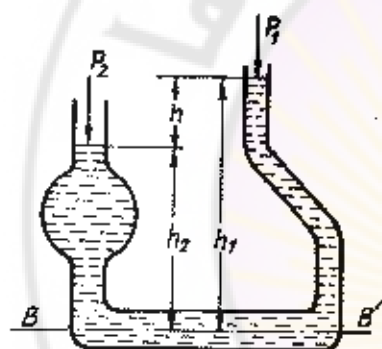
حيث المحور z الشاقولي موجب للأعلى . ونصل إلى نفس النتيجة من المعادلة الهيدروستاتيكية التفاضلية (3.4) . فإذا كان التابع $\gamma = f(z)$ معلوماً ، فيمكن مكاملة (3.7) وحساب توزيع الضغط بالنسبة للارتفاع (راجع ٤) . والمهم أن نلاحظ أن شروط التوازن المستقر لسائل كهذا تقضي بأن يكون توضع طبقاته بحيث يتناقص الوزن النوعي مع الارتفاع ، وبالعكس ذلك

يكون في حالة توازن قلق ويبدأ بالحركة عند أقل تشويش . وبالملة
كل سائل متجانس ساكن يكون في حالة توازن مطلق ، وبالتالي يمكن ازاحة
أية طبقة منه اعتباطياً دون أن يؤثر ذلك على وضع توازنه .

٣.١.٣ تطبيقات للمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية

١.٣.١.٣ مبدأ الانوعبة المستطرفة

يطلق على مجموعة أوعية (آوانٍ ، أنابيب) شكلها على غير تعيين ومتصلة
مع بعضها ، بحيث يستطيع السائل أن يتسرب من وعاء لآخر الأوعية
المستطرفة .



نعتبر الوعاء المستطرق ، المين في
الشكل (٤.٣) ، المؤلف من فرعين
مفتوحين للأعلى وفيه سائل متجانس
وزنه النوعي γ . هذه الجملة الفيزيائية
تكون أيضاً متوازنة عندما يكون
السائل ساكناً والضغط المؤثر على
السطح السائب للسائل في كل من
فرعي الأنبوب p_1 ، p_2 وارتفاع
السائل عن إحدى المستويات الأفقية التي نختارها $B - B'$ في كل منهما h_1 ، h_2 .
وحيث أن $B - B'$ يمثل سطحاً للضغط الثابت p_0 فينتج من المعادلة
الهيدروستاتيكية الأساسية (3.2) بالنسبة لفرعي الوعاء :

$$p_0 = p_2 + \gamma h_2 = p_1 + \gamma h_1 \rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p = \gamma (h_1 - h_2) = \gamma h , \quad (3.8)$$

حيث h فرق ارتفاع سوية السائل في فرعي الوعاء .

من العلاقة (3.8) ينتج عندما $p_2 = p_1$ ، كما هو الأمر في حال تعرض السطح الحر للسائل في فرعي الوعاء لتأثير الضغط الجوي مثلاً ، أن $h = 0$. وهذا يعني أن سوية السطح الحر للسائل في فرعي الوعاء المستطوق (أو في الفروع المتعددة) وجدت !) سيكون لها نفس الارتفاع h' ، ويكون في مثالنا $h_2 < h' < h_1$. هذه النتيجة يمكن التوصل إليها إذا تصورنا أن الجملة الفيزيائية المعبرة في الشكل (٤.٣) قد اقتطعت من داخل سائل متجانس ساكن . إن الأوعية المستطوقة أهمية خاصة بالنسبة لبدء قياس الضغط الستاتيكي .

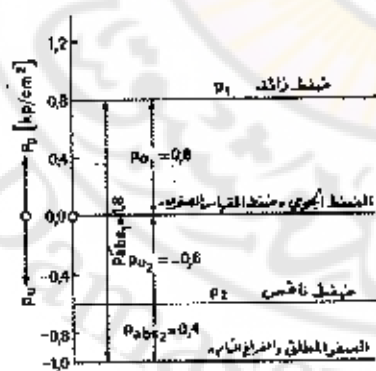
٢.٣.١.٣ مبدأ قياس الضغط ، المانومتر والبارومتر

يقاس الضغط في نقطة من السائل كفرق بين قيمته وقيمة ضغط قياسي Datum pressure معروف ، يختار عادة إما ضغط الفراغ التام (الصفر المطلق) أو الضغط الجوي الموضعي p_a . فإذا قيس الضغط إعتباراً من الصفر المطلق سمي : الضغط المطلق p_{abs} . أما إذا قيس الضغط في الجو الطبيعي ، كما هو الأمر عادة ، فيطلق على الفرق بين قيمة الضغط المعتبر والضغط الجوي : ضغط المقياس Gauge pressure فإذا كان فرق الضغط هذا موجباً سمي ضغط المقياس الزائد أو الموجب : $p_0 = p - p_a > 0$ ، أما إذا كان سالباً فيسمى ضغط المقياس الناقص

أو السالب $p_0 = p - p_a < 0$ ، الشكل (٥.٣) .

إن مفهوم الضغط الزائد أو الناقص يتضح بسهولة بمساعدة المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (2.3) ، حيث ينتج :

$$p - p_a = \gamma h .$$



الشكل ٥.٣ : العلاقة بين الضغط المطلق

p_{abs} وضغط المقياس الزائد p_0 والناقص p_u

عندما يكون $p > p_a$ ينتج :

$$p_a = \gamma h_p \Rightarrow h_p = + \frac{p_a - p}{\gamma} \quad (3.9)$$

حيث h_p الضاغط الموجب أو إرتفاع الضغط Pressure head .

وعندما يكون $p < p_a$ نجد :

$$p_a = - \gamma h_s \Rightarrow h_s = - \frac{p_a - p}{\gamma} \quad (3.10)$$

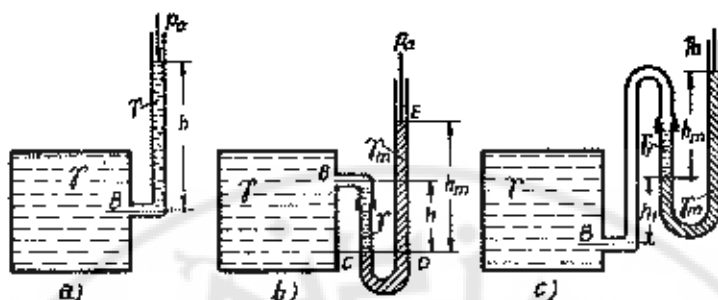
حيث h_s الضاغط السالب ، أو إرتفاع السحب Suction head أو كما يسمى

أحياناً إرتفاع الفراغ أو التخلخل Vacuum head .

إن الضاغط الموجب أو السالب يمكن إعتبارهما مقياساً لفرق الضغط المؤثر على طرفي عمود سائل (L.C) Liquid column وزنه النوعي γ وإرتفاعه h_p أو h_s . وعلى هذا يعتمد مبدأ المانومتر السائلي Liquid - Manometer لقياس الضغط الزائد أو البارومتر السائلي Liquid - Barometer لقياس الضغط الناقص .

نستخدم في المختبر والصناعة ومراكز الأبحاث أنواع متعددة من المانومترات السائلية تعمل كلها على نفس المبدأ ، وتختلف من حيث دقة وبحال القياس . ويوجد منها فرديان أساسيان : المانومترات البسيطة ، وتستخدم لقياس الضغط في نقطة من السائل والمانومترات التفاضلية Differential - Manometer ، وتستخدم لقياس فرق الضغط بين نقطتين من السائل .

لقياس الضغوط الصغيرة نسبياً يستخدم أنبوب بيروميتري Piezometer ، يتألف من أنبوب زجاجي صاعد شاقولياً ومفتوح في الأعلى ، يوصل في النقطة B التي يراد قياس الضغط فيها ، الشكل (٦.٣ - a) . فإذا كان إرتفاع السائل في الأنبوب البيروميتري عن المستوى الأفقي المار من B هو h ، والذي يمكن قياسه مباشرة باستخدام مسطرة مرقة ، ينتج :



الشكل ٦.٣ : مانومترا سائلة لقياس الضغط الزائد في نقطة : أنبوب بيزومتري a) : مانومتر بحرف U فيه سائل مقياس b) : مانومتر ذو سائل مقياس c) .

$$p_B = p_a + \gamma h \Rightarrow p_{B0} = \gamma h ; h_p \equiv h . \quad (3.11)$$

في هذه الحالة استخدم نفس السائل الموجود في الخزان كسائل مقياس . وهذا يحد من الاستخدام العملي للأنبوب البيزومتري لقياس الضغوط العالية نسبياً . فإذا كان السائل ماء واعتبرنا وزنه النوعي $\gamma = 10^3 \text{ kp/m}^3$ وكان الضغط المطلق $p_B = 2 p_a = 2 \cdot 10^4 \text{ kp/m}^2$ لتوجب أن يكون حسب (3.11) ارتفاع الأنبوب البيزومتري $h = 10 \text{ m}$. وهذا طبعاً غير عملي . لذلك يستخدم من أجل قياس الضغوط العالية نسبياً مانومترا سائلة بشكل حرف U فيها سائل مقياس وزنه النوعي γ_m ، يختار حسب قيمة الضغط المراد قياسه . في الشكل (٦.٣ - b) نموذج من هذا النوع ربط أحد فرعيه في النقطة B خزان فيه سائل وزنه النوعي γ وبقي الفرع الآخر المفتوح معرضاً لتأثير الضغط الجوي p_a . فإذا لاحظنا أن المستوي الأفقي D-C هو سطح للضغط الثابت ينتج بسهولة :

$$p_C = p_D \Rightarrow p_B + \gamma h = p_a + \gamma_m h_m \Rightarrow p_B = p_a - \gamma h + \gamma_m h_m , \quad (3.12)$$

حيث $DE = h_m$ فرق الارتفاع لسوية سائل المقياس ، h عمق النقطة C عن المستوي الأفقي المار من B . وفي الحالة التي يكون فيها $\gamma_m \gg \gamma$ ، كما هو

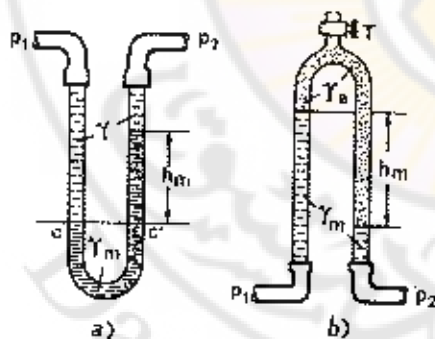
الأمر عندما يكون سائل المقياس زئبقاً مثلاً والسائل الموجود في الخزان هو ماء أو حتى ماء ، فيمكن عندها إهمال وزن عمود السائل بين B و C ويتبع من (3.12) :

$$p_{mn} = p_n - p_m = \gamma_m h_m \quad (3.13)$$

في حالات أخرى نستخدم مانومترا تحتوي سائلي مقياس ، وزنهما النوعي γ_1 ، γ_m ، الشكل (٦.٣ - c) ، حيث نحصل بسهولة على ضغط المقياس في النقطة B من العلاقة :

$$p_{mn} = \gamma_1 h_1 + \gamma_m h_m \quad (3.14)$$

لقياس فرق الضغط بين نقطتين ① و ② من السائل نستخدم مانومترا تفاضلية سائلية ، أبسط أشكالها يمثل أنبوب بشكل حرف U يحتوي على سائل مقياس وزنه النوعي γ_m ، ويوصل فرعا في النقطتين المراد قياس فرق الضغط بينهما ، الشكل (٧.٣ - a) . مثل هذا المانومتر يستخدم مثلاً بشكل واسع لقياس فرق الضغط الناتج عن احتكاك الجريان في الأنابيب ، حيث يثقب جدار



الشكل ٧.٣ : مانومترا تفاضلية لقياس فرق الضغط بين نقطتين ① و ② .

الأنبوب ثقباً صغيراً في النقطتين ① و ② ويوصل بها فرعاً مقياس الضغط. فإذا كان الوزن النوعي للسائل الجاري في الأنبوب γ ، الذي يملأ تماماً فرعي أنبوبة

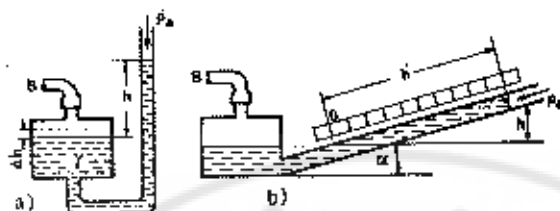
المانومتر فوق سائل المقياس ، وبفرض h_m فرق ارتفاع سوية سائل المقياس ،
 h فرق الارتفاع بين النقطتين ① و ② فينتج حسب الشكل (٧ . ٣ - أ)
 وباعتبار $C-C'$ سطحاً للضغط الثابت :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h_m (\gamma_m - \gamma) + \gamma h \Rightarrow \Delta p = h_m (\gamma_m - \gamma) \quad (3.15)$$

في الحالات التي يكون فيها السائل المراد قياس فرق الضغط بين نقطتين منه
 صالحاً للاستخدام كسائل مقياس ، كالماء مثلاً ، يستعمل المانومتر التفاضلي المبين
 في الشكل (٧ . ٣ - ب) ، الذي هو عبارة عن أنبوب بشكل حرف U مقلوب
 يوصل فرعا به بالنقطتين ③ و ④ فيرتفع فيها السائل الذي وزنه النوعي $\gamma \equiv \gamma_m$
 الى سويتين فرق لارتفاعها h_m ، ويبقى في القسم العلوي هواء وزنه النوعي
 $\gamma_m \gg \gamma$ ، يمكن عند الضرورة ضغطه عبر الصنبور T بواسطة مضخة هوائية
 صغيرة وتعييره لقياس فروق ضغط صغيرة :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma_m h_m \quad (3.16)$$

لتسهيل قراءة القياسات ، وبالتالي تحسين دقة القياس ، بصمم أحد فرعي الأنبوب
 بشكل U على شكل إناء مقطوعه A اكبر بكثير من مقطع الفرع الآخر a
 الصاعد شاقولياً ، الشكل (٨ . ٣ - أ) . عند وصل هذا المانومتر ذي الأنبوب
 الشاقولي لقياس الضغط p_H تنخفض سوية سائل القياس في الإناء بمقدار Δh
 وترتفع في الفرع الشاقولي بمقدار h ويكون بسبب تساوي كمية السائل المزاح :
 $\Delta h = h \cdot a/A$. وبالتالي يمكن غالباً إهمال Δh والاكتفاء بقراءة h فقط .
 هناك وسيلة بسيطة أخرى لزيادة حساسية المانومتر ذي الأنبوب الشاقولي
 تعتمد على ميل فرع المقياس المرفق زاوية α ، الشكل (٨ . ٣ - ب) . فإذا تغيرت
 أثناء عملية القياس سوية سائل المقياس مقدار h' فيكون فرق الارتفاع
 الشاقولي $h = h' \sin \alpha$. وعليه فإنه من أجل فرق ارتفاع ضغط معين h تزداد
 حساسية المانومتر ذي الأنبوب المائل بنسبة $1/\sin \alpha$.



الشكل ٨.٣ : تحسين قراءة ودقة قياس الضغط بواسطة المانومتر ذو الأنبوب الشاقولي (a) والمانومتر ذو الأنبوب المائل (b) .

لقياس الضغوط الصغيرة جداً أو فروقها يستخدم الميكرومانومتر Micromanometer ، الذي لا يختلف طريقة عمله شيء عن المانومتر سوى حساسيته العالية ودقة قراءته ، حيث تستخدم لذلك وسائل ميكانيكية وضوئية وكهربائية ومغناطيسية من أجل التحديد الدقيق لتغير سوية سائل المقياس ، وقراءته بواسطة تدريج فوليه Vernier . وتوجد نماذج مختلفة من الميكرومانومترات الصالحة للاستخدام في مجالات القياس الهامة عملياً ، سنكتفي بتعدادها حسب مبدأ عملها ، مع الإشارة أن [35] مثلاً يتضمن شرحاً وافياً لها .

فمن نموذج الميكرومانومتر ذي الأنبوب الشاقولي توجد :

- أجهزة ذات تكبير ضوئي لسوية سائل المقياس ، تستخدم عدسات مكبرة أو مكرومكروبات أو نلسكروبات صغيرة مركبة على جريدة مسننة ويمكن رفعها أو خفضها بواسطة ترس مسنن أو براغي حركة بطيئة . وقد صمم براندل مقياساً من هذا النوع ، يعرف باسمه ، ويستخدم السيليكون (Silicone De 200) كسائل مقياس وتبلغ حساسيته 0,005 mm LC .

- أجهزة ذات فحص ميكانيكي لسوية سائل المقياس بواسطة فواشة ويوجد منها نوع معروف باسم ميكرومانومتر الإسقاط Projection micromanometer ، حيث يتم إسقاط التدريج على شاشة وتكبيرها ، مما يعطي دقة

قياس محدود $0,1 \text{ kp/m}^2$. وهناك المكرومانومتر ذو المؤشر الضوئي Light - pointer micromanometer ، حيث يتم نقل حركة الفواشة على مرآة دوارة وتكبيرها بواسطة مؤشر ضوئي . وتصل حساسية بعض أنواع هذه الأجهزة حتى $0,002 \text{ kp/m}^2$. كما يستعمل المكرومانومتر ذو الفواشة المغناطيسية الذي يستخدم الزئبق فقط كسائل مقياس .

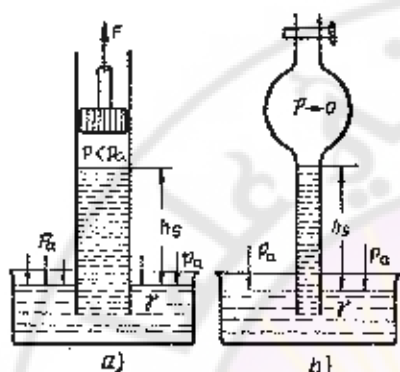
- أجهزة ذات خمس كهربائي لسوية سائل المقياس ، يستخدم بعضها مقاومات والبعض الآخر وشائع تحريض أو مكثفات سعوية .

- أجهزة ذات خمس كهروضوئي لسوية سائل المقياس ، يكون سائل المقياس فيها لالون له كالماء ، ومجهزة بخلية ضوئية .

ومن نموذج المكرومانومتر ذي الأنبوب المائل توجد أنواع كلاسيكية ذات ميل ثابت مثل مكرومانومتر كريل Krell-Micromanometer ومكرومانومتر تويبلر Toepler-Micromanometer . ويمكن بواسطة الأخير قياس فروق ضغوط حتى 10^{-4} kp/m^2 (راجع [4a]) . كما توجد أنواع يمكن تغيير ميل الأنبوب تدريجياً مثل المكرومانومتر ذي الذراع الذي صممه بيتس (راجع [35]) .

قبل التعرض لقياس الضغط الناقص يطرح نفسه سؤال هام جداً من الناحية الفيزيائية ، يتعلق بكيفية نشوء الضغط السالب ومقدار ارتفاع السحب الأعظمي h_{max} . لقد شغل هذا السؤال بالأكاديمين ، واكتفوا لتفسيره عملية امتصاص السوائل بقولهم : « احذر الفراغ horror vacui » . وعندما أخفق بناء المضخات في فلورنسا في جعل مضخاتهم المائية تسحب عن عمق أكبر من 10 m عن سطح الماء السائب ، اهتم العالم غاليليه بالموضوع ، وتابعه بعده تلميذه توريشيلي (1608 - 1647) E. Torricelli ، واستطاع استناداً على تجربة بالزئبق أجراها بتوجيه منه صديقه فيفياني Viviani أن يعطي عام 1643 التفسير العلمي الصحيح لهذه المسألة الكلاسيكية .

إن كيفية نشوء الضغط الناقص توضحها التجربة البسيطة التالية : نأخذ وعاء مفتوحاً للأعلى فيه سائل ساكن ، ونغمس فيه أنبوباً مجهزاً بمكبس بحجم إغلاقه تماماً ، الشكل (٩.٣ - أ) . عندما نرفع المكبس للأعلى بقوة F



الشكل ٩. ٣ : نشوء الضغط الناقص وتعريف ارتفاع السحب بمساعدة مضخة ماصة (هـ) ومخلية هواء (ب) .

يرتفع سائل الوعاء في الأنبوب متتبعاً نهاية المكبس السفلى ، وبمبدأ الفراغ الناتج عن حركة المكبس . فإذا كان ارتفاع السائل في الأنبوب h_s والضغط المؤثر على سطحه السائب تحت المكبس p وعلى أساس أن سوية السطح السائب للسائل في الوعاء تمثل سطحاً للضغط الجوي الثابت p_a فينتج :

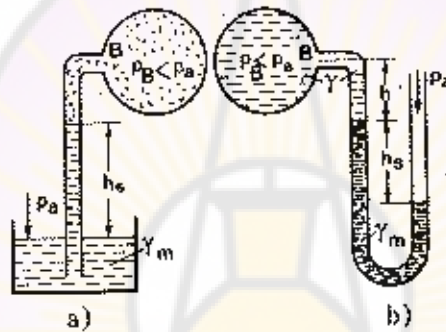
$$p_a = p + \gamma h_s \Rightarrow p = p_a - \gamma h_s < p_a \Rightarrow h_s = -p_a / \gamma \quad (3.17)$$

وبالتالي فإن الضغط المؤثر على السائل في الأنبوب هو أصغر من الضغط الجوي . ومثل التجربة البسيطة مبدأ عمل المضخات الماصة . ويمكن الوصول الى نفس النتائج إذا استبدلنا المكبس بمخلية هواء ، الشكل (٩.٣ - ب) . فإذا تمت تخلية الهواء تماماً من الأنبوب يصبح $p = 0$ ويكون عندها ارتفاع السحب الأعظمي :

$$h_{s \max} = p_a / \gamma \quad (3.18)$$

وهذا يعني أننا لا نستطيع أن نسحب أكثر مما يستطيع الضغط الجوي أن يضغط . ففي حالة الماء مثلاً يبلغ ارتفاع السحب الأعظمي حسب (3.18) : $10^6 / 10^3 = 10 \text{ m}$ ، وبالتالي لا نستطيع أية مضخة مائية أن تسحب عن عمق

يزيد عن عشرة أمتار بين صمام السحب ومسطح الماء السائب ؛ بينما يبلغ ارتفاع السحب الأعظمي للزئبق حوالي $0,76 \text{ m}$ ، إذا اعتبرنا : $p_a = 10332 \text{ kp/m}^2$ والوزن النوعي $\gamma = 13596 \text{ kp/m}^3$. وتجدد الإشارة هنا أنه في حالة السوائل المائعة تنقطع عملية السحب عندما يصبح الضغط p مساوياً لضغط تبخر السائل p_v المناسب لدرجة الحرارة ، حيث تبدأ ظاهرة التبخر الموضعي (التكهف) . وبالتالي ينقص ارتفاع السحب الأعظمي بمقدار الضغوط المكافئة لضغط التبخر . فإذا أضفنا لذلك الضياعات الناتجة عن الاحتكاك في أنبوب السحب ، ينتج أن ارتفاع سحب المضخات المائية الحديثة لا يتعدى $7 - 8 \text{ m}$.



الشكل ٣-١٠ : بارمترات بسيطة لقياس الضغط الناقص :
بارومتر ذو فرع شاقولي (a) ، بارومتر بشكل حرف U (b) .

توجد نماذج مختلفة من البارومترات السائلية لقياس الضغط الناقص ، والتي يعتمد مبدأ عملها على التجربة المبينة في الشكل (٣-٩) . وبين الشكل (٣-١٠-أ) أحد هذه النماذج البسيطة ، حيث يوصل طرف أنبوب زجاجي شاقولي بالنقطة B ، التي يراد قياس الضغط فيها ، ويغمر طرفه الآخر في إناء فيه سائل مقياس وزنه النوعي γ_m ومفتوح للأعلى . فإذا كان ارتفاع سائل المقياس في الأنبوب الزجاجي h_a ، وأهملنا وزن عمود السائل فوق سائل المقياس لأن وزنه النوعي $\gamma \gg \gamma_m$ نجد بسهولة الضغط الناقص :

$$P_{atm} = P_a - P_B = \gamma_m h_s \quad (3.19)$$

مثل هذا البارومتر يستخدم عادة لقياس الضغط الناقص في السوائل الغازية ، ولقياس الضغط الناقص في السوائل المائعة أو الغازية يستعمل البارومتر بشكل حرف U المبين في الشكل (١٠.٣) . فإذا كان الوزن النوعي لسائل المقياس γ_m ، والوزن النوعي للسائل المراد قياس الضغط في النقطة B منه γ ، وفرق ارتفاع سوية سائل المقياس h_s ينتج بسهولة :

$$P_{aB} = \gamma_m h_s + \gamma h \quad (3.20)$$

حيث h الارتفاع الشاقولي للنقطة B عن سوية سائل المقياس في الفرع المتصل بها . فإذا كان $\gamma \ll \gamma_m$ نتج العلاقة (3.19) . كما يمكن في مثل هذه البارومترات استخدام السائل المعتبر نفسه كسائل مقياس .

تستخدم في المانومترات والبارمترات سوائل مقياس مختلفة ، يتم اختيارها وفقاً لمبدأ عمل المقياس وحساسيته ، وبمجال قياسه ، كما تؤخذ بعين الاعتبار الخاصية الشعرية لهذه السوائل ومددها الحجمي بتأثير درجة الحرارة . فالماء يتأثر بأن وزنه النوعي لا يتغير إلا قليلاً مع درجة الحرارة ، ولكن خاصيته الشعرية سيئة ، لأنه يعلق بشكل غير منتظم على جدران الانابيب الزجاجية . ولذلك فهو لا يصلح لمقاييس الضغط الدقيقة ، ولا لقياس الضغوط العالية بسبب صغر وزنه النوعي ، حيث يفضل في الحالة الأخيرة استخدام الزئبق $(\gamma = 13,595 \text{ kp/dm}^3)$. وإلى جانب هذين السائلين يستخدم التناول $(\gamma = 0,8 \text{ kp/dm}^3)$ والكحول $(\gamma = 0,869 \text{ kp/dm}^3)$ و Toluol $(\text{C}_6\text{H}_5 \text{ CH}_3)$ والكسيول Alcohol $(\text{C}_6\text{H}_4 (\text{CH}_3)_2)$ التي يمتاز باذابتها للشحوم ، ولكنها مقابل ذلك تتأثر جداً بدرجة الحرارة . ويستخدم أيضاً دابع كلور الفحم $\text{CCl}_4 (\gamma = 1,6 \text{ kp/dm}^3)$ وغازي فحمات الكبريت $(\gamma = 1,261 \text{ kp/dm}^3)$

والسيليكون Silicon DC 200 الذي يتصف بأنه لا يتأثر مع الماء ،
[4] [8] [35] [75] .

إن تأثير الخاصية الشعرية لسائل المقياس (راجع ٧٠٢) يجب أن يؤخذ بعين الاعتبار عند تعيير مقياس الضغط ، بحيث يلحظ في تدريج القياس ، وحسب [8] يمكن إهمال تأثير الخاصية الشعرية للماء إذا استعملت أنابيب أقطارها 15 mm على الأقل ، و 8 mm في حالة الزئبق . كما أن الكحول والتولول يغيران وزنها النوعي بمعدل 0,1% لكل درجة حرارة ، مما يتطلب قياس الوزن النوعي عند كل عملية قياس دقيقة .

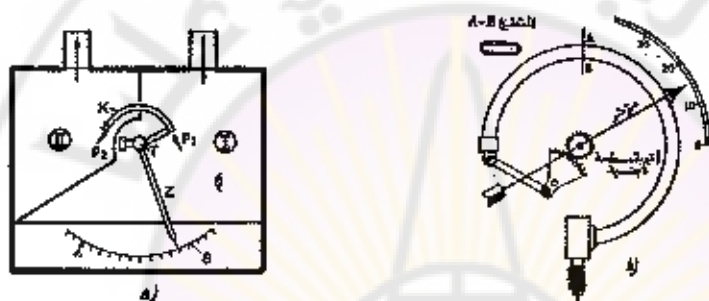
ولقد أدى استعمال المانومتر والبارومتر السائليين لإدخال وحدات قياس ضغط جديدة ، لاتزال شائعة ومستعملة ، وتعتمد على فكرة التعبير عن قيمة الضغط بارتفاع عمود سائل [LC] . فنقول مثلاً « ميليمتر عمود ماء » ورمزها [mm WC] أو « ميليمتر عمود زئبق » ورمزه [mm MC] . وقد أعطيت واحدة القياس الأخيرة اسم توف [Torr] نسبة للعالم الإيطالي توبيشلي . ويستعمل ، خاصة في الأرصاد الجوية ، البار [bar] ، وأجزاءه المليبار [mb] والمكروبار [μb] . كما عرف الضغط الجوي التكنيكي : $1 \text{ at} = 1 \text{ kp} / \text{cm}^2$ ، والضغط الجوي الفيزيائي :

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm MC} = 76 \cdot 10^{-3} \cdot 13,596 = 1,0333 \text{ kp} / \text{cm}^2$$

ويمكن بمساعدة العلاقة (2.20) ، ص ٥٤ ، تحويل هذه الوحدات الى وحدات القياس المعروفة في حلة القياس العالمية والتكنيكية والفيزيائية .

إن قياسات الضغط تشمل مجالاً واسعاً جداً يمتد عملياً بالنسبة لقياسات الجريان من 10^{-6} at حتى 10^3 at . لذلك نجد الى جانب مقاييس الضغط السائلية مقاييس « جافة » يعتمد مبدأ عملها على تعريف الضغط كقوة مؤثرة على واحدة السطح ، حيث توازن قوة الضغط المؤثرة على مكبس أو حجرة قياس أو أنبوب نابضي بقوة مضادة . لذلك يطلق على مقاييس الضغط هذه موازين الضغط ، ويوجد منها للاستعمالات

المتنوعة في الصناعة والمختبر مانومتراوات ومكرومانومتراوات لقياس الضغوط العالية حتى الصغيرة جداً ، وكذلك بارومتراوات ، أو كما تسمى مقاييس الفراغ Vacuummeter . ومن مميزات المعروفة يمكن تعداد مقاييس ذات سائل مقياس (جافة - سائلة) ، مقاييس نابضية وغيرها . وتتضمن الكتب المختصة بقياسات الجريان مثل [35] [75] شرحاً وافياً لهذه المقاييس بما في ذلك طريقة عملها ودقة قياسها ومجال استخدامها . وسنكتفي بشرح نموذجين منها .



الشكل ١١.٣ : مانومتراوات جافة : ميزان ضغط ريشارد ذو المكبس الحر القوس (a) ، مقياس بوردون ذو الأنبوب النابضي (b) .

من موازين الضغط ذات المكبس الحر يعتبر مكرومانومتر ريشارد Reichardt من أحدث وأدق الأنواع ، الشكل (١١.٣ - a) . يتألف المقياس من حلة دوارة تعمل حسب مبدأ المقياس الجلفاني ، مؤلفة من مكبس مقوس بشكل دائري K معلق في مركز ثقله على خيط نابضي من خليطة البلاتين - الإيريديوم T ، وثبت في نقطة التعليق مؤشر Z ينتمي أمام ميناء مدرجة بوحدات قياس الضغط . في الجدار الفاصل بين حجرتي القياس I و II يوجد ثقب يمر عبره المكبس بخلوص لا يتعدى 0.1 mm ، وبذلك يستطيع الحركة في حال كون $p_1 \neq p_2$ بدون مقاومة احتكاك تقريباً ، ويتوقف عن الحركة عندما تتوازن قوة فرق الضغط المؤثرة على المكبس مع قوة القتل للخيط النابضي ، وعندها يدل المؤشر على قيمة فرق الضغط . ويجب عند

تعتبر المقياس أخذ كمية السائل البسيطة المتسربة عبر ثقب الجدار الفاصل بين حجرتي المقياس بعين الاعتبار ، ولكن يمكن تخفيف تأثيرها على دقة القياس بوصول المقياس بواسطة خراطيم صغيرة الاقطار نسبياً . وحسب اختيار الحيط النابضي توجد موازين ضغط بحال قياسها من 0,01 حتى 3 kp/m^2 . ويمكن بواسطتها قياس ضغوط حتى 10^{-5} kp/m^2 ، أي ما يعادل سرعات هواء لا تتجاوز عدة سنتيمترات في الثانية [8] [35] .

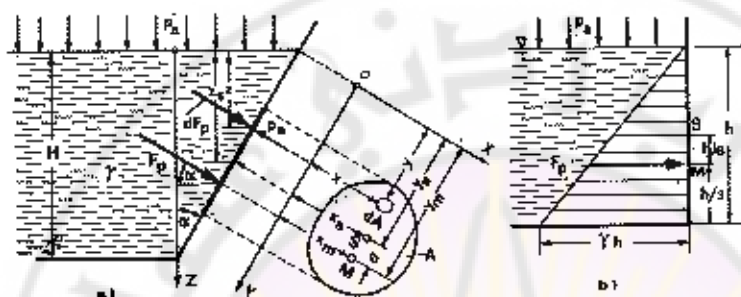
ومن مقاييس الضغط النابضية أشهر مقياس بوردون Bourdon-gauge ذو النابض الانبوبي ، الشكل (١١٠٣ - b) . إن ضغط السائل ، الذي يدخل الأنبوبة النابضية الاهليلجية المقطع والمسدودة من الطرف الآخر ، يحاول « تفخ » الأنبوبة وتقسيمها وبالتالي زيادة نصف قطر المنحناها . وهذا يؤدي الى تحريك آلية ميكانيكية مؤلفة من روافع ومستلزمات متصلة بطرف الأنبوبة المسدود ومرتبطة بمؤشر أمام ميناء مدرجة . وعند توازن قوة النابض مع قوة الضغط يدل المؤشر على قيمة الضغط . وحسب لاختيار معدن الأنبوبة النابضية وسماكة جدرانها صنعت مقاييس ضغط من هذا النموذج يقع بحال قياسها بين 0-0,6 at وبين 0-8000 at [35] .

٣.٣.١.٤ حساب قوى الضغط على جدران «دووعة» المستوية

بمساعدة المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية يمكن حساب توزيع قوى الضغط التي يؤثر بها السائل الساكن على جدران الوعاء الذي يحتويه ، ومن ثم تحديد محصلة هذه القوى من حيث القيمة ونقطة التأثير والاتجاه . وهذا ضروري لتحديد متانة الاوعية او الجدران (مثل السدود المائية !) التي تخزن أو تحجز السوائل خلفها .

نعتبر وعاء ذا شكل غير محدد ، مقترحاً في الاعلى وبلوّه سائل وزنه النوعي γ حتى ارتفاع H . لنفرض أن قاعدة الوعاء أفقية ، وأحد جدرانها

الجانبية المستوية مائل على الشاقول المنطبق على المحور z بزاوية α . نحدد على هذا الجدار سطحاً اعتباطياً A ، يظهر في مستوي الشكل (١٢.٣-أ) بعد التدوير واقعاً في مستوي الإحداثيين x, y ، حيث أختير المحور x منطبقاً على خط تقاطع السطح الحر للسائل مع الجدار ، والمحور y متعامداً معه .



الشكل ١٢.٣ : حساب قوة الضغط على جدار مستو وتحديد مركز الضغط. (ب) قوة الضغط على جدار شاقولي تقاسم مع مساحة المثلث القائم المتشكل من الجدار وخط توزع الضغط ، وتؤثر على ارتفاع $h/3$ من قاعدته (ب) .

نعتبر من السطح A عنصراً سطحياً dA على عمق z من السطح السائب للسائل . إن قوة الضغط الجزئية التي يؤثر بها السائل على dA من الداخل تساوي بالاستناد إلى (3.3) : $(p_a + \gamma z) dA$ ، بينما تؤثر عليه من الخارج قوة الضغط الجوي : $p_a dA$ ، وبالتالي تنتج قوة الضغط الزائد الجزئية :

$$dF_p = (p_a + \gamma z) dA - p_a dA = \gamma z dA ,$$

ومنه بالتكامل نحصل على محصلة قوى الضغط المؤثرة على السطح A :

$$F_p = \gamma \int_{(A)} z dA .$$

فإذا كان z_s العمق الشاقولي لمركز ثقل السطح A عن السطح الحر للسائل ، فيكون حسب قانون العزم الستاتيكي للسطوح :

$$\int_{(A)} z dA = z_s A ,$$

ومنه ينتج :

$$\boxed{F_p = \gamma z_s A = p_s A} : \quad (3.21)$$

إن قوة الضغط التي يؤثر بها سائل ساكن على سطح مستو تساوي إلى جداء مساحة هذا السطح A في الضغط الزائيد المؤثر في مركز ثقل السطح $p_s = \gamma z_s$ ، وتؤثر عمودياً على A .

إن القوة F_p تؤثر في نقطة M ، تسمى مركز الضغط Centre of pressure ولا تنطبق عادة على مركز ثقل السطح A ، الشكل (١٢.٣ - أ) . فإذا فرضنا أن x_m ، y_m يمثلان إحداثيي النقطة M ، ينتج حسب قانون العزم الستاتيكي بالنسبة لمحوري الدوران x ، y ومن العلاقة (3.21) :

$$F_p \cdot x_m = \int_{(A)} dF_p \cdot x \Rightarrow \gamma z_s A \cdot x_m = \int_{(A)} \gamma z dA \cdot x$$

$$F_p \cdot y_m = \int_{(A)} dF_p \cdot y \Rightarrow \gamma z_s A \cdot y_m = \int_{(A)} \gamma z dA \cdot y$$

ولكن حسب الشكل (١٢.٣ - أ) فإن : $z = y \cos \alpha$ ؛ $z_s = y_s \cos \alpha$ ، وبالتالي يكون بعد الاختصار على $\gamma \cos \alpha$:

$$x_m y_s A = \int_{(A)} x y dA \quad ; \quad y_m y_s A = \int_{(A)} y^2 dA \quad . \quad (3.22)$$

ولكن التكامل $J_{C(x,y)} = \int_{(A)} x y dA$ يمثل العزم التنابد Centrifugal moment للسطح A بالنسبة للمحورين x ، y ، بينما يمثل التكامل $J_x = \int_{(A)} y^2 dA$ عزم العطالة Inertia moment للسطح A بالنسبة للمحور x ، وكلاهما يتبعان لعزوم الدرجة الثانية . بينما يمثل الجداء $y_s A$ العزم الستاتيكي للسطح A ، أي عزم الدرجة الأولى . ونتج بالتالي إحداثيات مركز الضغط من (3.22) :

$$\left. \begin{aligned} x_m &= \frac{\int (x) x y dA}{y_s A} = \frac{J_{C(x,y)}}{y_s A} = \frac{\text{العزم النابذ للسطح}}{\text{العزم الستاتيكي للسطح}} \\ y_m &= \frac{\int (y) y^2 dA}{y_s A} = \frac{J_x}{y_s A} = \frac{\text{عزم العطالة للسطح}}{\text{العزم الستاتيكي للسطح}} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

ليكن J_s عزم عطالة السطح A بالنسبة لمحور الثقالة المار من مركز الثقل S ،
فيتنج حسب علاقة شتاينر : Steiner :

$$J_x = J_s + A y_s^2 ,$$

وبالتالي تصبح المعادلة الثانية من (3.23) :

$$y_m = y_s + \frac{J_s}{y_s A} , \quad (3.24)$$

ويكون البعد بين مركز الثقل S ومركز الضغط M :

$$e = y_m - y_s = \frac{J_s}{y_s A} , \quad (3.25)$$

وحيث أن عزم العطالة J_s هو دائماً موجب فيتنج أن $e > 0$ ، وبالتالي يكون
مركز الضغط دائماً أخفض من مركز الثقل . وينطبقان على بعضها ، عندما
يصبح السطح أفقياً ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) . لأنه في هذه الحالة يكون توزيع الضغط على السطح
منتظماً ، كما هو الامر بالنسبة للضغط المؤثر على قعور الاوعية الأفقية . وتكون
قوة ضغط القعور لوعاء فيه سائل حتى ارتفاع H من القعر ومساحة قعره A
حسب (3.21) :

$$F_{pb} = \gamma H A . \quad (3.26)$$

ونبقى هذه القوة ثابتة بالنسبة لجهة أوعية متباينة الشكل ولكن مساحة قعورها
واحدة ويؤثرها نفس السائل لنفس الارتفاع ، الشكل (١٣.٣) . وهذا

ما يعرف باسم التناقض الهيدروستاتيكية Hydrostatic Paradox :



الشكل ١٢.٣ : التناقض الهيدروستاتيكية :
قوة الضغط على قعر الأوعية المختلفة الأشكال واحدة .

قوة الضغط على قعر وعاء أفقي لا تتعلق بشكل الوعاء وتساوي إلى وزن اسطوانة سائلة وزنها النوعي γ وارتفاعها H و سطح قاعدتها A .

في حالات عديدة يمكن اختيار المحور y في الشكل (١٢.٣ - a) كمحور تناظر للسطح المعتبر A . في هذه الحالة ينعدم العزم النابذ $K_{C(x,y)}$ وتصبح $x_m = 0$ حسب (3.23) . ويتحدد بالتالي مركز الضغط M بالإحداثي y_m فقط ، ويكون واقعاً على محور التناظر وعلى بعد e من مركز الثقل المعطى بالعلاقة (3.25) . ففي حالة جدار شاقولي مثلاً ، يمكن التأكد بسهولة أن قوة الضغط بالنسبة لوحدة العرض $F_p = \gamma h^2/2$ ، ومركز الضغط M يبعد $e = h/6$ عن مركز الثقل S ، وبالتالي فهي تتناسب مع مساحة المثلث القائم المتشكل من أنوار الجدار وخط توزع الضغط ، وتؤثر في مركز ثقل هذا المثلث على ارتفاع $h/3$ من قاعدته ، الشكل (١٢.٣ - b) .

٤.٣.١.٣ حساب قوى الضغط على جدران الوعاء المنحنية

إن حساب قوى ضغط السوائل الساكنة على السطوح المنحنية الفراغية يتطلب في الحالة العامة تحديد ثلاث مركبات للقوى في اتجاه ثلاثة محاور متعامدة وعزومها بالنسبة لهذه المحاور .

نفرض أن السطح A يمثل جزءاً من جدار خزان شكله بدون تحديد ، وفيه سائل سطحه السائب معرض لتأثير الضغط الجوي الذي يؤثر من الخارج على جدران الخزان أيضاً ، الشكل (١٤.٣) . نختار مجموعة إحداثيات ديكارتية z, y, x ، بحيث يكون المستوي المشكل من y, x منطبقاً على سطح السائل الحر الأفقي ، بينا المحور z متاقولي باتجاه الأسفل .

نعتبر من السطح A جزيئاً سطحياً dA على عمق z من السطح السائب السائل فتكون قوة الضغط الزائد الجزئية المؤثرة على dA ناظماً من الداخل حسب (3.3) :

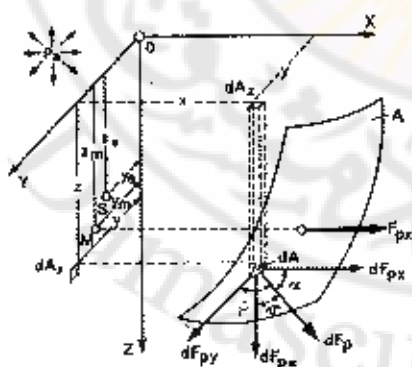
$$dF_p = \gamma z dA . \quad (3.27)$$

فإذا كان الناظم على dA يصنع مع محاور الإحداثيات المختارة الزوايا α, β, θ فتكون مركبات dF_p باتجاه z, y, x هي :

$$dF_{px} = \gamma z dA \cdot \cos \alpha = \gamma z dA_x ; \quad dF_{py} = \gamma z dA \cdot \cos \beta = \gamma z dA_y$$

$$dF_{pz} = \gamma z dA \cdot \cos \theta = \gamma z dA_z , \quad (3.28)$$

حيث dA_x, dA_y, dA_z تمثل مساقط dA على المستويات المتعامدة على x, y, z . وتنتج مركبات قوى الضغط الإجمالية على السطح A



الشكل ١٤.٣ : حساب مركبات قوى الضغط على سطح منحني .

بالتكامل :

$$F_{px} = \gamma \int_{(A)} z dA_x ; F_{py} = \gamma \int_{(A)} z dA_y ; F_{pz} = \gamma \int_{(A)} z dA_z \quad (3.29)$$

حيث تمثل F_{px} ، F_{py} ، F_{pz} المركبات الشاقولية لقوى الضغط .

ليكن A_x مسقط السطح A على المستوي zy المتعامد مع المحور x ، ولنفرض S مركز ثقل A_x واقعاً على عمق z_S من المحور y فيكون حسب قانون العزم لتحديد مركز الثقل السطحي :

$$\int_{(A)} z dA_x = z_S A_x .$$

وعليه تصبح المعادلة الأولى من (3.29) :

$$F_{px} = \gamma z_S A_x . \quad (3.30)$$

فإذا كان خط تأثير F_{px} يقطع المستوي zy في مركز الضغط M المحدد بالإحداثيين z_m ، y_m (الشكل ١٤.٣) فينتج من قانون العزم بالنسبة لمحوري الدوران z ، y :

$$F_{px} z_m = \int_{(A_x)} dF_{px} z ; F_{px} y_m = \int_{(A_x)} dF_{px} y .$$

ومنه ينتج باستخدام العلاقتين (3.29) ، (3.30) بعد الاختصار على γ :

$$\left. \begin{aligned} z_m z_S A_x &= \int_{(A_x)} z^2 dA_x = J_y ; y_m z_S A_x = \int_{(A_x)} y z dA_x = J_{yz} \\ z_m &= \frac{\int_{(A_x)} z^2 dA_x}{z_S A_x} = \frac{J_y}{z_S A_x} = \frac{\text{عزم العطالة للسطح } A_x}{\text{العزم الستاتيكي للسطح } A_x} \\ y_m &= \frac{\int_{(A_x)} y z dA_x}{z_S A_x} = \frac{J_{yz}}{z_S A_x} = \frac{\text{العزم الثابت للسطح } A_x}{\text{العزم الستاتيكي للسطح } A_x} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

بنفس الطريقة يمكن الحصول على علاقات مشابهة لتحديد المركبة الأفقية F_{py} لقوى الضغط ، حيث ينتج بالمقارنة مع العلاقتين (3.30) ، (3.31) :

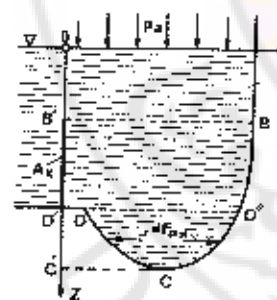
$$F_{py} = \gamma z_g A_y ; z_{mr} = \frac{J_x}{z_g A_y} ; x_{mr} = \frac{J_{C(x,z)}}{z_g A_y} , \quad (3.32)$$

حيث z_g بعد مركز ثقل السطح A_y ، مسقط A على المستوي z_x ، عن المحور x ، J_x عزم عطالته بالنسبة للمحور x ، $J_{C(x,z)}$ عزمه النابذ بالنسبة للمحورين z, x ، $M'(x_{mr}, z_{mr})$ مركز الضغط للمركبة F_{py} .

إن مقارنة العلاقات (3.30) حتى (3.32) مع العلاقتين (3.21) و (3.23) ، مع الانتباه إن اختيار موقع محاور الاحداثيات y, x على السطح السائب للسائل كان اعتباطياً ، تسمح باستخلاص النتيجة العامة التالية :

إن مركبة قوى الضغط الأفقية التي يؤثر بها سائل ساكن على جدار وعاء منحنى في اتجاه أفقي ما تساوي إلى قوة الضغط المؤثرة على السطح المستوي الناتج عن إسقاط الجدار على مستو متعامد مع الاتجاه المقروض .

ونجدر الملاحظة أن كافة أجزاء السطح التي تتقاطع مساقطها لا تدخل في



الشكل ١٥.٣ : قوة الضغط الأفقية F_{px} المؤثرة على السطح DCB تتعده بالسقط الشاقولي $AB'B' = A_x$ فقط لأن قوى الضغط الأفقية المؤثرة على DCD' تفي بعضها .

حساب المركبة الأفقية لقوى الضغط ، لأن مركبات قوى الضغط الجزئية الأفقية المؤثرة على هذه الأجزاء تفي بعضها . فعند حساب قوة الضغط F_{px} المؤثرة على السطح DCB لا يدخل في الحساب سوى المسقط الشاقولي

١) $BDY \equiv A_z$ على المستوي xy ، لأن مركبات قوى الضغط الأفقية المؤثرة على السطح DCD^* متوازنة فيما بينها ، الشكل (١٥.٣) .

لحساب المركبة الشاقولية لقوى الضغوط نلاحظ أن قوة الضغط الشاقولية الجزئية المؤثرة على العنصر السطحي حسب (3.28) :

$$dF_z = \gamma z \, dA_z = \gamma \, dV ,$$

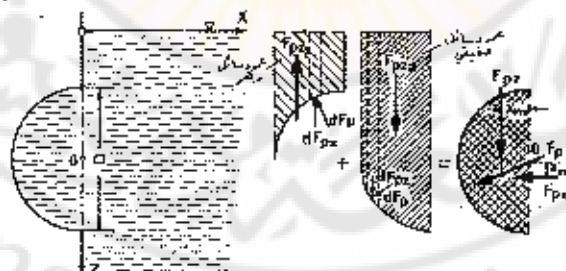
حيث dV هو حجم عمود السائل القابع فوق dA بارتفاع z ومساحة قاعدة dA_z ، الشكل (١٤.٣) . وعليه ينتج من (3.29) :

$$F_{pz} = \gamma \int_{(A_z)} z \, dA_z = \gamma V , \quad (3.33)$$

حيث V حجم السائل القابع فوق السطح المعتبر A . وتكون بالتالي :

مركبة قوى الضغط الشاقولية ، التي يؤثر بها سائل ساكن على سطح منحنى تساوي الى وزن عمود السائل الشاقولي القابع فوق السطح والمعتد حتى السطح الحر للسائل .

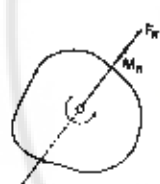
وواضح أن خط تأثير F_{pz} يمر من مركز ثقل الحجم V . أما اتجاهها فيمكن أن يكون شاقولياً للأسفل أو للأعلى ، حسب ما يكون عمود السائل فوق السطح المنحني المعتبر حقيقياً أو وهمياً . فعند حساب قوة الضغط الشاقولية المؤثرة على نصف اسطوانة ، الشكل (١٦.٣) ، نلاحظ أن F_{pz} المؤثرة على



الشكل ١٦.٣ : حساب مركبة قوى الضغط الشاقولية على نصف اسطوانة ، F_{pz} تساوي وزن عمود السائل القابع فوق المنحني وتمر من مركز ثقله واتجاهها شاقولي للأعلى أو للأسفل .

النصف العلوي لنصف الاسطوانة متجهة للأعلى ، ونحسب من (3.33) إذا افترضنا أن عموداً وهمياً من السائل قابض فوقها ؛ بينما تكون F_{pv} المؤثرة على النصف السفلي متجهة للأسفل لان عمود السائل القابض فوقها حقيقي (راجع ٥.٣ ؛ ت ٢٠) .

إن مركبات قوى الضغط F_{px} ، F_{py} ، F_{pz} المؤثرة على سطح منحني فراغي لا يمر في الحالة العامة من نقطة واحدة ، وبالتالي لا يمكن إيجاد محصلتها العامة ، لأن المركبة الجزئية لقوى الضغط dF_p تمثل أشعة فراغية تؤثر نظامياً على السطح وتغير اتجاهها من مكان لآخر . ولكن بالإمكان حسب طرق جمع الأشعة الفراغية التعويض عنها دائماً بقوة إفرادية (محصلة) ومزدوجة (عزم) . ومن بين الحلول اللانهائية التي نحصل عليها من الاختيار الحر لمركز الاختزال Reduction point توجد حالة خاصة تكون فيها القوة المحصلة والعزم من نفس الاتجاه ، وتؤلفان ما يسمى لولب القوى ، الشكل (١٧.٣) ، [67] .



الشكل ١٧.٣ :
لولب القوى

في أكثر الحالات العملية فإن حساب قوى الضغط على السطوح المنحنية يقتصر على إيجاد مركبة أفقية $F_{px} \equiv F_{pH}$ ، ومركبة شاقولية $F_{pz} \equiv F_{pV}$ ، لأن هذه السطوح تمثل عادة جزءاً من كرة أو أسطوانة . ونحصل في هاتين الحالتين على محصلة لقوى الضغط كقوة إفرادية :

$$F_p = \sqrt{F_{pH}^2 + F_{pV}^2} \quad (3.34)$$

ويكون خط تأثير F_p ، ماراً من مركز الكرة ، لأن كافة قوى الضغط الجزئية يمر منه ، أو متقاطعة مع محور الأسطوانة لأن كافة قوى الضغط الجزئية تكون واقعة في مستويات متوازية ومتعامدة مع هذا المحور ، الشكل (١٦.٣) :

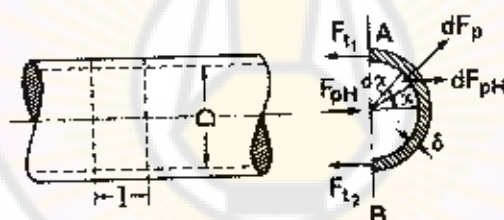
يعتبر حساب متانة الأتاربب الدائرية الواقعة تحت تأثير ضغط داخلي من

التطبيقات العملية الهامة لحساب قوى الضغط على السطوح المنحنية .
 نفرض أن القطر الداخلي للأنبوب $D=2r$ ، وسماكته جداره δ ، والضغط
 الزائد للسائل الموجود فيه p . فنتيجة للضغط الداخلي يكون الأنبوب معرضاً
 لأجهادات شد تحاول تمزيقه إلى قسمين في المستوي $B-A$ ، الشكل (١٨.٣) .
 نقطع من الأنبوب شريحة خائفة بطول l ، وعرض $ds = r d\alpha$. نحور
 نصف الشريحة ، فتكون قوتا الشد المماسيتان F_1 ، F_2 المؤثرتان على طرفيها
 متوازنتين مع محصلة قوى الضغط الأفقية F_{pH} المتعامدة مع $\overline{BA}$. وحيث
 أنه من الشكل (١٨.٣) :

$$F_{pH} = \int dF_p \cos \alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p dA \cos \alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p l r d\alpha \cos \alpha$$

نتج بالتكامل العلاقة :

$$F_{pH} = p l 2r = p l D \quad (3.35)$$



الشكل ١٨.٣ : حساب مثابة الشد لأنبوب دائري وتحديد سماكة جداره

التي تنتج أيضاً مباشرة من العلاقة (3.30) إذا اعتبرنا فيها $A_s \equiv l D$ ، $p \equiv \gamma z_s$ ،
 وفي حالة الضغوط العالية يمكن اعتبار مركز الضغط للقوة F_{pH} منطبقاً مع
 مركز الأنبوب . ويكون بالتالي $F_1 = F_2 = F_t$ ، ونحصل من شرط
 توازن القوى :

$$2 F_t = F_{pH} = p l D \Rightarrow F_t = \frac{p l D}{2} = p l r \quad (3.36)$$

فإذا فرضنا أن أجهاد الشد المسموح به لمعدن الانبوب σ_{zul} ، فتكون متانة الانبوب ضد أجهادات الشد محققة ، عندها :

$$\frac{F_1}{\delta I} \leq \sigma_{zul}$$

ومنه ، باستخدام العلاقة (3.36) ، تنتج مماثلة جدار الانبوب المطلوبة لتحمل ضغط معين :

$$\delta \geq \frac{p r}{\sigma_{zul}} . \quad (3.37)$$

على هذا الاساس يمكن أيضاً تحديد الضغط المسموح به بالنسبة لانبوب مواصفاته معلومة .

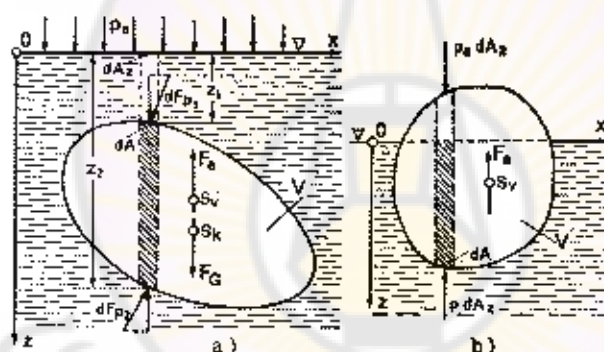
٥.٣.١.٣ قوة الرفع الهيدروستاتيكية : دافعة أرخميدس ،

تصور داخل سائل ساكن ثقل وزنه النوعي γ منطقة شكلها على غير معين وحجمها V قد « تصلبت » مع بقاء الكثافة ثابتة . فحسب « مبدأ التصلب » (راجع ٣.٠٢) لا يتخلل توازن السائل . وبالتالي يجب أن تكون قوة ثقل الجسم « المتصلب » الشاقولية للأسفل متوازنة مع قوى الضغط التي يؤثر بها السائل عليه ، والتي يجب أن تكون لها محصلة شاقولية للأعلى فقط ، بينما تفني مركبات قوى الضغط الأفقية بعضها البعض .

نفترض الآن أنه بدلاً من الجسم « المتصلب » يوجد جسم صلب له نفس الشكل والحجم . وبالتالي فإن قوى الضغط التي يؤثر بها السائل على هذا الجسم لا تختلف عن تلك التي كانت تؤثر على الجسم « المتصلب » . ومع هذا فليس ضرورياً أن يتحقق التوازن . فإذا كان الوزن النوعي للجسم $\gamma_1 < \gamma$ ، فيكون وزنه أكبر من وزن الجسم « المتصلب » ، وبالتالي أكبر من محصلة قوى الضغط الشاقولية ، وهذا يسبب غرق الجسم للقاع . أما في حال كون $\gamma_1 > \gamma$

فإن الجسم يندفع للأعلى . ويلزم في كلتي الحالتين المحافظة على توازن الجسم بذل قوة خارجية ، كأن نعلق الجسم على سلك أو نربطه بقضيب مثلاً . ولكن الجسم يطفو عندما يكون $\gamma = \gamma_1$.

إن كل جسم مغمور في سائل كلياً أو جزئياً يتعرض إذن لقوة ضغط شاقولية للأعلى ، يمكن حسابها بنفس الطريقة المتبعة في حساب قوى الضغط على السطوح المنحنية (٤.٣.١.٣) . فإذا فرضنا جسماً ما ، حجمه V ، مغموراً كلياً في سائل وزنه النوعي γ ، الشكل (١٩.٣ - a) ، فيتضح بسهولة أن مركبتي قوى الضغط الأفقيتين F_{px} ، F_{py} معدومتان لأن مسطحي السطح الخارجي A_x ، A_y على المستويين zx ، zy يتقاطعان كلياً (الشكل ١٥.٣) . ويبقى الجسم خاضعاً لتأثير المركبة الشاقولية لقوى الضغط . فإذا اعتبرنا



الشكل ١٩.٣ : حساب قوة الدفع الهيدروستاتيكية (دافعة أرخميدس) F_a لجسم مغمور كلياً (a) ، أو جزئياً (b) .

عنصرين سطحين dA من سطح الجسم الخارجي واقعين شاقولياً فوق بعضهما وعلى عمق z_1 ، z_2 من السطح السائب للسائل ، فتكون محصلة مركبتي قوى الضغط الشاقوليتين الجزئيتين المؤثرتين عليهما والمتجهة للأعلى :

$$dF_{pz} = (p_0 + \gamma z_2) dA_x - (p_0 + \gamma z_1) dA_x = \gamma (z_2 - z_1) dA_x = \gamma dV.$$

حيث dV حجم الموشور الشاقولي المحدد من العنصرين السطحين . وينتج بالتكامل

$$F_{pz} \equiv F_a \equiv \gamma V , \quad (3.38)$$

حيث V هو حجم السائل المزاح من قبل الجسم والمساوي طبعاً لحجم الجسم نفسه . وبما أن F_a تمثل محصلة مجموعة قوى متوازية شاقولية الأعلى dF_{pz} فانجذابها هي أيضاً شاقولي للأعلى وتمر من S_1 مركز ثقل V .
نسمى F_a قوة الطفو Buoyancy force أو قوة الرفع الهيدروستاتيكية Hydrostatic lift ، وعامة دافعة أرخميدس (Archimedes (287—212 b.C)).
وهي تؤثر أيضاً على الأجسام المغمورة جزئياً ، الشكل (١٩٠٣ - b) ، حيث يمكن البرهان بسهولة أن :

$$F_n = \gamma V' \quad (3.39)$$

عندما يكون V' الحجم الجزئي المزاح من قبل الجسم . وعليه يمكن صياغة الجملة العامة التالية :

قوة الرفع الهيدروستاتيكية (دافعة أرخميدس) التي تتلقاها الأجسام المغمورة كلياً أو جزئياً في السوائل الساكنة تساوي الى وزن السائل المزاح ، وهي تؤثر شاقولياً للأعلى وتمر من مركز ثقل الحجم المزاح .

وعلى هذا فان كل جسم مغمور في السائل يتعرض لتقص ظاهري في وزنه بمقدار دافعة أرخميدس . فاذا كانت وزن الجسم في الهواء F_G فيصبح وزنه الظاهري بعد غمره في السائل وبفرض $\gamma < \gamma_k$:

$$F'_G = F_G - F_n . \quad (3.40)$$

وهذا النقص الظاهري في الوزن يتعلق فقط بحجم الجسم وبالوزن النوعي للسائل.
فإذا قيس F'_G بواسطة ميزان نابضي مثلاً فيالامكان بمساعدة (3.40) تحديد
الوزن النوعي للجسم γ_k حيث يكون :

$$F'_G = F_G - \gamma F_G / \gamma_k \Rightarrow \gamma_k = \gamma \frac{F_G}{F_G - F'_G} \quad (3.41)$$

على هذا الأساس صمم مقياس الهيدرومتر Hydrometer لتحديد الوزن النوعي
لجسم صلب متجانس ، والذي تستخدم منه نماذج مختلفة أقدمها ميزان جولي
Jolly وميزان موه Mohr [36] .

لقد استغل الانسان منذ زمن سحيق دافعة أرخميدس في بناء وسائل النقل
المائية كالعوامات والزوارق ، وذلك قبل ادراكه لطبيعتها . كما استغلها في
المناطيد ، قبل أن يتصور أن بإمكانه أن يطير في طائرة أثقل من وزن الهواء
المزاج . ولا يزال المتطاد يستعمل حتى اليوم من أجل القيام بالعديد من
التجارب المتعلقة بالأرصاد الجوية ، حيث يلاء عادة بغاز وزنه النوعي $\gamma_n > \gamma_k$
الوزن النوعي للهواء . وينتج بسهولة أن وزن حمل البالون :

$$F_G = V (\gamma_n - \gamma_k) \quad (3.42)$$

حيث V هو حجم الهواء المزاج . ومن الغازات المستخدمة لتفخ البالون : غاز
الإضاءة ($\gamma_k = 0,45 - 0,67 \text{ kp/m}^3$) ، الهيدروجين النقي ($\gamma_k = 0,0894 \text{ kp/m}^3$)
والهيليوم ($\gamma_k = 0,1785 \text{ kp/m}^3$) ، وكذلك الهواء المسخن حتى درجة
 370°C تقريباً .

٦.٣.١.٣ شروط التوازن المستقر لهوام صام الطافية

نفرض جسماً شكله على غير معين يطفو أو يسبح على السطح الحر لسائل
وزنه النوعي γ . فإذا كان هذا الجسم في حالة توازن ، فيجب أن تكون

« القوى المؤثرة عليه ، وهي قوة الثقالة F_G الشاقولية للأسفل ، ودافعة أرخميدس F_A الشاقولية للأعلى ، معدومة ، أي أن يتحقق :

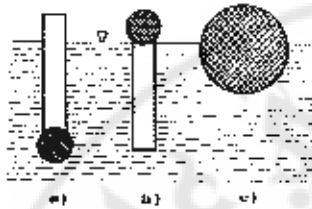
$$F_G = F_A = \gamma V , \quad (3.43)$$

حيث V حجم السائل المزاح . ولكن F_G تؤثر في مركز ثقل الجسم S_G ، بينما F_A تؤثر في مركز ثقل الجسم المزاح S_V ، وهما نقطتان مختلفتان عادة ، يطلق على الخط الواصل بينهما محور الطفو . وعليه فإنه مع تحقيق الشرط (3.43) يمكن أن تشكل القوتان F_G ، F_A مزدوجة تحاول تدوير الجسم . وحتى لا يحدث ذلك يجب أن تكون هاتان القوتان على منحني شاقولي واحد ، وتكون النتيجة :

أن الشرط اللازم والكافي لتوازن جسم طاف مغمو جزئياً أو كلياً يتطلب أن تكون دافعة أرخميدس مساوية لوزن الجسم وأن يكون محور الطفو شاقولياً .

ولكن كل جسم يمكن أن يطفو بوضعات مختلفة وعديدة ، تكون حالة توازنه في معظمها قلقة *Labile* ، بينما لا توجد غالباً سوى وضعية واحدة فقط تحقق حالة التوازن المستقر *Stable* . وهذه الوضعية بالذات ، وشروط تحقيقها لها أهمية كبيرة ، خاصة في بناء السفن . وكما هو معروف في ميكانيك الجسم الصلب فإن حالة التوازن التلقئ تتميز بأن الجسم عندما يتعرض لتأثيرات صغيرة خارجية من قوى أو عزوم تزيحه عن وضعية توازنه الأصلية فإن محصلة القوى والعزوم التي تنشأ نتيجة لذلك تؤدي لزيادة انحراف الجسم بحيث لا يعود إلى وضعية توازنه الأولية . وفي الحالة الخاصة التي لا يؤدي فيها الزياح الجسم لحدوث أي تغيير في القوى والعزوم المؤثرة عليه ، وبالتالي لأي تبدل في وضعية توازنه ، فإن الجسم يكون في حالة توازن مطلق *Neutral* . أما في حالة التوازن المستقر فإن القوى والعزوم ، التي تنشأ نتيجة إزاحة بسيطة للجسم ،

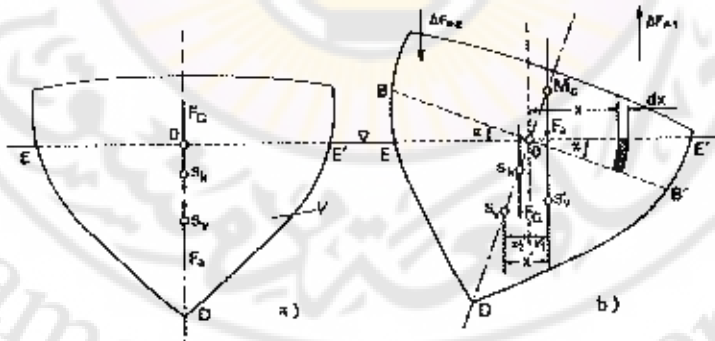
عنده إلى وضعية توازنه الأصلية . وتتميز هذه الحالة بأن الجلة الكتلية المؤلفة ، حالتنا من الجسم والسائل تلك قدرة كاملة أصغرية ، وبالتالي فإن مركز ثقلها يكون أخفض ما يمكن ، (الشكل ٢٠.٣) .



الشكل ٢٠.٣ : أمثلة عن حالة التوازن المستقر (a) ، والمطلق (b) ، وللجسم الطافية .

لتحديد شروط التوازن المستقر نعتبر سماً (سفينة مثلاً) طافياً على السطح الحر سائل ، بحيث يكون الحجم الجزئي المغمور منه V ، الشكل (٢١.٣ - a) . ان وزن الجسم F_g ودافعة أرخيدس F_b متتالان قوتين متضادتين ومتساويتين . يطلق على مستوي تقاطع السطح الباسط للسائل مع الجسم مستوي الطفو ، ويسمى مقطع الجسم الواقع في هذا المستوي سطح الطفو أو سطح خطوط الماء ، الذي يحدده محور الطفو في النقطة O . كما يطلق على الارتفاع الشاقولي للجزء المغمور عمق الغاطس أو اختصاراً الغاطس .

عندما يزداد الغاطس بازاحة الجسم شاقولياً للأسفل فإن حجم السائل المزاح يزداد ، وتزداد بالتالي دافعة أرخيدس ، وهذا يؤدي الى عودة الجسم لوضعية



شكل ٢١.٣ : شرط الطفو ان يكون $F_{cg} = F_{cb}$ ومحور الطفو شاقولي (a) ؛ شرط التوازن لستر للجسم الطافية أن يكون مركز الطفو المستقيم M_c أعلى من مركز ثقل الجسم S_g (b) .

توازنه . ونصل الى نفس النتيجة عندما ينقص الغاطس ، حيث يصبح في هذه الحالة ثقل الجسم اكبر من دافعة أرخميدس . وعليه فان الجسم الطافي يكون في حالة توازن مستقر بالنسبة لازاحة شاقولية متوازية الأعلى أو الأسفل ، لأن محصلة القوى الناشئة نتيجة لذلك تعيده لوضعية توازنه الأصلية .

بالنسبة لازاحة متوازية باتجاه محور الجسم الطولي أو العرضي ، وكذلك بالنسبة لتدوير الجسم حول محور طفوه الشاقولي فان محصلة القوى المؤثرة عليه لا تتغير ، ويبقى محافظاً على وضعية توازنه ؛ وبالتالي فان توازن الجسم في هذه الحالات مطلق . اذن فان المقياس ، الذي يحدد حالة التوازن المستقر لجسم طافي ، هو تدويره حول محوريه الطولي أو العرضي المتعامدين مع محور الطفو .

لنفرض أننا دورنا الجسم الطافي في (الشكل ٢١.٣ - a) حول محوره الطولي المتعامد مع مستوي الشكل زاوية صغيرة α ، الشكل (٢١.٣ - b) . قبل التدوير كان حجم الجزء المغمور BDB' هو V وقوة الطفو المؤثرة في S_v تبلغ حسب (3.38) : $F_v = \gamma V$. وبعد تدوير الجسم فان جزءاً جديداً منه BE'O ، حجمه ΔV_1 ، يغطس في السائل فتؤثر عليه قوة طفو جزئية موجبة (شاقولية الأعلى !) مقدارها $\Delta F_{v1} = \gamma \Delta V_1$. ولكن في نفس الوقت يبرز جزء آخر من الجسم BEO ، حجمه ΔV_2 ، مما يؤدي الى خسارة في قوة الرفع الهيدروستاتيكية ، يمكن اعتبارها كقوة طفو سالبة (شاقولية للأسفل !) مقدارها $\Delta F_{v2} = \gamma \Delta V_2$.

نعتبر عنصراً سطحياً dA من سطح الطفو A ، على بعد x من محور الدوران . إن التغير الكلي الذي يطرأ على حجم السائل المزاح بعد تدوير الجسم ينتج بسهولة :

$$\Delta V \approx \int_{(A)} x \alpha \, dA = \alpha \int_{(A)} x \, dA \quad .$$

فإذا كان محور الدوران يمثل محور ثقالة بالنسبة لسطح الطفو ، كما هو الأمر عملياً ، فإن حجم الجزء من الجسم الذي يغمر بالسائل $B'E'O$ يساوي إلى الحجم الذي يبرز منه BEO ، وبالتالي يكون $\sum \Delta V = 0$ ، ويبقى حجم السائل المزاح قبل وبعد الدوران واحداً . وبالتالي تبقى دافعة أرخيدس ثابتة ، ولكن نقطة تأثيرها تنتقل من S_1 إلى S_2 ، وتشكل في هذه الحالة المبينة في الشكل (٢١:٣ - ب) ، مع قوة الثقالة F_G المارة من مركز ثقل الجسم S_1 مزدوجة تصحيح ، تعيد الجسم إلى وضعية توازنه الأصلية ، ويتحقق بالتسالي شرط الطفو المستقر . أما في الحالة المعاكسة التي نحاول فيها هذه المزدوجة زيادة تدوير الجسم ، فإن وضعية الطفو تكون قلقة ، ويمكن أن تؤدي بالنهاية لأن ينقلب الجسم .

يمدد خط تأثير F_G فيلتقي مع محور الطفو في النقطة M_c ، التي يطلق عليها مركز الطفو المستتجج Metacentre ، ويسمى البعد بينها وبين مركز ثقل الجسم $\overline{M_c S_1} = h_m$ ارتفاع مركز الطفو المستتجج . فإذا لاحظنا أنه في حالة التوازن المستقر ، كما في الشكل (٢١:٣ - ب) تكون M_c أعلى من S_1 ، فإن تحديد شرط الطفو المستقر لجسم ما يتوكل على تحديد موقع M_c من مركز ثقله .

لتكن x' المسافة الأفقية التي انتقلها مركز ثقل حجم السائل المزاح بعد تدوير الجسم زاوية صغيرة α . ولنفرض أنه نتيجة التدوير لم يتغير حجم السائل المزاح فتكون قوة الطفو $F_0 = \gamma V(EDE')$ المارة من S_1' قتل المحصلة للقوة $F_0 = \gamma V(RDB')$ المارة من S_1 وللقوتين $\Delta F_{01} = \gamma V(OB'E')$ و $\Delta F_{02} = \gamma V(OBE)$. وبالتالي ينتج من قانون العزوم بالنسبة لمحور الدوران 0 :

$$\gamma V x'_1 \approx -\gamma V x'_2 + \gamma \int_{(OB'E')} (x \alpha dA) x + \gamma \int_{(OBE)} (x \alpha dA) x .$$

وبما أنه حسب الشكل (٢١:٣ - ب) وبأخذ التكامل ، وبأخذ التكامل

بالنسبة لكامل سطح الطفو Λ ينتج :

$$V x' = \alpha \int_{(\Lambda)} x^2 dA = \alpha J_0 \Rightarrow x' = \frac{\alpha J_0}{V} , \quad (3.43a)$$

حيث J_0 عزم العطالة لسطح الطفو Λ بالنسبة لمحور الدوران O . وباعتبار أن الزاوية α صغيرة ينتج أيضاً (الشكل ٢١.٣ - b) :

$$x' \approx \overline{M_c S_V} , \alpha = (\overline{M_c S_h} + \overline{S_h S_V}) \alpha_m (h_m + e) \alpha ,$$

ونحصل بالتالي من (3.43) بعد الاختصار على α :

$$h_m = \frac{J_0}{V} - e , \quad (3.44)$$

حيث e البعد بين مركز ثقل الجسم ومركز ثقل الحجم المزاح V . وتكون النتيجة :

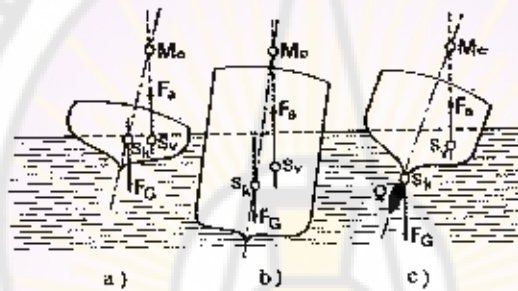
ينتحق شرط التوازن المستقر للأجسام الطافية عندما يكون مركز الطفو المستنتج أعلى من مركز ثقل الجسم : $J_0/V > e \Rightarrow h_m > 0$. ويكون التوازن قلقاً عندما : $J_0/V < e \Rightarrow h_m < 0$.

في العلاقة (3.44) لم تدخل الزاوية α . وبالتالي فأن h_m لا تتعلق بزاوية الدوران عندما تكون صغيرة . وحيث أن h_m تتعلق بعزم العطالة لسطح الطفو وبحجم السائل المزاح وبعد مركز ثقله عن مركز ثقل الجسم فإن تغيير الغاطس لسفينة مثلاً يؤدي إلى تغيير قيمة h_m ، التي تتراوح حسب نوع السفينة من 1,5 m إلى 0,3 m . وبصورة عامة فإن التوازن المستقر للأجسام الطافية يحدده شكل الجسم وتوزيع الكتلة فيه . وكلما كان مركز ثقل الجسم أكثر انخفاضاً للأسفل ، كلما كان الاستقرار أكبر ، وأمكن للجسم تحمّل زوايا دوران أكبر دون أن ينقلب .

في بناء السفن يكون أحياناً الشكل وأحياناً موقع مركز ثقل السفينة العامل الأساسي المحدد لاستقرارها .

في حالة زورق نهرى أو بول مسطح ، الشكل (٢٢.٣ - a) ، فإن كل انحراف صغير عن وضعية توازنه تؤدي ، بسبب شكله ، لحرف نقطة تأثير دافعة أرخيدس لمسافة بعيدة ، بحيث أن مزدوجة التصحيح تعيده إلى حالة توازنه الأولى .

وفي حالة سفينة بحرية تجارية ، الشكل (٢٢.٣ - b) ، فإن استقرار توازنها يتحدد بسبب أن مركز ثقلها يكون منخفضاً جداً بسبب وضع الآلات



الشكل ٢٢.٣ : التوازن المستقر لمنازع مختلفة من السفن .

زورق نهرى مسطح (a) : سفينة بحرية تجارية (b) : زورق سباق (c)

والمحركات والحمولات الثقيلة في قاع السفينة . أما بالنسبة لزوارق السباق ، الشكل (٢٢.٣ - c) ، فإن قاع الزورق يحمل بمركبة معدنية من الرصاص مثلاً ، بحيث أن مركز ثقله يكون دائماً أخفض من مركز الطفو المستقيم ، ولا ينقلب الزورق إلا إذا دار 180° تقريباً .

بالنسبة لمحور دوران عرضي يوجد أيضاً مركز طفو مستقيم يحدد ارتفاعه دائماً كما في حالة الدوران حول محور طولي . كما نجد الإشارة إلى أنه بالإمكان تحديد النقطة M_c تجريبياً ، فإذا أزرعنا على سطح الجسم الطافي ، وهو في وضعية طفو مسفرة ، ثقلًا مقداره V_0 لمسافة عرضية s فإن محور الطفو يميل عن

وضعه الشاقولي الاول زاوية α ، وتنشأ نتيجة ذلك مزدوجة تصحيح عزما :

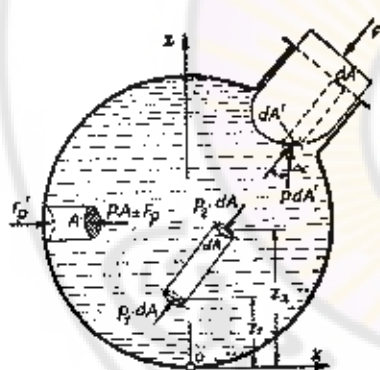
$$F_G h_m \alpha = F_Q s \Rightarrow h_m = F_Q s / F_G \alpha , \quad (3.45)$$

حيث يمكن قياس الزاوية α بواسطة نواس مثلاً ، وتحديد h_m بعرفة ثقل الجسم F_G والوزن F_Q .

٣.٣ توزيع الضغط في سائل سهل الوزن - قانون باسكال

في حالات عملية عديدة يمكن أن يتعرض السائل لضغوط عالية ، بحيث يمكن اعمال قوى الثقالة بالمقارنة مع قوى الضغط . عندها يمكن دراسة توازن السائل على اساس أنه ذو كتلة « بدون » وزن .

نعتبر وعاء مملوء تماماً بسائل ساكن ثابت الحجم ، وبحيزاً بفتحة جانبية يتحرك فيها مكبس يغلقها باحكام كلي ، بحيث يمكن بواسطته توليد ضغوط



عالية ، الشكل (٣.٣) . نقتطع من داخل السائل اسطوانة صغيرة ، سطح كل من قاعدتيها dA ، ويقع مركزهما على ارتفاع z_1 ، z_2 عن المحور « . فاذا فرضنا أن الضغط المنتظم المؤثر على قاعدتي الاسطوانة p_1 ، p_2 ، وطبقنا شرط توازن القوى باتجاه محورها ، مع ملاحظة أن قوى الثقالة مهمة ومساقط قوى الضغط المؤثرة على قميص الاسطوانة معدومة فنجد بسهولة :

$$p_1 dA = p_2 dA \Rightarrow p_1 = p_2 = p . \quad (3.46)$$

الشكل ٣.٣ : توازن سائل مضغوط مهمل الثقالة . الضغط ثابت في كل نقطة (قانون باسكال) .

وحيث أن اختيار وضعية الاسطوانة كان اعتباطياً ، فبالامكان تعميم النتيجة السابقة :

عندما لا تؤثر على سائل متوازن قوة الثقالة أو أية قوة حجمية أخرى فان الضغط في كافة نقاط السائل وفي كل الاتجاهات يتكون له نفس القيمة الثابتة .

تعرف هذه النتيجة باسم قانون باسكال (1623 - 1662) B. Pascal ، وهو ينطبق أيضاً على السوائل التي تملأ أوعية وأنبيب ضيقة ومتعرجة .

نفرض أن F هي القوة المؤثرة على المكبس ، اللازمة لاجداث الضغط p داخل السائل . فعسب قانون باسكال يؤثر هذا الضغط أيضاً على قاعدة المكبس المواجهة للسائل ، التي نفرض شكلها بدون تحديد . فإذا كان dA' جزيئاً سطحياً من هذه القاعدة ، فتكون قوة الضغط الجزئية المؤثرة عليه $p dA' \cos \alpha$ ، حيث dA مسقط dA' على المستوي العمودي على محور المكبس . وتنتج قوة الضغط المحورية على المكبس :

$$F_p = \int p dA = p A \quad (3.47)$$

التي يجب ، في حال اعمال مقاومة احتكاك المكبس ، أن تتوازن مع القوة الخارجية F . هذه القوة لاتتعلق اذن بشكل قاعدة المكبس المعرضة للضغط وإنما فقط بمقطع المكبس A .

هذه النتيجة تنطبق أيضاً على جدران الوعاء . فإذا اقتطعنا من السائل المجاور مباشرة للجدار اسطوانة تنتهي على الجدار ومحورها متعامد معه ، ومقطع قاعدتها A ، (الشكل ٣-٢٣) ، ودرسنا توازنها ، فنجد أنها واقعة تحت تأثير قوتين متضادتين ومتعاكستين : الأولى قوة الضغط $F_p = pA$ التي يؤثر بها السائل على المقطع A ، والثانية مركبة القوى F'_p ، التي يؤثر بها الجزء المتغير

من الجدار في اتجاه محور الاسطوانة . بينما يتلقى الجدار قوة تساوي وتعاكس F_p . وتلاحظ بسهولة أن التواءات التي يمكن أن توجد على الجدار لا تؤثر على هذه النتيجة .

إن قانون باسكال يفسر لنا إمكانية السوائل على تخزين قدرة الضغط كطاقة كاملة ، يمكن تحريرها عند اللزوم وبالتالي نقل قوى الضغط . فإذا تم اختيار سطوح المقاطع بشكل مناسب فمن الممكن عن طريق التأثير بقوى صغيرة الحصول على قوى كبيرة . ونستغل هذه الامكانية في مجالات هندسية تطبيقية عديدة سنكتفي بالتعرض لمثلين منها .

١.٢.٣ المكبس الهيدروليكي

يعتبر المكبس الهيدروليكي Hydraulic press أو الرافعة الهيدروليكية من الآلات القديمة المستخدمة في عمليات الكبس أو العصر (معاصر الزيتون) أو رفع الأحمال ، وذلك بتطبيق قوة صغيرة نسبياً والحصول على قوة ضغط كبيرة . الشكل (٢٤.٣) يبين مبدأ عمل المكبس الهيدروليكي . وهو يتألف بالأساس من مكبس K_1 صغير المقطع قطره d_1 ، ويغلق بإحكام الاسطوانة Z_1 ، ومن مكبس K_2 كبير المقطع قطره d_2 ويغلق بإحكام الاسطوانة Z_2 . عندما تؤثر بقوة F على الزراع H المتصل مع K_1 في النقطة O_1 والمتفصل في O بحيث يرتفع K_1 للأعلى ، ينفتح صمام المص V_1 ويتسرب السائل من الخزان B الى الاسطوانة Z_1 ، ويغلق في نفس الوقت صمام الدفع V_2 . وعندما نضغط K_1 للأسفل يغلق V_1 وينفتح V_2 ، ويتسرب السائل من Z_1 الى Z_2 ويرتفع K_2 للأعلى وهكذا . وحيث أن الضغوط المتولدة في Z_1 ، Z_2 عالية فإنه حسب قانون باسكال يكون الضغط فيها ذا قيمة ثابتة p .

نفرض أن القوة المؤثرة على الذراع H هي K ، وأن المكبس K_2 عليه

أن يرفع حملاً G وزنه F_G ، فإذا طبقنا قانون العزم حول O تنتج القوة المؤثرة على K_1 في النقطة O_1 ، الشكل (٢٤.٣) :

$$F_1 = F l / a$$

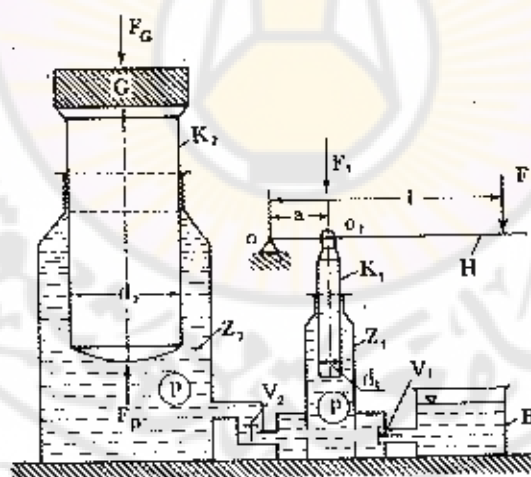
وينتج الضغط المؤثرة في Z_1 :

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F l}{a \pi d_1^2 / 4}$$

وتكون قوة الضغط المؤثرة على K_2 اللازمة لرفع التقل G :

$$F_p = p A_2 = \frac{F l}{a} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \geq F_G \quad (3.48)$$

فإذا أخذنا نسبة الأقطار $d_1/d_2 = 1/4$ ، ونسبة الأطوال $a/l = 1/4$ ينتج في الحالة الحدية عندما $F_p = F_G$ أن $F/F_G = 1/64$ ، وبالتالي فإنه يلزم لرفع ثقل وزنه 64 kp التأثير على H بقوة تساوي 1 kp فقط .
عندما نعمل مقاومة الاحتكاك لحركة المكبين $K_{1,2}$ وكذلك انضغاطية



الشكل ٢٤.٢ : توضيح نموذجي لمبدأ عمل المكبس الهيدروليكي

السائل ، وبافتراض أنه لا يحدث أي تسرب للسائل خارج الأسطوانتين

وثوصيلاتها فيكون العمل الذي يقوم به K_1 مساوياً تماماً للعمل الذي يقوم به K_2 : $W = F_2 h_2 = F_1 h_1$ ، حيث $h_{1,2}$ شوط المكبس $K_{1,2}$. ويبلغ المردود في هذه الحالة الواحد . أما في الواقع فإن العمل المبذول أكبر من العمل المنتج ، وبالتالي يكون المردود دائماً أصغر من الواحد ، لأن مقاومة الاحتكاك موجودة طبعاً ، وكذلك لا يمكن منع تسرب كمية من السائل ، مهما كانت صغيرة ، إلى الخارج .

٢.٢.٣ صمام التحكم الهيدروليكي

يستفاد من إمكانية السوائل على تخزين قدرة الضغط الصرفة ونقلها وتوجيهها بواسطة عمود سائل ، وبطريقة بسيطة نسبياً ، في حمل نقل الحركة أو التعاشيق السائبة Fluid gear ، التي تكون إما هيدروليكية أو بنيموماتيكية ، حسب ما يكون السائل المستعمل عادة زيتاً هيدروليكياً Hydraulic oil أو مراء . وتتألف الدارة الهيدروليكية لكل تعبئة من عناصر أساسية هي : مولد التيار السائلي (المضخة) ، مستهلك التيار (اسطوانة أو محرك هيدروليكي) الذي يحول قدرة الضغط إلى قدرة ميكانيكية ، بالإضافة إلى أنواع مختلفة من الصمامات وظيفتها إما تحديد الضغط (صمام ضغط Pressure valve) أو تحديد اتجاه الجريان (صمام عدم رجوع Stop valve) ، أو تحديد أو خفض غزارة التيار السائلي (صمام الغزارة Flow valve) أو لتفريع أو جمع التيار (صمام تفريع) ، بالإضافة لمجمع أو خزان السائل ومجموعة من الحراطيم والأنابيب .

وقد ترسخ في الآونة الأخيرة الاتجاه للتوحيد القياسي Standardiation للعناصر الأساسية للدارة الهيدروليكية ، أمثلة عناصر الدارة الكهربائية ، مما يسمح بتصنيع هذه العناصر بطريقة اقتصادية ، ومن ثم جمعها وتركيبها في مجموعات هيدروليكية مختلفة لنقل الحركة مما يخدم متطلبات المكننة Mechanisation

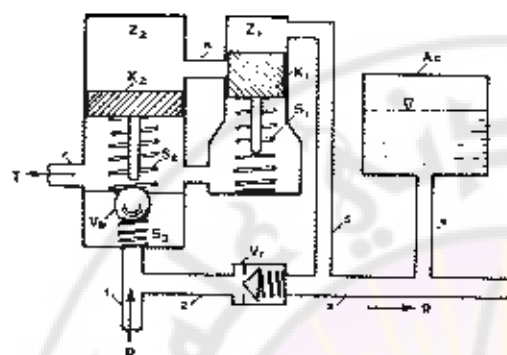
والأتمتة والتحكم عن بعد Remote-control [6] [30] [34] [76] [77] [78] .

وتبرز أهمية التعاشق الهيدروليكية بالنسبة لبناء الآلات والمنشآت المختلفة من خلال الميزات التالية : إمكانية توليد حركات مستقيمة بطريقة مباشرة وبسيطة بواسطة الاسطوانات الهيدروليكية وحتى ضغوط عالية بحدود 320 at ؛ إمكانية التوجيه والتحكم في مجال واسع بالقوى والسرعات بطريقة بسيطة وغير مدرجة Stepless ؛ بساطة تغيير طول الشوط للحركات الترددية ؛ حصر استنائة كبيرة في كتلة صغيرة نسبياً ؛ النقل البسيط للقدرة من منبعها الى مكان الحركة بواسطة أنابيب وخراطيم ؛ بساطة تفريع وجمع التيار السائلي المدارة بواسطة أجهزة توجيه وتحكم آلية - يدوية أو كهربائية أو كهروهيدروليكية من أجل وصل هذه الأجهزة ؛ عمر طويل نتيجة التزييت المثالي للأجزاء المتحركة .

هذه الميزات جعلت حمل نقل الحركة والتحكم الهيدروليكية تحمل محل الحمل الميكانيكية المعروفة ، خاصة لامكانية ربطها بعناصر كهربائية وإلكترونية . وهي تدخل كالأجزاء أساسية في آلات النقل والرفع والتشغيل ، ووسائط النقل كالطائرات والسيارات والسفن ، وتلعب دوراً بارزاً في حقل هام من تطبيقات ميكانيك السوائل معروف باسم التحكم والتوجيه الآلي الهيدروليكي والنيوماتيكي Hydraulic and pneumatic control (راجع مثلاً [6] [30]) .

وكمثال سنشرح مبدأ عمل صمام عدم رجوع أوتوماتيكي Automatic relief valve ، الشكل (٢٥.٣) . فعندما تكون كمية السائل التي تضغطها المضخة p عبر أنبوب الدفع 1 إلى المستهلك R عبر الأنبوب 2 فصمام عدم الرجوع V_r فالضاة عن الاستهلاك فإن السائل يتجمع في المجموع A_r حتى يصبح ضغط السائل يساوي قيمة أعظمية p_{max} ، الذي ينتقل عبر الأنبوب 5 إلى الأسطوانة Z_1 ، حيث يتحرك المكبس K_1 إلى الأسفل ضاغطاً النابض S_1 . وهكذا يعبر السائل من Z_1 إلى Z_2 عبر الأنبوب 6 ، مما يؤدي لتحريك المكبس K_2 الأسفل أيضاً ضاغطاً النابض S_2 حتى يرتطم ذراعه بالصمام الكروي

V_b ، الذي يتحرك للأسفل خاضعاً للتأنيض S_2 ، وفاتحاً بذلك الطريق المضخة لتضخ السائل إلى الخزان T عبر الأنبوب 7 . وتستمر عملية الضخ حتى يصبح



الشكل ٣٥.٣ : مبدأ عمل
صمام عدم رجوع أوتوماتيكي
حسب [21]

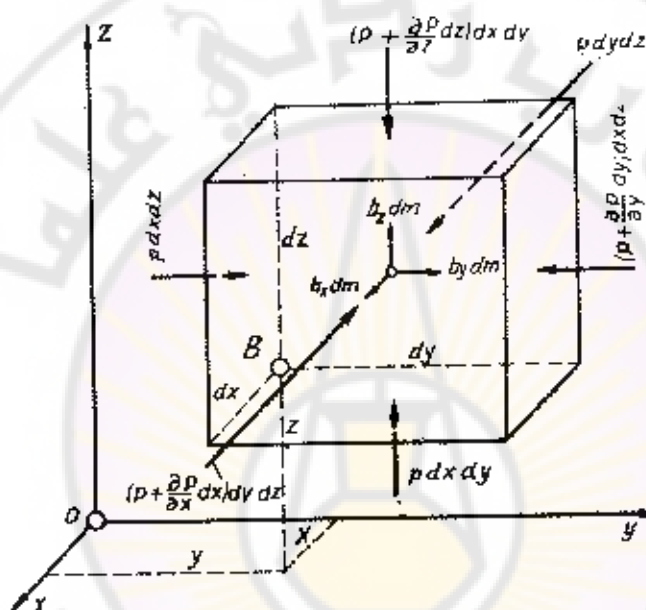
ضغط السائل ذا قيمة أصغر من p_{min} ، يتمكن عنده التأنيض S_1 من إعادة المكبس K_1 إلى مكانه ، وبالتالي يغلق الأنبوب ، ويتسرب السائل الموجود في Z_2 إلى الخزان ويعود المكبس K_2 إلى مكانه ويغلق الصمام الكروي ، وتبدأ المضخة بضخ السائل للاستهلاك . فإذا كانت قيم p_{min} ، p_{max} معلومة ، وكذلك مقاييس K_1 ، K_2 ، فبالإمكان تحديد قسوة التأنيض S_1 حتى S_2 . والجدير بالذكر أن محطات الضخ الهيدروليكية تجهز غالباً بصمامات تحكم لتحديد الغزارة أو الضغط تعمل أوتوماتيكياً ، حيث توصل بدارة تحكم هيدروليكية أو بنيوماتكية . فإذا سجلت مقاييس الغزارة أو الضغط ، التي تقيس باستمرار ، قيماً مختلفة عن القيم المطلوبة فإن صمامات التحكم تتلقى إشارة لتقوم بإعادة تثبيت القيم المطلوبة .

٣.٣ توزيع الضغط في سائل ساكن تحت تأثير قوى عام -

المعادلة الهيدروستاتيكية العامة

نقطع من داخل سائل ساكن ثابت الحجم ($\rho = \text{const}$) جزيئاً حجمياً متناهياً الصغير بشكل متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه dx ، dy ، dz .

وانتكن النقطة B إحدى زوايا محددة بالإحداثيات x, y, z ، الشكل (٢٦.٣) . وبما أن هذا الجزيء في حالة توازن فيجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليه معدومة ، وبالتالي يجب أن نحقق قوى الضغط dF_p التي يمكن اعتبارها موزعة بانتظام على السطوح الجانبية الصغيرة جداً لتوازي المستطيلات ،



الشكل ٢٦.٣ : تطبيق شروط التوازن على متوازي مستطيلات متناهي الصغر مقطوع من سائل يؤثر عليه حقل قوى عام - استخراج المعادلة الهيدروستاتيكية العامة

مع القوى الحجمية dF_v المؤثرة على كامل كتلة الجزيء الحجمي $d\tau = dx dy dz$ ، شروط التوازن الستاتيكية المعروفة .

إن الضغط المؤثر في النقطة $B(x, y, z)$ حسب (2.23) له قيمة ثابتة في كافة الاتجاهات . ولكن الضغط كتابع مكافئ $p = f(x, y, z)$ يغير قيمته من نقطة الى أخرى . وينتج هذا التغير بسهولة إذا نشرنا التابع بشكل سلسلة

تايلور Taylor فيكون حسب [42] الضغط في النقطة $B'(x + dx, y, z)$ مثلًا :

$$p(x + dx, y, z) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{1!} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{(dx)^2}{2!} + \dots$$

$$\approx p(x, y, z) + \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} dx, \quad (3.49)$$

وذلك بعد إهمال كافة حدود المراقب العليا . وعلى هذا الأساس يمكن حساب قوى الضغط المؤثرة على وجوه متوازي المستطيلات كقوى إفرادية مساوية لجداها الضغط في العنصر السطحي .

نفرض أن القوة الحجمية المؤثرة على الجزيء الحجمي ناتجة عن حقل قوى عام (قوة عطالة مثلًا) ، كأن نتصور أن كتلة الجزيء dm تخضع لتسارع b اتجاهه في الفراغ بدون تحديد . فيكون حسب (2.16) : $dF_r = dm \cdot b$. ونتنتج بالتالي مركبات القوة الحجمية باتجاه المحاور الديكارتية الثلاثة : $dF_{x,y,z} = dm \cdot b_{x,y,z}$ حيث تمثل التسارعات b_x, b_y, b_z مركبات القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة باتجاه x, y, z . ويجدر الانتباه إلى أنه لا يجوز هنا إهمال القوى الكتلية بالمقارنة مع قوى الضغط ، كما فعلنا في الفقرة (٢.٣.٢) ، لأن القوى الكتلية هنا هي من مرتبة القيمة التقريبية لتغير قوى الضغط عند الانتقال من أحد وجوه متوازي المستطيلات إلى الوجه المقابل .

نطبق الآن شروط توازن القوى باتجاه المحور x فينتج (الشكل ٢٦.٣) :

$$\sum dF_x = p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz + p \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot b_x = 0.$$

وبالاختصار على $dy \cdot dz$ يكون :

$$b_x \cdot dx = \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3.50)$$

وبطريقة مشابهة تماماً نحصل بالنسبة للمحورين y, z على العلاقاتين :

$$\rho b_y dy = \frac{\partial p}{\partial y} dy ; \quad \rho b_z dz = \frac{\partial p}{\partial z} dz . \quad (3.51)$$

وبجمع هذه المعادلات الثلاثة يصبح :

$$\rho (b_x dx + b_y dy + b_z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \quad (3.52)$$

حيث يمثل dp التفاضل التام للضغط .

نختصر الآن من طرفي المعادلات الثلاثة (3.50) (3.51) فينتج :

$$\rho b_x = \partial p / \partial x ; \quad \rho b_y = \partial p / \partial y ; \quad \rho b_z = \partial p / \partial z . \quad (3.53)$$

فإذا اشتقينا المعادلة الأولى مثلاً جزئياً بالنسبة لـ y والثانية بالنسبة لـ x ولاحظنا أن $\partial^2 p / \partial x \partial y = \partial^2 p / \partial y \partial x$ فنجد بسهولة أن المشتقات الجزئية لمركبات القوة الحجمية تحقق العلاقات التالية :

$$\partial b_x / \partial y = \partial b_y / \partial x ; \quad \partial b_x / \partial z = \partial b_z / \partial x ; \quad \partial b_y / \partial z = \partial b_z / \partial y . \quad (3.54)$$

فإذا فرضنا وجود تابع مكافئ $\Phi_s = f(x, y, z)$ يعبر عن شدة حقل القوى العام ويحقق العلاقات التالية :

$$b_x = - \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} ; \quad b_y = - \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} ; \quad b_z = - \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} . \quad (3.55)$$

فاننا نجد بسهولة بسبب كون

$$\frac{\partial b_x}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial y \partial x} = \frac{\partial b_y}{\partial x}$$

أن التابع Φ_s يحقق العلاقات (3.51) ، التي نتجت من شروط توازن الجزئيات الحجمية ، والتي تمثل كما هو معروف في الرياضيات (مثلاً [42]) الشروط اللازمة والكافية لكي يكون Φ_s يمثل تابع ككون Potential للحقل الشعاعي $\vec{F}$. وعليه يمكن صياغة النتيجة العامة التالية :

يتحقق توازن سائل مثالي في حقل قوى عام فقط في الحالة التي يكون فيها لهذا الحقل كمون ، وتكون عندها مركبة القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة في اتجاه ما تساوي الى القيمة السالبة للمشتق الجزئي لتابع الكمون Φ_s في ذلك الاتجاه .

هذه الجملة تعرف أيضاً باسم شروط أويلر للتوازن [9] . ويطلق على أمثال هذه القوى الحجمية القوى المخزنة للقدرة ، وكلمة « كمون » تشير الى القدرة السكاملة التي يخزنها حقل القوى الخارجية وبالتالي الى جاهزيته على أحداث تأثير . وتدل اشارة ناقص في (3.55) على أن القدرة السكاملة تصغر في اتجاه القوة الحجمية .

باستخدام (3.55) تأخذ العلاقة (3.52) الشكل التالي :

$$dp = -\rho \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} dz \right) = -\rho d\Phi_s \quad (3.56)$$

حيث $d\Phi_s$ يمثل التفاضل التام لتابع الكمون . ونحصل بكاملة الطرفين على :

$$p = -\rho \Phi_s + \text{const} \quad , \quad (3.57)$$

وهذه هي المعادلة الهيدروستاتيكية العامة ، التي تسمح بحساب توزيع الضغط في السائل ، مع الانتباه أنه يجب أن تكون التابع $p(x, y, z)$ والمتحول $\Phi_s(x, y, z)$ قيم متوافقة في كل نقطة . أما ثابت التكامل فيحدد من الشروط الحدية . فإذا فرضنا أن Φ_{s_0} ، p_0 يمثلان قيمتين معلومتين في نقطة ما B_0 مثلاً فيكون حسب (3.57) :

$$p_0 = -\rho \Phi_{s_0} + \text{const} \Rightarrow p = p_0 - \rho (\Phi_s - \Phi_{s_0}) \quad (3.58)$$

من هذه العلاقة تنتج بسهولة المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية . فإذا انتبهنا أن

تابع كمون حقل الجاذبية الأرضية معطى بالعلاقة :

$$\Phi_{sg} = gz \Rightarrow b_x = b_y = 0, b_z = -g, \quad (3.59)$$

وإذا اعتبرنا $\Phi_{s_0} = gH$ ، $p_0 \equiv p_n$ ينتج من (3.58) .

$$p = p_n + \rho g (H - z) \quad (3.60)$$

بالتطابق مع العلاقة (3.3) . وعلى هذا الأساس فإنه يمكن فيما يلي تعميم النتائج التي توصلنا إليها في الفقرة (١.١.٣) .

إن سطوح الضغط المتساوي ، التي تمثلها في حقل الجاذبية الأرضية مستويات أفقية ، تأخذ في حقل القوى العام شكل سطوح قواغية مفتولة عادة تعطى بالعلاقة العامة :

$$F(x, y, z) = \text{const} .$$

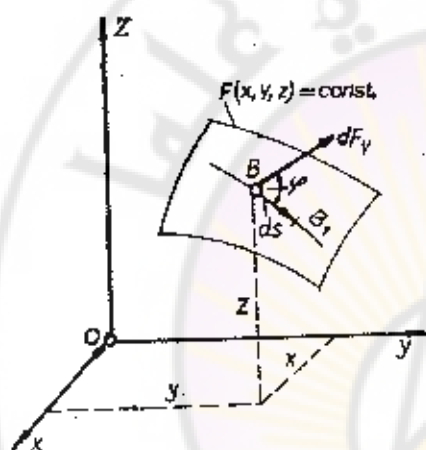
وحيث أنه من أجل $p = \text{const}$ ينتج من (3.58) أن $\Phi_s = \text{const}$ ، فإن سطوح الضغط الثابت هي في نفس الوقت سطوح الكمون الثابت ، وتصل بالتالي بين كافة النقاط التي تكون فيها القدرة الكامنة لحقل القوى ذات قيمة ثابتة . وواضح أنه في نقطة واحدة لا يمكن أن يمر سوى سطح واحد منها فقط . نعتبر في مجال الاحداثيات z, y, x سطحاً للضغط الثابت $F(x, y, z) = \text{const}$ يمر من النقطة B ، الشكل (٢٧.٣) . نعتبر في هذا السطح عنصراً خطياً $\overline{BB_1} = da$ مركباته dz, dy, dx ، ونفرض أن b_z, b_y, b_x مركبات القوة الحجمية dF_v بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة في B فيكون الجداء الشعاعي الداخلي :

$$dF_v \cdot da = b_x dx + b_y dy + b_z dz \quad (3.61)$$

وحيث أن الضغط على السطح F لا يتغير فيكون $dp = 0$ ، وبالتالي ينتج من (3.52) و (3.61) :

$$b_x dx + b_y dy + b_z dz = 0 = F_v \cdot ds \quad (3.62)$$

وهذا يعني أن شعاع القوة الحجمية متعامد مع شعاع العنصر الحثي والزوايا بينهما $\varphi = \frac{\pi}{2}$. فإذا اعتمدنا الكتابة الشعاعية ، وجعنا أطراف المعادلات (3.53) جمعاً شعاعياً ينتج باعتبار i, j, k أشعة الواحدة باتجاه المحاور x, y, z :



الشكل ٣٧.٣ : القوة الحجمية F_v
المؤثرة في النقطة B متعامد مع سطح
الضغط الثابت المار منها

$$\rho (i b_x + j b_y + k b_z) = i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\rho F_v = \text{grad } p \quad (3.63)$$

حيث $\text{grad } p$ يمثل شعاع تدرج الضغط ، الذي تنتج قيمته المطلقة :

$$|\text{grad } p| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2} \quad (3.64)$$

ويكون متعامداً مع سطوح الكمون الثابت للحقل السلمي التابع له ، ويشير باتجاه الناضم نحو الجهة التي يتزايد فيها تابع الحقل الذي يمثل هنا حقل الضغط [42] . فإذا اعتبرنا $\rho F_v = F_v$ شعاع القوة الحجمية بالنسبة

لواحدة الحجم ، أو القوة الحجمية النوعية ، فإن العلاقة (3.63) تصبح مع الانزياح للعلاقة (3.55) :

$$\mathbf{F}_1 = \text{grad } p = - \rho \text{ grad } \Phi_1 \quad (3.65)$$

ونصل بالتالي للنتيجة العامة التالية :

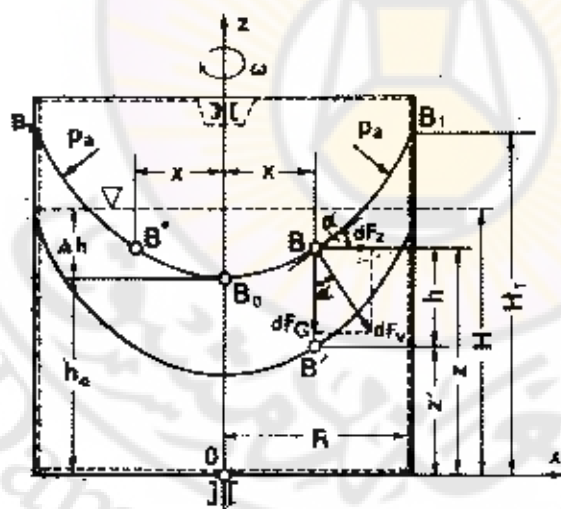
بالرغم من أن القوة الكتلية كتابع مكاني $\mathbf{F}_1 = f(x, y, z)$ يمكن أن تتغير من نقطة لأخرى فإن الضغط الستاتيكي لا يتغير إلا في اتجاه تأثير هذه القوة ، أي في اتجاه تأثير خطوط القوة Force lines ، ويكون بالتالي اتجاه شعاع تدرج الضغط مطابقاً لاتجاه شعاع القوة الكتلية وفيه المطلق تساوي قيمتها بالنسبة لواحدة الحجم ، ونختار خطوط القوة سطوح الكمون الثابت ، المكافئة لسطوح الضغط الثابت ، في كل نقطة بشكل عمودي .

كتطبيقات على المعادلة الهيدروستاتيكية العامة سنختار مثالين هامين عن حالة ما يسمى بالتوازن أو السكون النسبي Relative equilibrium . أولهما توازن سائل يدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور شاقولي أو أفقي (التوازن في حقل القوة النابذة) وثانيهما توازن سائل خاضع لتأثير تسارع خطي منتظم . وفي كلتي الحالتين تكون حدود الجملة الفيزيائية ، الحقيقية عادة ، في حالة حركة ولكن السائل يكون في حالة سكون بالنسبة لهذه الحدود ، وبالتالي لا تظهر أية قوى مماسية نتيجة انعدام تدرج السرعة بين طبقات السائل ، الذي يتحرك ككل وكأنه جسم صلب .

١.٣.٣ توازن سائل ثقيل في حقل القوة النابذة

في اناء اسطواني مفتوح في الاعلى يوجد سائل متجانس ($\rho = \text{const}$) حتى ارتفاع H ، الشكل (٢٨.٣) . نجعل السائل يدور حول المحور الشاقولي z ، وذلك اما بتدوير ريش شاقولية داخل الاناء الثابت (منطقة في الشكل !) ،

إن السطح السائب للسائل ، الذي يمثل سطحاً للضغط الثابت $p_a = \text{const}$ ، يكون قبل الدوران أفقياً ، ويأخذ بعد التدوير شكلاً مقعوراً ، بحيث أن السائل ينخفض في منتصف الإناء ويرتفع على جوانبه . فیهنا إذن أن نحدد شكل سطوح الضغط المتساوي ، ونوزع الضغط بالاتجاه الشاقولي (المحور z) .



الشكل ٢٨.٣ : توازن سائل ثقيل يدور بشكل منتظم حول محور شاقولي في أثناء استطواني مفتوح في الأعلى

نعتبر نقطة مادية $B(x, z)$ من السطح السائب للسائل . إن القوة الحجمية dF_v بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة في هذه النقطة مؤلفة من مركبتين : قوة الثقالة dF_z واتجاهها شاقولي للأسفل ، والقوة النابذة dF_z واتجاهها الى خارج السائل ، ويكون إذن

$$dF_v = dF_g + dF_z = g \cdot dz + \omega^2 x \cdot dx \quad (3.66)$$

ويكون تابع كمون حقل القوى مؤلفاً أيضاً من مركبتين : كمون حقل الثقالة وكمون حقل القوة النابذة . وينتج مع مراعاة (3.55) والانتباه أن كل كمون يتعلق بتحول واحد فقط :

$$d\Phi_v = d\Phi_g + d\Phi_z = g \cdot dz - \omega^2 x \cdot dx \quad (3.67)$$

إن القوة الكتلية dF_v ، التي تشكل مع الشاقول الزاوية α ، تتعامد مع السطح السائب للسائل ، كسطح للكمون الثابت ، في النقطة B ، وبالتالي فإن المماس على هذا السطح في B يصنع مع الأفق زاوية α أيضاً . وينطبق هذا على كل نقطة B تبعد مقدار x عن المحور z . ومنه نستنتج أن السطح الحر للسائل (وكافة سطوح الضغط الثابت الأخرى) يمثل سطحاً دورانياً محوره z . ويكفي لتحديد شكله دراسة المقطع الزوالي (الانتصافي) Meridional الواقع في المستوي z, x .

من المعادلة الهيدروستاتيكية العامة التفاضلية (3.56) وبإدخال العلاقة (3.67) ينتج بالنسبة لتفاضل الضغط التام :

$$dp = -\rho \cdot d\Phi_v = -\rho (g \cdot dz - \omega^2 x \cdot dx) \quad (3.68)$$

ومنه نجد بالنسبة لسطح السائل الحر :

$$p_0 = \text{const} \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow g \cdot dz - \omega^2 x \cdot dx = 0 \quad (3.69)$$

بكاملة هذه العلاقة نجد معادلة المقطع الزوالي للسطح الحر :

$$g z - \frac{\omega^2 x^2}{2} = \text{const} \Rightarrow z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + \text{const} . \quad (3.70)$$

لتحديد ثابت التكامل نفرض أن ارتفاع أخفض نقطة من السطح الحر للسائل R_0 عن قعر الاناء $z = h_0$ ، فيكون بسبب $x = 0$:

$$h_0 = \text{const} ,$$

وبالتالي تصبح (3.70) :

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + h_0 , \quad (3.71)$$

وهي معادلة قطع مكافئ محور تناظره الشاقولي z ، وذروته تقع في B_0 .
وعليه تكون :

سطوح الضغط الثابت لسائل ثقيل يدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور شاقولي تمثلها مجزئات قطع مكافئة دورانية Paraboloid .

في العلاقة (3.71) يبقى الارتفاع h_0 مجهولاً ، ويتحدد من شرط ثبات حجم السائل قبل وبعد الدوران ، وبالتالي يكون باستخدام رموز الشكل (٢٨.٣) وبافتراض H نصف قطر الاناء ، $B_1(R, H_1)$ أعلى نقطة من السطح السائب للسائل :

$$\pi R^2 H = \pi R^2 H_1 - \frac{1}{2} \pi R^2 (H_1 - h_0) \Rightarrow H_1 = 2H - h_0 . \quad (3.72)$$

من جهة أخرى نحصل على H_1 بتطبيق العلاقة (3.71) على النقطة B_1 :

$$H_1 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + h_0 , \quad (3.73)$$

ومنه نجد :

$$h_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g} . \quad (3.74)$$

بذلك تأخذ (3.71) الصيغة التالية :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} \left(x^2 - \frac{R^2}{2} \right) + H \quad (3.71a)$$

ويكون السطح السائب للسائل قد انخفض نتيجة الدوران بقدر :

$$\Delta h = H - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (3.75)$$

من هذه العلاقة يمكن حساب السرعة الزاوية اللازمة لحدوث انخفاض معين Δh لسطح السائل السائب حيث ينتج :

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{g \Delta h} \quad (3.76)$$

يستفاد من هذه النتيجة عملياً في قياس السرعة الزاوية للمحاور السريعة الدوران ، حيث يوصل المحور بواسطة تعشيق أو جملة لنقل الحركة مع إناء اسطوانتي فيه سائل ، ويقاس انخفاض سوية السائل Δh فتحدد ω .

إن توزيع الضغط في السائل ينتج من تكامل العلاقة (3.68) حيث نجد بسهولة :

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g z \right) + \text{const} \quad (3.77)$$

ويكون الضغط في النقطة $B(x, z)$ على السطح الحر للسائل :

$$p_B = p_a = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g z \right) + \text{const} \quad .$$

بينما يكون الضغط في النقطة $B'(x, z')$ الواقعة على نفس الشاقول المار من $B(x, z)$ وعلى عمق h منها :

$$p_{B'} = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g z' \right) + \text{const} \quad .$$

وبإدخال قيمة الثابت const من العلاقة السابقة نجد قيمة الضغط الزائد في B' :

$$p_{B'} = p_a + \rho g (z - z') = p_a + \gamma h \Rightarrow p_{B'} - p_a = \gamma h \quad (3.78)$$

هذه النتيجة تنطبق طبعاً على كافة النقاط الواقعة على نفس العمق الشاقولي من السطح الحر للسائل .

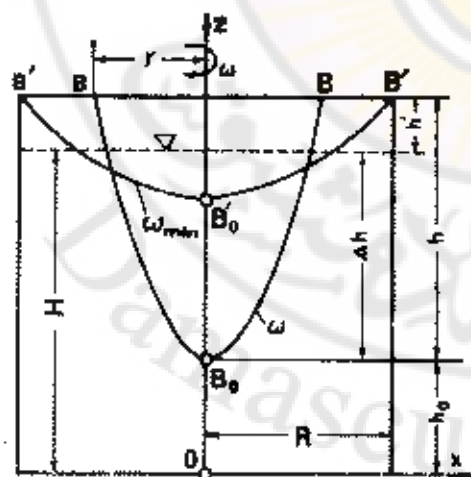
وحيث أنه في حالة السائل الساكن ($\omega = 0$) لا يتغير الضغط في الاتجاه الأفقي $p(x) = \text{const}$ ، فإن العلاقة (3.77) تبين أنه نتيجة للدوران ($\omega \neq 0$) ينشأ تزايد في الضغط:

$$p(x) = \frac{\rho}{2} \omega^2 x^2 \equiv \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 \quad (3.79)$$

وعليه نصل الى النتيجة التالية :

في سائل ثقيل يدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور ساقولي فان توزيع الضغط في الاتجاه الساقولي يخضع للمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية ، أي يتناسب خطياً مع العمق ، وينشأ عن الدوران تزايد في الضغط في الاتجاه الأفقي متناسب ومربع نصف القطر عن محور الدوران .

إن النتائج السابقة تنطبق من حيث المبدأ على كل مسائل يدور في وعاء شكله على غير تعيين ، وكذلك على الأوعية المستطرفة ، شريطة أن تدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور شافولي . كما تنطبق أيضاً على الحالة التي يكون فيها الاناء مغلقاً ، الشكل (٢٩.٣) ، حيث يمكن عندها تدوير الاناء بسرعات



الشكل ٣ . ٢٩ : توازن سائل
تقيل يدور بشكل منتظم حول
محور شاقولي في اثناء اسطوانتي
مغلق في الاعلى

زاوية أكبر دون أن يطغى السائل خارج الاناء ، كما هو الأمر في حالة الاناء المفتوح . وبالتالي يمكن استخدام مثل هذه الأوعية لقياس السرعات الزاوية الكبيرة جداً للمعاور .

فإذا استخدمنا رموز الشكل (٢٩.٣) فينتج من العلاقة (3.71) من أجل النقطة B :

$$z = (h + h_0) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0 \Rightarrow \omega^2 r^2 = 2gh$$

كما ينتج من تساوي حجم السائل قبل وبعد الدوران :

$$\pi R^2 h' = \frac{1}{2} \pi r^2 h \Rightarrow h = 2 \frac{R^2}{r^2} h' \Rightarrow r^2 = 2 R^2 \frac{h'}{h}$$

حيث h' انخفاض سوية السائل السائب عن غطاء الإناء قبل الدوران . وبتعويض r^2 أو h في العلاقة السابقة ينتج :

$$\omega = \frac{h}{R} \sqrt{\frac{g}{h'}} = 2 \frac{R}{r^2} \sqrt{gh'} \quad (3.80)$$

ونلاحظ بسهولة أن ω يمكن أن تبلغ قيمة كبيرة جداً ، ويبقى قياسها ممكناً حتى تنطبق B_0 على قعر الاناء . أما السرعة الزاوية الأصغر التي يمكن تحديدها من (3.80) فتنتج عندما تصبح B في B' ويصبح $r = R$:

$$\omega_{\min} = \frac{2}{R} \sqrt{gh'} \quad (3.81)$$

أما لحساب السرعات الزاوية الأقل فنطبق العلاقة (3.76) .

في تطبيقات عملية عديدة ، مثل عمليات فصل الشوائب من السوائل بالآلات الطاردة المركزية Centrifuge (راجع [31] [79]) ، تصادف حالة هامة يكون فيها الاناء الذي يحتوي السائل يدور حول محور أفقي بسرعة زاوية

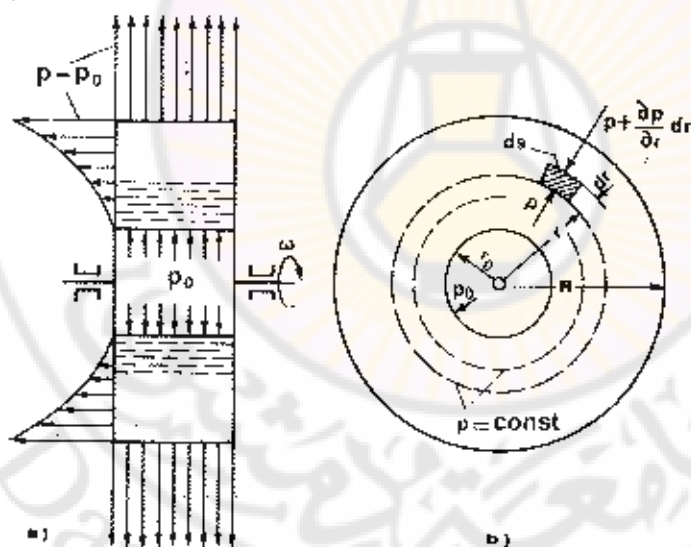
منتظمة ، الشكل (٣٠ . ٣ - a) . وغالباً ما تكون القوة النابذة أكبر بكثير من قوة الثقالة ، بحيث يمكن إهمال الأخيرة .

إن توزيع الضغط بالاتجاه القطري ينتج من تطبيق شروط التوازن على جزيء حجمي يبعد r عن محور الدوران ومقاييسه $1 \cdot dr, ds$ ، الشكل (٣٠ . ٣ - b) . كما ينتج بسهولة من العلاقة (3.77) بوضع $x \equiv r, gz \equiv 0$ فنجد :

$$p(r) = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \text{const} \quad (3.82)$$

ويتحدد ثابت التكامل من الشروط الحدية : $p = p_0$ عند $r = r_0$. ومنه نجد بسهولة :

$$p(r) = p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - r_0^2) \quad (3.83)$$



الشكل ٣٠ . ٣ : توزيع الضغط في سائل مهمل الثقالة يدور حول محور أفقي .
الضغط يتزايد في الاتجاه القطري مع مربع نصف القطر (a) ؛ سطوح الضغط
الثابت تمثلها أسطوانات مركزية دائرية (b) .

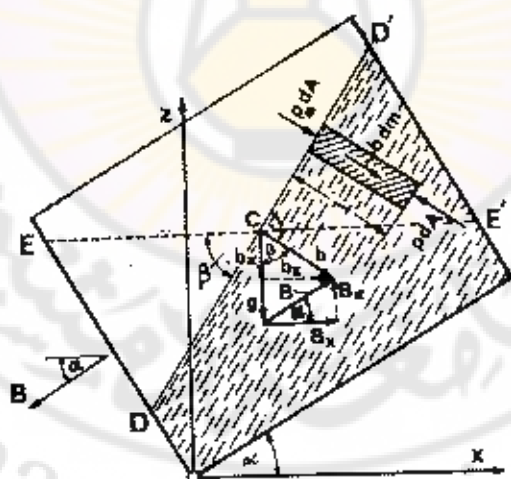
ويتضح من هذه العلاقة أن سطوح الضغط الثابت تمثلها اسطوانات دائرية مركزية، مراكزها واقعة على محور الدوران . كما تسمح هذه العلاقة بحساب قوة الضغط أو الدفع المحورية Thrust ، التي تؤثر على جوانب الإناء المتعامدة على محور الدوران . فإذا اعتبرنا عنصراً سطحياً خالياً $dA = 2\pi r dr$ ، فتكون قوة الضغط الجزئية هذه $dF_{pr} = p(r) dA$ ، وتنتج المحصلة بالتكامل :

$$F_{pr} = \int_0^R p(r) dA = 2\pi \int_0^R \left[p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - r_0^2) \right] r dr \quad (3.84)$$

هذه القوة تؤثر على الدولاب الدائر Impeller للمضخات النابضة ، ويجب موازنتها إما باستخدام مضامع محورية ، أو بطريقة تصميمية تسمح بتعادل الضغط قبل وبعد الدولاب الدائر [80] ؛ (انظرت ٣.٣) .

٣.٣.٣ توازن سائل قليل في إناء يؤثر عليه تسارع غطبي منتظم

نعتبر إناء فيه سائل يملؤه حتى ارتفاع معين . نجعل الإناء يتحرك على خط مستقيم وبتسارع منتظم B ميل بزاوية α ضد الأفق (كان نتصور أن الإناء



الشكل ٣.٣.٣ : توزيع الضغط في سائل ساكن نسبياً يتحرك بشكل مستقيم تحت تأثير تسارع منتظم

ينزلق على مستو مائل (١) ، فنلاحظ ، كما يوضح الشكل (٣١.٣) ، أن السطح الحر للسائل ، الذي كان قبل الحركة أفقياً ومنطبقاً على المستوي $E-E'$ ، قد أصبح نتيجة التسارع في وضعية مائلة $D-D'$. والمطلوب تحديد شكل سطوح الضغط الثابت وتوزيع الضغط في السائل . ويمكن أن يتم ذلك بالنسبة لقطع انتصافي (زواحي) مستو .

نختار محوري إحداثيات مرتبطين مع الاناء ، فيكون السائل بالنسبة لهما في حالة سكون نسبي . ويمكن أن نطبق على كل جزيء حتمي شروط التوازن الستاتيكية ، إذا اعتبرناه حسب مبدأ المغير خاضعاً لتأثير قوة عطالة F_B إضافية تسارعها B بعكس اتجاه تسارع الاناء ، بالإضافة لقوة الثقالة F_G . وعليه تنتج القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة في النقطة C مثلاً من السطح السائب للسائل :

$$F_r = F_B + F_G ; F_r \equiv b ; F_B \equiv B ; F_G \equiv g \Rightarrow b = B + g \quad (3.85)$$

إن القوة الحجمية b تتعامد مع سطح الضغط الثابت $p_a = \text{const}$ في النقطة C وهي تميل على الشاقول بزاوية β ، تتحدد من الشكل (٣١.٣) بسهولة حيث :

$$\tan \beta = \frac{b_x}{b_z} = \frac{B \cos \alpha}{B \sin \alpha - g} = \text{const} , \quad (3.86)$$

وبالتالي فإن السطح الحر للسائل يكون ممثلاً بمستو يظهر أثره في المستوي zx بشكل مستقيم $D-D'$. يميل على الأفق بزاوية β . وحيث أن قيمة β ثابتة في كافة نقاط السائل ، فإن كافة سطوح الضغط المتساوي تمثلها مستويات مائلة موازية للسطح الحر للسائل ، تظهر في المستوي zx كمستقيمات موازية لـ $D-D'$. ويمكن بسهولة استخراج معادلتها من المعادلة الهيدروستاتيكية العامة (3.52) مع ملاحظة أن $b_x = 0$ ، $\partial p / \partial y = 0$ ، فيكون :

$$dp = \rho (b_x dx + b_z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz =$$

$$= \rho [B \cos \alpha dx + (B \sin \alpha - g) dz] \quad (3.87)$$

وبالتكامل ينتج من أجل $dp=0$ بعد اصلاح بسيط :

$$z = \frac{B \cos \alpha}{g - B \sin \alpha} x + \text{const} = - \tan \beta \cdot x + \text{const} \quad (3.88)$$

وهي معادلة حزمة من المستقيمات المتوازية المائلة على الأفق بزاوية β . فإذا كانت

الزاوية $\alpha = 0$ ، وبالتالي التسارع B أفقياً ، فينتج من (3.88) :

$$z = \frac{B}{g} x + \text{const} = - \tan \beta \cdot x + \text{const} \quad (3.89)$$

وهي تمثل أيضاً معادلة حزمة من المستقيمات المتوازية المائلة بزاوية β على الأفق .

وعندما تكون $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي التسارع B شاقولياً فنجد :

$$z = \text{const} \quad (3.90)$$

وهي معادلة مستقيمات أفقية . وعليه يمكن صياغة النتيجة التالية :

إن سطوح الضغط الثابت في سائل ثقيل يؤثر عليه تسارع منتظم ثابت تمثلها مستويات مائلة متوازية ، عندما يكون التسارع مائلاً أو أفقياً ، وتمثلها مستويات أفقية ، عندما يكون التسارع شاقولياً .

لحساب توزيع الضغط تكامل العلاقة (3.87) فنجد :

$$p = \rho [B \cos \alpha x + (B \sin \alpha - g) z] + \text{const} \quad (3.91)$$

هذه العلاقة تسمح ، بعد تحديد ثابت التكامل من الشروط الحدية ، بحساب الضغط في أية نقطة (x, z) من السائل . وينتج منها تغير الضغط في الاتجاه الأفقي والشاقولي :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho B \cos \alpha \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho (B \sin \alpha - g) \quad (3.92)$$

وبطريقة سهلة يمكن الحصول على توزيع الضغط في أنجاء ρ المتعامد مع صرح الضغط الثابت ، وذلك بتطبيق شروط التوازن على اسطوانة ارتفاعها h من سطح السائل السائب ، ومقطع كل من قاعدتيها dA (الشكل ٣١.٣) فنجد :

$$p dA + p_0 dA + \rho b / dA \rightarrow p + p_0 + \rho b / dA \quad (3.93)$$

ويجدر الانتباه إلى أنه في حال كون التسارع $B=0$ فإن المعادلة (3.91) تأخذ شكل المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية .

٤.٣ أسئلة مراجعة وتمارين :

س ١.٣ ماهي شروط التوازن المستقر لمجموعة سوائل غير متجانسة ؟ برهن على ذلك .

س ٢.٣ : ماهي شروط أويلر لتوازن سائل ساكن في حقل قوى عام ؟ أكتب المعادلة الهيدروستاتيكية العامة واستخرج منها المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية .

س ٣.٣ : المداخلن لها فعل امتصاصي يؤدي لطرد الغازات العادمة . علل السبب .

س ٤.٣ : ماذا ينص قانون باسكال وما هي أهم تطبيقاته العملية ؟

س ٥.٣ : اشرح مبدأ المانومتر والبارومتر السائلي . على أي أساس يتم اختبار سائل المقياس ؟

س ٦.٣ : اشرح مبدأ طريقة حساب قوى ضغط السوائل الساكنة على سطوح الأوعية المنحنية .

س ٧.٣ : ماهو الشرط اللازم والسكافي للتوازن المستقر للأجسام الطافية وما هي العوامل التي تحدده ؟

س ٨.٣ : برهن أن دافعة أرخميدس F_a تساوي إلى المركبة الشاقولية

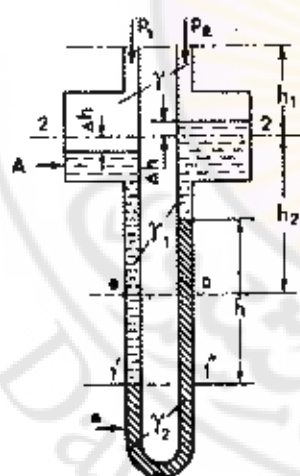
لقوى الضغط المؤثرة على سطح الجسم المغمور . هل تتغير F_a مع العمق عن السطح الحر للسائل ؟

س ٩.٣ : كيف يتغير ارتفاع السحب لضخة مضخمة لضخ ماء بدرجة حرارة $t = 20^\circ\text{C}$ ، عندما تصبح $t = 80^\circ\text{C}$ ؟

س ١٠.٣ : ماهي حالة التوازن النسبي للسائل ؟ على أي أساس يمكن حساب تغير الضغط شاقولياً وأفقياً لسائل يدور حول محور شاقولي بسرعة زاوية ثابتة اذا علمنا قيمة الضغط في نقطة معينة ؟

س ١١.٣ : اذا ألقينا من زورق يسبح على سطح بركة ماء هاديء حجراً في الماء ؛ فهل ترتفع سوية الماء أم تنخفض أم تبقى ثابتة ؟

ت ١.٣ : لقياس فرق الضغط الصغير $\Delta p = p_1 - p_2$ بين نقطتين من سائل وزنه النوعي γ يوصل بهاتين النقطتين المكرومانومتر التفاضلي المبين في الشكل (ت ١.٣) والذي يحتوي على سائلي مقياس وزنهما النوعي γ_1, γ_2 ، والمصمم بحيث أن فرعي الأنبوب بشكل U الذي



الشكل ت ١.٣

مقطعه a يتوسعان في الأعلى ليصبح مقطع كل منها A . فاذا كان فرق ارتفاع سوية سائل المقياس الأثقل h فكيف يكون فرق الضغط ؟

الحل : قبل وصل المكرومانومتر تكون سوية سائل المقياس الأثقل منطبقة على المستوي الأفقي 0-0 ، وسوية سائل المقياس الأخف على 2-2 ، وبعد وصله تنخفض سوية الأول في الفرع الأيسر بمقدار $h/2$ والساقي بمقدار Δh ، وترتفع سويتها في الفرع الأيمن بنفس المقدار . ومن تساوي الحجم المزاح يكون :

$$\Delta h A = \frac{h}{2} a \Rightarrow \Delta h = \frac{h}{2} \frac{a}{A} \quad (a)$$

وباعتبار أن $1' - 1''$ سطح للضغط الثابت ينتج من المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية :

$$p_1' = p_1 + (h_1 + \Delta h) \gamma + \left(h_2 - \Delta h + \frac{h}{2}\right) \gamma_2 =$$

$$= p_1' = p_1 + (h_1 - \Delta h) \gamma + \left(h_2 + \Delta h - \frac{h}{2}\right) \gamma_2 + h \gamma_2$$

وبتعويض Δh بقيمتها من (a) ينتج :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h \left[\gamma_2 - \gamma_1 \left(1 - \frac{a}{A}\right) - \gamma \frac{a}{A} \right] \quad (b)$$

من أجل القيم العددية : $a/A = 0,01$ ، $h = 10 \text{ cm}$ ، $\gamma = 1,25 \text{ kp/m}^3$ ، $\gamma_2 = 1000 \text{ kp/m}^3$ ، $\gamma_1 = 900 \text{ kp/m}^3$ ينتج :

$$\Delta p = 0,1 [10^3 - 0,9 \cdot 10^3 (1 - 0,01) - 1,25 \cdot 0,01] =$$

$$= 10,9 \text{ kp/m}^2 \approx 10,9 \text{ mm WC.}$$

٢.٣ : احسب قوة الضغط الأفقية والشافولية وعصلتها المؤثرة على نصف الاسطوانة الميمنة في الشكل (١٦.٣) ، إذا كان عمق محور الاسطوانة عن السطح السائب للسائل h وطولها l .

الحل : قوة الضغط الأفقية فتتج من (3.30) :

$$F_{px} = \gamma z_s A_x = \gamma h D l$$

وتؤثر حسب (3.32) في نقطة تبعد عن المركز 0 بمقدار

$$e = z_m = \frac{J_s}{z_s A_x} = \frac{ID^3/12}{h D l} = \frac{D^2}{12 h}$$

ونتج قوة الضغط الشافولية حسب (3.33) مع مراعاة الشكل (١٦.٣) :

$$F_{pz} = F_{pz_2} - F_{pz_1} = \gamma V_1 - \gamma V_2 = \gamma V = \gamma \pi D^2 l / 8$$

وتؤثر في مركز ثقل الحجم V داخل نصف الاسطوانة ، وبالتالي تمر من مركز ثقل نصف الدائرة وتبعد عن قطرها الشاقولي مقدار :

$$e' = x_m - 2 D/3 \pi .$$

x_m يمكن محددتها أيضاً على أساس أن المحصلة F_p تمر من المركز 0 وبالتالي يكون :

$$F_{px} z_m = F_{pz} x_m .$$

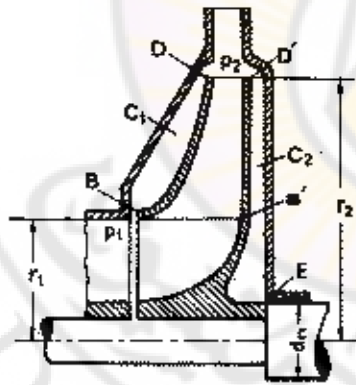
وننتج محصلة قوى الضغط :

$$F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{pz}^2} = \gamma l D \sqrt{h^2 + (\pi D/8)^2} .$$

ت ٣.٣ : لحساب قوة الضغط المحورية المؤثرة على الدولاب الدائر لضخ نابذة (الشكل ت ٣.٣) يفرض عادة حسب [80] أن السائل الموجود في الحبرتين C_1, C_2 بين الدولاب الدائر وجدران المخلف الجانبية يدور بنصف سرعة دوران الدولاب الدائر n . كم تبلغ هذه القوة إذا كان :

$\gamma = 10^{-3} \text{ kp/cm}^3$, $n = 3000 \text{ rpm}$, $r_n = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 5 \text{ cm}$, $r_1 = 2.5 \text{ cm}$
ضغط السحب $p_1 \approx 0$ ، ضغط الدفع $p_2 \approx 40 \text{ at}$ ؟

الحل : كما هو واضح من الشكل



الشكل ت ٣.٣

(ت ٣.٣) فإن الضغوط التي تؤثر

على السائل على السطوح $D-B$ ،

$D'-B'$ متوازنة فيما بينها . ولتأ

بالتالي قوة الضغط المحورية F_{pT}

لمحصلة لقوى الضغط المؤثرة على السطح

الجانب $B'-E$ المحصور بين $r_n \leq r \leq r_1$

وننتج من (3.84) بإدخال r_2 ،

$(p_2 - p_1)$ بدلاً من r_0 ، p_0 :

$$F_{pT} = 2 \pi \int_{r_n}^{r_1} \left[(p_2 - p_1) + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (r^2 - r_2^2) \right] r dr .$$

وبإجراء التكامل نجد :

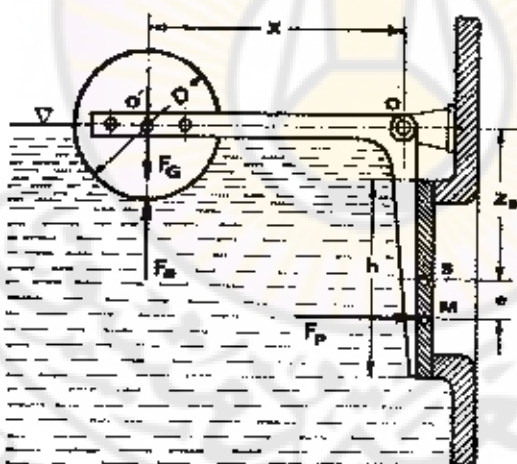
$$F_{PT} = \pi (r_1^2 - r_n^2) \left[(p_2 - p_1) + \frac{\rho \omega^2}{2} \left(\frac{r_1^2 + r_n^2}{2} - r_2^2 \right) \right] .$$

بالتعويض بالقيم العددية وباعتبار $\rho = \gamma/g$ ، $\omega = \pi n/30$ ، ينتج :

$$F_{PT} \approx 655 \text{ kp} .$$

ت ٤.٣ : في الجدار الشاقولي لحزان ماء (الشكل ت ٣.٣) توجد فتحة مغلقة بسدادة مستطيلة أبعادها b, h متصلة بذراع زاوي يتم فصل في النقطة O ، وينتهي بفراشة اسطوانية فارغة قطرها D وطولها l ووزنها F_G . فإذا كان المطلوب أن تفتح السدادة عندما تصل سوية السطح الحر للماء في الخزانات الى المستوى $O'-O$ ، فكم يجب أن يكون طول الذراع x ؟ معطى :

$$F_G = 25 \text{ kp}, b = 30 \text{ cm}, h = 40 \text{ cm}, l = 60 \text{ cm}, D = 39 \text{ cm}, z_s = 25 \text{ cm}$$



الشكل ت ٣.٣

الحل : عندما تبدأ السدادة بالانفتاح تكون محصلة عزوم كافة القوى المؤثرة

على السدادة وعلى الفواشة حول 0 معدومة . وعليه يكون :

$$F_p (z_s + e) = (F_a - F_G) x \Rightarrow x = \frac{F_p (z_s + e)}{F_a - F_G} . \quad (a)$$

قوة الضغط تنتج من (3.21) :

$$F_p = \gamma z_s A = \gamma z_s b h ,$$

وتؤثر في مركز الضغط M الذي يبعد عن مركز الثقل S حسب (3.52) مقدار :

$$e = \frac{J_s}{z_s A} = \frac{b h^3 / 12}{z_s b h} = \frac{h^2}{12 z_s} . \quad (b)$$

أما دافعة أرخيدس فتحسب من (3.38) على أساس أن نصف الاسطوانة مغمور وتأثير الذراع مهم :

$$F_a = \gamma \pi D^2 l / 8 . \quad (c)$$

وبالتالي ينتج من (a) بعد ادخال (b) و (c) واستخدام القيم العددية :

$$x = \frac{b h (z_s^2 + h^2 / 12)}{\pi D^2 l / 8 - F_G / \gamma} = \frac{30.40 (25^2 + 40^2 / 12)}{3.14.39^2.60/8 - 25/10^3} = 85 \text{ cm} .$$

ت . ٥.٣ : اسطوانة فارغة قاعدتها العلوية مغلقة والسفلية بمجهزة بثقب صغير (الشكل ت ٤.٣) . تغطس الاسطوانة التي قطرها d وارتفاعها h ووزنها F_G في الماء بحيث يبقى محورها شاقولياً . احسب مقدار ارتفاع الماء h_1 وضغط الهواء p داخل الاسطوانة ، اذا فرضنا ان جدرانها مطلقة الصلابة والانضغاط يتم بشرط إيزوترمية . تحقق اذا كانت الاسطوانة الطافية في حالة توازن مستقر .

معطى : $p_a = 1.03 \text{ at}$, $F_G = 30 \text{ kp}$, $h = 50 \text{ cm}$, $d = 30 \text{ cm}$

الطل : الاسطوانة ستستمر في الغوص حتى يتوازن ثقلها مع قوة الضغط الزائد للهواء المضغوط داخلها والمؤثرة على غطائها . وعليه يكون :

$$F_G = (p - p_a) \pi d^2 / 4 \Rightarrow p = p_a + 4 F_G / \pi d^2 \quad (a)$$

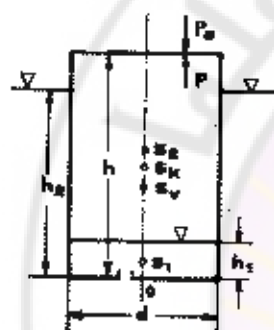
ومن قانون تغير الحالة الايزوترومي (2.54) ينتج :

$$p_a h = p (h - h_1) \Rightarrow h_1 = h \frac{p - p_a}{p} \quad (b)$$

شروط الطفو المستقر للأسطوانة تقضي حسب (3.44) أن يكون :

$$h_m = \frac{J_0}{V} - \bar{S}_k \bar{S}_r > 0 \quad (c)$$

حيث $J_0 = \pi d^4 / 64$ عزم عطالة دائرة مقطع الطفو ، $V = h_2 \pi d^2 / 4$ الحجم المزاح ، $e = \bar{S}_k \bar{S}_r$ بعد مركز ثقل الاسطوانة مع الماء داخلها عن مركز ثقل V .



الشكل ٤.٣

عمق الغاطس h_2 يتحدد من شرط الطفو (3.43) . فإذا كان :

$$F_w = \gamma h_2 \pi d^2 / 4 \quad (d)$$

وزن الماء داخل الاسطوانة ، F_a دافعة أرخميدس ، فينتج :

$$F_a = \gamma h_2 \frac{\pi d^2}{4} = F_G + F_w \Rightarrow h_2 = \frac{4 (F_G + F_w)}{\gamma \pi d^2} \quad (e)$$

وبافتراض S_1 مركز ثقل F_w ، S_2 مركز ثقل F_G ، فإن موضع S_k يتحدد بأخذ العزوم حول O :

$$(F_G + F_w) \bar{OS}_k = F_G h_1 / 2 + F_w h_2 / 2 \Rightarrow \bar{OS}_k = \frac{2 (F_G + F_w)}{F_G h + F_w h_1} \quad (f)$$

ويكون بالتالي :

$$e = \overline{OS_k} - \overline{OS_r} = \overline{OS_k} - h_2/2 \quad (g)$$

بالطبيق العددي ينتج : $h_2 = 44.48, \text{cm}$ ، $h_1 = 1.98, \text{cm}$ ، $p = 1.0725, \text{at}$ ،
وبالتالي فإن الاسطوانة الطافية غير مستقرة .

٤ نوازل السوائل المتغيرة الحجم (غير المتجانسة) .

تتميز السوائل المتغيرة الحجم (القابلة للانضغاط) بأنها غير متجانسة في الحالة العامة ،
وتتغير كثافتها (راجع ٥.٢) مع المكان s ومع الضغط p :

$$\rho = f(s, p) \quad (4.1)$$

وباعتبار ان الكثافة ، كأحدى الخواص الفيزيائية للسائل ، لا تؤثر على حالة الاجهاد ، فإن
حالة الاجهاد الهيدروستاتيكية لا تختلف عن حالة الاجهاد الهيدروستاتيكية (راجع ٢.٣.٢) .
وعليه فإن المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (3.4) والعمامة (3.56) تنطبق من حيث البدء
على السوائل القابلة للانضغاط . ولكن هذه السوائل لا تكون ساكنة فعلا الا اذا كانت في
حالة توازن مستقر .

٤.١ شروط التوازن والاستقرار الهيدروستاتيكي لسائل متغير الحجم

إذا اقتطعنا جزيئاً حجمياً dV من سائل متغير الحجم وغير متجانس يؤثر
عليه حقل قوى عام ، فإن شروط توازن أويلو (انظر ص ١٣٤) تنطبق عليه
تماماً . فإذا كانت dF_v القوة الحجمية ، ρ تابع كتون حقل القوى ، فإن القوة
الحجمية النوعية الجزئية dF_v المؤثرة في الاتجاه s تنتج من (2.16) ،
(3.65) :

$$dF_v = \frac{dF_v}{dV} = -\rho \frac{d\phi_s}{ds} = \rho b = \frac{dp}{ds} ; \quad dF_v \parallel s \quad (4.2)$$

ونتناسب بسبب (4.1) طردأ مع الكثافة . لذلك فان توزيع الضغط الناتج من تكامل العلاقة (4.2) :

$$p = \int_{s_0}^s \rho b \, ds + \text{const} \quad (4.3)$$

لا يمكن حسابه الا في الحالات الخاصة التالية :

(أ) الكثافة ثابتة تقريباً $\rho \approx \text{const}$ ، وهذا ينطبق على حالات عديدة ، خاصة عندما يكون ارتفاع الكتلة الغازية صغيراً نسبياً . وعندها يمكن تطبيق كافة العلاقات المتعلقة بتوازن السوائل المتجانسة الثابتة الحجم (الفقرة ٣) .

(ب) الكثافة تتغير مع المكان فقط $\rho = f(s)$ ، وهذا ينطبق مثلاً على حالة سائل ثابت الحجم ذي درجات حرارة ، أو درجات تركيز أملاح منحلّة ، مختلفة موضعياً (راجع ٢٠١٣) .

(ج) الكثافة تابعة للضغط $\rho = f(p)$ ، وهذا ينطبق مثلاً على الحالة التي يكون فيها ارتفاع الكتلة الغازية (الهواء) كبيراً ، حيث لا يمكن عندها إهمال الانضغاطية . كما يجب أن يؤخذ تأثير درجة الحرارة بعين الاعتبار . ولذلك فان حساب توزيع الضغط من (4.3) يتطلب معرفة تغير الكثافة مع الضغط ، وتوزيع درجة الحرارة في الكتلة الغازية ، بالإضافة للشروط الحدية التي تسمح بتحديد ثابت التكامل .

سنقتصر فيما يلي على دراسة الحالة ج (من منطلق أن الغاز المختبر (الهواء الجوي بصورة خاصة) يخضع لتأثير حقل الجاذبية الأرضية فقط $F_v \equiv F_g$ ، $b \equiv g = \text{const}$. أي أننا سنفرض أن التسارع الأرضي يبقى ثابتاً مع الارتفاع $s \equiv z$ الذي سنفرضه موجباً للأعلى . وعليه نتيج من (4.2) بعد الإصلاح والانقباض لاتجاه g المعادلة الأروستاتيكية الأساسية بصيغتها التكاملية :

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = g(z_0 - z) \quad (4.4)$$

التي لا تختلف من حيث الأساس عن المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (3.4).
 $P(p)$ (حرف هـ و ك ب ي ر ، اليوناني!) يسمى تابع الضغط وواحدة قياسه $[m^2/s^2]$
 ونلزم معرفته من أجل حل التكامل.

لتحديد علاقة الكثافة بالضغط وتأثيرها بدرجة الحرارة نستعين بمعادلة الحالة
 للغازات الكاملة (2.50):

$$p/\rho = RT \Rightarrow p_0/\rho_0 = RT_0 \quad (4.5)$$

وبقانون تغير الحالة الذي نعتبره يتم في الحالة العامة تحت شروط بوليتروبية.
 وبالتالي يكون حسب (2.57):

$$p/\rho^n = p_0/\rho_0^n = \text{const} \quad (4.6)$$

حيث T_0, ρ_0, p_0 الضغط والكثافة ودرجة الحرارة للغاز عند الارتفاع
 z_0, n الأس البوليتروبي. فإذا حسبنا من هاتين العلاقتين الكثافة:

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0^{1/n}} p^{1/n} = \frac{\rho_0}{p_0} \frac{1}{p_0^{1/n}} p^{1/n} = \frac{1}{RT_0 p_0^{1/n}} p^{1/n} \quad (4.7)$$

وإدخالها في (4.4) وأنجزنا التكامل تنتج بعد الإصلاح العلاقة التي نسمع
 بحساب تغير الضغط مع الارتفاع:

$$\begin{aligned} g(z_0 - z) &= \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = \\ &= \frac{n}{n-1} RT_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

كما نجد أيضاً من (4.5) و (4.6) تغير درجة الحرارة مع الضغط:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (4.9)$$

وبإدخال هذه العلاقة في (4.8) ينتج توزيع درجة الحرارة الحتمي مع الارتفاع :

$$T = T_0 + g \frac{n-1}{nR} (z_0 - z) \quad (4.10)$$

ومنه نجد تدرج درجة الحرارة مع الارتفاع :

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{g}{R} \frac{n-1}{n} = \text{const} \quad (4.11)$$

هذه العلاقة تبين أن درجة الحرارة تتناقص مع الارتفاع ، وهذا ما يؤكده الواقع في الهواء الجوي مثلاً ولارتفاع عشرات الكيلومترات . كما تبين أيضاً أن الأس البوليترابي n يتعلق مباشرة بتدرج درجة الحرارة وتحدد قيمته العددية من قيمة dT/dz ، التي نحدد أيضاً حالة الاستقرار الستاتيكي Stability لعمود الغاز المعتبر .

ان شروط التوازن المستقر لسائل ثقيل غير متجانس تتطلب أن يكون توزيع الطبقات بحيث يتناقص الوزن النوعي من الأسفل للأعلى ، بينما لا يتغير في المستوي الأفقي الممثل لسطح الضغط الثابت (راجع ٣ - ٢٠١) . وهذا يعني باعتبار $\rho = \rho_0$ ، $\gamma = \text{const}$ أن :

$$\frac{d\rho(z)}{dz} < 0 \quad (4.12)$$

هذه العلاقة تمثل في حالة السوائل القابلة للانضغاط شرطاً لازماً ولكن غير كاف . ذلك انه عند أزاحة جزيء حجمي من كتلة غازية للأعلى أو الأسفل فإن كثافته تنقص أو تزداد ، بسبب تناقص الضغط مع الارتفاع للأعلى . ولكن لا يلزم في كل الأحوال أن تصبح كثافة الجزيء الحجمي مساوية لكثافة الغاز في محيطه الجديد .

فلكي يكون توضع طبقات الغاز مستقراً فإنه يلزم عندما يرتفع الجزيء الحجمي من z ، حيث يؤثر الضغط $p(z)$ ، مقدار Δz أن تبقى كثافته تحت تأثير الضغط $p(z) > p(z + \Delta z)$ أكبر من كثافة الغاز في محيطه الجديد ، وعندما ينخفض مقدار Δz أن تبقى كثافته تحت تأثير الضغط $p(z) < p(z - \Delta z)$ أصغر من كثافة الغاز في محيطه الجديد . فعندها فقط يحاول الجزيء العودة إلى مكانه الأصلي . أما في الحالة الخاصة التي تصبح فيها كثافة الجزيء الحجمي عند رفعه أو خفضه مقدار Δz مساوية لكثافة الغاز في المحيط الجديد ، وبدون حدوث أي تبادل حراري ، فإن توضع الطبقات الغازية يكون في حالة توازن مطلق ، وتغير حالة الجزيء يتم تحت شروط أدبياتية (راجع ٣.٨.٢) . وهذا يعني أن التمدد أو الانضغاط الناتج عن رفع أو خفض الجزيء الحجمي مقدار Δz يجب أن يرافقه انخفاض أو ارتفاع في درجة الحرارة ، بحيث تصبح حرارته الناتجة عن تغير حالته مساوية تماماً لدرجة حرارة الغاز في المحيط الجديد ، وبالتالي لا يحدث أي تبادل حراري .

إن التوضع الأدبياتي لطبقات سائل متغير الحجم وغير متجانس يؤدي حالة توازن شبيهة تماماً بحالة توازن السوائل الثابتة الحجم والمتوازنة [١] ، ذلك أن ازاحة أي جزيء من السائل لا تؤدي لنشوء أية قوى تحاول تغيير وضعيته التوازن . كما يمكن الاستنتاج أن حالة التوضع هذه تنشأ بعد عملية مزج بلزيمات مستقلة غازية متوضعة أصلاً بشكل مختلف ، تماماً كما يمكن بواسطة المزج أو الحضانة لمحال مائعات غير متجانسة أصلاً بسبب اختلاف التركيز الموضعي للأملاح المنحلة إلى مائعات متجانسة . على أساس ما تقدم فنتج شروط الاستقرار الستائيني الحرارية لتوضع الطبقات كما يلي :

(4.13)

$dT/dz = (dT/dz)_{\text{adiabatic}} \Rightarrow$	توضع أديباتي ($n = \kappa$) ؛ توازن مطلق
$ dT/dz < (dT/dz)_{\text{adiabatic}} \Rightarrow$	توضع بوليتروبي ($n < \kappa$) ؛ توازن مستقر
$dT/dz = 0 \Rightarrow T = \text{const} \Rightarrow$	توضع إيزوتمي ($n = 1$) ؛ توازن مستقر جداً
$ dT/dz > (dT/dz)_{\text{adiabatic}} \Rightarrow$	توضع بوليتروبي ($n > \kappa$) ؛ توازن قلقي

٢.٤ توازن الهواء الجوي (ايروستاتيك)

في عام 1648 أثبت بييريه Perrier بالقياس وبِتوجيه من باسكال أن الضغط الجوي ينقص مع الارتفاع . كذلك اكتشف في ذلك الوقت أن حالة الطقس تتأثر بصورة مباشرة بتذبذبات الضغط الجوي . أما اليوم فإن معرفة تغير الضغط والكثافة ودرجة الحرارة للهواء الجوي لها أهمية كبرى في مجالات تطبيقية عديدة مثل الطيران والأرصاد الجوية وتحديد استطاعة آلات العمل والقوة . فالضخعة تستطيع أن تسحب الماء عن عمق أكبر إذا كانت تعمل في الساحل بدلاً من منطقة جبلية . واستطاعة محرك الديزل تزداد إذا كان يعمل في منطقة منخفضة (منجم) وتقل إذا كان يعمل في منطقة مرتفعة .

١.٢.٤ توازن الهواء الجوي تحت شروط ايزوثرمية

في حالة توازن إيزوتمي لطبقات الهواء الجوي يفترض أن درجة الحرارة الوسطية تبقى ثابتة :

$$T_m [^{\circ}\text{K}] = t_m [^{\circ}\text{C}] + 273^{\circ} = \text{const} , \quad (4.14)$$

وبالتالي ينطبق في هذه الحالة قانون بولي - ماريوط (2.54) :

$$p/\rho = p_0/\rho_0 = R T_m = \text{const} , \quad (4.15)$$

حيث p_0 ، ρ_0 قيمتان معلومتان للضغط والكثافة عند ارتفاع قياس معين z_0 ، كسطح الأرض مثلاً .

نستخرج قيمة z من (4.15) وندخلها في المعادلة الايروستاتيكية الأساسية (4.1) ونكامل فينتج :

$$g(z_0 - z) = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} \Rightarrow z - z_0 = \frac{p_0}{g \rho_0} \ln \frac{p_0}{p}$$

التي ينتج عنها مباشرة بالنسبة لارتفاع مستوى قياس آخر z_1 حيث الضغط p_1 :

$$z - z_1 = \frac{p_0}{g \rho_0} \ln \frac{p_1}{p} = H_0 \ln \frac{p_1}{p} . \quad (4.16)$$

هذه العلاقة معروفة باسم قانون الارتفاع البارومتري ، الذي يربط بين تغير الارتفاع والضغط ، ويسمى $H_0 = p_0 / \gamma_0$ ارتفاع الجو المنتظم ، ويعادل ارتفاع عمود من الهواء وزنه النوعي γ_0 ثابت و فرقي الضغط بين قاعدته وقمته p_0 . يمكن اصلاح العلاقة (4.16) بحيث تصبح أكثر ملائمة لاستخدامها في تحديد ارتفاع الطائرات . فاذا وضعنا $z = z_2$ ، $p = p_2$ ، واستخدمنا اللوغارتم العشري بدلاً من الطبيعي ينتج :

$$\Delta z = z_2 - z_1 = 2,303 H_0 \lg \frac{p_1}{p_2} . \quad (4.17)$$

فاذا كتبنا معادلة الحالة (4.5) بالشكل :

$$\frac{p}{\rho} = R (t + 273^\circ) ,$$

ينتج من أجل قيم الضغط والكثافة عند $t = 0^\circ$:

$$(p/\rho)_{t=0^\circ} = R \cdot 273^\circ \Rightarrow R = \frac{1}{273^\circ} (p/\rho)_{t=0^\circ} .$$

وبذلك نحصل من (4.15) بإدخال (4.14) على ارتفاع الجو المنتظم :

$$H_0 = \frac{p_0}{g \rho_0} = \frac{1}{g} (p/\rho)_{t=0^\circ} \left(1 + \frac{t_{at}}{273^\circ} \right) , \quad (4.18)$$

ونأخذ العلاقة (4.17) الشكل التالي :

$$\Delta z = 2,303 \frac{1}{g} \left(\frac{p}{p_0} \right)_{p_0} \left(1 + \frac{t_m}{273} \right) \lg \frac{p_1}{p_2} \quad (4.19)$$

فإذا اعتبرنا $(p/p_0)_{p_0} = 1.29 \text{ kp/m}^2$: $p_0 = 10333 \text{ kp/m}^2$ (الجدول ٢.٢)

ينتج : $(p/p_0)_{p_0} = 8010 \text{ m}$. ونأخذ قانون الارتفاع البارومتري للصياغة العملية المعروفة :

$$\Delta z = z_2 - z_1 [\text{km}] = (18.4 + 0.067 t_m [^{\circ}\text{C}]) \lg \frac{p_1}{p_2} \quad (4.20)$$

٢.٢.٤ توازن الهواء الجوي تحت شروط أديباتية

عندما يتم تغير حالة الهواء بصورة سريعة ، كما هو الأمر عند سرعات جريان عالية جداً ، فلن يتوفر الوقت الكافي لحدوث تبادل حراري مع المحيط ، لأن الانتقال الحراري يتم عادة ببطء شديد نسبياً . وعليه يمكن في مثل هذه الحالات تطبيق قانون تغير الحالة الأديباتي (2.56) :

$$p/\rho^{\kappa} = \text{const}$$

والحصول على نتائج تقريبية مرضية جداً . ونلاحظ من مقارنة هذه العلاقة مع (4.6) أنه في حالة التوضع الأديباتي لطبقات الهواء الجوي يأخذ الأس البوليترابي قيمة خاصة $n = \kappa$. وعليه تنتج مباشرة من العلاقة (4.8) علاقة الارتفاع بالضغط اعتباراً من سطح الأرض $z_0 = 0$:

$$z = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{g \rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] \quad (4.21)$$

حيث p_c ، ρ_0 الضغط والكثافة عند $z_0 = 0$. ومنها نجد تغير الضغط مع الارتفاع :

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \left(\frac{g \rho_0}{p_0} \frac{x-1}{x} \right) z \right]^{\frac{x}{x-1}} . \quad (4.22)$$

وينتج تغير الكثافة مع الارتفاع من (4.6) بوضع $x = n$ وإدخال (4.22) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \left[1 - \left(\frac{g \rho_0}{p_0} \frac{x-1}{x} \right) z \right]^{\frac{1}{x-1}} . \quad (4.23)$$

ومن العلاقة (4.10) ومعادلة الحالة (4.5) نحصل على توزيع درجة الحرارة مع الارتفاع :

$$T = T_0 - \left(\frac{g}{R} \frac{x-1}{x} \right) z = \frac{g}{R} \left(\frac{p_0}{g \rho_0} - \frac{x-1}{x} z \right) . \quad (4.24)$$

ويكون تدرج درجة الحرارة حسب (4.11) :

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{g}{R} \frac{x-1}{x} . \quad (4.25)$$

فإذا اعتبرنا بالنسبة للهواء $R/g = 29,3 = m \text{ grad}^{-1}$ ، $x = 1,405$ ،

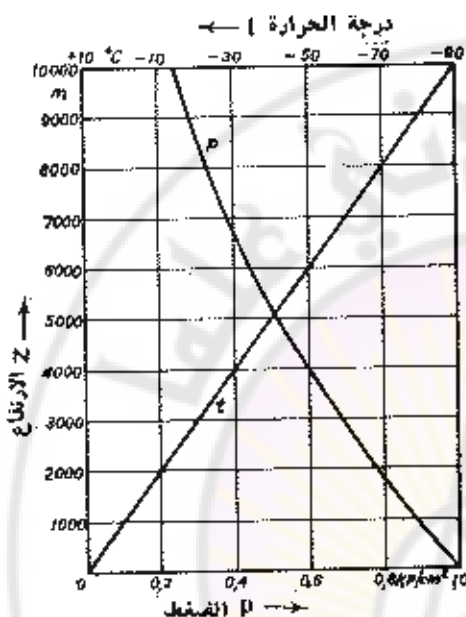
$dz = \Delta z = 100 \text{ m}$ ينتج من (4.25) :

$$\Delta t = T_2(z_2) - T_1(z_1) = - \frac{100 \cdot 0,405}{29,3 \cdot 1,405} = - 0,98 \text{ } ^\circ\text{C} \approx - 1 \text{ } ^\circ\text{C} . \quad (4.26)$$

إذن في حالة التوضع الأديباتي لطبقات الهواء الجوي تنقص درجة الحرارة بمعدل درجة واحدة لكل مائة متر ارتفاع . وينتج من (4.13) أن توازن الهواء الجوي يكون مستقراً عندما يكون النقص في درجة الحرارة أقل من هذا المعدل ، وقلقاً عندما يكون أكبر منه .

الشكل (١.٤) يبين تغير الضغط ودرجة الحرارة مع الارتفاع حسب

(4.22) و (4.24) .



الشكل ١.٤ : تغير الضغط ودرجة الحرارة في الهواء الجوي مع الارتفاع تحت ظروف أديباتية : t تنقص بمعدل 1°C لكل 100 m ارتفاع .

٣.٢.٤ نواتج الهواء الجوي النظامي

إن تغير حالة الهواء الجوي يخضع في الحقيقة لقانون تغير الحالة البوليتروبي (4.6) ، ويمثل التوضع الأديباتي والايوترمي لطبقاته حالتين حديتين . ولكن الحساب العددي لتغير الضغط والكثافة ودرجة الحرارة بمساعدة العلاقات (4.7) حتى (4.10) يستلزم معرفة القيم الابتدائية لها على سطح الأرض P_0 ، ρ_0 ، T_0 ، بالإضافة لتدرج درجة الحرارة الذي تنتج منه حسب (4.11) قيمة الأس البوليتروبي n . هذه القيم تتعرض لتذبذبات مستمرة تتعلق بحالة الطقس ودرطوبة الهواء وخاصة بالعرض الجغرافي للسكان . لذلك ، ومن أجل الحصول على علاقات واضحة في مجال الطيران خاصة يمكن على أساسها إجراء

مقارنات لاستطاعة الطيران في أوقات وأماكن مختلفة ، فقد اعتمدت منظمة الطيران العالمية (International Civil Aviation Organisation = ICAO) ما يسمى الجو النظامي Normal atmosphere ، الذي يتميز حسب [9][12][17] بثبات القيم g ، T_0 ، ρ_0 ، p_0 :

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 10332 \text{ kp m}^{-2} \hat{=} 101\,332 \text{ Nm}^{-2} ; \\ g &= 9,80665 \text{ m s}^{-2} ; \\ \rho_0 &= 0,125 \text{ kp s}^2 \text{ m}^{-4} \hat{=} 1,226 \text{ kg m}^{-3} ; \\ R &= 29,3 \frac{\text{kp m}}{\text{kp grd}} \hat{=} \frac{R}{g} = 29,3 \frac{\text{kg m}}{\text{kg grd}} ; \\ \gamma_0 &= 1,25 \text{ kp m}^{-3} \hat{=} g \rho_0 = 12,07 \text{ N m}^{-3} ; \\ t_0 &= 15^\circ \text{C} \hat{=} T_0 = 288^\circ \text{K} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

وكذلك بثبات تدرج درجة الحرارة :

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq z \leq 11 \text{ km} \text{ من أجل } \vartheta &= dT/dz = -6,5 \text{ grd km}^{-1} \\ z > 11 \text{ km} \text{ من أجل } \vartheta &= 0 \Rightarrow t = -(11 \cdot 6,5 - 15) = -56,5^\circ \text{C} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

من (4.28) نحصل مباشرة على نوزع درجة الحرارة :

$$T = T_0 + \vartheta z = T_0 \left(1 + \frac{\vartheta z}{T_0} \right) . \quad (4.29)$$

وبادخال قيمة ϑ في (4.11) نحصل على قيمة الأس البوليتروبي :

$$\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{g}{R} \frac{n-1}{n} \Rightarrow \frac{n-1}{n} = -\frac{R \vartheta}{g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{n}{n-1} &= -\frac{g}{R \vartheta} \Rightarrow n = \frac{1}{1 + R \vartheta / g} \end{aligned} \quad (4.30)$$

وبادخال القيم العددية حسب (4.27) (4.28) نجد :

$$\frac{n-1}{n} = 0,19 ; \frac{n}{n-1} = 5,25 : \frac{1}{n-1} = 4,25 : n = 1,235 , \quad (4.31)$$

وبالتالي فإن تغير الحالة في الجو النظامي يتم في مجال محصور بين تغير الحالة الايزوترمي والأديباتي :

$$1 < n < \infty \quad (4.32)$$

الآن يمكن بسهولة من (4.8) و (4.30) و (4.31) إيجاد علاقة الارتفاع مع الضغط اعتباراً من سطح الأرض $z_0 = 0$:

$$z = \frac{n}{n-1} \frac{RT_0}{g} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] = - \frac{T_0}{\theta} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-R \cdot \theta}{g}} \right] \quad (4.33)$$

التي ينتج منها تغير الضغط مع الارتفاع :

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\theta z}{T_0} \right)^{\frac{-g}{R \cdot \theta}} = \left(1 - 0,02257 z [\text{km}] \right)^{5,25} \quad (4.34)$$

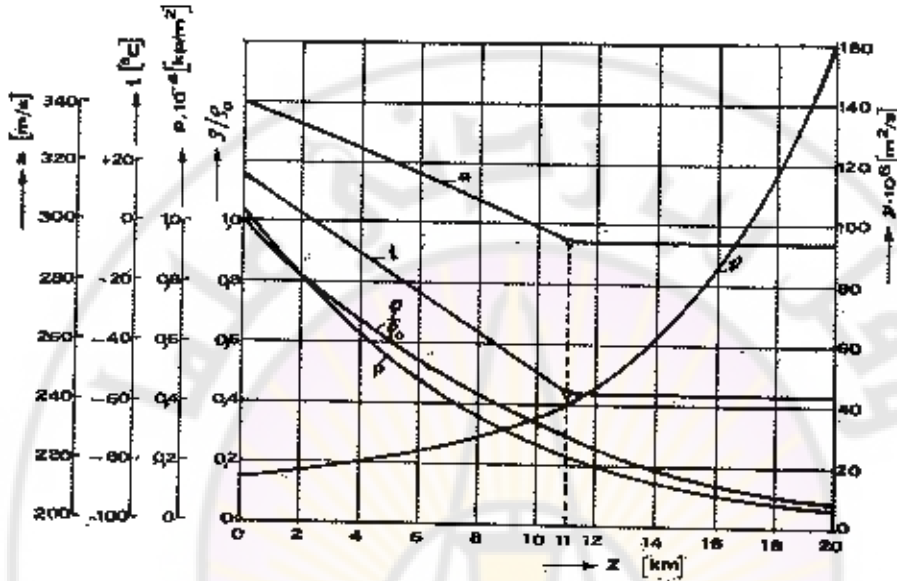
ومن معادلة تغير الحالة (4.6) تنتج علاقة الكثافة مع الضغط :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1 + \frac{R \cdot \theta}{g}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1,235} \quad (4.35)$$

وينتج بالتالي من (4.34) و (4.35) تغير الكثافة مع الارتفاع :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}^{\frac{1}{1,235}} &= \left(1 + \frac{\theta z}{T_0} \right)^{-\left(1 + \frac{R \cdot \theta}{g} \right)} = \left(1 + \frac{\theta z}{T_0} \right)^{-4,25} \\ &= \left(1 - 0,02257 z [\text{km}] \right)^{4,25} \quad (4.36) \end{aligned}$$

الشكل (٢٠٤) يبين تغير الضغط والكثافة ودرجة الحرارة حسب
(4.29) ، (4.34) ، (4.36) بالإضافة لسرعة الصوت والزوجة الحركية بدلالة



الشكل ٤ : تغير الضغط p ودرجة الحرارة t والكثافة ρ وسرعة الصوت a
واللزوجة الحركية ν مع الارتفاع z في الجو النظامي العالمي حسب [17]

الارتفاع عن سطح الأرض . وبموجب الفرضيات الأساسية للجو النظامي فإن هذه
العلاقات والقيم العددية الناتجة عنها تصلح للاستخدام حتى ارتفاع $z = 11 \text{ km}$ عن
سطح الأرض ، حيث تبدأ عند العروض الجغرافية الوسطية منطقة الستراتوسفير
Stratosphere .

لقد أثبتت التجارب الحديثة والقياسات التي أجريت بواسطة المناطيد ،
والانمار الصناعية خاصة ، أن درجة الحرارة عند ارتفاع $z > 11 \text{ km}$ لا تبقى ثابتة
بموجب (4.28) . ففي منطقة الستراتوسفير التي تمتد من 12 إلى 40 km فوق سطح
الأرض تصل درجة الحرارة من 50°C إلى 70°C . وفي منطقة الميزوسفير

Mesosphere الممتدة من ارتفاع 40 إلى 80 km ، وبسبب وجود غاز الأوزون Ozon ، ترتفع درجة الحرارة فوق الصفر وتصل عند حدود ارتفاع 60 km إلى $+50^{\circ}\text{C}$ ، ولكنها تعود فتنبسط تحت الصفر وتصبح عند ارتفاع 80 km بحدود -80°C وفي منطقة الجو المتأين (إيونوسفير) Ionosphere الممتدة من 80 إلى 450 km فإن درجات الحرارة تكون موجبة دائماً وتصل حتى $+600^{\circ}\text{C}$.

٣.٤ أسئلة مراجعة وتمارين

- س ١.٤ : ماهي القوانين والفرضيات الأساسية اللازمة لدراسة توازن كتلة غازية ؟
- س ٢.٤ : ماهي شروط التوازن المستقر لسائل متغير الحجم وغير متجانس ، وما هو تأثير توزيع درجة الحرارة على الاستقرار الستاتيكي ؟
- س ٣.٤ : برهن أن قيمة الأس البوليتروبي تتعلق بتدرج درجة الحرارة dT/dz .
- س ٤.٤ : استخرج العلاقة التي تعطي تغير الضغط ودرجة الحرارة والكثافة مع الارتفاع عندما يسود توازن بوليتروبي في طبقات الهواء الجوي .
- س ٥.٤ : في مواسير مياه الشرب يكون الضغط الزائد الماء في الطوابق العليا من الأبنية أصغر منه في الطوابق الأرضية ، بينما في مواسير غاز الاشتعال يكون العكس ، علل السبب .
- ت ١.٤ : بفرض أن تغير حالة الهواء الجوي يتم تحت شروط أديباتية ، والضغط عند سطح البحر $p_0 = 1.03 \text{ kg/cm}^2$ ، ودرجة الحرارة $t_0 = 18^{\circ}\text{C}$ ، والأس الأديباتي $\kappa = 1.4$ ، وثابتة الغاز $\frac{R}{M} = 29.3 \text{ m}^2/\text{mol}^{\circ}\text{K}$ ، فاهو الضغط الذي سيؤثر عليه مقياس ضغط موضوع على قمة جبل إيفرست التي ترتفع 8850 m ، وآخر موضوع عند البحر الميت الذي ينخفض 391 m عن سطح البحر .

الحل : من معادلة الحالة (4.5) ومن العلاقة (4.22) ينتج :

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{\kappa}{R T_0} \frac{z-1}{\kappa} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

وبالتعويض بالنم العددية نجد بالنسبة لقمة إيفرست :

$$\frac{p}{1,03} = \left[1 - \frac{0,4,8830}{20,3(18 + 273),1,4} \right]^{1,4/0,4} = (1 - 0,207)^{3,5} = 0,292 \Rightarrow p = 0,3 \text{ kp/cm}^2$$

وبالنسبة للبحر الميت حيث $z = -394 \text{ m}$:

$$\frac{p}{1,03} = \left[1 + \frac{0,4,394}{29,3,291,1,4} \right]^{3,5} = 1,0132^{3,5} = 1,05 \Rightarrow p = 1,8 \text{ kp/cm}^2$$

ت ٢٠٤ : متطاد يزن فارغاً (بدون غاز) F_G . يملأ بغاز خفيف فيصعد إلى ارتفاع z_1 ويبقى متوازفاً . مسا هو الوزن الذي يجب أن يرس من المتطاد حتى يصعد إلى ارتفاع $z_2 > z_1$ ، إذا فرضنا أن تغير حالة الغاز داخله والهواء خارجه يتم بدرجة حرارة ثابتة $T = \text{const}$ وحجم المتطاد V يبقى ثابتاً ، وأهملنا وزن الغاز المتدفق للخارج ، وكذلك دافعة أرخيدس المؤثرة على قمص المتطاد ؟

الحل : من قانون تغير الحالة الإيزوثيرمي (4.15) ومن قانون الارتفاع البارومتري (4.16) ينتج بوضع $z = z_2$ ، $p = p_2$ واعتبار $p_{1,2}$ كثافة الهواء ، $p'_{1,2}$ كثافة الغاز عند $z_{1,2}$ واعتبار التسارع الأرضي ثابتاً :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = e^{\frac{z_2 - z_1}{RT}} ; \quad \frac{p'_1}{p'_2} = \frac{\gamma'_1}{\gamma'_2} = e^{\frac{z_2 - z_1}{RT}} \quad (a)$$

في حالة توازن المتطاد عند الارتفاع $z_{1,2}$ يكون بموجب شرط الطفو :

$$F_{G1} = F_G = V(\gamma_1 - \gamma'_1) ; \quad F_{G2} = V(\gamma_2 - \gamma'_2) \quad (b)$$

وينتج أن الوزن اللازم قذفه باستخدام (ii) وإجراء إصلاحات بسيطة :

$$\Delta F_G = F_{G1} - F_{G2} = F_G \left(1 - e^{-\frac{z_2 - z_1}{RT}} \right) \quad (c)$$

فإذا كان فرق الارتفاع $\Delta z = z_2 - z_1$ صغيراً ينتج من (c) باعتبار $e^x \approx 1 + x$:

$$\Delta F_G \approx F_G \frac{z_2 - z_1}{RT} \quad (d)$$

★ ★ ★

الفصل الثالث

حركة السوائل غير القابلة والالقابلة للانضغاط

(هيدروديناميك وإيروكينماتيك)

المفاهيم والقوانين العامة

إن الدراسة الحركية (الكينماتيكية) للسوائل ، كقدمة أساسية للدراسة التحريكية ، تتناول الحركة الصرفة للكتلة سائلة مستمرة ، بغض النظر عن أسباب نشوئها . فهي إذن دراسة هندسية صرفة تربط الوضعية المكانية لجزيئات الكتلة المعتبرة مع الزمن ، بهدف إيجاد سرعة وتساوع كل من هذه الجزيئات .

وبالرغم من تنوع طبيعة حركة السوائل فإن هناك قوانين عامة تتميز في أساس تكوينها بطابع هندسي ، وتنطبق على كافة هذه الحركات . ويهدف هذا الفصل إلى توضيح المفاهيم العامة لحركة السوائل ، واستخراج قوانينها الأساسية .

٥ المفاهيم الأساسية لحركة السوائل

١.٥ معدل الجريان ومعدل السرعة

إذا كانت حركة الجسم الصلب يمكن إرجاعها إلى حركة نقطة مادية حرة أو مقيدة على مسار معين ، فإن حركة الكتلة السوائل يجب النظر إليها كحركة وسط سائل مستمر . وإذا كانت الدراسة السكونية للسوائل (الفصل الثاني) تعتمد

على كون السائل في حالة سكون بالنسبة لحدود الجملة الفيزيائية المعتبرة ، فإن الدراسة الحركية تعتبر ان السائل في حالة حوكة دائمة بالنسبة لحدود تلك الجملة ، التي يمكن أيضاً ان تكون حقيقية أو وهمية .

يطلق على المنطقة الاجالية التي يشغلها السائل المتحرك حقل الجريانات Flow field . وتكون الجزيئات المادية التابعة لهذا الحقل خاضعة لتأثير المحيط الخارجي ، بالإضافة للتأثير المتبادل فيما بينها ، مما يجعل دراسة الحركة الافراية لهذه الجزيئات معقدة .

لتحديد حقل الجريان نعتبر جملة إحداثيات ثابتة (مطلقة) ديكارتية مثلاً فيكون عند زمن معين t موقع كل جزيء حتمي من السائل محدداً بالإحداثيات x, y, z ، وتكون سرعة الجزيء ممثلة بشعاع :

$$\mathbf{V} = i u + j v + k w \quad (5.1)$$

حيث u, v, w مركبات السرعة و i, j, k أشعة الواحدة باتجاه المحاور x, y, z . ومنه نحصل على القيمة المطلقة لسرعة الجزيء

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (5.2)$$

يطلق على كافة أشعة السرعة لمجموع الجزيئات الحتمية لحقل الجريان اسم حقل السرعة Velocity field ، وتكون في الحالة العامة سرعة هذه الجزيئات مختلفة من حيث القيمة والاتجاه ، وتتغير في نقطة معينة مع الزمن أيضاً .

للحصول على فكرة تمثيلية واضحة عن حقل الجريان يعتمد الى اختيار عدد محدد من الجزيئات السائلية ورسم طريق أو مسارات كل منها ضمن حقل الجريان ، أو مجال معين منه ، وذلك بعد حسابه أو تحديده تجريبياً ، فتنتج لدينا صورة الجريان Flow pattern المطلقة . كما يمكن بطريقة أخرى أيضاً الحصول على صورة جريان آنية ، أي عند لحظة زمنية معينة t ، برسم المنحنيات المماسية لأشعة

السرعة في نقاط متعددة من حقل الجريان (راجع ٥.٥)

إن الدراسة الحركية التي تهدف لتحديد حقل السرعة و حقل التسارع Acceleration field يمكن أن تتم حسب طريقتين أساسيتين : طريقة لاغرانج وطريقة أويلر .

٢.٥ طريقة لاغرانج لدراسة حركة السوائل

تعتمد طريقة لاغرانج Lagrange-method لدراسة حركة السوائل على تتبع حركة الجزيئات السائلة الإفرادية على طول مساراتها . ولتمييز الجزيء الحجمي المراد دراسة حركته نختار من المسارات اللانهائية العدد التي يمكن أن يسلكها الجزيء ، ذلك المسار الذي يمر في اللحظة $t=0$ في النقطة $B(x_0, y_0, z_0)$ التي تمثل موضع الجزيء في لحظة البدء . ويتحدد مكان هذا الجزيء الحجمي في أي لحظة أخرى t بالإحداثيات :

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t) ; y = f_2(x_0, y_0, z_0, t) ; z = f_3(x_0, y_0, z_0, t) \quad (5.3)$$

التي تمثل معادلة المسار ، بينما يطلق على x_0, y_0, z_0, t متحولات لاغرانج . ونتبع مركبات السرعة والتسارع من (5.3) بالاستقاق الجزئي بالنسبة للزمن مرة أو مرتين :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} ; & b_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} \\ v &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} ; & b_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} \\ w &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} ; & b_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

ونحصل بالنسبة للضغط والكثافة على علاقات مشابهة .

وحيث أن طريقة لاغرانج تعتمد في دراسة حركة السائل على تتبع مصير كل جزيء حجمي منه لذلك يطلق عليها الطريقة المادية Material method . ولكنها لم تلاق نجاحاً عملياً بسبب تعقدها وللاصعوبات الرياضية التي تعترض الحلول العملية لمسائل الجريان باستخدامها .

٣.٥ طريقة أويلر لدراسة حركة السوائل

خلافًا لطريقة لاغرانج فإن طريقة أويلر Euler - Method لا تهتم بتتبع تفاصيل حركة كل جزيء حجمي من السائل ، بل تركز على معرفة سرعة الجزيئات في النقاط المختلفة من حقل الجريان ، وبالتالي على تحديد حقل السرعة وتخيره مع الزمن . وهذا يعني أنه بدلاً من ربط السرعة والقيم الهيدروديناميكية كالضغط ، بجزيء حجمي معين حسب الطريقة المادية ، فإن طريقة أويلر تعتبر نقطة معينة من حقل الجريان $B(x, y, z)$ وتبحث عن تغير السرعة في تلك النقطة مع الزمن . وبذلك يتم ربط القيم الهيدروديناميكية بالمكان والزمان ، وتمثل كتوابع لـ t, z, y, x التي يطلق عليها متحولات أويلر . وعليه فإن حركة السائل تصبح محددة بمعرفة مركبات السرعة .

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = g_1(x, y, z, t) \\ v &= \frac{dy}{dt} = g_2(x, y, z, t) \\ w &= \frac{dz}{dt} = g_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

وبحجم استمرارية الجريان فإن g_3, g_2, g_1 تمثل نوابع مستمرة ، وجيدة التعيين وقابلة للاشتقاق بالنسبة للمتحولات t, z, y, x . وعليه ينتج من تكامل (5.5) :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t) \\ y &= f_2(a, b, c, t) \\ z &= f_3(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} , \quad (5.6)$$

حيث a, b, c ثوابت يمكن تحديدها من شروط البدء : فإذا عزلنا من هذه المعادلات الزمن t نحصل على معادلة المسار الجزيء كان في اللحظة $t=0$ في النقطة $C_0(a, b, c)$.

لحساب التسارع حسب طريقة أويلر نلاحظ أنه في الحالة العامة تكون سرعة الجزيء الحجمي (المادي) الموجود لتوه في نقطة معينة $B(x, y, z)$ مختلفة عن سرعة الجزيء الذي غادر النقطة B أو الذي سيصل إليها ، كذلك تتغير السرعة عند انتقال الجزيء الحجمي من نقطة إلى أخرى من حقل الجريان ، وعليه فإن تسارع الجزيء الحجمي كتغير زمني للسرعة يتألف من قسمين : الأول ناتج عن تغير السرعة مع الزمن في كل نقطة من حقل الجريان ، وهذا ما يسمى بالتغير المكاني أو الموضعي للسرعة ، والثاني ناتج عن تغير السرعة أثناء حركة الجزيء باتجاه $x=f(t)$ ، $y=f(t)$ ، $z=f(t)$ ، وهذا ما يسمى بتغير الحمل أو الانتقال ، ومجموعها يساوي التغير المادي للسرعة .

إن حقل السرعة حسب (5.5) و (5.7) يحدد بالعلاقة الشعاعية :

$$V = f(t, r) , \quad (5.7)$$

حيث

$$r = i x + j y + k z \quad (5.8)$$

يمثل الشعاع المكاني لنقاط حقل الجريان بالنسبة للأحداثيات الديكارتية . وعليه ينتج التفاضل التام أو الكلي لشعاع السرعة :

$$DV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial r} dr \quad (5.9)$$

ومنه نجد بالاستقاق شعاع التسارع في اتجاه الجريان :

$$\mathbf{b} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} ; \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (5.10)$$

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dt}$ يمثل الكسر التفاضلي المادي ، $\mathbf{b}$ يمثل التسارع المادي Substantial acceleration ، ويمكن تحديده (قياسه) من قبل مراقب يتحرك مع الجزيء الحجمي المعتبر ضمن حقل الجريان ، أي من نقطة مراقب في جملة إحداثيات نسبية ؛ $\partial \mathbf{V} / \partial t$ يمثل التسارع المكاني Local acceleration ، ويمكن تحديده من قبل مراقب ساكن ، أي من نقطة مراقبة في جملة إحداثيات مطلقة ، وهو يعبر عن تغير شعاع السرعة مع الزمن في نقطة معينة $B(x, y, z)$ ويمثل الفرق :

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.11)$$

تسارع الحمل Convective acceleration ، ويعبر عن تغير شعاع السرعة أثناء حركة الجزيء المادي . وعليه فإن العلاقة (5.10) تعني :

$$\text{التسارع المادي} = \text{التسارع المكاني} + \text{تسارع الحمل}$$

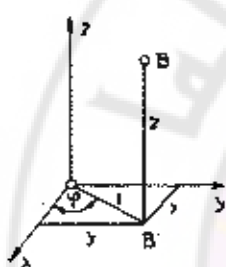
إن مركبات شعاع التسارع باتجاه المحاور x, y, z تنتج من (5.10) بسهولة إذا لاحظنا أن $u = dx/dt, v = dy/dt, w = dz/dt$ ، وبالتالي فإن الكسر التفاضلي المادي يأخذ الشكل التالي :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.12)$$

وعليه نجد باعتبار مركبات شعاع التسارع قسمل التغيرات الزمنية الكلية لمركبات شعاع السرعة :

$$\left. \begin{aligned} b_x &= \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ b_y &= \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ b_z &= \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} (5.13)$$

حيث يمثل الطرف الأيسر مركبات شعاع التسارع المادي والطرف الأيمن مجموع مركبات شعاع التسارع المكافئ وتسارع الحمل .



في حالات معينة لمائل الجريان يفضل استخدام جملة الإحداثيات الأسطوانية r, φ, z بدلاً من الديكارتية المتعامدة x, y, z ، الشكل (١.٥) . فإذا اعتبرنا $w \equiv V_z, V_\varphi, V_r$ مركبات شعاع السرعة في الإحداثيات الأسطوانية فيكون :

$$\mathbf{V} = e_r V_r + e_\varphi V_\varphi + e_z V_z \quad (5.14)$$

حيث $e_{r,\varphi,z}$ أشعة الواحدة على محاور الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية الأسطوانية . وحيث أنه حسب الشكل (١.٥) :

$$x = r \cos \varphi ; y = r \sin \varphi ; z \equiv z \quad (5.15)$$

فإن العلاقة (5.13) تأخذ الشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} b_r &= \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} \\ b_\varphi &= \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} \\ b_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} (5.13-a)$$

بعد تحديد حقل التسارع بموجب (5.13) فإن الدراسة التحريكية

(الديناميكية) لحقل الجريان تعتمد أساساً على قانون نيوتن الأساسي
للتحريك : القوة = الكتلة $\times$ التسارع (راجع الفصل الرابع) .

إن طريقة أويلر لدراسة حركة السوائل المعروفة باسم الطريقة المكانية Local method تتميز بالمقارنة مع الطريقة المادية بسهولة وخاصة من ناحية المعالجة الرياضية ، حيث يمكن الاستفادة بشكل جيد من إمكانية استخدام التحليل الشعاعي . لذلك فهي الطريقة المعتمدة بشكل أساسي في دراسة مسائل الجريان ، وخاصة تلك التي يعالجها ميكانيك السوائل التطبيقي .

٤.٥ تصنيف مرطبات السوائل (الجريانات)

٤.٥.١ الجريانات غير المستقرة والمستقرة

في الحالة العامة لحركة السوائل فإن شعاع السرعة يتغير من حيث القيمة والاتجاه من نقطة إلى أخرى في حقل الجريان ، كما يتغير أيضاً في نقطة محددة $B(x, y, z)$ مع الزمن ، أي أن السرعة تكون حسب (5.5) أو (5.7) تابعاً للزمان والمكان . وسنجد فيما بعد أن الضغط p والكثافة ρ في حالة السوائل القابلة للانضغاط يتغيران أيضاً زمانياً ومكانياً :

$$p = p_1(t, \mathbf{r}) \equiv p_1(t, x, y, z) ; \rho = \rho_2(t, \mathbf{r}) \equiv \rho_2(t, x, y, z) . \quad (5.16)$$

يطلق على هذا النوع من حركة السوائل الجريان غير المستقر Unsteady flow وتظهر أمثاله عند تحريك جسم صلب في سائل ، وعند تفريغ سائل خزائن بواسطة فتحة جانبية ، وحول جناح طائرة عند اهتزازها ، وكذلك في أنبوب الدفع لضخمة مكبسية وفي حالات أخرى كثيرة .

أما إذا لميز حقل الجريان بأن السرعة في أية نقطة محددة منه تبقى ثابتة مع الزمن ، وتتغير مسع المكان فقط ، فيطلق على هذا النوع من حركة السوائل

الجريان المستقر Steady flow . وفي هذه الحالة فإن سرعة كل جزيء حتمي يصل الى نقطة معينة تساوي تماماً الى سرعة الجزيء الذي غادر تلك النقطة لتوه . وينطبق هذا على بقية القيم الهيدروديناميكية كالضغط والكثافة . فهي كلها توابع مكانية صرفة :

$$V = f_1(r) ; \quad p = f_2(r) ; \quad \rho = f_3(r) \quad (5.17)$$

أو بشكل مركبات وبدلالة الإحداثيات الديكارتية :

$$u = f_1(x,y,z) ; v = f_2(x,y,z) ; w = f_3(x,y,z) ; p = f_4(x,y,z) ; \rho = f_5(x,y,z) \quad (5.18)$$

وعليه فإن كافة المشتقات الجزئية بالنسبة للزمن لمر كبات السرعة والضغط والكثافة تكون معدومة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} \equiv \frac{\partial w}{\partial t} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0 \quad (5.19)$$

وهذا يعني حسب (5.13) أن كافة مر كبات التسارع المكاني في حالة الجريان المستقر تكون معدومة ، ويصبح التسارع المادي مساوياً لتسارع الحمل . وفقط في حالة الجريان الانسحافي المنتظم المستقر Uniform flow لسائل مثالي ، الذي يتميز بسرعة ثابتة في كل نقطة من حقل الجريان قيمة واتجهاً $V = \text{const}$ ، تكون مر كبات التسارع المادي جميعها مطابقة للصفر وكذلك التفاضلات التامة للضغط والكثافة :

$$\frac{DV}{Dt} \equiv 0 \Rightarrow \frac{Du}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} = \frac{Dw}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} \equiv 0 \quad (5.20)$$

بناء على ما تقدم نصل الى النتيجة التالية :

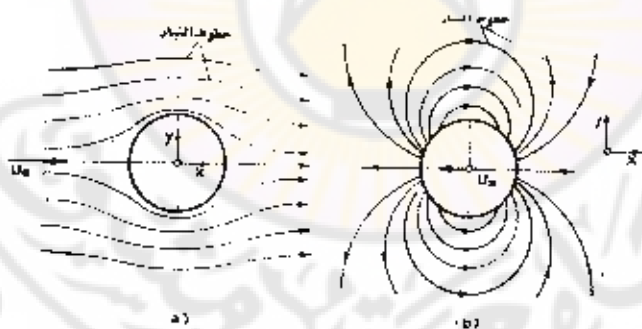
الجريان غير مستقر : $\mathbf{b} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} ; \mathbf{V} = f(t, \mathbf{r})$

الجريان مستقر : $\mathbf{b} = \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} ; \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0 ; \mathbf{V} = f(\mathbf{r})$

الجريان مستقر انحائي ومنتظم : $\mathbf{b} = 0 ; \mathbf{V} = \text{const}$

إن صفة الاستقرار أو عدم الاستقرار للجريان ليست بالضرورة من الخواص الفيزيائية المميزة ، ذلك أن نفس الجريان يمكن تحت شروط معينة أن يكون مستقرًا أو غير مستقر .

لنعتبر مثلًا الجريبات حول أسطوانة دائرية لانهاية الامتداد ، الشكل (٢.٥) . فإذا كان التيار الوارد إلى الأسطوانة ذا سرعة ثابتة بالاتجاه الأفقي تساوي U_∞ ، وراقبنا الجريان من مجموعة إحداثيات x, y مثبتة على الأسطوانة ، الشكل (٢.٥ - a) ، فإن السرعة في كل نقطة من حقل الجريان تكون ثابتة مع الزمن من حيث القيمة والاتجاه ، وبالتالي يكون الجريان حول الأسطوانة



الشكل ٢.٥ : الجريان المستقر وغير المستقر حول أسطوانة دائرية .
الجريان مستقر في جملة إحداثيات نسبية مثبتة على الجسم الساكن الذي يمر عليه تيارٌ بسرعة U_∞ (a) ، الجريان غير مستقر في جملة إحداثيات مطلقة مثبتة في سائل ساكن بينما الجسم يتحرك بسرعة U (b) .

بالنسبة لمجموعة الاحداثيات النسبية هذه مستقراً . أما إذا حركنا الاسطوانة في سائل ساكن بسرعة ثابتة U_∞ ، الشكل (٢.٥ - b) ، فإن عملية الجريان حول الاسطوانة لا تختلف فيزيائياً عن العملية السابقة ، ولكن حركة السائل تكون في هذه الحالة وبالنسبة لمجموعة إحداثيات مطلقة ، أي مثبتة في السائل الساكن ، غير مستقرة ، ذلك لأن السرعة في نقطة معينة من حقل الجريان تزداد مع اقتراب الاسطوانة منها وتقص مع ابتعادها عنها ، فهي إذن تتغير مع الزمن .

وكمثال آخر عملي فإن الجريان حول قارب ، يسبح في نهر هادئ ، يكون مستقراً بالنسبة لشخص يراقب الجريان من القارب ، وغير مستقر بالنسبة لشخص يراقبه من الشاطئ .

وبما أن دراسة الجريان المستقرة أسهل من دراسة الجريانات غير المستقرة ، فإنه حيث تتاح الإمكانية يتم اختيار محاور الإحداثيات ، بحيث يكون الجريان بالنسبة لها مستقراً .

٢.٤.٥ الجريانات الثمونية ، الثنائية ، والواحدية المقاسي

إذا تميز حقل الجريان بأن المركبات الثلاثة لشعاع السرعة w, v, u تختلف عن الصفر ، فيطلق على هذا النوع من حركة السوائل الجريانات الثلاثية لمقاس (البعد) Three-dimensional أو الثمونية ، وتنطبق عليه العلاقات (5.5) أو (5.18) حسب ما يكون غير مستقر أو مستقراً .

وعندما يتميز حقل الجريان بأن كافة الجزيئات الواقعة في مستويات موازية لمستوى ثابت يتم تحديده تقوم بنفس الحركة تماماً ، وبالتالي تكون صورة الجريان في هذه المستويات المتوازية واحدة ، وكافة جزيئات السائل الواقعة على أي مستقيم عمودي عليها تتعرض لنفس المصير ولا تقوم بأية حركة باتجاهه ، فنسمي هذا النوع من حركة السوائل الجريانات الثنائية المقاس Two-dimensional

أو المستوي ، لأنه يكفي بدراسة الجريان في مستو واحد فقط مثل المستوي xy . ويتحدد حقل السرعة بمركبتين فقط لشعاع السرعة u و v مختلفتين عن الصفر ، بينما تتعذر المركبة الثالثة في كامل حقل الجريان . وعليه يكون في حالة الجريان المستقر :

$$u = f_1(x, y) ; v = f_2(x, y) ; w \equiv 0 ; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (5.21)$$

هناك حالات مختلفة وهامة من مسائل الجريان العملية يمكن معالجتها على أساس اعتبارها جريانات مستوية . فالجريان العمودي على الخط المولد لأسطوانة لانهاية الامتداد هو جريان ثنائي المقاس وتكفي دراسة الجريان حول دائرة في المستوي xy ، الشكل (٢.٥) . كما أن الجريان حول الجناح الحامل لطائرة Airfoil ، والذي امتداده أكبر بكثير من طول وتر مقطعه ، يمكن اعتباره بالنسبة للمقاطع البعيدة نسبياً عن نهايته جرياناً مستوياً ، وبالتالي الاكتفاء بدراسة الجريان حول بروفييل (مقطع) Profile منه .

وعندما يتميز حقل الجريان بأن شعاع السرعة يتعلق باتجاه محور واحد فقط (x مثلاً) ، بينما تكون الحركة معدومة في الاتجاهين المتعامدين مع هذا المحور (z, y) ، فنسمي هذا الجريان وحيد المقاس One-dimensional أو خطياً . وتكون المعادلة الحركية لهذا الجريان في الحالة المستقرة :

$$u = f(x) , v \equiv w \equiv 0 ; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (5.22)$$

إن الجريان في الأنابيب والأقنية والمجاري المشابهة ، يتم بصورة أساسية في اتجاه محاور هذه الأنابيب والأقنية ، وبالتالي يمكن دراسته كجريان خطي يخضع للعلاقة (5.22) ، إذا اعتبرنا المحور x منطبقاً على محور الأنبوب s والسرعة u تمثل سرعة التيار الحجمي الموزعة بانتظام على كامل مقطع الأنبوب المتعامد مع محوره ، والذي يمكن ان يتغير باتجاه s .

في واقع الأمر فإن كافة الجريانات هي ثلاثية المقاس . ولكن لإكمال إحدى مركبات السرعة ، بسبب كونها أصغر بكثير من المركبتين الأخريتين ، ودراسة الجريان على أساس أنه مستو ، يؤدي لتسهيلات رياضية كبيرة ، ويسمح بتطبيق طرق خاصة لميكانيك السوائل تقدم حلولاً عملية تكون أقرب إلى الواقع ، كلما أمكن اعتبار الجريان مثالياً (عديم الاحتكاك) . أما دراسة الجريانات على أساس أنها خطية فينظر إليها كخطوة تقريبية أولية فقط . فالسرعة المحورية في الأنابيب لا تتغير فقط في اتجاه المحور وإنما في الاتجاه العرضي أيضاً . لذلك يعتمد إلى إدخال قيم ثابتة تجريبية في القوانين المستخدمة لحساب مثل هذه الجريانات كجريانات خطية بهدف تقريب النتائج قدر الامكان من الواقع والاستفادة من سهولة الدراسة على هذا الأساس .

٣.٤.٥ الجريانات الصفائحية والمضطربة

إن تصنيف الجريانات حسب (١.٤.٥) و (٢.٤.٥) ينطبق على الجريانات المثالية ($\tau = 0$) والحقيقية ($\tau > 0$)

تصنف الجريانات الحقيقية ، التي سنعالجها بالتفصيل بعد دراسة الجريانات المثالية ، حسب طبيعة الجريان إلى نوعين أساسيين : الجريانات الصفائحية والمضطربة Laminar and turbulent flows .

يتميز الجريان الصفائحي بأن جزيئات السائل تتحرك بشكل طبقات أو صفائح Laminar رقيقة متوضعة فوق أو داخل بعضها البعض ، بحيث لا يحدث أثناء الحركة أي تمازج أو اختلاط بين جزيئات الطبقات . وتزلق كل طبقة على الأخرى بسرعة تزداد كلما ابتعدنا عن جدار الجسم .

وبالعكس من ذلك يتميز الجريان المضطرب بأن جزيئات السائل تقوم بحركة اعتباطية لا تخضع لنظام معين تؤدي لعملية اختلاط وتمازج مستمر بين

الجزيئات وفي كافة الاتجاهات . وينجم عن ذلك أن قيم السرعة وكذلك الضغط في نقطة محددة من حقل الجريان تتغير باستمرار مع الزمن .

إن الغالبية العظمى من الجريانات العملية تكون ذات طبيعة مضطربة . ويكون الجريان في الأنابيب والأقنية مثلاً صفائحيًا عندما يكون السائل في الحالة العامة ذا لزوجة كبيرة أو أن سرعته في اتجاه محور الأنبوب أو القناة

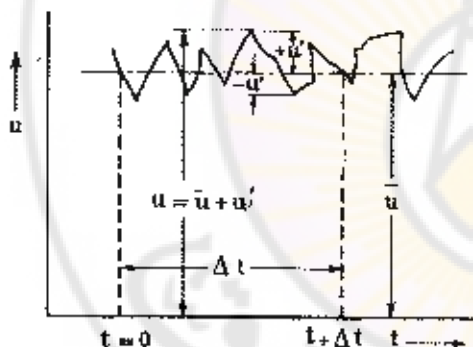


الشكل ٣.٥ : تجربة رينولدز لتوضيح الجريانات الصفائحي حيث $V < V_{cr}$ (a) ؛ والمضطرب حيث $V > V_{cr}$ (b) .

صغيرة نسبياً . وتؤكد التجارب ، التي قام بها لأول مرة « رينولدز » عام 1883 ، أن الجريان يبقى صفائحيًا طالما أن السرعة لم تتجاوز قيمة معينة يطلق عليها السرعة الحرجة V_{cr} . Critical velocity . وتصبح حركته مضطربة عندما تتجاوز السرعة قيمة V_{cr} . ويمكن إثبات ذلك تجريبيًا إذا جعلنا خيطاً رفيعاً من سائل ملون بالجبر ينبعث من فوهة نفثة صغيرة المقطع داخل أنبوب يجري فيه ماء ، فنلاحظ أن خيط الجبر يأخذ اتجاهًا مستقيمًا في حالة الجريان الصفائحي ($V < V_{cr}$) ، الشكل (٣.٥ - a) . أما إذا زادت سرعة الماء في الأنبوب عن قيمة معينة ، يمكن تحديدها ، فإن خيط الجبر يتفكك بعد مسافة قصيرة من فوهة النفثة ويلوّن الماء في كامل مقطع الأنبوب ، الشكل (٣.٥ - b) ، مما يؤكّد طبيعته المضطربة ($V > V_{cr}$) .

على أساس ما تقدم فإن الجريان الصفائحي يمكن أن يكون مستقرًا أو غير

مستقر ، أما الجريان المضطرب فهو دائماً غير مستقر . ولكن إذا نظرنا الى الجريان المضطرب ككل ولاحظنا أنه ذو اتجاه رئيسي دائماً ، فبالإمكان ، كما سنرى عند الدراسة التفصيلية للجريانات المضطربة ، أن نتصور نموذجاً حركياً لهذا الجريان يعتمد على تحليل الحركة المضطربة إلى حركة رئيسية وحركات عرضية عليها مشوشة . فإذا حسبنا سرعة الجريان الرئيسي خلال فترة زمنية طويلة نسبياً Δt فانت هذه السرعة الوسطية زمنياً $\bar{V}$ Temporal mean Velocity في نقطة معينة تكون ثابتة مع الزمن ، وبالتالي يمكن اعتبار الجريان الرئيسي شبه مستقر Quasi-steady ، بينما تتذبذب قيمة السرعة الآنية V في تلك النقطة حول قيمة $\bar{V}$ بمقدار V' . فإذا فرضنا $\bar{u}$ ، $\bar{v}$ ، $\bar{w}$ مركبات $\bar{V}$ في نقطة معينة ؛ u' ، v' ، w' تمثل تذبذبات السرعة Velocity fluctuation التي يمكن أن تكون سالبة أو موجبة ؛ u ، v ، w مركبات السرعة الآنية فتكون (الشكل ٤.٥) :



الشكل ٤.٥ : التذبذب المضطرب
للمركبة السرعة u في الجريانات
حول قيمة السرعة الوسطية زمنياً
 $\bar{u}$. نفس الشيء ينطبق على
المركبتين v ، w والضغط p .

$$u = \bar{u} + u' ; v = \bar{v} + v' ; w = \bar{w} + w' , \quad (5.23)$$

ويكون بالنسبة للضغط أيضاً :

$$p = \bar{p} + p' . \quad (5.24)$$

على هذا الأساس تبسط دراسة الجريانات المضطربة ، ولكنها تبقى أعقد بكثير من دراسة الجريانات الصفائحية .

ويجدر التنويه هنا ، كنتيجة مسبقة ، أن الانتقال من الجريان الصفائحي إلى المضطرب لا يتعلق بسرعة الجريان فقط ، وإنما أيضاً بالطول المميز للجسم ، وبتزوجة السائل الحركية ν . وبالتحديد فهو يتعلق بالعدد التشارحي (اللابعدي)

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (5.25)$$

الذي أعطاه عام 1908 الفيزيائي الألماني سومرفيلد A. Sommerfeld (1868 - 1951) اسم عدد رينولدز Reynolds - number (في [7]) تخليداً للعالم الإنجليزي رينولدز مكتشف نظرية الاضطراب . فإذا كانت Re_{cr} يمثل عدد رينولدز الحرج فيكون :

$Re < Re_{cr}$	عندما	الجريان صفائحي
$Re > Re_{cr}$	عندما	الجريان مضطرباً

(5.26)

٤.٤.٥ الجريانات تحت الصوتية ، الصوتية ، فوق الصوتية

حسب قابلية السائل للانضغاط أو التمدد وبالتالي لتغير كثافته تحت تأثير الضغط ودرجة الحرارة يميز بين جويانات غير قابلة للانضغاط ($\rho = \text{const}$) و جويانات قابلة للانضغاط ($\rho \neq \text{const}$) Incompressible flows و Compressible flows .

في حدود السرعات الصغيرة جداً والصغيرة فإن تغير الكثافة في حالات عملية عديدة للجريانات يكون صغيراً لدرجة يمكن إهماله ومعالجة هذه الجريانات كأنها غير قابلة للانضغاط . أما عند سرعات متوسطة أو كبيرة وخاصة كبيرة جداً فإن تغير الكثافة يكون كبيراً ويؤثر بشكل حاسم على حركة جزيئات السائل في حقل الجريان وبالتالي لا يجوز إهماله .

كمقياس لتحديد مدى تأثير الانضغاطية على القيم الأيروديناميكية والغازديناميكية لحقل الجريان يستخدم العدد التشابهي :

$$Ma = V/a \quad (5.27)$$

المعروف باسم عدد ماخ Mach-number والذي يمثل النسبة بين السرعة الموضعية للجريان V وسرعة الصوت a . وقد أدخل أكازيت Ackeret عام 1928 تعريفاً للعالم ماخ (1838 - 1916) E. Mach (حسب [7a]) . وحسب القيمة العددية لـ Ma فإننا نميز بين الجريانات تحت الصوتية Subsonic ويكون $Ma < 1$ ؛ الجريانات الصوتية Sonic ويكون $Ma = 1$ ؛ الجريانات فوق الصوتية Supersonic ويكون $Ma > 1$. وتقسيم أدق يميز حسب [81] المجالات التالية :

$Ma < 0,3$	تأثير الانضغاطية مهمل ، الجريان يعالج كأنه غير قابل للانضغاط
$0,3 < Ma < 0,5$	جريان تحت صوتي منخفض
$0,5 < Ma < 0,8$	جريان تحت صوتي عالٍ
$0,8 < Ma < 1,2$	جريان فوق صوتي Transsonic يظهر فيه مجال تحت و فوق صوتي
$1,2 < Ma < 3$	جريان فوق صوتي بالمعنى الضيق للكلمة
$Ma > 3$	جريان فوق صوتي عالٍ Hypersonic

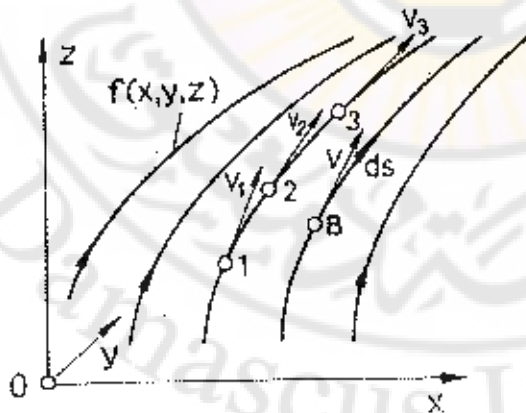
٥.٥ خط المصدر ، خط التيار ، أنبوبة التيار

إن طريقة لاغرانج المادية لدراسة حركة السوائل (٢٠٥) تعتمد على معرفة الطريق التي تسلكها كل جزيئة سائلة ، أي خط المسار Path line . فإذا

رسمنا عدد، من هذه الخطوط الجزيئات مختلفة ، بعد استخراج معادلة خط المسار، أو بعد تصويرها فوتوغرافياً باستخدام إحدى طرق التوثيق Visualization كالتلوين بالخبر أو الدخان أو رش مُندف من المواد الصلبة الخفيفة مثل برش وريقات الألمنيوم بقياس $0.2 - 0.5 \text{ mm}$ [4] [35] [82] ، فنحصل على صورة واضحة للجريان نطلق عليها صورة خطوط المسار .

خط المسار يمثل الطريق الفعلية التي تسلكها الجزيئة السائلة في حقل الجريان ، ويبين اتجاهات السرعة التي تأخذها الجزيئة تبعاً مع الزمن .

وبعجب طريقة أويلو المكانية ، التي تعتمد على تحديد حقل السرعة من حيث القيمة والاتجاه ، يمكن الحصول على صورة واضحة للجريان برسم مجموعة من المنحنيات المتجاورة ، بعد حسابها نظرياً أو تحديدها تجريبياً بالتصوير الفوتوغرافي ، التي تكون في لحظة زمنية معينة أشعة السرعة لكافة الجزيئات السائلة الواقعة عليها ، أما في كل نقطة . أمثال هذه المنحنيات تسمى خطوط التيار Stream line ، ويطلق على مجموعها صورة خطوط التيار أو باختصار صورة الجريان ، الشكل (٥.٥) .



الشكل ٥.٥ :
تعريف خط التيار
واستخراج معادلته التفاضلية

خط التيار يمثل في لحظة زمنية معينة المنحني الذي يكون المماس عليه في كل نقطة منطبقاً على شعاع السرعة في تلك النقطة .

إن خطوط التيار تمثل إذن واسطة هندسية لتوضيح حركة السائل . وقد استخدمناها قبلاً في الشكل (٢.٥) لتبيان الفرق بين الجريانات المستقرة وغير المستقرة . ويتضح أنه من معرفة صورة خطوط التيار يمكن تحديد اتجاه الجريان في كل نقطة ، إذ يكون مطابقاً لاتجاه شعاع السرعة ، تماماً كما هو الحال بالنسبة لخطوط القوة لحقل قوى مغناطيسي مثلاً ، التي تؤثر على اتجاه القوة الموضعية في كل نقطة .

من الناحية الرياضية فإن خط التيار يمثل المنحني التكاملي لميل شعاع السرعة . فإذا كان ds عنصراً خطياً من خط التيار المار في النقطة H ، V شعاع السرعة في تلك النقطة ، الشكل (٥.٥) ، فيكون تعريفاً $V \parallel ds$ ، وبالتالي يكون الجداء الشعاعي :

$$V \times ds = 0 \quad (5.28)$$

يمثل المعادلة الشعاعية لخط التيار . فإذا حللنا V إلى مركباته بموجب (5.1) ، وكذلك ds ، حيث :

$$ds = i dx + j dy + k dz \quad (5.29)$$

وكتبنا (5.28) بشكل محدّد ينتج :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad (5.30)$$

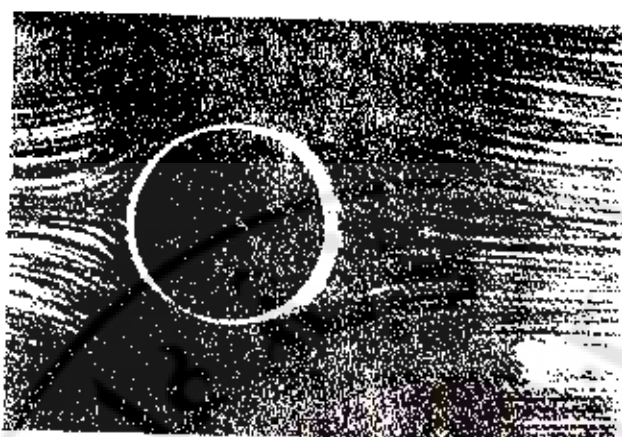
التي تمثل المعادلة التفاضلية لخط التيار بصيغتها العامة . وعلى أساسها يمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية :

في حالة الجريانات غير المستقرة تكون مركبات السرعة تابعة للمكان والزمان ، وبالتالي فإن خطوط التيار تغير شكلها مع الزمن ، ولكن يمكن الحصول على صورة آنية للجريان في لحظة زمنية معينة ، وذلك بتكامل العلاقة (5.30) على أساس اعتبار الزمن ثابتاً . وواضح ان خطوط التيار الآنية لا تكون متطابقة مع خطوط المسار ، أما في حالة الجريان المستقر ، وباعتبار أن مركبات السرعة لا تغير قيمتها مع الزمن في كل نقطة من حقل الجريان ، فإن خطوط التيار تبقى محافظة على شكلها وموضعها وتكون متطابقة مع خطوط المسار :

في الجريان المستقر تكون صورة خطوط التيار متطابقة مع صورة خطوط المسار

ومن الجدير بالانتباه أن صفة الاستقرار أو عدم الاستقرار لنفس الجريان تتعلق باختيار جملة الاحداثيات ، وبالتالي فإن صورة الجريان تتغير وفقاً لهذا الاختيار . والمهم هنا هي الحركة النسبية بين جملة الاحداثيات المختارة هذه والجسم المعتبر . وعليه لافرق بين صورة الجريان حول جسم ساكن في تيار يجري حوله ، وبين صورة الجريان حول جسم يتحرك في سائل ساكن ، إذا راقبنا الحركة في الحالة الأولى من جملة احداثيات ثابتة ، وفي الحالة الثانية من جملة احداثيات تتحرك مع الجسم بنفس السرعة ؛ ففي الحالتين يكون الجسم ساكناً بالنسبة لجملة الاحداثيات ، الشكل (٦.٥) ، (٧.٥) ، (٨.٥) .

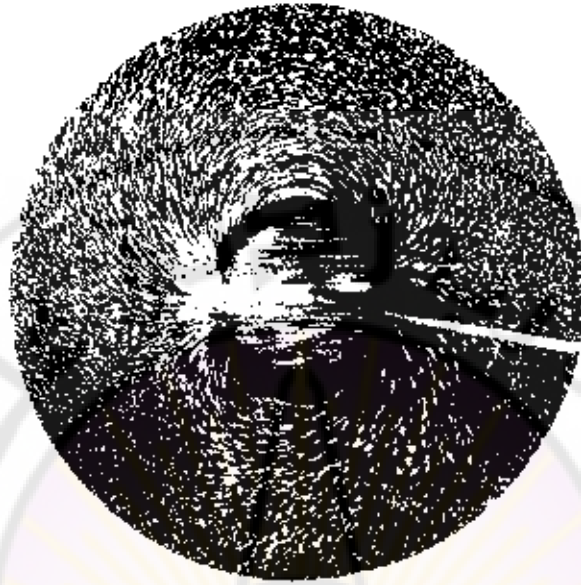
لقد طور ميكانيك السوائل التجريبي طرقاً متعددة وعملية لتقوية الجريان وإظهار خطوط التيار والمسار وتصويرها فوتوغرافياً بوسائل وطرق حديثة خاصة في التصوير والاضاءة . وتعتمد المخبر ومراكز البحث المتطورة ، مثلاً [٨٤] ، في دراساتها التجريبية لأهم المسائل الهيدروديناميكية والأيروديناميكية على هذه الطرق . ذلك أن معرفة صورة الجريان تسهل جداً الفهم الفيزيائي لعملية الجريان ، وتعتمد بالتالي لايجاد الحلول العملية لها .



الشكل ٦.٥ : الجريان المثالي حول أسطوانة حسب براندل (انظر [28]) . الاسطوانة ثابتة والكاميرا ثابتة والجريان من اليسار الى اليمين ، خطوط التيار تعود فتلتقي خلف الاسطوانة وتكون صورة متناظرة للجريان (انظر الشكل ٦.٥ - ب) .



الشكل ٧.٥ : الجريان المثالي حول اسطوانة حسب إيك [8] . الاسطوانة المثبتة بسلك دائري تتحرك الى اليمين في سائل ساكن (اتجاه الجريان الى اليسار) والكاميرا تتحرك بنفس السرعة . ونلاحظ في الصورة أن الجريان الذي يظهر داخل الاطار الدائري (تنتائية مستوية) لا يتغير على الجوانب حوله ، لأن صورة الجريان مطابقة تماماً للشكل (٦.٥) .

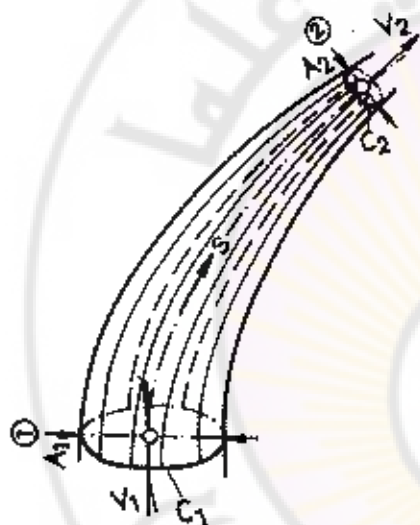


الشكل ٨.٥ : الجريان المثالي حول اسطوانة تتحرك في سائل ساكن كما تسجلها كاميرا فائقة ، حسب [٨١] . خطوط التيار المطلقة تمثلها خزمتان من الدوائر تبدأ من محيط الاسطوانة ، التي عوض عنها بسلك دائري ، وتنتهي عليه .

في المصادر المختصة بتكنيك القياسات في السوائل ، مثلاً [١٣٥] ، يوجد شرح واف لطرق ترمية الجريان والمواد المستعملة لذلك في الحالات المختلفة وفيما لهدف التجربة ولنوع السائل المتبر عندما يكون مائماً كماء أو غازاً كالهواء . ودون التعرض للتفاصيل نكتفي بالإشارة إلى أن أهم هذه الطرق تعتمد على إضافة مواد مرئية صغيرة الحجم وخفيفة الوزن على السطح الخارجي للسائل أو في داخله بحيث تقوم بحركة جزئيات السائل . هذه المواد يمكن أن تكون صلبة مثل ندف رقيقات الألمنيوم أو مادة الـ Piattherm الرغوية البلاستيكية أو مائعة ملونة مثل الخبر أو مادة الـ Pinakryptol الحمراء أو الخضراء وأحياناً اللبن المفروز (الميران) ، أو غازية مثل فقاعات الهيدروجين أو « غيمة » بخار التيلور Tellur أو دخان بعض الزيوت المحروقة . بالإضافة لذلك تستخدم لترتية الجريان طرق ضوئية وكهربائية . ركصدر أضواء عند التصوير الفوتوغرافي يستخدم الفلاش Flash وبعض الساسيق المضئبة لفترة زمنية محددة .

المحصل على صورة لخطوط المسار يفترض أن تكون الكثافة العددية للجزيئات المادية المنشورة على السائل قليلة وزمن الاضاءة طويل . أما الحصول على صورة لخطوط التيار فتتغير الجزيئات المادية بكثافة عديدة أكبر ويؤخذ زمن الاضاءة أقصر . وعندئذ ترمم كل جزيئة منشورة على الصفيحة الفوتوغرافية (الفيلم) خطاً قصيراً . هذه الخطوط تكمل بعضها البعض لتكوين حزمة من خطوط التيار .

من مفهوم خط التيار نصل بسهولة إلى مفهوم أنبوبة التيار Stream tube . فإذا اعتبرنا داخل حقل الجريان منحنياً مغلقاً C_1 ، الشكل (٩.٥) ، وأخذنا



كافة خطوط التيار التي تمر من نقاط هذا المنحني فنحصل على سطح أنبوبي الشكل يطلق عليه : أنبوبة أو « سطح » التيار .

إن أنبوبة التيار لا تسمح بمرور السائل عبر جدارها ، لأن ذلك سيعني وجود مركبة للسرعة عمودية على خط التيار ، وهذا ما يتناقض مع تعريفه . وعليه فإن كل أنبوبة تيار يمكن النظر إليها كأنبوب ذي جدران صلبة . فإذا قسمنا كامل حقل الجريان إلى عدد محدود من أنبوبات التيار نحصل على تصور بحجم

الشكل ٩.٥ : تتشكل أنبوبة التيار من خطوط التيار المارة من نقاط المنحني المغلق C_1 ، C_2 .

عن الجريان دون أن تتغير صورته . وتبقى في حالة الجريان المستقر كل أنبوبة تيار محافظة على شكلها وموضعها في حقل الجريان . أما في حالة الجريان غير المستقر فيكون لأنبوبة التيار شكل آني فقط ، ذلك أنه بين لحظة وأخرى تبدل الجزيئات السائلة التي تكون أنبوبة التيار .

يطلق على كمية السائل داخل أنبوبة التيار اسم خيط التيار Stream filament

وتتحرك جزيئاته في اتجاه وحيد منطبق على محور أنبوبة التيار ، المسمى خط التيار المركزي (الشكل ٩.٥) . ومن هنا جاءت تسمية دراسة الجريانات وحيدة البعد ، كالجريان في الأنابيب مثلاً ، باسم نظرية خيط التيار (راجع ٨) حيث يفترض أن السرعة (المثالية أو الوسطية) تكون موزعة بانتظام على كامل مقطع الأنبوبة وتتغير في اتجاه الجريان فقط . وباعتبار أن السائل لا يمكن أن يتسرب عبر جدار أنبوبة التيار فإن كتلة السائل التي تعبر أي مقطع من مقاطعها في واحدة الزمن تبقى ثابتة . وهذا ما يعبر عنه بشرط الاستمرار Continuity condition لأنبوبة التيار .

٦.٥ أسئلة مراجعة وتمارين

- ١.٥ : اشرح الفرق بين الطريقة المادية والمكانية لدراسة حركة السوائل .
- ٢.٥ : اشرح أسس تصنيف حركة السوائل وعدد أهم أصناف الجريانات .
- ٣.٥ : عرف الجريان المستقر وغير المستقر . هل الاستقرار خاصة فيزيائية ؟
- ٤.٥ : ما هو التسارع المادي لجزيئة سائلة ؟ استخرج معادلته في اتجاه x .
- ٥.٥ : اشرح مفهوم خط المسار وخط التيار واستخرج المعادلة التفاضلية للآخر .
- ٦.٥ : اشرح أسس نظرية خيط التيار وبيّن أهميتها التطبيقية .

ت ٩.٥ : إذا كان حقل الجريان لسائل محددًا بمركبات السرعة :

$$u = x + t \quad ; \quad v = -y + t \quad ; \quad w = 0$$

فالمطرب :

- ١ - أوجد معادلة خط التيار اللحظي ، ومعادلة خط التيار المار من النقطة $(-1, \dots)$ في اللحظة $t = 0$. ٢ - أوجد معادلة خط المسار للجزيئة السائلة التي كانت في اللحظة $t = 0$ موجودة في النقطة $(-1, -1)$. ٣ - إذا أصبح حقل الجريان مستقرًا ، بيّن كيف يمكن الحصول على صورة الجريان وحقل السرعة .

الحل : الجريان ثنائي المقاس ($w = 0$) وغير مستقر $V = F(x, y, t)$.

١ - من (5.30) نلتج المعادلة التفاضلية لحقل التيار :

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t} .$$

- ١٩٣ -

ميكانيك السوائل التكميلي ١٣٠٠

بكمالة هذه العلاقة على أساس أن الزمن ثابت ، نجد :

$$\ln(x+t) = -\ln(-y+t) + \ln C \Rightarrow (x+t)(-y+t) = C. \quad (a)$$

فإذا أعطينا للثابت C قيمة معينة فإننا نحصل في كل لحظة t على حزمة من خطوط التيار التي تمثلها قطع زائدة . ويتبع بصورة خاصة عندما $t=0$ ، $x=-1$ ، $y=-1$ أن $C=-1$. وبالتالي تصبح :

$$xy = t \quad , \quad (b)$$

وهي معادلة قطع زائد متساوي الأضلاع ، ويكون خط التيار المار من النقطة B واقعاً في الربع الثالث من المستوي xy .

٢ - من (5.4) يمكن أن نكتب :

$$u = \frac{dx}{dt} = x+t \quad ; \quad v = \frac{dy}{dt} = -y+t .$$

بوضع الزمن t منفرداً في الطرفين الأيمن ليصل من هاتين المعادلتين نحصل على معادلتين تفاضليتين خطيتين غير متجانستين وذات أمثال ثابتة حلها العام يعطى حسب [42] بالمعادلتين :

$$x = C_1 e^t - t - 1 \quad ; \quad y = C_2 e^{-t} + t - 1 \quad , \quad (c)$$

حيث C_1, C_2 ثابتين . ومنه ، يمكن تحديد إحداثيي كل نقطة من خط مسار الجزيئة بدلالة الزمن t . وبصورة خاصة ينتج خط المسار للجزيئة التي كانت في المبعضة $t=0$ في النقطة $B(-1, -1)$ بعد التعويض في (c) وعزل الزمن t :

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow x = -t-1 \quad ; \quad y = +t-1 \Rightarrow x+y = -2 \quad (d)$$

وهي معادلة مستقيم ، بينما خط التيار المار من نفس النقطة يتبع ضلع قطع زائد .

٣ - في حالة الجريان المستقر تصبح مركبتا السرعة مستقلتين عن الزمن :

$$v = -y \quad , \quad u = x .$$

ونجد بسهولة معادلة خط التيار من الشكل :

$$xy = \text{const} \quad , \quad (e)$$

التي تمثل حزمة من القطوع الزائدة المتساوية الأضلاع حيث يمكن للثابت أن يأخذ قيمة موجبة أو سالبة ويكون المحوران x و y مستقيمان مقاربان لهذه القطوع في اللانهاية . فإذا رسمنا حزمة من خطوط التيار وحددنا في نقاط معينة (y, x) شعاع السرعة من حيث القيمة ، $|V| = \sqrt{u^2 + v^2}$ ، والاتجاه نجد بسهولة أن السائل يتحرك من الأعلى والأسفل وبشكل في النقطة $x=y=0$ نقطة ركود تنعدم فيها السرعة . فإذا فرضنا أن خط التيار المنطبق

على المحور x قد «تصلب» ، كأن تصور أنه يمثل أرض صفيحة مسطوية أفقية ، نجد أن حقل الجريان يمثل حركة سائل قادم من اللانهاية ويرتطم بوجهي هذه الصفيحة .

ت ٢.٥ : إذا كانت مركبات سرعة الحقل الجريان معطاة :

$$u = -x ; v = 2y ; w = 5 - z ,$$

أوجد معادلة خط التيار المار من النقطة $(2, 1, 1)$ ؟

الحل : الجريان ثلاثي البعد ومستقر ، وحسب (5.30) نخرج المعادلة التفاضلية لخط التيار :

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{5-z} .$$

فإذا أخذنا المعادلة الأولى منها وأجرينا التكامل نجد :

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow x \sqrt{y} = \text{const} , \quad (a)$$

وإذا أخذنا المعادلة الثانية وأجرينا التكامل نجد أيضاً :

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{5-z} \Rightarrow \frac{5-z}{x} = \text{const} . \quad (b)$$

وبوضع $(b) = (a)$ نحصل على المعادلة العامة لخط التيار :

$$x \sqrt{y} = (5-z)/x = \text{const} , \quad (c)$$

التي تلتج منها معادلة خط التيار المار من النقطة H بعد تعويض قيمة إحداثياتها :

$$x \sqrt{y} = (5-z)/x = 2 . \quad (d)$$

٦ معادلة الاستمرار أو قانون انحفاظ الكتلة

إذا اعتبرنا حقل الجريان (أو أي جزء منه) لسائل ما فنقول إن حركة السائل في هذا الحقل (أو الجزء) مستمرة ، إذا لم تكن هناك أية تجاويف (cavity) أو مناطق انقطاع لا يشغلها السائل . في هذه الحالة فإن كتلة السائل في واحدة الزمن التي تعبر أي سطح مغلق مثبت في حقل الجريان تبقى ثابتة . وهذا ما يطلق عليه قانون انحفاظ الكتلة أو المادة . ويطلق على المعادلة التفاضلية التي تعبر عن هذا القانون معادلة الاستمرار Continuity equation ، التي صاغها لأول مرة العالم الروسي لومونوسوف M. W. Lomonossow (1711-1765) عام 1748 [16] .

١.٦ معادلة الاستمرار ومبرمة البعير (نظرية خيط التيار)

لاشتقاق معادلة الاستمرار في صياغتها البسيطة نعتبر أنبوبية التيار في الشكل (٩.٥)، التي تمثل جبهة فيزيائية مفتوحة أو جبهة جريان Flow system ، حيث قد تدخل مقطع الدخول ① الذي مساحته A_1 والمحدد بالمنحني المغلق C_1 كتلة معينة من السائل تخرج بكاملها من مقطع الخروج ② الذي مساحته A_2 والمحدد بالمنحني المغلق C_2 .

بفرض أن خيط التيار مستمر وخالي من الينابيع والبواعث ، أي أنه لا يمكن أن يظهر أي سائل جديد أو يختفي جزء من السائل المعتبر ، ولتكن $\rho = \rho(s)$ كثافة السائل التي نفرضها متغيرة في اتجاه الجريان s ، فتكون كتلة السائل في واحدة الزمن التي تعبر مقطعاً ما من أنبوبة التيار مساحته A والسرعة الموزعة عليه بانتظام V هي : $\dot{m} = \rho V A$. وتبقى هذه الكتلة بموجب قانون انحفاظ المادة ثابتة على طول أنبوبية التيار . وعليه تأخذ معادلة الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة الصيغة التالية :

$$\dot{m} = dm/dt = \rho V A = \text{const} \quad (\mathbf{V} \parallel \mathbf{A}); \Rightarrow d\dot{m} = 0 \quad (6.1)$$

حيث $\dot{m}$ كتلة السائل التي تعبر A خلال الفترة الزمنية القصيرة جداً dt ، A شعاع الناظم على السطح . يطلق على $\dot{m}$ غزارة التدفق الكتلي Rate of mass discharge أو التيار الكتلي ، وله واحدة القياس .

$$[\dot{m}] = [m/t] = \text{kg s}^{-1} = \frac{1}{9.81} \text{kp s m}^{-1} \quad (6.2)$$

ينبغي أن يذكر الجداء ρV كثافة التيار الكتلي . أما قيمة الثابت فتنتج من تطبيق (6.1) على مقطع مساحته معروفة بالإضافة لقيمة السرعة والكثافة . ويؤخذ

عادة مقطع الدخول ① أو الخروج ② (الشكل ٩.٥) حيث يتبع :

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \text{const} \quad (6.3)$$

في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط ، أي ذات الكثافة الثابتة $\rho = \text{const}$
 تأخذ معادلة الاستمرار (6.1) شكلاً أبسط :

$$\boxed{\dot{V} = dV/dt \equiv Q = VA = \text{const} \quad (V \parallel A); \quad d\dot{V} = 0} \quad (6.4)$$

حيث dV حجم السائل الذي يعبر A خلال dt . كما تصبح العلاقة (6.3)
 من الشكل :

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = \text{const} \quad (6.5)$$

التي تتحدد منها قيمة الثابت .

يطلق على $Q = \dot{V}$ غزارة التدفق الحجمي أو التيار الحجمي Volume flow
 وله واحدة القياس :

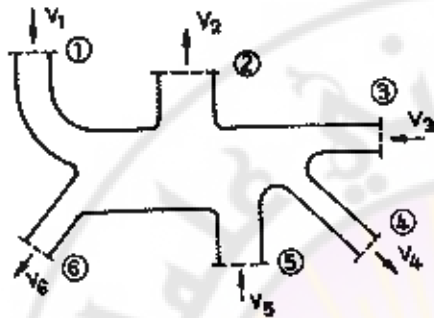
$$[Q] = [V/t] = \text{m}^3 \text{s}^{-1} \quad (6.6)$$

على أساس ما تقدم نصل إلى صياغة الجملة التالية :

شرط الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة يقضي في حالة السوائل
 القابلة للانضغاط بأن يكون التيار الكتلي كجداء لكثافة التيار الكتلي
 في مساحة المقطع ثابتاً ، وفي حالة السوائل غير القابلة للانضغاط بأن
 يكون التيار الحجمي كجداء للسرعة في مساحة المقطع ثابتاً ، وذلك على
 طول أنبوبة التيار .

إن معادلة الاستمرار بصيغتها (6.1) أو (6.4) تنطبق أيضاً على حالة توصيد

(وصل) أو تفريع مجموعة من أنابيب التيار ، كما في الشكل (١٠٦) ، التي يمكن تصورها عملياً بمثل شبكة من الانابيب لنقل الغاز أو الماء . ويكون في هذه الحالة :



الشكل ١٠٦ :

تطبيق معادلة الاستمرار في حالة وصل أو تفريع مجموعة من أنابيب التيار .

$$\sum_i \rho_i V_i A_i = \sum_j \rho_j V_j A_j \quad (\rho \neq \text{const}) \quad (6.7)$$

$$\sum_i V_i A_i = \sum_j V_j A_j \quad (\rho = \text{const}) \quad (6.8)$$

حيث $i = 1, 3, 5, \dots$ يشير الى مقاطع دخول السائل و $j = 2, 4, 6, \dots$ الى مقاطع خروجه . وهذا يعني أن مجموع التيارات الكتلية (أو الحجمية) الداخلة الى الجملة الفيزيائية المفتوحة يساوي الى مجموع التيارات الكتلية (أو الحجمية) الخارجة منها .

إن المعادلة (6.4) تسمح لنا باستخلاص نتيجة هامة جداً : كلما صغرت مساحة مقطع أنبوبة التيار تزداد السرعة ، وبالعكس . وعلى هذا الأساس يمكن الحصول على فكرة واضحة عن مناطق السرعة الأعظمية والأصغرية . فإذا رسمنا صورة الجريان بحيث نقسم حقل الجريان الى عدد لانهايمي من أنبوبات التيار ذات التيار الحجمي الواحد ، فيتضح بسهولة أن السرعة تزداد في المناطق التي تقتارب فيها خطوط التيار من بعضها ، وتقل في المناطق التي تبتاعد فيها خطوط التيار عن بعضها .

هذه النتيجة تنطبق على الجريانات غير القابلة للانضغاط عامة . ونطبق على الجريانات القابلة للانضغاط حتى سرعات أقل من سرعة الصوت . أما إذا زادت السرعة عن سرعة الصوت ، أي عندما يكون تغير الكثافة كبيراً ، فنكون هناك علاقة معاكسة تماماً بين السرعة والمقطع :

$$dm = 0 \Rightarrow d(\rho VA) = VA d\rho + \rho A dV + \rho V dA = 0$$

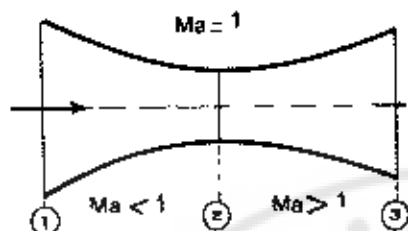
ومنه بعد التقسيم على ρVA ينتج :

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0} \quad (6.9)$$

نقي مثل حسب [23] صياغة أخرى لمعادلة الاستمرار للجريانات المستقرة القابلة للانضغاط . فإذا اعتبرنا الحالة الحدية التي يكون فيها التغير النسبي للكثافة أكبر بكثير من التغير النسبي للسرعة نجد :

$$\frac{d\rho}{\rho} \gg \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow A \sim \frac{1}{\rho} = \sigma \quad (6.10)$$

أي أن المقطع يتناسب طردياً مع الحجم النوعي للغاز . وحيث أن زيادة السرعة تؤدي لانقصان الضغط وبالتالي لزيادة الحجم النوعي فيجب توسيع المقطع للحصول على سرعات عالية أكبر من سرعة الصوت . وعلى هذا الأساس صممت نفثة لافال نسبة للمهندس السويدي دي لافال (1845 – 1913) ، والتي تشكل عنصراً أساسياً في بناء العنفات البخارية والغازية . وتتألف من أنبوب يتضيق في المقدمة تدريجياً حتى مقطع اصغري حرج ثم يتوسع تدريجياً ، الشكل (٢.٦) . في القسم المتضيق تتزايد السرعة حتى تبلغ سرعة الصوت في منطقة الاختناق ، ومن ثم تصبح السرعة فوق صوتية . ونجدر الإشارة هنا أن تفاصيل هذا الجريان تدخل في أبحاث الغاز ديناميك .



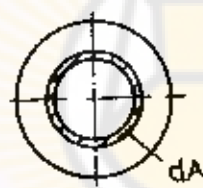
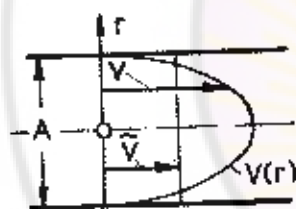
الشكل ٣.٦ : دفاعة لافان

① جريان تحت صوتي $Ma < 1$

② جريان صوتي $Ma = 1$

③ جريان فوق صوتي $Ma > 1$

إن تطبيق معادلة الاستمرار بصيغها الواردة أعلاه يستلزم ، كما ذكرنا ، أن يكون الجريان مستقراً ، والسرعة موزعة بانتظام على المقطع . وهذا ما ينطبق على الجريانات المثالية . أما في الحالة التي يكون فيها توزيع السرعة V على مقطع أنبوب التيار A غير منتظم ، كما هو الحال بالنسبة للجريان الحقيقي في الأنابيب ، الشكل (٣.٦) ، فيعتمد من أجل الإبقاء على صحة المعادلات السابقة إلى إدخال مفهوم كثافة التيار الكتلي الوسطية $\bar{V}$ في حالة السوائل



الشكل ٣.٦ : تعريف السرعة

الوسطية للتيار الحجمي (أو

كثافة التيار الكتلي الوسطية)

لتطبيق معادلة الاستمرار على

الجريانات الحقيقية .

المتغيرة الحجم ، ومفهوم السرعة الوسطية للتيار الحجمي Mean Velocity $\bar{V}$ في حالة السوائل الثابتة الحجم . فإذا جزأنا أنبوب التيار إلى عدد لانتهائي من أنبوبات التيار ذات المقاطع اللانهائية للصغر dA بحيث يمكن اعتبار السرعة موزعة عليها بانتظام فينتج بالنسبة للتيار الكتلي الإجمالي على غرار (6.1) :

$$\dot{m} = \rho \bar{V} A = \int_{(A)} \rho V dA \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{A} \int_{(A)} V dA \quad (6.11)$$

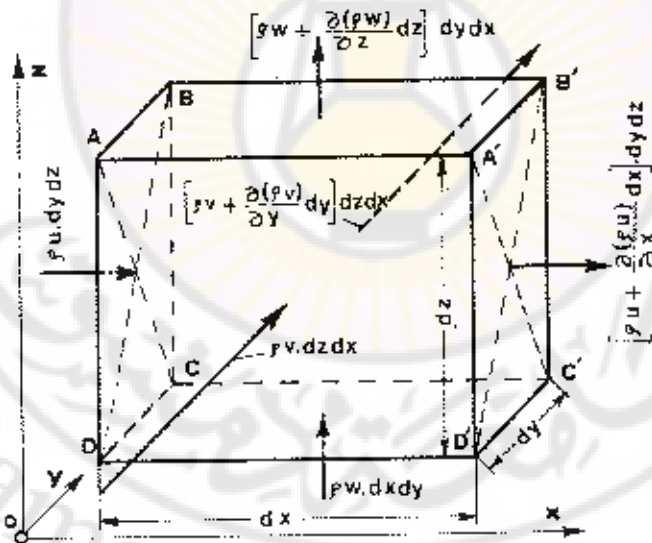
وبالنسبة للتيار الحجمي الاجمالي على غرار (6.4) :

$$Q = \bar{V} A = \int_{(A)} V dA \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{A} \int_{(A)} V dA \quad (6.12)$$

إن الحساب العملي للجريان في الأنابيب يعتمد أساساً على $\bar{V}$ أو $\bar{\rho} \bar{V}$ ، كما سنرى فيما بعد .

٢.٦ معادلة الاستمرار العامة

نعتبر الحركة العامة غير المستقرة لسائل قابل للانضغاط $V = f(x, y, z, t)$ ، ونقتطع من داخل حقل الجريان جزءاً حجمياً ما ، نفرضه للسهولة بشكل متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه dz, dy, dx التي نأخذها موازية لمحاور الإحداثيات z, y, x ، الشكل (٤.٦) .



الشكل ٤.٦ : اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة .

نفرض أن u, v, w ، تمثل مركبات شعاع السرعة V للسائل الداخل عبر وجوه متوازي المستطيلات . وباعتبار أن مساحة هذه الوجوه صغيرة جداً ، فتكون كثافة التيار الكتلي موزعة عليها بانتظام . وتكون كتلة السائل التي تدخل السطح الأيسر $D C B A$ الذي مساحته $dA = dy dz$ خلال الفترة الزمنية dt باتجاه المحور x هي : $(\rho u) dy dz dt$. بينما تبلغ كتلة السائل التي تخرج من السطح الأيمن المقابل $D' C' B' A'$ خلال dt بالاعتماد على طريقة نشر التابيع كسلسلة تايلور وإهمال كافة الحدود ذات المراتب العليا : $[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx] dy dz dt$. ومنه ينتج الفرق بين كتلة السائل الخارجة والداخلية باتجاه x : $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$. وب نفس الطريقة نجد قيمة هذا الفرق باتجاه المحورين الآخرين y, z . ويكون بالتالي لفرق الكلي بين كتلة السائل الخارجة والداخلية عبر السطح الخارجي للجزء الحجمي خلال الزمن dt :

$$dm = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt . \quad (6.13)$$

هذا الفرق في كتلة السائل يجب أن يعادله بموجب قانون انحفاظ الكتلة تغير في كتلة السائل داخل الجزء الحجمي ناتج عن تغير كثافة السائل مع الزمن . فإذا كانت كثافة السائل في اللحظة t هي $\rho(x, y, z, t)$ فتصبح في اللحظة $t + dt$ تساوي $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$. ويكون بالتالي التغير الذي يطرأ على كتلة السائل داخل الجزء الحجمي :

$$dm = \left[\rho - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) \right] dV = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz . \quad (6.14)$$

من تساوي العلاقتين (6.13)، (6.14) ينتج بعد الاختصار على $dx dy dz dt$ والإصلاح :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (6.15)$$

التي يطلق عليها معادلة الاستمرارية العامة لجريان ثلاثي المقاس ، غير مستقر وقابل للانضغاط . فإذا أجرينا الاشتقاق الجزئي لمركبات كثافة التيار الكتلي المحصورة ضمن أقواس ولاحظنا بموجب (5.12) أن $D\rho/Dt$ يمثل التفاضل المادي التام للكثافة وأن

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \rho : [\rho] : s^{-1} \quad (6.16)$$

يمثل معامل التمدد الحجمي أو سرعة تمدد واحدة حجم السائل ، فإن العلاقة (6.15) تأخذ الشكل التالي [16] :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho = 0 \quad (6.15-a)$$

في حالة الجريان المستقر يكون $\partial \rho / \partial t = 0$ وتصبح (6.15) من الشكل :

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (6.17)$$

أو بالصيغة الشعاعية الأبسط :

$$\text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (6.18)$$

التي تعني أن شرط الاستمرارية لجريان قابل للانضغاط ومستقر يقضي بأن يكون تفرق شعاع Divergence كثافة التيار الكتلي معدوماً .

بالنسبة للجريانات ثنائية المقاس، أي عندما $w = 0$ مثلاً، ينتج من (6.15):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (6.19)$$

للجريانات غير المستقرة؛ ومن (6.17):

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (6.20)$$

للجريانات المستقرة.

في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط $\rho = \text{const}$ ، تنتج معادلة الاستمرار من (6.15) أو (6.18) باستبدال كثافة التيار الكتلي بسرعة التيار الحجمي وتأخذ الشكل الأبسط نسبياً التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{أي} \quad \text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (6.21)$$

التي يمكن التعبير عنها بالجملة التالية:

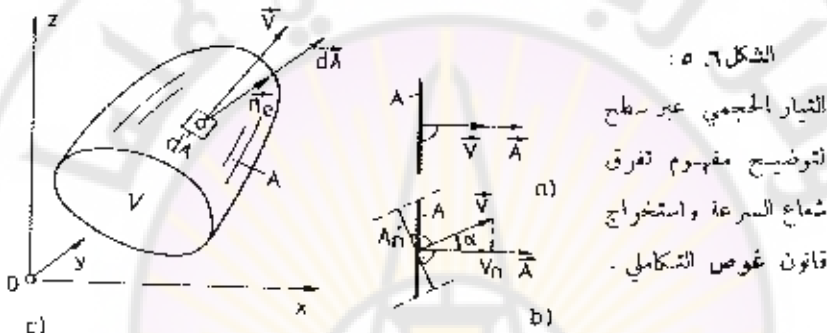
شرط الاستمرار لجريان غير قابل للانضغاط خالٍ من التنايبع والبالوعات يقضي بأن يكون التيار الحجمي الداخل عبر السطح الخارجي لجزيء حجمي مساوياً للتيار الحجمي الخارج منه أي أنه يكون تفرق شعاع السرعة معدوماً، وهذا يعني أن معادلة الاستمرار لا تتعلق باختيار جملة الاحداثيات.

في حالة الجريانات المستوية، أي عندما $w = 0$ مثلاً، تصبح معادلة الاستمرار حسب (6.21):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.22)$$

إن استخدام قوانين التحليل الشعاعي Vector Analysis ونظرية الحقل Field theory (أنظر مثلاً [84]) في صياغة قوانين ميكانيك السوائل يتيح لنا ليس فقط الحصول على صياغة أبسط ، كما رأينا بالنسبة لمعادلة الاستمرار (6.18) أو (6.21) ، وإنما ، وهذا هو المهم ، الاستفادة من الحلول المعروفة لحقول شعاعية بماثلة Analog ، كما سنرى فيما بعد ، وإعطاء القوانين الرياضية « الجافة » مضموناً فيزيائياً معبراً ، كما سيتوضح الآن .

إن التيار الحجمي الذي يخترق السطح A بحسب من (6.4) عندما يكون شعاع السرعة V موازياً لشعاع النظم على السطح $A = n \cdot A$ ، حيث n شعاع واحدة النظم الذي يعتبر



موجباً عندما يشير الخارج ، الشكل (٦.٥.٦) . وعندما يكون شعاع السرعة مائلاً على السطح بزاوية α الشكل (٦.٥.٦) يكون التيار الحجمي (غزارة التدفق) :

$$Q = VA \cdot \cos \alpha = V A_n = V_n A = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \quad (6.23)$$

التيار الحجمي لسائل ثابت الحجم يساوي الجداء الداخلي لشعاع السرعة في شعاع النظم على السطح .

نعتبر الآن داخل حقل الجريان منطقة شكلها على غير تعيين حجمها V ومحددة بالسطح الخارجي المخلق A الشكل (٦.٥.٦) . ليكن dA جزءاً سطحياً من A ، $dA = n \cdot dA$ ، فإن التيار الحجمي عبر dA ينتج :

$$Q = \int dQ = \int_{(A)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.24)$$

من جهة أخرى فإن الفرق بين حجم السائل الخارج من جزيء حجمي $dV = dx \, dy \, dz$ والداخل إليه في واحدة الزمن ينتج من (6.13) من أجل $p = \text{const}$:

$$d\dot{V} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dV = \text{div } \mathbf{V} \cdot dV \quad (6.25)$$

ويكون الفرق الإجمالي بالنسبة لتكامل حجم المنطقة المتغيرة V :

$$\dot{V} = \iiint_{(V)} \text{div } \mathbf{V} \cdot dV \quad (6.26)$$

من تساوي العلاقات (6.24) و (6.26) ننتج العلاقة :

$$\dot{V} = Q = \iint_{(A)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{(V)} \text{div } \mathbf{V} \cdot dV \quad (6.27)$$

المعروفة باسم قانون غوس .. أوستروجرادسكي التكاملي نسبة العالمين : الألماني C. F. Gauss (1777-1855) والروسي M. W. Ostrogradski (1801-1861) . وبواسطته يمكن رياضياً إرجاع التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي . أما من الناحية الفيزيائية فستتخلص من (6.25) أن تفرق شعاع السرعة :

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{d\dot{V}}{dV} = \frac{dQ}{dV} = v_Q \quad (6.28)$$

يمثل الكثافة النبعية Source density للتيار الحجمي [13] التي تنعدم عندما يكون $\text{div } \mathbf{V} = 0$ ، وتكون موجبة في النقاط التي توجد فيها ينابيع وسالبة في النقاط التي توجد فيها بالوعات . وعليه يمكن التعبير عن العلاقة (6.27) بالجملة التالية :

إن التيار الحجمي لسائل ثابت الحجم الذي يخرج من سطح مغلق A اعتباطي الشكل يساوي إلى التكامل الحجمي لتفرق شعاع السرعة المعبّر عن الكثافة النبعية داخل الحجم V المحدد بالسطح الخارجي A . بطلق على النقاط من حقل الجريان حيث $\text{div } \mathbf{V} > 0$ ينابيع ، وحيث $\text{div } \mathbf{V} < 0$ بالوعات . ويتحقق شرط الاستمرار لكل منطقة من حقل الجريان خالية من الينابيع والبالوعات عندما $\text{div } \mathbf{V} = 0$.

هذه النتيجة تنطبق أيضاً على الجريانات القابلة للانضغاط المستقرة ، حيث يلزم فقط أن تبدل في العلاقات السابقة شعاع السرعة $\mathbf{V}$ بشعاع كثافة التيار الكتلي $(\rho \mathbf{V})$. ولكن في الحالة العامة التي تكون فيها الكثافة متغيرة مع المكان والزمان ، وبكتابة العلاقة (6.15) بالصياغة الشعاعية التالية :

$$\text{div } (\rho \mathbf{V}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.29)$$

المنتج حسب [13] أن حقل الجريان القابل للانضغاط غير المستقر الذي تتغير كثافته موضعياً مع الزمن يمثّل حقلاً لجريان غير قابل للانضغاط يحتوي على توزيع ظاهري محدد لنقاط شاذة فراغية تمثل في حالة التمدد (التسارع) بالوعاء ، وفي حالة الانضغاط (الكبح) ينابيع .

وأخيراً يجدر الانتباه إلى أن الصياغة الشعاعية للعلاقات السابقة تطلق الجولية في اختيار محاور الإحداثيات المناسبة . فإذا اختبرت جملة الإحداثيات الديكارتية مثلاً يصبح قانون غوس - أوستروجرادسكي من الشكل :

$$\oint_{(A)} (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) dA = \int_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV \quad (6.30)$$

حيث u, v, w مركبات V : α, β, γ الزوايا التي يصنعها dA مع المحاور x, y, z .

٣.٦ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.٦ : استخرج معادلة الاستمرار العامة للسوائل القابلة للانضغاط . وما هي النتائج الأساسية التي تستخلصها ؟

س ٢.٦ : ماهو الضمون الفيزيائي لتفرق شعاع السرعة لجريان غير قابل للانضغاط ؟

س ٣.٦ : اشرح الطريقة البيانية التي تسمح بتحديد مناطق السرعة الأعظمية والأصغرية في حقل الجريان .

س ٤.٦ : ماهو الشكل الذي تأخذه العلاقة (6.12) بالنسبة للأنبوب الدائري المبين في الشكل (٣.٦) ؟

س ٥.٦ : ماذا يعتبر قانون غوس - أوستروجرادسكي رياضياً وفيزيائياً ؟

ت ١.٦ : إذا كانت غزارة التدفق الحجمي في أنبوب قطره الداخلي $d = 400 \text{ mm}$ تبلغ $Q = 700 \text{ m}^3/\text{h}$ من الماء ، ويرادُ نقرعها عبر أنبوبين بحيث يتدفق في الأول $Q_1 = 500 \text{ m}^3/\text{h}$ وفي الثاني $Q_2 = 200 \text{ m}^3/\text{h}$ ، هل أن تبقى سرعة التيار الحجمي في الأنابيب الثلاثة واحدة ، فكم يجب أن يكون القطر الداخلي لكل من الأنبوبين المتفرعين ؟

الحل : من معادلة الاستمرار (6.4) تنتج بسهولة السرعة في الأنابيب الثلاثة :

$$V = V_1 = V_2 = Q/A = 4 Q/\pi d^2 = \frac{4 \cdot 700}{3600 \cdot 3.14 \cdot 0.4^2} = 1.548 \text{ m/s}$$

ومنه نجد قطر الأنبوب الأول :

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 Q_1}{\pi V_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 500}{3600 \cdot 3,14 \cdot 1,548}} = 0,338 \text{ m}.$$

وقطر الأنبوب الثاني :

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 Q_2}{\pi V_2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 200}{3600 \cdot 3,14 \cdot 1,548}} = 0,214 \text{ m}$$

ت ٢.٦ : ما هي الصيغة التي تأخذها معادلة الاستمرار لجريان غير قابل للانضغاط في الإحداثيات الاسطوانية ؟

الحل : بفرض r, φ, z الإحداثيات الاسطوانية ، V_r, V_φ, V_z مركبات شعاع السرعة

فيكون حسب الشكل (ت ١.٦) :

$$u = V_r \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi ;$$

$$v = V_r \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi ; w \equiv V_z .$$

وينتج من (5.15) :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} ; \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

وعليه تأخذ معادلة الاستمرار (6.21) الصيغة التالية في الإحداثيات الاسطوانية :

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

أي أن المركبة القطرية للسرعة تتغير في الاتجاه المماسي بمقدار V_φ/r عندما تتغير الزاوية القطبية بمقدار $d\varphi$.

ت ٣.٦ : إذا كانت حركة سائل متجانس ذي كثافة متغيرة تتم بحيث أن شعاع السرعة لكل جزيئة يتناسب طرذاً مع شعاع نصف القطر المكاني لمركز الإحداثيات ، أوجد علاقة تغير الكثافة مع الزمن .

الحل : بفرض r الشعاع المكاني ، V شعاع السرعة ، e ثابت التناسب فيكون :

$$\mathbf{V} = e \mathbf{r} \Rightarrow u = e x ; v = e y ; w = e z \quad (a)$$

وبنتج بالتالي من معادلة الاستمرار العامة (6.15) بعض التعويض وإجراء الاشتقاق الجزئي:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c \left[3p + x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} + z \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 0 \quad (b)$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع التفاضل المادي التام للكثافة حسب (5.12) بعد تعويض مركبات السرعة حسب (a) نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\frac{Dp}{Dt} + 3cp = 0 \quad (c)$$

التي يمطي حلها العام:

$$p = p_0 e^{-3ct} \quad (d)$$

علاقة تغير الكثافة مع الزمن t ، p_0 تمثل الكثافة في لحظة البدء .

٧ الحركة العامة للسوائل

من المفيد ان نتذكر أن الحركة العامة لجسم صلب ، نقاطه المختلفة تتحرك على خطوط مسار متباعدة ، يمكن إرجاعها الى حركة المسماة (انتقالية) Translational motion تقوم بها نقطة مميزة (قطب) مثبتة على الجسم (مركز الثقل مثلاً) ، وحركة دورانية Rotational motion للجسم الصلب كله حول محور دوران آني ، أي يتغير عادة مع الزمن ، ير من تلك النقطة المميزة . وحيث ان المسافة بين أية نقطتين من الجسم بفضل صلاته تبقى ثابتة فتحدد السرعة V لأي نقطة B منه بالعلاقة الشعاعية (راجع مثلاً [67]) :

$$V = V_S + \omega \times r \quad (7.1)$$

حيث V_S ، سرعة القطب S ، ω شعاع السرعة الزاوية المحمول على محور الدوران الآني $\vec{r} = SB$ نصف القطر الشعاعي .

سنرى فيما يلي من تحليل الحركة العامة للسوائل أن دراستها أعقد بكثير من دراسة حركة الجسم الصلب ، خاصة لأن جزيئات السائل لا تستطيع المحافظة على شكلها .

١.٧ مفهوم الفشور والدوران

إن دراسة الحركة العامة لسائل تتوضع من خلال العمليات الأولية

Elementary Processes لحركة جزيء سائلي متناهي الصغر ، التي وضع هلمهولتز أسس معالجتها الفيزيائية والرياضية في بحثه المشهور عن الحركات الإعصارية ، الذي نشره عام 1858 وتوصل فيه الى صياغة المعادلة العامة لحركة الجزيئات السائلة .

كل جزيء سائلي من حقل الجريان يستطيع ان يقوم في الحالة العامة بحركة انسحابية بالإضافة لحركة دورانية . وكلمة « دوران » Rotation تعبر عن السرعة الزاوية للجزيء ، التي يمكن الحصول عليها من أجل فترة زمنية قصيرة ، إذا تصورنا ان الجزيء قد « تصلب » بدون تشوه Deformation . ويمكن التحقق من وجود أو عدم وجود الدوران بتجربة بسيطة : نضع على السطح الحر للجريان قطعة صغيرة من الفلين (عوضاً عن الجزيء « المتصلب » !) أشتر عليها باتجاه ما ، ونتركها تسبح مع جزيئات السائل وفق خط تيار معين ، فإذا بقي اتجاه السهم أثناء انتقال قطعة الفلين موازياً لنفسه ، وبالتالي $a \parallel b \parallel c \dots$ ، فتكون جزيئات السائل على طول خط التيار المعتبر لا تقوم بحركة دورانية ، الشكل (١.٧ - a) . أما إذا وضعنا قطعة الفلين على السطح الخارجي لسائل يدور في إناء اسطواني بسرعة زاوية ثابتة ، الشكل (١.٧ - b) ، فنلاحظ

الشكل ١.٧ :

تجربة لتوضيح مفهوم الدوران :

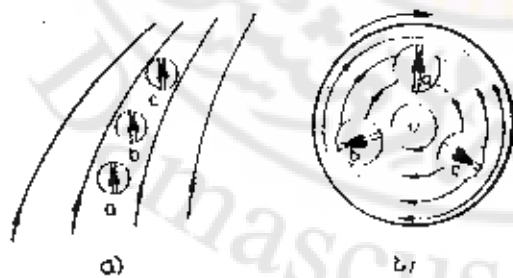
الجريان لادوراني طالما بقي

$a \parallel b \parallel c$ ، ويكون

دورانياً عندما $a \nparallel b \nparallel c$

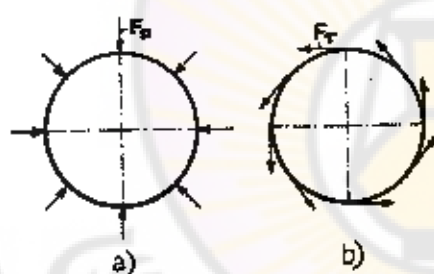
كما في حالة سائل يدور في

إناء بسرعة زاوية ثابتة (b) .



أن اتجاه السهم لا يأخذ وضعيات متوازية ، بل يبقى قطرياً ، وبالتالي تقوم جزيئات السائل بالنسبة لكل خط تيار بحركة دورانية .

إن الجزيء السائلي لا يستطيع الدوران إلا إذا خضع لتأثير عزم دوراني . ولكي تتصور منشأ هذا العزم نقطع من داخل سائل جزيئاً نفرضه للبساطة بشكل اسطوانة دائرية صغيرة . فإذا كان السائل عديم اللزوجة فإن عزم قوى الضغط الصريف F_p المؤثرة ناظماً على السطح تكون معدومة ، الشكل (٢.٧ - a) ، وبالتالي لا يمكن أن تؤدي الدوران الجزيء مطلقاً . وعليه لا يتولد عزم دوراني إلا إذا أثرت على الجزيء قوى قص مماسية F_t ، الشكل (٢.٧ - b) . هذه القوى تنشأ ، كما نعلم ، نتيجة للزوجة السائل عندما تتعرض جزيئاته للتشوه . ومنه ينتج أن وجود الدوران مرتبط بوجود التشوه .

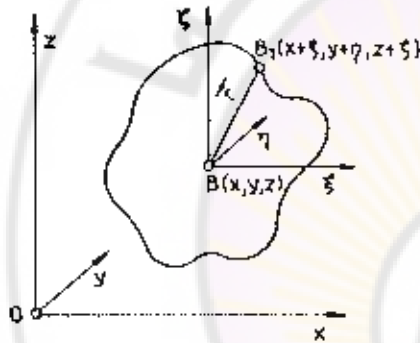


الشكل ٢.٧ ، القوى السطحية على جزيئة اسطوانية دائرية :
الجزيئة لا تستطيع الدوران إذا أثرت قوى ضغط ناظمية فقط (a) ، وتتولد حركة دورانية فقط عندما تؤثر قوى قص مماسية (b) .

لقد كان هلمهولتز أول من برهن أن دوران جزيئات السائل المثالي يختلف جزيئاً عن دوران جزيئات السائل الحقيقي ، أي في حالة جريان مع فواقد . وفي الواقع فإن حركة السوائل يمكن تقسيمها بصورة عامة إلى فصلتين أساسيتين تختلفان عن بعضهما من الناحية الحركية والفيزيائية ، وبالتالي من حيث المعالجة الرياضية : الأولى هي الحركة الدورانية وتمثلها بصورة عامة بجريانات السوائل الحقيقية ، والثانية هي الحركة اللادورانية Irrotational motion وتمثلها عامة

جريانات السوائل المثالية . لذلك فانه من الضروري استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل ، وإيجاد التعبير الرياضي الذي يسمح لنا بالحكم فيما إذا في أية نقطة من حقل الجريان المحدد بالعلاقة (5.5) يوجد أو لا يوجد دوران .

نعتبر في لحظة معينة ، حركة جزيء حجمي متماهي الصغر مقطوع من داخل حقل جريان مستمر ، الشكل (٣.٧) . لتكن $B(x, y, z)$ نقطة ما داخل الجزيء محددة في مجموعة الإحداثيات الثابتة (x, y, z) ؛ ولتكن $u = u(x, y, z)$ $v = v(x, y, z)$ $w = w(x, y, z)$ مركبات شعاع السرعة V في هذه النقطة .



الشكل ٣.٧

استخراج المعادلة العامة
لحركة جزيء حجمي

نعتبر نقطة ما $B_1(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ واقعة على سطح الجزيء ، حيث ξ, η, ζ مركبات شعاع نصف القطر النسبي $\vec{r} = \vec{BB}_1$ في مجموعة إحداثيات مثبتة على الجزيء . إن مركبات شعاع السرعة V للنقطة B_1 تنج بالشكل :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \approx u + \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta \\ v_1 &= v(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \approx v + \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta \\ w_1 &= w(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \approx w + \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

وذلك بعد نشرها بشكل سلسلة تايلور وإهمال كافة حدود المراتب العليا

الحاوية على ξ, η, ζ (قارن العلاقة (3.49)) . لنحول صياغة هذه المعادلات بحيث يتوضح المضمون الفيزيائي لحدودها .

نضيف الى الطرف الأيمن المعادلة الاولى المقادير $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \eta$, $\pm \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \zeta$, و نرتب الحدود فينتج بعد إصلاح بسيط :

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \zeta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \eta \quad (7.3)$$

وبطريقة مماثلة نحول صياغة المعادلة الثانية والثالثة من (7.2) فنجد :

$$v_1 = v + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \xi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \zeta \quad (7.4)$$

$$w_1 = w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \eta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \xi \quad (7.5)$$

لاختصار الكتابة نفترض :

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); & \Theta_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right); & \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); & \Theta_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); & \Theta_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

كما نستخدم حسب [16] التابع المساعد من الدرجة الثانية :

$$\varphi_D = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \xi^2 + \varepsilon_y \eta^2 + \varepsilon_z \zeta^2 + 2\Theta_x \eta \zeta + 2\Theta_y \zeta \xi + 2\Theta_z \xi \eta) \quad (7.7)$$

الذي تحقق مشتقاته الجزئية العلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_D}{\partial \xi} &= \varepsilon_x \xi + \Theta_y \zeta + \Theta_z \eta \\ \frac{\partial \varphi_D}{\partial \eta} &= \varepsilon_y \eta + \Theta_x \zeta + \Theta_z \xi \\ \frac{\partial \varphi_D}{\partial \zeta} &= \varepsilon_z \zeta + \Theta_x \eta + \Theta_y \xi \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

بذلك تأخذ المعادلات (7.3), (7.4), (7.5) الشكل التالي :

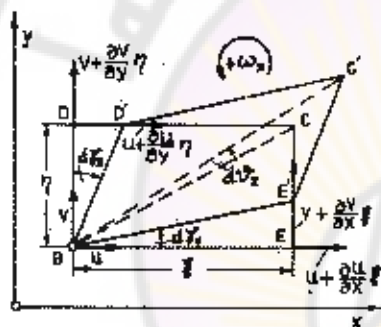
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u + (\omega_y \zeta - \omega_z \eta) + \frac{\partial \varphi_D}{\partial \xi} = u + u_R + u_D \\ v_1 &= v + (\omega_z \xi - \omega_x \zeta) + \frac{\partial \varphi_D}{\partial \eta} = v + v_R + v_D \\ w_1 &= w + (\omega_x \eta - \omega_y \xi) + \frac{\partial \varphi_D}{\partial \zeta} = w + w_R + w_D \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

لتبسيط شرح المضمون الفيزيائي لحدود هذه المعادلات نعتبر حركة جزئية
عجمي بسيط نتصوره في اللحظة المعتبرة ؛ بشكل متوازي مستطيلات متناهي
الصغر. ولتبسيط المسألة أكثر ندرس حركة هذا الجزئية الموازية للمستوي $y x$ ،
أي أننا نعتبر من جريان مستوي مواز لـ $y x$ حركة جزئية سطحي بشكل
مستطيل $E C D B$ أطوال أضلاعه ξ و η ، الشكل (١٠٧) .

لتكن v, u مركبات السرعة في النقطة $B(x, y)$ فتكون مركبات

السرعة في النقطة $E(x+\xi, y)$ هي : $u + \frac{\partial u}{\partial x} \xi, v + \frac{\partial v}{\partial x} \xi$ وفي النقطة $D(x, y+\eta)$: $u + \frac{\partial u}{\partial y} \eta, v + \frac{\partial v}{\partial y} \eta$. وحيث أنه في الحالة المستوية $w = \zeta = \omega_z = \epsilon_z = \Theta_z = \Theta_y = 0$: (7.6) وبالتالي نتج من (7.8), (7.9) مركبات السرعة في $C(x+\xi, y+\eta)$ بالشكل :

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u + \omega_x \eta + \Theta_x \eta + \epsilon_x \xi \\ v_C &= v + \omega_x \xi + \Theta_x \xi + \epsilon_y \eta \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$



الشكل ٤.٧

تشوه جزئي سطحي بشكل مستطيل
لتحديد مفهوم سرعة التشوه والدوران

إذا فرضنا $\omega_x = \Theta_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$ فيبدو جلياً أن v, u مثلان مركبتا السرعة الانسحابية للجزئي السطحي (أو القطب منه B) عندما يتحرك حوكة انسحابية متوازية وكانه جسم مطلق الصلابة . وليمكن الجزئي سيتعرض أثناء حركته، كأي جزئي صلب مرن، لتشوه زاوي لزواياه القائمة وتشوه طولي لأضلاعه ، بنفس الطريقة المعروفة في نظرية المرونة Theory of Elasticity .

إذا اعتبرنا الانزياح النسبي للنقاط E, C, D تجاه النقطة B فإن المستطيل سيأخذ في اللحظة $t + dt$ شكل متوازي أضلاع E' C' D' B . وبما أن السرعة تساوي المسافة (الانزياح) في واحدة الزمن ، والسرعة الزاوية تكافئ زاوية

الدوران في واحدة الزمن ، والزاوية الصغيرة تساوي ظلمها تقريباً ، فيكون حسب الشكل (٤.٧) التغير الزاوي في واحدة الزمن الناتج عن دورات الضلعين القائمين DB و EB .

$$\omega_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad [s^{-1}] ; \quad \omega_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad [s^{-1}] \quad (7.11)$$

نأخذ كمقياس للدوران الوسطي Average rotation الجزيء السطحي ككل دوران القطرين ، ونعتبر ان قطر المستطيل يدور نصف زاوية الدوران التي يدورها ضلعه القائم [17] [8] وأن اتجاه الدوران الموجب هو بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، فتكون :

$$\omega_z = \frac{d\theta_z}{dt} = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.12)$$

تمثل السرعة الزاوية التي يدور بها الجزيء السطحي « المتصلب » حول محور آ في عر من النقطة B وبوازي المحور z . وتكون بالتالي ω_z و $\omega_z + \omega_z$ في العلاقة (7.10) تمثلان السرعة المحيطية للحركة الدورانية للجزيء السطحي في اتجاه المحورين x و y .

من جهة أخرى فإن التغير الزاوي الكلي في واحدة الزمن الذي يطرأ على الزاوية القائمة EBD ينتج من (7.11) مع الانتباه الى (7.6) ، حيث نجد :

$$\frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\theta_z \quad [s^{-1}] \quad (7.13)$$

وعليه فإن θ_z تعبر عن السرعة الزاوية التي يتم بها تغير الزاوية القائمة لضلعي المستطيل في النقطة B ؛ بينما تعبر θ_z و θ_z عن سرعة التشوه الزاوي Angular deformation بالـ [m/s] في الاتجاهين x و y .

أخيراً فإن الحدين الباقيين في العلاقة (7.11) : $\varepsilon_x \xi = \frac{\partial u}{\partial x} \xi$ و $\varepsilon_y \eta = \frac{\partial v}{\partial y} \eta$

يمثلان بالأصل تغير السرعة [m/s] على طول المسافتين ξ و η ، فهما يعبران إذن عن سرعة التشوه الطولي Linear deformation لضلعي المستطيل EB و DB في الاتجاهين x و y .

إن دراسة مائلة حركة جزيء سطحي مستطيل في المستويين xz و yz تقودنا الى توضيح المضمون الفيزيائي لبقية الحدود المعروفة في العلاقة (7.6) . وبذلك نخلص في حالة حركة ثلاثية المقاس الى نتيجة ان القيم $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ تعبر عن التشوه الطولي، والقيم $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ عن التشوه الزاوي، بينما تمثل $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ مركبات شعاع السرعة الزاوية ω أو كما يسمى أيضاً شعاع الاعصار Vortex vector ، الذي يكون عموداً على محور الدورات الآتي الذي يدور حوله الجزيء الحجمي المعبر . فاذا عدنا الى العلاقة (7.9) فتضع لدينا النتيجة الهامة التالية :

إن الحركة العامة لجزيء حجمي سائل تتألف من حركة انتقالية متوازية لقطب منه بسرعة انتسحابية $V(u, v, w)$ ، وحركة دورانية حول محور آتي يمر من هذا القطب ذات سرعة محيطية $V_R(u_R, v_R, w_R)$ تساوي جداء السرعة الزاوية $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ في نصف القطر النسي $r(\xi, \eta, \zeta)$ ، وحركة تشوهية يعبر عنها تابع التشوه $\varphi_D(\xi, \eta, \zeta)$ سرعتها $V_D(u_D, v_D, w_D)$.

باستخدام علاقات التحليل الشعاعي تأخذ المعادلات (7.9) الصياغة الشعاعية التالية :

$$V_1 = V + V_R + V_D = V + \omega \times r + \text{grad } \varphi_D \quad (7.14)$$

التي تختلف عن العلاقة (7.1) بالحد المعبر عن سرعة التشوه ، لذلك يطلق أحياناً على حركة السوائل اسم حركة التشوه . كما ينتج من (7.6) :

$$\omega = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z = \frac{1}{2} \nabla \times V = \frac{1}{2} \text{rot } V \quad (7.15)$$

حيث الشعاع الرمزي

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.16)$$

يمثل معـامل « نابلا » ، و $\text{rot } V$ يمثل شعاعاً يطلق عليه دوتـا شعاع السرعة . وعليه فإن العلاقة (7.15) تربط بين شعاع السرعة وشعاع الاغصان الذي تبلغ قيمته

$$|\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} . \quad (7.17)$$

بقي الآن أن نحدد متى يكون في منطقة معينة من حقل جريان يوجد أو لا يوجد دوران .

٢.٧ شرط الخلو من الدوران

نعتبر جرياناً ثلاثي المقاس محددأ حسب (5.5) بحقل السرعة $V(u, v, w)$. إن حركة السائل في كامل حقل الجريان أو في منطقة معينة منه ، توصف بأنها حركة دورانية أو حركة إغصادية عندما توجد لشعاع السرعة الزاوية قيمة محددة تختلف عن الصفر . وبالتالي يجب أن تكون حسب (7.15) :

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } V \neq 0 \Rightarrow \omega_x \neq 0, \omega_y \neq 0, \omega_z \neq 0 . \quad (7.18)$$

وتكون حركة السائل لادورانية أو لاإغصادية (خالية من الاغصير) عند

ينعدم شعاع السرعة الزاوية ، وبالتالي تتحقق العلاقة :

$$\omega = 0 \Rightarrow \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \Rightarrow \text{rot } \mathbf{V} = 0 \quad (7.19)$$

التي يطلق عليها حسب هلمهولتز شرط انعدام الدورات Condition of irrotationality . فإذا عثرنا عن مركبات شعاع السرعة الزاوية بمركبات شعاع السرعة ينتج من (7.6) :

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7.20)$$

هذه المعادلات تمثل بموجب قانون معروف في التحليل الشعاعي ونظرية الحقل (انظر [42], [84]) الشروط اللازمة والكافية لكي يكون التفاضل الثلاثي الحدود $u dx + v dy + w dz$ تفاضلاً تاماً لتابع سلمي $\Phi(x,y,z)$ ، مستمر وقابل للاشتقاق في كامل المجال المعتبر . وهذا يعني أن

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = u dx + v dy + w dz$$

وبالتالي فإن مركبات السرعة تمثل المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة للاحداثيات المناسبة ، أي :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Rightarrow \mathbf{V}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} \quad (7.21)$$

أو بالصياغة الشعاعية :

$$\mathbf{V} = \text{grad } \Phi \quad (7.22)$$

بسهولة يمكن التأكد أن العلاقة (7.21) تحقق بالتطابق (7.20) . وإذا
أمعنا النظر نجد أن (7.21) تماثل العلاقة (3.55) ص ١٣٣ المتعلقة بحقل الضغط
الهيدروستاتيكي إذا أغفلنا إشارة السالب . لذلك يطلق على التابع Φ اسم
كمون السرعة Velocity potential تبعاً بكمون حقل القوى الحجمية .
وتسمى الجريانات التي تمثل مثل هذا الكمون الجريانات الكمونية أو
اللامدورانية ، وتكون عادة متالية أي عديدة الاحتكاك ، كما سنبرهن على ذلك
فيما بعد .

في ضوء ما تقدم يمكن صياغة النتيجة التالية المماثلة لما توصلنا إليه ص ١٣٧ :

بالرغم من أن السرعة $V = f(x,y,z)$ يمكن أن تتغير اعتباطياً من نقطة إلى
أخرى ، فإنه يوجد في حالة الجريانات المتالية تابع سلمي Φ يطلق عليه كمون
السرعة ويتغير فقط على طول خطوط التيار « المائلة لخطوط القوة » ويخترق
شعاع التدرج لهذا التابع المساوي لشعاع السرعة سطوح كمون السرعة
الثابت ، التي تمثل عادة سطوحاً فراغية مفتولة ، في كل نقطة يمر منها خط تيار
بشكل عمودي دائماً .

في حالة الجريانات المستقرة يكون كمون السرعة تابعاً مكانياً صرفاً
 $\Phi = f(x,y,z)$ ، ويكون تابعاً للزمان والمكان في حالة الجريانات غير المستقرة
 $\Phi = f(x,y,z,t)$. فإذا أدخلنا العلاقة (7.21) في معادلة الاستمرار للجريانات
المستقرة غير القابلة للانضغاط (6.20) تأخذ الصيغة التالية :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi = 0 \quad (7.23)$$

أو بالشكل الشعاعي مع أخذ (7.22) بعين الاعتبار :

$$\Delta \Phi = \text{div grad } \Phi = 0 \quad (7.24)$$

يعرف :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.25)$$

باسم معامل لابلاس Laplace operator ، ولذلك تسمى معادلة الاستمرار للجريانات الكهربية (7.23) باسم معادلة لابلاس . وينتج منها ان كل تابع Φ يحقق هذه المعادلة يمثل كمون سرعة جريان كهربي ، فهي إذت معادلة تحديد هذا التابع .

في حالة الجريانات ثنائية البعد ينحصر شرط الدوران بأن تكون مركبة واحدة فقط من مركبات شعاع السرعة الزاوية مختلفة عن الصفر . وبالتالي يكون في حالة جريان مواز للمستوي $y-x$:

$$\omega_x = \omega_y = 0 ; \quad \omega_z \neq 0 \quad (7.26)$$

ويتحقق شرط الحلز من الدوران عندما :

$$\omega_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7.27)$$

نعتبر من هذا الجريان المستوي خطاً للتيار ، فتكون معادلتها التفاضلية حسب (5.30) :

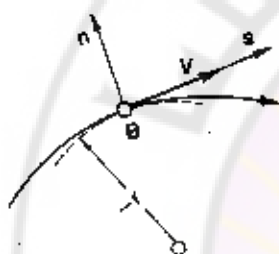
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

نكون المشتق الثاني وندخل علاقة نصف قطر الانحناء r لحظ التيار (انظر [42]) فينتج :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{1}{u} \frac{dv}{dx} - \frac{v}{u^2} \frac{du}{dx} = - \frac{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}{r} \quad (7.28)$$

نختار محاور الإحداثيات بحيث أنه في النقطة B مثلًا في الشكل (٥.٧) يأخذ المحور x اتجاه المماس s والمحور y اتجاه النظم n على خط التيار فيكون عندئذ :

$$\frac{dy}{dx} = 0 ; \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{1}{r} ; v = 0 ; u = V$$



الشكل ٥.٧ :

استخراج شرط الخلو
من الدوران بالنسبة لخط تيار

وينتج من (7.28) العلاقة :

$$\frac{dv}{dx} - \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{V}{r}$$

فإذا أدخلناها في (7.27) يصبح شرط الخلو من الدوران لخط التيار المعتبر:

$$\frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad (7.29)$$

هذه العلاقة لها أهمية كبيرة بالنسبة لدراسة الجريانات المتتوية المتألفة في جملة تدور نفسها حول المحور z بسرعة زاوية ثابتة ، كما هو الحال عند دراسة الجريان داخل الدولاب الدائر لآلة جريان ، عندما يتغير البعد المحوري للجزئيات الصغيرة . فإذا كان الجريان الموجه للدولاب الدائر مستقرًا وكونيًا ، فإن

الجريان داخل الدولاب الدائر يكون غير مستقر ، إذا راقبنا حركته من نقطة مطلقة ساكنة خارج الدولاب الدائر . وتكون هذه الحركة مستقرة إذا راقبناها من حلة نسبة مثبتة على الدولاب الدائر . فإذا فرضنا V السرعة المطلقة ، W السرعة النسبية ، U السرعة المحيطية فتكون :

$$V = W + U . \quad (7.30)$$

وبإدخالها في (7.29) مع مراعاة أن $U = -r\omega$ ، $\frac{\partial U}{\partial n} \equiv \frac{\partial U}{\partial r}$ ، يتبع :

$$\frac{W}{r} + \frac{\partial W}{\partial n} = 2\omega . \quad (7.31)$$

وهذا يعنى ان الجريان النسبي دوراني ولكنه مستقر ، وبالتالي لا يملك كمن سرعة ، بينما كان الجريان المطلق كمنياً ولكنه غير مستقر . لهذا فإن دراسة الجريان النسبي أكثر تعقيداً [7a] ، [85] ، [86] .

إن الصيغة المميزة للجريانات الكمونية (اللادورانية) بأنها تملك كمن سرعة تسهل كثيراً إيجاد حلول قريبة من الواقع بالنسبة لعدد كبير من المسائل الهيدروديناميكية والايرو ديناميكية والغاز ديناميكية ذات الأهمية التطبيقية . وسنعالج هذه الجريانات بالتفصيل فيما بعد . ولكن بالمقابل فإن العديد من الظواهر التي نشاهدها في الطبيعة والمسائل التكنيكية التي تعترضنا عند تصميم الآلات والمنشآت لا يمكن تحليلها وفهمها فيزيائياً بعمق ومن ثم تطوير نظريات وطرق عملية لحسابها دون الاعتماد على الحركة الاعصارية (الدورانية) للسائل . فعليها بنيت نظرية الجناح الحامل ، ونظرية الاضطراب التي لا تزال حتى الآن إحدى المسائل المعقدة لميكانيك السوائل الحديث . وتحتل أهميتها العملية من حقيقة أن كل تشكل اعصاري يؤدي لحسارة في القدرة الميكانيكية للسائل .

٣.٧ المفاهيم الأولية والفوائيد الأساسية للجبركة الاعصارية

سنقتصر هنا على حركة السوائل المثالية (عدمية الاحتكاك) ونعتبر حقل الجريان المستمر محددًا في كل نقطة منه وفي كل لحظة بشعاع السرعة V ، وأنه يحقق شرط الحلو من الدوران باستثناء بعض النقاط الشاذة Singular points التي يكون فيها $\text{rot } V \neq 0$. إن مثل حقول الجريان هذه أهمية عملية عندما نضم إليها حقول جريان عادية ، حيث بنيت على هذا الأساس طرق حديثة ، مثل طريقة النقاط الشاذة ، لحساب أجسام الجريان المولدة لقوة الرفع Lift .

١.٣.٧ مفهوم الجولان

من أجل الدراسة التفصيلية للحركة الاعصارية ، ولإعطاء حكم عام فيما إذا كانت منطقة كبيرة نسبياً من حقل الجريان تقوم بحركة دورانية أم لا ، نستعين بمفهوم الجولان Circulation ، الذي ثبت أنه من أخصب المفاهيم التي يستخدمها ميكانيك السوائل الحديث. ولتوضيحه يفضل أن نبدأ ببعض التعاريف.

نعرف « الخط السائلي » و « السطح السائلي » بأنه المنحني أو السطح الذي يتشكل باستمرار من نفس الجزيئات السائلية ، حتى وإن تحرك أو غير شكله.

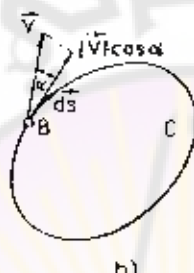
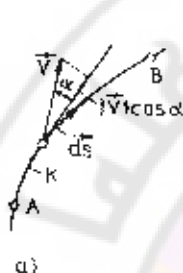
ونعرف التكامل الخطي Λ على طول منحني K يصل بين نقطتين A و B ، الشكل (٦.٧ - a) ، بأنه « الجريان » على طول K [9] ، ويساوي تكامل جداء مركبة السرعة المماسية على K في العنصر الخطي ds . فإذا كانت α الزاوية المتشكلة بين V و ds ، ينتج مع اعتبار الزمن ثابت (أي في لحظة زمنية آنية) :

$$\Lambda = \int_A^B V \cos \alpha \, ds = \int_A^B V \cdot ds \quad (7.7)$$

أي أنه يمثل تكامل الجداء الداخلي لشعاع السرعة في شعاع العنصر الخطي . وبالتالي فهو يمثل قيمة عددية ، يمكن حسابها في حالة السوائل الحقيقية والمثالية .

إذا كان المنحنى K متعامداً مع خط التيار وبالتالي يمثل خطاً للكمون
الثابت فتكون $\alpha = \pi/2$ وينتج $\Delta = 0$. أما إذا كان K خطاً للتيار فتكون
 $\alpha = 0$ و $\cos \alpha = 1$ وينتج من (7.32) :

$$\Delta = \int_A^B V ds \quad (7.33)$$



الشكل ٧.٧ :

تعريف التكامل الخطي
لشعاع السرعة على طول
المنحنى K (a) ، والجولان على
طول المنحنى المغلق (b) .

في حالة الجزيئات الثلاثية البعد يكون $V = V(u, v, w)$ و $ds = ds(dx, dy, dz)$.
وبالتالي نأخذ (7.32) بصيغة مركبات السرعة الشكل التالي :

$$\Delta = \int_A^B (u dx + v dy + w dz) \quad (7.34)$$

فاذا كانت الجزيئات المعتبر كمونياً ، أي يملك كمون سرعة (d) يحقق العلاقة
(7.21) ، فإن تكامل (7.34) يصبح سهلاً جداً إذ ينتج :

$$\Delta = \int_A^B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = \int_A^B d\Phi = \Phi_B - \Phi_A = \Delta\Phi_{B-A} \quad (7.35)$$

وهذا يعني أنه في حالة الجزيئات الكمونية يكون التكامل الخطي للسرعة
على طول المنحنى K البواصل بين النقطتين A و B مساوياً للفرق بين قيمتي كمون

السرعة في هاتين النقطتين . فإذا كان التابع Φ وحيد التعيين ، أي له قيمة واحدة في كل نقطة من المجال المعتبر ، فإن قيمة Δ لا تتعلق بشكل المنحنى K ، أي بالطريق الواصلة بين النقطتين A و B .

من مفهوم التكامل الخطي للسرعة نصل الى مفهوم الجولان I' . ويعرف بأنه التكامل الخطي للسرعة على طول منحن مغلق C ، الشكل (٦.٧ - ب) ، مع اختيار اتجاه موجب للاتفاف يؤخذ عادة بعكس دوران عقارب الساعة . وعليه تصبح (7.32) :

$$I' = \oint_{(C)} V \cos \alpha \, ds = \oint_{(C)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \quad , \quad (7.36)$$

ومن (7.34) نجد :

$$I' = \oint_{(C)} (u \, dx + v \, dy + w \, dz)$$

وينتج من هذه العلاقة في حالة الجريانات الكمونية مع الانتباه للعلاقة (7.35) :

$$I' = \oint_{(C)} d\Phi = \Phi_{B \rightarrow A} - \Phi_A = \Delta\Phi(C) \quad , \quad (7.37)$$

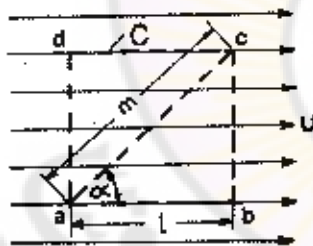
حيث $\Delta\Phi(C)$ فرق الكمون عندما نلف المنحنى C دورة كاملة وتعود B فتتطبق على النقطة A . فإذا كان التابع Φ وحيد التعيين فتكون قيمة الجولان بالنسبة لأي منحن مغلق تساوي الصفر . وهذا يعني ان المنطقة المعتبرة من حقل الجريان تمثل ساحة وحيدة التوابط . أما اذا كانت تمثل ساحة متعددة التوابط بمفهوم « سطوح ريمان » Riemann ، وكان التابع Φ متعدد القيم في نقطة معينة أو غير مستمر ، بمعنى يقفز من قيمة لأخرى ، فيكون للجولان قيمة تختلف عن الصفر بالنسبة لأي منحن مغلق أو خط تيار مغلق . وعليه نصل الى النتيجة الهامة التالية :

في ساحة وحيدة الترابط يسود في مجموعها جريان كوني فإن الجولان على طول أي منحني مغلق يساوي الصفر .

هذه النتيجة تبين بوضوح أن هناك علاقة مباشرة بين الدوران والجولان ، الذي لا ينحصر تعريفه بالجريانات المثالية فقط . كما يتضح أيضاً أن هناك جريانات كونية خالية من الجولان وأخرى لا ينعهد فيها الجولان . وهذه بالذات لها أهمية تطبيقية كبرى سنوضحها فيما بعد .

لتثبيت مفهوم الجولان نقوم بحسابه بالنسبة لبعض الامثلة البسيطة . نعتبر أولاً جرياناً مثالياً منتظماً موازياً للمحور x سرعته ثابتة U ، الشكل (٧.٧) . نختار المنحني المغلق $a d c b a$ بشكل مستطيل ضلعان منه يوازيان خطوط التيار وطول كل منها l ، فتكون قيمة الجولان مساوية لمجموع التكامل الخطي على طول أضلاع المستطيل :

$$\begin{aligned} I' = \sum \Delta = \Delta(ab) + \Delta(bc) + \Delta(cd) + \Delta(da) = \\ = lU + 0 - lU + 0 \Rightarrow I' = 0 . \end{aligned}$$



الشكل ٧.٧ :

حساب الجولان

في جريان مثالي منتظم

نختار الآن المنحني المغلق المثلثي $a c b a$

ونجري التكامل الخطي للسرعة مع ملاحظة

أن $\vec{ca} = m = l/\cos \alpha$ فينتج أيضاً :

$$I' = lU + 0 - m \cdot U \cos \alpha \Rightarrow I' = 0 .$$

وعليه فإنه في الجريان الانسحابي المنتظم

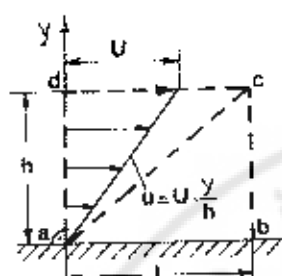
ينعدم الجولان بالنسبة لأي منحني مغلق .

وينتج أن تابع كرون السرعة لهذا الجريان

وحيد التعيين .

كشأن آخر نعتبر الجريان فوق صفيحة مستوية ونفرض أن السرعة تتغير خطياً من الصفر وحتى قيمة معينة U على بعد h من الصفيحة ، الشكل (٧.٨) . فإذا حسبنا الجولان على طول منحني مغلق بشكل مستطيل $a d c b a$ نجد بسهولة أن $I' = -U \neq 0$.

وتختلف قيمة r' إذا اخترنا منحنياتاً مختلفة مثل a, c, b . وتوضح هذه النتيجة إذا تذكرنا أن مثالنا ليس إلا جريان كوكبييت لسائل حقيقي ، وبالتالي فهو دوراني .



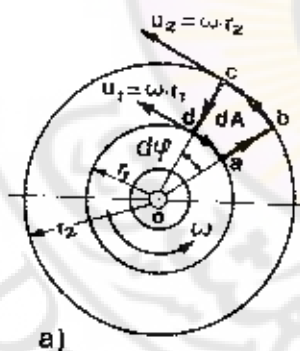
الشكل ٨.٧

حساب الجولان في جريان حقيقي فوق صفيحة مستوية .

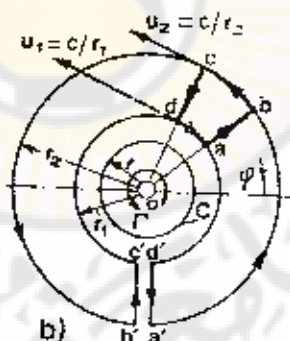
قطريين يحصران الزاوية $d\varphi$. فإذا لاحظنا أن السرعة باتجاه نصف القطر معدومة نجد بسهولة :

$$r' = u_2 r_2 \quad d\varphi = u_1 r_1 \quad d\varphi = \omega (r_2^2 - r_1^2) \quad d\varphi$$

فإذا حسبنا مساحة القطاع الدائري المحدود بالمتعني المغلق نجد :



a)



b)

الشكل ٩.٧ : حساب الجولان في جريان سرعته تتناسب طردياً مع نصف القطر (أعصار الجسم الصلب) (u) ، وفي جريان سرعته تتناسب عكساً مع نصف القطر (أعصار كوكبي) (ω) .

$$dA = \int_{r_1}^{r_2} (r \sin \varphi) dr = (r_2^2 - r_1^2) \frac{d\varphi}{2}$$

وبالتالي يصبح الجولان :

$$I' = 2 \omega dA . \quad (7.38)$$

هذه النتيجة يمكن تعميمها على كل قطاع دائري آخر ، حتى لو كان متناهي الصغر . وبالتالي فإن الجولان يساوي إلى ضعف قيمة جداء السرعة الزاوية الثابتة لكل جزيء سائل في السطح المحد بالمنحنى المغلق ، وتتغير قيمته حسب اختيار هذا المنحنى . وحيث أن $\omega \equiv \omega_z \neq 0$ فتكون حسب (7.28) كافة جزيئات السائل تقوم فعلاً بحركة دورانية بنفس السرعة الزاوية (انظر الشكل (١.٧ - ب)) . يطلق على هذا الجريان اسم إعصار الجسم الصلب أو الأعصار القمري .

نفرض الآن المقارنة أن السرعة المحيطية تتناسب عكساً مع نصف القطر : $u = C/r$ ، الشكل (١.٧ - ب) . فإذا حسبنا الجولان على طول المنحنى المغلق $a d c b a$ ، كما في الحالة السابقة ، ينتج :

$$I' = u_2 r_2 d\varphi - u_1 r_1 d\varphi = C - C = 0 .$$

هذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لكل منحنى مغلق آخر مثل $a' d' c' b' a'$. شريطة أن لا يحتوي المركز 0 . بالمقابل تنتج قيمة الجولان بالنسبة لأية دائرة نصف قطرها r حول 0 (خط قيار) :

$$I' = 2\pi r \cdot u = 2\pi C = \text{const} . \quad (7.39)$$

أي أن الجولان له قيمة ثابتة لا تتعلق بنصف القطر ، وينوضح بذلك المعنى الفيزيائي للثابت C . وعندما $0 \rightarrow r$ تصبح $\infty \rightarrow u$ ، وبالتالي فإن الجريان غير معقول فيزيائياً في المركز 0 الذي يمثل نقطة شاذة يوجد فيها إعصار كوني ، بينما يمثل المحور z المار من 0 غيظ إعصار لا نهائي الامتداد شدته الاعصارية Vortex intensity تساوي I' . ويقال أن هذا الغيظ الاعصاري يحرص حوله فعلاً للسرعة ، تبعاً للحقل المغناطيسي الذي يحرضه سلك ناقل للتيار الكهربائي . والجدير بالانتباه هنا أن الجريان الكوني حول المركز يملك كون سرعة

، $v = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} = \frac{C}{r}$ السرعة المماسية (7.21) وتنتج منا حسب (7.23) يحقق العلاقة $\Phi = C\varphi = \frac{r^2}{2\pi} \omega$ فإذا حسبنا فرق الكون بعد دورة كاملة على محيط دائرة ينتج :

$$\Delta \Phi = \Phi(\varphi + 2\pi) - \Phi(\varphi) = 2\pi C = r^2 \omega$$

وبالتالي فإن قيمة كون السرعة تزداد بمقدار قيمة الجولان الثابت بعد كل دورة كاملة . وهذا يعني أن التابع Φ متعدد القيم ، وحقل الجريان يمثل رياضياً مساحة متعددة الترابط يسهل تصورها إذا اعتبرنا وجود فوارة للاعصار حول المركز O ذات قطر محدود ومن مادة أخرى صلبة أو غازية تدور بسرعة زاوية معينة .

٢.٣.٧ خط الاعصار وأنبوبة الاعصار

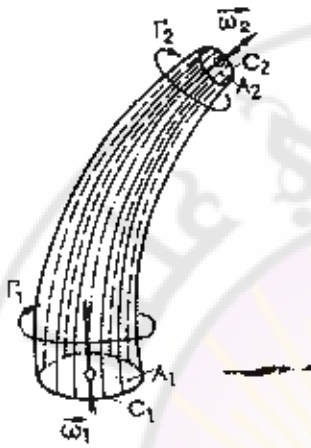
لقد تبين أنه من الأنسب تتبع تفاصيل الحركة الدورانية اعتبار حقل شعاع الاعصار $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ والاستفادة من التماثل بينه وبين حقل شعاع السرعة $V(u, v, w)$. فكما أن V يمثل سرعة جزيء سائل في مكان معين وزمن معين ، كذلك يمثل ω دوران الجزيء في نقطة معينة وزمن معين . ونحسب القيمة انطاقة للشعاعين من علاقتهما المتماثلتين (5.2) و (7.17) .

للحصول على تصور هندسي عن الحقل الشعاعي ω ندخل مفهوم خط الاعصار Vortex line ، بمائلاً لمفهوم خط التيار ونعرفه بالمنحني السائلي الذي يكون المماس عليه في لحظة زمنية معينة منطبقاً في كل نقطة منه على شعاع السرعة الزاوية ، الشكل (١٠.٧) . وتنتج معادلته التفاضلية على غرار العلاقتين (5.28) و (5.30) بالشكل :

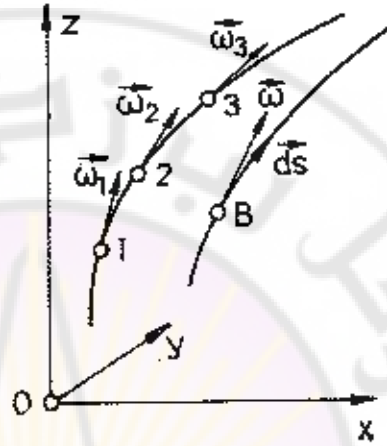
$$\omega \times ds = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (7.40)$$

يتضح من هذا أن الصفات الهندسية لخط الاعصار تشبه تماماً تلك التي يتصف

بها خط التيار . ولكن الصفة الأساسية للأول هي أنه ، حتى ولو تحرك أو غير شكله ، يبقى مكوناً من نفس الجزيئات السائلة .



الشكل ١١.٧ :
أنبوبة أعصار



الشكل ١٠.٧ : تعريف خط
الأعصار واستخراج معادلته التفاضلية

من مفهوم خط الأعصار نصل الآن بسهولة لمفهوم أنبوبة الأعصار Vortex tube . الشكل (١١.٧) . ونحصل عليها ، كما في حالة أنبوبة التيار ، إذا أخذنا في حقل إعصاري مستمر ، أي خالٍ من الفجوات ، منحنيًا مغلقاً صغيراً C_1 فإن مجموع خطوط الأعصار المارة من نقاط هذا المنحني تشكل سطحاً أنبوبياً يطلق عليه أنبوبة الأعصار ؛ ويطلق على السائل الذي تحويه تخطيط الأعصار Vortex filament . ويقودنا التفكير على هذا السؤال للتساؤل فيما إذا كان لشرط الاستمرار ولغزارة التدفق الحجمي (التيار الحجمي) بالنسبة لأنبوبة التيار ما يماثلها بالنسبة لأنبوبة الأعصار . وتكون الإجابة سهلة إذا اشتقنا مركبات شعاع الأعصار $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ حسب (7.6) جزئياً وعلى التوالي بالنسبة لـ z, y, x وأخذنا المجموع لوجدنا :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \text{div } \omega = 0 . \quad (7.41)$$

هذه العلاقة تشبه تماماً معادلة الاستمرار (6.21) لجريان غير قابل للانضغاط .
 فإذا لاحظنا حسب (7.15) أن $2 \omega = \text{rot } V$ تأخذ العلاقة الأخيرة الصياغة الشعاعية :

$$\text{div} (\text{rot } V) = \text{div} (2 \omega) = 0 . \quad (7.42)$$

وعليه يمكن صياغة الجملة التالية كنتيجة مماثلة لما توصلنا إليه ص ١٩٧ :

غزارة التدفق الإعصاري أو شدة الاعصار لأنبوبة اعصار صغيرة المقطع بحيث يمكن اعتبار شعاع السرعة الزاوية موزعاً عليه بانتظام تساوي الى ضعف جداء السرعة الزاوية في مساحة المقطع الناطمي على محور الأنبوبة ، وتبقى قيمتها ثابتة على طول الأنبوبة أي :

$$Q_\omega = 2 \omega_1 A_1 = 2 \omega_2 A_2 = 2 \omega A = \text{const} ; \omega \parallel A \quad (7.43)$$

وننتج شدة الاعصار بالنسبة لأي سطح اعتباطي يشكل الناطم محله مع الشعاع ω زاوية α بالتأمل مع العلاقة (6.23) :

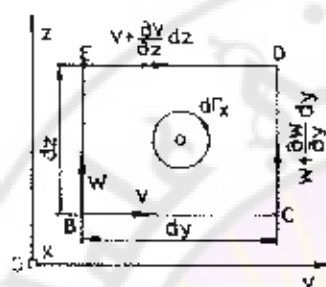
$$Q_\omega = 2 \omega A \cos \alpha = 2 \omega A_n = 2 \omega_n A = 2 \omega \cdot A \quad (7.44)$$

حيث $A = n \cdot A$ الشعاع السطحي ، n شعاع واحدة الناطم عليه .

إن شرط الاستمرار هذا يقضي ، كما كان الأمر بالنسبة لخطوط التيار في حقل السرعة لجريان غير قابل للانضغاط ، بأن خطوط الاعصار في داخل السائل لا يمكن أن تكون لها بداية أو نهاية . ولكن يمكن أن تكون منحنيات مغلقة ، أو أن تنتهي عند حدود الجملة الفيزيائية المفتوحة ، مثل السطوح المحددة أو الحرة للسائل .

٣.٣.٧ المرفقة بين الجولان والدوران - قانون ستوكس النظامي

نفرض ان حقل شعاع الاغصان $\mathbf{v}$ للجريان المعتبر مستمراً ، أي أن كل



الشكل ١٢.٧

حساب الجولان حول محيط جزئي
سطحي مستطيل لاستخراج العلاقة
بين الجولان والدوران .

جزئي سائلي فيه يملك سرعة زاوية .

والسهولة نعتبر أولاً جزئياً سطحياً

بشكل مستطيل EDCB أبعاده

dz, dy ، كان يكون مقطوعاً من

جريان مستوي موازي للمستوي

xy ، الشكل (١٢.٧) .

إن الجولان على طول الخط المغلق

BEDCB المحد للجزئي السطحي

ينتج كمجموع التكامل الخطي للسرعة

على طول أضلاع المستطيل :

$$dI_z = A(BC) + A(CD) + A(DE) + A(EB) .$$

نفرض ان w, v مركبتا السرعة في النقطة B ، فتكون مركبة السرعة على

طول الضلع DC هي $w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$ وعلى طول الضلع DE هي $w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$.

وينتج بالتالي :

$$dI_z = v dy + \left(w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) dz - \left(v + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) dy - w dz .$$

وبعد الاصلاح والانقباض أن مساحة الجزئي السطحي $dA_z = dy dz$ ، حيث

الدليل x يشير الى أن الجزئي السطحي متعامد مع المحور x ، نجد :

$$dF_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dA_x .$$

ولكن حسب (7.6) فإن :

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x .$$

وبالتالي تصبح العلاقة السابقة :

$$dF_x = 2\omega_x dA_x . \quad (7.45)$$

بنفس الطريقة نحصل على علاقتين مشابهتين بالنسبة لجزء سطحي في المستويين yx و zx المتعامدين مع y و z :

$$dF_y = 2\omega_y dA_y ; dF_z = 2\omega_z dA_z . \quad (7.46)$$

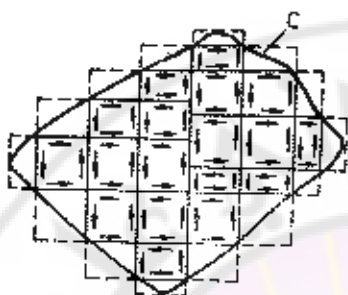
هذه النتيجة يمكن تعميمها على أي جزء سطحي dA بصنع الناظم عليه n مع شعاع السرعة الزاوية ω زاوية α حيث ينتج الجولان على طول محيط هذا الجزء :

$$dF = 2\omega_n dA = 2\omega dA_n = 2\omega dA \cos \alpha = 2\omega \cdot dA \quad (7.47)$$

فإذا تذكرنا أن الطرف الأيمن من العلاقات الأخيرة يمثل شدة الأعصار وأن السرعة الزاوية تعبر عن دوران الجزء فتكون قد توصلنا إلى العلاقة بين الجولان والدوران بالنسبة لجزء سطحي مستوي صغير والتي يمكن التعبير عنها بالجملة الهامة التالية :

الجولان حول محيط جزء سطحي مستوي صغير (مستطيل مثلاً) يساوي شدة الأعصار الذي يخترق هذا الجزء السطحي : $Q_\omega \equiv \Gamma$.

هذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لأي سطح مستو A ذي شكل اعتباطي ويجده المنحني C ، الشكل (١٣.٧) . فإذا قسمنا هذا السطح بمجموعة محددة من



المستقيات الشاقولية والأفقية إلى عدد

كبير n من المستطيلات الصغيرة ،

فإن أضلاعها الخارجية المتلاقية مع

المنحني C تشكل متعدد أضلاع عدد

أضلاعه m . فإذا لاحظنا عند حساب

الجولات حول محيط المستطيلات

الصغيرة الداخلية ، كتكامل خطي

للمساحة على طول أضلاعها ، أن كل

ضلع تابع لمستطيلين متجاورين يتم

الالتفاف حوله باتجاهين متعاكسين ،

الشكل ١٣.٧ : حساب الجولان على طول
منحن مغلق C يحده سطحاً مستوياً
اعتباطي الشكل .

فإن التكامل الخطي لكافة الأضلاع الداخلية للمستطيلات ينعقد وتبقى قيمة

الجولان مساوية لمجموع التكاملات الخطية على طول الأضلاع الخارجية للمستطيلات

أي حول محيط متعدد الأضلاع . فإذا جعلنا عدد المستطيلات $n \rightarrow \infty$ فإن

$m \rightarrow \infty$ أيضاً وبأخذ متعدد الأضلاع شكل المنحني C وبالتالي ينتج من

(7.47) بالتكامل :

$$I' = 2 \oint_{(A)} f / \omega_n dA \quad (7.48)$$

لنعالج الآن الحالة العامة فنعتبر سطحاً فراغياً اعتباطياً A يتركز على منحن

مغلق C بدون تعيين ، الشكل (١٤.٧) . ليكن dA جزءاً سطحياً صغيراً من

A ، وبالتالي يمكن اعتباره مستوياً تنطبق عليه العلاقة (7.47) . وبذلك تأخذ

علاقة (7.48) صفة عامة ، يمكن برهان صحتها بطريقة مفصلة .

نفرض ان الناظم n على dA يصنع مع محاور الاحداثيات الديكارتية z, y, x الزوايا α, β, γ فتكون :

$$dA_x = dA \cos \alpha ;$$

$$dA_y = dA \cos \beta ;$$

$$dA_z = dA \cos \gamma$$

مساقط dA على المستويات المتعامدة

مع z, y, x على التوالي . وينتج

الجولان بالنسبة للسطح dA كمجموع

للجولانات حول مساقطه . وبالتالي

يكون حسب (7.45) و (7.46)

وباستخدام علاقات الجداء الشعاعي

العددي :

الشكل ١٤.٧ : حساب الجولان

على طول منحني مغلق فراغي واستخراج

قانون ستوكس التكاملي .

$$dI' = dI'_x + dI'_y + dI'_z = 2 (\omega_x dA_x + \omega_y dA_y + \omega_z dA_z) =$$

$$= 2 (\omega_x \cos \alpha + \omega_y \cos \beta + \omega_z \cos \gamma) dA = 2 \omega \cdot n dA = 2 \omega \cdot dA .$$

فاذا أدخلنا حسب (7.15) : $2 \omega = \text{rot } V$ ، والجولان حسب (7.36) ينتج

بتكامل العلاقة السابقة :

$$I' = \oint_{(A)} V \cdot ds = \int \int_{(A)} \text{rot } V \cdot dA = 2 \int \int_{(A)} \omega \cdot dA \quad (7.49)$$

هذا هو قانون ستوكس التكاملي المعروف في نظرية الحقل (مثلاً [42])

كقانون تكاملي لإرجاع التكامل السطحي الى تكامل خطي . ويعبر هنا عن

العلاقة العامة بين الجولان والدوران :

التكامل السطحي لدوار شعاع السرعة بالنسبة لجريان ثلاثي البعد ضمن سطح فراغي اعتباطي الشكل يساوي ضعف التكامل السطحي لشعاع السرعة الزاوية ، أي مجموع شدة الاقصارات التي تخترق هذا السطح ، وبالتالي يساوي قيمة الجولان على طول المنحني الذي يرتكز عليه السطح .

فاذا عبرنا عن هذا القانون بـ كميات شعاع السرعة نجد باستخدام (7.6) :

$$\Gamma = \oint_{(A)} (u \, dx + v \, dy + w \, dz) = \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \, dz + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \, dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy \right] \quad (7.50)$$

من هذا القانون نستنتج بسهولة أنه في حالة الجريانات اللادورانية (الكمونية) أي عندما $\omega = 0$ يكون الجولان $\Gamma = 0$. وعليه يمكن أيضاً صياغة شرط الخلو من الدوران ص ٢١٩ كالتالي :

شرط الخلو من الدوران لحقل جريان وحيث الترابط يقضي بأن يكون الجولان على طول أي منحني مغلق (لا يتقاطع مع نفسه) معدوماً :

$$\Gamma = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \oint \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{s} = \oint d\Phi = 0 \quad .$$

٤.٣.٧ قانون طومسون عن ثبات الجولان مع الزمن

نعتبر جرياناً لسائل عديم الاحتكاك ومتجانس ، بمعنى أن الكثافة إما أن تكون ثابتة (سائل غير قابل للانضغاط) أو تتعلق بالضغط فقط (سائل

باروتروبي (barotropic) . نفرض أيضاً ان القوى الحجمية (الكتلية) المؤثرة على السائل من النوع المخزن للقدرة ، وبالتالي يمكن اشتقاقها جزئياً من كمون قوى « د » وحيد التعيين (راجع ٣.٣) .

على اساس هذه الفرضيات استطاع وليم طومسون (لورد كيلفين) W. Thomson (1824-1907) أن يبرهن علاقة هامة عن ثبات الجولان مع الزمن معروفة اليوم باسم قانون طومسون وتنص على ما يلي :

في سائل عديم الاحتكاك ومتجانس يؤثر عليه حقل قوى حجمية ككوفي يكون الجولان على طول أي منحني سائلي مغلق ثابتاً مع الزمن $I'(t) = \text{const}$.

بما أن الخط السائلي تعريفاً يجب ان يكون مؤلفاً من نفس الجزيئات السائلة فان قانون طومسون يقضي بأن يكون التفاضل المادي للجولان بالنسبة للزمن معدوماً ، أي :

$$\frac{DI'}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (7.51)$$

للبرهان على هذه العلاقة نحسب أولاً التفاضل الزمني للتكامل الخطي لشعاع السرعة بين نقطتين A و B من المنحني السائلي ثم نجعل إحداها تقناهي للآخرى فنحصل على التفاضل الزمني للتكامل الخطي المغلق . وباعتبار ان التكامل يتم عند زمن ثابت ، أي في لحظة معينة ، فيكون :

$$\frac{D}{Dt} \int_A^B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \frac{D}{Dt} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}) = \int_A^B \left[\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{V} \cdot \frac{D(d\mathbf{s})}{Dt} \right] \quad (7.52)$$

نعم النظر في الحد الاول من هذا التكامل فنجد أن $\mathbf{b} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$ يمثل بموجب (5.10) التسارع

المادي . ويكون حسب القانون الاسامي للتعبير : جداء التدرج في الكثافة يساوي محصلة القوى الحجمية وقوى الضغط . فاذا كانت $\mathcal{F}'_p$ القوة الحجمية النوعية (انظر ص ١٣٧) ، وكان $\text{grad } p$ تدرج الضغط فيمكن البرهان (راجع الفصل الرابع) أن :

$$b = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\mathcal{F}'_p}{\rho} - \frac{\text{grad } p}{\rho} = - \left(\text{grad } \Phi_s + \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) \quad (7.53)$$

فإذا لاحظنا أنه بموجب علاقة معروفة في التحليل الشعاعي يصكون الجداء الداخلي لشعاع التدرج في شعاع العنصر الخطي مساوياً لتفاضل التام ، فإن تكامل الحد الاول من (7.52) يصبح :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} &= - \int_A^B \left[\text{grad } \Phi_s \cdot d\mathbf{s} + \frac{\text{grad } p}{\rho} \cdot d\mathbf{s} \right] = \\ &= - \int_A^B d\Phi_s - \int_A^B \frac{dp}{\rho} = - \Phi_s \Big|_A^B - P(p) \Big|_A^B \quad (7.54) \end{aligned}$$

حيث $P(p) = \int \frac{dp}{\rho}$ هو تابع الضغط ، الذي يصبح في حالة الجزيئات غير القابلة للانضغاط مساوياً p .

بالنسبة لتكامل الحد الثاني من (7.52) فلاحظ أن السرعة الآتية لجزيء من الخط السائلي في موقع s هي : $\mathbf{V}(s) = Ds/Dt$. وتكون في نفس اللحظة سرعة جزيء في موقع $(s + ds)$ هي : $\mathbf{V}(s + ds) = \frac{D}{Dt}(s + ds) = \mathbf{V} + d\mathbf{V}$ ؛ أي أن $d\mathbf{V}$ هو فرق السرعات المتوقعة لجزيئات الخط السائلي التي تفصلها مسافة ds . وعليه يصبح :

$$\int_A^B \mathbf{V} \cdot \frac{D(ds)}{Dt} = \int_A^B \mathbf{V} \cdot d\left(\frac{Ds}{Dt}\right) = \int_A^B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} = \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \Big|_A^B \quad (7.55)$$

بذلك تصبح العلاقة (7.52) من الشكل :

$$\frac{D}{Dt} \int_A^B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \left[- \Phi_s - P + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right]_A^B$$

وبما ان كافة الحدود في الطرف الايمن تمثل ، كما هو مفروض ، توابع وحيدة التعيين في كل نقطة ، فينتج بسهولة أنه عندما تتنامى B إلى A يصبح الطرف الايمن مساوياً للصفر ، وبالتالي فان العلاقة (7.51) محقة ، وقيمة الجولان تبقى فعلاً ثابتة مع الزمن .

إن قانون طومسون يسمح باستخلاص عدة استنتاجات هامة . فإذا كانت السائل قبل بدء الحركة في حالة سكون ($V = 0$) فيكون الجولان بالنسبة لأي خط سائلي مغلق بالتأكيـد مساوياً للصفر . ويبقى إذن معدوماً بالنسبة لكافة جزيئات السائل التي تبدأ حركتها من السكون . وهذا يعني حسب قانون ستوكس أن كل جريان عديم الاحتكاك يبدأ حركته من السكون هو جريان كمومي خال من الاعاصير . ولكن يجب الا يفهم من هذا أنه لا يمكن أن تتكون أعاصير في مثل هذه الجريانات . إلا أن تكونها مرهون دائماً بوجود سطوح فاصلة أو كما تسمى أيضاً سطوح عدم استمرارية Discontinuity surface يتم عبرها تغير مفاجيء للسرعة والضغط وتتصف بعدم استقرارها (راجع ٥.٣، ٨) . هذه السطوح تنشأ بعد بدء الحركة وبالتالي لا ينطبق عليها قانون طومسون . ولكنه يبقى صحيحاً بالنسبة لأي خط سائلي مغلق يضم في داخله مثل هذه السطوح الفاصلة ، ويلزم عندها ان يكون الجولان الكلي للاعاصير المتشكلة في المجال المغلق معدوماً . لهذا لا تظهر عادة أعاصير فردية وإنما أزواج أعاصير .

لنوضح هذه النتيجة الهامة على مثال بدء الحركة لجناح حامل في سائل ساكن ، الشكل (١٥.٧) . إن الجولان حول الخط السائلي المغلق C الذي يضم الجناح وهو في حالة السكون (أو أي خط آخر) يساوي الصفر . بعد بدء الحركة ينشأ عند مؤخرة الجسم الحادة سطح فاصل نتيجة تلاقي التيار العلوي والسفلي للسائل بسرعتين مختلفتين عادة . هذا السطح الفاصل يتفكك بعد لحظة قصيرة الى ما يسمى اعصار بدء الحركة .

فإذا اعتبرنا الخط المغلق C_1 الذي يضم هذا الاعصار فتتبع لدينا قيمة للجولان $\Gamma \neq 0$. وإذا حسبنا الجولان على طول الخط المغلق C_2 الذي يحيط بالجناح

الحامل نجد أنه من حيث القيمة يساوي شدة إعصار بدء الحركة ولكنه مخالف له

بالإشارة . وعليه يكون

الجولان بالنسبة لمجموع الخطين

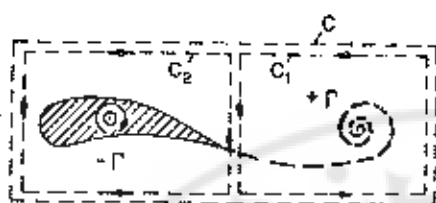
المغلقيين C_1, C_2 معدوماً .

وهذا يؤكد أن نشوء الجولان

حول جناح حامل يبدأ حركته

من السكون لا يتناقض مع

قانون طومسون .



الشكل ١٥.٧ : يتشكل الجولان حول

جناح حامل يبدأ حركته من السكون

نتيجة ظهور إعصار بدء الحركة .

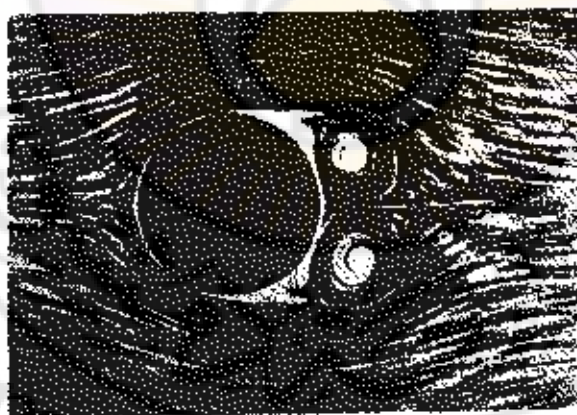
التجربة تؤكد بوضوح صحة النتائج السابقة . فبالامكان بمسائل تربية

الجريان تصوير أعاصير بدء الحركة ، كما يبين ذلك الشكل (١٦.٧) بالنسبة

لاسطوانة دائرية . كما يمكن أيضاً رؤية الأعصار الجولاني حول الجناح الحامل

إذا أوقف فجأة بعد لحظة من بدء الحركة ، حيث يتشكل ما يسمى أعصار

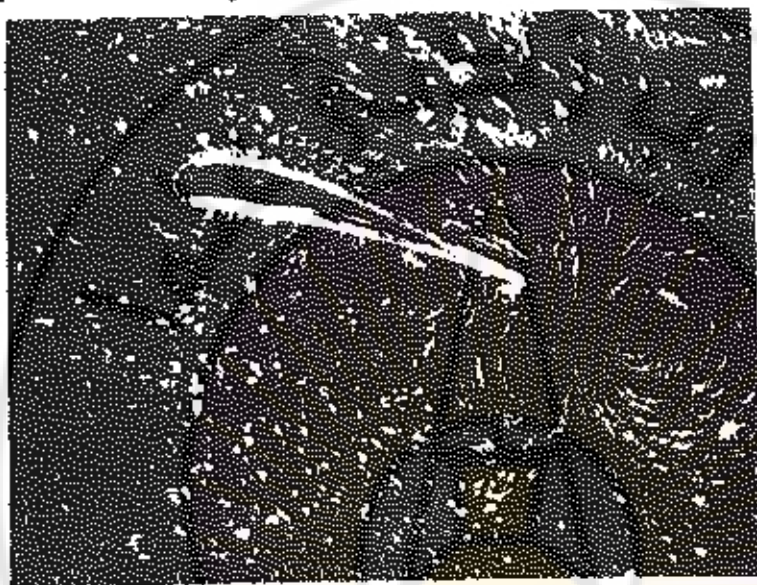
التوقف ، الشكل (١٧.٧) .



الشكل ١٦.٧ : تكوين إعصار بدء الحركة لاسطوانة دائرية

عند الإقلاع من السكون ، حسب براندل (الظر [28]) .

الجدير بالانتباه أن قانون طومسون، وفقاً للفرضيات التي اشتق على أساسها، لا ينطبق في حالة الجزيئات الحقيقية. كما لا ينطبق في حالة السوائل غير المتجانسة، ولكن طريقة التحليل السابقة تسمح بحساب التغير الزمني للجولان بالنسبة لكملة هواء مثلاً ارتفعت فيها درجة الحرارة بشكل غير متساو، نتيجة تسخين موضعي.



الشكل ١٧.٧ : بعد الاقلاع بفترة قصيرة أوقف الجناح الحامل . الأعصار الجولاني (أعصار التوقف) بعد انفصاله عن الجناح يسبح مع الأعصار بدء الحركة ، حسب إريك [٨] .

٥.٣.٧ قوانين هلمهولتز

لقد استخرج هلمهولتز في دراسته المشهورة الآتفة الذكر القوانين الأساسية للحركة الأعصارية في السوائل المثالية المتجانسة (الباروتروبية) الخاضعة لحقل قوى حجمية كموني وصاغها بالشكل التالي :

١ ... لا يمكن أن يكون جزيء سائل في حالة دوران إذا لم يكن في هذه الحالة منذ بدء الحركة .

٢ - كل جزيء سائل يكون في لحظة ما تابعاً لخط إعصار فإنه يبقى كذلك عندما يتحرك خط الاعصار أو يغير شكله .

٣ - غزارة التدفق الاعصاري تبقى ثابتة على طول أنبوبة الاعصار وتحافظ على قيمتها أثناء حركة الأنبوبة .

سوف لا نتعرض هنا للبرهان الرياضي لهذه القوانين الذي يمكن التوصل إليه بدون صعوبة كبيرة بمساعدة قانون ستوكس التكاملية وقانون طومسون . ونجدد الإشارة إلى أن هامبولتس قد اشتق هذه القوانين على أساس التماثل بين الحقل الكهربائي وحقل الجريان .

من القانون الأول ينتج أن كل جريان عديم الاحتكاك يبدأ حركته من السكون هو جريان لادوراني . وينتج من القانون الثاني أن أنبوبة الاعصار تبقى باستمرار أنبوبة إعصار ، أي أنها لا تتفكك (طبعاً في السوائل الحقيقية لا ينطبق ذلك ا) . وينتج من القانون الثالث أن كل خط مغلق يحيط بالأنبوبة الاعصارية يمكن إزاحته على طول هذه الأنبوبة دون أن يتغير الجولان حوله . ولهذا لا يمكن أن يكون لخط الاعصار بداية أو نهاية ، وإنما يجب أن ينتهي إما على الجدار أو على السطح الحر للسائل ، وإما أن يشكل خطاً إعصارياً خائفاً نلاحظه أحياناً عند بعض المدخنين البارعين ، حيث يلون الدخان جزيئات الهواء التي تقوم بحركة دورانية . وتكون هذه الحلقة الاعصارية تتفكك بعد فترة يعود لتأثير الاحتكاك .

إن قانون هامبولتس الثالث يجد تطبيقاً عملياً هاماً في نظرية الجناح الحامل المحدود الامتداد التي وضعها براندل . إن الجناح الحامل يعرض عنه يخطط إعصاري يسمى الاعصار المربوط Fixed vortex بينما تكون خطوط الاعصار المتباعدة من نهايته ما يسمى الاعصاران الحوان Free vortex . وهذان يشكلان مع الاعصار المربوط وإعصار بدء الحركة بعيداً خلف الجناح الحامل

ما يسمى اعصار حدوة الحصان المغلق ، وذلك بالتطابق مع قانون هلمهولتز الثالث . هذا القانون يجد أيضاً تطبيقاً هاماً في بناء الأقنية الهوائية والمائية للقياسات الايروديناميكية والهيدروديناميكية ، حيث يطلب أن يكون الجريان في حجرة القياس منتظماً وخالياً من الدوران قدر الامكان [4] . ويتم تحقيق ذلك بوضع ما يسمى مقوّم التيار في مدخل النفثة المتصلة بحجرة القياس . وهو يتألف من صفائح متصالية أو ما يشابهها تكون أفقية متوازية صغيرة المقطع (أبسطها يشبه شبك الغربال !) . فإذا وجدت كتلة هوائية في حالة دوران حول محور مواز لاتجاه الجريان ، فإن سرعتها الزاوية تزداد بمعدل n مرة إذا صغر المقطع بنسبة $1/n$ ، لأن الشدة الاعصارية $2\omega A = \Gamma$ تبقى ثابتة . وباعتبار أن القطر عرضياً على خط التيار ينقص بنسبة $1/\sqrt{n}$ ينتج من ذلك زيادة السرعة العرضية (المشوشة !) ω بنسبة $\sqrt{n}$ بينما تزداد السرعة في اتجاه التيار بنسبة n .

كل خيط إعصاري يولد في جواره المباشر سرعة إضافية يطلق عليها السرعة المحرصة ، وتلعب دوراً هاماً في نظرية قوة الرفع فإذا المؤثرة على جناح حامل أو ريشة آلة جريان .

٧.٣٦ قانون بيو - سافار لحساب حقل السرعة المحرصة

نعتبر سائلاً عديم الاحتكاك نخترق بعض مناطق خيوط إعصارية إفرادية . فتكون جزئيات السائل التابعة لهذه الخيوط فقط في حالة دوران ، $\omega \neq 0$ ، بينما يكون باقي حقل الجريان لادورانياً (خالياً من الاعاصير) . ندرس التأثير الذي يحدثه وجود خيط اعصاري ذي شكل غير محدد على محيطه المجاور ، ونسأل بالضبط عن العلاقة بين الشدة الاعصارية (الجولان) لهذا الخيط وحقل السرعة المحرصة منه .

إن الإجابة على هذا السؤال ، التي أعطاها لأول مرة هلمهولتز و ستوكس (انظر [9]) ، تسهل إذا اعتمدنا على التماثل بين الحقل الالكتروديناميكي والهيدروديناميكي ، الذي سبقت الإشارة إليه ، وبصورة خاصة تماثل القيم التالية لكل من الحقلين :

الحقل الالكتروديناميكي	الحقل الهيدروديناميكي
السلك الناقل للكهرباء	الخط الأعصاري
شدة التيار I_e	مماثل
شدة الحقل المغناطيسي المعرض H_m	مماثل
$I_e = \oint H_m \cdot ds = \oint H_m \cos \alpha ds$	$I_e = \oint V \cdot ds = \oint V \cos \alpha ds$
(7.57)	(7.58)

وكما أنه لا يوجد سلك ناقل للكهرباء إلا إذا كان ضمن دائرة مغلقة أو لانهائي الامتداد ، كذلك لا توجد سوى خطوط أعصارية غير محدودة أو مغلقة . والجدير بالذكر أن التماثل الالكتروديناميكي يعتبر الأساس لعدد من طرق ميكانيك السوائل المطبقة في حل العديد من مسائل الجريان العملية المختلفة ، أنظر مثلاً [13] [14] [27] [87] [88] .

إن العلاقة بين شدة التيار الكهربائي في سلك ناقل وبين الحقل المغناطيسي المعرض حوله معروفة في أسس الكهرباء باسم قانون بيو - ساڤار نسبة للعالمين J. B. Biot (1774-1862) و F. Savart (1791 - 1841) وطبيعي على أساس ماتقدم أن يستخدم نفس هذا القانون لحساب حقل السرعة المعرضة من خيط أعصاري .

نأخذ الحالة البسيطة جداً لسلك ناقل مستقيم لانهائي الامتداد يمر فيه تيار شدته ثابتة I_e . فإذا اعتبرنا دائرة نصف قطرها r يحترقها السلك

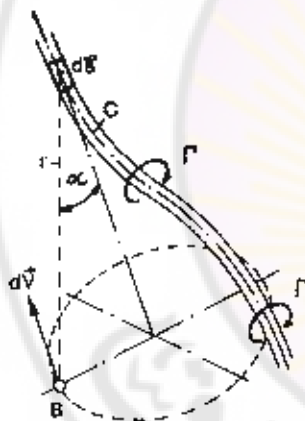
عمودياً في مركزها ، فتكون شدة الحقل المغناطيسي H_m على طول محيط هذه الدائرة ثابتة وكذلك $\cos \alpha \approx 1$ وبالتالي ينتج من تكامل العلاقة (7.57) :

$$I_e = 2 \pi r H_m \Rightarrow H_m = I_e / 2 \pi r . \quad (7.59)$$

هذه العلاقة تماثل تماماً العلاقة (7.39) التي حصلنا عليها بالنسبة لحيط إعصاري مستقيم يخترق مستوى الشكل (٩.٧ - ١) عمودياً في المركز . فإذا اعتبرنا السرعة المحيطية $V \equiv u$ السرعة المحرصة ينتج :

$$I' = 2 \pi r V \Rightarrow V = I' / 2 \pi r . \quad (7.60)$$

نعتبر الآن خيطاً إعصارياً (شكله بدون تحديد وشدة الأعصارية I' ،



الشكل (١٨.٧) . ليكن عنصراً خطياً منه ، وليكن B نقطة ما تبعد عن ds مسافة r . الزاوية التي يصنعها محور ds مع نصف القطر r . إن السرعة الجزئية التي يحرضها ds في النقطة B تتحدد حسب قانون بيو - سافار بالعلاقة :

$$dV = \frac{I'}{4 \pi r^2} \sin \alpha \, ds . \quad (7.61)$$

الشكل ١٨.٧ : استخراج قانون بيو - سافار لحساب السرعة المحرصة من خيط إعصاري .

dV تكون متعامدة مع المستوي المماس من r و ds . وبكاملة هذه العلاقة نحصل على السرعة المحرصة من تكامل خط إعصاري مستو :

$$V = \frac{I'}{4 \pi} \int_{(C)} \frac{\sin \alpha}{r^2} \, ds = \frac{I'}{4 \pi} \oint \frac{\sin \alpha}{r^2} \, ds , \quad (7.62)$$

حيث يجب ان يكون خط التكامل إما مغلقاً أو ممتداً الى اللانهاية . وفي الحالة العامة التي يكون فيها الخط الاعصاري يمثل منحنيًا فراغياً فيفضل ان تكتب العلاقة السابقة بشكل شعاعي . فاذا وضعنا بموجب علاقات الجداء الشعاعي $r \sin \alpha \, ds = |r \times ds|$ نجد السرعة المخرضة :

$$\mathbf{V} = \frac{I'}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3} \quad (7.63)$$

حيث $\mathbf{r}$ يمثل شعاع نصف القطر المكاني بين ds والنقطة المعتبرة B ، أو بشكل مركبات باتجاه محاور الاحداثيات الديكارتية x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{I'}{4\pi} \int \frac{(y-y') \, dz' - (z-z') \, dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\ v &= \frac{I'}{4\pi} \int \frac{(z-z') \, dx' - (x-x') \, dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\ w &= \frac{I'}{4\pi} \int \frac{(x-x') \, dy' - (y-y') \, dx'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

حيث x', y', z' إحداثيات النقطة المتحولة ، x, y, z إحداثيات النقطة الثابتة التي يراد حساب السرعة المخرضة فيها .

بالرغم من أنه لا توجد في الحقيقة خيوط إعصارية محدودة الطول ، كما سبق التأكيد على ذلك مراراً ، إلا أنه انطلاقاً من التصور أن كل خط مغلق يمكن اعتباره مؤلفاً من مجموعة قطع مستقيمة ، نريد الآن أن نحسب السرعة التي تخوضها قطعة طولها $\overline{DC}$ من خيط إعصاري مستقيم في النقطة الثابتة B . ليكن h البعد الشاقولي بين B والخط الاعصاري ، ds عنصراً خطياً منه ، فيكون حسب الشكل (١٩٠٧) :

$$\sin \alpha = \frac{h}{r} = \frac{r \, d\alpha}{ds} \Rightarrow \frac{ds}{r^2} = \frac{d\alpha}{h} .$$

وبالتالي تنتج من (7.62) السرعة المحرصة :

$$V = \frac{F}{4\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{F}{4\pi h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (7.65)$$

حيث α_1, α_2 الزاويتان المحصورتان بين نصفي القطرين $\overline{CB} = r_1, \overline{DB} = r_2$ والخط الاعصاري . فإذا كان الخط

الاعصاري لانتهائي الامتداد من

الطرفين تكون $\alpha_2 = \pi, \alpha_1 = 0$ ،

وينتج بالتالي من (7.65) :

$$V = F/2\pi h \quad (7.66)$$

وذلك بالتطابق مع (7.60) . أما إذا

كان خط الاعصار يبدأ من نقطة B'

واقعة على المنحني الشاقولي المار من B

الشكل ١٩.٧ : حساب السرعة المحرصة
من خط اعصاري مستقيم محدود $\overline{DC}$.

ويتمد يساراً الى اللانهاية فتكون $\alpha_2 = \pi/2, \alpha_1 = 0$ وينتج من (7.65) :

$$V = F/4\pi h \quad (7.67)$$

أي ان السرعة التي يحرضها خط اعصاري نصفى تبلغ نصف السرعة التي يحرضها خط اعصاري لانتهائي الامتداد . والجدير بالذكر أن الاعصارين الحزين المنبعين من نهايتي جناح حامل محدود الامتداد ينظر إليها كنصفي خطين اعصاريين يمتدان من طرف واحد الى اللانهاية .

٤.٧ أسئلة مراجعة وتمارين

١٠.٧ : لماذا يطلق على الحركة المسماة للسوائل اسم الحركة اللشوعية ؟ اكتب معادلتها العامة .

س ٢.٧ : ماذا تعني رياضياً وهندسياً ساحة وحيدة الترابط ومضاعفة الترابط أعط أمثلة .

س ٣.٧ : اشرح مفهوم الدوران والجولان والعلاقة بينهما في السوائل عديدة الاحتكاك.

س ٤.٧ : حدد أوجه التماثل بين كون حقل السرعة وكون حقل القوى المحيطية .

س ٥.٧ : حدد أوجه التماثل بين الحقل الاقصاري والحقل الالكترو ديناميكي . هل يمكن تبين ذلك تجريبياً ؟

س ٦.٧ : عل سطح مياه الانهار تظهر أحياناً أمواج مائية أو اعاصير فارغة (الزواة تبدو فارغة وجزيئات السائل تدور حولها) . هل يتعارض ذلك مع القوانين الأساسية للحركة الاقصارية ؟

س ٧.٧ : ماهو الفرق بين جريان مرعته المحيطية تناسب عكساً مع نصف القطر المكاني وآخر سرعته تتناسب طروداً مع نصف القطر ؟

س ٨.٧ : ماذا تنص قوانين هـ هـولتس للحركة الاقصارية وماذا تستنتج منها ؟

س ٩.٧ : هل هناك تناقض بين قانون طومسون وبين نشوء الجولان حول جناح حامل يتحرك من السكون ؟

س ١٠.٧ : هل يمكن أن تتشكل عند الزفير اعاصير شاقية كالتي نشاهد عند بعض المدخنين ؟

س ١١.٧ : تأكد فيما إذا كانت الجريانات المستوية التالية المحددة بمركبات السرعة دورانية أم لادورانية :

(a) : $u = \dots 2y, v = 3x$; (b) : $u = 0, v = 3xy$; (c) : $u = 2x, v = -2y$

الحل : شرط الخلو من الدوران بالنسبة لجريان ثنائي القاس يلضي حسب (7.27) أن يكون $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, وعليه يكون بالنسبة للجريان :

(a) : $\frac{\partial (3x)}{\partial x} - \frac{\partial (-2y)}{\partial y} = 3 \neq 0 \Rightarrow \omega_z = 3 \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow$ دوراني

(b) : $\frac{\partial (3xy)}{\partial x} - 0 = 3y \neq 0 \Rightarrow \omega_z = \frac{3}{2}y \neq 0 \Rightarrow$ دوراني

(c) : $\frac{\partial (-2y)}{\partial x} - \frac{\partial (2x)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \omega_z = 0 \Rightarrow$ لادوراني (كموني)

ت ٢.٧ : ماهي العلاقة التي يجب أن تحتملها الثوابت a, b, c لكي يكون التابع:

$$\Phi = \frac{1}{2} (a x^2 + b y^2 + c z^2)$$

كمون سرعة لجريان مثالي ؟ حدد خطوط الكمون الثابت $\Phi = \text{const}$ وقبعة شعاع السرعة في النقطتين $B_1 (0, 0, 0)$ و $B_2 (2, 1, 1)$ في الحالة الخاصة التي يكون فيها $h = a$.
الحل : لكي يكون Φ تابع كمون سرعة يجب أن يحقق حسب (7.23) معادلة لابلاس $\Delta \Phi = 0$ وحيث أن :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a x, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b y, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = c z, \quad (a)$$

يفتح :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = a; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = b; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = c.$$

وبالتالي عندما :

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \Delta \Phi = 0. \quad (b)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $b = a$ يكون : $-2a - c = 0$ ، ويصبح كون السرعة :

$$\Phi = \frac{a}{2} (x^2 + y^2 - 2z^2).$$

ونحصل على معادلة سطوح الكمون الثابت بالشكل :

$$\Phi = \text{const} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2z^2 = \text{const}. \quad (c)$$

التي تمثل بإعطاء الثابت قيماً عددية مختلفة مجسمات قطوع زائدة ذات فرع واحد ، متناظرة بالنسبة للمحور z . مركبات السرعة نحصل عليها من (7.21) :

$$u = a x, \quad v = a y, \quad w = -2 a z$$

ومنها نجد قيمة شعاع السرعة :

$$|V| = a \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}.$$

وعليه تبلغ قيمة السرعة في النقطة B_1 فهي $V_1 = 0$ ، وفي النقطة B_2 : $V_2 = 3a$.

* * *

الفصل الرابع

تحريك السوائل المثالية غير القابلة للانضغاط (هيدروديناميك)

لقد رأينا في الفصل السابق أن الدراسة الحركية للسوائل تتحدد بواسطة قيم هندسية وحركية بمثل الاحداثيات الديكارتية أو الاحداثيات المتحني s ، مساحة مقطع الجريان A ، السرعة V ، التسارع a . بالمقابل تهدف الدراسة التحريكية للسوائل الى معرفة القوى المؤثرة على جزيئات السائل التي سببت حركتها الحركية . كما تهدف - وهذا مهم جداً - الى الناحية التطبيقية - الى معرفة القوى والمزوم التي يؤثر بها السائل على حدود حلة الجريان ، التي تشكلها في الحالة العامة الجدران الصلبة التي يجري السائل حولها أو في داخلها ، ويتم حساب هذه القوى بمساعدة المعادلات والقوانين الأساسية للتحريك .

سندرس أولاً تحريك السوائل المثالية غير القابلة للانضغاط ($\rho \approx \text{const}$) ، حيث نفرض ان اللزوجة معدومة ($\eta = 0$) ، وبالتالي قوى الاحتكاك المماسية معدومة . وتكون جزيئات السائل معرضة لتأثير قوى الضغط الناطمية والقوى الحجمية (الكتلية) . وسنبداً بدراسة الجريانات البسيطة وحيدة البعد كمقدمة لدراسة الجريانات العامة ثنائية وثلاثية البعد .

٨ . قوانين التحريك الأساسية للجريانات وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

لقد سبق التنويه (ص ١٩٣) الى أن دراسة الجريانات وحيدة البعد تعتمد على مفهوم أنبوبة التيار (الشكل ٩.٥) ، التي يمكن أن تكون حدودها الخارجية وهمية (سائلة) أو حقيقية (صلبة) .

نفترض في الدراسة التحريكية أن شكل أنبوبة التيار معلوماً ، وبالتالي نعلم مسارات خطوط التيار ، وخاصة مسار خط التيار المركزي s ، الذي يكون شعاع السرعة للتيار الحجمي أو الكتلي مماساً عليه في كل نقطة . وتحدد قيمة السرعة ، التي تكون في الحالة العامة تابعة للزمان والمكان : $V = V(t, s)$ والتي يفرض أنها موزعة بانتظام على كامل أي مقطع متعامد مع s ، من معادلة الاستمرار البسيطة (6.3) أو (6.5) ، حيث

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \text{const} \quad (\rho = \rho(s) \neq \text{const}) \quad (8.1)$$

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = V A = \text{const} \quad (\rho = \text{const}) \quad (8.2)$$

١.٨ معادلة أويلر الميكانيكية ومبرة البعد

للتعرف على التأثير الكتلي داخل السائل الجساري نستخدم مبدأ القطع فنحزب جزيئاً حجمياً يمثل قطعة صغيرة من أنبوبة التيار ، ونطبق عليه قانون نيوتن الأساسي للتحويلك : محصلة القوى تساوي جداء الكتلة في التسارع :

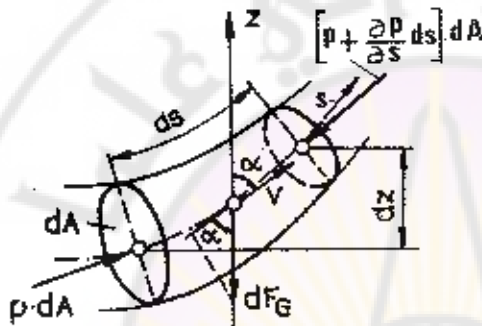
$$dF_K = dm \cdot b ; \left(F_K \parallel b = \frac{DV}{Dt} \right) . \quad (8.3)$$

F_K تسمى أحياناً القوة الحجمية الحركية [13] ، وكذلك قوة دالمبير ، لأنه حسب مبدأ دالمبير يمكن إرجاع حركة الجزيء الحجمي الى مسألة توازن إذا طبقنا عليه قوة عطالة بعكس اتجاه حركته تساوي وتعاكس F_K .

في حالة سائل عديم الاحتكاك يخضع الجزيء الحجمي المتغير لتأثير القوى الحجمية الستاتيكية (الهستاتيكية) ، كقوة الثقالة مثلاً ، بالإضافة لتأثير القوى السطحية التي تنحصر بقوى الضغط الناعمة على السطح الخارجي للجزيء . وحيث أن الضغط يمكن أن يتغير في اتجاه الجريان وناظماً عليه : $p = p(s, n)$ فيلزم استخراج معادلة الحركة في هذين الاتجاهين .

١.١.٨ معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان

نقطع من أنبوبة تيار سائل ثقيل كثافته ρ جزيئاً حجماً صغيراً مقطعه dA وطوله ds ، وكتلته : $dm = \rho dV = \rho dA ds$ ، وليكن الاحداثي المنحني s موجياً في اتجاه الجريان والاحداثي الشاقولي z موجياً للأعلى، الشكل (١.٨) . هذا الجزيء يخضع لتأثير قوة



الثقالة وقوة الضغط .

بفرض أن g هو التسارع الأرضي، α الزاوية التي يشكلها s مع z ، فتكون مركبة قوة الثقالة في اتجاه الجريان هي :

$$dF_{ns} = -g \cdot dm \cos \alpha = -g \cdot \rho dA ds \cdot \frac{\partial z}{\partial s} .$$

الشكل ١.٨ : استخراج معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة .

ان مساقط قوى الضغط الجانبية على المحور s تساوي الصفر . وبالتالي تنتج محصلة قوى الضغط المؤثرة في اتجاه الجريان من القوتين المؤثرتين على قاعدة الجزيء الحجمي السفلى والعليا :

$$dF_{ps} = p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA = - \frac{\partial p}{\partial s} ds dA .$$

نعتبر الحالة العامة التي تكون فيها السرعة في اتجاه الجريان تتغير زمانياً ومكانياً، $V = V(t, s)$ ، فيكون التسارع المطبق على الجزيء هو التسارع المادي الذي ينتج من (5.10) بوضع $r \equiv s$ ويصبح :

$$b_s = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} .$$

نطبق قانون نيوتن (8.3) فنحصل على العلاقة :

$$dF_{G_s} = dF_{G_s} + dF_{p_s} = -g \rho dA ds \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} ds dA =$$

$$= \rho dA ds \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \right) ,$$

أو بعد الاختصار على $\rho dA ds$ واجراء اصلاح بسيط :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0} \quad (8.4)$$

التي تمثل معادلة أويلر الحركية . في اتجاه خط التيار لجريان وحيد البعد غير مستقر ، قابل أو غير قابل للانضغاط . وهي تتضمن ثلاثة مجاهيل ρ, p, V كلها تابعة في الحالة العامة للزمان والمكان . وبالتالي يتطلب حلها معادلتين إضافيتين هما في حالة الجريانات القابلة للانضغاط ($\rho \neq \text{const}$) معادلة الاستمرار (8.1) ومعادلة الحالة (2.50) : $p/\rho = RT$. أما في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط ($\rho = \text{const}$) فتحتوي (8.4) على مجهولين ويلزمنا حلها معادلة الاستمرار (8.2) فقط .

في حالة الجريانات المستقرة بنعدم القارح المكاني $\partial V / \partial t$ وتصبح السرعة والضغط تابعين للمكان فقط ، وبالتالي تنبسط معادلة أويلر الحركية وتأخذ الشكل التالي :

$$V \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0 , \quad (8.5)$$

حيث أمكن كتابة المشتقات الجزئية كمشتقات عادية بسبب وجود منحول واحد فقط .

يبلغ تسارع الحمل $V \frac{dV}{ds}$ بالنسبة للغالبية العظمى من الجريانات العملية قيمة تضاهي عشرات أضعاف قيمة التسارع الأرضي ، الذي يمكن في هذه الحالات إهماله دون الوقوع في خطأ يذكر . وعندها تأخذ (8.5) بالنسبة لسانبل و مهمبل التقالة ، الشكل البسيط التالي :

$$V \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = 0 . \quad (8.6)$$

وكمثال نفرض أن السرعة في اتجاه محور قناة أفقية تزايد خطياً من $V_1 = 15 \text{ m/s}$ عند المدخل إلى $V_2 = 45 \text{ m/s}$ عند المخرج ، أي بمقدار $\Delta V = 30 \text{ m/s}$ وذلك عبر وصلة بشكل تقاطع طولها $\Delta s = 1 \text{ m}$ ، والسرعة فيها $V_s = 30 \text{ m/s}$. عندها تبلغ قيمة تسارع الحمل :

$$b_s \approx V \frac{\Delta V}{\Delta s} = 30 \cdot 30/1 = 900 \text{ m/s}^2 \approx 90 g ,$$

أي 90 مرة قيمة التسارع الأرضي . وهذا مبرر كاف لإهمال g بالمقارنة مع b_s .

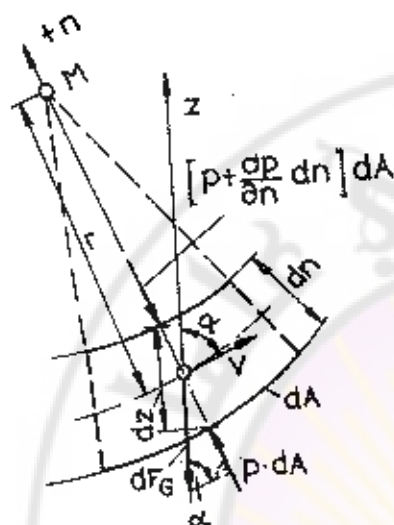
٣.١.٨ معادلة أويلر الحركية ناظوباً على اتجاه الجريان

نعتبر جزيئاً حجبياً مقطوعاً من أنبوبة تيار منحنية الجدران ، الشكل (٣.٨) . نأخذ الاتجاه الموجب للناظم $+n$ في اتجاه مركز الانحناء M لمحور أنبوبة التيار ، ونأخذ المحور الشاقولي z موجباً للأعلى . ليكن r نصف قطر الانحناء المكافئ لمحور الجزيء الحجبى ، dA العنصر السطحي منه المتعامد مع dn ، ارتفاع الجزيء في اتجاه الناظم فتكون كتلته $dm = \rho \cdot dA \cdot dn$.

بقوس α الزاوية التي يصنعها z مع محور أنبوبة التيار ، فتكون مركبة قوة الثقالة باتجاه الناظم هي (الشكل ٣.٨) :

$$dF_{Gn} = -g \cdot \rho \cdot dA \cdot dn \cdot \sin \alpha = -g \cdot \rho \cdot dA \cdot dn \cdot \frac{\partial z}{\partial n} .$$

وننتج محصلة قوى الضغط في الاتجاه الموجب للناظم (مساقط كافة قوى الضغط الجانبية معدومة) بالشكل :



الشكل ٢.٨ : استخراج معادلة أويلر الحركية ناظمية على اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط وقوى القالة .

$$dF_{pn} = p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) dA = - \frac{\partial p}{\partial n} dn dA .$$

فاذا لاحظنا أن التسارع في اتجاه الناظم هو التسارع النابذ $b_n = V^2 / r = \omega^2 r$ نتيج من تطبيق قانون نيوتن (8.3) العلاقة :

$$dF_{kn} = dF_{gn} + dF_{pn} = - g \rho \frac{\partial z}{\partial n} dA dn - \frac{\partial p}{\partial n} dn dA = - \frac{V^2}{r} \rho dA dn ,$$

أو بعد الاختصار على $\rho dA dn$ وإجراء اصلاح بسيط :

$$\frac{V^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad , \quad (8.7)$$

التي تمثل معادلة أويلر الحركية ناظمية على خط التيار لجريان وحيد البعد قابل أو غير قابل للانضغاط . وهي تسمح لنا بحساب تغير الضغط عند الانتقال بالاتجاه الناظمي من خط تيار لآخر . ولكن نلزم حلها معرفة توزيع السرعة والضغط على طول خطوط التيار ، وذلك بمساعدة معادلة الاستمرار والعلاقة (8.5) مثلاً التي استخرجناها في الفقرة السابقة .

في الحالة التي ينعدم فيها تأثير قوة الثقالة في اتجاه الناظم، كما هو الحال عندما يكون الجريان المعبر واقعاً في مستر أفقي، فان العلاقة (8.7) تصبح من الشكل:

$$\frac{V^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (8.8)$$

هذه العلاقة تنطبق على حالات عملية عديدة يكون فيها التسارع النابذ أكبر بكثير من التسارع الأرضي، بحيث يمكن إهمال الأخير. فإذا فرضنا كمثال بسيط أن $r = 0,15 \text{ m}$, $V = 15 \text{ m/s}$ ينتج: $b_n = 15^2/0,15 = 1500 \text{ m}^2/\text{s}^2 \approx 150 \text{ g}$. أي إن قيمة التسارع النابذ تعادل 150 مرة تقريباً قيمة التسارع الأرضي. إن لمعات النظر في العلاقتين الأخيرتين تسمح باستخلاص النتيجة الهامة التالية:

عندما تكون خطوط التيار منحنية (مقوسة) فان الضغط في الاتجاه الناظمي عليها يتناقص في اتجاه مركز الانحناء، وينعدم تغير الضغط في اتجاه الناظم عندما تكون خطوط التيار مستقيمة ($r = \infty$).

وعليه إذا اعتبرنا الجريان في كوع فان الضغط على جداره الخارجي يكون أكبر من الضغط على جداره الداخلي.

٢.٨ معادلة برنولي

١.٢.٨ معادلة برنولي كنظام لمعادلة أويلر المبركة

نعتبر جرياناً مستقرّاً غير قابل للانضغاط ($\rho = \text{const}$). في هذه الحالة

يمكن كتابة معادلة أويلر الحركية (8.5) بالشكل التالي :

$$\frac{\rho}{2} \frac{d(V^2)}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

حيث تمثل كافة الحدود كسوراً تفاضلية بالنسبة لاتجاه الجريان s ، ويمكن بالتالي مكافئتها بسهولة حداً حداً . وبذلك نجد العلاقة الهامة التالية :

$$\boxed{\frac{\rho}{2} V^2 + p + \rho g z = C_{np} = \text{const}} \quad (8.9)$$

التي تعتبر بالنسبة لحركة مائل ثابت الحجم وعدم الاحتكاك العلاقة الأساسية التي تربط بين السرعة والضغط والوضعية المكانية لحظ التيار المعبر . وقد صاغها دانيال برنولي عام 1738 ، أي قبل أن يضع أويلر نظريته عن حركة السوائل المثالية . لذلك يطلق على هذه العلاقة بصيغتها المختلفة اسم معادلة برنولي . كما يطلق على ثابت التكامل C_{np} اسم ثابتة برنولي .

العلاقة (8.9) تسمح بحساب الضغط في اتجاه الجريان . لذلك يطلق عليها أيضاً معادلة الضغط . ويمكن بسهولة التأكد أن كل حد من حدود الطرف الأيسر له واحدة قياس الضغط $[kp/cm^2]$ أو $[N/cm^2]$. ويسمى الحد الأول الضغط التحريكى (الديناميكي) ، أو ضغط السرعة p_{dyn} ، أو ضغط الركود q Stagnation pressure ؛ ويسمى الحد الثاني الضغط الستاتيكي ؛ والحد الثالث ضغط الثقالة أو ضغط القوى الحجمية عامة . وسنأتي على توضيح مفهوم هذه الضغوط فيما بعد .

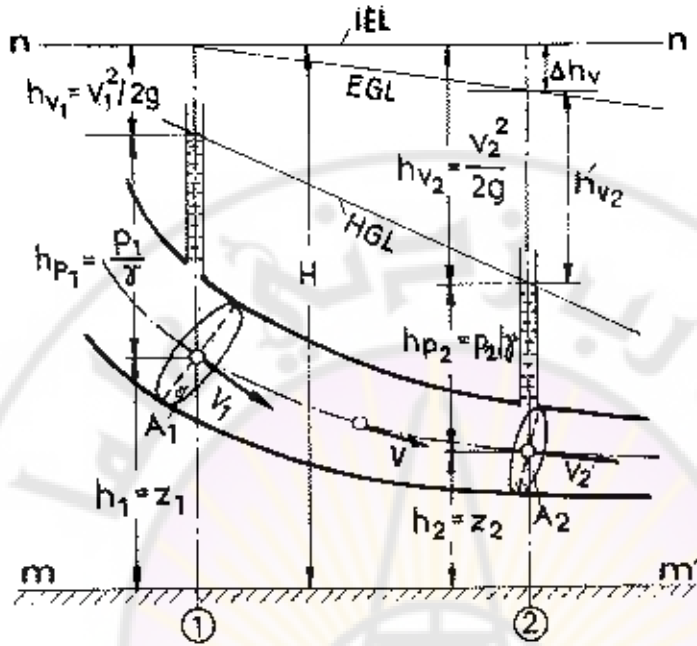
نقسم طرفي (8.9) على $\gamma = \rho g$ فننتج العلاقة :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C_{BH} = H = \text{const} \quad , \quad (8.10)$$

التي تمثل معادلة برنولي للارتفاعات ، لأن كل حد من حدود الطرف الأيسر له واحدة قياس الطول [m] . يمثل الحد الأول $V^2/2g$ ارتفاع السرعة الذي تصل إليه نقطة مادية إذا قذفت ساقولياً للأعلى في حجرة خالية من الهواء بسرعة ابتدائية مقدارها V . ويمثل الحد الثاني p/γ ارتفاع الضغط أو الضاغط ويكافي حسب (٢.٣.١.٣) ارتفاع عمود سائل ساكن وزنه النوعي γ الذي يولد نتيجة ثقله الضغط p ، وبالتالي فهو يكافئ ارتفاع صعود السائل في أنبوب بيزومتري ساقولي . ويمثل الحد الثالث z الارتفاع المكافئ أو الهندسي بالنسبة لأي مستوى قياس أفقي Datum level أو مستوى صفري يمكن اختياره لا على التعيين . على هذا الأساس يمكن التعبير عن العلاقة (8.10) بالجملة التالية :

بالنسبة لجريان مثالي مستقر يكون مجموع ارتفاع السرعة وارتفاع الضغط والارتفاع المكافئ في كل نقطة من نقاط خط تيار ما يساوي قيمة ثابتة C_{BH} .
 نسمى الارتفاع الهيدروليكي المثالي Ideal hydraulic head

إن التمثيل البياني الرمزي لهذه الجملة موضح بالشكل (٣.٨) . فإذا اعتبرنا نقطتين لا على التعيين ① و ② من محور أنبوية تيار وحددنا اعتباراً من مستوى القياس الأفقي $m' - m$ الارتفاع المكافئ وارتفاع الضغط وارتفاع السرعة لها فإن نقاط النهاية لمجموع هذه الارتفاعات تقع في حالة سائل مثالي على المستوى الأفقي $n' - n$ ، الذي يطلق عليه خط الارتفاع الهيدروليكي المثالي . كما يطلق على المستقيم الواصل بين نهايتي ارتفاع الضغط في الأنبوبين البيزومترين خط التدرج الهيدروليكي Hydraulic grade line (HGL) ، الذي يدل على الضغط في كل نقطة من خط التيار .



الشكل ٢.٨ : تمثيل بياني رمزي لمعادلة برنولي للارتفاعات . في الجريان المثالي يكون في كل نقطة من خط التيار مجموع الارتفاع المكاني وارتفاع الضغط وارتفاع السرعة ثابتاً .

إن المضمون الفيزيائي لحدود معادلة برنولي يتوضع بشكل أعمق إذا قسمنا طرفي العلاقة (8.9) على الكثافة ρ حيث تنتج الصيغة الثالثة لهذه المعادلة بالشكل:

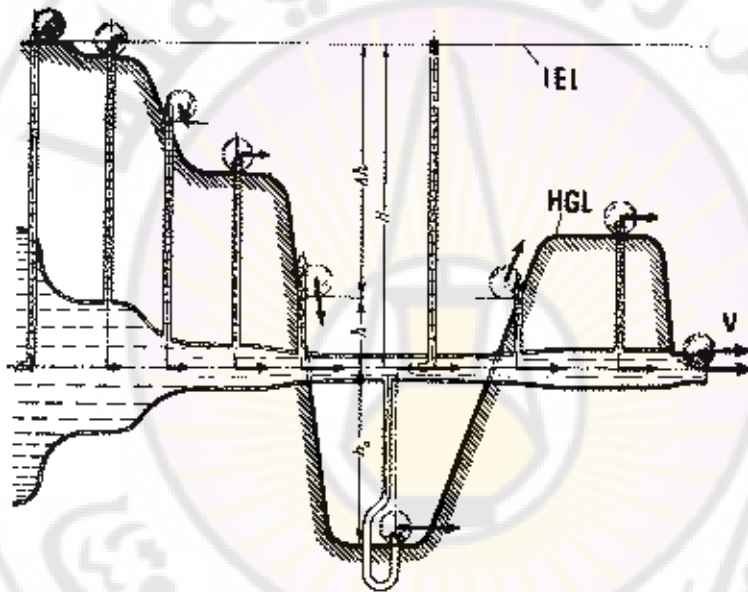
$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_{BE} = \text{const} \quad (8.11)$$

التي يطلق عليها معادلة برنولي للقذرة ، لأن كل حد من حدود الطرف الأيسر يمثل قدرة بالنسبة لوحد الكتلة . فالحد الأول يمثل القدرة الحركية ، والثاني قدرة الضغط ، والثالث القدرة الكامنة . وبالتالي يكون مجموع القدرات الثلاث في كل نقطة من خط التيار يساوي قيمة ثابتة C_{BE} تسمى القدرة الميكانيكية

و قدرة الجريان . وعليه فإن معادلة برنولي تعبر عن قانون انحفاظ القدرة
 ميكانيكية على طول خيط التيار . ويمكن على هذا الأساس اشتقاقها ، إذا اعتبرنا
 مجموع القدرات في المقطعين A_1, A_2 من أنبوبة تيار ، الشكل (٣.٨) ، لا يتغير .
 إن ثبات قدرة الجريان على طول خيط تيار هو صفة مميزة للجريانات عديدة
 الاحتكاك . لذلك توصف بأنها جريانات « عديدة الفواقد » ، بمعنى أن « الحسارة »
 في القدرة الميكانيكية أثناء حركة السائل معدومة . أما في حالة الجريانات
 الحقيقية ، فإن قسماً كبيراً أو صغيراً من هذه القدرة الميكانيكية ويفقده
 السائل أثناء حركته ، لأنه يتحول بفعل الاحتكاك إلى حرارة . ولذلك يطبق
 عليها الجريانات « ذات الفواقد » ، ولا تنطبق عليها معادلة برنولي بصيغها
 الواردة أعلاه . وقد مثلت الحسارة في قدرة الجريان هذه في الشكل (٣.٨)
 بشكل ارتفاع الفواقد Δh_v ، الذي يساوي الفرق بين الارتفاع الهيدروليكي
 المثالي والارتفاع الهيدروليكي الحقيقي في النقطة ② الواقعة في اتجاه الجريان
 بعد النقطة ① . بينما ينطبق خط القدرة المثالية (IEL) Ideal Energy line
 على المستقيم الأفقي $n' - n$ ، ويمثل المستقيم الذي يصل في الحالة العامة بين
 نقاط النهاية للارتفاع الهيدروليكي الفعلي في النقاط المختلفة لحظ التيار خط تدرج
 القدرة (EGL) Energy grade line . ونلاحظ بسهولة أنه يبعد عن خط
 تدرج الضغط مسافة شاقولية تعادل ارتفاع السرعة الفعلي (في الشكل (٣.٨)
 مقدار h_{v2}) .

لعل من المفيد هنا إقامة جسر مباشر للمقارنة بين حركة الجسم الصلب وحركة السائل ،
 وكمثال موضح نعتبر أنبوباً متغير المقطع يجري فيه ماء بدون فواقد وبغزارة تدفق ثابتة ،
 الشكل (٤.٨) . فبحسب معادلة الاستمرار تتغير السرعة عكساً مع مساحة المقطع وتبلغ
 قيمة أعظمية في مقطع الاختناق الأصغر . بينما ينتج من معادلة برنولي أن الضغط يزداد
 كلما صغرت السرعة ويبلغ قيمة أصغرى سالبة (ضغط ناقص) في مقطع الاختناق الأصغر .
 ويمكن التأكد من هذا باستخدام أنابيب بيزومترية متصلة بثقوب في جدار الأنبوب (راجع
 (٦.٣.٨) . فإذا حددنا خط التدرج الهيدروليكي (الخط المظهر في الشكل) وتصورناه يمثل

سكة انزلاق تتدحرج عليها كرة بدون احتكاك ، فإن سرعتها تزداد باتجاه المنحدر ، وبالتالي تزداد قدرتها الحركية التي تبلغ قيمة أعظمية في « الوادي » بحيث تتمكن الكرة من الصعود باتجاه « القمة » نتيجة تحول فائض قدرتها الحركية الى قدرة كامنة . هكذا تماماً يتصرف الماء ، حيث تكون سرعته في أية نقطة موافقة للضغط المؤثر هناك ، ولا فرق فيما إذا كانت الضغط ناتية من عملية تفريغ خزان بالثقالة أو من مضخة . وعليه فإن سرعة الكرة تكون مساوية تماماً لسرعة الماء في المقطع الواقع على نفس الشاقول تحت أو فوق الكرة ، وتبلغ قيمة أعظمية تساوي $\sqrt{2g(H+h_0)}$ ، بينما تكون في مقطع ما مساوية $\sqrt{2gh_1}$ ، ولا يمكن أن تتعدى قيمتها النهائية $\sqrt{2gH}$ (انظر ٢٠٣-٨) .



الشكل ٤.٨ : مقارنة بين حركة الميوط والصعود لكرة تتدحرج بدون احتكاك على سكة انزلاق مطابقة لخط التدرج الهيدروليكي وحركة الماء في أنبوب متغير المقطع ، حسب إيلك [٨] .

إن معادلة برنولي بصيغتها الثلاث الواردة أعلاه تنطبق حسب أصول اشتقاقها على خط تيار معين . وبالتالي فإن ثابتة برنولي C_B ، التي تمثل القدرة الميكانيكية للجريان ، تتغير قيمتها في الحالة العامة من خط تيار إلى آخر . وهنا يبرز سؤال هام : ألا توجد حالات خاصة تكون فيها $C_B = \text{const}$ في كامل سقل الجريان؟

للإجابة نعتبر سائلاً « مهمل الثقالة » ، وبالتالي نطلق من معادلة أويلر البسيطة أو المعادلة (8.6) التي يكاملتها نحصل على معادلة برنولي المهتزة :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_{BE} \quad (8.12)$$

التي تنتج من (8.11) مباشرة بإهمال g . نشق هذه المعادلة جزئياً بالنسبة للناظم n ، الذي نفرض اتجاهه الموجب هنا من الجهة المقعرة الى الجهة المحدبة لحط التيار (بعكس الشكل ٢.٨) فينتج :

$$V \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial C_{BE}}{\partial n}$$

نستعين بمعادلة أويلر (8.8) التي تصبح هنا : $\frac{V^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$ وندخلها في العلاقة السابقة فتصبح :

$$V \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{r} \right) = \frac{\partial C_{BE}}{\partial n} \quad (8.13)$$

فإذا كانت C_{BE} متغيرة من خط تيار لآخر فيكون التفاضل $\partial C_{BE} / \partial n \neq 0$ ، وبالتالي فإن التعبير $(\partial V / \partial n + V/r) \neq 0$ أيضاً . فإذا لاحظنا أن هذا التعبير يمثل حسب (7.28) شرط الحلو من الدوران بالنسبة لحط التيار المعتبر ، فنكون قد توصلنا الى النتيجة الهامة التالية :

في الجريانات اللادورانية (الكمرنية) لا تتغير قيمة ثابتة برنولي في كامل حقل الجريان ، لأن قدرته الميكانيكية ثابتة في كل نقطة .

هذه النتيجة تنطبق دائماً على كل الحالات التي يكون فيها مصدر خطوط

التيار من مكان تسود فيه ظروف ستاتيكية ، أي يكون ($V = 0$) ، أو حركة مستقيمة منتظمة ($V = \text{const}$) [4] ، حيث تصبح عندها معادلة برنولي مطابقة للمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية : $p/\rho g + z = \text{const}$.

٢.٢.٨ معادلة برنولي العامة وعبرة البعر

نعتبر سائلاً باروتروبياً ، $p = f(p)$ ، يخضع لتأثير حقل قوى حجمية تابع كمرنه Φ_s . عندئذ تكون القوة الحجمية بالنسبة لوحد الكتلة في اتجاه الجريان بموجب (3.55) هي $-\partial \Phi_s / \partial s$ ، وتأخذ معادلة أويلر الحركية باتجاه التيار في حالة جريان مستقر الصيغة التالية :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (V^2)}{\partial s} + \frac{\partial p/\rho}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial s} = 0 \quad (8.14)$$

وباعتبار أن الكثافة تابعة للضغط فقط فيمكن كتابة الحد الثاني بالشكل :

$$\frac{\partial p/\rho}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int \frac{\partial p}{\rho(p)} = \frac{\partial P(p)}{\partial s} ,$$

حيث $P(p)$ هو تابع الضغط . وبإدخاله في (8.14) وإجراء التكامل بالنسبة لـ s تنتج العلاقة :

$$\frac{V^2}{2} + P + \Phi_s = C_R = \text{const} . \quad (8.15)$$

التي تعرف باسم معادلة برنولي العامة وحيدة البعد للجريانات المستقرة المتغيرة الحجم . وتأخذ في حالة الجريانات الثابتة الحجم ($\rho = \text{const}$) الصيغة التالية :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi_s = C_H = \text{const} , \quad (8.16)$$

التي تصبح في حالة كون حقل القوى ينحصر بحقل الجاذبية الأرضية ، وبالتالي
 $\Phi_s \equiv \Phi_{sq} = -gz$ ، مطابقة لمعادلة برنولي (8.9) .

٣.٢.٨ معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة

في حالة الجريانات غير المستقرة يكون التسارع المكاني $\partial V / \partial t \neq 0$ ،
 ويتغير شكل خطوط التيار وبالتالي أنبوبة التيار من لحظة الى أخرى .
 ننتقل من معادلة أويلر (8.4) ونكتبها بالشكل التالي :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 .$$

إن التسارع المكاني يكون في الحالة العامة تابعاً للمكان s ، وبالتالي يمكن
 إجراء تكامل هذه العلاقة على طول خط تيار آني ، أي في لحظة زمنية معينة ،
 فننتج العلاقة :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz + \int_{s=0}^{s=s} \frac{\partial V}{\partial t} ds = C_B(t) , \quad (8.17)$$

التي تسمى معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة وغير القابلة للانضغاط . ويكون
 للحدود الثلاثة الأولى من الطرف الأيسر نفس المعنى الوارد لمثيلاتها في العلاقة
 (8.11) ، بينما يعبر الحد الرابع عن تغير الجريان مع الزمن . ويكون لتأنيث
 التكامل $C_B(t)$ مضمون ثابتة برنولي في لحظة زمنية معينة ، ولكن قيمتها تتغير
 من لحظة لأخرى . وهذا يعني أن قدرة الجريانات غير المستقرة تتغير مع الزمن .
 من أجل الحساب العملي لتغير الضغط والسرعة في اتجاه الجريان نعتبر
 نقطتين من خط التيار الآني ، بحيث تكون النقطة ② واقعة بعد ① في

اتجاه الجريان ، نطبق العلاقة (8.17) عليهما فنجد :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \int_{s=0}^{s=s_1} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \int_{s=0}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds$$

وبعد إصلاح بسيط :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \int_{s=s_1}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds . \quad (8.18)$$

وهذه صيغة أكثر ملاءمة للتطبيق العملي . فإذا وضعنا الطرف الأيسر مساوياً C_{B_1} ينتج :

$$C_{B_1} = C_{B_2} + \int_{s=s_1}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds . \quad (8.19)$$

فإذا بقي مقطع انبوية التيار ثابتاً فإن التكامل في هذه العلاقة يصبح مساوياً $\frac{\partial V}{\partial t} (s_2 - s_1) = \frac{\partial V}{\partial t} \Delta s$ وتأخذ بالتالي الشكل الأبسط التالي :

$$C_{B_1} = C_{B_2} + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta s . \quad (8.20)$$

٤.٢.٨ معادلة الحركة والفرقة الجزيئات الفسيمة

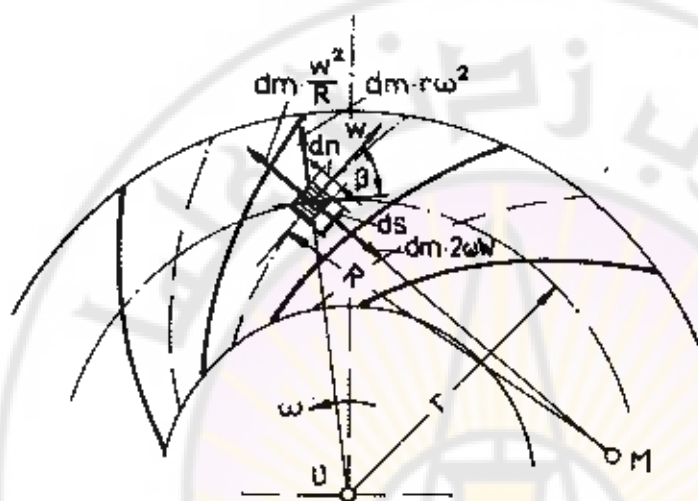
عند دراسة الجريان في قناة تقوم بحركة دورانية منتظمة أو حول جسم يدور بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \text{const}$ فإنه من الأنسب إجراء الدراسة من وجهة نظر مراقب يقوم بنفس الحركة الدورانية ، أي في جملة إحداثيات مثبتة على القناة أو الجسم . عندها يكون الجريان النسبي الذي يلاحظه هذا المراقب في حالات مناسبة مستقرّاً ، بينما الجريان المطلق ، الذي يلاحظه مراقب خارجي من جملة إحداثيات مطلقة ، غير مستقر .

هذه الملاحظة ذات أهمية كبيرة بالنسبة لحقل واسع من تطبيقات ميكانيك السوائل المتعلقة بآلات الجريان ، وبخاصة القطرية منها مثل المضخات النابذة وعنفات فرنسيس ، التي تمثل في الواقع أجهزة مهمتها إما شحن تيار السائل الذي يعبرها بقدرته ميكانيكية تتحول إلى قدرة ضغط كما في حالة المضخات (آلات العمل) ، أو تستخلص من هذا التيار جزءاً من قدرته ليتحول إلى قدرة ميكانيكية كما في حالة العنفات (آلات القوة) . وعليه فإن قدرة الجريان (المطلق) عند مخرج العنف تكون أصغر منها عند المدخل ، بينما يكون في حالة المضخة العكس .

كل آلة جريان تتألف عادة من دولاب ثابت مجهز بريش لتوجيه التيار بشكل مناسب في اتجاه الدولاب الدائر Impeller ، الذي يقوم بعملية شحن التيار الذي يعبره بالقدرة أو استخلاصها منه . يطلق على السرعة التي تخرج من الدولاب الثابت السرعة المطلقة ، وعلى السرعة الناتجة عن دوران الدولاب الدائر السرعة المحيطية $r\omega$ وعلى الفرق بين سرعتين السرعة النسبية . وتشكل السرعات الثلاث بموجب العلاقة الشعاعية (7.30) ما يسمى مثلث المربع . وواضح أن السرعة النسبية هي التي تكون ماسية على ريش الدولاب الدائر ، التي تمثل إذن في الجريان النسبي خطوطاً للتيار . وبالتالي فإن تحديد شكل هذه الريش ، الذي يلعب الدور الأساسي في عملية تحويل قدرة الجريان ، يتطلب إيجاد العلاقة بين الضغط والسرعة في جملة إحداثيات نسبية .

نعتبر جزيئاً حجمياً أبعاده dn, ds, l وكتلته dm من التيار الذي يعبر القناة المحددة بريشتين من الدولاب الدائر لآلة جريان يدور بسرعة زاوية ثابتة ω ، الشكل (٥.٨) . هذا الجزيء يخضع في جملة إحداثيات نسبية تدور مع الدولاب إلى قوتين حجميتين إضافيتين إلى جانب القوى الحجمية المؤثرة عليه في جملة إحداثيات مطلقة . الأولى هي القوة النابذة . وتنشأ من ناحية نتيجة انحناء خط التيار وتؤثر عمودياً على اتجاه الجريان بتسارع مقداره W^2/R ، حيث R نصف قطر انحناء الريشة ؛ ومن ناحية أخرى نتيجة دوران الدولاب الدائر ككل وتؤثر قطرياً إلى الخارج بتسارع مقداره $r\omega^2$ ، حيث r بعد الجزيء عن محور الدوران . أما القوة الثانية فهي قوة كوريوليس Coriolis force . وتنشأ بسبب كون الجزيء الحجمي يقوم بحركة انحنائية بسرعة نسبية W بالإضافة لحركة دورانية بسرعة زاوية ω . وهذا يؤدي لتغير السرعة المحيطية $r\omega$ نتيجة

تغير نصف القطر باستمرار ، بالإضافة للتغير المستمر لاتجاه W ، وفي كل مرة يتولد تسارع بقيمة $W \omega$ ، وبالتالي يكون تسارع كوديولس مساوياً $2\omega W$ ، ويتجه ممودياً على خط التيار ، أي على W وإلى يمينها .



الشكل ٥.٨ : القوى المؤثرة على جزيء حجمي في قناة تدور بسرعة زاوية منتظمة لاستخراج معادلة الحركة والقدرة للجريان النسبي .

ندرس الآن القوى المؤثرة في اتجاه الجريان s لاستخراج المعادلة الحركية النسبية في هدى الخطوات المتبعة في الفقرة (١.١.٨) وبرمز الشكل (٥.٨) . فإذا أهملنا قوة الثقالة ولاحظنا أنه من القوى الاضافية المذكورة أعلاه لا تؤثر في اتجاه الجريان سوى مركبة القوى النابذة :

$$dF_{z_s} = dm \cdot \omega^2 r \cdot \sin \beta = \rho \, dn \, ds \cdot \omega^2 r \cdot \frac{dr}{ds} = \rho \, dn \, ds \cdot \frac{\omega^2}{2} \frac{d(r^2)}{ds}$$

وأن التسارع المادي للحركة النسبية المستقرة يساوي تسارع النقل .

التي تمثل المعادلة الحركية للجزيئات النسبية الشبيهة بمعادلة أويلر (8.6) .
وبتكاملها على طول s ينتج :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (W^2)}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial (r^2)}{\partial s} , \quad (8.21)$$

وهذه هي معادلة القدرة للجزيئات النسبية الشبيهة بمعادلة برنولي (8.12) .
وقد استخرجها لأول مرة بريشيل F. Prášil عام 1906 ، لذا تسمى أحياناً
باسم [4] . وهي تصبح في حال عدم إهمال قوة الثقالة من الشكل :

$$\frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_{rel} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = C_{rel} + \frac{U^2}{2} . \quad (8.22)$$

وهذه هي معادلة القدرة للجزيئات النسبية الشبيهة بمعادلة برنولي (8.12) .
وقد استخرجها لأول مرة بريشيل F. Prášil عام 1906 ، لذا تسمى أحياناً
باسم [4] . وهي تصبح في حال عدم إهمال قوة الثقالة من الشكل :

$$\frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz - \frac{U^2}{2} = C_{rel} . \quad (8.23)$$

C_{rel} تمثل ثابتة التكامل التي تختلف عن ثابتة برنولي C_B بالحد $U^2/2$ ، وهي
تعبر عن القدرة الميكانيكية للجريان النسبي ، وتتغير في الحالة العامة من خط
تيار لآخر . ولكن يمكن البرهان (انظر [4] [85]) ، انه في الحالة الخاصة
التي يكون فيها الجريان المطلق القادم للجملة الدوارة كوني (لادورانيا) وعامة
غير مستقر ، فان قيمة C_{rel} تبقى ثابتة بالنسبة لكافة خطوط التيار . هذه الجملة
صاغها لأول مرة فون هيسس . وهي تنطبق على الحالة العملية الهامة عندما
يكون التيار الحالي من الفواقد الموجه لعنفة أو مضخة ثابتة قادماً عبر مجموعة
أنايب أو أقنية ساكنة ، وبالتالي تسود عند منشأ خطوط التيار ظروف
ستاتيكية . فكل جزيء ساكن يبقى في الجملة الساكنة لادورانياً ويتلقى في
الجملة الدوارة ، سرعة زاوية ثابتة يدور بها حول محور مواز لمحور دوران الجملة .

بالنسبة للقوى المؤثرة عمودياً على اتجاه الجريان نلاحظ ان محصلة القوة النابذة الناتجة عن انحناء خط التيار : $\frac{W^2}{R} dn$ ، وقوة كوريوليس : $-2\omega W \cdot dn$ ، ومركبة القوة النابذة الناتجة عن الدوران الكلي : $r\omega^2 \cdot dn \cdot \frac{dr}{dn}$ يجب ان تكون متوازنة مع محصلة قوى الضغط المؤثرة في اتجاه الناطم وبالتالي على سطوح الريش : $\frac{\partial p}{\partial n} \cdot dn \cdot ds$ ، وعليه ينتج تغير الضغط ناظمياً على اتجاه الجريان بعد تطبيق شرط التوازن والاختصار على dn واعتبار الريش محنية للخلف (الشكل ٥.٨) وقوة الثقالة مهملة :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left[\frac{W^2}{R} + r\omega^2 \cos \beta - 2\omega W \right] . \quad (8.24)$$

وننتج في حالة كون الريش محنية الامام العلاقة :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left[\frac{W^2}{R} + r\omega^2 \cos \beta + 2\omega W \right] . \quad (8.25)$$

نفرض الآن في العلاقة (8.22) أن قيمة C_{rel} لا تتغير من خط تيار لاخر ، فيكون $\partial C_{rel} / \partial n = 0$ ، فإذا اشتقينا هذه العلاقة بالنسبة لـ n ولاحظنا أن $\cos \beta = dr/dn$ نجد بسهولة العلاقة :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left[r\omega^2 \cos \beta - W \frac{\partial W}{\partial n} \right] .$$

فإذا قارناها مع (8.24) و (8.25) نحصل على العلاقتين :

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 2\omega - \frac{W}{R} \quad \text{للريش المحنية للخلف} \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 2\omega + \frac{W}{R} \quad \text{للريش المحنية للأمام} \quad (8.27)$$

التي نقتلن حسب [8] المعادلتين التفاضليتين لدراسة الجريان التسيي عديم الاحتكاك في الاقنية الدوارة التي نجد في [85] أمثلة عديدة عليها .

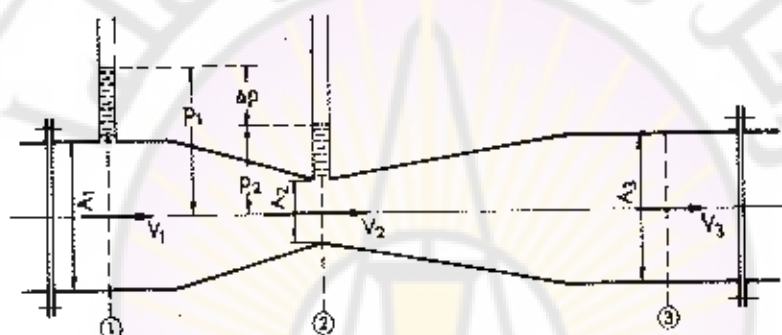
٣.٨ تطبيقات على معادلة برنولي

إن معادلة برنولي بصيغها المختلفة تعتبر رغم بساطتها أحد أهم القوانين الاساسية الهيدروديناميكية . ويمكن بمساعدتها حل العديد من مسائل الجريان ذات الأهمية التطبيقية

ودراسة وتحليل طريقة عمل مجموعة كبيرة من الأجهزة التي صممت على أساسها . وستتناول فيما يلي بعض هذه التطبيقات .

١.٣.٨ أنبوبة فنتوري

لقياس التيار الحجمي المار في خط أنابيب تستعمل وصلة تعرف باسم أنبوبة أو مقياس فنتوري نسبة للعالم الإيطالي (1746-1822) G. B. Venturi . وهو يتألف ، الشكل (٦.٨) ، في قسمه الأول من أنبوب بشكل نفثة Nozzle



الشكل ٦.٨ : أنبوبة فنتوري لقياس التيار الحجمي

يتضيق مقطعها تدريجياً من A_1 عند المدخل حتى مقطع أصغر A_2 يعادل تقريباً نصف A_1 . ويتألف في قسمه الثاني من أنبوب بشكل فاشرة Diffuser تتوسع تدريجياً حتى يصبح مقطعها $A_3 = A_1$. يوصل في ① و ② عن طريق تقيين في الجدار أنبويان بيرومترين (أو أنبوب بشكل U كقياس ضغط تفاضلي) لقياس الضغطين p_1 و p_2 (أو فرقها) اللذين سنعتبرهما فيما يلي كقيمتين معلومتين .

نفرض أن أنبوبة فنتوري في وضعية أفقية وأن السرعة الوسطية للتيار الحجمي ($\vec{V} \equiv V$ ؛ انظر ص ٢٠٠) في المقاطع ① ، ② ، ③ هي V_1, V_2, V_3 . فيكون حسب معادلة الاستمرار (8.2) :

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad (8.28)$$

وننتج من معادلة برنولي (8.9) بتطبيقها على المقطعين ① و ② واعتبار العلاقة $z_1 = z_2 = 0$:

$$\frac{\rho}{2} V_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2} V_2^2 + p_2$$

التي تصبح بعد إدخال V_2 حسب (8.28) من الشكل :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2} V_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] .$$

ومنها يمكن حساب السرعة V_1 ومن ثم غزارة التيار الحجمي حيث نجد :

$$Q_{id} = A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} = A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left[\left(\frac{1}{m} \right)^2 - 1 \right]}} \quad [m^3 s^{-1}] , \quad (8.29)$$

حيث $m = A_2/A_1$ تمثل نسبة الانفتاح Aperture ratio .

في حالة السوائل الحقيقية فان قيمة Q_{net} (الفعلية) تكون أصغر من قيمة $Q_{id} \equiv Q$ (المثالية) لأننا لم نراع في (8.29) الفواقد التي يخسرها التيار نتيجة الاحتكاك على جدران الأنبوبة ونتيجة تغير المقاطع فيها . هذه الفواقد يمكن حسابها ، بصورة تقريبية على الأقل ، ولكننا عملياً نؤخذ بعين الاعتبار بإدخال معامل التصريف Discharge coefficient ϕ_n حيث يكون :

$$Q_{net} = \phi_n Q = \phi_n A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left[\left(\frac{1}{m} \right)^2 - 1 \right]}} \quad (8.30)$$

لذلك لابد من تعيير Calibration أنبوبة فستودي قبل استخدامها كجهاز قياس للتيار الحجمي . ويتم ذلك بقياس الغزارة وفرق الضغط وتمثيل ϕ_n كتابع

لعدد رينولدز $Re = V_1 D_1 / \nu$ ، حيث نحصل على منحني التعبير الذي يسمح بتحديد مجال القياس لأنبوبة فنتووي الموافق لمجال أعداد رينولدز الذي تبقى فيه قيمة λ ثابتة تقريباً وقرية من الواحد ، خاصة إذا كانت تغير المقاطع يتم تدريجياً وجدران الأنبوبة الداخلية مساهمة ، لهذا وضعت مواصفات قياسية (عيارية) Standard لتصميم أنبوبة فنتووي كجهاز لقياس التيار الحجمي (انظر مثلاً [89]) .

عندما تكون أبعاد أنبوبة فنتووي معطاة ، وبالتالي A_1 ، m معلومة ، فإن العلاقة (8.30) يمكن كتابتها بالشكل :

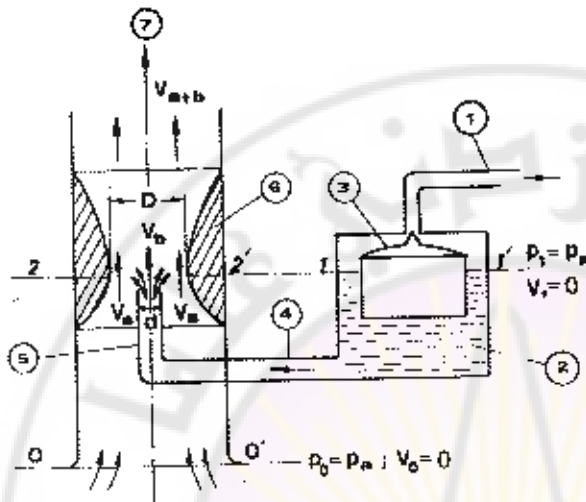
$$Q_{act} = C \sqrt{\Delta p} = C_v \sqrt{\Delta p / \rho_m} = C_v \sqrt{\Delta h} \quad (8.31)$$

حيث ρ_m كثافة سائل مقياس الضغط التفاضلي ، Δh فرق ارتفاع سوية سائل المقياس (انظر ٢.٣.١.٣) ، C_v ثابت يتعلق بأنبوبة فنتووي المستخدمة . والجدير بالملاحظة أن Δh لا تتعلق بوضعية أنبوبة فنتووي سواء كانت أفقية أو شاقولية أو مائلة . ولكن المهم أن قياس فرق الضغط يجب أن يتم بين المقطعين ① و ② (الشكل ٦.٨) وليس بين ② و ③ ، لأن تزايد الضغط في منطقة النافذة يمكن أن يؤدي لحدوث فواقد إضافية نتيجة تشكل الاغصير وانفصام الجريان عن الجدار ، كما سنرى فيما بعد .

تستخدم في الصناعة والخبر أنابيب فنتووي معبّرة بنسب انفتاح : $m = 0.1$ إلى $m = 0.6$ لقياس التيارات الحجمي في أنابيب أقطارها $D_1 = 65 \text{ mm}$ إلى $D_1 = 500 \text{ mm}$. كما طورت في الفترة الأخيرة جملة فنتووي المركبة المؤلفة من عدة أنبوبات فنتووي متداخلة بما يسمح بقياس الغزارة في مجال جريان واسع مع تضخم لإشارة القياس وطول كلي قصير نسبياً [90] .

إن أنبوبة فنتووي تستخدم في مجالات تطبيقية أخرى نورد منها كشال المفعم

Carburettor الذي يستعمل في محركات الاحتراق الداخلي كأداة لقياس وقودية ومزيج الوقود مع الهواء . الشكل (٧.٨) يبين مبدأ عمله :



الشكل ٧.٨ مبدأ عمل الفخيم .

يصل الوقود (البنزين)

من الخزان عبر الأنبوب

③ إلى حجرة ②

تطفو فيها فواشة

إبرية ③ لتنظم سوية

الوقود الذي يخرج من

الحجرة عبر الأنبوب

④ النتهي بنفثاته

⑤ (قطر d) تتوسط

مقطع العنق (قطر l)

لأنبوبه فنتوري ⑥

التي يمر فيها تيار هواء .

ان سرعة الهواء تبلغ في المقطع الأصغري قيمة أعظمية V_a ، مما يؤدي حسب معادلة برنولي لتوليد ضغط ناقص يسبب شفط الوقود من النفثة فيخرج بشكل نافوري وبسرعة V_b . أما مزيج الهواء والوقود فيقادر أنبوبه فنتوري بسرعة V_{a+b} إلى غرفة الاحتراق ⑦ .

لحساب نسبة وزن الوقود G_b إلى وزن الهواء G_a في المزيج المتدفق في واحدة الزمن نطبق معادلة برنولي على المقطعين 0-0 و 2'-2' بالنسبة لتيار الهواء ، وبين 1'-1' و 2'-2' بالنسبة لتيار الوقود فينتج بإهمال كافة الفواقد والنضاطية الهواء (الشكل ٧.٨) :

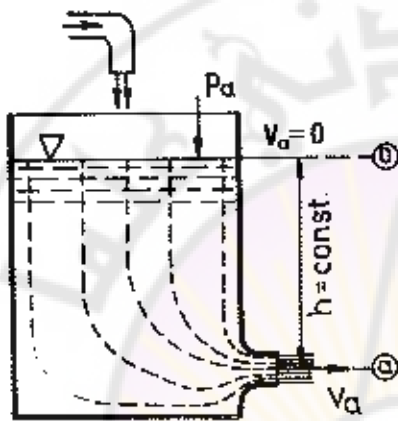
$$\frac{G_b}{G_a} = \left(\frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_a}}$$

حيث γ_b ، γ_a الوزن النوعي للوقود والهواء .

٢.٣.٨ تقريب خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير النفثات

نعتبر وعاء مفتوحاً في الأعلى فيه سائل كثافته ρ يتدفق تحت تأثير

الثقالة عبر فتحة جانبية مقطعها صغير جداً بالمقارنة مع مقطع الوعاء . نفرض أن ارتفاع سطح السائل السائب في الوعاء h عن محور الفتحة يبقى ثابتاً ، على أساس أن النقص في كمية السائل يعوض عنه باستمرار بواسطة أنبوب خارجي ، الشكل (٨.٨) . في هذه الحالة يكون الجريان مستقراً . فإذا كانت الفتحة



الشكل ٨.٨ : تفريغ وعاء بالثقالة
من فتحة جانبية صغيرة .

مجهزة بأنبوبة توصيل قصيرة ومدورة بشكل جيد بحيث لا يكون في منطقة التفريغ نتوءات أو حروف حادة ، فإن خطوط التيار الخارجة تستطيع أن تفشي بمحاذاة الجدار وتقلد مقطع فتحة التفريغ تماماً . نختار كمستوى للقياس المستوي

لافتي المار من مركز ثقل فتحة التفريغ (طبعاً يمكن

ختبار أي مستوي قياس آخر !) ونطبق معادلة برنولي للارتفاعات (8.10) على نقطة البداية ① والنهاية ② لحظ تيار ما داخل الوعاء فينتج :

$$\frac{V_b^2}{2g} + \frac{p_b}{\gamma} + h = \frac{V_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + 0$$

حيث أنه بموجب الفرضيات السابقة يبقى السطح الحر للسائل ساكناً ومعرضاً لضغط الجوي فيكون : $p_a = p_b$, $V_b = 0$. وباعتبار أن التفريغ يتم في الهواء الخارجي فإن الضغط السائد حول تيار النافورة هو الضغط الجوي الذي يمكن لصغر الفتحة أن نعتبره نفس الضغط المؤثر داخل تيار النافورة . وعليه نحصل من العلاقة السابقة على سرعة التفريغ المثالية :

$$V_a = V_{a id} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(z_0 - z_a)} \quad (8.32)$$

هذه العلاقة معروفة باسم قانون توريشلي للتفريغ ، الذي ينص على مايلي :

سرعة التفريغ المثالية لسائل يخضع لتأثير الثقالة تتعلق فقط بالارتفاع الشاقولي h بين مركز ثقل السطح الحر للسائل ومركز ثقل فتحة التفريغ وتساوي إلى السرعة النهائية التي يبلغها جسم صلب يسقط سقوطاً حراً في الحلاء من ارتفاع h وبدون سرعة ابتدائية .

هذه النتيجة تبقى صحيحة حتى لو كانت فتحة التفريغ متصلة بأنبوب طويل متغير المقطع كما في الشكل (٤.٨) . كما تنطبق على الحالة التي لا يحدث فيها تحكم لتثبيت سوية السطح الحر للسائل ، إذا كان مقطع الوعاء A_0 أكبر بكثير من مقطع الفتحة A . عندئذ يكون بموجب معادلة الاستمرار $V_0 = V_a A/A_0$ ؛ وبالتالي فإن سرعة هبوط السطح الحر للسائل أصغر بكثير من سرعة التفريغ : $V_0 \ll V_a$ ، مما يسمح بإهمالها .

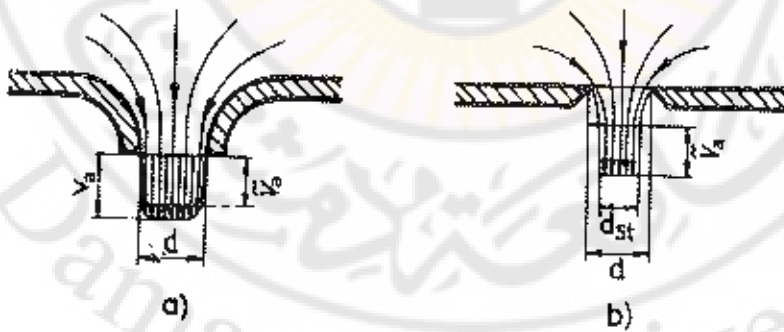
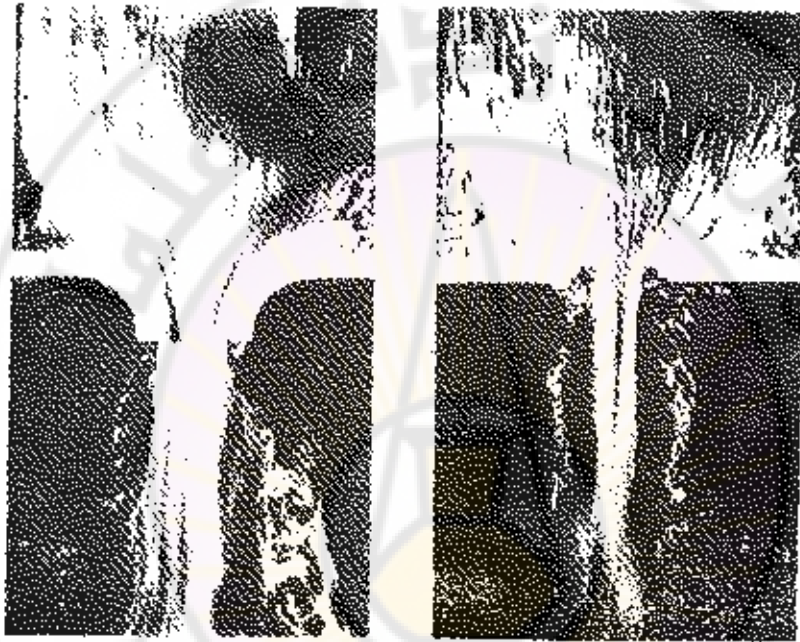
تحت الشروط السابقة وبفرض A مساحة مقطع الفتحة فإن التيار الحجمي المثالي ينتج من (8.2) و (8.32) بالصيغة :

$$Q_{id} = V_{a id} A = A \sqrt{2gh} \quad (8.33)$$

لكن التجارب أثبتت أن التيار الحجمي الفعلي Q_{act} أصغر من Q_{id} بقليل أو كثير ، تبعاً لما تكون عليه جوانب فتحة التفريغ مدورة أو حادة الأطراف . فمن ناحية يؤدي تأثير الاحتكاك على جوانب الوعاء في حالة السوائل الحقيقية إلى خسارة في قدرة الجريان بحيث أن سرعة التفريغ الفعلية الوسطية تكون أصغر من V_a . وتراعى هذه الناحية بإدخال ما يسمى معامل تصحيح السرعة φ_a ، بحيث تستعمل بدلاً من (8.32) العلاقة :

$$\bar{V}_u = \varphi_u V_{u, id} = \varphi_u \sqrt{2gh} . \quad (8.34)$$

φ_u يتعلق بحسب تجارب أجراها فايزباخ J. Weisbach (انظر [9] [12]) بالارتفاع h . وتبلغ قيمته في حالة الماء وعندما تكون فتحة التفريغ مدوّرة بشكل جيد : $\varphi_u = 0.96 \dots 0.998$ ، أي تقريباً الواحد (الشكل ٩.٨-ا) .



الشكل ٩.٨ : تأثير الاحتكاك (ا) وتضييق فتحة النافورة (ب) على التيار الحجمي الفعلي لسائل حقيقي ، حسب [12] .

وهذا يعني أن السائل الحقيقي الخارج من الفتحة متسارعاً يتصرف وكأنه سائل مثالي وبدون فواقد تقريباً .

من جهة أخرى لا يلزم أن يكون مقطع تيار النافورة A_{st} يساوي المقطع الهندسي للفتحة A ، كما فرضنا في العلاقة (8.33) . ذلك أن خطوط التيار داخل الوعاء التي تبدأ من السطح الحر وتتجه في اتجاه فتحة التفريغ تضطر ، في الواقع ، للانحراف الفجائي أفقياً . فإذا كانت الفتحة حادة الأطراف ، الشكل (٩.٨ - b) ، تحدث ظاهرة تضيق تيار النافورة Jet contraction بحيث يصبح $A > A_{st}$ ، وبالتالي تنقص كمية السائل المتفرغة . وتراعى هذه الظاهرة بإدخال معامل التضيق :

$$\mu_o = \frac{A_{st}}{A} = \left(\frac{d_{st}}{d} \right)^2 \quad (8.35)$$

الذي تبلغ قيمته في حالة الفتحات المدوّرة الواحد تقريباً ؛ وفي حالة الفتحات الدائرية الحادة الأطراف في جدار رقيق نسبياً : $\mu_o = 0,61 \dots 0,65$ [4][30] . في الحساب العملي للتيار الحجمي الفعلي يدمج معامل السرعة مع معامل التضيق لما يسمى معامل التصريف أو التفريغ :

$$\psi_o = \varphi_o \mu_o \quad (8.36)$$

وتستخدم بدلاً من (8.33) العلاقة :

$$Q_{act} = \psi_o A \sqrt{2 g h} \quad (8.37)$$

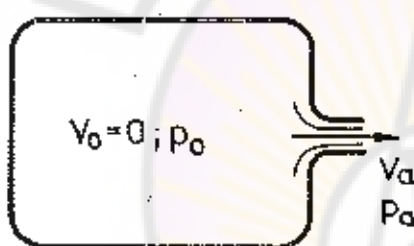
إن قيمة ψ_o تحدد في الحالة العامة تجريبياً . وهي لا تختلف إلا قليلاً في حالة الفتحات غير الدائرية المقطع عن تلك في حالة الفتحات الدائرية إذا كان جدار الوعاء رقيقاً . ولكن شكل النافورة يكون معقداً . فالنافورة الخارجة من فتحة مربعة الشكل مثلاً تكون مقطوعاً رقيقاً متصالباً ؛ بينما النافورة الخارجة

من فتحة مستطيلة الشكل فتكون بشكل شريط رفيع يتعامد مع ضلع المستطيل الأكبر [4].

إن العلاقات السابقة لا تنطبق على حالة فتحة جانبية كبيرة المقطع نسبياً ، خاصة في جدار مائل . ولحساب التيار الحجمي المثالي هنا ينظر الى شكل خيط تيار على أنه مستقل لا يؤثر على جيرانه لأن الضغوط يختلف من خيط تيار لآخر ؛ ومن ثم يحسب التكامل بالنسبة لمقطع الفتحة الاجمالي . وعند حساب التيار الحجمي الفعلي يستخدم معامل تصريف براعمي تأثير خيوط التيار على بعضها وكذلك اختلاف الضغط داخل تيار النافورة عن الضغط الجوي الخارجي .

٣.٣.٨ تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير ضغط زائد

في الخزان المبين في الشكل (٨.١٠) يؤثر الضغط الزائد p_0 على سائل ثابت



الحجم كثافته ρ يتدفق من فتحة جانبية بسرعة V_a في الهواء الخارجي حيث يسود الضغط الجوي p_a .

نطبق معادلي برنولي للارتفاعات

(8.10) على نقطتين من خط تيار

أفقي يمر من مركز ثقل فتحة

التفريغ . فإذا لاحظنا أن السرعة

داخل الخزان معدومة تقريباً : $V_0 = 0$ ، ولا يوجد فرق ارتفاع مكاني ، نجد بسهولة سرعة التفريغ :

$$\frac{(p_0 + p_a)}{g\rho} = \frac{V_a^2}{2g} + \frac{p_a}{g\rho} \Rightarrow V_a = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} = \sqrt{2gh_p} \quad (8.38)$$

حيث h_p الضاغط الموجب حسب (3.9) . ويتجلى بوضوح الشبه بين هذه العلاقة

وقانون توريشلي (8.32) .

وعندما يتم التفريغ من خزان يؤثر فيه الضغط p_1 الى خزانات يؤثر فيه

الضغط $p_1 > p_2$ ، فإن سرعة التفريغ من فتحة الخزان الاول تصبح :

$$V_a = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} = \sqrt{2 g h_p} \quad (8.39)$$

حيث h_p يمثل ارتفاع عمود سائل وزنه النوعي $\gamma = \rho g$ وفرق الضغط على نهايته Δp .

العلاقة (8.39) تمكننا من تقدير السرعة الحدية المسموح بها لكي نستطيع معالجة سائل متغير الحجم كالهواء كسائل ثابت الحجم ، والتي تتعلق قيمتها بتغير الكثافة المسموح به دون ان يؤثر ذلك على دقة النتائج العملية المطلوبة .

نفرض ان الغاز يخضع لقانون تغير الحالة الأديباتي (2.56) ، وأن تغيراً في الضغط بمقدار Δp يؤدي لتغير في الكثافة بمقدار $\Delta \rho$ فيكون :

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^{\kappa} \approx 1 + \kappa \frac{\Delta \rho}{\rho} \Rightarrow \Delta p \approx \kappa p \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (8.40)$$

وذلك بعد نشر الطرف الايمن من المعادلة الاولى بشكل سلسلة وإهمال كافة حدود المراتب العليا . فإذا سمع بتغير نسبي في الكثافة بمقدار $\Delta \rho / \rho = 0.01$ ، وكان الغاز هواء ($\kappa = 1.405$) بضغط جوي $p = 10333 \text{ kp/m}^2$ وكثافة وسطية $\rho = 0.125 \text{ kps}^2/\text{m}^3$ (الجدول ٢.٢) ينتج من (8.40) : $\Delta p = 144.5 \text{ kp/m}^2$ ، ومن (8.39) : $V_{10} \approx 48 \text{ m/s}$. أي أن كثافة الهواء تتغير بمقدار 10% فقط إذا لم تتجاوز سرعته 50 m/s ، ويمكن عندئذ ان تدرس حركته كسائل ثابت الحجم . أما إذا كان التغير النسبي في الكثافة 10% فتبلغ السرعة المسموح بها حوالي 150 m/s .

لحساب سرعة تفريغ غاز مضغوط من خزان يؤثر فيه الضغط p_1 الى خزان يؤثر فيه الضغط p_2 بشكل أدق مما سبق تستخدم معادلة برنولي العامة (8.15) . فلذا أهمنا

تأثير القوى الحجمية بالمقارنة مع قوى الضغط المائدة واعتبرنا السرعة في الخزان الاول $V_1 \approx 0$ وطبقنا هذه المعادلة على نقطتين من خط تيار يمر من فتحة التفريغ ينتج :

$$P_1(p) = P_2(p) + \frac{V_a^2}{2} \Rightarrow V_a^2 - 2(P_1 - P_2) = 2 \int_{P_2}^{P_1} \frac{dp}{p} \quad (8.41)$$

فإذا فرضنا الغاز دايوتروبياً ونخضع لقانون تغير الحالة الأديباتي فيكون :

$$P_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\gamma}} = P_2 \cdot p_2^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{P_2} \frac{p_2^{\frac{1}{\gamma}}}{p_1^{\frac{1}{\gamma}}}$$

وينتج بالتالي من (8.41) بعد التكامل والاصلاح :

$$V_a^2 = 2 \frac{P_1}{p_1} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] \quad (8.42)$$

وهذا هو قانون دي سانت فينان وقانسل B. De Saint Venant and L. Wanzel لتفريغ غاز مضغوط الذي يحل مكان قانون توريشلي . ونلاحظ ان سرعة التفريغ الاعظمية تنتج عندما يكون $p_2 \approx 0$ ، أي عند التفريغ في خزان يسوده الفراغ التام :

$$V_{a \max} = \sqrt{\frac{2 \gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{p_1}} = \sqrt{\frac{2 \gamma}{\gamma - 1} R T_1} \quad (8.43)$$

من هذه العلاقة تنتج بالنسبة للهواء في شروط نظامية : $\gamma = 1.405$ ، $p_1 = p_a = 10333 \text{ kp/m}^2$ ، السرعة الاعظمية : $p_1 = 0.125 \text{ kp s}^2/\text{m}^2$

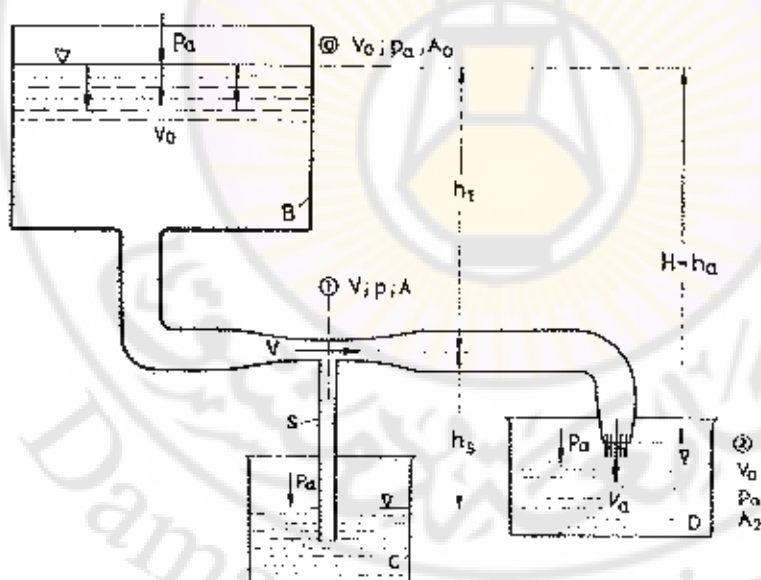
$$V_{a \max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.405 \cdot 10333}{0.4 \cdot 0.125}} = 755 \text{ m/s} \quad (8.44)$$

أي مايعادل 2,2 مرة قيمة سرعة الصوت $a \approx 340 \text{ m/s}$. وتسود هذه السرعة في فتحة التفريغ عندما $\frac{p_2}{p_1} \approx 0.527$. وتجدر الاشارة هنا أنه يلزم أن تكون أنبوبة التوصيل المتصلة بفتحة التفريغ بشكل نفثي لافال (الشكل ٢.٦) لكي نتمكن من الحصول على سرعات أكبر من سرعة الصوت ، كما تؤكد المقارنة العددية بين العلاقة (8.39) و (8.42) انه حتى نسب ضغوط $\frac{p_2}{p_1} \approx 0.7$ يمكن اعتبار تأثير الانضغاطية مهملاً [17] .

٤.٣.٨ تولد ضغط السحب في الجريان ومبدأ المضخات التافورية

في الأنبوب المدين في الشكل (١١.٨) ، الذي ينضيق مقطعه في ① بشدة ، يتم تفريغ سائل ثابت الحجم من الخزان B الى الخزان D المفتوحين في الأعلى . نفرض أن مقاييس B كبيرة بحيث يمكن اعتبار الجريان في الأنبوب مستقراً وعدم الفواقد .

نعمل الآن وجود الأنبوب الشاقولي S المتصل بالمقطع ① وكذلك الخزان C ؛ ولكن $H = h_0$ عمق المستوى الأفقي ② المار من مركز ثقل فتحة التفريغ التي مقطعها A_0 عن مستوى السطح الحر للسائل ③ في الخزان B . لنت سرعة التفريغ V_0 تنتج من قانون توريشيلي (8.32) : $V_0 = \sqrt{2gH}$. ومنها نتج حسب معادلة الاستمرار (8.2) السرعة في



الشكل ١١.٨ : في المقطع الأصغري ① تصبح السرعة أعظمية فيتولد ضغط ناقص يؤدي لسحب السائل من الخزان C .

المقطع ③ V_0 وفي المقطع ① V_1 بالشكل :

$$V_0 = V_2 A_2 / A_0 ; V = V_n A_2 / A \quad (8.45)$$

نعتبر المستوي الأفقي المار من مركز ثقل المقطع الأصغري ① مستوياً للقياس ونطبق معادلة برنولي (8.10) على نقطتين من خط تيار واقعيتين في ③ و ① فنجد برموز الشكل (١١.٨) :

$$\frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + h_1 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \Rightarrow \frac{p_a - p}{\gamma} = \frac{1}{2g} (V^2 - V_0^2) - h_1$$

وبادخال العلاقة (8.45) وقيمة V_n ينتج فرق الضغط :

$$\frac{p_a - p}{\gamma} = \frac{A_2^2 V_0^2}{2g} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) - h_1 = H A_2^2 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) - h_1 \quad (8.46)$$

وحيث أننا افترضنا $A \ll A_0$ فيكون $\frac{1}{A^2} \gg \frac{1}{A_0^2}$ ، وبالتالي يمكن إهمال $\frac{1}{A_0^2}$ في العلاقة السابقة التي تصبح :

$$\frac{p_a - p}{\gamma} = H \left(\frac{A_2}{A} \right)^2 - h_1 \quad (8.47)$$

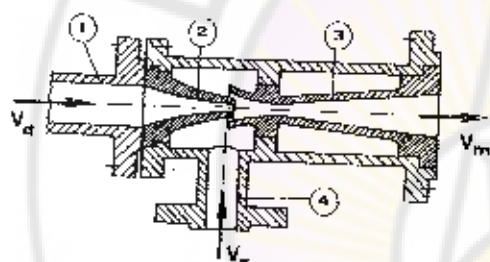
فإذا كان اختيار المقاطع والارتفاعات بشكل مناسب فإن الطرف الأيمن من هذه العلاقة يصبح موجباً ، والطرف الأيسر ضغطاً ناقصاً ، أي أن الضغط p في المقطع الأصغري ① يكون أصغر من الضغط الجوي p_a . فإذا ثقبنا الجدار في هذا المقطع فإن السائل لا يتسرب خارج الأنبوب ، بل يدخل المراء لداخله نتيجة الفعل الامتصاهي للتيار الذي يمكن الاستفادة منه عملياً .

نفرض كما في الشكل (١١.٨) أن أنبوب التفريغ يتصل عن طريق ثقب في المقطع ① بالأنبوب الشاقولي S ، الذي تنغمس نهايته السفلى في الوعاء C الحاوي على نفس السائل الموجود في B . إن السائل سيصعد في S حتى المقطع ①

إذا كان الضاغط السالب (انظر ص ٩٨) أكبر من ارتفاع السحب المكافئ ، وبالتالي : $p_a - p < \gamma h_s$. ومنه بالاستناد على العلاقة (8.47) ينتج الشرط التصميمي لإمكانية الاستفادة من الفعل الامتصاصي للتيار من أجل سحب السائل من C وضغه في أنبوب التفريغ :

$$h_s < H \left(\frac{A_2}{A} \right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow \frac{A_2}{A} > \sqrt{\frac{h_s + h_1}{H}} \quad (8.48)$$

إن طريقة عمل الضواغط والمضخات النافورية Jet Pump and Compressor تعتمد على الفعل الامتصاصي للتيار . وبين الشكل (١٢.٨)



الشكل ١٢.٨ : مقطع طولي في مضخة نافورية مائية .

مقطعاً طوياً نموذجياً لها .
فالسائل الدافع (الماء مثلاً)
يدخل الوصلة ① بسرعة V_s وضغط p_a ومنها إلى
نفثة الدفع ② حيث تزداد
السرعة وينقص الضغط إلى
قيمة قريبة من ضغط

السحب p . ويلتقي السائل الدافع عند مدخل نفثة الضغط ③ ، التي تشبه
أنبوبة فنتوري ، مع السائل المرفوع القادم عبر وصلة السحب ④ بسرعة صغيرة
نسبياً V_m . فتحدث عملية مزج يتم فيه تسريع السائل المرفوع وكبح السائل
الدافع ، ويزداد ضغط المزيج عند نهاية ناشرة نفثة الضغط ويخرج منها بسرعة
 V_m إلى أنبوب الضخ . وواضح أنه نتيجة الاحتكاك وعملية المزج وتبادل القدرة
بين السائل الدافع والمرفوع (المشفوط) تنشأ فواقد كبيرة جداً لم تراعى في
العلاقة (8.48) ؛ فهي تسمح بحساب ارتفاع السحب التالي فقط . وقد وضع
فلويجل G. Flügel [91] لأول مرة الاسس النظرية لحساب المضخات النافورية .

ثم تتالت الدراسات والابحاث النظرية والتجريبية عنها وعن الضواغط والمراوح النافورية ، مثلاً [92][93][94] .

نوجد مضخات نافورية مائية وبحارية وهوائية ، حسب نوع السائل الدافع ، تستخدم في مجالات واسعة مثل ضخ الماء ، وتفرغ الاوساخ من الأقبية أو من حفر الأساسات ، وكذلك لنقل الحصى والاسماك وتغذية المراحل بالماء . ويمتاز كلها بالمقارنة مع المضخات العادية للتأبذة أو المكبسية بأنها سهلة التصنيع قليلة الكلفة ، لا تحتاج لصيانة لعدم احتوائها على عناصر متحركة ، سهلة الفك والتجميع والتشغيل ، الذي لا يحتاج سوى لفتح وإغلاق بعض الصمامات ، وأخيراً فإن عمرها غير محدود تقريباً . ولكن سيئتها الأساسية أن مردودها لا يتجاوز 20% إلى 33% . ويمكن ان يصل حتى 50% إذا كانت كثافة السائل الدافع أكبر من كثافة السائل المرفوع .

إن تولد الضغط الناقص للتيار في منشأة هيدروليكية محفوف دائماً بمخطر نشوء ظاهرة التكيف ، عندما تصل قيمة الضغط المطلق قيمة قريبة من ضغط التبخر p_v (راجع ٤.٢) . ولأخذ فكرة مسبقة عن ذلك نعود للشكل (١١.٨) ونفرض أن السائل في الحزان B ماء وزنه النوعي $\gamma = 10^3 \text{ kp/m}^3$ ، وأن $H = h_1 = 19.39 \text{ m}$ ، $A_2/A_1 = 1.23$ ، $p_1 = 1 \text{ at}$ ، فيكون حسب (8.47) :

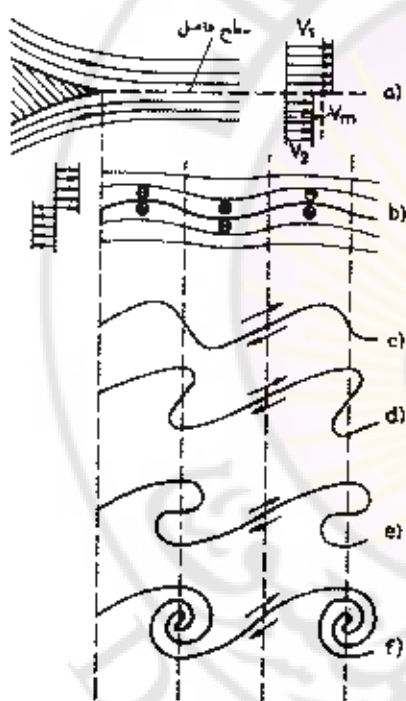
$$p = p_1 - \gamma H \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right] = 10^3 - 10^3 \cdot 19.39 (1.23^2 - 1) = 55 \text{ kp/m}^2$$

فإذا كانت درجة حرارة الماء 20°C فيكون حسب الشكل (٨.٢) $p_v = 238 \text{ kp/m}^2$ ، وبالتالي فإن الماء في المقطع ① سيتعرض حتماً لتبخر موضعي (تكيف) تتولد نتيجته فقاعات مملوءة ببخار الماء وبالغازات المنحلة وغير

المنحلة فيه . ويؤدي ذلك لانقطاع الجريان وانتهار تأثير الفعل المتصاخي للتيار .
 وواضح أن معادلة برنولي لا تعود صالحة للتطبيق على المنطقة المتكيفة لزوال
 أحد الشروط الأساسية التي قام عليه اشتقاقها وهو شرط الاستمرار .

٥.٣.٨ السطوح الفاصلة وشكل الأعاصير

عندما يلتقي خلف المؤخرة الحادة لجسم تياران سائلان قادمان من منبعين
 مختلفين فليس من الضروري في الحالة العامة أن تكون قدرة الجريان لكل منها



وبالتالي ثابتة برنولي ، من نفس
 القيمة . ويتبع من ذلك أنه على طرفي
 السطح الفاصل بين التيارين الذي
 لا يستطيع تحمل أي فرق في الضغط
 تكون السرعة مختلفة في القيمة ومتساوية
 في الاتجاه الشكل (١٣.٨ - a) .
 وهذا يعني أن السرعة تتعرض لتغير
 فجائي في الاتجاه الطولي .

أمثال هذه السطوح الفاصلة تشاهد
 بكثرة . ولكنها لا تحافظ على شكلها
 إلا لفترة قصيرة جداً بسبب عدم
 استقرارها الذي تتميز به . فهي تنزع
 بشدة إلى أن أية موجات نطراً عليها
 صدمة ومما كانت صغيرة تؤدي
 للزيادة المربعة لسعة الامواج وبالتالي
 إلى تزايد فرق السرعة في بعض

الشكل ١٣.٨ : الصفة المميزة للسطوح
 الفاصلة هي عدم الاستقرار بحيث أن أي
 توج صغير يؤدي بالنهاية لتفككها
 لجللة أعاصير غير منتظمة .

المناطق وتناقصه في مناطق أخرى . وبالنسبة بتفكك السطح الفاصل الى عدد كبير من الاعاصير غير المنتظمة ، الشكل (١٣.٨ - b حتى f) . ونظراً لأهمية هذه الظاهرة بالنسبة لفهم الجريانات الفعلية وكيفية تكون الاعاصير سندرس بعض تفاصيلها .

نفرض كما في الشكل (١٣.٨) ان سرعة التيار الفوقي V_1 أكبر من سرعة التيار التحتي V_2 . ونفرض ان السطح الفاصل قد طرأ عليه تموج طفيف نتيجة للتذبذبات في التيار القادم . هذه الامواج تتحرك الى الامام بسرعة V_m تساوي متوسط سرعتين V_1, V_2 ، الشكل (١٣.٨ - a) . فإذا راقبنا حركة الامواج من جهة إحداثيات تتحرك بنفس السرعة الوسطية فإن قمم ويطون الامواج تبقى ساكنة بالنسبة لهذا المراقب الذي يرى ان السائل الفوقي يتحرك الى اليمين والتحتي الى اليسار حركة مستقرة ، الشكل (١٣.٨ - b) . فإذا حسبنا بمساعدة معادلة برنولي توزيع الضغط في اتجاه الجريان أو بمساعدة معادلة أويلر (8.8) تغير الضغط نظمياً على اتجاه الجريان نجد أنه بالنسبة للتيار الفوقي أو التحتي يسود في قمة الموجة ضغط زائد وفي بطن الموجة ضغط ناقص (في الشكل أشير إليها بـ $\oplus$ و $\ominus$) . ولكن ، من الواضح ، ان توزيعاً للضغط كهذا لا يسمع بدوام استقرار الجريان ، لأن جزيئات السائل ستتحرك من منطقة الضغط العالي الى منطقة الضغط المنخفض ، وبالتالي ستزداد سعة الموجة بسرعة الى ان يتفكك السطح الفاصل مكوناً جملة من الاعاصير الافراذية ، الشكل (١٣.٨ - f) ، التي تكون في الواقع غير منتظمة كبيرة وصغيرة ، لأن التموج يكون أيضاً غير منتظم .

في حالات عملية هامة يرتبط تكوين السطح الفاصل بنشوء إعصار في نفس الوقت . وكمثال معبر جداً ندرس الجريان حول نتوء حاد (خشونة في الجدار مثلاً) . في اللحظات الأولى لبدء الحركة تكون صورة الجريان كما في الشكل (١٤.٨ - a) ، حيث تزدحم خطوط التيار عند طرف النتوء الحاد مما يؤدي

تولد سرعة هائلة تكون في حالة الجريان المثالي نظرياً لا نهائية . ولكن نعلم



الشكل ١٤.٨ : كل قعر حاد يعتبر
منهما لتكوين السطوح الفاصلة
والأعاصير .

بالخبرة أن السرعة لا تبلغ هذه القيمة غير المعقولة

فيزيائياً ، إذ تتناقص بعد فترة قصيرة جداً من

مرور التيار نتيجة تشكل أعاصير عند الطرف

المدبب للتواء . وكان السائل يسمى لتخفيف

حدته بهدف تجنب السرعات غير المعقولة ،

الشكل (١٤.٨ - b) . ولكن وجود هذا

الإعصار يؤدي لالتفاف السائل خلف التواء

فيلتقي مع التيار الأصلي مما يؤدي لتفسير

مفاجيء في السرعة وتشكل سطح فاصل ،

الشكل (١٤.٨ - d, c) ، وهذا يلتف على

نفسه ويغذي الإعصار فينمو الى أن ينفصل

عن الطرف الحاد مكوناً أعاصير بدء الحركة ،

الشكل (١٤.٨ - e) . ثم تعاود الكرة من

جديد . لذلك يعتبر براندل [4] أن السطح

الفاصل والأعاصير يكوئان في الواقع وحدة

متكاملة وينموان مع بعضهما البعض منذ بدء تشكلها . ويمكن لا بد من

الإشارة مسبقاً أن وراء تشكلها تكمن في الحقيقة لزوجة السائل التي معها

كانت صغيرة لا ينعلم تأثيرها على الجدار الصلب . ولكن عند دراسة تكون

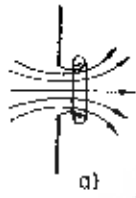
الأعاصير في الجريانات المثالية يكفي أخذ اللزوجة بعين الاعتبار فقط لفترة

تكون أعاصير بدء الحركة .

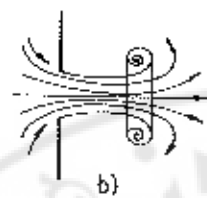
إن تكون النافورة الاسطوانية من ثقب دائري في جدار وعاء يتم بعمليات

مماثلة لما تقدم . ولكن السطح الفاصل هنا الذي يتكون عند حوافي الفتحة

يلتف مكوتاً اعصاراً خائياً ، الشكل (١٥.٨ - a) ، يحيط بالنافورة محافظاً على شكلها الاسطوانى إلى مسافة معقولة



a)



b)

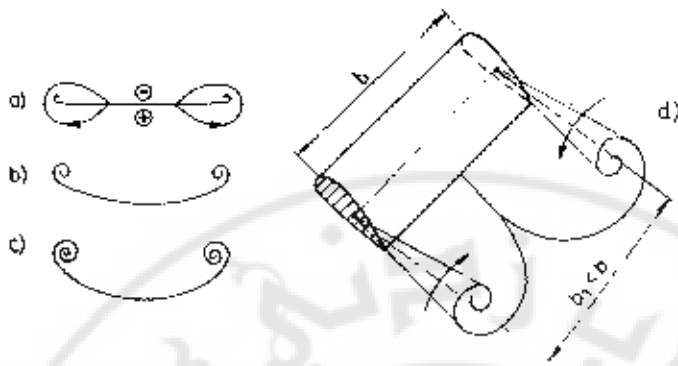
بعد فتحة التفريغ حيث يتفكك بعدها نتيجة الاحتكاك ، الشكل (١٥.٨ - b) .

توجد حالات هامة أخرى تتكوّن فيها سطوح فاصدة نتيجة تغيير مفاجيء للسرعة في الاتجاه العرضي . منها مثلاً عندما يحسكون

الشكل ١٥.٨ : تتكوّن النافورة الأمطوانية بسبب تشكّل إعصار خائى على حوافي فتحة الثقب .

التياران الملتقيان خلف مؤخرة جسم قادمين من نفس المصدر ، وثابتة بورفولي لكل منهما واحدة ، ولكن اتجاه السرعة للتيار الفوقى يعاكس اتجاه السرعة للتيار التحتي . مثل هذه الحالة تنشأ عندما تتحرك صفيحة مستوية بميل زاوية ورود صغيرة على اتجاه حركتها . على الطرف العلوي للصفيحة يسود ضغط ناقص بسبب السرعة الكبيرة ، بينما يؤثر على الطرف السفلي ضغط زائد بسبب السرعة الصغيرة نسبياً . لذلك تقترق خطوط التيار على الطرف السفلي اعتباراً من مسافة مناسبة عن منتصف الصفيحة إلى اليسار واليمين وتلتف على نهايتها ثم تنحني في اتجاه منتصف الطرف العلوي . نتيجة ذلك يتشكل عند مؤخرة الصفيحة سطح فاصل تكون السرعة على طرفيه من نفس القيمة ولكن باتجاهين متعاكسين . ويبين الشكل (١٦.٨ - a-b-c) كيف يلتف السطح الفاصل ابتداء من نهايتي الصفيحة الجانبيتين على مسافات مختلفة خلف الصفيحة ، ثم يتفكك أخيراً إلى إعصارين يمكن بطرق تربية الجربان مشاهدتها .

في حالة الجناح الحامل المحدود الامتداد يتحول السطح الفاصل المتشكل عند مؤخرة الجناح إلى جديلة إعصارية ، الشكل (١٦.٨ - d) ، لا غنى عن دراستها بالنسبة لتحديد قوة الرفع للجناح .

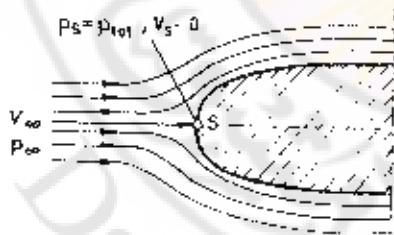


الشكل ١٦.٨ : خلف صفيحة مائلة ياتشكل سطح فاصل نتيجة تغير فجائي للسرعة بالاتجاه العرضي (a), (b), (c) ؛ وقد خلف الجناح الحامل المحدود الامتداد جديدة إعصارية (d) .

٦.٣.٨ قياس الضغط والسرعة والتيار المحيطي

١.٦.٣.٨ الضغط الستاتيكي والتعريكي والكلبي ومعامل الضغط

عندما يصطدم جريان انسيابي منتظم بحاجز صلب ، نتصوره مثلاً اسطوانة شاقولية في قناة مائية أو عمود جسر في نهر ، فإن مقدمته تعيق حركة السائل الذي يتجمع قبل الحاجز مشكلاً



ما يسمى منطقة الركود . فإذا اعتبرنا الجريان في أي مقطع أفقي نلاحظ كما في الشكل (١٧.٨) أن خط التيار المركزي يصطدم مع الحاجز في النقطة S ويتفرع منها إلى فرعين علوي وسفلي ينطبقان على حدود مقطع الحاجز . في النقطة S تكون السرعة معدومة وإلا تعارض ذلك

الشكل ١٧.٨ : الجريان حول حاجز ،

في نقطة الركود S يؤثر الضغط الكلبي .

حدود مقطع الحاجز . في النقطة S تكون السرعة معدومة وإلا تعارض ذلك

مع تعريف خط التيار . لذلك يطلق عليها نقطة الركود .

نطبق معادلة برنولي على نقطتين من خط التيار الأفقي المار من S . فإذا فرضنا V_s ، p_s السرعة والضغط في S ، V_∞ ، p_∞ السرعة والضغط للجريان غير المشوش ، أي على مسافة كبيرة من الجسم ، ينتج من (8.12) :

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 = p_s + 0 = p_{tot} .$$

إذن فإن الضغط الستاتيكي غير المشوش p_∞ يتلقى في نقطة الركود زيادة في الضغط بمقدار ضغط الركود أو الضغط الديناميكي $p_{dyn} = \frac{\rho}{2} V_\infty^2$ الذي يكافئ القدرة الحركية للجريان غير المشوش بالنسبة لواحدة الحجم . ويطلق على مجموعهما اسم الضغط الكلي p_{tot} الذي يؤثر في نقطة الركود ويعرف في الحالة العامة بالعلاقة :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{الضغط الكلي} &= \text{الضغط الستاتيكي} + \text{الضغط التعريبي} \\ \frac{\rho}{2} V^2 + p &= p_{tot} \end{aligned}} \quad (8.49)$$

ندخل هذه العلاقة في معادلة برنولي للضغط (8.9) فينتج :

$$p_{tot} + \rho g z = C_{np} = \text{const} \Rightarrow p_{tot} = C_{np} - \rho g z . \quad (8.50)$$

هذا يعني أن توزيع الضغط الكلي يخضع لقوانين الهيدروستاتك (راجع ١.١.٣) ، حيث أن كل مستو أفقي ($z = \text{const}$) يمثل بالنسبة لكافة خطوط التيار الواقعة فيه سطحاً للضغط الكلي الثابت المكافئ لثابتة برنولي عندما $z = 0$.

لتوضيح مفهوم الضغط الستاتيكي في الجريان نطبق معادلة برنولي (8.9)

على سائل ساكن ($V = 0$) فنتج العلاقة :

$$p + \rho g z = \text{const}' \Rightarrow p = p' = \text{const}' - \rho g z .$$

المطابقة لمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية. p' يسمى ضغط التوازن أو الضغط السكوني الناتج عن وزن السائل . لذلك فإن الضغط الستاتيكي في حالة الحركة يختلف عن p' بالفرق p^* بحيث يكون :

$$p = p' + p^* = (\text{const}' - \rho g z) + p^* .$$

فاذا أدخلنا هذه العلاقة في معادلة برنولي (8.9) نجد :

$$\frac{\rho}{2} V^2 + [(\text{const}' - \rho g z) + p^*] + \rho g z = \text{const} \Rightarrow \frac{\rho}{2} V^2 + p^* = \text{const} \quad (8.51)$$

في هذه الصيغة المختزلة لمعادلة برنولي يمثل p^* الضغط المؤثر على جزيء سائل ذي كتلة ولكنه عديم الثقالة ، وبالتالي فإن p^* لا يتعلق بالارتفاع المكاني . ومنه ينتج أن (8.51) تنطبق على أية نقطتين من حقل الجريان دون الارتباط بخط تيار أفقي .

إن النتيجة السابقة يمكن تفسيرها بسهولة بالنسبة لكافة حالات الجريان حول أجسام تتحرك داخل سائل لانها في الامتداد كالماء أو الهواء حيث يتعرض كل جزيء سائل من الجزيئات المجاورة لقوة طفو (دافعة أرخميدس) تساوي وزنه تماماً . لذلك يمكن دراسة حركة السائل دون أخذ وزنه بعين الاعتبار . ولكن قوة الثقالة لا يمكن إهمالها على السطوح المموجة للسائل ، حيث يلزم أن يحقق الضغط p ككل وليس الضغط p^* الشروط الحدية هناك .

أقد مهدت المعالجة السابقة الطريق لقياس الضغط ونصمم أجهزته ، وبالتالي لإمكانية المقارنة بين القيم النظرية والتجريبية . ونمكننا معرفة توزيع الضغط على حدود الجسم من تحديد محصلة القوى المؤثرة عليه بالإضافة لتحديد نقاط الضغط

الخروج التي يمكن أن تتعرض لخطر التكيف في السوائل المائعة أو اختراق جدار الصوت في السوائل الغازية . ويفضل دائماً ، خاصة بالنسبة للمقارنة بين أجسام مختلفة الأشكال ، أن يتم تمثيل توزيع الضغط بشكل لا بعدي . ويستخدم لذلك معامل الضغط Pressure coefficient الذي يعرف بالعلاقة :

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} V_{\infty}^2} = \frac{\Delta p}{q_{\infty}} \quad , \quad (8.52)$$

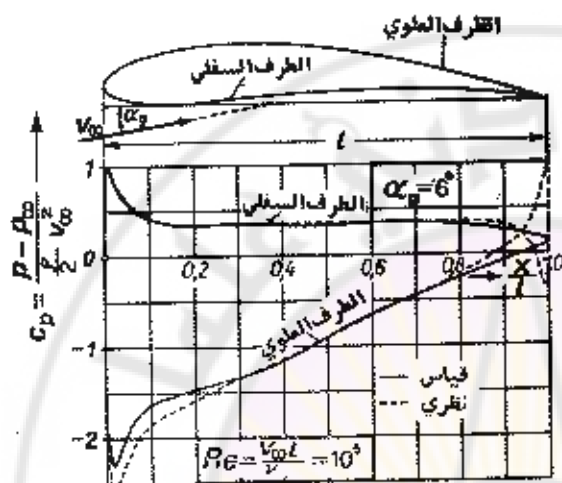
حيث p الضغط في نقطة من محيط الجسم أو في حقل الجريان ، p_{∞} و V_{∞} الضغط والسرعة في نقطة قياسية يمكن اختيارها بحرية ، ولكن من الأنسب أن تكون داخل الجريان غير المشوش ، أي بعيداً جداً عن الجسم . فإذا نسبنا إحداثي النقطة المختارة من الجسم على طول مميز منه ، مثل القطر في حالة الاسطوانة أو الأنبوب ، أو الوتر في حالة مقطع جناح حامل ، فنحصل على توزيع الضغط اللابعدي بالصيغة :

$$c_p = f(x/L) \quad . \quad (8.53)$$

ويكون هذا التوزيع في حالة الجريانات المثالية واحداً بالنسبة لكافة الأجسام المتشابهة هندسياً .

الشكل (١٨.٨) يبين توزيع الضغط اللابعدي على محيط بروفيل (مقطع) جناح حامل يمر عليه تيار تحت زاوية ودود α وبسرعة غير مشوشة V_{∞} . وقد حسب قيم c_p النظرية من توزيع السرعة حول البروفيل . فإذا طبقنا معادلة برنولي (8.51) على نقطة من محيط البروفيل حيث الضغط p^* والسرعة v وعلى نقطة بعيدة جداً عنه حيث الضغط والسرعة p_{∞}^* و V_{∞} نجد باستخدام (8.52) :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2, \quad (8.54)$$



الشكل ١٨.٨ : توزيع
الضغط اللابيدي على محيط
بروفيل جناح حامل
حسب بيتس (انظر
[١٧]). اختلاف القيم
النظرية والمقاسة سببه
لزوجة السائل .

حيث أغفل المؤشر (x) بالنسبة للضغط لتبسيط الكتابة . وفي ضوء هذه العلاقة
ينتج من الشكل (١٨.٨) أن السرعة على الطرف العلوي للبروفيل تكون
أكبر من V_∞ لأن قيم c_p سالبة ، بينما يكون العكس على الطرف السفلي .
لذلك تسمى نظرية الجناح الحامل الأول باسم طرف السحب والثاني باسم طرف
الضغط . ويمكن اعتبار توزيع الضغط هذا نموذجياً بالنسبة لكافة الأجسام المولدة
لقوة الرفع . فإذا كانت F_{ps} محصلة قوى الضغط الناعمة المؤثرة على الجناح
بالنسبة لوأحدة العرض ، c_A معامل قوة الرفع فيمكن أن نضع :

$$c_A \approx c_A - \frac{F_{ps}}{qA} = \int_0^1 (c_{pu} - c_{ps}) d\frac{x}{l} \quad (8.55)$$

حيث الدليلان x و D يشيران إلى طرف السحب والضغط .
في الحالة التي تكون فيها السرعة على الجسم V من حيث القيمة والاتجاه

لا تختلف إلا قليلاً عن السرعة غير المشوشة V_∞ ، كما هو الحال بالنسبة للجريان حول جناح حامل تحت زاوية ورود صغيرة ، فيمكن أن نكتب :

$$V = V_\infty \pm \Delta v_x \quad , \quad (8.57)$$

حيث (+) لطرف السحب و (-) لطرف الضغط . فإذا عوضناها في (8.54) ولاحظنا أن Δv_x^2 قيمة صغيرة يمكن إهمالها ينتج :

$$c_p = \mp 2 \frac{\Delta v_x}{V_\infty} \quad . \quad (8.56)$$

حيث إشارة (-) لطرف السحب و (+) لطرف الضغط ، والعلاقة تمثل معادلة برنولي الخطية . ونجدر الإشارة إلى أن فرق السرعة Δv_x يمكن اعتباره سرعة إضافية أو سرعة محرصة ناتجة عن وجود خيط إعصار مربوط بعوض عن الجناح الحامل .

٢.٦.٣.٨ أجهزة قياس الضغط

إن مبدأ قياس الضغط الستاتيكي يعتمد على فكرة تكون السطوح الفاصلة على التواءات والأطراف الحادة عندما يعبرها تيار عرضاني . هذه السطوح الفاصلة تتشكل أيضاً على حدود الجسم خاصة إذا كانت حادة . فإذا فرضنا في الشكل (١٧.٨) وجود صفيحة مستوية عرضانية على اتجاه الجريان بدلاً من الحاجز الاسطوانى فإن السطوح الفاصلة المتشكلة على أطرافها تكون ما يطلق عليه خطوط (أو سطوح) التيار الحرة التي تفصل الجريان الخارجى عن منطقة « السائل الميت » خلف الصفيحة . هذه تكون في الواقع معبأة بالأعاصير المتشكلة من تفكك السطوح الفاصلة ، ولكن سرعة الجزيئات فيها تكون في كل الأحوال صغيرة جداً بالمقارنة مع سرعة الجريان الخارجى .

نعتبر الجريان حول جدار فيه فرضة (حز) صغيرة . فبعد اللحظات الأولى لبدء الجريان تتشكل على حوافي الفرضة سطوح فاصلة وأعاصير بحيث تكون

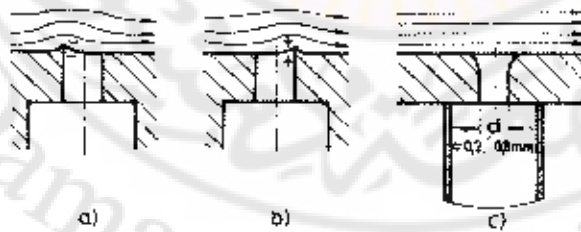
صورة الجريان كما في الشكل (١٩.٨ - a) . فإذا كانت المسافة بين حافتي

الفرضة صغيرة فإنه بعد ابتعاد الأعاصير
عن الطرف الحاد يتكون سطح فاصل مستقر
الشكل نسبياً ، وتكون صورة الجريان
كما في الشكل (١٩.٨ - b) . وتنشأ

داخل الفرضة منطقة سائل ميت يسود فيها
عملياً سكون وضغط ثابت يساوي إلى الضغط
على الطرف الآخر للسطح الفاصل ، أي
الضغط الستاتيكي للجريان . فإذا وصلنا

الفرضة عن طريق أنبوب أو خرطوم مطاطي
بمقياس ضغط سائلي أو معدني تتممكن من
قياس الضغط الستاتيكي في الجريان .

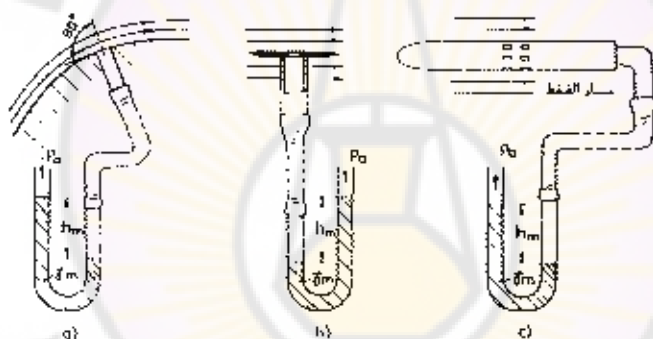
في الواقع العملي فإن قياس الضغط الستاتيكي في نقطة على جدار جسم يجري
حوله أو داخله سائل يتم بفتح ثقب دائري المقطع عادة توصل به حلقة أنبوبية
لوصل مقياس الضغط السائلي أو المعدني . ولكن يجب الانتباه الشديد حتى
يكون محور الثقب عمودياً على الجدار وأن تكون حوافه مدوّرة بشكل جيد
وقطره صغير محدود 0.2 إلى 0.8 mm ، الشكل (٢٠.٨ - c) . فإذا وجد



الشكل ٢٠.٨ : يتم قياس الضغط الستاتيكي بوصل مقياس الضغط
بثقب في الجدار يلزم أن تكون حوافه مدوّرة خالية من النتوءات .

نتوء على حافة الثقب فيكون كما في الشكل (١٤.٨) منبعاً لشكل الاعاصير والسطوح الفاصلة . وحسب ما يكون موقع هذا النتوء على الحافة الامامية أو الخلفية للثقب فإننا نقيس ضغطاً أصغر أو أكبر من الضغط الفعلي ، الشكل (٢٠.٨ - b, a) .

هذه الطريقة البسيطة لقياس الضغط الستاتيكي تستخدم في حالة الجريان في الأنابيب ، حيث يكفي وصل أنبوب بيزومترى بثقب الجدار لقياس الضغط في كل مقطع من الأنبوب ، الشكل (٤.٨) . كما تستخدم في حالة الجريان حول جدار منحني ، حيث يوصل بالثقب العمودي على الجدار مانومتر سائلي بشكل حرف U فيه سائل مقياس وزنه النوعي γ_m ، الشكل (٢١.٨ - a) . وحسب



الشكل ٢١.٨ : أجهزة قياس الضغط الستاتيكي : a) عن طريق ثقب عمودي على الجدار ، b) بواسطة قرص زير أو القرص البيزومتري ، c) بواسطة مسبار الضغط .

ما تكون قيمة الضغط في النقطة المعبرة فإن سوية سائل المقياس في فرع المانومتر الأيسر سترتفع أو تنخفض حتى يتحقق التوازن في أنبوبة المانومتر . وعندئذ يكون ، يرمز الشكل (٢١.٨ - a) وبفرض $\gamma_m \gg \gamma$ (γ الوزن النوعي للسائل) ، الضغط الستاتيكي على الجدار :

$$p = p_0 + \gamma_m h_m \Rightarrow p_0 = \gamma_m h_m .$$

لقياس الضغط الستاتيكي داخل الجريان أو في نافورة حرة ، أي حيث لا يوجد جدار يمكن ثقبه ، يستخدم قرص زير Ser أو القوس البيزومتري ، الشكل (٢١.٨ - b) . وهو يتألف من صفيحة رقيقة بشكل قرص في وسطه ثقب صغير لمحت حوله حلقة أنبوية متصلة بواسطة خرطوم مطاطي مثلاً بالمانومتر السائلي بشكل U . وتعود مسألة قياس الضغط الستاتيكي بهذا الجهاز لطريقة ثقب الجدار .

بدلاً من القرص البيزومتري يفضل استخدام مسبار الضغط الستاتيكي ، الشكل (٢١.٨ - c) . وهو يتألف من أنبوية قياس مقدمتها مسدودة ومحدبة ولكنها مجهزة بعدة ثقوب جانبية كبديل للثقب في « الجدار » ، وتصل بها أنبوية أخرى مكنية بشكل قائم يوصل بها بواسطة خرطوم مطاطي مانومتر سائلي بشكل U أو مانومتر معدني .

إن القرص البيزومتري ومسبار الضغط يتميزان بحساسية عالية ضد أي انحراف عن اتجاه الجريان ، فلهذا يحصل على قيم صحيحة للضغط يلزم أن يكون مستوي القرص البيزومتري منطبقاً تماماً على اتجاه الجريان ، بينما يمكن لمسبار الضغط قياس قيم دقيقة نسبياً حتى زاوية ميل تعادل 5° درجات . كما أنه من الأنسب بغية عدم تشويش الجريان وبالتالي عملية القياس ووضع المانومتر وخرائط التوصيل خارج التيار .

لقياس الضغط الكلي p_{tot} تستخدم عادة أنبوية بيتوت نسبة لمكتشفها H. Pitot (1695-1771) . وهي تتألف من أنبوية قياس معكوفة بشكل قائم ومفتوحة من الطرفين ، حيث يوصل بالنهاية السفلى عن طريق خرطوم مطاطي مانومتر سائلي (أو معدني) ، الشكل (٢٢.٨) . ويعتمد مبدأ القياس على النتيجة

الهامة التي توصلنا إليها في (١٠٦.٣٠٨) بأن الضغط الكلي يؤثر في نقطة الركود S

(الشكل ١٧.٨) . وعليه إذا وضعنا ساق

أنبوبة بيتوت الأفقية ضد اتجاه الجريان فإن

جزيئات السائل التي تدخل الفتحة الامامية

تشكل منطقة ركود، وبالتالي يؤثر المانومتر

على قيمة الضغط الكلي في النقطة المجاورة

للفتحة. فإذا فرضنا $\gamma_m \gg \gamma$ ، $\gamma_m \gg \gamma$ فرق ارتفاع

سوية سائل المقياس فيكون :

$$P_{tot} = P_n + \gamma_m h .$$

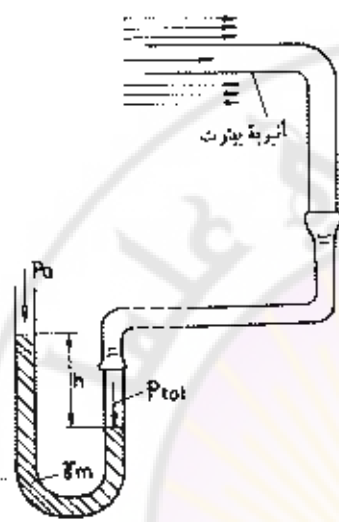
في حالات عملية عديدة للجريان عبر

أقنية أو حول أجسام يطلب قياس الضغط

في نقاط متعددة من مقطع القناة أو محيط

الجسم بغية الحصول على صورة متوافقة

لتوزيع الضغط . في هذه الحالات يستخدم



الشكل ٢٢.٨ : أنبوبة بيتوت لقياس الضغط الكلي .

المانومتر المتكوي Multi-Manometer ، الشكل (٢٣.٨) ، الذي يكون

عادة قابلاً للتحويل ويعمل بالتالي على مبدأ المانومتر ذي الذراع المائل (ص ٩٥) .

فإذا أردنا بواسطة قياس توزيع الضغط الستاتيكي مثلاً حول محيط بروفيل جناح

حامل فيوصل مجموعة من الثقوب الصغيرة التي يجب ثقبها بعناية في جدار الجناح

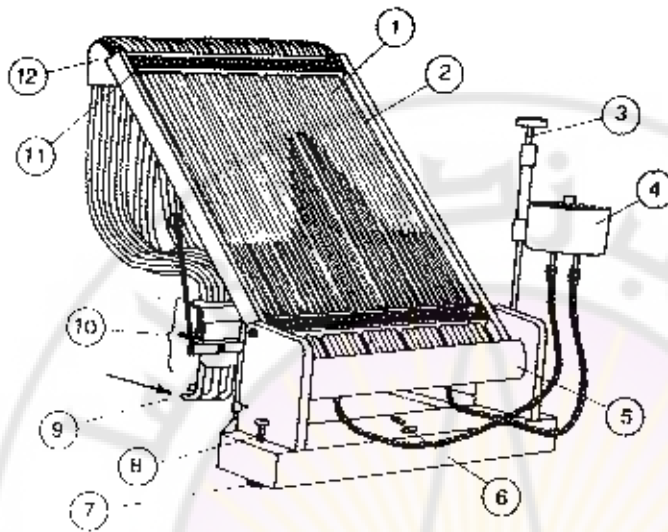
الحامل . وبين الشكل (٢٤.٨) كيفية إجراء عملية القياس في المخبر لتوزيع

الضغط الستاتيكي حول الجناح والضغط الكلي خلفه . وتجدر الإشارة أن

الصفحتين المتوازيتين المثبتتين على نهايتي الجناح الحامل المحدود الامتداد مهمتها

منع التفاف الجريان حول نهايتي الجناح ، وبالتالي يصبح الجريان حوله وكأنه

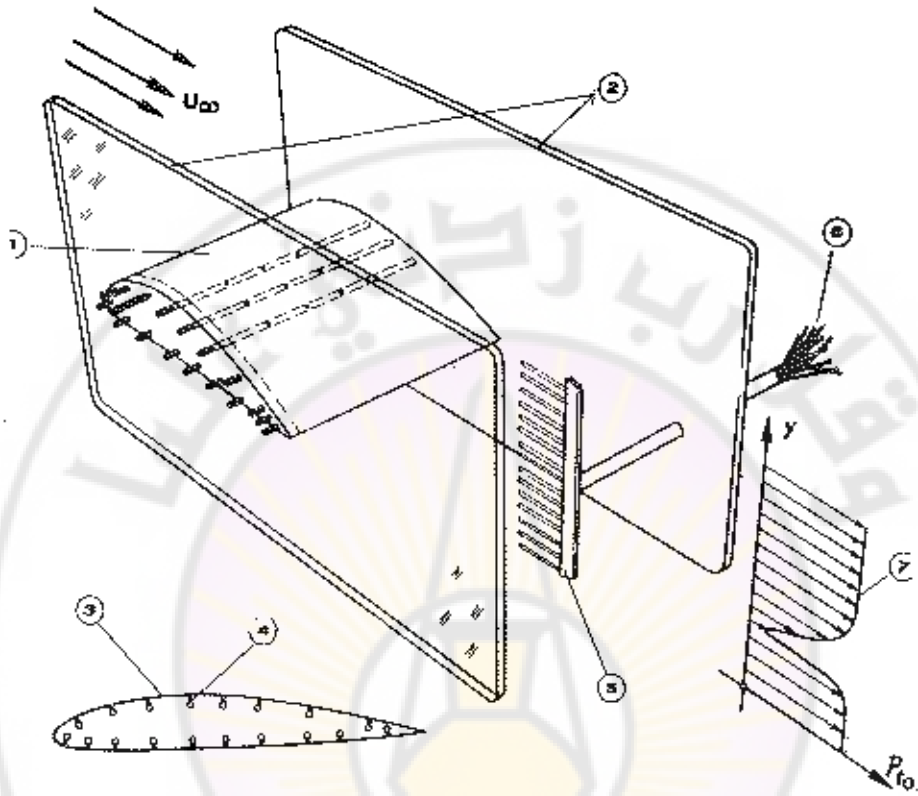
جريان مستوي حول جناح لانهايتي الامتداد .



الشكل ٢٢.٨ : المانومتر المتكرر : (1) أنبوبة مانومترية ، (2) لوحة مرغمة قابلة للتميل ، (3) برغي تعيير ، (4) إبرة المنسوب ، (5) أنبوب الوصل ، (6) فقاعة نسوية ، (7) ساق تضبيط ، (8) برغي تضبيط ، (9) من نقاط القياس ، (10) جهاز ربط الخراطيم ، (11) حافة الكتابة ، (12) مجمع الخراطيم .

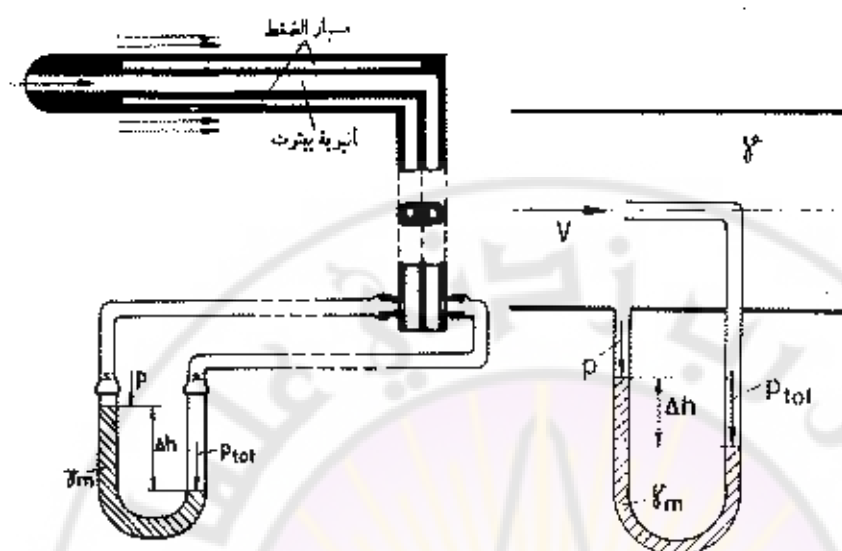
لقياس الضغط التحويلي p_{dyn} ، الذي يساوي حسب (8,49) الفرق بين الضغط الكلي والضغط الستاتيكي ، يلزم من حيث المبدأ القيام بعملية قياس تستخدم فيها أنبوبة بيتوت ومسابر الضغط الستاتيكي . ولكن بالامكان قياس p_{dyn} بعملية قياس واحدة ، كما يبين الشكل (٢٥.٨) ، في حالة الجريان عبر أنبوب أو قناة . فالأنبوب البيزومتري المتصل بثقب في الجدار يقيس الضغط الستاتيكي بينما تقيس أنبوبة بيتوت الضغط الكلي . فإذا وصلنا بمانومتر تفاضلي وأشر على فرق ارتفاع Δh لسوية سائل المقياس الذي نفرض وزنه النوعي γ فيكون :

$$q - p_{dyn} = p_{tot} - p = \frac{\rho}{2} V^2 = \gamma_m \Delta h$$



الشكل ٢٤.٨ : قياس توزيع الضغط الستاتيكي عل محيط بروفييل جناح حامل والضغط الديناميكي خلف البروفيل : (1) الجناح الحامل ، (2) صفيحتان متوازيتان ، (3) البروفيل ، (4) ثقب لقياس الضغط الستاتيكي ، (5) مقياس بيتوت متكرر لقياس توزيع الضغط الديناميكي ، (6) خرطوم أوصل بالمانومتر المتكرر ، (7) توزيع الضغط الديناميكي .

لقياس الضغط التجريبي داخل الجريان تستخدم أنبوبة براندل نسبة لمصمها ، وهي تجمع كما بين الشكل (٢٤.٨) بين مبداء الضغط وأنبوبة بيتوت . وتصف بعدم حساسيتها الكبيرة ضد الانحراف عن اتجاه الجريان ، حيث تعطي قياسات دقيقة بما فيه الكفاية حتى زاوية ميل $12^\circ \pm$ ، إذا كان رأس الأنبوبة



الشكل ٣.٦.٣.٨ : أنبوبة براندل لقياس
الضغط التثريكي والسرعة .

الشكل ٣.٦.٣.٨ : قياس الضغط التثريكي
والسرعة بواسطة أنبوبة بيتوت
وأنبوب بيزومترى .

نصف كروي . وقد صممت منها نماذج متعددة تستخدم في القياسات الهيدروليكية والإيروديناميكية والغازديناميكية تتميز عن بعضها خاصة بتصميم الرأس بغية تجنب أخطاء القياس نتيجة الانحراف على اتجاه الجريان [35] . ويمكن طبعاً أن يوصل بها بدلاً من المانومتر التفاضلي البسيط مكرومانومترات عالية الحساسية والدقة لقياس السرعات الصغيرة جداً كما في الطبقة الحدية .

٣.٦.٣.٨ أجهزة قياس التيار الحجمي

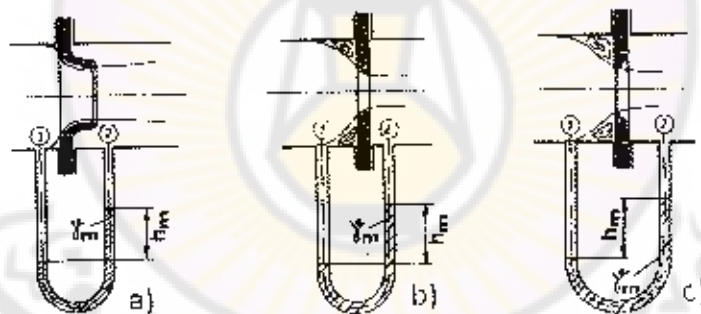
بالإضافة لأنبوبة فنتوري كجهاز لقياس التيار الحجمي Q يمكن في حالة الجريان في الأنابيب الدائرية خاصة استخدام نفثة قياس Flow nozzle أو حلقة قياس Orifice ، الشكل (٣.٧.٨) ، التي لا تختلف في مبدأ عملها وطريقة

القياس بها عن أنبوبة فنتوري . وعليه نجد بسهولة مساعدة معادلة برنولي ومعادلة الاستمرار للتيار الحجمي المثالي بالصيغة التالية :

$$\dot{V}_{10} = Q_{10} = V_2 A_2 = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \left[\frac{2 \Delta p}{\rho} \right]^{1/2} \quad \text{[m}^3 \text{s}^{-1}] \quad (8.58)$$

التي تشبه جداً العلاقة (8.29) . وفيها يمثل A_1 مقطع الأنبوب ، A_2 مقطع فتحة النفثة أو الحلقة ، $\Delta p = p_1 - p_2$ فرق الضغط بين النقطتين ① قبل و ② بعد النفثة .

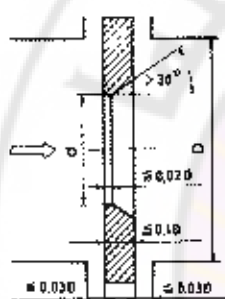
لحساب التيار الحجمي الفعلي يستخدم هنا أيضاً معامل التصريف ψ_n . بحيث يكون : $Q_{act} = \psi_n Q_{th}$. ويتم تحديد ψ_n بالنسبة لنموذج معين من النفثات أو حلقات القياس بواسطة التعبير ، حيث يقاس ψ_n كتابع لعدد رينولدز $Re = V_1 D_1 / \nu$.



الشكل ٣٧.٨ : قياس التيار الحجمي بواسطة نفثة قياس عيارية (a) ، ونفثة قياس ربع دائرية (b) ، وحلقة قياس (c) .

لقد صممت نماذج مختلفة من حلقات ونفثات القياس العيارية ذات أشكال مناسبة بحيث أنه في مجال واسع لاعداد رينولدز تبقى قيم ψ_n ثابتة . ويتضمن [89] قيم ψ_n وكافة المقاييس المطلوبة للتصميم ، وكذلك طريقة الوصل كشرط للقياس

الصحيح . وهذا يتطلب أن توجد قبل وبعد حلقة القياس وصلة أنبوبية مستقيمة وملاءة بطول $20D \dots 10D$ ، تجنباً لأي تشويش للتيار الداخل إلى الحلقة أو الدفاعة يؤدي لأخطاء في القياس . ومن الواضح أن كل نموذج لنفاثات وحلقات القياس يصلح في مجال قياس معين ، فالنفاثة الميمنة في الشكل (٢٧.٨ - a) تصلح للقياس حتى أعداد رينولدز $Re_D \geq 2.10^5$ ، بينما النفاثة الميمنة في الشكل (٢٧.٨ - b) تصلح في المجال $2.10^5 \dots 5.10^5$ ، بينما تستخدم حلقة القياس من النوع الميمن في الشكل (٢٧.٨ - c) والتي يوضح الشكل (٢٨.٨) مقاييسها العيارية بالتفصيل ، للقياس في مجال



$Re_D \geq 10^6$ عندما تكون نسبة انفتاحهما $m = (d/D)^2$ صغيرة ؛ وفي مجال $Re_D \geq 10^6$ عندما تكون m كبيرة نسبياً .

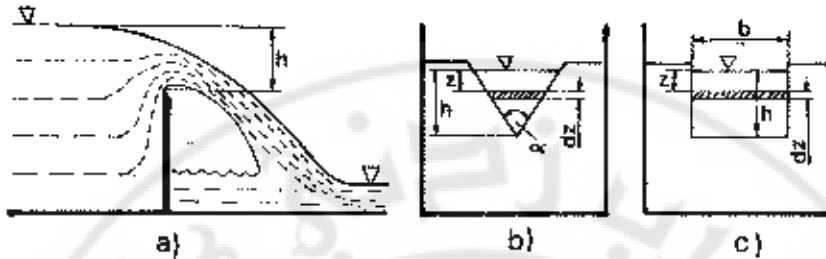
لقياس غزارة التيار الحجمي في الأفقية المكشوفة مثل أفقية الري وأفقية العتقات المائية أو في مجاري الأنهار ، حيث تكون كميات الماء المتدفقة كبيرة مع فرق منسوب صغير ، فإن النسب الطرق المستخدمة هي طريقة الهدار صغير ، وهذا يمثل حاجزاً بشكل صفيحة مستوية عادة وطرفها العلوي الحاد يكون إما مستقيماً أو مجهزاً بفرضة Notche مستطيلة أو مثلثية (حرف V) أو شبه

الشكل ٢٨.٨ : حلقة قياس عيارية حسب نورم اتحاد المهندسين الاثان (VDI) .

منحرفة الشكل . أما مبدأ القياس فيعتمد على أن الهدار كسد يحجز الماء خلفه حتى ارتفاع h تتعلق قيمته بغزارة التدفق الحجمي Q ، الشكل (٢٩.٨ - a) .

في مكتب الهيدروليك [6] [20] والمكتب المختصة بالقياسات المائية توجد دراسات متقضية عن الهدارات ، وستعرض هنا لنموذجين منها فقط بغية الحصول على فكرة عامة . تعتبر الهدار ذات الفرضة بشكل V ، أو كما يسمى أيضاً هدار طولمسون [8] [20] ، الشكل (٢٩.٨ - b) ، لتسكن α زاوية انفراج الفرضة ، h ارتفاع تخزين الماء . نأخذ شريحة على عمق z من السطح الحر للسائل وبسماكة dz ، فإذا أهملنا كافة الفروقات فإن سرعة التفريغ المائية عبر الشريحة تنتج من قانون توريشيلي (٨.32) ، وينتج بالتالي التيار الحجمي :

$$Q_{id} = \int_0^h v_{id} \cdot dA = \int_0^h \sqrt{2gz} \cdot 2(h-z) \tan \frac{\alpha}{2} dz = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan \frac{\alpha}{2} h^{2.5}$$



الشكل ٢٩.٨ : الجريان فوق هدار (a) ، هدار طومسون أو الهدار ذو الفرضة الثلاثية بـ (b) ، الهدار ذو الفرضة المستطيلة (c) .

وبادخال معامل التصريف ψ_n نحصل على الفزارة الفعلية :

$$Q_{act} = \psi_n \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan \frac{\alpha}{2} h^{2.5} ; \quad (8.59)$$

التي تكتب بالنسبة لهدار معين بالشكل :

$$Q_{act} = \psi_n C h^{2.5} = C_V h^{2.5} . \quad (8.60)$$

بمساعدة هذه العلاقة يمكن تعيير الهدار وتحديد ψ_n وذلك بقياس عدة قيم لـ Q_{act} و h . وفي هذه الحالة يفضل تمثيل النتائج بشكل لوغاريتمي حيث يذبح من (8.60) :

$$\lg Q_{act} = 2.5 \lg h + \lg C_V .$$

وهذه معادلة مستقيم ميله 2,5 ويتقاطع مع المحور $\lg Q_{act}$ في نقطة تحدد قيمة $\lg C_V$ التي منها تتحدد قيمة ψ_n ، التي تبلغ 0,6 تقريباً .

بالنسبة للهدار ذي الفرضة المستطيلة البسيطة ، نحصل بنفس الخطوات السابقة وبرمز الشكل (٢٩.٨ - c) على العلاقة التالية لفزارة التيار الحجمي الفعلي :

$$Q_{act} = \psi_n \frac{2}{3} b \sqrt{2g} h^{1.5} = C_V h^{1.5} \quad (8.61)$$

وبكتابة لوغاريتمية نحصل من (8.61) على معادلة مستقيم ميله 1,5 . وتحدد نقطة تقاطعه مع المحور $\lg Q_{act}$ قيمة معامل الهدار C_V وبالتالي ψ_n .

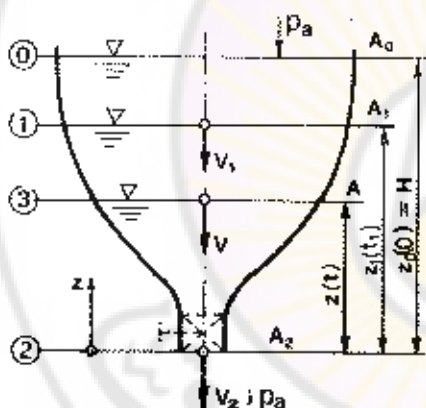
- ٣٠٥ -

ميكانيك السوائل التكميلي - ٢٠

٧.٣.٨ تفريغ مزان مع مراعاة تغير ارتفاع السطح الحر للسائل

نمثال على الجريانات غير المستقرة ندرس عملية تفريغ لإناء من فتحة في القعر .
نفرض أن شكل الإناء المفتوح في الأعلى اعتباطي ، وأن السائل الذي في الإناء
عديم الاحتكاك وفتحة التفريغ مدورة بشكل جيد ، بحيث يمكن اعتبار عملية
التفريغ تتم بدون فواقد وفي الهواء الحر .

ليكن عند بدء عملية التفريغ ، $t=0$ ، ارتفاع السطح الحر للسائل ① عن
المستوي المار من فتحة التفريغ ② هو $z_0(0)=H$. عند الزمن $t=t_1$ يصبح
ارتفاع المنسوب $z_1(t_1)$ وينطبق السطح الحر للسائل على المستوي ③ وتكون
سرعة هبوطه $V_1(z_1)$ ؛ بينما سرعة التفريغ $V_2 = V_2(z_1)$ ، الشكل (٣٠٠.٨) .



الشكل ٣٠٠.٨ تفريغ إناء متغير المقطع مع مراعاة
حركة السطح الحر للسائل وحساب زمن التفريغ .

لحساب سرعة التفريغ
الآنية وتحديد زمن تفريغ
السائل نطبق معادلة بولنوي
للجريانات غير المستقرة (8.18)
على خط تيار آفي يبدأ من
المستوي ① ويمر من فتحة
التفريغ ، التي نعتبر مستويها
② مستوياً للقياس . فإذا راعينا
أن الضغط $p_1 = p_2 = p_a$ ،
وأن $z_2 = 0$ نجد :

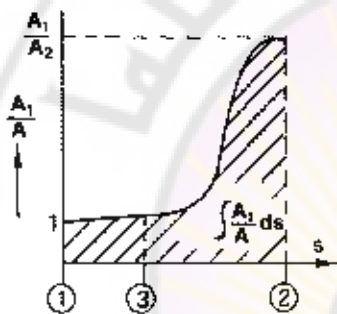
$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_{s=s_1}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds \quad (8.62)$$

وبنتج من معادلة الاستمرار (8.2) برموز الشكل (٣٠٠.٨) واعتبار معامل
التضييق $\mu_c = 1$:

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} \quad ; \quad V = V_1 \frac{A_1}{A} \quad . \quad (8.63)$$

بذلك يصبح التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (8.62) وباعتبار أن المسكامة ستتم بالنسبة لحظ تيار آني ، أي في لحظة زمنية معينة تكون عندها القيم A_1 ،
 $\frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{dV_1}{dt}$ لا تتعلق بالاحداثي s :

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(V_1 \frac{A_1}{A} \right) ds = \frac{dV_1}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \frac{A_1}{A} ds \quad . \quad (8.64)$$



هذا التكامل يمكن حله بيانياً كما يوضح الشكل (٣١.٨) ، إذا كان شكل الإناء الاعتباطي ، وبالتالي تغير مقطعه A بدلالة s معلوماً . وعليه تأخذ (8.62) الصيغة التالية :

$$\frac{V_1^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] +$$

الشكل ٣١.٨ : حل التكامل

بيانياً : $\int \frac{A_1}{A} ds$

$$+ z_1 - \frac{1}{g} \frac{dV_1}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \frac{A_1}{A} ds = 0 \quad . \quad (8.65)$$

وبما أن سرعة هبوط السطح الحر للسائل تتعلق بتغير الارتفاع اللحظي z_1 مع الزمن فيمكن مع مراعاة اتجاه z كتابة العلاقة :

$$V_1 = - \dot{z}_1 = - \frac{dz_1}{dt} \quad ; \quad \frac{dV_1}{dt} = - \ddot{z}_1 = - \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad . \quad (8.66)$$

ندخلها في (8.65) ونستخدم لاختصار الكتابة الرموز :

$$\varphi(z_1) = \frac{1}{2g} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] ; \psi(z_1) = \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{A_1}{A} ds ; f(z_1) = \frac{\varphi(z_1)}{\psi(z_1)} ; q(z_1) = \frac{z_1}{\psi(z_1)} \quad , \quad (8.67)$$

التي تمثل نوابغ تتعلق بشكل الإناء ، فنجد العلاقة :

$$\ddot{z}_1 - f(z_1) \cdot (z_1)^2 + q(z_1) = 0 \quad (8.68)$$

التي تمثل المعادلة التفاضلية لعملية التفريغ . حلها نستخدم طريقة برونولي (انظر [42]) ونجري التبديل التالي :

$$\frac{dz_1}{dt} = \dot{z}_1 = u ; \ddot{z}_1 = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} = u \frac{du}{dz_1} = u u' . \quad (8.69)$$

بذلك تأخذ المعادلة (8.68) صيغة معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى من الشكل .

$$u' - f(z_1) \cdot u = - \frac{q(z_1)}{u} . \quad (8.70)$$

حلها نضع :

$$u = v w \Rightarrow u' = v w' + w v' , \quad (8.71)$$

فتصبح بذلك (8.70) من الشكل :

$$v w' + w [v' - f(z_1) \cdot v] = - \frac{q(z_1)}{v w} . \quad (8.72)$$

نختار النابغ v بحيث يعدم التعبير المحصور بين القوسين في (8.72) . وعليه يصبح من جهة :

$$\frac{dv}{dz_1} = v' = f(z_1) \cdot v \Rightarrow \frac{dv}{v} = f(z_1) dz_1 \Rightarrow v = \exp \left[\int f(z_1) dz_1 \right] :$$

ومن جهة أخرى :

$$v \frac{dw}{dz_1} = - \frac{q(z_1)}{v w} \Rightarrow w dw = - \frac{q(z_1)}{v^2} dz_1 = - \frac{q(z_1)}{\exp[2 \int f(z_1) dz_1]} dz_1 .$$

وينتج التكامل :

$$w^2 = -2 \int \{q(z_1) \cdot \exp[-2 \int f(z_1) dz_1]\} dz_1 + C.$$

فإذا لاحظنا من مقارنة (8.66) مع (8.69) أن $u = -V_1$ نحصل أخيراً على
على سرعة هبوط السطح الحر للسائل اللحظية :

$$V_1 = -\frac{dz_1}{dt} = \pm \exp[\int f(z_1) dz_1] \cdot \sqrt{C - 2 \int \{q(z_1) \cdot \exp[-2 \int f(z_1) dz_1]\} dz_1} \quad (8.73)$$

حيث C ثابت التكامل ، الذي يتحدد من شروط البدء : $V_1 = 0$ عندما $H = z_1$
ونحصل على زمن التفريغ t_1 اللازم لتبسط سوية السائل في الاناء من H حتى
 z_1 بالصيغة :

$$t_1 = \pm \int \frac{dz_1}{\exp[\int f(z_1) dz_1] \cdot \sqrt{C - 2 \int \{q(z_1) \cdot \exp[-2 \int f(z_1) dz_1]\} dz_1}} + C_1, \quad (8.74)$$

حيث C_1 ثابت التكامل ، الذي يتحدد أيضاً من شروط البدء : $z_1 = H$ عندما $t = 0$.
ونحصل على زمن التفريغ الكلي للأناء t_{10} بمكاملة (8.74) ووضع $z_1 = 0$.

بالنسبة لأي إناء شكله معلوم وبالتالي التابع $A=f(z_1)$ معطى ، فإن
العلاقات (8.63) ، (8.73) ، (8.74) نسمح من حيث المبدأ بتحديد سرعة التفريغ
الآنية والنيار الحجمي وزمن التفريغ الجزئي أو الكلي . وتكون عملية الحساب
في الظروف العملية أقل تعقيداً مما يبدو في الوهلة الأولى .

عندما يكون ندير مقطع الاناء في قسمه العلوي صغيراً فإن قيمة التكامل في (8.64) تبقى
تقريباً ثابتة (في الشكل (٣١.٨) بين ① و ③) . بذلك تصبح أمثال المعادلة التفاضلية
(8.68) ثابتة وتتحول بوضع $z_1^2 = 1$ إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، وتنتج عندئذ
بدلاً من (8.73) العلاقة :

$$V_1 = \sqrt{C \cdot \exp[2f(z_1) \cdot z_1] + \frac{q(z_1)}{2f^2(z_1) \cdot z_1} [2f(z_1) + 1]} \quad (8.75)$$

في أكثر الحالات العملية تكون مقاطع الإله أكبر بكثير من مقطع فتحة التفريغ .
عندئذ فإن التسارع المكافئ $\ddot{z}_1 = \frac{dV_1}{dt}$ لجزيئات السطح الحر للسائل لا يكون له تأثير
يذكر على عملية التفريغ ، وبالتالي يمكن إهماله في العلاقة (8.68) ، حيث تصبح ، مع مراعاة
(8.67) ، من الشكل :

$$(\ddot{z}_1)^2 = \frac{q(z_1)}{f(z_1)} = \frac{z_1}{\varphi(z_1)} = \frac{2g z_1}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]} .$$

ومنها ننتج ، مع مراعاة (8.66) ، سرعة هبوط السطح الحر للسائل :

$$V_1 = \sqrt{\frac{2g z_1}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}} \approx \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g z_1} ; \left(\frac{A_1}{A_2} \gg 1\right) . \quad (8.76)$$

ونحصل من معادلة الاستمرار (8.63) على سرعة التفريغ الآتية :

$$V_2 = \sqrt{2g z_1} . \quad (8.77)$$

التي تخضع في هذه الحالة الخاصة لقانون توريشلي (8.32) .

لحساب زمن التفريغ الجزئي فنطلق من (8.66) ونستخدم (8.76) فنجد :

$$-\frac{dz_1}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g z_1} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{A_2 \sqrt{2g}} \int A_1 z_1^{-1/2} dz_1 + C . \quad (8.78)$$

إذا كان الاناء اسطوانياً أو موشورياً يكون $A_1 = A = \text{const}$ ، ويصبح عندئذ :

$$t_1 = -\frac{2 A_1 \sqrt{z_1}}{A_2 \sqrt{2g}} + C .$$

حيث C ثابت التكامل ، الذي يتحدد من شروط البدء : عندما $t_1 = 0$ يكون $z_1 = H$.

وبالتالي فإن : $C = \frac{2 A_1 \sqrt{H}}{A_2 \sqrt{2g}}$. وبذلك يصبح .

$$t_1 = \frac{2 A_1}{A_2 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H} - \sqrt{z_1} \right) . \quad (8.79)$$

وينتج زمن التفريغ السكبي عندما $z_1 = 0$:

$$t_u = \frac{2 A_1}{A_2} \sqrt{\frac{H}{2g}} . \quad (8.80)$$

إن طريقة الحساب السابقة تبقى صحيحة إذا كان $A_1 = f(z_1)$ ، ولكن الجدير بالاشارة أنه عند حساب التيار الحجمي الفعلي باستخدام معامل التصريف يجب مراعاة أن ψ_1 تتعلق بالارتفاع z_1 وبالتالي يكون الحساب أكثر تعقيداً من حالة المنسوب الثابت (٢.٣.٨) .

فما سبق لم تتعرض لحركة السائل في الإناء خلال اللحظات الأولى من بدء عملية التفريغ . إن فتحة التفريغ تكون عادة مغلقة بواسطة صمام (رسم ميسراً في الشكل ٨.٣٠) . وطبيعي أن حركة السائل لا تتم بشكل فجائي بحيث أن سرعة التفريغ V_2 تصل فوراً قيمة ثابتة ، وإنما يلزم لذلك زمن معين .

نفرض أن منسوب السائل في الإناء يبقى عملياً ثابتاً ، $z_0 = H = \text{const}$ ، فتكون عندئذ سرعة هبوط السطح الحر للسائل $V_1 = 0$. وعندما يفتح صمام التفريغ في اللحظة $t = 0$ تكون السرعة $V_2 = 0$ وتترايد مع الزمن حتى تصل إلى قيمة عظمى مطابقة لحالة الجريان المستقر .

لتحديد تغير سرعة التفريغ مع الزمن ننتقل من العلاقة (8.62) التي نصبح هنا باستخدام (8.63) والانتباه إلى أن dV_2/dt لا يتعلق بالمكان من الشكل :

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_{s=0}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{dV_2}{dt} \int_0^{s_2} \frac{A_2}{A} ds$$

لتكن $V_{2c} = \sqrt{2gH}$ سرعة التفريغ النهائية المستقرة حسب (8.32) . نكتب

عليها سرعة التفريغ الآنية V_2 ونختصر الكتابة بوضع $L = \int_0^{s_2} \frac{A_2}{A} ds$ فنجد :

$$\frac{V_{2c}^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_{2c}}{g} \frac{d(V_2/V_{2c})}{dt} L$$

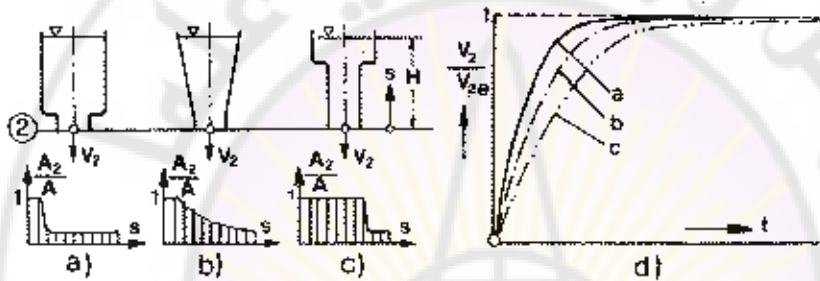
وبعد اصلاح بسيط ينتج :

$$\frac{d\left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)}{dt} = \frac{V_{2c}}{2L} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)^2\right] \Rightarrow dt = \frac{2L}{V_{2c}} \frac{d\left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)}{1 - \left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)^2}$$

وبالمكاملة يصبح :

$$t = \frac{2L}{V_{2e}} \operatorname{ar} \tanh \frac{V_2}{V_{2e}} \quad \text{أو} \quad \frac{V_2}{V_{2e}} = \tanh \left(\frac{V_{2e}}{2L} t \right) \quad (8.81)$$

بمساعدة هذه العلاقة يمكن حساب الزمن الذي تستغرقه عملية تفريغ أوعية مختلفة الأشكال وذات منسوب واحد H حتى تبلغ سرعة التفريغ قيمة السرعة النهائية المستقرة ، الشكل (٣٢.٨) ، وكما هو واضح من الشكل (٣٢.٨ - d)



الشكل ٣٢.٨ : الزمن اللازم لاستقرار الجريان عند تفريغ أوعية مختلفة الأشكال
(a) ، (b) ، (c) : ومنحني تغير السرعة (d) حسب [78] .

فإن فترة الجريان غير المستقر تكون في حالة قدرة جريان واحدة أقصر كلما كانت الكتلة الواجب تسريعها لتبلغ السرعة النهائية في فترة التفريغ أقل . لهذا تكون العملية بالنسبة للأناء (a) ، الذي يعطي أصغر قيمة للتكامل L ، أسرع من (b) و (c)

إن دراسة الحركة غير المستقرة في الأوعية المفتوحة في الأعلى ، خاصة مايتعلق بحساب القوى ، تلقى حديثاً اهتماماً بالغاً من الباحثين [95] .

٨.٣.٨ الجريان في ملف ملتوي

في الأمثلة السابقة تطرقنا بصورة أساسية الى حساب توزيع الضغط في اتجاه

الجريان. ولكن في العديد من مسائل الجريان العملية تتطلب معرفة تغير الضغط في الاتجاه الناطمي على الجريان .

نعتبر جرياناً خطوط تياره منحنية ، ونحسب الجولان بالنسبة لمنحن مغلف صغير مؤلف من قطعتين من خطي تيار طول الأولى $r d\varphi$ والثانية $(r+dn) d\varphi$ ، ومن قطعتين من نصفي قطر الانحناء اللذين يحدان الزاوية الصغيرة $d\varphi$ ، فنجد بمؤلة (انظر ص ٢٢٩) إذا اعتبرنا السرعة على خط التيار الاول V وعلى الثاني $V + \frac{\partial V}{\partial n} dn$ وأهملنا كافة الحدود الصغيرة من المراتب العليا أن :

$$I' = 2\omega dA = \left(\frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial n} \right) dA ,$$

حيث dA مساحة السطح المحدد بالمنحني المغلق . فإذا كان الجريان كونيّاً يكون $I' = 0$ ، وبالتالي يتحقق شرط الخلو من الدوران (7.29) بالنسبة لكافة خطوط التيار أي :

$$\frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad , \quad (8.82)$$

وتكون ثابتة بونولي ذات قيمة واحدة بالنسبة لكامل حقل الجريان (انظر ص ٢٦٣) . فإذا وضعنا في العلاقة (8.82) $\frac{\partial V}{\partial n} \equiv \frac{dV}{dr}$ فينتج بالمكاملة :

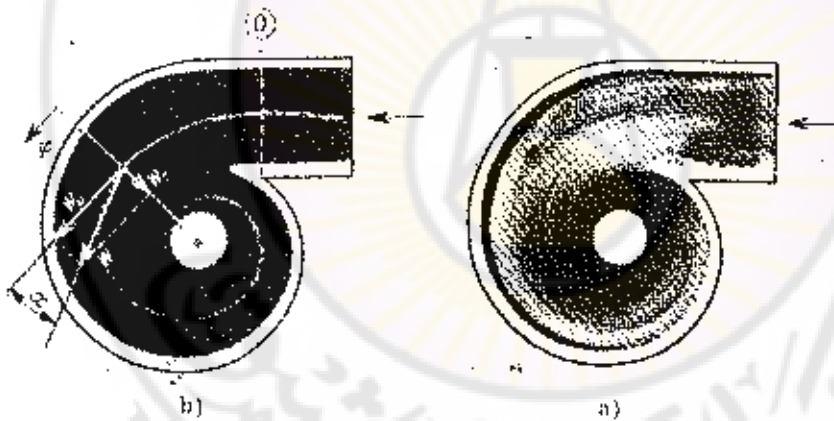
$$\frac{dV}{V} = - \frac{dr}{r} \Rightarrow V = \frac{C}{r} \quad , \quad (8.83)$$

أي أن السرعة تتناسب عكساً مع نصف القطر ، وهذا ما ينطبق على جريان الإعصار الكموني (الشكل ٩.٧ - b) . توزع الضغط ناظمياً على اتجاه الجريان يفتح الآن بسهولة من معادلة بونولي المختزلة (8.12) بتطبيقها على نقطتين من خطي تيار ما يختار احدهما بحيث يكون الضغط معلوماً ($p = p_1$ عندما $r = r_1$) :

$$p = p_1 + \rho \frac{C^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (8.84)$$

إذن فإن الضغط يتناقص باتجاه المركز عكساً مع مربع نصف القطر $p \sim r^{-2}$. بينما وجدنا في حالة دوران سائل في إناء (ص ١٤٢) علاقة عكسية للضغط : $p \sim r^2$. وهذا يدل أن تأثير نفس القوة الحجمية ، التي تمثل هنا القوة النابذة ، يكون مختلفاً في حالة التوازن عنه في حالة الحركة .

إن النتائج السابقة تجد تطبيقاً عملياً على الجريان ضمن مغلف حلزوني لوغاريتمي ، الشكل (٣٣.٨) . فالجريان القادم عبر أنابيب ثابتة يدخل الى المغلف في المقطع ① بشكل منتظم ، وبالتالي يمكن اعتبار كافة خطوط التيار هنا متوازية وقيم السرعة والضغط وكذلك ثابتة بونولي لكل منها واحدة .



الشكل ٣٣.٨ : الجريان ضمن مغلف حلزوني لوغاريتمي : (a) صورة الجريان ؛ (b) تحديد شكل خط التيار .

فاذا اعتبرنا كخطوة تقريبية أولى خطوط التيار داخل المغلف (نفرض أن صورة الجريان في كل مستو مواز لمستوي الشكل واحدة) بشكل دوائر مركزية بدلاً من الحلزونات اللوغاريتمية ، فإن العلاقتين (8.83) و (8.84) تحددان توزيع السرعة والضغط داخل المغلف الحلزوني . وعندما يكون نصف قطر مقطع

الخروج r_1 صغيراً بشكل كاف فإن الضغط p يمكن أن يبلغ عند المدخل قيمة عالية جداً. ولهذا السبب يستخدم الحلزون اللولبي كـ مغلف Volute casing لآلات لجرمان القطر كوسيلة لتحويل قدرة الضغط إلى قدرة حركية في حال العنفات أو بالعكس في حال المضخات، تبعاً لما يكون اتجاه الجريان كما في الشكل (٣٣.٨) أو بالعكس. ولكن في كل الحالات يلزم اختيار نصف القطر r_1 بحيث لا تبلغ قيمة الضغط المطلق عنده قيمة قريبة من ضغط تبخر السائل مما يؤدي لحدوث التكيف.

لحساب أكثر دقة للجريان داخل المغلف الحلزوني يجب أن نراعي أن السرعة W المماسية على خط التيار تكون لها مركبة محيطية W_u ومركبة قطرية W_r (الشكل ٣٣.٨ - ب). وبالتالي فإن العلاقة (8.83) تنطبق على W_u . ويعرف الجداء $W_u r = C$ باسم التدويم أو اللف الذاتي Spin. بينما تنتج W_r من معادلة الاستمرار (8.2) حيث يكون بالنسبة لواحدة العرض:

$$W_r \cdot 2\pi r = C' \Rightarrow W_r r = C, \quad (8.85)$$

فإذا وضعنا $W_r = \frac{dr}{dt}$, $W_u = \frac{r d\varphi}{dt}$ ، ولاحظنا حسب الشكل (٣٣.٨ - ب) أن:

$$\frac{W_r}{W_u} = \tan \alpha = \text{const} \quad , \quad (8.86)$$

فإن معادلة خط التيار الموافق لحلزون لوجارمي تنتج بعد عزل الزمن وإجراء التكامل بالشكل:

$$r = r_1 \exp [\tan \alpha \cdot (\varphi - \varphi_1)] \quad (8.87)$$

إن الحساب الدقيق للجريان داخل المغلف الحلزوني يتطلب دراسة أكثر عمقاً

وتفصيلاً، خاصة عندما نواعي التأثير المتبادل بين الجريان في المغلف والجريان داخل الدواليب الدائر ، بالإضافة الزوجة السائل . ولا تزال جهود الباحثين مستمرة في حقل بناء آلات الجريان لتصميم مغلف الآلات وكافة عناصر توجيه التيار وقيادته بحيث يكون مردود الآلة ككل أعظماً [14] [96] [97] .

٤.٨ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.٨ : اكتب الصيغ المختلفة لمعادلة برنولي للجريانات المستقرة وبين متى تطبق الصيغة المختزلة لهذه المعادلة .

س ٢.٨ : نشي ورقي كرتون في المنتصف تقريباً باتجاهين متعاكسين ثم نساكنها بأطراف أصابع اليدين على مسافة قريبة من بعضها وننفخ بينها فنلتصق الورقتان . علّل السبب .

س ٣.٨ : إذا كان ضغط المقياس في هواء الزفير يبلغ 200 mm WC والكثافة $\rho = 0.125 \frac{kg}{m^3}$ ، فما هي سرعة خروجه من الفم ؟

س ٤.٨ : يعرف عدد التكيف Cavitation Nr. بالعلاقة $Nr = \frac{p - p_v}{\frac{\rho}{2} v^2}$. كيف يمكن من مخطط توزيع الضغط اللابعدى تحديد مناطق بدء التكيف ؟

س ٥.٨ : برهن أنه في الجريان الذي تتناسب سرعته عكساً مع نصف القطر المكافئ تبقى ثابتة برنولي واحدة على كافة خطوط التيار .

س ٦.٨ : التيار الحجمي الفعلي المتدفق من فتحة خزان جانبية صغيرة تبلغ أحياناً 10% من قيمة التيار الحجمي النظري . علّل السبب .

س ٧.٨ : كيف تفسر رغبة قماش العلم المعلق على الصاوية في مهب الريح ؟

س ٨.٨ : اشرح مبدأ عمل المضخات التافورية .

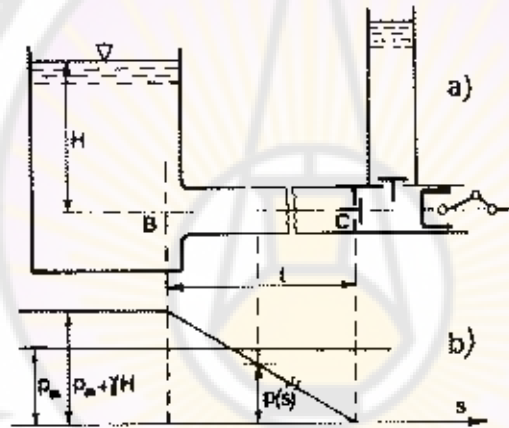
س ٩.٨ : برهن أنه عند أية قيمة محددة للتيار الحجمي لا يتعلق فرق ارتفاع سوية سائل المقياس في غرعي المانومتر بشكل ١ بوضعية أنبوبية فنتوري الموصول بها .

س ١٠.٨ : اشرح مبدأ قياس الضغط الستاتيكي والكملي والتحريكي .

ت ١٠٨ : بواسطة مضخة مكبسية يراد سحب السائل الموجود في خزان عبر أنبوب تغريغ أفقي طوله l وقطره ثابت لنضجه عبر أنبوب فرعي (الشكل ت ١٠٨) ، فإذا كانت سرعة مكبس المضخة معطاة بالعلاقة : $V(t) = u \sin \omega t$ عندما $0 \leq \omega t \leq \pi$ ، $V(t) = 0$ عندما $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$ ، حيث $u = r\omega$ السرعة المحيطية لعمود المرفق . أحسب تغير الضغط على طول الأنبوب وحدد السرعة المحيطية الأعظمية التي يصبح عندها الضغط يساوي الصفر ؟

الحل : بتطبيق معادلة برنولي للتغيرات غير المستقرة (8.18) على نقطتين من خط التيار C B نجد :

$$p_H = p_a + \gamma H = p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho \int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} ds \quad (a)$$



الشكل ت ١٠٨

باعتبار أن مقطع الأنبوب لا يتغير فتكون السرعة V وللتسارع المكافئ $\frac{\partial V}{\partial t}$ في لحظة زمنية معينة قيم ثابتة على طول الأنبوب ، وعليه ينتج :

$$\int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{\partial}{\partial t} (u \sin \omega t) \int_0^s ds = u \omega \cos \omega t \cdot s$$

ونحصل بذلك من (a) على توزيع الضغط :

$$p = p_B - \frac{\rho}{2} u^2 \sin^2 \omega t - \frac{\rho}{2} u^2 \cos \omega t + \frac{2s}{r} \quad (b)$$

من هذه العلاقة ينتج عدد لحظة زمنية معينة $t = \text{const}$ أن الضغط يتناقص خطياً باتجاه المضاخة على طول الأنبوب s ، الشكل (ت ١٠.٨) . ويبلغ قيمته الأصغرية عندما $\omega t = 0$ ، وبالتالي $\cos \omega t = 1$ و $\sin \omega t = 0$ حيث يصبح من أجل $s = l$:

$$p = p_{\min} = p_B - \frac{\rho}{2} u^2 \frac{l}{r} \quad (c)$$

وعندما يصبح مساوياً للصفر (طبعاً لا يمكن أن يصل لهذه القيمة الحدية حيث يبدأ التكيف عندما $p_{\min} = p_v$!) تكون السرعة المحيطية بلغت قيمة أعظمية :

$$u = u_{\max} = r \omega_{\max} = \sqrt{\frac{p_B}{\rho l r}} = \sqrt{\frac{p_B + \frac{\rho}{2} g H}{\rho l r}} \quad (d)$$

الموافقة لسرعة زاوية أعظمية لفرق :

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{p_B + \frac{\rho}{2} g H}{\rho l r}} \quad (e)$$

يلزم طبعاً عدم تجاوزها .

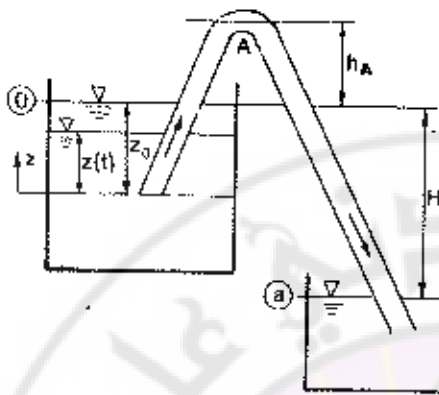
ت ٢.٨ : برهن أن الاستطاعة بالنسبة لواحدة الحجم التي تبذلها الحيوانات ذات الأشكال المتشابهة (الاممك مثلاً !) أثناء حركتها في سائل مثالي تتناسب مع الجذر التربيعي لطول مقاسها الخطي (قانون هلمهولتز لتشابه النماذج) .

الحل : من معادلة برنولي للارتفاعات (R.10) ينتج بالنسبة للحركات المتشابهة أن الأبعاد الطولية تتناسب مع x والسرعات مع $x^{1/2}$ والضغط مع x . وعليه تتناسب القوى مع $p x^3$ أي مع x^2 ، والاستطاعات كجهداء القوة في السرعة مع $x^{3/2}$. إذن فالاستطاعة المبذولة بالنسبة لواحدة الحجم تتناسب مع $\sqrt{x}$.

ت ٣.٨ : يتم تفريغ الماء الموجود في خزان اسطواني مقطعه A_0 الى قناة أخفض منه بواسطة أنبوب معكوف (مبدأ السيفون) مقطعه ثابت A غمس إحدى نهايتيه في الخزان والأخرى في القناة ، الشكل (ت ٣.٨) . عند بدء عملية التفريغ كان انخفاض السطح السائب للماء في القناة عن في الخزان H ، وبداية أنبوب السيفون مغمورة حتى عمق z_0 . فإذا فرضنا أن منسوب الماء في القناة لا يتغير أحسب الزمن اللازم حتى تنقطع عملية التفريغ .

معطى : $z_0 = 1 \text{ m}$ ، $H = 3 \text{ m}$ ، $A_0/A = 30$.

الحل : إن مبدأ عمل السيفون أو مبدأ الرفع يعتمد على رفع السائل إلى مستوى أعلى



من سطحه الحر ومن ثم يجري إلى مستوى أخفض ، وذلك بواسطة أنبوب يلزم أن يكون الضغط السائد في قسمه الأول على الأقل أصغر من الضغط الجوي ، ويتم ذلك إما بتخلية أنبوية السيفون من الهواء بواسطة مضخة فاقورية تركيب في أعلى نقطة منه A أو بتعبئته مسبقاً بالسائل . لذلك يلزم أن لا يتجاوز ارتفاع أعلى نقطة منه A عن السطح السائب للسائل في خزان السحب قيمة ارتفاع السحب الأعظمي . وهذا يعني في حالة الماء ومع إهمال كثافة

الفراغ أن $h_A \leq 10 \text{ m}$.

برمز الشكل (٢٠.٨) فإن سرعة انخفاض منسوب الماء في الخزانات هي

$V_0 = -dz/dt$ ، وتبلغ قيمة التيار الحجمي المسحوب من الخزان والذي يصب في القناة :

$$dQ_0 = V_0 A_0 = -A_0 \frac{dz}{dt} \quad (a)$$

وتبلغ سرعة التفريغ في أنبوية السيفون في لحظة t بعد بدء عملية التفريغ بموجب قانون توزيحي (8.32) :

$$V_1 = V_2 = \sqrt{2g(H - (z_0 - z))} \quad .$$

وعليه تكون قيمة التيار الحجمي الذي يصب في القناة :

$$dQ_a = V_a A = A \sqrt{2g(H - z_0 + z)} \quad (b)$$

من تساوي العلاقتين (a) و (b) بموجب معادلة الاستمرار ينتج :

$$-A_0 \frac{dz}{dt} = A \sqrt{2g(H - z_0 + z)} \Rightarrow dt = -\frac{A_0}{A \sqrt{2g}} (H - z_0 + z)^{-\frac{1}{2}} dz$$

وبمكاملة الطرفين الأيسر بين t_0 و t ، والأيمن بين z_0 و z وبعد استبدال القيم العددية ينتج الزمن اللازم حتى ينتهي التفريغ :

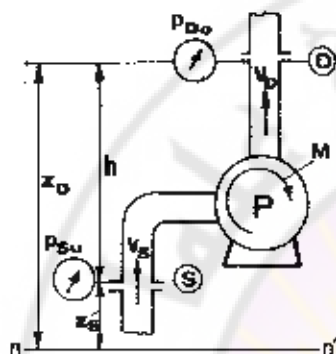
$$t_{\text{н}} \approx -\frac{2 A_0}{A \sqrt{2g}} \left[(\bar{H} - z_0 + z)^{\frac{1}{2}} \right]_{z_0}^0 = \frac{2 A_0}{A \sqrt{2g}} (\sqrt{\bar{H}} - \sqrt{\bar{H} - z_0}) = 4,2 [s].$$

هذه النتيجة لا تتحقق طبعاً إذا راعينا الفواقد في أنبوبة السيرون .

ت ٤.٨ : كما يجب أن يكون ضاغط المضخة النابذة المبينة في الشكل (ت ٣.٨)

ومردودها إذا أعطت القياسات الجبراة على

منصة الاختيار المتأخر التالية :



$$+ d_p = \text{cm} \quad \text{e} \quad d_s = 10 \text{ cm}$$

$$p_{\text{H}_2} = 1,8 \text{ ат} \quad \text{и} \quad p_{\text{SO}_2} = \dots 0,2 \text{ ат}$$

$Q = 50 \text{ m}^3/\text{h}$: عزم دوران المحرك

$n = 1450 \text{ rpm}$ $M = 2.8 \text{ kpm}$

$\lambda = 1, 2 \text{ m} \quad \gamma = 10^3 \text{ kg/m}^3$

الحل : إن القدرة الميكانيكية

التي تملأها المضيئة عن المحرك لتتقبل

إلى السائل بواسطة الدوالب الدائر . ويعرف ضاغط المضخة $H[mLC]$ بالارتفاع المكافئ لتزايد قدرة الجريان بالنسبة لواحدة الكتلة التي يكتسبها التيار الحجمي بين مدخل المضخة (S) ومخرجها (T) . وعليه فإن معادلة برنولي تأخذ بالنسبة للمقطعين (S) و (D) ، إذا اختارنا $\alpha - \alpha'$ مستويين للقياس ، الشكل التالي :

$$\frac{\rho}{2} V_S^2 + p_S + \rho g z_S + \rho g H = \frac{\rho}{2} V_D^2 + p_D + \rho g z_D$$

ومنها ينتج ضاغط المضخة :

$$\Pi = \frac{V_D^2 - V_S^2}{2g} + \frac{p_D - p_S}{\gamma} + h, \quad (a)$$

حيث $h = z_N - z_S$ ، وينتج من معادلة الاستمرار :

$$Q = A_S V_S = A_D V_D \Rightarrow V_S = \frac{4Q}{\pi d_S^2}, \quad V_D = \frac{4Q}{\pi d_D^2} \quad (b)$$

لذا عوضنا (b) في (a) ولاحظنا أن :

$$i \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{p_D - p_S}{p_D + p_S} = (p_{D0} + p_{D1}) - (p_{D1} + p_{Su}) \approx p_{D0} - p_{Su}$$

$$H = \frac{8}{\pi} \left(\frac{Q}{\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{d_p^4} - \frac{1}{d_s^4} \right] + \frac{p_{200} - p_{su}}{\gamma} + h \quad (c)$$

إن مردود المضخة يمثل نسبة الاستطاعة المنتجة P_E على الاستطاعة البذولة P_A ، وبالتالي يكون :

$$\eta = \frac{P_E}{P_A} = \frac{\gamma Q H}{M \omega} = \frac{30 \cdot \gamma Q H}{M \pi n} \quad (d)$$

باستخدام القيم العددية ينتج من (c) :

$$H = \frac{8}{9,81} \left(\frac{50}{9600 \cdot 3,14} \right)^2 \left[\frac{1}{0,08^4} - \frac{1}{0,10^4} \right] + \frac{(1,8 + 0,2) \cdot 10^4}{10^3} + 1,2 = 21,43 \text{ m}$$

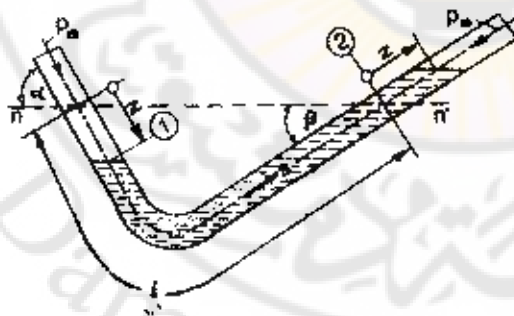
ومن (d) :

$$\eta = \frac{30 \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 21,43}{9600 \cdot 2,8 \cdot 3,14 \cdot 1150} = 0,702 \approx 70,2 \%$$

ت ٥.٨ : أنبوب معكوف كما في الشكل (ت ٤.٨) ثابت المقطع ومفتوح في الأعلى وفي سائل عديم الاحتكاك كثافته ثابتة . في وضعية السكون يكون السطح الحر لخليط السائل الذي طول محوره ١ في ساقى الأنبوب منطبقاً على المستوى الأفقي $n-n'$. بواسطة مؤثر خارجي يرتفع السائل في الساق اليمنى باتجاه محور الأنبوب بمقدار z ، وينخفض في الساق

اليسرى بنفس المقدار . وبعد زوال المؤثر الخارجي يبدأ السائل بالاهتزاز . احسب الزمن الذي تستغرقه دورة اهتزاز كاملة .

الحل : بما أن المقطع الأنبوب ثابت فإن السرعة في لحظة زمنية معينة لا تتغير في خليط السائل ١ في الأنبوب الذي يبقى طوله ثابتاً أيضاً .



الشكل ت ٤.٨

نطبق معادلة برنولي (8.18) على التفتين ③ و ② من خط التيسار المركزي
الموافق اللحظة t . فإذا اعتبرنا المستوي الأفقي المار من ① مستويًا للقياس ولا حظنا أن:

$$\int_0^l \frac{\partial V}{\partial t} ds = \ddot{z} l \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \ddot{z} \quad \text{وبالتالي} \quad V_1 = V_2 = V = \dot{z} \quad ; \quad p_1 = p_2 = p_a$$

العلاقة :

$$\ddot{z} + \frac{g}{l} (\sin \alpha + \sin \beta) z = 0$$

التي تطابق المعادلة التفاضلية المحركة الاهتزازية التوافقية . وبمحلها ينتج حسب (8.12) :

$$z = C \cos (\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} (\sin \alpha + \sin \beta)}$$

حيث C ثابت ، ω التردد الدائري . وتكون مدة الذبذبة :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g (\sin \alpha + \sin \beta)}}$$

عندما تكون $\beta = \alpha = \pi/2$ يصبح الأنبوب بشكل U وينتج بالتالي : $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$.
وهذا هو الزمن الذي تستغرقه ذبذبة كاملة لنواس رياضي طوله $l/2$. وقد سبق بالإشارة لذلك
اسحق نيوتن عام 1872 .

٥.٨ قانون الدفع الخطي وقانون الدفع الدوراني

لقد تبين فيما سبق أعلاه أنه بمساعدة معادلة أويلر الحركية (١٠.٨) ومعادلة
برنولي (٢٠.٨) نستطيع تحديد القوى أو القدرة الميكانيكية في كل نقطة من
خط تيار تابع لجملة جريان محددة . ولكن بالنسبة للعديد من مسائل الجريان
التكنيكية فإن السؤال المطروح يتركز عادة على معرفة محصلة القوى التي تؤثر
بها حدود معينة لجملة الجريان على السائل ، أو رد فعل هذه المحصلة كقوة يؤثر بها
السائل على هذه الحدود ، وبخاصة الجدران الصلبة . مثل هذه المسائل تعترضنا

في بناء آلات الجريان من عنفات ومضخات وضواغط ، وعند تصميم شبكات الأنابيب وغيرها . وواضح أن الإجابة على هذا السؤال تكون أسهل بكثير إذا تجنبنا الدخول في تفاصيل الجريان لمعرفة توزيع القوى بين حدود جلة الجريان المعبرة واكتفينا فقط بمعرفة القيم الهيدروديناميكية عند تلك الحدود فقط .

إن قوة الرفع على جناح حامل كمحصة لقوى الضغط على الجناح يمكن حسابها بشكل تقريبي على الأقل ، كما سنرى فيما بعد ، دون أن نضطر لتحديد توزيع الضغط على محيط الجناح (الشكل ١٨٠٨) والقيام بعملية حساب معقدة نسبياً . ويتم ذلك بمساعدة قانون الدفع الخطي Linear momentum . كما أن الاستطاعة التي يقدمها الدوالات الدائرية لفئة فونسييس يمكن حسابها بسهولة بمساعدة قانون الدفع الدوراني أو قانون عزم الدفع Moment of momentum . هذان القانونان معروفان جيداً في الميكانيك التطبيقي بهذه التسمية أو باسم قانون مركز الثقل وقانون السطوح لجلة نقاط مادية صلبة . ومن المفيد التذكير بها تسميلاً لاستخراجها وصياغتها بالنسبة لجلة جريان .

نعتبر جلة مادية صلبة كتلتها الإجمالية m مؤلفة من عدد محدد من الكتل الجزئية m_i . لنكن V سرعة مركز ثقل m ، V_i سرعة مركز ثقل m_i فيكون حسب القانون الأساسي للحركة :

$$F = \sum F_i = m \cdot b = m \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (mV) = \frac{d}{dt} \sum (m_i V_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum F_i \cdot dt = d \sum (m_i V_i) , \quad (8.88)$$

حيث $\sum F_i$ يمثل المحصلة الشعاعية للقوى الخارجية فقط المؤثرة على الكتلة m ، لأن محصلة القوى الداخلية الناتجة عن تأثير الكتل m_i تفني بعضها . يطلق على الجداء :

$$B_i = m_i V_i : [B] \text{ kg m s}^{-1} = \text{Ns} \quad (8.89)$$

اسم كمية الحركة Quantity of motion ، وعلى الجداء :

$$I_i = F_i \cdot dt : [F1] = Ns \quad (8.90)$$

اسم الدفع الخطي Impulse . وينتج من العلاقة الشعاعية (8.88) أن التغير الزمني لكمية الحركة للكتلة m التي تبقى أثناء حركتها مؤلفة من نفس الكتلة الجزئية m_i يساوي الى المحصلة الشعاعية لكافة القوى الخارجية المؤثرة عليها . وهذا هو مضمون قانون مركز الثقل لجملة نقاط مادية صلبة .

من جهة أخرى نفرض r_i شعاع نصف القطر المكاني لمركز ثقل m_i بالنسبة لمحور دوران ما . فيكون الجداء الشعاعي :

$$D_i = (m_i V_i) \times r_i = B_i \times r_i ; [D] = Nsm \quad (8.91)$$

معبراً عن العزم الستاتيكي لكمية الحركة ، ويطلق عليه عزم كمية الحركة . بينما يعرف الجداء الشعاعي :

$$I_{D_i} = (F_i dt) \times r_i \quad (8.92)$$

باسم الدفع الدوراني . وتنتج بمساعدة (8.88) العلاقة :

$$M = \sum M_i = \frac{d}{dt} \sum [(m_i V_i) \times r_i] \quad (8.93)$$

التي نعتبر عن قانون السطوح لجملة نقاط مادية صلبة ، وتنص على أن التغير الزمني لعزم كمية الحركة للكتلة m المؤلفة من نفس الكتلة الجزئية m_i يساوي الى المجموع الشعاعي للعزوم الستاتيكية الناتجة عن القوى الخارجية المؤثرة على m بالنسبة لمحور دوران ما .

١.٥.٨ اشتقاق قانون الرفع الهبطي وقانون الرفع المرداني

لجريان منفر

إن تطبيق العلاقتين (8.88) و (8.93) على جملة جريانات بصطدم بصعوبة أساسية وهي أن الكتلة المادية السائلية يجب النظر اليها كوسط مستمر ولا يمكن اعتبارها مؤلفة من نقاط مادية متميزة ، كما هو الحال في جملة النقاط الصلبة . وعليه يلزم اعتبار الكتلة السائلية m مؤلفة من جزيئات كتلية تفاضلية dm ، وبالتالي يتحول المجموع $\sum$ الى تكامل $\int$ ، يجب حسابه بالنسبة لسطح سائلي A_n يحيط بالكتلة السائلية المعنية . وعليه ينتج من العلاقتين المذكورتين :

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{(A_n)} \mathbf{V} \cdot dm = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{I} = d\mathbf{B} \quad (8.94)$$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \int_{(A_n)} [(\mathbf{V} \cdot dm) \times \mathbf{r}] = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (8.95)$$

لإيجاد صيغة عملية للعلاقة (8.94) سهلة التطبيق نسبياً نضع $dm = \rho \cdot dV$ ، حيث dV حجم الجزيء السائلي ، فينتج :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \dot{\mathbf{I}} &= \frac{d}{dt} \int_{(A_n)} (\rho \cdot \mathbf{V}) \cdot dV = \int_{(A_n)} \frac{d}{dt} [(\rho \cdot \mathbf{V}) \cdot dV] = \\ &= \int_{(A_n)} \frac{d(\rho \cdot \mathbf{V})}{dt} \cdot dV + \int_{(A_n)} [\rho \cdot \mathbf{V} \cdot \frac{d(dV)}{dt}] \quad (8.96) \end{aligned}$$

حيث $\dot{\mathbf{I}}$ يمثل تيار الدفع أو غزارة تدفق كمية الحركة في واحدة الزمن . وبما أن السطح السائلي A_n محصر كما هو مفروض نفس الجزيئات السائلية ،

وبالتالي فهو يتحرك مع السائل ، فإن التفاضل الوارد في التكامل الاول من المعادلة الاخيرة للعلاقة (8.96) يمثل اشتقاقاً بالنسبة لزمان محدد ، وبالتالي يمكن كتابته بشكل مشتق جزئي . وعليه ينتج التعبير :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_{(A_n)} \frac{\partial (\rho V)}{\partial t} dV \quad , \quad (8.97)$$

الذي يمثل كما هو واضح التغير الزمني لكمية الحركة الآتية المحصورة ضمن السطح السائلي في لحظة زمنية معينة . إن حل هذا التكامل في الحالة العامة لجريان غير مستقر شبه مستحيل لصعوبة تحويله لتكامل سطحي . ولكن قيمته تنعدم عندما يكون الجريان مستقراً وبالتالي السرعة V لا تتعلق بالزمن . وعليه إذا اقتصرنا على الجريانات المستقرة فإن العلاقة (8.96) تصبح من الشكل .

$$F = \int_{(A_n)} \left[\rho V \cdot \frac{d(dV)}{dt} \right] \quad . \quad (8.98)$$

لحل التكامل الحجمي في هذه العلاقة نفرض أن كتلة السائل المعتبرة من الجريان حول جسم ما كانت في اللحظة t محصورة ضمن السطح A_1 ، الذي نفرضه للسهولة بشكل مستطيل ، الشكل (a-34.8) . في اللحظة $t + dt$ تصبح هذه الكتلة محصورة ضمن السطح A_2 الذي ينتج كما هو واضح بإزاحة A_1 بمقدار $ds = V dt$. فإذا اعتبرنا I_1 و I_2 قيمتي تكامل كمية الحركة بالنسبة للسطحين A_1 و A_2 فإن تغير الدفع خلال الفترة dt يصبح :

$$dI = I_2 - I_1 \quad .$$

ولكن حسب الشكل (a-34.8) فإن :

$$A_2 = A_1 - A_{in} + A_{out} \quad ,$$

حيث A_{out} , A_{in} السطحان المباشران عند المدخل والمخرج للسطح A_1 . وعليه

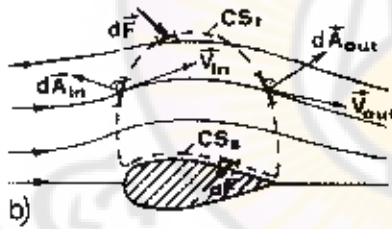
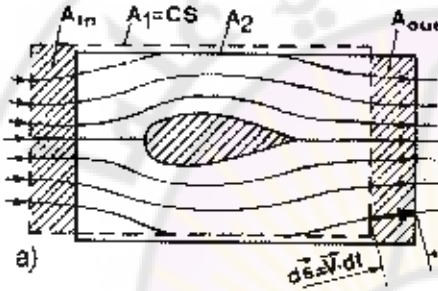
يكون أيضاً :

$$I_2 = I_1 - I_{in} + I_{out} .$$

وبالتالي ينتج :

$$dI = + I_{out} - I_{in} .$$

ولكن I_{in} - تمثل كمية الحركة التابعة للسطح A_{in} ، وتساوي أيضاً كمية



الشكل ٣٤.٨ : استخراج قانون الدفع الخطي
بتحويل التكامل الحجمي لتكامل سطحي
بالنسبة لسطح تحكم ثابت (a) ؛ حيث يعتبر الجداء
 $V \cdot dA$ عند الدخول لسطح التحكم سالباً ،
وعند الخروج منه موجباً (b) .

الكتلة المعتبرة وبالتالي نعتبر دفعها سالباً $(-I_{in})$ ، بينما الكتلة الخارجة من
سطح التحكم فهي تابعة للكتلة المعتبرة وبالتالي يكون دفعها موجباً $(+ I_{out})$.

الحركة التي دخلت السطح A_1 ؛
بينما تمثل I_{out} + كمية الحركة التابعة
للسطح A_{out} وتساوي الى كمية
الحركة التي خرجت من A_1 خلال
الزمن dt ، ويكون بالتالي dI
مساوياً لكمية نيار الدفع ، أي
الفرق في كمية الحركة الداخلة
والخارجة للسطح A_1 ، خلال الزمن
 dt . وعليه فان التكامل الحجمي
بالنسبة لسطح سائلي متحرك ،
الوارد في العلاقة (8.98) يمكن
تحويله الى تكامل سطحي بالنسبة
لسطح ثابت يطلق عليه **سطح التحكم**
 $A_1 \equiv CS$ Control surface
إذاً راعينا أن كتلة السائل الداخلة
لسطح التحكم هي كتلة غريبة عن

هذه النتيجة يمكن صياغتها رياضياً بسهولة . فإذا اخترنا من سطح التحكم المبين في الشكل (٨-٣٤) عنصراً سطحياً dA واعتبرنا الشعاع السطحي dA موجياً عندما يشير الى خارج سطح التحكم عند المدخل (الدليل in) والمخرج (الدليل out) فيمكن بالاستناد للعلاقة (6.23) كتابة مشتق العنصر الحجمي النسبة الزمن المساوي للتيار الحجمي الذي يعتبر عنصراً سطحياً dA من سطح التحكم بالشكل :

$$\frac{d(dV)}{dt} = V_n \cdot dA \cdot \frac{dt}{dt} = V_n \cdot dA = V \cdot dA_n = V \cdot dA = dQ \quad (8.99)$$

إذا الجداء العددي يكون سالماً عند الدخول لسطح التحكم لأن مركبة V لنظامية تنبع عكس dA ، بينما يكون عند الخروج من سطح التحكم موجياً لأن V_n من اتجاه dA . وعليه تصبح العلاقة (8.98) من الشكل :

$$F = \frac{dI}{dt} = I = + \int_{(cs_{out})} V \cdot V \cdot dA - \int_{(cs_{in})} V \cdot V \cdot dA \quad (8.100)$$

كما سبق نستنتج كقاعدة عامة من السهل جداً تذكرها وتطبيقها :

شعاع تيار الدفع I ، كقوة F تؤثر على كتلة السائل المعتبرة ، يشير دائماً الى خارج سطح التحكم ؛ بينما يشير شعاع رد فعل كمية الحركة ، كقوة مضادة F_{RB} يؤثر بها السائل على حدود (cs) ، دائماً الى داخل سطح التحكم ، وبالتالي فالتجاهه يطابق اتجاه السرعة عند الدخول لسطح التحكم وبعاكسه عند الخروج منه .

لنستعرض الآن بالتفصيل القوى الخارجية المؤثرة على الكتلة السائلة المحدودة بـ سطح التحكم التي تشكل محصلتها الشعاعية F الطرف الايسر من العلاقة (8.100) . هذه القوى تكون في الحالة العامة مؤلفة من قوى حرجية F_H ناتجة

عن حقل قوى كموفي ، كحقل الجاذبية الارضية مثلاً ، ومن قوى سطحية .
 وحيث ان قانون الدفع الخطي ينطبق ، بعكس معادلة برنولي ، على الجريانات
 الحقيقية أيضاً لأن تفاصيل الجريان داخل سطح التحكم لا تدخل في اشتقاقه ، فإن
 القوى السطحية يمكن ان تكون مؤلفة من قوى ضغط ظاهمية وقوى احتكاك
 مماسية . بالإضافة لذلك فإنه في أغلب الحالات العملية يكون سطح التحكم مؤلفاً
 من « جزء حر » CS_f يمر من حدود جملة الجريان المفتوحة ، ومن « جزء صلب »
 CS_s منطبق على الجدران الصلبة للأجسام الموجودة داخل الجريان ، الشكل
 (٨ - ٣٤ - ب) . فإذا كانت dF القوة السطحية بالنسبة لوحد السطح ، التي
 نعرضها مركبة من ضغط p وإجهاد قص τ ، وكان dA عنصراً سطحياً من سطح
 التحكم ، فإن المحصلة الاجمالية للقوى السطحية يمكن تحليلها الى مركبتين : الاولى
 تؤثر على الجزء الحر من سطح التحكم :

$$F_f = \int_{(CS_f)} dF \cdot dA = F_{pf} + F_{\tau f} \quad (8.101)$$

والثانية تؤثر على الجزء الصلب من سطح التحكم :

$$F_s = \int_{(CS_s)} dF \cdot dA = F_{ps} + F_{\tau s} \quad (8.102)$$

F_f تعتبر موجبة إذا أثرت من خارج إلى داخل سطح التحكم ، أي على كتلة السائل ،
 وسالبة بالعكس . وتعتبر F_s موجبة إذا نظرنا إليها كقوة يؤثر بها الجدار الصلب
 على السائل ، وسالبة إذا نظرنا إليها كقوة يؤثر بها السائل على الجدار . لذلك
 نسمي $F_s -$ قوة رد فعل السائل على الجدار .

على أساس ما تقدم يأخذ قانون الدفع الخطي للجريانات المستقرة غير القابلة
 للانضغاط الصيغة الشعاعية التالية :

$$\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_{IR} = 0 ; \mathbf{F}_{IR} = \rho \int_{(-cs_{out})}^{(+cs_{in})} \mathbf{V} dQ , \quad (8.103)$$

وينص على ما يلي :

محصلة كافة القوى الخارجية المؤثرة على كتلة سائلة من جريان مستقر محدودة بسطح تحكم ثابت بما فيها ردود أفعال كمية الحركة تساوي الصفر ، شريطة أن نعتبر كمية الحركة الداخلة لسطح التحكم سالبة والخارجة منه موجبة ، ونعتبر للقوى الخارجية التي تؤثر على السائل موجبة ، والتي يؤثر بها السائل على سطح التحكم سالبة .

إن العلاقة (8.103) يمكن تحليلها كمعادلة شعاعية إلى مركبات ونطبقها كمعادلة جبرية في أي اتجاه مرغوب . فإذا طبقناها في اتجاه المحاور z, y, x ينتج :

$$F_{V_{x,y,z}} + F_{I_{x,y,z}} + F_{S_{x,y,z}} + F_{IR_{x,y,z}} = 0 ; F_{IR_{x,y,z}} = \rho \int_{(-cs_{out})}^{(+cs_{in})} V_{x,y,z} dQ . \quad (8.104)$$

إن حل تكامل تيار الدفع سهل جداً في حالة الجريانات وحيدة البعد المستقرة عندما يحسب بالنسبة لقطعة من أنبوبة تيار السرعة عند مدخلها ① ومخرجها ② موزعة بانتظام على المقطع ، والتيار الحجمي الذي يعبرها Q . فيكون عندئذ :

$$\dot{I} = \rho \int_{(CS)} \mathbf{V} dQ = \rho Q (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) , \quad (8.105)$$

أي أن تيار الدفع يساوي الى الفرق بين كمية الحركة الخارجة من والداخلية الى أنبوبة تيار ذات حدود معينة . وحيث أن Q يبقى ثابتاً على طول أنبوبة التيار

فينتج أن تيار الدفع الذي يتلقاه الجريان المستقر في أنبوبة تيار محدودة بسطح تحكم يبقى موضعياً ثابتاً ، وهذا ما يعرف باسم قانون انحفاظ تيار الدفع :

$$\dot{I} = \text{const} ; d\dot{I} = 0$$

إن قانون الدفع الخطي (8.103) ينطبق على الجريانات المستقرة و شبه المستقرة زمنياً ، أي التي تكون فيها السرعة موضعياً تتذبذب حول سرعة وسطية زمنياً (انظر ص ١٨٤) . عندئذ تنعدم القيم الوسطية داخل سطح التحكم ، ونحصل من قانون الدفع الخطي كنتيجة على قيمة وسطية زمنياً تتعلق فقط بالقيم على حدود سطح التحكم . أما في حالة الجريانات غير المستقرة فإنه يجب إضافة الحد (8.97) الى العلاقة (8.103) ونحصل بالتالي على قانون الدفع الخطي العام بالصيغة التالية :

$$\mathbf{F} = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) dV - \int_{(in)} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_n dA + \int_{(out)} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_n dA \quad (8.106)$$

عند تطبيق قانون الدفع الخطي على جريان مستقر غير منتظم ، أي ذي سرعة متغيرة على كامل مقطع أنبوبة التيار ، كما في حالة السوائل الحقيقية (الشكل ٣.٦) يستخدم مفهوم السرعة الوسطية لتيار الدفع $\bar{V}_t$ وتعرف ، كما في حالة السرعة الوسطية لتيار الحجمي $\bar{V}$ (ص ٢٠٠) ، بالعلاقة :

$$\dot{I} = \dot{m} \bar{V}_t = \rho Q \bar{V}_t = \int_{(in)} V dm = \rho \int_{(A)} V^2 dA \Rightarrow \bar{V}_t = \frac{1}{\bar{V}_A} \int_{(A)} V^2 dA \quad (8.107)$$

حيث V السرعة الموضعية الموزعة بانتظام على العنصر السطحي $\bar{V} = Q = \bar{V}_A \cdot dA$ التيار الحجمي حسب (6.12) . فإذا أردنا حساب تيار الدفع بمساعدة السرعة $\bar{V}$ فيلزم إدخال ما يسمى معامل عدم انتظام تيار الدفع أو معامل تصحيح تيار الدفع C_t الذي يعرف في حالة $\rho = \text{const}$ بالعلاقة :

$$\dot{I} = \rho Q \bar{V}_I = C_I \cdot \rho Q \bar{V} \Rightarrow C_I = \frac{\bar{V}_I}{\bar{V}} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \left(\frac{V}{\bar{V}} \right)^3 dA. \quad (8.108)$$

ويكون C_I دائماً أكبر من الواحد وبالتالي $\bar{V}_I > \bar{V}$. وهذا يعني أنه في حالة جريان غير منتظم يعطي حساب القوى بمساعدة قانون الدفع على أساس السرعة الوسطية $\bar{V}$ قيمة أقل من الواقع .

بنفس الخطوات السابقة يمكن استخراج قانون الدفع الدوراني للجريانات المستقرة وشبه المستقرة الذي يأخذ الصيغة التالية :

المجموع الهندسي لكافة العزوم الستاتيكية للقوى الخارجية بما فيها عزوم ردود أفعال كمية الحركة المؤثرة على كتلة سائلية من جريان مستقر محدودة بسطح تحكم ثابت وبالنسبة لمحور دوران ما تم اختياره يساوي الصفر ، شريطة أن نعتبر رد فعل كمية الحركة موجباً أي باتجاه السرعة عند الدخول لسطح التحكم ، وسالباً أي بعكس اتجاه السرعة عند الخروج منه ، وأن نأخذ كافة القوى الخارجية موجبة إذا أثرت على السائل وسالبة إذا أثرت بها السائل على سطح التحكم :

$$M_V + M_f + M_s + M_{IH} = 0; \quad M_{IH} = \rho \int_{(+cs_{in})}^{(-cs_{out})} [V dQ \times r] \quad (8.109)$$

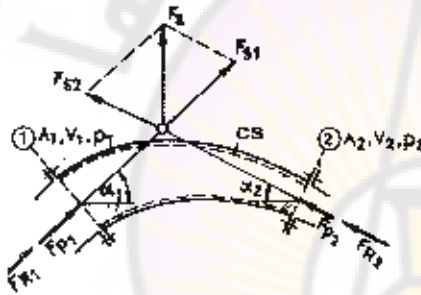
هذا القانون له أهمية خاصة بالنسبة لحساب الاستطاعة التي يقدمها الدوالب الدائرية لآلة جريان للسائل (مضخة !) أو التي يستخلصها من السائل (عنفة) .

٢.٥.٨ تطبيقات على قانون الدفع الخطي والدوراني

ستوضح فيما يلي ومن خلال بعض المسائل التطبيقية أهمية قانون الدفع الخطي والدوراني كقانونين أساسيين لميكانيك السوائل . ويلزم دائماً عند تطبيقها اختيار سطح تحكم مناسب كخطوة أولى . ولا غنى عادة عن الاستعانة بمعادلة برنولي ومعادلة الاستمرار عند تحديد القوى الهيدروديناميكية على حدود سطح التحكم وخاصة عند المدخل والمخرج .

١.٢.٥.٨ حساب قوة الضغط المؤثرة على جدار كوع

نعتبر الجريان المستقر داخل وصلة الانابيب المبينة في الشكل (٣٥.٨)



الشكل ٣٥.٨ : حساب قوة الضغط المؤثرة على جدار كوع .

التي تمثل حكوماً بتضييق مقطعها تدريجياً من A_1 عند المدخل (1) ، حيث السرعة الموزعة بانتظام على المقطع V_1 والضغط p_1 ، إلى A_2 عند المخرج (2) ، حيث السرعة V_2 والضغط p_2 . من أجل تحديد متانة براغي وصل الشفومات (الفلنجات) للكوع والانبوب قلزم

معرفة القوة التي يؤثر بها السائل على جدار الكوع .

نفرض أن الجريان عديم الفواقد وغير قابل للانضغاط وبحور الكوع واقع في مستو أفقي . نختار سطحاً للتحكم CS كما هو مبين في الشكل ونطبق قانون الدفع الخطي (8.103) على كتلة السائل المحدودة بهذا السطح :

$$F_1 + F_2 + F_g + F_R = 0 \quad (8.110)$$

حيث وضعنا ببساطة $F_m \equiv F_R$. لأن القوة الحجمية الكونية تنحصر هنا

بقوة التفاعل التي تؤثر أيضاً في حالة السكون، وليس لها مركبة في اتجاه الجريان، وبالتالي تكون $F_v = 0$. والقوى السطحية المؤثرة على الجزء الحر من سطح

التحكم تنحصر بقوة الضغط $F_{p1} = F_{p1} = \vec{p}_1 \vec{A}_1$ التي تؤثر عمودياً على المقطع ①

واتجاهها موجب لأنها تشير إلى الداخل ، وبقوة الضغط $F_{p2} = F_{p2} = \vec{p}_2 \vec{A}_2$ التي تؤثر ناظماً على المقطع ② واتجاهها موجب أيضاً، أي إلى داخل CS . أما محصلة

القوى السطحية F_s المؤثرة على الجزء الصلب من سطح التحكم فمساوي من حيث

القيمة القوة $-F_s$ التي يؤثر بها السائل على جدار الكوع ، أي قوة رد فعل

السائل . وأخيراً بحسب رد فعل كمية الحركة ، باعتبار أن السرعة موزعة

بانتظام على مقطع الدخول والخروج لسطح التحكم ، بموجب (8.105) فنجد :

$$F_R = \rho \int_{(CS)} V dQ = \rho Q (V_1 - V_2) ; F_{R1} = \rho Q V_1 ; F_{R2} = \rho Q (-V_2) ,$$

حيث يشير كل من F_{R1} و F_{R2} إلى داخل سطح التحكم ، أي باتجاهي F_{p1} و F_{p2} على التوالي .

بادخال النتائج السابقة في (8.110) نحصل على القوة الإجمالية المؤثرة على

جدار الكوع :

$$F_s = F_f + F_R = (F_{p1} + F_{R1}) + (F_{p2} + F_{R2}) =$$

$$= [\vec{p}_1 \vec{A}_1 + \rho Q V_1] + [\vec{p}_2 \vec{A}_2 + \rho Q (-V_2)] = F_{s1} + F_{s2} , \quad (8.111)$$

أي أن قوة رد الفعل F_s على جدار الكوع تنتج كمجموع هندسي لقوتين F_{s1}

و F_{s2} تؤثران ناظماً على المقطعين ① و ② ، الشكل (٨.٣٥) .

لحساب القيمة المطلقة لقوة رد الفعل $F_s = |F_s|$ تكفي معرفة قيمة السرعة

والضغط على أحد المقطعين ② أو ① حيث يمكن بمساعدة معادلة الاستمرارية،

ومعادلة برنولي تحديد القيم الأخرى في (8.111) . ونحسب F_s بعد ذلك إما بيانياً أو جبرياً بمساعدة قانون التجيب للثلاث . كما

يمكن بسهولة الحصول على القوة F_s من تطبيق قانون الدفع (8.104) باتجاه

المحورين x و y حيث نحصل على مركبتين قوة رد الفعل F_{sx} , F_{sy} ويكون :

$$F_s = \sqrt{F_{sx}^2 + F_{sy}^2}$$

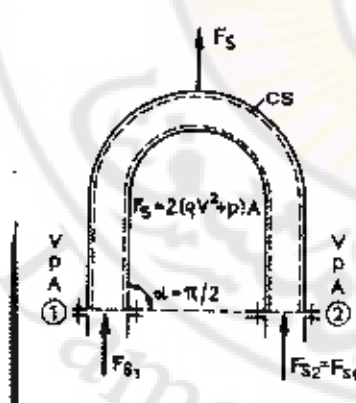
في الحالة الخاصة التي تكون فيها الوصلة الانبوبية مخرية بشكل دائري وذات قطر ثابت d وبالتسالي : $A_1 = A_2 = A$ ، فتكون حسب معادلة الاستمرار
 $V_1 = V_2 = V$ ، وينتج من معادلة برنولي

فإذا فرضنا α الزاوية التي يصنعها وتر قوس محور الأنبوب مع الناطم على مقطعي النهايتين ① و ② فنتج برمز الشكل (٣٦.٨) وبنفس الخطوات السابقة قوة رد الفعل على جدار الكوع :

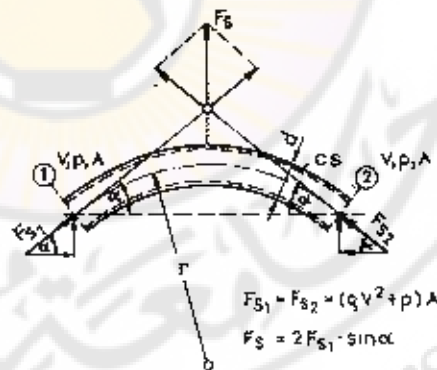
$$F_s = 2A (\rho V^2 + p) \sin \alpha \quad (8.112)$$

وعندما $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي الكوع بشكل نصف دائري ، الشكل (٣٧.٨) ، فيكون $\sin \alpha = 1$ وتصبح :

$$F_s = 2A (\rho V^2 + p) \quad (8.113)$$



الشكل ٣٧.٨ : حساب قوة رد الفعل المؤثرة على كوع نصف دائري.



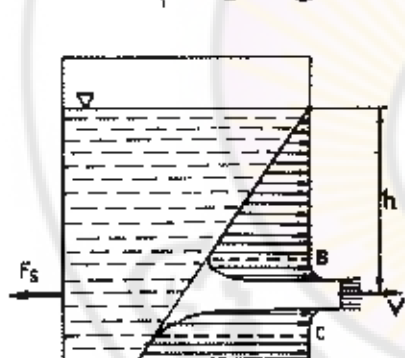
الشكل ٣٦.٨ : حساب قوة رد الفعل المؤثرة على قطعة من أنبوب دائري الانحناء .

في حالة السوائل الحقيقية لا يمكن طبعاً استخدام العلاقات السابقة. ولكن يمكن تطبيق قانون الدفع الخطي شريطة أن نأخذ قوة الاحتكاك F_f بعين الاعتبار وتكون قيم الضغط والسرعة الفعلية في المقطعين (1) و (2) معلومة .

٢.٢.٥.٨ حساب قوة رد فعل النافورة، ومعامل التصيق لفخز بوردا

لدينا إناء فيه سائل كثافته ρ ومجهز بفتحة تقريغ جانبية مقطوعها A صغير جداً بالمقارنة مع مقطع الإناء ، ومحورها الأفقي ينخفض عن سوية السائل الحر مقدار h ، الشكل (٣٨.٨) . تحت الشروط السابقة يمكن اعتبار الجريان عبر الفتحة مستقراً ، خاصة خلال فترات زمنية قصيرة نسبياً . وتكون سرعة التفريغ المثالية حسب قانون توريدشلي (8.32) : $V_{th} = \sqrt{2gh}$.

نحيط كتلة السائل الآتية بما فيها فتحة التفريغ بسطح تحكم ونطبق عليها



الشكل ٣٨.٨ : حساب رد فعل نافورة خارجة من فتحة إناء جانبية .

قانون الدفع (8.103) . إن القوة الحجمية المساوية لوزن السائل متوافئة مع قوة رد فعل الجدار الذي يتركز عليه الإناء . وحيث أن التفريغ يتم في الفضاء الخارجي والفتحة كما افترضنا صغيرة فإن قوى الضغط الجوي المؤثرة على الجدران القائمة للإناء بما فيها الجزء الحر من سطح التحكم المار بفتحة التفريغ تتوازن مع بعضها . وعليه

يكون $F_p = F_f = 0$. وينتج بالتالي مع اعتبار F_s — القوة الأفقية التي يؤثر بها السائل على جدران الإناء وملاحظة أن كمية الحركة الداخلة لسطح التحكم معدومة:

$$F_s = F_R = \rho Q V = \rho A V^2 = 2 \cdot \rho g h \cdot A \quad (8.114)$$

في الحالة التي يتم فيها تفريغ خزان يحتوي سائلاً بضغط ثابت p_1 إلى حجرة يسود فيها الضغط $p_2 > p_1$ عبر فتحة صغيرة (الشكل ١٠٠٨) فإن سرعة التفريغ تنتج من (8.39) :

$$V_u = V = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

وتنتج بنفس الخطوات السابقة قوة رد فعل تيار النافورة أو قوة الدفع المؤثرة على جدران الخزان بالصيغة :

$$F_s = \rho A_{u1} V^2 = 2(p_1 - p_2) A_{u1} = 2\Delta p A_{u1} \quad (8.115)$$

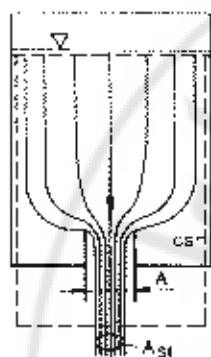
حيث $A_{u1} = \rho_{u1} A$ مقطع تيار النافورة ، ρ_u معامل التضيق . فإذا وضعنا $\Delta p = \rho g h_p$ يتضح أن (8.115) تعمم النتيجة المتضمنة في (8.114) .

نصور الآن أن فتحة التفريغ مسدودة ، فيكون توزيع الضغط الزائد في الإناء بموجب المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية خطياً ، الشكل (٣٨٠٨) . وتكون قوة الضغط المؤثرة على سدادة فتحة التفريغ هي : $F_p = \rho g h_p A$ (في حالة الخزان : $\Delta p A_{u1} = \rho g h_p \cdot A_{u1}$) . وهذا يعني بموجب (8.114) (أو (8.115)) أن قوة دفع النافورة المؤثرة على إناء تساوي ضعف قوة الضغط الهيدروستاتيكي الزائد المؤثر على مقطع فتحة التفريغ . هذه النتيجة تقضي بأن يكون توزيع الضغط على جدار الإناء الذي يحتوي فتحة التفريغ في حالة الجريان مختلفاً عنه في حالة السكون . وهذا ينجم من ناحية بسبب تعادل الضغط داخل فتحة التفريغ وبالتالي انعدام الضغط الزائد فيها ، ومن ناحية أخرى بسبب انحراف خطوط التيار باتجاه الفتحة مما يؤدي لتناقص في الضغط قبل الدخول للفتحة ، أي اعتباراً من النقطتين B و C تقريباً في الشكل (٣٨٠٨) .

من السهل جداً إظهار تأثير قوة رد فعل النافورة . فإذا تصورنا الإناء

المبين في الشكل (٣٨.٨) مركباً على دواليب مثلاً فإنه يبدأ في الحركة بعكس اتجاه سرعة التفريغ . كما يمكن الاستفادة عملياً من عزم قوة رد الفعل هذه ، كما سنرى فيما بعد .

في الحالة الخاصة المبينة في الشكل (٣٩.٨) التي تكون فيها فتحة تفريغ



الشكل ٣٩.٨ :
حساب معامل الضغط
لفتحة بوردا .

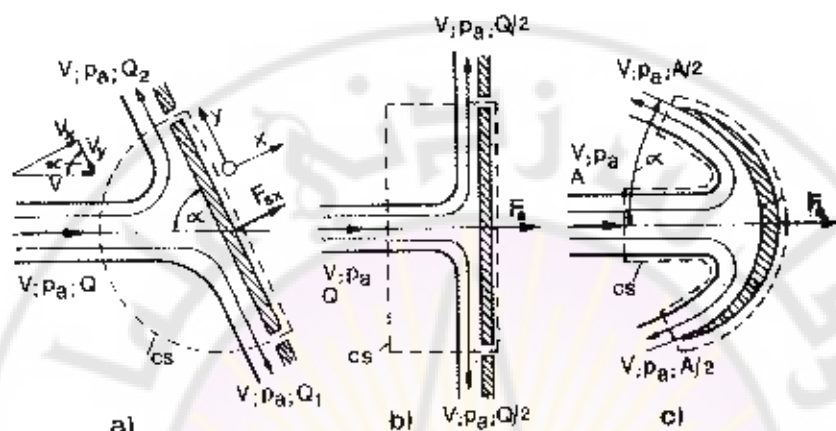
الحزان متصلة بأنبوبة صغيرة المقطع بارزة بشكل كافٍ داخل الحزان ، مشكلة ما يعرف باسم فتحة بوردا ، فبالامكان بمساعدة قانون الدفع الخطي حساب معامل الضغط لهذه الفتحة ، إذا طبق على سطح تحكم CS محيط بالسائل الموجود في الحزان وبتيار النافورة . فبأنه يؤثر على كافة أجزاء سطح التحكم التي يكون لقوى الضغط المؤثرة عليها مركبات في اتجاه سرعة التفريغ فوق ضغط ثابت $\Delta p = p_1 \sim p_2$ فتكون محصلة قوى الضغط الزائدة المؤثرة على مقطع أنبوبة التفريغ A مساوية قوة رد الفعل لتيار دفع النافورة . وبالتالي تنتج العلاقة :

$$\Delta p \cdot A = 2 \Delta p \cdot A_{st} \Rightarrow \mu_p = A_{st}/A = 0,5 \quad (8.116)$$

٣.٢.٥.٨ قوة ضغط نافورة مارة على جدار ثابت ومحرك

من فوهة نفثة أفقية تتدفق نافورة حرة بسرعة V وغزارة Q وتصطدم بصفحة مستوية تميل على محور النافورة زاوية α فتنحرف كافة جزيئات السائل عن اتجاهها الأصلي وتحرك بحاذة الجدار ابتداء من نقطة الركود المتشكلة في مركز تلاقي خط التيار المركزي للنافورة مع الصفحة ، الشكل (٤٠.٨) ، فإذا كانت مقاييس الصفحة كبيرة نسبياً وكان مقطع تيار النافورة A عمودياً على مستوي الشكل عريضاً جداً فيكون الجريان مستوياً ومستقراً .

ونهتمنا من جهة معرفة النسبة Q_1/Q_2 التي يتوزع بها التيار الحجمي للنافورة على طرفي الصفيحة ، ومن جهة أخرى القوة الناعظمية المؤثرة على الصفيحة .



الشكل 8.10 : حساب قوة ضغط نافورة مستوية على سطح ثابت بشكل : (a) صفيحة مستوية مائلة ، (b) صفيحة مستوية قلعة ، (c) صفيحة أو ريشة منحنية .

نختار محوري إحداثيات بحيث يكون المحور x عمودياً على الصفيحة و y موازياً لها ، ونحلل السرعة V باتجاهها إلى مركبتين : $V_x = V \sin \alpha$ و $V_y = -V \cos \alpha$. كما نختار سطحاً للتحكم cs يمر جزؤه الأمامي عبر منطقة من تيار النافورة لم تتأثر بعد من وجود الصفيحة ، ويخترق جزؤه الخلفي عبر شق وهمي وعلى مسافة بعيدة نسبياً من نقطة الركود الصفيحة ويلتف حولها .
نطبق قانون الدفع الخطي (8.104) في اتجاه المحور y فينتج :

$$F_{py} + F_{fy} + F_{sy} + F_{Hy} = 0 \quad (8.117)$$

إن القوى الحجمية الناتجة عن قوة الثقالة تكون معدومة ، $F_{py} = 0$ ، إذا كانت

الصفحة واقعة في مستوي شافولي . كذلك فإن محصلة القوى المؤثرة على الجزء الحر من سطح التحكم تكون معدومة ، $F_{T_y} = 0$ ، لأن الضغط داخل تيار النافورة الحرة وداخل التيار الموازي للصفحة يساوي إلى الضغط الجوي p_a . وإذا فرضنا أن السائل عديم الاحتكاك فإن السرعة المماسية للصفحة تساوي إلى سرعة النافورة v . بموجب معادلة برنولي وتكون محصلة القوى المماسية للصفحة معدومة ، $F_{S_y} = 0$. وعليه يجب حسب (8.117) أن ينعدم رد فعل كمية الحركة باتجاه y . وينتج باستخدام رموز الشكل (8.104) وملاحظة أن كمية السائل الداخلة لسطح التحكم هي Q والخارجة منه هي Q_1 باتجاه $-y$ و Q_2 باتجاه $+y$:

$$F_{R_y} = \rho \int_{(CS)} V_y dQ = + \rho Q (-v \cos \alpha) - \rho Q_1 (-v) - \rho Q_2 (+v) = 0 ,$$

وبعد الاصلاح نجد العلاقة :

$$Q_1 = Q_2 = Q \cos \alpha .$$

ومن معادلة الاستمرار نحصل على علاقة أخرى :

$$Q_1 + Q_2 = Q .$$

وينتج من هاتين العلاقتين :

$$Q_1 = \frac{Q}{2} (1 + \cos \alpha) ; Q_2 = \frac{Q}{2} (1 - \cos \alpha) \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} . (8.118)$$

نطبق الآن قانون الدفع في اتجاه المحور x . وبما أنه في هذا الاتجاه أيضاً تكون القوى $F_{T_x} = F_{T_y} = 0$ للأسباب الواردة أعلاه ، فينتج من (8.104) باعتبار $F_{S_x} = F_{S_y} = 0$ القوة التي يؤثر بها السائل على الصفحة وملاحظة أن كمية الحركة الخارجة من سطح التحكم معدومة :

$$F_{R_x} = F_{R_y} = \rho \int_{(CS)} V_x dQ = \rho Q v \sin \alpha = \rho A v^2 \sin \alpha . (8.119)$$

في الحالة الخاصة التي تكون فيها الصفيحة عمودية على محور النافورة ، الشكل (٤٠.٨ - b) ، وبالتالي $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، ينتج من العلاقتين الأخيرتين :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2} \quad ; \quad F_S = \rho A V^2 \quad (8.120)$$

وتنطبق هذه النتيجة أيضاً عندما يكون مقطع تيار النافورة دائرياً .
في الحالة العامة التي تكون فيها الصفيحة مائلة ، أو عندما نستبدل الصفيحة بريشة تحرف تيار النافورة زاوية α ، الشكل (٤٠.٨ - c) ، فإن قوة الضغط الأفقية التي تؤثر بها النافورة على الريشة تنتج تحت نفس الشروط وب نفس الخطوات السابقة :

$$F_S = \rho A V^2 (1 + \cos \alpha) \quad . \quad (8.121)$$

وتصبح هذه القوة في حال $\alpha = 0$ ، وبالتالي عندما يتم حرف تيار النافورة إلى اتجاهه الأولي :

$$F_S = 2 \rho A V^2 \quad . \quad (8.122)$$

إن القوة F_S المؤثرة على جدار ثابت لا تستطيع طبعاً القيام بأي عمل ، بل تتوازن مع قوى رد الفعل لنقاط تثبيت الجدار . أما إذا كان الجدار (أو الصفيحة) يتحرك نفسه بسرعة $V > U$ مبتعداً عن تيار النافورة فإن القوة المؤثرة على الجدار تستطيع أن تقدم استطاعة P . ولكن عند حساب هذه القوة لا يمكن استخدام العلاقات السابقة ، لأن الجريان في هذه الحالة غير مستقر في جملة إحداثيات مطلقة . أما في جملة إحداثيات نسبية تتحرك مع الجدار بنفس السرعة فيكون الجريان مستقراً ويمكن بالتالي استخدام العلاقات السابقة إذا استبدلنا السرعة V بالسرعة النسبية $W = V - U$. وعليه تصبح العلاقة (8.121) في حالة ريشة مفردة متحركة :

$$F_s = \rho A (V - U)^2 (1 + \cos \alpha) \quad (8.123)$$

وتكون استطاعة الريشة :

$$P = F_s U = \rho A U (V - U)^2 (1 + \cos \alpha) \quad (8.124)$$

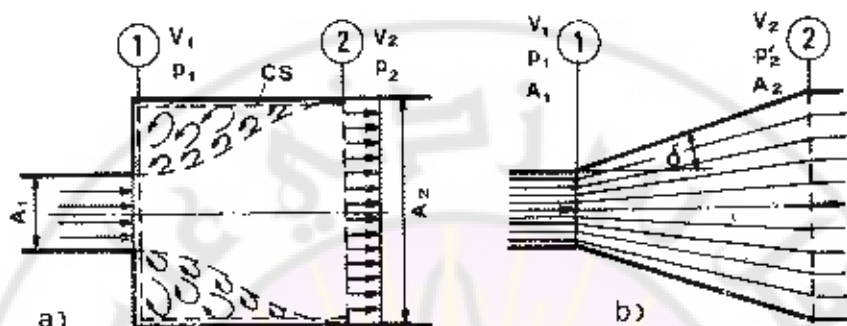
والجدير بالملاحظة أنه إذا كان $Q = A V$ التيار الحجمي للنافورة فيكون التيار الحجمي الذي يصطدم بالريشة فعلاً هو $Q' = A (V - U)$ ، أما إذا وجد عدد كبير من الريش المركبة على محيط دولاب دائر ، كما في عنفلة بلتون ، فإنه يمكن نظرياً تحويل كامل القدرة الحركية لتيار النافورة إلى قدرة ميكانيكية وليس جزءاً منها فقط ، كما في حالة الريشة المفردة .

٨ ٤٠٢.٥ حساب الفقر المصري تقييماً تغير مفاجئ للمقطع

في أنبوب أسطواناني أفقي مقطعه A_1 يجري سائل ثابت الحجم بسرعة منتظمة V_1 وضغط p_1 . فجأة يتوسع مقطع الأنبوب ويصبح A_2 ، فيدخل إليه السائل بشكل نافورة . ولكن عند منطقة التوسع المفاجئ للمقطع ① وبسبب وجود الحوافي الحادة تتشكل سطوح فاصلة لا تلبث أن تتفكك إلى أعاصير ، يؤدي لتكون منطقة ركود على طرفي النافورة وإلى عملية تآزج بينها وبين السائل الموجود في الأنبوب المتوسع تؤدي لانتظام الجريان على بعد كافٍ من المقطع ① فيصبح ذا سرعة منتظمة وثابتة تقريباً V_2 وضغط p_2 ، الشكل (٤١.٨ - أ) . لحساب الضغط p_2 بدلالة p_1 ودون التعرض لعملية المزج المعقدة بين المقطعين ① و ② نستعين بقانون الدفع الخطي ونطبقه على سطح التحكم cs المبين في الشكل . على كامل المقطع ① لسطح التحكم الذي مساحته A_1 يسود الضغط p_1 سواء في تيار النافورة الخارجة من الأنبوب الضيق أو في منطقة الركود على طرفيها . فإذا أهملنا قوى الاحتكاك ولاحظنا أن مركبة قوة الثقالة في اتجاه الجريان معدومة ، فإن القوى الخارجية تنحصر

بقوفي الضغط $p_1 A_2$ و $p_2 A_2$. وننتج من (8.103) مع استخدام (8.105)

$$(p_2 - p_1) A_2 = \rho Q (V_1 - V_2) \quad \text{العلاقة :}$$



الشكل ٨١٠٨ : مقارنة الجريان في أنبوب يتوسع مقطعه فجائياً (a) وفي نائشة يتوسع مقطعه تدريجياً (b) لحساب الفقد الصدمي .

ومنها نجد بالاستعانة بمعادلة الاستمرار ، $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ ، الضغط p_2 أو فرق الضغط Δp :

$$p_2 = p_1 + \rho V_2 (V_1 - V_2) \Rightarrow \Delta p = \rho V_2 (V_1 - V_2) ; \quad (8.125)$$

أو بصيغة أخرى تبين تأثير نسبة المقاطع A_1/A_2 :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 2 \frac{\rho}{2} V_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right) - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] . \quad (8.126)$$

لحساب الخسارة في الضغط الناتجة من تشكل الاعاصير نقارن فرق الضغط Δp مع فرق الضغط الناتج في حالة الجريان في نائشة يتوسع مقطعه تدريجياً من A_1 إلى A_2 ، الشكل (٨١٠٨ - b) ، فإذا كانت زاوية الانفراس (التباعد) δ صغيرة ($10^\circ < \delta$) فإن الجريان يمكن اعتباره عديم الفواقد ، وينتج من تطبيق معادلة برنولي على نقطتين من ① و ② واستخدام رموز الشكل :

$$\Delta p' = p'_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V_2^2) = \frac{\rho}{2} (V_1 + V_2) (V_1 - V_2), \quad (8.127)$$

أو بدلالة نسبة المقاطع وباستخدام معادلة الاستمرار :

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} V_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \quad (8.128)$$

من العلاقتين (8.125) و (8.127) تنتج الحسارة في الضغط نتيجة التوسع المفاجئ للمقطع :

$$\Delta p_v = \Delta p' - \Delta p = \frac{\rho}{2} (V_1 - V_2)^2 \quad (8.129)$$

التي يطلق عليها اسم «الفقد الصدمي» ، ربما للتطابق بين العلاقة الأخيرة والعلاقة المعبرة عن الحسارة في القدرة الحركية عند التصادم غير المرن لجسمين صليين ، علماً أنه لا يوجد أي شبه بين العمليتين سوى المزج بين السرعات .

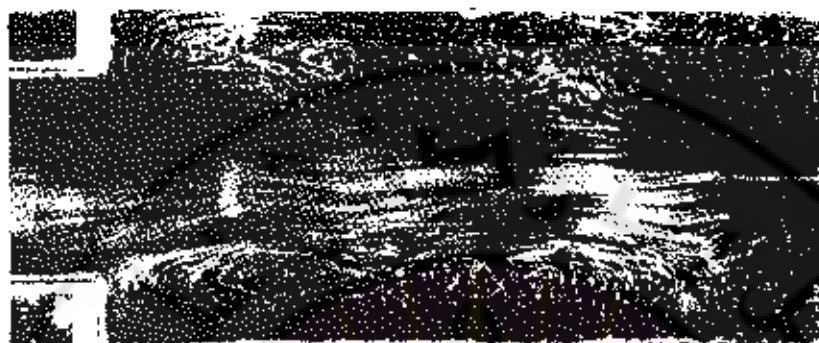
من العلاقتين (8.126) و (8.128) يمكن تحديد المردود τ_{diff} لعملية تحويل القدرة الحركية لقدرة كامنة ، حيث يكون :

$$\tau_{diff} = \frac{\Delta p}{\Delta p'} = \frac{2 \left[\frac{A_1}{A_2} - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2} \quad (8.130)$$

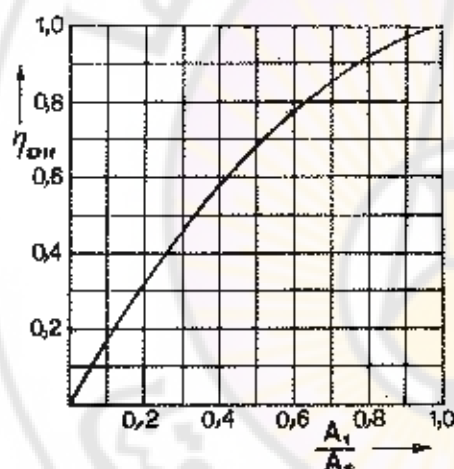
الشكل (٤٢.٨) يبين صورة الجريان في أنبوب يتوسع مقطعه فجائياً ، والشكل (٤٣.٨) يبين تغير τ_{diff} مع A_1/A_2 حسب (8.130) . ونلاحظ أن المردود يزداد كلما اقتربت نسبة المقاطع من الواحد .

إذا عكسنا اتجاه الجريان في الشكل (٤٣.٨) فإنه يمكن بنفس الخطوات

السابقة حساب الخسارة في الضغط الناتجة عن التضيق المفاجيء في المقطع بمقارنة فرق الضغط في الأنبوب المتضيق مع فرق الضغط في النفثة . وحيث أن الجريان



الشكل ٤٢.٨ : الجريان في أنبوب يتوسع مقطعه فجائياً [9] .



الشكل ٤٣.٨ : مردود تحول القدرة الحركية لقدرة كامنة في أنبوب يتوسع مقطعه فجائياً من A_1 إلى A_2 .

متسارع في هذه الحالة فإن تشكل الاغاصير يكون أقل ، وبالتالي فإن الخسارة في الضغط من أجل نسبة مقاطع واحدة A_1/A_2 هي دائماً أقل منها في حالة التوسع المفاجيء .

٥.٢.٥.٨ تحديد المقاومة الوصلية لجسم

بينما لا تتعرض الاجسام التي تتحرك في سائل مثالية لانهاية الامتداد لانه

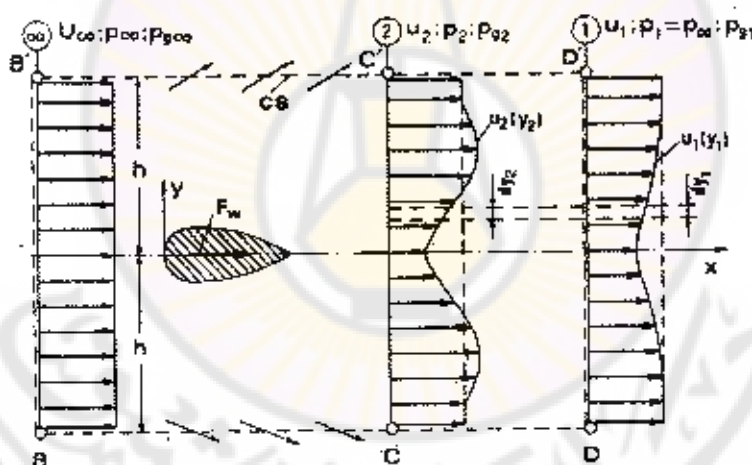
مقاومة ، بسبب انعدام القوى المماسية (تناقضة دالمبير) ، فإنها تتلقى في السوائل الحقيقية مقاومة إجمالية تكون كبيرة أو صغيرة حسب شكل الجسم وطبيعة الجريان . وحسب النظرية الهيدروديناميكية فإن المقاومة الإجمالية (الكلية) تساوي مجموع مقاومة الاحتكاك ، كتكامل للقوى المماسية الناتجة عن إجهادات القص بالنسبة لتكامل السطح الخارجي للجسم ، ومقاومة الضغط ، كتكامل للقوى الناعمة . ويطلق عليها في حالة الأجسام الانسيابية التي تكون أطوارها عرضانياً على اتجاه الجريان أكبر بكثير من مقاييس مقاطعها ، كالأجنحة الحاملة مثلاً ، اسم مقاومة الشكل أو مقاومة البروفيل (المقطع) Profile drag ، وذلك لتأثيرها الشديد بشكل الجسم .

إن الحساب الدقيق لمقاومة الشكل في الحالة العامة يصطدم حتى اليوم بصعوبات كبيرة ، خاصة عندما تحدث ظاهرة انفصام الجريان Separation . فإذا لم تحدث هذه الظاهرة فبالإمكان مساعدة نظرية الطبقة الحدودية في حالات عديدة حساب مقاومة الشكل نظرياً والحصول على قيم مرضية جداً [28][51] [52][53][98] . ولكننا في غالب الأحيان لا نزال مضطرين للجوء الى الطرق التجريبية . وسندرس الآن طريقة هامة تعتمد على قانون الدفع الحطبي لتحديد مقاومة الشكل .

بدلاً من دراسة الجريان المستقر حول جسم يتحرك في سائل ساكن في جهة لإحداثيات مثبتة على الجسم ندرس الجريان حول الجسم الساكن في تيار سرعته غير المشوشة تساوي وتعاكس سرعة الجسم . نفرض أن الجسم اسطواني الشكل ولا نهائي الامتداد في الاتجاه العمودي على الجريان . عندئذ تكفي دراسة الجريان حول مقطع من الجسم في المستوي $x-y$ الشكل (٤٤.٨) .

على مسافة كبيرة قبل الجسم يكون الجريان غير مشوش ، وبالتالي يكون توزيع السرعة والضغط منتظماً . حول الجسم وبحكم لزوجة السائل تتشكل طبقة

عديدة تكون فيها السرعة معدومة على الجدار وتزداد باتجاه الناحية حتى تبلغ قيمة سرعة للجريان المثالي على حدود الطبقة الحدية في جريان المؤخرة ، أو كما يسمى أثر الخمر Wake (الذي يخلفه الجسم المتحرك خلفه) ، تتكون منطقة ركود كبيرة نسبياً تتميز بعدم انتظام توزيع السرعة والضغط واختلاف قيمها عن قيم الجريان غير المشوش . لذلك يكون منحنى توزيع السرعة ذا تجويف يعرف باسم تجويف جريان المؤخرة ، يزداد عرضه وتقل سماكته كلما ابتعدنا عن الحافة الخلفية للجسم الى ان يزول على بعد كاف منها ويصبح عندئذ توزيع السرعة معكافاً توزيعها في الجريان غير المشوش . وتؤكد التجارب أن تعادل الضغط الستاتيكي مع الضغط الستاتيكي غير المشوش يتم قبل تعادل السرعة ، أي على مسافة أقرب من حافة الجسم الخلفية .



الشكل ٤.٤.٨ : تحديد المقاومة الاجمالية لجسم من قياس توزيع السرعة والضغط في أثر الخمر ، حسب دجونس [100] .

إن مقدار تجويف جريان المؤخرة تحدده حالة الطبقة الحدية ، وبخاصة إمكانية انفصالها عن الجسم . ويعبر وجود هذا التجويف عن انخفاض في قدرة الجريان

يظهر بشكل مقاومة إجمالية . وعليه فإنه من قياس توزيع السرعة والضغط في جريان المؤخرة يمكن بمساعدة قانون الدفع الخطي تحديد مقاومة الشكل . هذه الفكرة تتجسد في طريقتين مختلفتان قليلاً من حيث الأسلوب وتكافئان تماماً من حيث النتيجة ، الأولى تعرف باسم طريقة بيتس [99] واشتقاقها معقد قليلاً ، والثانية باسم طريقة دجونس Jones [100] وتتميز بأنها أقل تعقيداً من حيث الاشتقاق والحساب العددي ، ولذلك سنقتصر على دراستها فيما يلي بالنسبة لجريان مستو غير قابل للانضغاط .

نحيط الجسم بسطح للتحكم cs مؤلف من المستويين B-B' (المقطع ⑥) و D-D' (المقطع ⑦) العموديين على اتجاه الجريان ، ومن المستويين D-B و D'-B' الموازيين لاتجاه الجريان ، الشكل (٤٤ ، ٨) . ويتم اختيار هذه المستويات بحيث يمر المستوي الشاقولي B-B' والمستويان الأفقيان D-B و D'-B' عبر منطقة الجريان غير المشوش حيث السرعة u_∞ والضغط الستاتيكي p_∞ والضغط الكلي $p_{t_\infty} = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2$. أما المستوي الشاقولي D-D' فيقع على مسافة كافية من الحافة الخلفية للجسم حيث يكون الضغط الستاتيكي قد بلغ قيمته غير المشوشة ، $p_t = p_\infty$ ، بينما لا يزال توزيع السرعة $u_t(y_t)$ يحتفظ بتجويف ، وبالتالي فإن الضغط الكلي $p_{t_t} = p_{t_\infty} = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_t^2$ لا يساوي الضغط الكلي غير المشوش .

نطبق قانون الدفع الخطي (8.104) في اتجاه المحور x الأفقي فيكون بالنسبة لجسم ارتفاعه $z = b = 1$

$$F_{V_x} + F_{V_x} + F_{S_x} = \rho \int_{cs_{in}}^{cs_{out}} V_x dQ .$$

ولكن القوة الحجمية $F_{V_x} = 0$. كذلك فإن محصلة القوى السطحية المؤثرة

على الجزء الحر من سطح التحكم معدومة ، $F_{fx} = 0$ ، لأن كامل سطح التحكم يخضع لتأثير الضغط الثابت p_∞ . وعليه تبقى المقاومة الاجمالية للجسم F_w القوة الوحيدة المؤثرة على كتلة السائل المحصورة ضمن cs ، والتي تساوي وتعاكس محصلة القوى السطحية F_{sx} المؤثرة على السطح الخارجي للجسم . بذلك تصبح العلاقة الاخيرة :

$$F_w = -F_{sx} = -\rho \int_{(cs)} V_x dQ \quad (8.131)$$

حل تكامل كمية الحركة يجب أن نأخذ بعين الاعتبار أنه بسبب وجود الجسم يكون التيار الحجمي الداخل إلى السطح $B-B'$ أكبر من التيار الحجمي الخارج من السطح $D-D'$. وتقضي معادلة الاستمرار أن يخرج الفرق بينها عبر السطحين الجانبين $D-B$ و $D'-B'$ ، الشكل (٤٤.٨) . فإذا وضعنا كمية السائل الداخلة لسطح التحكم سالبة والخارجة منه موجبة فإن تكامل كمية الحركة أو تيار الدفع ينتج من الجدول التالي :

السطح	التيار الحجمي $Q =$	تيار الدفع $I_x =$
$B - B'$	$-\int_{-h}^{+h} U_\infty dy$	$-\rho \int_{-h}^{+h} U_\infty^2 dy$
$D - D'$	$+\int_{-h}^{+h} u_1 dy$	$+\rho \int_{-h}^{+h} u_1^2 dy$
$B - D +$ $+B' - D'$	$+\int_{-h}^{+h} (U_\infty - u_1) dy$	$+\rho \int_{-h}^{+h} U_\infty (U_\infty - u_1) dy$
$\Sigma = (cs)_i$	$\Sigma = 0$ (معادلة الاستمرار)	$\Sigma = \rho \int_{(cs)} V_x dQ$

يجمع حدود العمود الأيمن من هذا الجدول نجد العلاقة :

$$\rho \int_{(x)} V_x dQ = - \rho \int_{y=-h}^{y=+h} u_1 (U_\infty - u_1) dy .$$

ومنها يتبين أن قيمة التكامل تنعدم عندما $U_\infty = u_1$. لذلك يكفي أن تكون حدود التكامل $\pm h$ فنحصر تجويف توزيع السرعة $u_1(y_1)$ في المقطع ① فقط ، التي يمكن قياسها بمساعدة مشط براندل كمقياس متكرر للضغط التبريدي $\frac{\rho}{2} u_1^2$. وعليه تنتج بموجب (8.131) المقاومة الإجمالية لجسم ارتفاعه b عمودياً على مستوي الرسم :

$$E_w = b \rho \int_{(1)} u_1 (U_\infty - u_1) dy_1 . \quad (8.132)$$

إذا استخدمنا معامل المقاومة :

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 b l} = \frac{F_w}{q_\infty b l} . \quad (8.133)$$

حيث l الطول المميز لمقطع الجسم في اتجاه الجريان (وتر البروفيل في حالة الجناح الحامل !) ، فإن العلاقة (8.132) تأخذ الصيغة اللاحقة التالية :

$$c_w = 2 \int_{(1)} \frac{u_1}{U_\infty} \left(1 - \frac{u_1}{U_\infty} \right) d\left(\frac{y_1}{l}\right) . \quad (8.134)$$

إن الصعوبة الأساسية في تحديد F_w أو c_w حسب الطريقة السابقة تنجم عن الشرط القاسي بوجوب إجراء القياسات في المقطع ① الذي يبعد مسافة كبيرة نسبياً عن الحافة الخلفية حتى يكون $p_x = p_1$. لذلك يفضل أن تم القياسات

في المستوي $C-C$ (المقطع ②) الأقرب إلى حافة الجسم الخلفية ، حيث الضغط
الستاتيكي $p_m \approx p_2$. وهذا يستلزم تصحيح العلاقة (8.132) . وقد أجراه
لأول مرة بيتس وبسطه بعد فترة دجونس ، كما ذكرنا .

نفرض $u_2(y_2)$ توزيع السرعة في المقطع ② . فحسب معادلة الاستمرار
بنسبة بالنسبة لأنبوبة تيار تمر عبر المقطعين ② و ③ (الشكل ٤٤.٨) :
 $u_1 dy_1 = u_2 dy_2$. وبذلك تأخذ العلاقة (8.132) الصيغة التالية :

$$F_w = \rho b \int_{(2)} u_2 (U_\infty - u_1) dy_2 \quad (8.135)$$

نفرض أيضاً حسب دجونس أن الجريان من ② إلى ③ خالي من الفواقذ
(مثالياً) . عندئذ يبقى حسب معادلة بوفولي الضغط الكلي بالنسبة لكل خيط
تيار من ② إلى ③ ثابتاً : $p_{tot1} = p_{tot2} = p_{g2}$. وحيث أن $p_\infty = p_1$:
فيمكن بسهولة استنتاج العلاقات التالية بالنسبة للمقاطع ② ، ③ ، ④ :

$$p_{tot\infty} = p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \Rightarrow U_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{tot\infty} - p_\infty)} ;$$

$$p_{tot1} = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_1^2 \Rightarrow p_{tot2} = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{tot2} - p_\infty)} ; \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{tot2} - p_2)} .$$

بذلك تأخذ (8.135) الصيغة التالية :

$$F_w = 2 b \int_{(2)} \sqrt{p_{tot2} - p_2} \left[\sqrt{p_{tot\infty} - p_\infty} - \sqrt{p_{tot2} - p_\infty} \right] dy_2 . \quad (8.136)$$

المعروفة باسم قانون دجونس. ويكون فيها إجراء التكامل عبر المقطع ② ضمن الحدود التي تحصر تجويف توزع السرعة فقط ، لأنه خارج منطقة التجويف يكون $p_{1012} = p_{101\infty}$ وتتعدى بالتالي قيمة التكامل . ونلاحظ أنه من أجل $p_{\infty} = p_0$ يأخذ قانون دجونس الصيغة الأبسط (8.132) .

إن القيم غير المشوشة للضغط $p_{101\infty}$ ، p_{∞} تعتبر معلومة . لذلك فإن تحديد المقاومة الاجالية حسب (8.136) يستلزم فقط قياس توزع الضغط الكلي والستاتيكي في المقطع ② القريب من مؤخرة الجسم (انظر الشكل ٨.٢٤) . بادخال معامل المقاومة حسب (8.133) وملاحظة أن $p_{101\infty} = p_{\infty} = q_{\infty}$ تأخذ (8.136) الصيغة اللاحقة التالية :

$$c_w = 2 \int_{(2)} \sqrt{\frac{p_{1012} - p_2}{q_{\infty}}} \left[1 - \sqrt{\frac{p_{1012} - p_{\infty}}{q_{\infty}}} \right] d\left(\frac{y_2}{l}\right) \quad (8.137)$$

إن الطريقة المبينة أعلاه استخدمت بنجاح لتحديد مقاومة الشكل من قياسات في حالة الطيران (الجسم متحرك !) ومن قياسات في القناة الهوائية وأعطت نتائج مرضية جداً . وقد أثبتت التجارب أن مستوي القياس ② يكفي أن يكون على بعد $50/8$ من طول وتر البروفيل خلف الجناح الحامل فقط [28] . كما أن الطريقة تصالح من حيث المبدأ للتطبيق على الجريانات المستوية والمتناظرة دورانياً ، القابلة وغير القابلة للانضغاط .

عندما $\rho = \text{const}$ م تأخذ العلاقة (8.135) الصيغة التالية :

$$F_w = \rho \int_{(2)} p_2 u_2 (u_{1\infty} - u_1) dy_2 \quad (8.138)$$

وتعتمد هنا لحساب u_1 ، u_2 من القيم المقاسة في المستوي ② فرضية مماثلة لفرضية دجونس عن ثبات الضغط الكلي في حالة $\rho = \text{const}$ م تشترط أن الانتروبيا Entropy لا تتغير بين ② و ① . وعلى هذا الأساس يمكن بمساعدة قانون تغير الحالة الاديباتي $p_2/p_2^* = p_1/p_1^*$ وبمساعدة معادلة برنولي للجريانات القابلة للانضغاط الحصول على علاقة شبيهة بقانون دجونس (8.137) ولكنها أكثر تعقيداً (انظر [28]) .

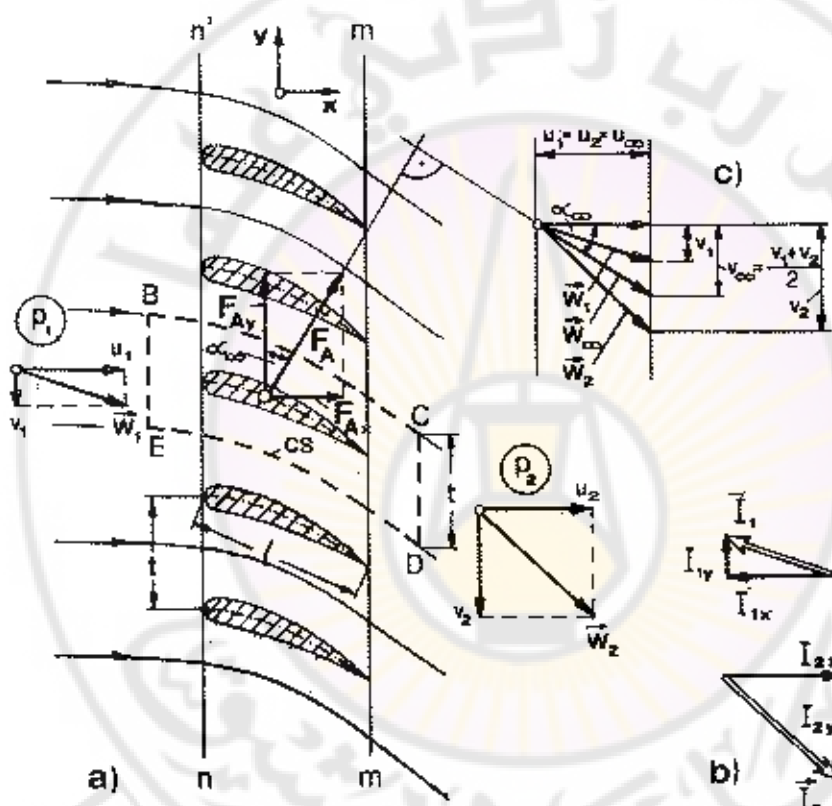
كما تجدر الإشارة أن هذه الطريقة مناسبة جداً لتحديد تأثير الحشوات السطحية على قيمة المقاومة الاجمالية .

٦.٢.٥.٨ حساب قوة الرفع الهيدروديناميكية ، قانون كونا - بوكوفسكي

إن طيران الاجسام الأثقل من الهواء تسببه قوة تؤثر على الاجنحة الحاملة يطلق عليها قوة الرفع الهيدروديناميكية أو الأيروديناميكية F_L Lift . هذه القوة تؤثر أيضاً على ريش دولاب التوجيه والدولاب الدائر لآلات الطيران المحورية والقطرية (عنفات ، مضخات ، ضواغط ، مراوح ، رفاصات وغيرها) ، وبالتالي تلعب دوراً أساسياً في عملية شحن الطيران عبر الآلة بالمقدرة أو استخلاصها منه .

حساب F_L المؤثرة على جناح حامل فردي لانهائي الامتداد تكفي دراسة الجريان حول بروفيل واقع في مستوى عمودي على محور الجناح . ولكن بدلاً من حل هذه المسألة ، ولاعتبارات تتعلق بتطبيقات هندسية عامة سيشار إليها في نهاية هذه الفقرة ، سندرس الجريان عبر سلسلة أجنحة حاملة مستقيمة Aerofoil cascade مؤلفة من عدد لانهائي من الاجنحة الحاملة اللانهائية الامتداد المماثلة لبعضها تماماً من حيث الشكل والمقطع (البروفيل) والمرتبة بشكل دوري ، بحيث تفصل بين كل جناحين متوازيين ومتجاورين مسافة ثابتة ، تسمى خطوة التقسيم . هذه السلسلة تظهر في المستوي $y-x$ بشكل سلسلة بروفيلات تعرف باسم شبك البروفيلات المستقيم Straight profile cascade (اختصاراً الشبك المستقيم) ، الشكل (٦.٥.٨) . كل شبك يتحدد هندسياً بمعرفة نسبة التقسيم t/l ، حيث l طول وتر البروفيل ، وزاوية البروفيل β التي يصنعها وتره مع أحد المستقيمين المتوازيين $n-n'$ أو $m-m'$ المماسين لأنوف البروفيلات وحافاتها الخلفية والمعروفين باسم جبهة الشبك . وواضح ان صورة الجريان

حول كل بروفيل في الشبك واحدة ، وبالتالي فإن خطوط التيار المتناظرة بالنسبة لأي بروفيل تكون متطابقة ، ويكون توزيع السرعة والضغط عليها واحداً . لهذا يمكن دراسة الجريان المستوي عبر شبك البروفيلات هذا بمساعدة نظرية خيط التيار بالرغم من أن شعاع السرعة له مركزتان .



الشكل ٨.٥.٨ : الجريان عبر سلسلة أجنحة حاملة (شبك بروفيلات)
لاستخراج قانون كوتا - يوكوفسكي .

للحصول على جريان مستقر نفرض ان شبك البروفيلات ساكناً بالنسبة لمجموعة الاحداثيات التي نختارها بحيث يكون المحور x عمودياً على جبهة الشبك

والمحور y موازياً لها . لتكن W_1 سرعة الجريان المنتظم المستقر على بعد كافٍ قبل الشبك ، وليكن p_1 الضغط الستاتيكي المقابل . على بعد كافٍ خلف الشبك يكون الجريان أيضاً منتظماً ، ولكن السرعة W_2 تختلف عادة من حيث القيمة والاتجاه عن W_1 ، وبالتالي يكون $p_2 \neq p_1$. وهذا هو فرق أساسي بين الجريان عبر سلسلة أجنحة وحول جناح حامل حيث تكون قيم السرعة والضغط في حالة الجريانات المثالية على مسافة كافية قبل وبعد الجناح الفردي واحدة ومساوية لقيم الجريان غير المشوش .

لحساب قوة الرفع الهيدروديناميكية المؤثرة على أحد بروفيلات الشبك نستعين بقانون الدفع الخطي وبمعادلة الاستمرار ومعادلة برنولي . نحلل القوة F_A إلى مركبتين : F_{Ax} عمودية على جبهة الشبك وتسمى القوة الدافعة Thrust أو المحورية ، F_{Ay} موازية لجبهة الشبك وتسمى القوة المماسية أو المحيطية . كما نحلل كلا من سرعتين W_1 ، W_2 إلى مركبتين باتجاه x : u_1 ، u_2 ، وباتجاه y : v_1 ، v_2 ، الشكل (٤٥.٨) . نحيط البروفيل المعتبر بسطح تحكم cs مؤلف من خطي تيسار متناظرين ومتطابقين BC و ED ، ومن قطعتين مستقيمتين EB و DC موازيتين لجبهة الشبك وواقعتين في منطقة الجريانات المنتظم قبله وخلفه ، طول كل منها t .

بفرض b عرض الشبك عمودياً على المستوى yx فيكون حسب معادلة الاستمرار (8.2) التيار الحجمي الذي يعبر cs :

$$Q = b t u_1 = b t u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = u \quad (8.139)$$

هذا يعني أن الجريان يعبر شبك البروفيلات بسرعة محورية ثابتة . من جهة أخرى ننتج من معادلة برنولي المختزلة بالنسبة لنقطتين من EB و DC العلاقة :

$$p_1 + \frac{\rho}{2} W_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} W_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) = p_2 + \frac{\rho}{2} (u_2^2 + v_2^2) .$$

ومنها ينتج بمراعاة (8.139) فرق الضغط :

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) \quad (8.140)$$

نطبق الآن قانون الدفع الخطي (8.104) في اتجاه x فينتج :

$$\rho \int_{(CS)} u \, dQ = F_{Cx} + F_{Ix} + F_{Sx} \quad (8.141)$$

إن حساب تكامل تيار الدفع ينتج بسهولة إذا لاحظنا أن $u_1 \parallel I_{1x}$ ، $u_2 \parallel I_{2x}$ ، (الشكل ٤٥.٨ - b) ، وأن $u_1 = u_2$ حسب (8.139) ، وعليه نجد :

$$\rho \int_{(CS)} u \, dQ = \rho Q (-u_1 + u_2) = 0 \quad .$$

من جهة أخرى فإن القوة الحجمية $F_{Cx} = 0$ لأن قوة الثقالة تولد قوة رفع ستاتيكية فقط ، وحيث أن قوى الضغط على خطي التيار CB و DE المتطابقين متوازنة فيما بينها فإن محصلة قوى الضغط المؤثرة على الجزء الحر من سطح التحكم تنحصر بالقوة : $F_{Ix} = b t (p_1 - p_2)$. وعليه فإن القوة الدافعة التي يؤثر بها السائل على الجناح باعتبارها تساوي وتعاكس محصلة القوى السطحية المؤثرة على الجزء الصلب من سطح التحكم ، $-F_{Sx} = F_{Ax}$ ، فتنتج من (8.141) بالصيغة :

$$F_{Ax} = b t (p_1 - p_2) \quad .$$

وتصبح باستخدام (8.140) :

$$F_{Ax} = \frac{\rho}{2} b t (v_2^2 - v_1^2) = \rho b t (v_2 - v_1) \cdot \frac{v_2 + v_1}{2} \quad (8.142)$$

نطبق قانون الدفع الخطي (8.104) باتجاه y فينتج :

$$\rho \int_{(CS)} v \, dQ = F_{Cy} + F_{Iy} + F_{Sy} \quad (8.143)$$

فإذا لاحظنا أن $\vec{I}_{1y} \parallel \vec{v}_1$ و $\vec{I}_{2y} \uparrow \uparrow \vec{v}_2$ ، وبسبب (8.139) ، فإن تكامل تيار الدفع يصبح :

$$\rho \int_{(cs)} \vec{v} dQ = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \rho b t u (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) .$$

وحيث أن القوة المحجمة ومحصلة قوى الضغط على خطي التيار المتطابقين في اتجاه y معدومتان ، $F_{vy} = F_{ry} = 0$ ، وبوضع $F_{vy} = F_{ry} = 0$ نجد القوة المحيطية المؤثرة على البروفيل من (8.143) :

$$F_{Ay} = \rho b t u (v_1 - v_2) . \quad (8.144)$$

لإعطاء العلاقتين (8.142) ، (8.144) صياغة عملية ندخل أولاً مفهوم السرعة الانسحابية غير المشوشة W_∞ كتوسط شعاعي للسرعتين W_1 ، W_2 والتي تكافئ السرعة على بعد لا نهائي (نظرياً) قبل وخلف الشبك . وعليه تكون تعريفاً (الشكل ٤٥٠٨ - c) :

$$W_\infty = \frac{W_1 + W_2}{2} \Rightarrow v_\infty = \frac{v_1 + v_2}{2} , \quad u_\infty = \frac{u_1 + u_2}{2} = u , \quad (8.145)$$

حيث v_∞ ، u_∞ مركبتا W_∞ . كما نحسب الجولان حول البروفيل المعتبر . وبما أن قيمة الجولان في حالة الجريان الكمويني لا تتعلق بشكل المنحني المغلق فإننا نحسب Γ كتكامل خطي لشعاع السرعة على طول الخط المحد لسطح التحكم BEDCB ، ونعتبر اتجاه الالتفاف موجباً في اتجاه عقارب الساعة . فإذا لاحظنا أن التجول على خط التيار CB يتم بعكس التجول على ED المطابق للأول فإن التكامل الخطي على طولها يكون معدوماً ونبقى فقط قيمة التكامل الخطي للسرعة على طول BE و DC ، وبالتالي ينتج :

$$\Gamma = \oint W ds = t (v_1 - v_2) , \quad (8.146)$$

وذلك براعاة أن إشارة كل من v_x و v_y سالبة ، أي باتجاه $-y$ في الشكل (٤٥٠٨) ، وبإدخال العلاقتين الأخيرتين في (8.142) و (8.144) نجد :

$$F_{Ax} = -b \rho F' v_{\infty} \quad ; \quad F_{Ay} = b \rho F' u_{\infty} \quad (8.147)$$

وتنتج قوة الدفع الهيدروديناميكية بالصيغة :

$$F_A = b \rho F' W_{\infty} \quad (8.148)$$

وذلك بوضع $W_{\infty} = \sqrt{u_{\infty}^2 + v_{\infty}^2}$ ، $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$ ، ويتحدد اتجاهها بسهولة من مثلث السرعة ومثلث القوى ، حيث ينتج بالعودة للشكل (٤٥٠٨ - a و b) :

$$\frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \tan \alpha_{\infty} = -\frac{v_{\infty}}{u_{\infty}} \quad (8.149)$$

في ضوء ما تقدم يمكن صياغة الجملة الهامة التالية :

يؤثر السائل المثالي الذي يعبر سلسلة من الأجنحة الحاملة على كل جناح بقوة رفع F_A فقط تتناسب طردياً مع كثافة السائل ومع سرعة ورود الجريان غير المشوشة W_{∞} ومع الجولان F' حول البروفيل وتكون منحرفة عن اتجاه W_{∞} مقدار 90° بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة إذا اعتبر الجولان موجباً باتجاه دوران عقارب الساعة .

هذه الجملة تعرف باسم قانون كوتا - يوكوفسكي نسبة للعالمين : كوتا

W. Kutta [101] الذي اكتشفه عام 1902 و يوكوفسكي N. Joukowski

[102] الذي وجده مستقلاً عن الأول عام 1906 .

للاتقال من سلسلة أجنحة حاملة إلى جناح فودي نجعل خطوة التقسيم بين

جناحين متجاورين ، تزداد باستمرار إلى أن تصبح في الحالة الحدية لانهاية . وبما أن الجولان في هذه العملية يبقى ثابتاً (انظر ١.٣.٧) فيجب ، حسب (8.146) ، أن يتناقص الفرق $v_1 - v_2$ باستمرار إلى أن تصبح $v_1 = v_2$ عندما $\infty \rightarrow t$.
 وحيث أن العلاقة $u_1 = u_2$ تبقى محققة فتصبح أيضاً $W_1 = W_2 = W_\infty$. فإذا وضعنا $W_\infty \equiv V_\infty$ ، التي تمثل السرعة غير المشوشة في اللانهاية ، أو السرعة التي يتحرك بها الجناح الحامل في سائل ساكن لانهاية الامتداد ، فإن قانون كوتا - يوكوفسكي لجناح حامل فردي ينتج من (8.148) بالصيغة :

$$F_A = b \rho V_\infty^2 \quad (8.150)$$

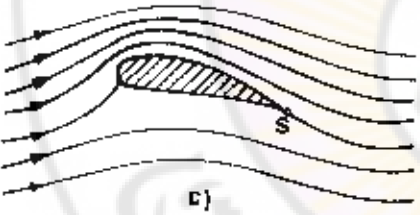
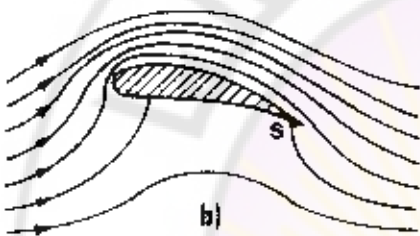
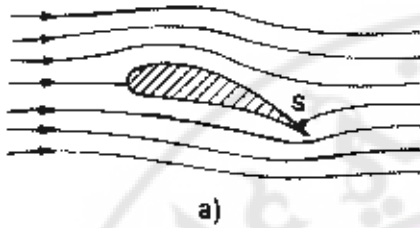
ويكون له نفس المضمون الوارد أعلاه .

بالامكان طبعاً البرهان على قانون كوتا - يوكوفسكي (8.150) بطرق مختلفة . فمثلاً يمكن ، كما فعل يوكوفسكي ، اختيار سطح للتحكم اسطوانة دائرية ذات قطر كبير تحيط بالجناح الحامل الفردي ومحورها منطبق على محوره . فإذا طبقنا قانون الدفع الخطي على كتلة السائل المحصورة داخلها فإنت نصف قيمة F_A تكافئ تيار الدفع ، بينما يساوي النصف الآخر محصلة قوى الضغط .

من قانون كوتا - يوكوفسكي نستخلص نتيجة هامة جداً مفادها ان قوة الرفع لا تتولد إلا في جريان جولاني ، وأن كل قيمة محددة لـ F_A تقابلها قيمة محددة للجولان . وهذه تتعلق بشكل الجسم وبزاوية ورود الجريان Angle of attack وبسرعته غير المشوشة . لذلك فإن تطبيق قانون كوتا - يوكوفسكي يتطلب معرفة قيمة الجولان ، التي لا يمكن في الحالة العامة تحديدها بشكل نظري بحت وإنما تلزم لذلك الاستعانة بال تجربة .

إن معظم أشكال الاجنحة الحاملة المستخدمة عملياً تتصف بأن حافتها الخلفية حادة . لنعبر الجريان المثالي المستوي حول بروفل من جناح لانهاية الامتداد

وغير مفتول بحيث أن زاوية الرود بين اتجاه الجريان ووتر كل بروفييل منه تبقى ثابتة . فإذا كان الجولان معدوماً ، $r=0$ ، فإن صورة الجريان تظهر كما في الشكل (٤٦٠٨ - أ) ، وتكون نقطة الركود الخلفية S ، أي النقطة



الشكل ٤٦٠٨ . جناح حامل في جريان ذي جولان مختلف القيمة . تتحدد قيمة r من شرط صكوة الانسياب الناعم بحيث لا يحدث التنفاس حول الحافة الخلفية من جهة الطرف السفلي في حالة (ب) $r=0$ ، ولأن جهة الطرف العلوي عندما تكون قيمة r كبيرة جداً (ب) ، وإذا بحيث تقع نقطة الركود على الحافة الخلفية تماماً (ج) .

التي تلتقي فيها خطوط التيار من الطرف السفلي والفرقي للبروفيل ، واقعة على الطرف العلوي . وهذا يعني أن الجريان سيلتف من جهة الطرف السفلي حول الحافة الخلفية Trailing edge الحادة مما يسبب نظرياً (في حالة الجريان المثالي) بلوغ السرعة على الحافة الخلفية قيمة لانهاية ينجم عنها ضغط ناقص لانهاية القيمة أيضاً . وعندما يكون الجولان كبيراً جداً فإن صورة الجريان تكون كما في الشكل (٤٦٠٨ - ب) ونقطة الركود الخلفية واقعة على الطرف السفلي . وهذا يؤدي لالتفاف الجريان حول الحافة الخلفية بسرعة لانهاية القيمة وبضغط ناقص لانهاية القيمة أيضاً .

إن الخبرة المدعومة بالتجربة تؤكد أن كلتي الحالتين السابقتين

غير واقعيتين ، إذ أن قيمة الجولان تتحدد بحيث تقع نقطة الركود على الحافة الخلفية تماماً ، الشكل (٤٦.٨ - ٥) ، ولا يحدث بالتالي التفاف حولها ، وإلها ينساب الجريان السليم على طرفها انسياباً . وهذا ما يعرف باسم شرط كوتا للانسياب الناعم الذي تؤكد الصورة الفوتوغرافية في الشكل (٤٧.٨) . وعلى هذا الأساس يمكن بالنسبة لقوة دفع معطاة تحديد قيمة r^* ، وبالتالي تحديد التوزيع الاقصاري خلف الجناح الحامل ، من معرفة شكل الجناح ووضعيته بالنسبة لاتجاه الجريان (زاوية الورود) ، الذي يفرضه كموئياً ، وذلك بمساعدة طرق ميكانيك السوائل مثل طريقة التمثيل المطابق وطريقة النقاط الشاذة ، التي سنعالجها فيما بعد .



الشكل ٤٧.٨ : الجريان السليم حول جناح حامل حسب [١] .

فما يتعلق بشوء الجولان حول الجناح فقد سبق الحديث عنه في سياق مناقشة قانون طومسون (ص ٢٤١) . ولزيادة الايضاح نفرض أن الجناح يتحرك في سائل ساكن . بعد بدء الحركة مباشرة يتكون حول الجناح جريان كموفي لاجولاني ، $r^* = 0$ ، وتكون صورة الجريان كما في الشكل (٤٦.٨ - ٥) ، التي يمكن بمسائل تربية الجريان التأكيد منها فعلاً ، كما تبين الصورة الفوتوغرافية في الشكل (٤٨.٨) . وعليه فإن نقطة الركود الخلفية تكون واقعة على الطرف العلوي للجناح وبالتالي يؤثر على الحافة الخلفية نتيجة التفاف الجريان

من الطرف السفلي ضغط ناقص لانها في ($p = -\infty$) ، وبتزايد حتى يصبح مساوياً للضغط الكلي في نقطة الركود S .



الشكل ٤٨.٨ : الجريان الكوني الايجولاني حول جناح حامل
بعد بدء الحركة مباشرة (حسب [١١]) .

هذه النتيجة تكون فقط ممكنة إذا كان السائل عديم اللزوجة (مثالياً) .
لذلك لا بد أن تأخذ ، على الأقل بعد لحظة بدء الحركة ، لزوجة السائل
بالحسبان ، التي تؤدي لالتصاق جزيئات السائل على جدار الجناح وتشكل طبقة
حدية تزداد فيها السرعة من الصفر على الجدار وحتى قيمة معينة . عندئذ
لا تستطيع جزيئات الطبقة الحدية البطيئة في منطقة الحافة الخلفية ان تجابه تزايد
الضغط فتتفصم عن الجدار وتتحرك بالتالي عكس اتجاه الجريان . وهذا يؤدي
لتشكل سطح فاصل على الحافة الخلفية يتحول بسبب عدم استقراره لإعصار بدء
الحركة ، الذي ينفصل بعد فترة من بدء الحركة عن الجناح ويصبح على بعد كاف
خلفه بحيث لا يؤثر على الجريان في الجوار المباشر للجناح . وحيث أنه حسب
قانون طومسون يجب ان يبقى الجولان الكلي بالنسبة لحط سائلي مغلق يحيط
بالجناح وإعصار بدء الحركة معدوماً (المنحني C في الشكل ١٥.٧) لأنه كان

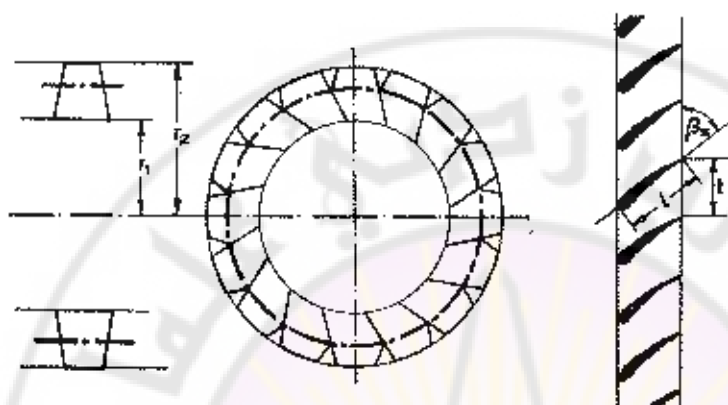
عند بدء الحركة مساوياً للصفر ، فيجب أن ينشأ داخل هذا الحط السائل ، الذي يتوسع بعد الحركة باستمرار ، حول الجناح الحامل جولان يساوي ويعاكس شدة إعصار بدء الحركة . هذا الجولان الذي يولد أخيراً قوة الرفع على الجناح يمكن اعتبار تأثيره على حقل الجريان المجاور للجناح ناتجاً عن إعصار مربوط أو جملة أعاصير مربوطة (توزع إعصاري) داخل الجناح الحامل .

بما سبق ينتج إذن أن لزوجة السائل هي السبب في نشوء الجولان وبالتالي قوة الرفع الهيدروديناميكية . ولكننا لتفسير نشوء قوة الرفع نحتاج لأخذها بعين الاعتبار فقط للفترة الزمنية القصيرة الكافية لتولد إعصار بدء الحركة . واعتباراً من هذه اللحظة يمكن افتراض الجريان مثالياً وبالتالي حساب قوة الرفع بموجب قانون كوتا - يوكوفسكي وشرط كوتا للانسياب الناعم .

في حالة الجريانات الحقيقية فإث تأثير الزوجة يؤدي لتشكيل منطقة « ماء ميت » حول الحافة الخلفية للجناح تكون سماكتها على الطرف العلوي أكبر منها على الطرف السفلي . وينتج عن ذلك انزياح خطوط التيار إلى جهة طرف السحب ، وبالتالي فإن شرط كوتا للانسياب الناعم لا يتحقق تماماً ، ويكون الجولان ، وبالتالي قوة الرفع ، في هذه الحالة أقل بالمقارنة مع الجريان المثالي عند زاوية ورود واحدة .

أخيراً لا بد من ملاحظة ختامية تتعلق بالجريان عبر شبك البروفيلات المستقيم . إن أهمية هذا الجريان تتأتى من كونه يمثل العملية الفيزيائية الأساسية في كل آلة جريان محورية ، أي التي يكون اتجاه دخول السائل إليها بشكل رئيسي موازياً للمحور . ويتوضح ذلك إذا أجرينا مقطعاً اسطوانياً موحد المركز في الدولاب الدائر لآلة محورية وفرشنا سطح القميص الاسطواني على مستويين فإن بروفيلات الريش تظهر في المستوي بشكل شبك بروفيلات مستقيم يمتد إلى اللانهاية عن الطرفين ، لأن كل ريشة مجاورها ريشتان متائلفتان ، الشكل (٤٩.٨) . فإذا كان الدولاب الدائر في مضخة أو ضاغط فإن شبك البروفيلات بحرف الجريان بحيث يحصل كبح للسرعة من W_1 إلى W_2 ويكون بالتالي الضغط

الستاتيكي خلف الشبك أكبر منه قبل الشبك ، $p_1 < p_2$. أما في حالة عنفة فان شبك البروفيلات يحرف الجريان بحيث تزداد السرعة من W_1 إلى W_2 ،



الشكل ٤٩.٨ : نحصل على شبك بروفيلات مستقيم بشتر مقطع اسطواني موحد المركز لدولاب آلة جريان محورية على مستر .

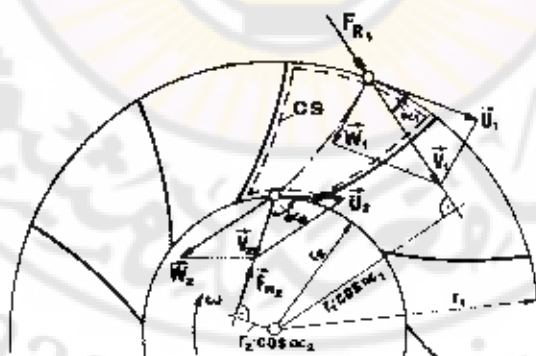
ويكون بالتالي $p_1 > p_2$. لذا يميز بين شبك كاجح ، يمثل مضخة محورية نموذجية مبسطة تشحن الجريان بقدرة ضغط ، وبين شبك مسرع ، يمثل عنفة محورية نموذجية مبسطة تستخلص من الجريان فـيدرة حركية . كما يمكن أحياناً ان يتم عبر ما يسمى الشبك المتساوي الضغط ، $p_1 = p_2$ ، حرف اتجاه الجريان فقط . وفي كل الاحوال فان شبك البروفيلات هذا يمثل العنصر الاساسي لكل آلة جريان محورية ، ودراسة الجريان عبره تتيح إمكانية الفهم العميق لعمليات الجريان المعقدة داخل الآلة ، الذي هو في الأصل ثلاثي البعد طبعاً وغير مستقر في الدولاب الدائر . لهذا السبب فقد بقيت نظرية خيط التيار لفترة طويلة الطريقة الوحيدة المستخدمة في حساب وتصميم آلات الجريان . ولكن الاتجاهات النظرية والتجريبية تركزت ، خاصة خلال العقدين الاخيرين ، على دراسة الجريان عبر شبك البروفيلات من مناطق أنها مستقود الى فقرة نوعية في تطوير

آلات الجريان . وهذا ما حدث فعلاً . فقد طورت طرق حديثة هندسية في هذا المجال نستطيع بموجبها حساب الحقل المميز للآلة نظرياً ، حتى مع أخذ الفواقد بعين الاعتبار . ونكتفي هنا بذكر اسماء بعض الباحثين ، على سبيل العدد لا الحصر ، الذين أسهموا بشكل بارز في هذا الحقل مثل شووليس ، شلشتنغ ، بيلس ، شبايدل ، البرنج ، هاكيشمدت ، دجك ، كرويانوفسكي [13][25][26] [31][49][50][57][65][66] [88][103][104][105] .

٧.٢.٥.٨ معادلة أويلر العنقبة

بالنسبة لآلات الجريان القطرية ، أي التي يكون دخول الجريان فيها عمودياً على محور الدوران ، يمكن الحصول على جريان مستوي مبسط نموذجي داخل الدولاب الدائر بإجراء مقطع عمودي على محور الدوران ، حيث تظهر بروفيلات الريش في المستوي بشكل نجمي حول المحور ومرتبطة بانتظام على محيط دائرتين مركزيتين نصف قطريهما r_1 و r_2 . يسمى هذا الترتيب الهندسي شبك بروفيلات دائري ، أو اختصاراً الشبك الدائري .

نعتبر الشبك الدائري المبين في الشكل (٥٠.٨) لعنقة مائية قطرية ،



الشكل ٥٠.٨ : استخراج معادلة أويلر العنقبة .

ونسأل عن الاستطاعة التي يقدمها الدولاب الدائر إذا كان يدور بسرعة زاو ثابتة ω .

ليكن Q' التيار الحجمي الذي يعبر القناة المشكلة من ريشتين متجاورتين ولنكن W_1 السرعة النسبية ، U_1 السرعة المحيطية عند الدخول و W_2 ، J_2 القيم المقابلة عن الخروج من القناة . فحسب (7.30) تكون السرعة المطلقة عند الدخول : $V_1 = W_1 + U_1$ ، وتصنع مع U_1 الزاوية α_1 ، وعند الخروج : $V_2 = W_2 + U_2$ ، وتصنع مع U_2 الزاوية α_2 .

نفرض أن الجريان مستقراً عديم الاحتكاك ومنظماً عند الدخول والخروج وعدد الريش كبيراً جداً بحيث أن كل جزيئات السائل التي تدخل بين ريشتين تحرف وتوجه باتجاه المحور الرئيسي للقناة تماماً . نطبق قانون الدفع الدوراني (8.109) على كتلة السائل المحددة بسطح التحكم cs فيكون :

$$M_r + M_s + M_n = 0$$

إذا اخترنا المحور المار من O محوراً للدوران فيكون عزم القوة الحجمية الممثلة قوة الثقل معدوماً ، $M_r = 0$ ، وكذلك عزم قوى الاحتكاك باعتبار أن الجريان الي ، وعزم قوى الضغط المؤثرة على الجزء الجر من سطح التحكم باعتبارها صفر من $M_r = 0$ ، وبالتالي يجب أن يتوازن عزم قوى الضغط المؤثرة على الجزء الصلب من سطح التحكم ، الريش ، مع محصلة عزوم رد فعل كمية الحركة . وعليه ينتج عزم رد الفعل لقوى الضغط التي يؤثر بها السائل على الريش M_s ، أي عزم الدوران الذي ينتقل لمحور العنفة :

$$M_t = M_s = M_r = F_{R1} \cdot r_1 \cos \alpha_1 - F_{R2} \cdot r_2 \cos \alpha_2$$

فإذا كان $Q = \sum Q'$ التيار الحجمي الذي يعبر كافة ريش الدولاب الدائر فيصبح باستخدام (8.105) وبغض النظر عن تفاصيل الجريان بين الريش :

$$M_t = \rho Q (V_1 r_1 \cos \alpha_1 - V_2 r_2 \cos \alpha_2) \quad (8.151)$$

هذه العلاقة معروفة باسم معادلة أويلر العنقية ، أو المعادلة الأساسية لنظرية آلات الجريان الهيدروليكية القطرية . وسميت كذلك لأنها تنطبق من حيث المبدأ على العنفات والمضخات .

من (8.151) نتج بسهولة استطاعة الدولاب الدائر :

$$P = M \omega = \rho Q \omega (V_1 r_1 \cos \alpha_1 - V_2 r_2 \cos \alpha_2) .$$

ولكن حسب الشكل (٥٠٨) فإن السرعة المحيطية $U = r\omega$ ، والمرسبة المحيطية للسرعة المطلقة $V_n = V \cos \alpha$. وعليه تصبح :

$$P = \rho Q (V_{n1} U_1 - V_{n2} U_2) . \quad (8.152)$$

وتكون هذه الاستطاعة اعظمية عندما تكون خسارة القدرة الحركية للجريان أصغرية ، أي عندما $V_{u2} = 0$. ويتحقق ذلك عندما يخرج السائل من الدولاب الدائر بشكل قطري بحيث وتكون الزاوية $\alpha_2 = \pi/2$ ($\cos \alpha_2 = 0$) . عندئذ تصبح :

$$P_{max} = \rho Q V_{n1} U_1 = \rho Q V_1 U_1 \cos \alpha_1 . \quad (8.153)$$

بالنسبة لآلة جريان محورية وباعتبار أن نصف قطر دخول وخروج التيار لا يتغير ، $r_1 = r_2$ ، وبالتالي $U_2 = U$ ، فإن معادلة أويلر العنقية للاستطاعة تأخذ في حالة شبك بروفيلاست مستقيم الصيغة البسيطة التالية :

$$P = \rho Q U (V_{u1} - V_{u2}) = \rho Q U \Delta V_u . \quad (8.154)$$

حيث ΔV_u تمثل الفرق بين المركبتين المحيطيتين للسرعة المطلقة عند الدخول والخروج ، ويمكن تحديده من مثلثي السرعة . وهذا يعني أن الاستطاعة تتعلو بالدرجة الأولى بزاوية انحراف الجريان من α_1 إلى α_2 ، بغض النظر عن كيفية حدوث هذا الانحراف ، حيث لم يؤخذ شكل الريشة التجميعي بالحسبان .

إن استطاعة الآلة الحقيقية تكون طبعاً أقل من استطاعة الآلة النموذجية (المثالية) المحسوبة بموجب العلاقات السابقة . فمن ناحية يكون عدد ريش الدولاب الدائر محدوداً . وبالتالي لا يمكن إهمال التأثير المتبادل بينهما على الجريان . ومن ناحية أخرى لا يمكن إهمال الفواقد الناتجة عن لزوجة السائل . نتيجة لذلك فإن زاوية الريشة عند الدخول والخروج α تختلف عن زاوية دخول وخروج الجريان β . وهذا يعني أن انحراف الجزيئات المطلوب لاستطاعة مفيدة ، وبالتالي $\alpha < \beta$ ، يكون أقل ، والاستطاعة الفعلية أصغر . ويكون هذا التأثير في حالة المضخة أكبر منه في حالة العنفة . وازعامة ذلك اقترح بفلايديرر C. Pflüger [80] من أجل الإبقاء على نظرية خيط التيار لحساب آلات الجريان فكرة تضخيم الزوايا ، بمعنى وجوب زيادة زاوية الريشة عند الدخول والخروج في حالة العدد المحدود للريش بحيث نحصل على انحراف للجريان مكافئ ، للانحراف في حالة العدد الكبير جداً للريش ، وبالتالي نفس الاستطاعة :

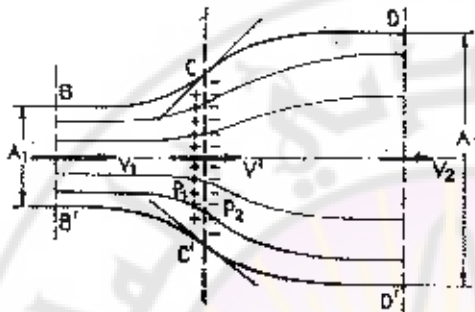
حديثاً تستخدم نظرية آلات الجريان القطرية الطرق الحديثة لميكانيك السوائل مثل طريقة النقاط الشاذة وطريقة التمثيل المطابق وغيرها إلى جانب نظرية الطبقة الحدية بحيث يمكن مراعاة تفاصيل الجريان داخل الآلة وتحديد شكل الريش وعددها الأفضلي بالنسبة لجريان معين أو استطاعة مرغوبة ، انظر مثلا [25] [80] [106] [107] [108] .

٨.٢.٥.٨ النظرية النافورية لحساب المراوح والرفاصات الأولية

المراوح الموائية والدواسر المائية (الرفاصات) Propeller أجهزة مؤلفة من عدد قليل نسبياً (2 إلى 4) من الريش ذات المقاطع الشبيهة ببروفيلات الاجنحة الحاملة . وتكون محمولة خارج المركبة (الطائرة أو البواخر) على عمود متصل مباشرة أو بواسطة علبة سرعة بعمود المحرك المركب داخل المركبة . بذلك تكتسب المروحة حركة دورانية تحتضن خلالها باستمرار كتلاً جديدة من السائل (الهواء أو الماء) الساكن ، وتقذفها للوراء بشكل تيار نافوري فتتولد ، كرد فعل ودون انحراف اتجاه الجريان ، قوة دافعة Thrust تؤدي لتحريك المركبة إلى الامام . وعليه فالقوة الدافعة المروحة تكون باتجاه الحركة وتستطيع بذلك توليد استطاعة مفيدة ، بينما يولد الجناح الحامل ، كما رأينا ، قوة دفع عمودية على اتجاه الحركة .

كتمهيد لحساب القوة الدافعة الفروسة ومردودها ستعرض لسألة عامة تطرح نفسها عندما تؤثر على تيار نافوري بوسيلة ميكانيكية ما تؤدي لكبحه أو تسارعه دون إحرف اتجاهه .

نفرض أن غزبلاً $C-C'$ يعترض التيار النافوري الاسطواني أو المستوي ، الشكل (٥١.٨) ، مما يؤدي لكبح السرعة من V_1 قبل الغزبال الى V_2 خلفه . فنتيجة ذلك



يجب أن يتوسع مقطع التيار النافوري (أو عرضه) من A_1 الى A_2 ، وتأخذ خطوط التيار الخارجية (الحرة) $D-C-B$ و $D'-C'-B'$ المسار المبين في الشكل ، بحيث تتحقق معادلة الاستمرار : $A_1 V_1 = A_2 V_2$ في مستوي الغزبال نفسه تكون سرعة التيار النافوري V تختلف عن V_1 و V_2 وموزعة بانتظام على مقطع وسطي $\overline{CC'} \equiv A'$.

الشكل ٥١.٨ : الجريان عبر غزبال لاستخراج موضوعة فروود .

إن خطوط التيار الخارجية تتعرض من الخارج لنفس الضغط ، لذلك فإن الجريان عبر الغزبال بالشكل المبين أعلاه يستلزم وجود فرق ضغط Δp في الجريان قبل وخلف المستوي $C-C'$ مباشرة لا يمكن أن تسببه إلا القوى النابذة المتولدة نتيجة انحناء مناسب لخطوط التيار . وبالفعل فإن مركز انحناء خطوط التيار قبل $C-C'$ يقع خارج التيار النافوري ، مما يؤدي لتزايد الضغط باتجاه الداخل (انظر ص ٢٥٧) ، بينما يقع مركز انحناء خطوط التيار خلف الغزبال في الداخل مما يؤدي لتناقص الضغط في هذا الاتجاه ، وننتقل بالتالي C و C' نقطتي انعطاف . لذلك يسود قبل الغزبال ضغط زائد $p_1 (+)$ وخلفه ضغط ناقص $p_2 (-)$ ويتعرض الجريان في مستوي الغزبال لتغير مفاجئ في الضغط .

لحساب السرعة V نطبق قانون الدفع الخطي (8.103) باتجاه الجريان . فإذا كان التيار الحجمي Q نفلج بمساعدة (8.105) القوة اللازمة لكبح السرعة من V_1 إلى V_2 :

$$F_k = \rho Q (V_1 - V_2) ,$$

التي تساوي من جهة أخرى الى القوة اللازمة لجز الغزبال في سائل ساكن بسرعة V ، مما يستلزم استهلاك استطاعة مقدارها $\rho Q V^2$ ، وهذه تساوي مقدار الحسارة في القدرة الحركية نتيجة كبح السرعة ، $\rho Q (V_1^2 - V_2^2)$. وعليه نجد :

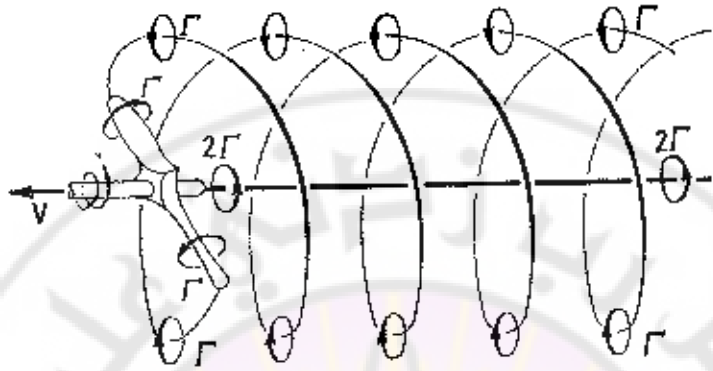
$$\rho Q (V_1 - V_2) V' = \rho Q (V_1 - V_2) \frac{V_1 + V_2}{2} \Rightarrow \boxed{V' = \frac{V_1 + V_2}{2}} \quad (8.155)$$

فإذا لاحظنا أننا لم نراع أية مواصفات خاصة للغريال باستثناء كونه أداة تؤثر بقوة F_p على السائل ، لذلك يمكن تعميم العلاقة (8.155) المتضمنة مايعرف باسم موضوعية فروود Froude theorem وصياغتها بالجملة التالية :

إذا أثرت أداة ميكانيكية ما (غريال ، طاحونة هوائية ، مروحة ، رفاص وغيرها) على تيار نافوري بقوة F_p تؤدي لكبح التيار أو تسريعه فتكون السرعة التي تخترق مستوي الأداة مساوية للمتوسط الحسابي للسرعة ما قبل وما بعد هذه الأداة .

لقد سيطرت المروحة الهوائية فترة طويلة كأداة رئيسية لتوليد القوة الدافعة في مجال الطيران حتى السرعات المتوسطة ، ولا يزال يحتل الرفاص هذا المركز في مجال بناء السفن . لذلك تركزت الأبحاث منذ وقت طويل على حساب الجريان المعقد جداً عبر الرفاصات والمراوح ، ذلك أن حركة المروحة تتألف في الحقيقة من حركة انسحابية وحركة دورانية ، وبالتالي فهي حركة لولبية . ومن هنا جاءت تسميتها بالمراوح أو الرفاصات اللولبية . وتولد القوة الدافعة للمروحة في الواقع على أساس مبدأ الجناح الحامل الريشة ، الذي يتحرك هنا على خط لولبي ، بدلاً من الحركة المستقيمة للجناح الحامل الفردي . فمن نهايات الريش تنبعث جملة أعاصير ، تتحد في منطقة صرة عمود المروحة لما يسمى أعصار الصرة ، وتلتف خلف المروحة بشكل لولبي يحيطه بكامل كتلة السائل التي عبرت المروحة ، الشكل (٥٢٠٨) . فإذا كان عدد الريش كبيراً نسبياً فإن الأعاصير الخارجية تحصر داخلها كسطح فاصل تياراً نافورياً مغلقاً تقريباً ، تقوم جزيئات السائل فيه بالمقارنة مع الجزيئات الأخرى بحركة انسحابية متقدمة وبحركة دورانية ، كشر لا بد منه . فإذا أردنا بالإضافة لما تقدم مراعاة التأثير المتبادل بين المروحة وجسم المركبة يتضح أنه من شبه المستحيل ، حتى في حال إهمال لزوجة السائل ،

تطوير نظرية مرضية لحساب عمليات الجريان المعقدة داخل المروحة .



الشكل ٥٢.٨ : مجموعة الاغصير التي تولدها مروحة هوائية .

لأخذ فكرة مبسطة جداً عن طريقة عمل المروحة نفترض مروحة نموذجية
نحقق الشروط التالية :

١ - المروحة مؤلفة من عدد لانهائي من الريش ذات السماكة الصغيرة جداً
في اتجاه الجريان. وعليه يمكن اعتبارها قرصاً دائرياً رقيقاً جداً مساحته الفعالة A
تساوي السطح الإجمالي لدائرة المروحة ناقصاً مساحة السطوح غير الفعالة للمنطقة
المجاورة لصرة العمود بسبب سرعتها المحيطية البطيئة ولنهايات الاجنحة التي لا توجه
السائل جيداً .

٢ - يهمل دوران التيار النافوري الذي يخترق المروحة ، وتعمل كذلك
كافة الفواقد الناتجة عن الاحتكاك وعملية المزج .

٣ - قوة الدفع F_g موزعة بانتظام على المقطع A ، أي أن كل جزيء سائل
يخترق قرص المروحة الدائري يتلقى زيادة واحدة في الضغط Δp ، بينما لا تتعرض
الجزيئات خارج التيار النافوري لأي تغير في الضغط (هذا الشرط يمكن التحقق
فعلاً إذا أحسن اختيار عرض الريش وزاوية ورود) .

٤ - الضغط في التيار النافوري على مسافة كافية قبل وبعد قرص المروحة يساوي الضغط غير المشوش p_0 ، بينما تزداد السرعة من V_1 إلى V_2 .

هذه الشروط تمثل الفرضيات الأساسية للنظرية النافورية للبسيطة لحساب المروحة التي صاغها لأول مرة رانكين Rankine عام 1865 (انظر [9]) . فإذا اعتبرنا الحركة الحرة للمروحة ، أي أهملنا التأثير المتبادل بينها وبين جسم المركبة ، واختارنا مجموعة إحداثيات نسبية مثبتة في مركز قرص المروحة فإن الجريان عبر المروحة يصبح مستقراً وتكون سرعة دخول التيار النافوري قبل المروحة V_1 متكافئة سرعتها في السائل الساكن باتجاه معاكس . ونستطيع بمساعدة قانون الدفع الخطي (8.104) ومعادلة برنولي لحساب قوة الدفع ومردود المروحة بسهولة .

الشكل (٥٣.٨) يبين شكل التيار النافوري الاسطواني الذي يعبر المروحة ، ونوزع السرعة والضغط فيه . وحيث ان المروحة تؤدي لتسريع الجريان (بعكس الغريال ، الشكل ٥١.٨) فإنه يسود قبل مستوى المروحة مباشرة ضغط ناقص ، $p_1 < p_0$ ، وخلفه ضغط زائد $p_2 > p_0$ ، ويحدث بالتالي في مستوى المروحة تغير مفاجئ في توزيع الضغط بمقدار Δp .

لتكن V' السرعة في مستوى المروحة . فحسب (8.155) وبرمز الشكل (٥٣.٨ - II) تكون :

$$V' = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{V_1 + (V_1 + w)}{2} = V_1 + \frac{w}{2} \quad (8.156)$$

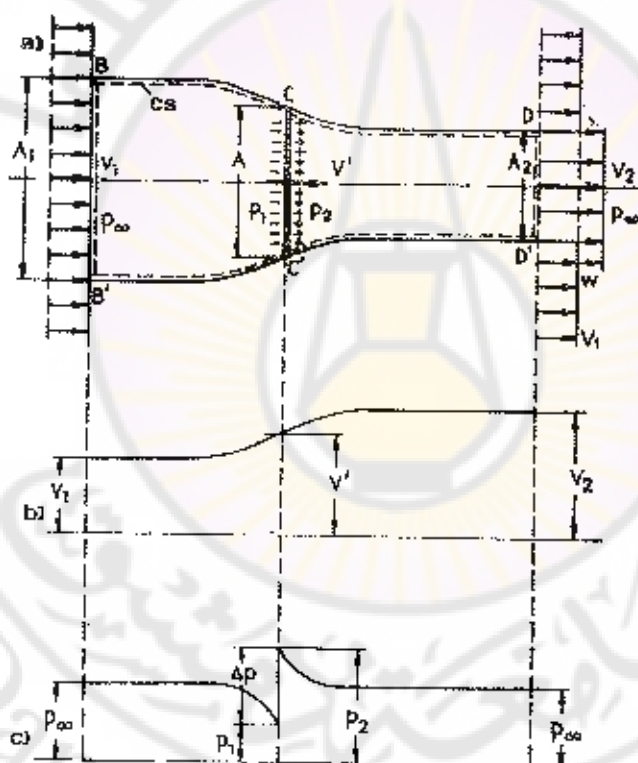
حيث w السرعة الاضافية التي يكتسبها التيار النافوري خاف المروحة نتيجة تسريع الجريان . وتبلغ بالتالي السرعة الاضافية في مستوى المروحة نصف قيمتها خلف المروحة .

نطبق معادلة برنولي المحترزة على نقطتين من $B'B$ و $C'C$ قبل المروحة فنجد:

$$\frac{\rho}{2} V_1^2 + p_\infty = \frac{\rho}{2} V'^2 + p_1 \Rightarrow p_1 - p_\infty = \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V'^2) ,$$

وعلى نقطتين من $C'C$ و $D'D$ بعد المروحة فينتج :

$$\frac{\rho}{2} V'^2 + p_2 = \frac{\rho}{2} V_2^2 + p_\infty \Rightarrow p_2 - p_\infty = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V'^2) .$$



الشكل ٥٣.٨ : النظرية النافورية لمروحة رانكين المثالية : n حدود التيار النافوري الاسطواني ؛ (a) توزيع السرعة ؛ (c) توزيع الضغط .

من هاتين العلاقتين وباستخدام (8.156) نجد فرق الضغط في مستوى المروحة :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \rho w \left(V_1 + \frac{w}{2} \right) .$$

وحيث أن Δp ، كما هو مفروض ، موزع بانتظام على السطح الفعال A فتكون القوة الدافعة التي تولدها المروحة :

$$F_s = \int_{(A)} \Delta p \cdot dA = \Delta p A = \rho w \left(V_1 + \frac{w}{2} \right) A \quad (8.157)$$

نفس العلاقة يمكن الحصول عليها بمساعدة قانون الدفع الخطي إذا طبق على سطح التحكم cs المؤلف من سطحي التيار الخارجيين $D' C' B'$, $D C B$ ومن المستويين الشاقوليين $B' B$ و $D' D$ الواقعين على بعد كاف قبل وبعد المروحة في منطقة الضغط غير المشوش . فإذا لاحظنا أن قوى الاحتكاك معدومة وكذلك قوى الثقالة باتجاه الجريان وقوى الضغط على حدود cs متوازنة فيما بينها ، فينتج أن القوة الخارجية الوحيدة التي تؤثر بها المروحة على التيار الكتلي ، $m = \rho A V'$ ، الذي يعبرها يجب أن تتوازن مع محصلة تيار الدفع الخارج والداخل إلى cs وعليه نجد باستخدام (8.156) ووضع $A = \frac{\pi d^2}{4}$:

$$F_s = \rho A V' (V_2 - V_1) = \rho \frac{\pi d^2}{4} V' w = \rho \frac{\pi d^2}{4} \left(V_1 + \frac{w}{2} \right) w \quad (8.158)$$

وهذه هي العلاقة الأساسية بين قوة الدفع وقطر المروحة d المكافئ لضعف طول الريشة ومربعة المركبة V_1 .

إن المرحود النظوي η_{th} للمروحة النموذجية يمثل النسبة بين الاستطاعة المقيدة P_B والمبدولة P_A . الأولى تنتج عن حركة المركبة بسرعة نسبية V_1 تحت

تأثير القوة F_s ، وتساوي V_1 F_s ، والثانية نحتاجها لتوليد F_s المنتقلة بسرعة V' وتساوي إذن $V' F_s$. وعليه يكون باستخدام (8.156) :

$$\eta_{th} = \frac{P_E}{P_A} = \frac{V_1}{V'} = \frac{V_1}{V_1 + \frac{w}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{w}{2V_1}} . \quad (8.159)$$

يتضح من هذه العلاقة أن المردود النظري للمروحة النموذجية يمكن أن يبلغ قيمة قريبة جداً من الواحد، إذا كانت السرعة الإضافية في التيار النافوري الاسطواني خلف المروحة صغيرة جداً بالمقارنة مع سرعة المركبة V_1 . هذا يعني بموجب (8.158) أنه عند قوة دافعة مطلوبة F_s يلزم أن يكون التيار الكتلي AV' الذي تحتضنه المروحة ، وبالتالي المقطع الفعال للمروحة ، أكبر مما يمكن . ولكن زيادة طول الريشة تقف عند حدود لا يمكن تجاوزها لأسباب ميكانيكية تتعلق بتثبيت الريش على المحور من جهة ، ولأسباب هيدروديناميكية أو غازديناميكية من جهة أخرى تتعلق بإمكانية نشوء ظاهرة التحكم أو اختراق جدار الصوت نتيجة تجاوز السرعة المحيطية للريش قيمة حرجية .

في الحساب العملي للمراوح يستخدم معامل القوة الدافعة ، أو كما يسمى أيضاً معامل درجة التحميل الذي يعرف بالعلاقة :

$$c_s = \frac{F_s}{\frac{\rho}{2} V_1^2 A} . \quad (8.160)$$

لحساب η_{th} بدلالة c_s نكتب المعادلة الأولى من (8.158) ، بوضع $w = V_2 - V_1 = 2(V' - V_1)$ ، بالشكل التالي :

$$F_s = 2 \rho A V' (V' - V_1) = 2 \rho A (V'^2 - V' V_1) = \\ = 4 \cdot \frac{\rho}{2} V_1^2 A \cdot \left[\left(\frac{V'}{V_1} \right)^2 - \frac{V'}{V_1} \right] .$$

ومن هنا ينتج بموجب (8.160) :

$$c_s = 4 \left[\left(\frac{V'}{V_1} \right)^2 - \frac{V'}{V_1} \right] .$$

نصلح العلاقة فنجد :

$$\frac{1}{4} c_s + \frac{1}{4} = \left(\frac{V'}{V_1} \right)^2 - \frac{V'}{V_1} + \frac{1}{4} = \left(\frac{V'}{V_1} - \frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V'}{V_1} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + c_s}) .$$

بذلك يصبح المردود النظري :

$$\eta_{th} = \frac{V_1}{V'} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}} . \quad (8.161)$$

هذه العلاقة تبين أن η_{th} يزداد كلما صغرت قيمة معامل درجة التعميل ويصبح مساوياً الواحد عندما $c_s = 0$.

في ضوء ما سبق فإن المردود النظري المروحة النموذجية حسب (8.161) يمثل الحد الأعلى الذي يمكن أن يبلغه المردود الفعلي η لأية مروحة حقيقية يتوجب عليها توليد قوة دافعة P_s معينة عند مساحة محددة A لدائرة قرص المروحة وسرعة سير مطلوبة V_1 . لذلك يمثل $\eta_{max} = \eta_{th}$ أساساً جيداً للمقارنة بينه وبين قيمة η المحسوبة أو المقاسة ، وتربط بينها العلاقة :

$$\eta = \eta_{th} = \eta_{hyd} \eta_{th} . \quad (8.162)$$

حيث η_{hyd} معامل درجة الجودة المكافي للمردود الهيدروليكي . وتبلغ

قيمته ، التي يتم تحديدها غالباً تجريبياً ، بالنسبة للمراوح الهوائية الجيدة التصميم ما بين 0,85 الى 0,90 [9] وحوالي 0,6 بالنسبة للرفافات المائية [6] .

المعامل η يراعى في الواقع كافة العوامل والتأثيرات التي أهميتها النظرية الانفورية البسيطة والتي تفتقر حتماً بسبب عمليات الجريان المختلفة على ريش المروحة الافراذية ، فالاستطاعة المبذولة فعلاً P_A تدخل فيها ، بالإضافة للاستطاعة المفيدة P_E ، الاستطاعة المستهلكة كخسارة في القدرة الحركية P_1 نتيجة زيادة سرعة التيار الكتلي $\dot{m} = \rho \cdot w \cdot A$ ، ونكون $P_1 = \frac{\dot{m} w^2}{2}$ أصغر ما يمكن عند قوة دافعة محددة كلما كبر $\dot{m}$ وصغرت w . زيادة على ذلك تستهلك استطاعة مقدارها P_2 للتغلب على الفواقد الناتجة عن الاحتكاك وعن تشكل الاغصير حول الريش وفي التيار النافوري وبسبب دوران التيار النافوري وتضييق مقطعه. وعليه تكون الاستطاعة المبذولة الفعلية: $P_A = P_E + P_1 + P_2$ ويكون المردود السكلي الفعلي :

$$\eta = \frac{P_E}{P_A} = \frac{P_E}{P_E + P_1 + P_2} \quad (8.163)$$

بينما يبلغ المردود النظري المعطى بالعلاقة (8.159) :

$$\eta_{th} = \eta_{max} = \frac{P_E}{P_E + P_1} \quad (8.164)$$

والمردود الهيدروليكي أو معامل درجة الجودة :

$$\eta_{hyd} = \eta = \frac{P_E + P_1}{P_E + P_1 + P_2} \quad (8.165)$$

إن النتائج السابقة لا تنطبق تماماً على المراوح الواقعة (الناطقة) ، عندما تكون المركبة تتأهب للاقلاع أو عند اختبار المروحة المثبتة على منصة . عندئذ تكون السرعة $V_i = 0$ ، وبالتالي فالاستطاعة المفيدة معدومة ، $P_E = 0$ ، وكذلك المردود النظري حسب (8.161) ، $\eta_{th} = 0$. بينما يلزم باستمرار بذل استطاعة لأت قوة دفع الوقوف أو السكون Stand thrust بموجب (8.157) :

$$F_{\text{sur}} = \frac{\rho}{2} A w^2 \quad (8.166)$$

تكون غير معدومة. هذه الحالة تنطبق أيضاً على الحوامات أو الطائرات العمودية عندما تقف ، معلقة ، بعد أن تكف عن التحليق ، عند ارتفاع معين. عندئذ تكون سرعتها $V_1 \approx 0$ ، وتندعم بالتالي استطاعتها المفيدة ، $P_{12} \approx 0$ ، بينما تستهلك باستمرار قدرة تستطيع المحافظة على وضعها .

حساب الاستطاعة النظرية اللازمة في حال تكون الحوامة نحمل ثقلًا $F_{\text{su}} \approx F_G$ نضع في (8.156) $V_1 = 0$ فتصبح $V' = w/2$ وتنتج :

$$P_{\text{th}} = F_{\text{su}} V' = F_{\text{su}} \frac{w}{2} = F_G \frac{w}{2} .$$

فإذا حسبت w من (8.166) نجد أخيراً العلاقة :

$$P_{\text{th}} = \frac{F_G}{2} \sqrt{\frac{2 F_G}{\rho A}} = \sqrt{\frac{F_G^3}{2 \rho A}} - \sqrt{\frac{F_{\text{su}}^3}{2 \rho A}} . \quad (8.167)$$

التي تبين أن الاستطاعة التي تتطلبها الحوامة لرفع ثقل معين تنصغر كلما كبرت مساحة قرص المروحة. وهذا ما نلاحظه فعلاً عند الحوامات والطائرات العمودية. ولكن زيادة السطح A ، وبالتالي طول الريش ، تحدها عوامل تصميمية وأيروديناميكية سبق ذكرها ، بالإضافة لأن وزن المروحة والحوامة ينقص طبعاً الثقل الصافي الممكن رفعه .

إن النظرية النافورية البسيطة تعطي فكرة واضحة نسبياً عن طريقة عمل المراوح والرفافات وتسمح بحساب المردود الأعظمي لها . ولكنها لا تستطيع ، بحكم الفرضيات التي اعتمدت عليها ، أن تقدم أية معلومات تفصيلية عن العمليات المعقدة جداً للجريان عبر المروحة (أو الرفاص) التي تخضع لمعامل مختلفة ومتداخلة . أهمها عدد وشكل الريش وشكل البروفيل المستخدم ، تأثير جسم المركبة على التيار النافوري ، ولزوجة السائل طبعاً . إن حساب القوة الدافعة للمروحة الحقيقية ومردودها مع مراعاة أهم التأثيرات السابقة

يعتمد على نظرية الريشة الهامة Blade theory المبينة على أساس تتبع جملة الأعاصير المتشكلة أثناء حركة ريش المروحة الافرادية ، الشكل (٥٢.٨) . هذه النظرية وضع أسسها بالاستناد على نظرية الجناح الحامل ، مع أخذ الحركة الدورانية للريشة بعين الاعتبار ، البرت يقيس وذلك أولاً للمروحة ذات التحميل الضعيف ، أي التي تولد سرعة إضافية « صغيرة بالمقارنة مع سرعة المركبة [109] [26] ، وتتميز بخسارة أصغر في القدرة ، وبعدها للمروحة ذات التحميل الشديد ، كما في حالة الرفاص المائي ، حيث تكون « كبيرة نسبياً [110] . وقد ساهم بتطوير هذه النظرية العديد من الباحثين الذين وضعوا طرقاً حسابية وتجريبية هندسية لحساب المراحل والرفاصات [32] [111] [112] [113] [114] مع مراعاة التأثير المتبادل بين المروحة والمركبة [115] [116] وتأثير ظاهرة التكيف الخطرة على الرفاصات المائية والتي أدت دراستها العميقة لتطوير رفاصات تعمل تحت ظروف تكيف جزئي أو كلي Supercavitating propeller [111] [118] حتى مع أخذ تأثير اللزوجة بعين الاعتبار . وقد أدت هذه الأبحاث لتطوير نماذج جديدة من المراحل والرفاصات ذات المردود العالي نذكر منها خاصة المروحة القابلة للتوجيه Controllable propeller التي يمكن توجيه ريشها تبعاً لظروف عملها .

أخيراً نذكر الإشارة إلى أن النظرية النافورية البسيطة يمكن تطبيقها بنفس الخطوات المتبعة في حالة المروحة على الطاحونة الهوائية التي تستغل قدرة الهواء وتحولها إلى قدرة ميكانيكية (آلة قدرة !) ، وذلك بكبح سرعة التيار النافوري من V_1 إلى $V_2 > V_1$ ، تماماً كما يفعل الغربال ، الشكل (٥١.٨) ، فإذا وضعنا في هذه الحالة $V_2 = V_1 - w$ يكون بموجب (8.155) : $V_2 = V_1 - \frac{w}{2}$. وتنتج القوة الدافعة ، ومنها الاستطاعة القابلة للتحويل ، تحت نفس فرضيات المروحة المثالية بالصيغة :

$$F_s = \rho A w (V_1 - \frac{w}{2}) \Rightarrow P = F_s \cdot V_2 = \rho A w (V_1 - \frac{w}{2})^2 \quad (8.168)$$

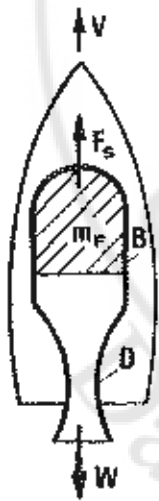
وتبلغ P قيمتها الأعظمية بالنسبة للدولاب طاحونة مساحته $A = \pi r^2$ معلومة عندما تكون السرعة خلف الدولاب $V_2 = V_1 - w = V_1/3$ ، أي عندما تكون سرعة التيار النافوري في مستوي الدولاب $V_1 - \frac{2}{3} V_1$ ، كما يمكن التأكد

من ذلك بسهولة . وهنا أيضاً يتطلب الحساب الدقيق للقوة الدافعة والاستطاعة الفعلية الاعتماد على نظرية الريشة الحاملة [121] [120] .

٩.٢.٥.٨ حساب السرعة النهائية للصاروخ ، قانون زيوكوفسكي

إن مبدأ عمل الصاروخ البسيط يشبه مبدأ عمل المروحة من حيث أنه بولسد قوة دافعة نتيجة تسريع تيار نافوري يقذف به للخلف . ولكن الفارق الأساسي أن المروحة تستطيع توليد قوة دافعة خلال فترة زمنية غير محدودة نظرياً (طالما تدور المروحة) بسبب كون السائل المحيط بها لانها في الامتداد ، بينما يكون تأثير القوة الدافعة للصاروخ محدوداً زمنياً بفترة تتعلق بكتلة الوقود ، التي يحملها الصاروخ في داخله .

يتألف الصاروخ من حيث المبدأ ، الشكل (٥٤.٨) ، من خزان B متحمل



للضغط العالية بحجزي كتلة الوقود m_p التي يتم تسريعها عبر نفثة الخروج (1) ، التي تكون بشكل نفثة لافال ، لأن سرعة الخروج تبلغ عادة أضعاف سرعة الصوت . ويصمم جسم الصاروخ الخارجي بشكل انسيابي مناسب . أما القدرة اللازمة لتوليد التيار النافوري فيمكن تخزينها بأشكال مختلفة ، أبسطها كقدرة ضغط في حال استعمال هواء مضغوط ، حيث تغلق نفثة الخروج بصمام يفتح عند إطلاق الصاروخ . كما يمكن أيضاً استخدام الماء الساخن . ولكن عندما يراد تخزين قدرة وكتلة أكبر فستعمل أنواع الوقود الصلبة أو السائلة التي تحرر قدرتها نتيجة تفاعلات كيميائية كالأوكسجين السائل مع الكحول أو البنزين وغيرها ، انظر مثلاً [26] .

الشكل ٥٤.٨ : مبدأ عمل الصاروخ .

لتكن m_F الكتلة الاجمالية للوقود في لحظة الإقلاع ، $t = 0$ ، m_R كتلة جسم الصاروخ ، فتكون الكتلة الاجمالية في لحظة الإقلاع : $m_0 = m_R + m_F$. نفرض $\dot{m}$ التيار الكتلي الخارج من النفثة () بسرعة ثابتة عادة W بالنسبة لجسم الصاروخ . فإذا اعتبرنا $\dot{m} = \text{const}$ ، وذلك في حال استهلاك ثابت للوقود ، فإن قوة رد فعل التيار النافوري المكافئة للقوة الدافعة للصاروخ والتي لا تتعلق في حال إهمال مقاومة الهواء بحركة الصاروخ تنتج :

$$F_S = \dot{m} W \quad (8.169)$$

وينتج الزمن الكلي لعمل الصاروخ :

$$T = m_F / \dot{m} \quad (8.170)$$

وتكون الكتلة الاجمالية الآنية للصاروخ في لحظة $t > T$:

$$m = m_0 - \dot{m} t = m_R + m_F - \dot{m} t \quad (8.171)$$

نفرض أن الصاروخ لا يتعرض لأية قوى خارجية بما فيها قوة الثقالة ، وأن سرعته الآنية في اللحظة t باتجاه القوة الدافعة هي V . فتكون بموجب قانوني المحفاظ كمية الحركة ، عندما نأخذ حركة الصاروخ ككل بعين الاعتبار ، العلاقة التالية محققة :

$$F_S = m \frac{dV}{dt} = m \dot{V} = \dot{m} W , \quad (8.172)$$

حيث $\dot{V}$ تزايد سرعة الصاروخ في واحدة الزمن . وبإدخال (8.171) نجد :

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\dot{m}}{m} W = \frac{\dot{m} W}{m_0 - \dot{m} t} \Rightarrow dV = \frac{\dot{m} W}{m_0 - \dot{m} t} dt .$$

فإذا اعتبرنا الشروط الحدية عند الإقلاع حيث تكون $V = 0$ عندما $t = 0$ ،

وراعينا أن $\dot{m} dt = -dm$, $W = \text{const}$ ، فتتج السرعة الآتية للصاروخ بعد الإقلاع بزمن $T > t$ بالتكامل :

$$\int_0^V dV = -W \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \Rightarrow V = W \ln \frac{m_0}{m} \Rightarrow \frac{V}{W} = \ln \frac{m_R + m_F}{m_R + m_F - m t} ,$$

أو باستخدام العلاقة (8.170) :

$$\frac{V}{W} = \ln \frac{m_R + m_F}{m_R + m(T-t)} = \ln \left(1 + \frac{m_F - m(T-t)}{m_R + m(T-t)} \right) . \quad (8.173)$$

ويبلغ الصاروخ سرعته النهائية عندما تستهلك كتلة الوقود m_F بكاملها ، أي عند $T = t$ ، وتكون :

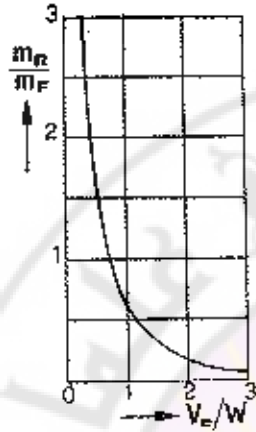
$$\frac{V_c}{W} = \ln \left(1 + \frac{m_F}{m_R} \right) = \ln \frac{m_0}{m_R} \Rightarrow \frac{m_F + m_R}{m_R} = e^{\frac{V_c}{W}} . \quad (8.174)$$

هذه هي العلاقة المعروفة باسم قانون زيولكوفسكي نسبة للعالم الروسي - السوفييتي الشهير الملقب بأبي الصواريخ ورحلات الفضاء والذي توصل إلى هذه العلاقة عام 1898 . وقد وضع بشكل مبكر جداً نظرية رياضية دقيقة لحركة الصواريخ وتصميمها وبرهن عن إمكانية استخدامها لغزو الفضاء وحسب كمية الوقود اللازمة للتغلب على الجاذبية الأرضية ومقاومة الهواء التي أملت في العلاقات السابقة .

الشكل (٥٥٠٨) يبين العلاقة بين نسبة الممرع V_c / W ونسبة الكتل $m_R : m_F$ بموجب (8.174) . ونلاحظ أنه لكي تبلغ السرعة النهائية للصاروخ قيمة سرعة خروج التيار الكتلي يلزم أن تكون كتلة الوقود عند الإقلاع $m_F = m_R (e-1) = 1.718 m_R$ ، أي يزيد بأكثر من 70 % عن كتلة جسم الصاروخ . من هذا الشكل يمكن أيضاً الحصول على سرعة الصاروخ

الآنية V إذا وضعنا $m_F - \dot{m}(T-t)$ بدلاً من m_F و $m_R + \dot{m}(T-t)$ بدلاً من m_R ، كما نلاحظ من الشكل أيضاً أنه بالإمكان

الحصول على سرعات نهائية أكبر بكثير من السرعة W . ولكن ذلك يتطلب تخزين كميات كبيرة من الوقود ، أو اللجوء لاستخدام الصواريخ المتعددة المراحل .



الشكل ٥٥.٨: العلاقة بين السرعة النهائية للصاروخ وكمية الوقود الابتدائية في حال غياب القوى الخارجية والمقاومة .

إن التطور الذي تحقق في مجال بناء الصواريخ خلال العقدين الأخيرين واستخدامها في مجالات عديدة ، وخاصة في مجال غزو الفضاء ، كان مذهلاً ، وأدى إلى تطوير فرع علمي شبه مستقل ذاتياً ، يُعرف باسم تصنيك الصواريخ . وغني عن القول أن النظرية المتكاملة لحركة الصاروخ معقدة جداً إذا أُريد منها التحديد الدقيق السرعة اللحظية والنهائية للصاروخ ومساره الفعلي ومردوده عند قيم أفضلية لنسبة الكتل والسرعة مع أخذ العوامل المتعددة الخارجية مثل تأثير الجاذبية الأرضية وتغير التسارع الأرضي مع الارتفاع وكذلك مقاومة الهواء التي تتعلق بعدد رينولدز وعدد ماخ وبشكل جسم الصاروخ بالإضافة للعوامل الداخلية الناتجة عن عملية احتراق الوقود وتدد الغاز في فغائة الخروج والاحتراق اللاحق فيها .

إن مبدأ الصاروخ مستخدم في عدد كبير من آلات أو محركات الدفع الحرارية أهمها المحرك النافوري Jet-engine ، ومحرك تورين Ram-jet ، والمحرك التوربيني (النفاث) المستخدم في الطائرات الحديثة بشكل واسع . ويجب العودة للمراجع المختصة لدراسة تفاصيل هذه المحركات التي نجد في [27] [28] فكرة عامة عنها .

١٠.٢.٥.٨ تطبيق قانون الدفع الخطي على جريان سبب مستقر

لنبدأ سبق وأشرنا (ص ٣٣١) إلى أن قانون الدفع الخطي ينطبق على الجريانات شبه المستقرة ، التي تتصف بأن حركتها يمكن اعتبارها مؤلفة من حركة

مستقرة بسرعة وسطية زمنياً $\bar{V}$ لا تتغير موضعياً مع الزمن خلال المجال الزمني المختار Δt ، وحركة مضطربة (مشوشة) تتذبذب حول $\bar{V}$ بسرعة V' . وعليه تكون السرعة الموضعية تحقق العلاقات التالية (انظر ص ١٨٤ ، وخاصة العلاقة (5.23) والشكل (٤.٥) :

$$V = \bar{V} + V' : \quad \bar{V} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} V dt : \quad \bar{V}' = 0. \quad (8.175)$$

أي أن القيم الوسطية زمنياً لتذبذبات السرعة $\bar{V}$ ، $\bar{V}'$ ، $\bar{u}$ ، تكون بالتعريف معدومة ، بينما لا ينطبق ذلك على القيم الوسطية لجداها أو لمربعاتها [4] .

في ضوء ما تقدم فإن تطبيق قانون الدفع الخطي على جريان شبه مستقر دون أخذ تذبذبات السرعة يعين الاعتبار ، كما حدث ذلك ضمناً عند حساب الفقد الصدمي (٤.٢٠٥٠٨) ، يعطي كنتيجة قيمة وسطية زمنياً لمحصلة القوى لا تنطبق على الواقع تماماً ، كما يؤكد ذلك المثال البسيط التالي .

نعتبر جرياناً مستوياً مركباً سرعته حسب (8.175) : $u = \bar{u} + u'$ و $v = \bar{v} + v'$ في اتجاه المحورين x و y . لنحسب تيار الدفع في اتجاه x الذي يعبر جزءاً من سطح التحكم موازياً للمحور y (دليل ١) . وحيث أن كتلة السائل الجزئية التي تعبر واحدة السطح في اتجاه x خلال الزمن dt وبسرعة آنية u هي $\rho u dt$ فيكون تيار الدفع المكافئ للقيمة الوسطية لكمية الحركة في واحدة الزمن مأخوذة خلال المجال الزمني Δt معطى بالعلاقة :

$$\frac{B_{x1}}{\Delta t} = \bar{I}_{x1} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \rho u^2 dt = \rho \bar{u}^2 ,$$

حيث $\bar{u}^2$ القيمة الوسطية زمنياً لمربع السرعة الموضعية الآنية . ولكن :

$$\overline{u^2} = (\overline{u+u'})^2 = \overline{u^2} + \overline{u'^2} + 2\overline{uu'} = \overline{u^2} + \overline{u'^2}; (\overline{u'} = 0) .$$

إذن يكون :

$$I_{x1} = \rho \overline{u^2} + \rho \overline{u'^2}; (\overline{u'} = 0) . \quad (8.176)$$

ومنه يتبين أن تيار الدفع الفعلي في اتجاه x ، في حال أخذ تذبذبات السرعة بعين الاعتبار ، يكون أكبر من تيار الدفع لجريان مستمر سرعته $\overline{u}$ بالمقدار $\rho \overline{u'^2}$ بالنسبة لكل واحدة من سطح التحكم الموازي للمحور y . هذا الفرق يكافئ تيار دفع إضافي رد فعله يؤثر من الخارج إلى الداخل وكأنه ضغط إضافي :

$$p_w = \rho \overline{u'^2} \quad (8.177)$$

نعتبر الآن جزءاً من سطح التحكم موازياً للمحور x (دليل 2) . إن كتلة السائل التي تعبر واحدة السطح خلال الزمن dt تساوي $\rho v dt$ وتتحرك باتجاه x بسرعة u . وعليه يكون تيار الدفع في اتجاه x المكافئ لكمية الحركة الوسطية في واحدة الزمن مأخوذة خلال المجال الزمني Δt معطى بالعلاقة :

$$I_{x2} = \frac{B_{x2}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \rho v u dt = \rho \overline{uv} .$$

وحيث أن القيمة الوسطية زمنياً لجداء مركبتي السرعة الآتيتين :

$$\overline{uv} = (\overline{u+u'}) (\overline{v+v'}) = \overline{uv} + \overline{u'v'} + \overline{u'v} + \overline{v'u}; (\overline{u'} = \overline{v'} = 0) ,$$

ينتج :

$$I_{x2} = \rho \overline{uv} + \rho \overline{u'v'}; (\overline{u'v} = \overline{v'u} = 0) \quad (8.178)$$

وهذا يبين أن تيار الدفع الفعلي في اتجاه x ، عند أخذ تذبذبات السرعة بعين

الاعتبار ، يختلف عن تيار الدفع لجريان مستقر مركبتا سرعته $\bar{u}$ و $\bar{v}$ بمقدار يتناسب مع القيمة الوسطية لجداء مركبتي تذبذب السرعة في اتجاه x و y ويساوي $\rho \overline{u'v'}$ بالنسبة لواحدة سطح التحكم الموازي للمحور x . إن رد فعل تيار الدفع الإضافي هذا يكافئ قوة موازية للمحور x ، أي إجهاد قص إضافي :

$$\tau_w = -\rho \overline{u'v'} \quad (8.179)$$

يطلق عليه إجهاد القص الظاهري أو الإجهادي Vortex shear stress ، لأنه لا ينتج عن لزوجة السائل بل عن تذبذبات السرعة . وحيث أنه في الحالة العامة يكون الجداء $\overline{u'v'}$ سالباً ، كما سنوضح ذلك فيما بعد ، فيكون بالتالي τ_w موجباً ، ويصبح إجهاد القص الكلي τ_{tot} مثل هذه الجريانات المضطربة عادة ، مؤلفاً من جزء ناتج عن اللزوجة τ_{lam} يخضع لقانون نيوتن (2.12) وجزء ناتج عن تذبذبات السرعة التي تسببها الاضطرابات :

$$\tau_{tot} = \tau_{lam} + \tau_w = \eta \frac{\partial u}{\partial n} + \rho \overline{u'v'} \quad (8.180)$$

وعليه نخلص للنتيجة الهامة التالية :

إن تذبذبات السرعة للجريان غير المستقر تسبب بالمقارنة مع الجريان شبه المستقر ضغطاً إضافياً يتناسب مع مربع تذبذب السرعة وإجهاد قص إضافياً يتناسب مع جداء تذبذب مركبات السرعة ، بحيث تبدو مثل هذه الجريانات (المضطربة عادة) وكأنها «أكبر» لزوجة من الجريانات المستقرة (الصفائحية).

٦.٨ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١١٠٨ : استخرج قانون الدفع الخطي العام لجريان غير مستقر ، أوضح أهمية هذا لقانون العملية في حالة جريان مستقر بالمقارنة مع معادلة برنولي .

- س ١٢.٨ : لماذا تتجنب كصمم كل تغير مفاجئ لمقاطع الأنابيب ؟
- س ١٣.٨ : المردود النظري لمروحة والتكبير المثالية يمثل عند قوة دفع معينة المردود الأعظمي لأية مروحة فعلية . علل السبب .
- س ١٤.٨ : في المنفات القطرية يخرج الماء من الدواليب الدائر بشكل قطري تقريباً . علل السبب .
- س ١٥.٨ : مظهر المروج أو دواليب زيجنر Segner Wheel بأبسط أشكاله يتألف من أنبوب أفقي مستقيم نهايتاه مفتوحتان ومعدنفتان بشكل قائم ويرتكز في منتصفه ، حيث يدخل الماء ، على محور شاقولي يستطيع الدوران حوله حتى يدخل إليه الماء ، انشرح مبدأ عمله .
- س ١٦.٨ : لماذا يعتبر شبك البروفيلات المستقيم العنصر الأساسي لنقل القدرة في كل آلة جريان محورية ؟
- س ١٧.٨ : ماذا ينص قانون كوتتا - يوكوفسكي ، وكيف تفسر نشوء قوة الرفع الجناح حامل ؟
- س ١٨.٨ : لماذا تبدو الجريانات المضطربة « أكبر » لزوجة من الجريانات الصفائحية ؟
- س ١٩.٨ : عندما تدور أسطوانة دائرية لانهائية الامتداد بسرعة زاوية ثابتة حول محورها الأفقي في جريان انسحابي منتظم عمودي على مولدها تتعرض لقوة شاقولية تعرف باسم تأثير ماجنوس Magnus effect . علل سبب نشوئها .
- س ٢٠.٨ : عندما يتحرك الجناح الحامل المحدود الامتداد بسرعة V_∞ في هواء ساكن عدم اللزوجة فإنه يتعرض لقوة باتجاه الجريان تماكس حركته نعرفه باسم المقاومة المهرضة F_{wi} Induced drag ، تنشج ، حسب نظرية الجناح الحامل التي وضعها براندل ، بسبب أن الهواء في أثر الخرشوخة نحو الأسفل . فإذا فرضنا أن حركة الهواء نحو الأسفل هذه تنفذ من حافة الجناح الخلفية على كامل مسار الجناح في منطقة مساحة مقطعها العمودي على V_∞ يساوي A' ، بينما خارج هذه المنطقة يبقى الهواء ساكناً ، أحسب F_{wi} بدلالة قوة الرفع F_A والضغط التحريكي $\frac{\rho}{2} V_\infty^2$.
- الحل : عندما يكون الجناح لانهائي الامتداد فإن قوة الرفع F_A المؤثرة عليه تكون متعامدة مع V_∞ ، حسب قانون كوتتا - يوكوفسكي ، ولا يتعرض الجناح في حالة سائل مثالي لأية مقاومة . أما في حالة الجناح المحدود الامتداد فتتشكل خلف الجناح جديدة إعصارية

(الشكل ١٦.٨ - ١١) تعرض سرعة نحو الأسفل v_i تحسب بموجب قانون بيرو - سافار . وينتج من ذلك أن سرعة الهواء خلف الجناح V_c تساوي المحصلة الشعاعية للسرعتين V_∞ و v_i ، ونكون بالتالي للقوة الفعلية المؤثرة على الجناح مركبة في اتجاه الجريان هي المقاومة المحرصة وأخرى هي قوة الرفع .

إن القدرة الحركية المتولدة في واحدة الزمن للجريان خلف الجناح تكافئ الاستطاعة التي تستهلكها المقاومة المحرصة نتيجة انتقالها بسرعة V_∞ . وعليه ينتج :

$$W_{hi} = \rho A' V_\infty \frac{v_i^2}{2} = P_i = F_{Wi} V_\infty \Rightarrow F_{Wi} = \rho A' \frac{v_i^2}{2} \quad (a)$$

من جهة أخرى ينتج عن قانون الدفع الخطي بالنسبة لكتلة الهواء التي تعبر A' أن قوة الرفع تساوي رد فعل تيار الدفع . وعليه تكون :

$$F_A = \rho A' V_\infty \cdot v_i \Rightarrow v_i = F_A / \rho A' V_\infty \quad (b)$$

ومنه نجد العلاقة المطلوبة :

$$F_{Wi} = \frac{F_A^2}{2 \rho A' V_\infty^2} = \frac{F_A^2}{4 q_\infty A'} \quad (c)$$

بمساعدة نظرية الجناح الحامل يمكن البرهان (انظر [4]) أن F_{Wi} تكون أصغر ما يمكن في الحالة التي تكون فيها قوة الرفع موزعة بشكل نصف قطع ناقص على امتداد الجناح b . عندئذ تكون السرعة المحرصة v_i ذات قيمة ثابتة على امتداد b ويكون السطح A' يكافئ سطح دائرة بقطر b ، أي $A' = \frac{\pi}{4} b^2$. فإذا فرضنا l طول وتر بروفيل الجناح وأدخلنا معامل قوة الرفع $c_A = F_A / q_\infty b$ ومعامل المقاومة المحرصة $c_{Wi} = F_{Wi} / q_\infty b$ نجد أخيراً من (c) العلاقة المعروفة :

$$c_{Wi} = c_A^2 \frac{l}{\pi b} \quad (d)$$

ت ٧.٨ ، أحسب القوة المحورية المؤثرة عند بدء عملية التفريغ لسائل عديم الاحتكاك من أوعية مختلفة الأشكال ، كالمبيئة في الشكل (٣٧.٨) ، عندما يبقى ملسوب السائل في الوعاء ثابتاً ويؤثر على سطحه السائب نفس الضغط المؤثر على فتحة التفريغ .

الحل : نطبق قانون الدفع العام لجريان غير مستقر على سطح تحكم يحيط بالكتلة الأتية في الوعاء بما فيها فتحة التفريغ فننتج حسب (8.106) قوة رد فعل السائل $F_s = -F_p$ بعد إهمال قوى التفاعل ووضوح $F_p = 0$ ، لأن الضغط المؤثر على الجزء الحر من سطح التحكم واحد كما هو مفروض ، بالصيغة :

$$F_s = - \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) dV + \int \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_n dA \quad (a)$$

($\begin{smallmatrix} +cs_{in} \\ -cs_{out} \end{smallmatrix}$)

إن سرعة التفريغ V_2 تنتج من (8.81) ، وتكون السرعة V في مقطع آخر A بموجب معادلة الاستمرار :

$$V = V_2 \frac{A_2}{A} = \sqrt{2gH} \frac{A_2}{A} \tanh \frac{\sqrt{2gH} t}{2L} ; \left(L = \int_0^{s_2} \frac{A_2}{A} ds \right)$$

وعليه ينتج مشتق السرعة بالنسبة للزمن :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2gH}{2L} \frac{A_2}{A} \frac{1}{\cosh^2 \frac{\sqrt{2gH} t}{2L}}$$

فإذا لاحظنا أن التكامل سيتم في لحظة معينة ، وأن العنصر الحجمي $dV = A ds$ ، وأن كمية السائل الداخلة لسطح التحكم ممدومة فيكون تيار الدفع بالنسبة لـ cs_{in} معدوماً ، ويبقى بسبب $V_2 = V_{20}$ التكامل $\int \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_n dA = -\rho V_2^2 A_2$ ونجد بالتالي من (a) بعد إصلاح بسيط :

$$F_s = 2\rho g H A_2 \left\{ \frac{H}{2L \cosh^2 \frac{\sqrt{2gH} t}{2L}} - \tanh^2 \frac{\sqrt{2gH} t}{2L} \right\} \quad (b)$$

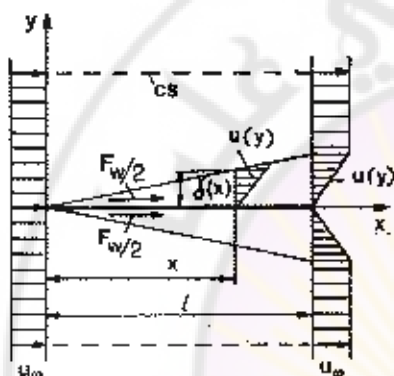
عند الزمن $t=0$ ، أي فور فتح صمام التفريغ تؤثر القوة المحورية .

$$F_s(t=0) = \frac{2\rho g H^2 A_2}{2L} \quad (c)$$

التي تكون كبيرة كلما كانت قيمة L صغيرة ، أي كلما كانت كمية السائل الراجع تسريها في فتحة التفريغ صغيرة ، وهذا ما ينطبق على الوعاء المبين في الشكل (٣٢.٨) (a) .

ت ٨٠٨ : صفيحة مستوية أفقية طولها l وعرضها b ، يمر عليها جريان منتظم حقيقي مواز لمستويها بسرعة U_∞ الشكل (ت ٨٠٨) . حول الصفيحة تتشكل طبقة حدية سماكتها $\delta = f(x)$ وتوزع السرعة فيها يحقق الشروط الحدية التالية : عندما $y < \delta$ ، $u(y) = c \cdot y$ عندما $0 \leq y \leq \delta$ حيث c ثابت التناقص . أحسب مقاومة الاحتكاك F_w وأوجد علاقتها مع عدد رينولدز $Re = \frac{U_\infty l}{\nu}$ واحسب قيمتها عندما : $l = b = 10 \text{ cm}$

$$\nu_1 = \nu = 1,03 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} ; \nu_2 = 1,01 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} ; U_\infty = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



الشكل ت ٨٠٨

الحل : إن المقاومة التي تتعرض لها الصفيحة المستوية هي مقاومة احتكاك بجثة تقريباً ناتجة عن إجهادات القص المؤثرة ضمن منطقة جريان الطبقة الحدية فقط . فإنا سكان : إجهاد القص على كل من وجهي الصفيحة فتكون :

$$F_w = 2 \int_0^l \tau_w dA = 2b \int_0^l \tau_w dx \quad (a)$$

من جهة أخرى تنتج F_w من العلاقة (8.132) مع مراعاة أن تجويف السرعة ينعدم خارج الطبقة الحدية :

$$F_w = \rho b \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy = 2\rho b \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy \quad (b)$$

وبمقارنة العلاقتين نجد :

$$\rho \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy = \int_0^l \tau_w dx \quad (c)$$

بموجب الشروط الحدية للمسألة فإن :

$$u(y) = U_\infty \frac{y}{\delta} \quad (d)$$

وينتج بالتالي إجهاد القص من قانون نيوتن للاحتكاك (2.12) :

$$\tau_s = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \eta \frac{U_\infty}{\delta} . \quad (e)$$

إذن يلزم تحديد δ . لذلك نشق (e) بالنسبة لـ x ونستخدم (c) فينتج :

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy = \tau_s = \eta \frac{U_\infty}{\delta} .$$

نستبدل u بقيمتها حسب (d) ونصلح قليلاً فنجد بعد التكامل :

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta U_\infty \left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] dy = \frac{\eta}{\delta} \Rightarrow \rho U_\infty \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta}{6} \right) = \frac{\eta}{\delta}$$

بفصل المتحولات وإجراء التكامل للطرفين وملاحظة أنه من أجل $x = 0$ تكون $\delta = 0$ نجد توزيع سماكة الطبقة الحدية :

$$\delta = \sqrt{\frac{12 \eta}{U_\infty \rho}} x = \sqrt{\frac{12 \nu}{U_\infty}} x . \quad (f)$$

بذلك نحصل من (e) على توزيع إجهاد القص على الصفيحة :

$$\tau_s = \sqrt{\frac{U_\infty^3 \rho \eta}{12 x}} = \rho \sqrt{\frac{U_\infty^3 \nu}{12}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} . \quad (g)$$

ونفج أخيراً مقاومة الاحتكاك من (a) :

$$F_W = 2 b \rho \sqrt{\frac{U_\infty^3 \nu}{12}} \int_0^l x^{-\frac{1}{2}} dx = 4 b \rho \sqrt{\frac{U_\infty^3 \nu}{12}} l^{\frac{1}{2}} .$$

وبعد إصلاح بسيط نجد العلاقة $F_W = f(Re)$ بالصيغة :

$$F_W = \frac{2}{\sqrt{3}} b \rho U_\infty \nu \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} = \text{const} \cdot \sqrt{Re} \approx 1,165 b \rho U_\infty \sqrt{Re} . \quad (h)$$

ونضع قيمتها العددية باستخدام القيم المعطاة : $F_W = 1,33 \text{ kp}$

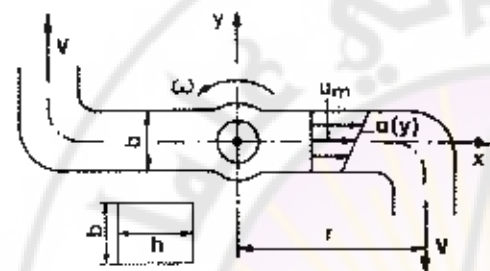
٩.٨ : قناة أفقية مقطوعها بشكل مستطيل أبعاده a, b تتركز في منتصفها على محور شافولي تستطيع الدوران حوله بسرعة زاوية ω . إذا كان الماء يدخل من منتصف القناة ويخرج من نهايتها المكونتين بشكل قائم ، الشكل (٩.٨) ، بسرعة أفقية v . أحسب عزم الدوران في جملة إحداثيات مطلقة ونسبية .

الحل : إذا كان r بعد محور نهاية القناة المكونة عن محور الدوران فتكون السرعة

الطلقة التي يسجلها مراقب ثابت هي $V = v - \omega r$ ، وتكون قوة رد فعل التساقورة حسب (8.114) تساوي $V \cdot Q \cdot \rho$. ونجد بالتالي عزم الدوران بالصيغة :

$$M_{abs} = \rho Q (v - \omega r) r, \quad (a)$$

حيث Q التيار الحجمي الكلي الذي يخرج من نهاية القناة .



الشكل ٩.٨

في جملة إحداثيات نسبية مثبتة على القناة فإن عزم رد فعل النافورة ينتج بالصيغة :

$$M' = \rho Q v \cdot r \quad (b)$$

هذه النتيجة تختلف عن (b) لأننا لم نراع تأثير القوى الاضافية .

إن القوة النابذة تؤثر باتجاه x وتقر بالتالي من مركز الدوران فعزمها إذن يساوي الصفر . وحيث أن تسارع كوريولس يتجه باتجاه $-y$ فإن قوة كوريولس تكون متعامدة على اتجاه حركة جزيئات السائل في القناة ولا تقوم بأي عمل موجب . ولكنها تؤدي لازاحة الجزيئات على جدار القناة مما يؤدي لعدم انتظام توزيع السرعة على عرض القناة . $u = u(y)$. وينجم عن ذلك فرق ضغط Δp بين جداري القناة الشافوليين ، أي باتجاه y . فإذا اعتبرنا حسب [4] [26] [85] توزيع السرعة $u(y)$ خطياً وكانت u_m السرعة في اتجاه محور القناة ، فإن فرق الضغط Δp ينتج من شرط التوازن بين قوة كوريولس ومحصلة قوى الضغط على جدران القناة . وبالتالي يكون :

$$\frac{\Delta p}{b} = \rho \cdot 2 \omega u_m \Rightarrow \Delta p = 2 \rho h \omega u_m, \quad (c)$$

ويكون لحصلة قوى الضغط $F_p = \Delta p h r$ ، التي يمكن اعتبارها تؤثر على بعد $r/2$ من محور الدوران ، عزم اتجاهه يعاكس دوران القناة ، أي :

$$M' = -F_p \frac{r}{2} = -\Delta p h \frac{r^2}{2} = -\rho h u_m \omega r^2 = -\rho Q \omega r^2 \quad (d)$$

حيث Q التيار الحجمي عبر مقطع القناة الشاقولي ، وعليه ينتج عزم الدوران في جملة الاحداثيات النسبية :

$$M_{rel} = M' + M'' = \rho Q (v - \omega r) r \quad (e)$$

وهذه طبعا نفس العلاقة (b) لأن عزم الدوران لا يمكن أن يتعلق بجملة الاحداثيات المختارة .

الجدير بالإشارة أن العلاقة (c) يمكن استخراجها بمساعدة معادلة برنولي للجريانات النسبية (8.22) مع الأخذ بعين الاعتبار أن ثابتة برنولي تكون واحدة لكافة خطوط التيار (انظر ص ٢٦٩) .

٩ المعادلات الأساسية للجريانات المثالية ثنائية ومتجهة البعد

بينما تعتمد نظرية خيط التمييز على المعرفة المسبقة لشكل أنبوبة التيار ووضعيتهما المكانية ، فإن سرورة خطوط التيار لا تكون في الحالة العامة للجريان معلومة . لهذا فإن دراسته التحريكية معقدة ، حتى في حالة إهمال اللزوجة .

١٠.٩ معادلات أويلر الحركية العامة

نعتبر الحركة العامة الفراغية (ثلاثية البعد) لسائل عديم الاحتكاك كثافته ρ . لتكن w, v, u مركبات شعاع السرعة V في اتجاه المحاور الديكارتية المتعامدة x, y, z . نقتطع من الجريان عنصراً حجبياً متناهياً في الصغر بشكل متوازي مستطيلات أبعاده dx, dy, dz ، وكتلته $dm = \rho dx dy dz$ ، الشكل (١٠.٩) . إن حركة هذا الجزيء تخضع لقانون نيوتن الاسامي للتجريك (8.3) :

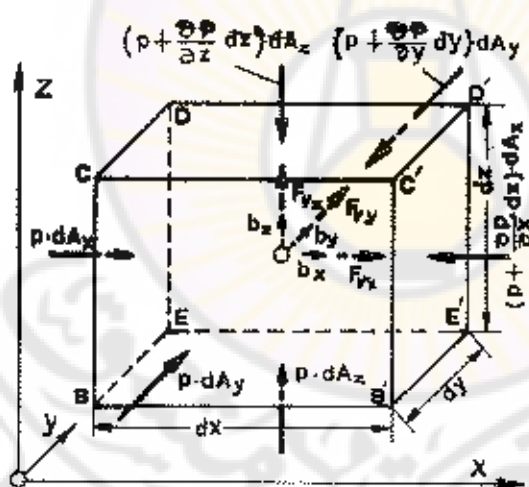
$$dF_x = dm \cdot b$$

لكن F_{Vx}, F_{Vy}, F_{Vz} مركبات محصلة القوى الجمعية F_V بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة على العنصر الحجمي في اتجاه المحاور الديكارتية . وحيث أن السائل عديم الاحتكاك فإن القوى السطحية تنحصر بقوى الضغط فقط . ونجد بسهولة ، باستخدام رموز الشكل (١٠٩) وإهمال كافة حدود المراتب العليا بعد نشر تابع الضغط بشكل سلسلة تايلور ، مركبات قوى الضغط في اتجاه z, y, x بالشكل التالي :

$$dF_{Px} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dA_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz,$$

$$dF_{Py} = -\frac{\partial p}{\partial y} dy \cdot dA_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dy \cdot dz \cdot dx,$$

$$dF_{Pz} = -\frac{\partial p}{\partial z} dz \cdot dA_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy.$$



الشكل ١٠٩ : اشتقاق معادلات أويلر الحركية العامة .

أما التسارع المادي المؤثر على الجزيء الحجمي فيتألف في الحالة العامة من التسارع المكاني وتسارع الحمل وتكون مركباته حسب (5.13) هي :

، $b_x = \frac{Du}{Dt}$ ، $b_y = \frac{Dv}{Dt}$ ، $b_z = \frac{Dw}{Dt}$ ، حيث $\frac{D}{Dt}$ يمثل حسب (5.12) الكسر التفاضلي المادي . وعليه تنتج من تطبيق قانون التحريك الاساسي في اتجاه المحاور x, y, z . بعد الاختصار على dm وإجراء إصلاحات بسيطة جملة المعادلات التفاضلية العامة التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Du}{Dt} &= F_{V_x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{Dv}{Dt} &= F_{V_y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Dw}{Dt} &= F_{V_z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

المعروفة باسم معادلات أويلر الحركية العامة لجريان غير مستقر عديم الاحتكاك قابل أو غير قابل للانضغاط ، وذلك نسبة لـ ليونهارد أويلر الذي صاغها عام 1755 . فإذا كان لحقل القوى الحجمية Φ_s كمون Φ_s ، وبالتالي تكون $F_V = - \text{grad } \Phi_s$ بموجب (3.55) ، فإن (9.1) تكتب بالصيغة الشعاعية البسيطة التالية :

$$\frac{DV}{Dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \text{grad } \Phi_s = 0 \quad (9.2)$$

إن معادلات أويلر الحركية تمثل في كل لحظة حالة التوازن بين قوى العطالة (قوة دالمبير) والقوى الحجمية وقوى الضغط المؤثرة على أي جزيء حجمي من سائل عديم الاحتكاك ، وبالتالي فهي تكون الأساس الذي يركز عليه علم الهيدروديناميك والغازديناميك . وتتضمن في حالة سائل قابل للانضغاط $\rho \neq \text{const}$ خمسة مجاهيل هي : p, w, v, u, ρ . وبالتالي تلزم الاستعانة بمعادلتين إضافيتين . الأولى معادلة الاستمرار العامة (6.15) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (9.3)$$

والثانية أحد قوانين تغير الحالة (راجع ٨.٢) ، كقانون تغير الحالة الأديباتي مثلاً :

$$p/\rho^\gamma = \text{const}. \quad (9.4)$$

أما في حالة السوائل غير القابلة للانضغاط ، $\rho = \text{const}$ ، فتتضمن (9.1) أربعة مجاهيل فقط هي p, w, v, u ، وتكفي بالتالي لإيجادها الاستعانة بمعادلة الاستمرار (6.21) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{أو} \quad \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (9.5)$$

في حالة الجريانات المستقرة تنعدم في معادلات أويلر الحركية كافة المشتقات الجزئية بالنسبة للزمن ، $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ، وتبسط صيغتها . ولكننا لنبقى بسبب تضمنها الحدود المعبرة عن قوى العطالة ، كالحـ $u \frac{\partial u}{\partial x}$ مثلاً ، تمثل جملة معادلات تفاضلية جزئية غير خطية من الدرجة الأولى . وهذه الصفة غير الخطية تعيق إلى حد كبير جداً إيجاد حلول عامة لها إلا في بعض الحالات القليلة المعروفة . وسنقتصر في هذا الفصل على معالجة الحلول المتعلقة بالجريانات المثالية فقط .

٢.٩ الحلول الممكنة لمعادلات أويلر الحركية

١.٢.٩ الشروط المحددة وشروط البرء

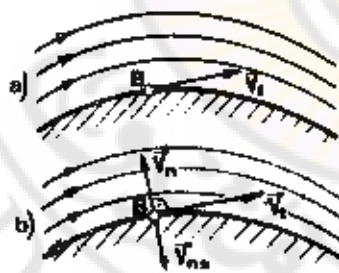
بالنسبة لغالبية مسائل الجريان ذات الأهمية العملية يتركز السؤال عادة على معرفة القيم الحركية والتعريكية (السرعة والضغط) للجريان حول سطوح

الاجسام الصلبة ، التي يمكن ان تكون ثابتة أو متحركة في السائل ، ولحسابها كتيمة عادة لا نسمح بتغوذ السائل عبرها. لذلك فإن الحل العام لمعادلات أويلر الحركية يجب ان تراعي الشروط الخاصة لحقل الجريان المعتبر ، التي تنقسم الى شروط حدية Boundary conditions وشروط ابتدائية Initial conditions. وتنقسم الشروط الحدية بدورها الى شروط تحريكية وشروط حركية .

الشروط الحدية التحريكية تراعي القوى المؤثرة على الحدود الخارجية لحقل الجريان . فإذا وجد لهذا الحقل سطح حر يفصل بين السائل والهواء الجوي فإن الضغط عليه يكون ثابتاً ويساوي ضغط عمود الهواء الجوي القابع فوقه .

الشروط الحدية الحركية تراعي قيم السرعة على جدار الجسم الصلب مع أخذ طبيعة السائل والحركة النسبية بين الجسم ومحاور الاحداثيات بعين الاعتبار. فإذا كان السائل عديم الاحتكاك ، أي أن لزومته معدومة ، $\eta = 0$ ، فإنه ينزلق على الجدران الصلبة ولا يلتصق بها ، طالما أن هذه كتيمة . وهذا يعني أن جدار الجسم يجب ان يكون خط تيار ، تطابقاً مع تعريف الاخير (انظر ٥.٥) .

عندما يكون الجدار الصلب ساكناً ، الشكل (٢.٩ - a) ، فإن



الشكل ٢.٩ : الشروط الحدية الحركية
لجدار ساكن (a) ولجدار متحرك (b) .

الشروط الحدية الحركية تقضي بأن تكون المركبة الناعمية للسرعة V_n في كل نقطة B على الجدار معدومة ، بينما تكون المركبة المماسية V_t على طول الجدار لانساي الصفر عادة ، ويمكن أن تبلغ نظرياً قيمة غير محدودة . وعليه تكون :

$$(9.6) \quad \text{على الجدار الساكن } (\eta = 0) : V_n = 0 ; V_t \neq 0$$

الجدير بالانتباه هنا أنه في حالة الجريانات الحقيقية يلتصق السائل بجدار لزوجته على الجدران الصلبة ، وبالتالي ينعدم شعاع السرعة . ونقضي الشروط الحدية الحركية عندئذ ان تكون :

$$\boxed{V_t = V_n = 0 \quad \text{على الجدار} \quad (\tau_t = 0)} \quad (9.7)$$

عندما يكون الجدار الصلب منحوكمًا ، الشكل (٢.٩ - b) ، فإن الجريان يبقى ملاصقًا للجدار ولا ينقسم عنه أو ينفذ عبره فقط في الحالة التي تكون فيها المركبة الناعمية لسرعة كل نقطة B من جدار الجسم ، V_{n0} ، تساوي وتعاكس المركبة الناعمية V_n لسرعة السائل في B . عندئذ يكون الجدار خطأ للتيار وتحقق الشروط الحدية الحركية عندما تكون :

$$\boxed{V_t \neq 0 ; V_n = V_{n0} \quad (\tau_t = 0)} \quad (9.8)$$

أخيراً فإن الشروط الابتدائية تراعي قيم حقل السرعة عند لحظة البدء $t = 0$. فهي تقضي إذن أن يتضمن الحل العام لحقل السرعة القيم الخاصة عند لحظة البدء وبالتالي يمكن كتابتها بالصيغة :

$$V(u, t)_{t=0} \equiv V_0(u) \quad (9.9)$$

إن الشروط الابتدائية لاغنى عنها لحل كافة مسائل الجريانات غير المستقرة.

٢.٣.٩ صياغة عملية لمعادلات أويلر الحركية

من المستحسن كتابة معادلات أويلر الحركية (9.1) بصيغة عملية تسمح بتطبيقها في حالة الجريانات الدووانية (الاعصارية) واللا دووانية (الكمونية) ، لما تتصف به الأخيرة من مميزات من حيث المعالجة الرياضية بالمقارنة مع الأولى (راجع ٢٠٧) .

نأخذ المعادلة الأولى من (9.1) ونضيف للطرف الأيسر الحدود

فنجهد بعد إصلاح بسيط :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = F_{v_x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9.10)$$

فإذا لاحظنا حسب (5.2) أن $|V|^2 = u^2 + v^2 + w^2$ وأنه بموجب (7.6) و (7.15) يكون :

$$\begin{aligned} \text{rot } V &= 2 \omega = i \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= 2 (i \omega_x + j \omega_y + k \omega_z) , \end{aligned} \quad (9.11)$$

فيمكن كتابة حدود القوس الأول من (9.10) بالصيغة $\frac{1}{2} \frac{\partial |V|^2}{\partial x}$ ، واستبدال القوس الثاني بالحد $2 \omega_x$ ، والقوس الثالث بالحد $2 \omega_y$ ، فإذا اتبعنا بالنسبة للمعادلتين الثانية والثالثة من (9.1) خطوات مماثلة لما جاء أعلاه فإن معادلات أويلر الحركية تأخذ الصيغة العملية التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial |V|^2}{\partial x} + 2 (w \omega_y - v \omega_z) &= F_{v_x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial |V|^2}{\partial y} + 2 (u \omega_z - w \omega_x) &= F_{v_y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial |V|^2}{\partial z} + 2 (v \omega_x - u \omega_y) &= F_{v_z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

يطلق على جملة المعادلات هذه اسم معادلات جروميكو - لامب التفاضلية لحركة السوائل عديمة الاحتكاك ، وذلك نسبة للعالم الروسي I.S. Gromiko التي صاغها عام 1881 والانجليزي Lamb الذي صاغها بعده بفترة طويلة [16] [122] . وبالرغم من كونها لا تختلف بالمضمون عن معادلات أويلر الحركية ، فلها ميزة

أساسية هي احتواء مركبات شعاع الاقصاء بشكل منفرد . وهذا يسهل إيجاد حلول مناسبة في حالة الجريانات الدورانية واللا دورانية .

باستخدام العلاقات الشعاعية التالية :

$$\mathbf{V} \times 2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = -\mathbf{i} (v\omega_z - w\omega_y) + \mathbf{j} (w\omega_x - u\omega_z) + \mathbf{k} (u\omega_y - v\omega_x), \quad (9.13)$$

$$\text{grad } \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} = \frac{\mathbf{i}}{2} \frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial x} + \frac{\mathbf{j}}{2} \frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial y} + \frac{\mathbf{k}}{2} \frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial z}, \quad (9.14)$$

$$\mathbf{F}_r = -\mathbf{i} F_{rx} - \mathbf{j} F_{ry} - \mathbf{k} F_{rz} = -\text{grad } \Phi_s, \quad (9.15)$$

$$\text{grad } p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (9.16)$$

تصبح (9.12) كمعادلة شعاعية من الشكل :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad } \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} - \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} + \text{grad } \Phi_s + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (9.17)$$

يمكن إرجاع كل حد من هذه المعادلة ، باستثناء $\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}$ ، الى تفاضل تام وإجراء التكامل بسهولة ، في حالة جريان مستقر . ولا يوجد في الحالة العامة لجريان دوراني وغير مستقر حل عام للمعادلة (9.17) .

٣.٢.٩ : نظام معادلات أويلر الحركية في حالة الجريانات الدورانية

إذا كانت جزيئات السائل تقوم بحركة دورانية حول محاور آتية وبسرعة

زاوية ω فتكون حسب (7.18) : $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{V} \neq 0$. عندئذ توجد حالتان

خاصتان يمكن فيها مكملة المعادلة (9.17) .

الحالة الأولى تتحدد من حقيقة أن الجداء الشعاعي للشعاعين V و $\text{rot } V$ هو شعاع يتعامد على المستوي المتشكل منها ، وبالتالي فإن $V \times \text{rot } V$ عمودي على شعاع السرعة V ، الذي يمر خط التيار في كل نقطة منه . وعليه يكون $\int (V \times \text{rot } V) \cdot ds = 0$ بالنسبة لكل خط تيار . فإذا فرضنا $ds = (dx, dy, dz)$ عنصراً خطياً من خط التيار الآتي ، وضربنا طرفي (9.17) بـ ds ولاحظنا أن الجداء العددي لشعاع تدرج قيمة ما في عنصر خطي موجه بمثل التفاضل التام لهذه القيمة فإن العلاقة (9.17) تصبح بعد إهمال الحد الثالث من الشكل :

$$\frac{\partial V}{\partial t} ds + d\left(\frac{|V|^2}{2}\right) + d\Phi_s + \frac{dp}{\rho} = 0$$

فإذا كان السائل باروتروياً وأدخلنا تابع الضغط $P(p) = \int \frac{dp}{\rho}$ نتيجاً بالمسكاملة العلاقة :

$$\int_{(s)} \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{|V|^2}{2} + \Phi_s + P = C_B(t) , \quad (9.18)$$

التي تعرف باسم معادلة برنولي العامة لجريان ثلاثي البعد باروتروبي ، $p = f(p)$ ، وغير مستقر . $C_B(t)$ تمثل ثابتة برنولي ويكون لها قيمة واحدة على طول خط تيار آتي ، وتتغير بالتالي مع الزمن ، ومن خط تيار آتي لآخر . كما يطلق على هذه المعادلة أحياناً اسم معادلة لاغرانج - برنولي . في حالة الجريانات المستقرة ينعدم الحد الأول من (9.18) وتصبح من الشكل :

$$\frac{|V|^2}{2} + \Phi_s + P = \frac{|V|^2}{2} + \Phi_s + \int \frac{dp}{\rho} = C_B , \quad (9.19)$$

حيث يكون لـ C_B قيمة واحدة على طول خط التيار المعبر . ونتيج قيمة تابع الضغط بالاستعانة بالعلاقة (9.4) مثلاً . وتبسط هذه العلاقة عندما تكون

القوى الحجمية ناتجة عن حقول الجاذبية الأرضية وبالتالي $\Phi_n \equiv \Phi_{gn} = gz$. كما يمكن في حالات عملية عديدة دراسة حركة السائل وكأنه ذو كتلة ولكن « بدون » وزن . وتأخذ عندئذ (9.19) الصيغة المختزلة :

$$\frac{|V|^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C_n \quad (9.20)$$

عندما تكون $\rho = \text{const}$ تبسط المعادلات السابقة وتصبح (9.18) في حالة تأثير الثقالة كقوة خارجية من الشكل :

$$\int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_n \quad (9.21)$$

وهذه هي معادلة برنولي العامة للجريانات غير المستقرة وغير القابلة للانضغاط . وتأخذ في حالة جريان مستقر لسائل « عديم » الوزن الصيغة المختزلة البسيطة :

$$\frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_n \quad (9.22)$$

والجدير بالملاحظة ان معادلة برنولي بصيغتها الواردة أعلاه ، (9.18) حتى (9.22) ، تتميز بالمقارنة مع الصيغ المشتقة في الفقرة (٢٠٨) بكون السرعة $|V| = V$ تساوي جذر مجموع مربعات مركباتها الثلاثة w, v, u لأن جزئيات السائل تتحرك في ثلاثة اتجاهات متعامدة ، بينما يكون للسرعة في نظرية خيط التيار اتجاه واحد فقط . الحالة الثانية للجريانات الدورانية التي يمكن فيها إجراء تكامل العلاقة (9.17) تنتج عندما يكون خط التيار منطبقاً على خط الأعاصير . عندئذ يكون بفضل التماثل بين مفهوميهما [قارن بين الشكل (٥.٥) و (١٠.٧)] $\text{rot } V \parallel V$ وبالتالي $V \times \text{rot } V \equiv 0$. هذه الحالة تلعب دوراً هاماً في نظرية الجناح الحامل حيث تكون خطوط الأعاصير المتشكلة خلف الجناح بنفس الوقت خطوطاً للتيار . ولكن الجريان يكون ، بالمقارنة مع الحالة الأولى ، كموئياً بالرغم من أن

جولانه غير معدوم ، ويكون بالتسالي لثابتة برنولي في العلاقات الواردة أعلاه قيمة واحدة بالنسبة لكافة خطوط التيار المستقرة أو الآنية .

٤.٣.٩ : نطاول معادلات أويلر الحركية في حالة الجريانات اللادورانية

١.٤.٣.٩ كل جريان مثالي هو حل لمعادلات أويلر الحركية

لقد تبين من الدراسة الحركية (الفصل الثالث) أن حركة السوائل المثالية تكون في الحالة العامة لادورانية ، أي تحقق شرط الخلو من الدوران (7.19) باستثناء بعض النقاط الشاذة التي تخترقها أعاصير :

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } V = 0 \quad (9.23)$$

عندئذ يكون الجداء $V \times \text{rot } V = 0$ ، وبالتالي يمكن ، كما رأينا أعلاه ، مكاملة المعادلة (9.17) . وعليه يمكن الاستنتاج أن الجريانات اللادورانية تمثل حلولاً لمعادلات أويلر الحركية .

لبرهان أن هذه النتيجة الهامة تكون دائماً محققة نعود لمعادلات جروميكو-لامب ونشتق المعادلة الثانية جزئياً بالنسبة لـ z والثالثة بالنسبة لـ y . ثم نطرح الثانية من الثالثة فنجد ، بعد إصلاح بسيط وملاحظة أن مشتق القوى الحجمية الثابتة معدوم وأن $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}$ ، العلاقة :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - 2u \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) + 2\omega_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ + 2 \left(v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (9.24) \end{aligned}$$

بمساعدة العلاقة (9.11) يمكن التأكد بسهولة أن القوس الأول يساوي

ω_x ، والثاني حسب (7.41) يساوي $-\frac{\partial \omega_x}{\partial x}$ ، وبمساعدة معادلة الاستمرار ينتج أن القوس الثالث يساوي $-\frac{\partial u}{\partial x}$. وعليه تصبح (9.24) بعد اصلاحها من الشكل :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} .$$

فإذا أدخلنا الكسر التفاضلي المادي $\frac{D}{Dt}$ حسب (5.12) في هذه العلاقة تنتج منها وبالتبديل الدوري مجموعة المعادلات التفاضلية التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\omega_x}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{D\omega_y}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{D\omega_z}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} , \quad (9.25)$$

التي تكتب بالصيغة الشعاعية التالية :

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (9.26)$$

وتعرف باسم المعادلة الأعصارية حيث يحد القوس الجداء الداخلي لشعاع الأعصار ω والشعاع الرمزي نابلا ∇ حسب (7.16) .

عندما يكون الجريان لادورانياً يكون موجب (9.23) $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ وتكون بالتالي (9.25) محققة بالتطابق . وهذا يعرهن أن الجريانات اللادورانية حلول لمعادلات أويلر الحركية . كما ينتج أيضاً أن التغير الزمني لشعاع الأعصار يساوي الصفر ، وذلك بالتطابق مع قوانين هلمهولتز (5.3.7) . فإذا كانت

جزيئات السائل في لحظة ما لا تقوم بحركة دورانية وبالتالي $\omega = 0$ ، كما هو الأمر عند لحظة بدء الحركة ، فإن حركتها فيما بعد تبقى أيضاً لادورانية . وهذا ما يمكن تأكيده بسهولة بمساعدة المعادلة الاعصارية .

ليكن ω_1 شعاع الاعصار في اللحظة t_1 . فبعد فترة زمنية قصيرة جداً $\Delta t = t_2 - t_1$ يصبح :

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta t \left(\frac{D\omega}{Dt} \right)_1 . \quad (9.27)$$

فإذا كان السائل في اللحظة t_1 ساكناً فيكون حكماً $\omega_1 = 0$ ، ويكون أيضاً $\left(\frac{D\omega}{Dt} \right)_1 = 0$ حسب (9.26) و $\omega_2 = 0$ حسب (9.27) . أي أن حركة السائل تكون في اللحظة t_2 لادورانية أيضاً وتبقى كذلك بالنسبة لأي زمن آخر $t_3, \dots, t_n$. هذه النتيجة تبقى صحيحة أيضاً في حالة الجريان المستوي ، حيث يمكن البرهان بسهولة بمساعدة (9.25) أنه في المستوي $y-x$ يكون : $\frac{D\omega_z}{Dt} = 0$. وعليه يمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية :

كل حركة لسائل مثالي (عديم الاحتكاك) تبدأ من السكون تمثل جرياناً لادورانياً ، وبالتالي حلاً لمعادلات أويلر الحركية .

٢.٤.٢.٩ معادلة برنولي العامة للجريان الكهرومغناطيسي

إذا كان شرط انغلاق من الدوران (9.23) في حقل الجريان (أو في منطقة منه) محققاً ، فيكون حسب (7.22) شعاع السرعة مساوياً شعاع تدرج كون السرعة $\Phi(x,y,z,t)$ (انظر ص ٢٢٠) :

$$\mathbf{V} = \text{grad } \Phi , \quad (9.28)$$

ونحصل حسب (7.21) على مركبات السرعة في اتجاه المحاور z, y, x ، أو في أي اتجاه آخر s ، كمشتقات جزئية لـ Φ بالشكل :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} ; V_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} . \quad (9.29)$$

وينتج من ذلك أن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) ; \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) ; \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} . \end{aligned} \quad (9.30)$$

فإذا كان Φ_s كمون حقل القوى الحجمية ووضعنا $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ في (9.12) فإن معادلات أويلر الحركية للجزيئات الكمونية غير المستقرة تأخذ بصيغة مركبات الشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

أو بصيغة شعاعية ، نحصل عليها بسهولة من (9.17) بوضع $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ واستخدام (9.30) :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \Phi_s \right) + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p = 0 . \quad (9.32)$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المعادلة بالعنصر الخطي ds (dx, dy, dz) فإن كل حد

من طرفها الأيسر يصبح تفاضلاً تاماً ويمكن بالتالي مكاملتها في لحظة معينة حداً
حداً حيث تنتج باستخدام تابع الضغط $p = \int \frac{dp}{\rho}$ العلاقة :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + p + \Phi_s = C_B(t) , \quad (9.33)$$

المعروفة باسم معادلة برنولي العامة للجويانات الكمونية القابلة للانضغاط
وغير المستقرة . $C_B(t)$ مثل ثابتة برنولي وتكون في اللحظة المعتمدة ذات قيمة
واحدة في كامل حقل الجريان .

في حالة الجريانات المستقرة ينعدم الحد $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ وتصبح (9.33) :

$$\frac{|V|^2}{2} + p + \Phi_s = C_B . \quad (9.34)$$

عندما $\rho = \text{const}$ تنتج معادلة برنولي للجويانات الكمونية غير القابلة
للانضغاط و غير المستقرة بالصيغة :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi_s = C_B(t) , \quad (9.35)$$

وعندما يكون الجريان مستقراً ويخضع لتأثير الجاذبية الأرضية فقط ،
تصبح معادلة برنولي عندئذ : $\Phi_s \equiv \Phi_{s0} = g z$

$$\frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = C_B \quad (9.36)$$

المطابقة شكلاً لمعادلة برنولي للقدرة (8.11) ، مع ملاحظة أن شعاع السرعة
هنا ذو ثلاث مركبات ، وثابتة برنولي C_B لا تتغير قيمتها في كامل
حقل الجريان .

٣٠٩ المضمود الفيزيائي لكمون السرعة Φ ، ومفهوم المكند

الهربروديناميكية

إذا أثرت ضغوط صدمية أو دفعية Impulsiv pressure بصورة فجائية على جسم ساكن في سائل مثالي بحيث تتزايد مرعة الجسم من الصفر وحتى قيمة معينة V خلال فترة زمنية قصيرة ، فينشأ حول الجسم جريان غير مستقر وكوفي لأن الحركة بدأت من السكون، وتنتطبق بالتالي معادلة بونولي العامة للجريانات الكمونية (9.35) .

خلال المجال الزمني القصير جداً يكون تغير السرعة ، وتغير القوى الكتلية وكذلك تغير القدرة الإجمالية للجريان أصغر بكثير من تغير قوى الضغط الصدمية . وعليه إذا ضربنا طرفي المعادلة (9.35) بالعنصر الزمني dt وأهملنا

المقادير $\frac{|V|^2}{2} \cdot dt$ ، $\Phi_s \cdot dt$ ، $C_B(t) \cdot dt$ فينتج :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{p}{\rho} dt = 0 \quad .$$

نجري التكامل بالنسبة لكامل السطح الخارجي للجسم فنجد :

$$\rho \Phi = - \int_0^{\Delta t} p dt \quad (9.37)$$

إن التكامل في هذه العلاقة يعبر عن العمل الإضافي الذي تبخره قوى الضغط الصدمية التي أدت لنشوء الجريان ذي كمون السرعة Φ . وهذا يوضح المضمون الفيزيائي للتابع Φ ، إذ يرتبط بالقدرة الحركية للسائل $W_{Ki,m}$ التي تنتقل للسائل من السطح الخارجي للجسم . وعليه يمكن باختيار توزيع ملائم لقوى الضغط الصدمية توليد جريان كوفي مناسب يتحدد كمون سرعته بالعلاقة :

$$\Phi = - \frac{1}{\rho} \int p \, dt + \text{const} .$$

نفرض أن السائل المثالي لانهائي الامتداد وأن شكل توزيع الضغط الصدمي p المطبق على الجسم خلال الفترة الزمنية المعتبرة dt يبقى ثابتاً . فإذا كان dA عنصراً سطحياً من السطح الخارجي للجسم فتكون قوة الضغط الصدمية الجزئية $dF_p = p \cdot dA$. ويكون حسب قانون هام في الديناميك [122] العمل الذي تنجزه قوى الضغط الصدمية ، وبالتالي القدرة الحركية التي يكتسبها السائل ، يساوي القوة $\times$ المتوسط الحسابي لمركبتي السرعة البدائية والنهائية في اتجاه القوة $\times$ الزمن . وحيث أن السرعة البدائية عند الزمن $t = 0$ كانت معدومة ، وتصبح مركبتها باتجاه الناظم ، أي باتجاه p ، المتجه إلى داخل السائل بعد زمن dt مساوية $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ ، فتنتج القدرة الحركية الجزئية للسائل :

$$dW_{K_{F1}} = dF_p \cdot V_{um} \cdot dt = p \, dA \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot dt .$$

باستخدام العلاقة (9.37) وإجراء التكامل بالنسبة لكامل السطح الخارجي للجسم نجد :

$$W_{K_{F1}} = - \frac{\rho}{2} \oint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA = - \frac{\rho}{2} \int_{(A)} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA . \quad (9.38)$$

هذه القدرة الحركية التي يكتسبها الجريان نتيجة الحركة المتسارعة وغير المنتظمة للجسم يمكن اعتبارها متناسبة مع مربع سرعة الجسم V_n إذا أدخلنا تبسيطاً للحساب مفهوم الكتلة الهيدروديناميكية m_n كتلة رمزية تحقق العلاقة التالية :

$$W_{K_{F1}} = \frac{m_n}{2} V_n^2 . \quad (9.39)$$

m_{11} يمكن حسابها بمساعدة (9.38) إذا كان Φ معلوماً . وتعلق قيمتها بشكل الجسم ووضعيته بالنسبة لاتجاه التسارع وليس لها علاقة بكتلة الجسم نفسه . فإذا كانت كتلة الجسم نفسه m_B فإن القوة الإجمالية الواجب تطبيقها عليه لكي يكسب تسارعاً مقداره dV/dt يلزم أن تكون :

$$F = (m_B + m_{11}) \frac{dV}{dt} = m_{app} \frac{dV}{dt} \quad (9.40)$$

حيث m_{app} الكتلة الظاهرية للجسم Apparent mass . وعليه يلزم في حالة الحركة غير المنتظمة في سائل مثالي التغلب على قوة إضافية تعاكس اتجاه التسارع ، وتسمى لذلك مقاومة تسارع ، مقدارها :

$$F_{wh} = m_{11} \frac{dV}{dt} \quad (9.41)$$

لهذا فإنه من الهام جداً معرفة قيمة m_{11} ، التي تساوي في حالة الاسطوانة الدائرية كتلة السائل المزاح ، وفي حالة الكرة نصف كتلة السائل المزاح ، كما سنبرهن ذلك فيما بعد . وتلعب الكتلة الهيدروديناميكية وعزوم العطالة الهيدروديناميكية دوراً أساسياً في حركات السفن ، وخاصة عند حساب القوى المؤثرة على جسم السفينة أثناء حركتها على مسار مستقيم أو منحني لتحديد جاهزيتها على المناورة ، انظر مثلاً [123] [124] [125] .

١٠ الجريانات الكهرومغناطيسية ثنائية البعد (المستوية)

الجريانات ثنائية البعد أو المستوية تتميز بأن شعاع السرعة v يكون في كل لحظة موازياً لمستويات وله نفس القيمة في كل نقطة واقعة على الناطم على هذا المستوي . في الطبيعة لا توجد جريانات مستوية . فحقق لو أغفلنا تأثير اللوجة فإن الجريان على حدود منطقة الجريان المتغيرة ، أو عند نهايات الجسم ، كما في حالة الجناح الحامل الحدود الامتداد (الشكل ١٦٠٨) ، يكون ثلاثي البعد . ولكن من منطلق تسهيل الدراسة فن

الأفضل في حالات عملية عديدة دراسة الجريان المستوي كخطوة تقريبية عامة لفهم الجريان الدلعي ومن ثم ادخال التصحيحات اللازمة لمراعاة تأثير حدود مجال الجريان إذا كان ذلك ضرورياً .

١.١٠ تابع الكمون Φ ، معادلات لابلاس وإمكانات هلمهولتز

نفرض أن الجريان الكموني مستقر وواقعاً في مستوي الإحداثيين y, x . فإذا كان $\Phi = \Phi(x, y, t)$ كمون السرعة (تابع الكمون) فإن مركبات السرعة باتجاه محاور الإحداثيات الديكارتية حسب (9.29) تصبح :

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; w = 0 , \quad (10.1)$$

وفي اتجاه الإحداثيات القطبية (الشكل ١.٦ ، ص ٢٠٨) :

$$V_r(r, \varphi) = V \cos(V, r) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} , V_\varphi = V \sin(V, s) = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} . \quad (10.2)$$

ونحصل على مركبة السرعة في اتجاه ما s كمشتق جزئي لتابع الكمون في هذا الاتجاه :

$$V_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} . \quad (10.3)$$

إن شرط الحل من الدوران الذي ينحصر في حالة الجريانات المستوية حسب (7.27) بالعلاقة :

$$\omega_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (10.4)$$

يكون عتقاً بالتطابق ، كما يمكن التأكد من ذلك بسهولة بمساعدة (10.1) . بينما تأخذ معادلة الاستمرار (6.22) :

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.5)$$

الصيغة الهامة التالية :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (10.6)$$

المعروفة باسم معادلة لابلاس أو معادلة الكمون للجريانات الكمونية ثنائية البعد ، التي تجمع بين شرط الحلو من الدوران و شرط الاستمرار ، ويمثل معادلة تحديد التابع Φ .

عندما يكون تابع الكمون Φ معلوماً فيمكن بسهولة تحديد حقل السرعة ومن ثم تحديد حقل الضغط بمساعدة معادلة برنولي . ومن هنا فإن المسألة تتركز على إيجاد توابع كمون مناسبة $\Phi(x,y)$ تحقق الشروط الحدية الخاصة لمسائل الجريان المطلوبة . وهذه مسألة معقدة جداً في الحالة العامة . ولكن من حسن الحظ أن معادلة الكمون تخضع لها عدد كبير من الظواهر الفيزيائية المعروفة في الالكتروديناميك ومقاومة المواد وغيرها . وهذا يقود إلى إمكانية الاستعانة بمبدأ التماثل Analogy واستخدام الحلول المعروفة في حقول أخرى من الفيزياء لحل مسائل الجريان .

من جهة أخرى فإن الصفة الخطية لمعادلة لابلاس (بعكس معادلات أويلر) تسمح باستخدام مبدأ التضام أو التراكب superposition principle . فإذا كانت $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ تمثل حلولاً فردية خاصة لمعادلة الكمون فيكون أيضاً تابع الكمون الإجمالي أو الكلي :

$$\Phi_{tot} = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \dots + c_n\Phi_n \quad (10.7)$$

يمثل حلًا لهذه المعادلة . وتحدد قيمة الثوابت $c_1, \dots, c_n$ من الشروط الحدية وشروط البدء . على هذا الأساس بنيت طريقة النقاط الشاذة التي تستخدم جريانات كمونية بسيطة بمثابة « لبنات » لتشييد أجسام الجريان المناسبة .

إلى جانب ما تقدم فبالإمكان الحصول على حل عام للمعادلة (10.6) بالاستعانة بطريقة نظرية التتابع Function theory والتشثيل المطابق Conformal mapping ، وذلك باستخدام مساحة غوص للأعداد المركبة Complex number حيث يكون :

$$\Phi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy) ; i = \sqrt{-1} . \quad (10.8)$$

لقد طورت على الأسس السابقة طرق هندسية عديدة لحساب المسائل العملية لتطبيقات ميكانيك السوائل المختلفة ، وسوف نعالج مبادئها فيما بعد . ولكن يلزم الآن توضيح مفهوم أساسي آخر .

٢.١٠ تابع التيار Ψ ، مضمون الفيزيائي ومعرفته مع Φ

لقد رأينا أن تابع الكمون $\Phi(x,y)$ يحقق شرط الخلو من الدوران بالتطابق بينما تقوم معادلة الاستمرار بالصيغة $\Delta \Phi = 0$ إلى معادلة تحديد Φ .
لنعتبر تابعاً جديداً $\Psi = \Psi(x,y)$ ترتبط به مركبتا السرعة بالعلاقين التاليين :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} . \quad (10.9)$$

فإذا أدخلناهما في العلاقة (10.5) نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \equiv 0 ,$$

بينما ينتج بإدخالها في (10.4) :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta \Psi = 0 . \quad (10.10)$$

إذن فإن التابع Ψ يحقق معادلة الاستمرار بالتطابق ، ويأخذ شرط الخلو من الدوران صيغة معادلة لابلاس كمعادلة لتحديد هذا التابع .

لتوضيح المضمون الفيزيائي للتابع ψ ننتقل أولاً من المعادلة التفاضلية لخط التيار (5.30) ، التي يمكن كتابتها في حالة الجريان المستوي بالصيغة :

$$u dy - v dx = 0 ,$$

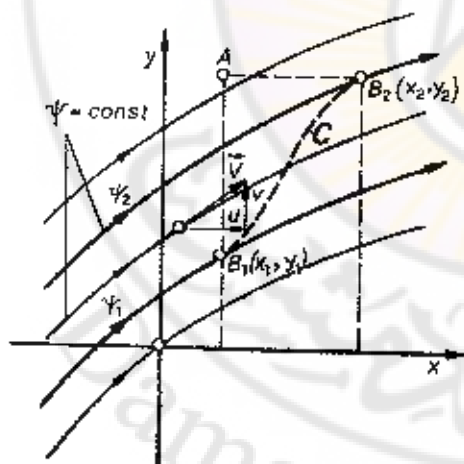
وتصبح باستخدام (10.9) من الشكل :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0 ,$$

حيث $d\psi$ التفاضل التام للتابع ψ . فإذا أجرينا التكامل نحصل على معادلة خط التيار بالصيغة :

$$\psi(x,y) = \text{const} \quad (10.11)$$

لذلك يعرف ψ باسم تابع التيار Stream function . فإذا كان معلوماً فيمكن بسهولة الحصول على صورة الجريان المستوي باعطاء الثابت const قيمة اختيارية متغيرة موجبة وسالبة .



الشكل ١٠.١٠ : توضيح المضمون الفيزيائي لتابع التيار.

نعتبر الآن في المستوي

xy حزمة من خطوط التيار

$\psi = \text{const}$ ، ونختار منها

على غير تعيين المنحنيين

$\psi_2 = \text{const}_2$ و $\psi_1 = \text{const}_1$

الشكل (١٠.١٠) . نختار

نقطة ما $B_1(x_1, y_1)$ واقعة على

ψ_1 وأخرى $B_2(x_2, y_2)$ واقعة

على ψ_2 ونصل بينهما بالمنحنى

الاعتباطي الشكل C .

إن التيار المحيطي الذي

يعبر C بالنسبة لواحدة العرض يساوي ، كما هو واضح من الشكل (١٠.١٠) ، الفرق بين التيار الحجمي الذي يعبر القطعة المستقيمة $\overline{A B_1}$ بسرعة u والذي يعبر $\overline{B_1 A}$ بسرعة v وعليه فإن :

$$Q_C = \left[\int_{x_1}^{x_2} u \, dy \right]_{x=x_1} - \left[\int_{x_1}^{x_2} v \, dx \right]_{y=y_1}$$

ويكون باستخدام (10.9) :

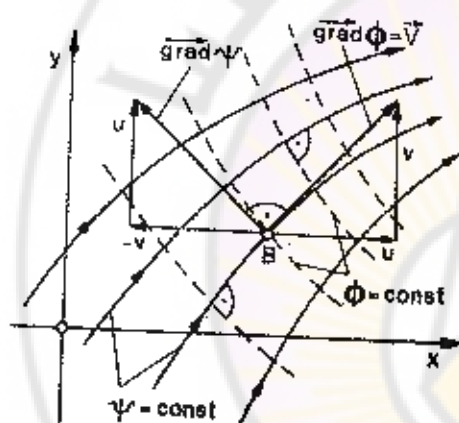
$$\begin{aligned} Q_C = Q_{12} &= \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \, dy \right]_{x=x_1} + \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \, dx \right]_{y=y_1} = \\ &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \quad (10.12) \end{aligned}$$

هذه النتيجة تعني أن التيار الحجمي الذي يعبر المنحني C الواصل بين نقطتين من خطي تيار لا يتعلق بشكل المنحني ويساوي الفرق بين قيمتي تابع التيار ظلي التيار المعبرين . فإذا كان التابع Ψ وحيد التمين يصبح $Q_{12} = 0$ عندما تنطبق B_1 على B_2 وتصبحان بالتالي على خط تيار واحد . أما إذا كان Ψ متعدد القيم فيكون الفرق $Q_{12} = \Psi_2 - \Psi_1 \neq 0$ ، وبالتالي فإن حقل الجريان يكون حاوياً في النقطة المعتبرة من خط التيار على نبع أو بالوعة .

إن مفهوم خط التيار ومعناه الفيزيائي ينحصر بالجريانات المستوية فقط ، بخلاف تابع الكمون Φ . ولكن النتيجة (10.12) تحافظ على صحتها في حالة الجريانات الحقيقية غير القابلة للانضغاط مما يتيح إمكانية جيدة لإنشاء صور للجريان بطرق بيانية تستند أيضاً على العلاقة بين تابع التيار وتابع الكمون الواجب توضيحها .

نعتبر في المستوى yx حزمة من خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ ، نصل بين كافة نقاط حقل الجريان التي يكون فيها لتابع الكمون قيمة ثابتة فنحصل على خطوط الكمون الثابت Equipotential lines ، $\Phi = \text{const}$ ، الشكل (٢.١٠) . نعتبر النقطة B التي يلتقي بها أحد خطوط التيار مع أحد خطوط الكمون الثابت . وبما أن :

$$\mathbf{V} = \text{grad } \Phi = \mathbf{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = iu + jv ,$$



بوجب (10.1) ، فيكون بالتالي شعاع تدرج Φ في النقطة B مماساً على خط التيار المار منها ومتعامداً في نفس الوقت مع خط الكمون الثابت المار من B . كما يكون شعاع تدرج Ψ الذي يتحدد

الشكل ٢.١٠ : خطوط الكمون الثابت $\Phi = \text{const}$ وخطوط التيار $\Psi = \text{const}$ تؤلف حزمتين من المنحنيات المتعامدة مع بعضها .

بمساعدة (10.9) بالعلاقة :

$$\text{grad } \Psi = \mathbf{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -iv + ju$$

متعامداً في B مع $\Psi = \text{const}$. وهذا يعني أن الجداء الداخلي لشعاعي تدرج Φ و Ψ يجب أن يكون معدوماً :

$$\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi = (iu + jv) (-iv + ju) = -uv + uv = 0 .$$

هذه النتيجة يمكن تعميمها على كل نقطة من حقل الجريان ، مما يسمح بصياغة
الجملة الهامة التالية :

تؤلف خطوط التيار $\psi = \text{const}$ وخطوط الكمون $\Phi = \text{const}$
في حقل الجريان المستوي شبكة منحنيات متعامدة على بعضها البعض
في كل نقطة تتقاطع بها Orthogonal flow net .

هذه الخاصة المعروفة في الحقل الكهروايسي تسمح بتطوير طرق عملية لحل
مسائل الجريان بالاعتماد على التماثل الالكتروديناميكي - الهيدروديناميكي .
إن العلاقة بين Φ و ψ تعبر عنها أصلاً المعادلات (10.1) و (10.9) .
بمقارنتها نجد العلاقاتين :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad (10.13)$$

المعروفتين باسم معادلات كوشي - ريمان التفاضلية نسبة للعالمين A . Cauchy
(1789-1857) الفرنسي و B.Riemann (1826 - 1866) الألماني .
بمساعدهتها يمكن من جهة تحديد ψ إذا كان Φ معلوماً (أو بالعكس) . فإذا
كاملنا المعادلة الأولى من (10.13) نجد :

$$\psi = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy + c(x) = f(x,y) + c(x) , \quad (10.14)$$

حيث $c(x)$ تابع للاعداد في x فقط . ويتحدد بسهولة باشتقاق (10.14) بالنسبة
لـ x ومقارنة النتيجة مع المعادلة الثانية من (10.13) ، حيث يكون :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x,y)] + c'(x) = f'(x,y) + c'(x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (10.15)$$

وينتج غالباً $c'(x) = 0$ ، ويكون بالتالي $c(x) = \text{const}$. ويمكن عندئذ وضع $c(x) = 0$ أو أية قيمة عددية أخرى .

من جهة أخرى تنطبق (10.13) وعلى أساس أن كلا من Ψ و Φ يحقق معادلة لابلاس ، $\Delta \Phi = \Delta \Psi = 0$ ، إمكانية تطبيق مبدأ التبادل بين تابع الكمون وتابع التيار ، بمعنى استبدال أحدهما بالآخر ، والحصول بذلك على جريان جديد تشكل خطوط تياره (التي كانت أصلاً خطوطاً للكمون) ، وخطوط كمونه شبكة من المتعديلات المتعامدة ، بغض النظر طبعاً فيما إذا كان لهذا الجريان الجديد أهمية عملية أم لا .

أخيراً تجدر الإشارة أن الصفة الخطية لمعادلة لابلاس (10.10) تسمح باستخدام مبدأ التضاف للحصول على حل عام لتابع التيار Ψ ، حيث يكون على غرار (10.7) :

$$\Psi_{\text{tot}} = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots + c_n \Psi_n \quad (10.16)$$

تابع التيار الاجمالي لجريان ينتج من تضاف جريانات بسيطة نوابع تيارها $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$. ويتم تحديد قيمة الثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ من الشروط الحدية . ويكون لتابع التيار الصفري $\Psi_{\text{tot}} = 0$ أهمية خاصة ، إذ يمكن استبداله بجسم صلب دون أن يؤثر ذلك على الجريان حوله .

٣.١٠ أمثلة عن الجريانات الكهروستاتيكية البسيطة

سنعتبر بعض النوابع البسيطة $\Phi(x,y)$ التي نتأكد منها فيما إذا كانت تمثل نوابع تكون سرعة ، وعندئذ نوجد نوابع التيار $\Psi(x,y)$ وصور الجريان لها . كما سنستخدم مبدأ التضاف والتبادل للحصول على جريانات جديدة .

١٠.٣.١٠ الجريان الدوراني المنتظم

ليكن لدينا التابع الخطي :

$$\Phi_T(x,y) = a x + b y , \quad (10.17)$$

حيث a, b ثابتان لأعداد حقيقية . هذا التابع يحقق معادلة لابلاس (10.6) ، وبالتالي فهو تابع كمون سرعة لجريان مستوي . لنوجد تابع التيار .

باستخدام (10.17) ينتج حسب (10.14) :

$$\Psi_T = \int a dy + c(x) = a y + c(x) ,$$

وحسب (10.15) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = c'(x) = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -b \Rightarrow c(x) = -b x .$$

وعليه يصبح تابع التيار :

$$\Psi_T(x,y) = a y - b x . \quad (10.18)$$

ويمكن بسهولة التأكد أن Φ و Ψ يحققان معادلات كوشي - ريمان (10.13) .

ويتحدد المعنى الفيزيائي للثابتين a, b بحساب مركبتي السرعة حسب (10.1) أو (10.9) حيث ننتج :

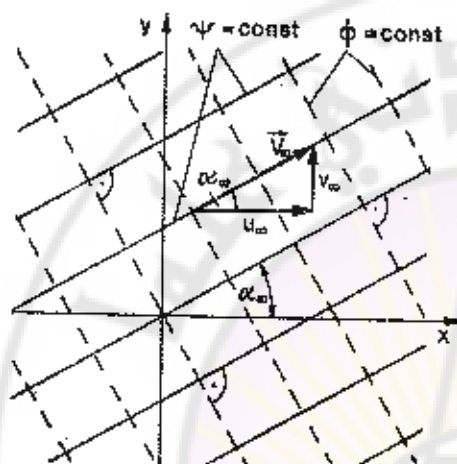
$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a \equiv u_x , v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b \equiv v_x , \quad (10.19)$$

أي أنهما ثابتتان في اتجاه المحورين y, x . وعليه فإن قيمة شعاع السرعة :

$$|V| = |V_x| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} = \text{const.} \quad (10.20)$$

هي أيضاً ثابتة، وكذلك فإن ميله على المحور x ثابت :

$$\tan \alpha_{\infty} = \frac{v_{\infty}}{u_{\infty}} = \text{const} . \quad (10.21)$$



الشكل ١٠.١٠ ، الجريان الانسحابي المنتظم في المستوي x, y .

هذه النتيجة تفودنا مباشرة للاستنتاج أن خطوط التيار لهذا الجريان الانسحابي المنتظم تؤلف حزمة من المستقيمات المتوازية التي تميل على المحور x زاوية ثابتة ، الشكل (١٠.١٠) ، فإذا كانت السرعة V_{∞} معلومة فيمكن بسهولة رسم صورة الجريان بمساعدة (10.18) و (10.19) حيث تنتج معادلة خطوط التيار :

$$\Psi = \text{const} \Rightarrow u_{\infty} y - v_{\infty} x = \text{const} , \quad (10.22)$$

وذلك بإعطاء الثابت قيمة مختلفة ، كما نحصل على معادلة خطوط الكمون من (10.17) و (10.19) بالصيغة :

$$\Phi = \text{const} \Rightarrow u_{\infty} x + v_{\infty} y = \text{const} , \quad (10.23)$$

وعليه فإن خطوط الكمون تمثلها أيضاً حزمة من المستقيمات المتوازية التي تشكل مع خطوط التيار شبكة مستقيمات متعامدة .

عندما يكون الجريان الانسحابي المنتظم موازياً للمحور x ، وبالتالي $v_{\infty} = 0$ ، ينتج من (10.17) و (10.18) :

$$\Phi_T = u_{\infty} x ; \Psi_T = u_{\infty} y ; \quad (10.24)$$

وعندما يكون موازياً للمحور y ، وبالتالي $u_{\infty} = 0$ ، يكون :

$$\Phi_T = v_{\infty} y ; \Psi_T = -v_{\infty} x \quad (10.25)$$

٢.٣.١٠ النبع والبالوعة في المسوي

ليكن لدينا التابع :

$$\Phi_Q(x,y) = \frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{E}{2\pi} \ln r , \quad (10.26)$$

حيث E عدد ثابت حقيقي موجب (أو سالب) ، r نصف القطر المكافئ من مركز الإحداثيين . اشتق Φ_Q جزئياً مرتين بالنسبة لـ x و y على التوالي فنجد بسهولة أن معادلة لابلاس محققة ، $\Delta \Phi_Q = 0$ ، وبالتالي يمثل Φ_Q كمون سرعة لجريان مستوي . وتنتج معادلة خطوط الكمون من (10.26) بالشكل :

$$\Phi_Q(x,y) = \text{const} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r = \text{const} . \quad (10.27)$$

إذن فخطوط الكمون تمثل مجموعة دوائر مركزية ، تتحدد باعطاء الثابت const قيمة معينة ..

لإيجاد تابع التيار ندخل في (10.14) المشتق $\frac{\partial \Phi_Q}{\partial x} = \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$ ونكامل فنجد :

$$\begin{aligned} \Psi_Q &= \frac{E}{2\pi} \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + c(x) = \frac{E}{2\pi} \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + c(x) = \\ &= \frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} + c(x) . \end{aligned} \quad (10.28)$$

$c(x)$ ينتج من (10.15) بعد اشتقاق Ψ_Q بالنسبة لـ x و Φ_Q بالنسبة لـ y فيكون :

$$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = \text{const} .$$

فإذا وضعنا $c(x) = 0$ ينتج تابع التيار من (10.28) بدلالة الاحداثيات الديكارتية ، والقطبية بالشكل :

$$\Psi_Q = \frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = \frac{E}{2\pi} \varphi , \quad (10.29)$$

باعتبار أن $\arctan \frac{y}{x} = \varphi$. بذلك نحصل على معادلة خطوط التيار :

$$\Psi_Q = \text{const} \Rightarrow \arctan \frac{y}{x} = \varphi = \text{const} , \quad (10.30)$$

التي تمثل مجموعة مستقيمت منبعدة من مركز الاحداثيات ، ونحدد ميلها قيم الثابت const ، وهي تشكل مع خطوط الكمون شبكة منحنيات متعامدة .

إن مركبتى السرعة باتجاه المحورين y, x تنتج بسهولة من (10.1) حيث تكون :

$$u = \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad v = \frac{E}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} . \quad (10.31)$$

وحيث أن شعاع السرعة يجب أن يكون مماسياً على خطوط التيار ، فيتضح أن المركبة المماسية للسرعة معدومة ، $V_\tau = 0$ ، بينما المركبة القطرية :

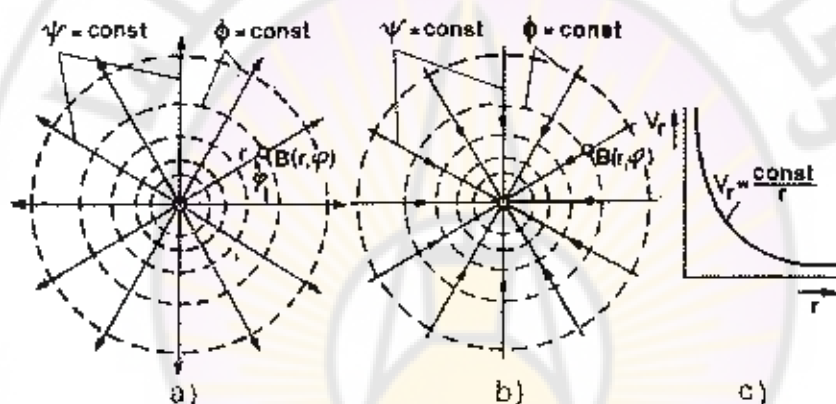
$$V_r = |V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial \Phi_Q}{\partial r} = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{r} , \quad (10.32)$$

أي أن السرعة تتناسب عكساً مع نصف القطر وتبلغ في المركز قيمة لا نهائية ، الشكل (٣.١٠) . فإذا أحطنا مركز الإحداثيات بأسطوانة نصف قطرها R

فيكون التيار الحجمي الذي يعبر سطحها الخارجي بالنسبة لوحد العرض (انحاء z):

$$Q = 2\pi R V_r(R) = 2\pi R \cdot \frac{E}{2\pi} \frac{1}{R} = E, \quad [E] \sim \frac{m^2}{s}. \quad (10.33)$$

إذن فإن الثابت E في العلاقة (10.26) معنى فيزيائياً يعبر عن التيار الحجمي للجريان وهو لا يتعلق بنصف القطر المكافئ r . فإذا كان $E > 0$ ، فإن الجريان يتدفق من المركز إلى الخارج ليغطي كامل المستوي $x-y$ ، ويمثل في هذه الحالة نبعاً Source. وعندما يكون $E < 0$ فإن خطوط التيار تصب كلها في نقطة المركز، ويسمى الجريان عندئذ بالوعة Sink، الشكل (٣.١٠). E تمثل



الشكل ٣.١٠. جريان النبع (a) والبالوعة (b) في المستوي وتوزيع السرعة (c).

غزارة أو شدة Strength النبع أو البالوعة بالنسبة لوحد العرض. بينما يمثل مركز الاحداثيات نقطة شاذة تكون فيها فقط معادلة الاستمرار غير محققة. وعليه يمكن تصور المحور z مؤلفاً من عدد لا نهائي من هذه النقاط الشاذة التي تمثل بنابيع أو بالوعات والتي تعطي في المستوي $x-y$ صورة الجريان المبدئية في الشكل (٣.١٠ - a أو b). وواضح أن الجريان الفعلي للنبع أو البالوعة الذي يعبر عنه تابع الكمون Φ_0 لا يتحقق إلا في المنطقة المحيطة بدائرة تحيط بمركز النبع أو البالوعة تأخذ السرعة على محيطها قيمة معقولة فيزيائياً.

٣.٣.١٠ الوعاء المستوي

من العلاقتين (10.26) و (10.30) نحصل على جريان كموني أساسي جديد إذا طبقنا مبدأ التبادل ، الآنف الذكر ، بين تابع الكمون وتابع التيار . فإذا استبدلنا الثابت E بـ F نجد مباشرة تابع الكمون للجريان الجديد :

$$\Phi_{F^{\infty}} + \frac{F'}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = + \frac{F'}{2\pi} \varphi \quad (10.34)$$

وتابع التيار

$$\Psi_{F^{\infty}} - \frac{F'}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = - \frac{F'}{2\pi} \ln r \quad (10.35)$$

إن خطوط الكمون للجريان الجديد تتحد بالمعادلة :

$$\Phi_{F^{\infty}} = \text{const} \Rightarrow \varphi = \text{const} \quad (10.36)$$

وهي تمثل حزمة من المستقيمات المنباعدة من مركز الاحداثيات ، التي نحدد قيم الثابت const ميلها على المحور x ، وبالتالي فهي تكافئ خطوط التيار للنبع . بينما تتحدد خطوط التيار بالعلاقة :

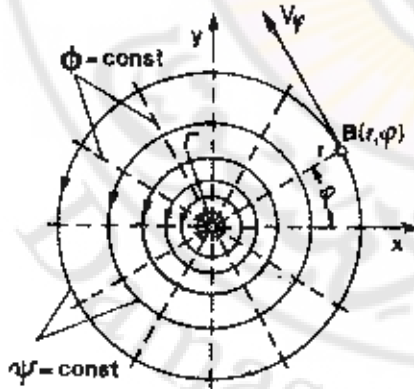
$$\Psi_{F^{\infty}} = \text{const} \Rightarrow r = \text{const} \quad (10.37)$$

وهي تمثل إذن حزمة من الدوائر المركزة حول مركز الاحداثيات ، وتكافئ خطوط الكمون للنبع ، الشكل (٤.١٠) .

لإيجاد مركبتي السرعة ندخل

(10.34) في (10.1) فنجد :

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{F'}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v &= \frac{F'}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$



شكل ٤.١٠ : الاصدار الكموني المستوي.

وكما يتضح من صورة الجريان فإن المركبة القطرية لشعاع السرعة تكون معدومة (بعكس النبع ١) بينا المركبة المماسية :

$$V_r = |V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{I'}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \varphi} = \frac{I'}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (10.39)$$

أي أن السرعة في نقطة ما $B(r, \varphi)$ نفس الدائرة التي نصف قطرها $\vec{OB} = r$ ، وتزايد في اتجاه المركز عكساً ونصف القطر . وعندما $r \rightarrow 0$ فإن $V = V_r \rightarrow \infty$ وبالتالي فإن مركز الإحداثيات يمثل نقطة شاذة .

بطلق على الجريان الذي يخضع حقل السرعة فيه بموجب (10.39) للعلاقة :

$$V_r \cdot r = \text{const} \quad (10.40)$$

اسم الأعصار الكموني (انظر ص ٢٢٩) . وبإمكاننا أن نتصور مركز الإحداثيات أحد النقاط الإعصارية لحيط الأعصار المنطبق على المحور z الذي يخترق المستوي xy بشكل عمودي ويحوض حوله حقل السرعة المعطى بالعلاقة (10.40) . فإذا اعتبرنا الثابت $I' > 0$ نجد بسهولة من (10.38) أن كافة الجزيئات السائلة تتحرك على دوائر مركزية حولية دائرية بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

إن المضمون الفيزيائي للثابت I' يتوضح إذا حسبنا قيمة الجولان على طول خط تيار نصف قطره $r = R$ ، حيث نجد باستخدام (10.39) واعتبار اتجاه الدوران الموجب بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة :

$$\oint_{(r=R)} V_r ds = V_r(R) \cdot 2\pi R = \frac{I'}{2\pi} \frac{1}{R} \cdot 2\pi R = I' \quad [I'] = \frac{m^2}{s} \quad (10.41)$$

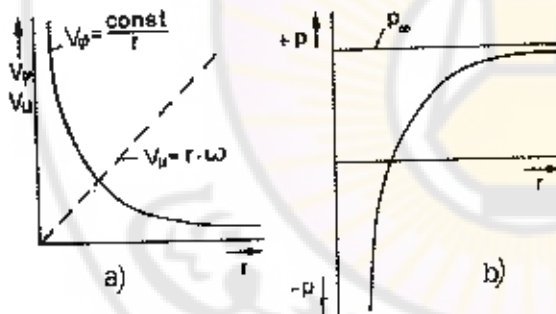
هذا يعني أن الثابت I' في العلاقة (10.34) يساوي قيمة الجولان ، أو شدة الأعصار بالنسبة لواحدة طول الحيط الأعصاري ، التي تبقى قيمتها بالنسبة

لكافة خطوط التيار ثابتة . هذا يقودنا إلى النتيجة التي سبق التأكيد عليها ص ٢٣٠ بأن تابع الكمون Φ_{10} متعدد القيم ، وتزداد قيمته بعد كل دورة كاملة على خط تيار بمقدار قيمة الجولان :

$$\Phi_{10}(\varphi + 2\pi) - \Phi_{10}(\varphi) = I' . \quad (10.42)$$

إن جريان الأعصار الكموني الذي تتحرك جزيئاته في سائل عديم الاحتكاك على دوائر مركزية بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة وتتناسب سرعته عكساً ونصف القطر بلك تكون سرعة $\Phi_{10} = \frac{I'}{2\pi} \varphi$ يحقق شرط الحلو من الدوران في كامل حقل الجريان باستثناء نقطة المركز $r = 0$.

الشكل (٥.١٠ - a) يبين توزيع السرعة في الأعصار الكموني (المثالي) ، الذي يخضع حسب (10.40) لمعادلة قطع زائد ، بينما يخضع توزيع السرعة



الشكل ٥.١٠ :

مقارنتين توزيع السرعة للأعصار الكموني المثالي مع توزيع السرعة للأعصار القسري (a) وتوزيع الضغط في الأعصار الكموني (b) .

للأعصار القسري في حالة سائل يدور بسرعة زاوية ثابتة في إنشاء لعلاقة خطية ، $V_u = r\omega$. ونحصل على توزيع الضغط من معادلة برنولي المختزلة (8.12) ، مع ملاحظة أن ثابتة برنولي لا تتغير قيمتها في كامل حقل الجريان . فإذا لاحظنا أيضاً حسب (10.39) أنه عندما $r \rightarrow \infty$ تنعدم السرعة ، $V_{\phi} \rightarrow 0$ ، وبأخذ الضغط قيمته غير المشوشة $p \rightarrow p_0$ ، نجد بسهولة :

$$p = p_{\infty} - \frac{\rho}{2} \left(\frac{V}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} = p_{\infty} - \frac{\text{const}}{r^2} \quad (10.43)$$

لأن فإن الضغط يتناقص باتجاه مركز الأعصار عكساً مع مربع نصف القطر

$p \sim r^{-2}$ ، ويبلغ عندما $r \rightarrow 0$ قيمة سالبة لانهاية $\rightarrow -\infty$ ، $p \rightarrow -\infty$ ، بمعنى أنه يصبح ، بفهوم مقاومة المواد ، لإجهاد شد يسعي لتمزيق ذرات السائل .

إن السوائل المائعة تستطيع فعلاً تحمل إجهادات شد . وتبلغ القيمة النظرية لإجهاد حد التمزق σ لذرات الماء النقي حوالي 10 000 at [129] ، بينما تتراوح القيمة المقاسة بين 50 at إلى 280 [33] . هذا الفرق يتعلق بصورة أساسية بدرجة نقاوة المائع وخلوه من الجزيئات الغريبة الصلبة والغازية المنحلة وغير المنحلة . والجدير بالذكر أن ظاهرة تحمل الموائع لإجهادات الشد تلعب دوراً هاماً في تحديد الضغط الخارج لبدء التكيف p_0 ، الذي يمكن أن يبلغ قيمة أقل بكثير أو قليل من قيمة ضغط التبخر [126] [127] [128] [129] . وفي كل الاحوال نسود في الجوار المباشر لمركز الأعصار ظروف مؤقتة جسيماً لنمو فقاعات التكيف المملوءة ببخار السائل وبالفازات المنحلة وغير المنحلة ، خاصة داخل الطبقة الحدية المضطربة التي نشتر حركة جزيئاتها مؤلفة من حركة أساسية لجريان السائل وحركة مشوشة ناتجة عن مجموعة كبيرة من الأعاصير .

لتصور أن خط التيار للأعصار الكموفي (الشكل ٤.١٠) الممثل بدائرة نصف قطرها R قد تصلب . بهذا لا تتغير صورة الجريان حول هذه الدائرة ، حتى إذا استبدلت بدائرة مقطع اسطوانة لانهاية الامتداد محورها z بمتحرك صوياً المستوي xy في مركز الاحداثيات . ونحصل فعلاً على مثل هذا الجريان إذا جعلنا اسطوانة دائرية تدور حول محورها z في سائل ساكن بسرعة زاوية ثابتة . فإذا أخذنا ، في لحظة بدء الدوران فقط ، لزوجة السائل بعين الاعتبار ، فإن جزيئات السائل المحيطة بالاسطوانة ستقوم بحكم شرط الاتصاق بحركة دائرية على دوائر مركزية . فإذا كانت الاسطوانة تدور باتجاه دوران عقارب الساعة فيكون التابع :

$$\phi = -\frac{V}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (10.44)$$

يمثل كمون السرعة للجريان الجولاني البعث حول الاسطوانة . ويكون توزيع السرعة والضغط فيه خاضعاً للعلاقين (10.40) و (10.43) .

في ضوء ما تقدم يمكن استخلاص نتيجة هامة جداً . فالاعصار الفعلي يتألف من منطقتين : الأولى تحيط بمركز الاعصار مباشرة وتعرف باسم نواة الاعصار Vortex core ويبلغ نصف قطرها r_c ، وتقوم جزيئاتها بحركة دورانية مائلة تماماً لحركة الجسم الصلب ، وبالتالي فهي لا تملك كمون سرعة ؛ والثانية تحيط بالنواة والجريان فيها كموني (لا دوراني) . وعليه فإن توزيع السرعة والضغط في هذه الحالة سيكون مختلفاً عن التوزيع المبين في الشكل (٥.١٠) .

في منطقة الجريان الكموني المحددة بالمجال $r_c \leq r < \infty$ فإن السرعة تزداد من الصفر حتى تبلغ حسب (10.39) قيمتها الاعظمية على محيط النواة :

$$V_r(r_c) = V_{max} = \frac{F}{2\pi} \frac{1}{r_c} \quad (10.45)$$

ويتناقص الضغط في هذه المنطقة من p_∞ حتى يبلغ حسب (10.43) على محيط النواة القيمة :

$$p_c = p_\infty - \frac{\rho}{2} \left(\frac{F}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r_c^3} \quad (10.46)$$

في منطقة النواة المحددة بالمجال $0 \leq r \leq r_c$ فإن السرعة المحيطية تخضع لعلاقة خطية :

$$V_u = r \omega \quad (10.47)$$

وبالتالي فهي تزداد من الصفر وحتى قيمة اعظمية $V_u(r_c) = V_{max}$ على محيط النواة . أما توزيع الضغط فإن حسابه بمساعدة معادلة برنولي صعب بسبب أن ثابتة برنولي تتغير من خط تيار لآخر . لذلك نتطرق من معادلات أويلر الحركية التي تأخذ حسب (9.1) في حالة جريان مستمر مع إهمال القوى الحجمية الصغيرة :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (10.48)$$

فإذا كانت النواة تدور بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية ω فتكون :

$$u = -y \omega \quad , \quad v = x \omega \quad .$$

وبذلك نصبح (10.48) من الشكل :

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad \omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

فإذا ضربنا طرفي العلاقة الأولى بـ dx والثانية بـ dy وجمعنا المعادلتين وأجرينا التكامل نجد بعد اصلاح بسيط :

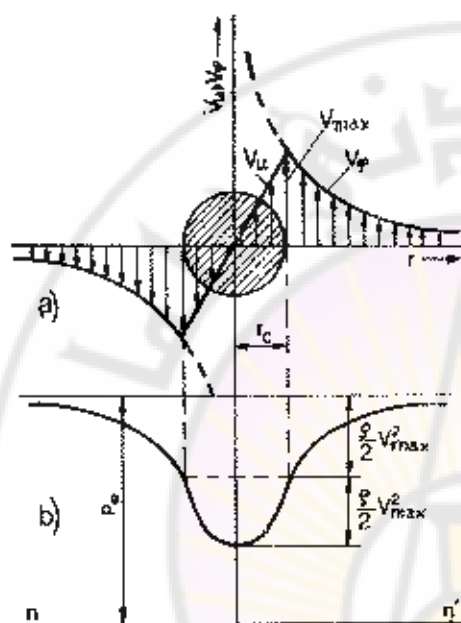
$$p = \frac{\rho}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + C = \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 + C = \frac{\rho}{2} V_n^2 + C \quad (10.49)$$

حيث C ثابت التكامل ، الذي يتحدد من الشرط القاضي بوجود كون قيم السرعة والضغط على محيط النواة ، $r = r_0$ ، واحدة سواء اقتربنا اليها من الداخل أو الخارج ، وعليه ينتج من (10.49) باستخدام (10.45) و (10.46) :

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 = 2 \frac{\rho}{2} \left(\frac{V'}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} \quad (10.50)$$

إذن فتوزيع الضغط في نواة الأعصار يخضع لمعادلة قطع مكافئ . الشكل (٦٠١٠) يبين توزيع السرعة والضغط داخل وخارج نواة الأعصار . ونستنتج بسهولة أن فرق الضغط بين الجريان غير المشوش ومحيط النواة وفرق الضغط بين محيط النواة ومركز الأعصار يساوي في كل مرة ضغط الركود المحسوب بالسرعة الاعظمية . وعليه فإن فرق الضغط بين الجريان غير المشوش ومركز الأعصار يساوي إلى ضعف ضغط الركود هذا :

$$\Delta p = 2 \frac{\rho}{2} V_{\max}^2 = 2 \frac{\rho}{2} \left(\frac{I'}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} \quad (10.51)$$

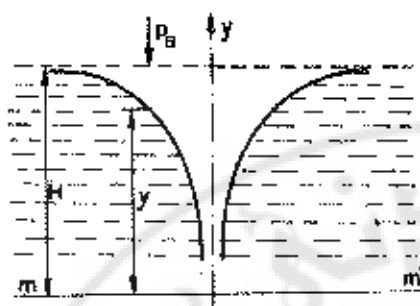


الشكل ١٠.١٠ :

توزيع السرعة والضغط في الأعاصير الحقيقية .

نواة الأعاصير من ذوات الهواء التي لا تشترك في الحركة الدورانية . ويأخذ السطح الخارجي للقمع الهوائي تحت تأثير الثقالة شكلاً يمكن تحديده بمساعدة معادلة برنولي ، حيث تنتج برموز الشكل (٧.١٠) ، وبفرض $p_0 = p_1$ الضغط المؤثر على السطح السائب للسائل ، العلاقة :

$$\frac{p_0}{\rho g} + y + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + H \Rightarrow H - y = \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{I'}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} \quad (10.52)$$



أي أن منحنى السطح الخارجي للدمع
يطابق منحنى توزيع الضغط في الجريان
حول النواة .

من جهة أخرى فإن القدرة التدميرية
التي يسمى البينطال الهوائي Wind hose
والسيكلون الاستوائي Tropical
cyclone ، الذي يصل قطره حتى
1000 km [7a] وينشكّل فوق البحار
واليابسة ، ويشط كل ما يقع في طريقه

الشكل ٧.١٠ : قبح موائى أو اعصار فارغ .

مسبباً كوارث قومية أحياناً ، تنجم عن الفعل الامتصاصي الناتج عن انخفاض الضغط
باتجاه مركز الأعصر (10.51) بالإضافة للقدرة الحركية الناتجة عن دوران النواة .

٤.٣.١٠ نبع وبالوعة بشدة واحدة ، الثنائية المستوية

نعتبر في مركز الاحداثيات نبعا شدة E ، وعلى بعد $x = -e$ منه
بالوعة شدة E - ونسال عن الجريان الناتج عنها .
حسب مبدأ التضام فإن تابع الكمون وتابع التيار للجريان السكالي يتبعان
من (10.26) و (10.29) مع ملاحظة إشارة E ووضعية البالوعة بالصيغة :

$$\Phi_{tot} = \frac{E}{2\pi} \left[\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \right] \quad (10.53)$$

$$\psi_{tot} = \frac{E}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad , \quad (10.54)$$

حيث φ_1, φ_2 الزاويتان القطبيتان المقاستان من مركز النبع أو البالوعة ،
الشكل (٨.١٠) . في نقطة ما C من حقل الجريان تبعد عن مركز البالوعة r_1
وعن مركز النبع r_2 تكون السرعة القطرية للبالوعة بموجب (10.32) :

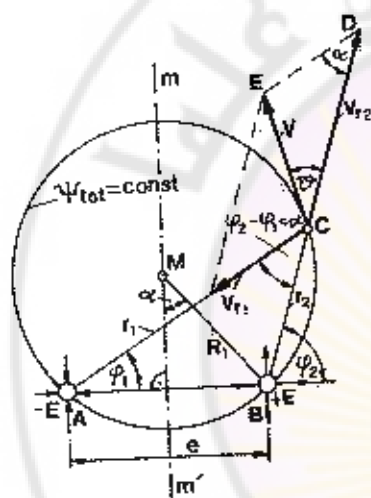
$$V_{r_2} = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{r_1} \quad , \quad (10.55)$$

والمجاها إلى الداخل ، ولنبيع :

$$V_{r_2} = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{r_2} , \quad (10.56)$$

والمجاها للخارج . وتنتج السرعة الكلية للجريان في النقطة C كمحصلة شعاعية :

$$V = V_{r_1} + V_{r_2} ,$$



الشكل ٨.١٠ : تحديد خط التيار الكلي
الدار من C لجريان ذبوع وبالوعة من
نفس الفزارة .

حيث تكون V مماسية على خط التيار
الكلي $\psi_{tot} = \text{const}$ المار من النقطة
C . فإذا أمعنا النظر في الشكل
(٨.١٠) نلاحظ أن المثلثين CBA
و DEC متشابهان لأن نسبة ضلعين
من الأول تساوي نسبة ضلعين من
الثاني ، $V_{r_1} : V_{r_2} = r_2 : r_1$ ،
ويعصرات بينهما نفس الزاوية ،
إذن فإن $\angle CDE = \angle ACB$ ،
وبالتالي نتج $V : V_{r_1} = e : r_2$
باستخدام (10.55) السرعة المحصلة :

$$V = |V| = \frac{E}{2\pi} \frac{e}{r_1 r_2} = \frac{E}{2\pi} \frac{e}{\sqrt{[(x+e)^2 + y^2]} \sqrt{x^2 + y^2}} . \quad (10.57)$$

كما نستنتج أيضاً أن الزاوية $\angle BAC = \angle DCE$ وبالتالي :

$$\angle : \angle = \angle . \quad (10.58)$$

وبما أن V يجب أن تكون مماسية على خط التيار الكلي $\Psi_{tot} = \text{const}$ المار من النقطة C فينتج من العلاقة الأخيرة أن خط التيار هذا ينطبق على دائرة تمر من النقاط ABC ، حتى تكون الزاوية المحيطية φ_1 مساوية لزاوية المماس θ . هذه النتيجة يمكن تعميمها بالجملة التالية :

خطوط التيار للجريان الكلي الناتج عن تضام منبع وبالوعة من نفس الغزارة وعلى مسافة $AB = e$ من بعضها مثلها حزمة من الدوائر المارة من مركز النبع وبالوعة والتي مراكزها تقع على المحور التناظري $m m'$ للقطعة AB .

إن معادلة دوائر خطوط التيار تنتج من (10.54) بسهولة :

$$\Psi_{tot} = \text{const} = C_1 \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi C_1}{E} \quad (10.59)$$

وتتعدد أنصاف أقطار هذه الدوائر من الشكل (٨ . ١٠) باعتبار أن الزاوية المركزية AMB تساوي ضعف الزاوية المحيطية ACB :

$$R_1 = \frac{e}{2 \sin \alpha} = \frac{e}{2 \sin (\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{e}{2 \sin \left(\frac{2\pi C_1}{E} \right)} \quad (10.60)$$

وواضح أنه حسب قيمة C_1 تقع مراكز دوائر خطوط التيار M إما على القسم العلوي أو السفلي للمحور التناظري $m m'$.

إن معادلة خطوط الكمون تنتج من (10.53) بالصيغة :

$$\Phi_{tot} = \text{const} = C_2 \Rightarrow \ln \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x+e)^2 + y^2}} = \frac{2\pi C_2}{E} = \ln C_3 \quad .$$

ومنها بعد إصلاح بسيط نجد العلاقة :

$$y^2 + x^2 + 2e \frac{C_2^2}{C_2^2 - 1} x + e^2 \frac{C_2^2}{C_2^2 - 1} = y^2 + (x + x_0)^2 = R_2^2 \quad (10.61)$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها :

$$R_2 = e \frac{C_2}{C_2^2 - 1} \quad (10.62)$$

ومركزها M' يقع على المحور x ويبعد مسافة :

$$x_0 = -e \frac{C_2^2}{C_2^2 - 1} \quad (10.63)$$

عن مركز الاحداثيات وحسب قيمة C_2 التي تتحدد من قيمة $\Phi_{tot} = \text{const}$ المختارة ، يكون M' واقعاً على الطرف السالب أو الموجب للمحور x .
بذلك نصل للنتيجة التالية :

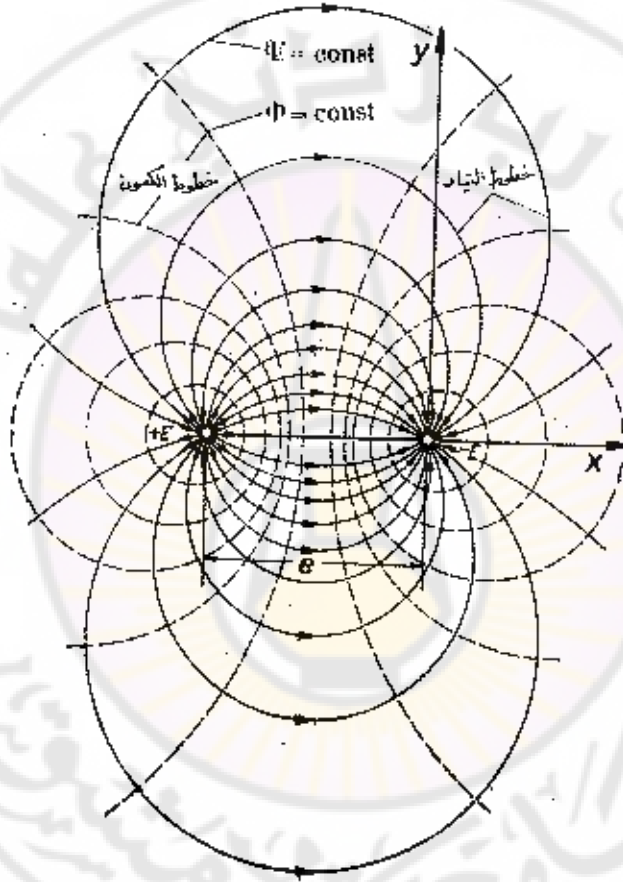
خطوط الكمون للجريان الكلي الناتج عن تضاف نبع وبالوعة من نفس الغزارة وعلى مسافة e من بعضها تمثل حزمة من الدوائر التي تقع مراكزها على الخط الواصل بين مركز النبع والبالوعة وتحيط إما بالنبع أو البالوعة .

الشكل (٩.١٠) يبين خطوط التيار $\Psi_{tot} = C_1$ وخطوط الكمون $\Phi_{tot} = C_2$ التي تشكل شبكاً من المنحنيات المتعامدة والتي نحصل عليها بمساعدة العلاقات السابقة بعد استبدال مكان النبع والبالوعة بالمقارنة مع الشكل (٨.١٠) واعطاء الثابتين $C_{1,2}$ قيماً سالبة وموجبة . ونلاحظ أن كامل الجريان الذي يتدفق من النبع يصب في البالوعة .

نتصور الآن في الشكل (٨.١٠) أن البالوعة تقبض من النبع بحيث أن المسافة بينها تصغر باتجاه الصفر في الوقت الذي تزداد فيه الشدة النبعية باتجاه اللانهاية على أن يبقى الجداء :

$$Ee \rightarrow E \Delta x = E dx = M = \text{const} . \quad (10.64)$$

خلال هذه العملية فإن الفرق بين بعد أية نقطة C من حقل الجريان عن مركزي النبع والبالوعة سيتلاشى تدريجياً إلى أن يصبح بعد عملية التناهي ،



الشكل ٩.١٠ : خطوط التيار $\psi_{\text{tot}} = \text{const}$ وخطوط الكمون

$\phi_{\text{tot}} = \text{const}$ للجريان الناتج عن تضام نبع وبالوعة من نفس القوّة

مركزهما واقعان على المحور x وعلى مسافة e من بعضها .

الشكل ١٠-١ : تحديد خط
المنحرف للثغانة المستوية .

$$\begin{aligned}\Phi_D &= -\frac{E \cdot \Delta x}{2\pi} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{[(x + \Delta x)^2 + y^2]} - \ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x} = \\ &= -\frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [\ln \sqrt{x^2 + y^2}] = -\frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (\ln r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.\end{aligned}$$
$$\Phi_D = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \quad (10.65)$$

- 134 -

$$\Phi_D = \text{const} = C_1 \Rightarrow r = -\frac{M}{2\pi C_1} \cos \varphi = -C'_1 \cos \varphi . \quad (10.66)$$

وهي تمثل معادلة حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور y في مركز الاحداثيات .
تابع التيار ينتج بسهولة من (10.65) بمساعدة (10.14) و (10.15) حيث نجد :

$$\Psi_D = +\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = +\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r} . \quad (10.67)$$

ولأخذ معادلة خطوط التيار الصيغة :

$$\Psi_D = \text{const} = C_2 \Rightarrow r = \frac{M}{2\pi C_2} \sin \varphi = C'_2 \sin \varphi . \quad (10.68)$$

وهي تمثل معادلة حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور x في مركز الاحداثيات .
بطلق على الجريان الذي تابع كونه معطى بالعلاقة (10.65) اسم النبع
المزدوج أو الثنائية المستوية Two-dimensional double . وبطلق على
المحور التناظري والمماس المشترك لخطوط التيار ، المحور x ، محور الثنائية ،
ويمثل الثابت M عزم الثنائية .

إن مركبتي السرعة للثنائية باتجاه x و y تنتجان من (10.65) بدلالة
الاحداثيات الديكارتية والقطبية بالصيغة :

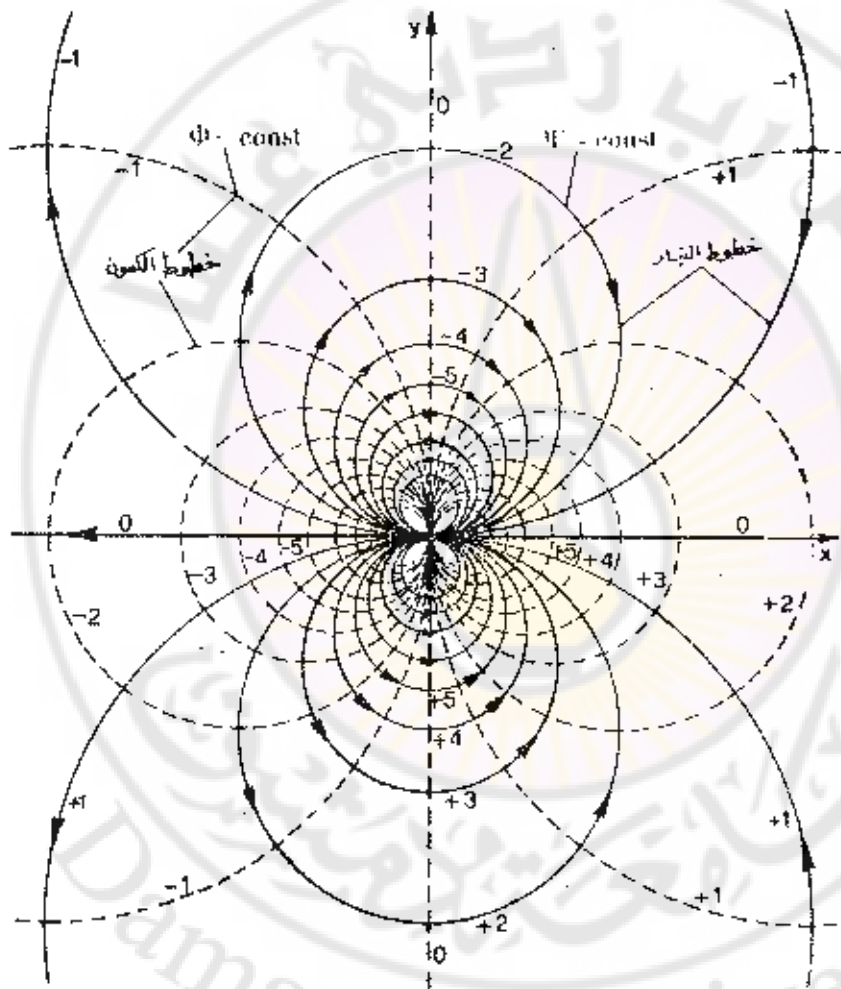
$$u = -\frac{M}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos 2\varphi}{r^3} , \quad (10.69)$$

$$v = -\frac{M}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin 2\varphi}{r^3} . \quad (10.70)$$

وتكون بالتالي قيمة شعاع السرعة :

$$|V| = V = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{r^2} , \quad (10.71)$$

التي تنتج أيضاً من (10.57) بوضع $r_1 = r_2$ و $M = E \cdot e$ ، ونلاحظ أن تأثير الثنائية يتلشى باتجاه الخارج بصورة أسرع من النبع أو البالوعة ، لأن السرعة تتناقص بمعدل $\frac{1}{r^3}$ كلما ابتعدنا عن مركز الثنائية الذي يشكل نقطة شاذة



الشكل ١١.١٠ : خطوط التيار $\psi = \text{const}$ وخطوط الكمون $\phi = \text{const}$

لثنائية المستوى المعطاة بتابع الكمون $\Phi = + \frac{M \cos \varphi}{2\pi r}$.

($V \rightarrow \infty$) . ويمكن أن نتصور المحور z الذي يخترق المستوي y, x عمودياً في المركز مؤلفاً من عدد لانهائي من هذه النقاط الشاذة (الثنائيات) ، حيث نعرض كل نقطة منه في أي مستو عمودي على z حقل السرعة المعطى بالعلاقة (10.71) . ويكون بموجب هذه العلاقة اتجاه الجريان في النصف العلوي من المستوي y, x بحيث أن الجزيئات تنطلق من المركز وتتحرك على دوائر بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة لتصب في المركز أيضاً ، بينما يكون اتجاه دورانها في النصف السفلي باتجاه عقارب الساعة . وبتعكس اتجاه الجريان إذا جعلنا إشارة السالب في (10.65) موجبة وبالتالي إشارة الموجب في (10.67) سالبة ، حيث نحصل عندئذ على صورة الجريان المبينة في الشكل (11.10) عندما نعطي الثابتين C_1 و C_2 قيماً عددية سالبة وموجبة :

خطوط التيار للثنائية المستوية التي ينطبق مركزها على مركز الاحداثيين y, x تؤلف حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور x ، المنطبق على محور الثنائية ، في المركز ، وتشكل مع خطوط الكمون ، التي تؤلف حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور y في المركز ، شبكاً من المنحنيات المتعامدة . وتزايد سرعة الثنائية باتجاه المركز عكساً ومربع نصف القطر المكافئ .

إن الثنائية المستوية تعتبر من الجريانات الكمونية البسيطة الهامة جداً التي يمكن استخدامها كحجر بناء ، لإنشاء أجسام جريان عملية ، وخاصة لدراسة الجريان حول أسطوانة دائرية ، كما سنرى ذلك فيما بعد .

٥.٣.١٠ النبع المصفاري

ليكن لدينا في مستوي الاحداثيين y, x نبع غزارة E ثابتة وتابع كمونه وتياره Φ_0 و Ψ_0 . وليكن لدينا أيضاً في نفس المستوي اعصار جولانه F

ثابت أيضاً وتابع كونه وتياره $\Phi_{I'}$ و $\Psi_{I'}$. نفرض الآن ان مركزي النبع والاعصار منطبقان على مركز الاعدائين ونسأل عن صورة الجريان الكلي الناتج عنهما المعروف باسم النبع الاعصاري Source - Vortex .

بمساعدة مبدأ التضاف (10.7) نحصل على تابع الكمون وتابع التيار للنبع الاعصاري من (10.26) و (10.34) ومن (10.30) و (10.35) ، حيث يكون بالاحداثيات القطبية :

$$\Phi_{QI'} = \Phi_Q + \Phi_{I'} = \frac{1}{2\pi} (E \ln r + I' \varphi) , \quad (10.72)$$

$$\Psi_{QI'} = \Psi_Q + \Psi_{I'} = \frac{1}{2\pi} (E \varphi + I' \ln r) . \quad (10.73)$$

من هاتين العلاقتين نحصل على معادلة خطوط الكمون وخطوط التيار بالطريقة المعمودة ، حيث نجد :

$$\Phi_{QI'} = \text{const} \Rightarrow E \ln r + I' \varphi = \text{const} , \quad (10.74)$$

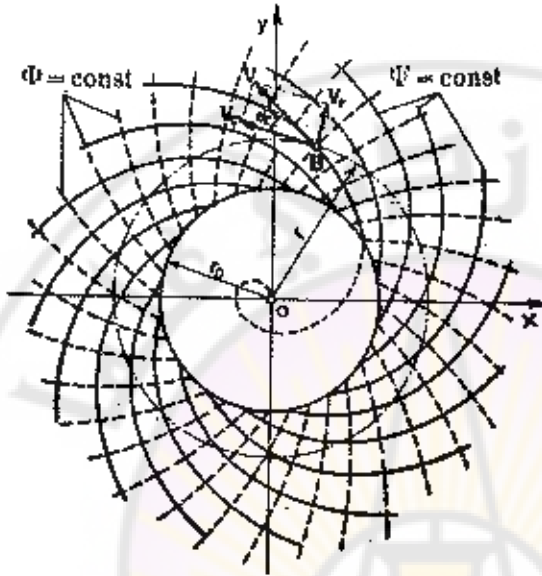
$$\Psi_{QI'} = \text{const} \Rightarrow E \varphi + I' \ln r = \text{const} . \quad (10.75)$$

لتوضيح صورة الجريان نعتبر نقطة ما B واقعة على محيط دائرة نصف قطرها r . ان المركبة القطرية V_r للسرعة في هذه النقطة تنبع من النبع فقط ، بينما تكون المركبة المماسية V_φ مطابقة للسرعة التي يجريها الاعصار الكمي في فقط ، الشكل (١٢.١٠) . وحيث أن شعاع السرعة :

$$V = V_r + V_\varphi \quad (10.76)$$

يمس خط التيار الكلي المار من النقطة B ، فتكون الزاوية بين المماس على خط التيار والانجاء المحيطي هي نفس الزاوية بين V_φ و V . وبالتالي ينتج من الشكل (١٢.١٠) وباستخدام العلاقتين (10.32) و (10.39) :

$$\tan \alpha = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{r d\varphi} = \frac{V_r}{V_\varphi} = \frac{E}{F} = \text{const} \quad , \quad (10.77)$$



الشكل ١٢.١٠ : صورة
الجريان للنوع الاعصاري.
خطوط التيار $\psi = \text{const}$
تمثلها حلزونات لوجاريتمية
تبدأ من المركز .

حيث $d\varphi$ زاوية مركزية صغيرة جداً . هذا يعني أن خط التيار المار من B (أو من أية نقطة أخرى) يمثل حلزوناً لوجاريتمياً يبدأ من المركز ويمتد إلى اللانهاية . ولكن بما أن المركز يمثل بالنسبة للنوع والاعصار نقطة شاذة فإن جريان النوع الاعصاري ذو معنى فيزيائياً اعتباراً من دائرة نصف قطرها r_0 مثلاً . فإذا كاملنا العلاقة الأخيرة بين r و r_0 نتيج معادلة خطوط التيار للنوع الاعصاري بالصيغة :

$$r = r_0 \cdot e^{\tan \alpha \cdot \varphi} = r_0 \cdot e^{\frac{E}{F} \cdot \varphi} \quad . \quad (10.78)$$

إن توزيع السرعة للنوع الاعصاري يتبع من مثلث السرعة (الشكل ١٢.١٠) ومن العلاقتين (10.32) و (10.39) :

$$|V| = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \left[\left(\frac{E}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} + \left(\frac{I'}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} \right] = \frac{\text{const}}{r} \quad (10.79)$$

خطوط التيار للنبع الأعاصري تتماثل حلزونات لوغاريتمية وتزايد سرعتها باتجاه المركز عكساً ونصف القطر المسكاني.

عندما يتحد مركز الأعصار مع مركز البواعة بدلاً من النبع فاننا نحصل على البواعة اعصارية Sink-Vortex . وعندئذ تتحرك الجزيئات باتجاه المركز بدلاً من ان تنطلق منه كما في حالة النبع الاعصاري . ونحصل على خطوط تيار منحنية الى الامام اذا كان اتجاه دوران الأعصار من اتجاه دوران عقارب الساعة . بينما تكون خطوط التيار منحنية للخلف اذا كان اتجاه دوران الأعصار عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، الشكل (١٢.١٠) .

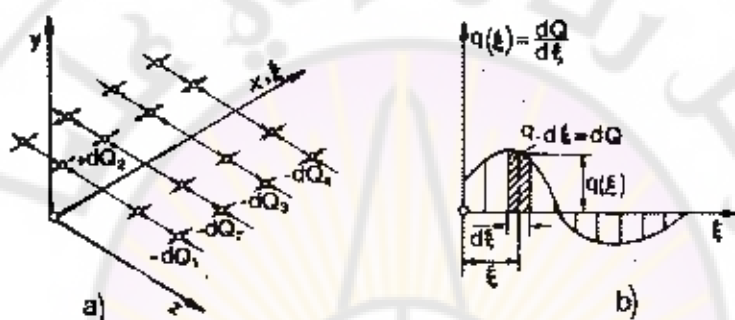
إن الأهمية العملية لجريانات النبع الاعصاري والبواعة الاعصارية تتجلى بوضوح فيما لو تصورنا أن عدداً محدوداً من خطوط التيار قد « تصلبت » أو عوضنا عنها برش أو جذران صلبة . وبالفعل فإن الجريان الخارجي المثالي المتولد من دوّلاب دائري لمضخة قطرية (أو عنفة) نصف قطره r_0 يدرس تماماً وكأنه يوجد في المركز نبع إعصاري (أو بواعة إعصارية) . ويمكن بطريقة سهلة ودقيقة وبدون مفايد تجميع جريان النبع الاعصاري في أنبوب إذا حصر ضمن مغلف حلزوني (راجع ٨.٣٠.٨) كواسطة متنازعة لتحويل القدرة الحركية الى قدرة ضغط (أو بالعكس) .

٦.٣.١٠ توزيع سطحي من البناييع والبالوعات

لغاية تطبيقية عامة تتعلق بإنشاء أجسام جريان مناسبة نفرض أن المستوي xy يخترقه عدد كبير (لانهائي) من الحلوط الشاذة الموازية للمحور z والمعتدة من $-\infty$ إلى $+\infty$ والمنزوعة بالبناييع والبالوعات ذات الشدة المختلفة ، الشكل (١٣.١٠) .

في هذه الحالة ينشأ لدينا توزيع سطحي من الينابيع - البالوعات Source-sink-surface نعبّر عن شدته الموضعية بالرمز $q(\xi) = \frac{dQ}{d\xi}(\xi)$ وتحدد غزارته الموضعية ، الشكل (١٠ - ١٣) ، بالعلاقة :

$$dQ = q(\xi) \cdot d\xi = \frac{dQ}{d\xi} \cdot d\xi , \quad (10.80)$$



الشكل ١٣، ١٠ : مجموعة من الخيوط الموزعة بالينابيع والبالوعات ذات الغزارة المتغيرة dQ_n ($n=1,2,3 \dots$) على طول المحور ξ ، (n) تؤلف توزيعاً سطحياً من الينابيع - البالوعات شدته الموضعية $q(\xi)$ ، (b) .

حيث ξ إحداثي نقطة منتقلة على المحور x . وتنتج الغزارة الكلية بين نقطة البداية ξ_1 ونقطة ما $\xi_2 = \xi$ بالعلاقة :

$$Q = \int_{\xi_1}^{\xi_2} q(\xi) d\xi \quad (10.81)$$

فإذا كانت الغزارة الكلية لكل من الينابيع والبالوعات متساوية ، فيكون عندئذ التساوي بين نقطة بداية توزيع الينابيع - البالوعات ونهايته (مثلاً بين $\xi_1 = 0$ و $\xi_2 = a$) معدوماً ، أي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi) d\xi = 0 \quad (10.82)$$

وهذا ما يعرف بأهم شرط الإغلاق ، بمعنى أن خط التيار الصفري الناتج عن نظام مثل هذا التوزيع السطحي للينابيع - البالوعات مع جريان السحائي بؤلف خطأ مغلقاً يحصل داخله كامل غزارة الينابيع والبالوعات .

نعتبر الآن نقطة ما $B(x,y)$ ونستبدل في العلاقتين (10.26) و (10.29) E بـ dQ حسب (10.80) ، و x بـ $(x-\xi)$ فنحصل على تفاضلي ثابت الكمون وثابت التيار بالعلاقتين :

$$d\Phi_q = \frac{1}{2\pi} q(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} \cdot d\xi \quad (10.83)$$

$$d\psi_q = \frac{1}{2\pi} q(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi} \cdot d\xi \quad (10.84)$$

كما نحصل على تفاضلي مركبتي السرعة في النقطة B بمساعدة العلاقة (10.31) حيث تكون :

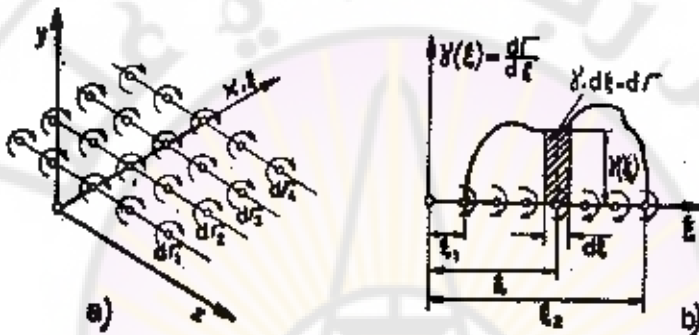
$$du_q = \frac{1}{2\pi} \frac{q(\xi) \cdot (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi ; dv_q = \frac{1}{2\pi} \frac{q(\xi) \cdot y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \quad (10.85)$$

فإذا أجرينا التكامل بين نقطة البداية $\xi_1 = 0$ ، والنهية $\xi_2 = a$ فنحصل من العلاقات الأخيرة على التأثير الإجمالي لتوزيع الينابيع - البالوعات (انظر الجدول ١٠.١٠) .

إن طريقة النقاط الشاذة تستخدم توزيع الينابيع - البالوعات لتصميم أجسام جريان عملية أو لحساب الجريان حولها ، حيث يتركز عندئذ السؤال على إيجاد توزيع مناسب لمسألة الجريان المطروحة (انظر ٥.٢.١٢) .

٧.٣.١٠ توزيع سطحي اعصاري

بشكل مماثل تماماً لخطوات الفقرة السابقة بإمكاننا أن نتصور مجموعة كبيرة جداً من الخطوط الاعصارية الموازية للمحور z والممتدة من $z = \pm \infty$ ونختار عمودياً المستوي y, x الشكل (١٤.١٠ - ب). فإذا جعلنا المسافة بين الاعاصير تقترن إلى الصفر وأخذنا المسافة بين الخطوط الاعصارية صغيرة جداً مع افتراض



الشكل ١٤.١٠ : مجموعة خيوط اعصارية موازية للمحور z ذات جولان متغير القبة dF_n على طول المحور z ، $n = 1, 2, \dots$ ، تؤلف توزيعاً سطحياً اعصارياً كثافته الاعصارية الموضعية $\gamma(\xi)$ ، b) .

أن شدتها الاعصارية (الجولان) dF_n مختلفة ، فإننا نحصل على توزيع سطحي اعصاري مستمر يمتد مثلاً من ξ_1 حتى ξ_2 ، حيث ξ إحداثي متحول على المحور x ، الشكل (١٤.١٠ - ب) . فإذا كانت $\gamma(\xi) = \frac{dF}{d\xi}$ تمثل الكثافة الاعصارية الموضعية فإن الشدة الاعصارية الموضعية (أو الجولان الموضعي) تعطى بالعلاقة :

$$dF = \gamma(\xi) \cdot d\xi = \frac{dF}{d\xi}(\xi) \cdot d\xi . \quad (10.86)$$

ونحصل على الجولان الكلي أو الشدة الاعصارية الكلية لكامل التوزيع الاعصاري بالتكامل :

$$F = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \cdot d\xi \quad (10.87)$$

لنعتبر الآن نقطة ما $B(x, y)$ - فحسب مبدأ التبادل القائم بين تابع الكمون Φ وتابع التيار Ψ لجريان النبع والاعصار الحثوي (راجع ٣.٣.١٠) نحصل مباشرة من العلاقات (10.83) حتى (10.85) على تابع الكمون وتابع التيار ومركبات السرعة المعرضة للتوزيع الأعصاري ، وبالتطابق مع قانون بيو - سافار (راجع ٦.٣.٧) ، بالصيغ :

$$\Phi_\gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi} d\xi \quad (10.88)$$

$$\Psi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \quad (10.89)$$

$$u_\gamma(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \frac{y}{[(x-\xi)^2 + y^2]} d\xi \quad (10.90)$$

$$v_\gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + y^2]} d\xi \quad (10.91)$$

حيث اعتبرنا هنا اتجاه دوران الأعصار باتجاه دوران عقارب الساعة .

في حالات عملية تتطلبها نظرية الجناح الحامل القليل الانحناء يكتفى بحساب حقل السرعة المعرضة من التوزيع الأعصاري على المحور x نفسه ، أي بالنسبة لنقطة $B(x, 0)$. فإذا جعلنا في (10.90) و (10.91) $y \rightarrow 0$ نجد بسهولة :

$$u_v(x) = \pm \frac{1}{2} \gamma(\xi) , \quad (10.92)$$

$$v_v(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} , \quad (10.93)$$

$u_v(x) +$ تمثل السرعة باتجاه $x +$ وتسود في حالة الدوران اليميني قليلاً فوق المحور $\xi \equiv x$ الذي يمثل خطاً إحصائياً ، بينما تمثل $u_v(x) -$ السرعة باتجاه $x -$ وتسود تحت المحور ξ بقليل . وبالتالي فإن اتجاه السرعة الأفقية يتغير فجائياً عند اجتياز المحور ξ ، مما يدل أن التوزيع الإحصائي يمثل سطحاً فاصلاً (انظر ٥.٣.٨) . وتتلشى السرعة $u_v(x)$ كلما ابتعدنا عن المحور ξ .

عند حساب السرعة $v_v(x)$ يجب أن نلاحظ أنه عندما تنطبق النقطة المتحركة ξ على النقطة الثابتة x فنحصل على حالة عدم تعيين بسبب وجود نقطة شاذة عند $\xi = x$. لذلك يجب حساب التكامل (10.93) على أساس أن نأخذ منه القيمة الأساسية الكوشية (انظر [42]) ، وذلك بكتابته بالصيغة التالية :

$$v_v(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\xi_1}^{x-\epsilon} \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} + \int_{x+\epsilon}^{\xi_2} \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \right\} , \quad (10.94)$$

حيث ϵ مجال صغير جداً إلى يمين ويسار النقطة المتحركة .

عندما يكون التوزيع الإحصائي $\gamma(\xi)$ معلوماً ، فبالإمكان حساب حقل السرعة المخرضة وحقل السرعة المحصلة عندما يتضام إلى الجريان الإحصائي جريان انسيابي أو أي جريان آخر يناسب المسألة المطروحة (انظر ٦.٢.١٢) .

المجدول ١٠١٠ : تابع الكمون Φ وتابع التيار ψ لأم الجريانات الكمونية المستوية البسيطة

البنقطة الشاذة	الرمز	$\Phi =$ تابع الكمون	$\psi =$ تابع التيار
جريان منتظم (انسحابي) اقترى		$u_0 x$	$u_0 y$
جريان منتظم (انسحابي) اشافولي		$v_0 y$	$-v_0 x$
جريان منتظم (انسحابي) مائل		$u_0 x + v_0 y$	$u_0 y - v_0 x$
نبح		$\frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{E}{2\pi} \ln r$	$\frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = \frac{E}{2\pi} \varphi$
بالومة		$-\frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{E}{2\pi} \ln r$	$-\frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = -\frac{E}{2\pi} \varphi$
ثنائية		$\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r}$	$-\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r}$
اصرار		$-\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$
توزع سطحي من البنابيع (والجبالوعات)		$\frac{1}{2\pi} \int_0^a q(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi$	$\frac{1}{2\pi} \int_0^a q(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi} d\xi$
توزع سطحي اصصاري		$-\frac{1}{2\pi} \int_0^a \gamma(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi} d\xi$	$\frac{1}{2\pi} \int_0^a \gamma(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi$

٤.١٠ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١٠.١٠ : استخرج معادلات أويلر الحركية العامة واستخلص منها صيغتها في حالة جريان ثنائي ووحيد البعد .

س ١٠.١١ : ماهي الشروط الحدية الحركية لجسم ساكن في جريان مثالي وحقيقي وجسم يتحرك في سائل ساكن هدم الاحتكاك ؟

س ١٠.١٢ : استخرج معادلات جروميكو - لامب وبرهن بمساعدتها أن القدرة الميكانيكية الاجمالية بالنسبة لواحدة الكتلة لجريان مستقر ثلاثي البعد غير قابل للضغط تؤثر عليه قوى حجمية كونية فقط ، $W = C_{PE} = \frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi$ ، تبقي قيمتها ثابتة في كامل حقل الجريان فقط في الحالة التي يكون فيها حقل الجريان خالياً من الأعاصير أو عندما يكون شعاع الأعصار مطبقاً على شعاع السرعة .

س ١٠.١٣ : استخرج المعادلة الاقصارية وبرهن بمساعدتها أن شعاع السرعة الزاوية له شكل جزئية من جريان مستو هدم الاحتكاك بتعرض لقوى حجمية كونية فقط لا يتغير مع الزمن .

س ١٠.١٤ : اشرح سبب نشوء مقاومة التسارع وبيّن كيفية حسابها .

س ١٠.١٥ : اشرح المضمون الفيزيائي لتابع الكمون Φ وتابع التيار Ψ والعلاقة بينهما مستخلصاً المبادئ الأساسية لطرق حل مسائل الجريان الكموني المستوي .

س ١٠.١٦ : استخرج علاقتي توزيع السرعة والضغط لأعصار حقيقي ، كيف تفسر نشوء الأقاع الفارخة والقدرة التدميرية للسيكلونات الاستوائية .

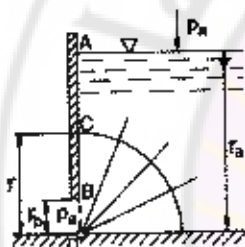
س ١٠.١٧ : على المحور x يوجد في النقطة A نبع شدته $\frac{m^2}{s}$ و $\Phi = 0$ وعلى بعد a منه ، في النقطة B ، يوجد نبع آخر شدته $\frac{m^2}{s}$. ما هي معادلة خط التيار الصغري ، $\Psi_{100} = 0$ ، للجريان الناتج عنها ؟ حدد موقع نقطة الركود S والسرعة في نقطة C تبعد عن A مسافة 1 وعن B مسافة 3x .

س ١٠.١٨ : نبع شدته $\frac{m^2}{s}$ و $\Phi = 0$ وأعصار شدته $\frac{m^2}{s}$ و $\Psi = 12$ ويدور باتجاه دوران عقارب الساعة . إذا انطبق مركزا النبع والأعصار على مركز الإحداثيين x ، y أوجد معادلة خط التيار للنبع الأعصاري وحدد السرعة في النقطة (2,3) B من حيث القيمة والاتجاه . بين أهمية هذا الجريان العملية .

س ١٠.١٠ : برهن أن خط التيار الصفري الناتج من تضام ثنائية مستوية عزمها M مع جريان السحائي أفقي سرعته u_∞ باتجاه x يمثل دائرة نصف قطرها R .
كم يجب أن يكون M إذا كان $R = 20 \text{ cm}$ وكانت $u_\infty = 5 \text{ m/s}$ ؟

ت ١٠.١٠ : بوابة بشكل صفيحة مستوية شاقولية تغرز خلفها الماء حتى ارتفاع r_a . نرفع البوابة لتصريف الماء مسافة $r_a \gg r_b$ ونفرض أن خروج الماء من الشق يماثل جريان بالوعة مستوية ، الشكل (ت ١٠.١٠) . أحسب قوة الضغط الكلية المؤثرة على البوابة ونسبتها لقوة الضغط الستاتيكية . معطى : $r_b = 0.3 \text{ m}$ ، $r_a = 10 \text{ m}$ ، $\rho g = 10^3 \text{ kp/m}^3$ ، $b = 1 \text{ m}$. عرض البوابة

الحل : بالنسبة لبالوعة مستوية لتتبع السرعة القطرية حسب (10.32) بالنسبة لنقطة ما C تبعد مسافة r عن مستوى القياس (مركز البالوعة) :



$$V_r = V = \frac{\text{const}}{r} \quad (a)$$

وتكون السرعة في النقطتين A و B :

$$V_A = \frac{\text{const}}{r_a} ; V_B = \frac{\text{const}}{r_b} \quad (b)$$

الشكل ت ١٠.١٠

وعليه نتج من (a) و (b) :

$$V = V_A \frac{r_a}{r} ; V_B = V_A \frac{r_a}{r_b} \quad (c)$$

نطبق معادلة برنولي على خط التيار المار من A حيث يؤثر الضغط الجوي p_a و C حيث يؤثر الضغط p فنجد باستخدام العلاقة (c) الضغط الزائد :

$$p_0 = p - p_a = \frac{\rho}{2} V_A^2 \left[1 - \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right] + \rho g (r_a - r) \quad (d)$$

في شق التفرع يتعادل الضغط مع الضغط الجوي لأن التصريف يتم في الهواء الجوي ، وبالتالي ينتج من (d) بالنسبة للنقطة B :

$$\frac{\rho}{2} V_A^2 \left[1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^2 \right] + \rho g (r_a - r_b) - 0 \quad .$$

ومن هنا نجد بعد اصلاح بسيط العلاقة :

$$\frac{\rho}{2} V_A^2 = \rho g \frac{r_b^2}{r_a + r_b} \quad .$$

وباستخدام (b) يصبح :

$$p_a = \rho g \frac{r_b^2}{r_a + r_b} \left[1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^2 \right] + \rho g (r_a - r) \quad (e)$$

إننا نحصل على قوى الضغط (التحريكية) المؤثرة على البوابة هي $\int_{r_a}^{r_b} (p_a \cdot dr \cdot 1)$

التي نحصل عليها باستخدام (e) وإجراء التكامل بالصيغة :

$$F_{pd} = \frac{\rho g}{2} (r_a - r_b)^2 \left(1 - \frac{2 r_b}{r_a + r_b} \right) \quad (f)$$

عصلا قوى الضغط الستاتيكية تنتج من (3.21) بفرض أن الماء ساكن بالصيغة :

$$F_{ps} = p_s A = \rho g \frac{r_a - r_b}{2} (r_a - r_b) \cdot t = \frac{\rho g}{2} (r_a - r_b)^2 \quad (g)$$

وعليه تنتج النسبة :

$$n = \frac{F_{pd}}{F_{ps}} = 1 - \frac{2 r_b}{r_a + r_b} < 1 \quad (h)$$

هذه النتيجة تبين أن جزءاً من قدرة الضغط الكامنة يتحول إلى قدرة حركية يعملها الجريان الخارج من شق التفريغ .

باستخدام القيم العددية نجد : $F_{ps} = 47.045 \text{ t}$; $F_{pd} = 44.3 \text{ t}$; $n \approx 0.942$.

ت ٤.١٠ : أوجد حقل السرعة للجريان المستوي المحدد بتابع العكس

$\Phi = a(x^2 - y^2)$ ، حيث a عدد موجب حقيقي ، وحدد صورة الجريان ، برهن أنه يساعد هذا التابع يمكن دراسة الجريان المصور ضمن جدارين مسويين متعامدين وأنه يمثل حالة خاصة لتابع كحون يسمح بدراسة الجريان ضمن جدارين مسويين يجهزان زاوية α .

الحل : بسهولة يمكن التأكد أن Φ يحقق معادلة لابلاس $\Delta \Phi = 0$ ، وبالتالي تلنج مركبتا السرعة حسب (10.1) ، ومنهما قيمة شعاع السرعة ، في كل نقطة (x, y) بالصيغة :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2ax ; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2ay$$

$$\Rightarrow |V| = \sqrt{u^2 + v^2} = 2a \sqrt{x^2 + y^2} = 2ar \quad (a)$$

حيث r نصف القطر المكاني . وعليه فإن مركز الاحداثيات يمثل نقطة ركود ، $V(0,0) = 0$. ويتحدد اتجاه الجريان بسهولة إذا اعتبرنا نقطة على المحور x . فمتى ما يكون الاحداثي $x < 0$ ينتج من (a) أن $u > 0$ و $v = 0$ ، وبالتالي فالجزيئات تتحرك الى اليمين . وينتج من اجل $x > 0$ أن $u < 0$ ، وبالتالي فالجزيئات تتحرك الى اليسار . وإذا اعتبرنا نقطة على المحور y نجد أن الجزيئات في القسم الفوق من المستوي xy تتحرك للأسفل ، وفي القسم التحتي للأعلى ، الشكل (ت ٢.١٠) .

إيجاد صورة الجريان نستعين بالعلاقين (10.14) و (10.15) لاستخراج تابع التيار حيث نجد :

$$\Psi = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy + c(x) = \int 2ax \cdot dy + c(x) = 2axy + c(x).$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2ay + c'(x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2ay \Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = \text{const.}$$

نحمل للسوية ثابت التكامل الاعتيادي فينتج تابع التيار :

$$\Psi = 2axy \quad (b)$$

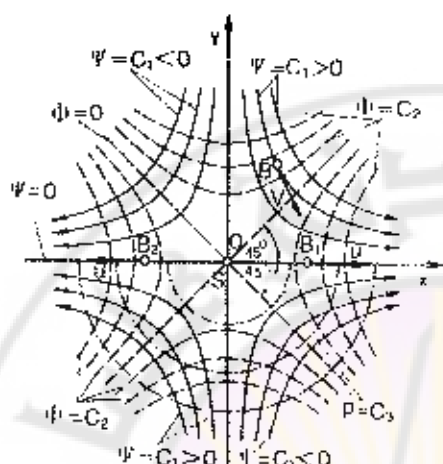
بذلك نحصل بموجب (10.11) على معادلة خطوط التيار بالصيغة :

$$\Psi = \text{const} \Rightarrow 2axy = \text{const} \Rightarrow xy = C_1 \quad (c)$$

إن خطوط التيار مثل إذن حزمة من القطوع الزائدة . فإذا كان $C_1 > 0$ فيكون إما $y > 0, x > 0$ أو $y < 0, x < 0$ ، وبالتالي تكون فروع القطوع الزائدة واقعة في الربع الأول والثالث . وعندما يكون $C_1 < 0$ فيكون إما $y > 0, x < 0$ أو $y < 0, x > 0$ ، وبالتالي تقع فروع القطوع الزائدة في الربع الثاني والرابع . ويتحدد

خط التيار الصفري، $\psi = 0$ ، بوضع $C_1 = 0$ حيث ينتج من ذلك أن $x = 0$ أو $y = 0$. هذا يعني أن محوري الإحداثيات

يمثلان خطي تيار صفريين، وفي نفس الوقت مستقيمين مقارنين في اللانهاية لغزوع القطوع الزائدة، الشكل (ت ٢٠١٠).



إن معادلة خطوط الكمون تنتج بسهولة بوضع :

$$\psi = \text{const} \Rightarrow x^2 - y^2 = C_2, (1)$$

وبالتالي فهي تتصلب حزمة من القطوع الزائدة، التي تشكل مع خطوط التيار شبكة منحنيات متعامدة. وتنتج معادلة خط الكمون الصفري بالصيغة :

الشكل ت ٢٠١٠ : صورة الجريان المحدد بتابع الكمون $\Phi = u(x^2 - y^2)$ المطابق للجريان الركودي المستوي أو الجريان ضمن زاوية قائمة.

$$\psi = 0 \Rightarrow x = \pm y, (c)$$

وعليه فإن المستقيمين المنصفين للزاويتين القائمتين المتشككتين من محوري الإحداثيات يمثلان خطي الكمون الصفريين، وفي نفس الوقت المستقيمين المقارنين في اللانهاية لغزوع القطوع الزائدة الممثلة لخطوط الكمون.

نفرض الآن أن المحور x قيد «تصلب» ، كأن نتصوره يمثل أثر صفيحة مستوية أفقية، $\alpha = \pi$. فإن ذلك لا يؤثر طبيعياً على طبيعة الجريان، الذي يطلق عليه الآن الجريان الركودي المستوي، لأن الجريان القادم من الأعلى أو الأسفل باتجاه الصفيحة المستوية يشكل كما رأينا نقطة ركود في مركز الإحداثيات ويتفرع منها يساراً ويميناً على كامل مستوى الصفيحة.

يسهولة يمكن أيضاً أن نتصور أن المحورين x و y في الربع الأول مثلاً قد تصلبا، فنحصل في هذه الحالة على الجريان ضمن الزاوية القائمة، $\alpha = \pi/2$ ، المشكلة من صفيحتين مستويتين متعامدتين.

يفتج مما تقدم أن الجريان السابق يمثل حالة خاصة لجريان عام ، تابع كونه ψ وتابع تياره ψ يتحددان بدلالة الإحداثيات القطبية بالمعادلتين :

$$\psi = r^{n/2} \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} ; \quad \psi' = r^{n/2} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} . \quad (f)$$

ويكون في هذه الحالة خط التيار الصفري محددًا بالمستويات $\varphi=0$ (محور x) و $\varphi = \pm \alpha$ ، التي يمكن أن نتصورها مثل آثار جدران مستوية مما يسمح بمساعدة (f) دراسة الجريان ضمن جدارين مستويين يصنعان زاوية α . وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $\alpha = \frac{\pi}{2}$ نجد بسهولة من (f) بوضع φ : $y = r \sin \varphi$ ، $x = r \cos \varphi$:

$$\psi = ar^2 \cos 2\varphi = ar^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a(x^2 - y^2) ,$$

$$\psi' = ar^2 \sin 2\varphi = ar^2 (2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi) = 2axy$$

وهذا ما ينطبق على المثال السابق . وعندما $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ينتج من (f) :

$$\psi = ax(x^2 - 3y^2) ; \quad \psi' = ay(3x^2 - y^2) \quad (g)$$

وهذان هما قايما الكمون والتيار للجريان ضمن جدارين مستويين يصنعان زاوية $\alpha = 60^\circ$.

١١ الجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً

تعتبر الجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً (أو محورياً) Rotationally symmetric حالة خاصة وهامة جداً للجريانات الكمونية الفراغية ، ولكنها أقرب بكثير إلى الجريانات الكمونية المستوية من حيث أن حركة جزيئات السائل تم في مستويات تتقاطع كلها مع محور ثابت يطلق عليه محور التناظر ، وتكون لهذه الحركة في كل من هذه المستويات نفس الصورة . لذلك يكتفى بدراسة مثل هذه الجريانات حركياً ونمريكياً في مستوي زوالي (انتصافي) Meridian plane ، كما كان الأمر تماماً في حالة الجريانات المستوية .

١.١١ المعادلات التفاضلية الأساسية للجزيئات الكمومية المتناظرة

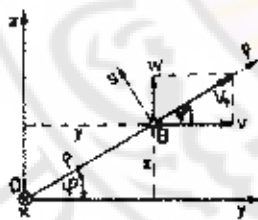
دورانياً

لاستخراج المعادلات التفاضلية الأساسية للجزيئات الكمومية المتناظرة دورانياً نختار بدلاً من جملة الاحداثيات الديكارتية x, y, z جملة إحداثيات اسطوانية ρ, φ, x ونفرض أن $V_\rho, V_\varphi, V_x \equiv u$ مركبات شعاع السرعة $|V|$ باتجاه هذه الاحداثيات . عندئذ تأخذ معادلة الاستمرار العامة (9.5) الصيغة التالية (راجع ت ٢.٦ ، ص ٢٠٨ ، وللتعمق [42] [84]) :

$$\text{div } V = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{V_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad (11.1)$$

ونأخذ العلاقة (9.11) لدوران شعاع السرعة الصيغة التالية :

$$\begin{aligned} e_\varphi \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} \right) + e_r \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial \rho} \right) + e_x \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) = \\ = \text{rot } V = 2 (e_\rho \omega_\rho + e_\varphi \omega_\varphi + e_x \omega_x). \end{aligned} \quad (11.2)$$



الشكل ١.١١ : لاستخراج المعادلات التفاضلية للجزيئات المتناظرة دورانياً .

لتكن B في الشكل (١.١١) نقطة من مستوى الزواحي للجريان المتناظر دورانياً ، وليكن المحور x الذي يخترق عمودياً مستوى الشكل في 0 محور التناظر . عندئذ يكون :

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (11.3)$$

بعد النقطة B عن x . وتكون في النقطة B مركبة قطرية للسرعة V_ρ فقط بينما تكون المركبة المحيطة باتجاه ω_φ معدومة ، $V_\varphi = 0$ ، لأن الجزيئات لا تتحرك في هذا

الاتجاه . V_p يمكن تحليلها الى مركبتين : $v = V_p \cos \varphi$ باتجاه y
و $w = V_p \sin \varphi$ باتجاه z .

نفرض المستوي الزواحي منطبقاً على مستوي الاحداثيين المتعامدين p, x
فيكون موقع أية نقطة من حقل الجريان محدداً بنصف القطر المكافئ :

$$r = \sqrt{x^2 + \rho^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (11.4)$$

وتكون لشعاع السرعة فيها مركبة محورية باتجاه x ، $V_x = u = f(x, \rho)$ ،
ومركبة قطرية $V_p = f(x, \rho)$ ، على هذا الاساس نحصل من (11.1) على معادلة
الاستمرار للجريانات المتناظرة دورانياً بالصيغة :

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} V_p + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (11.5)$$

كما نجد أيضاً من (11.2) بسهولة أن شرط الخلو من الدوران (9.23) ينحصر
بالنسبة للجريانات المتناظرة دورانياً بمعادلة واحدة فقط :

$$\omega_\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_p}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial \rho} = 0 \quad (11.6)$$

هذه النتيجة تعبر عن إمكانية اشتقاق مركبتي السرعة V_p ، V_x من تابع
ككون سرعة Φ بحيث تكون :

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; \quad V_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad (11.7)$$

وبالتالي فإن Φ يحقق شرط الخلو من الدوران (11.6) بالتطابق . ونحصل على
المعادلة التفاضلية لتحديد Φ بإدخال (11.7) في معادلة الاستمرار (11.5) حيث
نجد العلاقة :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0 \quad (11.8)$$

التي تمثل معادلة الكمون للجريانات المتناظرة دورانياً ، والتي تحقق في انت واحد شرط الخلو من الدوران والاستمرار ، مثلها مثل العلاقة (10.6) بالنسبة للجريانات الكمونية المستوية ، وتقوم مقام معادلة لابلاس العامة :

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 . \quad (11.8a)$$

نعتبر الآن (راجع ٢.١٠) تابعاً جديداً $\Psi_{sl} = f(x, y)$ ترتبط به مركبات السرعة بالعلاقين :

$$V_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{sl}}{\partial y} ; V_y = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{sl}}{\partial x} . \quad (11.9)$$

وبالتالي يحقق معادلة الاستمرار (11.5) بالتطابق . فإذا أدخلنا (11.9) في (11.6) فنحصل على المعادلة التفاضلية لتحديد Ψ_{sl} بالصيغة :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{sl}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{sl}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{sl}}{\partial p} = 0 . \quad (11.10)$$

يطلق على Ψ_{sl} اسم تابع تيار ستوكس Stokes' stream function وله بالنسبة للجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً نفس المضمون الفيزيائي التابع التيار Ψ بالنسبة للجريانات الكمونية المستوية . فالمنحنيات $\Psi_{sl} = \text{const}$ تمثل خطوطاً للتيار وتشكل مع خطوط الكمون $\Phi = \text{const}$ في المستوي الزواحي شبكة من المنحنيات المتعامدة ، الشكل (٢.١١) . وتحدد العلاقة بين Φ و Ψ_{sl} من (11.7) و (11.9) ، حيث تنتج علاقتان بديلتان لمعادتي كوشي - ريمان (10.13) :

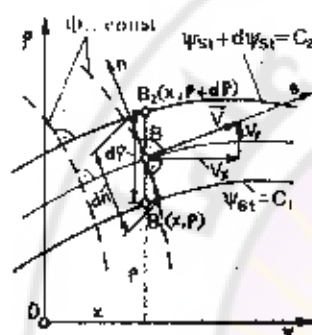
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{sl}}{\partial y} ; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{sl}}{\partial x} ; \quad (11.11)$$

ومنها يمكن إيجاد Ψ_{sl} إذا كان Φ معلوماً أو بالعكس .

نعتبر الآن في المستوي الزوالي مجموعة من خطوط التيار ، وليكن s الاحداثي المماسي على خط التيار ، n الناظم عليه ، الشكل (٢٠١١) .
إن قيمة شعاع السرعة تنتج من (11.7) أو (11.9) بالصيغة :

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_p^2} = \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^2 = \frac{1}{\rho} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi_{st}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_{st}}{\partial p} \right)^2 \right\} \quad (11.12)$$

وباعتبار أن $V \cdot s$ فتكون أيضاً :



$$\left. \begin{aligned} V \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{st}}{\partial n} \\ 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi_{st}}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

ليكن :

الشكل ٢٠١١ : توضيح المضمون

الذي يأتي لتابع تيار ستوكس : $\Psi_{st2} = \Psi_{st} + d\Psi_{st} = C_2$ و $\Psi_{st1} = \Psi_{st} = C_1$

خطي تيار متجاورين ، dn البعد الناظمي بينهما . فإذا اعتبرنا مستويين متعامدين مع محور التناظر x ويتقاطع مع Ψ_{st1} في النقطة $B_1(x, p)$ ومع Ψ_{st2} في النقطة $B_2(x, p+dp)$ فيكون التيار الحجمي الذي يعبر الحائمين الدائري المار من B_1 و B_2 محددًا بالعلاقة :

$$dQ = 2\pi \rho \, dp \cdot V_x$$

وحيث أن $V_x dp = V dn$ ، كما يتضح بسهولة من الشكل (٢٠١١) ، فيكون باستخدام المعادلة الأولى من (11.13) :

$$dQ = 2\pi \rho \, dn \, V = 2\pi \rho \, d\Psi_{st}$$

ويجاء التكامل بين $p=0$ و $p=p_0$ نجد العلاقة :

$$Q = 2\pi \int_{\rho=0}^{\rho_0} dW_{SI} = 2\pi [W_{SI}(\rho=\rho_0) - W_{SI}(\rho=0)] \quad (11.14)$$

هذا يعني أن التيار الحجمي الذي يعبر سطح دائرة نصف قطرها $\rho = \rho_0$ يتعلق بالفرق بين قيمتي تابع تيار ستوكس من أجل نقطة من محيط هذه الدائرة ، $\rho = \rho_0$ ، ومركزها ، $\rho = 0$.

أخيراً نجدد الإشارة أن مبدأ التضام ينطبق على التابعين Φ و W_{SI} . وعليه توجد لتابع الكمون الإجمالي وتابع تيار ستوكس الإجمالي علاقتان تماثلتان للعلاقين (10.7) و (10.16) . ولكن مبدأ التبادل بين Φ و W_{SI} غير محقق بسبب اختلاف إشارة الحدين الأخوين للعلاقين (11.8) و (11.10) .

٢.١١ أمثلة هي الجريانات الكمونية البسيطة المتناظرة دورانياً

نوجد جريانات كمونية بسيطة فراغية أو تقطعية لها نفس أهمية الجريانات الكمونية المستوية من حيث أنها تشكل « أحجار بناء » لتشييد أجسام جريان متناظرة دورانياً ينطبق محيط منطعها الزواحي على خط تيار ستوكس الإجمالي الصمري . وسنعالج فيما يلي ، متبعين نفس الخطوات المعتمدة في (٣.١٠) ، بعض هذه الجريانات التي تسمح بالمقارنة بينها وبين مثيلاتها من الجريانات الكمونية البسيطة .

١.٣.١١ الجريان الوضعاوي المتناظر دورانياً

إن التابع الخطي

$$\Phi_T(x, y, z) = ax + by + cz \quad (11.15)$$

يحقق ، عندما تكون a ، b و c ثوابت حقيقية ، معادلة لابلاس (11.8a) . وبالتالي فهو تابع كمون لجريان فراغي ، حقل سرعته يتحدد بدلالة الإحداثيات الديكارتية بالعلاقات :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_x = a : v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_x = b : w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w_x = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathbf{V}_x| = \sqrt{u_x^2 + v_x^2 + w_x^2} = \text{const} \quad (11.16)$$

وعليه فإن السرعة في كامل حقل الجريان ثابتة من حيث القيمة والاتجاه . لذلك يطلق عليه اسم الجريان الانسيابي المنتظم Translation flow . ويكون لهذا الجريان في أحد المستويات المشكلة من محاور الإحداثيات x, y, z أو في مستوى زوالي x : (انظر الجدول ١٠-١١) صورة مماثلة للشكل (٣-١٠) ص ٤٢٠ .

٢.٢.١١ التبع النفطي والبالوعة النفطية

ليكن لدينا التابع :

$$\Phi_Q = -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{r} = -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (11.17)$$

حيث r نصف القطر المكافئ ، E عدد ثابت . هذا التابع يحقق معادلة لابلاس (11.8) أو (11.8a) ، كما يمكن التأكد من ذلك بسهولة . وعليه فإن Φ_Q يمثل تابع كمون لجريان فراغي .

من (11.17) نجد أن سطوح الكمون الثابت :

$$\Phi_Q = \text{const} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const} \quad (11.18)$$

تمثل كرات مركزية حول مركز الإحداثيات ، التي تظهر في مستوى زوالي كدوائر مركزية . وحيث أن خطوط التيار $\Psi_Q = \text{const}$ ، (انظر الجدول ١٠-١١) ، نختار سطوح الكمون عمودياً فيجب أن تؤلف حزمة من الأشعة القطرية المنبعثة من المركز ، ويكون شعاع السرعة ممحلاً عليها وله مركبة قطرية فقط :

$$|V| = V_r = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = \frac{E}{4\pi} \frac{1}{r^2} \quad (11.19)$$

نفس النتيجة نحصل عليها بحساب مركبات السرعة باتجاه المحاور الديكارتية ، حيث نجد :

$$u = \frac{E}{4\pi} \frac{x}{r^3} ; v = \frac{E}{4\pi} \frac{y}{r^3} ; w = \frac{E}{4\pi} \frac{z}{r^3} \Rightarrow |V| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (11.20)$$

أو باتجاه المحورين x, y في المستوي الزواحي حيث تكون :

$$V_x = u = \frac{E}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} ; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{E}{4\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \Rightarrow |V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (11.21)$$

لتحديد المضمون الفيزيائي للثابت E نحسب التيار الحجمي الذي يعبر السطح الخارجي لكرة نصف قطرها R ومساحة سطحها الخارجي $A = 4\pi R^2$ فنجد باستخدام (11.19) :

$$Q = V_r(R) \cdot A = \frac{E}{4\pi} \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = E ; [E] = \frac{m^3}{s}$$

إذن فإن E يساوي التيار الحجمي الذي لا تتعلق قيمته بنصف القطر . فإذا كان $E > 0$ فإن الجريان ينبعث من نقطة المركز وتتحرك جزيئاته على مستقيبات شعاعية للخارج وفي كافة الاتجاهات ، ويسمى في هذه الحالة نبع نقطي أو فواعي Point source وتطبق عليه كافة العلاقات السابقة . وعندما يكون $E < 0$ فإن الجريان يصب في نقطة المركز قادماً من كافة الاتجاهات ويسمى في هذه الحالة بالوعة نقطية أو فواعية Point sink ، وعندئذ يأخذ تابع الكمون الصيغة :

$$\Phi_{\text{sink}} = + \frac{E}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (11.22)$$

إذا يمثل في الحالتين غزارة أو شدة النبع أو البالوعة . وتكون صورة الجريان لكل منها في مقطع زوالي مائلة تماماً للشكل (٣.١٠ - e أو b) ، ص ٤٢٣ ، في حالة النبع والبالوعة في المستوي . ونحصل على هذه الصورة بوضع $W_{st} = \text{const}$ (انظر الجدول ١.١١) . ولكن ينتج من مقارنة العلاقتين (10.32) و (11.19) أن سرعة النبع النقطي أو البالوعة النقطية تتناقص بمعدل $1/r^2$ (بدلاً من $1/r$ في الحالة المستوية) كلما ابتعدنا عن المركز . وعليه فإن تأثير النبع النقطي يتلاشى على مسافة أقرب من المركز بالمقارنة مع النبع المستوي . ويمثل المركز هنا أيضاً نقطة شاذة .

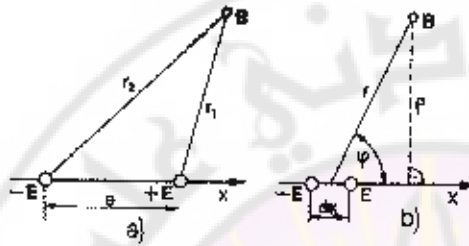
في الواقع العملي لا توجد طبعاً بناييع وبالوعات نقطية بالصورة المبينة أعلاه . ولكن هناك أمثلة عديدة يمكن دراستها على أساس أنها مكافئة لنبع نقطي أو بالوعة نقطية . فإذا حركنا قضيباً يحذب الطرفين في سائل ساكن فإن الجريان في الجوار المباشر لمقدمة القضيب التي تزيح السائل أمامها في كافة الاتجاهات يمكن اعتباره نوعاً نقطياً ، بينما تكون المنطقة المحيطة بمؤخرة القضيب ، حيث يتحرك السائل من كافة الاتجاهات ليملأ الفراغ الذي خلفه القضيب وراءه ، مكافئة لجريان بالوعة نقطية . كذلك فإن الجريان الذي تولده مروحة تبوية مثبتة في جدار شاقولي مكافئ لنصف بالوعة . ويمكن على هذا الأساس تفسير السبب لعدم تمكن شراقات الغبار الكهربائية من شفط الغبار إلا إذا لامست نفاثة الشراقة الجدار (أو السجادة) تقريباً حتى تكون سرعة الهواء التي تتناسب مع $1/r^2$ كافية للشفط .

٣.٢.١١ التناحية النقطية

نعتبر على المحور « نبعاً نقطياً » وبالوعة نقطية من نفس الغزارة $\pm E$ وتفصلها مسافة e . فإذا كانت B نقطة ما من حقل الجريان تبعد عن مركز النبع r_1 وعن مركز البالوعة r_2 ، الشكل (٣.١١ - e) ، فيكون تابع الكمون الإجمالي للجريان الناتج عنها معطى بموجب (11.17) و (11.22) بالعلاقة :

$$\Phi_{\text{tot}} = -\frac{E}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) . \quad (11.23)$$

نجعل البالوعة تقترب من النبع إلى مسافة صغيرة جداً dx ، الشكل (٣.١١ - b) ، في الوقت الذي تزداد فيه غزارة كل منها E بحيث يبقى الجداء



الشكل ٣.١١ :
استخراج تابع الكمون
للتناحية النقطية .

$$Ec = E \Delta x = E dx = M = \text{const} \quad (11.24)$$

ذا قيمة نهائية محددة M ، حتى عند إجراء عملية التناهي : $E \rightarrow \infty$ ، $\Delta x \rightarrow 0$ ، التي تنطبق فيها البالوعة على النبع ويصبح $r_1 = r_2 = r = \sqrt{x^2 + z^2}$ عندئذ تأخذ (11.23) الصيغة :

$$\Phi_D = -\frac{E}{4\pi} d \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{E dx}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

ومن هنا نجد بعد إصلاح بسيط :

$$\Phi_D = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r^3} = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{M \cos \varphi}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{M \cos \varphi}{4\pi (x^2 + z^2)} , \quad (11.25)$$

حيث φ الزاوية التي يصنعها الشعاع r الموجه للنقطة B مع المحور x .
يطلق على الجريان الذي تابع كمرنه Φ_D اسم التناحية النقطية أو الفواغية ، التي عزمها M ومحورها x . وتحدد صورة الجريان لها في مستوي زواي x و z بوضع $\Phi_{\text{slD}} = \text{const}$ ، انظر الجدول (١.١١) ، حيث تنتج صورة مائلة تماماً لصورة جريان التناحية المستوية المبينة في الشكل (١١.١٠) . ونحصل على

مركبتي السرعة في هذا المستوي بسهولة ، حيث تكون بموجب (11.7) :

$$V_x = u = \frac{M}{4\pi} \frac{\rho^2 - 2x^2}{(x^2 + \rho^2)^{5/2}} ; V_y = -\frac{M}{4\pi} \frac{3x\rho}{(x^2 + \rho^2)^{5/2}} \quad (11.26)$$

ومنهما نتج قيمة السرعة في أية نقطة من حقل الجريان :

$$|V| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{M}{4\pi} \frac{\sqrt{\frac{3x^2}{x^2 + \rho^2} + 1}}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (11.27)$$

هذه النتيجة تبين أن تأثير الثنائية الفراغية يتلاشى بمعدل $1/r^3$ كلما ابتعدنا عن مركزها ، وبالتالي بشكل أسرع من الثنائية المستوية . ويمكن التأكد من ذلك بسهولة إذا حسبنا V على المحور x ($\rho = 0$) وعلى المحور y ($x = 0$) .
إن الثنائية النقطية لها أهمية خاصة بالنسبة لدراسة الجريان حول كرة ، كما سنرى ذلك فيما بعد .

٤.٢.١١ توزيع خطي من الينابيع أو البالوعات النقطية

حل مسائل الجريان حول أجسام انسيابية متناظرة محورياً يستخدم عدد

لانهاثي من الينابيع أو البالوعات النقطية

الموزعة بشكل مستمر على طول قطعة

مستقيمة مثلاً ، وبحيث تكون شدتها

الموضعية بالنسبة لوحد الطول :

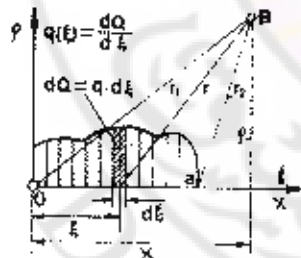
$$q(\xi) = dQ/d\xi \quad (11.28)$$

متغيرة . عندئذ نحصل على توزيع خطي

من الينابيع أو البالوعات النقطية .

فإذا $q(\xi)$ تختار وفقاً لتابع مناسب .

اعتبرنا التوزيع الخطي من الينابيع ، المبين في الشكل (٤.١١) والمحدد بالمجال



الشكل ٤.١١ : توزيع خطي من الينابيع النقطية .

$\xi \leq 0 \leq \xi$ فإن التيار الحلقي الاجمالي أو الشدة الاجالية تحسب من العلاقة :

$$E = Q = \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} q(\xi) d\xi \quad (11.29)$$

ونجد برموز الشكل والاستهداء بالعلاقة (11.17) تابع الكمون :

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} q(\xi) \frac{d\xi}{r} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} q(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \rho^2}} \quad (11.30)$$

وتنتج مركبتا السرعة المحرصة في نقطة ما $B(x, \rho)$ بالصيغة :

$$V_x = + \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} q(\xi) \frac{(x-\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + \rho^2]^{3/2}} :$$

$$V_\rho = + \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} q(\xi) \frac{\rho d\xi}{[(x-\xi)^2 + \rho^2]^{3/2}} \quad (11.31)$$

في حالة توزع خطي من البالوعات النقطية تبدل إشارة (+) بـ (-) . وفي الحالات العملية الهامة ، كما هو الأمر عند دراسة الجريان حول أجسام مغزلية ، يستخدم توزع خطي من الينابيع - البالوعات بشرط أن تكون شدتها الاجالية معدومة :

$$Q = \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} q(\xi) d\xi = 0 \quad (11.32)$$

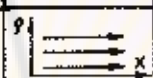
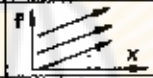
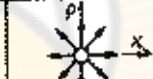
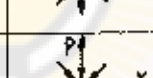
حتى يتحقق شروط الأغلاق ، ويكون خط التيار الصفري للجريان الناتج عن تضامها مع جريان انسيابي منتظم مغلقاً .

في الحالة الخاصة التي يكون فيها توزيع الينابيع الخطي منتظماً ، وبالتالي

$$q = \frac{E}{a} = \text{const} \quad \text{ينتج من (11.30) :}$$

$$\Phi = - \frac{E}{4\pi a} \int_{(z=0)}^{z=n} \frac{dz}{r} \quad (11.33)$$

الجدول ١٠١١ : تابع الكون Φ وتابع تيار ستوكس Ψ_{St} للجريبات
الكمونية البسيطة المتناظرة دورانياً .

النقطة الشاذة	الرمز	$\Phi =$ تابع الكون	$\Psi_{St} =$ تابع تيار ستوكس
جريان منتظم (انسحابي) اقصى		$u_{\infty} x$	$u_{\infty} \frac{p^2}{2}$
جريان منتظم شافولي		$V_{\infty} p$	$-V_{\infty} x p$
جريان منتظم (انسحابي) مائل		$u_{\infty} x + V_{\infty} p$	$u_{\infty} \frac{p^2}{2} - V_{\infty} x p$
نبع نقري		$-\frac{E}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + p^2}} = -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{r}$	$-\frac{E}{4\pi} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}}\right)$
بالوعة نقطية		$+\frac{E}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + p^2}} = +\frac{E}{4\pi} \frac{1}{r}$	$+\frac{E}{4\pi} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}}\right)$
ثنائية نقطية		$\frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + p^2)^{3/2}} = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r^3}$	$-\frac{M}{4\pi} \frac{p^2}{(x^2 + p^2)^{3/2}}$
توزيع خطي من الينابيع (أو البالوعات)		$\frac{1}{4\pi} \int_0^n q(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + p^2}}$	$-\frac{1}{4\pi} \int_0^n q(\xi) \left[1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + p^2}}\right] d\xi$

٣.١١ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١١ : ما هي الخصائص المميزة للجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً بالمقارنة مع الجريانات الكمونية العامة .

س ٢.١١ : استخرج المعادلات التفاضلية لتابع الكمون $\Phi(x,z)$ وقيار تابع ستوكس $U_{St} = U(x,z)$. هل يمكن تطبيق مبدأ التبادل بينها ؟
س ٣.١١ : لماذا لا نستطيع المكنس الكهربائية شفط القبار إلا إذا لامست فوهة النفثة السجادة .

س ٤.١١ : برهن أن سطح التيار الصفري الناتج عن تضام ثنائية نقطية عزماً لها مع جريان السحائي أفقي سرعته u_0 باتجاه x - يمثل كرة نصف قطرها a . كم يجب أن تكون قيمة Δ عندما $u_0 = 50 \text{ m/s}$ ، $a = 20 \text{ mm}$ ؟

س ٥.١١ : هل يمكن دراسة الجريان عبر المروحة (أو الدمار) على أساس التعميض عن فرس المروحة بتوزيع مناسب من الينابيع - الباليوعات ؟

س ٦.١١ : مروحة لتجديد هوار صالة إنتاج مثبتة في الجدار ضمن فتحة دائرية قطرها $d = 300 \text{ mm}$ ، إذا كانت سرعة التيار الدافوري الخارج من الفتحة $v = 20 \text{ m/s}$ ، فلي أي بعد من الجدار لا تشعر بتسارع مزعج إذا فرضنا أن سرعة الهواء المقبولة تساوي 1 m/s ؟

الحل : إذا أهملنا الاحتكاك واعتبرنا كثافة الهواء ثابتة فإن الجريان في الجوار المباشر للجدار يمكن اعتباره مكافئاً لنصف البالوعة نقطية ، شدتها تساوي التيار الحجمي الذي يعبر فتحة الجدار . وعليه تكون شدة البالوعة كلها :

$$F = 2 \cdot V \frac{\pi d^2}{4} = V \frac{\pi d^2}{2} \quad (a)$$

وحيث أن السرعة القطرية للباليوعة بموجب (11.19) على محيط كرة نصف قطرها R :

$$V_r = \frac{E}{4\pi R^2} \quad (b)$$

نجد ، بإدخال (a) في (b) ووضع $V_r = 1 \text{ m/s}$ واستخدام القيم العددية الأخرى ، المسافة اللازمة عن الجدار لكي لا نشعر بانزعاج من تيار الهواء :

$$R = \sqrt{\frac{V d^2}{8 V_T}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 0.3^2}{8}} = 0.475 \text{ m}.$$

ت ٢٠١١: برهن أن $\Phi = x^2 + y^2 - 2z$ هو تابع كمون سرعة للجريان الركوندي المتناظر دورانياً. أوجد صورة الجريان وتوزيع السرعة والضغط (انظر ت ٢٠٧، ص ٢٥٥).

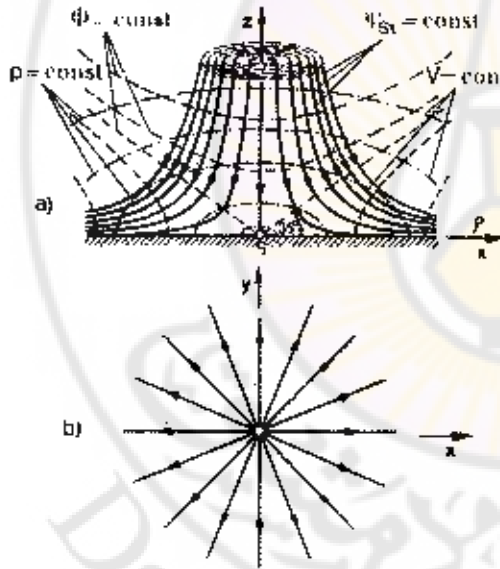
الحل: بسهولة يمكن التأكد أن $\Phi(x, y, z)$ يمثل تابع كمون لجران ثلاثي البعد لأنه يحقق معادلة لابلاس $\Delta\Phi = 0$. وللبرهان أنه متناظر دورانياً نحدد صورة الجريان.

إن مركبات السرعة باتجاه المحاور الديكارتية فنخرج من (0.29):

$$u = 2x, \quad v = 2y, \quad w = -2z, \quad (a)$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لحظ التيار حسب (5.30):

$$dx : dy : dz = u : v : w = x : y : (-2z). \quad (b)$$



من المعادلة الأولى نحصل على مساقط خطوط التيار في المستوي $y-x$ الأفقي:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow y = \text{const.}, x, \quad (c)$$

فهي تمثل إذن حزمة من المستقيمت المنبثقة من مركز الأحداثيات في كافة الاتجاهات، الشكل (ت ٢٠١١ - ب).

في المستويين $x-z$ و $y-z$ نحصل على مساقط خطوط التيار من المعادلتين الباقيتين من (b) حيث نجد بعد إجراء التكامل:

$$z x^2 = \text{const.}; \quad z y^2 = \text{const.}, \quad (d)$$

الشكل ت ٢٠١١: خطوط التيار وخطوط الكمون وخطوط الضغط الثابت والسرعة الثابتة للجريان الركوندي المتناظر دورانياً.

وبالتالي فإن مساقط خطوط التيار

في كل من هذين المستويين تمثلها حزمة من القطوع الزائدة المكعبة التي تمس المحورين x, z .

و z, y في النهاية ، الشكل (ث ٢.١١ - a) . فإذا لاحظنا بموجب (a) أن مركبات السرعة في النقطة 0 معدومة ، $u=v=w=0$ ، يتضح مما سبق أن الجريان في النصف الفوق من الفراغ متناظر دورانياً بالنسبة لمحور z ، وأن المستوى $x-y$ الذي تكون فيه مركبة السرعة $w=0$ يمكن اعتباره كصفحة مستوية لانهائية الامتداد يصطدم فيها الجريان عمودياً حيث تتشكل في المركز نقطة ركود S يتوزع منها الجريان على كامل الصفحة بشكل شعاعي في كافة الاتجاهات . لذلك يطلق على هذا الجريان اسم الجريان الركودي المتناظر دورانياً . وتكفي لذلك دراسته في مقطع زوائي واحد فقط $z-p$.

إذا اعتبرنا $\psi = x^2 + y^2$ فإن تابع الكمون يصبح من الشكل :

$$\Phi = p^2 - 2z^2 \quad (e)$$

وننتج مركبتا السرعة في اتجاه p و z حسب (11.7) بالصيغة :

$$V_p = \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 2p \quad ; \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -4z \quad (f)$$

ويكون التالي : $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2$ ، $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = 2$ ، $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4$. فإذا أدخلنا هذه القيم في معادلة الكمون للجريانات المتناظرة دورانياً (11.8) نتأكد أنها محققة فعلاً . وعليه نحصل على تابع تيار متوكس بمساعدة العلاقة الأولى من (11.11) بعد إدخال (f) فيها فينتج :

$$\psi_{SI} = \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} p \, dp + c(z) = -4z \frac{p^2}{2} + c(z)$$

وبمساعدة العلاقة الثانية من (11.11) نجد $c(z) = 0$ وبالتالي يصبح :

$$\psi_{SI} = -2xp^2 \quad (g)$$

ونحصل على خطوط التيار المبينة في الشكل (ث ٢.١١ - a) بوضع $\psi_{SI} = \text{const}$. الذي يمثل ، كما ذكرنا ، قطعاً زائداً محكبة . ويمثل كلاً من $z = 0$ و $p = 0$ خط صفرياً للتيار ، $\psi_{SI} = 0$.

معادلة خطوط الكمون تنتج من (e) :

$$\Phi = \text{const} \Rightarrow p^2 - 2z^2 = \text{const} \quad (h)$$

وهي تمثل أيضاً قطعاً زائداً فمس خط الكمون الصفري المحدود بالمستقيمين :

$$\Phi = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \quad (i)$$

في النهاية (الشكل ٢.١١ - أ) .

نوزع السرعة المحصلة V ينتج من (f) حيث نجد :

$$|V|^2 = V^2 = V_p^2 + V_z^2 = 4\rho^2 + 16z^2 = \frac{\rho^2}{(1/2)^2} + \frac{z^2}{(1/4)^2} \quad (j)$$

إذن فإن سطوح السرعة الثابتة ، $V = \text{const}$ ، تمثل السطوح الخارجية لمجمعات قطوع ناقصة . ولحصول على توزيع الضغط من معادلة برنولي باستخدام (j) :

$$\rho + \frac{\rho'}{2} V^2 = C_B = p_{\text{tot}} \Rightarrow \rho = p_{\text{tot}} - \frac{\rho'}{2} V^2 = p_{\text{tot}} - 2\rho'(\rho^2 + 4z^2) \quad (k)$$

حيث ρ' هنا تمثل الكثافة . وعليه فإن سطوح الضغط الثابت ، $p = \text{const}$ ، تمثل أيضاً السطوح الخارجية لمجمعات قطوع ناقصة ، (الشكل ٢.١١ - ب) .

* * *

الفصل الخامس

مسائل الجريان الأساسية وطرق حلها

إن مسائل الجريان التكنيكية التي نصادفها في حقل بناء آلات الجريان والطيران والسفن تتركز من حيث المبدأ على حساب حقل الجريان حول أجسام متشابهة شكلاً تمثل مقاطعها بروفيلات أجنحة حاملة . لذلك يمكن من وجهة نظر نظرية الجناح الحامل تصنيف هذه المسائل على النحو التالي :

١ - المسألة الأساسية الأولى : يطلب فيها شكل البروفيل الذي يحقق أفضل الشروط الهيدروديناميكية أو الأيروديناميكية من أجل حقل جريان معين . هذه إذن مسألة تصميمية بحتة ، يطلق عليها أيضاً المسألة غير المباشرة أو المعكوسة *Inverse problem* .

٢ - المسألة الأساسية الثانية : يطلب فيها تحديد توزيع السرعة والضغط على السطح الخارجي لبروفيل شكله معلوم ، وكذلك في حقل الجريان . وعليه فالمسألة تتعلق بإعادة حساب القيم الهيدروديناميكية للتأكد من صحتها ، أو لمقارنتها مع نتائج تجريبية ، أو لمعرفة تغيرها مع تغير حقل الجريان . لذا تسمى أيضاً المسألة المباشرة *Direct problem* .

٣ - المسألة الأساسية الثالثة : يطلب فيها تحديد شكل البروفيل الذي يحقق توزيعاً معيناً للسرعة أو للضغط يحول مثلاً دون نشوء ظاهرة التكيف ، أو اختراق سرعة الصوت ، أو يقلل من قوى الاحتكاك والفواقد .

هذا التصنيف ينطبق أيضاً على مسائل الجريان عبر شبك بروفيلات .
حل هذه المسائل الأساسية يفترض كخطوة تقريبية أولى أن حقل الجريان
كهوفي ، وبالتالي يحقق معادلة لابلاس ، $\Delta \Phi = 0$. ويعتمد ميكانيك السوائل
الحديث للحل على هذا الأساس الطرق الأساسية التالية :

- ١ - طريقة النقاط الشاذة .
 - ٢ - طريقة التوابع المركبة وخاصة طريقة التمثيل المطابق .
 - ٣ - الطريقة البيانية التقريبية Graphical method .
 - ٤ - الطريقة التماثلية Analogy method .
- سنعالج فيما يلي مبادئ هذه الطرق وبعض الأمثلة التطبيقية لأركان التفاصيل
للأبحاث المختصة التي سنشير إليها قدر الإمكان .

١٢ طريقة النقاط الشاذة

١.١٢ أسس الطريقة

تعتمد طريقة النقاط الشاذة في جوهرها على مبدأ التضايم الذي يمكن
بمساعده إيجاد حل عام لمعادلة لابلاس التفاضلية الخطية كحاصل جمع مجموعة
من الحلول الإفرادية البسيطة لهذه المعادلة كالتناييع والبالوعات والثباتات
والأعاصير . وحيث أن حقل الجريان لكافة هذه الجريانات الكهومية البسيطة
يتميز بوجود نقطة شاذة في مركزها تبلغ فيها السرعة قيمة لانهائية لذلك يطلق
عليها اسم النقاط الشاذة ونسعى الطريقة التي نستخدمها كلبينات لتشييد أجسام
جريان مناسبة طريقة النقاط الشاذة .

إن تأثير الجسم على الجريان الاسامي ، الانسحابي المنتظم عادة ، يعوض
عنه بتوزيع مناسب من النقاط الشاذة ذات الشدة المعينة بحيث أن خط التيار

الصوري لحقل الجريان الاجمالي يكون مغلقاً ومطابقاً لشكل الجسم المطلوب أو المعطى .

تتاز طريقة النقاط الشاذة بكونها تصلح لدراسة الجريانات المستوية والفراغية، إضافة لكونها تملك إمكانيات متعددة تلائم المسألة المطروحة ونسمع بتكوين تصور هندسي واضح . لهذه الاسباب أفردت لها في ميكانيك السوائل التطبيقي مكانة خاصة، ونم بمساعدتها إيجاد طرق عملية لحساب الجريان حول جناح حامل اعتباري الشكل فردي وضمن شبك بروفيلا. وسنوضح فيما يلي هذه الطريقة من خلال حساب بعض الأمثلة التي نبذوها بالأسهل . ولكن قبل ذلك من المفيد أن نسأل عن القوى التي تتعرض لها نقطة شاذة في جريان انسيابي منتظم .

١٠.١.١٢ القوى المؤثرة على النقاط الشاذة في جريان انسيابي

طالما أت تأثير الجسم على الجريان الانسيابي يمكن التعويض عنه بتوزيع مناسب من النقاط الشاذة فإن القوى التي تؤثر على هذا الجسم يجب أن تظهر كتأثير متبادل بين هذه النقاط الشاذة والجريان الانسيابي. ومن أوائل من تطرق لحساب هذه القوى بشكل رياضي مفصل لاغالي [130] M. Lagally ومن بعده بطريقة هندسية مبسطة بيكس [131] .

نعتبر أولاً خطاً اعصارياً مستقيماً يخترق عمودياً مستوي الإحداثيين y, x في المركز . ونعتبر في هذا المستوي جرياناً انسيابياً منتظماً سرعته u_∞ . نحيط الخط الاعصاري بسطح تحكم cs نختاره للبساطة بشكل اسطوانة نصف قطرها r ومحورها منطبق على الخط الاعصاري ، الشكل (١٠.١٢) . نطبق قانون الدفع الخطي باتجاه المحور y فيكون حسب (8.104) :

$$F_{iy} + F_{ry} + F_{sy} + F_{By} = 0 .$$

مركبة القوى الحجمية $F_{iy} = 0$. وباعتبار أن قوى الاحتكاك معدومة في

جريان مثالي فإن F_{ty} تمثل قوى الضغط المؤثرة على كتلة السائل داخل cs .
 بينما تكون $F_A = -F_{ny}$ القوة المؤثرة على الأعصار (الذي يعرض عن وجود
 الجسم) و F_{ny} مركبة رد فعل تيار الدفع ، وعليه يكون :

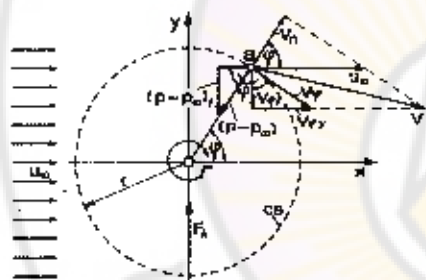
$$F_A = F_{ty} + F_{ny} \quad (12.1)$$

في النقطة B الواقعة على cs يحرض الأعصار حسب (10.39) السرعة المماسية :

$$V_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (12.2)$$

ونحسب السرعة المحصلة ، $V = u_\infty + V_\varphi$ ، في هذه النقطة من الشكل (١٠.١٢) :

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = (u_\infty + V_\varphi \sin \varphi)^2 + (V_\varphi \cos \varphi)^2 \quad (12.3)$$



ليكن p الضغط التائيكي
 المؤثر في B ، p_∞ الضغط غير
 المشوش . من معادلة برنولي
 المعادلة (8.12) نجد :

$$p - p_\infty = \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{V}{u_\infty} \right)^2 \right] \quad (12.4)$$

الشكل ١٠.١٢ : حساب قوة الرفع المؤثرة

على أعصار كوني في جريان انسحان .

وبالتالي فإن مركبة قوة الضغط

الجزئية باتجاه y المؤثرة في B بالنسبة لواحدة العرض تبلغ :

$$dF_{py} = dF_{ty} = (p - p_\infty)_y \cdot dA = -(p - p_\infty) \sin \varphi \cdot r d\varphi .$$

ومنها نجد مركبة محصلة قوى الضغط باستخدام (12.2) حتى (12.4) وإجراء

التكامل على طول cs :

$$F_{ry} = + \frac{\rho}{2} u_{\infty}^2 r \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{V_y}{u_{\infty}} \right)^2 \sin \varphi + 2 \frac{V_y}{u_{\infty}} \sin^2 \varphi \right] d\varphi = \frac{\rho}{2} u_{\infty} F. \quad (12.5)$$

لأن مركبة رد فعل تيار الدفع باتجاه y تلتج من (8.104) بمساعدة الشكل (١٠١٢) واستخدام (12.2) بالصيغة :

$$\begin{aligned} F_{ry} &= \rho \int_{-CS_{out}} V_y dQ = \rho \int_0^{2\pi} V_y \cdot V_n dA = \rho \int_0^{2\pi} V_y \cos \varphi \cdot u_{\infty} \cos \varphi \cdot r d\varphi = \\ &= \rho u_{\infty} r \frac{F}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\rho}{2} u_{\infty} F. \quad (12.6) \end{aligned}$$

بادخال (12.5) و (12.6) في (12.1) نجد :

$$F_A = \rho u_{\infty} F. \quad (12.7)$$

هذا يعني أن الاعصار الكموني في جريان انسحائي يتعرض لقوة رفع تخضع لقانون كوتا-يوكوفسكي ، الذي سبق واستخرجناه بطريقة أخرى (راجع ٦.٢٠٥.٨) . وتعني هذه النتيجة أيضاً أن الجريان في الجوار المباشر لجناح حامل لانهائي الامتداد يمكن دراسته على أساس تضام اعصار كموني مع جريان انسحائي .

بخطوات مشابهة يمكن البرهان أن الاعصار لا يتعرض لقوة في اتجاه الجريان الانسحائي وبالتالي فالمقاومة $F_w = 0$.

من نفس المطلقات السابقة منعب الآن القوة المؤثرة على نبع مستوي في جريانه انسحائي أفقي ، الشكل (٢٠.١٢) . فحسب قانون الدفع الخطي تكون

القوة المؤثرة على النبع في اتجاه x :

$$F_s = F_{s_x} = F_{t_x} + F_{n_x} . \quad (12.8)$$

ان السرعة التي يحرضها النبع في النقطة B من سطح التحكم ننتج من (10.32) :

$$V_r = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (12.9)$$

وتكون السرعة المحصلة في هذه النقطة

حسب الشكل (٢.١٢) :

$$\begin{aligned} V^2 &= (u_\infty + V_{rx})^2 + V_{ry}^2 = \\ &= (u_\infty + V_r \cos \varphi)^2 + (V_r \sin \varphi)^2 . \end{aligned} \quad (12.10)$$

ونحصل على مركبة محصلة قوى الضغط باتجاه x وبالنسبة لواحدة العرض من

رموز الشكل (٢.١٢) بعد القيام

باصلاح بسيط واجراء التكامل

على طول cs :

$$\begin{aligned} F_{rx} &= F_{t_x} = \int_0^{2\pi} - (p - p_\infty) \cos \varphi \cdot r \, d\varphi = \\ &= - \frac{\rho}{2} u_\infty^2 r \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{V_r}{u_\infty} \right)^2 \cos \varphi + 2 \frac{V_r}{u_\infty} \cos^2 \varphi \right] d\varphi = \\ &= - \frac{\rho}{2} u_\infty E \quad (12.11) \end{aligned}$$

من جهة أخرى نحصل على رد فعل تيار الدفع باتجاه المحور x حسب (8.104)

وباستخدام (12.8) ورموز الشكل (٢.١٢) :

$$\begin{aligned}
F_{R_x} &= \rho \int_{CS_{out}} V_x dQ = - \rho \int_0^{2\pi} V_x \cdot V_n \cdot dA = \\
&= - \rho \int_0^{2\pi} (u_\infty + V_r \cos \varphi) \cdot (V_r + u_\infty r) \cdot r d\varphi = \\
&= - \rho u_\infty^2 r \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{V_r}{u_\infty} \left[1 + \left(\frac{V_r}{u_\infty} \right)^2 \right] \cos \varphi + \frac{V_r}{u_\infty} \cos^2 \varphi \right\} d\varphi = \\
&= - \frac{3}{2} \rho u_\infty E.
\end{aligned} \tag{12.12}$$

بإدخال (12.11) و (12.12) في (12.8) نجد

$$F_S = F_{R_x} = - \rho u_\infty E. \tag{12.13}$$

هذه النتيجة تشبه شكلاً قانون كوتا - يوكوفسكي وتنص على أن النبع يولد في جريان انسحابي قوة دافعة بعكس اتجاه الجريان تساوي بالنسبة لوحدة العرض جداء الكثافة في السرعة غير المشوشة في شدة النبع، ولكن النبع لا يتعرض لقوة رفع عمودية على اتجاه الجريان ، $F_{R_y} = F_A = 0$.

إذا استبدلنا في الشكل (٢.١٢) النبع بالوعة مستوية شدتها E - نجد فوراً من (12.13) القوة المؤثرة عليها :

$$F_w = + \rho u_\infty E, \tag{12.14}$$

أي أن البالوعة تتعرض لمقاومة في اتجاه الجريان ، ولكنها لا تتعرض لقوة رفع ، $F_A = 0$. وحيث أن الشائبة ذات العزم M تنتج من تضام نبع وبالوعة من نفس الشدة فإننا لا نتعرض في جريان انسحابي لأية قوة . ولكن إذا كان محورها يميل على المحور x بزاوية α مثلاً فإنها تتعرض لعزم دوران [131] :

$$M_l = \rho M u_\infty \sin \alpha. \tag{12.15}$$

٢.١.١٢ التعبير البياني لصورة الجريان الإجمالي الناتج

عن تضام جريانات كوينية

يمكن بالاعتماد على العلاقة (10.16) الحصول بسرعة وبسهولة على صورة تقريبية للجريان الإجمالي الناتج عن تضام جريائين كوينيين أو أكثر ، وذلك باتباع الخطوات التالية :

نعتبر جريائين مستويين محددين بتابعي التيار $\Psi_1(x,y)$ و $\Psi_2(x,y)$. نرسم صورة خطوط التيار لكل منهما بحيث يكون التيار الحجمي المار بين كل خطي تيار متجاورين ثابتاً . هذا يعني بموجب (10.12) :

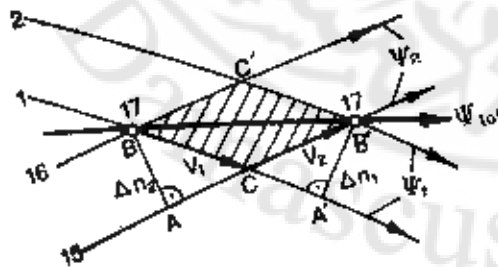
$$\Delta Q = \Delta \Psi = \Psi_m - \Psi_{m+1} = \Delta \Psi = \text{const.} \quad (12.16)$$

إن السرعة المحصلة في نقطة تنتج كمحصلة شعاعية للسرعات الافردية فيها :

$$V_{101} = V_1 + V_2 \quad (12.17)$$

وتكون بمثابة على خط التيار الإجمالي Ψ_{101} المار من النقطة المعتبرة .

نرسم خطوط التيار لكل من الجريائين Ψ_1 و Ψ_2 بأرقام متسلسلة صحيحة (أو عشرية) ابتداء من رقم ما ، ولكن بحيث يكون الفرق بين قيمتي $\Psi_{1,1}$ خطي تيار متجاورين واحداً لكي تتحقق (12.16). في الشكل (٣.١٢) ينشكّل من خطي التيار 1, 2 للجريان الأول و 16, 15 للجريان الثاني رباعي الأضلاع $C' B' C B$.



الشكل ٣.١٢ خط التيار الإجمالي الناتج عن تضام جريائين ينطبق على أقطار رباعيات الأضلاع المشكلة من تقاطع خطوط التيار المتجاورة لكل منها .

ليكن n الإحداثي الناطمي على خطوط التيار ، و Δn_1 ، Δn_2 البعدين الناطمين بين خطي التيار 1 ، 2 و 15 ، 16 . بذلك تنتج من (12.16) العلاقة :

$$V_1 \Delta n_1 = V_2 \Delta n_2 \Rightarrow V_1/V_2 = \Delta n_2/\Delta n_1 \quad (12.18)$$

وحيث ان المثلثين CBA و $C'B'A'$ متشابهان هندسياً بسبب تساوي زاويتي من الأول مع زاويتي من الثاني فنجد بسهولة أن ضلعي رباعي الاضلاع المشترك المتجاورين بطابقان مرععي الجريان الأول والثاني في هذا المجال . وعليه فإن السرعة الهضبة تكون مطابقة لقطر رباعي الاضلاع $B'B$ الذي يمثل في نفس الوقت قطعة من خط التيار الاجمالي U_{tot} ، الشكل (٣٠١٢) .

هذه النتيجة تتوضع أكثر إذا استعنا بالعلاقة (10.9) واستخدمنا بدلاً من الاحداثيين الديكارتيين x, y إحداثيين عامين منحنيين s, n بالتجهاء خط التيار وعمودياً عليه . عندئذ تصبح :

$$V = \frac{\partial \Psi}{\partial n} , \quad 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \quad (12.19)$$

فإذا عوضنا في المجال المحدد التفاضل بالفضل ولاحظنا أن الفضل $\Delta \Psi = \text{const}$ نجد بسهولة العلاقة (12.18) :

$$V_1 = \frac{\Delta \Psi}{\Delta n_1} ; V_2 = \frac{\Delta \Psi}{\Delta n_2} \Rightarrow V_1/V_2 = \Delta n_2/\Delta n_1$$

في ضوء ما تقدم نصل الى القاعدة التالية :

للحصول على صورة الجريان الاجمالي الناتج عن تضام جريانيين مستويين (أو متناظرين دورانياً) نرسم في مستو واحد صورة الجريان لكل منهما بحيث تكون واحدة الفرق العددي للارقام المتسلسلة لخطوط التيار تعادل قيمة ثابتة للتيار المجعبي . ثم نكتب على كل نقطة تقاطع خطي تيار رقماً يساوي للمجموع الجبري لأرقامها المتسلسلة (في الشكل (٣٠١٢) نكتب مثلاً فوق النقطتين B

و B' الرقم $17 = 15 + 2 = 16 + 1$. إن التيار الاجمالي يربط بين كافة نقاط التقاطع ذات الارقام الواحدة (انظر الشكل (٥.١٢) .

٢.١٢ دراسة الجريانات حول أجسام مستوية

١٠٢.١٢ الجريان حول جسم نصفى

نعتبر في مستوي الاحداثين x, y نبعاً مركزه ينطبق على نقطة الصفر وشدة E . وجرياناً انسحابياً منتظماً موازياً للمحور x بسرعة u_∞ ، الشكل (٤.١٢) . بموجب مبدأ التضاف يكون تابع الكمون الاجمالي حسب (10.7) وباستخدام (10.24) و (10.26) :

$$\Phi_{tot} = \Phi_r + \Phi_Q = u_\infty x + \frac{E}{2\pi} \ln r . \quad (12.20)$$

وينتج تابع التيار الاجمالي بموجب (10.16) وباستخدام (10.24) و (10.29) :

$$\Psi_{tot} = \Psi_r + \Psi_Q = u_\infty y + \frac{E}{2\pi} \frac{y}{r} . \quad (12.21)$$

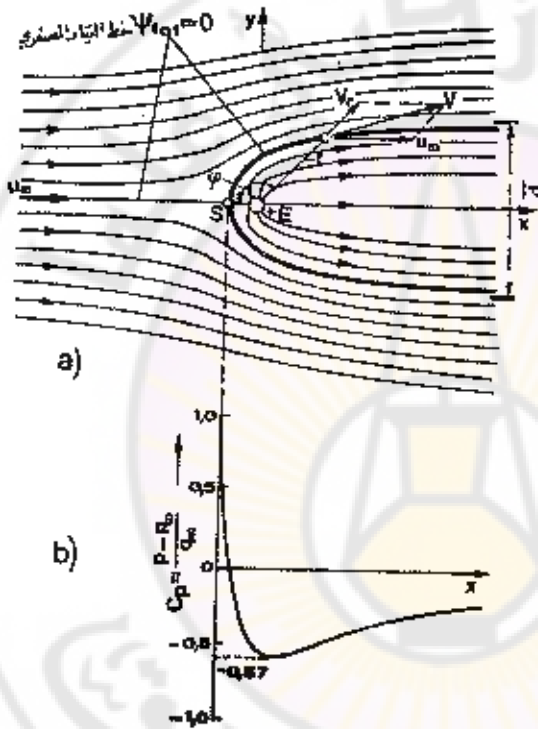
بذلك نحصل على مركبتى السرعة المحصلة في نقطة ما من حقل الجريانات بوضع $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= u_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = u_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{x}{r^2} , \\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{E}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{E}{2\pi} \frac{y}{r^2} . \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

من هاتين العلاقتين يتبين أنه على مقربة من مركز النبع (r صغيرة) يهيمن جريان النبع على الجريان الكلي ($V_r \gg u_\infty$) ، بينما يتلاشى تأثير النبع على بعد كبير من المركز (r كبيرة) ونهيمن صورة الجريان الانسحابي على الجريان

الكلي. كما يتبين أيضاً أنه على المحور x توجد نقطة ذكود S تنعدم فيها السرعة،
ويحدد بعدها عن مركز الاحداثيات بوضع $u=v=0$ من أجل $x = x_0$ ،
 $y = 0$ حيث ينتج :

$$x_0 = -\frac{E}{2\pi u_m} \quad (12.23)$$



الشكل ١٢.١ : ٤.١٢

الجريان حول جسم
لصفي مستو ناتج من
تضام نبس وجريان
النسائي . a) صورة
الجريان . b) توزع
الضغط على سطح الجسم
المكافئ لخط التيار
الصفي .

فهي تقع إذن على المحور x السالب. من هذه النقطة يتفرع خط التيار الصفي،
 $\psi_{tot} = 0$ ، إلى فرعين متناظرين بالنسبة للمحور x مبتدئاً بشكل عمودي على x
ومن ثم ينحني تدريجياً باتجاه $+x$ إلى أن يصبح موازياً له على بعد كافٍ من مركز
الاحداثيات ، وتصبح السرعة المحصلة $V = u_m$. وبما أن خط التيار الصفي ،
كأي خط تيار آخر ، لا يسمح بنفوذ السائل عبره ، لذلك يحصر داخله كامل التيار

الحجمي Q تنبع . فإذا فرضنا d مماسة سطح التيار الصفري على بعد كافٍ من المركز فيكون بالنسبة لواحدة العرض :

$$Q = E = u_{\infty} d \quad (12.24)$$

نتصور الآن أن خط التيار الصفري، المسمى أيضاً بخط تيار نقطة الركود، قد نصلب ، أو أننا عوضاً عنه بجسم صلب فعلاً . إن صورة الجريان حول هذا الجسم الاسطواني المدور الأتف وذي الجنبين المتوازيين والممتد من طرف واحد إلى اللانهاية (نظرياً !) ، والذي لذلك يسمى الجسم النصفى المستوي Plane half-body ، تبقى مطابقة لصورة الجريان المبينة في الشكل (١٢ - ٤ - ٥) . ويمكن بسهولة نسبياً تحديد حقل السرعة والضغط لهذا الجريان كمسألة أساسية أولى أو ثانية على أساس تضام نبع مستوي مع جريان انسيابي . وسنقوم بذلك فيما يلي نظراً لأهمية هذا الجريان الذي يمكن اعتباره نموذجياً بالنسبة للجريان حول الحافة الأمامية لأي جسم اسطواني مدور الأتف ، مثل بروفيل جناح حامل في جريان انسيابي متناظر (راجع ١٢ - ٥ - ٢) .

إن شكل خط التيار الصفري، أو الجسم النصفى، يتحدد من (12.21) بالعلاقة:

$$\psi_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow u_{\infty} y + \frac{E}{2\pi} \varphi = 0$$

فإذا قسمنا الزاوية القطبية φ اعتباراً من نقطة الركود S (قارن الشكل ٣ - ١٠ ص ١٢٣) فننتج باستخدام (12.24) وبوضع $y = r \sin \varphi$ معادلة خط الحدود Boundary line ، أو معادلة تحديد شكل الجسم النصفى ، بالصيغة :

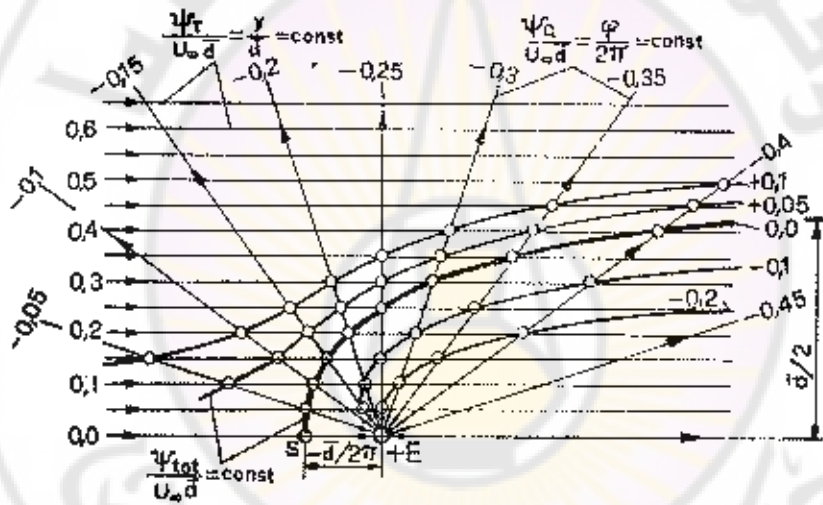
$$\frac{y}{d} = \pm \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \frac{r}{d} = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \quad (12.25)$$

وذلك حسب ما نختار إشارة φ موجبة (+) عندما نلتف باتجاه دوران عقارب

الساعة أو سالبة (-) بالعكس . بالنسبة لخطوط التيار الأخرى فإنها تتعدد من (12.21) بعد إدخال (12.24) بالمعادلة :

$$\Psi_{tot} = u_{\infty} y + \frac{E}{2\pi} \varphi = u_{\infty} y + \frac{u_{\infty} d}{2\pi} \varphi = \text{const} . \quad (12.26)$$

من هذه العلاقة وفي ضوء الخطوات الموضحة في (٣.١.١٣) نحصل على صورة الجريان المبينة في الشكل (٤.١٣ - أ) ، التي يوضع الشكل (٥.١٢) كيفية الحصول عليها بيانياً بالتفصيل ، بالنسبة للنصف العلوي من المستوي $y \geq 0$.



الشكل ٥.١٣ : التحديد البياني لصورة الجريان الناتجة عن تضام منبع وجريان (انسحابي).

بغية الحساب بقيم لا بعدية نكتب (12.26) بالصيغة التالية :

$$\frac{\Psi_{tot}}{u_{\infty} d} = \frac{y}{d} + \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Psi_T}{u_{\infty} d} + \frac{\Psi_Q}{u_{\infty} d} = C_1 + C_2 = C$$

نرسم الآن خطوط التيار للجريان الانسحابي والمنبع بحيث تكون كمية السائل المارة بين خطي تيار متجاورين واحدة، ويتم ذلك بإعطاء الثابتين C_1 و C_2 قيمةً تقبّر بمعدل ثابت. في مثالنا

نختار هذا المعدل 0.05، ونجعل $C_1 = \frac{\Psi_{\text{tot}}}{u_{\infty} d}$ تتزايد من الصفر وحتى 0.65 ونرسم خطوط التيار المتوازية، وفوقها، وعلى أساس افتراض أن الزاوية φ في النصف العلوي من المستوى سالبة، نرسم خطوط التيار الشعاعية للنبع بإعطاء الثابت $C_2 = \frac{\Psi_0}{2\pi} = C_1$ قيمة سالبة من الصفر وحتى 0.45. نصل الآن بين كافة نقاط تقاطع خطوط تيار الجريانين الأسامين (المحاطة بدوائر صغيرة) والتي يكون فيها مجموع أرقامها، $C = C_1 + C_2$ ثابتاً، في الشكل (٥.١٢) رسمت خطوط التيار الإجمالية من أجل

$$\frac{\Psi_{\text{tot}}}{u_{\infty} d} = C = +0.1; +0.05; 0; -0.1; -0.2.$$

ورسم خط التيار الصفري الذي ينطبق حتى النقطة S مع المحور x السالب بخط سميك.

من أجل $y > 0$ نلاحظ أن خطوط التيار التي تبدأ من مركز النبع وتكون بصورة داخل خط التيار الصفري تنتج عندما $\Psi_{\text{tot}} < 0$ ، بينما تقع خطوط التيار $\Psi_{\text{tot}} > 0$ التي تنطبق عند مسافة بعيدة من مركز النبع على خطوط الجريان الانسيابي، خارج خط التيار الصفري.

لتحديد حقل السرعة نحسب السرعة الإجمالية في نقطة ما (x,y) من حقل الجريان. هذه تفتح من (12.22) و (12.24) بعد إصلاح بسيط بالشكل :

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{u_{\infty}^2} &= \frac{u^2 + v^2}{u_{\infty}^2} = \left(1 + \frac{d}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 = \\ &= 1 + \frac{2d}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

لحساب توزيع السرعة على حدود الجسم النصفى يفضل استخدام الإحداثيات القطبية. فإذا وضعنا في العلاقة (12.27) $x = r \cos \varphi$ ، $y = r \sin \varphi$ (على أساس أن φ تزداد من نقطة الركود باتجاه دوران عقارب الساعة)

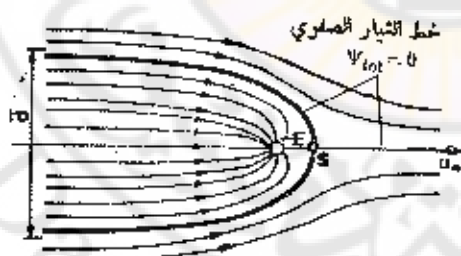
$$\text{وعوضنا بموجب (12.25) } r = \frac{d}{2\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \text{ نجد :}$$

$$\left(\frac{V}{u_{\infty}}\right)_R^2 = 1 - \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} + \frac{\sin^3 \varphi}{\varphi^3}. \quad (12.28)$$

إن توزيع الضغط اللابعدي ، معامل الضغط ، ينتج من معادلة برنولي (8.54) حيث نجد باستخدام (12.28) :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \left(\frac{V}{u_\infty} \right)^2 = \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} - \frac{\sin^3 \varphi}{\varphi^3} \quad (12.29)$$

في الشكل (١٢ - ٤) رسم توزيع الضغط المحسوب على هذا الأساس ، ومنه يتضح أنه في الجوار المباشر لأنت الجسم النصفى يسود ضغط زائد ، $c_p > 0$ ، يولد قوة ضغط باتجاه الجريان . بينما يسود اعتباراً من مسافة معينة من الأنت ضغط ناقص ، $c_p < 0$ ، قيمته الأعظمية $c_{pmin} = -0.57$ ويولد قوة تؤثر بعكس اتجاه الجريان . ويمكن البرهان أن محصلة كافة قوى الضغط هذه معدومة . هذا يعني أن الجسم النصفى لا يتعوز في سائل مثالي لأية مقاومة . وواضح أن التناقض بين هذه النتيجة والواقع سببه إهمال قوى الاحتكاك الناتجة عن لزوجة السائل الحقيقي . هذه النتيجة تبدو أيضاً للوهلة الأولى متناقضة مع حقيقة أن النبع في جريان انسحابي يتلقى قوة دافعة . هذه القوة الدافعة تؤثر فعلاً على الجسم النصفى و السائلي ، المطابق لحط التيار الصفري الذي يحصر في داخله جريان النبع ، ولكنها تختفي طبعاً بالنسبة لجسم نصفى و صلب .



الشكل ١٢ - ٤ ، تضام جريان انسحابي مع بالوعة.

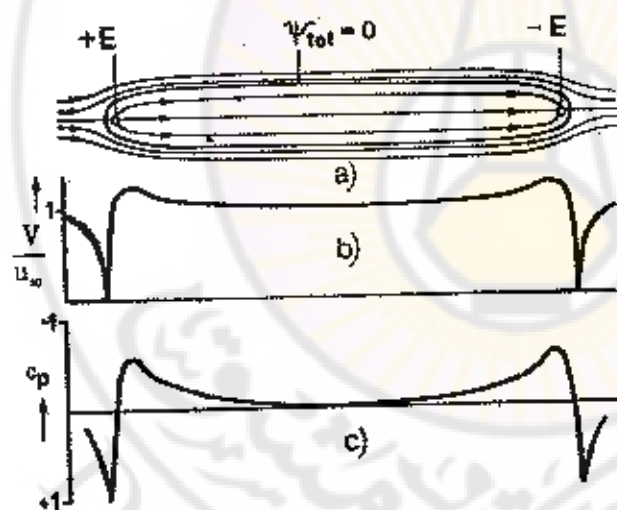
إن النتائج السابقة تنطبق من حيث المبدأ على تضام بالوعة مستوية مع جريان انسحابي ، حيث نحصل أيضاً على جسم نصفى مفتوح للخلف ويمتد باتجاه x - إلى اللانهاية ،

الشكل (١٢ - ٦) . ونلاحظ أن صورة الجريان مطابقة لصورة الجريان في

حالة النبع إذا استبدلنا اتجاه x الموجب بالسالب ، وأخذنا شدة البالوعة مساوية لشدة النبع . عندئذ تكون في النقاط المناسبة من الحقلين قيم السرعة والضغط واحدة .

٢.٢.١٢ الجريان حول أجسام رانكين المصفوية

من مقارنة الشكلين (٤.١٢-ا) و (٦.١٢) يتضح فوراً أنه بالإمكان دراسة الجريان حول أجسام اسطوانية مدورة الأتف والمؤخرة وبحدودة الطول ، الشكل (٧.١٢-ا) ، على أساس أنه يكافئ الجريان حول خط التيار الصفري الناتج عن نظام جريان انسحابي باتجاه x مع نبع وبالوعة من نفس الشدة ، $\pm E$ ، وعلى مسافة معينة e من بعضها . مثل هذه الاجسام تعرف باسم أجسام رانكين Rankine body .



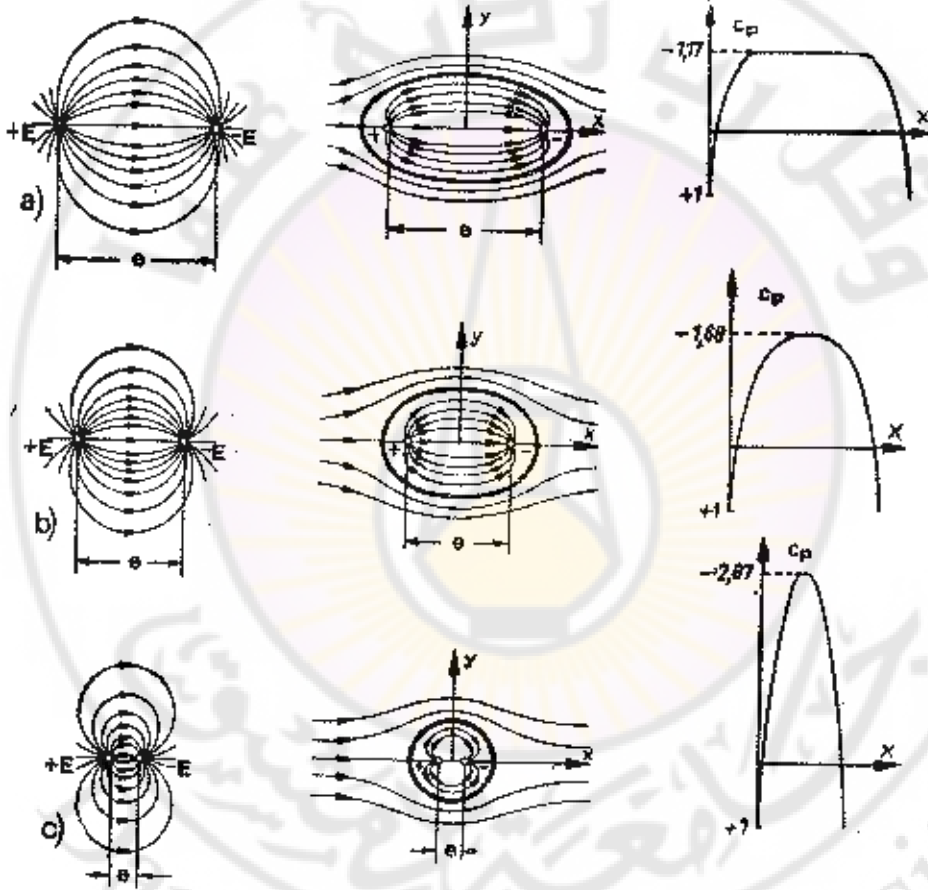
الشكل ٧.١٢ :
الجريان الناتج عن
اضام نبع وبالوعة
وجريان انسحابي .
a) صورة الجريان ،
b) توزيع السرعة ،
c) توزيع الضغط
حول خط التيار
الصفري .

نفرض أن النبع والبالوعة واقعان على المحور x ومتناظران بالنسبة للمحور y ، والنبع يبعد $\frac{e}{2}$ من مركز الاحداثيات . عندئذ يتبع تابع الحكمون الإجمالي بالصيغة :

$$\Phi_{tot} = u_{\infty} x + \frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x+e/2)^2 + y^2}{(x-e/2)^2 + y^2}} \quad (12.30)$$

ويتمتع التيار الاجمالي بالشكل :

$$\Psi_{tot} = u_{\infty} y + \frac{E}{2\pi} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (12.31)$$



الشكل ١٢.١٢ ، التأثير المتبادل بين التبع والبالوعة يزداد كلما قصر البعد بينها ويتغير شكل خط التيار المصفري الناتج عن تضامها مع جريان السحالي وتوزع الضغط حوله ، حسب [٧] .

إن خط التيار الصفري $\psi_{tot} = 0$ يؤلف خطاً مغلقاً محصور في داخله كامل جريان النبع والبالوعة ويتقاطع مع المحور x في نقطتي ركود تبعدان عن مركزي النبع والبالوعة مسافة تتحدد من شرط كون مركبة السرعة فيها $u = 0$. فإذا عرضنا عن خط التيار الصفري هذا الجسم صلب فإن الجريان حوله لا يتغير ويمكن في ضوء الفقرة السابقة تحديد صورة الجريان وحساب توزيع الضغط والسرعة في حقل الجريان وعلى حدود الجسم .

إن التأثير المتبادل بين النبع والبالوعة يكون مهملًا شبه معدوم إذا كانت المسافة بينها كبيرة بما يكفي . وعند مسافة معقولة نحصل كخط تيار صفري على جسم محدب الانحناء والمؤخرة وذو جوانب مستوية في المنتصف تقريباً . الشكل (٧.١٢) يبين صورة الجريان وتوزيع السرعة والضغط حول مثل هذا الجسم . لكن مع اقتراب النبع والبالوعة من بعضهما البعض يزداد تأثيرهما المتبادل ويصبح خط التيار الصفري بيضوياً بشكل قطع ناقص نسبة قطره الكبير للصغير تكون أقرب للواحد كلما كانت المسافة أصغر ، بما يتبع الاستنتاج مسبقاً أنه في حالة انطباق النبع والبالوعة على بعضها البعض يأخذ خط التيار الصفري شكل دائرة (حالة تضام ثنائية مستوية مع جريان انسحائي) . الشكل (٨.١٢) يبين صورة الجريان داخل وخارج خط التيار الصفري الناتج عن تضام نبع وبالوعة على مسافات مختلفة من بعضها البعض مع جريان انسحائي ، وكذلك توزيع الضغط حول $\psi_{tot} = 0$. ويتضح من الشكل أن قيمة معامل الضغط الاصفري السالبة تزداد مع اقتراب البالوعة والنبع من بعضها البعض .

٣.٢.١٢ الجريان الموجهود في حول اسطوانة دائرية وحساب كثافتها

المهندرو دينا مكي

لتعتبر الجريان الناتج عن تضام جريان انسحائي بالجها x وثنائية مستوية

مركزها ينطبق على مركز الإحداثيين y, x . إن تابع الكمون الإجمالي ينتج من (10.24) و (10.65) مع إشارة موجبة (جزيئات السائل للشائبة تدور في النصف العلوي باتجاه دوران عقارب الساعة) :

$$\Phi_{tot} = \Phi_T + \Phi_D = u_{\infty} x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = u_{\infty} \left(r + \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{r} \right) \cos \varphi , \quad (12.32)$$

وذلك بوضع $r^2 = x^2 + y^2$ ، $x = r \cos \varphi$ كما ينتج تابع التيار الاجمالي من (10.24) و (10.68) بإشارة سالبة بالصيغة :

$$\Psi_{tot} = \Psi_T + \Psi_D = u_{\infty} y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = u_{\infty} \left(r - \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{r} \right) \sin \varphi , \quad (12.33)$$

وذلك بوضع $y = r \sin \varphi$.

إن حقل السرعة يتحدد بسهولة من (12.32) حيث نجد مركبي السرعة :

$$u = \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial x} = u_{\infty} + \frac{M}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} ; v = \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial y} = - \frac{M}{2\pi} \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} . \quad (12.34)$$

ويتضح من هاتين العلاقتين أنه على المحور x ($y = 0$) تكون $v = 0$ ، بينما تنعدم u عندما

$$0 = u_{\infty} - \frac{M}{2\pi} \frac{x_s^2}{x_s^4} \Rightarrow \frac{M}{2\pi} = x_s^2 u_{\infty} . \quad (12.35)$$

هذا يدل أنه توجد على المحور x نقطتا ركود S_1 و S_2 . ويتضح ذلك أكثر إذا حددنا خط التيار الصفري الذي تنتج معادلته من (12.33) بالصيغة :

$$\Psi_{tot} = 0 \Rightarrow y = 0 ; r^2 = \frac{M}{2\pi u_{\infty}} = R^2 = \text{const} . \quad (12.36)$$

إذن فإن خط التيار الصفري يتألف من المحور x السالب والموجب ومن دائرة نصف قطرها $R = \sqrt{\frac{M}{2\pi u_{\infty}}}$. نحصر داخلها جريان الشائبة ونمر من نقطتي الركود

المحددتين بالاحداثيتين $x_{0,2} = \pm R$. وحيث أن كل خط تيار يمكن استبداله بجسم صلب فيمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية :

الجريان الانسحابي اللاجولائي حول اسطوانة دائرية لا نهائية الامتداد نصف قطرها R يكافئ الجريان حول خط التيار الصفري الناتج عن تضام جريان انسحابي منتظم سرعته u_∞ مع ثنائية مستوية عزمها $M = 2\pi u_\infty R^2$ (انظر الشكل ٧.٥) .

بادخال (12.36) في (12.32) و (12.33) نحصل على تابع الكمون وتابع التيار للجريان اللاجولائي حول الاسطوانة بالصيغتين :

$$\Phi_C = u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = u_\infty \cos \varphi \left(r + \frac{R^2}{r} \right) , \quad (12.37)$$

$$\Psi_C = u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = u_\infty \sin \varphi \left(r - \frac{R^2}{r} \right) . \quad (12.38)$$

الشكل (٩.١٢) يبين صورة خطوط الكمون ، $\Phi_C = \text{const}$ ، وخطوط التيار ، $\Psi_C = \text{const}$ ، التي يمكن الحصول عليها بيانياً حسب (٢.١.١٢) من تضام صورة الجريان الانسحابي مع صورة جريان الثنائية المبينة في الشكل (١١.١٠) .
إن مركبتي السرعة باتجاه y, x تتحددان في كل نقطة من حقل الجريان حول الاسطوانة بسهولة ، حيث تنتج :

$$\begin{cases} u = u_\infty \left(1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\varphi \right) , \\ v = -u_\infty R^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -u_\infty \frac{R^2}{r^2} \sin 2\varphi . \end{cases} \quad (12.39)$$

ويستحسن غالباً حسابها في اتجاه الاحداثيات القطبية حيث نجد بموجب (10.2) :

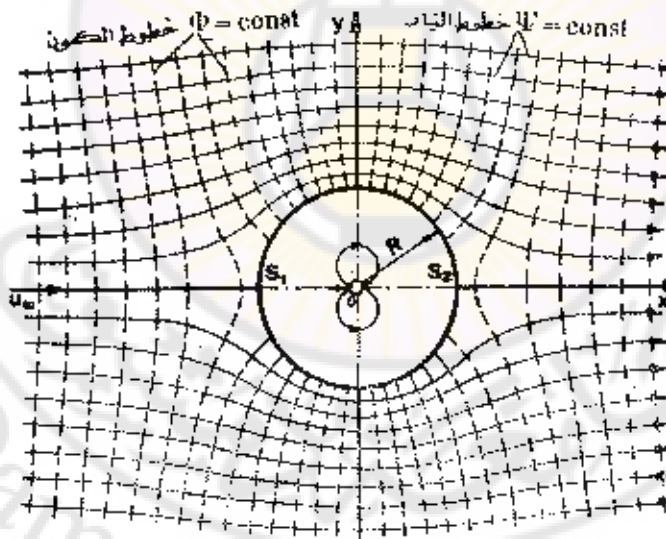
$$\left. \begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \Phi_C}{\partial r} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \varphi, \\ V_\varphi &= \frac{\partial \Phi_C}{r \partial \varphi} = -u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (12.40)$$

على محيط الاسطوانة بالذات تنعدم من أجل $r = R$ المركبة القطرية ،
 $V_r = 0$ ، وتكون المركبة المحيطة أو المماسية مطابقة لقيمة شعاع السرعة :

$$|V_C| = |V_\varphi(r=R)| = V_C = 2u_\infty \sin \varphi; \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \quad (12.41)$$

وعليه فإن السرعة لسكامل حقل الجريان تبلغ على محيط الاسطوانة من أجل

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ قيمتها الأعظمية $V_{C \max} = 2u_\infty$ ، وتعدم من أجل
 $\varphi = 0, \varphi = \pi$.

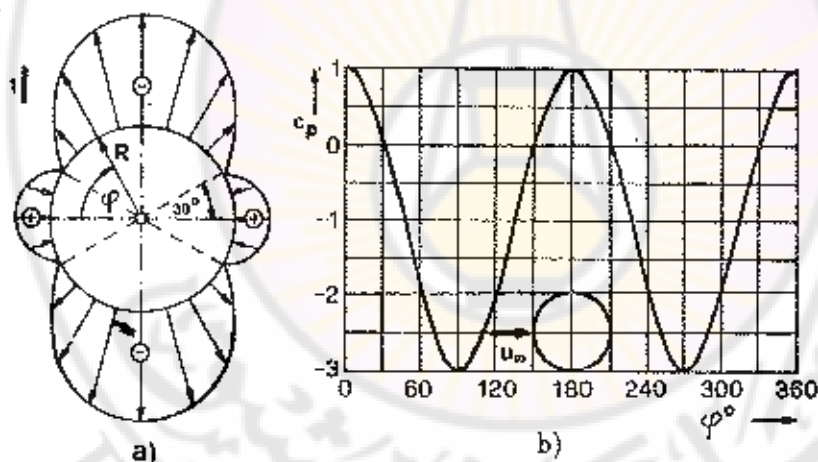


الشكل ٩.١٢ : الجريان الانسحافي الاسطوانة حول اسطوانة دائرية بكافء الجريان
 الناتج من تضاف ثنائية مستوية مع جريان انسحافي منتظم (قارن الشكل ٧.٥).

توزع الضغط على محيط الاسطوانة ينتج من معادلة برنولي المختلة (8.12) بالنسبة لنقطة من الجريان غير المشوش ، حيث السرعة u_∞ والضغط p_∞ ونقطة على محيط الاسطوانة . وبفضل الحساب بقيم لابعدية باستخدام معامل الضغط حيث ينتج من (8.54) بوضع $u_\infty = V_\infty$ واستخدام (12.41) :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \varphi \quad (12.42)$$

الشكل (١٠.١٢) يبين توزيع c_p المحسوب على هذا الأساس . ونلاحظ أن معامل الضغط الاصغري يبلغ $c_{p, \min} = -3$ عند $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ، ويكون في النصف العلوي $c_p = 0$ من أجل $\varphi = 30^\circ, 150^\circ$. وباعتبار أن توزيع الضغط متناظر بالنسبة للمحورين x و y فإن محصلة قوى الضغط معدومة . هذا يعني



الشكل ١٠.١٢ : توزيع الضغط على محيط اسطوانة دائرية في جريان مثالي منتظم مسجلاً بالاتجاه القطري (a) وعلى الدائرة المنشور (b) .

أن الاسطوانة الدائرية لا تتلقى في جريان انسيابي منتظم مثالي لاجولاني قوة رفع أو مقاومة . هذه النتيجة تتناقض طبعاً مع الواقع حيث

أن تأثير لزوجة الجريان الحقيقي سيؤدي لتغيير صورة الجريان حول الاسطوانة بالمقارنة مع الشكل (٩.١٢) مما يؤدي لنشوء مقاومة كبيرة نسبياً تنتج عن فرق الضغوط وعن قوى الاحتكاك .

نفرض الآن أن الاسطوانة موجودة في سائل ساكن لانها في الامتداد وعدم اللزوجة . نطبق عليها قوى ضغط صدمية بحيث تتحرك حركة مستقيمة غير منتظمة باتجاه $+x$ وبسرعة U تحت تأثير التسارع dU/dt . فاذا راقبنا الحركة من جهة إحداثيات مطلقة (مثبتة في السائل الساكن) فإن الجريان المطلق الذي يتشكل حول الاسطوانة يكون كهوياً وتغير مستقر (انظر ١٠.١.٥) . وحيث ان سرعة السائل في اللانهاية تكون معدومة فإن تابع الكمون للجريان المطلق في حالتنا ينتج من (12.37) بوضع $U_{\infty} = -U$ وجعل الحد الأول المعبر عن تابع الكمون للجريان الانسحابي المنتظم مساوياً للصفر . وبالتالي يكون :

$$\Phi_{C_{abs}} = -U R^2 \frac{x}{x^2 + y^2} = -U \frac{R^2}{r} \cos \varphi , \quad (12.43)$$

حيث r, φ الإحداثيان القطبيان اللذان ينطبق مركزهما على مركز الاسطوانة . إن مقارنة هذه العلاقة مع (10.65) مع أخذ (12.36) بعين الاعتبار ومقارنة الشكلين (٢.٥ - b) و (٨.٥) مع (١١.١٠) يقودنا الى الاستنتاج أن الجريان المطلق حول اسطوانة دائرية يكافئ جريان ثنائية مستوية مركزها منطبق على مركز دائرة الاسطوانة .

لنحسب الكتلة الهيدروديناميكية للاسطوانة . فحسب (9.38) و (9.39) تكون بوضع $V_0 = U$:

$$m_h = 2 \frac{W_{KIP}}{U^2} = - \frac{\rho}{U^2} \oint \Phi \frac{d\Phi}{dn} dA . \quad (12.44)$$

من أجل تابع الكمون والسرعة الناعمة على محيط دائرة الاسطوانة نجد ،

بوضع $r = R$ في (12.43) ، العلاقة :

$$\Phi_{C_{abs}}(r=R) = - U R \cos \varphi .$$

$$V_n = \frac{\partial \Phi_{C_{abs}}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{C_{abs}}}{\partial r} = U \frac{R^2}{r^2} \cos \varphi \Rightarrow V_n(r=R) = U \cos \varphi .$$

بفرض b ارتفاع الاسطوانة فتكون مساحة عنصر من سطحها الخارجي :

$$dA = b \, ds = b R \, d\varphi .$$

بذلك تصبح (12.44) من الشكل :

$$m_b = \rho R^2 b \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \rho \pi R^2 b = m_{v1} . \quad (12.45)$$

هذه النتيجة تبين ما سبقت الإشارة إليه بأن الكتلة الهيدروديناميكية لأسطوانة دائرية تساوي كتلة السائل المزاح . ونكون حسب (9.41) مقاومة التسارع التي تعرض لها الأسطوانة في سائل مثالي :

$$F_{wb} = \rho \pi R^2 b \frac{dU}{dt} . \quad (12.46)$$

هذه المقاومة يجب أن تكافيء توزيعاً للضغط حول الاسطوانة يختلف عن الشكل (١٠.١٢) في حالة الجريان المنتظم . فإذا فرضنا أن توزيع الضغط الصدمي ، أو ضغط التسارع p_b ، يبقى ثابتاً ، ينتج من جهة :

$$F_{wb} = \int_0^{2\pi} p_b \, dA = \int_0^{2\pi} p_b \cos \varphi \cdot b R \, d\varphi ,$$

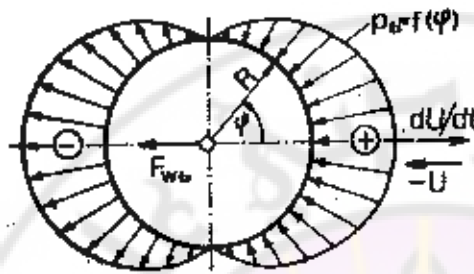
ومن جهة أخرى حسب (9.41) وباستخدام المعادلة اليسرى من (12.45) :

$$F_{wb} = \rho R^2 b \frac{dU}{dt} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi .$$

بمقارنة العلاقتين نجد :

$$p_b = \rho R \frac{dU}{dt} \cos \varphi . \quad (12.47)$$

الشكل (١١.١٢) يبين $p_b = f(\varphi)$. ونلاحظ فعلاً أنه في القسم الأمامي



من الاسطوانة يسود ضغط زائد (+) وفي القسم الخلفي ضغط ناقص (-) ، وبالتالي فإن محصلة قوى الضغط تكافئ قوة مقاومة F_{wb} تعاكس حركة الاسطوانة .

الشكل ١١.١٢ : توزيع الضغط حول اسطوانة دائرية في حالة حركة غير منتظمة .

٤.٢.١٢ الجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية وحساب تأثير

ماجنوس

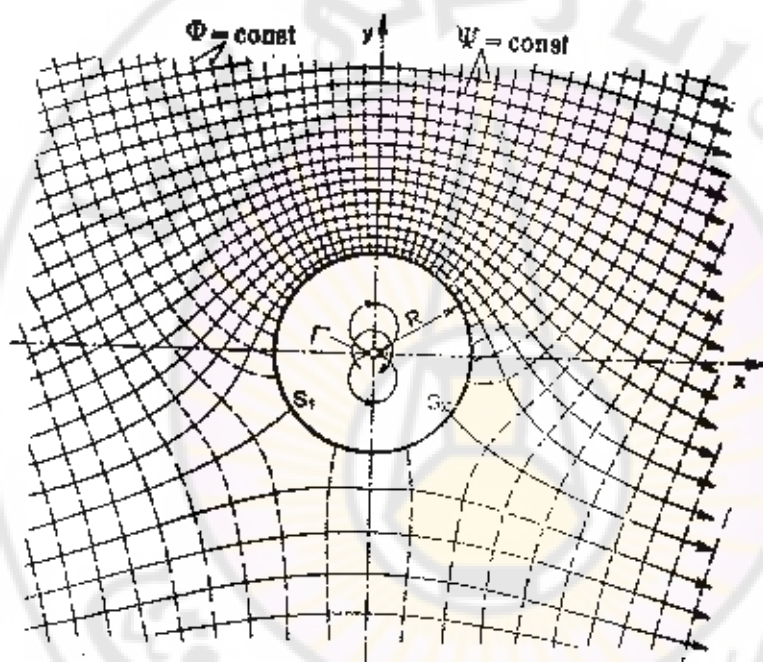
نضم إلى الجريان الانسيابي المنتظم حول اسطوانة دائرية إعصاراً كمونياً شدته Γ ويدور باتجاه دوران عقارب الساعة ومركزه منطبق على مركز الإحداثيين x, y المنبعثين من مركز الدائرة . إن تابع الكمون الإجمالي لهذا الجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية ينتج من (10.44) و (12.37) بالصيغة :

$$\begin{aligned} \Phi_{U, \Gamma} &= u_{\infty} x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = \\ &= u_{\infty} \cos \varphi \left(r + \frac{R^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi . \end{aligned} \quad (12.48)$$

كما نحصل على تابع التيار الإجمالي من (10.35) مع عكس إشارة السالب و (12.33) بالصيغة :

$$\begin{aligned}\Psi_{CF} &= u_{\infty} x \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) + \frac{I'}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= u_{\infty} \sin \varphi \left(r - \frac{R^2}{r}\right) + \frac{I'}{2\pi} \ln r \quad . \quad (12.49)\end{aligned}$$

الشكل (١٢.١٢) يبين صورة الجريان الإجمالي حول محيط دائرة الأسطوانة التي تمثل هنا أيضاً خط التيار الصغري ، $\Psi_{CF} = 0$ ، لأن كل دائرة تمثل خط



الشكل ١٢.١٢ ، الجريان الجولاني ($I' \neq 0$) حول أسطوانة دائرية
يكالء نظام جريان انسحابي منتظم مع ثنائية مستوية وأعمدة كوكبي .

تيار بالنسبة للأعمدة . هذه الصورة تنتج من (12.48) و (12.49) بوضع $\Psi_{CF} = \text{const}$ و $\Phi_{CF} = \text{const}$. وتؤكد الصورة الفوتوغرافية في الشكل (١٣.١٢) أن الجريان الجولاني حول أسطوانة دائرية يمكن تحقيقه فعلياً بجعل الأسطوانة تدور بسرعة زاوية ثابتة في جريان انسحابي (انظر ص ١٢٧) .

من الشكل (١٢.١٢) يتبين أن صورة الجريان الجولاني ليست متناظرة بالنسبة للمحور x ولكنها متناظرة بالنسبة للمحور y . هذا يتضح بسهولة إذا لاحظنا أنه في النصف العلوي من المستوي xy تزداد سرعة الجريان اللاجولاني حول الاسطوانة (الشكل ٩.١٢) بمقدار السرعة التي يجريها الإعصار الكعوني (خطوط التيار من نفس الاتجاه) ، بينما تنقص بنفس المقدار في النصف



الشكل ٩.١٢ : الجريان حول اسطوانة دائرية تدور ببطء في جريان استرخائي ، ويتطابق هذا إلى حد بعيد الجريان المثالي في الشكل (١٢.١٢) ، حسب [١٦] .

السفلي (خطوط التيار متعاكسة !) . وعليه فإن توزيع الضغط على حدود الاسطوانة سيكون أيضاً متناظراً بالنسبة للمحور y ، وغير متناظر بالنسبة للمحور x . وينجم عن ذلك أن الاسطوانة لا تتعرض لمقاومة في اتجاه « الجريان مثالي !) ولكن تؤثر عليها قوة دفع عمودية على « .

إن السرعة على سطح الأسطوانة لها مركبة مماسية فقط ($V_r = 0$) نتج
من (12.48) بالاستقاق الجزئي بالنسبة لـ φ :

$$|V_{cF}| = |V_\varphi(r=R)| = V_{cF} = 2u_\infty \sin \varphi + \frac{I'}{2\pi R} \quad (12.50)$$

عندما $I' = 0$ تأخذ هذه العلاقة صيغة المعادلة (12.41) ونقع نقطتا الركود
على المحور x ، عند $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi$ (الشكل ٩.١٢) . عندما
 $I' \neq 0$ فإن نقطتي الركود تقعان في المجال الزاوي المحصور بين $\varphi = \pi$
و $\varphi = 2\pi$ على النصف السفلي للأسطوانة (الشكل ١٢.١٢) ، وتقتربان من
بعضها البعض كلما زادت قيمة الجولان إلى أن تتطبقا على بعضها البعض عند
 $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ من أجل قيمة أعظمية I'_{max} تتحدد من (12.50) بوضع

$$V_{cF}(\varphi = \frac{3}{2}\pi) = 0 \Rightarrow I'_{max} = 4\pi R u_\infty \quad (12.51)$$

إن توزيع الضغط على سطح الأسطوانة ينتج من معادلة برنولي حيث يكون
باستخدام (12.50) :

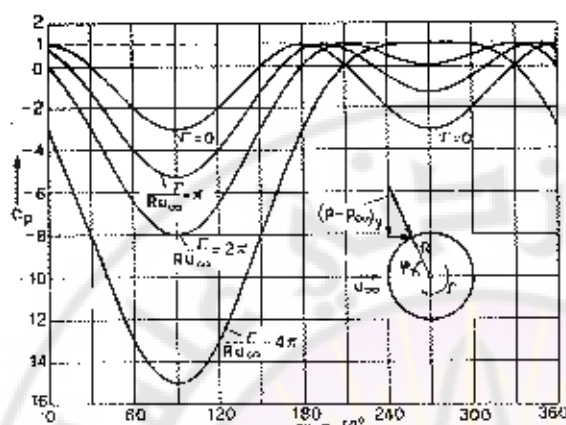
$$p - p_\infty = \frac{\rho}{2} (u_\infty^2 - V_{cF}^2) = \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left[1 - \left(2 \sin \varphi + \frac{I'}{2\pi R u_\infty} \right)^2 \right] \quad (12.52)$$

ولهذا فإن معامل الضغط :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(2 \sin \varphi + \frac{I'}{2\pi R u_\infty} \right)^2 \quad (12.53)$$

الشكل (١٤.١٢) يبين $c_p = f(\varphi)$ بالنسبة لقيم مختلفة للجولان $0 \leq I' \leq I'_{max}$.
من توزيع الضغط نحصل الآن على قوة الرفع. فإذا فرضنا b ارتفاع الأسطوانة،
 $dA = R b d\varphi$ عنصراً من سطحها الخارجي فتكون (انظر الشكل ١٠.١٢) :

$$dF_A = dF_{py} = - (p - p_\infty) \sin \varphi \cdot R \cdot b \cdot d\varphi$$



الشكل ١٤.١٢ : توزيع الضغط على سطح أسطوانة دائرية في جريان جولاني .

فإذا أجرينا التكامل بين

$\varphi = 0$ و $\varphi = 2\pi$ ولاحظنا

بعد استبدال $(p - p_\infty)$

حسب (12.52) أن

تكامل كافة الحدود التي

يدخل فيها $\sin \varphi$ و $\sin^3 \varphi$

يساوي الصفر ، بينما

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \pi$$

بالنتيجة :

$$F_A = \rho \cdot u_\infty^2 \cdot l \cdot b \quad (12.54)$$

هذا يعني أن قوة الرفع المؤثرة على الأسطوانة الدائرية نحسب من قانون كوتا - يوكوفسكي . وسنبرهن فيما بعد أن هذا القانون ينطبق عامة على الجريان الكموني المتوي مع جولان حول كل جسم اسطواني ذي مقطع اعتباطي .

إن قوة الرفع الاعظمية تتسج من (12.54) بوضع $l = l_{max}$ حسب (12.51) حيث نجد :

$$F_{A \max} = 4 \pi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot u_\infty^2 \cdot 2 R b = c_{A \max} \cdot q_\infty \cdot A \quad (12.55)$$

وعليه فإن معامل قوة الرفع الاعظمية Coefficient of lift maximum يبلغ $c_{A \max} = 4 \pi$ ، وهي قيمة أعلى بكثير من القيمة التي يصلها بروفيل جناح حامل . إن أول من أثبت وجود قوة الرفع هذه العالم الألماني ماجنوس G. Magnus (1802-1870) وذلك من خلال تجاربه على أسطوانات دائرية تقوم

بحركة مستقيمة وتدور في نفس الوقت ، ولذلك تعرف باسم تأثير ماجنوس . ولكن الذي أعطى لها تفسيراً نظرياً مقبولاً هو العالم الانجليزي لورد ريليه Lord Rayleigh (1842-1919) الذي لفت انتباهه أن كرات المضرب (التنس) التي تتلقى من المضرب حركة دورانية تنزاح عرضياً عن مسارها .

لقد جرت محاولة قديمة الاستفادة المباشرة من « تأثير ماجنوس » لدفع السفن حيث استعير عن الداسر ، بما يعرف باسم دووار فليتشر Flettner rotor نسبة لمخترعه ، وهذا يتألف من اسطوانتين تبرزان فوق سطح السفينة وتدوران حول محورين شاقوليين في مهب الريح فتتولد القوة الدافعة للسفينة . وبالرغم من أن أفكار Ackeret وبراندل قد حرسا السفينة المجهزة بدووار فليتشر من الناحية الفيزيائية النظرية والتجريبية وكان بالإمكان الحصول على قيم لمعامل قوة الرفع حتى $C_L \approx 9$ إلا أن دووار فليتشر لم يستطع أن يزيح نارووحة الهوائية أو الداسر ولا حتى الشراع (انظر [7] ، [17]) .

إن الأهمية الكبيرة للجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية لا تكمن في الاستفادة التطبيقية المباشرة منها وإنما في تحويل صورة الجريان البسيطة هذه بمساعدة التمثيل المطابق الى صورة الجريان حول بروفيلات أجنحة حاملة (انظر ١٣) .

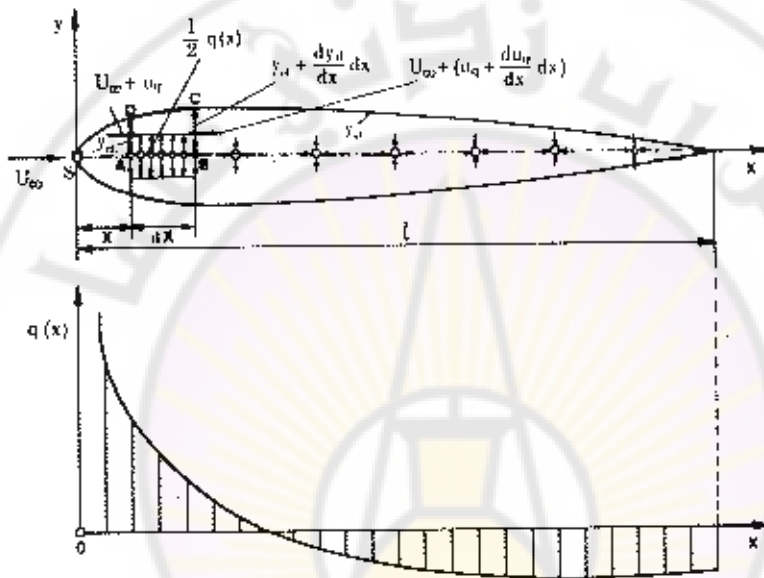
٥.٢.١٢ الجريان حول بروفييل متناظر (عدم الانحناء)

قبل السواكن

يمكن الحصول على أجسام انسيابية متناظرة (بالنسبة للمحور x مثلاً) وذات أنف مدور وسماكة محدودة تتزايد بدءاً من حافة الجسم الأمامية وحتى قيمة أعظمية ثم تتناقص حتى تنعدم عند الحافة الخلفية إذا انضم ، بموجب طريقة النقاط الشاذة ، الى الجريان المنتظم الموازي للمحور x وبسرعة U توزع سطحي من الينابيع - البالوعات ، في المستوي x نفرض أن الينابيع والبالوعات موزعة على المحور x التناظري بشكل مستمر على طول وتر البروفييل l Profile chord وبحيث تكون شدتها الموضعية $q(\xi)$ تحقق شرط الاغلاق :

$$\int_{\xi=0}^{\xi=l} q(\xi) d\xi = 0 \quad (12.56)$$

لكي يكون خط التيار الصفري الناتج عن تضام الجريبات الانسحابي مع
الينابيع - البالوعات مغلقة ، الشكل (١٥.١٢) .



الشكل ١٥.١٢ : البروفيل المتناظر ينتج من تضام توزيع سطحي من
الينابيع - البالوعات مع جريان انسحابي منتظم أفقي .

إن حقل السرعة الذي يحرضه توزيع الينابيع - البالوعات يتحدد بمرَكَبتي
السرعة u_q, v_q في اتجاه x, y إذا كملنا العلاقة (10.85) بين $\xi = 0$ و $\xi = l$ ، فإذا
وضعنا إحداثي النقطة المتحولة $\xi = x'$ نجد :

$$\left. \begin{aligned} u_q(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x'=0}^{x'=l} q(x') \frac{x-x'}{(x-x')^2+y^2} dx' ; \\ v_q(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x'=0}^{x'=l} q(x') \frac{y}{(x-x')^2+y^2} dx' . \end{aligned} \right\} \quad (12.57)$$

في النقاط القريبة جداً من المحور x يمكن اعتبار قيم v_n, u_n مساوية تقريباً للقيم المقرضة على المحور x نفسه . فإذا جعلنا $y \rightarrow 0$ فنحصل من (12.57) على علاقتين ماثلتين شكلاً (10.92) و (10.93) :

$$u_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x'=0}^{x'=1} q(x') \frac{dx'}{x-x'} ; \quad v_n(x) = \pm \frac{1}{2} q(x) \quad , \quad (12.58)$$

إن العلاقة بين شكل البروفيل المتناظر وبين توزيع الينابيع - البالوعات تتعدد الآن من واقع أن حدود البروفيل تمثل خط التيار الصفري المغلق الذي يحصر في داخله كامل غزارة الينابيع والبالوعات . فإذا فرضنا $y_n(x)$ معادلة الطرف العلوي للبروفيل ، l طول وتره وطبقنا معادلة الاستمرار على العنصر السطحي $D C B A$ المبين في الشكل (١٥، ١٢) نجد بسهولة :

$$(U_\infty + u_n) y_n + \frac{1}{2} q(x) dx - \left(U_\infty + u_n + \frac{du_n}{dx} dx \right) \left(y_n + \frac{dy_n}{dx} dx \right) ,$$

وبعد إصلاح بسيط ينتج :

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} [(U_\infty + u_n) y_n] . \quad (12.59)$$

هذه العلاقة تعبر عن شرط الجريبات الطوكي Kinematic flow condition للبروفيل المتناظر . فإذا فرضنا مما كتبه معادلة ($y_{n,max} / l < 0,1$) فإن مركبة السرعة u_n يمكن إهمالها بالمقارنة مع سرعة الورد U_∞ وينتج عندئذ من (12.59) :

$$q(x) = 2 U_\infty \frac{dy_n}{dx} = U_\infty \frac{dA_n}{dx} , \quad (12.60)$$

حيث $A_n = 2 y_n$ سماكة البروفيل المتناظر أو مساحة مقطع عرضي منه

بارتفاع $b = 1$. باستخدام المعادلة الثانية من (12.58) يأخذ أخيراً شرط الجريان الحركي بالنسبة لطرف البروفيل العلوي الصياغة الرياضية التالية :

$$\frac{dy_d}{dx} = \frac{v_q(x)}{u_w} . \quad (12.61)$$

باختيار توزيع مناسب من الينابيع والبالوعات $q(x)$ يمكننا الآن حل المسألة الأساسية الأولى والثانية والثالثة وحساب كافة القيم الهيدروديناميكية .

في الحساب العملي نستخدم قيم لا بعدية ، حيث تناسب ، كما في نظرية الجناح الحامل عامة ، كافة الممرع إلى الممرعة غير المشوشة ، والأطوال إلى أطوال وتر البروفيل l . فإذا اعتبرنا

$$\xi = \frac{x}{l} ; \xi' = \frac{x'}{l} , \eta_d = \frac{y_d}{l} \quad (12.62)$$

نحصل من (12.58) على المعادلتين التاليتين :

$$u_q(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(\xi') \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \quad (12.63a)$$

$$v_q(\xi) = \pm \frac{1}{2} q(\xi) \quad \begin{array}{l} + \Rightarrow +y \rightarrow 0 \text{ (الطرف العلوي)} \\ \text{من أجل} \\ - \Rightarrow -y \rightarrow 0 \text{ (الطرف السفلي)} \end{array} \quad (12.63b)$$

بقي الآن أن نختار توزيعاً مناسباً من الينابيع - البالوعات . ذلك يتم على أساس أن أنت البروفيل يجب أن يكون منوَّراً وأن يكون التابع $q(\xi)$ في كامل مجال التكامل نظامياً regular . وقد اقترح غلاووت [132] H. Glauert ، بناء على دراسة أساسية قام بها برنباوم W. Birnbaum وأكرومان W. Ackermann [133] لحل مسألة الجريان المستوي حول جناح حامل ، سلسلة

قوية مثلية معروفة اليوم باسم سلسلة غلاووت بالصيغة :

$$q(\varphi) = 2 U_{\infty} \left(B_0 \tan \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\varphi \right) \quad (12.64)$$

حيث B_n ثوابت عددية تكون معطاة أو يمكن اختيارها بحرية عند حل المسألة الأساسية الأولى ، و يلزم تحديدها من شرط الجريان الطرقي عند حل المسألة الأساسية الثانية ، ويرتبط الإحداثي ξ مع φ بالعلاقة :

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad (\text{الأنف}) &\Rightarrow \varphi = 0, \\ \xi = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi); & \quad (12.65) \\ \xi = 1 \quad (\text{الهافة الخلفية}) &\Rightarrow \varphi = \pi. \end{aligned}$$

بكتابة (12.64) بين 0 و π نتج الغدارة الكلية :

$$Q = \int_0^{\pi} q(\varphi) d\varphi = u_{\infty} \left(B_0 + \frac{1}{2} B_1 \right) \quad (12.66)$$

وعليه يكون شرط الإغلاق (12.56) محققاً عندما $B_0 + \frac{1}{2} B_1 = 0$.
لذلك ينصح بدمج الحد الأول والثاني في العلاقة (12.64) مع بعضها البعض بحيث يحقق كل حد فيها مفردة شرط الإغلاق ، وتصبح :

$$q(\varphi) = 2 U_{\infty} \left[B_0 \left(\cot \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi \right) + \sum_{m=2}^{\infty} B_m \sin m\varphi \right] \quad (12.67)$$

لحساب السرعة المحرزة ندخل (12.67) في (12.63 a,b) مع استخدام (12.65) وملاحظة أن $d\xi' = \frac{1}{2} \sin \varphi' d\varphi'$ فنحصل مباشرة على v_q ، ولكن حساب u_q يؤول لحل التكاملين

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} \quad ; \quad I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n \varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' \quad (n=0,1,2,...)$$

الذين يتميزان بوجود نقطة شاذة عند $\varphi = \varphi'$. لذلك تؤخذ القيم الكوشية الأساسية (انظر ص ١١٧) . ونجد بدون التعرض هنا للتفاصيل الرياضية (راجع [25] [42] [103] [108]) :

$$I_0 = 0 ; \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n \varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' = \pi \frac{\sin n \varphi}{\sin \varphi} . \quad (12.68)$$

على هذا الأساس نحصل على مركبي السرعة المعرضة على المحور x بصيغة العلاقاتين البسيطتين :

$$\frac{u_d(\varphi)}{U_\infty} = [B_0(1 + 2 \cos \varphi) - B_2 \cos 2\varphi - B_4 \cos 4\varphi - \dots] , \quad (12.69)$$

$$\frac{v_d(\varphi)}{U_\infty} = \pm [B_0 \cot \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_4 \sin 4\varphi + \dots] . \quad (12.70)$$

عند حل المسألة الأساسية الأولى يفرض $q(\varphi)$ حسب (12.67) معلوماً ونبحث عن شكل البروفيل . ويتحدد هذا بإدخال (12.70) في (12.61) واستخدام (12.62) فيصبح :

$$\begin{aligned} \frac{dv_d}{d\xi} &= \frac{1}{2} B_0 (2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \sin^2 \varphi) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{m=2}^{\infty} [B_m \cos (m-1) \varphi - \cos (m+1) \varphi] \end{aligned}$$

وبإجراء التكامل نجد معادلة تحديد شكل البروفيل أو توزيع السماكة : Thickness distribution

$$\begin{aligned} v_d = \frac{y_d}{l} &= \frac{1}{2} B_0 (\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{m=2}^{\infty} B_m \left(\frac{\sin (m-1) \varphi}{m-1} - \frac{\sin (m+1) \varphi}{m+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} B_0 (\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) + \frac{1}{12} B_2 (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) + \\ &+ \frac{1}{16} B_4 (2 \sin 2\varphi - \sin 4\varphi) + \dots \quad (12.71) \end{aligned}$$

لحساب توزيع السرعة على محيط البروفيل المتناظر بفترض ، كما ذكرنا ، أن السرعة على الوتر لا تختلف إلا قليلاً عن السرعة V_B على محيط البروفيل ذي السجالة القليلة ، باستثناء منطقة صغيرة في الجوار المباشر لأنف البروفيل [17] . فإذا فرضنا $V_c(x)$ السرعة على الوتر فيكون حسب ويفلس [134] F.Riegels .

$$V_B(x) = V_c(x) \frac{1}{\sqrt{1+y_d'^2}} = V_c(x) / \kappa_{Rd} \quad (y_d' = \frac{dy_d}{dx}) \quad (12.72)$$

حيث يعرف κ_{Rd} باسم معامل ريفلس Riegels' factor لتوزيع السجالة ، وينتج باستخدام التمثيل المتطابق (انظر ١٣) لمخطط البروفيل على وتره . على هذا الأساس ، وبملاحظة أن محصلة المركبة v_q للسرعة المحرصة تكون بسبب إشارة $\pm$ معدومة على الوتر ، وأن المركبة u_q حسب (12.69) تنضم للسرعة غير المشوشة U_∞ ، ينتج توزيع السرعة من (12.72) بالصيغة :

$$\frac{V_B}{U_\infty} = [1 + B_0 (1 + 2 \cos \varphi) - \sum_{m=2}^n B_m \cos m \varphi] / \kappa_{Rd} \quad (12.73)$$

من توزيع السرعة يمكن الآن حساب توزيع معامل الضغط حيث يكون :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_B}{U_\infty} \right)^2 \quad (12.74)$$

عند حل المسألة الأساسية الثانية بفترض أن شكل البروفيل معلوم ومحدد بدلالة $y_d(x)$ أو $y_d(\xi)$ ، ويطلب حساب توزيع السرعة والضغط على محيط البروفيل . هنا يأتي كخطوة أولى لتحديد الثوابت B_m في سلسلة غلاووت (12.67) بمساعدة شرط الجريان الحركي (12.61) ، الذي يقضي بأن يكون محيط البروفيل خطاً للتيار . في الحساب العملي يكفي بتحقيق هذا الشرط في عدة نقاط اختبارية Test point من محيط البروفيل أو وتره . يختار عددها n عادة

مساوياً لعدد الحدود n في سلسلة غلاووت [104] . وطبيعي أنه كلما قل العدد كلما كانت نتيجة الحساب تقريبية أكثر .

لقد تأكد من مقارنة النتائج التجريبية بالنظرية أنه إذا تم اختيار النقاط الاختبارية بموجب ما يعرف باسم فرضية ثلاثة أرباع الوتر، مثلاً [25]، [17]، تكون النتائج التقريبية لا تختلف إلا قليلاً عن نتائج الحل الدقيق . هذه الفرضية تنص أنه عند اختيار نقطة اختبارية واحدة فإن موقعها على المحور x يكون عند $x/l = \frac{3}{4}$ ، وعند اختيار n نقطة اختبارية فإن مواقعها تتحدد بالعلاقة :

$$x_n^{(n)}/l = \frac{4\mu-1}{4n} , \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, n \quad (12.75)$$

على هذا الأساس نتبع من شرط الجريان الحركي مجموعة معادلات خطية جبرية مؤلفة من n معادلة . وغني عن البيان أن حل مثل هذه المجموعات بمساعدة الحاسبات الالكترونية مسألة بغاية البساطة . بينما يكتفى عند استخدام الآلات الحاسبة الكلاسيكية في الحالات العملية ، بثلاث نقاط اختبارية فنحدد مواقعها حسب (12.75) بالاحداثيات :

$$x_1/l = 3/12; \quad x_2/l = 7/12; \quad x_3/l = 11/12 \quad (12.76)$$

فاذا اكتفينا أيضاً بالحدود الثلاثة الأول من سلسلة غلاووت نحصل من شرط الجريان الحركي على مجموعة من ثلاثة معادلات خطية لتحديد الثوابت B_0, B_1, B_2 .

بعد تحديد الثوابت B_{nn} نجد بسهولة توزيع السرعة على محيط البروفيل حسب (12.73) ، بعد تحديد x_{nn} من y_{nn} تحليلياً أو بيانياً . ونحصل على توزيع الضغط من (12.74) .

إن البروفيل المتناظر في جريان مثالي باتجاه الوتر لا يتعرض طبعاً لأية

مقاومة ، ولا تؤثر عليه كذلك قوة دفع لأن $L=0$. وبؤك ذلك حساب محصل قوى الضغط في اتجاه الجريان وعمودياً عليه . بينما تكون المقاومة في الجريان الحقيقي غير معدومة طبعاً بسبب اللزوجة .

أخيراً تجدر الملاحظة أن المسألة الاساسية الثانية تمثل بالنسبة للبروفيل المتناظر ، وبالنسبة للجناح الحامل عامة مسألة نظرية صرفة لجريان كوفي ولها حل واحد فقط محدد . بينما يكون للمسألة الاساسية الأولى حلول عديدة لا يصلح منها إلا عدد قليل فقط . ويتم اختيار الحل المناسب على أساس ان تكون مقاومة البروفيل الناتج قليلة ، أو أن يكون توزيع السرعة والضغط على سطحه بحيث لا يحدث تجاوز لسرعة الصوت في حالة الهواء أو اقتراب من ضغط التبخر في حالة الماء حتى لا يتعرض الجناح لخطر التكيف .

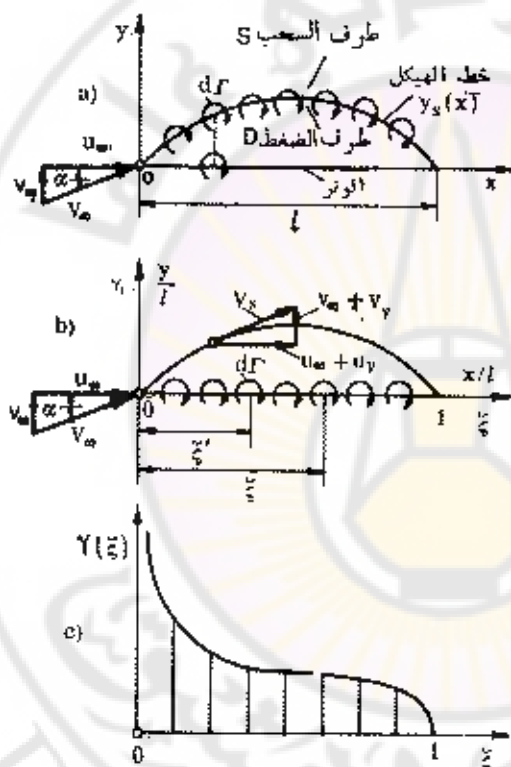
٦.٢.١٢ الجريان حول بروفييل جناح حامل قبل الانحناء وعدم السماكة - طريقة برنباوم

من نضام توزيع سطحي اعصاري حسب (٧٠٣٠١٠) مع جريان استحيائي منتظم نحصل على أجسام مستوية رقيقة جداً (نظرياً بدون سماكة) مقاطعها تمثل بروفييلات منحنية تسمى بروفييلات الهيكل أو الخطط الرئيسية . Skeleton Profile .

إن المبدأ الاساسي لدراسة الجريان حول جناح حامل ، أي يتعرض لقوة دفع ، يتضح من (١٠١٠١٢) حيث يمكن كخطوة تقريبية أولى بموجب نظرية الخطيط الاعصاري الحامل التعويض عن الجناح المستوي بحيط اعصاري فردي يخترق الجناح ويوازي خطه المولد . ولكن الاعتماد على نظرية السطح الاعصاري الحامل يعطي طبعاً نتائج أفضل عند حل المسألة الاساسية الأولى والثانية . هذه النظرية وضع أسسها برنباوم وأكرومان [133] وغلاووت [132] ، وطورها

فيما بعد ريفلز [134] و كويني F. Keune و ألين J. Allen (راجع مثلاً [17]) وغيرهم كثير .

نعتبر خط الهيكل المبين في الشكل (١٦-١٢) ونختار محوري الاحداثيات بحيث أن المحور x ينطبق على وتر البروفيل الذي يتحدد شكله بالاحداثي $y_s(x)$ ، ويكون أنفه أو (حافته الامامية) منطبقاً على مبدأ الاحداثيات .



نفرض حسب برنولي أن زاوية الورود α المشكلة بين السرعة غير المشوشة للجريان الانسحابي V_∞ والوتر صغيرة ، وأن خط الهيكل قليل الانحناء . على هذا الأساس تكون السرعات المخرجة من التوزيع الاغصاري صغيرة بالمقارنة مع سرعة الجريان الانسحابي ، ويمكن بدلاً من توزيع الاغصاري على خط الهيكل توزيعها على الوتر (المحور x) دون ارتكاب خطأ يذكر ، ولكننا نكون قد تغلصنا من صعوبات رياضية كبيرة .

إذا كان التوزيع الاغصاري $\gamma(x)$ يمتد من أنف البروفيل $x=0$ حتى حافته الخلفية ،

الشكل ١٦-١٢ : الجريان حول بروفييل منحني عديم السماكة (خط الهيكل) بكائي ، تضام جريان انسحابي مع توزيع سطحي اغصاري على محيط البروفيل (a) ، فإذا كان انحناء البروفيل قليلاً ، يمكن توزيع الاغصاري على طول الوتر (b) ، وبذلك نوزع الاغصاري مناسب (c) .

$x = l$ ، الشكل (١٦.١٢ - c, b) فإن مركبتي السرعة المعرضة باتجاه x و y قنجان من (10.90) و (10.91) . وبما أن قيم v_x صغيرة ، كما هو مفروض ، فإن قيم u_y ، v_y على خط الهيكل تساوي تقريباً القيم على الوتر ، وبالتالي تخضع للعلاقاتين (10.92) ، (10.94) . فإذا وضعنا على غرار (12.62) :

$$\xi = x/l ; \xi' = x'/l ; \eta_x = y_x/l , \quad (12.77)$$

تكون مركبتا السرعة على الوتر :

$$u_y(\xi) = \pm \frac{1}{2} \gamma(\xi) \quad \begin{array}{l} \text{+} \Rightarrow \text{+} \rightarrow 0 \text{ (طرف السحب)} \\ \text{من أجل} \\ \text{-} \Rightarrow \text{-} \rightarrow 0 \text{ (طرف الضغط)} \end{array} \quad (12.78)$$

$$v_y(\xi) = - \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi') \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} , \quad (12.79)$$

حيث ξ الإحداثي اللابعدى للنقطة الثابتة المعتبرة ، ξ' إحداثي النقطة المنتقلة .

إن العلاقة بين التوزيع الاقصاري $\gamma(\xi)$ وشكل البروفيل $\eta_x(\xi)$ تتحدد من شرط الجريان الطوكي الذي يقضي بأن يكون محيط البروفيل (خط الهيكل) خطاً صفرياً إجمالياً للتيار . فإذا فرضنا u_x, v_x مركبتي السرعة V_∞ للجريان الانسيابي المنتظم ، V_∞ السرعة على محيط البروفيل فيكون حسب الشكل (١٦.١٢ - b) :

$$\gamma_x' = \frac{d\eta_x}{d\xi} = \frac{v_\infty + v_y}{u_\infty + u_y} . \quad (12.80)$$

في نطاق الفرضيات السابقة يكون حسب بربنوم $u_x \gg u_y$. كما يمكن أيضاً استبدال زاوية الورود الصغيرة بظلمها . وبالتالي ينتج من (12.80) مع الانتباه للشكل (١٦.١٢ - b) :

$$\eta'_0 \approx \frac{v_{x0}}{u_\infty} + \frac{v_{y0}}{u_\infty} = \alpha + \frac{v_y}{u_\infty} \quad (12.81)$$

هذه العلاقة تعني أنه بدلاً من وجوب كون مركبة السرعة المحصلة ناظلياً على خط الهيكل معدومة في كل نقطة منه ، بموجب شرط الجريان الحركي ، يكفي تحقيق هذا الشرط على الوتر ، عندما يكون المنحني البروفيل صغيراً $(f/l = \gamma_{smax} / l \leq 0,1)$.

عندما تكون زاوية الورود معدومة $\alpha = 0$ تنبسط العلاقة (12.81) وتصبح:

$$\eta'_0 = \frac{v_y}{u_\infty} \quad (12.82)$$

ومن هنا تبدى إمكانية دراسة تأثير زاوية الورود على الجريان .

على أساس العلاقات السابقة يمكننا الآن حل مسائل الجريان الأساسية الثلاثة ، وبالتالي تحديد القيم الهيدروديناميكية ، وذلك بعد اختيار تابع مناسب للتوزيع الاضاعي $\gamma(\xi)$. هنا يلزم ان نأخذ بعين الاعتبار أن شرط كوتا للانسياب الناعم (انظر ص ٣٦٠) يجب ان يكون محققاً . هذا يقضي بوجود عدم التفاف الجريان حول حافة البروفيل الخلفية ، وبالتالي يجب أن تكون سرعة الجريان في تلك النقطة على طرف السحب تساوي السرعة على طرف الضغط . وحيث أن السرعة على محيط البروفيل تنتج ، باستخدام (12.78) وافترض زاوية الورود صغيرة ، بالصيغة :

$$V_0(\xi) = V_\infty \pm u_y(\xi) \approx u_\infty \pm \frac{1}{2} \gamma(\xi) \begin{cases} \text{لطرف السحب} \\ \text{لطرف الضغط} \end{cases} \quad (12.83)$$

نجد أن شرط كوتا للانسياب الناعم يتطلب ان يكون :

$$\gamma(\xi) = 0 \quad \text{من أجل} \quad \xi = 1 \quad (12.84)$$

من جهة أخرى يجب ان نراعي إمكانية حدوث التفاف للجريان حول أنف البروفيل إذا كانت زاوية الورود تختلف عن زاوية ورود الجريان اللاصدهي Shockless flow، أو المماسي، $\alpha \neq \alpha^*$ ، التي تتحقق عندما تكون السرعة غير المشوشة V_∞ مماسة على أنف البروفيل. وحيث أن التفاف الجريان حول طرف حاد يؤدي لنشوء سرعات لانهائية نظرياً فيجب أن يحوي التابع $\gamma(\xi)$ حداً ينتهي الى اللانهاية من أجل $\xi = 0$.

في الحساب العملي يتم، حسب برنباوم وغلاووت، اختيار سلسلة فورييه مثلثية مطابقة شكلاً للعلاقة (12.64) :

$$\gamma(\varphi) = 2u_\infty \left(A_0 \cot \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^n A_n \sin n\varphi \right) \quad (12.85)$$

حيث يربط الاحداثيان φ و ξ بالعلاقة (12.65)، و A_n تمثل ثوابت عددية تكون إما معطاة أو يجب تحديدها. والخاصة المميزة لهذه السلسلة أن كل حد منها يحقق مبدأ التضاف وبالتالي يمكن فصل أي حد من حدودها ودراسة الجريان الناتج عن تضامه مع جريان انسيابي. فإذا جمعنا النتائج لـ n حداً (عملياً يكفي بـ $n \leq 4$) نحصل على الجريان حول بروفيل اعتباطي الشكل يتعدد بمعادلة قطع مكافئ من الدرجة n . وتعرف خاصية الحدود الاربعة الاولى باسم توزيعات برنباوم - أكرمان الأساسية.

بادخال (12.85) في (12.78) و (12.79) نحصل على مركبتي السرعة المخرجة بالصيغتين :

$$u_v(\varphi) = \pm u_\infty \left(A_0 \cot \frac{\varphi}{2} + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi + \dots \right) =$$

$$= \pm u_\infty \left(A_0 \cot \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^n A_n \sin n\varphi \right) \quad (12.86)$$

$$v_{\varphi}(\varphi) = u_{\varphi}(-A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + \dots) =$$

$$u_{\varphi}(-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\varphi) \quad (12.87)$$

وذلك بالاستعانة بالعلاقة (12.68) .

عند حل المسألة الأساسية الأولى يكون $v_{\varphi}(\varphi)$ أو $v_{\xi}(\xi)$ معلوماً ويطلب تحديد شكل البروفيل الناتج عن تضام $v_{\varphi}(\varphi)$ مع جريان انسيابي . فإذا أدخلنا (12.87) في (12.82) ولاحتفنا أن $d\xi = \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$ نجد معادلة شكل البروفيل :

$$v_{\xi} = \int_0^1 \frac{v_{\varphi}}{u_{\infty}} d\xi = \frac{1}{2} A_0 \cos \varphi - \frac{1}{8} A_1 \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \left(\frac{\cos (n-1)\varphi}{n-1} - \frac{\cos (n+1)\varphi}{n+1} \right) \quad (12.88)$$

أما إذا كان التوزيع الاقصاري معطى بعلاقة تختلف عن (12.85) فيلزم للحصول على شكل البروفيل أولاً حساب السرعة الشاقولية المخرضة v_{φ} حسب (12.79) ومن ثم إدخالها في شرط الجريان الحركي (12.81) . وبذلك يمكن دمج هاتين الخطوتين بخطوة واحدة إذا أدخلنا (12.79) في (12.81) فوراً وأجرينا التكامل بالنسبة لـ φ . فإذا راعينا الشرط الحدي القاطعي بوجوب كون $v_{\xi}(0) = v_{\xi}(1) = 0$ (أنف البروفيل وحافته الخلفية ينطبقان على الوتر) تنتج العلاقة :

$$v_{\xi}(\xi) = x\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(\xi')}{u_{\infty}} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi - \xi'} \right| d\xi' \quad (12.89)$$

ونحصل على العلاقة بين زاوية الورود x والتوزيع الاقصاري بوضع $v_{\xi} = 0$ من أجل $\xi = 1$:

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(\xi')}{u_{\infty}} \ln \frac{1-\xi'}{\xi'} d\xi' \quad (12.90)$$

هذان التكاملان يمكن حلها على أساس إزجاءهما إلى علاقة مجموع ، على قرار ما تم أعلاه .

عند حل المسألة الأساسية الثانية يفرض أن شكل البروفيل معطى بياناً أو تحليلياً بصيغة تابع من الدرجة n :

$$\eta_k = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots = \sum_{n=0}^n a_n \xi^n , \quad (12.91)$$

حيث a_n ثوابت عددية ، ويطلب تحديد التوزيع الاعصاري المناسب $\gamma(\xi)$ بحيث يكون خط التيار الصفري الناتج عن تضام $\gamma(\xi)$ مع الجريان الانسحابي منطبقاً على البروفيل . إن خطوات الحل بمائة تماماً للخطوات المتبعة في حالة البروفيل المتناظر (الفقرة السابقة) ، حيث نكتفي بتحقيق شرط الجريان الحركي على عدد n من النقاط الاختبارية التي نختارها بموجب (12.75) ويكون فيها $\eta_{k,n}$ معلوماً . فإذا كان العدد n هنا أيضاً ، مساوياً لعدد حدود سلسلة غلاورث (12.85) نحصل على مجموعة معادلات مؤلفة من n معادلة خطية لحساب الثوابت A_n ، وبالتالي لتحديد $\gamma(\xi)$. بعدئذ يمكن حساب القيم الهيدروديناميكية للجريان حول البروفيل .

عند حل المسألة الأساسية الثالثة يكون توزيع السرعة $\pm u_v = f(\xi)$ معلوماً ويطلب تحديد شكل البروفيل المناسب . وهنا ، كما في الحالة السابقة ، يكتفى باستخدام العلاقة (12.85) في n نقطة اختبارية من أجل حساب الأمثال المجهولة A_n ، ومن ثم يتحدد شكل البروفيل بمساعدة (12.88) .

إن السرعة على الترت لا تختلف إلا قليلاً عن السرعة على محيط البروفيل ذي الانحناء القليل ، وعليه ينتج في حالة زاوية ورود معدومة أو صغيرة جداً من (12.83) و (12.86) توزيع السرعة :

$$\frac{V_z(\xi)}{u_\infty} \approx \frac{u_z(\xi)}{u_\infty} = 1 \pm (A_0 \cot \frac{\varphi}{2} + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi + \dots) \quad (12.92)$$

بما أن السرعة المحصلة لا تختلف إلا قليلاً جداً عن السرعة غير المشوشة فإن توزيع الضغط يحسب بمساعدة معادلة برنولي الخطية (8.56)، بوضع $\Delta v_x = u_z$ ومقارنة (12.85) مع (12.86) ينتج معامل الضغط :

$$c_p = \mp 2 \frac{u_z}{V_\infty} = \mp \frac{\gamma(\xi)}{V_\infty} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{لطرف السحب } (-) \\ \text{لطرف الضغط } (+) \end{array} \right. \quad (12.93)$$

ويكون بالتالي الفرق بين قيمتي معامل الضغط على طرفي البروفيل :

$$\Delta c_p(\xi) = c_{pD} - c_{pS} = 2 \frac{\gamma(\xi)}{V_\infty} \quad (12.94)$$

لحساب قوة الرفع يمكن من جهة حسب (8.55) مكاملة $\Delta c_p(\xi)$ بالنسبة لـ ξ ، كما يمكن من جهة أخرى حساب الجولان التكلي Γ حول البروفيل بمكاملة توزيع الجولان الموضعي $\gamma(x)$ ، حيث يكون :

$$\Gamma = \int_0^l \gamma(x) dx = l \int_0^1 \gamma(\xi) d\xi \quad (12.95)$$

فإذا كان b عرض البروفيل تنتج قوة الرفع حسب قانون كوتا - يوكوفسكي بالصيغة :

$$F_A = \rho V_\infty \Gamma b = \rho V_\infty A \int_0^1 \gamma(\xi) d\xi \quad (12.96)$$

حيث $A = b l$ مساحة مسقط الجناح . وبتنجز معامل قوة الرفع :

$$c_x = \frac{F_x}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 A} = \frac{2}{V_\infty} \int_0^l \gamma(\xi) d\xi . \quad (12.97)$$

استكمالاً للقيم الهيدروديناميكية ، أو الايروديناميكية ، تلزم في نظرية الجناح الحامل ، بالإضافة لما تقدم ، معرفة عزم الالة Tilting moment لتحديد نقطة تأثير قوة الرفع . فإذا حسبنا العزم بالنسبة للمحور المار من حافة البروفيل الامامية وأدخلنا معامل العزم Moment coefficient نجد بمساعدة معادلة برنولي واستخدام (12.94) :

$$\begin{aligned} c_M &= \frac{M}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l^2} = \frac{-b \int_0^l (p_D - p_S) x dx}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l^2} = -\frac{2}{V_\infty} \int_0^l \gamma(\xi) \xi d\xi = \\ &= - \int_0^1 \Delta c_p(\xi) \xi d\xi . \end{aligned} \quad (12.98)$$

ويكون بعد نقطة تأثير قوة الرفع s عن الحافة الامامية محدداً بالعلاقة :

$$s/l \sim c_M / c_A . \quad (12.99)$$

عندما نختار $\gamma(\xi)$ حسب (12.85) بالارتباط مع (12.65) ينتج من (12.95) باستخدام العلاقات المثلثية الجولان :

$$\begin{aligned} F' &= l \int_0^\pi \gamma(\varphi) \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi = \\ &= 2 u_\infty l \int_0^\pi \left[A_0(1 + \cos \varphi) + \sum_{n=1}^n A_n \sin n\varphi \cdot \sin \varphi \right] d\varphi . \\ &\text{وحيث أن } \int_0^\pi \sin n\varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = 0 \text{ من أجل } n = 2, 3, \dots \text{ يصبح :} \end{aligned}$$

$$F' = u_{\infty} l \pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) . \quad (12.100)$$

بذلك تنتج من (12.96) قوة الرفع :

$$F_A = \rho V_{\infty} u_{\infty} l b \pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) , \quad (12.101)$$

وينتج من (12.97) ، وبسبب كون $u_{\infty}/V_{\infty} = \cos \alpha$ (الشكل ١٦.١٢ - b) معامل قوة الرفع :

$$c_A = 2 \pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) \cos \alpha , \quad (12.102)$$

الذي يصبح من أجل $\alpha = 0$ ، أو عندما تنسب $\gamma(\varphi)$ حسب (12.85) إلى V_{∞} بدلاً من u_{∞} :

$$c_A = 2 \pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) . \quad (12.102a)$$

من جهة أخرى وبملاحظة أن :

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) \xi d\xi &= \gamma(\varphi) \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi = \frac{u_{\infty}}{2} \left[A_0 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^n A_n \sin n \varphi (\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \right] , \end{aligned}$$

ينتج معامل العزم من (12.98) بالصيغة :

$$c_M = - \frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \cos \alpha , \quad (12.103)$$

الذي يصبح من أجل $\alpha = 0$ ، أو عندما تنسب $\gamma(\varphi)$ إلى V_{∞} بدلاً من u_{∞} :

$$c_M = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) - \frac{1}{4} c_A \quad (12.103a)$$

كما تقدم يتبين أن معامل قوة الرفع يتعلق فقط بجثتي الحد الأول والثاني ، A_1, A_0 ، ويتعلق معامل العزم بالإضافة إليها بجثلي الحد الثالث A_2 من سلسلة غلاووت . وعليه فإن هذه الحدود الثلاثة فقط تحدد القيم الهيدروديناميكية (أو الأيروديناميكية) الإجمالية للبروفيل ، بينما ينحصر تأثير الحدود المتبقية من السلسلة على التوزيع الموضعي للسرعة والضغط على محيط البروفيل .

إن قوة الرفع تتعلق من جهة بزاوية ورود α ومن جهة أخرى بانحناء البروفيل . وعليه لا يكون عامة $c_A = 0$ عند $\alpha = 0$ ، فإذا كانت α_0 تمثل زاوية قوة الرفع الصفرية Zero lift angle ، أي التي تكون عندها F_A معدومة ، فإن معامل قوة الرفع ينخفض في مجال زوايا ورود متوسطة للعلاقة الخطية :

$$c_A = \frac{dc_A}{d\alpha} (\alpha - \alpha_0) \quad (12.104)$$

حيث $dc_A/d\alpha$ ميل أو تدريج معامل قوة الرفع Lift slope . بالمقابل فإن عزم الإمالة يتألف أيضاً من جزء لا يتعلق بقوة الرفع ويسمى العزم الصفري Zero moment ومن جزء تربطه مع قوة الرفع ، وبالتالي مع زاوية ورود ، علاقة خطية . فإذا اعتبرنا c_{M_0} معامل العزم الصفري يكون :

$$c_M = c_{M_0} + \frac{dc_M}{dc_A} c_A \quad (12.105)$$

حيث dc_M/dc_A ميل أو تدريج معامل العزم Moment slope .

لحساب c_{M_0}, α_0 وعلاقتها بشكل البروفيل يلزم أولاً حساب الأعتال A_n في (12.102) و (12.103) . لهذا ندخل $v_y(\varphi)$ حسب (12.87) في شرط الجريان الحركي (12.81) فنجد :

$$\eta'_k = \frac{d\eta_k}{d\xi} = \alpha - A_0 + \sum_{n=1}^n A_n \cos n \varphi \quad (12.106)$$

فإذا كان η_k معلوماً يكون η'_k معلوماً أيضاً وبالتالي يمكن تحديد A_n بمساعدة سلسلة فورييه وذلك بضرب طرفي (12.106) على التوالي بـ $1, \cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots$ وإجراء التكامل في المجال من 0 حتى π حيث نجد (انظر مثلاً [42] و [17]) :

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_k}{d\xi} d\varphi \quad , \\ A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_k}{d\xi} \cos n \varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \dots n) \quad . \end{aligned} \right\} \quad (12.107)$$

ندخل الآن A_0, A_n في (12.102 a) وبالإضافة إليها A_2 في (12.103 a) فيصبح معامل قوة الرفع :

$$c_A = 2\pi \left[\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \eta'_k(\xi) (1 - \cos \varphi) d\varphi \right] \quad , \quad (12.108)$$

ومعامل العزم :

$$c_M = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \eta'_k(\xi) [\cos \varphi - \cos 2\varphi] d\varphi - \frac{1}{4} c_A \quad . \quad (12.109)$$

بمقارنة هاتين العلاقتين مع (12.104) و (12.105) نجد العلاقات :

$$z_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \eta'_k(\xi) [1 - \cos \varphi] d\varphi \quad , \quad (12.110)$$

$$dc_A/d\alpha = 2\pi \quad , \quad (12.111)$$

$$c_{Mn} = -\frac{1}{2} \int_{\pi}^{\pi} \eta_{\pi}(\xi) (\cos \varphi - \cos 2\varphi) d\varphi \quad (12.112)$$

$$dc_M/dc_A = -\frac{1}{4} \quad (12.113)$$

حيث يلزم لحل التكاملات الواردة أعلاه التعبير بمساعدة (12.65) عن $\eta_{\pi}(\xi)$ بدلالة φ .

في ضوء ما تقدم يمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية المؤكدة بتجارب عديدة :

بالنسبة للبروفيلات القليلة الانحناء والرقيفة جداً تقوم علاقة خطية بين معامل قوة الرفع وزاوية ورود ، وكذلك بين معامل العزم ومعامل قوة الرفع ، ويكون تدرج معامل قوة الرفع ثابتاً ويساوي 2π ولا يتعلق بشكل البروفيل ، وكذلك تدرج معامل العزم الذي يبلغ $-1/4$.

الشكل (١٧، ١٢) يتضمن نتائج حساب القيم الهيدروديناميكية للجريان حول بروفيلات رقيقة جداً ، مختلفة الاشكال ، تنتج كخطوط تيار صفيرة عند فضاء التوزعات الاعصارية المبينة في الشكل مع جريان انسحالي . هذه النتائج يمكن اعتبارها حلاً للمسألة الأساسية الاولى (γ معلوم η_{π} مطلوب) أو الثانية (η_{π} معلوم γ مطلوب) . وتعرف خاصية توزيعات γ الثلاثة الأولى ، المطابقة للحدود الثلاثة الاولى من سلسلة غلاورت (12.85) باسم التوزيعات الناعمة لبرفيلوم - اكرمان . ويعبر التوزيع الأول عن الجريان حول صفيحة مستوية مائل بزاوية x على اتجاه الجريان ، والثاني عن الجريان حول صفيحة منحنية تحت زاوية ورود $x=0$ ، والثالث عن الجريان حول صفيحة بشكل حرف S وزاوية ورود معدومة أيضاً .

بوجب مبدأ التضام فإن معامل قوة الرفع لصفيحة منحنية تحت زاوية ورود α ينتج من جمع قيمتي c_A في العمود الاول والثاني فيكون :

الشكل ١٧.١٢ :

حساب القيم الهيدروديناميكية
بروفيلات عديمة السكّة ،
ناجمة عن التوزيعات الناطمية
الأربعة الأولى لبرنوليوم -
أكرممان (133) .

النسبة	صفحة مستوية	صفحة منحدية	صفحة بشكل S	صفحة منبوعة
شكل البروفيل في جريان منتظم بسرعة u_0 $\eta_0 = \frac{y}{h} ; z = \frac{x}{h}$				
$\eta_0 =$	$A_0 (1 - \frac{z}{h})$	$A_1 (\frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2})$	$A_2 (-\frac{8}{3} \frac{z}{h} + 4 \frac{z^2}{h^2} - \frac{z^3}{h^3})$	$A_3 (-1 + 4 \frac{z}{h} - 8 \frac{z^2}{h^2} + 4 \frac{z^3}{h^3})$
توزيع الجريان الوسمي الشدود الانضغاطية $\frac{dC}{dz} = T$				
$\tau =$	$2 A_0 u_0 \sqrt{1 - \frac{z}{h}} / \frac{z}{h}$	$4 A_1 u_0 \sqrt{\frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2}}$	$8 A_2 u_0 (2 \frac{z}{h} - 1) \sqrt{\frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2}}$	$8 A_3 u_0 (2 \frac{z}{h} - 1)^2 \sqrt{\frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2}}$
توزيع السرعة المتأقوية الحرشة v_y / u_0				
$-v_y / u_0 =$	A_0	$A_1 (2 \frac{z}{h} - 1)$	$A_2 (8 \frac{z}{h}^2 - 8 \frac{z}{h} + 1)$	$A_3 (16 \frac{z}{h}^3 - 24 \frac{z}{h}^2 + 10 \frac{z}{h} - 1)$
معامل قوى الزرع $\zeta_A =$	$2\pi A_0$	πA_1	0	$\frac{\pi}{2} A_3$
معامل التفرع حول $- \zeta_B =$	$\frac{\pi}{2} A_0$	$\frac{\pi}{2} A_1$	$\frac{\pi}{6} A_2$	$\frac{\pi}{4} A_3$
$\zeta_A = - \zeta_B + \zeta_B =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	∞	$\frac{1}{2}$

$$c_A = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \left(x + 2 \frac{f}{l} \right) . \quad (12.114)$$

العمود الأيمن من الشكل (١٧.١٢) يتضمن حساب الجريان حول صفيحة منبوعة. فإذا جمعنا الآن كافة قيم الختول الاقنية نحصل على الجريان حول بروفييل رفيع جداً اعتباطي يتحدد شكله بالتابع :

$$\gamma_{is} = \gamma_{is1} + \gamma_{is2} + \gamma_{is3} + \gamma_{is4} = \left(A_0 - \frac{A_1}{3} \right) \xi + (-A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \xi^2 + (-A_1 + 4A_2 - 5A_3) \xi^3 + \left(-\frac{8}{3}A_2 + 8A_3 \right) \xi^4 + (-4A_3) \xi^5 = a_0 + \sum_{n=1}^5 a_n \xi^n . \quad (12.115)$$

وبنفس الطريقة نحصل على القيم الهيدروديناميكية :

$$c_A = c_{A1} + c_{A2} + c_{A3} + c_{A4} ; \quad c_M = c_{M1} + c_{M2} + c_{M3} + c_{M4} . \quad (12.116)$$

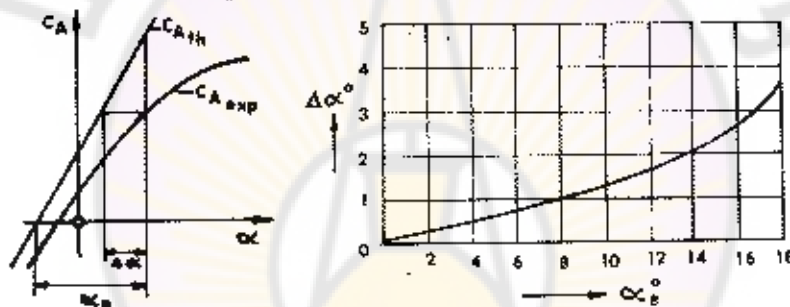
ونجد بسهولة توزيع الضغط الذي يكون بموجب (12.93) متناسباً مع توزيع الجولان الموضعي $\gamma(\xi)$.

إن النتائج السابقة تشترط طبعاً سائلاً مثاليًا . لذلك فإن قيم c_A المقاسة عند زاوية ورود معينة ستكون بسبب تأثير الزوجة أقل من القيم النظرية . وقد برهن فالتس [137] أن هذا الفرق يمكن مراعاته بإدخال زاوية تصحيح $\Delta\alpha$ ، الشكل (١٨.١٢) ، التي تتعلق بزاوية الورد α المحسوبة اعتباراً من اتجاه قوة الرفع الصفرية النظرية ، الشكل (١٩.١٢) ، والتي لا تتأثر في الخطوة التقريبية الأولى بشكل البروفيل .

في الحالة العامة تكون قيمة الجولان الموضعي حسب (12.85) على أنف البروفيل لانهائية ، $\gamma(\xi=0) = \gamma(\varphi=0) \rightarrow \infty$. هذا يعني أن الجريان سيختلف حول الحافة الامامية للبروفيل (من الأعلى للأسفل أو بالعكس) بسرعة لانهائية نظرياً ، مما يسبب نشوء ضغط ناقص كبير جداً في منطقة الأنف ، ثم لا يلبث أن يتزايد الضغط ويصبح موجباً . نتيجة ذلك تتولد قوة مص Suction force

F_{su} باتجاهها الى الامام نحو أنف البروفيل . إن نشوء هذه القوة يتوضح بسهولة في حالة الصفيحة المستوية التي تميل بزاوية α على اتجاه الجريان إذا حالنا قوة الرفع F_A ، التي يجب ان تكون متعامدة مع اتجاه الجريان ، الى مركبة F_p تمثل محصلة قوى الضغط ، التي يجب ان تكون في حالة سائل مثالي عمودية على الصفيحة ، ولذا مركبة $F_{su} = F_A \sin \alpha$ مماسة على الصفيحة وباتجاه الأنف . قيمة F_{su} لا تتعلق بسماكة الصفيحة ولا بنصف قطر الأنف ويبلغ حسب [17] معامل قوة المص $c_{su} = F_{su} / \frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l$ باستخدام (12.85) و (12.87) :

$$c_{su} = \frac{-2}{V_\infty^2} \int_0^1 \gamma(\xi) v_v(\xi) d\xi = \left(\frac{u_x}{V_\infty} \right)^2 2\pi A_0^2 \quad (12.117)$$



الشكل ١٢.١١٧: علاقة زاوية التصحيح α الشكل ١٢.١١٨: تعريف زاوية التصحيح α بمراعاة تأثير اللويحة على قوة الرفع .
زاوية الورد α_0 المحسوبة اعتباراً من اتجاه α زاوية الورد α_0 المحسوبة اعتباراً من اتجاه α بمراعاة تأثير اللويحة على قوة الرفع .
قوة الرفع الصغرية النظرية ، حسب [137] .

لتجنب التقاف الجريان حول أنف الصفيحة يعتمد الى حثها واختيار زاوية الورد بحيث يكون الجريان مماسياً على أنفها . بحيث ان الحد الاول فقط من سلسلة غلاووت يسبب حدوث السرعات اللانهائية عند $\xi = 0$ أو $\varphi = 0$ ، فإن زاوية الورد الماهي α^* تتحدد من (12.107) بوضع $A_0 = 0$ فتنتج :

$$\alpha = \alpha^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dv_k}{d\xi} d\varphi , \quad (12.118)$$

وينتج عندئذ معامل قوة الرفع من (12.102a) و (12.107) بالصيغة :

$$c_A|_{\alpha \rightarrow \infty} = c_A^* = \pi A_2 = 2 \int_0^\pi \frac{dy_s}{dy} \cos \varphi \, d\varphi \quad (12.119)$$

في حالة الجريان الحقيقي لا تستطيع جزيئات السائل اللاصقة على الصفيحة في جوار الأنف مقاومة تزايد الضغط فتنفصم وتشكل ما يعرف باسم اعصار الأنف الذي يخفف من حدة الحافة الامامية للصفيحة ويجعله شبيهاً بالأنف المدور لبروفيل عادي ، وبالتالي تبقى السرعة على الأنف محدودة .

٧.٢.١٢ الجريان بزواوية ورود حول بروفييل مناهج عامل صغير

السماكة والانحناء

بعد دراسة الجريان المتناظر (بدون زواوية ورود) حول بروفييل متناظر ذي سماكة صغيرة ، والجريان بزواوية ورود حول بروفييل ذي انحناء صغير وبدون سماكة ، يمكننا الآن دراسة الجريان بزواوية ورود حول بروفييل صغير السماكة والانحناء كتنظيم للحالتين . مثل هذا البروفيل يمكن اعتباره هندسياً مؤلفاً من توزيع انحناء $y_s(x)$ وتوزيع سماكة $y_d(x)$ ، الشكل (٢٠.١٢) . فإذا فرضنا $y_s(x)$ الإحداثي الشاقولي لطرف السحب (الطرف العلوي) ، $y_d(x)$ الإحداثي الشاقولي لطرف الضغط (الطرف السفلي) فيكون :

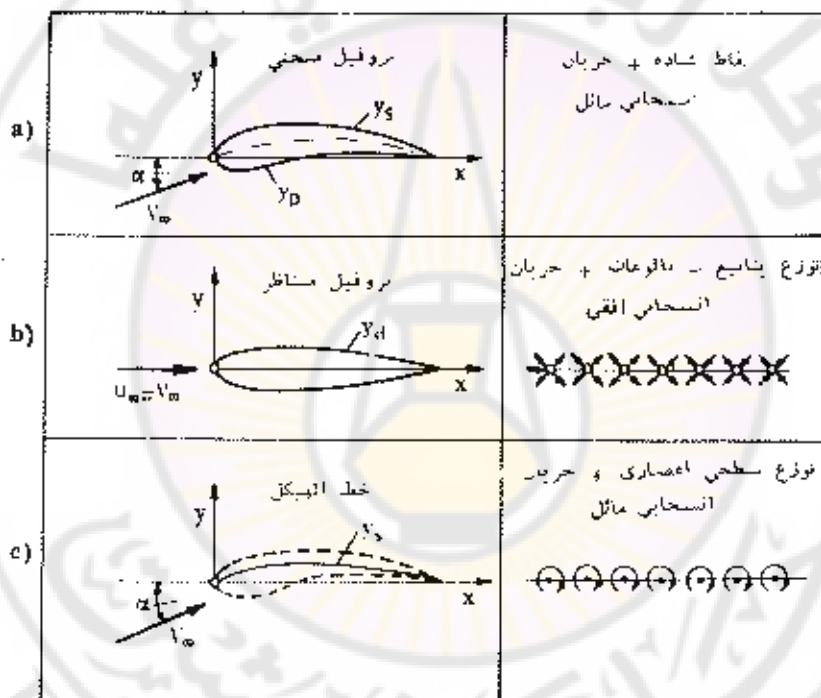
$$y_s(x) = y_s(x) + y_d(x) ; y_d(x) = y_s(x) - y_d(x) \quad (12.120)$$

وينتج بالتالي بالنسبة لبروفيل شكله معروف :

$$y_s(x) = \frac{1}{2} [y_s(x) + y_d(x)] ; y_d(x) = \frac{1}{2} [y_s(x) - y_d(x)] \quad (12.121)$$

أو بشكل لا بعدي بوضع $\xi = x/l$, $\eta = y/l$ واستخدام سلسلة فورييه مثلثة حسب ديفلس [134] :

$$\left. \begin{aligned} v_{ss}(\xi) &= \frac{1}{2} [v_{ss}(\xi) + v_{sp}(\xi)] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \varphi \\ v_{sl}(\xi) &= \frac{1}{2} [v_{ss}(\xi) - v_{sp}(\xi)] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \varphi \end{aligned} \right\} (12.122)$$



الشكل ٢٠٠١٢ : الجريان بزواوية ورود α حول بروفييل محدود السبائك والإلغناء ،
 a) ، يكافئ الجريان الناتج من تضام توزع يتابع - بالوعات مع جريان انسحابي
 بدون زواوية ورود ($\alpha = 0$) ، b) ، وتوزع اعصاري مع جريان انسحابي بزواوية ورود α ، c) .
 إن توزع السرعة الاجمالية على محيط البرو فيل ينتج كمجموع لتوزع السرعة
 على خط الهيكل ، وعلى البرو فيل المتناظر بالإضافة لتوزع سرعة إضافية ΔV_B

ناتجة عن وجود البروفيل المتناظر في جريان بزاوية ورود $\alpha \neq 0$. هذا الجزء الأخير يعطى حسب ريفلس بالعلاقة :

$$\frac{\Delta V_R}{V_\infty} = \pm \frac{\alpha}{\kappa_{\text{Rad}}(\xi)} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \int_0^1 \left(\frac{d\eta_d}{d\xi'} - \frac{\eta_d}{2\xi'(1-\xi')} \right) \frac{d\xi'}{\xi-\xi'} . \quad (12.123)$$

هذه السرعة الإضافية يمكن اعتبارها حسب تروكنبورت (انظر [17]) ناتجة عن تأثير انحناء إضافي $\Delta\eta_d$ ينضام الى الانحناء الهندسي η_d وزاوية ورود إضافية $\Delta\alpha$ تنضام الى زاوية الورد الهندسية α حيث يكون :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\eta_d &= \alpha \left[\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \eta_d + 2(1-\xi) \left(\frac{d\eta_d}{d\varphi} \right)_{\xi=0} \right] , \\ \Delta\alpha &= -2\alpha \left(\frac{d\eta_d}{d\varphi} \right)_{\xi=0} . \end{aligned} \right\} \quad (12.124)$$

نفرض الآن ان انحناء البروفيل قليل وسماكته معقولة بحيث يمكن توزيع النقاط الشاذة على الوتر وأن زاوية الورد صغيرة نسبياً . فإذا كانت V_c السرعة على الوتر ، فتكون السرعة على محيط البروفيل منسوبة للسرعة غير المشوثة V_∞ :

$$\frac{V_R(\xi)}{V_\infty} = \frac{1}{\kappa_{\text{Rad}}(\xi)} \frac{V_c(\xi)}{V_\infty} = \frac{1}{\kappa_{\text{Rad}} V_\infty} [V_{cR} \pm V_{cV} \pm \Delta V_R] .$$

ونحسب حسب [17] من العلاقة :

$$\begin{aligned} \frac{V_R(\xi)}{V_\infty} = \frac{1}{\kappa_{\text{Rad}}(\xi)} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\eta_d}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\xi-\xi'} \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \int_0^1 \frac{d\eta_d}{d\xi'} \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{d\xi'}{\xi-\xi'} \pm \right. \\ \left. \pm \alpha \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \left[1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{d\eta_d}{d\xi'} - \frac{\eta_d}{2\xi'(1-\xi')} \right) \frac{d\xi'}{\xi-\xi'} \right] \right\} , \quad (12.125) \end{aligned}$$

حيث يعبر التكامل الاول عن تأثير الازاحة Displacement effect أو السماكة للبروفيل المتناظر ، والتكامل الثاني عن تأثير الانحناء ، والحد الثالث المتضمن α عن تأثير زاوية الورود ، ونخص إشارة (+) طرف السحب وإشارة (-) طرف الضغط .

حل المسألة الاساسية الثانية طور شلشتنغ [104] على الاسس السابقة طريقة عملية لحساب توزيع السرعة والضغط على محيط بروفييل جناح حامل قليل السماكة والانحناء في جريان مثالي تحت زاوية ورود صغيرة ، وذلك في حالة الجناح الفودي ، والجناح ضمن سلسلة (أو شبك) Cascade . وسنورد هنا الخطوات العملية لهذه الطريقة في حالة الجناح الفردي .

يفرض ان الشكل الهندسي للبروفيل معطى تحليلياً أو بياناً بموجب (12.120) . بذلك يشهد شكل الخط المبيكلى (توزيع الانحناء) والبروفيل المتناظر (توزيع السماكة) حسب (12.121) أو (12.122) ، وبعدئذ يمكن تحديد $\frac{d\gamma_s}{ds}$ أو $\gamma'_s = d\gamma_s/ds$ في كل نقطة اختبارية .

لحساب القيم الهيدروديناميكية وتوزيع الضغط والسرعة على محيط البروفيل يلزم اجراء الخطوات الحسابية التالية :

١ - استخراج مجموعتي المعادلات الخطية لتحديد توزيع النقاط الشاذة وحقل السرعة المخرضة . لهذا نختار توزيع البناييع - البالوعات حسب (12.67) وتوزيع الاصاصير حسب (12.85) ، وبكثفى ، كخطوة تقريبية جيدة ، بالحدود الثلاثة الأولى فقط من السلسلتين . بذلك يتحدد حقل السرعة المخرضة من المعادلات (12.69) (12.70) و (12.86) ، (12.87) بالصيغ :

$$\begin{aligned} u_q(\varphi) &= u_\infty \{ B_0 (1 - 2 \cos \varphi) - B_2 \cos 2\varphi - B_4 \cos 4\varphi \} , \\ v_q(\varphi) &= -u_\infty \{ B_0 \cot \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_4 \sin 4\varphi \} , \\ u_p(\varphi) &= u_\infty \{ A_0 \cot \frac{\varphi}{2} + A_2 \sin \varphi + A_4 \sin 2\varphi \} , \\ v_p(\varphi) &= u_\infty \{ -A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi \} , \end{aligned} \quad (12.126)$$

ويأخذ شرط الجريان الحركي لتوزيع السهابة (12.61) الصيغة :

$$B_0 \left(\cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi \right) + B_2 \sin 2\varphi + B_3 \sin 3\varphi = y'_d(x), \quad (12.127)$$

وشرط الجريان الحركي لتوزيع الانحناء (12.81) الصيغة :

$$-A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi = -K + y'_k(x), \quad (12.128)$$

حيث يكون مرجع الشكل (٢٠٠٢) معاملات زاوية الورد :

$$K = v_{\infty}/u_{\infty} = \tan \alpha. \quad (12.129)$$

ان حساب التوابيع المثلثية بمساعدة (12.65) يعطي قيماً عامة لا تتعلق بشكل البروفيل .
فثلاً من أجل :

$$\begin{aligned} \xi = x/l = 7.12 &\Rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = 0.8451; \sin \varphi = 0.9860; \sin 2\varphi = -0.3287; \\ \sin 3\varphi = -0.8765; \cos \varphi &= -0.1607; \cos 2\varphi = -0.9444; \cos 3\varphi = 0.4813; \\ 1 + \cos 2\varphi &= 0.0007; \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi = -1.1269. \end{aligned}$$

بتطبيق (12.127)، (12.128) على ثلاث نقاط اختبارية مواقعها محددة حسب (12.76) نحصل على مجموعتي معادلات كل منها مؤلفة من ثلاث معادلات خطية لحساب المعاملات A_2, A_1, A_0 و B_3, B_2, B_0 لأن قيم $y_{sp}^{(n)}(x) = y_{sp}^{(n)}(\xi)$ و $y_{dn}^{(n)}(x) = y_{dn}^{(n)}(\xi)$ معلومة .
ولكن ينصح عند إجراء دراسة منظمة Systematical ، وخاصة من أجل تحديد تأثير زاوية الورد على القيم الهيدروديناميكية ، شطر التوابيع A_n الى قسم لا يتعلق بزاوية الورد (الدليل الثاني 0) وقسم يتعلق بزاوية الورد (الدليل الثاني 2) ، حيث نضع :

$$A_0 = A_{00} + K A_{10}; A_1 = A_{10} + K A_{20}; \dots \quad (12.130)$$

بذلك نحصل في الحقيقة على ثلاث مجموعات من المعادلات الخطية من أجل A_{10}, A_{20}, B_{10} ونحصل بالنسبة للمجموعة الاخيرة على حل عام بسيط بالصيغة :

$$A_{02} = 1; A_{12} - A_{22} = \dots = 0 \quad \text{من أجل } n \geq 1. \quad (12.131)$$

بذلك يكون حسب (12.130) :

$$A_0 = A_{00} + K; A_1 = A_{10}; A_2 = A_{20}; \dots \quad (12.132)$$

إذن يكفي لتحديد الأمثال A_n, B_m حل مجموعتي المعادلات الخطية التالية :

$$\frac{x_1}{l} = \frac{3}{12} \Rightarrow 0,8660 B_2 = y'_{d1} ;$$

$$-A_{00} + 0,5 A_{10} - 0,5 A_{20} = y'_{s1} ;$$

$$\frac{x_2}{l} = \frac{7}{12} \Rightarrow -1,1269 B_0 - 0,3287 B_2 - 0,8765 B_3 = y'_{d2} ; \quad (12.133)$$

$$-A_{00} - 0,1667 A_{10} - 0,9444 A_{20} = y'_{s2} ;$$

$$\frac{x_3}{l} = \frac{11}{12} \Rightarrow -0,8040 B_0 - 0,9213 B_2 + 0,9827 B_3 = y'_{d3} ;$$

$$-A_{00} - 0,8333 A_{10} + 0,3889 A_{20} = y'_{s3} ;$$

٢ - حساب الامثال B_m و A_m . بحل مجموعة المعادلات الاولى من (12.133) نحصل

على B_3, B_2, B_0 ، وبحل المجموعة الثانية نجد A_{20}, A_{10}, A_{00} ، وبالتالي بمساعدة (12.132) A_3, A_1, A_0 . بذلك يصبح توزيع النقاط الشاذة وحقل السرعة المخرجة عديدين تماماً .

٣ - حساب القيم الهيدروديناميكية (أو الايروديناميكية) اللاحقة. إن الجولان الكلي Γ لا يتغير بالمقارنة مع البروفيل ذي الساكنة المدمجة ، وبالتالي فهو يسب من (12.100) . ونتج قوة الرفع من (12.101) ، وينتج معامل قوة الرفع من العلاقة (12.102) التي يمكن كتابتها بالصيغة :

$$c_A = 2 \pi [(A_{00} + \frac{1}{2} A_{10}) \cos \alpha + \sin \alpha] \quad (12.134)$$

وبالتالي يكون :

$$\{ dc_A / dx \}_{x=0} = 2 \pi \quad (12.135)$$

حيث تصبح هذه القيمة بدغة في حالة الصفيحة المستوية فقط .

إن توزيع السرعة V_R على محيط البروفيل يحسب من من توزيع السرعة على وتره V_C ونجد باستخدام (12.126) و (12.130) .

$$\begin{aligned} \frac{V_R(x)}{u_\infty} &= \frac{1}{z_{Rd}} \frac{V_C(x)}{u_\infty} = \frac{1}{z_{Rd}} \frac{u_\infty + u_G + u_T}{u_\infty} = \frac{1}{z_{Rd}} \left\{ [1 + B_0(1 + 2 \cos \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - B_2 \cos 2\varphi - B_3 \cos 3\varphi] + (A_{00} \cot \frac{\varphi}{2} + A_{10} \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + A_{20} \sin 2\varphi) + K \cot \frac{\varphi}{2} \right\} \quad (12.136) \end{aligned}$$

حيث نفس (+) طرف السحب و (-) طرف الضغط . في هذه العلاقة يعبر الحد الاول

المصور ضمن القوسين الزاويين عن توزيع السرعة البروفيل المتناظر في جريان انسحائي أفقي بسرعة $u(x=0)$ ، وبعبارة الحد الثاني المصور ضمن القوسين الدائريين عن توزيع السرعة الناتج عن الانحناء عند زاوية ورود معدومة ، بينما يعبر الحد الثالث عن تأثير زاوية الورد $\alpha = \arctan K$ وهو نفس الحد في حالة الصفيحة المستوية التي يمر عليها جريان انسحائي بزاوية α .

زاوية الورد المماسي تتحدد من أجل $A_{00} = 0$ ، وبالتالي ينتج من (12.130) و (12.131) :

$$\tan \alpha = -A_{00} \quad (12.137)$$

في حالة البروفيل ذي السبكة المحدودة تبقى السرعة على أنف البروفيل $(x=0)$ محدودة وتكون :

$$\left(\frac{V_B}{u_\infty}\right)_{x=0} = A_B \sqrt{2/r_N} \quad (12.138)$$

حيث r_N نصف قطر دائرة أنف البروفيل

أخيراً نحصل على توزيع معامل الضغط على محيط البروفيل من معادلة برنولي :

$$\frac{P_B - P_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_B}{V_\infty}\right)^2 = 1 - \left(\frac{V_B}{u_\infty} \cdot \cos \alpha\right)^2 \quad (12.139)$$

في [104] حسب القيم المحدودتيناميكية بموجب هذه الطريقة التقريبية وقورنت النتائج مع نتائج محسوبة بموجب طرق دقيقة رياضياً (طريقة التمثيل المطابق) فكانت النتيجة مرضية تماماً .

حل المسألة الأساسية الأولى نكتفي بالإشارة الى أن شولتس [103] قد طور طريقة عملية على أساس مماثلة لأسس طريقة شليشمنغ ، نسمح بتحديد شكل البروفيل القليل السماكة والانحناء جناح حامل فردي أو ضمن شبك . وهناك طرق عملية عديدة أخرى لحل المسائل الأساسية لنظرية الجناح الحامل على أساس طريقة التقاط الشاذة ، نجدها في المراجع والأبحاث المختصة التي جاء ذكر القليل منها أعلاه .

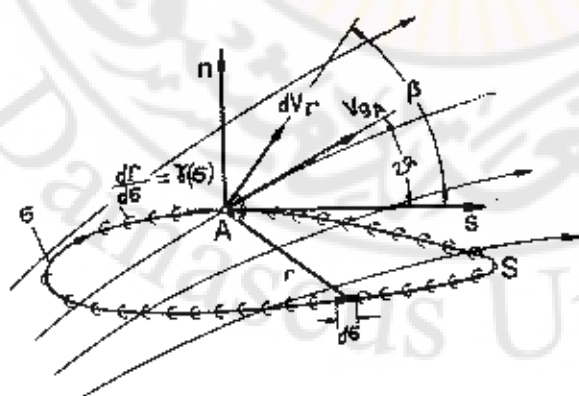
٨٠٢٠١٢ الجريان حول بروفل جناح حامل كبير السماكة والانعناء

في حالات عملية تخرج في الحقيقة عن نطاق نظرية الجناح الحامل الفردي (الطيران ١) ولكنها ذات أهمية كبيرة بالنسبة لنظرية شبك البروفيلات، وبخاصة في مجال بناء العنفات البخارية، تهتم دراسة الجريان حول بروفيلات ذات الانحناء وسماكة كبيرين. عندئذ لا يجوز، كما فعلنا في الفقرة السابقة، التعويض عن تأثير الجناح الحامل بتوزيع مناسب من النقاط المشادة على وتر البروفيل. إضافة لذلك فإن زاوية الورود تكون عادة كبيرة بحيث لا يمكن تعويضها بظلمها.

لنعتبر الحالة العامة لبروفيل ذي سماكة وانحناء كبيرين واقع في جريان عام (دليل ١) سرعته تتغير قيمة واتجاهاً من مكان لآخر. في هذه الحالة يمكن البرهان، [25][135]، أن حساب الجريان حول البروفيل يمكن إذا عوضنا عنه بتوزيع مناسب من الاغصير الموزعة على محيطه، الشكل (٢١.١٢).

ليكن σ الاحداثي المنحني المنطبق على محيط البروفيل. عندئذ تكون الشدة الاغصارية الموضعية:

$$\gamma(\sigma) = \frac{d\Gamma}{d\sigma} = f(\sigma) \quad (12.140)$$



الشكل ٢١.١٢
التعويض عن تأثير
بروفيل ذي سماكة
وانحناء كبيرين على
جريان أساسي عام بتوزيع
مستمر من الاغصير
الموزعة على محيطه.

إن حقل الجريان الكلي المؤلف من تضاف حقل الجريان الاساسي وحقل التوزيع الاعصاري يجب ان يحقق شرط الجريان الحركي وشرط كوتا للانسياب الناعم الذي يقضي بأن تكون الحافة الخلفية نقطة ركود S تنعدم فيها السرعة المحصلة . فإذا اعتبرنا نقطة ما A من محيط البروفيل ، وكان θ اتجاه المماس ، α اتجاه الناظم في هذه النقطة ، فيلزم بموجب شرط الجريان الحركي أن تكون المركبة الناعمة للسرعة V_n معدومة لكي تكون السرعة المحصلة للجريان الكلي مماسة على محيط البروفيل الذي يمثل عندئذ خطاً للتيار . وعليه نحصل باستخدام رموز الشكل (٢١٠١٢) والاعتماد على قانون بيوس-سافار وبالنسبة لواحدة عرض البروفيل على المعادلتين التكامليتين التاليتين :

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sin \beta \gamma(\sigma) d\sigma}{r} + V_{nA} \sin \theta = 0 , \quad (12.141)$$

$$V_n^{(0)} = V = \frac{1}{2} \gamma(\sigma)_A + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\cos \beta \gamma(\sigma) d\sigma}{r} + V_{nA} \cos \theta . \quad (12.142)$$

في الطرف الايمن للمعادلة الاولى يمثل الحد الاول محصلة المركبات الناعمة للسرعات المحرزة في النقطة A من كامل التوزيع الاعصاري ، ويمثل الحد الثاني المركبة الناعمة لسرعة الجريان الاساسي في A . وفي الطرف الايمن للمعادلة الثانية يمثل الحد الاول السرعة المماسية التي يجريها الحيط الاعصاري المار من A ، ويمثل الحد الثاني محصلة السرعات المماسية المحرزة في A من باقي الحيط الاعصاري ، بينما يمثل الحد الثالث المركبة المماسية لسرعة الجريان الاساسي في A . في نقطة الركود الخلفية S تكون :

$$V_n(\sigma = S) = 0 .$$

لقد أوضح شولتس [25] الحل المبدئي للمسألة الاساسية الاولى حيث أدخل لحساب حقل السرعة المحرزة من الاعاصير ما أسماه توابيع تأثير عمامة

Universal influence function ، التي تعبر عن التأثير الناتج عن توزيع الاعاصير على محيط البروفيل بدلاً من الوتر ، وهي تتعلق فقط بالمسافة النسبية بين النقطة المعتبرة والعنصر الاعصاري في النقطة المتحوطة .

حل المسألة الاساسية الثانية يلزم معرفة $\gamma(\sigma)$. فاذا جزأنا ، حسب [7] ، محيط البروفيل إلى n قطعة بطول $\Delta\sigma$ واعتبرنا التوزيع الاعصاري في كل منها ثابتاً والجولان الموضعي $\Delta\sigma$ ، $I_n' = \gamma(\sigma)$ مركزاً في منتصف كل قطعة ، فإن التكاملين الواردين في العلاقتين (12.141) و (12.142) يمكن تحويلهما الى مجموعين :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin \beta_n I_n'}{2\pi r_n} + V_{GA} \sin \vartheta = 0 \quad (12.143)$$

$$\frac{1}{2} \frac{r_{NA}}{\Delta\sigma} + \sum_{n=1}^N \frac{\cos \beta_n I_n'}{2\pi r_n} + V_{GA} \cos \vartheta = V_s \quad (12.144)$$

نطبق المعادلة (12.143) على $(n-1)$ نقطة اختبارية من محيط البروفيل ، والمعادلة (12.144) على نقطة الركود الخلفية S حيث $V_s = 0$ ، فنحصل على مجموعة معادلات مؤلفة من n معادلة خطية لحساب الجاهيل I_n' . حلها يلزم في الحالة العملية استخدام الحاسبات الالكترونية التي توفر ، بالمقارنة مع طرق الحساب العادية ، الجهد الحسابي الكبير .

بمعرفة I_n' يمكن حساب الجولان الكلي I' ومنه ، بموجب قانون كوتا - يوكوفسكي (8.150) ، قوة الرفع F_A ومعامل قوة الرفع c_A . ويتحدد من (12.144) توزيع السرعة V_s على طول محيط البروفيل وبمساعدة معادلة برنولي توزيع الضغط ومعامل الضغط c_p .

٩.٢.١٢ التجربة هير سبك بروفيلز مستقيم

تعرضنا في الفقرة (٦.٢٠٥.٨) في سياق استخراج قانون كوتا-يوكوفسكي

لحساب قوة الرفع الى أهمية دراسة الجريان عبر شبك بروفيلات مستقيم باعتبار أنه يمثل العنصر الاساسي لنقل القدرة في كل آلة جريان محورية .

إن الدراسات المنظمة العديدة للجريان عبر شبك بروفيلات تهدف إلى تحديد شبك البروفيلات الذي يكون عند ظروف تشغيل مطلوبة ذا مردود أفضل . هذا الهدف يتحقق بإيجاد العلاقة بين المتحولات الهندسية والايرو ديناميكية (أو الهيدروديناميكية) للشبك وذلك من خلال الخطوتين التاليتين :

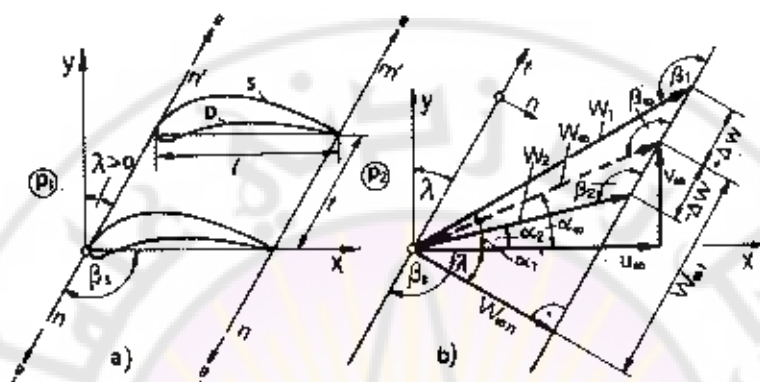
١ - حساب القيم الايرو ديناميكية للجريان المثالي الكعوني بما فيها توزيع الضغط حول البروفيل في الشبك .

٢ - حساب القيم المميزة للطبقة الحدية حول البروفيل من أجل تحديد مفايد الجريان .

إن المتحولات الهندسية لشبك بروفيلات مستو حسب الشكل (٢٢.١٢) هي :
بروفيل الربشة المحدد بـ (12.120) ، نسبة التقسيم t/l ، زاوية البروفيل β ،
أو زاوية تعاقب أو تدوير الشبك $\lambda = \beta + \frac{\pi}{2}$. ونضم المتحولات
الايرو ديناميكية : سرعة دخول الجريان الى الشبك W_1 ، والخروج منه W_2 ،
وذلك على مسافة كافية قبل وبعد الشبك ، زاوية الدخول β_1 ، والخروج β_2 ،
فرق الضغط الستاتيكي $\Delta p = p_2 - p_1$ ، توزيع الضغط حول البروفيل $p(x)$
والخسارة في قدرة الجريان التي تمثل في حالة سائل ثابت الحجم الفرق بين الضغط
الكلي ما قبل وما بعد الشبك $\Delta p_{tot} = p_{tot1} - p_{tot2}$.

في نظرية شبك البروفيلات هيز ، كما في نظرية الجناح الحامل (الفردي) ،
ثلاث مسائل أساسية للجريان . الأولى والثالثة منها مسألتان تصميميتان يطلب
فيها تصميم شبك البروفيلات ، أي إيجاد متحولاته الهندسية ، بحيث يؤمن تحت
ظروف تشغيل معينة أفضل القيم الأيرو - أو الهيدروديناميكية . بينما يطلب
في المسألة الاساسية الثانية تحديد المتحولات الايرو ديناميكية لشبك بروفيلات

متحولات الهندسية معلومة ، فهي إذن مسألة إعادة حساب وتطرح خاصة عند إجراء دراسات منظمة يتم فيها تغيير المتحولات الهندسية بهدف إيجاد شبك البروفيلات ذي المواصفات الايرو ديناميكية الافضلية .



الشكل ٢٢.١٢ : المتحولات الهندسية والايرو ديناميكية لشبك بروفيلات مستوي. (a) الشبك ، (b) مخطط السرعة . في حالة شبك مسرع (هتفة) تكون زاوية التعاقب $\lambda < 0$ ، وفي حالة شبك كابيح (مضخة) $\lambda > 0$.

إن حساب الجريان الكمو في عبر شبك بروفيلات على أساس طريقة النقاط الشاذة وبالنسبة للسائل الاساسية الثلاثة يعتمد أساساً على حساب الجريان حول جناح فردي مع أخذ تأثير الشبك بعين الاعتبار . هذا التأثير ينتج بالدرجة الأولى من واقع أن السرعة المحرزة في نقطة من محيط أحد بروفيلات الشبك تتألف من السرعة التي تعرضها النقاط الشاذة على محيط أو وتر البروفيل المعتبر ، مضافاً إليها السرعة المحرزة من النقاط الشاذة التي تعوض عن تأثير باقي البروفيلات . لهذا السبب لا يمكن ، كما في حالة البروفيل الفردي ، اعتبار مركبة السرعة المحرزة v, u صغيرة جداً بالمقارنة مع المركبة الافقية u للسرعة غير المشوشة $W_\infty = \frac{W_1 + W_2}{2}$ حسب (B.145) . كما ان المركبة الشاقولية v لا تكون عادة صغيرة بالمقارنة مع u . في حالة شبك يتألف من بروفيلات ذات سماكة وانحناء قليلين كالتي تتألف

منها خاصة ريش الضواغط، نستخدم طريقة عملية طورها شولنس [103] لحل المسألة الأساسية الأولى، وأخرى طورها شلشتنغ [104] لحل المسألة الثانية، التي سنورد فيما يلي أهم نتائجها. وقد بنيت كلتا الطريقتين على أساس نتائج نظرية الجناح الحامل الفردي التي عالجنها في (٧.٢.١٢).

نفرض أن بروفيل الشبك معلوم بموجب (12.120)، ولتكن أيضاً زاوية تدوير الشبك λ ونسبة تقسيمه t/l معطاة. إن تأثير الشبك على الجريان الانسحابي (غير المشوش) يؤدي عادة لتغيير اتجاه قيمة السرعة من W_1 قبل الشبك إلى W_2 بعد الشبك، وذلك نتيجة تحريض سرعة إضافية موازية لجبهة الشبك قيمتها $\pm \Delta w$ بحيث تكون:

$$W_1 = W_\infty + \Delta w; \quad W_2 = W_\infty - \Delta w. \quad (12.145)$$

وتقوم بين Δw والجولان حول البروفيل العلاقة:

$$\Delta w = l/2t, \quad (12.146)$$

التي يمكن بسهولة استخراجها من (8.146) باستخدام رموز الشكل (b-٢٢.١٢).

نستعيض عن تأثير كل بروفيل في الشبك بتوزيع ينابيع - بالوعات $q(x)$ وتوزيع أعاصير $\gamma(x)$ مزروعة على الوتر. هذه النقاط الشاذة تعرض حقلاً للسرعة بحسب بالنسبة لنقاط وتر البروفيل حسب [103] من العلاقة:

$$w(x,0) = u(x) - i v(x) = -\frac{e^{i\alpha}}{2t} \int_{x'=0}^l [q(x') + i \gamma(x')] \cot h \left(\pi \frac{x-x'}{l} e^{i\alpha} \right) dx', \quad (12.147)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$ (راجع (١٣))، x' نقطة متحولة، x نقطة اختبارية محددة.

في الحالة العامة لشبك مدرّج ($\lambda \neq 0$) لا يمكن حساب السرعة المحرّضة w بطرق تحليلية . لذا يجب استخدام الطرق العددية لحل التكامل في (12.147) على أساس أن نأخذ قيمته الكوشية الأساسية . ولكي يتم ذلك بسهولة نسبياً يلتزم شلشتنغ ، من أجل التخلص من النقطة الشاذة للتكامل عندما $x = x'$ ، شطر السرعة الكلية المحرّضة إلى قسم ناتج عن البروفيل الفردي المعتبر (دليل E) وقسم ناتج عن بقية بروفيلات الشبك ، التي سنسميها الشبك الباقي (دليل G) . وعليه نضع :

$$w = w_E + w_G \Rightarrow u = u_E + u_G ; v = v_E + v_G \quad (12.148)$$

وبتمييز السرعة المحرّضة من الأعاصير بالدليل γ والمحرّضة من الينابيع - البالوعات بالدليل q تصبح :

$$\left. \begin{aligned} u_E &= u_{qE} + u_{\gamma E} ; u_G = u_{qG} + u_{\gamma G} \\ v_E &= v_{qE} + v_{\gamma E} ; v_G = v_{qG} + v_{\gamma G} \end{aligned} \right\} \quad (12.149)$$

نختار من أجل $q(x)$ ، $\gamma(x)$ سلسلتى غلاووت (12.67) ، (12.85) ، مع اعتبار u_∞ مركبة W_∞ ونكتب في حالة الشبك أيضاً بالحدود الثلاثة الاولى منها . عندئذ تتعدد مركبتا السرعة المحرّضة u_E ، v_E بموجب (12.126) . أما المركبتان u_G ، v_G المحرّضتان من الشبك الباقي فتتجان بدلالة تابع تأثير عام نظامي ، أي لا يحتوي أية نقطة شاذة ، مما يسهل الحساب العددي لحقل السرعة w_G . على هذا الأساس تنتج العلاقات التالية المماثلة لـ (12.126) :

$$\left. \begin{aligned} u_{\gamma G} &= u_\infty [A_0 g_{\gamma 0} + A_1 g_{\gamma 1} + A_2 g_{\gamma 2}] , \\ v_{\gamma G} &= u_\infty [A_0 f_{\gamma 0} + A_1 f_{\gamma 1} + A_2 f_{\gamma 2}] , \\ u_{qG} &= u_\infty [B_0 g_{q0} + B_2 g_{q2} + B_3 g_{q3}] , \\ v_{qG} &= u_\infty [B_0 f_{q0} + B_2 f_{q2} + B_3 f_{q3}] , \end{aligned} \right\} \quad (12.150)$$

حيث تعني g_{qn} ، g_{qn} ($n = 0,1,2$; $m = 0,2,3$) مركبات المرحلة اللابعدية للشبك الباقي المخرضة من الاعاصير والينابيع والبالوعات باتجاه x ، وتعني f_{qn} ، f_{qn} المركبات في اتجاه y . هذه القيم تنتج بدلالة λ ، t/l ، x/l ، بما يسمح بحسابها مرة واحدة ودرج قيمها العددية في قوائم التناير الهابط Downward air ، انظر [104] ، أو تمثيلها بمخططات بيانية ، مما يعطي لهذه الطريقة الحسابية ميزة خاصة . وحيث أنه بموجب مبدأ التبادل بين الاعصار والنبع أو البالوعة تقوم العلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} g_{q0} &= -f_{r0} + 2f_{r1} ; g_{q2} = -f_{r2} ; g_{q3} = \dots f_{r3} \\ f_{q0} &= g_{r0} - 2g_{r1} ; f_{q2} = g_{r2} ; f_{q3} = g_{r3} \end{aligned} \right\} , (12.151)$$

لذلك يكفي حساب السرعات g_{qn} و f_{qn} فقط ، وبالنسبة لشبك كابح (مضخة : $\lambda > 0$) ، حيث تنتج القيم لشبك مسرع (عنفة : $\lambda < 0$) من العلاقات :

$$\left. \begin{aligned} g_{qn}(-\lambda) &= -g_{qn}(\lambda) ; g_{qm}(-\lambda) = g_{qm}(\lambda) \\ f_{qn}(-\lambda) &= f_{qn}(\lambda) ; f_{qm}(-\lambda) = -f_{qm}(\lambda) \end{aligned} \right\} . (12.152)$$

لحساب القيم الايروديناميكية لبروفيل الشبك وتوزع السرعة والضغط على محيطه يلزم الآن تحديد الامثال العددية A_n ، B_m للسلتين (12.67) و (12.85) وذلك بمساعدة شرطي الجريان الحركيين لتوزع الانحناء y_d وتوزع السماكة y_d . هذان الشرطان يكتبان في حالة الشبك بالصيغتين العمليتين :

$$y'_s \left(1 + \frac{u}{u_\infty} \right) = \frac{v_\infty}{u_\infty} + \frac{v}{u_\infty} = K_\infty + \frac{v}{u_\infty} , \quad \left(y'_s = \frac{dy_s}{dx} \right) , (12.153)$$

$$y'_d \left(1 + \frac{u}{u_\infty} \right) = \frac{1}{2} \frac{q(x)}{u_\infty} , \quad \left(y'_d = \frac{dy_d}{dx} \right) , (12.154)$$

حيث يمثل على غرار (12.129) :

$$K_x = \tan \alpha_x = v_x / u_x \quad (12.155)$$

معامل زاوية الورد الرمزية α_x التي تصنعها السرعة غير المشوشة W_x مع وتر البروفيل المنطبق على المحور x (قارن الشكل ١٢.٢٢ - b مع الشكل ١٥.٨).

في إطار هذه الطريقة التقريبية يكفي تحقيق شرطي الجريان الحركيين على الوتر بدلاً من خط الهيكل . عندئذ تنتج مركبتا السرعة المحرصة u و v الداخلتان في العلاقتين (12.153) و (12.154)، بسبب كون محصلة كل من v_{11} و u_{1E} حسب (12.126) معدومة على الوتر لوجود إشارتي $(\pm)$ من (12.148) و (12.149) بالصيغتين :

$$u = u_c = u_{qE} + u_{qG} + u_{yG} ; \quad v = v_c = v_{yE} + v_{yG} + v_{qG} . \quad (12.156)$$

نختار ثلاث نقاط اختبارية ($n = 3$) مواقعها محددة بموجب فرضية ثلاثة أرباع الوتر حسب (12.75) أو (12.76) ونطبق فيها (12.153) و (12.154) بعد إدخال (12.156) والاستعانة بالعلاقات (12.126) و (12.150) فنحصل على مجموعة ست معادلات خطية لتحديد الشوابت B_{1n}, A_{1n} :

$$\left. \begin{aligned} B_0 Q_{0\mu} + B_2 Q_{2\mu} + B_3 Q_{3\mu} &= y'_{d\mu} + A_0 S_{0\mu} + \\ &+ A_1 S_{1\mu} + A_2 S_{2\mu} ; \\ A_0 P_{0\mu} + A_1 P_{1\mu} + A_2 P_{2\mu} &= -K_x + y'_{s\mu} \\ &- [B_0 R_{0\mu} + B_2 R_{2\mu} + B_3 R_{3\mu}] , \end{aligned} \right\} \quad (12.157)$$

حيث $\mu = 1, 2, 3$ وأدخلت للاختصار الرموز التالية :

$$\left. \begin{aligned} Q_{0\mu} &= \cos \frac{\varphi_{\mu}^{(3)}}{2} - 2 \sin \varphi_{\mu}^{(3)} - y'_{d\mu} (g_{q0} + 2 \cos \varphi + 1) , \\ Q_{2\mu} &= \sin 2 \varphi_{\mu}^{(3)} - y'_{d\mu} (g_{q2} - \cos 2 \varphi) , \\ Q_{3\mu} &= \sin 3 \varphi_{\mu}^{(3)} - y'_{d\mu} (g_{q3} - \cos 3 \varphi) ; \end{aligned} \right\} \quad (12.158)$$

$$S_{0\mu} = y'_{d\mu} g_{Y_0} ; S_{1\mu} = y'_{d\mu} g_{Y_1} ; S_{2\mu} = y'_{d\mu} g_{Y_2} ; \quad (12.159)$$

$$P_{0\mu} = (f_{Y_0} - 1) - y'_{s\mu} g_{Y_0} ; P_{1\mu} = (f_{Y_1} + \cos \varphi) - y'_{s\mu} g_{Y_1} ;$$

$$P_{2\mu} = (f_{Y_2} + \cos 2 \varphi) - y'_{s\mu} g_{Y_2} ; \quad (12.160)$$

$$R_{0\mu} = f_{q_0} - y'_{s\mu} (g_{q_0} + 2 \cos \varphi + 1) ; R_{2\mu} = f_{q_2} - y'_{s\mu} (g_{q_2} - \cos 2 \varphi) ; R_{3\mu} = f_{q_3} - y'_{s\mu} (g_{q_3} - \cos 3 \varphi) . \quad (12.161)$$

بمساعدة قوائم التيار المابط نجد قيم $f_{Y\mu}, g_{Y\mu}$ (الجدول ١٠١٢) وحسب (12.151) قيم $f_{q\mu}, g_{q\mu}$. وللسهولة نظمت في [104] قائمة مستقلة للحدود المحصورة ضمن أقواس دائرية في العلاقات الأربعة أعلاه كتابع محصلة ميزت بالموثر (*) ، مثلاً $g_{q_0}^* = g_{q_0} + 2 \cos \varphi + 1$. وحيث أن قيم $y'_{s\mu}, y'_{d\mu}$ ، λ, φ معلومة كمتحولات هندسية للشبك المعطى ، فيمكن حل مجموعة

الجدول ١٠١٢ : نموذج من قوائم التيار المابط لحساب السرعة

المغرضة للشبك الباقي ، حسب [101] .

$\beta_3 = 120^\circ \quad \lambda = 30^\circ \quad \eta/l = 0,75$												$\beta_3 = 120^\circ \quad \lambda = 30^\circ \quad \eta/l = 0,5$											
φ	y'_{d0}	y'_{d1}	y'_{d2}	y'_{d3}	y'_{d4}	y'_{d5}	y'_{d6}	y'_{d7}	y'_{d8}	y'_{d9}	y'_{d10}	φ	y'_{d0}	y'_{d1}	y'_{d2}	y'_{d3}	y'_{d4}	y'_{d5}	y'_{d6}	y'_{d7}	y'_{d8}	y'_{d9}	y'_{d10}
0	1.00	0.98	-0.10	-0.37	0.75	0.80	-0.73	-0.58	0.91	-0.94		0	0.82	0.85	-0.05	-0.24	0.62	0.70	-0.73	-0.58	0.91	-0.94	
0.05	0.99	0.97	-0.10	-0.37	0.75	0.80	-0.73	-0.58	0.91	-0.94		0.05	0.82	0.85	-0.05	-0.24	0.62	0.70	-0.73	-0.58	0.91	-0.94	
0.1	0.98	0.95	-0.11	-0.38	0.74	0.79	-0.74	-0.59	0.90	-0.93		0.1	0.80	0.83	-0.06	-0.25	0.61	0.69	-0.74	-0.59	0.90	-0.93	
0.15	0.97	0.93	-0.11	-0.39	0.73	0.77	-0.75	-0.60	0.89	-0.92		0.15	0.79	0.82	-0.06	-0.26	0.60	0.68	-0.75	-0.60	0.89	-0.92	
0.2	0.96	0.91	-0.12	-0.40	0.72	0.75	-0.76	-0.61	0.88	-0.91		0.2	0.77	0.80	-0.07	-0.27	0.59	0.67	-0.76	-0.61	0.88	-0.91	
0.25	0.95	0.89	-0.13	-0.41	0.71	0.73	-0.77	-0.62	0.87	-0.90		0.25	0.75	0.78	-0.08	-0.28	0.58	0.66	-0.77	-0.62	0.87	-0.90	
0.3	0.94	0.87	-0.14	-0.42	0.70	0.71	-0.78	-0.63	0.86	-0.89		0.3	0.73	0.76	-0.09	-0.29	0.57	0.65	-0.78	-0.63	0.86	-0.89	
0.35	0.93	0.85	-0.15	-0.43	0.69	0.69	-0.79	-0.64	0.85	-0.88		0.35	0.71	0.74	-0.10	-0.30	0.56	0.64	-0.79	-0.64	0.85	-0.88	
0.4	0.92	0.83	-0.16	-0.44	0.68	0.67	-0.80	-0.65	0.84	-0.87		0.4	0.69	0.72	-0.11	-0.31	0.55	0.63	-0.80	-0.65	0.84	-0.87	
0.45	0.91	0.81	-0.17	-0.45	0.67	0.65	-0.81	-0.66	0.83	-0.86		0.45	0.67	0.70	-0.12	-0.32	0.54	0.62	-0.81	-0.66	0.83	-0.86	
0.5	0.90	0.80	-0.18	-0.46	0.66	0.63	-0.82	-0.67	0.82	-0.85		0.5	0.65	0.68	-0.13	-0.33	0.53	0.61	-0.82	-0.67	0.82	-0.85	
0.55	0.89	0.78	-0.19	-0.47	0.65	0.61	-0.83	-0.68	0.81	-0.84		0.55	0.63	0.66	-0.14	-0.34	0.52	0.60	-0.83	-0.68	0.81	-0.84	
0.6	0.88	0.76	-0.20	-0.48	0.64	0.59	-0.84	-0.69	0.80	-0.83		0.6	0.61	0.64	-0.15	-0.35	0.51	0.59	-0.84	-0.69	0.80	-0.83	
0.65	0.87	0.74	-0.21	-0.49	0.63	0.57	-0.85	-0.70	0.79	-0.82		0.65	0.59	0.62	-0.16	-0.36	0.50	0.58	-0.85	-0.70	0.79	-0.82	
0.7	0.86	0.72	-0.22	-0.50	0.62	0.55	-0.86	-0.71	0.78	-0.81		0.7	0.57	0.60	-0.17	-0.37	0.49	0.57	-0.86	-0.71	0.78	-0.81	
0.75	0.85	0.70	-0.23	-0.51	0.61	0.53	-0.87	-0.72	0.77	-0.80		0.75	0.55	0.58	-0.18	-0.38	0.48	0.56	-0.87	-0.72	0.77	-0.80	
0.8	0.84	0.68	-0.24	-0.52	0.60	0.51	-0.88	-0.73	0.76	-0.79		0.8	0.53	0.56	-0.19	-0.39	0.47	0.55	-0.88	-0.73	0.76	-0.79	
0.85	0.83	0.66	-0.25	-0.53	0.59	0.49	-0.89	-0.74	0.75	-0.78		0.85	0.51	0.54	-0.20	-0.40	0.46	0.54	-0.89	-0.74	0.75	-0.78	
0.9	0.82	0.64	-0.26	-0.54	0.58	0.47	-0.90	-0.75	0.74	-0.77		0.9	0.49	0.52	-0.21	-0.41	0.45	0.53	-0.90	-0.75	0.74	-0.77	
0.95	0.81	0.62	-0.27	-0.55	0.57	0.45	-0.91	-0.76	0.73	-0.76		0.95	0.47	0.50	-0.22	-0.42	0.44	0.52	-0.91	-0.76	0.73	-0.76	
1.0	0.80	0.60	-0.28	-0.56	0.56	0.43	-0.92	-0.77	0.72	-0.75		1.0	0.45	0.48	-0.23	-0.43	0.43	0.51	-0.92	-0.77	0.72	-0.75	

المعادلات (12.157) وحساب الثوابت B_m, A_n كتوابع خطية لمعامل زاوية الورد K_∞ . وينصح ، من أجل تجنب حل مجموعة المعادلات (12.157) كلما تغيرت زاوية الورد $\alpha_\infty = \arctan K_\infty$ ، عند إجراء دراسة منظمة فصل الثوابت B_m, A_n إلى جزء يتعلق بزاوية الورد وآخر لا يتعلق بها بموجب العلاقات :

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= A_{00} + K_\infty A_{0\infty} ; & B_0 &= B_{00} + K_\infty B_{0\infty} \\ A_2 &= A_{20} + K_\infty A_{2\infty} ; & B_2 &= B_{20} + K_\infty B_{2\infty} \\ A_3 &= A_{30} + K_\infty A_{3\infty} ; & B_3 &= B_{30} + K_\infty B_{3\infty} \end{aligned} \right\} . \quad (12.162)$$

بذلك نحصل من (12.157) ، مرة بوضع $K_\infty = 0$ ، وأخرى بوضع $K_\infty = 1$ ، على مجموعتي معادلات كل منها مؤلفة من ست معادلات نحصل بحلها على قيم B_{m0}, A_{n0} و $B_{m\infty}, A_{n\infty}$ ، وبمعرفة يمكن حساب كافة القيم الايروديناميكية لبروفيل الشبك .

قوة الرفع بالنسبة لواحدة عرض البروفيل المتعامدة مع اتجاه W_∞ (الشكل ١٥.٨) تنتج من قانون كوتا - يوكوفسكي (8.148) بوضع Γ حسب (12.146) بالصيغة :

$$F_A = 2 \rho W_\infty t \Delta w , \quad (12.163)$$

وبالتالي يكون معامل قوة الرفع :

$$c_A = \frac{F_A}{\frac{\rho}{2} W_\infty^2 l} = 4 \frac{\Delta w}{W_\infty} \frac{t}{l} . \quad (12.164)$$

بحساب Γ من (12.160) وإدخال A_1, A_0 حسب (12.162) نجد بمساعدة الشكل (b - ٢٢.١٢) :

$$u_A = 2 \pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) \cos \alpha_x = 2 \pi \left\{ (A_{00} + \frac{1}{2} A_{10}) \cos \alpha_x + (A_{0\infty} + \frac{1}{2} A_{1\infty}) \sin \alpha_x \right\} , \quad (12.165)$$

وذلك بدلاً من (12.134) بالنسبة للبروفيل الفردي .

ليكن n الاتجاه الناظمي على جبهة الشبك ، t الاتجاه المماسي عليها (الشكل ٢٢.١٢) فيكون بموجب شرط الاستمرار $W_{nt} = W_{n2} - W_{\infty n} = W_n$ ، ونحصل من مخطط السرعة باستخدام (12.164) على العلاقة الأساسية لنظرية شبك المقاطع التي تربط بين معامل قوة الرفع وزوايا اتجاه الجريان بالصيغة :

$$c_A = 2 \frac{t}{l} \sin \beta_{\infty} (\cot \beta_1 - \cot \beta_2) , \quad (12.166)$$

كما نحصل بسهولة على العلاقات التي تربط بين السرعات وزواياها بالصيغ :

$$-\cot \beta_1 = \frac{\tan \lambda + K_{\infty} + (1/\cos \lambda) (\Delta w/u_{\infty})}{1 - K_{\infty} \tan \lambda} , \quad (12.167)$$

$$-\cot \beta_2 = \frac{\tan \lambda + K_{\infty} - (1/\cos \lambda) (\Delta w/u_{\infty})}{1 - K_{\infty} \tan \lambda} , \quad (12.168)$$

$$-\cot \beta_{\infty} = -\frac{1}{2} (\cot \beta_1 + \cot \beta_2) = \frac{\tan \lambda + K_{\infty}}{1 - K_{\infty} \tan \lambda} , \quad (12.169)$$

حيث تكون بموجب (12.100) و (12.146) :

$$\frac{\Delta w}{u_{\infty}} = \frac{1}{2} \frac{l'}{u_{\infty} t} = \frac{\pi}{2} \frac{l}{t} \left[(A_{00} + \frac{1}{2} A_{10}) + K_{\infty} (A_{0\infty} + \frac{1}{2} A_{1\infty}) \right] , \quad (12.170)$$

من هذه العلاقات ، وبعد تحديد الأمثال A_{10} ، $A_{0\infty}$ ، $A_{1\infty}$ ، A_{00} ، يمكن حساب

زاوية الدخول β_1 والخروج β_2 بدلالة معامل زاوية الورود K_∞ ، ومن ثم نحصل بمساعدة معادلة الاستمرار والشكل (٢٢.١٢ - b) على نسبة السرعة

$$W_2/W_1 = \sin \beta_1 / \sin \beta_2 \quad (12.171)$$

ونحصل بمساعدة معادلة برنولي على نسبة الضغط وبالتالي هبوط الضغط Pressure drop المتحول داخل الشبك منسوباً إلى الضغط التحريكي لسرعة الدخول بالصيغة :

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho}{2} W_1^2} = 1 - \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \beta_2} \quad (12.172)$$

إن السرعة على محيط بروفييل الشبك تنتج على غرار (12.136) من السرعة على الوتر مضروبة بقلوب معامل ديفلس :

$$W_B(x) = \frac{1}{x_{nd}} V_C(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_d}{dx}\right)^2}} (u_\infty + u_{yE} + u_{yG} + u_{yE} + u_{yG}) \quad (12.173)$$

بادخال (12.126) و (12.150) في (12.173) ومراعاة (12.162) نحصل حسب [104] على الصيغة الافضلية للحساب العددي للسرعة بالشكل :

$$\begin{aligned} \frac{W_B(x)}{u_\infty} = \frac{1}{x_{nd}} \{ & 1 + B_{00} g_{q0}^* + B_{20} g_{q2}^* + B_{30} g_{q3}^* + K_\infty (B_{0x} g_{q0}^* + \\ & + B_{2x} g_{q2}^* + B_{3x} g_{q3}^*) + A_{00} g_{\gamma_0} + A_{10} g_{\gamma_1} + A_{20} g_{\gamma_2} + \\ & + K_\infty (A_{0x} g_{\gamma_0} + A_{1x} g_{\gamma_1} + A_{2x} g_{\gamma_2}) \pm [(A_{00} \cot \frac{\varphi}{2} + \\ & + A_{10} \sin \varphi + A_{20} \sin 2\varphi) + K_\infty (A_{0x} \cot \frac{\varphi}{2} + \\ & + A_{1x} \sin \varphi + A_{2x} \sin 2\varphi)] \} \quad (12.174) \end{aligned}$$

حيث g_{qni}^* مثل هنا أيضاً سرعات لا بعدية محصلة تكافئ الحدود المحصورة ضمن

أقواس دائرية في (12.158) ، ويمكن تحديدها بمساعدة قوائم التيار الهابط إلى جانب ϵ_{θ} . وتنتج السرعة على طرف السحب العلوي للبروفيل بأخذ إشارة (+) وعلى طرف الضغط السفلي بأخذ إشارة (-) . أما السرعة على أنف البروفيل فتنتج من (12.138) مع مراعاة (12.162) بالصيغة :

$$\left(\frac{W_B}{u_\infty} \right)_{\theta=0} = (A_{00} + K_{00} A_{0\infty}) \sqrt{\frac{2l}{r_N}} \quad (12.175)$$

بعد تحديد أمثال توزيع النقاط الشاذة $A_{nn,0}$ ، $B_{nn,0}$ يمكن إعطاء K_{00} قيماً مختلفة وحساب توزيع السرعة بالنسبة لزاوية ورود α_∞ متعددة . وينصح ، خاصة عند مقارنة النتائج الحسابية التجريبية ، أن ننسب السرعة إلى سرعة الدخول W_1 بدلاً من u_∞ ، ويتم ذلك بسهولة بمراعاة العلاقة :

$$W_1/u_\infty = (\cos \lambda - K_{00} \sin \lambda) / \sin \beta_1 \quad (12.176)$$

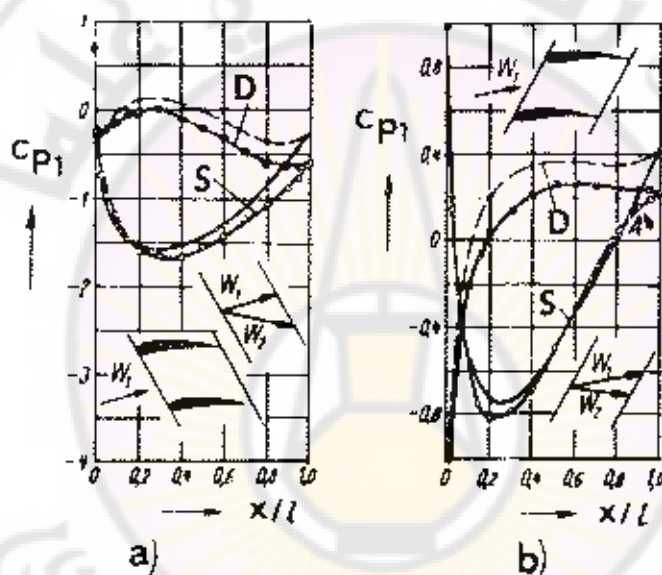
التي تنتج مباشرة من الشكل (١٢، ٢٢ - b) .

توزيع الضغط ينتج من معادلة برنولي ، حيث نجد معامل الضغط :

$$c_{p1} = \frac{p_n - p_1}{\frac{\rho}{2} W_1^2} = 1 - \left(\frac{W_n}{W_1} \right)^2 \quad (12.177)$$

من أجل تحديد دقة الطريقة التقريبية وبحال استخدامها حسب شلشتنغ في [104] أمثلة عديدة وقارن نتائج بعضها بنتائج طرق دقيقة رياضياً ، واعتمد لحساب 20 مثلاً منها البروفيل NACA 8410 (نسبة الانحناء: $t/l = 0,08$ ، نسبة السماكة: $d/l = 0,10$) من التصنيف الرابعي الأرقام للجنة الاستشارية الوطنية للطيران الأمريكية NACA = National Advisory Committee for Aeronautics ، وذلك لأن هذا البروفيل يصلح سواء في شبك كاييغ أو شبك مسرع ، ثم فورنت النتائج النظرية بالتجريبية بالنسبة لتوزيع الضغط . نتيجة لهذه الدراسة المنظمة

يتبين أن هذه الطريقة تسمح بتحديد تأثير المتحولات الهندسية للشبك ، سواء كعنفة أو كمضخة ، كل على حدة وتأثير زاوية الورد على القيم الايدوديناميكية ، وتعطى نتائج عددية مرضية جداً ، كما يؤكد ذلك كمثال الشكل (٢٣.١٢) خاصة لأن تأثير اللزوجة لم يراعَ في القيم النظرية. ويجدر التنويه أن حساب القيم الايدوديناميكية بما فيها توزيع الضغط على بروفييل الشبك مع أخذ ست قيم لزاوية الورد يستغرق بالنسبة لتدريب جيد على الآلات الحاسبة العادية من 20 إلى 25 ساعة.



الشكل ٢٣.١٢ : مقارنة بين القيم النظرية والتجريبية لتوزيع معامل الضغط على محيط بروفييل شبك مؤلف من بروفييلات NACA 8110 ، وذلك في حالة : شبك مسرع (عنفة) محدد بنسبة التقسيم $l/l = 0.75$ ، بزاوية البروفيل $\alpha = 60^\circ$ ، بزاوية الدخول $\alpha_1 = 15^\circ$ ؛ (شبك كابتح) مضخة محدد بنسبة التقسيم $l/l = 0.75$ ، بزاوية البروفيل $\alpha_s = 120^\circ$ ، بزاوية الدخول $\alpha_1 = 10^\circ$. الدوائر السوداء تمثل القيم المقاسة على طرف الضغط (1) ، والفارغة تلك على طرف السحب S ، وذلك عند عدد رينولدز $W_2/l = 0.10^5$. تأثير اللزوجة على شبك المضخة بالمقارنة مع شبك العنفة يبدو جلياً من تشوه انفصال الطبقة الحدودية في النقطة A ؛ حسب [104] .

- ٥٤٥ -

هناك طرق عديدة جداً لحل مسائل الجريان المثالي المختلفة عبر شبك بروفيلات مستوي، مثلاً [25] [138] [139] . وقد طور شاه Gh · Shah [140] على أساس طريقة شولتس [103] و شلشتنغ [104] طريقة عملية لحل المسألة الأساسية الثالثة التي تسمح بتحديد شكل بروفيل الشبك الأفضل ومثلثات السرعة إذا كان توزيع السرعة على محيط البروفيل معلوماً جزئياً وكان توزيع السرعة معطى .

أما لحساب الجريان عبر شبك من بروفيلات كبيرة السماكة والافتناء فقد وضع ريشتر W.Richter [141] طريقة عددية - بيانية تخفف الجهد الحسابي جداً وتعتبر توسيعاً لحالي استخدام طريقة شلشتنغ [104] . بينما استطاع إيزاي Isay [142] أن يستخرج رياضياً المعادلات التكاملية العامة الدقيقة للجريان عبر شبك بروفيلات اعتباطية الشكل وذلك باستبدال تأثير كل بروفيل بتوزيع اعاصير على محيطه (راجع ١٢-٢٠٨) . وعلى أساس هذه الطريقة طور مارتنزن E · Martensen [143] طريقة عملية لحساب القيم الايروديناميكية تعتمد أساساً على استخدام الحاسبات الالكترونية .

٣.١٢ دراسة الجريانات حول أجسام متناظرة دورانياً

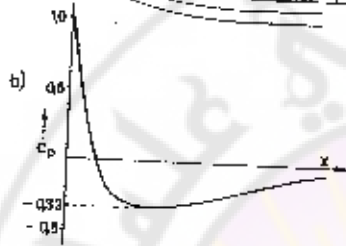
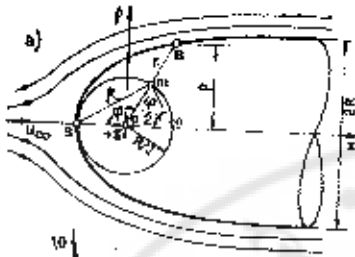
منوضح فيما يلي بأمثلة بسيطة امكانيات تطبيق طريقة النقاط الساكنة لحساب الجريانات الكونية حول أجسام فراغية . وقد اختيرت هذه الأمثلة ممثلة للحالة المستوية حتى تتمكن من المقارنة بين النتائج وتقتصر الترح .

١٠.٣.١٢ الجريان حول جسم نصف متناظر دورانياً

على غرار ما فعلنا في الفقرة (١٠.٢.١٢) نحصل على الجريان حول جسم نصف متناظر دورانياً من تضام جريان الانحائي باتجاه المحور التناظري x سرعته u_∞ مع نبس نقطي غزارته E ، الشكل (١٢-٢١) .

تابع الكمون الاجمالي للجريان ينتج من (10.24) و (11.17) بالصيغة :

$$\Phi_{int} = \Phi_r + \Phi_Q = u_\infty x - \frac{E}{4\pi} \frac{1}{r} , \quad (12.178)$$



الشكل ٢٤.١٢ : الجريان حول جسم
نصفى متناظر دورانياً. يكافئ تضام
جريان السحاي مع منبع نقطى. (a) صورة
الجريان ، (b) توزيع الضغط حول سطح
الجسم المكافئ لسطح التيار الصفري .

حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + \rho^2}$
نصف القطر المكافئ . كما نحصل
بماعدة الجدول (١.١١) على
تابع تيار ستوكس الاجمالي

$$\Psi_{St_{tot}} = \Psi_{St_T} + \Psi_{St_Q}$$

بذلك تنتج حسب (9.29) مركبات
السرعة للجريان الاجمالي في اتجاه
المحاور الديكارتية بالصيغ :

$$u = u_{\infty} + \frac{E}{4\pi} \frac{x}{r^3} ; v = \frac{E}{4\pi} \frac{y}{r^3} ;$$

$$w = \frac{E}{4\pi} \frac{z}{r^3} , \quad (12.179)$$

وباتجاه المحورين x, y للمستوي الزواىي تنتج مركبات السرعة :

$$v_x = u = u_{\infty} + \frac{E}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} , v_{\rho} = \frac{E}{4\pi} \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} . \quad (12.180)$$

نقطة الركود S تقع على الطرف السالب للمحور x وتحدد ، على غرار
(12.23) ، بالاحداني :

$$x_0 = - \sqrt{E/4\pi u_{\infty}} . \quad (12.181)$$

وحيث أن كامل غزارة النبع تخرج على بعد كبير من مركز النبع عبر دائرة
نصف قطرها R ، الشكل (٢٤.١٢) ، وبسرعة u_{∞} ، نجد :

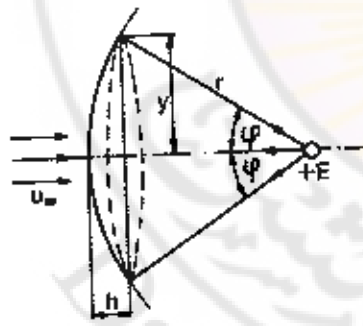
$$Q = E = u_{\infty} \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{E/\pi u_{\infty}} , \quad (12.182)$$

ويصبح بالتالي حسب (12.181) :

$$x_0 = -R/2 . \quad (12.183)$$

إن شكل الجسم النصفى المكافئ لسطح التيار الصفري الاجالى يتحدد بمساعدة الجدول (١٠.١١) بوضع $\psi_{stot} = 0$. وبما ان سطح التيار الصفري لا يسمح بنفوذ السائل عبره فإن شكله يتحدد أيضاً من الشرط القاضى بوجود تساوي التيار الحجمي للجريان الانسيابي Q_r الذي يعبر دائرة نصف قطرها y بسرعة u مع التيار الحجمي الجزئي للنبع Q_r المحصور ضمن مخروط دائري نصف زاوية انفتاحه φ وطول مولده r يساوي بعد نقطة ما من سطح الجسم النصفى عن مركز النبع ، والذي يعبر السطح الخارجي لقطعة الكرة الملتصقة على قاعدة المخروط . وعليه نجسد بمساعدة الشكل (٢٥.١٢) واستخدام العلاقة (12.182) :

$$Q_T = u_{\infty} \pi y^2 = Q_r = E \frac{\Delta \psi}{A} = u_{\infty} \pi R^2 \frac{2 \pi r h}{4 \pi r^2} .$$



وبما أن $y = r \sin \varphi$ و $h = r(1 - \cos \varphi)$ نتج
بوضع $\varphi = \rho$ معادلة نحدد شكل الجسم
النصفى في المستوي ρ, x بالصيغة :

$$\rho = R \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} = R \sin \frac{\varphi}{2} . \quad (12.184)$$

أو بالصيغة :

$$r = R \frac{\sin \varphi/2}{\sin \varphi} . \quad (12.185)$$

الشكل ٢٥.١٢ : لتحديد شكل
الجسم النصفى المتناظر دورانياً .

على أساس العلاقتين (12.183) و (12.184) يمكننا بطريقة بيانية صرفة تحديد شكل
الجسم النصفى . نرسم دائرة نصف قطرها $R/2$ ومركزها منطبق على مركز الإحداثيات O ،

الشكل (١٢-٢٤-١١) ، فتحدد على المحور x نقطة الركود S . نختار زاوية ما $\phi = \sin m = \frac{\varphi}{2}$ فتكون الزاوية ϕ ويكون بالتالي البعد $\overline{SM} = p$ الإحداثي الشاقولي للنقطة B من سطح الجسم النصفى التي تبعد عن المركز 0 بقدر نصف القطر المكافئ $\overline{OB} = r$ المار من m .

في الرسم العملي يستخدم ورق ميلتري ويقسم النصف العلوي للمستوي لمرآلات زاوية بحيث تتزايد ϕ بمعدل $\Delta\phi = 10^\circ$ ، مثلاً ، باتجاه دوران عقارب الساعة وبدءاً من نقطة الركود S ، ثم يوصل بين كافة النقاط B التي تم تحديدها ، وبين نظيراتها بالنسبة للمحور x فالحصل على الجسم النصفى كاملاً .

حساب السرعة $V_R = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ في نقطة ما B من محيط الجسم النصفى ، الشكل (١٢-٢٤-١٢) ، نضع في (12.180) ، باعتبار أن الزاوية ϕ تتجول مينا بدءاً من S ، $\rho = r \sin \phi$ ، $x = -r \cos \phi$ ، $r^2 = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ، ونستبدل E بقيمتها حسب (12.182) و r بقيمته حسب (12.185) فنجد باستخدام العلاقات المثلثية للزوايا وإجراء الإصلاح :

$$\left(\frac{V_R}{u_\infty}\right)^2 = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 3 \sin^4 \frac{\varphi}{2} . \quad (12.186)$$

بذلك ينتج توزيع معامل الضغط من معادلة برنولي :

$$c_p = \frac{p_B - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_R}{u_\infty}\right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 3 \sin^4 \frac{\varphi}{2} . \quad (12.187)$$

الشكل (١٢-٢٤-١٣) يبين توزيع الضغط المحسوب بموجب هذه العلاقة . ونحصل على قيمة الضغط الاضغري ونقطة تأثيره بوضع $dc_p/d\frac{\varphi}{2} = 0$ فينتج $c_{p_{min}} = -0.33$ من أجل $\varphi = 109^\circ$ ، وذلك بالمقارنة مع $c_{p_{min}} = -0.57$ في حالة الجسم النصفى المستوي ، الشكل (١٢-٢٤-١٤) .

باستبدال النبع ببالوعة نقطية في الشكل (١٢-٢٤-١٥) نحصل ، كما في

الحالة المستوية ، على جسم نصفي مفتوح للخلف ، وتطبق عليه من حيث المبدأ كافة العلاقات السابقة .

٢٠٣.١٢ التجريبات حول أجسام رانكين المغزلية

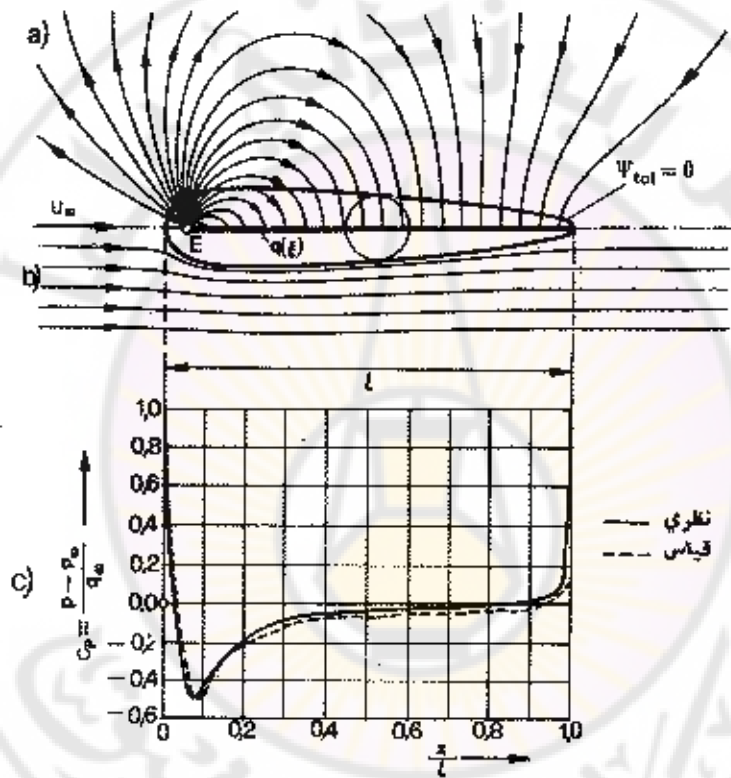
من تضام نبع نقطي وبالوعة نقطية من نفس الفزارة وتفضلها مسافة محددة e مع جريان منتظم أفقي بسرعة u_∞ نحصل كسطح تيار صفري إجمالي على جسم بشكل مجسم قطع ناقص نسبة أقطاره تقترب من الواحد كلما صغرت المسافة e ويمر من نقطي الركود $S_{1,2}$ للجريان الواقعتين على المحور x . أمثال هذا الجسم تعرف باسم أجسام رانكين المتناظرة دورانياً .

يمكن الحصول على أجسام جريان انسيابية مغزلية معروفة باسم أجسام خطوط التيار Stream line body ، لأن قسمها الخلفي رفيع وتبدي في الجريانات الحقيقية مقاومة صغيرة نسبياً ، إذا استبدلنا في الحالة السابقة البالوعة الأفرادية بعدد مناسب n من البالوعات النقطية الموزعة على المحور x والتي مجموع غزاراتها $\Sigma E_m = E$ تساوي غزارة التبع . كما يمكن استبدال التبع أيضاً بعدد معين m من الينابيع النقطية التي مجموع غزارتها $\Sigma E_m = E$.

في التطبيق العملي يتم اختيار توزيع خطي مستمر مناسب من الينابيع - البالوعات النقطية ، الشكل (١١.١١) ، بحيث تحقق شدتها الموضعية $q(\xi)$ شرط الاغلاق (11.32) ، حتى يكون سطح التيار الصفري الإجمالي الناتج عن تضامها مع الجريان الانسحابي مغلقاً . وكما كان الأمر في الحالة المستوية يحدد شرط الجريان الحركي العلاقة بين $q(\xi)$ وشكل الجسم . فإذا كان π نصف قطر دائرة مقطع الجسم فيكون حسب (12.60) :

$$q(\xi) = u_\infty \pi \frac{d(r_d^2)}{dx} \quad (12.188)$$

الشكل (٢٦.١٢) بين كمال جسماً مغزلياً بسيطاً نشأ كسطح تيار صفري إجمالي، $\Psi_{\text{Stot}} = 0$ ، من تضام منبع نقطي لأفرادي واقع في مركز الإحداثيات وتوزع مستمر منتظم من البالوعات النقطية التي تطبق نقطة بدايتها على مركز النبع وتبقى شدتها الموضعية ثابتة، $q(\xi) = -\frac{E}{l} = \text{const}$ ، بمراعاة ذلك



الشكل ٢٦.١٢ : الجريان حول جسم رافكين مغزلي، ناتج عن تضام منبع نقطي مع توزع خطي ثابت من البالوعات النقطية مع جريان السحائي أفقي. (a) صورة الجريان للنبع والبالوعات، (b) صورة الجريان الاجمالي حول الجسم، (c) مقارنة بين توزع الضغط المحسوب نظرياً والمقاس، حسب فورمان (انظر [9]).

وبمساعدة الجدول (١٠.١١) يمكننا تحديد تابع تيار ستوكس للجريان الناتج عن نظام النبع والبواعث فقط ، ومنه تتحدد صورة الجريبات في الشكل (٢٦.١٢ - a). كما يمكننا تحديد تابع تيار ستوكس الاجمالي كمجموع لتابع تيار الجريان الانسحابي والنبع وتوزع البواعث ، $\Psi_{st_{tot}} = \Psi_{st_T} + \Psi_{st_Q} + \Psi_{st_q}$ ، ومنه نحصل بوضع $\Psi_{st_{tot}} = 0$ على معادلة تحديد شكل الجسم المغزلي ، وبوضع $\Psi_{st_{tot}} = \text{const}$ نحصل على صورة الجريان حول هذا الجسم المبينة في الشكل (٢٦.١٢ - b) . بعدئذ نستعين بالعلاقة (11.12) لحساب توزيع السرعة ، وبمعادلة بوفولي لحساب توزيع الضغط المبين في الشكل (٢٦.١٢ - c) . ويتضح من مقارنة قيم معامل الضغط المحسوبة على هذا الاساس مع القيم المقاسة (التجريبية) تطابق هذه القيم مع بعضها البعض بشكل جيد ، باستثناء المنطقة القريبة من الحافة الخلفية للجسم نتيجة تأثير قوى الاحتكاك .

إن طريقة التنابع - البواعث ، التي وضع أسسها دانكين ، قد طورها فورمان G. Fuhrmann [14] واستخدمها عملياً في مطلع هذا القرن لحساب الجريان حول المناطيد الهوائية المسيرة . وتستخدم اليوم بنجاح أيضاً لحساب أجسام السفن والطائرات Fuselage [18] .

٣.٣.١٢ الجريان حول كرة وحساب كتلتها الزيروروفينا ميكية

بطريقة مماثلة تماماً لحساب الجريبات الانسحابي الايجولاني حول اسطوانة دائرية ، الفقرة (٣.٣.١٢) ، يمكننا حساب الجريان حول كرة على أساس أنه يكافئ نظام جريان انسحابي أفقي سرعته u مع ثنائية نقطية عزمها M ومركزها يقع في مركز الاحداثيات ومحورها منطبق على المحور x ، الذي هو أيضاً محور تناظر .

للحصول على تابع الكمون وتابع تيار ستوكس للجريان الاجمالي نستعين بالجدول (١٠.١١) فنجد :

$$\Phi_{tot} = u_{\infty} x + \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r^3} = u_{\infty} x + \frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + \varphi^2)^{3/2}}, \quad (12.189)$$

$$\Psi'_{st_{tot}} = u_{\infty} \frac{\varphi^2}{2} - \frac{M}{4\pi} \frac{\varphi^2}{r^3} = u_{\infty} \frac{\varphi^2}{2} - \frac{M}{4\pi} \frac{r^2}{(x^2 + \varphi^2)^{3/2}}. \quad (12.190)$$

بذلك نحصل على معادلة خط التيار الصفري في المستوي الزواحي ρx (أو $y x$) بالصيغة :

$$\Psi'_{st_{tot}} = 0 \Rightarrow \varphi = 0; r = R = \sqrt{\frac{M}{2\pi u_{\infty}}} = \text{const.} \quad (12.191)$$

إذن فإن سطح التيار الصفري يتألف من المحور x السالب والموجب ومن كرة نصف قطرها R تحصر داخلها كامل جريان الثابتة التغطية ويمر من نقطتي الركود $S_{1,2}$ المحددتين بالاحداثيتين $x_{01,2} = \pm R$ وتكون صورة الجريان في المستوي الزواحي مكافئة تماماً للشكل (٩٠١٢) .

إن تابع الكمون للجريان حول الكرة ينتج باستبدال M في (12.189) بقيمتها حسب (12.191) ووضع $x = r \cos \varphi$ بالصيغة :

$$\Phi_{sp} = u_{\infty} x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right) = u_{\infty} \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2}\right) \cos \varphi. \quad (12.192)$$

إن السرعة على محيط الكرة ليس لها إلا مركبة مماسية V_{φ} ، لأن المركبة القطرية $V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$ من أجل $r = R$ ، بسبب أنه لا يمكن أن ينفذ السائل عبر سطح الكرة . وبما أنه يكفي حساب توزيع السرعة على محيط دائرة مقطع الكرة الزواحي تنتج من (12.192) المركبة المماسية للسرعة في جوار الكرة :

$$V_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{sp}}{\partial \varphi} = -u_{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right) \sin \varphi. \quad (12.193)$$

ومنها نجد السرعة على سطح الكرة :

$$V_{sp} = |V_{sp}| = V_{\infty} (r - R) = \frac{3}{2} u_{\infty} \sin \varphi : (0 \leq \varphi \leq \pi) . \quad (12.194)$$

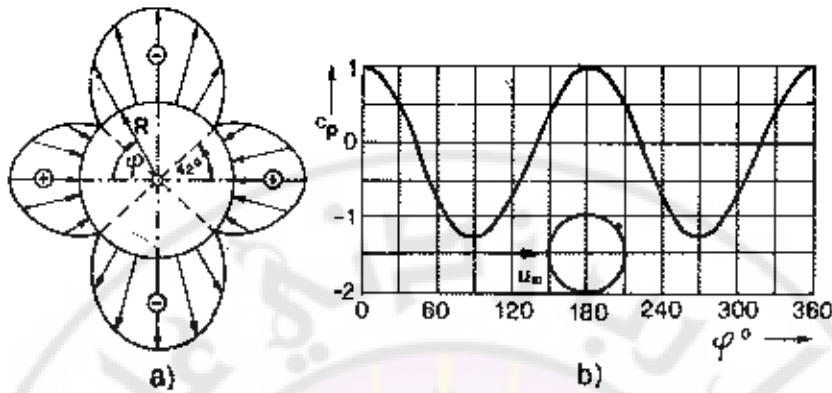
V_{sp} تنعدم إذن من أجل $\varphi = \pi, \varphi = 0$ ، أي في نقطتي الركود $S_{1,2}$ ،
وتبلغ بالنسبة الكامل حقل الجريان قيمة أعظمية $V_{sp_{max}} = \frac{3}{2} u_{\infty}$ من أجل
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ و $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ، فهي إذن أصغر من السرعة الأعظمية على محيط الاسطوانة
التي تنتج من (12.41) .

توزع الضغط على سطح الكرة ينتج بإدخال (12.194) في معادلة برنولي
بالصيغة :

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} u_{\infty}^2} = 1 - 9 \sin^2 \varphi . \quad (12.195)$$

في الشكل (٢٧.١٢) رسم توزيع معامل الضغط المحسوب بموجب هذه
العلاقة ، وفيه يتبين أن $c_p = 0$ عندما تكون في النصف العلوي $\varphi = 42^\circ, 138^\circ$.
ويبلغ c_p قيمته الأصغرية ، $c_{p_{min}} = -\frac{9}{4}$ ، من أجل $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ، فهي أصغر
من قيمة معامل الضغط الاصفري في حالة الاسطوانة (انظر الشكل (١٠.١٢)) .

من الشكل (٢٧.١٢) نستنتج أيضاً كما في حالة الاسطوانة ، أن الكرة
لا تتعرض في جريان أنسيماي منتظم مثالي لأية قوة رفع أو مقاومة ، ولكنها
تتلقى طبعاً في جريان حقيقي مقاومة كبيرة أو صغيرة تبعاً للزوجة الـ
وطبيعة الجريان . وقد اتخذها الباحثون لبساطة شكلها مثلاً مفضلاً لاستغنى
قانون المقاومة .



الشكل ١٢.١٢ : توزيع الضغط على سطح كرة في جريان مثالي منتظم مسجلاً في الاتجاه القطري (a) ، وعلى المحيط المنشور لدائرة المقطع الزوالي (b) .

نفرض الآن أن الكرة تتحرك في سائل ساكن عديم اللزوجة ولا نهائي الامتداد حركة مستقيمة غير منتظمة باتجاه x وبتأرجع مقداره dU/dt ، نتيجة تطبيق قوى ضغط صدمية . إن الجريان المطلق حول الكرة يكافيء ، كما رأينا في حالة الاسطوانة (انظر ص ٩٣) ، ثنائية نقطية مركزها ينطبق على مركز الكرة ، وبالتالي فإن تابع الكمون لهذا الجريان :

$$\Phi_{sp_{abs}} = -\frac{U}{2} \times \frac{R^3}{r^3} = -\frac{U}{2} \frac{R^3}{r^3} \cos \varphi , \quad (12.196)$$

وتبلغ قيمته على سطح الكرة نفسها :

$$\Phi_{sp_{abs}}(r=R) = -\frac{U}{2} R \cos \varphi .$$

إن السرعة الناعمية على سطح الكرة تنتج من (12.196) بالصيغة :

$$V_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{sp_{abs}}}{\partial r} = U \frac{R^3}{r^3} \cos \varphi \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{sp_{abs}}}{\partial r}(r=R) = U \cos \varphi .$$

وتبلغ مساحة عنصر من السطح الخارجي للكرة حسب الشكل (٢٨.١٢) :

$$dA = 2\pi R \sin \varphi \cdot R d\varphi .$$

بإدخال هذه العلاقات في (12.14) ولإجراء التكامل بين 0 و π مع ملاحظة

$$\text{أن } \int \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{\cos^3 \varphi}{3}$$

$$m_h = \frac{2}{3} \rho \pi R^3 = \frac{1}{2} \rho V_{sp} = \frac{1}{2} m_{en} , \quad (12.197)$$

حيث V_{sp} حجم الكرة . هذا يعني أن الكتلة الهيدروديناميكية للكرة

تساوي نصف كتلة السائل المزاج ، كما

سبقت الإشارة لذلك . ونكون بموجب

(9.41) مقاومة التمارع التي تتعرض لها

الكرة :

$$F_{wb} = \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \frac{dU}{dt} . \quad (12.198)$$

الشكل ٢٨.١٢ : لحساب الكتلة

الهيدروديناميكية ومقاومة

التسارع للكرة.

إن توزيع الضغط حول الكرة في حالة

الحركة غير المنتظمة يختلف طبعاً عن توزيع

الضغط المبين في الشكل (٢٧.١٢) ، ونحصل

عليه بمساعدة الشكل (٢٨.١٢) واتباع خطوات مماثلة للخطوات المتبعة في حالة

الاسطوانة (ص ٤٩٤) بالصيغة :

$$p_h = \frac{\rho}{2} R \frac{dU}{dt} \cos \varphi . \quad (12.199)$$

p_h يتطابق شكلاً بالنسبة لمقطع زوايا الكرة التوزيع المبين في الشكل (١١.١٢) .

٤.١٢ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١٢ ، أوضح المنطقات الرياضية والفيزيائية التي تعتمد عليها طريقة النقاط الشاذة .

س ٢.١٢ ، الجريانات الكونية البسيطة تعتبر « أحجار بناء » لتشييد أجسام جريان السبائية . أوضح مضمون هذه الجملة ، وفكر بإمكانية تسمح بالتأكيد منها تجريبياً .

س ٣.١٢ ، ماهي الأسس والفرضيات التي تعتمد عليها طريقة برنيانوم - اكerman؟ استخرج النتائج المدونة في الشكل (١٧.١٢) .

س ٤.١٢ ، اشرح أسس طريقة شلشتنغ لحساب الجريان حول جناح حامل قليل السبائك والغشاء .

س ٥.١٢ ، ارمم تغير معامل قوة الرفع بدلالة زاوية الورد ، $\alpha = \alpha(x)$ ، بالنسبة لصفيحة رقيقة ولبروفيل محدود السبائك ، وذلك في حالتي وجود وعدم وجود إغناء .

س ٦.١٢ ، أوضح أهمية حساب توزيع الضغط على محيط بروفيل شبك ، وبين الصعوبات الرياضية التي تعترض ذلك وكيفية حلها .

ت ١.١٢ ، في جريان انسيابي منتظم مرعته u_∞ - يوجد نبع وبالقوة من نفس الشدة ، $\pm E$ ، مركزاهما الواقعة على المحور x بيمدان من مركز الإحداثيات نفس المسافة ، $\pm \frac{a}{2}$. برهن أن الجريان الإجمالي يكافئ الجريان حول جسم مستوي.

أحليجي بشكل قطع ناقص نصف قطره a و b يتحددان بدلالة $\frac{u_\infty E}{2E}$. أحسب السرعة في نقطتي النهاية للمحور $2b$.

الحل . من (10.24) مع ملاحظة اتجاه u_∞ و (10.54) ينتج تابع التيار الإجمالي بالصيغة :

$$\psi_{tot} = \dots u_\infty y + \frac{E}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) = -u_\infty y + \frac{E}{2\pi} \alpha \quad (11)$$

حيث φ_1 ، φ_2 ، α الزوايا المحددة في الشكل (٨.١٠) . ولكن بالنسبة لنقطة ما (y, x) من حقل الجريان فإن :

$$\tan \varphi_1 = \frac{y}{x + \frac{a}{2}} \quad , \quad \tan \varphi_2 = \frac{y}{x - \frac{a}{2}} \quad ,$$

وبالتالي ينتج باستخدام العلاقات الثلاثية :

$$\tan \alpha = \tan (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1}{1 + \tan \varphi_2 \tan \varphi_1} = \frac{ey}{y^2 + x^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} .$$

بذلك أصبح (a) :

$$\psi_{tot} = -u_{\infty} y + \frac{E}{2\pi} \arctan \frac{ey}{y^2 + x^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} . \quad (b)$$

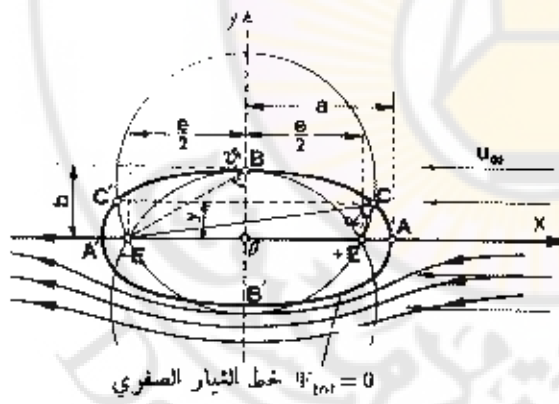
معادلة خط التيار الصفري نحصل عليها بوضع $\psi_{tot} = 0$ فننتج من (a) العلاقة :

$$y = \frac{E}{2\pi u_{\infty}} \alpha \quad (c)$$

ومن (b) العلاقة :

$$y^2 + x^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 = ey \cot \left(\frac{2\pi u_{\infty}}{E} y \right) \quad (d)$$

وهي معادلة منحنى مغلق بشكل قطع ناقص نصف قطره الكبير a والصغير b ، الشكل (ت ١.١٢) ، ويحصر في داخله كامل جريان النبع والبالوعة بحيث تكون دراسة الجريان حوله وكأنه جسم صلب .



الشكل ت ١.١٢

إن شكل خط التيار الصفري يمكن تحديده ببياناً بانواع الخطوط الميعة في الفقرة (٢.١.١٢) التي بوضعها الشكل (ت ١.١٢) بالنسبة للنقطة () ونظيرتها () : نرسم كخط تيار لجريان النبع والبالوعة دائرة مركزها يقع على المحور y ونمر من مركزي النبع والبالوعة . ثم نرسم خطاً للتيار موازياً للمحور x

ويبعد عنه المسافة y المحددة بالعلاقة (c) ، فبتقاطع مع الدائرة في النقطة C (و/ أو) C' التي تمثل رأس الزاوية المحيطية α ، وبالتالي نقطة من خط التيار الصفري .

إن نصف القطر b يتحدد بتعيين موقع النقطة B التي تمر منها دائرة مماسية لخط التيار الصفري بحيث تصبح حسب الشكل (ت ١.١٢) الزاوية المحيطية $\alpha = 2\theta$.
 عندئذ ننتج من (ع) بوضع $y = b$ العلاقة :

$$\tan \theta = \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\pi u_{\infty} b}{4E} = \frac{e}{2b} \quad (e)$$

نضع في (e) $b' = \frac{b}{e/2}$ ، $k = \frac{\pi u_{\infty} e}{2E}$ ، فنجد العلاقة :

$$b' = \cot(kb') \quad (f)$$

نفس العلاقة ننتج من (d) بوضع $x = 0$ ، $y = b$:

إن طول نصف القطر a ينتج من الترتيب الفاضي بكون النقطة $A(x, 0)$ (أو A') تمثل نقطة ركود ، وبالتالي يجب أن تكون السرعة فيها :

$$u(x, 0) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_A = -u_{\infty} + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{1}{a - 2/e} - \frac{1}{a + 2/e} \right) = 0 \quad .$$

وبعد الإبراج وإدخال نصف القطر اللابعدي $a' = \frac{a}{e/2}$ والمعامل k نجد العلاقة :

$$a'^2 = 1 + 1/k \quad (g)$$

بذلك يكون نصف القطر a' و b' قد تحددنا بدلالة المعامل $k = \frac{\pi u_{\infty} e}{2E}$. ونستنتج من (f) و (g) أنه عند معرفة u_{∞} وغزارة E محددين ينقص a' و يزداد b' كلما صغرت المسافة e بين النبع والبالوعة ، الشكل (١.١٢) .

في النقطة B (أو B') تبلغ السرعة قيمة أعظمية (والضغط قيمة أصغر) ؛ ذلك أن سرعتين الجزئيتين الناتجتين عن النبع والبالوعة تصبحان موازيتين للمحور x - وبالتالي من اتجاه u_{∞} . وعليه ننتج قيمة السرعة في B باستخدام رموز الشكل (ت ١.١٢) ونفرض r_B بعد B عن مركز النبع أو البالوعة :

$$V_B = -u_{\infty} - 2 \frac{E}{2\pi r_B} \sin \theta = -u_{\infty} - \frac{Ee}{2\pi \left[b^2 + \left(\frac{e}{2} \right)^2 \right]}$$

أو بصياغة أخرى بعد إدخال المعامل k ونصف القطر اللابعدي b' :

$$V_B = -u_{\infty} \left[1 + \frac{1}{k(1+b'^2)} \right] \quad (h)$$

1.0	1.006
0.95	1.005
0.90	1.005
0.80	1.004
0.70	1.003
0.60	1.002
0.50	1.001
0.40	1.000
0.30	1.000
0.25	1.000
0.20	1.001
0.15	1.003
0.10	1.011
0.05	1.031
0.025	1.076
0	∞
$\frac{x}{l} = 5$	$z_{H,d}$

جدول ١ :

ت ٢.١٢ ، بالنسبة للبروفيل المتناظر NACA 0010 والمحدد شكلاً حسب [104] بموجب تصنيف NACA الرباعي الأرقام بمعادلة توزيع السماكة :

$$y_{H,d} = 0.1485 \sqrt{\frac{x}{l}} - 0.0630 \frac{x}{l} + 0.1758 \frac{x^2}{l^2} + 0.1422 \frac{x^3}{l^3} - 0.0308 \frac{x^4}{l^4} \quad (a)$$

حيث $\frac{x}{l} = \frac{x}{l}$ ، يطلب حساب توزيع الضغط على محيطه إذا وجد في جريان انسيابي منتظم مواز لوتر البروفيل الأمامي مرفعه $y_{H,d}$ (أنظر الشكل ١٢ ١٥) .

الحل : المطلوب هنا حل المسألة الأساسية الثانية لبروفيل تدفق الانحناء ذي سماكة قليلة في جريان متناظر . وعليه يمكن بموجب (٥.٢.١٢) التعويض عن تأثير البروفيل بتوزيع من البنائيع-البالوعات بخارم مطابقاً لسلسلة غلاورت (12.67) . ونجري الحساب العملي لتوزيع السرعة والضغط وفقاً لطريقة شلشتنغ الموضحة في الفقرة (٧.٢.١٢) مع اعتبار الانحناء $y_s = 0$.

لحساب الأمثال B_0 ، B_2 ، B_4 لسلسلة غلاورت (12.67) نحدد أولاً ميل المماس على محيط البروفيل ، حيث ينتج من (a) :

$$y'_{H,d} = \frac{dy_{H,d}}{dx} = 0.07425 \sqrt{\frac{x}{l}} - 0.0630 - 0.3316 \frac{x}{l} + 0.4206 \frac{x^2}{l^2} - 0.2013 \frac{x^3}{l^3} \quad (b)$$

بذلك يمكن تنظيم الجدول (١) التضمن معامسل ريفلس $y'_{H,d} = \sqrt{1 + y'^2_{H,d}}$ لحساب توزيع السرعة .

وتنتج قيم ميل المماس على محيط البروفيل في النقاط الاختبارية الثلاثة التي نختارها بموجب (12.75) كما في الجدول (2) .

x	$\frac{x}{l}$	$y'_{H,d}$
1	$3/12 = 0.025$	0.0210
2	$7/12 = 0.583$	-0.0660
3	$11/12 = 0.917$	-0.1055

جدول ٢ :

ندخل هذه القيم في المجموعة الأولى من المعادلات (12.133) فنحصل على ثلاث معادلات خطية لحساب الأمثال B_0 ، B_2 ، B_3 ، وبعلمنا ينتج :

$$B_0 = 0,0716 ; B_2 = 0,0242 ; B_3 = - 0,0260 . \quad (a)$$

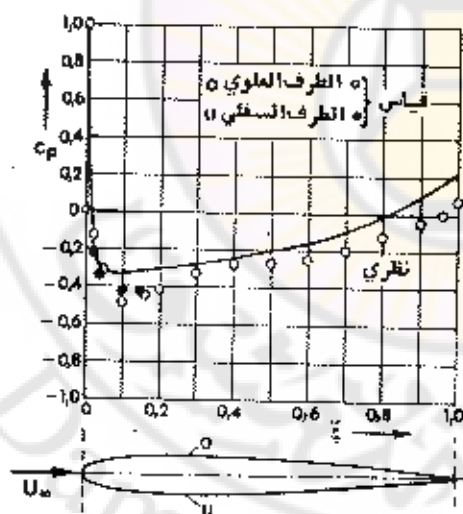
بإدخال هذه القيم في (12.67) نحصل على توزيع البناييع - الباليوعات بالصيغة :

$$q(\varphi) = 2\alpha_0 \left[0,0716 \left(\cot \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi \right) + 0,0242 \sin 2\varphi - 0,0260 \sin 3\varphi \right] . \quad (b)$$

بذلك تصبح مركبتا السرعة $v_{||} + u_{||}$ بحسب (12.69) و (12.70) عده قامة في كل نقطة من وتر البروفيل $x, t = \frac{\varphi}{2}$ التي نختار مواقعها حسب الجدول (1) ، وذلك بعد حساب القيم المقابلة للتوابع المثلثية $\cot \frac{\varphi}{2}$ ، $\sin \varphi$ ، $\sin 2\varphi$ ، $\sin 3\varphi$ ، $\cos \varphi$ بمساعدة العلاقة (12.65) والعلاقات المثلثية المعروفة .

توزيع السرعة على محيط البروفيل ينتج من (12.73) بالصيغة :

$$\frac{V_B}{U_\infty} = \frac{1}{z_{\text{rel}}(\xi)} [1 + 0,0716 (1 + 2 \cos \varphi) - 0,0242 \cos 2\varphi - 0,0260 \cos 3\varphi] , \quad (c)$$



الشكل ٢٠١٢ : مقارنة بين توزيع الضغط حول البروفيل المتناظر NACA 0010 المحسوب نظرياً والمقاس في جريان متناظر بدون زاوية ورود، حسب [17] .

وينتج توزيع معامل الضغط C_p من (12.74) ، فإذا حسبنا قيم C_p في مجموعة النقاط ξ المحددة في الجدول (1) نحصل على توزيع الضغط النظري كمنحنى مستمر في الشكل (ت ٢٠١٢) ، الذي يتضمن أيضاً قيم C_p المقاسة على الطرف العلوي والسفلي للبروفيل ، ويتبين من تطابق القيم النظرية والمقاسة ، باستثناء منطقة صغيرة في جوار الحافة الخلفية للجناح ، صحة طريقة الحساب المتبعة . أما الفرق بين القيم المقاسة والمحسوبة فهو ناتج عن تأثير الزوجة .

ت ٤.١٢ ، يراد قياس الضغط الساكني قبل سرعة محور دولاب آلة جريان محورية .
على أي بعد x من المركز يجب وضع مسبار الضغط إذا كان قطر السرعة $D = 100 \text{ mm}$
ومعامل الضغط c_p يجب ألا يتجاوز 10% ؟

الحل : إن الجريان حول سرعة المحور يمكن اعتباره مكافئاً للجريان حول جسم
نصفه متناظر دورانياً (الشكل ٢٤.١٢) ، وبالتالي ناشئاً عن تضام ذبج قطبي شدته
 E مع جريان أفقي منتظم سرعته u_∞ . في نقطة القياس M الواقعة على محور التناظر x
السالب تبلغ السرعة حسب (12.180) مع ملاحظة أن إشارة x سالبة و $\rho = 0$:

$$u_M = u_\infty \left(1 - \frac{E}{4\pi x^2} \right) \quad (a)$$

باعتبار E قيمتها حسب (12.182) بعد وضع $D = 2R$ نجد بعد الاصلاح :

$$u_M = u_\infty \left(1 - \frac{D^2}{16 x^2} \right) \quad (b)$$

نطبق معادلة برنولي بين M ونقطة على بعد كبير من المركز فنجد معامل الضغط :

$$c_p = \frac{p_M - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u_M}{u_\infty} \right)^2 \quad (c)$$

بإدخال (b) في (c) وملاحظة أنه في نقطة القياس M التي تبعد x_M عند المركز يجب أن
يكون $c_p = \frac{1}{100}$ نجد :

$$\frac{1}{100} = 1 - \left[1 - \frac{D^2}{16 x_M^2} \right]^2 \Rightarrow x^4 - 12,5 D^2 x^2 + 0,30 D^4 = 0 .$$

نحل هذه المعادلة وإدخال القيم العددية ينتج :

$$x_M \approx 355 \text{ mm} .$$

ت ٤.١٣ : إن طريقة الإنذار الهيدروليكي المبكر تعتمد على قياس تغير
الضغط الناتج عن حركة السائل حول جسم يقترب من مركز القياس .

نعتبر كرة نصف قطرها $R = 600 \text{ mm}$ تنحرك في مواد ساكنة عديم الاحتكاك
بسرعة $u_\infty = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. على المحور x ثبت في النقطة M مقياس براندل التصميم بحيث يبدأ
تسجيل تغير الضغط عندما يكون الضغط التبريكي $q_M = 1 \text{ mm WC}$. عند أية

مسافة x_M من مركز الكرة يبدأ جهاز الضغط بالقياس إذا اعتبرنا كثافة الهواء $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ ؟

الحل : إن المراقب الواقف في نقطة القياس M يسجل الجريان المطلق حول الكرة المكافئ، لثنائية فراغية تابع كونها حسب (11.25) :

$$\Phi_{\text{Spous}} = \Phi_0 = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (a)$$

عندما يبدأ مقياس براندل بتسجيل تغير الضغط تكون السرعة u_M على المحور x قد بلغت قيمة بحيث يكون :

$$q_M = \frac{\rho}{2} u_M^2 = 1 \text{ mmWC} = 9,80 \text{ N/m}^2 \quad (b)$$

إن السرعة على المحور x تنتج باشتقاق (a) جزئياً بالنسبة لـ x ووضع $y = z = 0$:

$$u(y = z = 0) = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^3} \quad (c)$$

في نقطة الركود الامامية عند $x = R$ تكون $u(y = z = 0) = u_\infty$ ، وبالتالي ينتج من (c) عزم الثنائية $M = -2\pi u_\infty R^2$ وذلك السرعة :

$$u(y = z = 0) = u_\infty \left(\frac{R}{x}\right)^3 \quad (d)$$

بوضع $x_M = x$ ، يصبح ضغط الركود في نقطة القياس M حسب (b) :

$$q_M = \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left(\frac{R}{x_M}\right)^6 \quad (e)$$

وتكون المسافة بين M ومركز الكرة :

$$x_M = R \sqrt[3]{u_\infty / u_M} \quad (f)$$

بإدخال القيم العددية نجد حسب (d) :

$$u_M = \sqrt{\frac{2 q_M}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,80}{1,225}} = 4 \text{ m/s} ,$$

ونجد حسب (f) :

$$x_M = 0,6 \sqrt[3]{200/4} = 2,208 \text{ m} .$$

* * *

١٣ طريقة التوابيع المركبة لحساب الجبرائات الكمونية المستوية

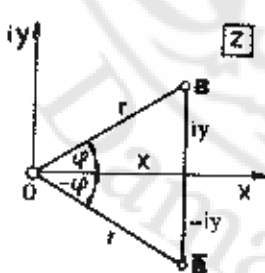
نستغل مزايا نظرية التوابيع المركبة Theory of complex function في طرق عملية متعددة لحساب الجبرائات الكمونية المستوية فقط . لذلك فمن المفيد أولاً أن نعيد الذاكرة ، وباختصار شديد ، بعض الخصائص الرياضية لهذه التوابيع .

١.١٣ العدد المركب وتبليها

بدلاً من تحديد موقع نقطة في المستوي الديكارتي x, y بواسطة العددين الحقيقيين x و y يمكن تحديده بمساعدة عدد واحد فقط يطلق عليه العدد المركب Complex number ويعرف بالعلاقة :

$$z = \sqrt{+1} x + \sqrt{-1} y = x + i y , \quad (13.1)$$

حيث تمثل $\sqrt{+1} = 1$ قيمة واحدة الأعداد الحقيقية Real numbers و $\sqrt{-1} = i$ قيمة واحدة الأعداد التخيلية Imaginary numbers . وعليه يطلق على المحور x الذي يحتوي كافة الأعداد الحقيقية اسم المحور الحقيقي ، وعلى المحور y الحاوي على كافة الأعداد التخيلية اسم المحور التخيلي . ويتشكل من هذين المحورين المتعامدين المستوي المركب Complex plane أو «مستوي غوص العددي» ،



نسبة للعالم الألماني غوص ، الشكل (١.١٣) (في بعض المصادر العربية يسمى هذا المستوي أيضاً «الساحة العقدية» .

كل عدد مركب z يمثل في المستوي المركب نقطة معينة B ، وتكون القيمة المطلقة Modulus لهذا العدد ، $|z|$ ، مساوية للقيمة

الشكل ١.١٣ : المستوي المركب حسب غوص .

المطلقة للشعاع $r = \vec{OB}$ (ويطلق عليها البعض طويقة العدد المركب) . أما الزاوية القطبية φ فتتمثل الأزاوية الزاوية Argument (ويطلق عليها البعض العمدة !) للعدد المركب . ونجد بسهولة من الشكل (١٠١٣) أن :

$$\left. \begin{aligned} r &= |r| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} , \\ \varphi &= \arg z = \arctan \frac{y}{x} . \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

باستخدام الاحداثين القطبيين r, φ ووضع $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ تأخذ العلاقة (13.1) ، المعروفة باسم الصيغة الجبرية للعدد المركب ، الشكل :

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi} , \quad (13.3)$$

ونكون قد حصلنا على الصيغة المثلثية والصيغة الأسية للعدد المركب .

كل عدد مركب ، أو تابع للاحداثي المركب $F = f(z)$ ، يتألف من جزء حقيقي $Re(z)$ ، ومن جزء تخيلي $Im(z)$ ، Imaginary part . ويتساوى عددان مركبان إذا تساوى جزأهما الحقيقيان وجزأهما التخيليان مع بعضها البعض . أما إذا تساوى الجزآن الحقيقيان لعددتين مركبتين z و $\bar{z}$ مع بعضها البعض واختلفت جزأهما التخيليان بالإشارة فقط ، فيطلق على $\bar{z}$ العدد المركب المرافق للعدد z Conjugate complex number ، ويكون :

$$\bar{z} = x - i y = r (\cos \varphi - i \sin \varphi) = r e^{-i\varphi} . \quad (13.4)$$

$\bar{z}$ يمثل في المستوي $[z]$ نقطة $\bar{B}$ هي الصورة المرآوية (المطابقة) للنقطة B ، الشكل (١٠١٣) . ويمكن بالنسبة لكل عددتين مركبتين مترافقتين استنتاج العلاقات التالية :

$$|z| = |\bar{z}| = r = \sqrt{z \bar{z}} , \quad (13.5)$$

$$\operatorname{Re}(z) = x = \frac{\bar{z} + z}{2} ; \operatorname{Im}(z) = y = i \frac{\bar{z} - z}{2} . \quad (13.6)$$

إذا ضربنا العدد المركب $z = r e^{i\varphi}$ بواحدة الأعداد التخيلية i التي تمثل حسب التعاريف السابقة شعاعاً قيمته المطلقة 1 واحد e وإزاخته الزاوية $\frac{\pi}{2}$ (إنهاء y) نجد :

$$z \cdot i = r e^{i\varphi} \cdot 1 e^{i\frac{\pi}{2}} = r e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} . \quad (13.7)$$

هذا يعني أن عملية الضرب هذه تكافئ تدوير الشعاع المكافئ $\vec{OB}$ زاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$.

إن العمليات الحسابية الأربعة تجري بالنسبة للإعسداد المركبة بنفس الطريقة التي تجري بها هذه العمليات في حالة ذوات الجدين مع ملاحظة أن $i^2 = -1$. في حالة تقسيم عدد مركب على آخر فإنه بالإمكان التخلص بسهولة من الجزء التخيلي للمخرج إذا ضربنا صورة ومخرج الكسر بالعدد المركب المرافق للمخرج ولاحظنا أن $\bar{z} \cdot z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ أي أن المخرج يصبح عدداً حقيقياً .

إن رفع عدد مركب للقوة m يتم بموجب قانون مويفري A. de Moivre (1667 - 1754) :

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^m = r^m [\cos m\varphi + i \sin m\varphi] , \quad (13.8)$$

ويفضل أحياناً استخدام الصيغة الأسية :

$$[r e^{i\varphi}]^m = r^m e^{im\varphi} . \quad (13.9)$$

m يمكن أن يكون عدداً صحيحاً أو كسرياً موجباً أو سالباً ، وعليه فإن استخراج الجذر m لعدد مركب يتم أيضاً حسب قانون مويفري :

$$\sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{m} \right) . \quad (13.10)$$

كل تابع لعدد مركب متحول يتألف من جزء حقيقي وجزء تخيلي :

$$F(z) = F(x + iy) = Re(x, y) + i Im(x, y). \quad (13.11)$$

نسمي التابع $F(z)$ تابعاً تحليلياً Analytical function في نقطة أو في ساحة وحيدة الترابط إذا كان هذا التابع قابلاً للاشتقاق في النقطة المعنية ، أو في أية نقطة من الساحة ، بمعنى أن قيمة المشتق $\frac{dF(z)}{dz}$ لا تتعلق باتجاه وقيمة العنصر dz على هذا الأساس يمكن البرهان (راجع [84]) أن :

الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $F(z)$ تحليلياً هو أن يحقق كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي معادلة لابلاس التفاضلية ، $\Delta Re = 0, \Delta Im = 0$ ، وتربط عندئذ بينهما معادلتا كوشي - ويان التفاضليتان :

$$\frac{\partial Re}{\partial x} = \frac{\partial Im}{\partial y} ; \frac{\partial Re}{\partial y} = - \frac{\partial Im}{\partial x} . \quad (13.12)$$

٢.١٣ تابع الكمون المركب والسرعة المركبة

بما أن تابع الكمون Φ وتابع التيار Ψ لجريان مستو يحققان بموجب (10.13) معادلتا كوشي - ويان التفاضليتين وكل منهما يحقق معادلة لابلاس التفاضلية ينتج على أساس (13.11) و (13.12) أن التابع :

$$F(z) = \Phi(x, y) + i \Psi(x, y) \quad (13.13)$$

هو تابع تحليلي يطلق عليه تابع الجريان Flow function ، وغالباً تابع الكمون المركب Complex potential function . من جهة أخرى يمكن اعتبار الجزء الحقيقي لكل تابع تحليلي $F(z)$ ، تابع كمون سرعة ،

، $Im(x, y) \equiv \Psi(x, y)$ ، والجزء التخيلي تابع تيار ، $Re(x, y) \equiv \Phi(x, y)$ لجريان كمومي مستوي بغض النظر فيما إذا كان لهذا الجريان أهمية تطبيقية أم لا .

إن النتيجة السابقة تتيح لنا إمكانية الاستفادة من التوابع التحليلية المتعددة المعروفة في نظرية التوابع . فإذا فصلنا الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي لأي تابع تحليلي نحصل مباشرة على تابع الكمون Φ وتابع التيار Ψ لجريان كمومي مستوي تنطبق عليه كافة العلاقات المستخرجة في الفقرة (١٠) .

كل تابع تحليلي يخضع لمبدأ التبادل (ص ٤١٨) ، فإذا ضربنا طرفي العلاقة (13.13) بـ i ، فنكون بموجب (13.7) قد دورنا محاور الاحداثيات 90° ، ويكون بالتالي التابع :

$$\hat{F}(z) = iF(z) = i(\Phi + i\Psi) = i\Phi - \Psi \equiv \hat{\Phi} + i\hat{\Psi} \quad (13.14)$$

أيضاً تابعاً تحليلياً جزؤه الحقيقي والتخيلي يكافئان على التوالي الجزء التخيلي والحقيقي للتابع $F(z)$. هذا يعني أن كل تابع تحليلي يسمع من حيث المبدأ بتمثيل نوعين من الجريانات الكمونية المستوية . ولعلكن السؤال يتركز في التطبيق العملي على إيجاد التابع التحليلي الذي يعطي صورة للجريان تحقق الشروط الحدية للمسألة المطروحة .

كذلك يمكن استخدام مبدأ التزامم للحصول على توابع جريان أكثر شمولاً بواسطة الجمع الخطي لعدد من توابع الجريان البسيطة :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_n(z) . \quad (13.15)$$

نكون الآن التفاضل التام لتابع الجريان المركب المعطى بالعلاقة (13.13) فنجد :

$$dF(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(z)}{\partial y} dy = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] dx + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] dy$$

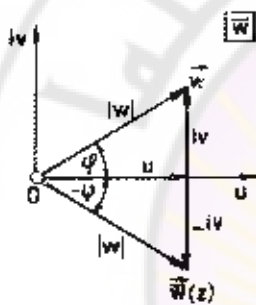
بإدخال العلاقة (10.13) ومراعاة العلاقة (13.1) يصبح :

$$dF(z) = (u - iv) dx + (u + iv) dy = (u - iv) dz .$$

بذلك نتيج بموجب (13.4) و (13.5) العلاقة الهامة :

$$\boxed{\frac{dF(z)}{dz} = u - iv = \bar{w}(z) = |w| e^{-i\varphi}} \quad (13.16)$$

التي تنص على ما يلي ، الشكل (٢٠١٣) :



الكسر التفاضلي لتابع الكمون المركب $w(z)$ بالنسبة للمتحول المركب z يساوي القيمة المركبة المرافقة للسرعة المركبة $w = u + iv$.

$\bar{w}(z)$ إذت ، التي تمثل الصورة المرافقة للسرعة المركبة w بالنسبة للمحور الحقيقي x ، هي تابع تحليلي للمتحول المركب z .

الشكل ٢٠١٣ : السرعة المركبة.

بمعرفة تابع الجريان يمكن بسهولة تحديد حقل السرعة وقيمة شعاع السرعة في كل نقطة من حقل الجريان حيث نجد بموجب (13.5) :

$$|w| = |\bar{w}| = \left| \frac{dF(z)}{dz} \right| = u^2 + v^2 = V \quad (13.17)$$

وبمعرفة توزيع السرعة يمكن بعدئذ مساعدة معادلة بروفولي تحديد توزيع الضغط.

٣.١٣ أمثلة عن توزيع الكمون المركبة البسيطة

سنختار بعض الأمثلة لجريانات بسيطة سبقت دراستها في الفقرة (١٠) بمساعدة تابع الكمون وتابع التيار الحقيقيين وذلك لتبيان ميزات طريقة التوزيع المركبة، التي تتجلى

يكون الجزء الحقيقي والتخيلي لتابع الجريان المركب يحققان حكماً مضافة لا يهتد
التفاضلية . وعليه فالخطوة الأولى لهذه الطريقة هي فصل الجزء الحقيقي لتابع الجريان
المركب عن الجزء التخيلي ومن ثم تحديد حقل السرعة وصورة الجريان حول بعض
خطوط التيار المتميزة التي نختارها ونفرض أنها قد فصلت .

١٣.١٣ الجريان الانسيابي المنتظم

لتعتبر التابع التحليلي الخطي :

$$F_T(z) = cz ; \quad c = c_1 + ic_2 , \quad (13.18)$$

حيث $c_{1,2}$ عدداً حقيقيين . نفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي لهذا التابع فينتج :

$$F_T(z) = (c_1 + ic_2)(x + iy) = (c_1x - c_2y) + i(c_2x + c_1y) .$$

وعليه يكون بموجب (13.18) تابع الكمون وتابع التيار :

$$\Phi_T(x, y) = c_1x - c_2y ; \quad \Psi_T(x, y) = c_2x + c_1y . \quad (13.19)$$

إن خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ تمثلها حزمة من المستقيمات المتوازية المائلة
على المحور x بزاوية ثابتة ، وتشكل مع خطوط الكمون التي تمثلها أيضاً حزمة
مستقيمات متوازية شبكاً من الخطوط المتعامدة .

حقل السرعة يتحدد من (13.16) بالعلاقة :

$$\bar{w} = u - iv = dF/dz = c \Rightarrow V = |\bar{w}| = |c| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \text{const} . \quad (13.20)$$

التابع $F_T(z) = cz$ يمثل إذن جرياناً انسيابياً منتظماً مائلاً على المحور x
بزاوية ثابتة ، (انظر ١٣.١٠) . فإذا كان الجريان المنتظم موازياً للمحور x
وبسرعة u يصبح $F_T(z) = uz$ ، وعندما يكون موازياً للمحور y وبسرعة
 v يصبح : $F_T(z) = -ivz$.

٢.٣.١٣ النبع والبالوعة والوصار الكهربي

نعتبر التابع التحليلي :

$$F_Q(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z , \quad (13.21)$$

حيث E عدد ثابت حقيقي موجب أو سالب . لتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نستبدل z بموجب (13.3) فنجد :

$$F_Q(z) = \Phi_Q + i \Psi_Q = \frac{E}{2\pi} \ln r + i \frac{E}{2\pi} \varphi . \quad (13.22)$$

وعليه يكون تابع الكمون وتابع التيار :

$$\Phi_Q = \frac{E}{2\pi} \ln r \quad ; \quad \Psi_Q = \frac{E}{2\pi} \varphi , \quad (13.23)$$

وذلك بالتطابق مع (10.26) و (10.29) . إذن فإن تابع الجريان المركب $F_Q(z)$ يمثل نبعا مستويا في حالة $E > 0$ ، وبالوعة مستوية في حالة $E < 0$ ، حيث تعبر E عن شدة النبع أو البالوعة (راجع ٢.٣.١٠) :
اضرب طرفي (13.21) بـ $-i$ ونستبدل E بـ I' فنجد :

$$F_{I'}(z) = -i F_Q(z) = -i \frac{I'}{2\pi} \ln z . \quad (13.24)$$

بتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون وتابع التيار :

$$\Phi_{I'} = \frac{I'}{2\pi} \varphi \quad ; \quad \Psi_{I'} = -\frac{I'}{2\pi} \ln z . \quad (13.25)$$

وذلك بالتطابق مع (10.34) و (10.35) . إذن فإن تابع الجريان المركب

$F_n(z)$ يمثل إعصاراً كمونياً جولانه r بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة
(انظر ٣.٣.١٠).

٣.٣.١٤ التناظر المستوية والجريان حول اسطوانة

باستخدام مبدأ التضاف يمكننا الآن المجهول على تابع الجريان المركب لنبع
وبالوعة من نفس القزارة. فإذا فرضنا أن النبع واقع في مركز الإحداثيات ،
 $z = 0$ ، والبالوعة تقع على المحور الحقيقي السالب وعلى بعد e من النبع فإن
تابع الجريان المركب للجريان الناتج عنها يأخذ الصيغة :

$$F_{in}(z) = \frac{E}{2\pi} [\ln z - \ln(z + e)] \quad (13.26)$$

بتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون وتابع
التيار للجريان الكلي بصيغتين مطابقتين للعلاقين (10.53) و (10.54) ،
وتتعد صورة خطوط التيار كما في الشكل (٨-١٠) .

نجعل الآن البالوعة تقترب من النبع بحيث يبقى الجداء $M = Ee - E \Delta x$
ذا قيمة ثابتة حتى في حالة تنامي البعد بين النبع والبالوعة إلى الصفر . عندئذ
ينتج من (13.26) :

$$F_D(z) = \frac{M}{2\pi} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln z - \ln(z + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{M}{2\pi} \frac{d}{dz} \ln z ,$$

$$F_D(z) = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (13.27)$$

بتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون
وتابع التيار :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_D &= -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \\ \Psi_D &= \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r} \end{aligned} \right\} , \quad (13.28)$$

وذلك بالتطابق مع العلاقتين (10.65) و (10.67) . إذن فان تابع الجريان $F_D(z)$ يمثل ثنائية مستوية محورها منطبق على المحور الحقيقي x وعزمها M (راجع ٤.٣.١٠ وخاصة الشكل ١١.١٠) . بالنسبة لثنائية محورها منطبق على المحور التخيلي y ينتج تابع الجريان بسهولة من العلاقة :

$$\hat{F}_D(z) = i F_D(z) = -i \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} . \quad (13.29)$$

إن الجريان الانسحابي اللاجولاني ، $\Gamma = 0$ ، حول اسطوانة دائرية نصف قطرها R ينتج ، كما نعلم ، من تضام ثنائية مستوية مع جريان منتظم . فإذا فرضنا الجريان الانسحابي باتجاه $-x$ وسرعته u_∞ نجد باستخدام (13.18) و (13.27) ووضع عزم الثنائية $M = 2\pi u_\infty R^2$ ، حسب (12.36) ، تابع الكمون المركب للجريان اللاجولاني حول الاسطوانة بالصيغة :

$$F_C(z) = -u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) . \quad (13.30)$$

بتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون Φ_C وتابع التيار Ψ_C بصيغتين مطابقتين للعلاقتين (12.37) و (12.38) مع عكس إشارة u_∞ فقط ، وتكون بالتالي صورة الجريان مطابقة للشكل (٩.١٢) إذا عكسنا فيه اتجاه خطوط التيار .

للمحصل على حقل السرعة نستعين بالعلاقة (13.16) فنجد بسهولة :

$$\bar{w}(z) = u - i v = -u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) . \quad (13.31)$$

بفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي فتنتج مركبتا السرعة u و v بصيغتين مطابقتين للعلاقين المحددين في (12.39) مع عكس إشارة u فقط .
على أساس ما تقدم يمكن أيضاً حساب الجريان الجولاني ، $F \neq 0$ ، حول اسطوانة دائرية . فإذا أضفنا تابع الكمون المركب للعناصر الكموني حسب (13.24) إلى (13.30) ينتج تابع الجريان :

$$F_{GR}(z) = -u_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{F}{2\pi} \ln z . \quad (13.32)$$

إن الجزء الحقيقي لهذا التابع يمثل تابع الكمون Φ_{GR} ، والجزء التخيلي تابع التيار Ψ_{GR} . ونحصل على صورة للجريان مطابقة للشكل (١٢.١٢) إذا عكسنا فيه اتجاه خطوط التيار . كما نحصل مباشرة على حقل السرعة باشتقاق F_{GR} بالنسبة لـ z حسب (13.16) .

٤.٣.١٣ الجريان ضمن الفراغ الموائى لجريان مستويين

لنعتبر التابع التحليلي

$$F(z) = \frac{a}{n} z^n , \quad (13.33)$$

حيث a و n أعداد حقيقية . نفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي لهذا التابع باستخدام العلاقة (13.13) وقانون مويفوي (13.9) فنجد :

$$F(z) = \Phi + i\Psi = \frac{a}{n} r^n e^{in\varphi} = \frac{a}{n} r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) ,$$

وينتج بالتالي تابع الكمون :

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{a}{n} r^n \cos n\varphi , \quad (13.34)$$

وتابع التيار :

$$\Psi(r, \varphi) = \frac{a}{n} r^n \sin n\varphi \quad (13.35)$$

معادلة خطوط التيار للجريان تنتج بوضع $\Psi = \text{const}$ بالصيغة :

$$\frac{a}{n} r^n \sin n\varphi = \text{const} = C \quad (13.36)$$

فإذا حددنا قيمتي الثابتين a و n نحصل على حزمة من خطوط التيار بإيجاد العلاقة بين r و φ وأعطاه الثابت C قيمة مختلفة. وبصورة خاصة تنتج معادلة خط التيار الصفري من (13.35) بوضع $\Psi = 0$ فنجد :

$$\sin n\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13.37)$$



إذن فإن المستقيمت المارة من مركز الإحداثيات والمائلة بزوايا

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n} \dots$$

تمثل خطوط تيار صفرية. فإذا اعتبرناها تمثل آثار جدران صلبة مستوية بحدائق خط تقاطع كل اثنين منها مستوي الشكل عمودياً نحصل بحسب قيمة n العددية على جريانات مختلفة محصورة في المجال الزاوي بين جدارين مستويين. الشكل

الشكل ١٣.٣، أمثلة عن الجريانات ضمن الفراغ الزاوي لجدارين مستويين تنتج من أجل قيم مختلفة للثابتين a و n في تابع الجريان المركب حسب (13.33). في المثال (b) فقط اختيار $a > 0$ وفي الأمثلة الباقية اختيار $a < 0$.

(١٣.٣) بين أمثلة متعددة عن هذه الجريانات، حيث أختير الثابت $a > 0$ بالنسبة للمثال (a) واختير $a < 0$.

الأمثلة الباقية. وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $n = 2$ ، $a > 0$ ، نحصل على صورة الجريان المبينة في الشكل (ت. ١٠.٢) ، ص ٥٣ ، إذا أخذنا نصف المستوى العلوي فقط. والجدير بالملاحظة أنه في حالة $n = \frac{2}{3}$ نحصل على الجريان حول زاوية قائمة ، الشكل (٣.١٣ - ٥) ، وعندما $n = \frac{1}{2}$ نحصل على الجريان حول الطرف الحاد لصفحة مستوية ، الشكل (٣.١٣ - ٤) ، وفي كلتي الحالتين تبلغ السرعة على الطرف الحاد قيمة لا نهائية (نظرياً) .

٤.١٣ قانون بلازيوس - تشابليجن لحساب محصلة قوى

الضغط وعزمها

نعتبر جسماً اسطوانياً اعتباطي الشكل واقعاً في جريان انسحابي مثالي سرعته V_∞ ، ونسأل عن محصلة قوى الضغط المؤثرة على هذا الجسم وعن عزمها

بالنسبة لمحور مختاره . لقد أجاب عن هذا السؤال لأول مرة عام 1910 كل

من العالم الألماني بلازيوس H. Blasius

في دراسته وطرق نظرية التوابيع

المركبة في الهيدروديناميك (انظر

[17]) والعالم الروسي تشابليجن

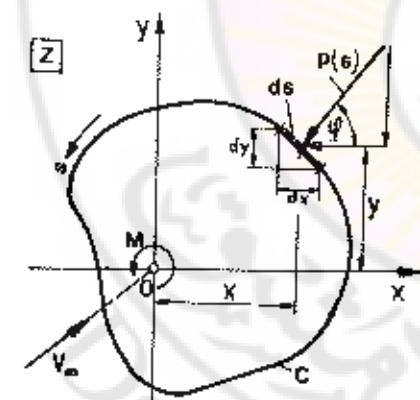
S. A. Tschaplygin في دراسته حول

الضغط المؤثر على جسم في جريان

انسحابي مستوي ، (انظر [16]) .

نفرض أن مقطع الجسم المحدد

بالمتمني C منطبق على المستوى $[z]$ ،



الشكل ٤.١٣ : لاستخراج قانون

بلازيوس - تشابليجن لحساب محصلة قوى

الضغط وعزمها .

الشكل (٤.١٣) . ليكن ds عنصراً خطياً من C ، $p(s)$ الضغط المؤثر عليه ،

ولتكن F_p محصلة قوى الضغط بالنسبة لواحده عرض الجسم . فنحلل F_p إلى مركبتين F_{px} ، F_{py} .

بفرض s الإحداثي المنحني المتجهول على طول محيط الجسم بعكس دوران عقارب الساعة فيكون يرموز الشكل (٤.١٣) : $dx = -ds \sin \varphi$ و $dy = ds \cos \varphi$. بذلك تصبح المركبتان الجزئيتان لمحصلة قوى الضغط المؤثرة على ds :

$$\left. \begin{aligned} dF_{px} &= -p ds \cos \varphi = -p dy \\ dF_{py} &= -p ds \sin \varphi = p dx \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

بإجراء التكامل المطلق لهاتين العلاقتين نجد :

$$F_{px} = - \oint_{(C)} p dy \quad ; \quad F_{py} = \oint_{(C)} p dx \quad (13.39)$$

حل هذين التكاملين بحسب الضغط بمساعدة معادلة برنولي فينتج بالنسبة لنقطة من محيط الجسم ونقطة في الجريان غير المشوش حيث يسود الضغط الكلي الثابت p_{tot} :

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 = p_{tot} = C_{tp} \Rightarrow p = C_{tp} - \frac{\rho}{2} V^2 \quad (13.40)$$

من جهة أخرى ، ولأن الخط المحد للجسم C يمثل خطاً للتيار ، تكون السرعة على الجسم مركبة مماسية فقط V_s . فإذا كان Φ تابع الكمون ، Ψ تابع التيار ، $F(z) = \Phi + i\Psi$ تابع الجريان المركب ، فتطبق على محيط الجسم C العلاقة :

$$V = V_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{d}{ds} (\Phi + i\Psi) = \frac{dF(z)}{ds} \quad (\Psi = \text{const}) \quad (13.41)$$

بإدخال القوة المركبة المرافقة $\bar{F}_p$ وملاحظة أنه بسبب $C_{tp} = \text{const}$ يكون $\oint C_{tp} dy = \oint C_{tp} dx = 0$ تنتج من (13.39) ، (13.40) و (13.41) العلاقة :

$$\begin{aligned}\bar{F}_p = F_{px} - i F_{py} &= - \oint_{(C)} p dy - i \oint_{(C)} p dx = \\ &= - \frac{\rho}{2} \oint_{(C)} \left[\left(\frac{dF(z)}{ds} \right)^2 (i dx + dy) \right] . \quad (13.42)\end{aligned}$$

ولكن بموجب (13.1) و (13.4) فإن $dz = dx + i dy$ و $d\bar{z} = dx - i dy$ وبالتالي يكون : $dy + i dx = i d\bar{z}$ من جهة أخرى ينتج من (13.5) ومن الشكل (١٠١٣) :

$$|dz|^2 = (ds)^2 = dx^2 + dy^2 = dz \cdot d\bar{z} \Rightarrow d\bar{z} = \frac{(ds)^2}{dz} .$$

بذلك تأخذ (13.42) بعد إصلاح بسيط الصيغة التالية :

$$\bar{F}_p = F_{px} - i F_{py} = \frac{\rho}{2} i \oint \left(\frac{dF(z)}{dz} \right)^2 dz = \frac{\rho}{2} i \oint [\bar{w}(z)]^2 dz , \quad (13.43)$$

حيث $\bar{w}(z) = u - iv$ السرعة المركبة المرافقة بموجب (13.16) . هذه العلاقة معروفة باسم قانون بلازيوس - تشابليجين الأول .

لتحديد نقطة تأثير المحصلة $|F_p| = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2}$ ، أو كما تسمى في الايرو ديناميك مركز الضغط ، يلزم حساب العزم M_1 الذي يتلقاه الجسم في الجريان .

لنفرض أن محور الدوران يخترق مستوي الشكل (١٠١٣) في مركز الإحداثيات ، ونعتبر اتجاه دوران العزم الموجب بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة . إن العزم الجزئي الناتج عن قوة الضغط الجزئية المؤثرة على العنصر الخطي ds بحسب من العلاقة :

$$dM_1 = dF_{py} x - dF_{px} dy .$$

وباستخدام العلاقة (13.39) ولإجراء التكامل على طول المنحنى المغلق C نجد :

$$M_1 = \oint_{(C)} [p(x dx + y dy)] \quad (13.44)$$

باتباع خطوات مماثلة لما ورد أعلاه نحصل بالنتيجة على قانون بلازيوس - تشابليجين الثاني بالصيغة :

$$M_1 = - \frac{\rho}{2} Re \left\{ \oint_{(C)} [\bar{w}(z)]^2 z dz \right\} \quad (13.45)$$

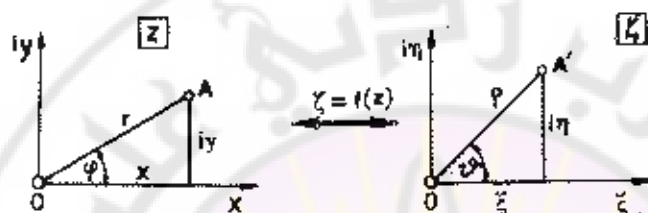
حيث Re الجزء الحقيقي للتكامل الواجب إجراؤه على طول محيط الجسم .
يتبين مما تقدم أنه بمعرفة تابع الجريان المركب يمكن بطريقة بسيطة حساب محصلة قوى الضغط وتحديد نقطة تأثيرها بالنسبة لجسم اعتباطي الشكل في جريان مستو عديم الاحتكاك .

٥.١٣ التمثيل المطابق

٥.١٣ ١ المفاهيم والمبادئ الأساسية لطريقة التمثيل المطابق

في الأمثلة التي عالجناها حتى الآن في الفقرة (١٣) انطلقنا من حقيقة أن كل تابع تحليلي $F(z)$ يمكن اعتباره تابع جريان مركب جزؤه الحقيقي يمثل تابع الكمون ، $Re F(z) = \Phi(x, y)$ ، والتخيلي تابع التيار ، $Im F(z) = \Psi(x, y)$ ، لجريان ما . فإذا تصورنا أحد خطوط التيار $\Psi = const$ قد تصلب ، فإن خطوط التيار الباقية تعطي صورة الجريان حول جسم صلب ليس من الضرورة في الحالة العامة أن تكون له أهمية تطبيقية واقعية . إذن فإن الميزة الأساسية لهذه الطريقة ، التي تتجلى في سهولة الحساب ، تقابلها سيئة أساسية تكمن في حقيقة أن نتيجة الحساب يمكن أن لا تكون لها أية قيمة عملية .
إذن فإن طرح المسألة العكسية التي يطلب فيها تحديد تابع الكمون

المركب للجريان حول جسم شكله معلوم نكتسب من الناحية العملية أهمية أكبر بكثير . ولكن الصعوبة فيها هي إيجاد تابع الجريان المناسب ، $F(z)$ ، وبالتالي فإن حلها يحتاج جهد حسابي أكبر بالمقارنة مع المسألة السابقة . لذا يستعان عند حل العديد من مسائل الجريان المستوية الهيدرو-والايرو ديناميكية ،



الشكل ٥.١٢ . مستوي الاصل $[z]$ ومستوي الصورة $[\zeta]$.

وخاصة في نظرية الجناح الحامل ، بطريقة التمثيل المطابق ، Methode of conformal mapping ، التي نجد في [27] عرضاً شاملاً لنتائجها . هذه الطريقة تستند على المبادئ الأساسية التالية :

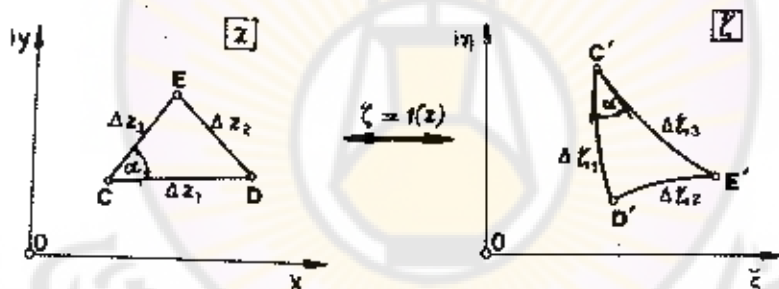
في المستوي المركب $[z]$ تتحدد كل نقطة A بالعدد المركب $z = x + iy = re^{i\phi}$ ، وفي المستوي المركب $[\zeta]$ تتحدد كل نقطة A' بالعدد المركب $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\psi}$ ، الشكل (٥.١٣) . نفرض أن هناك علاقة بين هذين العددين المركبين محددة بالتابع :

$$\zeta = f(z) \Rightarrow \xi(x, y) + i\eta(x, y) = f(x + iy) , \quad (13.46)$$

الذي بوجبه تكون لكل نقطة أصلية A من $[z]$ نقطة مقابلة A' ، كصورة ، من $[\zeta]$. وإذا تصورنا أن النقطة A تحركت على منحنى ما في $[z]$ فإن النقطة A' ستوسم منحنياً في $[\zeta]$ يمثل صورة للمنحنى الذي رسمته A . هذا يعني من ناحية هندسية صرفة أنه بمساعدة العلاقة (13.46) يمكن نقل Transformation Mapping المستوي المركب $[z]$ المعروف باسم مستوي الأصل

Original plane على المستوى المركب $[z]$ المعروف باسم مستوى الصورة Image plane . كما يمكن أن تتم عملية التمثيل بالنسبة لجال محدد من المستوى $[z]$ والمستوي $[z']$.

لنفرض الآن أن $\zeta = f(z)$ تابع تحالي للعدد المركب z (وليس لـ z') ، بمعنى أنه قابل للاشتقاق ويحقق معادلات كوشي - ريمان التفاضلية (13.12) . واشترط أنه في الجال المعتبر من المستوى $[z]$ يكون المشتق $f'(z) = \frac{d\zeta}{dz}$ قيمة محددة في كل نقطة تختلف عن 0 أو ∞ ، وذلك بغض النظر عن اتجاه عملية الاشتقاق .
 لنعتبر في المستوى $[z]$ المثلث EDC الذي نقوض أطوال أضلعه Δz_1 ، Δz_2 ، Δz_3 ، لا نهاية الصغر . بواسطة التابع التحالي $\zeta = f(z)$ نحصل في المستوى $[z']$ كصورة ، على المثلث $E'D'C'$ الذي أطوال أضلعه $\Delta \zeta_1$ ، $\Delta \zeta_2$ ، $\Delta \zeta_3$ ، الشكل (٦.١٣) .



الشكل ٦.١٣ ، في التمثيل المطابق تبقى الزوايا ثابتة ونسبة الأطوال اللانهائية الصغر واحدة .

في النقطة C مثلاً يكون المشتق $f'(z)$ قيمة واحدة لا تتعلق بالاتجاه .
 وحيث أنه يمكن نحت الشروط السابقة استبدال التفاضل بالفضل فيكون بالنسبة لـ C :

$$\frac{\Delta \zeta_1}{\Delta z_1} = \frac{\Delta \zeta_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta \zeta_3}{\Delta z_3} = \frac{\Delta \zeta_1}{\Delta z_1} = \frac{\Delta \zeta_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta \zeta_3}{\Delta z_3} .$$

وبالنسبة للنقطة D :

$$\Delta z_1 / \Delta z_2 = \Delta \zeta_1 / \Delta \zeta_2 .$$

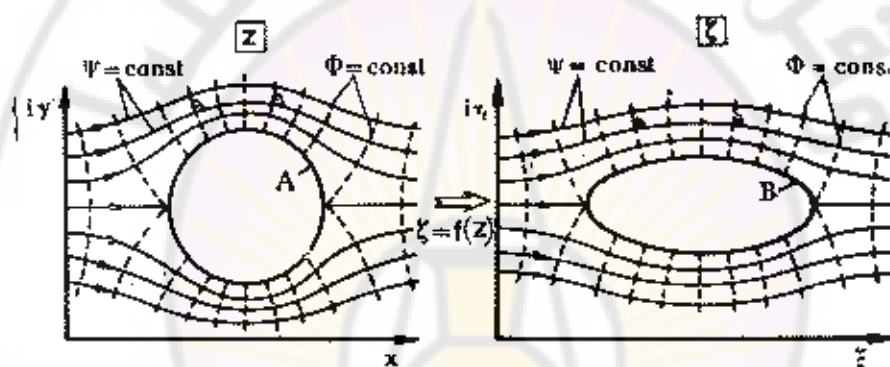
من هذا يتبين أن المثلثين اللانهائي الصغر EDC و E'D'C' متشابهان ، وأنه على الأخص تبقى الزاوية التي يتقاطع بها منحنيان في مستوى الأصل مساوية للزاوية التي يتقاطع بها المنحنيان المقابلان في مستوى الصورة : $\angle ECD = \angle E'C'D'$. لذلك يطلق على عملية التمثيل هذه حسب غرض اسم التمثيل المطابق ، بمعنى المحافظة على الزوايا بأمانة :

بواسطة التابع التحليلي $\zeta = f(z)$ يمكن تمثيل مستوى الأصل $[z]$ على مستوى الصورة $[\zeta]$ بحيث تبقى الزوايا ثابتة ونسبة الأطوال اللانهائية الصغر واحدة ، أي أن المجالات الصغيرة جداً في المستويين تكون متشابهة . يطلق على $\zeta = f(z)$ اسم تابع التمثيل المطابق ، وعلى مشتقة $|d\zeta/dz| = |\zeta'|$ اسم معامل التمثيل Mapping modulus أو مقياس التشويه ، الذي يمكن أن يتغير من نقطة إلى أخرى بحيث لا يلزم في الحالة العامة أن تكون المجالات المحدودة (الكبيرة) متشابهة .

إن فكرة استخدام الخصائص الهندسية للتمثيل المطابق في حل مسائل الجريان الكموي تجعل بوضوح من حقيقة أن شبكة الخطوط المتعامدة المؤلفة من خطوط الكمون $\Phi = \text{const}$ وخطوط التيار $\Psi = \text{const}$ جريان كموي في المستوي $[z]$ تابع كمونه المركب $F(z)$ تنتقل بواسطة تابع التمثيل المطابق إلى المستوي $[\zeta]$ لتظهر أيضاً كشبكة منحنيات متعامدة ، لأن الزوايا تبقى ثابتة . وبالتحديد فإن خطوط التيار في $[z]$ تظهر كخطوط تيار في المستوي $[\zeta]$ وخطوط الكمون كخطوط كمون .

لنعود المسألة المطروحة في بداية هذه الفقرة ، ولنفرض أن الجريان في المستوى $[z]$ بسيط ومعروف لدينا ، كالجريان حول مقطع اسطوانة دائرية A ، الشكل (٧.١٣) .

ليكن B مقطع الجسم المراد دراسة الجريان حوله في المستوى $[z]$. إن حل هذه المسألة يتطلب إيجاد تابع التمثيل $\zeta = f(z)$ الذي بواسطته ينقل محيط الجسم A في المستوى $[z]$ على محيط الجسم B في المستوى $[\zeta]$. في نفس الوقت تنقل مجموعة خطوط التيار وخطوط الكمون حول A في $[z]$



الشكل ٧.١٣ بواسطة تابع التمثيل المطابق $\zeta = f(z)$ تنحول خطوط التيار $\psi = \text{const}$ وخطوط الكمون $\phi = \text{const}$ للجريان حول مقطع الجسم A في مستوي الأصل $[z]$ إلى خطوط تيار وخطوط كمون للجريان حول مقطع الجسم B في مستوي الصورة $[\zeta]$.

لتظهر كصورة للجريان المطلوب حول الجسم B في المستوى $[\zeta]$. من هنا يتبين أن المعضلة الأساسية في حل هذه المسألة هي إيجاد تابع التمثيل المناسب .

بعد تحديد $\zeta = f(z)$ ، وبفرض أن تابع الكمون المركب $F(z)$ للجريان في المستوى $[z]$ معلوماً فبالإمكان بسهولة تحديد حقل السرعة حول الجسم B في المستوى $[\zeta]$ بمساعدة العلاقة (13.16) حيث يكون :

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{dF}{d\zeta} = \frac{dF(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \bar{w}(z) \frac{1}{f'(z)} , \quad (13.47)$$

حيث $\bar{w}(z) = u_z - i v_z$ السرعة المركبة المرافقة في $[z]$ و $\bar{w}(\zeta) = u_\zeta - i v_\zeta$ السرعة المركبة المرافقة في $[\zeta]$ و $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{f'(\zeta)}$ مقلوب الكسر التفاضلي لتابع التمثيل ، أو مقلوب معامل التمثيل .

هناك ميزة هامة جداً للتمثيل المطابق تتعلق بالجلولان . نعتبر خطأ متعلقاً في المستوي $[z]$ لا يحتوي في داخله أية ينابيع أو بالوعات . إن الجلولان على طول هذا الخط يحسب من العلاقة :

$$F_z = \oint \left(\frac{dF}{dz} \right) dz = \oint \bar{w}(z) dz .$$

وبما أن $dz = \frac{dz}{d\zeta} d\zeta$ يصبح باستخدام (13.47) :

$$F_z = \oint \left(\frac{dF}{d\zeta} \right) d\zeta = F_\zeta . \quad (13.48)$$

هذا يعني أن التمثيل المطابق لا يغير قيمة الجلولان . ويتبع من ذلك أنه بواسطة التمثيل المطابق يمكن حساب قوة الرفع المؤثرة على الجسم المراد دراسة الجريان حوله بالاستعانة بقانون كوتا - يوكوفسكي .

إن إمكانيات استخدام طريقة التمثيل المطابق لحل مسائل الجريان العملية تكمن في جملة ليس من الصعب برهانها (انظر [27]) تنص على ما يلي : باستثناء عدد قليل من الحالات الخاصة غير الهامة عملياً يمكن دائماً إجراء التمثيل المطابق لساحة وحيدة الترابط على دائرة . هذه الجملة المعروفة باسم قانون ريمان للتمثيل المطابق تعني أن حساب الجريان المستوي حول جسم ما شكله معلوم يمكن من حيث المبدأ ، على أساس أن الجريان حول دائرة معلوم (انظر ٣.٢.١٢ و ٤.٢.١٢) . غير أن الصعوبة الفعلية عند التطبيق العملي هي ،

كما ذكر أعلاه ، إيجاد تابع التمثيل المناسب ، الذي يكون في حالات كثيرة
ذا تكوين معقد جداً (انظر الجدول ١.١٣) .

٢.٥.١٣ أمثلة عن نوابع التمثيل المطابق

لتوضيح الخطوات العملية لطريقة التمثيل المطابق عند استخدام الحل
مسائل الجريان الأساسية سنعالج فيما يلي بعض الأمثلة لنوابع التمثيل المعروفة
في نظرية الجناح الحامل والتي يمكن استخدامها لتطوير ما يعرف باسم البروفيلات
النظرية Theoretical profiles .

١.٢.٥.١٣ نابع تمثيل بوكوفسكي

١- تحديد شكل بروفييلات بوكوفسكي :

تلتزم لعائلة البروفيلات النظرية البسيطة زمرة بروفييلات تعرف باسم
بروفيلات بوكوفسكي ، نسبة للعالم الروسي المعروف الذي طور هذه الزمرة
باستخدام التمثيل المطابق للجريان حول دائرة في المستوى $[z]$ على الجريبات
حول البروفيل المطلوب في المستوى $[z]$.

لنعالج أولاً الخصائص الهندسية لنابح تمثيل بوكوفسكي :

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z} \quad (13.49)$$

حيث c عدد حقيقي . إن نقطة $B(x, iy)$ في المستوى $[z]$ محددة بالعدد المركب
 $z = x + iy$ يقابلها في المستوى $[z]$ نقطة $B'(\xi, i\eta)$ محددة بالعدد المركب
 $\zeta = \xi + i\eta$ بحيث يكون بموجب (13.49) :

$$\xi + i\eta = (x + iy) + \frac{c^2}{x + iy} .$$

بضرب صورة ومخرج الكسر بـ $(x - iy)$ وإجراء بعض الإصلاح وبعد
مقاومة الجزء الحقيقي والتنضيلي للطرف الايمن مع الجزء الحقيقى والتنضيلي في
الطرف الايسر من المعادلة نحصل على إحداثيى النقطة B' بدلالة إحداثيى النقطة
 B بالصيغة :

$$\xi(x, y) = x \left(1 + \frac{c^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (13.50)$$

$$\eta(x, y) = y \left(1 - \frac{c^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (13.51)$$

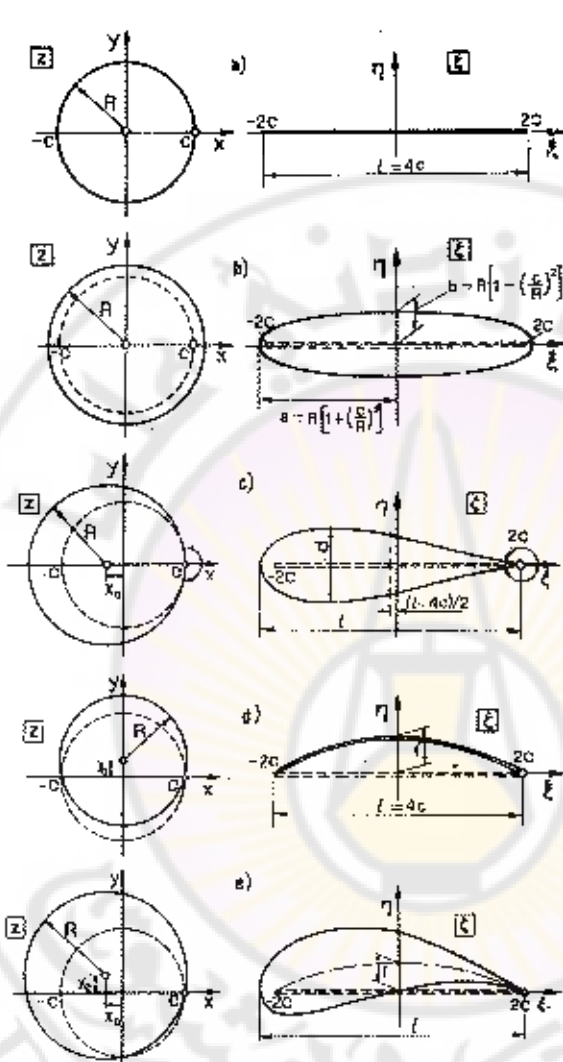
بمساعدة هاتين العلاقتين يمكننا الآن دراسة عدة إمكانيات تطبيقية هامة :

١ - نعتبر في المستوى $[z]$ دائرة نصف قطرها $R = c$ ومركزها منطبق على
مركز الاحداثيات . عندئذ يكون $R^2 = x^2 + y^2 = c^2$ وينتج بالتالي من
(13.50) و (13.51) :

$$\xi = 2x \quad ; \quad \eta = 0 \quad (13.52)$$

وبما أن نقاط محيط الدائرة تتحدد في المجال $-c \leq x \leq c$ فإن النقاط التي
تمثلها في المستوى $[\xi]$ تتحدد في المجال $-2c \leq \xi \leq 2c$. وعليه فإن صورة
الدائرة في هذه الحالة تظهر كقطعة مستقيمة طولها $l = 4c$ منطبقة على المحور x .
هذا يعني أن اسطوانة دائرية نصف قطرها $R = c$ تتحول بواسطة تابع التمثيل
المطابق (13.49) إلى صفيحة مستوية أفقية طولها $l = 4c$ منطبقة على المحور x
ومتناظرة بالنسبة للمحور y ، الشكل (٨.١٣ - أ) .

٢ - نعتبر في المستوى $[z]$ دائرة مركزها منطبق على مركز الإحداثيات
ولكن نصف قطرها $R > c$ ، الشكل (٨.١٣ - ب) .
بالنسبة لنقاط الدائرة يكون $x = R \cos \varphi$ ، $y = R \sin \varphi$ ، وبالتالى
يصبح حسب (13.50) و (13.51) :



$$\xi = R \left(1 + \frac{c^2}{R^2} \right) \cos \varphi,$$

$$\eta = R \left(1 - \frac{c^2}{R^2} \right) \sin \varphi.$$

من هاتين العلاقتين
نجد بعد إصلاح بسيط
العلاقة :

$$\frac{\xi^2}{R^2 \left[1 + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \right]^2} + \frac{\eta^2}{R^2 \left[1 - \left(\frac{c}{R} \right)^2 \right]^2} = 1, \quad (13.53)$$

وهي معادلة قطع
ناقص نصف قطره

الكبير a والصغير b
يتجان بالصفحتين :

$$a = R \left[1 + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \right];$$

$$b = R \left[1 - \left(\frac{c}{R} \right)^2 \right],$$

$$(13.54)$$

بذلك نجد حسب

$$(13.50) \text{ و } (13.51)$$

العلاقتين :

$$\xi = \frac{a}{R} x;$$

$$\eta = \frac{b}{R} y, \quad (13.55)$$

الشكل ٨.١٣ تطویر زمرة من عائلة بروفیلات یوکوفسکی
بواسطة تابع التمثیل المطابق (13.49) ، a صلیحة مستویة
أفقیة ، b بروفیل بشكل قطع ناقص ، c بروفیل متناظر
عديم الانحناء ، d بروفیل بشكل قوس دائرة ، e بروفیل
ذی سماكة وانحناء .

اللتين تسمحان بالانتقال من نقاط الدائرة إلى نقاط القطع الناقص .

في المسألة العكسية التي يطلب فيها أن تكون نسبة قطري القطع الناقص a/b محددة ، يلزم تحديد نصف قطر الدائرة بدلالة الثابت c . فإذا استعنا بالعلاقة (13.54) نجد بعد إصلاح بسيط :

$$\frac{R}{c} = \sqrt{\frac{a/b + 1}{a/b - 1}} \quad (13.56)$$

٣ - نختار مركز الدائرة على المحور الحقيقي وعلى بعد x_0 من مركز الإحداثيات ونحدد نصف قطرها ، $R > c$ بحيث تمر من النقطة $z = c$ ونس بالتالي الدائرة المركزية التي نصف قطرها c ، الشكل (٨.١٣) (c-٨.١٣) .

في المستوى $[z]$ تظهر صورة الدائرة في هذه الحالة كمقطع جناح حامل ، معروف باسم بروفييل يوكوفسكي المتناظر ، ذي أنف مدور وحافة خلفية حادة جداً مما اكتمل تقناهي إلى الصفر . هذا البروفيل يحيط بشق (رسم مشرقاً في الشكل) يمتد من نقطة الحافة الخلفية المنطبقة على النقطة $z = +2c$ وحتى $z = -2c$ ، وتتعلق مما كتمه الاعظمية d بالمسافة x_0 بين مركز الدائرة ومركز الإحداثيات .

بمساعدة تابع التمثيل (13.49) ، يمكن البرهان ، [17] [27] ، أن نقطة الدائرة $z = c$ والمنطقة الصغيرة الخارجية حولها المحدودة في المجال الزاوي بين $\varphi = \frac{\pi}{2}$ إلى $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ تنتقل كصورة إلى نقطة الحافة الخلفية للبروفيل $z = 2c$ والمنطقة الصغيرة الخارجية حولها المحدودة في المجال الزاوي بين $\theta = \pi$ إلى $\theta = -\pi$ ، الشكل (٨.١٣) (c-٨.١٣) . هذا يعني أن زاوية الحافة الخلفية للبروفيل تقناهي إلى الصفر ، وتكون خاصية تطابق الزوايا غير عكسة في الجوار الخارجي المحيط بالنقطة $z = 2c$.

لاستخراج معادلة تحديد شكل البروفيل نختار $x_0 = c$ فيكون في المستوى $[z]$:

$$R = x_0 + c - c(1 + \varepsilon_1) \quad ; \quad \varepsilon_1 = x_0/c \quad (13.57)$$

$$z = -x_0 + R e^{i\varphi} \quad (13.58)$$

بذلك تأخذ العلاقتان (13.50) و (13.51) الصيغتين :

$$\frac{\xi}{c} = [(1 + \varepsilon_1) \cos \varphi - \varepsilon_1] \left[1 + \frac{1}{1 + 2\varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1) (1 - \cos \varphi)} \right] \quad (13.59)$$

$$\frac{\eta}{c} = (1 + \varepsilon_1) \sin \varphi \left[1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1) (1 - \cos \varphi)} \right] \quad (13.60)$$

بالنسبة للبروفيلات الصغيرة السماكة يكون $\varepsilon_1^2 \ll 1$ وتنتج من (13.59) و (13.60) حسب [17] العلاقتان البسيطتان :

$$\frac{\xi}{c} = 2 \cos \varphi \quad ; \quad \frac{\eta}{c} = 2 \varepsilon_1 \sin \varphi (1 - \cos \varphi) \quad (13.61)$$

عندما تكون سماكة البروفيل صغيرة جداً يكون حسب العلاقة الأولى من (13.61) طول وتره .

$$l = 4c \quad (13.62)$$

وتتعدد سماكته الأعظمية :

$$\frac{d}{l} = \frac{3}{4} \sqrt{3} \varepsilon_1 = 1,299 \varepsilon_1 \quad (13.63)$$

من أجل $\varphi = 120^\circ$ ، وبالتالي تبعد $l/4$ عن حافته الإمامية (الأنف) .

بادخال (13.62) في (13.61) وعزل φ نحصل على معادلة بسيطة لتحديد

شكل البروفيل المتناظر بالصيغة :

$$\frac{\eta}{l} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left(1 - 2 \frac{\xi}{l} \right) \sqrt{1 - (2\xi/l)^2} \quad (13.64)$$

في حالة السماكات المتوسطة تستخدم معادلة تحديد شكل البروفيل بالصيغة

$\eta/d = f(\xi)$ ، حيث f الإحداثي المقاس من مركز الإحداثيات في [5]

يقع في النقطة $\xi = 2c - l/2$ ، [7a] .

٤ - نختار مركز الدائرة على المحور التخيلي وعلى بعد iy_0 من مركز الإحداثيات ونحدد نصف قطرها c ، $R > c$ ، بحيث تمر من النقطتين $z = \pm c$ الشكل (٨.١٣-d) . بمساعدة تابع ثميل يوكوفسكي نحصل في المستوى $[z]$ كصورة لهذه الدائرة على قوس دائري مضاعف يمتد من $\xi = 2c$ إلى $\xi = -2c$ ، وبالتالي يبلغ طول وتر البروفيل $l = 4c$ ، ويتعلق ارتفاع الإنحناء الأعظمي f بقيمة y_0 ، حيث يكون بفرض $y_0 = c \varepsilon_2$:

$$f = 2y_0 \Rightarrow f/l = \frac{\varepsilon_2}{2} . \quad (13.65)$$

لاستخراج معادلة شكل البروفيل في $[\xi]$ نلاحظ في $[z]$ أن :

$$R = \sqrt{c^2 + y_0^2} = c \sqrt{1 + \varepsilon^2} , \quad (13.66)$$

$$z = iy_0 + R e^{i\varphi} . \quad (13.67)$$

بذلك نجد بمساعدة (13.49) إحداثي أية نقطة من محيط البروفيل كتابعين : $\xi/l = f(\varphi, \varepsilon_2)$ و $\eta/l = f(\varphi, \varepsilon_2)$. فإذا اقتصرنا على بروفيلات قليلة الانحناء ، يكون عندئذ $\varepsilon_2 \ll 1$ ويتحدد شكل البروفيل بالإحداثيين :

$$\frac{\xi}{l} = \frac{1}{2} \cos \varphi \quad ; \quad \frac{\eta}{l} = \frac{\varepsilon_2}{2} \sin^2 \varphi . \quad (13.68)$$

بمزل φ واستخدام العلاقة (13.65) تأخذ معادلة تحديد شكل البروفيل الصيغة :

$$\frac{\eta}{l} = \frac{\varepsilon_2}{2} \left[1 - \left(\frac{2\xi}{l} \right)^2 \right] = \frac{f}{l} \left[1 - \left(\frac{2\xi}{l} \right)^2 \right] . \quad (13.69)$$

٥ - نختار أخيراً مركز الدائرة في النقطة $z_0 = -x_0 + iy_0$ ونحدد نصف قطرها c ، $R > c$ ، بحيث تمر من النقطة $z = +c$ التي هي في نفس الوقت نقطة من الدائرة التي نصف قطرها c ، الشكل (٨.١٣-e) . في المستوى $[\xi]$ نحصل

كصورة لهذه الدائرة على بروفيل يوكوفسكي المنحني ، الذي تتعلق سماكته d وانحناءه f بموقع مركز الدائرة في $[z]$ ، ويتصف بأن زاوية حافته الخلفية تساوي الصفر (انظر ت ١٠.١٣) .

كافة بروفيلات يوكوفسكي تتصف بأن زاوية الحافة الخلفية معدومة ، مما يجرها من المثانة المطلوبة في الاستخدام العملي . بالإضافة لذلك فإنه في حالة السماكات الصغيرة يكون توزيع الانحناء (الخط الرئيسي) بشكل قوس دائرة تقريباً مما يؤثر على خاصية الاستقرار في الطيران . لذلك لم تلق هذه البروفيلات أهمية عملية .

بإجراء تغير بسيط في صياغة تابع قشبي يوكوفسكي (الجدول ١٠.١٣) يمكن الحصول على بروفيلات نظرية ذات مواصفات فنية حسنة إذا ما قورنت بروفيلات يوكوفسكي . إلى هذه البروفيلات الحسنة تنتمي عائلة بروفيلات كومان - تريفيكس و بيتس - كويني التي تتصف بأن حافة البروفيل الخلفية مدورة أو ذات زاوية محددة معطاة ؛ وعائلة بروفيلات فون ميسس - von Mises-Profiles ، التي تتصف بأن نقطة تأثير قوة الرفع ثابتة . بالرغم من ذلك فإن الأهمية العملية لهذه البروفيلات بقيت قليلة ، (راجع خاصة [27]) .

إن القيمة الفعلية للبروفيلات النظرية تكمن في حقيقة كونها تقدم حلولاً دقيقة لمسائل الجريان الأساسية ، التي يمكن استخدام نتائجها مقياساً لتدقيق صحة الطرق التجريبية مثل طريقة النقاط الشاذة .

ب - حساب القيم الهيدرو أو الأبروديناميكية .

نفرض أن الاسطوانة في المستوي $[z]$ واقعة في جريان انسيابي سرعته غير المشوشة V_∞ ، ليكن $F(z)$ تابع الكمون المركب للجريان حول الاسطوانة . بواسطة تابع قشبي يوكوفسكي نحصل في المستوي $[z']$ على حقل الجريان الكموني حول بروفيل يوكوفسكي كصورة للجريان حول الدائرة .

إن حقل السرعة في $[z']$ يتحدد بموجب (13.47) بعد حساب $F(z) = d\zeta/dz$ من (13.49) بالصيغة :

$$|w_z| = |w_{\bar{z}}| \cdot \left| \frac{dz}{d\bar{z}} \right| = |w_z| \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 \left(1 - \frac{c^2}{x^2 + y^2}\right)^2 + y^2 \left(1 + \frac{c^2}{x^2 + y^2}\right)^2}} \quad (13.70)$$

حيث $|w_z|$ ، $|w_{\bar{z}}|$ القيم المطلقة للسرعة في المستويين $[z]$ و $[\bar{z}]$ ، التي نستخدمها فيما يلي للاختصار بدون خطوط شافولية .

في النقطتين $y = 0$ ، $x = \pm c$ تصبح قيمة الجذر لا نهائية ، وبالتالي تصبح $w_z \rightarrow \infty$ عندما تكون قيمة $w_{\bar{z}}$ محدودة . لذلك يلزم ، لتجنب هذه السرعات غير المعقولة فيزيائياً ، أن تكون هاتان النقطتان في المستوى $[z]$ مثالان نقطتي ركود ، $w_z(\pm c, 0) = 0$ ، حتى تبقى قيمة $w_{\bar{z}}$ في النقطتين المطابقتين من $[\bar{z}]$ محدودة أو مساوية للصفر .

هذه النتيجة تتجلى أهميتها إذا لاحظنا أن النقطة $(+c, 0)$ من الدائرة تقابلها في $[\bar{z}]$ نقطة الحافة الخلفية من بروفيلات يوكوفسكي في الحالات (a) ، (c) ، (d) ، (e) من الشكل (٨.١٣) . كما يمكن أن تصبح السرعة لا نهائية على نقطة الأتف في الحالتين (a) و (d) . لذلك فإن شرط كونها للنسياب الناعم لا يتحقق إلا إذا تم التمثيل المطابق بحيث تنقل نقطة الركود الخلفية للدائرة على نقطة الحافة الخلفية للبروفيل .

لنعتبر الحالة (e) من الشكل (٨.١٣) ونفرض أن الدائرة في $[z]$ واقعة في جريان إنسجاني جولاني سرعته غير المشوشة V_∞ تصنع مع المحور x الزاوية α ، ولكن Γ قيمة الجولان الإجمالي ، على أساس هذا الجريان المعروف لدينا جيداً يمكن حل المسألة الأساسية الأولى والثانية ، حيث يتم بواسطة تابع تمثيل يوكوفسكي إما نقل الدائرة وحقل الجريان حولها إلى المستوى $[\bar{z}]$ أو نقل البروفيل المعطى والجريان حوله إلى المستوى $[z]$.

إن تابع الكمون المركب للجريان الجولاني حول الدائرة ينتج من (13.32)

إذا استبدلنا فيها u_m بالسرعة المركبة المرافقة للسرعة غير المشوشة ،
 $V_m = u_m - i v_m = V_m e^{-i\alpha}$ ، وكذلك z بـ $(z - z_0)$ لأن مركز الدائرة
 يقع في مركز الإحداثيات وإنما في النقطة z_0 . وعليه يكون :

$$F(z) = V_m \left[(z - z_0) e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z - z_0} e^{+i\alpha} \right] + \frac{i F'}{2\pi} \ln (z - z_0) . \quad (13.71)$$

بذلك نحصل على السرعة المركبة في المستوى $[z]$ حسب (13.6) بالصيغة :

$$\bar{w}_z = \frac{dF(z)}{dz} = V_m \left[e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{(z - z_0)^2} e^{+i\alpha} + \frac{i F'}{2\pi V_m} \frac{1}{z - z_0} \right] . \quad (13.72)$$

على محيط الدائرة ، الذي يمثل خط التيار الصفري ، تكون السرعة مماسية في كل
 نقطة A ، وتنتج قيمتها من (13.72) :

$$|w_z| = V_c = 2 V_m \sin \theta + \frac{F'}{2\pi R} \quad ; \quad (\theta = \alpha + \varphi') \quad , \quad (13.73)$$

حيث θ الزاوية التي يصنعها نصف قطر الدائرة R الواصل إلى نقطة منها A مع
 اتجاه سرعة الورد غير المشوشة V_m ، الشكل (٩.١٣) .

لكي يتحقق شرط كوتا للانسياب الناعم يجب أن نحدد قيمة الجولان بحيث
 تكون نقطة الركود الخلفية للدائرة S تطابق نقطة الركود على الحافة الخلفية
 للبروفيل S' . وعليه يجب أن تكون السرعة w_z في النقطة $(x = c, y = 0)$ ،
 حيث $\theta = \pi + \alpha + \beta$ ، معدومة . بذلك نجد من (13.73) :

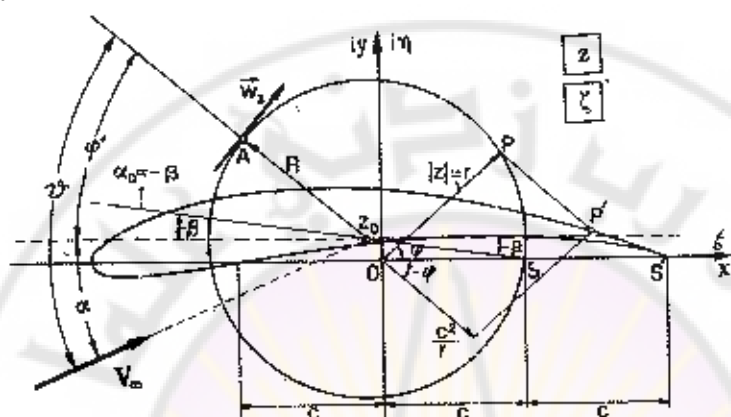
$$F' = 4\pi V_m R \sin (\alpha + \beta) . \quad (13.74)$$

وتصبح السرعة على محيط الدائرة :

$$w_{zc} = V_c = 2 V_m [\sin \theta + \sin (\alpha + \beta)] . \quad (13.75)$$

توزيع السرعة في المستوى $[z]$ يتبع بادخال (13.74) في (13.72) وملاحظة أن

$$z = z_0 + Re^{-i\theta}$$



الشكل ٩.١٣ : لحساب القيم الهيدروديناميكية لبروفيل يوكوفسكي المنحني بمساعدة التمثيل المطابق ، وقد رسم المستويان الماركان $[z]$ و $[\zeta]$ من مركز إحداثيات واحد فوق بعضها البعض . الزاوية التي يصنعها نصف قطر الدائرة مع المحور x ، θ ، الزاوية التي يصنعها نصف القطر المائل $r = |z|$ مع المحور x .

على محيط البروفيل (دليل P) في المستوى $[\zeta]$ نحصل على توزيع السرعة من (13.70) و (13.75) بالصيغة :

$$\frac{w_{\zeta P}}{V_{\infty}} = \frac{2 [\sin \theta + \sin (\alpha + \beta)] r}{\sqrt{x^2 (1 - \frac{c^2}{x^2 + y^2})^2 + y^2 (1 + \frac{c^2}{x^2 + y^2})^2}} ; (r = |z|), (13.76)$$

ومنها بمساعدة معادلة برنولي نجد توزيع الضغط على محيط البروفيل ، الشكل (١٨.٨) .

لحساب قوة الرفع يمكن طبعا الاستعانة بقانون بلازيوس - تشابليجين الاول بادخال w_{ζ} في العلاقة (13.43) وإجراء التكامل . كما يمكن بسهولة

حساب F_A من قانون كوتا-يوكوفسكي (8.150) بإدخال قيمة r' حسب (13.74) فينتج بالنسبة لواحدة عرض البروفيل :

$$F_A = 4\pi \frac{V_\infty^2 R \sin(\alpha + \beta)}{l} , \quad (13.77)$$

ويكون بذلك معامل قوة الرفع :

$$c_A = 8\pi \frac{R}{l} \sin(\alpha + \beta) , \quad (13.78)$$

حيث l طول وتر البروفيل في $[z]$ ، β و R متحولان هندسيان للبروفيل تتحدد من معطيات الدائرة في $[z]$.

إن قوة الرفع تنعدم من أجل زاوية الورود :

$$\alpha (c_A = 0) = \alpha_0 = -\beta , \quad (13.79)$$

لذلك يطلق على المحور الواصل بين النقطتين S و z_0 ، الشكل (٩.١٣) ، إتجاه قوة الرفع الصفرية أو المحور الأول للبروفيل .

إن النتائج السابقة تسمح لنا دون صعوبة كبيرة حساب القيم الهيدروديناميكية لبروفيلات يوكوفسكي الأخرى المبينة في الشكل (٨-٨.١٣ حتى d) .

في حالة الصفيحة المستوية ، الشكل (٨-٨.١٣) ، يكون نصف قطر الدائرة $R = \sqrt{x^2 + y^2} = r = |z| = c$ وتكون الزاوية $\beta = 0$ بينما $\varphi = -\psi$ باعتبار ψ في الشكل (٩.١٣) تتجهول بإتجاه دوران عقارب الساعة . بذلك تنتج السرعة على الصفيحة من (13.76) مع أخذ (13.72) بعين الاعتبار :

$$\frac{w_t}{V_\infty} = u = \frac{\sin \varphi + \sin \alpha}{\sin \varphi} = \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\frac{1-2\xi/l}{1+2\xi/l}} . \quad (13.80)$$

على أنف الصفيحة ، أي في النقطة $\xi = -2R$ ، $(\varphi = 0)$ ، تصبح w_t لانهائية بينما تبقى السرعة على الحافة الخلفية ، $\xi = 2R$ ، نهائية .

معامل قوة الرفع للصفيحة ينتج من (13.78) بوضع $l = 4R$ بالصيغة المعروفة :

$$c_A = 2\pi \sin \alpha \quad (13.81)$$

في حالة البروفيل بشكل قطع ناقص، الشكل (٨.١٣)، يكون $|z| = R$ ، $\beta = 0$ ونجد في الحالة الخاصة التي تكون فيها زاوية الورد $\alpha = 0$ وبالتالي $\theta = \varphi$ من (13.76) السرعة على محيط البروفيل :

$$\frac{w_{LP}}{V_\infty} = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{1 - (\xi/a)^2}{1 - (1 - (b/a)^2)(\xi/a)^2}} \quad (13.82)$$

حيث a و b نصف قطر القطع الناقص حسب (13.54)، وتبلغ السرعة قيمتها الاعظمية في نقطتي النهاية للمحور الصغير، من أجل $\xi = \pm b$.

في حالة البروفيل المتناظر الشكل (٨.١٣)، تكون $\beta = 0$ ونجد بوضع $z = -x_0 + Re^{i\varphi}$ (φ تتحول يساراً) السرعة على محيط البروفيل حسب (17) :

$$\frac{w_{LP}}{V_\infty} = [\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha] \frac{1 + 2\varepsilon_1(1 + \varepsilon_1)(1 - \cos \varphi)}{(1 + \varepsilon_1)\sqrt{\varepsilon_1^2(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}} \quad (13.83)$$

حيث $\varepsilon_1 = x_0/c$. وينتج معامل قوة الرفع من (13.78) بإدخال (13.57) و (13.82) بالصيغة

$$c_A = 8\pi \frac{R}{l} \sin \alpha = 2\pi(1 + \varepsilon_1) \sin \alpha \quad (13.84)$$

وبالتالي يكون $c_A = 0$ من أجل $\alpha = 0$.

في حالة البروفيل بشكل قوس دائري، الشكل (٨.١٣)، تكون $\beta \neq 0$ ونجد بوضع $z = +iy_0 + Re^{i\varphi}$ السرعة على محيط البروفيل :

$$\frac{w_{LP}}{V_\infty} = \left[\cos \alpha + \sin \alpha \frac{\cos \beta - \cos \varphi}{\sin \beta + \sin \varphi} \right] \frac{1 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2\sqrt{1 + \varepsilon_2^2} \sin \varphi}{1 + \varepsilon_2^2} \quad (13.85)$$

حيث $\varepsilon_2 = y_0/c$. ونلاحظ أن السرعة على الحافة الخلفية للبروفيل، $\varphi = -\beta$ ، تكون معدومة، بينما تبلغ في الحافة الامامية، $\varphi = \beta$ ، قيمة لانهائية. وفي الحالات التي يكون فيها انحناء البروفيل صغيراً، وبالتالي $\varepsilon_2 \ll 1$ ، $\cos \beta \approx 1$ ، وزاوية الورد α صغيرة ينتج توزيع السرعة باستخدام (13.65) و (13.68) بالصيغة :

$$\frac{w_{LP}}{V_\infty} = 1 + 2\varepsilon_2 \sin \varphi + \alpha \tan \frac{\varphi}{2} = 1 + 4 \frac{f}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi}{l}\right)^2} \pm \alpha \sqrt{\frac{1 - 2\xi/l}{1 + 2\xi/l}} \quad (13.86)$$

حيث إشارة (+) تخص طرف السحب العلوي و (-) طرف الضغط السفلي للبروفيل .
معامل قوة الرفع ينتج من (13.78) بوضع $R = c/\cos \beta$ و $l = 4c$ بالصيغة :

$$c_A = 2\pi \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (13.87)$$

ونحصل بالنسبة للبروفيل ذي الانحناء قليل حيث يمكن ان نضع $\cos \beta \approx 1$ و $\beta \approx \frac{1}{2}$: (13.65) موجب :

$$c_A = 2\pi \sin \left(\alpha + 2 \frac{l}{c} \right) \quad (13.88)$$

من هذه العلاقة يتجلى بوضوح تأثير الانحناء على قوة الرفع .

٢.٢.٥.١٣ تابع تمثيل كوينغ

إن التابع المعروف باسم تابع تمثيل كوينغ E. König [145] :

$$\zeta = e^z \Rightarrow z = \ln \zeta \quad (13.89)$$

له أهمية تطبيقية كبيرة بالنسبة لدراسة الجريان حول أجسام مرتبة بنظام دوري ،
كما في شبك بروفيلات قطري .

إن نقطة $z = x + iy$ تقابلها نقطة $\zeta = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. وعليه ينتج بعد
عزل الجزء الحقيقي عن التمثيل :

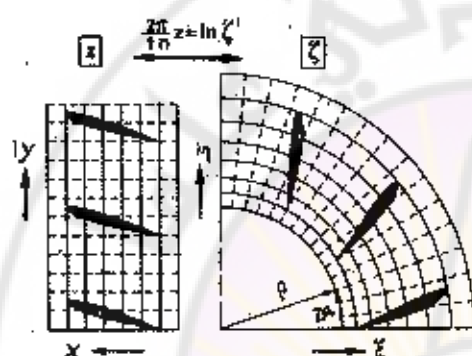
$$\rho = e^x \Rightarrow x = \ln \rho \quad ; \quad y = \theta \quad (13.90)$$

إذن فالمستقيمت $y = \text{const}$ الموازية للمحور x في المستوي $[z]$ تقابلها في المستوي
 $[\zeta]$ مستقيمت منبعثة من المركز $\zeta = 0$ ، والمستقيمت $x = \text{const}$ الموازية
للمحور y تقابلها دوائر مركزية حول $\zeta = 0$.

هذا يعني أنه بواسطة التابع (13.89) يتحول الجريان الانسحابي المنتظم
الموازي للمحور x في $[z]$ إلى جريان منبع في $[\zeta]$ ، ويتحول الجريان الانسحابي
المنتظم الموازي للمحور y إلى جريان إعصار كوني ، كما يتحول الجريان الانسحابي

المائل على المحور x زاوية α الى جريان نبع اعصاري (راجع ١٠.٣.٥) ،
لأن أي خط للتيار في $[z]$ يصنع مع كافة المستقيمت $y = \text{const}$ نفس الزاوية α ،
وبالتالي فان صورته في $[z']$ يجب ان تصنع مع كافة المستقيمت المنبعثة من مركز
الاحداثيات نفس الزاوية α ومثل بالتالي حلزوناً لوغاريماً .

من جهة أخرى يمكن البرهان أن مجالاً عرضه 2π أو $2\pi \cos \alpha$ محدداً



الشكل ١٣.١٠ بواسطة تابع كوينغ ينقل
شبكة بروفيلات مستقيم في $[z]$ على شبكة بروفيلات
قطري مستوي في $[z']$.

بمستقيمين متوازيين في
المستوي $[z]$ (خطي تيار) .
ينقل بواسطة التابع (13.89)
على كامل المستوي $[z']$.
أما اذا كان عرض المجال t
فندقق نفس النتيجة اذا
استخدمنا بدلاً من (13.89)

التابع :

$$z' = e^{\frac{2\pi z}{t}} \quad (13.91)$$

بواسطة هذا التابع ينقل شبكة بروفيلات مستقيم في $[z]$ جيته موازية المحور y
وخطوة تقسيمه t على بروفيل جناح فردي منحني في $[z']$. أما التابع :

$$z' = e^{\frac{2\pi z}{\pi t}} \quad (13.92)$$

فيسمع ينقل الجريان عبر شبكة بروفيلات مستقيم في $[z]$ على الجريان عبر
شبكة بروفيلات قطري في $[z']$ مؤلف من n ريشة، الشكل (١٠.١٣) . ويكون
في هذه الحالة بدلاً من (13.90) :

$$x = \frac{tn}{2\pi} \ln \rho; y = \frac{tn}{2\pi} \theta + tn \cdot k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (13.93)$$

فاذا فرضنا حقل السرعة $V_z = |w_z|$ للجريان في $[z]$ معلوماً (راجع

(٩.٢.١٢) فتكون السرعة في [٤] حسب (13.47) :

$$|w| = \frac{tn}{2\pi\phi} V_x , \quad (13.94)$$

حيث $\phi = |\zeta|$.

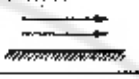
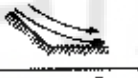
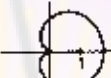
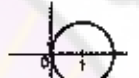
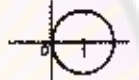
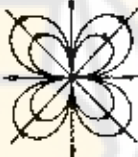
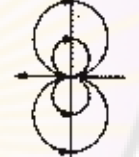
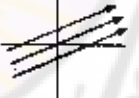
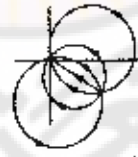
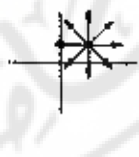
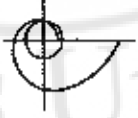
توجد طرق عملية عديدة تستخدم تابع تمثيل كوينغ بالصيغة (13.92) أو بصيغ معدلة قليلاً (انظر الجدول ١٠.١٣) لحساب الجريان عبر شبك بروفيلات قطري كمقطع في الدولاب الثابت أو الدائر لمضخة أو عنفة وذلك كمالة أساسية أولى أو ثانية [7] [27] [106] [146] .

وتجدر الملاحظة أنه في هذه الحالة وفي حالات تطبيقية عديدة أخرى يمكن الاستفادة من مزايا طريقة النقاط الشاذة ، مثلاً لحساب حقل السرعة في المستوي [٢] ، ومن مزايا طريقة التماثل الالكتروليتي [87] ربطها مع طريقة التمثيل المطابق .

٣.٢.٥.١٣ طريقة الهودوغراف

توجد مسائل مستوية عديدة ذات أهمية تطبيقية تتميز بأن السرعة تبقى ابنة على طول قطعة على الأقل من حدود حقل الجريان . في هذه الحالة يستحسن تحديد مسار هذا الجزء من حدود حقل الجريان وحقل الجريان الكموني نفسه في ما يسمى مستوي الهودوغراف [w] الذي يتم فيه الربط بين تابع الكمون المركب $F(z)$ ومركبات السرعة مع أخذ خصائص النقاط الشاذة (نبع ، بالوعة ، إعصار الخ ...) بعين الاعتبار (الهودوغراف هو المنحنى الذي يصل بين نقاط النهاية الأشعة المنبعثة من مركز واحد والمساوية من حيث القيمة والاتجاه لأشعة مرعة نقطة مادية تتحرك على مسار محدد !) .

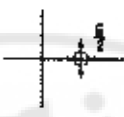
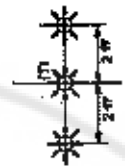
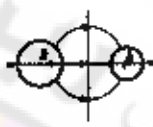
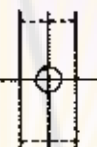
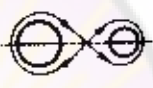
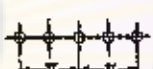
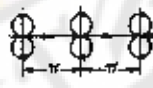
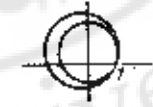
الجدول ١٣: بعض توابع التمثيل المماثل ذات الأهمية العملية ، حسب [27] .

التمثيل المطابق	تابع التمثيل	المستوي ζ	المستوي z
لجريان انسيابي على جريان يلتف حول مقدمة صفيحة مسطوية .	$\zeta = z^2$		
لجريان انسيابي على جريان نسمين جدارين متعامدين .	$\zeta = z^{1/2}$		
لجريان انسيابي على جريان نسمين جدارين متفرجي الزاوية .	$\zeta = z^{3/4}$		
لجريان انسيابي على جريان حول الزاوية القائمة لجدارين	$\zeta = z^{3/2}$		
لخطوط الكون لنبيع على منحنيات كاردويديية (قلبية) Cardioid	$\zeta = z^2$		
لخطوط الكون لنبيع على منحنيات لامنسكية Lemniscate	$\zeta = z^{1/2}$		
لجريان الثنائية على جريان كوادروبول Quadrupole	$\zeta = z^{1/2}$		
لجريان انسيابي مائل على جريان ثنائية .	$\zeta = \frac{1}{z}$		
لنبيع على جريان نبيع - بالوعة .	$\zeta = \frac{1}{z}$		
لمستقيم على منحنى فوغارتس جلووني ؛ لجريان انسيابي مائل على جريان النبيع الاعصاري .	$\zeta = e^z$		

الجدول ١.١٣ : تمعة

المستوي z	المستوي ζ	تابع التمثيل	التمثيل المطابق
		$\zeta = e^{2\pi i/t}$	نصف دائرة بروفيلات مستقيم مؤلف من صفائح مستوية مائلة على بروفيل فردى. خطوة التقسيم t
		$\zeta = e^{2\pi i/nl}$	نصف دائرة بروفيلات مستقيمة مؤلف من صفائح مستوية مائلة على نصف دائري مؤلف من رشة n
		$\zeta = z + \frac{c^2}{z}$	لمحيط دائرة نصف قطرها c على قطعة مستقيمة طولها $4c$
		$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	لمحيط دائرة الوحدة على قطعة مستقيمة افقية
		$\zeta = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$	لمحيط دائرة الوحدة على قطعة مستقيمة شاقولية
		$\zeta = z + \frac{1}{z}$	لمحيط دائرة على محيط بروفيل إيزوكوسمي وللمحيط دائرة الوحدة على خطه الرئيسى
		$\zeta = \cosh z$	لجريان السطحى فى المستوي

الجدول ١٠١٣ : قيمة

التمثيل المطابق	تابع التمثيل	المستوي ζ	المستوي z
لسلسلة بنابيع على ربع مفرد ينصف الفرازة .	$\zeta = 4 \cosh z$		
لجريان نبع-بالوعة حول دارتين على جريان انسيابي أفقي ضمن مستطيل .	$\zeta = \ln \frac{z-a}{z-b}$		
للمنطقة المحيطة بدائرتين لجولان حولهما من نفس القيمة والاتجاه على جملة أعمامير مضاعفة الدورية .	$\zeta = \ln \frac{z-a}{z-b}$		
لجملة بنابيع وبالوعات على نوع اقترادي .	$\zeta = \tan z$		
لجملة بنابيع وبالوعات على بالوعة اقترادية .	$\zeta = \cot z$		
لسلسلة ثنائيات على جريان انسيابي أفقي .	$\zeta = \tan z$		
لسلسلة ثنائيات على جريان انسيابي أفقي .	$\zeta = \cot z$		
لدائرة بمن دائرة الوحيدة على بروكسل كرمان - تريفيتز Kármán - Trefftz	$\frac{\zeta-a}{\zeta+a} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2$		

الجدول ١.١٣ : تمثا

التمثيل المطابق	تابع التمثيل	المستوي ζ	المستوي z
لدائرة على بروكسيل بيتسي = كوبني Betz - Keune (الخط الرئيسي مؤلف من تضام قوس دائرة ومنحنى بشكل S .)	$\ln \frac{\zeta - u}{\zeta + u} =$ $= k \ln \frac{z - 1}{z + 1} +$ $+ i \frac{\mu}{2}$		
لدائرة في حقل نبع اصغاري على قطعة من جزون لوغاريتمي	$\zeta = \frac{z + r_1}{\left(\frac{z r_1 + r_0}{r_1 z}\right)^{-p}}$		
للجريان عبر شبك من قضبان رتبة قائمة على الهودوغراف Hodograph المتكس في مستوى السرعة المركبة المرافقة $\bar{w}$	$\zeta = \bar{w}(z) ;$ $\bar{w} = \frac{dF(z)}{dz}$		
للجريان عبر شبك من صفائح مائلة على مستوى الهودوغراف المتكس .	$\zeta = \bar{w}(z)$		
للجريان عبر فتحة فترغ ذات الحناء غير مستمر على مستوى الهودوغراف المتكس .	$\zeta = \bar{w}(z)$		
للجريان عبر فتحة فترغ ذات حدود انحنائها مستمر على مستوى الهودوغراف المتكس .	$\zeta = \bar{w}(z)$		

إن طريقة الهودوغراف نستند تحليلياً على العلاقة (13.16) التي تتضمن أن مشتق تابع الكمون المركب يساوي السرعة المرافقة للسرعة المركبة ، $\bar{w} = dF(z)/dz$ ، وأن $\bar{w}$ هي تابع تحليلي للاحداثي المركب z . لذلك يمكن اعتبار التابع $\bar{w} = F(z)$ كتابع تمثيل مطابق يسمع بنقل حقل الجريانات في المستوي $[z]$ على مستوي الهودوغراف $[\bar{w}]$ الذي يمثل محوري إحداثياته مركبتا السرعة المرافقة للسرعة المركبة w . ولكن يمكن أيضاً استخدام w بدلاً من $\bar{w}$ للتمثيل المطابق حيث نحصل بهذه الطريقة على القيم المأبوبة لمنحني الهودوغراف ، أي صورتها المعكوسة بالنسبة للمحور الحقيقي x (الشكل ٢٠.١٣) .

لاستخراج العلاقات بين النقاط المتقابلة في المستويين $[z]$ و $[\bar{w}]$ نكتب العلاقة (13.16) بالصيغة :

$$\bar{w} = u - iv = \frac{dF}{dz} = |w| (\cos \varphi - i \sin \varphi) ,$$

حيث $F = F(z)$ تابع الكمون المركب . بكاملية هذه العلاقة نحصل على قيمة z :

$$z = x + iy = \int \frac{dF}{|w| (\cos \varphi - i \sin \varphi)} + \text{const} \quad (13.95)$$

بموجب (13.13) ينتج $dF = d\Phi + i d\Psi$ ، فإذا تتبعنا شعاع السرعة w على طول خط تيار معين ، $\Psi = \text{const}$ ، يكون $d\Psi = 0$ وبالتالي يصبح $dF = d\Phi$ ، وتأخذ بذلك العلاقة (13.95) ، بعد ضرب المخرج والصورة للكسر في الطرف الأيمن بـ $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ، الصيغة :

$$x + iy = \int \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\Phi}{|w|} + \text{const}$$

بفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي نجد :

$$x = \int \frac{\cos \varphi \cdot d\Phi}{|w|} + \text{const}_1; \quad y = \int \frac{\sin \varphi \cdot d\Phi}{|w|} + \text{const}_2. \quad (13.96)$$

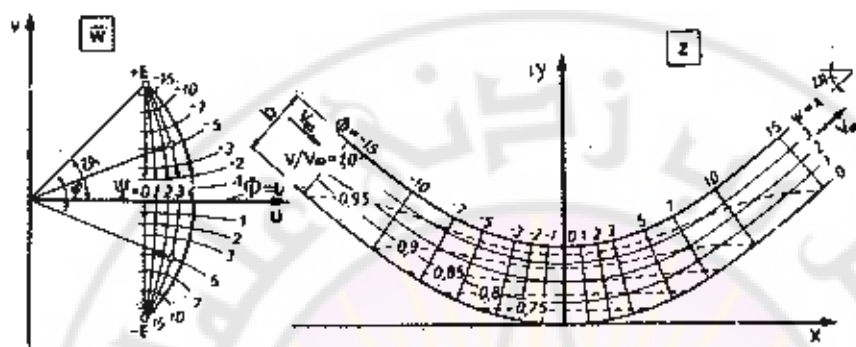
لتحديد ثابتي التكامل نتبع في المستوى $|\bar{w}|$ أحد خطوط الكمون $\Phi = \text{const}$. عندئذ يكون $d\Phi = 0$ وبالتالي $dF = i d\psi$. فإذا أدخلنا هذه القيمة في (13.95) وأجرينا التكامل بين ψ_2, ψ_1 نجد بعد فصل الجزء الحقيقي عن التخيلي:

$$x = - \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\sin \varphi \cdot d\psi}{|w|}; \quad y = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\cos \varphi \cdot d\psi}{|w|}. \quad (13.97)$$

بذلك نتحدد العلاقة بين السرعة $\bar{w}$ وكافة النقاط z التي نورد فيها هذه السرعة، وبالتالي يتحدد توزيع السرعة في المستوى $|\bar{z}|$.

تستخدم طريقة الهودوغراف بنجاح خاصة لحساب التفاورات الحرة Free jet التي تعبر شبكاً مؤلفاً من قضبان رفيعة أو صفائح رقيقة (الجدول ١.١٢)، وكذلك لحساب الجريان عبر النواشر Diffuser وفتحات التفريغ من إفاء [7a][14][27]. كما استخدمت أيضاً بنجاح لتصميم شبك بروفيلات للضغط المتساوي بميزات ايروديناميكية أفضلية [147]. كمثال تطبيقي يوضح استخدام الطريقة نعتبر في المستوى $|\bar{w}|$ قطعاً من حقل الجريان الناتج عن تضام نبع وبالوعة (الشكل ٩.١٠)، وفي المستوى $|\bar{z}|$ الجريان عبر كوع مستوي عرضه b وسرعة دخول الجريان فيه V_0 ، الشكل (١١.١٣). إن خطوط التيار في $|\bar{w}|$ تمثلها أقواس دائرية ويقع مركز انحناء خط التيار $\psi = 4$ في مركز الاحداثيات، وتكون قيمة شعاع السرعة $|w|$ على طول خط التيار هذا ثابتة. في مقطع الدخول للكوع تسود من حيث القيمة نفس السرعة السائدة في مقطع الخروج (عياً). وتتناقص السرعة على خطوط التيار $\psi < 1$ في الكوع حتى $x = 0$ ثم تتزايد. أما ذروة خطوط التيار في $|\bar{z}|$ فتتحدد بإجراء تكامل (13.95) على طول خط الكمون الصفري $\Phi = 0$ حيث تكون عندئذ الزاوية $\varphi = 0$ وبالتالي $x = 0 = \text{const}$ ويتبع من (13.97):

$$y_n = \int_0^{\psi_n} \frac{d\psi'}{|w|} \quad (13.98)$$



الشكل ١٣.١١ : تتحدد خطوط التيار وتوزيع السرعة للجريان داخل كوع مستوي في z من خطوط التيار لنبع وبالوعة في مستوي الهودوغراف w ، حسب [7a] .

٦.١٣ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١٣ : اشرح أسس طريقة التوافق المركبة وخصائصها المميزة وإمكانات استخدامها .

س ٢.١٣ : استوضح الخصائص الرياضية للتوابع المركبة واستخرج الشرط اللازم والكافي الذي يحدد متى يكون $F(z)$ تابعاً تحليلياً .

س ٣.١٣ : استخرج قانوني بلازيوس - تشابلين الأول والثاني وأوضح أهميتها العملية .

س ٤.١٣ : اشرح أسس طريقة التمثيل المطابق وبرهن خاصية ثبات الزوايا ونسبة الأطوال اللانهائية الصغر .

س ٥.١٣ : برهن أن التمثيل المطابق لا يغير قيمة الجولان . كيف نحدد قيمة الجولان الإجمالي في التمثيل المطابق للجريان حول دائرة على الجريان حول برونيل جناح حائل ؟

٩.١٢ : اشرح مبادئ طريقة المودوغراف .

٩.١٣ : بمساعدة تابع عكس يوكوفسكي (13.10)، يراد نقل الدائرة C من المستوى $[z]$ إلى المستوى $[z']$.

ليكن M مركز الدائرة C ونصف قطرها c ، $\overline{BM} = R > c$ ، حيث B نقطة من C ومن المحور x السالب على بعد c من مركز الإحداثيات والتي تمر منها ومن نظيرتها النقطة A الدائرة C_0 ، الشكل (٩.١٣) : أوجد بطريقة تحليلية - بيانية صورة الدائرة C في $[z']$.

الحل : في الشكل (٩.١٣) رسم المستويين $[z]$ و $[z']$ فوق بعضها البعض من مركز إحداثيات واحد O . ونلاحظ أن المركز M يتحدد بالطول $\overline{OM} = m$ وبزاوية $\angle MOy = \alpha$.

لتكن نقطة P (r, φ) من C فيكون $\overline{MP} = R$ ، وتنتج من المثلث OMP العلاقة :

$$R^2 = r^2 + m^2 - 2rm \sin(\alpha + \varphi) \quad (a)$$

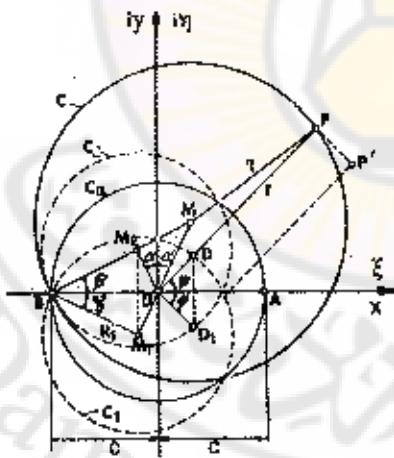
بواسطة تابع الانعكاس Inversion :

$$\zeta = \frac{c^2}{z} \quad (b)$$

التي تبدل الدوائر والمستقيمات في المستوى $[z]$ إلى دوائر ومستقيمات في المستوى $[z']$ ، نجد بوضع $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ ، $z = re^{i\varphi}$ وبعد فصل الجزء الحقيقي عن التخيلي أن

$$\rho = \frac{c^2}{r} \quad (c)$$

فإذا كانت D نقطة واقعة على $\overline{OP}$ ومثل صورة P المرآتية (الانعكاسية) بالنسبة للمركز O ، وبالتالي تحقق العلاقة (c) فيكون $\overline{OD} = \rho = c^2/r$ ، بذلك تنتج من (a) العلاقة :



الشكل ٩.١٢

$$p^2(R^2 - m^2) + 2m c^2 p \sin(\alpha + \varphi) - c^4 = 0 .$$

التي تصبح بوضع :

$$a_1 = \frac{m c^2}{R^2 - m^2} , \quad a_2 = \frac{c^4}{R^2 - m^2}$$

من الشكل :

$$p^2 + 2a_1 p \sin(\alpha + \varphi) - a_2^2 = 0 . \quad (d)$$

بإدخال إحداثيي النقطة D : $x = p \cos \varphi$ ، $y = p \sin \varphi$ (الشكل ت ١٠١٣)

في (d) تنتج معادلة المحل الهندسي للنقاط D بالصيغة :

$$(x + a_1 \cos \alpha)^2 + (y + a_1 \sin \alpha)^2 = a_1^2 + a_2^2 , \quad (e)$$

وهي معادلة الدائرة C_1 التي تمثل الصورة المرآتية للدائرة C بالنسبة للمركز O ، والتي يقع مركزها M_1 على امتداد OM ويتحدد بالإحداثيين :

$$x_1 = -a_1 \cos \alpha ; \quad y_1 = -a_1 \sin \alpha \Rightarrow OM_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = a_1 , \quad (f)$$

ويبلغ نصف قطرها

$$R_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{R c^2}{R^2 - m^2} . \quad (g)$$

لتكن γ الزاوية التي يصنعها BM_1 مع x . من المثلث OBM_1 ينتج :

$$\overline{OM_1} / \overline{M_1B} = a_1 / R_1 = \sin \gamma / \cos \alpha \Rightarrow \sin \gamma = \frac{a_1}{R_1} \cos \alpha = \frac{m \cos \alpha}{R} . \quad (h)$$

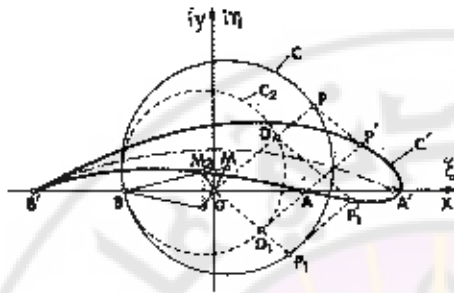
ولكن من الشكل (ت ١٠١٣) نجد بسهولة أن $m \cos \alpha = R \sin \beta$ ، حيث β الزاوية التي يصنعها $\overline{BM}$ مع x . وعليه تكون الزوايا :

$$\gamma = \beta , \quad (i)$$

وبالتالي فالمستقيمان MB ، M_1B متناظران بالنسبة للمحور x . فإذا عكسنا الدائرة C_1 بالنسبة للمحور x نحصل على الدائرة C_2 التي يقع مركزها M_2 على BM ويكون المستقيمان MO ، M_2O متناظران بالنسبة للمحور x ، بذلك يتحدد موقع M_2 مباشرة .

نعود الآن لتابع تمثيل يوكوفسكي $z = z + c^2/z$ ونكتبه بوضع $z = re^{i\varphi}$ واستخدام رموز الشكل (ت ١٠١٣) والعلاقة (٢) بالصيغة :

$$\zeta = r e^{i\varphi} + \frac{c^2}{r} e^{-i\varphi} = \overline{0P} \cdot e^{i\varphi} + \overline{0D} \cdot e^{-i\varphi} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0P'} \quad (1)$$



الشكل ت ٢.١٣ : طريقة تريفتس البيانية لتحديد شكل بروفيل يوكوفسكي .

على أساس ما تقدم طور تريفتس (راجع [27]) طريقة بيانية عملية لتحديد شكل بروفيل يوكوفسكي بوضعها الشكل (ت ٢.١٣) (انظر أيضاً الشكل (٩.١٣)) حيث يكفى رسم الدائرة C والدائرة C₂ التي مركزها M₂ ونصف قطرها R₁ حسب (g). ويتم تحديد مجموعة من النقاط p_i التي توصل مع بعضها البعض فيحدد بذلك شكل البروفيل (p).

ت ٢.١٣ : أوجد مساعدة قانوني بلازيوس - تشابليجين عصلة قوى الضغط المؤثرة على أسطوانة دائرية نصف قطرها R تدور بسرعة زاوية ثابتة ω في جريان منتظم باتجاه x - سرعته u_∞ ، وعزم هذه العصلة .

الحل : الجريان حول الأسطوانة يكافئ جرياناً جولانياً ينتج من تضام جريان إنسحابي مع ثنائية مستوية وإعصار كوني جولاً ω = 2πR² و عليه فإن تابع الكمون المارصك للجريان يعطى بالعلاقة (13.32) التي نشتقها بالنسبة لـ z فنجد :

$$\overline{W}(z) = \frac{dF_{CI}}{dz} = -u_{\infty} \left(z - \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (a)$$

ندخل (a) في قانون بلازيوس - تشابليجين الاول (13.43) :

$$F_{px} - iF_{py} = i \frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dF_{CI}}{dz} \right)^2 dz \quad (b)$$

ونلاحظ أن النقطة الشاذة z = 0 تثل قطعاً بالنسبة للمشتق dF_{CI}/dz الذي يثل نفسه تابعاً تحليلياً. وعليه يكون بموجب قانون الرواسب التكاملي المغلق لكافة الحدود ما عدا الحد الذي يدخل فيه 1/z معدوماً. وبالتالي ينتج من (b) باعتبار $\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$:

$$F_{px} - i F_{py} = -i \rho u_{\infty} I' \Rightarrow F_{px} = 0 ; F_{py} = \rho u_{\infty} I' . \quad (c)$$

هذا يعني أن القوة باتجاه x ، أي المقاومة ، معدومة ، بينما تتعرض الاسطوانة لقوة شاقولية عمودية على اتجاه u_{∞} ، أي لقوة رفع قيمتها بالنسبة لوحدية ارتفاع الاسطوانة:

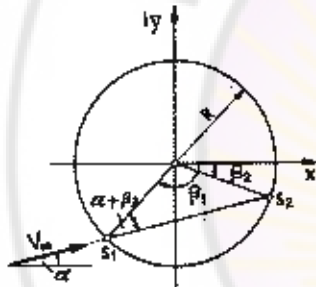
$$F_A = \rho u_{\infty} I' = \rho u_{\infty} 2\pi R^2 \omega . \quad (d)$$

من قانون بلازيوس - تشابلنجرين الثاني (13.15) نجد بنفس الخطوات السابقة $M_1 = 0$ ، وبالتالي فإن القوة F_A تؤثر في مركز الاسطوانة المنطبق على مركز الاحداثيات .

ت ٣.١٣ : إن تابع الكمون المركب للجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية نصف قطرها R يعطى بالعلاقة :

$$F(z) = V_{\infty} \left(z e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{i I'}{2\pi} \ln z , \quad (a)$$

حيث α الزاوية بين السرعة غير المشوشة V_{∞} والمحور x ، الشكل (٣.١٣) . ما هي قيمة الجولان عندما يطلب أن يشكل نصف القطر



الشكل ت ٣.١٣

المار من نقطة الركود الخلفية S_2 مع المحور x زاوية محددة β_2 ؟ برهن أنه في هذه الحالة تكون نقطة الركود الامامية S_1 واقعة على الخط الموازي لاتجاه V_{∞} والمار من S_2 . كم تبلغ الزاوية α عندما تنطبق نقطتا الركود على بعضهما البعض ؟

الحل : في نقطتي الركود الامامية والخلفية تكون السرعة معدومة . من (13.10) نحصل على السرعة المركبة المرافقة باشتقاق (a) :

$$\bar{w}(z) = V_{\infty} \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{z^2} e^{i\alpha} + \frac{i I'}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{z} \right) . \quad (b)$$

في النقطة S_2 حيث $z_2 = R e^{-i\beta_2}$ تكون $\bar{w}(z) = 0$ ، وعليه ينتج من (b) بعد وضع $z = z_2$ وضرب طرفيها بـ $e^{-i\beta_2}$ وملاحظة ان :

$$\frac{1}{2i} (e^{-i(\alpha+\beta_2)} - e^{i(\alpha+\beta_2)}) = -\sin(\alpha + \beta_2) \quad (c)$$

وإجراء إصلاح بسيط للجولان :

$$F = 4\pi R V_{\infty} \sin(\alpha + \beta_2) . \quad (d)$$

نرسم الآن من S_2 مستقيماً موازياً لاتجاه V_{∞} فيتقاطع مع الدائرة في S_1 ويحدد نصف القطر المار من S_1 مع x الزاوية $(2\alpha + \beta_2)$. في S_1 ، المحددة بموجب الشكل

(ت ٣.١٣) ولأن $e^{-1\pi} = -1$ بالاحداثي $z_1 = -R e^{i(2\alpha + \beta_2)}$ ، يجب أن نعدم السرعة إذا كانت S_1 تمثل نقطة ركود . نستبدل في (١١) ب z_1 و F حسب (د) فنجد بعد التصحيح والانتباه للعلاقة (ع) أن :

$$\bar{w}(z_1) = \frac{dF(z_1)}{dz} \Big|_{z=z_1} = 0 \quad (ع)$$

وبالتالي فالنقطة S_1 هي نقطة ركود .

عندما تزداد قيمة الجولان تقترب نقطتا الركود S_1 و S_2 من بعضهما البعض . ونتنتج حسب (د) القيمة الامتضية للجولان من أجل $\sin(x + \beta_2) = 1$ وبالتالي من أجل $\alpha + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ، عندئذ يكون :

$$F' = F'_{\max} = 4\pi V_{\infty} R \quad \text{من أجل} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta_2 \quad (ف)$$

★ ★ ★

١٤ الطريقة البيانية (الهندسية) لحساب الجريانات المستوية

يتميز حقل الجريان الكهرومغناطيسي المستوي بأن خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ وخطوط الكمون $\Phi = \text{const}$ تشكل شبكة منحنيات متعامدة (ص ١١٧) ، وتكون نسبة طول كل عين من عيون الشبكة ، إلى عرضها ، $\Delta s / \Delta n$ ، ثابتة لعلاقة محددة ، كالمعادلة اللاحقة (14.5) .



على هذا الأساس يمكن إيجاد حل بياني (هندسي) لمعادلة لابلاس (10.6) أو (10.10) التي يحققها كل من تابع الكمون Φ وتابع التيار Ψ .

نفرض ان خطوط التيار قد رسمت بحيث يمر ما بين كل خطي تيار متجاورين نفس التيار الحجمي ΔQ ، الشكل

(١.١٤) . عندئذ يكون بموجب (10.12) :

$$\Psi_m - \Psi_{m-1} = \Delta\Psi = \Delta Q = \text{const} \quad (14.1)$$

الشكل ١.١٤ : شبكة منحنيات متعامدة مؤلفة من خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ وخطوط الكمون $\Phi = \text{const}$.

حيث $m = 0, 1, 2, \dots$. لنفرض أيضاً أن خطوط الكمون في كامل حقل الجريان تحقق العلاقة :

$$\Phi_n - \Phi_{n-1} = \Delta\Phi = \text{const} , \quad (14.2)$$

حيث $n = 0, 1, 2, \dots$ و Δ تعني هنا فرقاً وليس له علاقة بمعامل لابلاس .

ليكن « n » الاحداثي باتجاه خط التيار و « n » الاحداثي الناطمي عليه . عندئذ تكون السرعة بموجب (10.3) :

$$V_s = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \approx \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} , \quad (14.3)$$

وينتج من معادلة الاستمرار والانتباه للشكل (١٠١٤) :

$$\Delta\Phi = \Delta Q = V_s \cdot \Delta n \Leftrightarrow V_s = \frac{\Delta\Phi}{\Delta n} . \quad (14.4)$$

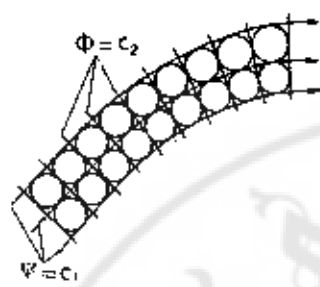
بذلك نجد العلاقة الهامة التالية :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{\Delta n}{\Delta s} = \text{const} , \quad (14.5)$$

التي تعني أن نسبة طول إلى عرض عين الشبكة المنشكلة من خطوط التيار وخطوط الكمون لجريان غير قابل للانضغاط تبقى ثابتة . فإذا اعتبرنا للبساطة $\Delta n/\Delta s = 1$ فإن عيون الشبكة تصبح بشكل مربعات ويمكن في كل الاحوال رسم دوائر ضمنها ، الشكل (٢٠١٤) .

إن الطريقة الهندسية الموضحة أعلاه تصلح لحل مسائل الجريان الاساسية الثلاثة . ولكن حل المسألة الاساسية الثانية التي يكون فيها شكل الجسم معلوماً أو تكون الحدود الثابتة لحقل الجريان معطاة يتطلب جهداً مضافاً في الرسم لضرورة

اتباع طريقة الخطوات التقريبية المتتالية وبالتالي إجراء تصحيحات عديدة



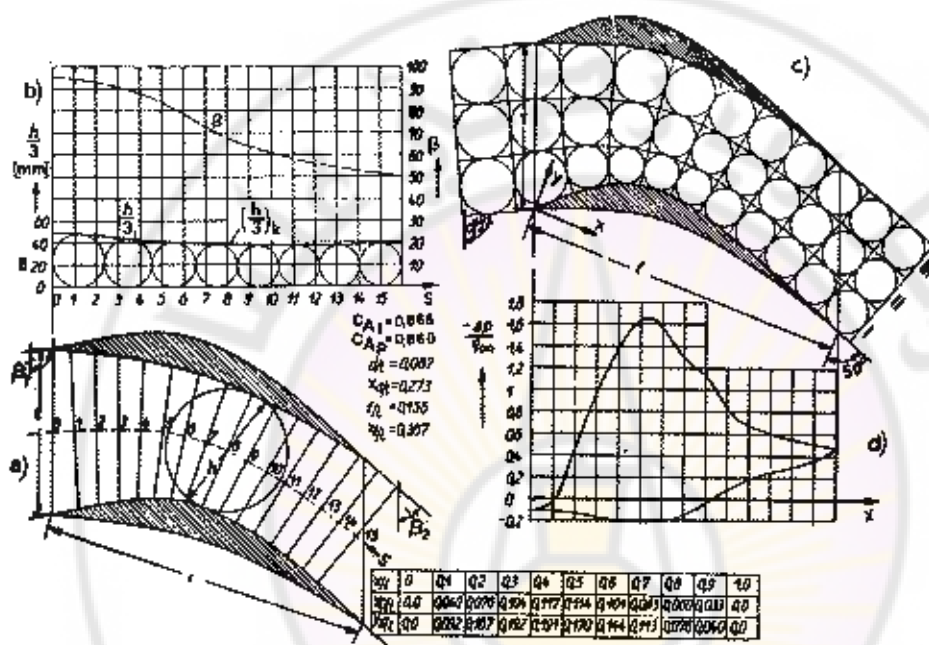
الشكل ٢٠١٤ : عيون شبكة
الخطوط المتعامدة لجريان مستو
غير قابل للانضغاط تكون بشكل
مربعات يمكن رسم دوائر ضمنها .

للحصول على صورة الجريان الصحيحة . بالمقابل
فإن حل المسألة الأساسية الأولى يكلف جهداً
أقل لأن حدود حقل الجريان المطلوبة تتحدد
من خلال رسم شبكة الخطوط المتعامدة .
ويخفف جهد الرسم كثيراً إذا استخدمت مجموعة
جاهزة من الصفائح الدائرية ذات الأقطار
المتزايدة تدريجياً حيث يلزم عندئذ الانتباه
لكي تكون الخطوط المماسية والناظمية على
الصفائح المتجاورة متعامدة مع بعضها البعض .

إذا كانت حدود قناة الجريان الصلبة معلومة ترسم في التصميم البدائي حزمة
من خطوط الكمون التقريبية متعامدة مع هذه الحدود التي تمثل خطوط
التيار الخارجية . ثم ترسم حزمة من خطوط التيار التقريبية أيضاً والمتعامدة مع
خطوط الكمون . وينصح أن تؤخذ خطوة التقسيم Δs و Δn في اتجاه
الجريان وناظمياً عليه صغيرة قدر الامكان ولكن بحيث تكون $\Delta s \approx \Delta n$.
في التصميم اللاحق يصبح التصميم البدائي باستخدام الصفائح الدائرية . ولكن
ينصح في المناطق التي يتغير فيها مسار الحدود الثابتة كثيراً أن ترسم أقطار عيون
الشبكة المربعة باتجاهين فتشكل هذه الأقطار نفسها مربعات يمكن بواسطة
الصفائح الدائرية تصحيحها للحصول على صورة أدق للجريان .

لقد استخدم ألبرنغ W. Albring [7a] [148] طريقة الصفائح الدائرية
لحساب الجريان المستوي غير القابل للانضغاط عبر شبك بروفيلات مستقيم كمسألة
أساسية أولى ، حددت فيها زاوية الدخول β_1 والخروج β_2 ، وبالتالي زاوية
انحراف الجريان $\beta_2 - \beta_1$ ، ونسبة التقسيم t/l ونسبة السماكة للبروفيل d/l .

واستعمل لهذه الغاية صفائح دائرية أقطارها تتزايد ما بين 25 إلى 65 mm ،
بمعدل 1 mm . وبين الشكل (٣.١٤) الخطوات العملية لتصميم شبك من أجل
زاوية دخول $\beta_1 = 95^\circ$ وخروج $\beta_2 = 50^\circ$ ونسبة تقسيم $t/l = 0,5$.



الشكل ٣.١٤ . استخدام طريقة الصفائح الدائرية لتصميم شبك مسرع يحقق القيم
المعطاة : $t/l = 0,5$, $\beta_2 = 50^\circ$, $\beta_1 = 95^\circ$. (a) التصميم البدائي ، (b) تحديد أقطار
الصفائح الدائرية لحيط التيار الانتصافي ، $\Delta n_{II} = h/3$ ، وزاوية ميلها β : القيم $(h/3)_k$
المصححة لـ Δn_{II} ، (c) التصميم الأول للشبك وتحديد شكل البروفيل ، (d) توزيع معامل
الضغط $c_p = \Delta p / \rho u_\infty^2$ ، معامل قوة الرفع بموجب قانون الدفع الخطي ، معامل
قوة الرفع الناتج من توزيع الضغط ، c_l/l ، d/l ، الناقة العظمى وبعدها عن أنف
البروفيل ، x_{gl}/l ، الانحناء الأعظمي وبعده عن أنف البروفيل ، حسب [7a] .

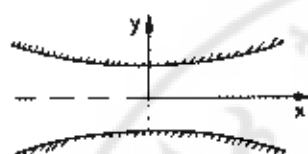
في التصميم البدائي ، الشكل (٣.١٤ - a) ، رسم كخطوة أولى خط التيار
الانتصافي s ، وحددت خطوة التقسيم t وطول الوتر l بحيث تتحقق نسبة التقسيم

المعطاة . كما رسم شكل البروفيل التقريبي بحيث يحقق الشبكة المرغوبة تقريباً .
بعدئذ قسم عرض قناة الجريان b ما بين بروفيلين الى ثلاثة خطوط تيار I, II, III
(يمكن طبعاً أخذ عدد أكبر !) ، فيكون العرض الوسطي لكل منها
 $\Delta n_{II} = b/3$. في الشكل (٣٠١٤ - b) رسم تغير Δn_{II} على طول s ، وبذلك
تمددت أقطار الصفائح الدائرية . وتتحدد وضعيتها من زاوية الميل الموضعية
 $\beta = f(s)$ لحيط التيار الانتصافي .

في التصميم المصمم للشبك كخطوة تقريبية أولى ، الشكل (٣٠١٤ - c) ،
ترتب الصفائح الدائرية لحيط التيار الانتصافي II مع مراعاة زاوية الميل β ،
ومن ثم ترتب دوائر حيط التيار العلوي III والسفلي I ما بين النواظم المشتركة
لدوائر حيط التيار II . بذلك يتحدد شكل الطرف السفلي D (طرف الضغط)
للبروفيل كمماس مشترك لدوائر حيط التيار III ، وشكل الطرف العلوي S
(طرف السحب) كمماس مشترك لدوائر حيط التيار I . ويتحدد شكل البروفيل
إذا رسمنا من نقاط المماس المشترك العلوي أو السفلي قطعاً مستقيمة موازية لجبهة
الشبك بطول t ووصلنا نهاياتها مع بعضها البعض .

طريقة الصفائح الدائرية تصلح أيضاً لحساب حقل الجريان المتناظر دورانياً
غير القابل للانضغاط . ولكن في هذه الحالة تكون نسبة طول عين الشبكة على
عرضها تابعة للبعد عن المحور التناظري [7a] [8] . كما يمكن أيضاً استخدام
الطريقة البيانية لحساب حقل الجريان المستوي القابل للانضغاط ، حيث تتعلق
نسبة طول الى عرض عين الشبكة بكثافة السائل $\rho = \text{const}$. وفي هذه الحالة
ينصح ، بدلاً من الصفائح الدائرية ، باستخدام صفائح جاهزة بشكل قطوع
ناقصة نسبة أقطارها متغيرة . وقد استخدمت مثل هذه الصفائح فعلاً لحساب
الجريان تحت وفوق الصوفي عبر شبك بروفيلات يصلح لحرف التيار حتى زوايا
كبيرة $\theta = \beta_1 - \beta_2$ [148] [149] .

كذلك يوضح استخدام طريقة الصفائح الدائرية من رسم شبكة خطوط التيار والكمون لجريان غير قابل للانضغاط يعبر القناة المستوية المبينة في الشكل (٤.١٤) والمحددة أبعادها كنصميم بدائي في الجدول (١.١٤) ، كما ستحدد توزيع السرعة V/V_0 على المحور x المنطبق على محور القناة وعلى طول جدارها - أ - ، بفرض V_0 السرعة في مقطع القناة الأصغري .



الشكل ٤.١٤ : قناة مستوية.

إن القناة متناظرة بالنسبة للمحورين x و y .
لذا فكتفي رسم شبكة خطوط التيار والكمون المتعامدة في الربع الأول فقط ، وننطلق من تقسيم مقطع الجريان إلى ثلاثة خطوط تيار (أنابيب تيار) عرض كل منها $\Delta n = y/3$ ، الجدول (١.١٤) :

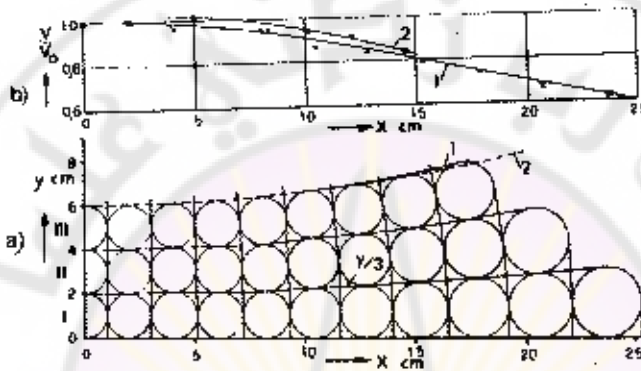
الجدول ١.١٤ :

x cm	0	5	10	15	20	25
y cm	6.00	6.16	6.64	7.44	8.58	10.00
$y/3$ cm	2.00	2.05	2.21	2.48	2.86	3.33

نرسم المنحني $y/3 = f(x)$ ثم نرسم بدءاً من $x=0$ دوائر تمس المحور x والمنحني $y/3$ وبعضها البعض، الشكل (٤.١٤-أ) ، فيحدد شكل خيط التيار I . نرسم المماسات المشتركة لهذه الدوائر بشكل عمودي على المنحني $y/3$ ، أي على اتجاه الجريان ، ونعددها للأعلى ، ثم نرسم من الحالات المحددة فوق دوائر خيط التيار I دوائر خيط التيار II . فإذا رسمنا المماس المشترك لكل دائرتين متجاورتين منها في اتجاه الجريان يتحدد شكل التيار المحد لأنبوبة التيار II . بنفس الطريقة نرسم مجموعة الدوائر III ، فيحدد مماسها المشترك في اتجاه الجريان جدار القناة . (المنحني 2 في الشكل ٤.١٤-أ) . ونلاحظ من الشكل أن التصميم البدائي والنهائي لجدار القناة متطابقان باستثناء منطقة صغيرة في نهاية القناة . ولكن هذا التطابق لا يمكن اعتباره قاعدة عامة في كل الأحوال . ويجدر الانتباه أن عدم الدقة في الرسم أو نقل قيم $y/3$ للتصميم البدائي يؤدي لعدم انتظام أشكال عيون الشبكة وبالتالي لعدم انتظام مسار خطوط التيار المتجاورة .

لحساب توزيع السرعة $V/V_0 = f(x)$ على المحور x وعلى جدار القناة بقياس أطوال عيون الشبكة Δs على المحور x وعلى الجدار ، وحيث أن $V = \Delta\Phi/\Delta s$ ، بموجب (14.3) ، فتكون السرعة $V_0 = \Delta\Phi/\Delta s_0$. وبالتالي يكون :

$$V/V_0 = \Delta s_0/\Delta s \quad (14.6)$$



الشكل ١٤.١٦ : تحديد صورة الجريان وحقل السرعة في قناة مستوية .
 a) شبكة خطوط التيار وخطوط الكمون المتعامدة : (1) جدار القناة
 بموجب التصميم البدائي ، (2) جدار القناة النهائي ، b) توزيع السرعة
 على طول محور القناة (1) وعلى جدار القناة (2) ، حسب [7a] .

فإذا وضعنا $\Delta s_0 = 2 \text{ cm}$ ورسمنا قيم V/V_0 فوق منتصف كل عين شبكة نحصل على توزيع السرعة المبين في الشكل (١٤.١٦ - b) ، حيث يمثل المنحني (1) توزيع السرعة على محور القناة والمنحني (2) توزيع السرعة على جدارها . ونلاحظ أن الفرق بين السرعة على محور القناة وعلى جدارها صغير جداً بسبب كون توسع القناة التدريجي ضعيف جداً . كما نلاحظ أن آخر قيمة للسرعة على الجدار أمكن تسجيلها كانت من أجل $x = 14.5 \text{ cm}$.

١٥ الطرق التماثلية

١.١٥ الاسس الفيزيائية والرياضية

كلما كانت أشكال أجسام الجريان معقدة (لنفكر مثلاً بالدولاب الدائر والثابت أو بغلف عنفة أو مضخة ، أو بالصمامات ووصلات الانابيب الاخرى)

كلما ازداد الجهد الحسابي اللازم لتحديد القيم الهيدروديناميكية لحقل الجريان . وحتى مع استخدام الحاسبات الالكترونية فإن استخراج المعادلات الرياضية وبرمجتها يتطلب جهداً لا بأس به . لذلك يقتصر استخدام الطرق التحليلية لحل مسائل الجريان الكهرومغناطيسي الاساسية على الحالات التي يطلب فيها تحديد القيم الهيدروديناميكية بدقة عالية ، بهدف استخدامها كأساس لتحديد دقة النتائج لطرق تقريبية ، مثل الطرق البيانية أو طريقة النقاط الشاذة ، ومجال تطبيقها .

بالنسبة لعدد كبير من مسائل الجريان العملية هذه ، التي لا يؤثر على نتائجها الحسابية وجود خطأ نسبي محدود 3% إلى 5% ينصح باستخدام إحدى الطرق التماثلية Analogy- Methods التجريبية لقياس حقل الجريان الكهرومغناطيسي [13] . هذه الطرق تعتمد على الاسس الفيزيائية والرياضية التالية :

تسمى ظاهرتان أو عمليتان من حقلي فيزيائيين مختلفين عمليتين متماثلتين أو تماثليتين Analogical processes إذا خضعتا لنفس المعادلة التفاضلية . مثل هذه الخواص التماثلية تربط فعلاً ، كما سبق التنويه ، بين الحقل الهيدروديناميكي وحقول فيزيائية متعددة مثل الحقل الإلكتروليتي والكهرطيسي ، ويمكن استخدامها لحل مسائل الجريان من جهة أو لتطبيق الطرق الحسابية المعروفة في الهيدروديناميك لحل مسائل من حقول فيزيائية أخرى مثل الجريان عبر أجسام مسامية ، والانتقال الحراري .

لنعتبر ظاهرة فيزيائية ما تخضع لقانون طبيعي مصاغ بحيث أن شعاع التدفق Flux vortex ، f ، يتناسب مع شعاع التدرج لقيمة عددية B . فإذا وضعنا معامل التناسب مساوياً الواحد يكون :

$$f = \text{grad } B \quad (15.1)$$

إضافة لذلك نفرض أن الكمية M المشتركة في العملية الفيزيائية تبقى ثابتة ،

حيث لا يمكن أن يعبر أي جزء منها خطوط المسار (أو خطوط القوة أو خطوط التيار !) . عندئذ تكون (انظر ص ٢٠٥) :

$$M = \iint f \cdot dA \quad (15.2)$$

حيث dA شعاع الناظم على العنصر السطحي dA الذي يخترقه جزء من الكمية M .
على أساس ما تقدم ، وبفرض أن الظاهرة الفيزيائية (المستوية) يمكن
حصر دراستها في المستوي xy ، تكون العلاقات الأساسية التالية محققة :

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = (\text{rot } f)_z = 0 \quad (15.3)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = \text{div } f = 0 \quad (15.4)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \Delta B = 0 \quad (15.5)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \Delta M = 0 \quad (15.6)$$

حيث Δ معامل لابلاس . القيمة B يمكن ان تمثل أيضاً قيمة فراغية ونحقق
عندئذ معادلة لابلاس التفاضلية ثلاثية البعد ؛ بينما تخضع M لمعادلات ثنائية
البعد فقط .

باختيار M, B, f كقيم متماثلة لعمليات فيزيائية مختلفة نحقق جميعها معادلة
لابلاس التفاضلية نحصل على الجدول (١٠١٥) (انظر أيضاً الجدول ١٠١) الذي
يتضمن الخواص التماثلية بين حقل الجريان الهيدروديناميكي وحقول فيزيائية
مختلفة .

الجدول ١٠١٥ : مقارنة بين القيم المتأالة
لعمليات فيزيائية مختلفة فتوضح كلها لمعادلة لابلاس التفاضلية .

M	B	I	الحقل الفيزيائي
تابع التيار Ψ	تابع الكمون Φ	السرعة V	الحقل الهيدروديناميكي
تابع التيار الكهربائي Ψ_e	الكمون الكهربائي Φ_e	كثافة التيار i_e شدة الحقل H_e	الحقل الكهربائي (الكهروديناميكي)
ارتفاع قوس الغشاء المشدود x		زاوية ميل الغشاء ضد المستوي $y \times$	الغشاء الصابوني
كمية المسائل أو التيار الحجمي Q	الضغط الستاتيكي P_s	السرعة V	الجريان الزاحف أو الرشحي
كمية الحرارة Q_T	درجة الحرارة T	التيار الحراري أو السيالة الحرارية Q_T	التقل الحراري

بالنسبة للحقل الهيدروديناميكي المستوي يتضح من الجدول (١٠١٥) أن
العلاقة (15.3) تمثل شرط الخلو من الدوران (10.4) ، والعلاقة (15.4) شرط
الاستمرار (10.5) ، والعلاقين (15.5) و (15.6) معادلتي لابلاس لتحديد تابع
الكمون (10.6) وتابع التيار (10.10) .

فيما يلي سنوضح باختصار الطرق المبنيّة على الخواص التفاضلية المتضمنة في
الجدول (١٠١٥) . هذه الطرق طورها واستخدمها بنجاح لحل مسائل عملية
البرنغ [7a] وتلاميذه ، خاصة هاكيشمت [13][14] ، وتتميز بالمقارنة مع
الطرق التحليلية بالأفضلية التالية :

١ - جهد تكنيكي وزمني ومادي قليل نسبياً ، عندما يصغى بدقة

محدودة ، وخاصة في حالة تغيير برنامج البحث نتيجة تعديل مطالب المسألة المطروحة .

- ٢ - إجراء الحسابات بزمن قصير نسبياً حتى عند حل مسائل معقدة .
- ٣ - وضوح كبير في تمثيل القيم المعطاة وتابعياتها .

٢.١٥ التماثل مع الحقل الكهروديناميكي والكهراطيسي

تعرضنا مراراً للتماثل بين الحقل الهيدروديناميكي والكهروديناميكي (الإلكتروديناميكي) ، حيث بني عليه قانون بيو-سافار لتحديد حقل السرعة المحرصة من خيط إعصاري (انظر ص ٢٤٥) .

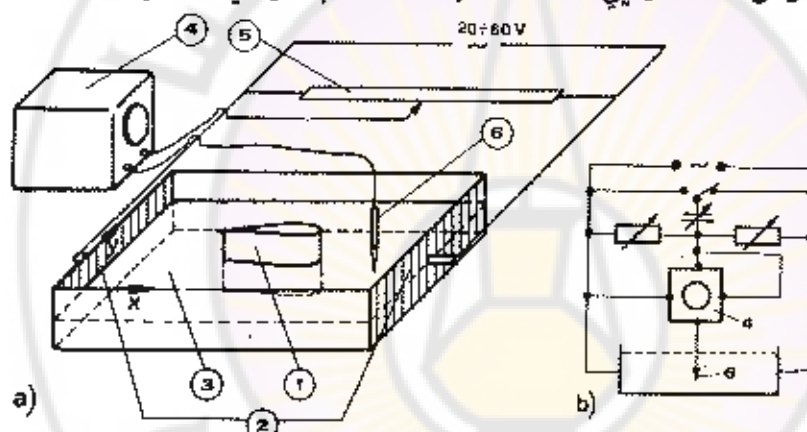
الجدول (١.١) ، ص ٢٤ و ٢٥ ، يتضمن معادلات القيم الأساسية للحقل الكهروديناميكي والكهراطيسي . وكما هو معلوم يتولد بين المصدر ، كقطب موجب (+) ، والمهبط ، كقطب سالب (-) ، تيار من الجزيئات الانتهائية الصغر المشحونة كهربائياً ، حيث تتحرك باتجاه المصدر الإلكترونات Electron أو الشاردات السالبة ، وباتجاه المهبط الأيونات Ion أو الشاردات الموجبة . ويربط بين الجهد U وسددة التيار I والمقاومة R قانون أوم $U = I \cdot R$. إن الجهد ينتج عن فرق كمون كهربائي $U = - \Delta \Phi$ ، ونحصل على شدة الحقل الكهربائي في اتجاه ما كمشق جزئي للكمون الكهربائي :

$$E_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; \quad E_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} . \quad (15.7)$$

بمقارنة هذه العلاقة مع (10.1) ، التي عرّجها تنتج مركبتا السرعة لجريان هيدروديناميكي كمشتقات جزئية لتابع كمون السرعة Φ ، يتجلى التماثل بين الحقل الهيدروديناميكي والكهروديناميكي . كما يمكن باستخدام تابع للتيسار

الكهربائي إيجاد علاقة مماثل تماماً للعلاقة (10.9) . وبحق كل من تابع الكمون وتابع التيار الكهربائيين معادلة لابلاس التفاضلية ، حيث يكون بموجب (15.5) و (15.6) والجدول (١٠.١٥) : $\Delta V_e = 0$, $\Delta \Phi_e = 0$ ، كما أن المعادلتين التفاضليتين (15.4) و (15.9) ، اللتين تمثلان شرط الاستمرار و شرط الخلو من الدورات بالنسبة للحقل الهيدروديناميكي ، معروفتان في علم الكهرباء باسم قانوني كيرشهوف الأول والثاني .

الاستفادة من التماثل الهيدرو - كهرو ديناميكي لحل مسائل الجريان يستخدم الخوض الإلكتروني Electrolytical tank المبين في الشكل (١٠.١٥) .



الشكل ١٠.١٥ : الخوض الإلكتروني لدراسة الجريان اللاجلولي حول برميل بالاستفادة من التماثل الهيدرو - كهرو ديناميكي . المنظور التوضيحي (a) رسم مبسط بالمقارنة مع دائرة التوصيل (b) . ① نموذج للبرميل ، ② قطبان من النحاس أو الغرافيت ، ③ قاعدة الخوض ، ④ أوسيلوسكوب ، ⑤ مقاومة منزلة ، ⑥ مسبار قاس .

يتألف الخوض من مادة عازلة باستثناء جدارين متقابلين يقومان مقام القطبين ويصنعان من معدن كالنحاس أو من الغرافيت ، ويوصلان بمقاومة كهربائية منزلة أو مقسمة عشرياً متصلة بتبع للتيار الكهربائي المتناوب . أما قاعدة

الحوض فتكون مستوية وأفقية تماماً . كحلول الإلكترونيتي يستخدم الماء ، وبغض في نموذج للجسم المراد دراسة الجريان حوله (جناح حامل مثلاً) الذي يصنع من مادة عازلة أيضاً .

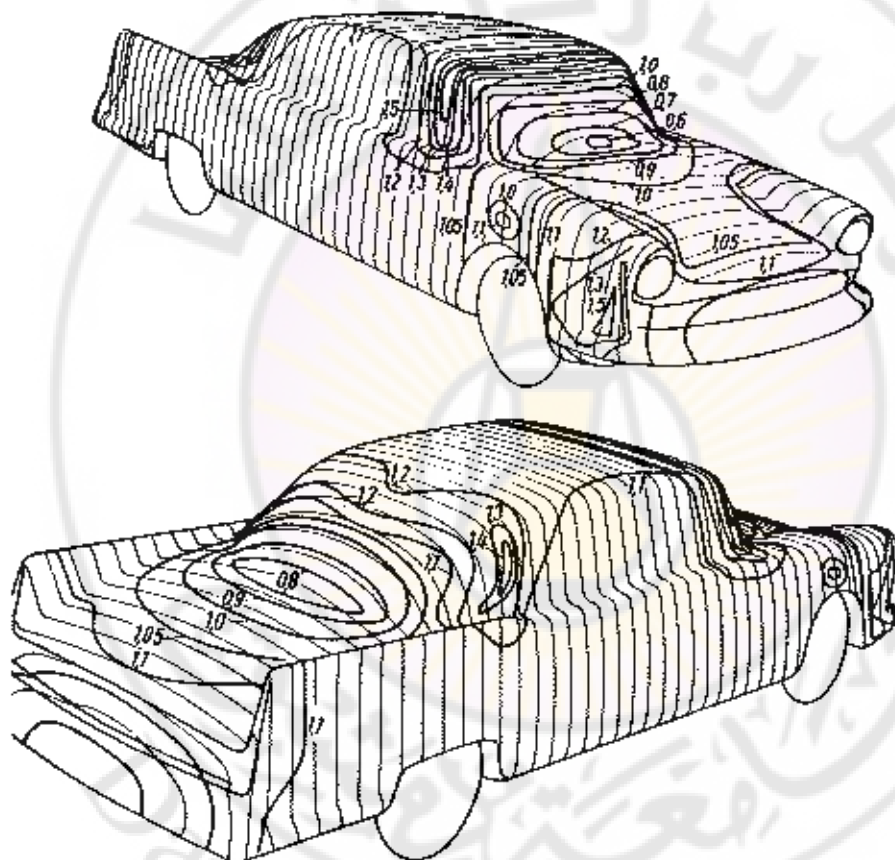
إن توصيل الدائرة الكهربائية للحوض الإلكتروني يطابق تماماً جسر وطسطن Wheatston bridge ، ويعمد بواسطة مبراس تماس ذي مقبض معزول ورأس مذهب إلى تحديد نقاط المنحنيات في المستوي $y \times x$ التي من أجلها لا يمر في الجسر أي تيار . هذه المنحنيات تمثل عندئذ خطوطاً للكمون الثابت . من أجل مقاومة معينة نحصل على كمون معين ، ثم تغير المقاومة مقداراً ثابتاً فنحصل على خط كمون آخر وهكذا . فإذا جعلنا قفزات تغيير المقاومة ثابتة في كامل الحقل فإن فرق الكمون يبقى ثابتاً ، $\Delta\Phi = \Delta\Phi_0 = \text{const}$. لتحديد حقل السرعة نقيس الأبعاد الناعمة Δs بين خطوط الكمون المتجاورة فنجد :

$$V = \Delta\Phi / \Delta s . \quad (15.8)$$

بدلاً من الحوض الإلكتروني الذي يصلح لدراسة المسائل الفراغية المعقدة ، والمستوية يمكن استخدام ورق خاص ناقل كهربائياً لدراسة المسائل المستوية ، حيث يقص من الورقة الناقلة للكهرباء شكل الجسم وتُرسم عليها مباشرة خطوط الكمون حول الجسم .

لقد طورت طريقة النماذج الكهربائي خلال حقبة قصيرة إلى مستوى عالٍ جداً ، خاصة من قبل هاكيشمت [13][14] . ودون التعرض هنا لتفاصيل أكثر نشير إلى أنه بمساعدة هذه الطريقة يمكن مثلاً قياس حقل السرعة في المصافي على أساس مراعاة معامل دشح يتعلق بالمكان [13] ، كما يمكن ربطها مع طريقة التمثيل المطابق لدراسة الجريان الجولاني واللاجولاني حول بروفييل جناح حامل [87] وعبر شبك بروفييلات مستقيم [88] ، وذلك دون حاجة لاستخدام طريقة

الخطوات المقاربة من أجل تحقيق شرط انعدام السرعة على الحافة الخلفية ، كذلك يمكن بمساعدتها دراسة الجريان عبر الدوالب الدائر لآلة قطرية ، وتحديد حقل السرعة داخل وصلات الانابيب المعقدة ومغلفات آلات الجريان أو تصميمها بشكل أفضل [97] . وبين الشكل (٣.١٥) ، كمنال ، استخدام طريقة التماثل الكهربائي لتحديد حقل السرعة حول هيكل سيارة . إن تحليل الشكل



الشكل ٣.١٥ : تحديد حقل السرعة حول هيكل سيارة مرعتها تكافئ $V=1$.
خطوط السرعة الثابتة رسمت بشكل اسمك قليلاً
من خطوط الكمون الثابت ، حسب [151] .

يسمح بتحديد المناطق التي تتعرض لخطر انفصام الطبقة الحديدية ، كما يسمح أيضاً باستخلاص نتائج تتعلق بتصميم الهيكل بحيث يصبح أقل مقاومة . فمثلاً يكون من الأنسب إذا كان تقوس السقف بشكل ربع قطع ناقص وليس كربع دائرة .

بالإمكان أيضاً استغلال التماثل الهيدرو-كهراطيسي (انظر ص ٢٤٥) .
إن شدة التيار التي يحرضها حقل مغناطيسي في سلك ناقل للكهرباء ، تماثل الجولان ،

وشدة الحقل المغناطيسي H_m

تماثل السرعة V ، وخطوط الحقل

تماثل خطوط التيار . وعليه

فإن خطوط القوة حول سلك

مستقيم ناقل للكهرباء تأخذ

شكل دوائر مركزية ، الشكل

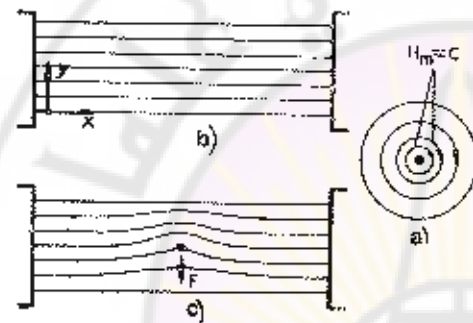
(٣.١٥ - أ) ، تماماً مثل

خطوط التيار ، أو خطوط

السرعة الثابتة للأعصار

الكموني . وتكون خطوط

القوة بين قطبين مغناطيسيين



الشكل ٣.١٥ : التماثل الهيدرو-كهراطيسي .

(« خطوط الحقل حول سلك ناقل للكهرباء ،

(« خطوط الحقل لمغناطيس دائم ،

(« نظام (أ) و (ب) .

مستويين ودائمين بمثابة مستويات متوازية ، الشكل (٣.١٥ - ب) ، تماماً مثل

خطوط التيار لجريان انسيابي منتظم . فإذا وضعنا السلك الناقل في مثل هذا

الحقل المغناطيسي ، فإن خطوط القوة تتعرض لانحراف كما هو مبين في الشكل

(٣.١٥ - ج) ، وتعرض السلك الناقل نفسه لقوة F متعامدة مع $H_m = \text{const}$.

هذه القوة تعادل قوة الرفع F_A التي تتعرض لها أسطوانة في جريان جولاني

(ككتضام لجريان انسيابي مع إعصار كموني) ونحسب بموجب قانون

كوتا-يوكوفسكي ، وتكون متعامدة مع اتجاه السرعة غير المشوشة

للجريان الانسيابي .

إن الهيدروديناميك المغناطيسي يعالج العلاقة بين الوسط السائلي المتحرك ،
والتيار الكهربائي المرحض والحقل المغناطيسي .

٣.١٥ التماثل مع الغشاء الصابوني

إذا فرضنا أن ضغط التقوس Δp_c المؤثر على غشاء أو قشرة صابونية
معدوماً ، وبالتالي إذا جعلنا الضغط الداخلي مساوياً للضغط الخارجي $p_1 = p_2$ ،
الشكل (١٢.٢) ، فإن العلاقة (2.41) تأخذ الصيغة :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Delta z = 0 \quad (15.9)$$

التي تبين أن ارتفاع تقوس الغشاء الصابوني يحقق معادلة لابلاس التفاضلية
التي يخضع لها تابع الكمون وتابع التيار للحقل الهيدروديناميكي المستوي .
لذلك يمكن اعتبار z تماثل Φ أو Ψ . ولكن بالنسبة لتيار جولاني ، $r \neq 0$ ،
فإن تابع كمون السرعة Φ يمكن أن يكون في بعض نقاط حقل الجريان متعدد
القيم (ص ٢٢٦) ، كما أن قيمته يمكن أن تتغير فجأة ، بينما لا يمكن لارتفاع
التقوس z أن يتعرض لمثل هذه القفزات ، وبالتالي لا يمكن في حالة الجريانات
الجولانية وضع z تماثلاً لـ Φ ، ولكن يمكن وضع :

$$z \simeq \Psi \quad (15.10)$$

لأن تابع التيار Ψ تابع مستمر ووحيد التعيين دائماً [7a] .

إن التماثل بين الحقل الهيدروديناميكي وغشاء المحلول الصابوني بموجب (15.10)
يسمى التماثل العكسي Inverse analogy . وهو معروف منذ زمن طويل ،
ولكنه لم يستغل لحل مسائل تقنية إلا منذ حوالي 20 عاماً بسبب الصعوبة
الكبيرة في قياس ارتفاع التقوس $z(x,y)$ بدقة كافية تسمح بتحديد حقل
السرعة المماثل .

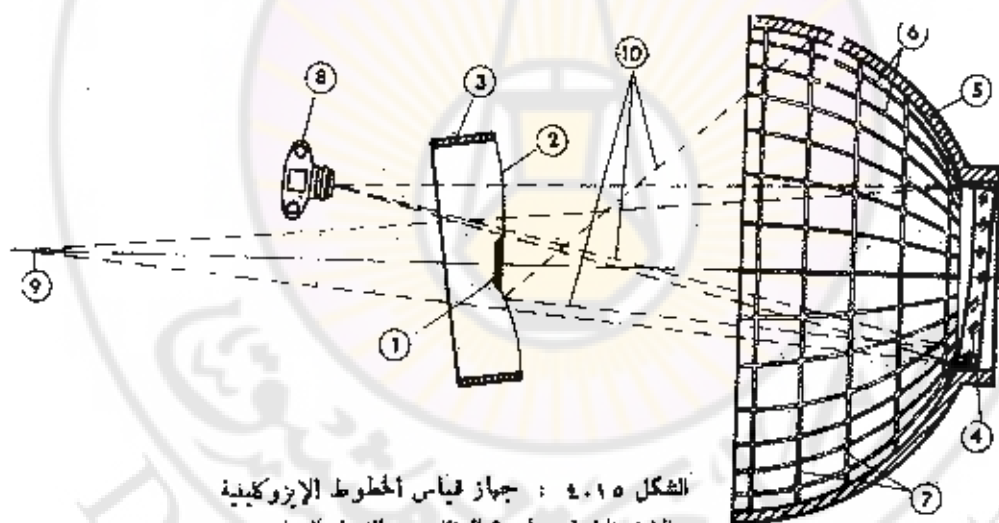
إن مركبتي السرعة تنتجان حسب (10.9) كمشتقات جزئية لتابع التيار :

$$u = \partial\psi/\partial y; \quad v = -\partial\psi/\partial x \quad (15.11)$$

وعليه يكون بموجب (15.10) ميل الغشاء الصابوني كشتقين جزئيين بالنسبة لـ x و y مماثلان لمركبتي السرعة :

$$|\partial z/\partial y| = u; \quad |\partial z/\partial x| = v \quad (15.12)$$

في ضوء ما تقدم فإن صعوبة الطريقة ناتجة من صعوبة تحديد خطوط الميل الثابت أو الخطوط الايزوكليتيّة *Isoclinic lines* بدقة كافية ، لكي يتم تحديد خطوط السرعة الثابتة أو الخطوط الايزوتاخيّة *Isotachic lines* . لهذه الغاية استخدمت حديثاً بنجاح طريقة القياس المبينة في الشكل (٤.١٥) والموضحة في [7a][150].



الشكل ٤.١٥ : جهاز قياس الخطوط الايزوكليتيّة

والايزوتاخيّة بمساعدة القنابل مع الغشاء الصابوني .

- ① النموذج ، ② غشاء صابوني ، ③ إطار الغشاء الصابوني ، ④ مرآة مقعرة ، ⑤ طاسة نصف كروية ، ⑥ دوائر طولية (زوايا) لتحديد الخطوط الايزوتاخيّة ، ⑦ دوائر عرضية لتحديد الخطوط الايزوكليتيّة ، ⑧ كاميرا ، ⑨ نقطة تقاطع الإشعاع الضوئية ، ⑩ طريق شعاع ضوئي ، حسب [7a] .

يثبت نموذج للجسم المراد دراسة الجريان حوله بشكل يمكن إزاحته في اتجاه z (الشكل ٥.١٥) داخل إطار ينصب فوق جوانبه الغشاء الصابوني . فوق النموذج والغشاء توجد نصف كرة فارغة في قعرها امرأة مقعرة وعلى جدارها رسمت دوائر عرضية وطولية ، تظهر ، بعد انعكاسها على الغشاء الصابوني ، في موقع الكاميرا كخطوط إيزوناخية وخطوط إيزوكينية . فالعملية لا تعدو كونها عملية تمثيل مطابق تجريدية لدوائر الطول والعرض .

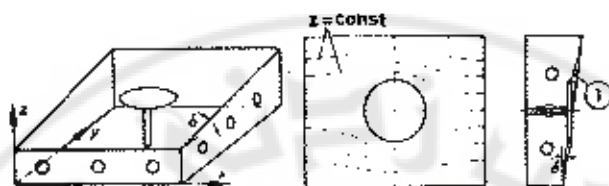
لدراسة الجريان الانسحابي المستوي حول دائرة مثلاً ، الشكل (٥.١٥) ، يستخدم إطار مفتوح جدرانه متقوية (لتحقيق تساوي الضغط p) وذات ارتفاع متغير . كنموذج تستخدم صفيحة دائرية حادة الاطراف . إن زاوية ميل الاطار الثابتة δ تتل حسب (15.12) السرعة غير المشوثة للجريان :

$$u_m = \frac{\partial z}{\partial y} = \tan \delta , \quad (15.13)$$

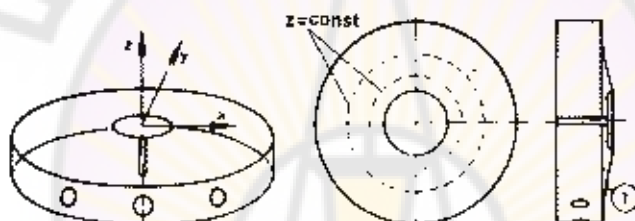
فاذا حددنا خطوط الميل الثابت ، $z = \text{const}$ ، للغشاء الصابوني المشدود فوق الاطار والنموذج (الخطوط المشرية في الشكل ٥.١٥) نحصل على صورة الجريان الانسحابي الالاجولاني حول دائرة (الشكل ٩.١٢) .

لدراسة الجريان الجولاني البحت حول الدائرة يستخدم إطار ذي جوانب ثابتة الارتفاع ، الشكل (٦.١٥) . عندئذ تكون $\delta = 0$ وبموجب (15.13) السرعة غير المشوثة أيضاً معدومة . فاذا أزحنا نموذج الدائرة في اتجاه z إلى ما فوق مستوى الإطار فإن خطوط الميل الثابت ، $z = \text{const}$ ، للغشاء الصابوني تظهر كدوائر مركزية ، تماماً مثل خطوط التيار لإعصار كوني ، الشكل (٤.١٠) . وعليه إذا أزحنا نموذج الدائرة في الشكل (٥.١٥) باتجاه z الموجب ، فإن ذلك يعادل تضام جريان انسحابي منتظم مع إعصار ، ونحصل على صورة لخطوط

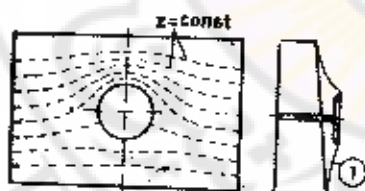
الميل الثابت للغشاء الصابوني ، الشكل (٧.١٥) ، بمثابة لصورة الجريان الجولاني حول دائرة ، الشكل (١٢.١٢) .



الشكل ٧.١٥ : دراسة الجريان الانسحابي الايجولاني حول دائرة باستخدام التناظر مع الغشاء الصابوني ① ، حسب [7a] .



الشكل ٧.١٦ : دراسة الجريان الجولاني البحت حول دائرة باستخدام التناظر مع الغشاء الصابوني ① ، حسب [7a] .



الشكل ٧.١٧ : دراسة الجريان الجولاني حول دائرة باستخدام التناظر مع الغشاء الصابوني ① .

مستخدمة في بعض مراحل العنقات البخارية . كما استخدمت الطريقة أيضاً لدراسة

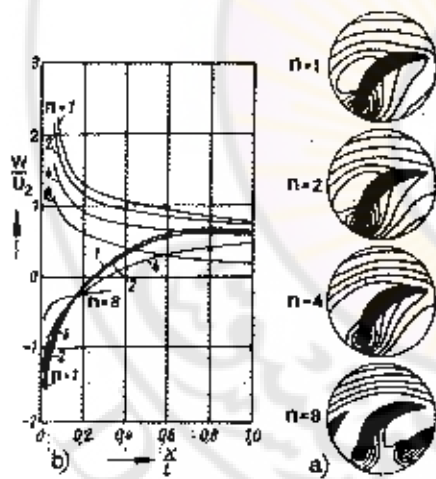
إن طريقة التناظر مع الغشاء الصابوني استخدمت بنجاح لحل مسائل معقدة ، يتطلب حلها بموجب الطرق العادية زمناً طويلاً وجهداً حسابياً كبيراً . من هذه المسائل دراسة الجريان عبر شبك مستقيم من بروفيلات كبيرة السماكة والانحناء ، كما هي

الجريان عبر شبك قطري لدولاب دائر . ولكن في هذه الحالة ، وبسبب أن تابع التيار لحقل الجريان النسي الدوراني داخل الدولاب الدائر يحقق معادلة بواسون Poisson (انظر ص ٢٢٣) [27] :

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 2\omega \quad (15.14)$$

وليس معادلة لابلاس ، يلزم لتحقيق التماثل مع الغشاء الصابوني أن نعطي ضغط التقوس Δp في العلاقة (2.41) قيمة تختلف عن الصفر ، وتماثل السرعة الزاوية ω [7a] . بعدئذ يمكن تحديد صورة الخطوط الإيزوتاخية ، وبالتالي توزيع السرعة ، حول بروفييل الشبك ، الشكل (٨.١٥) .

بمساعدة التماثل مع الغشاء الصابوني يمكن أيضاً تحديد إجهادات القص الناتجة عن قتل



الشكل ٨.١٥ : الخطوط الإيزوتاخية لشبك بروفييلات قطري عدد ريشه $n=1$ حتى ٨ ، وتوزيع السرعة حول البروفييل ، حسب [7a] .

فضيب اسطواني وذلك بتفخ غشاء صابوني حول بروفييل الفضيب [27] . في هذه الحالة يوضع تابع إجهاد القص لمعادلة بواسون . كذلك يمكن دراسة الجريانات الصداغية في أنابيب اسطوانية ذات مقاطع اعتباطية [7a] ، والجريانات الناتجة عن حركة صفيحتين مستويتين تفصلها مسافة صغيرة في سائل ذي لزوجة كبيرة ، حيث أن لهذه المسألة أهمية خاصة في النظرية الهيدروديناميكية للتزيت [150] ، وأخيراً يمكن أيضاً بمساعدة التماثل مع الغشاء الصابوني دراسة مسائل النقل الحراري المستوي المستقر ، حيث يكون في هذه الحالة $T = T(x, y)$.

٤.١٥ التماثل مع الجريان الزاحف أو الرشحي

عندما تكون لزوجة السائل كبيرة جداً ، أو السرعة صغيرة جداً ، بحيث أن عدد دينولدز (5.25) :

$$Re = \frac{\bar{V} l}{\nu} < 1 \quad (15.15)$$

(ولا يتجاوز بأي حال العشرة ، [7a]) فنسمي عندئذ حركة السائل حركـة زاحفة Creeping motion أو حركـة رشحية Seepage motion . مثل هذه الجريانات الزاحفة تتحقق عندما يتسرب مائع أو غاز عبر صـكـتـل رملية ، أو طبقات أرضية مسامية (حركة المياه الجوفية) أو أية مواد مرشحة Filter mass . وتتحقق أيضاً عندما يجري سائل بين جدارين متوازيين تفصلهما مسافة صغيرة جداً . في كل هذه الحالات تكون قوى العطالة بالمقارنة مع قوى اللزوجة صغيرة لدرجة يمكن إهمالها . وتكون المعادلة الحركية لهذه الجريانات (راجع [28a]) :

$$\text{grad } p_s = \eta \Delta V \quad (15.16)$$

حيث Δ هنا معامل لابلاس . فإذا أخذنا تفرق طرفي المعادلة ولاحظنا أنه يمكن استبدال موقعي Δ و div وأن $\text{div } V = 0$ نجد :

$$\text{div grad } p_s = \eta \Delta \text{div } V \Rightarrow \Delta p_s = 0 \quad (15.17)$$

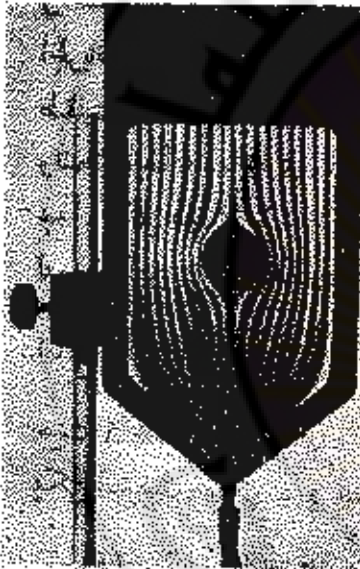
هذا يعني أن الضغط يخضع لمعادلة لابلاس ، مع اعتبار أن p_s يمثل هنا مجموع الضغط الستاتيكي وضغط الثقالة في معادلة برنولي (8.9) : $p_s = p + \rho g z$. على هذا الأساس فإن خطوط الضغط الثابت للجريان الزاحف تماثل خطوط الكمون للحقل الهيدروديناميكي اللادوراني المستوي . وتكون بالإضافة لذلك ، كما في الجدول (١.١٥) القيم التالية للحقلين متماثلة :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \Phi = p_s; \quad \Psi = \psi. \quad (15.18)$$

لقد كان داوسي Darcy أول من أثبت تجريبياً عام 1856 أن مركبة سرعة الرشح للجريانات الزاحفة تتناسب طردياً مع تدرج الضغط في اتجاه الإحداثي المطلوب . فإذا فرضنا k معامل التناسب تكون :

$$u = -\frac{1}{k} \frac{\partial p_s}{\partial x}; \quad v = -\frac{1}{k} \frac{\partial p_s}{\partial y}. \quad (15.19)$$

أما هل - شو Hehl-Shaw فكان أول من طور جهازاً عام 1898 يعرف



الشكل ٩.١٥ : جهاز هل - شو لتعريف الجريان حول دائرة باستخدام التباين مع الجريان الزاحف .

اليوم باسمه ، لتوثيق الجريانات المستوي حول نماذج معينة ، الشكل (٩.١٥) . فحيث أن خطوط التيار تأخذ اتجاه السرعة فانها تختلج في الجريان الزاحف عمودياً سطوحاً للضغط الثابت . لذلك إذا لونا بعض خطوط التيار للجريان بين صفيحتين زجاجيتين متوازيتين قريبتين جداً من بعضهما وثبت بينهما نموذج للجسم المراد توثيق الجريان حوله (صفيحة دائرية) فاننا نحصل بالتصوير مثلاً على صورة الجريان الهيدروديناميكي المستوي للمائل حول هذا الجسم . ولكن لا يمكن بمساعدة هذا الجهاز توثيق الجريان الجولاني حول جناح حامل . وعليه تبقى أهمية هذا الجهاز توضيحية أكثر منها علمية .

من جهة أخرى يمكن بمساعدة التباين مع الجريان الزاحف حل مسائل معقدة لعمليات جريان المياه الجوفية باستخدام النتائج المعروفة للحقل الهيدروديناميكي .

فشلًا يمكن على هذا الأساس تحليل عملية الرشع للبياء الجوفية والغوى الناتجة عنها المؤثرة على أساسات محطة طاقة كهربائية أو سد [7a][9][13] .

٥.١٥ التماثل مع النقل الحراري

باعتبار أن السالة الحرارية أو التدفق الحراري Q_p تتناسب طردياً مع معامل النقل الحراري ومع تدرج درجة الحرارة السالب فإنه بموجب الجدول (١.١٥) تكون خطوط الكمون للحقل الهيدروديناميكي المستوي بمائلة لخطوط درجة الحرارة الثابتة ، وخطوط التيار بمائلة لخطوط التيار الحراري . وعليه يمكن اعتبار صورة الجريان اللاجولاني حول دائرة كما في الشكل (٩.١٣) بمائلة لصورة النقل الحراري لصفحة مستوية ذات ثقب دائري ودرجة الحرارة على طرفها الأيسر والأيمن ذات قيمة محددة .

٦.١٥ أسئلة مراجعة وتمارين

١٠.١٥ : اشرح الأسس الرياضية والفيزيائية للطرق التفاضلية المستخدمة في حل مسائل الجريان وحدد مزاياها العامة بالمقارنة مع الطرق الأخرى المعروفة .

٢.١٥ : قارن بين الطرق التفاضلية المدرجة في الجدول (١.١٥) وبين أهمية كل منها العملية .

٣.١٥ : يتبن كيف يمكن بمساعدة التماثل مع الفشاء الصابوني حساب إجهادات القس الناتجة عن قتل قضيب مثبت في جدار من طرف واحد بفرض G معامل الانزاح ، θ زاوية القتل ، τ تابع الإجهاد .

١٠.١٥ : الشكل (١.١٥ ت) يمثل مقطع أنبوب مستقيم طويل جداً ذي جدران سمكية وبمر داخله بخار بدرجة حرارة ثابتة T_1 . خارج الأنبوب تنتقل الحرارة بالإشعاع ، إذا كانت درجة الحرارة على جدار الأنبوب الخارجي T_2 أو جد في حالة الاستقرار توزع درجة الحرارة في جدار الأنبوب .

الحل: إن الحقل الحراري في هذه الحالة يماثل هيدروديناميكياً حقل التبع المستوي ،

وبالتالي فإن تابع كوتن التبع ياتل بموجب الجدول (١.١٥) درجة الحرارة T . وبما أن معادلة لابلاس من الدرجة الثانية فإن إضافة ثابت اعتباطي C_2 للطرف الأيمن للمعادلة (10.26) ممكن حيث يصبح :

$$\Phi_Q = C_1 \ln r + C_2 \Rightarrow T = C_1 \ln r + C_2 \quad (a)$$

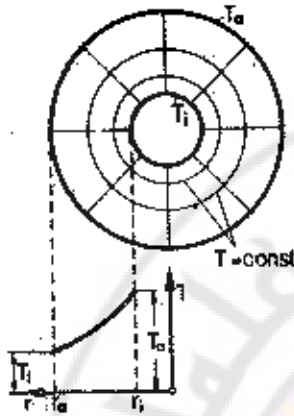
الثابتان C_1, C_2 يتحددان بمساعدة الشروط الحدية

حيث تكون بموجب الشكل (ت ١.١٥) : $T = T_i$:

من أجل $r = r_i$ $T = T_o$ من أجل $r = r_o$.

بذلك نجد من (ب) أولاً C_1 و C_2 ومن ثم بعد إصلاح بسيط العلاقة :

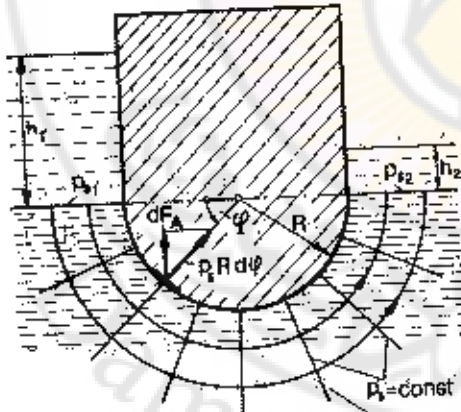
$$\frac{T(r)}{T_i} = \left(\frac{T_o}{T_i} - 1 \right) \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_o}{r_i}} + 1 \quad (b)$$



الشكل ت ١.١٥

من أجل $T = \text{const}$ ينتج $r = \text{const}$ وبالتالي فإن خطوط درجة الحرارة الثابتة $T = \text{const}$ كلها دوائر مركزية ، تماماً مثل خطوط الكمون الثابت للتبع $\Phi_Q = \text{const}$.

ت ٢.١٥ : جدار لجيز الماء نهايته السفلية بشكل نصف اسطوانة دائرية مقعرة في وسط مسامي الشكل (ت ٢.١٥) . أحسب قوة الرفع F_A المؤثرة على واحدة عرض الجدار $b = 1$.



الشكل ت ٢.١٥

الحل : سنعالج المسألة كسألة

مستوية وسنعمل أولاً دافعة

أورخيدس F_A المؤثرة على الجدار .

فإذاً فترضنا أن الطبقة المسامية

عميقة جداً فيمكن اعتبار الجريان

الرشحي (الزاحف) يسائل

هيدروديناميكيًا الجريان الجولاني

البحث حول اسطوانة ، أي جريان

إعصار كوني . وعليه يكون على

محيط الدائرة بموجب (10.44) مع

ملاحظة اتجاه ϕ في الشكل (ت ٢.١٥) :

$$\Phi = C_1 \varphi + C_2 \quad (a)$$

حيث C_2 ثابت ادخل بسبب كون Φ من الدرجة الثانية .

بوجب الجدول (١٠١٥) يكون $p_s \leq \Phi$ وبالتالي ينتج من (a) :

$$p_s = C_1 \varphi + C_2 \quad (b)$$

الثابتان $C_{1,2}$ يتحددان من الشروط الحدية ، حيث نجد بمساعدة الشكل (ت ٢٠١٥) والعلاقة (b) :

$$p_s (\varphi = 0) = p_{s1} = \rho g h_1 = C_2 \quad (c)$$

$$p_s (\varphi = \pi) = p_{s2} = \rho g h_2 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{\pi} \quad (d)$$

بذلك يصبح :

$$p_s = \rho g \left[(h_2 - h_1) \frac{\varphi}{\pi} + h_1 \right] \quad (e)$$

من أجل $p_s = \text{const}$ تنتج $\varphi = \text{const}$ وبالتالي فإن خطوط الضغط الثابت تمثلها حزمة من المستقيمت الشعاعية المنباعدة من مركز الدائرة ، تماماً كخطوط الكمون الثابت للاعصار .

إن قوة الرفع الجزئية تطابق المركبة الشاقولية لقوة الضغط الجزئية المؤثرة على عنصر سطحي $ds = R d\varphi$ ، وبالتالي تكون بوجب الشكل (ت ٢٠١٥) :

$$dF_A = p_s \cdot ds \sin \varphi = p_s R \sin \varphi d\varphi \quad .$$

بادخال (e) وإجراء التكامل نجد أخيراً :

$$\begin{aligned} F_A &= \rho g R \left[\frac{h_2 - h_1}{\pi} \int_0^\pi \varphi \sin \varphi d\varphi + h_1 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right] = \\ &= \rho g R (h_1 + h_2) \quad [\text{kp/m}] \quad (f) \end{aligned}$$

بأخذ دافعة أرخيدس المؤثرة على نصف الاسطوانة بعين الاعتبار . وبالفعل

$$F_A = \rho g \frac{\pi R^2}{2} \quad \text{أصبح}$$

$$F_A = \rho g R \left[(h_1 + h_2) + \frac{\pi R}{2} \right] \quad (g)$$

★ ★ ★

فهرس أهم الرموز والأدلة المستخدمة
مترتبة أبجدياً

الرمز	المعنى	انظر (المعادلة)	وحدة القياس	
			الجملة العالمية	الجملة التكنيكية
A	السطح ، مساحة المقطع	(2.18)	m^2	m^2
A	شعاع النظم على السطح	(2.18)	m^2	m^2
A_n	أمثال عددية لتوزع الإحصائي	(12.85)	1	1
A_{st}	مساحة مقطع تيار النافورة	(8.155)	m^2	m^2
$A_{x,y,z}$	السطوح المتعامدة مع x, y, z	(2.21)	m^2	m^2
a	سرعة الصوت	(5.27)	ms^{-1}	ms^{-1}
a_n	أمثال عددية	(12.91)	1	1
B	تسارع خطي منتظم	(3.85)	ms^{-2}	ms^{-2}
B	كمية الحركة	(8.89)	$kgms^{-1}$	$kgms^{-1}$
B_m	أمثال عددية لتوزع البناييع-البالوعات	(12.64)	1	1
b	التسارع	(5.10), [122]	ms^{-2}	ms^{-2}
b	عرض جدار ، ارتفاع أسطوانة	(8.133)	m	m
$b_{x,y,z}$	مركبات التسارع باتجاه x, y, z	(5.13), (3.55)	ms^{-2}	ms^{-2}
$b_{x,y,z}$	مركبات التسارع باتجاه x, y, z	(13.5-a)	ms^{-2}	ms^{-2}
C=const	رمز عام لقيمة ثابتة	$\{1, 0\}$ (5.57)	1	1
c_A	معامل قوة الرفع	(12.97)	1	1
C_E	ثابتة برنولي	$\{2, 8\}$		
C_{HE}	ثابتة برنولي للقدرة	(8.11)	m^2s^{-1}	m^2s^{-1}
C_{RH}	ثابتة برنولي للارتفاعات	(8.10)	m	m
C_{Rp}	ثابتة برنولي للضغط	(8.9)	Nm^{-2}	$kp m^{-2}$

الرمز	المعنى	انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفرقة}	وحدة القياس	
			الجملة العالمية	الجملة التكنيكية
c_f	معامل عدم انتظام قيار الدفع	(8.108)	1	1
c_M	معامل العزم للبروفيل	(12.98)	1	1
c_{M0}	معامل العزم الصفري للبروفيل	(12.105)	1	1
c_N	معامل القوة الناعمة على البروفيل	(8.55)	1	1
c_p	الحرارة النوعية مع ضغط ثابت	[٧٧]	$\frac{\text{Nm}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kp}^\circ\text{K}}$
c_p	معامل الضغط	(8.52)	1	1
c_p	الستيبواز	(2.5)		
C_{rel}	ثابت برنولي للتجارب النسبية	(8.23)	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
cs	سطح التحكم	{١.٥.٨}		
c_s	معامل درجة التحميل للفروحة	(8.160)	1	1
c_{SI}	الستيبسوكس	(2.10)		
c_{su}	معامل قوة المس	(12.117)	1	1
C_v	معامل أنبوية فتوري أو الهدار	(8.61),(8.31)	1	1
c_v	الحرارة النوعية مع حجم ثابت	[٧٧]	$\frac{\text{Nm}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kp}^\circ\text{K}}$
D, d	القطر	(3.48),(3.55)	m	m
D	عزم كمية الحركة	(8.91)	N m s	kp m s
$\frac{D...}{Dt}$	التفاضل المادي ل...	(5.12)		
$d=2y_{dmax}$	السمكة الأعظمية للبروفيل	[٥٤٤]	m	m
E	غزارة النبع أو البالوعة	(10.33)	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\circ E$	درجة انحراف	(2.11)		
e	البعد بين مركز ثقل السطح ومركز الضغط	(3.25)	m	m
e	البعد بين مركزي ثقل الجسم المخمور والمجسم المزاج	(3.44)	m	m
$e_{r,\phi,z}$	شعاع الواحدة باتجاه x, y, z	(5.14)	1	1
F	القوة	[٢٢]	N	kp
$F(z)$	تابع الكمون المركب	(13.13)		
F_A	قوة الرفع الهيدروديناميكية	(8.150)	N	kp

واحدة القياس		[الصفحة] [الفرقة]	المعنى	الرمز
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية			
N	kp	(3.38)	دافعة أرخيدس	F_A
N	kp	(2.16)	قوة الثقالة ، الوزن	F_G
N	kp	(8.103)	رد فعل كمية الحركة	F_{Im}
N	kp	(8.3)	القوة الحجمية الحركية (قوة الميبر)	F_K
N	kp	(2.18)	قوة الضغط	F_p
N	kp	(3.28)	قوة الضغط على قعر الإناء	F_{pb}
N	kp	(8.55)	قوة الضغط الناطمية على البروفيل	F_{ps}
N	kp	(8.84)	قوة الضغط الحورية	F_{pT}
N	kp	(8.158)	القوة الدافعة لمروحة	F_S
N	kp	(8.166)	القوة الدافعة عند الوقوف	F_{S0}
N	kp	(8.103)	قوة رد فعل السائل على الجدار الصلب	F_S
N	kp	(2.16)	القوة الحجمية	F_V
N	kp	(1.1)	قوة المقاومة	F_W
N	kp	(9.41)	قوة مقاومة التسارع	F_{Wb}
N	kp	(2.16)	القوة النابذة	F_Z
N	kp	(8.101) ، [٢٢]	قوة الاحتكاك	F_r
s^{-1}	s^{-1}	[٢٢]	التواتر ، التردد	f
1	1	(12.151)	السرعة الشاقولية اللابعدية المخروسة من الشبك الباقي	f
		(1.3)	قيمة فيزيائية	G
$N m^{-1}$	$kp m^{-2}$	(2.13)	معامل الانزياح الزاوي	G
$m s^{-2}$	$m s^{-2}$	(2.16)	التسارع الارضي	g
1	1	(12.151)	السرعة الافقية اللابعدية المخروسة من الشبك الباقي	g
m	m	(3.3)	ارتفاع السطح السائب للسائل عن مستوي القياس	H
m	m	(8.10)	الارتفاع الهيدروليكي في معادلة برنولي	H

واحدة القياس		النظر (المعادلة)	المعنى	الرمز
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية			
$V m^{-1}$	$V m^{-1}$	[٢٤]	شدة الحقل الكهربائي	H_e
$A m^{-1}$	$A m^{-1}$	(7.56), [٣٥]	شدة الحقل المغناطيسي العرض	H_m
m	m	(4.16)	ارتفاع الجو المنتظم	H_0
m	m	(2.1)	سمكة الخوص	h
m	m	(3.3)	ارتفاع شاقولي	h
m	m	(3.14)	فوق ارتفاع سوية سائل	h_m
			مقياس المانومتر	
m	m	(3.44)	ارتفاع مركز الطفو المستنتج	h_m
m	m	(3.9)	ارتفاع الضغط	h_p
m	m	(3.10)	ارتفاع السحب	h_s
m	m	(3.18)	ارتفاع السحب الأعظمي	$h_{s max}$
$N s$	kps	(8.90)	الدفع الخطي	I
N	kp	(8.96)	تيار الدفع الخطي	$\bar{I}$
$N m s$	$kp m s$	(8.92)	الدفع الدوراني	I_0
A	A	(7.57), [٢٥]	شدة التيار الكهربائي	I_e
		(13.12)	الجزء التخيلي لعدد أوتابع مركب	Im
1	1	(5.1)	أشعة الواحدة باتجاه z, y, x	i, j, k
		(13.1), [٣٦]	واحدة الأعداد التخيلية	$i = \sqrt{-1}$
m^4	m^4	(3.23)	العزم التنازلي لسطح بالنسبة لـ y, x	$J_{y(x)}$
m^4	m^4	(3.24)	عزم عطالة سطح بالنسبة لمحور ثقل	J_S
m^4	m^4	(3.23)	عزم عطالة سطح بالنسبة لـ x	J_x
m^4	m^4	(3.31)	عزم عطالة سطح بالنسبة لـ y	J_y
m^4	m^4	(3.43)	عزم عطالة سطح الطفو	J_0
$A m^{-2}$	$A m^{-2}$	[٢٥]	كثافة التيار الكهربائي	$\hat{J}_e$
1	1	(12.129)	معامل ز أوية الورد لبروفيل فردي	K
1	1	(12.162)	معامل ز أوية الورد للشبك بروفيلات	K_m
$m^2 N^{-1}$	$m^2 kp^{-1}$	(2.32)	معامل الانضغاطية	K_C
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(2.33)	معامل المرونة الحجمي	K_P

واحدة القياس		انظر (المعادلة)	المعنى	الرمز
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية	[الصفحة] {الغرفة}		
m	m	(5.25), [٢٢]	طول ، الطول المميز لجسم	L
m	m	(3.35)	طول	l
m	m	{٥.٢.١٢}	طول وتر البروفيل	l
		{١٠٥}	مركز الضغط	M
$m^3 s^{-1}$	$m^3 s^{-1}$	(10.61)	عزم الثنائية المستوية	M
$m^4 s^{-1}$	$m^4 s^{-1}$	(11.24)	عزم الثنائية النقطية	M
l	l	(5.27)	عدد ماخ	Ma
		[١٢٢]	مركز الطفو المستتج	Mc
N m	kp m	(8.109)	عزم رد فعل كمية الحركة	M_{rn}
N m	kp m	(13.45), [٢٤]	عزم الدوران أو الإمالة	M_t
N m	kp m	[٨٠]	عزم قوى الاحتكاك	M_f
kg	$kp s^2 m^{-1}$	(2.34)	الكتلة	m
$kg s^{-1}$	$kp s m^{-1}$	(6.1)	التيار الكتلي	$\dot{m}$
l	l	(8.29)	نسبة الانفتاح	m
l	l	(12.67)	عدد طبيعي	$m=0,1,2,\dots$
l	l	(13.8)	أس	m
kg	$kp s^2 m^{-1}$	(9.40)	الكتلة الظاهرية لجسم متسارع	m_{ap}
kg	$kp s^2 m^{-1}$	(8.171)	كتلة وقود الصاروخ	m_F
kg	$kp s^2 m^{-1}$	(9.39)	الكتلة الهيدرو ديناميكية	m_h
kg	$kp s^2 m^{-1}$	(8.171)	كتلة جسم الصاروخ	m_R
r p m	r p m	[٧٩]	عدد الدورات في الدقيقة	n
l	l	(2.57)	الأس البوليتروني	n
l	l	[٢٠٥]	شعاع واحدة النظم	n_e
m	m	(7.29), [٢٤١]	الاحداثي الناطمي على السطح أو على اتجاه الجريان	n
l	l	(12.85)	أعداد طبيعية	$n=0,1,2,\dots$
		(13.92), [٦٠١]	عدد ريش دولاب داتر قطري	n
m, m	m, m	[٥٢٥]	الاحداثي الناطمي والمماسي على جبهة شبك	n, s

واحدة القياس		انظر (المعادلة) [النصحة] {الدعوة}	المعنى	الرمز
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية			
$J s^{-1} = W$	$kp m s^{-1}$	[٢٣] (2.5)	الامتطاعة	P
			البواز	P
W	$kp m s^{-1}$	[٢٧٧]	الامتطاعة المبذولة	P_A
W	$kp m s^{-1}$	(8.163)	الامتطاعة المفيدة	P_E
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(8.9), (2.17)	الضغط الاستاتيكي	p
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	[٩١]	الضغط الجوي	p_a
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(3.8)	الضغط في النقطة B	p_B
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(12.47)	الضغط الصدمي	p_b
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(8.49)	الضغط التثريكي	p_{dyn}
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(3.9)	الضغط الزائد	p_o
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(3.21)	الضغط في مركز ثقل سطح	p_s
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(8.49)	الضغط الكلي	P_{tot}
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(3.10)	الضغط الناقص	p_u
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	[٥٧]	ضغط التبخر	p_v
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(2.23)	الضغط في اتجاه z, y, x	$p_{x, y, z}$
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(8.177)	الضغط الإضافي الناتج عن الاضطراب	p_w
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(5.24)	تذبذب الضغط لجريان مضطرب	p'
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	[٢٩٢]	الضغط السكوني	p'
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(8.51)	الضغط الاستاتيكي في سائل مهمل الوزن	p^*
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	(5.24)	الضغط الوسطي زمنياً	$\bar{p}$
$m^3 s^{-1}$	$m^3 s^{-1}$	(6.4)	غزارة التدفق أو التباور الحجمي	$Q = \dot{V}$
$m^3 s^{-1}$	$m^3 s^{-1}$	(8.30)	غزارة التصريف الفعلية	Q_{act}
$m^3 s^{-1}$	$m^3 s^{-1}$	(8.33)	غزارة التصريف المثالية	Q_{id}
J	kcal	[٦٢٠]	كمية الحرارة	Q_T
$J s^{-1}$	$kcal s^{-1}$	[٦٢٠]	السيالة الحرارية	$\dot{Q}_T$
$m^2 s^{-1}$	$m^2 s^{-1}$	(7.43)	غزارة التدفق الاعصاري	Q_w
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	[٢٥٨]	ضغط الركوند أو الضغط التثريكي	q
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(10.80)	توزع سطحي للبناءيع أو البالوعات	q
$m^2 s^{-1}$	$m^2 s^{-1}$	(11.28)	توزع خطي للبناءيع أو البالوعات	q

واحدة القياس		انظر (المقابلة)	المعنى	الرمز
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية	[الصفحة] {الفترة}		
m	m	(8.24), (2.40)	نصف قطر الانحناء	R
$\frac{m}{N m}$	$\frac{m}{k p m}$	(12.191), (12.37)	نصف قطر الاسطوانة أو الكرة	R
$\frac{kg}{^{\circ}K}$	$\frac{k p}{^{\circ}K}$	(2.48)	ثابتة الغاز	R
t	t	(5.25)	عدد رينولدز	Re
		(13.12)	الجزء الحقيقي لعدد مركب أو تابع له	Re
t	t	(5.26)	عدد رينولدز الخارج	Re _{ex}
Ω	Ω	[٢٥]	مقاومة كهربائية	R _e
m	m	(5.8)	شعاع نصف القطر المكاني	r
m	m	(8.21), (3.36)	نصف قطر الأنبوب أو الدائرة	r
m	m	(8.7)	نصف قطر الانحناء المكاني	r
m, rad, m	m, rad, m	[١٧٦]	الاحداثيات الاسطوانية	r, φ , z
		{٣.٣٠١.٣}	رمز عام لتركز ثقل سطح أو جسم	S
		[٢٩٠]	رمز عام لنقطة الركود	S
		[١٢٢]	مركز ثقل الجسم المغمور	S _k
		(2.10)	الستوكس	St
		[١٢٢]	مركز ثقل الحجم المزاح	S _p
m	m	(1.21)	المسافة أو البعد	s
m	m	{١.١.١}	إحداثي باتجاه الجريان	s
m	m	(7.40)	عنصر خطي موجه	ds
$^{\circ}K$	$^{\circ}K$	(2.49), [٢٤]	درجة الحرارة المطلقة	T
s	s	[٢٢٢]	زمن القيدبة	T
s	s	[٢٢]	الزمن	t
$^{\circ}C$	$^{\circ}C$	(2.49)	درجة الحرارة المثوية	t
m	m	{٦.٧.٥.٥.٨}	خطوة التقسيم لشبك برؤوفيلات	t
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(2.1)	السرعة الأفقية المنتظمة	U
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(7.30), (7.39)	السرعة المحيطية	U, u
V	V	[٦٢١], [٢٤]	الجهد الكهروثافي	U _e
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(5.1)	مركبة شعاع السرعة باتجاه z, y, x	u, v, w

واحدة القياس		انظر (المعادلة) [الصفحة] [الفقرة]	المعنى	الرمز
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية			
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.145)	الركبة الأفقية سرعة الورود غير المشوشة	u_{∞}
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(5.23)	مركبات تذبذب السرعة المضطربة باتجاه x, y, z	u', v', w'
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(5.23)	مركبات السرعة الوسطية زمنياً	$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(5.1)	شعاع السرعة	V
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(5.2)	القيمة المطلقة لشعاع السرعة	$V = \mathbf{V} $
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(7.30)	السرعة المطلقة	$\mathbf{V}$
m^3	m^3	(2.38), [٢٣]	الحجم	V
$m^3 s^{-1}$	$m^3 s^{-1}$	(6.4)	التيار الحجمي	$\dot{V} = Q$
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.32)	سرعة التفريغ من فتحة خزان	V_{ex}
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	[١٨٢]	السرعة الخارجة	V_{ex}
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.107)	السرعة الوسطية لتيار الدفع	$\bar{V}_I$
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.155)	السرعة في مستوى المروحة	V'
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	[١٨٤]	السرعة الوسطية زمنياً	$\bar{V}$
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(6.12)	السرعة الوسطية للتيار الحجمي	$\bar{V}$
$kg s^{-1} m^{-2}$	$kp m^{-3}$	(6.11)	كثافة التيار الكتلي الوسطية	$\rho \bar{V}$
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.150)	سرعة الورود غير المشوشة	V_{∞}
$m^3 kg^{-1}$	$m^3 kp^{-1}$	(2.26)	الحجم النوعي	v
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(2.7)	سرعة إجهاد القص	v_r
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.145)	الركبة الشاقولية لسرعة الورود غير المشوشة	v_{∞}
$J = N m$	$kp m$	[٢٢]	القدرة ، العمل	W
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(7.30)	السرعة النسبية	W
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(12.173)	السرعة على بروفييل شبك	W_H
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.145)	السرعة المنتظمة قبل وبعد شبك بروفيلات مستقيم	$W_{1,2}$
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	(8.145)	سرعة الورود غير المشوشة لشبك بروفييلات مستقيم	W_{∞}

الرمز	المعنى	انظر (المعادلة)	واحدة القياس	
			الجملة التكنيكية	الجملة العالمية
W_{ki}	القدرة الحركية	(9.36)	kp m	J
w	السرعة الإضافية المعرضة خلاف المروحة	(8.156)	m s ⁻¹	m s ⁻¹
Δw	السرعة المعرضة بإغناء جبهة الشبك	(12.145)	m s ⁻¹	m s ⁻¹
w	السرعة المركبة	[569]	m s ⁻¹	m s ⁻¹
$\bar{w}(z)$	السرعة المركبة المرافقة	(13.18)	m s ⁻¹	m s ⁻¹
x, y, z	الاحداثيات الديكارتية المتعامدة	{ 2, 3, 4 }	m, m, m	m, m, m
x_{ii}	فاصلة موقع السباكة العظمى للبروفيل عن أنفه	[614]	m	m
x_f	فاصلة موقع الاغناء الاعظمى للبروفيل عن أنفه	[614]	m	m
y	إحداثي ناظمي على الجدار ، أو على وتر البروفيل	(2.12) [525]	m	m
y_d	إحداثي توزع السباكة للبروفيل	(12.121)	m	m
y_s	إحداثي توزع الاغناء للبروفيل	(12.121)	m	m
z	معامل القيمة العددية	(1.10)		
x	ارتفاع منسوب السائل في وعاء	{ 3 }	m	m
z	ارتفاع تقوس الغشاء الصابوني	(15.9), (2.41)	m	m
z	الارتفاع المكاني	(8.10)	m	m
z	العدد المركب	(13.1)	m	m
$\bar{z}$	العدد المركب المرافق	(13.4)	m	m
$\bar{Z}$	ارتفاع العمود في أنبوب شعري	(2.43)	m	m
z_s	العمق الشاقولي لمركز ثقل سطح عن السطح الحر لسائل	(3.21)	m	m
α, β, γ	أس	(1.6)		
z, β, γ	زاوية ميل الناظم على المحاور z, y, x	(2.21)	°	°
z	زاوية الورود (الهجوم)	{ 6, 7, 8, 9 }	°	°

واحدة القياس		الرمز	المعنى	النظر (المعادلة)
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية			
°	°	α	زاوية اتجاه دخول أو خروج الجريان عبر شبك مع x	[525]
°	"	α_k	زاوية الورد الهندسية	[292]
°	°	α_0	زاوية قوة الرفع الصغرية	(12.110)
°	°	α^*	زاوية الورد اللاصدي	(12.118)
s^{-1}	s^{-1}	β	معامل التمدد الحجمي	(6.10)
°	"	β	زاوية اتجاه دخول أو خروج الجريان مع جبهة الشبك	[535]
°	°	β_s	زاوية البروقيل	[254]
$m^2 s^{-1}$	$m^2 s^{-1}$	Γ	الجولان ، الشدة الإحصائية	(7.36)
1	1	γ	الانزياح الزاوي	(2.13)
$kg m^{-2} s^{-2}$	$kp m^{-3}$	γ	الوزن النوعي	(2.27)
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	γ	نوزع سطحي اعصاري (الشدة الاعصارية الموضعية)	(10.86)
$kg m^{-2} s^{-2}$	$kp m^{-3}$	$\gamma_m = \rho_m g$	الوزن النوعي لسائل القياس	(3.14)
m^{-2}	m^{-2}	Δ	رمز لفرق بين قيمتين	(7.25)
m	m	Δ	معامل لابلاس	[260]
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	Δh_p	ارتفاع الفواق	(3.2)
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	Δp	فرق الضغط بين نقطتين	(2.40)
$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$	Δp_c	ضغط النفوس	(8.120)
$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	Δp_c	الفقد الصدي (الحسارة في الضغط)	(12.146)
m	m	Δw	السرعة المحرصة الموازية لجبهة الشبك	(3.37)
°	°	δ	سماعة جدار الانبواب	[242]
m	m	δ	نصف زاوية انفراج الناشرة	[290]
l	l	δ	سماعة الطبقة الحدية	[22]
m	m	ξ	الاستطالة النسبية	(10.94)
1	1	ξ	محال صخير جداً	(7.6)
		$\xi_{x,y,z}$	الاستطالة النسبية باتجاه z, y, x	

واحدة القياس		انظر (المعادلة)	المعنى	الرمز
الجملة العالمية	الجملة التكنيكية	[الصفحة] [الفقرة]		
1	1	(8.126)	معامل درجة الجودة للمروحة	ξ
m	m	[580]	إحداثي مركب في مستوى الصورة	$\tilde{z}$
		(13.46)	تابع التمثيل المطابق	$\tilde{z} = \Gamma(z)$
$N \times m^{-2}$	$kp \times m^{-2}$	(2.4)	اللوحة التحريكية	γ_i
1	1	(8.163)	المردود	γ_i
m	m	[580]	الإحداثي الشاقولي لمستوي الصورة المركب	γ_o
1	1	(12.71)	الإحداثي الشاقولي اللابعدي لتوزيع سماكة البروفيل	γ_{int}
1	1	(8.130)	مردود النشرة	γ_{out}
1	1	(8.165)	انحداد الهيدروليكي	γ_{hyd}
1	1	(12.77)	الإحداثي الشاقولي اللابعدي لتوزيع انحناء البروفيل	γ_s
1	1	(8.159)	المردود النظري	γ_{th}
s^{-1}	s^{-1}	(7.6)	السرعة الزاوية للشوكة الزاوي حول x, y, z	$\theta_{x, y, z}$
°	°	(2.43)	زاوية التماس (الحافة)	θ
°	°	(3.28)	ميل الناطم على سطح منحني ضد المحور x	θ
$^{\circ}K m^{-2}$	$^{\circ}K m^{-1}$	(4.28)	تدرج درجة الحرارة مع الارتفاع	θ
rad	rad	[580]	الزاوية القطبية في مستوى الصورة	θ
1	1	(2.56)	الأس الأدبياتي	α
1	1	(12.72)	معامل ريفلس	α_{rd}
		(7.32)	التكامل الخطي	λ
rad	rad	[535]	زاوية تدرج شبك بروفيلا	λ
		(12.75)	أعداد طبيعية متسلسلة	$\mu=1,2,3,\dots$
1	1	(8.35)	معامل التضيق	μ_{rr}

الرمز	المعنى	انظر (المعادلة)	واحدة القياس	
			الجملة العالمية	الجملة التكنيكية
v	اللزوجة الحركية	(2.8)	$m^2 s^{-1}$	$m^2 s^{-1}$
v_0	الكثافة النجمية	(8.28)	s^{-1}	s^{-1}
ξ	معامل واحدات القياس	(1.10)		
ξ_0, ξ_1, ξ_2	الاحداثيات الديكارتية أو الانزياحات الموازية لـ x, y, z	(7.2)	m, m, m	m, m, m
ξ	إحداثي أفقي لا بعدي	(12.65)(12.62)	1	1
ξ'	إحداثي أفقي لا بعدي للنقطة المتحولة	(12.62)	1	1
ξ	الاحداثي الأفقي في مستوى الصورة المركب	[58.0]	m	m
$P(p)$	تابع الضغط	(4.4)	$J kg^{-1}$	$m^2 s^{-2}$
ρ	الكثافة	(2.24)	$kg m^{-3}$	$kps^2 m^{-4}$
ρ	نصف القطر المكاني في المستوى الزوالي	(11.3)	m	m
ρ	إحداثي شاقولي في المستوى الزوالي	[54.7]	m	m
ρ	نصف القطر المكاني في مستوى الصورة المركب	[58.0]	m	m
σ	إجهاد الشد	[22]	$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$
σ	إحداثي منحنى	(12.140)	m	m
σ_0	التوتر السطحي	(2.38)	$N m^{-1}$	$kp m^{-1}$
σ_{ext}	إجهاد الشد المسموح به	(3.37)	$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$
τ	إجهاد القص	(2.12)	$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$
τ_{adm}	إجهاد القص الصفائحي	(8.180)	$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$
τ_s	إجهاد القص على جدار الصفيحة	[29.0]	$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$
τ_{int}	إجهاد القص المضطرب	(8.180)	$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$
τ_w	إجهاد القص الاقصاري	(8.179)	$N m^{-2}$	$kp m^{-2}$
Φ	تابع كيون الرعة	(7.23)	$m^2 s^{-1}$	$m^2 s^{-1}$
Φ_0	تابع الكيون الكهربائي	(15.7)	V	V
Φ_D	تابع التشوه	(7.7)	$m^2 s^{-1}$	$m^2 s^{-1}$

الرمز	المعنى	انظر (المعادلة)	واحدة القياس	
			الجملة التكنيكية	الجملة العالمية
Φ_s	تابع كيون حقل القوى الحجمية	(3.55), (8.16)	$m^2 s^{-2}$	$m^2 s^{-2}$
φ	زاوية مركزية أو قطبية	(13.2), (17.6)	rad	rad
φ	احداثي زاوي في سلسلة غلاورت	(12.65)	1	1
φ_{10}	معامل تصحيح السرعة	(8.31)	1	1
ψ	تابع التيار	(10.10)	$m^2 s^{-1}$	$m^2 s^{-1}$
ψ_{st}	تابع تيار ستوكس	(11.10)	$m^4 s^{-1}$	$m^4 s^{-1}$
ψ_{α}	تابع التيار الكهربائي	(7.22)		
ψ_{α}	معامل التصريف	(8.30)	1	1
ω	شمارع السرعة الزاوية أو شعاع الاقصاء	(7.14)	s^{-1}	s^{-1}
ω	السرعة الزاوية	(2.16)	s^{-1}	s^{-1}
ω	التردد الدائري	(2.22)	s^{-1}	s^{-1}
$\omega_{x,y,z}$	سرعة الدوران حول x, y, z	(7.6)	s^{-1}	s^{-1}

فهرس أهم الرموز المستخدمة

الدليل	المعنى المشار اليه	انظر (المعادلة)	الدليل	المعنى المشار اليه	انظر (المعادلة)
		[الصفحة]			[الصفحة]
		{الفقرة}			{الفقرة}
A	قوة الرفع	{6.2.5.8}	acl	حقيقي ، فعلي	(8.30)
A	الاستطاعة المبذورة	(8.163)	B	نقطة محددة	(3.11)
A	انقسام الطبقة الحدية	[545]	b	القارح	(9.41)
a	الهواء الجوي	(3.9)	C	العزم النابذ	(3.31)
a	دافعة أرخميدس	(3.38)	C	الاسطوانة	(12.34)
a	التفريغ من فتحة	(8.32)	c	نواة الاقصاء	(10.45)
abs	قيمة مطلقة	[91]	c	وتر البرونيل	(12.126)

الدليل	المعنى المشار إليه	انظر (المادة)	الدليل	المعنى المشار إليه	انظر (المادة)
cr	قيمة حرجية	(5.26)	N ₂ n	اتجاه النظم	(9.6)
D	طرف الضغط للبروفيل	(8.55)	N	ألف البروفيل	(12.138)
D	الثنائية	(10.66)	o	الضغط الزائد	(3.9)
d	توزيع سماكة البروفيل	(12.60)	o	الطوف العلوي للبروفيل	[٥٦١]
dyn	ديناميكي أو تحريكي	[٢٦١]	out	الخروج من سطح التحكم	{١٠٥٠.٨}
E	الاستطاعة المفيدة	(8.163)	P	البروفيل	(13.76)
E	البروفيل الفردي	(12.140)	p	الضغط	(3.21)
e	كهربائي	[٢٤]	± Q	التبع أو البالوعة	(10.26)
e	السرعة النهائية (الحديثة)	(8.174)	QR	انحصار كموني	(10.72)
f	سطح التحكم الحر	(8.101)	q	توزيع يتابع بالوعات	(10.85)
fl, Fl	السائل ، سائلي	(8.94), (9.38)	R	رد فعل كمية الحركة	(8.103)
G	الجاذبية الأرضية	(2.16)	r, ρ, x	احداثيات اسطوانية	(5.14)
G	شبكة البروفيلات الباقي	(12.149)	r	قطري	
g	غاز	(3.42)	rel	نسبي	(8.23)
gr	حددي	[٢٨٠]	S	مركز الثقل	(3.21)
H	أفقي	(3.34)	S	طرف السحب للبروفيل	(8.55)
hyd	هيدروليكي	(8.165)	Sp	الصكرة	(12.192)
I	تيار الدفع	(8.103)	S	سطح التحكم الصلب	(8.102)
i	قيمة محروسة	[٢٨٨]	s	اتجاه الجريان	(8.1)
id	مثالي	(8.32)	s	اتجاه المماس	(9.6)
in	الدخول لسطح التحكم	{١٠٥٠.٨}	s	توزيع اتجاه البروفيل	(12.77)
K	الجسم	(3.41)	st	النافورة	(8.115)
lam	جريان صفائحي	(8.180)	T	حراري	[٢٤]
M	نقطة قياس	[٥٦٢]	T	الجريان الانسحابي	(10.17)
m	مغنطيسي	[٢٥]	t	مماسي	(3.30)
m	سائل القياس	(3.12)	th	نظري	(8.159)
m	مركز الضغط	(3.22)	tot	كلي ، إجمالي	(8.49)
max	قيمة أعظمية	(3.18)	tur	جريان مضطرب	(8.180)
min	قيمة أصغر	(3.81)	u	الضغط الناقص	(3.10)

الدليل	المعنى المشار اليه	الانظر (المعادلة)	الدليل	المعنى المشار اليه	الانظر (المعادلة)
u	محيطي	(8.86)	ζ	مستوي الصورة المركب	(12.48)
u	الطرف السفلي للبروفيل	[٥٦١]	ρ	قطري أو شاقولي	(11.2)
v	شاقولي	(3.34)	σ	في المستوي الزوالي	[٧٢]
v	القوة الجذبية	(2.16), [١٢١]	τ	خاصية شمعية	[٨٠]
w	الحجم المزاح	(1.1)	ω	إجهاد العن	(8.177), (7.43)
x, y, z	المقاومة	(2.21)	∞	إحصاري	(8.54)
Z	المحاور الديكارتية	(3.67), (2.16)	0	الجريان غير المرش	[١٥٧]
z	القوة النابذة	(13.48)	0	المسوب الصغري	{ ٣ }
α	مستوي الإصل المركب	(12.162)	1	السطح السائب السائل	(6.3), [٢٥٤]
Γ	زاوية الورود	(10.34)	2	مقطع دخول	(6.3), [٢٥٤]
γ	الاعصار	(10.88)		الجريان المنتظم	
	نوزع إحصاري				

فهرس أهم الاشارات والرموز الرياضية

الرمز أو الاشارة	المعنى	الرمز أو الاشارة	المعنى
∇	معامل تايلا التفاضلي	<	أصغر
±	زائد أو ناقص	≤	أصغر أو يساوي
.	مضروب بـ		بوازي
/ أو ÷	مقسوم على	≠	لا بوازي
~	مقسوم على	⊥	متعامد مع
=	يتناسب مع	≠; ≠	لا يساوي
≡	يساوي	→ a	يقتهى الـ a
≈	يساوي بالتطابق	⇒	ومنه ينتج
≈	متاثل ، يطابق	∞	اللانهاية
>	يساوي تقريباً	...	الزاوية ...
≥	أكبر	Σ...	مجموع ...
	أكبر أو يساوي		

الرمز أو الإشارة	المعنى	الرمز أو الإشارة	المعنى
$\sqrt{\quad}$	الجذر التربيعي	$\dots$	مستوي العدد المركب ...
$\sqrt[n]{\quad}$	الجذر n	$\operatorname{Re} z$	الجزء الحقيقي لـ z
$ \dots $	القيمة المطلقة لـ ...	$\operatorname{Im} z$	الجزء التخيل لـ z
$\lim_{x \rightarrow 0} y$	نهاية y عندما x يتقارب للصفر	$\Delta = \nabla^2$	معامل لابلاس
$\ln$	اللوغاريتم الطبيعي	∇	تأبلا
$\log$	اللوغاريتم العشري	$f(x), F(x)$	تابع لـ x
$n!$	عاطلي ، مضروب n	$y' = dy/dx$	تفاضل تام أو عادي لـ y بالنسبة لـ x
$\exp x = e^x$	التابع الأسّي لـ x	$\partial y / \partial x$	تفاضل جزئي لـ y بالنسبة لـ x
$\sin x, \cos x$ $\tan x, \cot x$	التوابع المثلثية الدائرية لـ x	$\dot{y} = dy/dt$	مشتق y بالنسبة الزمن t
$\arcsin x$ $\arccos x$ $\arctan x$ $\operatorname{arccot} x$	التوابع المثلثية المعكوسة لـ x	$\ddot{y} = d^2 y / dt^2$	مشتق ثان لـ y بالنسبة لـ t
$\sinh x, \cosh x$ $\tanh x, \coth x$	التوابع الزائدية لـ x	$\frac{D \dots}{Dt}$	تفاضل مادي
$\operatorname{ar sinh} x$ $\operatorname{ar cosh} x$ $\operatorname{ar tanh} x$ $\operatorname{ar coth} x$	التوابع الزائدية المعكوسة لـ x	$\int y dx$	تكامل غير محدود لـ y بالنسبة لـ x
$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة من A إلى B	$\int_a^b y dx$	تكامل محدود لـ y بالنسبة لـ x
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع AB	$\oint y dx$	تكامل مغلق لـ y بالنسبة لـ x
A, B	الشعاع A, B	$\operatorname{grad} \Phi$	تدرج Φ
$A \cdot B$	الجداء العددي للشعاعين A, B	$\operatorname{rot} V$	دوار الشعاع V
$A \times B$	الجداء الشعاعي للشعاعين A, B	$\operatorname{div} V$	تفرق الشعاع V
$ A = A$	القيمة المطلقة للشعاع A	$\dots = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \dots dt$	قيمة وسطية زمنياً مأخوذة خلال Δt
$\arg z$	الازاحة الزاوية (العمدة) لعدد المركب z	$\dots = \frac{1}{A(A)} \int \dots dA$	قيمة وسطية موزعة بانتظام على المقطع A

فهرس المصادر

- [1] **N. J. Kotschin, J. A. Kiebel, N. W. Rose** : Theoretische Hydromechanik. Bd. I 1954; Bd. II 1955, Akademie - Verlag, Berlin
- [2] **L. M. Milne-Thomson** : Theoretical Hydrodynamics. Macmillan and Comp. Ltd., London 1960
- [3] **L. M. Milne-Thomson** : Theoretical Aerodynamics. Macmillan and Comp. Ltd., London
- [4] **L. Prandtl** : Strömungslehre. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1960 (Abriss der Strömungslehre 1931)
- [4a] **L. Prandtl** : Essential of Fluid Dynamics, Blackie and sons Ltd., London and Glasgow 1952
- [5] **O. Tietjens** : Strömungslehre, Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. Bd. I : Hydro - und Aerostatik, 1960 ; Bd. II : Bewegung der Flüssigkeiten und Gase, 1970, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg
- [6] **V. L. Streeter** : Fluid Mechanics. Mc Graw Hill Books comp., Kogakusha 1966
- [7] **W. Albring** : Angewandte Strömungslehre. Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig, 1. Auflage 1961
- [7a] **W. Albring** : Angewandte Strömungslehre. Verlag von Theodar Steinkopff, Dresden und Leipzig, 4. Auflage 1970

- [8] **B. Eck** : Technische Strömungslehre. Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961
- [9] **W. Kaufmann** : Technische Hydro - und Aerodynamik. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963
- [10] **E. Truckenbrodt** : Strömungsmechanik, Grundlagen und technische Anwendungen. Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg/New York 1968
- [11] **R. L. Daugharty and J. B. Franzini** : Fluid Mechanics with Engineering Applications. Mc Graw-Hill Books comp., New York 1965
- [12] **M. Hackeschmidt** : Grundlagen der Strömungstechnik, Bd. I : Einführung. VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1969
- [13] **M. Hackeschmidt** : Grundlagen der Strömungstechnik. Bd. II : Felder. VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1970
- [14] **M. Hackeschmidt** : Strömungsmechanik : Ähnlichkeit-Analogie-Modell. VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1972
- [15] **E. Neunass** : Praktische Strömungslehre. VEB Verlag Technik, Berlin 1967
- [16] **N. S. Arshanikow und W. N. Malzew** : Aerodynamik. VEB Verlag Technik, Berlin 1960
- [17] **H. Schlichting und E. Truckenbrodt** : Aerodynamik des Flugzeuges, Bd. I, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962
- [18] **H. Schlichting und E. Truckenbrodt** : Aerodynamik des

Flugzeuges, Bd. II. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/
Heidelberg 1960

- [19] **H. Richter** : Rohrhydraulik. Springer-Verlag, Berlin/
Göttingen/Heidelberg 1962
- [20] **A. Wechmann** : Hydraulik. VEB Verlag für Bauwesen,
Berlin 1966
- [21] **B. Nekrasov** : Hydraulics. Mir Publishers, Moscow 1969
- [22] **A. Hausschild** : Wasserversorgungsanlagen. VEB Verlag
Technik, Berlin 1966
- [23] **R. Sauer** : Einführung in die Gasdynamik. Springer -
Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951
- [24] **K. Oswatitsch** : Gasdynamik. Springer-Verlag, Wien 1952
- [25] **N. Scholz** : Aerodynamik der Schaufelgitter, Bd. I, Verlag
G. Braun, Karlsruhe 1965
- [26] **A. Betz** : Einführung in die Theorie der Strömungsmaschinen. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1959
- [27] **A. Betz** : Konforme Abbildung. Springer-Verlag, Berlin/
Göttingen/Heidelberg 1964
- [28] **H. Schlichting** : Grenzschicht-Theorie. Verlag G. Braun,
Karlsruhe 1958
- [28a] **H. Schlichting** : Boundary-layer Theory. McGraw-Hill
Book comp., New York, 1960
- [29] **H. Görtler und W. Tollmien** : 50 Jahre Grenzschichtforschung. Verlag F. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1955.
- [30] **Auorenkollektiv** : Taschenbuch Maschinenbau, Bd. I :

Grundlagen. VEB Verlag Technik, Berlin 1966.

- [31] **Autorenkollektiv** : Taschenbuch Maschinenbau, Bd. II : Energieumformung und Verfahrenstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1966.
- [32] **Autorenkollektiv** : Hütte I : Theoretische Grundlagen. 28. Auflage, Verlag von W. Ernst und Sohn, Berlin 1955
- [33] **M. Kornfeld** : Elastizität und Festigkeit von Flüssigkeiten. VEB Verlag Technik, Berlin 1952
- [34] **G. F. Berg** : Hydraulische Bauelemente in der Automatisierungstechnik. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 29, VEB Verlag Technik, Berlin 1968
- [35] **W. Wuest** : Strömungsmesstechnik. Uni-Text, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1969
- [36] **W. H. Westphal** : Physik. Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959
- [37] **E. Schmidt** : Einführung in die technische Thermodynamik. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963
- [38] **J. Wallot** : Grössengleichungen, Einheiten und Dimensionen. J. A. Barth-Verlag, Leipzig 1957
- [39] **G. Oberdorfer** : Das internationale Mass-System und die Kritik seines Aufbaus. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1970
- [40] **K. Diebner und H. Völcker** : Eine praktische Einführung in das internationale Mass-System. HANSA, Schiffahrt-Schiffbau-Hafen, 98. Jg. (1961), S. 2015-2018
- [41] **Gesetzblatt der DDR** : Anordnung über die Tafel der gesetzlichen Einheiten vom 26. 11. 1968

- [42] **I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew** : Taschenbuch der Mathematik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1958
- [43] **W. Albring** : Helmholtz schuf eine Aehnlichkeitstheorie für Strömungen. Maschinenbautechnik 15 (1966), S. 113-118
- [44] **E. Truckenbrodt** : Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Grenzschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung. Ing. - Archiv 20 (1952), S. 211-228
- [45] **N. Scholz** : Ergänzungen zum Grenzschichtquadraturverfahren von E. Truckenbrodt. Ing. - Archiv 29 (1960), S. 82-92
- [46] **K. Kraemer** : Praktische Berechnung von Grenzschichten. Luftfahrttechnik (1956), S. 8-13
- [47] **K. Kraemer** : Grenzschichtberechnung an zwölf Profilen. Bericht 55/A/01 der Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen (1955.)
- [48] **M. J. Lighthill** : On Displacement Thickness. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 4 (1958), P. 383-392
- [49] **H. Schlichting** : Anwendung der Grenzschicht-Theorie auf Strömungsprobleme von Turbomaschinen. Siemens-Zeitschrift 33 (1959), S. 429-438
(Application of Boundary-Layer Theory in Turbomachinery. Trans. ASME, Journ. Basic Engineering 81 (1959) P. 543-551)
- [50] **H. Schlichting** : Neuere Untersuchungen über Schaufelgitterströmungen. Siemens-Zeitschrift 37 (1963), S. 827-837

- [51] **Th. von Kármán** : Theorie des Reibungswiderstandes. Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebes, Hamburg, S. 50-73
- [52] **N. Scholz** : Ueber eine rationale Berechnung des Strömungswiderstandes schlanker Körper mit beliebig rauher Oberfläche. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 45 (1951), S. 244-259, Diskussion dazu : S. 259-263
- [53] **G. Kempf und K. Karhan** : Zur Oberflächenreibung des Schiffes. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, S. 228-236
- [54] **J. Rotta** : Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten . Ing - Archiv 20 (1952) S. 195-207
- [55] **W. Szablewski** : Wandgesetze inkompressibler turbulenter Grenzschichten und Prandtlscher Mischungsweg. Monatsbericht der deutschen Akad. d. Wissenschaften zu Berlin, Bd. 6 (1964), S. 805-809
- [56] **O. Parr** : Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkörpern bei axialer Anströmung. Ing. - Archiv 32 (1963), S. 393-413
- [57] **N. Scholz** : Berechnung der Kennlinie eines Axialverdichters auf Grund grenzschichttheoretischer Gitteruntersuchungen, Jahrbuch der WGL (1955), S. 205-213
- [58] **E. Wolff** : Einfluss der Abrundung scharfer Eintrittskanten auf den Widerstand von Flügeln. Ing. - Archiv 4 (1933), S. 521-544.
- [59] **A. Betz und J. Lotz** : Verminderung des Auftriebes von Tragflügeln durch den Widerstand. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorschiffahrt 23 (1932), S. 277-279

- [60] **A. Ackl** : Auftriebsmaximum an Flügeln und an rotierenden Rädern. Kleine Studienarbeit an der Schiffbautechnischen Fakultät der Universität Rostock, 1962 (unveröffentlicht)
- [61] **H. Himmelskamp** : Profiluntersuchungen an einem umlaufenden Propeller. Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 2, Göttingen 1950
- [62] **A. Betz** : Höchstauftrieb von Flügeln an umlaufenden Rädern. Zeitschrift für Flugwissenschaften 9 (1961), S. 97-99
- [63] **H. Schlichting** : Aerodynamische Probleme des Höchstauftriebes. Zeitschrift für Flugwissenschaften 13 (1965), S. 1-14
- [64] **H. Schlichting** : Entwicklung der Grenzschicht-Theorie in den letzten drei Jahrzehnten. Zeitschrift für Flugwissenschaften 8 (1960), S. 93-111
- [65] **H. Schlichting und N. Scholz** : Ueber die theoretische Berechnung der Strömungsverluste eines ebenen Schaufelgitters. Ing. - Archiv 19 (1951), S. 42-65
- [66] **L. Speidel und N. Scholz** : Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 464 (1957), Düsseldorf.
- [67] **L. Szabó** : Einführung in die technische Mechanik. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1966
- [68] **L. Melton, Jr., and A. Rogowski** : The Interaction of Air Motion, Fuel Spray and Combustion in the Diesel Combustion Process. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power (1972), P. 11-16

- [69] **W. Albring** : Vermischen, Verdampfen, Verbrennen, Verteilen, ein Beitrag des Strömungstechnikers zu einigen Kraftwerkproblemen. *Energietechnik* 22 (1972), S. 142-147
- [70] **M. Lawson and H. von Ohain** : Electrofluid Dynamic Energy Conversion, Present Status and Research Areas. *Trans. ASME, Journal of Engineering for Power* (1971), P. 201-220
- [71] **E. Minardi** : Computed Performance Characteristics of Electrofluid Dynamic Colloid Generators. *Trans. ASME, Journal of Engineering for Power* (1971), P. 183-161
- [72] **G. Vogelpohl** : Betriebssichere Gleitlager. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958
- [73] **K. Spiegel und G. Noack** : Tragfähigkeitsdiagramme zum optimalen Auslegen von Radialgleitlagern. *Konstruktion* 24 (1972), S. 473-477
- [74] **L. Johnson** : The hydraulic springs. *Machine Design* 32 (1960), P. 114-117 (zitiert in *Konstruktion* 13 (1961), S. 499-500)
- [75] **A. Linford** : Flow Measurement and Meters. E. & F. N. Spon Ltd., London 1961
- [76] **G. F. Berg** : Anwendung der Hydraulik in der Automatisierungstechnik. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 37, VEB Verlag Technik, Berlin 1973
- [77] **Autorenkollektiv** : Das Fachwissen des Ingenieurs, Bd. I/1, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967
- [78] **I. Weinberg and K. Kalltenko** : Instrumentation and

Controls in the Oil and Petrochemical Industries. Mir Publishers, Moscow 1971

- [79] **E. Heidenreich** : Valuation of Centrifuge-Processes. Paper presented on the 13 th Science Week of the SAR, Aleppo, 18. - 24. Nov. (1972)
- [80] **C. Pfeleiderer und H. Petermann** : Strömungsmaschinen, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964
- [81] **Autorenkollektiv** : Strömungslehre, Lehrbriefe 1, 2, 3, 4 für das Hochschulfernstudium. VEB Verlag Technik, Berlin 1971
- [82] **W. Wuest** : Sichtbarmachung von Strömungen, II. : Flüssigkeitsströmungen. Archiv für Technisches Messen V 144-3 (1963), S. 123-128
- [83] **H. Bippes und P. Colak-antle'** : Der Wasserschleppkanal der DFVLR in Freiburg i. Br., Zeitschrift für Flugwissenschaften (1973), P. 113-120
- [84] **W. I. Smirnow** : Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961
- [85] **W. Kucharski** : Strömungen einer reibungslosen Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. Verlag R. Oldenburg, München und Berlin 1918
- [86] **W. Albring** : Beschauelung radialer Strömungsmaschinen, Bericht Nr. I 225/3 des Instituts für angewandte Strömungslehre der T H Dresden (1957)
- [87] **M. Hackeschmidt** : Zur konformen Abbildung der Strömung um beliebige Tragflügelprofile unter Verwendung

- des elektrolytischen Troges. Maschinenbautechnik 8 (1959), S. 259-262
- [88] **M. Hackeschmidt** : Zur Berechnung der Potentialströmung um beliebige ebene gerade Profilkitter unter Verwendung des elektrolytischen Troges. Maschinbautechnik 8 (1959), S. 357-363
- [89] **DIN 1952** : Durchflussmessung mit genormten Düsen, Blenden und Venturidüsen (VDI - Durchflussmessregeln), 1971
- [90] **E. D. Klomp and G. Sovran** : The Fluid Mechanics of Multiple-Venturi-Systems and their Application to Flow-Rate Metering. Trans. ASME, Journal of Basic Engineering (1972), P. 39-45
- [91] **G. Flügel** : Berechnung von Strahlapparaten. VDI - Forschungsheft 393 (1951), VDI - Verlag, Düsseldorf
- [92] **R. Jung** : Die Berechnung und Anwendung des Strahlgebläses. VDI - Forschungsheft 479 (1960), VDI - Verlag, Düsseldorf
- [93] **B. Bauer** : Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Strahlapparaten für kompressible Strömungsmittel (Strahlverdichter). VDI - Forschungsheft 514 (1966), VDI - Verlag, Düsseldorf
- [94] **W. Pohlenz** : Pumpen für Flüssigkeiten. VEB Verlag Technik, Berlin 1970
- [95] **E. Truckenbrodt** : Zur Ermittlung der Kräfte bei instationären Flüssigkeitsbewegungen in oben offenen Gefäßen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 53 (1973), S. 729-735

- [96] **R. C. Worster** : The Flow in Volute and its Effect on Centrifugal Pump Performance. Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 177 (1963), P. 843-864
- [97] **W. Albring** : Probleme bei der Gestaltung verlustarmer Gehäuse von Strömungsmaschinen. Wiss. Zeitschrift der TH Dresden 8 (1958/59)
- [98] **E. Truckenbrodt** : Die Berechnung des Profilwiderstandes aus der vorgegebenen Profilform. Ing. Archiv 21 (1953), S. 176-186
- [99] **A. Betz** : Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Bd. 16 (1925), S. 42-44
- [100] **B. B. Jonse** : The Measurement of Profile Drag by the Pitot Traverse Methode. Aeronautical Research Committee Report 1688 (1936)
- [101] **W. Kutta** : Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Sitzungsberichte Bayr. Akad. Wiss., Math. Phys. Kl. (1910) und (1911)
- [102] **N. Joukowsky** : Ueber die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt Bd. 1 (1910) S. 281-284, Bd. 3 (1912) S. 81-86
- [103] **N. Scholz** : Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 442 (1954), Düsseldorf
- [104] **H. Schlichting** : Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI-Forschungsheft 447 (1955), Düsseldorf.
- [105] **M. E. Deje und B. M. Trojanovskij** : Untersuchungen und

Berechnungen axialer Turbinenstufen, VEB Verlag Technik, Berlin 1973

- [106] **M. Hoffmeister** : Die Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singularitätenverfahrens. Maschinenbautechnik 8 (1959), S. 77-83
- [107] **Y. R. Reddy and S. Kari** : Optimum Vane Number and Angle of Centrifugal Pumps with Logarithmic Vanes. Trans ASME, Jour. Bas. Eng. 1971, P. 411-425
- [108] **A. Aekl** : Die Verfahren der Singularitätenmethode zur Berechnung der ebenen Strömung in radialen Schaufelgittern. Hauptentwurf am Institut für Strömungsmaschinen der Schiffbautechnischen Fakultät der Univ. Rostock (unveröffentlicht)
- [109] **A. Betz** : Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. In : Vier Abhandlungen zur Hydro-und Aerodynamik, von Prandtl und Betz, Göttingen 1927
- [110] **A. Betz und H. Helmbold** : Zur Theorie stark belasteter Schraubenpropeller. Ing. Archiv, Bd. 3 (1932), S. 1
- [111] **Th. Theodorson** : Theory of propellers. Mc Graw Hill Books Comp., New York/Toronto/London, 1948
- [112] **M. Strscheletzky** : Berechnungskurven für dreiflüglige Schiffsschrauben. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1955
- [113] **H. W. Lerbs** : Moderately Loaded Propellers with Afinite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation. Trans of SNAME, Vol. 60 (1952), P. 73-117
- [114] **K. O. Edel** : Der Entwurf von Nachstrompropellern nach Lerbs, Eckart und Morgan. Schiffbauforschung, H. 1-2 (1973), S. 56-60

- [115] **F. Weinig** : Aerodynamik der Luftschraube, Berlin 1940
- [115] **D. Weicker** : Die Vortriebswirkung des Schiffsruders im Propellerstrahl. Schiffbauforschung, H. 5+6 (1965)
- [117] **M. P. Tulin** : Supercavitating Propellers : History, Operating Characteristics, Mechanism of Operation. 4. Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, 1962
- [118] **E. Dörp** : Propeller bei voller Saugseitenkavitation und Wirbeltheorie des Propellers. Schiffbauforschung H. 5+6 (1972), S. 169-185
- [119] **K. Kafali** : An Investigation of the Pressure Distribution Around the Profiles Suitable for Marine Propeller. International Shipbuilding Progress, Vol. 12 (1965), Nr. 128, P. 139-154
- [120] **A. Betz** : Windenergie und ihre Anwendung durch Windmühlen. Verlag Vandenboeck und Ruprecht, Göttingen 1926
- [121] **G. Schmitz** : Theorie und Entwurf von Windrädern optimaler Leistung. Wiss. Zeitschrift der Universität Rostock (1955/56)
- [122] **H. Lamb** : Lehrbuch der Hydrodynamik, Uebersetzung der 5. englischen Ausgabe, Leipzig 1931
- [123] **K. Wendel** : Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1950, S. 207-255
- [124] **G. Schmitz** : Kräfte und Momente infolge der Bewegung eines Schiffes auf gerader und gekrümmter Bahn. Sonderbeilage der Schiffbautechnik (1956), S. 10-18
- [125] **G. Schmitz** : Querkraft und Moment infolge Schräganströmung von Schiffsrudern, Schiffskörpern und Gleit-

flächen. Schiffbautechnik 9 (1959), S. 561-569

- [126] **R. W. Kermeen, I. T. Mc Graw and B. R. Parkin** : Mechanism of Cavitation Inception and the Related Scale Effects Problems. Trans ASME 77 (1955), P. 533-541
- [127] **G. Ziegler** : Zugspannungen in strömendem Wasser. Maschinenbau und Wärmewirtschaft, 9. Jg., S. 343-349
- [128] **J. W. Daily and V. E. Johnson** : Turbulence and Boundary Layer Effects on Cavitation Inception from Gas Nuclei Trans. ASME 78 (1956), P. 1695-1706
- [129] **A. Ackl** : Zur Bestimmung des Kavitationsbeginns an ebenen Gitterprofilen in realen Strömungen. Dissertation an der Universität Rostock, 1967
- [130] **M. Lagally** : Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 2 (1922), S. 409-422
- [131] **A. Betz** : Singularitätenverfahren zur Ermittlung der Kräfte und Momente auf Körper in Potentialströmungen. Ing. Archiv, Bd. 3 (1932), S. 454-462
- [132] **H. Glauert** : Grundlagen der Tragflügel- und Luftschrauben-theorie. Berlin 1929
- [133] **W. Birnbaum und W. Ackermann** : Die tragende Wirbel-fläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 3 (1923), S. 290-297
- [134] **F. Riegels** : Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Ingenieur-Archiv, Bd. 16 (1948), S. 373-376 (I. Mitteilung); Bd. 17 (1949), S. 94-106 (II. Mitteilung); Bd. 18 (1950), S. 321

- [135] E. G. Feindt : Beitrag zu den Grundlagen des Singularitätenverfahrens der Strömungsmechanik. Zeitschrift für Flugwissenschaften (1962), S. 446-456
- [136] I. Weissinger : Neue Entwicklungen in der Tragflügeltheorie bei inkompressibler Strömung. Zeitschrift für Flugwissenschaften (1956), S. 225-236
- [137] A. Walz : Uebertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel. Luftfahrtforschung 16 (1939), S. 121
- [138] R. Döge : Ueber die Genauigkeit der Methoden zur Berechnung der inkompressiblen Potentialströmung durch ein ebenes gerades Schaufelgitter und ihre Brauchbarkeit für die Praxis. Maschinenbautechnik 9 (1960), S. 22-39
- [139] F. W. Riegels : Fortschritte in der Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter. Zeitschrift für Flugwissenschaften 9 (1961), S. 2-15
- [140] Ch. Shah : Methode für den Entwurf optimaler ebener Verzögerungsgitter in inkompressibler Strömung bei gegebenem Geschwindigkeitsdreieck. Dissertation T H Aachen, 1961
- [141] W. Richter : Berechnung der Druckverteilung von ebenen Schaufelgittern mit stark gewölbten dicken Profilen bei inkompressibler ebener Strömung. Ingenieur - Archiv (1960), S. 351-373.
- [142] W. H. Isay : Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (33), S. 397-409
- [143] E. Martensen : Die Berechnung der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholmschen In-

tegralgleichungen zweiter Art. Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Nr. 23 (1959)

- [144] **G. Fuhrmann** : Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft, Bd. 5 (1911/12), S. 63-123
- [145] **E. König** : Potentialströmung durch Gitter. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 2 (1922), S. 422-429
- [146] **A. I. Acosta** : An Experimental and Theoretical Investigation of Two-Dimensional Centrifugal pump Impeller. Trans. ASME (1954), P. 749-763
- [147] **M. Hackeschmidt** : Der Entwurf aerodynamisch günstiger Gleichdruck-Gitterprofile unter Verwendung des Holographenverfahrens. Maschinenbautechnik 12 (1963), S. 638-643, und 13 (1964)
- [148] **W. Aßbring** : Ein Näherungsverfahren zur Konstruktion ebener stossfrei angeströmter Schaufelgitter und Berechnung ihrer Druckverteilung bei stationärer Strömung. Maschinenbautechnik 5 (1956), S. 207-219
- [149] **F. Schlender** : Erweiterung des Kreisscheibenverfahrens für starkumlenkende Gitter mit grossen Teilungsverhältnissen. Maschinenbautechnik 8 (1959) S. 661-663
- [150] **H. Ihlenfeld** : Aufzeichnung von Isklinen und Isotachen mit Hilfe der Seifenhautanalogie bei Schaufelgittern. Maschinenbautechnik 9 (1969), S. 374-380
- [151] **D. Beutcher und D. Sturm** : Elektrolytische Analogiemessungen zur Bestimmung der Geschwindigkeit bei dreidimensionaler Strömung, am Beispiel eines Automobilmodells dargestellt. Maschinenbautechnik 10 (1961)



معجم المصطلحات العلمية

مرتبة ابجديا بالانجليزية

الانكليزي	المانحي	عربي
Absolute flow	Absolute Strömung	جريان مطلق
Absolute pressure	Absoluter Druck	تسقط مطلق
Absolute temperature	Absolute Temperatur	حرارة مطلقة
Absolute velocity	Absolute Geschwindigkeit	سرعة مطلقة
Acceleration field	Beschleunigungsfeld	حقل التسارع
Accelerating cascade	Beschleunigungsgitter	شبكة بروقيلات مسرع
Accelerating drag	Beschleunigungswiderstand	مقاومة التسارع
Adiabatic change of state	Adiabatische Zustandsänderung	تغير الحالة الاديباتي
Adiabatic lamination	Adiabatische Schichtung	التوضيع الاديباتي
Adhesion condition	Haftbedingung	شرط الالتصاق
Aerodynamics	Aerodynamik	ايروديناميك (تحريك الهواء)
Aerokinematics	Aerokinematik	ايروكينماتك (حركة الهواء)
Aerostatics	Aerostatik	ايروستاتك (توازن الهواء)
Aerostatical basic equation	Aerostatische Grundgleichung	المعادلة الاساسية الايروستاتيكية
Aerostatical stress state	Aerostatischer Spannungszustand	حالة الاجهاد الايروستاتيكية
Airfoil	Tragflügel	جناح حامل
Airfoil theory	Tragflügeltheorie	نظرية الجناح الحامل
Alcohol	Alkohol	كحول
Ambignons function	Mehrdeutige Funktion	تابع متعدد القيم
Analog (ous)	Analog	مماثل
Analogy	Analogie	مماثل
Analogy method	Analogiemethode	طريقة التماثل
Analytical	Analytisch	تحليلي
Analytical function	Analytische Funktion	تابع تحليلي
Angle of attack	Anstellwinkel	زاوية الورود (الهجوم)

الانكليزي	اللاتي	عربي
Angular deformation	Winkeldeformation	تشوه زاوي
Angular velocity vector	Winkelgeschwindigkeitsvektor	تسارع السرعة الزاوية
Apparent mass	Scheinbare Masse	كتلة ظاهرية
Aperture ratio	Öffnungsverhältnis	نسبة الانفتاح
Argument	Argument	زاوية زاوية ، عمدة ، بعد مركب
Atom	Atom	ذرة
Atmospheric pressure	Atmosphärischer Druck	ضغط جوي
Automatic relief valve	Automatisches Rückschlagventil	صمام عكس رجوع آتوماتيكي
Automatisation	Automatisation	الآتمتة
Average rotation	Mittlere Drehung	الدوران الوسطي
Axial flow	Axiale Strömung	جريان محوري
Axial flow pump	Axialpumpe	مضخة محورية
Axial flow turbine	Axialturbine	تسفة محورية
Barotropic	Barotrop	باروتروبي
Basic unit	Grundeinheit	واحدة أساسية
Bearing lubrication	Lagerschmierung	تزييت المضاميع
Bernoulli equation	Bernoullische Gleichung	معادلة برنولي
Blade theory of propeller	Flügelblatt - Theorie des propellers	نظرية الريش الحاملة المروحة
Boundary conditions	Randbedingungen	شروط حدية
Boundary layer	Grenzschicht	طبقة حدية
Boundary layer theory	Grenzschicht-Theorie	نظرية الطبقة الحدية
Boundary line	Konturlinie	خط حدود الشكل
Bourdon pressure gauge	Bourdon Druckmesser	مقياس بوردون للضغط
Borda mouthpiece	Borda - Mündung	فتحة بوردا
Bulk modulus of elasticity	Elastizitätsmodul	معامل المرونة
Buoyancy axis	Schwimmachse	محور الطفو
Buoyancy force	Statischer Auftrieb	قوة الرفع الستاتيكية
Calibration	Eichung	تعيين
Capillarity	Kapillarität	الخاصية الشعرية
Capillar depression	Kapillare Depression	الانكماش الشعري
Capillarity coefficient	Kapillaritätskoeffizient	معامل الخاصية الشعرية
Capillar pressure	Kapillardruck	ضغط الخاصية الشعرية
Capillary rise	Kapillare Steighöhe	ارتفاع السعوط الشعري

انكليزي	اللاتني	عربي
Camber ratio	Wölbungsverhältnis	نسبة الانحناء
Carburettor	Vergaser	مفحم
Cascade	Gitter	شبكة بروفيلات
Cascade front	Gitterfront	جبهة الشبكة
Cascade theory	Gittertheorie	نظرية شبكة البروفيلات
Cascade of equal pressure	Gleichdruckgitter	شبكة الضغط المتساوي
Cardioid	Herzkurve	المحني القلبي (الكارديوئيدي)
Casing	Gehäuse	غلاف (الآلة)
Cauchy-Riemann-conditions	Cauchy-Riemannsche Bedingungen	شروط كوشي - ريمان
Cauchy main value	Cauchyscher Hauptwert	القيمة الأساسية الكوشية
Causality principle	Kausalitätsprinzip	مبدأ السببية
Cavitation	Kavitation	التكهف
Cavitation number	Kavitationszahl	عدد التكيف
Center of Buoyancy	Zentrum der verdrängten Flüssigkeitsmasse	مركز الكتلة المزاحة
Central streamline	Zentrale Stromlinie	خط التيار المركزي
Centre of pressure	Druckzentrum	مركز الضغط
Centrifuge	Zentrifuge	آلة طاردة
Centrifugal force	Zentrifugalkraft	قوة نابذة
Centrifugal moment	Zentrifugalmoment	عزم نابذ
Centrifugal pump	Zentrifugalpumpe	مضخة نابذة
Chemical Kinetics	Chemische Kinetik	كيمياء حركية
Circulation	Zirkulation	جولان
Circulation distribution	Zirkulationsverteilung	توزيع الجولان
Circular cascade	Kreisgitter	شبكة دائرية
Closed physical system	Geschlossenes physikatisches System	جملعة فيزيائية مغلقة
Closing condition	Schliessungsbedingung	شرط الانغلاق
Coefficient for non-uniformity of impuls flow	Ungleichförmigkeitsfaktor für Impulsstrom	معامل عدم النظام تيار الدفع
Coefficient for orifice meter	Koeffizient für Messblende	معامل حلقة القياس
Coefficient for nozzle	Koeffizient für Messdüse	معامل نفثة القياس
Coefficient for venturimeter	Koeffizient für Venturimesser	معامل مقياس فننوري
Coefficient for weir	Überfallbeiwert	معامل الهدار
Coefficient of compressibility	Kompressibilitätskoeffizient	معامل الانضغاطية
Coefficient of contraction	Kontraktionsziffer	معامل التضييق
Coefficient of discharge	Ausflussziffer	معامل التصريف
Coefficient of Lift	Auftriebsbeiwert	معامل قوة الرفع

الانكليزي	الالماني	عربي
Coefficient of lift maximum	Auftriebsmaximumbeiwert	معامل قوة الرفع الاعظمية
Coherent units	Kohärente Einheiten	واحدات قياس مترابطة
Colloidal	Kolloidal	غروي
Complex function	Komplexe Funktion	تابع مركب
Complex number	Komplexe Zahl	عدد مركب
Complex plane	Komplexe Ebene	المستوي المركب (منوي غوص)
Complex potential function	Komplexe Potentialfunktion	تابع الكمون المركب
Compressor	Kompressor	ضاغط
Compressible flow	Kompressible Strömung	جريان قابل للانضغاط
Compressible fluid	Kompressible Flüssigkeit	سائل قابل للانضغاط
Conformal Mapping	Konforme Abbildung	التشثيل المطابق
Conformal transformation	Konforme Transformation	التقل (التحويل) المطابق
Conjugate complex number	Konjugiert komplexe Zahl	عدد مركب مرافق
Conjugate complex velocity	Konjugiert komplexe Geschwindigkeit	سرعة مركبة مرافقة
Contact angle	Randwinkel	زاوية المخافة (التماس)
Continuity condition	Kontinuitätsbedingung	شرط الاستمرار
Control Surface	Kontrollfläche	سطح تحكم
Controllable propeller	Verstellbarer Propeller	مروحة (رفاق) قابلة للتوجيه
Convective acceleration	Konvektive Beschleunigung	تسارع الحمل
Coriolis force	Coriolis Kraft	قوة كوريولس
Correction factor	Korrekturfaktor	معامل تصحيح
Correction function	Korrekturfunktion	تابع تصحيح
Couple	Kräftepaar	مزدوجة
Couette flow	Couette - Strömung	جريان كوييت
Critical pressure	Kritischer Druck	ضغط حرج
Critical velocity	Kritische Geschwindigkeit	سرعة حرجية
Creeping flow	Schleichströmung	جريان زاحف
D'Alembert's force	D'Alembertsche Kraft	قوة دالمبير
D'Alembert's principle	D'Alembertsches Prinzip	مبدأ دالمبير
Datum level	Bezugsniveau	مستوى القياس (الاسناد)
Datum pressure	Bezugsdruck	ضغط القياس (الاسناد)
Definition equation	Definitionsgleichung	معادلة التعريف
decelerating cascade	Verzögerungsgitter	شباك كابح
Deformation	Deformation	تشوه

انكليزي	المانى	عربي
Deformation motion	Deformationsbewegung	حركة تشويعية
Density	Dichte	كثافة
Density of mass flow	Massenstromdichte	كثافة التيار الكتلي
Depth of immersion	Tauchtiefe	الغاطس
Derived quantity	Abgeleitete Grösse	قيمة مشتقة
Differential-Manometer	Differentialmanometer	مانومتر تفاضلي
Diffuser	Diffusor	ناشرة
Dimension	Dimension	مقاس (بعد)
Dimensional analysis	Dimensionalanalyse	تحليل بعدي
Dimension constant	Dimensionskonstante	ثابتة المقاس
Dimension less	Dimensionslos	لا بعدي
Direct problem	Direktes Problem	المسألة (المباشرة) (المألة الاساسية الثانية)
	(2. Hauptaufgabe)	
Discontinuity surface	Unstetigkeitsfläche	سطح عدم استقرار (سطح فاصل)
	(Trennungsfläche)	
Discharge	Ausfluss, Durchfluss	تدفق ، تصريف
Discharge coefficient	Ausflussziffer	معامل التصريف
Discharge rate of motion quantity	Ergiebigkeit der Bewegungsgrösse	غزارة تدفق كمية الحركة
Displacement	Verdrängung	الازاحة
Displacement effect	Verdrängungseffekt	تأثير الازاحة
Divergence	Divergenz	تفرق
Downward air	Abwind	الهواء الهابط
Downwash velocity	Abwärts geschwindigkeit	سرعة منجهة للأسفل
Drag	Widerstand	مقاومة
Drag coefficient	Widerstandsbeiwert	معامل المقاومة
Dynamics	Dynamik	التحريك (ديناميك)
Dynamic pressure	Dynamischer Druck	ضغط تحريكي (ديناميكي)
Dynamic viscosity	Dynamische Viskosität	لزوجة تحريكية
Eddy viscosity	Wirbelviskosität	لزوجة اعصارية
Efficiency	Wirkungsgrad	مردود
Electron	Elektron	الالكترون
Electrodynamical field	Elektrodynamisches Feld	حقل الكتروديناميكي
Electrolytical tank	Elektrolytischer Trog	حوض الكتروليتي

انكليزي	المانحي	عربي
Electro-Hydrodynamic Generator	Elektrohydrodynamischer Generator	مولد الكترو - هيدروديناميكي
Elementary process	Elementarprozess	عملية أولية (أساسية)
Energy line	Energielinie	خط القدرة
Entropy	Entropie	الانتروبي
Energie gradient	Energiegradient	تدرج القدرة
Equation of physical quantities	Gleichung physikalischer Grössen	معادلة قيم فيزيائية
Equation of state	Zustandsgleichung	معادلة الحالة
Equation of units	Einheitengleichung	معادلات واحداث قياس
Equipotential line	Aequipotentiallinie	خط الكمون الثابت
Equipotential surface	Aequipotentialfläche	سطح الكمون الثابت
Euler's equations of motion	Eulersche Bewegungsgleichungen	معادلات اويلر الحركية
External force	Aeussere Kraft	قوة خارجية
Field force	Feldkraft	قوة حقلية
Field theory	Feldtheorie	نظرية الحقل
Filteration coefficient	Filterbeiwert	معامل الترشيح (التنصفية)
Filtering mass	Filterungsmasse	كتلة (مادة) مرشحة
First fundamental problem	Erste Hauptaufgabe	المسألة الأساسية الاولى
Fixed vortex	Gebundener Wirbel	اعصار مربوط
Flash	Blitz	الغلاش ، الضوء الومضي
Flettner rotor	Flettner Rotor	دوار فلتنر
Flow energy	Strömungsenergie	قدرة الجريان
Flotation surface	Schwimmfläche	سطح الطفو
Flotation plane	Schwimmebene	مستوى الطفو
Flow field	Strömungsfeld	حقل الجريان
Flow function	Strömungsfunktion	تابع الجريان
Flow nozzle	Messdüse	نفثة قياس
Flow pattern	Strömungsbild	صورة الجريان
Flow reaction force	Reaktionskraft der Strömung	قوة رد فعل الجريان
Flow Similarity	Strömungsähnlichkeit	تشابه الجريان
Flow system	Strömungssystem	جملعة جريان
Flow technique	Strömungstechnik	تكنيك الجريان
Flow valve	Durchflussventil	صمام غزارة
Flow with circulation	Strömung mit Zirkulation	جريان جولاني

الانكليزي	المانحي	عربي
Flow without circulation	Strömung ohne Zirkulation	جريان لا جولاني
Fluid	Flüssigkeit	سائل
Fluid gear	Flüssigkeitsgetriebe	نفسية سائلة
Fluid mechanics	Strömungslehre	ميكانيك السوائل
Flux vector	Flussvektor	شعاع التدفق
Force line	Kraftlinie	خط القوة
Forced vortex	Gezwungener Wirbel	اعصار قسري
Form drag	Formwiderstand	مقاومة الشكل
Fourier series	Forier-Reihe	سلسلة فورييه
Francis turbine	Francis-Turbine	تغفة فرنسيس
Free jet	Freistrahle	ناظورة حرة
Free streamline	Freie Stromlinie	خط تيار حر
Free surface	Freie Oberfläche	السطح الحر (السائب)
Free vortex	Freier Wirbel	اعصار حر
Friction drag	Reibungswiderstand	مقاومة الاحتكاك
Function theory	Funktionstheorie	نظرية المتوابع
Fuselage	Rumpf	جزع الطائرة أو السفينة
Gauge liquid	Messflüssigkeit	سائل المقياس
Gauge pressure	Messdruck	تسقط المقياس (الزائد أو الناقص)
Gas constant	Gaskonstante	ثابتة الغاز
General equation of continuity	Allgemeine Kontinuitätsgleichung	معادلة الاستمرار العامة
General hydrostatic equation	Allgemeine hydrostatische Gleichung	المعادلة الهيدروستاتيكية العامة
Geodetical hight	Geodätische Höhe	الارتفاع المكاني
Glauert's series	Glauertsche Reihe	سلسلة غلاورت
Gradient	Gradient	تدرج
Gradient of velocity potential	Gradient des Geschwindigkeitspotentials	تدرج كمون السرعة
Grading angle	Staffelungswinkel	زاوية تدرج (التسيب)
Graphical method	Graphische (Geometrische) Methode	طريقة بيانية (هندسية)
Gravitation field	Gravitationsfeld	حقل الجاذبية الأرضية
Gravitation force	Gravitationskraft	قوة الثقالة
Gravitation pressure	Gravitationsdruck	تسقط الثقالة
Ground pressure	Bodendruck	الضغط على القمر
Ground water flow	Grundwasserströmung	جريان المياه الجوفية
Guide wheel	Leitrad	دولاب موجه

انكليزي	الماني	عربي
Hetrogenous	Hetrogen	متعدد الطور
Hodograph	Hodograph	هودوگراف
Hodograph plane	Hodographenebene	مستوي الهودوگراف
Hodograph methode	Hodographenmethode	طريقة الهودوگراف
Homogenous	Homogen	متجانس
Horseshoe vortex	Hufeisenwirbel	اعصار حدوة الحصان
Hub	Nahe	مسرة (محور)
Hub vortex	Nabenwirbel	اعصار المسرة
Hydraulics	Hydraulik	الهيدروليک
Hydraulic control	Hydraulikreglung	تحكم هيدروليکی
Hydraulic transport	Hydraulischer Transport	نقل هيدروليکی
Hydraulic circuit	Hydraulischer Kreis	دائرة هيدروليكية
Hydraulic grade line	Standrohrspiegelinie	خط التدرج الهيدروليکی
Hydraulic oil	Hydrauliköl	زيت هيدروليکی
Hydraulic press	Hydraulische Presse	مكبس هيدروليکی
Hydraulic loss	Hydraulischer Verlust	فقد هيدروليکی
Hydro - Electrodynamic - analogy	Hydroelektrodynamische Analogie	تعالل هيدرو - الكتروديناميکی
Hydro-Electromagnetics	Hydroelektromagnetik	هيدروديناميك كهرومغناطیسی
Hydrodynamics	Hydrodynamik	هيدروديناميك (بحريك الموائع)
Hydrodynamic field	Hydrodynamisches Feld	حقل هيدروديناميکی
Hydrofoil	Tragflügel	جناح حامل (مائي)
Hydrofoil propeller	Tragflügelpropeller	مروحة ذات ريش حاملة
Hydrodynamic inertia moment	Hydrodynamisches Trägheitsmoment	عزم عطالة هيدروديناميکی
Hydrodynamic mass	Hydrodynamische Masse	كتلة هيدروديناميكية
Hydrometer	Hydrometer	هيدرومتر
Hydrokinematics	Hydrokinematik	هيدروكينماتك (حركة الموائع)
Hydrostatics	Hydrostatik	هيدروستاتك (توازن الموائع)
Hydrostatic basic equation	Hydrostatische Grundgleichung	المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية
Hydrostatic lift	Hydrostatischer Auftrieb	قوة الرفع الهيدروستاتيكية
Hydrostatical stress state	Hydrostatischer Spannungszustand	حالة الاجهاد الهيدروستاتيكية
Hypersonic	Uberschall	فوق صوتي
Ideal energy line	Ideale Energielinie	خط تدرج القدرة المثالي
Ideal flow	Ideale Strömung	جريان مثالي

انكليزي	الماني	عربي
Ideal fluid	Ideale Flüssigkeit	سائل مثالي
Ideal hydraulic head	Ideale hydraulische Höhe	الارتفاع (الهيدروليكي) المثالي
Image plane	Bildebene	مستوي الصورة
Imaginary number	Imaginärzahl	عدد تخيلي
Imaginary part	Imaginärteil	جزء تخيلي
Imaginary boundary	Imaginärberandung	حدود وهمية
Impeller	Laufrad	دولاب دائري
Impulse	Impuls	دفع
Impulse flow	Impulsstrom	تيار دفع
Impulsiv pressure	Impulsiver Druck	ضغط صدمي
Incompressible fluid	Inkompressible Flüssigkeit	مبائل غير قابل للانضغاط
Incompressible flow	Inkompressible Strömung	جريان غير قابل للانضغاط
Inertia moment	Trägheitsmoment	عزم عطالة
Induced drag	Induzierter Widerstand	مقاومة محرقة
Induced velocity	Induzierte Geschwindigkeit	سرعة محرقة
Inflow	Zuströmung	جريان المدخل
Initial conditions	Anfangsbedingungen	شروط البدء
Instantaneous	Momentan	لحظي
Interfacial tension	Grenzflächenspannung	اجهاد السطوح المحددة
Internal energy	Innere Energie	طاقة داخلية
Internal force	Innere Kraft	قوة داخلية
International System of units	Internationales Mass-System	تجمل الواحدات العالمية
Inverse analogy	Inverse Analogie	تقابل عكسي
Inverse problem	Indirektes Problem	المسألة المعكوسة (المسألة الانعكاسية الاولى)
Inversion circle	Inversionskreisl	دائرة انعكاسية (مرآتية)
Ion	Ion	شاردة
Ionized	ionisiert	متأين
Irrotationality	Drehungsfreiheit	خلو من الدوران
Irrotational motion	Drehungsfreie Bewegung	حركة لا دورانية
Isobaric change of state	Isobarische Zustandsänderung	تغير حالة إزوباري
Isoclinic line	Isocline	خط الميل الثابت
Isotachic line	Isotache	خط السرعة الثابتة
Isothermal change of state	Isothermische Zustandsänderung	تغير حالة إيزوثيرمي
Isothermal lamination	Isothermische Schichtung	توضع إيزوثيرمي
Isotropic	Isotropisch	موجد الخواص

انكليزي	الماني	عربي
Jet	Strahl	نافورة (تيار نافوري)
Jet engine	Strahlmaschine	آلة نافورية
Jet contraction	Strahlkontraktion	تطبيق مقطع النافورة
Jet force	Strahlkraft	قوة النافورة
Jet propulsion	Strahlantrieb	قوة دفع النافورة
Jet reaction	Strahlreaktion	رد فعل النافورة
Jet theory of propeller	Strahltheorie des Propellers	النظرية النافورية للمروحة
Joukowski profile	Joukowski-Profil	بروفيل يوكوفسكي
Journal bearing	Gleitlager	مضجع أنزلاقي
Kaplan - turbine	Kaplan-Turbine	عنفة كابلان
Kinematics	Kinematik	علم الحركة (المكنيماتك)
Kinematic boundary conditions	Kinematische Randbedingungen	شروط حدية حركية
Kinematic viscosity	Kinematische Viskosität	لزوجة حركية
Kinematic volume force	Kinematische Volumenkraft	قوة حجمية حركية
Kinetic energy	Kinetische Energie	قوة حركية
Kinetic theory of materials	Kinetische Theorie der Materie	النظرية الحركية للمادة
Kutta - Joukowski theorem	Kutta-Joukowski'scher Satz	قانون كوتا - يوكوفسكي
Labile equilibrium	Labiles Gleichgewicht	بوازن ظلي
Lagrange method	Lagrange-Methode	طريقة لاغرانج
Laminar	Laminar	صفائحي
Laminar flow	Laminarströmung	جريان صفائحي
Laplace operator	Laplace Operator	معامل لابلاس
Lemniscate	Lemniskate	لامنسكات
Lift	Auftrieb	قوة الرفع
Lift slope	Auftriebsanstieg	مدرج معامل قوة الرفع
Light-pointer micromanometer	Lichtzeiger-Mikromanometer	مكرومانومتر ذو مؤشر ضوئي
Limiting velocity	Grenzgeschwindigkeit	سرعة حدية
Linear deformation	Lineare Deformation	تنسوء طولي
Line element	Linienelement	عنصر خطي
Line integral	Linienintegral	تكامل خطي
Liquid	Tropfbare Flüssigkeit	مائع
Liquid - Barometer	Flüssigkeitsbarometer	بارومتر سائلي (مائلي)

الانكليزي	المانى	عربي
Liquid column	Flüssigkeitssäule	عمود سائل (مائع)
Liquid - Monometer	Flüssigkeitsmanometer	مانومتر سائل (مائى)
Local acceleration	Lokalbeschleunigung	تسارع مكاني
Local intensity of vorticity	Örtliche Wirbelintensität	شدة اعصارية موضعية
Local intensity of sources	Örtliche Quellintensität	شدة لمية موضعية
Local method	Lokalmethode	طريقة مكانية
Lost head	Verlustrhöhe	ارتفاع الفواقد
Mach - number	Machsche Zahl	عدد ماخ
Magnetogasdynamics	Magnetogasdynamik	الغازديناميك المغناطيسي
Magnetohydrodynamics	Magnetohydrodynamik	الهيدروديناميك المغناطيسي
Magnus - effect	Magnus-Effekt	تأثير ماجنوس
Main flow	Hauptströmung	جريان رئيسي
Mapping	Abbildung	تمثيل
Mapping function	Abbildungsfunktion	تابع تمثيل
Mapping modulus	Abbildungsmodul	معامل التمثيل
Mass system	Massensystem	جسلة كتلية
Material-method	Materielle Methode	الطريقة المادية
Mean density of mass flow	Mittlere Massenstromdichte	كثافة التيار الكتلي الوسطية
Mean velocity of Impuls flow	Mittlere Geschwindigkeit des Impulsstromes	سرعة تيار الدفع الوسطية
Mechanical energy	Mechanische Energie	قدرة ميكانيكية
Mechanics of continuum	Kontinuumsmechanik	ميكانيك الوسط المستمر
Mechanics of point particles	Massenpunktmekhanik	ميكانيك النقطة المادية
Mechanisation	Mechanisation	مكتنة
Meniscus	Meniskus	تقعر هلالى
Meridional section	Meridional-schnitt	مقطع زوالى (النصفى)
Mesosphere	Mesosphäre	الميزوسفير
Metacentre	Metazentrum	مركز الطفو المستنتج
Moment coefficient	Momentenbeiwert	معامل العزم
Modulus	Modul	معامل
Moivre - law	Moivrescher Satz	قانون مويفري
Molecular cohesion force	Molekulare Kohäsionskraft	قوة الترابط الجزيئية
Moment of momentum	Impulsmoment	عزم الدفع (عزم كمية الحركة)
Moment slope	Momentenanstieg	تدرج العزم
Momentum theory of propeller	Impulstheorie des Propellers	نظرية الدفع للمروحة

انكليزي	المانى	عربي
Multiply convected region	Mehrfach zusammenhängendes Gebiet	ساحة متعددة الترابط
Multistage rocket	Mehrstufige Rakete	صاروخ متعدد المراحل
Natural fluid	Natürliche (reale) Flüssigkeit	سائل حقيقي
Negative pressure	Negativer Druck	ضغط سالب
Neutral Equilibrium	Neutrales Gleichgewicht	نوازن مطلق
Newtonian fluid	Newtonsche Flüssigkeit	سائل نيوتوني
Non - Newtonian fluid	Nicht-Newtonsche Flüssigkeit	سائل لانيوتوني
Non-uniform flow	Ungleichförmige Strömung	جريان غير منتظم
Non-vortical	Wirbellos, Wirbelfrei	لاعصاري، خال من الأعاصير
Normal atmosphere	Normalatmosphäre	جو نظامي
Nose vortex	Nasenwirbel	اعصار الأنف
Nolche	Nut	فرنسية
One - dimensional	Eindimensional	وحيد البعد (القياس)
One - stage rocket	Einstufige Rakete	صاروخ ذو مرحلة واحدة
Open system	Offenes System	جمله مفتوحة
Original plane	Originalebene	مستوي الاصل
Orifice	Blende	حقلقة قياس
Orthogonal flow net	Orthogonales Strömungsnetz	شبكة خطوط جريان متعامدة
Overpressure	Überdruck	ضغط زائد
Paraboloid	Paraboloid	مجسم قطع مكافئ
Path line	Bahnlinie	خط المسار
Pelton - turbine	Pelton-Turbine	عتقة بلتون
Perfect gas	Vollkommenes Gas	غاز كامل
Peripheral velocity	Umfangsgeschwindigkeit	سرعة محيطية
Phase	Phase	طور
Physical system	Physikalisches System	جمله فيزيائية
Physical system of units	Phycalisches Einheitensystem	جمله واحداث القياس الفيزيائية
Piezometer	Steigrohrdruckmesser	أنبوب ساعد لقياس الضغط
Pipe branching	Rohrverzweigung	تفرع الانابيب
Pitot - tube	Pitotrohr	انبوبة بيتوت
Plane half - body	Ebener Halbkörper	جسم نصفى مستو
Plasma physics	Plasmaphysik	فيزياء البلازما

الانكليزي	المانحي	عربي
Point sink	Punktsenke	بالوعة نقطية
Point source	Punktquelle	نبع نقطي
Poisson equation	Poissonsche Gleichung	معادلة بويسون
Polytropic change of state	Polytropische Zustandsänderung	تغير حالة بوليتروبي
Potential	Potential	كمون ، كموني
Potential energy	Potentielle Energie	طاقة كامنة
Potential equation	Potentialgleichung	معادلة الكمون (معادلة لابلاس)
Potential flow	Potentialströmung	جريان كموني
Potential vortex	Potentialwirbel	أعصار كموني
Pressure	Druck	ضغط
Pressure balance	Druckwaage	ميزان ضغط
Pressure coefficient	Druckbeiwert	معامل الضغط
Pressure drag	Druckwiderstand	مقاومة الضغط
Pressure distribution	Druckverteilung	توزيع الضغط
Pressure drop	Druckabfall	انخفاض (تناقص) الضغط
Pressure function	Druckfunktion	تابع الضغط
Pressure head	Druckhöhe	ارتفاع الضغط
Profile angle	Profilwinkel	زاوية البروفيل
Profile chord	Profilsehne	وتر البروفيل
Profile camber	Profilwölbung	انحناء (تقوس) البروفيل
Profile drag	Profilwiderstand	مقاومة البروفيل (الشكل)
Profile thickness	Profilstärke	سمك البروفيل
Projection micromanometer	Projektionsmikromanometer	مكرومانومتر إسقاط
Propeller	Propeller	مروحة ، دابر
Proportionality	Proportionalität	تناسب
Pump cascade	Pumpengitter	شبكة مضخة (كايح)
Quadrupole	Quadrupol	مقطب رباعي (كوادروبول)
Quantity of motion	Bewegungsgrösse	كمية حركة
Quasisteady	Quasistationär	شبه مستقر
Radial flow	Radialströmung	جريان قطري
Radial pump	Radialpumpe	مضخة قطرية
Radial turbine	Radialturbine	عنفة قطرية
Ram jet	Loranttrieb	محرك لورين المتفاث

Rankine body	Rankinescher Körper	جسم رانكين
Rate of discharge	Durchfluss, Volumenstrom	غداوة التدفق ، التيار الحجمي
Rate of mass discharge	Massendurchfluss, Massenstrom	غداوة التدفق الكتلي ، التيار الكتلي
Real flow	Reale Strömung	جريان حقيقي
Real numbre	Realtzahl	عدد حقيقي
Real part	Realteil	جزء حقيقي
Real Boundary	Reale Berandung	حد حقيقي
Real vortex	Realwirbel	اعصار حقيقي
Relative equilibrium	Relatives Gleichgewicht	توازن نسبي
Relative flow	Relativströmung	جريان نسبي
Relative velocity	Relativgeschwindigkeit	سرعة نسبية
Relief valve	Entlastungsventil	شمام تخفيف (او تنفيس)
Remote - control	Fernsteuerung	توجيه (تحكم) عن بعد
Reynolds number	Reynolds - Zahl	عدد رينولدز
Kiegels' factor	Reigels - Faktor	معامل ريفلس
Riemann Surface	Riemannsche Fläche	سطح ريمان
Ring vortex	Ringwirbel	اعصار خاتمي
Rocket	Rakete	مساروخ
Rotation	Drehung	دوران
Rotationally symmetric	Rotationssymmetrisch	متناظر دورانيا
Rotational motion	Drehungsbehaftete Bewegung	حركة دورانية
Rotation vector	Rotationsvector	شعاع الدوران (الدوار)
Saturation state	Sättigungszustand	حالة الإشباع
Scalar	Skalar	عددي
Secondary flow	Sekundärströmung	جريان ثانوي
Second fundamental problem	Zweites Hauptproblem	المسألة الاساسية الثانية
Seepage flow	Sickerströmung	جريان زاحف (رشح)
Segner wheel	Segnersches Rad	دولاب زيفتر
Separation	Ablösung	انفصام
Series	Reihe	سلسلة
Series expansion	Reihenentwicklung	تسلسل (تايع) كسيلة
Series of vancs	Flügelreihe	سلسلة ريش
Shear stress	Schubspannung	اجهاد قص
Shear stress velocity	Schubspannungsgeschwindigkeit	سرعة اجهاد القص

الانكليزي	الماني	عربي
Shockless	Stossfrei	لاصدمي ، مماسي
Shock loss	Stossverlust	فقد صدمي
Similarity	Aehnlichkeit	تشابه
Similarity number	Aehnlichkeitszahl	عدد التشابه
Simply connected region	Einfach zusammenhängendes Gebiet	مساحة وحيدة الترابط
Singular point	Singularitätspunkt	نقطة شاذة
Siphon principle	Siphonprinzip, Heberprinzip	مبدأ السيفون أو الرفع
Skeleton profile	Skelettprofil	بروتيل الهيكل ، الخط الرئيسي
Slide	Gleiten	انزلق
Sonic	Schall -	صوتي
Source density	Quelldichte	كثافة لمصدر
Sources-sinks-distribution	Quell-Senken-Verteilung	توزيع ينابيع - بالوعات
Sources - sinks - surface	Quell-Senken-fläche	سطح ينابيع وبالوعات
Source strength	Quellstärke (Ergiebigkeit)	سعة أو غزارة النبع
Source - vortex	Wirbelquelle	نبع اعصاري
Spacing ratio	Teilungsverhältnis	نسبة التقسيم
Specific heat	Spezifische Wärme	حرارة نوعية
Specific volume	Spezifisches Volumen	حجم نوعي
Specific volume force	Spezifische Volumenkraft	قوة حجمية نوعية
Specific weight	Spezifisches Gewicht	وزن نوعي
Spin	Drall	تدويم زائلي
Spiral volute	Spiralgehäuse	مفلج حلزوني
Stream function	Stromfunktion	تابع الجريان
Stabile	Stabil	(توازن) مستقر
Stability	Stabilität	استقرار
Stagnation flow	Stauströmung	جريان ركودي
Stagnation point	Staupunkt	نقطة ركود
Stagnation pressure	Staudruck	ضغط الركود
Stagnation region	Staugebiet	منطقة ركود
Standard	Norm, Standard	مقياس ، قياس ، ستاندر
Standardization	Standardisierung	توحيد المقاييس ، معايرة
Standard orifice	Normblende	حقلقة قياسية
Stand thrust	Stand Schub	قوة دفع الوقوف
Starting vortex	Anfahrwirbel	اعصار بدء الحركة
State equation	Zustandsgleichung	معادلة الحالة
Statics	Statik	علم التوازن (الستاتيك)

انكليزي	الماني	عربي
Static pressure	Statischer Druck	ضغط سثاتيكي
Statical stability	Statische Stabilität	استقرار سثاتيكي
Steady flow	Stationäre Strömung	جريان مستقر
Stepless	Stufenlos	بدون تدرج
Stop valve	Sperrventil	صمام إيقاف أو قطع
Stop vortex	Stoppwirbel	اعصار التوقف
Straight profile cascade	Geraðes Profilitter	شبك بروفيلات مستقيم
Stratosphere	Stratosphäre	ستراتوسفير
Stream filament	Stromfaden	خيوط تيار
Stream line	Stromlinie	خط تيار
Stream lined body	Stromlinienkörper	جسم انسيابي
Stream tube	Stromröhre	أنبوبة تيار
Stress	Spannung	اجهاد
Stokes stream function	Stokessche Stromfunktion	تابع تيار ستوكس
Subsonic	Unterschall	تحت صوتي
Substantial acceleration	Substantielle Beschleunigung	تسارع مادي
Suction effect of flow	Saugwirkung der Strömung	الفتل الامتصاصي للجريان
Suction force	Saugkraft	قوة مص
Suction head	Saughöhe	ارتفاع السحب (المص)
Suction pressure	Saugdruck	ضغط السحب
Sudden contraction	Plötzliche Verengung	تضييق فجائي (للمقطع)
Sudden expansion	Plötzliche Erweiterung	توسع فجائي (للمقطع)
Supercavitation propeller	Propeller mit Vollkavitation	مروحة منكوفة كلية
Superposition principle	Superpositionsprinzip	مبدأ التضاف أو التراكم
Supersonic	Ueberschall	فوق صوتي
Surface	Fläche	سطح
Surface element	Flächenelement	عنصر سطحي
Surface force	Oberflächenkraft	قوة سطحية
Surface of constant pressure	Fläche gleichen Drucks	سطح ذو ضغط ثابت
Surface tension	Oberflächenspannung	لوتر (اجهاد) سطحي
Systeme international d'unités (SI)	Internationales Einheitensystem	جملة واحداث القياس العالمية
Taylor series	Taylorsche Reihe	سلسلة تايلور
Technical system of units	Technisches Einheitensystem	جملة واحداث القياس التقنية
Temporal mean velocity	Zeitlich mittlere Geschwindigkeit	سرعة وسطية زمنية

الانكليزي	الماني	عربي
Tensor	Tensor	توتور
Test point	Aufpunkt	نقطة اختبارية
Theory of Elasticity	Elastizitätstheorie	نظرية المرونة
Theory of sources and sinks	Quell-Senken-Theorie	نظرية المصادر - البالوعات
Thermal Fluid dynamics	Thermische Strömungslehre	ميكانيك السوائل الحراري
Thermodynamics	Thermodynamik	ترموديناميك
Thickness distribution	Dickenverteilung	توزيع السماكة
Thickness ratio	Dickenverhältnis	نسبة السماكة
Third fundamental problem	Drittes Hauptproblem	المسألة الأساسية الثالثة
Thrust	Schubkraft	قوة دافعة
Thrust coefficient of propeller	Schubbeiwert des Propellers	معامل القوة الدافعة للمروحة
Tilting moment	Kippmoment	عزم المائلة
Time of discharg	Entleerungszeit	زمن التفريغ
Tip vortex	Randwirbel	اعصار الطرف (النهاية)
Toluene = Toluol	Toluol	تولوين أو تولول
Total	Gesamt-, total	كلي ، اجمالي
Total drag	Gesamtwiderstand	مقاومة اجمالية
Total potential function	Totale Potentialfunktion	تابع كتون اجمالي
Total stream function	Totale Stromfunktion	تابع تيار اجمالي
Trailing edge	Hinterkante	حافة خلفية
Trailing flow	Nachlaufströmung	جريان المؤخرة ، الانز
Transformation	Transformation	نقل ، تمثيل
Translation flow	Translationsströmung, Parallelströmung	جريان السحابي ، أو متواز
Transsonic	Schallnah -	قرب صوتي
Turbine cascade	Turbinengitter	شبك عتقة
Turbomachinery	Turbomaschinen	الات الجريان
Turbulence theory	Turbulenztheorie	نظرية الاضطراب
Turbulent fluctuation	Turbulente Schwankungen	لديديت مضطربة
Two-dimensional	Zweidimensional	ثنائي البعد
Under pressure	Unterdruck	ضغط ناقص
Uniform flow	Gleichförmige (Parallel -) Strömung	جريان منظم (متواز)
Universal influence function	Universelle Einflussfunktion	تابع تأثير عام
Unique function	Eindeutige Funktion	تابع وحيد التحديد
Unsteady flow	Instationäre Strömung	جريان غير مستقر

الانكليزي	اللاتني	عربي
Vacuum head	Vakuumhöhe	ارتفاع الفراغ (السحب)
Vacuum meter	Vakuummeter	مقياس الفراغ
Vane	Schaufel	جناح ، وشعة
Vapor pressure	Dampfdruck	نصفط التبخر
Vector analysis	Vektoranalysis	تحليل شعاعي
Vector equation	Vektorgleichung	معادلة شعاعية
Velocity	Geschwindigkeit	سرعة
Velocity coefficient	Geschwindigkeitsbeiwert	معامل السرعة
Velocity distribution	Geschwindigkeitsverteilung	توزيع السرعة
Velocity field	Geschwindigkeitsfeld	حقل السرعة
Velocity fluctuation	Geschwindigkeitschwankungen	تذبذبات السرعة
Velocity potential	Geschwindigkeitspotential	كمون السرعة
Velocity profile	Geschwindigkeitsprofil	بروفيل السرعة
Velocity pressure	Geschwindigkeitsdruck	ضغط السرعة
Viscosity	Viskosität	لزوجة
Visualization	Sichtbarmachung	توثية (الجريان)
Volume flow	Volumenstrom	تيار حجمي
Volume force	Volumenkraft	قوة حجمية
Volute (Casing)	Gehäuse	مفلج
Vortical	Wirbelig	اعصاري
Vortices distribution	Wirbelverteilung	توزيع اعاصر
Vortex center	Wirbelzentrum	مركز الاعصار
Vortex core	Wirbelkern	نواة الاعصار
Vortex intensity (strength)	Wirbelintensität (Stärke)	شدة الاعصار
Vortex filament	Wirbelfaden	خيوط اعصار
Vortex layer	Wirbelschicht	طبقة اعصارية
Vortex line	Wirbellinie	خط اعصار
Vortex motion	Wirbelbewegung	حركة اعصارية
Vortical shear stress	Wirbelschubspannung	اجهاد قص اعصاري
Vortex tube	Wirbelröhre	أنبوبة اعصار
Vortex vector	Wirbelvektor	شعاع الاعصار
Wake	Nachlauf	جريان خلفي ، الإنز
Water funnel	Wassertrichter	قمع مائي
Water Level	Wasserspiegel	سطح الماء السائب
Water line area	Wasserlinienfläche	سطح خطوط الماء

انكليزي	الماني	عربي
Wave	Welle	موجة
Weir	Ueberfall	سد
Wheatston bridge	Wheatstonsche Brücke	جسر وطسطن
Windmill	Windmühle	طاحونة هوائية
Windtunnel	Windkanal	قناة هوائية
Xylo	Xylo	كيلول
Yield stress	Fließspannung	اجهاد الميوعة
Zero lift angle	Nullauftriebswinkel	زاوية قوة الرفع الصفرية
Zero moment	Nullmoment	عزم صفري
Zero Potential function	Nullpotentialfunktion	تابع كمون صفري
Zero stream function	Nullstromfunktion	تابع ليار صفري

