جامعة دمشق

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

محاضرات

ميكانيك التوازن Statics

لطلاب السنة الأولى :

ميكانيك عام - تصميم ميكانيكي - آليات

الدكتور: جمعة شحادة الدكتور: سليمان الأعوج

العام الجامعي الدراسي : 1443–1444هـ
2021–2022م

الفهرس

☺☺☺☺☺☺☺

المقَدِّمة

بسم الله الرحمن الرحيم

ميكانيك التوازن هو أحد فروع الميكانيك الهندسي ، وهو العلم الذي يهتم بدراسة تأثيرات القوى المختلفة في الاجسام الصلبة وذلك في حالتي السكون والحركة بسرعة ثابتة. هذا ويتألف مقرر ميكانيك التوازن من سبعة فصول رئيسية ، يحتوي كل فصل منها على أسس نظرية ، وعلى مجموعة مسائل نموذجية محلولة حلاً كاملاً ، بالإضافة إلى مسائل متنوعة غير محلولة مع أجوبتها.

- الفصل الأول يبحث في مبادئ ميكانيك التوازن والتي تشمل : المفاهيم والقوانين الاساسية وجمل وحدات القياس ، وتصنيف مجموعات القوى ، وطرق حساب عزوم القوى ومحصلاتها ، وكيفية تحديد ردود افعال المساند والقيود .
- الفصل الثاني يدرس توازن القوى المتلاقية الواقعة في مستو واحد باستخدام الطريقتين البيانية والتحليلية ، وذلك بالاعتماد على مخطط الجسم الحر وشروط التوازن .
- الفصل الثالث يتناول توازن مجموعات القوى بنوعيها المتوازية والمتفرقة والتي تقع في مستو واحد أيضاً .
- الفصل الرابع يتناول تحليل الهياكل الشبكية باستخدام طرق الحساب الاكثر شيوعاً.
- الفصل الخامس يتناول الاحتكاك وتطبيقاته الهندسية .
- الفصل السادس يدرس توازن القوى الفراغية بأشكالها الثلاثة : المتلاقية والمتوازية والمتفرقة .
- الفصل السابع يشرح كيفية تحديد احداثيات مراكز الثقل للسطوح والأطوال .

وللتأكيد على أهمية استيعاب الأسس النظرية فقد وردت في نهاية العمل مجموعة من الأسئلة النظرية التي تغطي فصول المقرر كافة . وفي هذا المضمار ينبغي أن نتذكر جيداً القول العربي الشهير : " **النظري بلا عملي جنون ، والعملي بلا نظري لا يكون** ".

الفصل الأول

مبادئ ميكانيك التوازن

STATICS PRINCIPLES

1- مفاهيم وقوانين أساسية (Basic Concepts and Laws) .
2- مجموعات القوى (Force Systems).
3- محصلات القوى (Resultants of Force Systems).
4- القيود وردود أفعالها (Constraints and Reactions).

تمهيد :

الميكانيك الهندسي هو علم يهتم بدراسة تأثيرات القوى المختلفة في الأجسام الصلبة وذلك في حالتي السكون والحركة . ويضم ثلاثة فروع :

1- علم التوازن (Statics) : ويسمى أيضاً علم السكون ، وهو الفرع الذي يبحث في توازن الأجسام الصلبة في حالتي السكون والحركة المنتظمة . والشرط الأساسي لاتزان الجسم الصلب هو توازن القوى الواقع تحت تأثيرها.

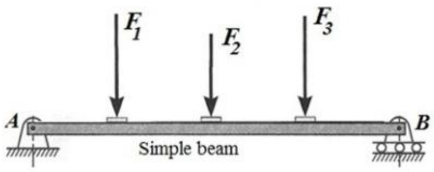
2- علم الحركة (Kinematics) : ويسمى أيضاً علم الحركة المجردة ، وهو الفرع الذي يبحث في حركة الأجسام الصلبة دون الرجوع إلى القوى المسببة للحركة .

3- علم التحريك (Kinetics) : وهو الفرع الذي يبحث في حركة الأجسام الصلبة مع الرجوع إلى القوى المسببة للحركة . والديناميك (Dynamics) هو العلم الذي يضم الحركة والتحريك معاً .

1- مفاهيم وقوانين أساسية (Basic Concepts and Laws) :

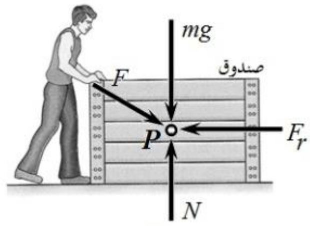
مفاهيم أساسية : تستخدم في دراسة الميكانيك الهندسي المفاهيم الأساسية الآتية :

الجسم الصلب (Rigid body) : هو الجسم الذي تكون الأبعاد بن مختلف نقاطه ثابتة مهما كانت القوى والمؤثرات الخارجية . في الواقع ، جميع الأجسام الصلبة تتشوه تحت تأثير القوى المؤثرة فيها ، لكن عندما يكون التشوه في الشكل صغيراً جداً عندها يمكن استخدام فرضية الجسم الصلب دون الوقوع في أخطاء تذكر .ويُعدّ **الجائز البسيط** (Simple beam) من الأمثلة البسيطة على الجسم الصلب ، وهو عبارة عن جسم يرتكز على مسندين ويؤثر فيه حمولات مختلفة كما يبين الشكل(1-1).



(a)

جائز بسيط تؤثر فيه قوى خارجية



(b)

النظر الى الصندوق على أنه جسيم مادي كتلته تتركز في مركز ثقله

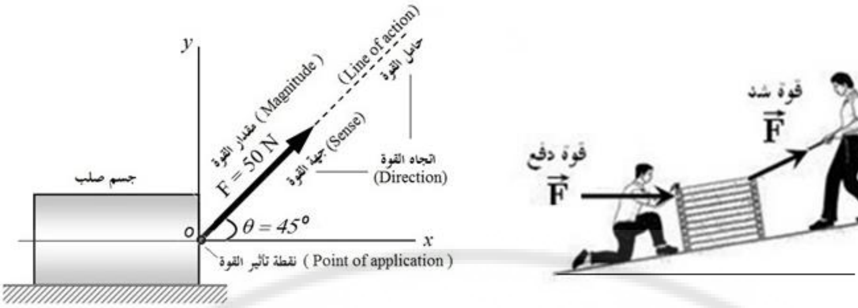
الشكل(1–1)

الجُسَيْم المادي (Particle) : هو أصغر شيء ممكن ، وكان يُطلق عليه في الماضي النقطة المادية ، ويستخدم هذا المفهوم على نطاق واسع في الحركة والتحريك لتبسيط الدراسة . ويمثل الجُسَيْم في واقع الأمر جسماً حقيقياً أُهملت أبعاده وكتلته تتركز في نقطة واحدة هي مركز ثقله . ففي المثال الموضح في الشكل المذكور آنفاً يمكن اعتبار الصندوق جُسَيْماً مادياً P لتسهيل الدراسة .

الزمن (Time) : هو مقياس للفترة التي يستغرقها جسم ما في أثناء حركته ، أو خلال بقائه في حالة معينة .

الكتلة و الوزن (Mass &Weight) : لقد بيَّنت التجربة أن كل جسم يكتسب عند سقوطه الحر على الأرض تسارعاً وذلك تحت تأثير قوة تدعى قوة الجاذبية الأرضية ويرمز لها بالحرف**W**. وهذا التسارع المكتسب يسمى بتسارع الجاذبية الأرضية ويرمز له بالحرف g ، ومقداره يختلف باختلاف المكان على سطح الأرض وفي الحسابات التقريبية نعتبر $g = 9.8\ m/s^2$. وتُعرّف الكتلة بأنها مقدار المادة في جسم معين ، وتقدر عادة بوحدة الكيلوغرام Kg . أما الوزن **W** فيمثل قوة جذب الأرض للجسم ، ويقدر عادة بوحدة نيوتن N كما أنه يتحدد بالعلاقة الرياضية الشهيرة : $W=mg$. حيث تمثل m كتلة الجسم ، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية . وبناء على ذلك فإنّ وزن كتلة مقدارها 1kg يساوي 9.8 N ، بينما وزن كتلة مقدارها 5 kg يساوي 49 N .

القوة (Force) : هي تأثير جسم في جسم آخر . ويجري تمثيل هذه القوة هندسياً بشعاع كما هو مبين في الشكل (1–2)،ويتعين تأثيرها بالمقدار (Magnitude) والاتجاه (Direction) بصورة أساسية. حيث يشمل مصطلح الاتجاه هنا مفهومي الجهة (Sense) وحامل القوة (Line of action). هناك أنواع كثيرة من القوى كقوة التجاذب بين كوكب الأرض الذي نعيش عليه والقمر، وقوى الوزن ، وقوى الدفع ، وقوى السحب ، وقوى الشد ، وقوى الضغط ، وقوة الجذب المغناطيسية ، ومقاومة الرياح ، والمقاومات الناتجة عن الاحتكاك وغيرها .



الشكل(1–2)

المقادير العددية أو السُّلَّمية (Scalars) : هي كميات فيزيائية غير موجَّهة تتعين بقيمتها العددية فقط مثل الزمن والكتلة والمسافة والمساحة والحجم .

المقادير الشعاعية أو المُتَّجهات (Vectors) : هي كميات فيزيائية تتعين بقيمتها العددية واتجاهها معاً مثل القوة والسرعة والتسارع .وقد جرت العادة كتابة المقدار الشعاعي بحرف غامق والمقدار العددي بحرف عادي فاتح وذلك تسهيلاً لعملية التنضيد والطباعة .

وحدات القياس : في الوقت الحاضر ، يستخدم في جامعات العالم وعلى نطاق واسع نظام الوحدات الدولي (International System) SI بدلاً من النظام الانكليزي التقليدي. إلا أن الضرورة تقتضي الإلمام بالنظامين بسبب استخدامهما في الأسواق المحلية والعالمية. يبين الجدول الآتي الكميات الأساسية المستعملة في علم الميكانيك.

جدول وحدات القياس المتداولة			
التسميات	الرمز	وحدة القياس الدولية	وحدة القياس الانكليزية
الطول Length	L	متر (m)	• قدم foot (ft) • بوصة inch (in.)
الكتلة Mass	M	كيلوغرام (kg)	رطل كتلي (lbm)
القوة Force	F	نيوتن (N)	رطل Pound (lb)
الزمن Time	T	ثانية (S)	ثانية (S)
عزم القوة Moment	M	نيوتن-متر (N-m)	• رطل-قدم (lb-ft) • رطل-بوصة (lb-in.)
السرعة Velocity	V	متر / ثانية (m/s)	قدم / ثانية (ft/s)
التسارع Acceleration	A	متر / مربع الثانية (m/s^2)	قدم / مربع الثانية (ft/s^2)
المساحة Area	A	متر مربع (m^2)	قدم مربع (ft^2)

التحويل من الواحدات الإنكليزية إلى الواحدات الدولية :

$1\ ft = 0.3048\ m$

$1\ in. = 25.4\ mm = 0.0254\ m$

$1\ lb\ mass = 0.4536\ kg$

$1\ lb = 4.448\ N$

$1\ ft/s = 0.3048\ m/s$

$1\ ft/s^2 = 0.3048\ m/s^2$

$1\ lb\text{-}ft = 1.356\ N\text{-}m$

$1\ ft^2 = 0.0929\ m^2$

قوانين أساسية :

1- **مبدأ العطالة أو القصور الذاتي** : يعرف هذا المبدأ أيضاً بقانون الحركة الأول (First law of motion) وهو يبين أن جميع الأجسام في الطبيعة عاجزة عن تحريك ذاتها إلا إذا خضعت لتأثير قوى خارجية. وينص : يبقى الجسم الساكن ساكناً ويحافظ الجسم المتحرك بانتظام على حالته ، ما لم تؤثر فيه قوة تغير من حالته الراهنة .

2- **القانون الأساسي في التحريك** : يعرف هذا القانون أيضاً بقانون الحركة الثاني (Second law of motion) وينص :إذا أثرت قوة أو عدة قوى في جسم كتلته m فإنه يكتسب تسارعاً $\boldsymbol{a}$ يتناسب طرداً مع محصلة تلك القوى ويؤثر بجهتها. ويعبر عن ذلك بالعلاقة الرياضية الآتية :

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad (1)$$

وينتج من هذه العلاقة أنه إذا كانت محصلة القوى $\sum \boldsymbol{F}$ المؤثرة في الجسم تساوي صفراً فإن تسارعه يكون مساوياً للصفر $(a = 0)$. وبناءً على ذلك يكون الجسم إمّا ساكناً $(v = 0)$ وإمّا متحركاً بسرعة خطية ثابتة في المقدار والاتجاه $(v = constant)$. وعلم التوازن يهتم فقط بدراسة اتزان الأجسام في حالتي السكون والحركة بسرعة ثابتة . يظهر المثال المبين في الشكل(1-3) اتزان القطار عندما يكون في حالتي السكون والحركة بسرعة ثابتة ، بالإضافة إلى حالة فقد الاتزان عندما تكون حركة القطار غير منتظمة.

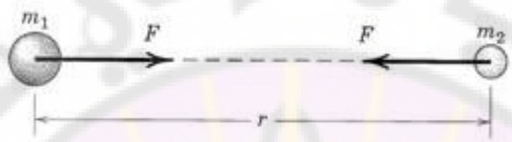
الشكل(1-3)

3- **مبدأ الفعل وردّ الفعل** : يعرف هذا المبدأ أيضاً بقانون الحركة الثالث (Third law of motion) وينص : كل فعل يقابله ردّ فعل يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه ولهما نفس الحامل .

4- **قانون التجاذب** (Law of gravitation) وينص : إن قوة التجاذب بين أي جسمين في الطبيعة تتناسب طرداً مع جداء كتلتيهما وعكسياً مع مربع المسافة بينهما .

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ; \quad G = 6.673(10^{-11})\ \frac{m^3}{kg.s^2} \qquad (2)$$

حيث G يمثل ثابت الجاذبية العام .

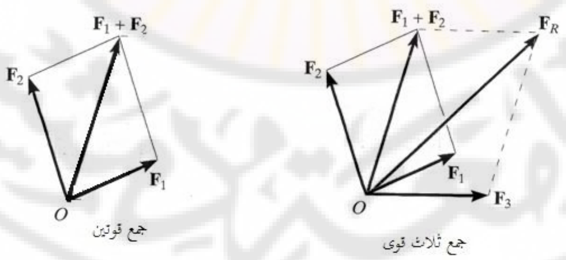


الشكل(1-4)

5- **مبدأ انزياح القوة** (Principle of Transmissibility of Force) : لا يتغير شرط التوازن لجسم صلب عند انزياح نقطة تأثير القوة على امتداد حامل تلك القوة.

الشكل(1-5)

6- **قانون متوازي الأضلاع لجمع القوى** (Law of parallelogram) : إنَّ محصلة قوتين مؤثرتين في نقطة ما من جسم صلب تساوي بطولها قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هاتين القوتين .ويوضح الشكل(1-6) كيفية جمع أكثر من قوتين.



الشكل(1-6)

7- **مبدأ التوازن الديناميكي** (Dynamic equilibrium) : يعرف هذا المبدأ أيضاً بمبدأ دالامبير ، لأن دالامبير هو أول عالم أشار إلى أن القانون الأساسي في التحريك يمكن تحويله إلى معادلة توازن بعد إضافة قوة وهمية هي ($\boldsymbol{-ma}$) إلى مجموع القوى الحقيقية المؤثرة في الجسم المدروس. وللحصول على هذا المبدأ نكتب القانون الأساسي في التحريك ، ثم ننقل الطرف الأيمن من هذا القانون إلى الطرف الأيسر فينتج:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \sum \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

حيث تسمى القوة الجديدة ($-ma$) قوة عطالة الجسم ، وهي تساوي جداء كتلة الجسم m بمقدار تسارعه a ، واتجاهها يكون معاكساً لاتجاه التسارع .ويمكن أن نفسر هذه المعادلة الناتجة بأنه : لو أثرت في الجسم قوة معاكسة لاتجاه التسارع لتوازن هذا الجسم توازناً ديناميكياً . وقد جرت العادة بأن تستخدم فكرة التوازن الديناميكي في الدراسة المتقدمة لعلم التحريك (Advanced Dynamics).

2– مجموعات القوى Force Systems :

مجموعة القوى : هي عدة قوى تؤثر في جسم صلب في آن واحد .وتصنف مجموعات القوى (الشكل 1–7) كما يلي :

- مجموعات القوى المستوية (Coplanar Force Systems): وتكون قوى متلاقية أو متوازية أو متفرقة
- مجموعات القوى الفراغية (Non-coplanar Force Systems): وتكون أيضاً إمّا متلاقية أو متوازية أو متفرقة .

الشكل(1–7)

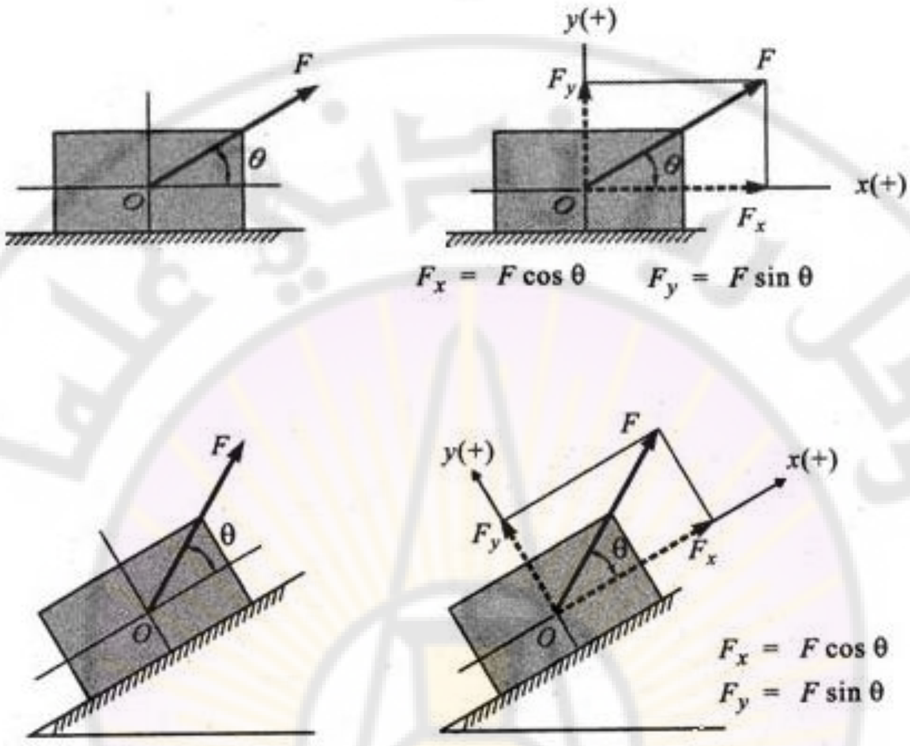
المُركّبات (المساقط) المتعامدة للقوة Rectangular Components of a Force

إن تحليل القوة **F** إلى مركبتين متعامدتين $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ كما هو واضح في الشكل (1–8) هو طريقة التحليل الشائعة . بعد تأمل الشكل نلاحظ أن :

$$F_x = F\cos\Theta \quad ; \quad F_y = F\sin\Theta \qquad (4)$$

حيث تمثل F مقدار الشعاع **F** ويمثل كل من F_x و F_y قيم الشعاعين $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ ، وبالاستعانة بشعاعي الواحدة **i** و **j** يمكن كتابة معادلة القوة بالشكل الهندسي الآتي :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \qquad (5)$$

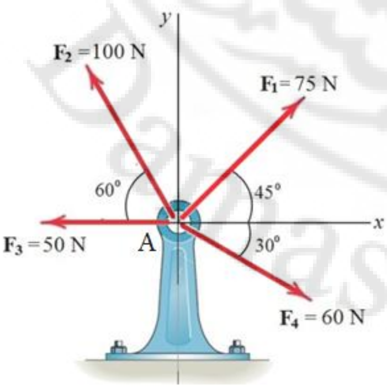


الشكل(1–8)

يختار الطالب في الغالب جملة الإحداثيات في المسائل حسب رغبته ، غير أن الاختيار المنطقي يعتمد على طبيعة وشكل المسألة المراد حلها . يُبيّن المثال رقم (1) كيفية تحليل القوى المؤثرة في اتجاهات مختلفة .

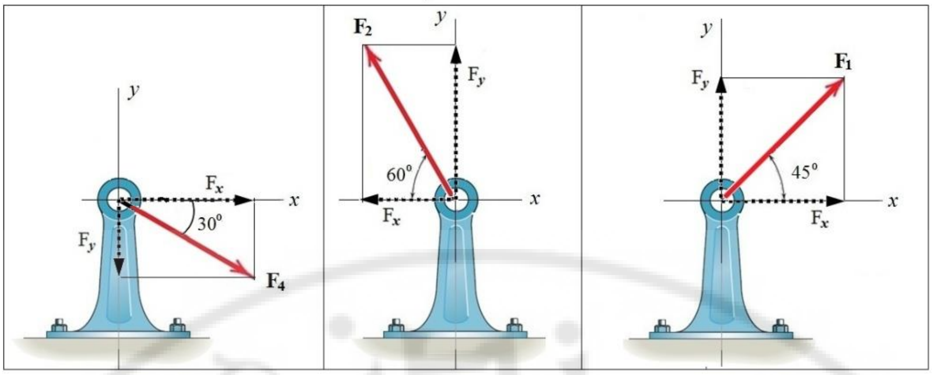
مثال رقم (1)

تأمل الشكل المجاور ، ثم أوجد المسقطين الأفقي والشاقولي لكلِّ قوة من القوى الأربع المؤثرة في المسند الثابت A ، وذلك بتطبيق المعطيات المبينة في الشكل .



الحل : ....

في البداية ، نحلّل القوى المائلة F_1 و F_2 و F_4 المؤثرة في المسند الثابت A ، في اتجاهين ينطبقان على محوري جملة الاحداثيات القائمة, (y ، x كما هو واضح في الشكل) .



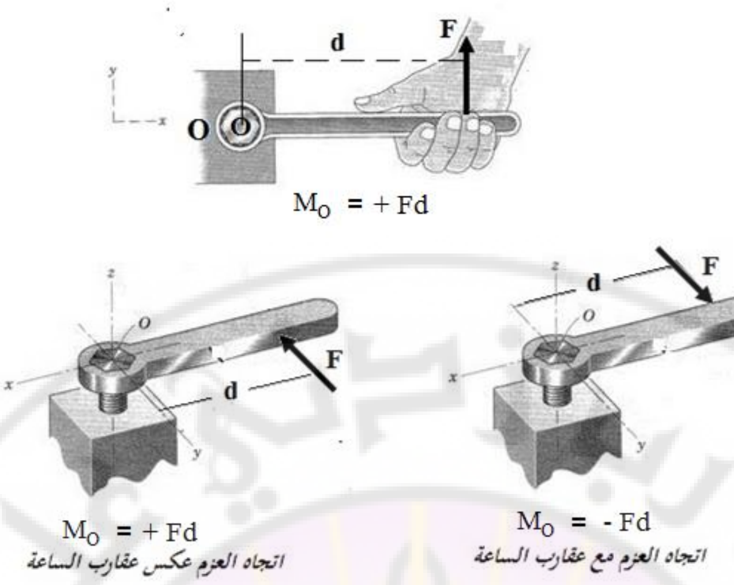
بعد ذلك ، نحسب مركباتها المتعامدة كما هو موضح في الجدول الآتي:

القوة	المسقط الافقي	المسقط الشاقولي
F_1	Fx = +75 cos 45˚ = 53.03 N	Fy = +75 sin 45˚= 53.03N
F_2	Fx = -100 cos 60˚ = -50 N	Fy = +100 sin 60˚ = 86.6 N
F_3	Fx = - 50 N	Fy = 0
F_4	Fx = 60 cos 30˚ = 51.96 N	Fy = - 60 sin 30˚ = - 30 N

تبين الإشارات السالبة في هذا الجدول إلى أن مساقط بعض القوى يكون في الاتجاه السالب لمحور الإحداثيات.

عزم القوة (Moment of a Force)

تبين التجربة أن الجسم الصلب يمكن أن يتحرك بتأثير قوة ما حركة دائرية حول محور لا يقطع المستقيم الحامل للقوة ولا يوازيه . ويدعى هذا التأثير بعزم القوة أو عزم الدوران . وعندما تكون جميع القوى التي يخضع لها الجسم واقعة في مستو واحد فمن المعتاد أن نقول: العزم حول نقطة ، والمقصود هو العزم حول محور يمر من تلك النقطة وعمودي على مستوي القوى. هذا وينعدم عزم قوة حول نقطة إذا وقعت النقطة على المستقيم الحامل للقوة .كما يبقى عزم قوة حول نقطة ما ثابتاً مقداراً واتجاهاً إذا انزلقت القوة على خط عملها. وقد جرت العادة أن نعتبر العزم موجباً إذا كانت القوة تحاول تدوير الجسم حول نقطة ما في اتجاه معاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة، وان نعتبره سالباً عندما تحاول القوة تدوير الجسم في اتجاه دوران عقارب الساعة. وهكذا يكون لعزم القوة F_1 بالنسبة إلى النقطة المبينة في الشكل(1-9) إشارة موجبة ،ولعزم القوة F_2 بالنسبة إلى النقطة نفسها إشارة سالبة.



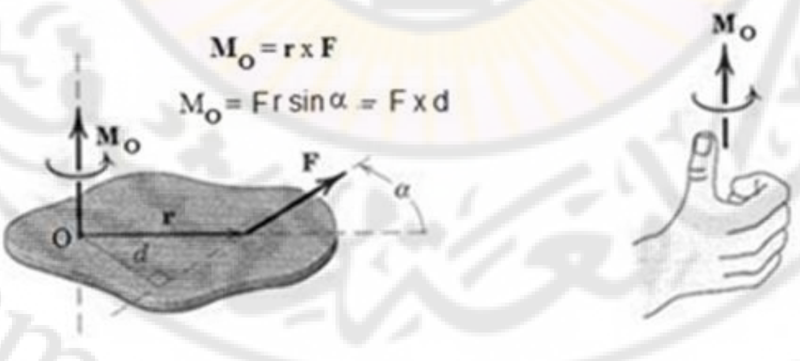
الشكل(1–9)

ويقاس هذا العزم بجداء مقدار القوة في البعد بين تلك النقطة وحامل القوة، أي أن :

$$M_O = F \times d \qquad (6)$$

إن الوحدة الأساسية للعزم في نظام الوحدات الدولي SI هي نيوتن–متر (N.m) وفي النظام الأمريكي هي رطل–قدم (lb-ft) .

في التطبيقات الهندسية نمثّل عادة عزم قوة ما **F** بالشعاع **M** العمودي على مستوي الجسم والذي يتحدد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى ، حيث يشير الإبهام إلى اتجاه الشعاع وثني بقية الأصابع يدل على اتجاه الدوران كما هو مبين في الشكل(1–10).

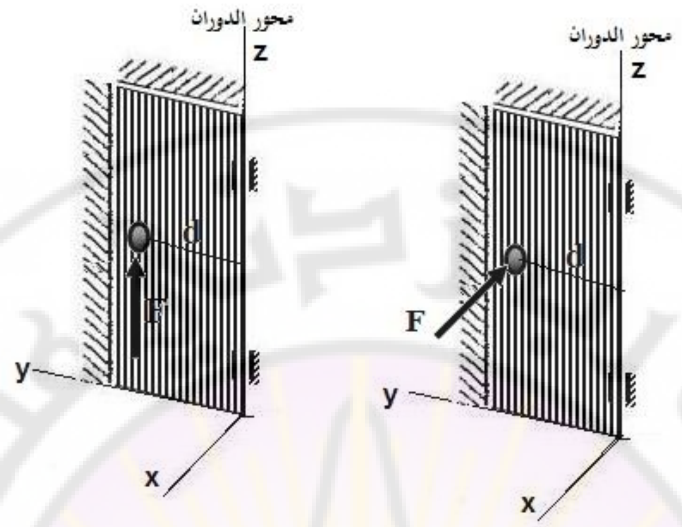


الشكل(1–10)

وفي حالة القوى الواقعة في مستو واحد يمكن تمثيل العزم بسهم منحنٍ فقط والاستغناء عن الشعاع المستقيم ، طالما أن الشعاع يكون خارجاً من مستوي الرسم (الدوران بعكس عقارب الساعة) أو داخلاً إليه (الدوران مع عقارب الساعة).

يجب أيضاً أن نوضح بعجالة مفهوم عزم القوة حول محور حتى يتسنى لنا الانتقال إلى حل مسائل مجموعات القوى الفراغية .ليكن لدينا الباب المبين في الشكل(1–11) ولتكن F قوة ما تؤثر في مقبض الباب. من

الملاحظ انه إذا كانت القوة واقعة في مستوي الباب فإنها لن تؤدي إلى فتحه ، بينما إذا كانت هذه القوة عمودية على مستوي الباب فإنها تستطيع فتح الباب بتدويره حول المحور Z . ينتج مما تقدم :



الشكل(1–11)

- إذا كانت القوة موازية للمحور فإن عزمها حول هذا المحور يساوي صفراً.
- إذا كان حامل القوة يقطع المحور فإن عزمها حول هذا المحور يساوي صفراً أيضاً.
- إذا كان اتجاه القوة عمودياً على المحور فإن عزمها حوله يساوي جداء مقدار القوة في البعد بين القوة والمحور .

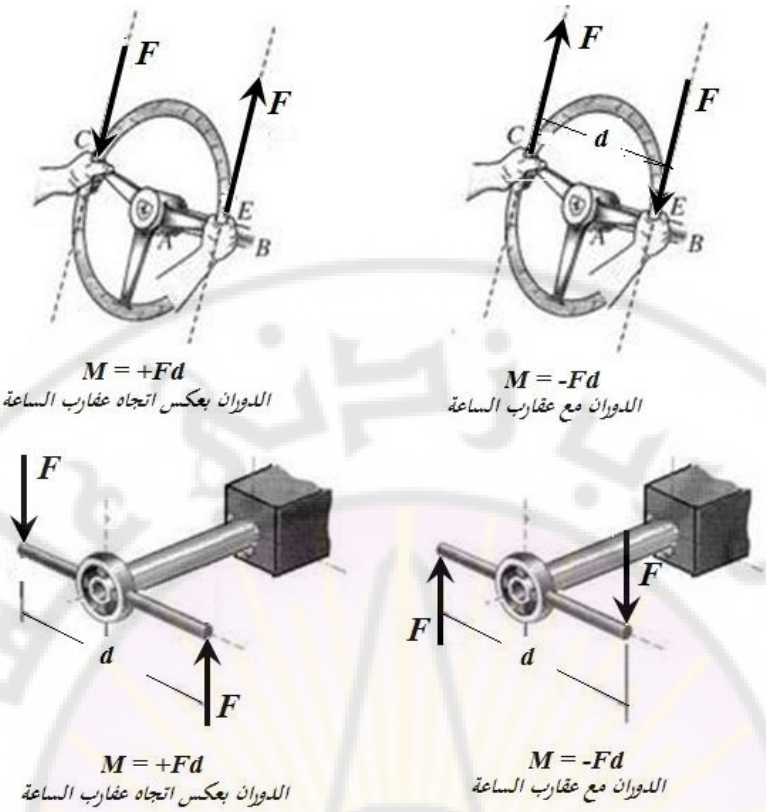
قاعدة العزوم : تعدّ قاعدة العزوم والمسمّاة بقاعدة فارغنون (Varignon Theorem) من القواعد الأساسية في علم التوازن ، وتقول : إن عزم قوة ما حول نقطة يساوي مجموع عزوم مُركّبات تلك القوة حول النقطة نفسها.

عزم المزدوجة (Moment of Couple)

المزدوجة هي عبارة عن قوتين متوازيتين ومتساويتين تعملان في اتجاهين متضادين . ويدعى مستوي القوتين المؤثرين في جسم ما بمستوي تأثير المزدوجة ، بينما تدعى المسافة العمودية الفاصلة بين القوتين بذراع المزدوجة. كما يسمى العزم الناتج عن جداء إحدى قوتي المزدوجة بطول ذراعها بعزم المزدوجة . ويعتبر عزم المزدوجة موجباً إذا عملت المزدوجة على تدوير الجسم بعكس دوران عقارب الساعة كما في الشكل(1–12) ، وسالباً إذا عملت على تدوير الجسم بنفس اتجاه دوران عقارب الساعة ،وعند ذلك يكون :

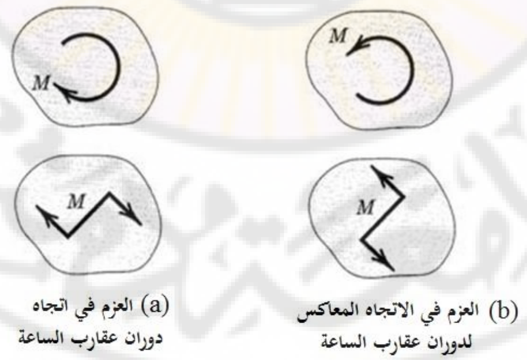
$$M = \pm F \times d \qquad (7)$$

ويقاس عزم المزدوجة بنفس وحدات قياس عزم القوة أي بوحدة نيوتن–متر (N.m) والتي تمثل الوحدة الأساسية للعزم في النظام الدولي الخاص بوحدات القياس.



الشكل(1–12)

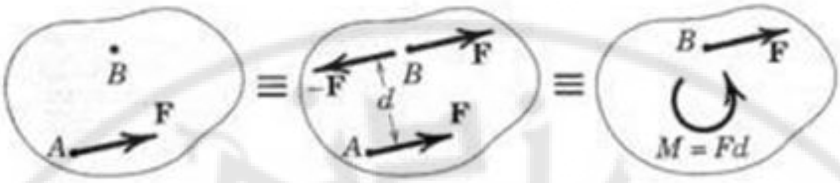
يوضح الشكل(1–13) كيفية تمثيل المزدوجة في التطبيقات الهندسية ، وينبغي عدم الخلط بين مفهوم عزم القوة ومفهوم عزم المزدوجة .فمفهوم عزم القوة يتعلق بالنقطة التي يؤخذ بالنسبة لها العزم ، أما عزم المزدوجة فلا يتعلق مقداره بأية نقطة في المستوي .



الشكل(1–13)

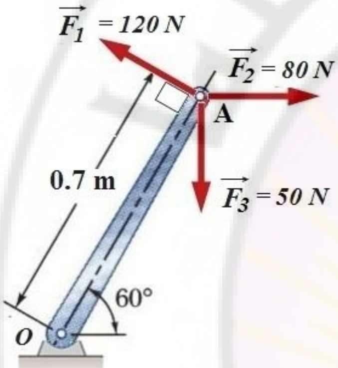
ومن الخصائص الأساسية للمزدوجة أنه يمكن نقلها من المستوي الواقعة فيه إلى أي مستوٍ آخر يوازيه دون أن يغير ذلك من عزم المزدوجة. ومن القواعد المهمة كما هو واضح في الشكل(1–14) انه يمكن نقل أية قوة تؤثر في جسم ما نقلاً موازياً إلى أية نقطة أخرى من الجسم دون إحداث أي تغيير في تأثيرها عليه ، شريطة إضافة مزدوجة عزمها يساوي عزم القوة المنقولة بالنسبة إلى النقطة التي نقلت إليها. ويتضح هذا من الشكل الذي يتضمن إضافة قوتين متساويتين ومتعاكستين في الاتجاه في النقطة B . نلاحظ هنا بأن القوة الأصلية التي

تؤثر في النقطة A ، والقوة المعاكسة لها والتي تؤثر في النقطة B ، تشكلان معاً مزدوجة عزمها M=F×d وجهتها بعكس دوران عقارب الساعة. وبناءً على ما سبق يجوز تحويل جملة مؤلفة من قوة ومزدوجة إلى قوة واحدة فقط وذلك إذا عكسنا الخطوات السابقة .إن عملية الاستبدال هذه تتكرر بكثرة في التطبيقات الهندسية



الشكل(1–14)

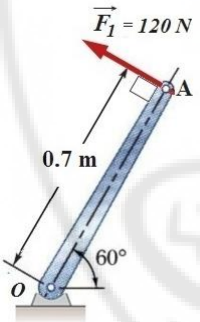
مثال رقم (2)



يخضع الذراع الموضح في الشكل المجاور لتأثير ثلاث قوى خارجية F_1 و F_2 وF_3 . والمطلوب أوجد عزم كل قوة من هذه القوى بالنسبة للنقطة O ، إذا كان طول الذراع يساوي إلى 0.7 m .

الحل : ....

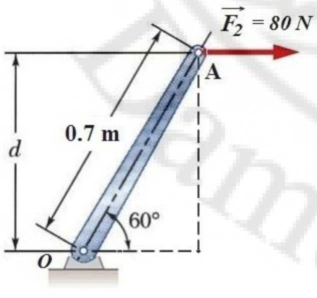
لقد جرت العادة أن نعتبر عزم القوة حول نقطة ما موجباً ، إذا كانت هذه القوة تحاول تدوير الجسم في اتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة .



الحالة الأولى :يتحدد عزم القوة $\mathbf{F_1}$ بالعلاقة :

$$M_o = F_1 \times d$$
$$M_o = 120 \times 0.7 = +84 \text{ N.m}$$

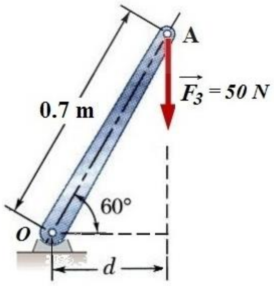
تدل الإشارة الموجبة على أن هذه القوة تحاول تدوير الذراع في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.



الحالة الثانية :يتحدد عزم القوة $\mathbf{F_2}$ بالعلاقة :

$$M_o = -F_2 \times d$$
$$M_o = -80 \times 0.7 \sin 60^\circ = -48.5 \text{ N.m}$$

تدل الإشارة السالبة على أن هذه القوة تحاول تدوير الذراع في الاتجاه الموافق لدوران عقارب الساعة.



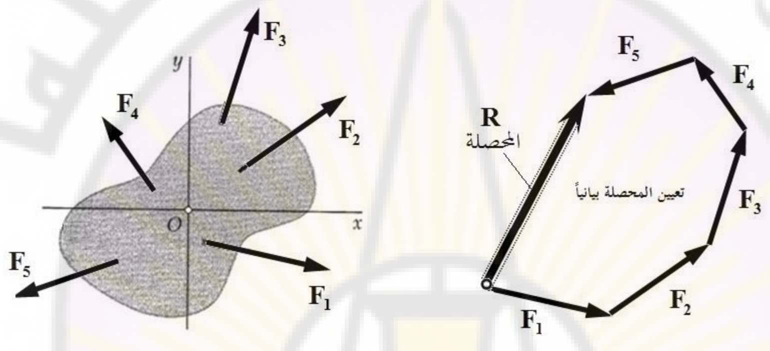
الحالة الثالثة :يتحدد عزم القوة $\mathbf{F_3}$ بالعلاقة :

$$M_o = -F_3 \times d$$
$$M_o = -50 \times 0.7 \cos 60^\circ = -17.5 \text{ N.m}$$

3- محصلات القوى (Resultants of force systems) :

الطريقة البيانية :

تتلخص الطريقة البيانية التي تحدد محصلة مجموعة من القوى في الآتي : ليكن لدينا مجموعة القوى $(F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,...)$ المطبقة في عدة نقاط من الجسم المبين في الشكل (1-15) . نختار نقطة ما من المستوي ثم نقوم بجمع كل القوى بصورة شعاعية واحدة تلو الأخرى بمقياس رسم مناسب مع مراعاة اتجاهات القوى فنحصل على خط منكسر يسمى مضلع القوى . يمثل عندئذ الشعاع الذي يغلق مضلع القوى المحصلة **R** قيمة واتجاهاً . وبما أن تعيين المحصلة بهذه الطريقة يصبح عملاً شاقاً إذا كانت هذه القوى كثيرة العدد لذا يفضل استخدام الطريقة التحليلية نظراً لبساطتها.

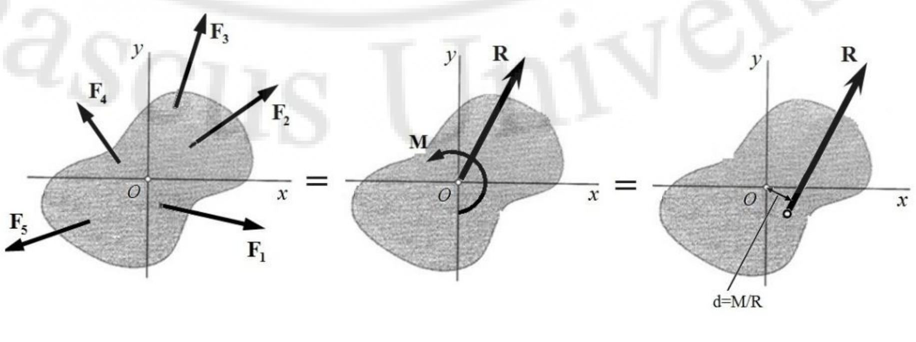


الشكل(1-15)

الطريقة التحليلية :

إن تعيين محصلة مجموعة من القوى قيمة واتجاهاً وفق هذه الطريقة يتطلب أولاً اختصار مجموعة القوى هذه إلى جملة مكافئة لها ولكنها أبسط منها بحيث تتألف فقط من قوة ومزدوجة ، وتسمى هذه العملية عادةً بعملية اختزال أو اختصار القوى .

وللقيام بعملية الاختزال نتصور جسماً صلباً يقع تحت تأثير مجموعة من القوى غير المتلاقية في نقطة واحدة ولتكن $F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,...$. ثم نختزل هذه المجموعة كما يظهر الشكل (1-16) إلى جملة مكافئة لها تؤثر في نقطة مناسبة إحداثياتها معلومة كمبدأ الإحداثيات o. تتألف هذه الجملة من القوة المحصلة **R** التي تؤثر في النقطة o ومزدوجة عزمها **M** ، ولحسابهما تستخدم العلاقات الآتية:



الشكل(1-16)

$$R = \sqrt{(\Sigma\, F_X)^2 + (\Sigma\, F_Y)^2} \qquad (8)$$

$$M = \sum M_o \qquad (9)$$

حيث :

$\Sigma\, F_x$ و $\Sigma\, F_y$: المجموعان الجبريان لمساقط القوى على المحورين x و y .

$\Sigma\, M_O$ المجموع الجبري لعزوم قوى المجموعة بالنسبة للنقطة المختارة O .ويسمى العزم M عادة بعزم المحصلة .

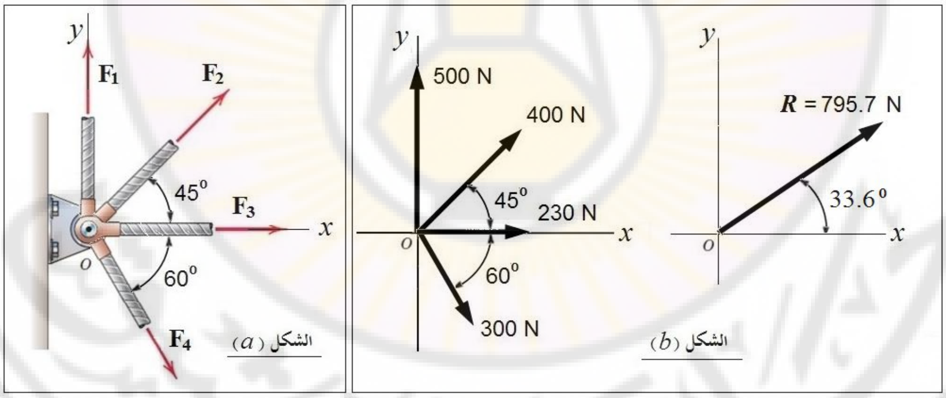
وتأسيساً على ما سبق ، يمكننا الانتقال من عملية الاختزال إلى تحويل مجموعة القوى إلى القوة المحصلة **R** فقط كما هو مبين في الشكل المذكور آنفاً ، وذلك بتطبيق قاعدة العزوم التي تقول: إن عزم المحصلة بالنسبة إلى أي نقطة يساوي المجموع الجبري لعزوم قوى المجموعة بالنسبة إلى النقطة نفسها. فإذا ما حصلنا على عزم المحصلة بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات أمكننا الحصول على ذراعها d كما يلي :

$$R \times d = \sum M_o \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sum M_o}{R} = \frac{M}{R} \qquad (10)$$

مثال رقم (3)

أوجد محصلة جملة القوى المتلاقية المؤثرة في المسند المفصلي الموضح في الشكل المجاور، إذا علمت أن :

$F_1=500N$, $F_2=400N$, $F_3=230N$, $F_4=300N$



الحل : ....

نحلّل القوى الأربع ، ثم نحسب مركباتها المتعامدة كما هو موضح في الجدول الآتي :

القوة	القيمة	المسقط الافقي	المسقط الشاقولي
F_1	500	0	500
F_2	400	400 cos 45°	400 sin 45°
F_3	230	230	0
F_4	300	300 cos 60°	- 300 sin 60°

بعد ذلك نحسب المجموع الجبري لمساقط القوى على كل من محوري جملة الإحداثيات :

$$\sum F_x = 400\cos 45° + 230 + 300\cos 60° = 662.84\ N$$

$$\sum F_y = 500 + 400\, sin\, 30° - 300\sin 60° = 440.19\ N$$

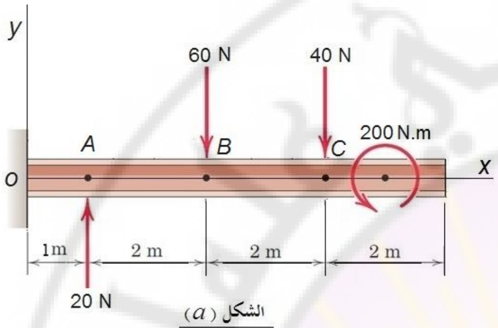
وبالتعويض في العلاقة الآتية نحصل على مقدار المحصلة :

$$R = \sqrt{(\Sigma F_X)^2 + (\Sigma F_Y)^2} = 795.7\ N$$

ولتعيين اتجاه هذه القوة نحسب زاوية ميلها θ فينتج أن :

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{440.19}{662.84}\right) = 33.6°$$

مثال رقم (4)



الشكل (a)

تؤثر جملة من القوى المتوازية في الجائز الموضح في الشكل المرافق (a). والمطلوب :

1- استبدل جملة القوى المعطاة بجملة مكافئة عند النقطة C.

2- استبدل جملة القوى المعطاة بقوة واحدة فقط ، موضحاً نقطة تأثيرها .

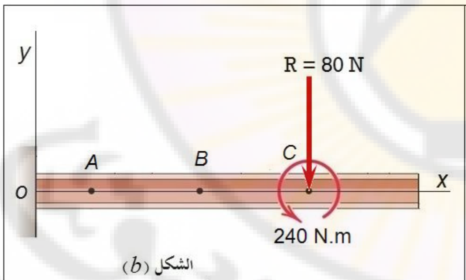
الحل :

....

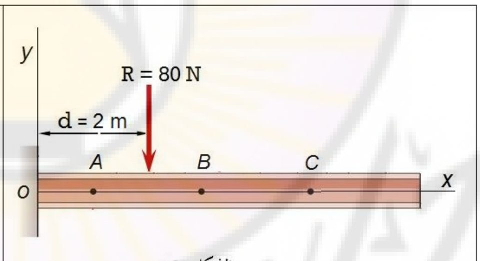
الجملة المكافئة :تتألف الجملة المكافئة المطلوبة من القوة **R** التي تؤثر في النقطة C ، ومزدوجة عزمها **M** .

ولحساب هذه القوة نطبّق العلاقة :

$$R = \Sigma F_y = 20 - 60 - 40 = - 80\ N(\downarrow)$$



الشكل (b)



الشكل (c)

ولحساب العزم **M** بالنسبة للنقطة C نستخدم العلاقة :

$$M = \Sigma M_C = - 20(4) + 60(2) + 200 = 240\ N.m\ (\curvearrowleft)$$

وبناءً على هذه النتائج نستطيع اختزال مجموعة القوى كما هو واضح في الشكل (b) .

المحصلة : بتطبيق قاعدة العزوم يمكننا تحديد بعد المحصلة عن مركز الاحداثيات :

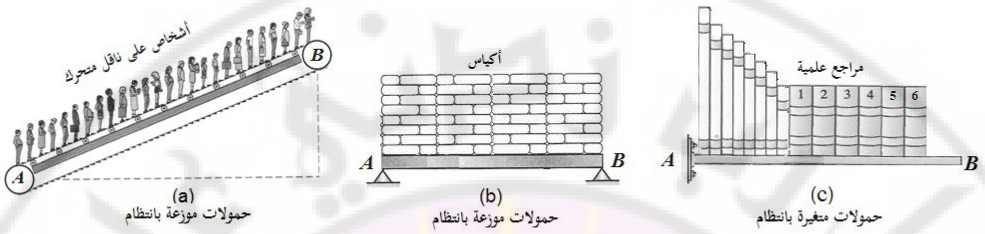
$$\Sigma M_O = R \times d$$

$$20(1) - 60(3) - 40(5) + 200 = 80 \times d \quad \Rightarrow \quad d = 2\ m$$

وبناءً على هذه النتائج نستطيع الآن تحديد محصلة القوى المعطاة ، والتي تؤثر في نقطة تبعد بمقدار 2m عن مركز الاحداثيات كما هو واضح في الشكل (c) .

محصلات القوى الموزعة (Resultants of Distributed Forces)

كثيراً ما نصادف في الحسابات الهندسية حمولات موزّعة على سطح ما حسب هذا القانون أو ذاك كما هو مبين في الشكل(1–17) . ونميّز المجموعة المستوية من القوى الموزعة عادة بشدة إجهادها q ، أي بمقدار القوة المؤثرة في وحدة الطول من السطح المحمَّل . وتقاس شدة الإجهاد q بوحدة القياس الدولية N/m .



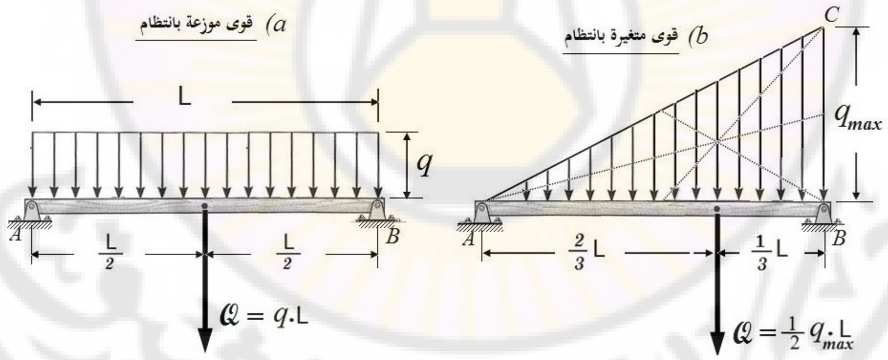
الشكل(1–17)

يوضح الشكل (1–18) كيفية تحديد المحصلة لبعض أشكال القوى الموزعة الواقعة في مستو واحد .

القوى الموزعة بانتظام : تكون شدة الإجهاد q لمثل هذه المجموعة مقداراً ثابتاً.ويمكن عند الحسابات أن نستبدل تأثير هذه المجموعة بتأثير محصلتها **Q** التي تحسب بالعلاقة:

$$Q = q \times L \qquad (11)$$

وتؤثر هذه القوة في منتصف الجائز AB كما هو مبين في الشكل.



الشكل(1–18)

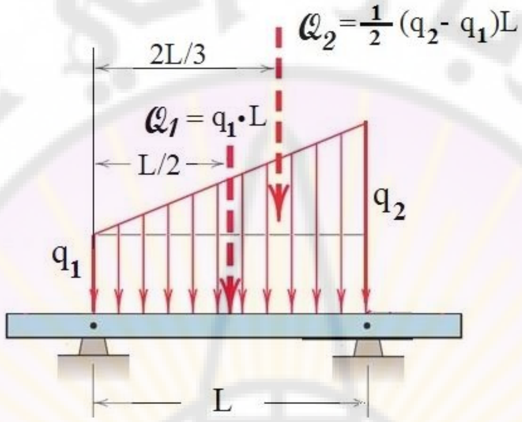
القوى المتغيرة بانتظام: تكون شدة الإجهاد q لمثل هذه المجموعة مقداراً متغيراً يزداد من الصفر حتى نهاية عظمى q_{max} . وعند إجراء الحسابات نستبدل تأثير هذه المجموعة بتأثير محصلتها Q والتي تتحدد بمساحة المثلث الذي تشكله ، وعليه تحسب هذه المحصلة بالعلاقة :

$$Q = \frac{1}{2}\, q_{max} \times L \qquad (12)$$

إن خط تأثير هذه المحصلة يجب أن يمر من مركز ثقل المثلث والذي يقع في نقطة تلاقي متوسطاته . ولهذا فهو يبعد بثلث المسافة L عن الضلع BC كما هو مبين في الشكل .

القوى المتغيرة حسب قانون شبه المنحرف : تكون شدة الإجهاد q لمثل هذه المجموعة مقداراً متغيراً يزداد من قيمة صغرى q_1 حتى قيمة عظمى q_2 كما هو واضح في الشكل (1-19). وعند إجراء الحسابات نقوم بتقسيم مساحة شبه المنحرف إلى مساحتين إحداهما على شكل مستطيل والأخرى على شكل مثلث فنحصل عندئذ على مجموعتين بسيطتين من القوى الموزعة . بعد ذلك نحسب محصلة كل منهما Q_1 و Q_2 باستخدام العلاقتين :

$$Q_1 = q_1 \times L \quad , \quad Q_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1) \times L \qquad (13)$$



الشكل(1- 19)

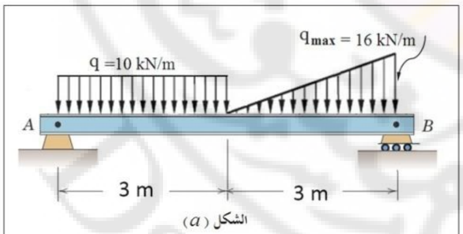
مثال رقم (5)

جائز بسيط طوله 6m ، مُحمَّل بقوى موزعة توزيعاً مبيناً في الشكل (a) . أوجد محصلة القوى الموزعة.

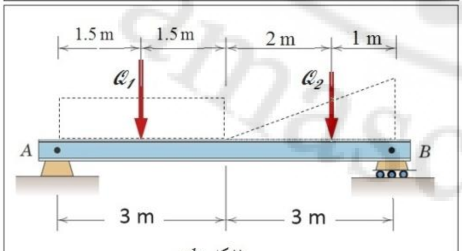
الحل : ....

نستبدل مجموعة القوى الموزعة كما هو مبين في الشكل (b) بالمحصلتين الآتيتين :

$$Q_1 = 10 \times 3 = 30\ kN$$
$$Q_2 = \frac{1}{2} \times 16 \times 3 = 24\ kN$$



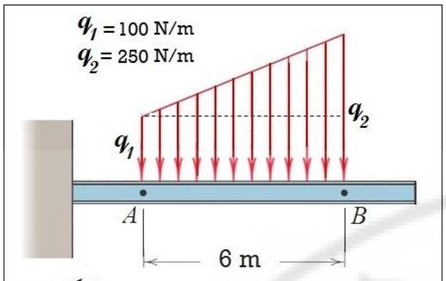
الشكل (a)



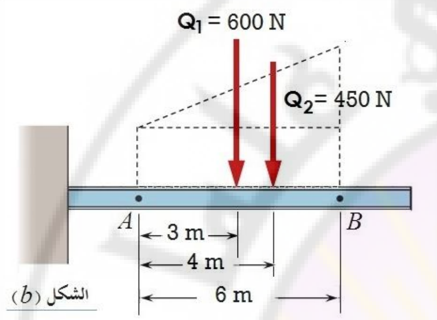
الشكل (b)

مثال رقم (6)

جائز كابولي ، مُحمَّل بقوى موزعة تتغير تبعاً لقانون شبه المنحرف ،كما هو مبين في الشكل (a) . إذا كانت شدة التحميل عند النقطة A تساوي الى q_1=100 N/m ، وفي النقطة B تساوي الى q_2=250 N/m ، فأوجد محصلة القوى الموزعة .



الشكل (a)



الشكل (b)

الحل : ....

نستبدل مجموعة القوى الموزعة كما هو مبين في الشكل (b) بالمحصلتين الآتيتين:

$$Q_1 = 100 \times 6 = 600\ N$$
$$Q_2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 6 = 450\ N$$

4 – القيود وردود أفعالها (Constrains and their Reactions)

لدراسة توازن جسم ما نحدد أولاً شكل القوى المؤثرة فيه .وهنا يجب أن نميز بين القوى الخارجية المسلطة على الجسم والقوى المعروفة بردود أفعال القيود. وتشير التجارب إلى أن ردّ الفعل هو قوة يكون اتجاهها بصورة عامة معاكساً لاتجاه الحركة المحتملة للجسم المقيد إذا لم تتحقق شروط التوازن . ويبين كلّ من الشكلين (1–20)و(1–21) كيفية تحديد ردود الأفعال في الأنواع المختلفة للمساند والقيود التي تصادفنا في المسائل والتطبيقات الهندسية ، وتشمل الآتي :

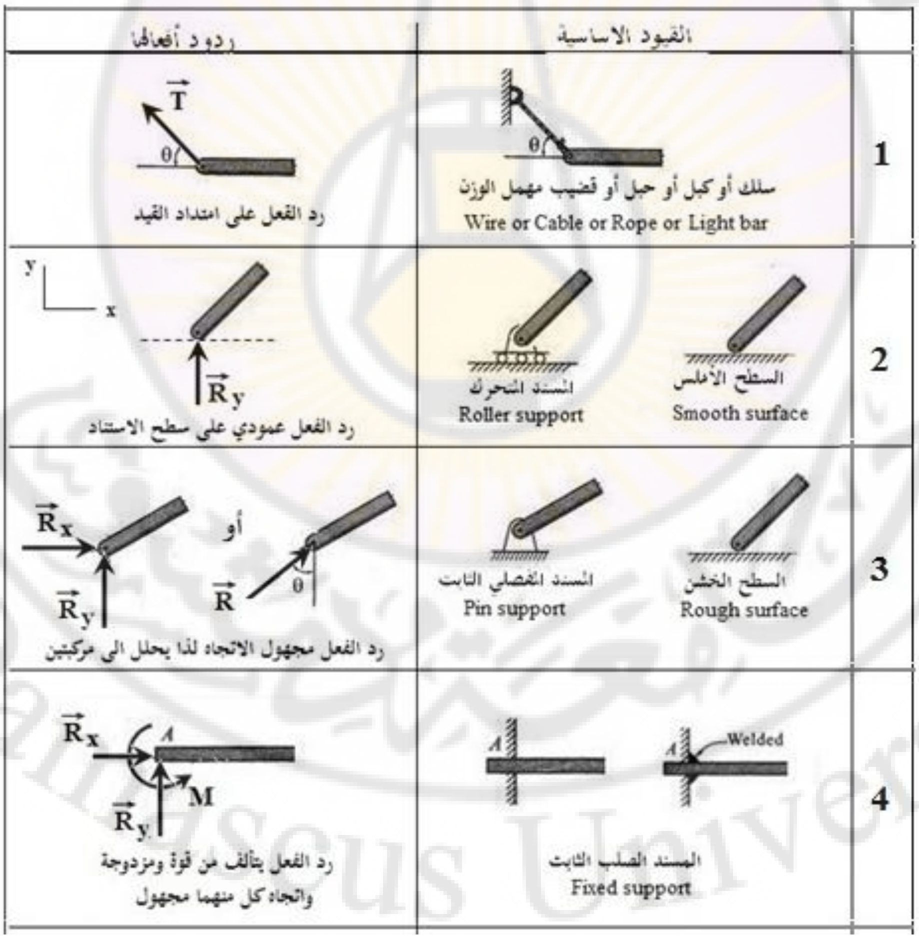
1. الحبال (Ropes) والأسلاك (Wires) والسلاسل(Chains) والقضبان الخفيفة (مهملة الوزن) : عندما يقيد جسم بحبل أو سلك أو سلسلة فإن ردّ الفعل هو قوة على امتداد القيد.
2. السطح الأملس والمسند المتحرك (Smooth surface & Roller support) : عندما يستند جسم إلى سطح أملس فإن ردّ الفعل يكون عمودياً على سطح الاستناد في نقطة التماس . وعندما يقيد جسم بمسند متحرك أيضاً فإن ردّ الفعل هو قوة عمودية على سطح الاستناد.
3. المسند المفصلي الثابت (Pin support) : عندما يقيد جسم بمسند مفصلي ثابت فإن ردّ الفعل يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى مركبتين باتجاه المحاور الإحداثية.

4. المسند الصلب الثابت (Fixed support) : عندما يثبت طرف جسم بشكل صلب ، بعملية اللِّحام مثلاً ، فإن ردّ الفعل يكافئ قوة R ومزدوجة ذات عزم M . كما أن القوة المذكورة مجهولة الاتجاه لذا يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين .

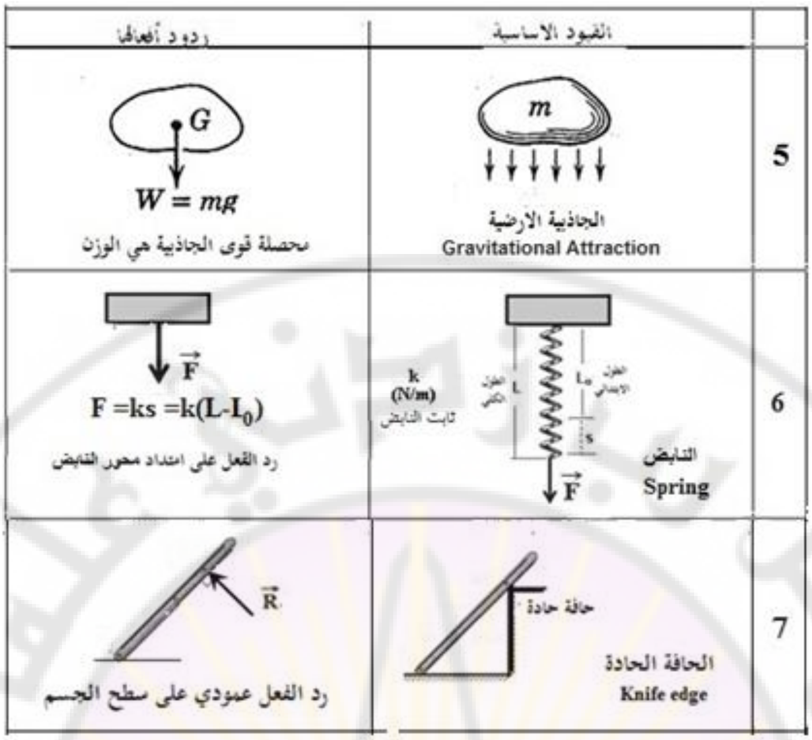
5. الجاذبية الأرضية (Gravitational Attraction) : إن محصلة قوى الجاذبية الأرضية المؤثرة في جسم صلب هي قوة وحيدة تسمى وزن الجسم W وتتجه رأسياً للأسفل وتمر من مركز ثقل الجسم .

6. النوابض (Springs) : عندما يقيد جسم بنابض فإن ردّ الفعل هو قوة على امتداد محور ذلك النابض . وتحسب قوة النابض عادة بالعلاقة الموضحة في الشكل(1–21).حيث k يمثل ثابت النابض (Spring constant) ويقدر بوحدة N/m ، أما s فتمثل التغير(Deformation of the spring) الذي يطرأ على طول النابض بفعل قوة الشد أو الضغط المؤثرة فيه.

7. الحواف الحادة (Knife Edges) : عندما يستند جسم إلى حافة حادة فإن ردّ الفعل هو قوة عمودية على سطح الجسم.

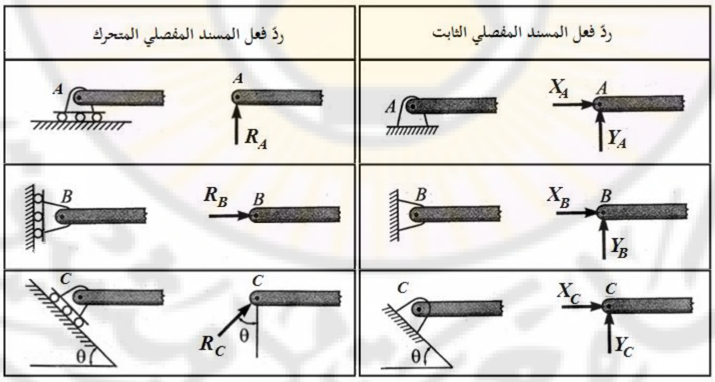


الشكل(1–20)



الشكل(1–21)

خلاصة القول ، يتوقف اتجاه ردّ الفعل على طريقة ارتكاز الجسم ، وتُعدّ المساند المفصلية الثابتة والمتحركة من أن أكثر أنواع المساند انتشاراً في الحياة العملية. ولهذا يبين الشكل(1–22) كيفية تمثيل اتجاه ردّ الفعل في الأوضاع المختلفة لتلك المساند .



الشكل(1–22)

أسئلة نظرية للمراجعة
REVIEW QUESTIONS

أجب عمّا يأتي :

1. عرِّف المفاهيم الآتية :

الجسم الصلب – الجُسَيم المادي – الجائز البسيط- الكتلة – الوزن – القوة – المزدوجة

2. ما الفرق بين المقادير العددّية (السُلّمية) والمقادير الشعاعية (المتّجهات) ؟ أعطِ أمثلة عليها .
3. ماذا يقول قانون التجاذب العام ؟
4. اشرح بإيجاز مبدأ التوازن الديناميكي مبيناً المقصود بقوة عطالة الجسم .
5. ما المقصود بعزم القوة ؟ وضِّح كيفية تمثيله بشعاع باستخدام قاعدة اليد اليمنى .
6. ماذا تقول قاعدة العزوم المسمَّاة بقاعدة فارغنون ؟
7. اشرح الطريقة البيانية التي تحدد محصلة مجموعة من القوى المستوية المؤثرة في جسم صلب .

اختر الإجابة الصحيحة لكلّ مما يأتي :

1. يبحث علم التوازن (علم السكون) في اتزان :

a) الأجسام الساكنة . b) الأجسام التي تتحرك حركة منتظمة. c) كُلّ ما سبق صحيح .

2. إنّ عزم القوة حول محور يساوي صفراً إذا كان :

a) اتجاه القوة موازياً لمحور الدوران . b) اتجاه القوة قاطعاً لمحور الدوران .

c) كُلّ ما سبق صحيح .

3. عندما تؤثر في جائز طوله ℓ قوى موزعة بانتظام شدتها q فإن محصلتها تساوي :

a) $q.\ell$ b) $q.\ell^2$ c) $q.\ell^3$

4. إن اتجاه رد فعل المسند المفصلي الثابت في حالة القوى المستوية يكون :

a) أفقياً . b) عمودياً على سطح الاستناد. c) مجهولاً ويُحلّل عادة إلى مركبتين.

5. إن اتجاه رد فعل المسند المفصلي المتحرك في حالة القوى المستوية يكون :

a) أفقياً . b) عمودياً على سطح الاستناد. c) مجهولاً.

6. يتألف رد فعل المسند الصلب في حالة القوى المستوية من :

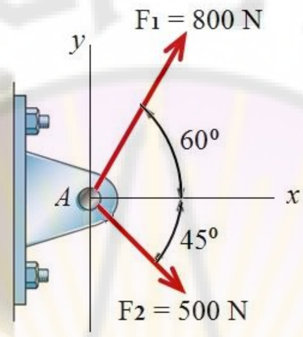
a) قوة ومزدوجة . b) قوة مجهولة فقط. c) مزدوجة مجهولة فقط .

مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

أوجد محصلة القوتين F_1 و F_2 المؤثرتين في المسند الثابت A ، وذلك بتطبيق المعطيات المبينة في الشكل .احسب الزاوية θ التي تصنعها المحصلة مع المحور الافقي x الموجب.

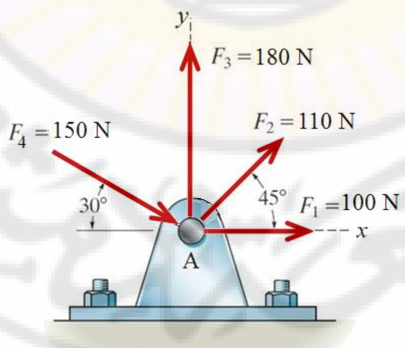


الجواب : R = 826.4 N , θ = 24.24° N

مسألة رقم (2) :

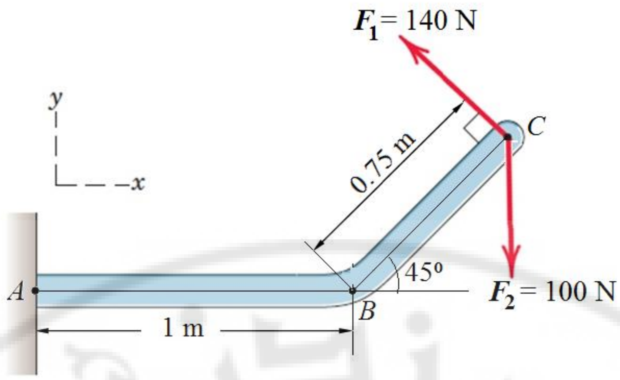
أوجد محصلة جملة القوى المتلاقية المؤثرة في المسند المفصلي الموضح في الشكل المجاور، وذلك بتطبيق المعطيات المبينة في الشكل .احسب الزاوية θ التي تصنعها المحصلة مع المحور الافقي x الموجب.

الجواب : R = 358 N , θ = 30.7° N



مسألة رقم (3) :

يخضع الذراع المعقوف الموضح في الشكل المجاور لتأثير قوتين خارجيتين F_1 وF_3 . والمطلوب أوجد عزم كل من هاتين القوتين بالنسبة للنقطة A ، مع العلم أن الابعاد موضحة في الشكل .

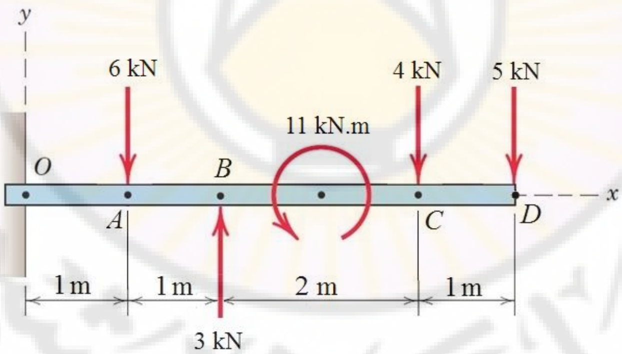


الجواب : $M_1 = 204$ N.m , $M_2 = -153$ N.m

مسألة رقم (4) :

تؤثر جملة من القوى المتوازية في الجائز الموضح في الشكل المرافق (a). والمطلوب :1- استبدل جملة القوى المعطاة بجملة مكافئة عند النقطة A . 2- استبدل جملة القوى المعطاة بقوة واحدة فقط ، موضحاً نقطة تأثيرها .

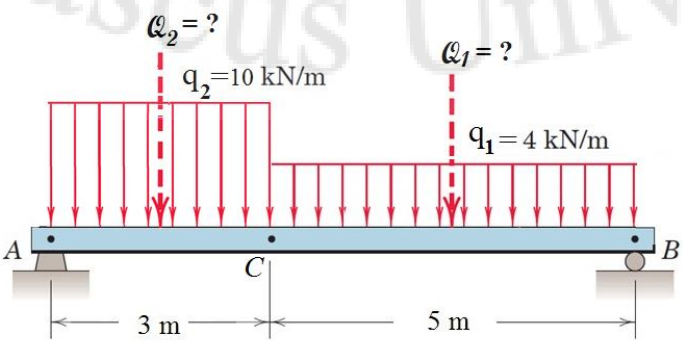
الجواب : R = -12 kN , M = - 18 kN.m , d = 2.5 m



مسألة رقم (5) :

جائز بسيط طوله 8 m ، مُحمَّل بقوى موزعة توزيعاً مبيناً في الشكل المرافق . أوجد محصلة القوى الموزعة.

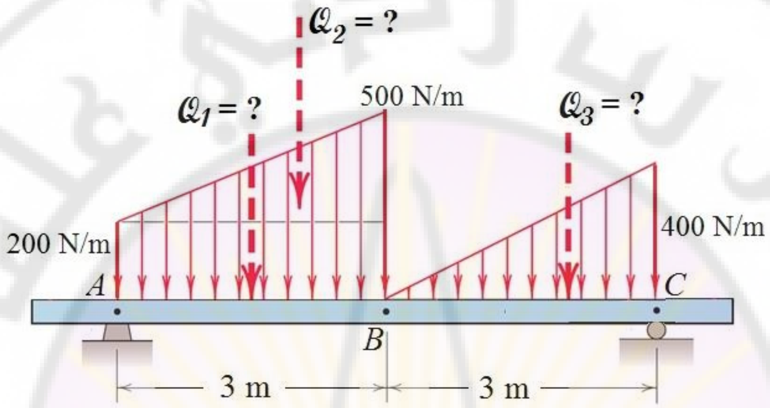
الجواب : $Q_1 = 20$ kN , $Q_2 = 30$ kN



مسألة رقم (6) :

جائز بسيط ، مُحمَّل بقوى موزعة تتغير تبعاً لقانوني المثلث وشبه المنحرف ،كما هو مبين في الشكل . أوجد محصلات القوى الموزعة ،إذا كانت شدة التحميل عند النقطة A تساوي الى 200 N/m ، وفي النقطة B تساوي الى 500 N/m ، وفي النقطة C تساوي الى 400 N/m .

الجواب : $Q_1 = 600$ N , $Q_2 = 450$ N , $Q_3 = 600$ N



الفصل الثاني

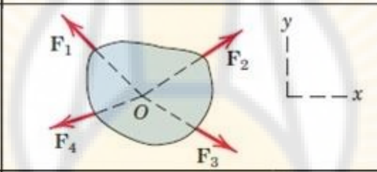
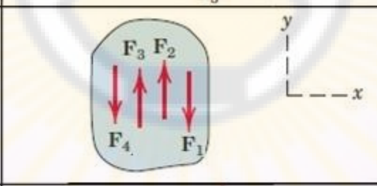
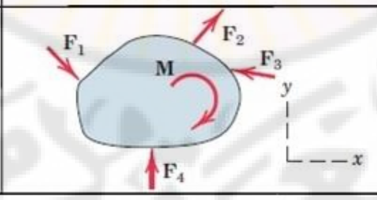
القوى المتلاقية الواقعة في مستوٍ واحد

CONCURRENT PLANE FORCES

1- تصنيف القوى المستوية (Categories of Plane Forces) .
2- معادلات التوازن (Equations of Equilibrium) .
3- مخطط الجسم الحر (Free Body Diagram).
4- نظرية توازن القوى الثلاث (Equilibrium 0f three Forces).

1- تصنيف القوى المستوية (Categories of Plane Forces) :

يوضح الشكل (1) أنواع مجموعات القوى المستوية أي الواقعة في مستو واحد ، والتي تضمّ : القوى المتلاقية في نقطة واحدة ، والقوى المتوازية ، والقوى المتفرقة .

مجموعات القوى الواقعة في مستو واحد		
النوع	المخطط	معادلات التوازن
قوى متلاقية		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
قوى متوازية		$\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
قوى متفرقة		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$

الشكل(2–1)

2- معادلات التوازن (Equations of Equilibrium) :

إذا كان الجسم ساكناً أو متحركاً بسرعة خطية ثابتة فإن تسارعه يكون معدوماً ، ونقول عندئذ : إن هذا الجسم واقع في حالة توازن أو اتزان . كما أن مجموعة القوى التي تؤثر في الجسم ولا تغير من حالته تدعى بالمجموعة المتوازنة . وبتعبير آخر إذا أثرت في جسم ما مجموعة قوى متوازنة ، فإننا نقول إن هذه القوى تقع في حالة توازن. وبالعودة إلى القانون الأول لنيوتن فإن الجسم يكون متوازناً عندما تساوي محصلة القوى المؤثرة فيه صفراً . وبما أننا نستطيع على وجه العموم اختزال أية مجموعة من القوى الى جملة مكافئة تتألف من قوة

تساوي $\Sigma\,\mathbf{F}$ ومزدوجة عزمها يساوي $\Sigma\,\mathbf{M_o}$ بالنسبة لنقطة اختيارية كمركز الإحداثيات مثلاً ، عندئذ نحصل على معادلات التوازن بصيغتها الشعاعية الآتية :

$$\Sigma\,\mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

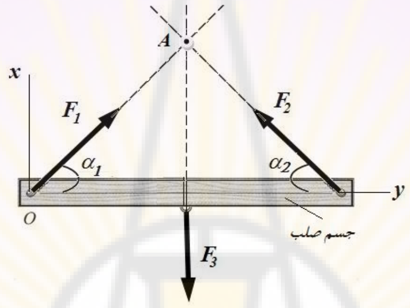
$$\Sigma\,\mathbf{M_o} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

حيث :

$\Sigma\,\mathbf{F}$ - المجموع الشعاعي لقوى المجموعة المفروضة.

$\Sigma\,\mathbf{M}$ - المجموع الشعاعي لعزوم كل قوى المجموعة المفروضة بالنسبة لأية نقطة مناسبة.

وعلى وجه العموم ، عندما تؤثر جملة قوى متلاقية في جسم ، فإن ذلك يعني تلاقي خطوط تأثير هذه القوى في نقطة واحدة ،كالنقطة A مثلاً ،كما هو واضح في المثال المبين في الشكل (2-2).



الشكل(2-2)

ويكفي في هذه الحالة لانعدام هذه الجملة هو أن تنعدم قوة المحصلة **R** . ويمكن التعبير عن هذا الشرط بالعلاقات الآتية :

$$\Sigma\,\mathbf{F} = \Sigma\,F_x\mathbf{i} + \Sigma\,F_y\mathbf{j} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

$$\Sigma\,F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma\,F_y = 0$$

حيث : $\Sigma\,F_x$ - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات x .

$\Sigma\,F_y$ - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات y .

نطبق شرطي التوازن على جملة القوى المتلاقية المبينة في الشكل فنجد :

$$\Sigma\,F_x = F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 = 0$$
$$\Sigma\,F_y = F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2 - F_3 = 0$$

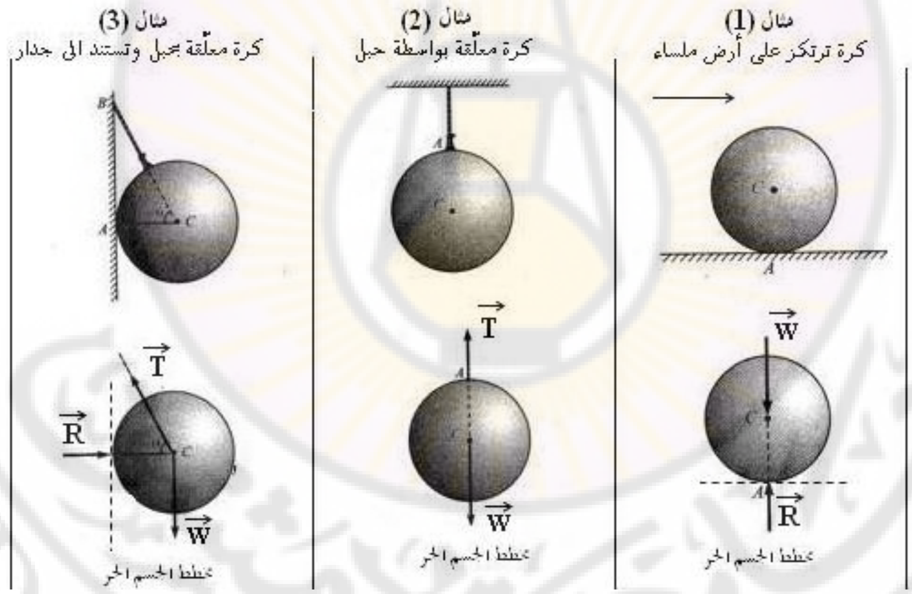
3- مخطط الجسم الحر (Free body diagram) :

ينبغي قبل أن نبدأ بتطبيق معادلات التوازن عزل الجسم الوارد في المسألة بطريقة واضحة وأن نمثل بدقة جميع القوى المؤثرة فيه ، إذ يؤدي حذف قوة ما أو إضافتها إلى نتائج خاطئة. وتتم عملية عزل الجسم عن جميع الأجسام والقيود المحيطة به من خلال رسم مخطط الجسم الحر أو الطليق (Free Body Diagram) الذي

يُظهر جميع القوى المؤثرة بما في ذلك قوى ردود أفعال القيود التي أبعدت عنه . ولا يجوز البدء بحسابات القوى إلا بعد إتمام رسم مخطط الجسم الحر .

ولهذا فإن **رسم مخطط الجسم الحر هو أهم خطوة في حل مسائل علم التوازن .**

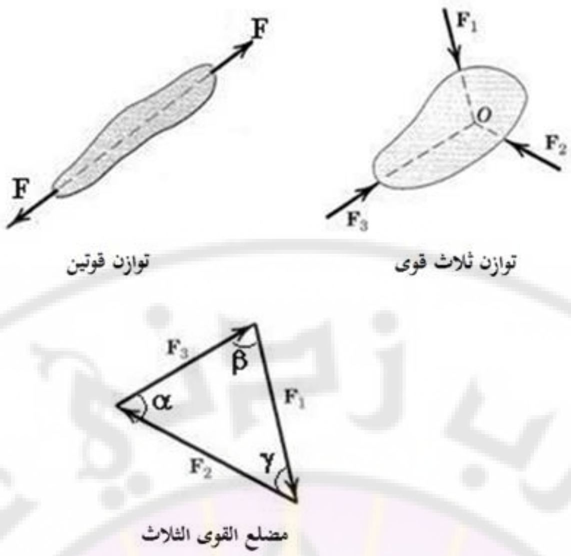
للبحث مثلاً في توازن الكرة المبينة في المثال الأول في الشكل(2-3) ، نقوم أولاً برسم مخطط الجسم الحر لتلك الكرة . لهذا نترع عنها السطح الحامل ونحل محله رد فعل السطح في الكرة أي القوة **R** ، ونعلم أن نقطة تطبيق هذه القوة يجب أن تقع في A نقطة التماس بين المستوي والكرة ، فنستنتج ، استناداً إلى مبدأ توازن قوتين أنه يجب أن يكون رد الفعل **R** شاقولياً ومساوياً للوزن **W** ، وبذلك يكون رد الفعل هذا قد تعيّن تعييناً كاملاً. وكذلك في حالة الكرة المعلقة بحبل والمبينة في المثال الثاني في الشكل السابق ، إذا نزعنا الحبل هنا وعزلنا الكرة كجسم حر كانت لدينا ، بالإضافة إلى الوزن **W** المطبق في النقطة C ، قوة شد الحبل **T** . لهذا يظهر مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل المذكور آنفاً .



وكذلك في حالة الكرة المبينة في المثال الثالث ، إذا نزعنا القيود هنا أيضاً وعزلنا الكرة كجسم حر كانت لدينا ، بالإضافة إلى الوزن المطبق في النقطة C ، قوتا رد فعل تحل إحداهما محل الحبل وتحل الأخرى محل الجدار . لهذا يظهر مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل. ومن المعتاد عند تطبيق معادلات التوازن على الأجسام الصلبة هو تقسيم مجموعات القوى المؤثرة فيها إلى متلاقية ومتوازية ومتفرقة .

4– نظرية توازن القوى الثلاث (Equilibrium 0f three Forces) :

عندما يكون الجسم واقعاً تحت تأثير قوتين فقط فإن توازنه يتطلب تساوي هاتين القوتين في المقدار وتعاكسهما في الاتجاه كما هو مبين في الشكل(2-4) .



الشكل(2–4)

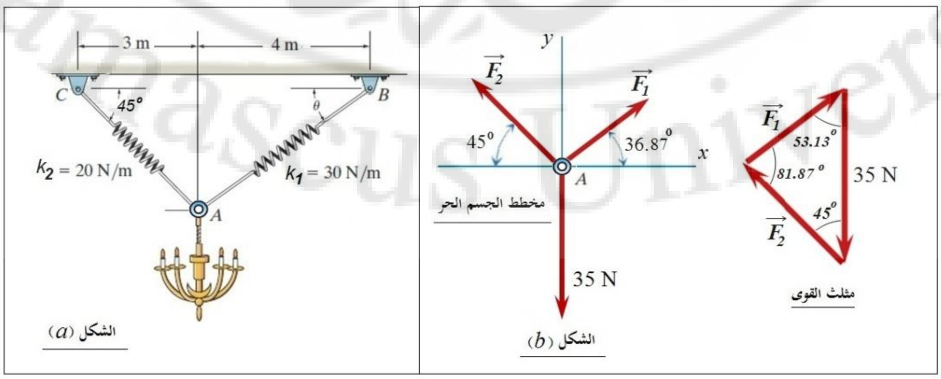
وعندما تكون القوى المؤثرة فيه ثلاث قوى فإن شرط التوازن هو أن يكون مجموع أي قوتين مساوياً ومعاكساً للقوة الثالثة . أو بمعنى آخر إذا كانت لدينا ثلاث قوى $\mathbf{F}_1$ و$\mathbf{F}_2$ و$\mathbf{F}_3$ وكانت هذه القوى واقعة في مستو واحد وغير متوازية فإن شرط التوازن هو أن تتقاطع خطوط تأثيرها في نقطة واحدة . وبالإضافة إلى هذا فإن أشعة القوى يجب أن تشكل مضلعاً مغلقاً. إن مضلع القوى في هذه الحالة هو مثلث زواياه هي المكملة للزوايا بين خطوط عمل القوى.واستناداً إلى قاعدة الجيوب (علاقة لامي) في المثلثات نجد :

$$\frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}=\frac{F_3}{\sin\gamma} \qquad (4)$$

توضح الأمثلة الآتية كيفية دراسة توازن الجسم الصلب تحت تأثير جملة قوى متلاقية .

مثال رقم (7)

يتدلى مصباح كهربائي ، وزنه W=35 N ، من حلقة صغيرة A محمولة بنابضين AB وAC كما هو موضح في الشكل . أوجد قوتي الشد المتولدتين في النابضين ، وكذلك مقدار استطالة كل منهما في وضع التوازن المبين .



الحل : ....

الطريقة التحليلية : تعتمد هذه الطريقة على رسم مخطط الجسم الحر للحلقة A ، ثم حساب القوى المجهولة باستخدام معادلات التوازن الآتية:

$$\Sigma F_x = F_1 \cos 36.87° - F_2 \cos 45° = 0$$
$$\Sigma F_y = F_1 \sin 36.87° + F_2 \sin 45° - 35 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على: $F_1=25\ N$, $F_2=28.28\ N$

الطريقة البيانية : تعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لمثلث أشعة القوى استناداً الى مخطط الجسم الحر للحلقة المدروسة ، ثم تحديد القوى المجهولة باستخدام علاقة الجيوب .

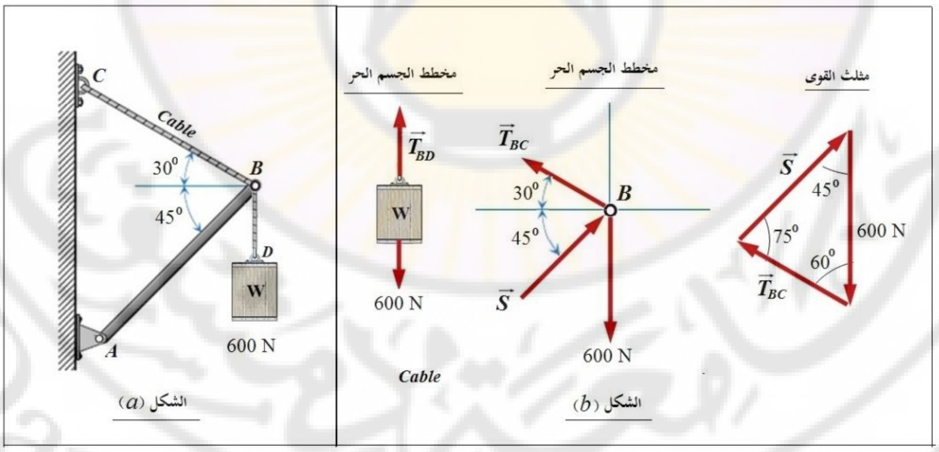
$$\frac{35}{\sin 81.87°} = \frac{F_1}{\sin 45°} = \frac{F_2}{\sin 53.13°}$$
$$F_1 = 25\ N\ , F_2 = 28.28\ N$$

حساب الاستطالة : تحسب استطالة كل من النابضين باستخدام العلاقتين :

$$F_1 = K_1.S_1 \Rightarrow S_1 = F_1/K_1 = 25/30 = 0.83\ m$$
$$F_2 = K_2.S_2 \Rightarrow S_2 = F_2/K_2 = 28.28/20 = 1.41\ m$$

مثال رقم (8)

أوجد في وضع التوازن ، القوتين المتولدتين في الذراع AB والكبل BC بفعل الحمل المرفوع **W** المطبق في المفصل B . مع العلم أن : W =600 N



الحل : ....

عندما يقوم الحمل **W** بشدّ مسمار التعليق B نحو الأسفل ، فإن الأخير سوف يقوم بضغط ألياف الذراع AB ، وبشدّ أسلاك الكبل BC ، ونتيجة لذلك سوف يؤثر الذراع والكبل في المسمار بقوتي رد فعل مساويتين ومعاكستين لفعل المسمار فيهما كما هو مبين في مخطط الجسم الحر لمسمار التعليق. معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = S \cos 45° - T \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = S \sin 45° + T \sin 30° - 600 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على الآتي :

$$S = 537.94\ N \quad , \quad T = 439.23\ N$$

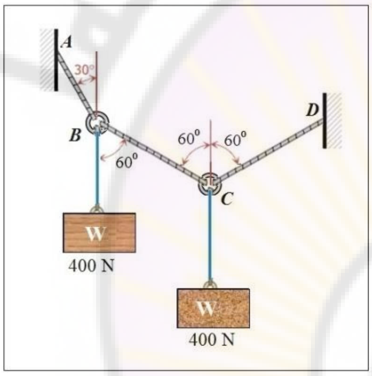
حل آخر : بما أن الحلقة A بحالة توازن وتخضع لتأثير ثلاث قوى فقط لذا فإن الأشعة الممثلة لها يجب أن تشكل مثلثاً مغلقاً كما هو واضح في الشكل. وبتطبيق علاقة الجيوب:

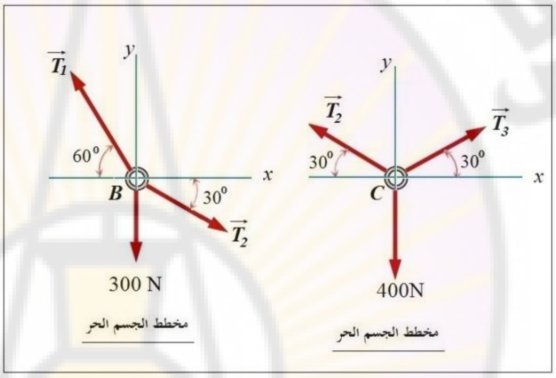
$$\frac{600}{\sin 75°} = \frac{S}{\sin 60°} = \frac{T}{\sin 45°}$$

من هذه العلاقة نحصل على النتائج السابقة.

مثال رقم (9)

يتدلى ثقلان متساويان ، وزن كل منهما W=400 N ، من حلقتين صغيرتين محمولتين بزوج من الأسلاك وبثلاثة حبال . أوجد بالطريقتين التحليلية والبيانية قوى الشد المتولدة في الحبال الثلاثة AB وBC وCD ، إذا كانت الزوايا بين مختلف أعضاء الجملة هي المبينة في الشكل .





الحل : ....

الطريقة التحليلية : تعتمد هذه الطريقة على رسم مخطط الجسم الحر في البداية ، ثم حساب القوى المجهولة باستخدام معادلات التوازن ، وذلك وفق التسلسل الآتي:

الحلقة B : نرسم مخطط الجسم الحر للعقدة B ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = T_2 \cos 30° - T_1 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma F_y = T_2 \sin 30° + T_2 \cos 30° - 400 = 0$$

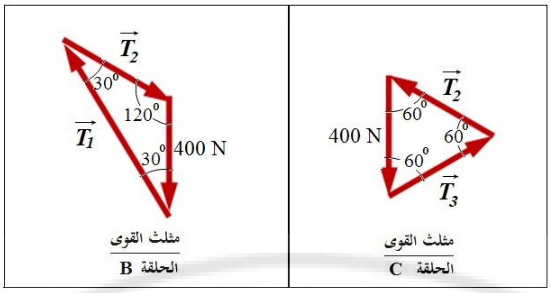
الحلقة C : نرسم مخطط الجسم الحر للعقدة C ونكتب أيضا معادلة التوازن :

$$\Sigma F_x = T_2 \sin 30° - T_3 \sin 30° = 0$$

بحل المعادلات السابقة نحصل على :

$$T_1 = 692.82\ N \quad , \quad T_2 = T_3 = 400\ N$$

الطريقة البيانية : تعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لمثلث أشعة القوى استناداً الى مخطط الجسم الحر للحلقة المدروسة ، ثم تحديد القوى المجهولة باستخدام علاقة الجيوب .



الحلقة B : نرسم مثلث أشعة القوى لهذه الحلقة ثم نكتب علاقة الجيوب :

$$\frac{400}{\sin 30°} = \frac{T_1}{\sin 120°} = \frac{T_2}{\sin 30°}$$

من هذه العلاقة ينتج أن :

$$T_1 = 692.82 \text{ N} \ , T_2 = 400 \text{ N}$$

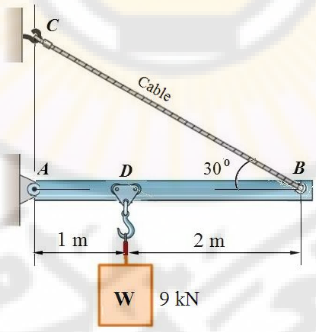
الحلقة B : نرسم مثلث أشعة القوى لهذه الحلقة كما هو واضح في الشكل . وبما أن هذا المثلث متساوي الاضلاع لذا يمكن أن نكتب :

$$T_3 = 400 \text{ N}$$

وهكذا نلاحظ بأن النتائج متطابقة في الطريقتين التحليلية والبيانية .

مثال رقم (10)

يُثبَّت الجائز AB في النقطة A تثبيتاً مفصلياً ، وفي النقطة B يربط مع الحائط بواسطة الكبل BC بحيث يشكل هذا الكبل مع الأفق زاوية مقدارها 30° . تؤثر على الجائز حمولة مقدارها 9 kN كما هو مبين في الشكل . عيِّن قوة الشد T المتولدة في الكبل ورد فعل المسند A وذلك باستخدام الطريقتين البيانية والتحليلية .



الحل : ....

الطريقة البيانية : نلاحظ أن الجائز يقع في حالة توازن تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية لذا نستطيع تطبيق قاعدة القوى الثلاث . لهذا نمدد خطي تأثير القوتين W و T فيتقاطعان في النقطة O . إن خط تأثير رد الفعل الخاص بالمسند A R_A يجب أن يمر بالنقطة O أيضا طبقا للقاعدة المذكورة . بعد ذلك نرسم مثلث القوى ثم نطبق علاقة الجيوب التالية :

$$\frac{9}{\sin 79°} = \frac{T}{\sin 41°} = \frac{R_A}{\sin 60°}$$

من هذه العلاقة نجد أن :

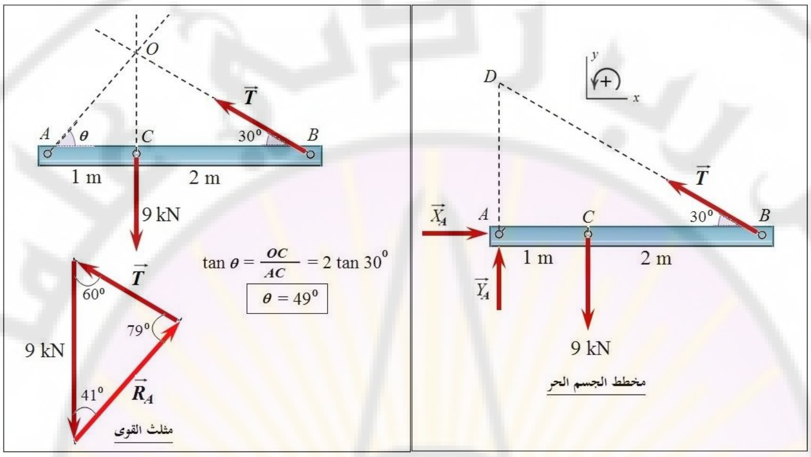
$$T = 6\ kN \quad , \quad R_A = 7.94\ kN$$

الطريقة التحليلية : نرسم مخطط الجسم الحر للجائز المفروض ثم نكتب معادلات التوازن:

$$\Sigma F_x = X_A - T\cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + T\sin 30° - 9 = 0$$
$$\Sigma M_A = T\sin 30° (3) - 9 (1) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على النتائج التالية :

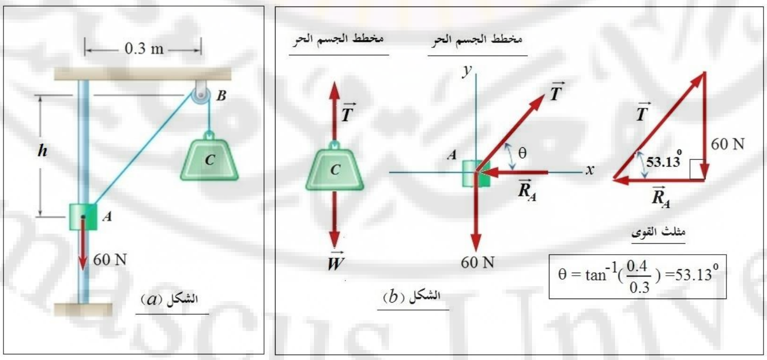
$$T = 6\ kN \quad X_A = 5.2\ kN \quad Y_A = 6\ kN \quad R_A = 7.94\ kN$$



وهكذا نلاحظ بأن نتائج الطريقة التحليلية مطابقة تماماً لنتائج الطريقة البيانية .

مثال رقم (11)

حلقة صغيرة ملساء A ، يمكنها الانزلاق بدون احتكاك على دليل شاقولي ثابت. رُبطت الحلقة بأحد طرفي حبل ، يلتف على بكرة ثابتة ، وربط بالطرف الاخر الحمل C كما هو مبين في الشكل. أوجد في وضع التوازن قيمة الحمل C ، وكذلك ردّ فعل الدليل على ضغط الحلقة في اللحظة التي توافق h=0.4m ، وذلك بالطريقتين البيانية والتحليلية .



الحل :

الطريقة البيانية : نرسم مخطط الجسم الحر للحلقة A ، وهنا نلاحظ أن الحلقة تقع في حالة توازن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة واحدة ، لذا نستطيع تطبيق قاعدة القوى الثلاث . ولهذا نرسم مثلث القوى كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب من هذا المثلث القائم القوتين المجهولتين على النحو الاتي:

$$T = W = \frac{60}{\sin 53.13°} = 75 \text{ N}$$

$$R_A = T.\cos 53.13° = 45 \text{ N}$$

الطريقة التحليلية : استناداً إلى مخطط الجسم الحر للحلقة A ، نكتب معادلات التوازن:

$$\Sigma F_x = T \cos 53.13° - R_A = 0$$
$$\Sigma F_y = T \sin 53.13° - 60 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على النتائج السابقة .

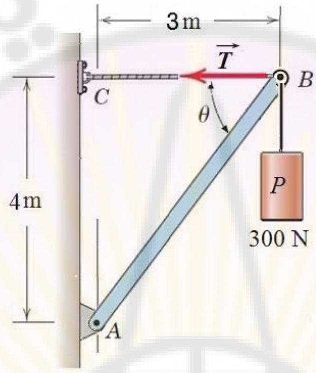
😂😂😂😂😂😂😂

مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

أوجد القوتين T و S ، المتولدتين في الكبل الافقي BC والذراع AB ، بفعل حمل شاقولي مقداره 300 N يؤثر في النهاية العليا للذراع كما هو مبين في الشكل .مع العلم أن وزن الذراع مهمل.

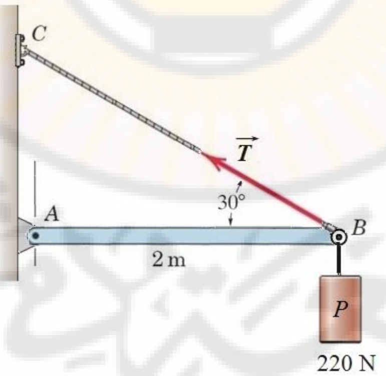
الجواب : T = 225 N , S = 375 N



مسألة رقم (2) :

أوجد القوتين T و S ، المتولدتين في الذراع الافقي AB والكبل BC ، بفعل حمل شاقولي مقداره 220 N يؤثر في النهاية الحرة للذراع . مع العلم أن وزن الذراع مهمل.

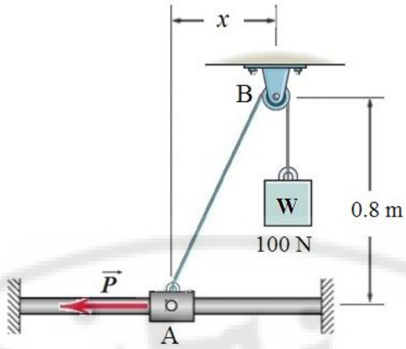
الجواب : T = 254 N , S = 127 N



مسألة رقم (3) :

حلقة صغيرة ملساء A ، يمكنها الانزلاق بدون احتكاك على دليل أفقي ثابت. رُبطت الحلقة بأحد طرفي حبل يلتف على بكرة ثابتة ، وربط بالطرف الاخر حمل مقداره 100N كما هو مبين في الشكل. أوجد في وضع التوازن مقدار القوة P ، وكذلك ردّ فعل الدليل على ضغط الحلقة في الحالتين : a) $x = 0.35$ m ، b) $x = 0.6$ m .

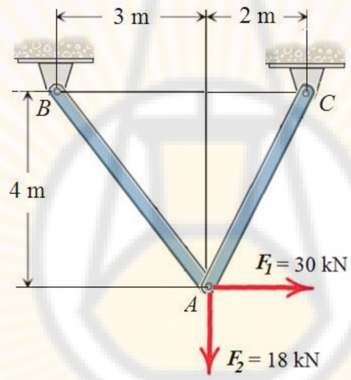
الجواب : a) $P = 40$ N , $R_A = 92$ N (↓) , b) $P = 60$ N , $R_A = 80$ N(↓)



مسألة رقم (4) :

عارضتان AB وAC متصلتان اتصالاً مفصلياً في النقطة A ، ويؤثر فيهما قوتان إحداهما أفقية F_1 والأخرى شاقولية F_2 كما هو مبين في الشكل .والمطلوب : أوجد القوة المحورية المتولدة في كل من العارضتين ، إذا علمت أن أوزانهما مهملة .

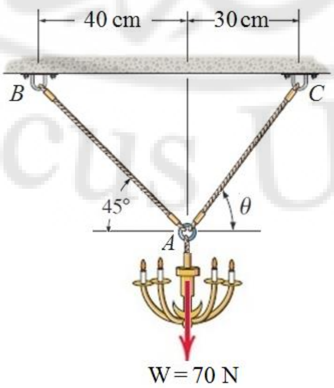
الجواب : $S_{AB} = 39$ kN , $S_{AC} = -14.67$ kN



مسألة رقم (5) :

يتدلى مصباح كهربائي وزنه W=70 N ، من حلقة صغيرة A محمولة بسلكين AB و AC كما هو موضح في الشكل . أوجد بالطريقتين التحليلية والبيانية قوتي الشد المتولدتين فيهما ، إذا كانت الزوايا بين مختلف أعضاء الجملة هي المبينة في الشكل .

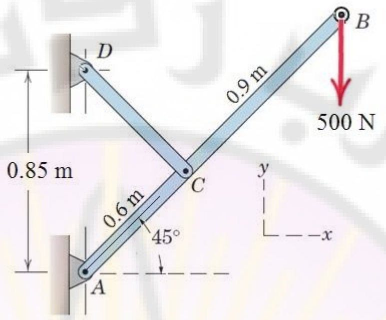
الجواب : $T_{AB} = 42.4$ N , $T_{AC} = 50$ N



مسألة رقم (6) :

عارضتان AB وCD متصلتان اتصالاً مفصلياً في النقطة C كما هو مبين في الشكل . اذا أثرت على طرف العارضة AB قوة شاقولية قدرها 500 N ، أوجد ردّي فعل المسندين A و D ، مع العلم أن الابعاد موضحة في الرسم .

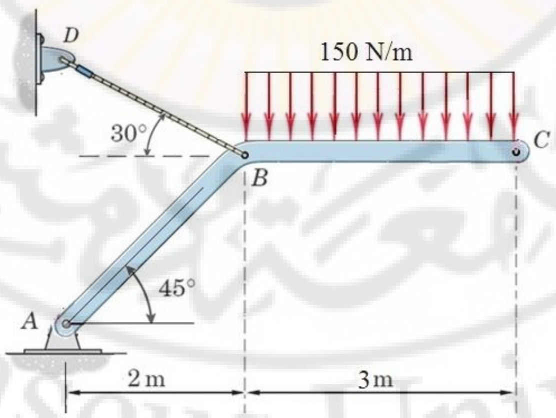
الجواب : $X_A = 625$ N , $Y_A = -125$ N , $R_D = 884$ N



مسألة رقم (7) :

يثبت الإطار ABC في النقطة A تثبيتاً مفصلياً ، وفي النقطة B يربط مع الحائط باستخدام الكبل BD ، بحيث يشكل هذا الكبل مع الأفق زاوية مقدارها 30° . تؤثر على الجزء الأفقي من الإطار حمولة موزعة بانتظام كما هو مبين في الشكل . والمطلوب تحديد قوة الشد T المتولدة في الكبل ، وكذلك رد فعل المسند A .

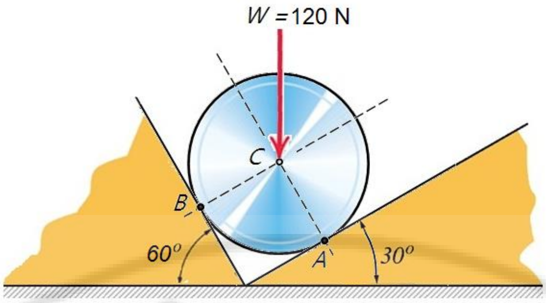
الجواب : $T = 577$ N , $X_A = 500$ N , $Y_A = 161.5$ N



مسألة رقم (8) :

كرة متجانسة وزنها W=120 N ، ترتكز على مستويين أملسين ، أحدهما يصنع زاوية مقدارها 30° ، والآخر يصنع زاوية مقدارها 60° كما هو مبين في الشكل . والمطلوب أوجد ضغط الكرة على كل من سطحي الاستناد في نقطتي التماس A وB .

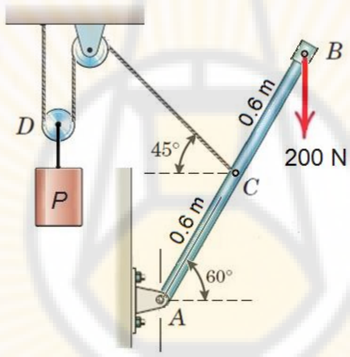
الجواب : $N_A = 103.9$ N , $N_B = 60$ N



مسألة رقم (9) :

يُثبَّت الذراع AB في النقطة A تثبيتاً مفصلياً ، وفي النقطة C يُربط بحبل يلتف على بكرتين ، ويحمل في نهايته الطليقة ثقلاً P كما هو مبين في الشكل . إذا علمت أن هذا الذراع يخضع لتأثير قوة شاقولية مقدارها 200 N ، فأوجد في وضع التوازن مقدار الثقل P ، وكذلك رد فعل المسند A . وزن الذراع مهمل ، والأبعاد موضحة في الشكل .

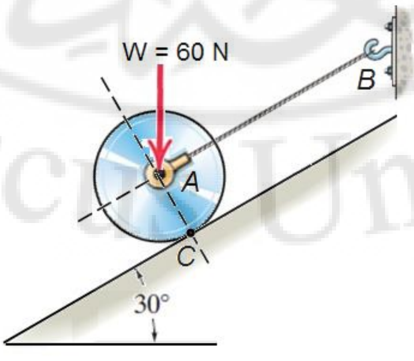
الجواب : $P = 413.8$ N , $X_A = 146.3$ N , $Y_A = 53.7$ N



مسألة رقم (10) :

تستند عجلة وزنها 60 N إلى سطح مائل أملس ، وتمنع من التدحرج عليه باستخدام الحبل AB المبين في الشكل . أوجد قوة الشد المتولدة في الحبل ، وقوة رد فعل سطح الاستناد في نقطة التماس C .

الجواب : $T = 30$ N , $N_C = 51.96$ N



الفصل الثالث

القوى المتوازية والمتفرقة الواقعة في مستو واحد

PARALLEL AND GENERAL PLANE FORCES

1- القوى المتوازية (Parallel Forces).
2- القوى العامَّة المتفرقة (General Forces).
3- توازن جملة أجسام مُركبَّة (Equilibrium of Compound Bodies).

1– القوى المتوازية (Parallel Forces) :

إن الشروط التحليلية لتوازن مجموعة من القوى المتوازية ، والموازية للمحور الشاقولي y مثلاً ، تتلخص في المعادلتين الآتيتين :

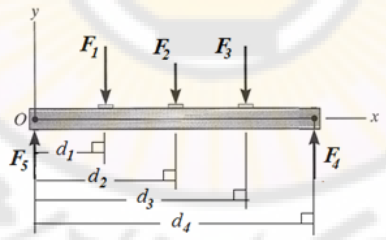
$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_o = 0 \qquad (1)$$

حيث : ΣF_y - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات y .

ΣM_o - مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة اختيارية ملائمة o .

نطبق شرطي التوازن على جملة القوى المتوازية المبينة في الشكل(3–1) فنجد :

$$\Sigma F_y = -F_1 - F_2 - F_3 + F_4 + F_5 = 0$$
$$\Sigma M_o = -F_1 \times d_1 - F_2 \times d_2 - F_3 \times d_3 + F_4 \times d_4 = 0$$

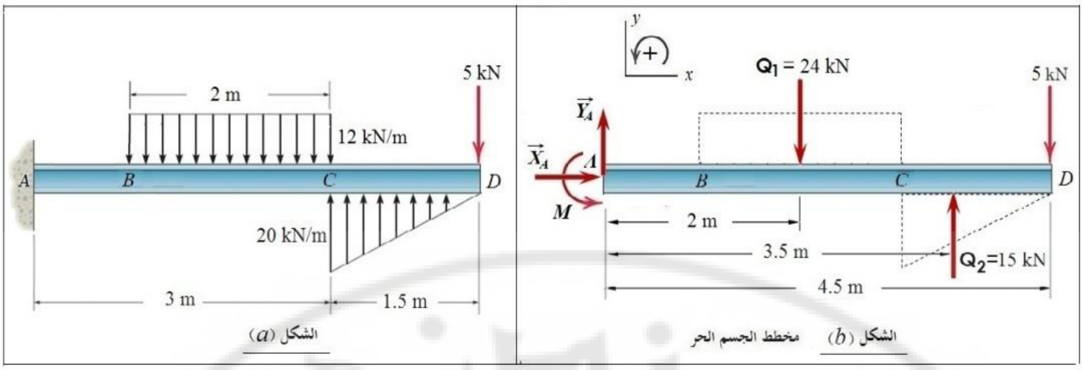


الشكل(3–1)

توضح الأمثلة الآتية كيفية دراسة توازن الجسم الصلب تحت تأثير جملة قوى متوازية .

مثال رقم (12)

أوجد مركبات رد فعل المسند الصلب A ، للجائز AD الموضح في الشكل، والواقع تحت تأثير مجموعة من القوى الموزعة توزيعاً منتظماً على الجزء BC ، والمتغيرة بانتظام على الجزء CD ، بالاضافة الى تأثير قوة مركزة مقدارها5kN .



الحل : ....

محصلات القوى الموزعة : نستبدل أولاً مجموعة القوى الموزعة كما هو مبين في الشكل (b) بالمحصلتين الآتيتين:

$$Q_1 = 12 \times 2 = 24\ kN$$
$$Q_2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 1.5 = 15\ kN$$

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر لهذا الجائز كما في الشكل (b) ، مع ملاحظة أن رد الفعل في المسند الصلب يكافئ قوة R ومزدوجة ذات عزم M . وبما أن القوة المذكورة مجهولة الاتجاه لذا يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين باتجاه محوري جملة الاحداثيات المختارة (x,y).

معادلات التوازن : نكتب معادلات توازن الجائز :

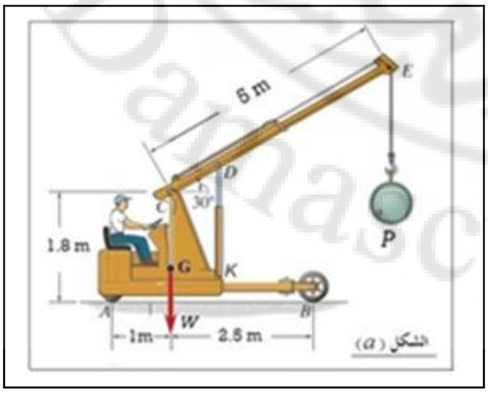
$$\Sigma F_x = X_A = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + 15 - 24 - 5 = 0$$
$$\Sigma M_A = 15\times3.5 - 5\times4.5 - 24\times2 + M = 0$$

بحل هذه المعادلات ينتج لدينا مركبات رد الفعل الآتية :

$$X_A = 0 \quad ; \quad Y_A = 14\ kN \quad ; \quad M = 18\ kN.m$$

مثال رقم (13)

رافعة ترتكز على عجلات ، وترفع حملاً مقداره P = 8 kN .
إذا علمت أن وزن الرافعة 10 kN ويؤثر في مركز الثقل G ، كما هو مبين في الشكل ، فأوجد ردود أفعال الاستناد في النقطتين A و B ،
وكذلك الحمل الأعظم P بحيث لا تنقلب الرافعة .

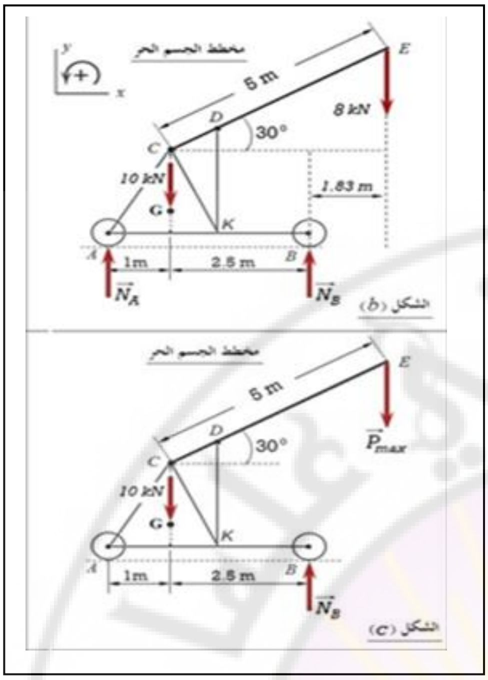


الحل : ....

ردود الافعال :نرسم مخطط الجسم الحر للرافعة كما في الشكل ، ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_y = N_A + N_B - 8 - 10 = 0$$
$$\Sigma M_A = N_B(3.5) - 10\,(1) -$$

$-8\ (5.33)=\ 0$



بحل هاتين المعادلتين ينتج لدينا :

$N_A = 2.96\ kN \quad , \quad N_B = 15.04\ kN$

الحمل الأعظمي : لا بدّ لنا من البحث في الوضع الحرج الآتي :

عندما يكون الحمل الأعظم P_{max} مطبقاً في النقطة E فإن الرافعة تصبح على وشك الانقلاب ، وتنفصل حينئذ عن المسند A الذي ينعدم رد فعله في هذه اللحظة الحرجة كما هو واضح في الشكل (c). فإذا أخذنا مجموع عزوم القوى حول النقطة B حصلنا على الآتي :

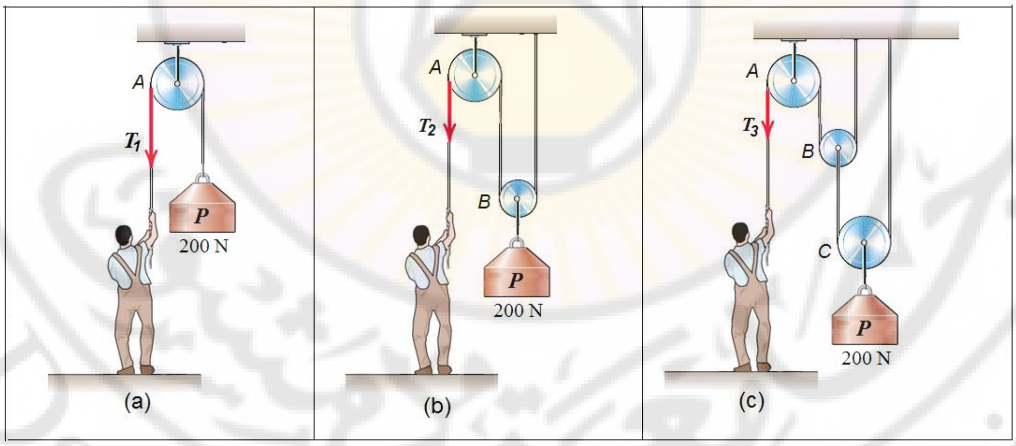
$\Sigma\ M_B = -\ P_{max}(1.83) + 10(2.5) = 0$

ومن هنا نجد أكبر حمل تستطيع الرافعة رفعه دون أن تنقلب:

$P_{max} = 13.66\ kN:$

مثال رقم (14)

أوجد قوى الشدّ: T_1وT_2وT_3الضرورية للحفاظ على توازن ثقل مقداره $P = 200N$ ، وذلك في الحالات الموضَّحة في الشكل ، اذا علمت أن أوزان البكرات وأبعادها مهملة.



الحل : ....

الحالة الأولى (a) :نرسم مخطط الجسم الحر للثقل P استناداً إلى مبدأ الفعل ورد الفعل ، مع ملاحظة أن قيمة الشدّ ثابتة في كافة نقاط الحبل ، ثم نكتب معادلة التوازن :

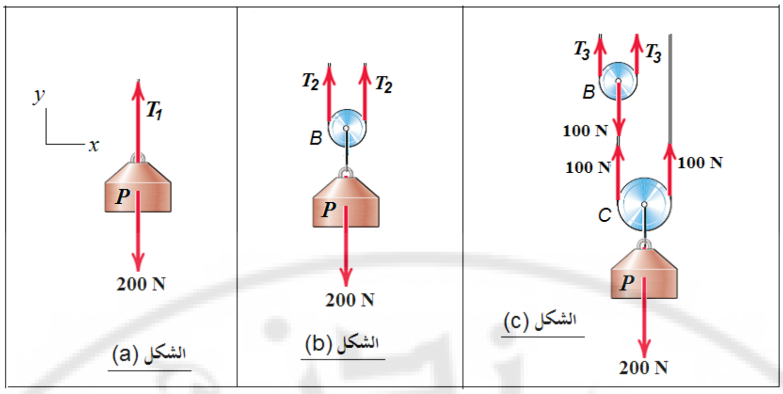
$$\Sigma\ F_y = T_1 - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1\ = 200\ N$$

الحالة الثانية (b) :نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة B ، ثم نكتب معادلة التوازن :

$$\Sigma\ F_y = 2T_2 - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2\ = 100\ N$$

الحالة الثالثة (c) :نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة B ، ثم نكتب معادلة التوازن :

$$\Sigma\ F_y = 2T_3 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_3\ = 50\ N$$



2– القوى العامَّة المتفرقة (General Forces) :

إنّ الشروط التحليلية لتوازن مجموعة من القوى العامة المتفرقة هي:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_o = 0 \qquad (2)$$

حيث : ΣF_x - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات x .

ΣF_y - مجموع مساقط القوى على محور الإحداثيات y .

ΣM_o - مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة اختيارية ملائمة كالنقطة O مثلاً.

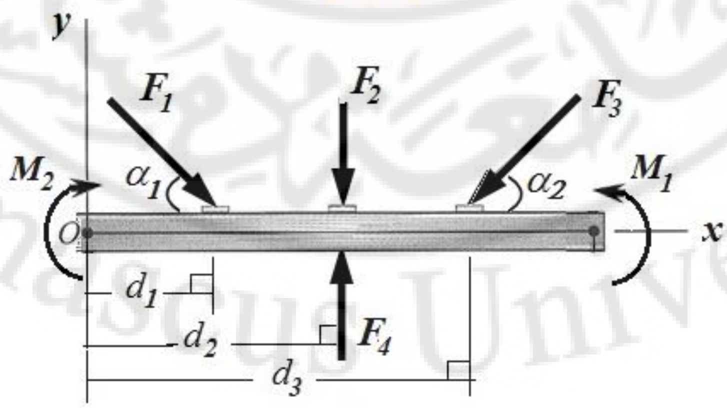
نطبق شروط التوازن على جملة القوى المتفرقة الموضحة في الشكل(3–2) فنجد :

$$\Sigma F_x = F_1 \cos \alpha_1 - F_3 \cos \alpha_2 = 0$$

$$\Sigma F_y = -F_1 \sin \alpha_1 - F_2 - F_3 \sin \alpha_2 + F_4 = 0$$

$$\Sigma M_o = 0$$

$$-F_1 \sin \alpha_1 (d_1) - F_2 (d_2) - F_3 \sin \alpha_2 (d_3) + F_4 (d_2) + M_1 - M_2 = 0$$

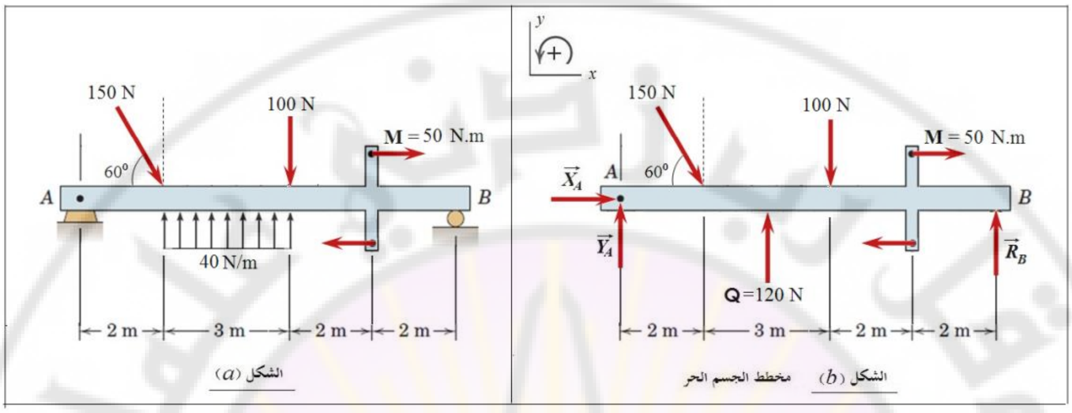


الشكل(3–2)

توضح الأمثلة الآتية كيفية دراسة توازن الجسم الصلب تحت تأثير جملة قوى متفرقة

مثال رقم (15)

أوجد ردي فعل المسندين A وB ، للجائز الموضح في الشكل، والواقع تحت تأثير قوتين احداهما شاقولية والاخرى تميل بزاوية قدرها°60 ، بالاضافة الى تأثير مزدوجة عزمها M=50 N.m ، ومجموعة من القوى الموزعة توزيعاً منتظماً .



الحل : ....

محصلة القوى الموزعة : نستبدل أولاً مجموعة القوى الموزعة بالمحصلة الآتية:

$$Q = 40 \times 3 = 120\ kN$$

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر لهذا الجائز كما في الشكل (b) ، مع ملاحظة أن رد الفعل في المسند المفصلي الثابت يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى مركبتين باتجاه محوري جملة الاحداثيات المختارة (x,y) ، وأن رد الفعل في المسند المتحرك هو قوة عمودية على سطح الاستناد.

معادلات التوازن : نكتب معادلات توازن الجائز :

$$\sum F_x = X_A + 150\cos 60° = 0$$

$$\sum F_y = Y_A + R_B - 150\sin 60° - 100 + 120 = 0$$

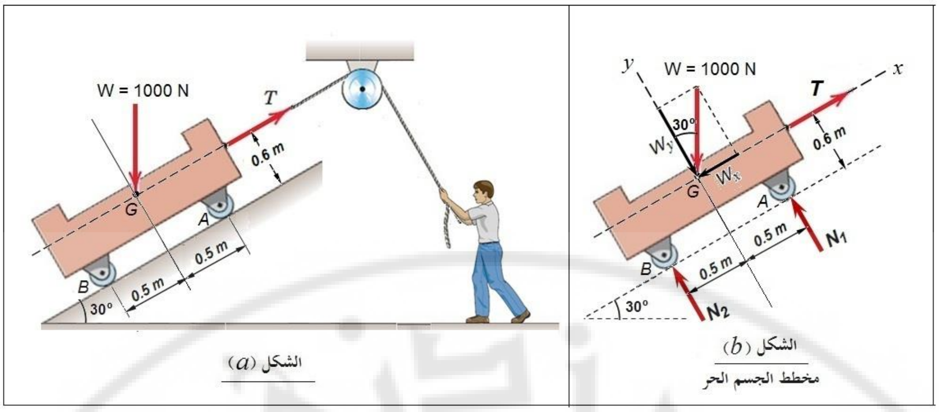
$$\sum M_A = R_B(9) - 150\sin 60° - 100(5) - 50 + 120(3.5) = 0$$

بحل هذه المعادلات ينتج لدينا مركبات رد الفعل الآتية :

$X_A = -75$ N ; $Y_A = 66.59$ N ; $R_B = 43.31$ N

مثال رقم (16)

عربة وزنها W=1000 N ، ترتكز على مستوي مائل أملس ، يصنع زاوية قدرها °30 مع الافق كما هو مبين في الشكل (a). أوجد في وضع التوازن قوة الشد T المتولدة في الحبل ، وكذلك ردود الافعال في النقطتين A و B.



الشكل (a)

الشكل (b) مخطط الجسم الحر

الحل : ....

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر للعربة كما هو واضح في الشكل (*b*) ، والذي يضم قوة الشد T ، ورد الفعل الكلي للعجلتين الاماميتين N_1 ، ورد الفعل الكلي للعجلتين الخلفيتين N_2 ، بالإضافة الى القوة W والتي يمكننا تحليلها إلى مركبتين باتجاه محوري جملة الاحداثيات المختارة *(x,y)* :

$$W_x = -1000 \sin 30^\circ = -500 \text{ N}$$
$$W_y = -1000 \cos 30^\circ = -866 \text{ N}$$

معادلات التوازن : بما أن القوى المؤثرة في العربة بحالة توازن ، لذا نستطيع أن نكتب معادلات التوازن الاتية :

$$\Sigma F_x = T - 500 = 0$$
$$\Sigma F_y = N_1 + N_2 - 866 = 0$$
$$\Sigma M_A = -N_2 (1) + 866 (0.5) + 500 (0.6) - T (0.6) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن : $T = 500 \text{ N} \ ; \ N_1 = N_2 = 433 \text{ N}$

3– توازن جملة أجسام مركبة (Equilibrium of Compound Bodies) :

في حالة اتصال جملة من الأجسام الصلبة فيما بينها يمكننا تقسيم القوى التي تؤثر في هذه الجملة إلى مجموعتين :

- قوى داخلية : وهي القوى التي تجعل أجزاء الجملة المفروضة متماسكة ، أو بتعبير آخر هي قوى التأثير المتبادل بين الأجزاء المتماسكة . وحسب قانون الفعل ورد الفعل : إذا أثّر جسم في جسم آخر فإن قوتي الفعل ورد الفعل تكونان متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه .
- قوى خارجية : وهي القوى التي تؤثر بها الأجسام الخارجية في أجزاء الجملة المفروضة.

وحسب شكل الاتصال بين الأجزاء الداخلة في تركيب جمل الأجسام المركبة يمكن التمييز بين الأنواع الآتية في التطبيقات الهندسية :

1. الأجزاء الداخلة في تركيب المجموعة يستند بعضها إلى بعض بشكل حر.
2. الأجزاء الداخلة في تركيب المجموعة يتصل بعضها مع بعض بمساعدة مفاصل.

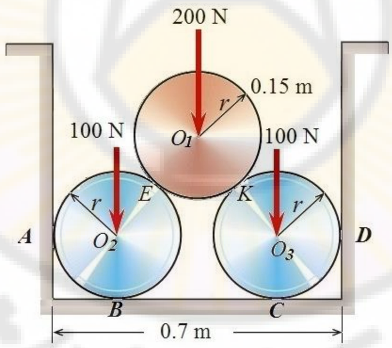
عند حل المسائل المتعلقة بتوازن جملة من الأجسام المركبة من الضروري مراعاة أن جميع القوى الداخلية والخارجية المؤثرة في كل جسم متوازنة . وبناءً على ذلك يمكن كتابة ثلاث معادلات توازن لكل جسم من أجزاء الجملة المفروضة .

إذا كانت الجملة مؤلفة من جسمين مثلاً فإننا نقوم بفصلهما ونرسم مخطط الجسم الحر لكل منهما ونستطيع عندئذ كتابة ثلاث معادلات توازن لكل جسم . ويمكننا استخدام طريقة أخرى أكثر بساطة وذلك بدراسة توازن كامل الجملة المفروضة دون تفكيك ثم ندرس بعد ذلك توازن أحد جسمي الجملة فنحصل أيضاً على ست معادلات توازن. تقدّم الأمثلة الآتية شرحاً وافياً عن كيفية دراسة توازن جملة من الأجسام المتماسكة عندما تكون تحت تأثير جملة قوى عامة متفرقة .

مثال رقم (17)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات متجانسة ، أنصاف أقطارها متساوية وأوزانها موضحة في الشكل .
والمطلوب : ارسم مخطط الجسم الحر للكرات الثلاث معاً ، وكذلك مخطط الجسم الحر لكل كرة ، ثم أوجد :

1. ضغط الكرة العليا على الكرتين السفليتين في نقطتي التماس E وK.
2. رد فعل الصندوق في نقطتي الاستناد A وB .



الحل : ....

يبين الشكل (a) مخطط الجسم الحر للكرات الثلاث معاً ، والذي يضم القوى الآتية :

- أوزان الكرات الثلاث : $W_1=200\ N$, $W_2=100\ N$, $W_3=100\ N$
- ردود الافعال R_A, R_B, R_C, R_D في نقاط التماس بين الكرتين السفليتين والصندوق.

كما توضح الأشكال (b) و(c) و(d) مخطط الجسم الحر لكل كرة من الكرات الثلاث.

الكرة العليا : بما أن هذه الكرة في حالة توازن تحت تأثير ثلاث قوى فقط ، لذا فإن خطوط تأثيرها يجب أن تتقاطع في نقطة واحدة ، وهي مركز الكرة . واستناداً إلى مخطط الجسم الحر لهذه الكرة ، نستطيع كتابة معادلات التوازن على النحو الآتي :

$$\Sigma F_x = R_1.\cos 48.2^\circ - R_2.\cos 48.2^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1.\sin 48.2^\circ - R_2.\sin 48.2^\circ - 200 = 0$$

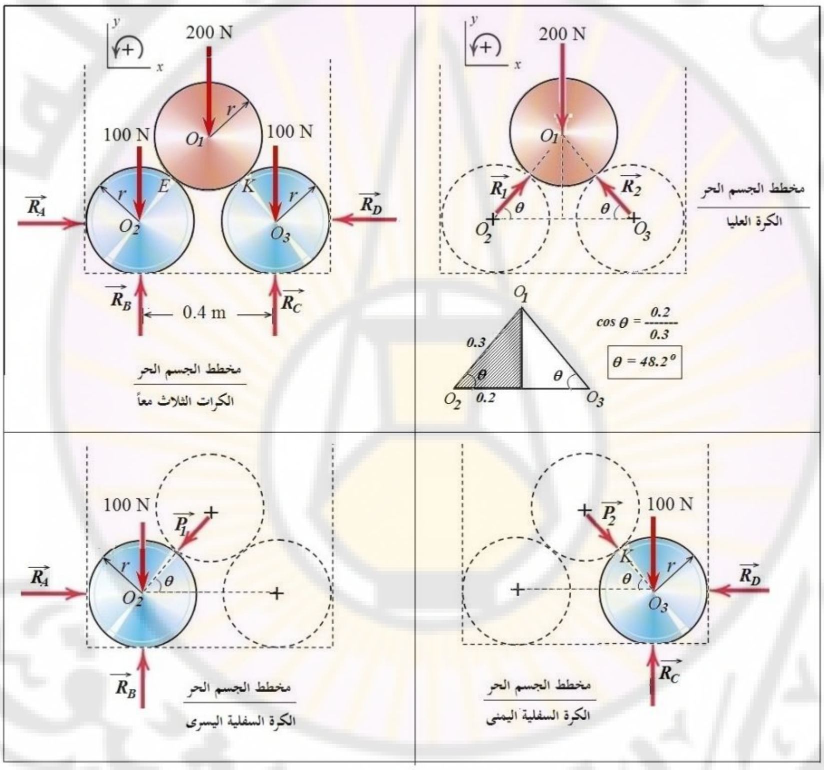
من هاتين المعادلتين نحصل على ردي فعل الكرتين السفليتين في نقطتي التماس مع الكرة العليا :

$$R_1 = R_2 = 134.2 \text{ N}$$

وحسب مبدأ الفعل ورد الفعل فإن قوتي ضغط الكرة العليا على الكرتين السفليتين تساويان بالمقدار ردي فعل الكرتين السفليتين ، بينما تؤثران في الاتجاه المعاكس لهما.

الكرة السفلية اليسرى : نلاحظ أن هذه الكرة في حالة توازن تحت تأثير أربع قوى ، كما هو واضح في مخطط الجسم الحر لهذه الكرة . واستناداً إلى هذا المخطط نكتب معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_x = R_A - 134.2 \cos 48.2^\circ = 0$$
$$\Sigma F_y = R_B - 100 - 134.2 \sin 48.2^\circ = 0$$

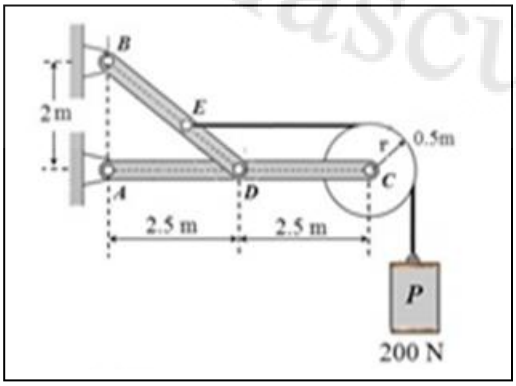


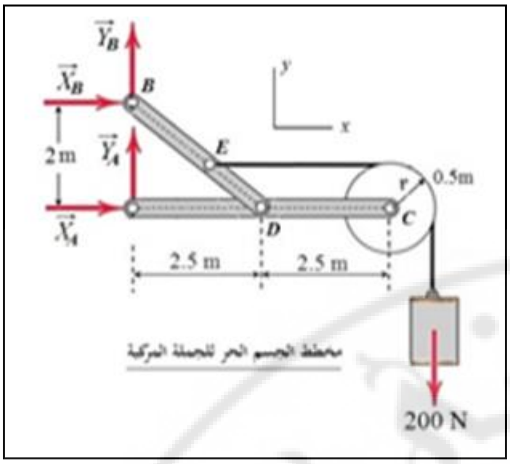
من هذه المعادلات ينتج أن :

$$R_A = 89.44 \text{ N} \; ; \; R_B = 200 \text{ N}$$

مثال رقم (18)

تتكون الرافعة المبينة في الشكل من ذراعين وبكرة ترتبط فيما بينها بوساطة مفاصل وحبل . المطلوب تعيين القوى المؤثرة في كل عضو من أعضاء الرافعة إذا علمت أن مقدار الحمل المرفوع **P** يساوي 200 N .





الحل : ....

ندرس توازن الرافعة بالكامل ، ولهذا نرسم مخطط الجسم الحر لمجمل الرافعة باعتبارها قطعة واحدة كما هو واضح في الشكل ، ثم نكتب معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_x = X_A + X_B = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + Y_B - 200 = 0$$
$$\Sigma M_A = -X_B (2) - 200 (5.5) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

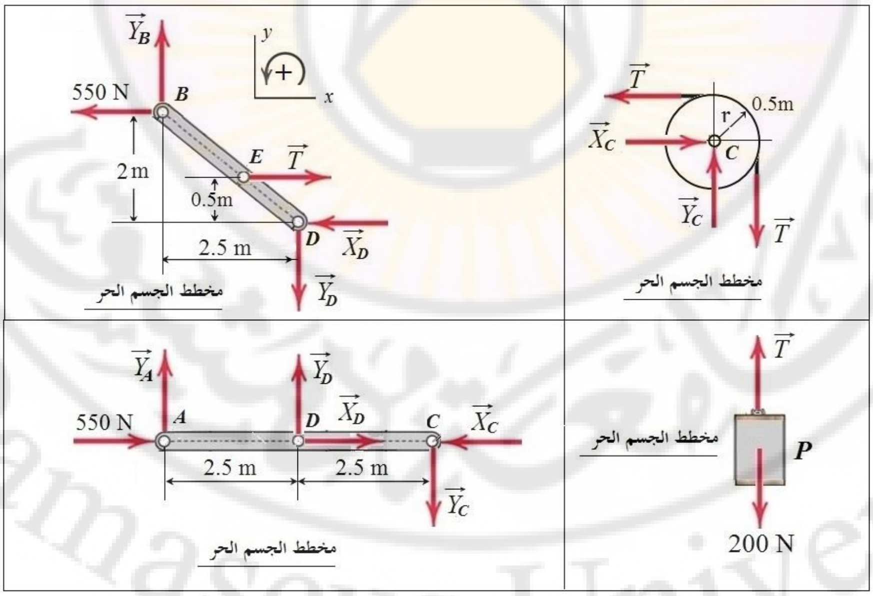
$$X_A = 550 \text{ N} \quad X_B = -550 \text{ N}$$

في الخطوة الثانية نقوم بتفكيك الرافعة ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عضو من أعضاء الرافعة كما هو واضح في الشكل .

البكرة : ندرس توازن البكرة التي تخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص بها . لهذا نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_C - 200 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_C - 200 = 0$$

من هاتين المعادلتين نحصل على الآتي : $X_C = Y_C = 200 \text{ N}$



الذراع الأفقي AC : ندرس توازن هذا الذراع الذي يخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص به . لهذا نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_D + 550 - 200 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + Y_D - 200 = 0$$
$$\Sigma M_C = Y_D (2.5) - 200 (5) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

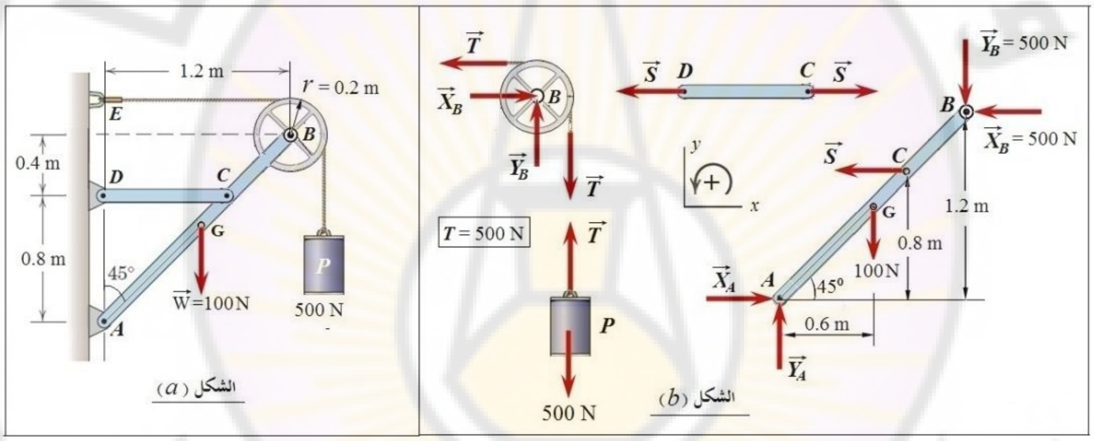
$$X_D = -350\ N\ ;\ Y_D = 400\ N\ ;\ Y_A = -200\ N\ ;\ Y_B = 400\ N$$

تشير الإشارة السالبة للقوة إلى أن الاتجاه الفعلي لها هو عكس الاتجاه المفروض في الرسم. نلاحظ أخيراً أن القوى المؤثرة في جميع أعضاء الرافعة قد أصبحت معلومة ويمكن ترتيبها في الجدول الآتي :

القوى المؤثرة في أجزاء الرافعة بوحدة N							
X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C	X_D	Y_D
550	-200	-550	400	200	200	350	400

مثال رقم (19)

تتكون الرافعة المبينة في الشكل (a) من الذراعين AB و CD ، بالإضافة الى مجموعة البكرة والحبل . فإذا كان وزن الذراع المتجانس AB يساوي 100N ، وكان مقدار الحمل المرفوع 500N ، فأوجد عندئذ القوى المؤثرة في كل عضو من أعضاء الرافعة إذا علمت أن الذراع الأفقي CD مهمل الوزن .



الحل : ....

مخططات الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر لكل عضو من أعضاء الجملة كما هو واضح في الشكل (b) ، مع ملاحظة أن قوة الشد T المتولدة في الحبل تساوي إلى مقدار الحمل المرفوع P ، وأن الذراع CD في حالة اتزان تحت تأثير قوتين فقط .

معادلات التوازن : نبدأ بدراسة توازن البكرة B ، وذلك بتطبيق معادلتي التوازن الآتيتين:

$$\Sigma F_x = X_B - 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_B = 500\ N$$
$$F_y = Y_B - 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B = 500\ N$$

ثم ندرس توازن الذراع AB ، وذلك بتطبيق معادلات التوازن الثلاث :

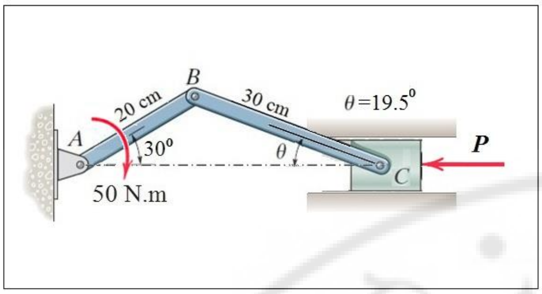
$$\Sigma F_x = X_A - S - 500 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A - 500 - 100 = 0$$
$$\Sigma M_A = S\,(0.6) + 500\,(1.2) - 500\,(1.2) - 100\,(0.6) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن : $X_A = 575\ N\ ;\ Y_A = 600\ N\ ;\ S = 75\ N$

وهكذا أصبحت جميع القوى المؤثرة في أعضاء الجملة معلومة قيمة واتجاهاً .

مثال رقم (20) الفصل الثاني : توازن القوى المستوية

تتكون الجملة المركَّبة المبينة في الشكل من العمود AB وذراع التوصيل BC والمكبس C . فإذا طبقنا على العمود عزم قدره 50N.m ، فأوجد في وضع توازن المجموعة مقدار القوة **P**.



الحل :

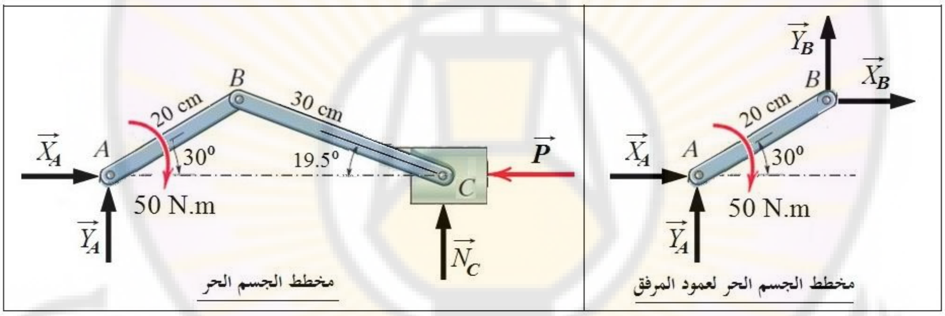
....

نبدأ الحل بدراسة توازن الجملة بالكامل، ولهذا نرسم مخطط الجسم الحر كما هو واضح في الشكل، ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\sum F_x = X_A - P = 0 \quad ; \sum F_y = Y_A + N_C = 0$$

$$\sum M_A = -50 + N_C(0.2\cos 30° + 0.3\cos 19.5°) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج : $Y_A = -\ 110$ N , $N_C = 110$ N



العمود AB : نرسم مخطط الجسم الحر لهذا العمود ثم نكتب معادلة التوازن الاتية :

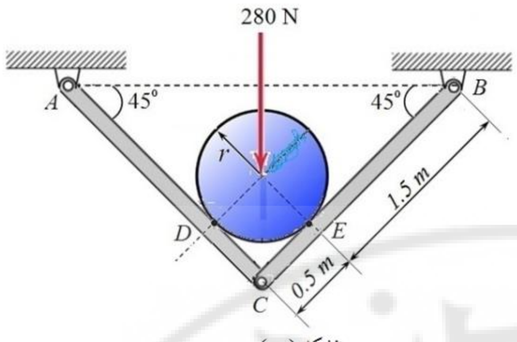
$$\sum M_B = -50 + X_A(0.2\sin 30°) + 109.7\ (0.2\cos 30°) = 0$$

من هذه المعادلة نحصل على القوة المطلوبة وتساوي إلى :

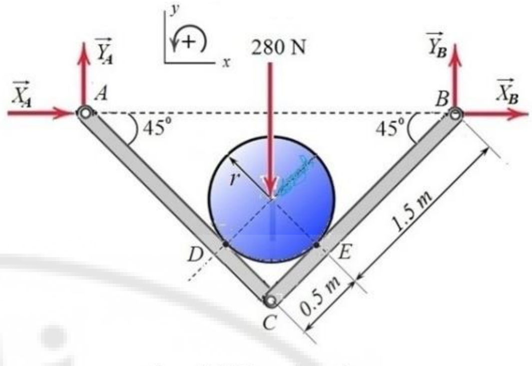
$$P = X_A = 310\ N$$

مثال رقم (21)

كرة متجانسة وزنها 280N ، وضعت بين ذراعين متماثلين ومتعامدين ، ومتصلين اتصالاً مفصلياً في النقطة C كما هو موضح في الشكل (a) . المطلوب تعيين القوى المؤثرة في كل عضو من أعضاء هذه الجملة المركبة .



الشكل (a)



الشكل (b) : مخطط الجسم الحر

الحل : ....

ندرس توازن الجملة بالكامل ، ولهذا نرسم مخطط الجسم الحر باعتبارها قطعة واحدة كما هو واضح في الشكل (b)، ثم نكتب معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_x = X_A + X_B = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + Y_B - 280 = 0$$
$$\Sigma M_A = Y_B\,(4\cos 45) - 280\,(2\cos 45) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

$$Y_A = Y_B = 140 \text{ N}$$

في الخطوة الثانية نقوم بتفكيك المجموعة ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عضو من أعضاءها كما هو واضح في الشكل .

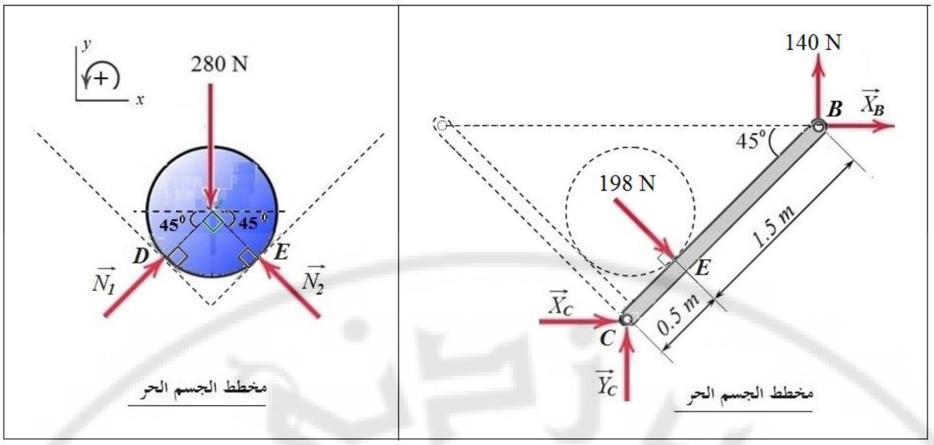
الكرة : ندرس توازن الكرة التي تخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص بها . لهذا نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = N_1.\cos 45 - N_2.\cos 45 = 0$$
$$\Sigma F_y = N_1.\sin 45 - N_2.\cos 45 - 280 = 0$$

من هاتين المعادلتين نحصل على : $N_1 = N_2 = 198 \text{ N}$

الذراع AC : ندرس توازن هذا الذراع الذي يخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص به . لهذا نكتب معادلات التوازن:

$$\Sigma F_x = X_B + X_C + 198\cos 45 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_C + 140 - 198\sin 45 = 0$$
$$\Sigma M_C = X_B\,(1.41) + 140\,(1.41) - -198\,(0.5) = 0$$



من هذه المعادلات ينتج :

$$X_B = 70\ N\ ;\ X_C = -210\ N\ ;\ Y_C = 0$$

تشير الإشارة السالبة للقوة إلى أن الاتجاه الفعلي لها هو عكس الاتجاه المفروض في الرسم. نلاحظ أخيراً أن القوى المؤثرة في جميع أعضاء المجموعة قد أصبحت معلومة ويمكن ترتيبها في الجدول الآتي :

القوى المؤثرة في أجزاء الجملة المركبة بوحدة N							
X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C	P1	P2
-70	140	70	140	210	0	198	198

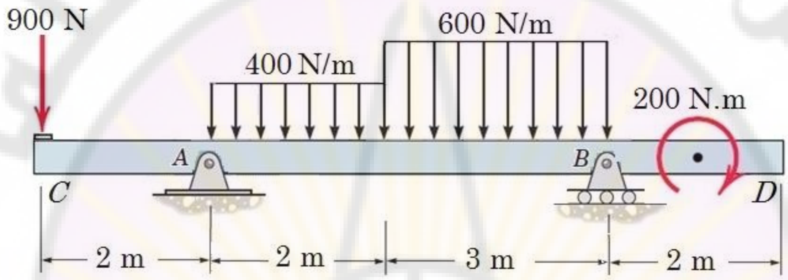
☺☺☺☺☺☺☺

مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

يرتكز الجائز البسيط CD المبين في الشكل المجاور على المسند المفصلي الثابت A من جهة ، وعلى المسند المتحرك B من جهة أخرى .كما أن هذا الجائز يخضع لتأثير عزم مقداره 150 N.m ، بالاضافة الى مجموعة من القوى الموزعة والمركزة .والمطلوب : أوجد ردي فعل المسندين A و B .

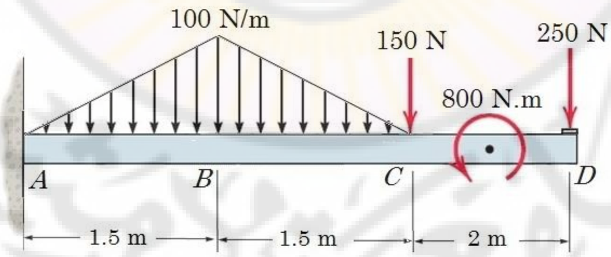
الجواب : $R_B = 1100$ N (↑) $R_A = 2400$ N (↑)



مسألة رقم (2) :

يثبت الجائز الكابولي AD المبين في الشكل في الحائط ، ويخضع لتأثير عزم خارجي مقداره 800 N.m ، بالإضافة الى مجموعة من القوى الموزعة والمركزة .والمطلوب : أوجد قوة رد فعل المسند الصلب A . الجواب :

$M_A = 1100$ N.m (↶) $R_A = 700$ N (↑)

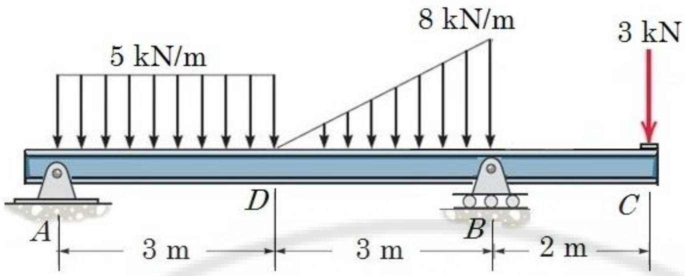


مسألة رقم (3) :

يرتكز الجائز البسيط AC المبين في الشكل المجاور على المسند المفصلي الثابت A من جهة ، وعلى المسند المتحرك B من جهة أخرى .كما أن هذا الجائز يخضع لتأثير مجموعة من القوى الموزعة والمركزة .والمطلوب :

أوجد ردي فعل المسندين A و B .

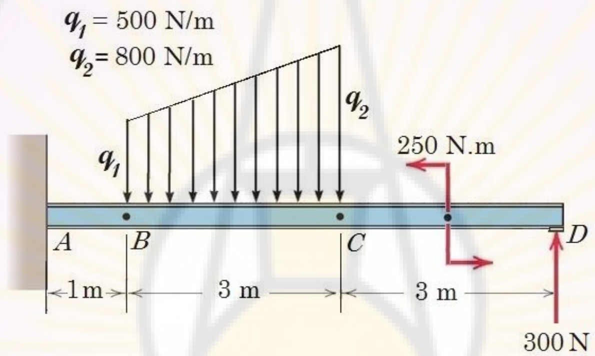
الجواب : $R_B = 16.75$ kN(↑) $R_A = 13.25$ kN(↑)



مسألة رقم (4) :

يثبت الجائز الكابولي AD المبين في الشكل في الحائط ، ويخضع لتأثير عزم خارجي مقداره 250 N.m ، بالإضافة الى مجموعة من القوى الموزعة والمركزة .والمطلوب : أوجد قوة رد فعل المسند الصلب A .

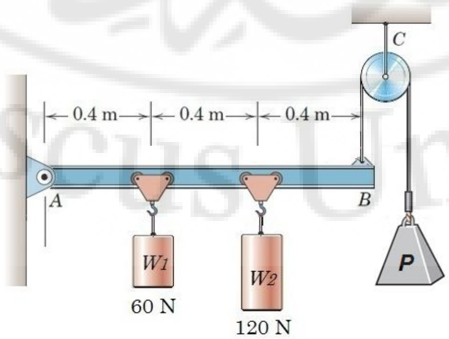
الجواب : $R_A = 2400$ N(↑) , $M_A = 5000$ N.m (↶) ,



مسألة رقم (5) :

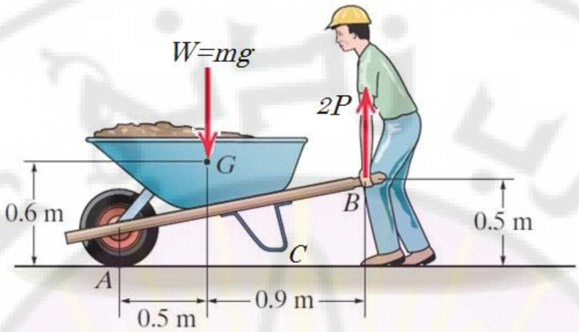
يُثبَّت الجائز AB تثبيتاً مفصلياً في المسند A ، ويربط في النقطة B بحبل يلتف على بكرة مهملة الاحتكاك ، ويحمل في نهايته الثقل P كما هو مبين في الشكل. إذا علمت أن هذا الجائز واقع تحت تأثير كتلتين أوزانهما W_1=60 N وW_2=120 N ، فأوجد في وضع التوازن مقدار الثقل P ، وكذلك رد فعل المسند A .

الجواب : P = 100 N , R_A = 80 N (↑)



مسألة رقم (6) :

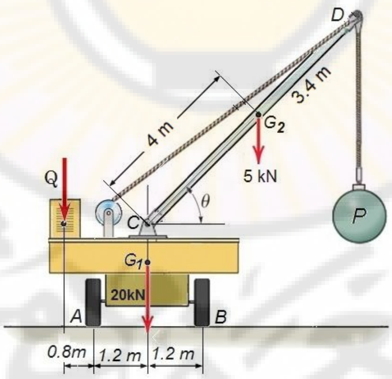
عربة نقل صغيرة كتلتها مع الحمولة $m = 60$ Kg ، ترتكز على مستو أفقي أملس كما هو مبين في الشكل . أوجد في وضع التوازن القوة الشاقولية $\boldsymbol{P}$ ، المؤثرة في كل مقبض، والضرورية لرفع الجزء الخلفي من العربة عن سطح الاستناد قبل الشروع في الحركة ، وكذلك احسب رد فعل سطح الاستناد . الجواب : $P = 105$ N , $N_A = 483$ N (↑)



مسألة رقم (7) :

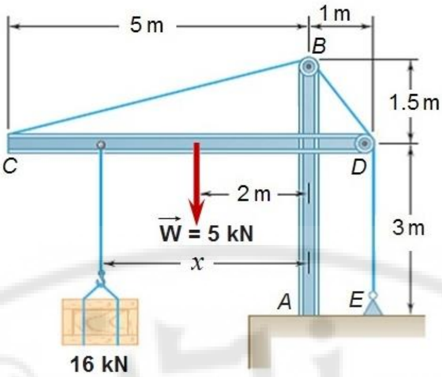
رافعة أثقال تسير على عجلات . فإذا كان وزنها يساوي 20 kN ، وكان وزن الحامل المتحرك CD يساوي 5 kN كما هو مبين في الشكل ، فأوجد في الوضع الموافق للزاوية $\theta=60°$ الآتي : القيمة الدنيا لثقل الموازنة المعاكس Q ، وكذلك القيمة العظمى للحمل المرفوع P ، بحيث لا تنقلب الرافعة ، سواء كانت محمّلة او غير محمّلة .

الجواب : $Q_{min} = 50$ kN , $P_{max} = 72$ kN



مسألة رقم (8) :

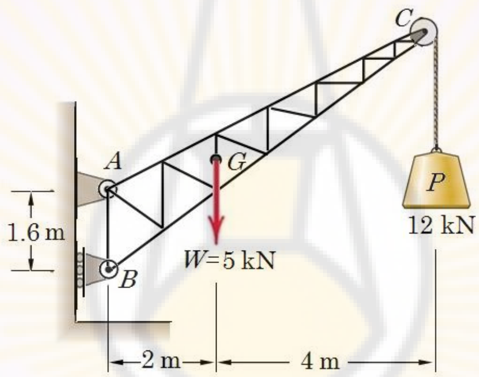
رافعة مخصصة لرفع الأثقال ، وزنها 5 kN ، وتتكون من عارضتين ملحومتين وكبل ، وترفع حملاً مقداره 16 kN كما هو مبين في الشكل . والمطلوب : أوجد مركبات ردّ فعل المسند الصلب ، إذا علمت أنّ المسافة x = 3m ، وأنّ قوة الشد المتولدة في الكبل تساوي 20 kN . الجواب : $R_A = 41$ kN(↑) M_A = (↶) 38 kN.m



مسألة رقم (9) :

رافعة شبكية ، وزنها W=5 kN ، تُثبَّت تثبيتاً مفصلياً بالمسند الثابت A من جهة ، وبالمسند المتحرك B من جهة أخرى كما هو موضح في الشكل المجاور . إذا علمت أن مقدار الحمل المرفوع P يساوي 12 kN ، فأوجد ردي فعل المسندين A و B .

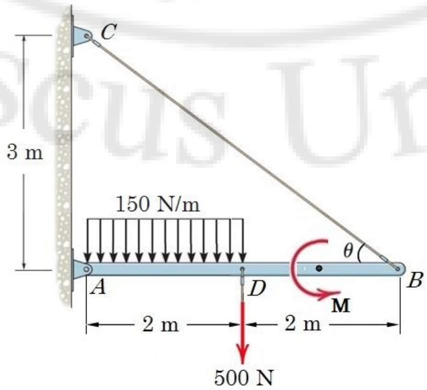
الجواب : $X_A = 51.25$ kN(←) , $Y_A = 17$ kN(↑) , $R_B = 51.25$ kN(→)



مسألة رقم (10) :

يُثبَّت الجائز AB تثبيتاً مفصلياً في النقطة A ، ويحتفظ بوضعه الافقي باستخدام الحبل BC المربوط بالحائط كما في الشكل المجاور . يُؤثِّر في هذا الجائز حمل وزنه 500N عند النقطة D ، بالإضافة الى قوى موزعة بانتظام ، ومزدوجة عزمها M=400 N.m .أوجد ردّ فعل المسند المفصلي الثابت A ، وكذلك قوة الشد المتولدة في الحبل .

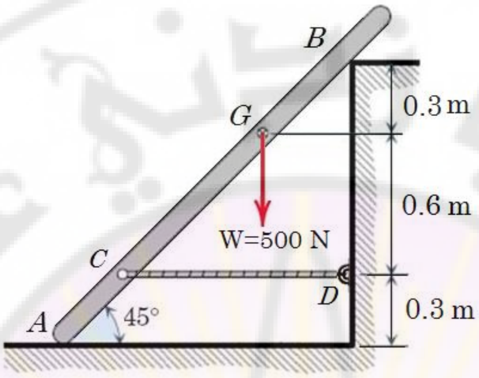
الجواب : $X_A = 300$ N (→) , $Y_A = 575$ N (↑) , $T = 375$ N



مسألة رقم (11) :

عارضة AB وزنها W=500 N ، يرتكز طرفها A على أرض أفقية ملساء ، بينما ترتكز عند النقطة B على حافة حادة كما في الشكل المجاور . والمطلوب : أوجد في وضع التوازن المبين : ردّ فعل السطح الافقي الاملس ، ورد الفعل في النقطة B ، وكذلك قوة الشد المتولدة في الحبل الافقي CD.

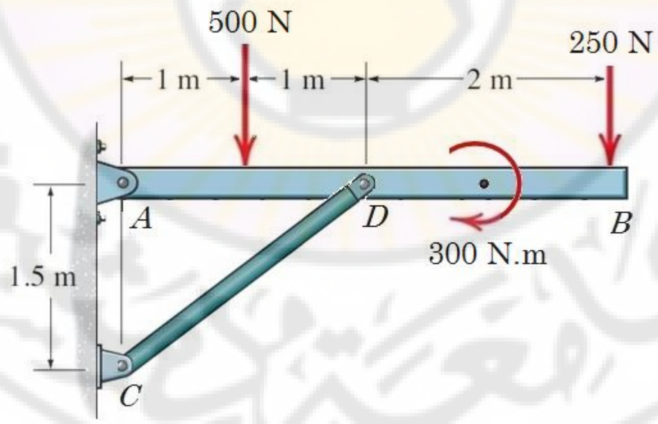
الجواب : $R_A = 286.5\ N\ (\uparrow)$, $R_B = 302\ N\ (\nwarrow)$, $T = 213.5\ N\ (\rightarrow)$



مسألة رقم (12) :

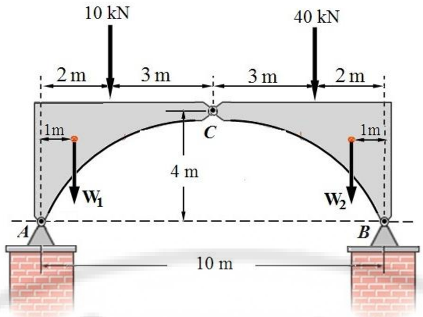
يُثبَّت الجائز AB تثبيتاً مفصلياً في النقطة A ، ويحتفظ بوضعه الافقي باستخدام القضيب المائل CD كما في الشكل المجاور . تؤثّر على هذا الجائز قوتان شاقوليتان ومزدوجة عزم دورانها 300 N.m . أوجد ردّ فعل المسند المفصلي الثابت A ، وكذلك رد الفعل في المفصل D .

الجواب : $X_A = 1200\ N\ (\leftarrow)$, $Y_A = 150\ N\ (\downarrow)$, $R_D = 1500\ N\ (\nearrow)$



مسألة رقم (13) :

يتكون الجسر الموضح في الشكل المجاور من هيكلين متماثلين وزن كل منهما يساوي W=130 kN . اذا كان هذا الجسر تحت تأثير مجموعة من القوى ، والمطلوب : ارسم مخطط الجسم الحر لكل من الهيكلين ، ثم أوجد ردود الافعال في المسندين A و B والمفصل C.



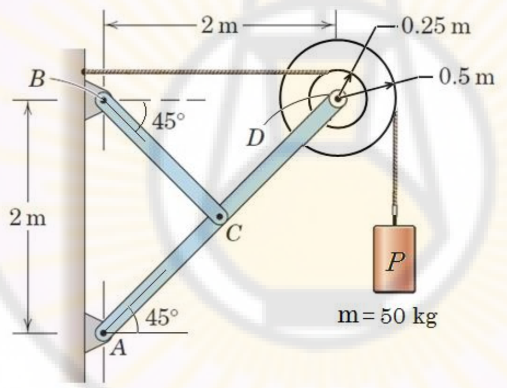
مسألة رقم (14) :

تَتَكوَّن الرافعة البسيطة الموضحة في الرسم من الذراعين المتعامدين AD وBC ، بالإضافة الى بكرة ثنائية يلتف عليها زوج من الحبال أحدهما أفقي والآخر شاقولي . أوجد رد الفعل في المفصل A والقوة الداخلية S المتولدة في الذراع BC بفعل الحمل المرفوع P ، إذا كانت كتلته m=50 kg ، وأن تسارع الجاذبية الارضية : $g=9.8\ m/s^2$.

الجواب :

X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
36	146	-36	164	36	6 kN

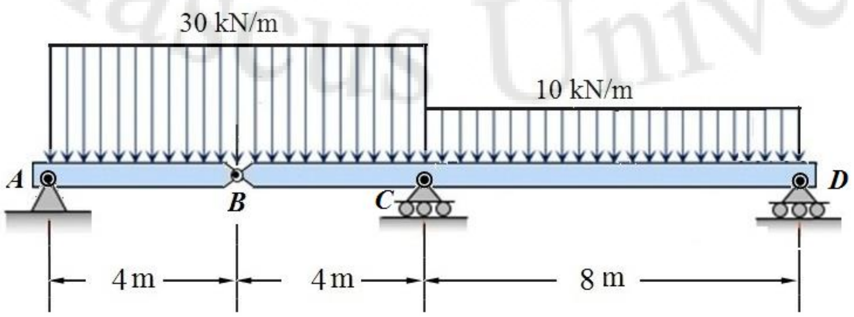
الجواب : $X_A = 490$ N (←) , $Y_A = 980$ N (↓) , S = 693 N



مسألة رقم (15) :

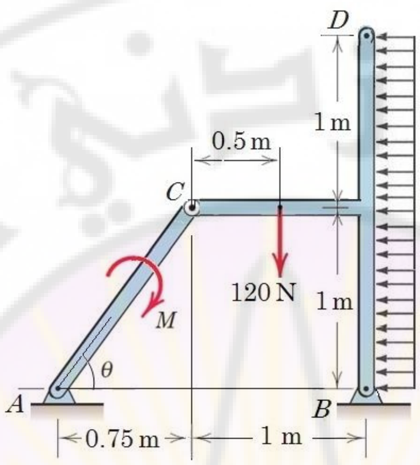
يتكون الجسر AD الموضح في الشكل المجاور من جائزين متصلين معاً من خلال المفصل B ، ويخضع لتأثير مجموعة من القوى الموزعة . والمطلوب: ارسم مخطط الجسم الحر لكل من الهيكلين ،ثم أوجد ردود الافعال في المساند المفصلية : A و C و D .

الجواب : $R_A = 60$ kN (↑) , $R_C = 280$ kN (↑) , $R_D = 20$ kN (↓)



مسألة رقم (16) :

تتألف الجملة المركَّبة الموضحة في الشكل المجاور من الذراع المائل AC والاطار القائم BCD ، وتخضع لتأثير مزدوجة عزمها M=225 N.m ، وعدّة قوى خارجية . والمطلوب: أوجد المركبات القائمة لردود الافعال في المسندين A و B والمفصل C.

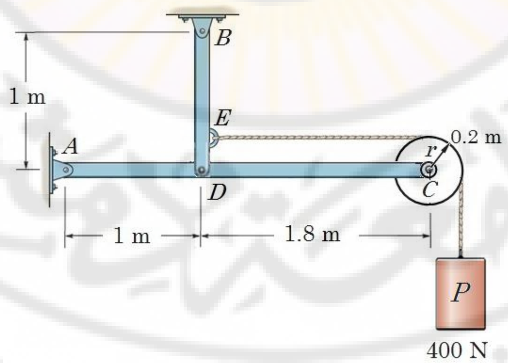


الجواب :

X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
240 N(→)	20 N(↑)	40N(←)	100 N(↑)	240 N	20 N

مسألة رقم (17) :

تتكون الرافعة المبينة في الشكل من ذراعين متعامدين وبكرة ترتبط فيما بينها بوساطة مفاصل وحبل. أوجد القوى المؤثرة في المساند المفصلية الثابتة A و B و C ، إذا علمت أن مقدار الحمل المرفوع **P** يساوي 400 N .

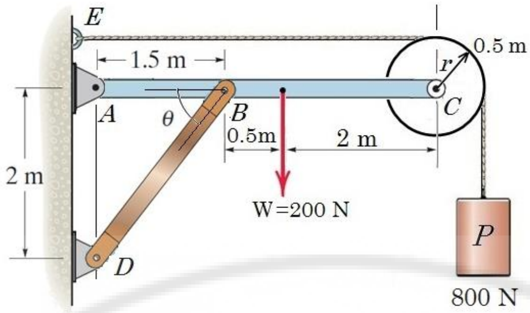


الجواب:

X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
80 N(→)	720 N(↓)	80N(←)	1120 N(↑)	400 N	400 N

مسألة رقم (18) :

تتكون الرافعة المبينة في الشكل من ذراعين وبكرة يلتف عليها حبل ، حيث تتصل فيما بينها اتصالياً مفصلياً . أوجد القوى المؤثرة في الذراع الأفقي المتجانس AC ، إذا علمت أن وزنه W=200 N ، وأن مقدار الحمل المرفوع P = 800 N .

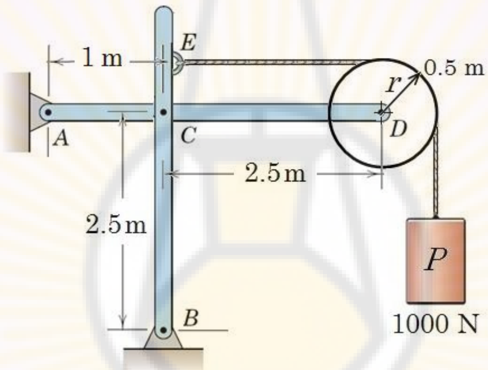


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	X_C	Y_C
1000 N(←)	1400 N(↓)	3000 N(↗)	800 N	800 N

مسألة رقم (19) :

تتكون الرافعة المبينة في الشكل من ذراعين متعامدين ، وبكرة يلتف عليها حبل ، حيث تتصل فيما بينها اتصالياً مفصلياً . إذا علمت أن مقدار الحمل المرفوع P = 1000 N ، فأوجد عندئذ ردود الافعال في المسندين A و B وكذلك في المفصل C .



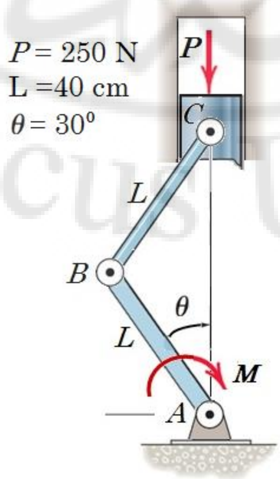
الجواب :

X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
200 N(←)	2500 N(↓)	200N(→)	3500 N(↑)	1200 N	3500 N

مسألة رقم (20) :

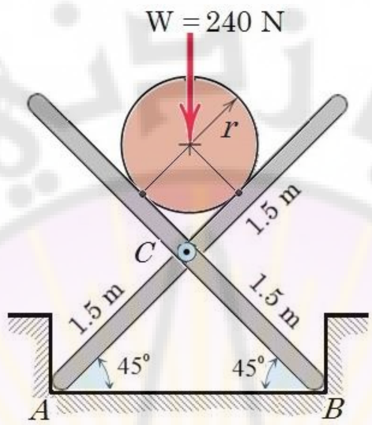
تتكون الجملة المركَّبة المبينة في الشكل من العمود *AB* وذراع التوصيل *BC* والمكبس *C* . فإذا طبقنا على المكبس قوة شاقولية قدرها P=250 N ، فأوجد في وضع التوازن المبيَّن مقدار العزم **M** .

الجواب : M = 100 N.m



مسألة رقم (21) :

وضعت اسطوانة ملساء نصف قطرها r = 0.5m ، ووزنها 240 N ، على عارضتين متصلتين اتصالاً مفصلياً في النقطة C ، وتصنعان زاوية قائمة فيما بينهما كما في الشكل. أوجد المركبات الافقية والشاقولية لردي الفعل في النقطتين A و B ، إذا علمت أن الجملة المكونة من الاسطوانة والعارضتين ترتكز ارتكازاً حراً على سطوح ملساء .

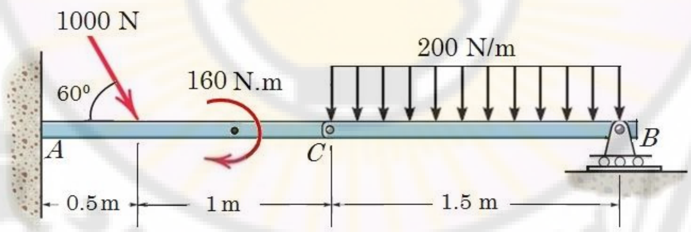


الجواب :

X_A	Y_A	X_B	Y_B
200 N(→)	120 N(↑)	200N(←)	120 N(↑)

مسألة رقم (22) :

جائز مُركَّب (Split beam) يتألف من جزأين متصلين اتصالاً مفصلياً في النقطة C ، ويتعرض لجملة القوى المبينة في الشكل . والمطلوب : أوجد رد فعل المسند الصلب الثابت A ، وكذلك رد فعل المسند المتحرك B .

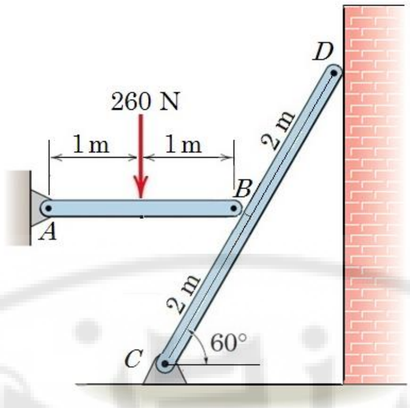


الجواب :

X_A	Y_A	M_A	R_B
500 N(←)	716 N(↑)	818N(↶)	150 N(↑)

مسألة رقم (23) :

عارضتان AB وCD ، تستند احداهما الى الاخرى عند النقطة B بشكل حر كما في الشكل المجاور. باهمال وزن العارضتين ، اوجد ردود الافعال في المساند A وC و D ، اذا وقعت هذه الجملة تحت تأثير قوة شاقولية قدرها 260 N .

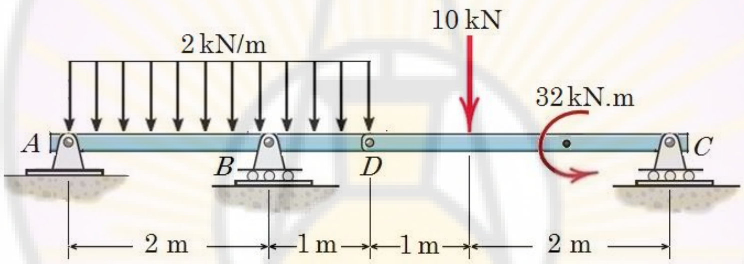


الجواب :

X_A	Y_A	X_C	Y_C	R_D
112.6 N(→)	195 N(↑)	37.6 N(←)	65 N(↑)	75 N(←)

مسألة رقم (24) :

جائز مُركَّب (Split beam) يتألف من جزأين متصلين اتصالاً مفصلياً في النقطة D ، ويتعرض لجملة القوى المبينة في الشكل . والمطلوب : أوجد ردود الافعال في الثلاثة : A و B و C .



الجواب :

R_A	R_B	R_C
818N(↑)	818N(↑)	150 N(↑)

الفصل الرابع

تحليل الهياكل الشبكية

ANALYSIS 0F TRUSSES

1- مقدمة (Introduction).
2- طريقة فصل العقد (Method of joints) .
3- طريقة قطع الهيكل (Method of sections).

1- مقدمة (Introduction) :

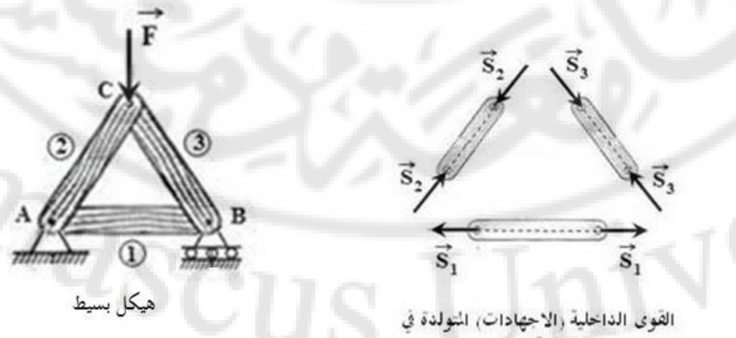
يتناول هذا الفصل الهياكل الشبكية الواقعة في مستو واحد ، والتي تسمى أيضاً بالجوائز الشبكية المستوية . يُعرَّف الهيكل أو الجائز الشبكي المستوي بأنه جملة من القضبان الواقعة في مستو واحد والمتصلة نهاياتها بمسامير (Pins) أو بصفائح (Plates) تُثبَّت إليها تلك القضبان .وتدعى هذه القضبان في المراجع الحديثة بأعضاء أو أضلاع الهيكل (Members of the truss) ، كما تدعى مسامير أو صفائح ربط القضبان عادة بالعقد (Joints). إن الهياكل الشبكية كثيرة الانتشار في حياتنا فهي تشاهد كما هو واضح في الشكل(3-1) في الأبراج الحاملة لخطوط التوتر العالي، والجسور ، وأبراج الاتصالات بشتى أنواعها ، والروافع الشبكية الكبيرة ، وفي سقوف المنازل والمعامل والمستشفيات ومراكز التسوق والصالات الرياضية وغيرها . ومن الشائع عملياً في دراسة توازن الهياكل الشبكية أن تراعى الافتراضات الآتية :

- إن نهايات الأضلاع في الهيكل متصلة بمسامير عديمة الاحتكاك .
- إن القوى الخارجية المؤثرة في الهيكل كلها مطبّقة على العقد فقط وهي واقعة في مستوي الهيكل الشبكي .
- أوزان الأضلاع تكون عادة صغيرة مقارنة بالحمولات الخارجية المطبقة على الهياكل الشبكية لهذا فهي لا تُحتسب . وبناءً على ذلك تؤثر في كل ضلع من أضلاع الهيكل قوتان عند نهايتيه ، وفي حالة التوازن يجب أن تكون هاتان القوتان متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه ولهما نفس الحامل المنطبق على محور الضلع. ومنه نستنتج أن أضلاع الهياكل الشبكية تتعرض عند العمل للشدّ (Tension) أو الانضغاط (Compression) كما هو مبين في الشكل (3-2).

الشكل(3-1)

وسنكتفي في هذا الفصل بدراسة الهياكل المتماسكة المكونة من مثلثات والتي لا تحتوي على أضلاع إضافية والتي تسمى بالهياكل المحدّدة ستاتيكياً (Statically determinate trusses) ، ودراستها تعدّ سهلة لأن معادلات التوازن تكفي تماماً لتحديد القوى المجهولة والتي تشمل القوى الداخلية للأضلاع وردود فعل المساند . وفي هذه الهياكل يرتبط عدد الأضلاع m بعدد العقد n بالعلاقة الآتية :

$$m = 2n - 3 \qquad (1)$$



الشكل(3-2)

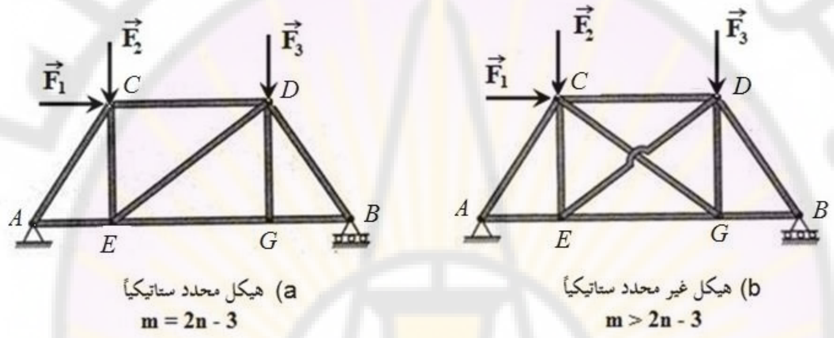
ففي الهيكل البسيط المؤلف من ثلاثة أضلاع توجد فعلاً ثلاث عقد ، ويتطلب الأمر ضلعين لتوصيل كل عقدة جديدة . وإذا قلّ عدد الأضلاع في الهيكل عن الحد المقدر طبقاً للعلاقة السابقة يكون الهيكل عندئذ قلقاً وغير متماسك (Unstable) وقابلاً للانهيار (Collapsible) في أية لحظة تحت تأثير الحمولات المطبّقة . أما إذا

زاد عدد الأضلاع في الهيكل المدروس عن الحد المذكور فإن عدد القوى المجهولة سيكون أكبر من عدد معادلات التوازن ، ويعدّ الهيكل حينئذ كما هو مبين في الشكل(3-3) غير محدّد ستاتيكياً (Statically indeterminate truss) . ويدرس هذا النوع من الهياكل المعقدة في مقررات دراسية أخرى متقدمة .

وتتلخص دراسة توازن الهياكل في تعيين ردود فعل المساند وتحديد القوى المحورية الداخلية المتولدة في الأضلاع بفعل الحمولات الخارجية . ويمكن تعيين ردود فعل المساند بعد اعتبار الهيكل المفروض ككل جسماً صلباً .

ومن ناحية أخرى تتعين القوى المحورية الداخلية المتولدة في الأضلاع بإحدى الطريقتين الآتيتين :

1. طريقة فصل العقد (Method of joints)
2. طريقة قطع الهيكل (Method of sections)



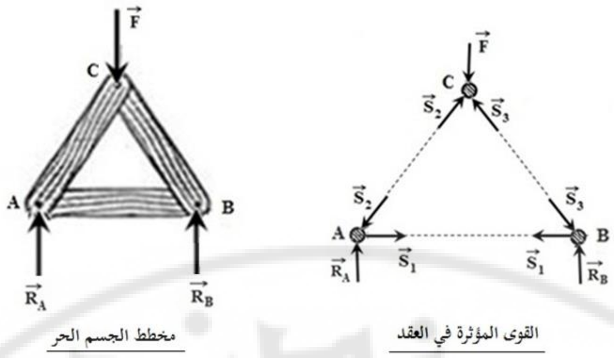
الشكل(3-3)

2- طريقة فصل العقد (Method of joints):

تستخدم هذه الطريقة عادة عند الحاجة لتحديد القوى الداخلية المتولدة في كافة أضلاع الهيكل المفروض. ومن البديهي ، عندما يكون جسم الهيكل بكامله في حالة اتزان فإن مكوناته من عقد وأضلاع ستكون في حالة توازن أيضاً . ومن هنا تنبع فكرة الطريقة الحالية والتي تتلخص في دراسة توازن القوى المتلاقية المؤثرة في كل عقدة من عقد الهيكل . وهذه القوى تتضمن القوى الخارجية وكذلك ردود فعل الأضلاع المتصلة بالعقدة المدروسة كما هو مبين في المثال الموضح في الشكل(3-4) .

ويبدو لنا بوضوح أن تعيين القوى الداخلية بين الأضلاع والعقد يعتمد أساساً على قانون الفعل ورد الفعل . ولذلك فإن العقدة A مثلاً تؤثر في الضلع AB بالقوة S_1، والضلع AB يؤثر من ناحيته بقوة رد فعل مساوية ومعاكسة لها. وبما أن الضلع AB متوازن بفعل قوتين مطبقتين في نهايتيه ، لذا فإن هاتين القوتين متساويتان وكل منهما تساوي للقوة S_1 . إن تعيين القوى الداخلية في أضلاع الهياكل الشبكية بمساعدة طريقة فصل العقد يجري عادة باتباع الخطوات الآتية :

- رسم مخطط الجسم الحر للهيكل كلّه .
- تعيين ردود الفعل للمساند التي يرتكز عليها جسم الهيكل وذلك باستخدام معادلات التوازن المناسبة .

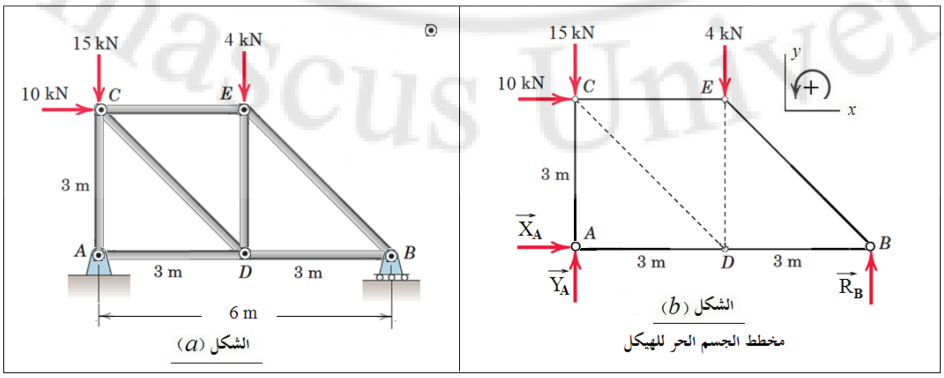


الشكل(3–4)

- رسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل . ويشمل مخطط العقدة القوى الخارجية وقوى رد فعل الأضلاع . وبما أن اتجاهات قوى رد فعل الأضلاع مجهولة لذا سنفرض مبدئياً أن جميع الأضلاع في حالة شدّ ، وبناءً على هذا الفرض تظهر هذه القوى في المخطط خارجة من العقد . إذا حصلنا نتيجة الحل على إشارة موجبة لقوة رد فعل ضلع ما فتوجيه القوة صحيح ويكون الضلع عندئذ في حالة شدّ ، وإذا حصلنا على إشارة سالبة فإن الضلع المدروس في حالة ضغط .
- تطبيق معادلتي التوازن الآتيتين : $\Sigma F_X=0$; $\Sigma F_Y=0$ على كل عقدة من عقد الهيكل وحساب القوى المجهولة .
- ترتيب النتائج في جدول يبين جميع القوى الداخلية المتولدة في أضلاع الهيكل قيمة ونوعاً. ومن الملاحظات المهمة :
  - إذا تلاقت في عقدة غير مُحمّلة ثلاثة أضلاع ، اثنان منها على استقامة واحدة، فالقوة الداخلية في الضلع الثالث تكون معدومة.
  - إذا تلاقى في عقدة غير محملة ضلعان فقط غير واقعين على استقامة واحدة، فالقوتان الداخليتان فيهما تكون معدومة.

مثال رقم (22)

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.



الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن:

$$\sum F_x = X_A + 10 = 0$$

$$\sum F_y = Y_A + R_B - 15 - 4 = 0$$

$$\sum M_A = R_B(6) - 10(3) - 4(3) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$X_A = -10\ kN$, $Y_A = 12\ kN$, $R_B = 7\ kN$

القوى الداخلية في الأضلاع : نفرض أن جميع الأضلاع تقع في حالة شدّ ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل كما هو مبين في الشكل. وبناءً على هذا الافتراض نمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد.

العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

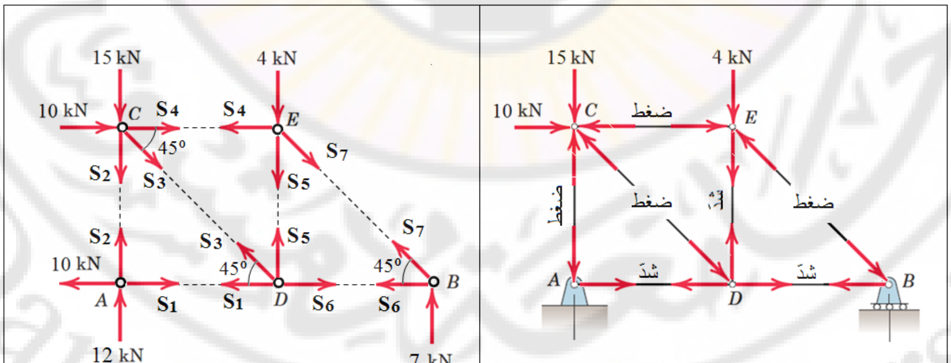
$$\sum F_x = S_1 - 10 = 0$$

$$\sum F_y = S_2 + 12 = 0$$

العقدة C : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\sum F_x = S_3 \cos 45 + S_4 + 10 = 0$$

$$\sum F_y = -S_2 - S_3 \sin 45 - 15 = 0$$



الشكل (C)
مخطط الجسم الحر لعقد الهيكل
الشكل (d)

العقدة D : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\sum F_x = -S_1 - S_3 \cos 45 + S_6 = 0$$

$$\sum F_y = S_3 \sin 45 + S_5 = 0$$

العقدة B : معادلة التوازن لهذه العقدة :

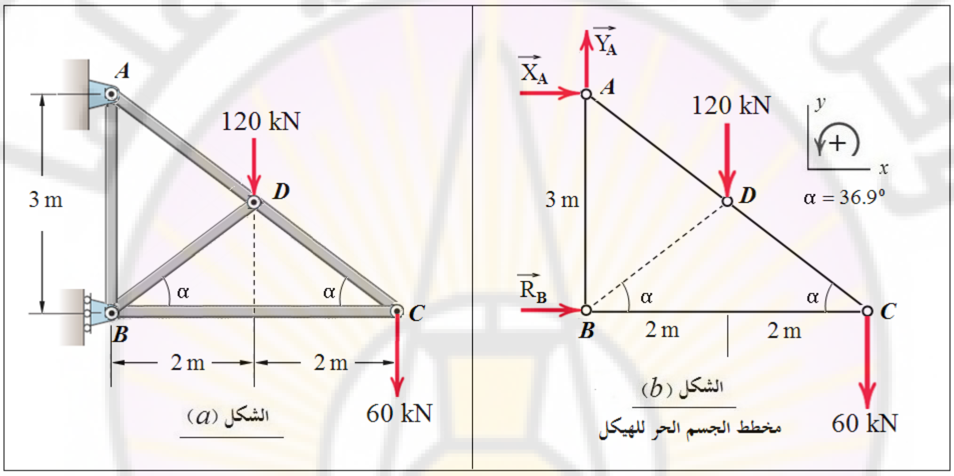
$$\sum F_y = S_7 \sin 45 + 7 = 0$$

بحل المعادلات السابقة نجد القوى المطلوبة الآتية بوحدة (kN):

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
10	- 12	- 4.24	- 7	3	- 9.9	7
شدّ	ضغط	ضغط	ضغط	شدّ	ضغط	شدّ

مثال رقم (23)

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.



الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن:

$$\sum F_x = X_A + R_B = 0$$
$$\sum F_y = Y_A - 120 - 60 = 0$$
$$\sum M_A = R_B(3) - 120(2) - 60(4) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = -160\ \text{N} \quad , \quad Y_A = 180\ \text{N} \quad , \quad R_B = 160\ \text{N}$$

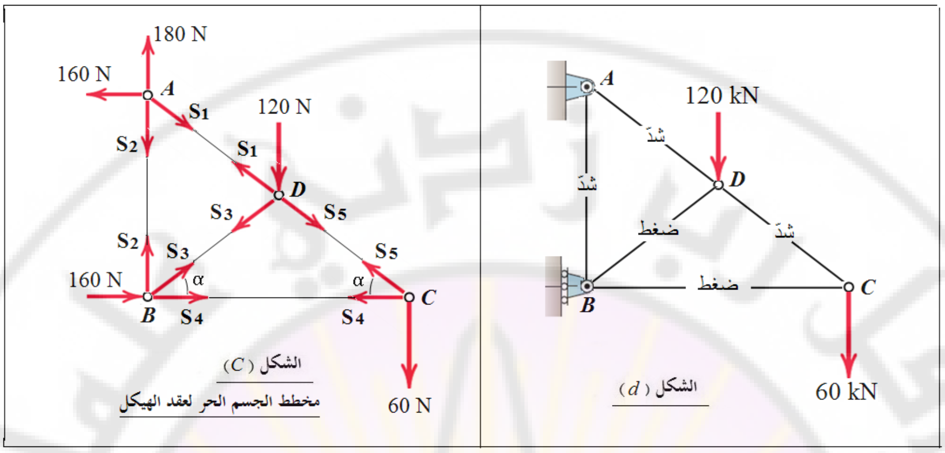
القوى الداخلية في الأضلاع : نفرض أن جميع الأضلاع تقع في حالة شدّ ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل كما هو مبين في الشكل. وبناءً على هذا الافتراض تمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد.

العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\sum F_x = S_1 \cos\alpha - 160 = 0$$
$$\sum F_y = S_2 - S_1 \sin\alpha + 180 = 0$$

العقدة B : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\sum F_x = S_3 \cos\alpha + S_4 + 160 = 0$$
$$\sum F_y = S_2 + S_3 \sin\alpha = 0$$



الشكل (C)
مخطط الجسم الحر لعقد الهيكل

الشكل (d)

العقدة C : معادلة التوازن لهذه العقدة :

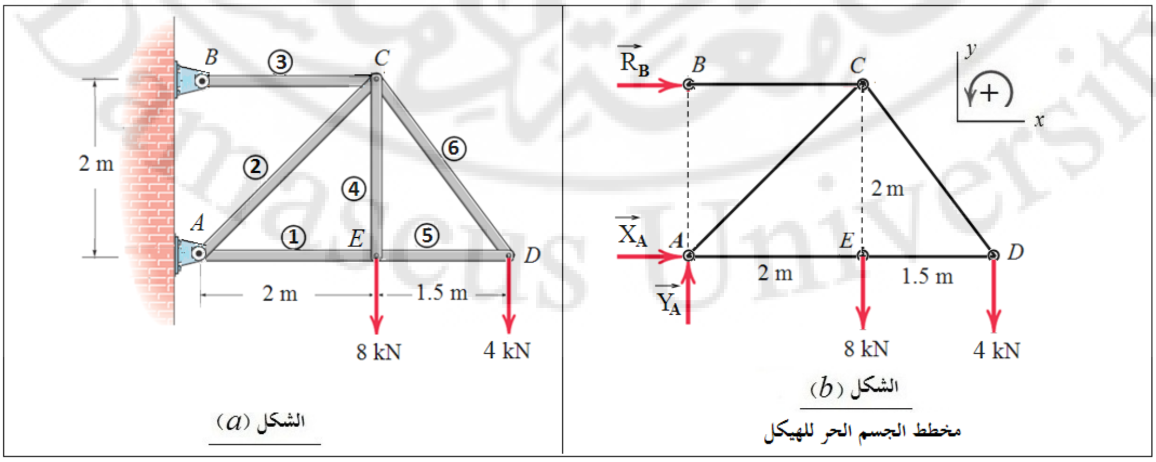
$$\sum F_y = S_5 \sin\alpha - 60 = 0$$

بحل المعادلات السابقة نجد القوى المطلوبة الآتية بوحدة (kN):

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
200	60	- 100	- 80	100
شدّ	شدّ	ضغط	ضغط	شدّ

مثال رقم (24)

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.



الشكل (a)

الشكل (b)
مخطط الجسم الحر للهيكل

الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل بالكامل ،كما هو واضح في الشكل(b) ، ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\sum F_x = X_A + R_B = 0$$
$$\sum F_y = Y_A - 4 - 8 = 0$$
$$\sum M_A = -R_B(2) - 8(2) - 4(3.5) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أنَّ:

$X_A = 15\ kN \quad R_B = -15\ kN \quad , \quad Y_A = 12\ kN$

تدلُّ الاشارة السالبة لقوة ردِّ الفعل R_B الى أن الاتجاه الفعلي لها هو عكس الاتجاه المفروض في الرسم .

القوى الداخلية في الأضلاع : نفرض أن جميع الأضلاع تقع في حالة شدّ ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل كما هو مبين في الشكل. وبناءً على هذا الافتراض تمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد كما هو واضح في الشكل(c).

العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

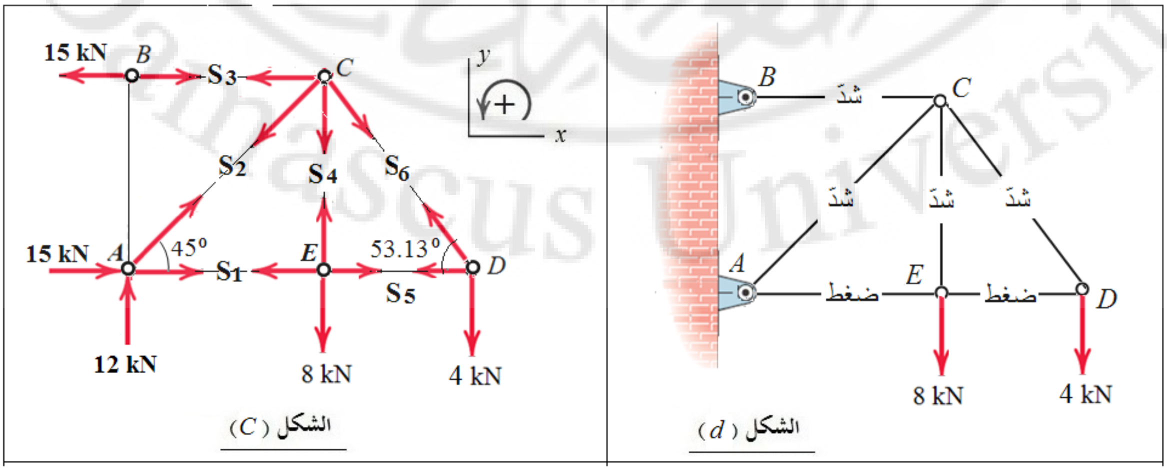
$$\sum F_x = S_1 + S_2 \cos 45° + 15 = 0$$
$$\sum F_y = S_2 \sin 45° + 12 = 0$$

العقدة B : معادلة التوازن لهذه العقدة :

$$\sum F_x = S_3 - 15 = 0$$

العقدة E : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\sum F_x = S_5 - S_1 = 0$$
$$\sum F_y = S_4 - 8 = 0$$



الشكل (C) الشكل (d)

العقدة D : معادلة التوازن لهذه العقدة :

$$\sum F_y = S_6 \sin 53.13° - 4 = 0$$

بحل المعادلات السابقة نجد القوى المطلوبة الآتية بوحدة (kN):

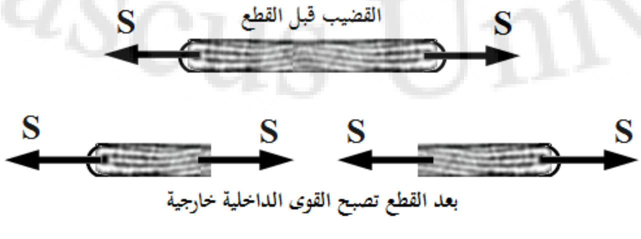
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
-16.97	2.79	15	8	-16.97	5
ضغط	شدّ	شدّ	شدّ	ضغط	شدّ

أخيراً ، يوضح الشكل (d) الأضلاع التي تتعرض لقوى شد ، والأضلاع التي تتعرض لقوى ضغط استنادا الى نتائج الحساب .

3– طريقة قطع الهيكل (Method of sections)

الطريقة الثانية في تحليل الهياكل الشبكية هي طريقة قطع الهيكل أو المقاطع . تستخدم هذه الطريقة عادة عند الحاجة لتعيين القوى الداخلية المتولدة في بعض أضلاع الهيكل دون الاضطرار إلى تطبيق شروط التوازن تطبيقاً متتالياً على عقد الهيكل جميعها . ومن البديهي عندما يكون الهيكل بكامله في حالة اتزان فإن أي جزء مقطوع منه سيكون في حالة توازن أيضاً . ومن هنا تنبع فكرة الطريقة الحالية والتي تتلخص في قطع بعض أضلاع الهيكل ثم دراسة توازن القوى المؤثرة في الجزء المقطوع من الهيكل .إن تحليل الهياكل الشبكية بطريقة المقاطع يجري عادة وفق الخطوات الآتية :

- تحديد ردود أفعال المساند التي يرتكز عليها جسم الهيكل إذا كان ذلك ضرورياً.
- إحداث مقطع وهمي في الهيكل ، ثم نختار المقطع بحيث يمر بالأضلاع المراد تحديد القوى الداخلية المؤثرة فيها ، وينتج عن عملية القطع أن القوى الداخلية المؤثرة في الأضلاع المقطوعة تصبح قوى خارجية . كما ينبغي أن يمر المقطع بثلاثة أضلاع فقط، إذ لا نستطيع بمعادلات التوازن أن نحسب أكثر من ثلاثة مقادير مجهولة.
- دراسة توازن الهيكل المقطوع . وهنا يستحسن اختيار جزء الهيكل الأكثر سهولة، وافتراض أن الأضلاع المقطوعة في حالة شدّ ، وبناءً على هذا الفرض تظهر القوى في المخطط خارجة من الأضلاع المقطوعة كما هو مبين في الشكل (3–5).



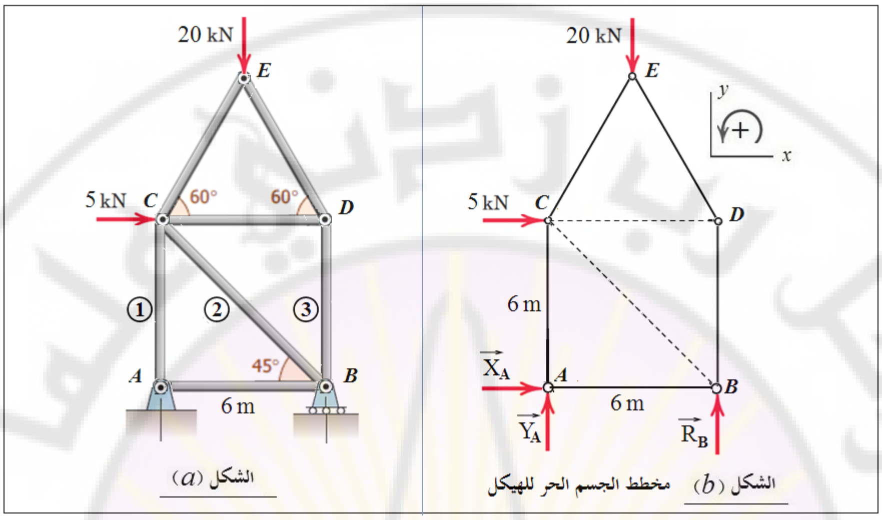
الشكل (3– 5)

في تحليل الهياكل نستخدم عادة معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_x = 0 \;;\; \Sigma F_y = 0 \;;\; \Sigma M_o = 0 \qquad (2)$$

مثال رقم (25)

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.



الشكل (a)   الشكل (b) مخطط الجسم الحر للهيكل

الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن :

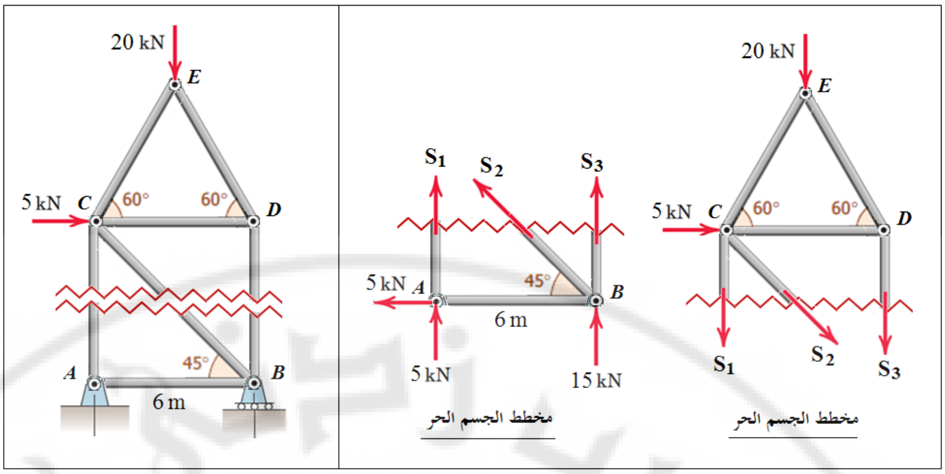
$$\sum F_x = X_A + 5 = 0$$

$$\sum F_y = Y_A + R_B - 20 = 0$$

$$\sum M_A = R_B(6) - 5(6) - 20(3) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن : $X_A = -5\ \text{kN}$, $Y_A = 5\ \text{kN}$, $R_B = 15\ \text{kN}$ **القوى الداخلية في الأضلاع :**

نقطع الهيكل بحيث يمر مستوي القطع بالأضلاع المعنية بالحساب ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر للجزء السفلي أو للجزء العلوي من الهيكل كما هو مبين في الشكل . في هذه الحالة نفرض أن الأضلاع المقطوعة تقع في حالة شدّ ، ولهذا السبب تظهر القوى في المخطط خارجة من الأضلاع المقطوعة.



معادلات التوازن للجزء السفلي من الهيكل:

$$\sum F_x = -S_2 \cos 45° - 5 = 0$$

$$\sum F_y = S_1 + S_2 \sin 45° + S_3 + 15 + 5 = 0$$

$$\sum M_B = -S_1(6) - 5(6) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على القوى الداخلية المطلوبة الآتية :

S_1	S_2	S_3
- 5 kN	-7.07 kN	-10 kN
ضغط	ضغط	ضغط

ملاحظة : يمكن الحصول على هذه النتائج بدراسة توازن الجزء العلوي من الهيكل. فاستناداً إلى مخطط الجسم الحر لهذا الجزء يمكن كتابة معادلات التوازن كما يلي :

$$\sum F_x = S_2 \cos 45° + 5 = 0$$

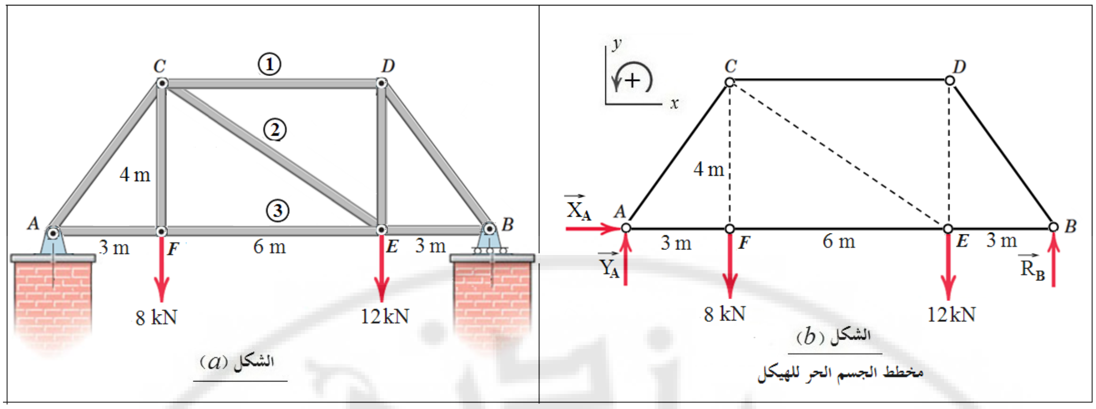
$$\sum F_y = -S_1 - S_2 \sin 45° - S_3 - 20 = 0$$

$$\sum M_C = -S_3(6) - 20(1.5) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل أيضاً على النتائج السابقة .

مثال رقم (26)

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.



الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\sum F_x = X_A = 0$$

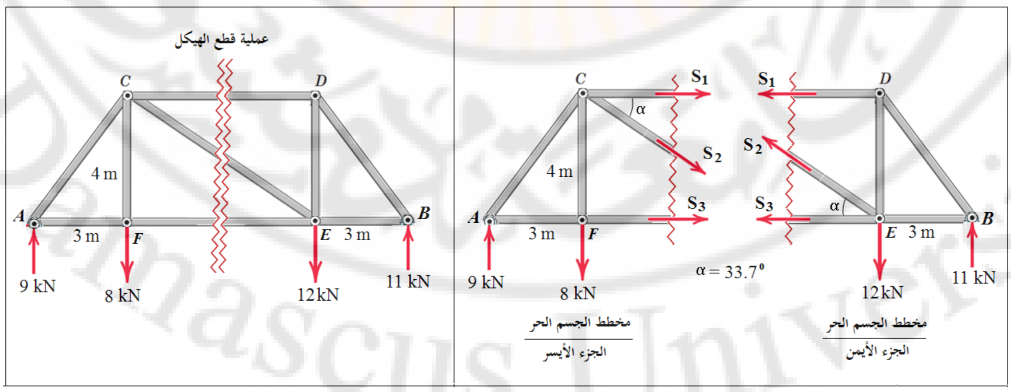
$$\sum F_y = Y_A + R_B - 20 = 0$$

$$\sum M_A = R_B(12) - 12(9) - 8(3) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن : $X_A = 0$, $Y_A = 9\text{ kN}$, $R_B = 11\text{ kN}$

القوى الداخلية في الأضلاع :

نقطع الهيكل بحيث يمر مستوي القطع بالأضلاع المعنية بالحساب ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر للجزء الأيمن أو للجزء الأيسر من الهيكل كما هو مبين في الشكل . في هذه الحالة نفرض أن الأضلاع المقطوعة تقع في حالة شدّ ، ولهذا السبب تظهر القوى في المخطط خارجة من الأضلاع المقطوعة.



معادلات التوازن للجزء الأيسر من الهيكل:

$$\sum F_x = S_1 + S_2 \cos\alpha + S_3 = 0$$

$$\sum F_y = -S_2 \sin\alpha + 9 - 8 = 0$$

$$\sum M_E = S_3(4) - 9(3) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على القوى الداخلية المطلوبة الآتية :

S_3	S_2	S_1
6.75 kN	1.8 kN	- 8.25 kN
شد	شد	ضغط

ملاحظة : يمكن الحصول على هذه النتائج بدراسة توازن الجزء الأيمن من الهيكل. فاستناداً إلى مخطط الجسم الحر لهذا الجزء يمكن كتابة معادلات التوازن كما يلي :

$$\sum F_x = -S_1 - S_2 \cos\alpha - S_3 = 0$$

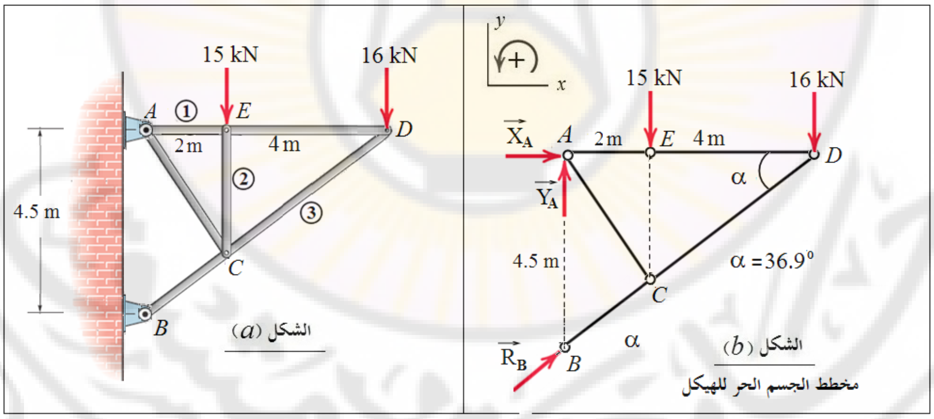
$$\sum F_y = S_2 \sin\alpha + 11 - 12 = 0$$

$$\sum M_E = S_1(4) + 11(3) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على النتائج السابقة أيضاً .

مثال رقم (27)

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.



الحل : ....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\sum F_x = X_A + R_B(\cos 36.9°) = 0$$

$$\sum F_y = Y_A + R_B(\sin 36.9°) - 31 = 0$$

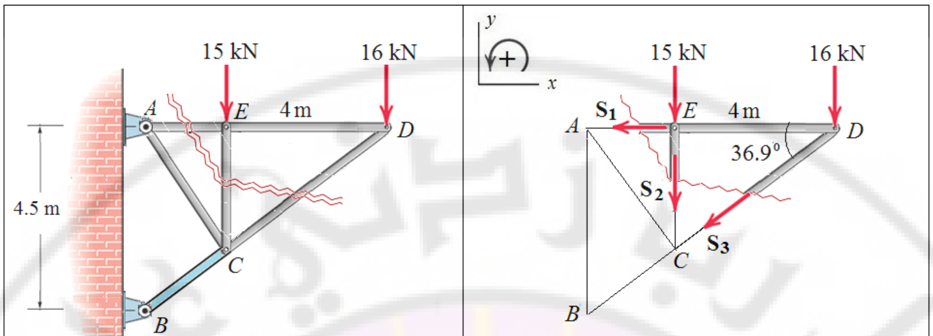
$$\sum M_A = -X_A(4.5) - 15(2) - 16(6) = 0$$

من هذه المعادلات نجد:

$X_A = -28$ kN , $Y_A = 10$ kN , $R_B = 35$ kN

القوى الداخلية في الأضلاع :

نقطع الهيكل بحيث يمر مستوي القطع بالأضلاع الثلاثة المعنية بالحساب ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر للجزء الأيمن (أو للجزء الأيسر) من الهيكل كما هو مبين في الشكل . في هذه الحالة نفرض أن الأضلاع المقطوعة تقع في حالة شدّ ، ولهذا السبب تظهر القوى في المخطط خارجة من الأضلاع المقطوعة.



الشكل (C) الشكل (d)

للجزء المقطوع من الهيكل:

$$\sum F_x = -S_1 - S_3 \cos 36.9° = 0$$
$$\sum F_y = -S_2 - S_3 \sin 36.9° - 31 = 0$$
$$\sum M_C = S_1(3) - 16(4) = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على القوى الداخلية المطلوبة الآتية :

S_1	S_2	S_3
21.33 kN	-26.66 kN	-15 kN
شد	ضغط	ضغط

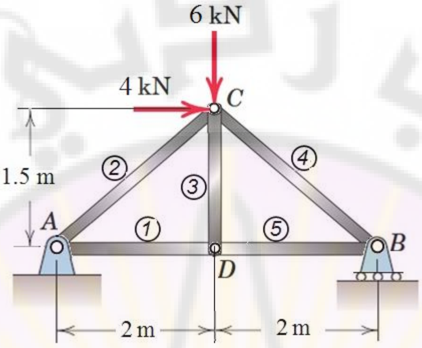
ملاحظة : يمكن الحصول على هذه النتائج بدراسة توازن الجزء الأيسر من الهيكل.

مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما في الشكل المجاور.

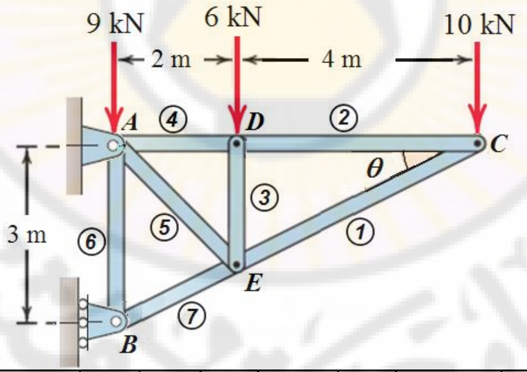


الجواب :

القوة	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	R_B	Y_A	X_A
القيمة (kN)	-7.5	6	0	- 2.5	6	4.5	1.5	- 4

مسألة رقم (2) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.

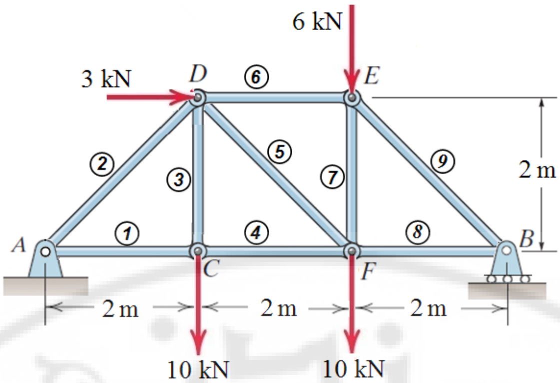


الجواب:

القوة	S_7	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	R_B	Y_A	X_A
القيمة (kN)	-26.83	21	5.66	20	- 6	20	-22.36	24	25	-24

مسألة رقم (3) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.

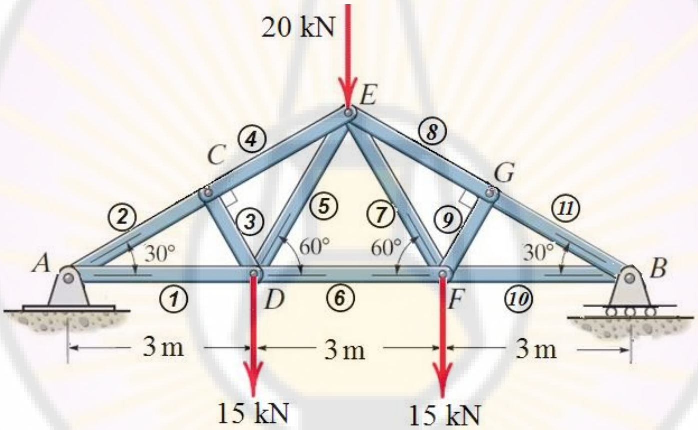


الجواب :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	القوة
14	- 15.56	10	14	1.41	-15	9	15	-21.21	القيمة (kN)

مسألة رقم (4) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في جميع أضلاع الهيكل الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.

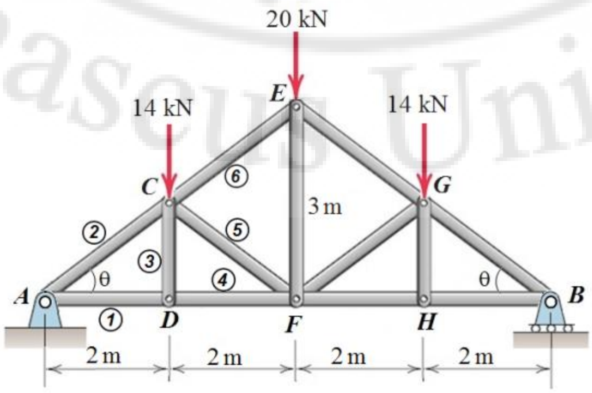


الجواب :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	القوة
43.3	-50	0	-50	17.32	34.64	17.32	-50	0	43.3	-50	القيمة (kN)

مسألة رقم (5) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في أضلاع الجزء اليساري من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.

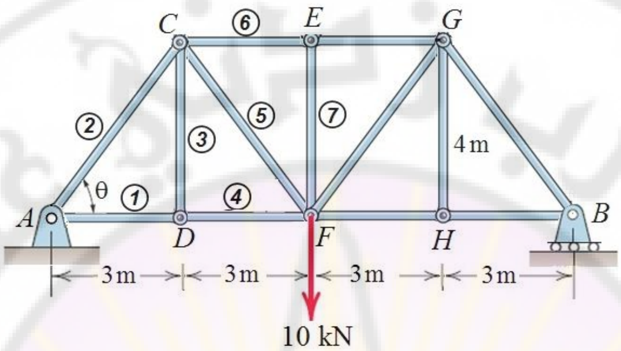


الجواب :

القوة	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	R_B	Y_A	X_A
القيمة (kN)	- 28.33	-11.67	32	0	- 40	32	24	24	0

مسألة رقم (6) :

أوجد بطريقة فصل العقد القوى الداخلية المتولدة في أضلاع الجزء الأيسر من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل المجاور.

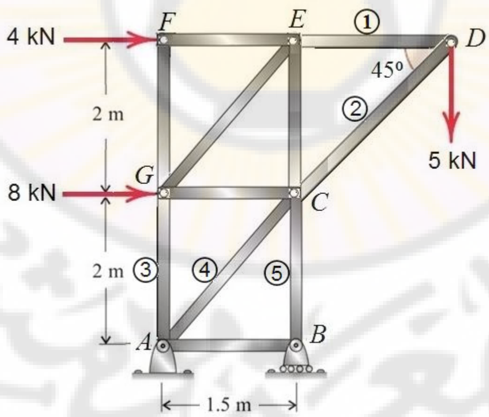


الجواب :

القوة	S_7	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	R_B	Y_A	X_A
القيمة (kN)	0	-7.5	6.25	3.75	0	-6.25	3.75	5	5	0

مسألة رقم (7) :

أوجد بالطريقة التي تراها مناسبة القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 و4 و5 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

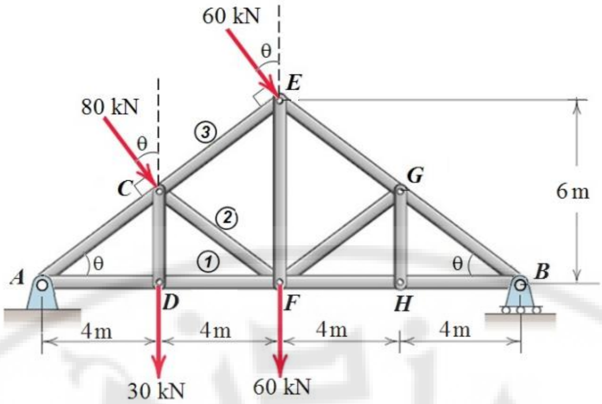


الجواب :

القوة	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	R_B	Y_A	X_A
القيمة (kN)	-33	20	12	-7.07	5	33 (↑)	28 (↓)	12 (←)

مسألة رقم (8) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

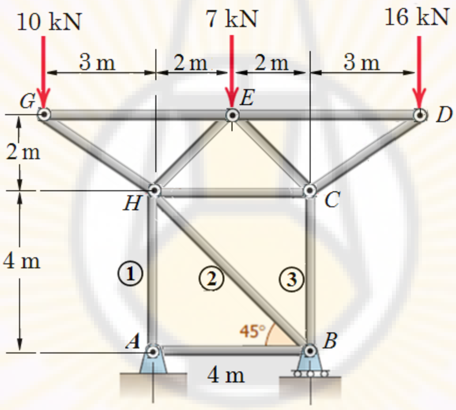


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	القوة
-84	102	100	220	-108.33	- 121.67	القيمة (kN)

مسألة رقم (9) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

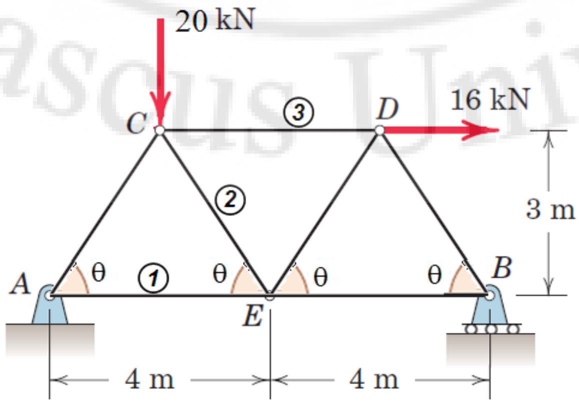


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	القوة
0	9	24	-9	0	-24	القيمة (kN)

مسألة رقم (10) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

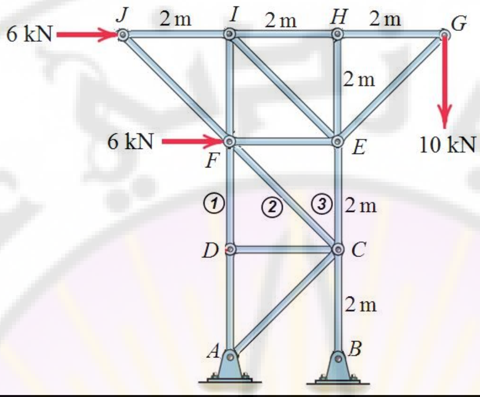


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	القوة
-16	9	11	+22	+13.22	-13.34	القيمة (kN)

مسألة رقم (11) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.مع العلم أن رد فعل المسند B يقع على امتداد الضلع BC .

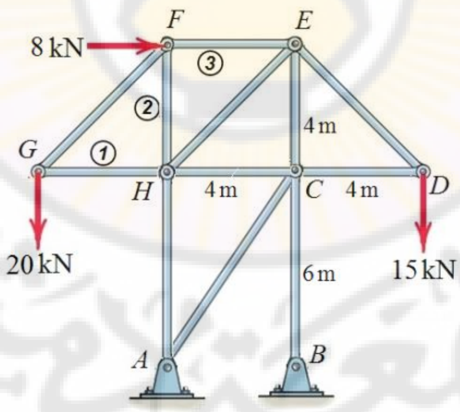


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	القوة
-12	-28	38	+16	-16.97	-9.03	القيمة (kN)

مسألة رقم (12) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

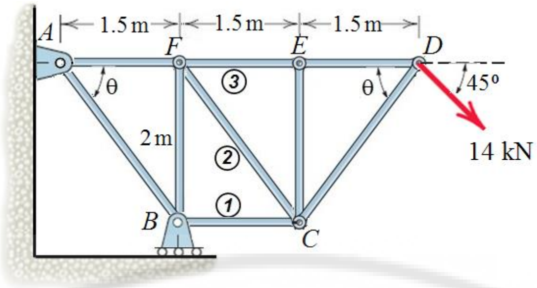


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	القوة
-8	5	30	-20	-20	+12	القيمة (kN)

مسألة رقم (13) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

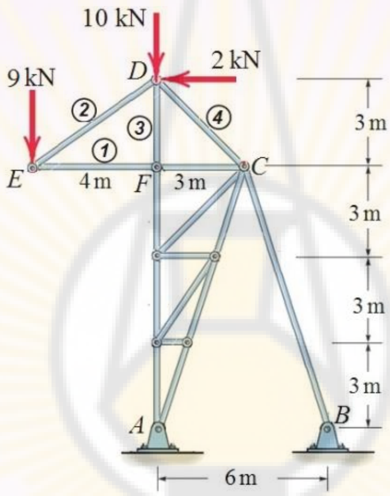


الجواب :

X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	القوة
-9.9	-19.8	29.7	-14.85	+12.38	+17.35	القيمة (kN)

مسألة رقم (14) :

أوجد بالطريقة التي تراها مناسبة القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و3 و 4 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

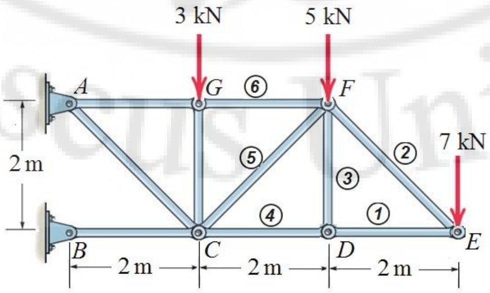


الجواب :

S_1	S_2	S_3	S_4	القوة
-12	+15	-33	+19.8	القيمة (kN)

مسألة رقم (15) :

أوجد بالطريقة التي تراها مناسبة القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 و4 و5 و6 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل.

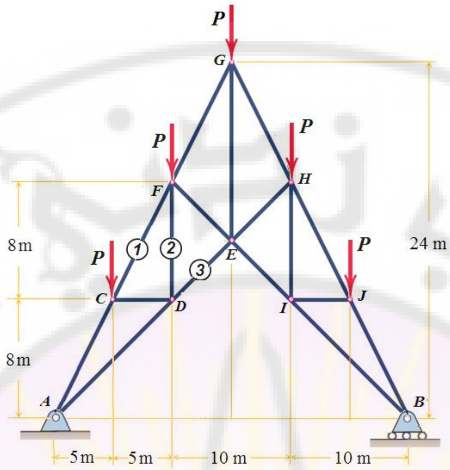


الجواب :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	القوة
-7	+9.9	0	-7	-16.97	+19	القيمة (kN)

مسألة رقم (16) :

أوجد بطريقة قطع الهيكل القوى الداخلية المتولدة في الأضلاع 1و 2 و 3 من الجائز الشبكي المحمول والمحمَّل كما هو مُوضَّح في الشكل. مع العلم أن القوة P =15 kN .



الجواب :

القوة	S_3	S_2	S_1	R_B	Y_A	X_A
القيمة (kN)	+36.02	+7.5	-53.07	30	30	0

الفصل الخامس

قوى الاحتكاك

FRICTION FORCES

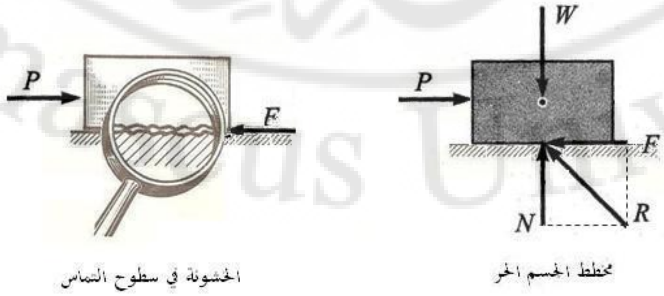
1- الاحتكاك الانزلاقي (Sliding Friction).
2- احتكاك الحبال والسيور (Belt and Rope Friction) .
3- الاحتكاك التدحرجي (Rolling Friction).

تمهيد : للاحتكاك في التطبيقات الهندسية ثلاثة أنواع وهي :

1. الاحتكاك الانزلاقي : ينشأ هذا النوع عند انزلاق جسم على جسم آخر.
2. احتكاك الحبال والسيور : ينشأ هذا النوع بفعل التلامس بين الحبال أو السيور من جهة والأجسام الدوارة كالبكرات من جهة أخرى .
3. الاحتكاك التدحرجي : ينشأ هذا النوع عند تدحرج جسم على جسم آخر.

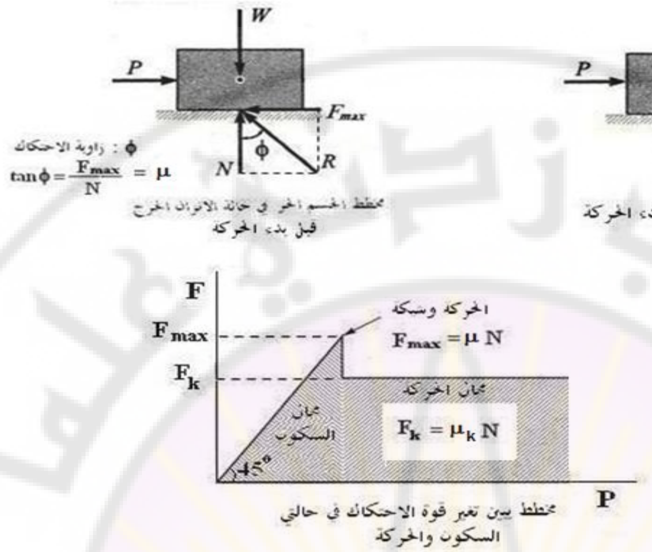
1- الاحتكاك الانزلاقي (Sliding Friction) :

اعتمدت الدراسة السابقة على فرضية مفادها أن سطوح التماس ملساء ، وهذا يعني أنها عديمة الاحتكاك . في الواقع ، هذا الافتراض مثالي لأن سطوح الأجسام مهما بلغت دقة التصنيع تكون خشنة إلى حد ما. فعندما نحاول تحريك جسم على جسم آخر كما هو موضح في الشكل(5-1) فإن قوة تدعى قوة الاحتكاك سوف تنشأ في منطقة التماس بين الجسمين . وفي هذه الحالة سوف يخضع الجسم المفروض لتأثير ثلاث قوى وهي القوة الخارجية **P** وقوة الوزن **W** ورد فعل سطح الاستناد **R** الذي يمكن تحليله إلى مركبتين وهما رد الفعل الناظمي **N** وقوة الاحتكاك المماسية **F** المعاكسة لجهة الحركة المحتملة .



الشكل(5-1)

تبين التجارب أنه إذا خضع جسم ما يرتكز على جسم آخر لقوة محركة P بحيث يمكن زيادتها تدريجياً فإن العلاقة بين قوة الاحتكاك والقوة المحركة ستكون كما هو مبين في الشكل(5–2). يتضمن المخطط مجالين : المجال الأول يمثل حالة السكون بينما يمثل المجال الثاني حالة الحركة.



الشكل(5–2)

نلاحظ من هذا المخطط أنه في البدء كلما زادت القوة $\boldsymbol{P}$ ازدادت قوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}$ إلى أن تصل إلى قيمتها العظمى $\boldsymbol{F_{max}}$ ، وهي اللحظة التي يصبح فيها الجسم المفروض على وشك الانزلاق وبدء الحركة. بعدها ، وحالما يبدأ الجسم بالحركة فإن قوة الاحتكاك تنخفض فجأة ثم تحافظ على قيمتها ثابتة في مجال السرعات المنخفضة . تسمى قوة الاحتكاك بعد بدء الحركة بقوة الاحتكاك الحركي ويرمز لها $\boldsymbol{F_k}$.كما يوضح الشكل المذكور سابقاً مخطط الجسم المفروض الحر في حالتي السكون والحركة . وتتعين قوة الاحتكاك القصوى التي تنشأ عندما تكون الحركة على وشك الحدوث بالعلاقة:

$$F_{max} = \mu_s N \qquad (1)$$

حيث يمثِّل الحرف اليوناني μ_s معامل الاحتكاك الستاتيكي ، والجدول الآتي يبين القيم التقريبية لهذا المعامل لبعض أنواع السطوح الجافة الواقعة في حالة احتكاك.

سطوح الاحتكاك	معامل الاحتكاك الستاتيكي
مطّاط على إسمنت (Rubber on concrete)	0.60-0.90
معدن على معدن (Metal on metal)	0.15-0.60
معدن على جلد (Metal on leather)	0.30-0.60
معدن على خشب (Metal on wood)	0.20-0.60
خشب على خشب (Wood on wood)	0.25-0.50

كما تتحدد قوة الاحتكاك F_k التي تنشأ في حالة الحركة بالعلاقة :

$$F_k = \mu_k N \qquad (2)$$

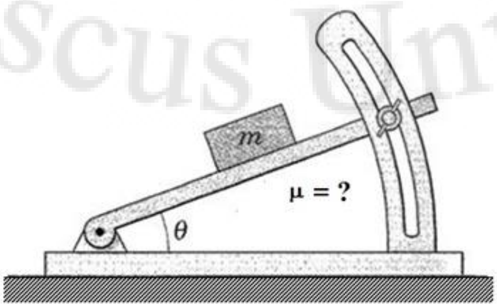
حيث يمثل μ_k معامل الاحتكاك الحركي وهو أدنى بقليل من معامل الاحتكاك الستاتيكي. وبصورة عامة تكون نسبته كما يلي : $\mu_{k}=(0.7\text{-}0.8)\,\mu_s$.

قوانين الاحتكاك : تتلخص قوانين الاحتكاك في النقاط الآتية :

1. عند تحريك جسم على سطح جسم آخر تنشأ قوة احتكاك في مستوي التماس بينهما ، وتكون جهتها بعكس جهة الحركة المحتملة .
2. تزداد قيمة قوة الاحتكاك من الصفر إلى قيمة أعظمية $\mathbf{F}_{max}$. وتصل هذه القوة إلى قيمتها الحدية العظمى عندما يوشك الجسمان أن يتزلقا على بعضهما، أي عندما تكون الحركة على وشك الحدوث.
3. تتناسب قوة الاحتكاك الحدية العظمى مباشرة مع رد الفعل الناظمي $\mathbf{N}$ الذي يؤثر به سطح على آخر. ويدعى ثابت التناسب ،كما سبق القول ، بعامل أو معامل الاحتكاك الستاتيكي. أي أن: $F_{max} = \mu_s N$
4. إن قوة الاحتكاك تعتمد على مادة السطوح المتلامسة ودرجة خشونتها.
5. إن قوة الاحتكاك التي يمكن أن تنشأ بين جسمين لا تتعلق بأبعاد مساحة منطقة التماس.
6. إن قوة الاحتكاك التي يمكن أن تنشأ بين جسمين مستقلة عن سرعة الانزلاق في مجال السرعات المنخفضة نسبياً.
7. إن معامل الاحتكاك الحركي μ_k اقل من معامل الاحتكاك الستاتيكي μ_s بنسبة مقدارها 0.20-0.30 تقريباً. ولهذا فإن قوة الاحتكاك $\mathbf{F}_k$ التي تتولد في أثناء حدوث الحركة تكون أصغر بقليل من قوة الاحتكاك الحدية $\mathbf{F}_{max}$ التي تتولد في حالة السكون.

تعيين معامل الاحتكاك تجريبياً :

تُعَدُّ طريقة المستوي المفصلي المائل القابل للتعيير من أكثر الطرق شيوعاً وهي موضحة في الشكل (5-3) . حيث يُصنع سطحا المستوي والجسم المتزلق من المواد المطلوب تعيين معامل الاحتكاك لها.



الشكل(5-3)

يوضع الجسم المفروض على المستوي المائل ثم نقوم برفع هذا المستوي وزيادة الزاوية θ تدريجياً. وبقياس أكبر زاوية θ_{max} يمكن أن يرفع إليها المستوي قبل أن يفقد الجسم توازنه وينزلق على المستوي ، نستطيع تعيين معامل الاحتكاك μ_s وذلك وفق العلاقة الآتية :

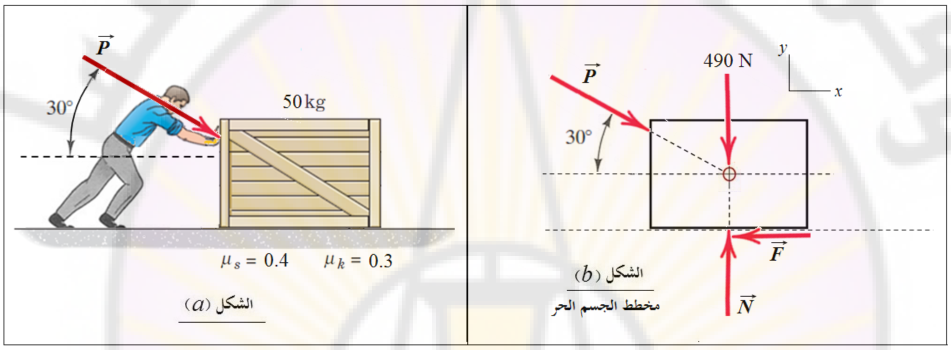
$$\mu_s = \tan\theta_{max} \qquad (3)$$

مثال رقم (28)

يبين الشكل صندوقاً كتلته 50 kg ، يرتكز على سطح أفقي خشن ويخضع لتأثير قوة الدفع **P**. والمطلوب :

عيّن قوة الاحتكاك المماسية **F** بالإضافة إلى حالة الصندوق (سكون أم حركة) في الحالتين : b) P = 300 N

a) P = 150 N



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق كما هو مبين في الشكل (b) والذي يضم القوى الآتية: الوزن W ورد الفعل الناظمي N والقوة الخارجية P وقوة الاحتكاك F .

الحالة الأولى : P = 150 N

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; 150\cos 30° - F = 0 \;\;\Rightarrow\;\; F = 129.9\,N$$
$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; N - 490 - 150\sin 30° = 0 \;\;\Rightarrow\;\; N = 565\,N$$

وتكون قوة الاحتكاك القصوى التي يمكن أن تنشأ بين سطحي التماس :

$$F_{max} = \mu_s N = \; 0.4(565) = 226\,N$$

نلاحظ أن : $F < F_{max}$ وهذا يشير إلى أن الصندوق في حالة سكون.

الحالة الثانية : P = 300 N

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; 300\cos 30° - F = 0 \;\;\Rightarrow\;\; F = 259.8\,N$$
$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; N - 490 - 300\sin 30° = 0 \;\;\Rightarrow\;\; N = 640\,N$$

وتكون قوة الاحتكاك القصوى التي يمكن أن تنشأ بين سطحي التماس :

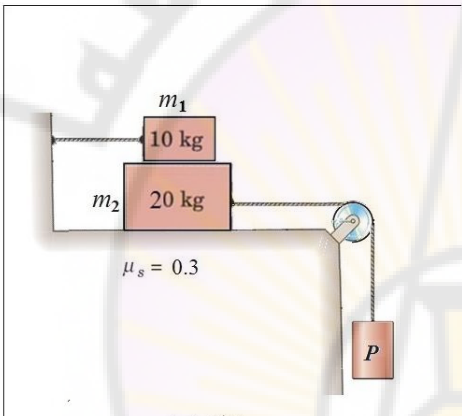
$$F_{max} = \mu_s N = \; 0.4(640) = 256\,N$$

نلاحظ أن : $F > F_{max}$ وهذا يشير إلى أن الصندوق في حالة حركة وتتحدد عندئذ قوة الاحتكاك الفعلية بالعلاقة:

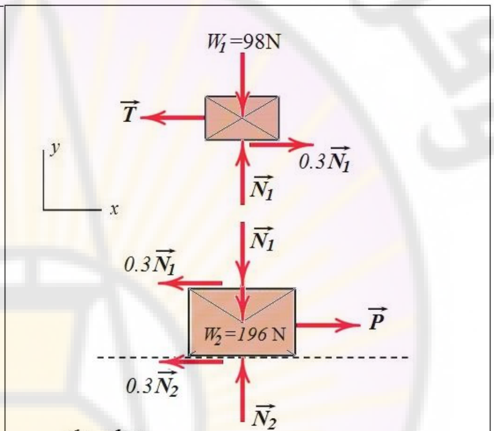
$$F_k = \mu_k N = 0.3(640) = 192\ N$$

مثال رقم (29)

يرتكز جسم كتلته m_1=10kg على جسم آخر كتلته m_2=20kg ،كما هو موضح في الشكل (a). . يُربط الجسم الاول بالجدار بمساعدة حبل أفقي ، بينما يُربط الجسم الثاني بحبل يلتف على بكرة وفي نهايته الثقل P. أوجد في وضع التوازن القيمة العظمى للثقل P ، إذا كان معامل الاحتكاك لجميع السطوح المتلامسة هو μ_s =0.3 .



الشكل (a)



الشكل (b)

الحل : ....

نفرض في مسألتنا هذه أن الانزلاق يوشك أن يحدث بين الكتلة السفلية وسطح الاستناد الخشن .نبتدئ الحل بفصل أجزاء الجملة ،ورسم مخطط الجسم الحر لكل من الكتلتين كما هو مبين في الشكل (b) .

الكتلة الاولى : بما أن القوى المؤثرة في الكتلة m_1 بحالة توازن ،فإن المجموع الجبري لمساقطها على محور الاحداثيات الشاقولي يجب أن يكون مساوياً الصفر :

$$\sum F_y = N_1 - 98 = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = 98\ [\mathrm{N}]$$

الكتلة الثانية : بما أن القوى المؤثرة في الكتلة m_2 بحالة توازن ،فإن المجموع الجبري لمساقطها على أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر :

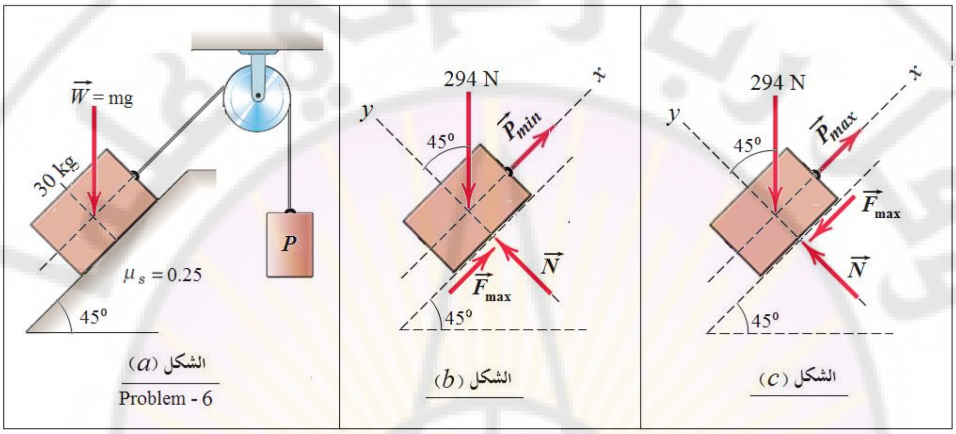
$$\sum F_x = P - 0.3N_1 - 0.3N_2 = 0$$
$$\sum F_y = N_2 - N_1 - 196 = 0$$

ونحصل من هاتين المعادلتين على مقدار الثقل P وكتلته m :

$$\mathrm{P} = 117.6\ [\mathrm{N}] \Rightarrow\; m = \frac{117.6}{9.8} = 12\ [\mathrm{kg}]$$

مثال رقم (30)

يستند صندوق كتلته 30 kg إلى مستو مائل زاويته مع الافق 45° . رُبطَ به حبل يمر على بكرة ثابتة ويحمل في نهايته الطليقة ثقلاً مقداره P . فإذا كان معامل الاحتكاك بين الصندوق والمستوي المائل يساوي 0.25 ، فأوجد قيمتي الثقل P الدنيا والعظمى بحيث تبقى الجملة بحالة توازن. ما هو المجال الذي يمكن أن تقع ضمنه قيمة الثقل دون أن يتحرك الصندوق نحو الاعلى أو نحو الاسفل.



الشكل (a)
Problem - 6
الشكل (b)
الشكل (c)

الحل : ....

تتعين القيمة الدنيا P_{min} للثقل المرفوع عندما يكون الصندوق على وشك الانزلاق نحو الأسفل ، وبالمقابل تتعين قيمته العظمى P_{max} عندما يكون هذا الصندوق على وشك الانزلاق نحو الاعلى . وبناء على ذلك نحدد اتجاه قوة الاحتكاك القصوى المتولدة في منطقة التماس بين الصندوق وسطح الاستناد ، والتي تتحدد قيمتها العددية بالعلاقة :

$$F_{max} = \mu_s N \;\Rightarrow\; F_{max} = 0.25N$$

الحالة الاولى : نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق عندما يكون على وشك الانزلاق نحو الاسفل كما في الشكل(b) . وبما أن القوى المؤثرة في الصندوق بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها على أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر :

$$\sum F_x = P_{min} + F_{max}(0.25) - 294\sin 45^\circ = 0$$
$$\sum F_y = N - 294\cos 45^\circ = 0$$

ومن هذه المعادلات نحصل على القوى المجهولة الاتية :

$$N = 208\ [\text{N}] \quad , \quad F_{max} = 52[\text{N}] \quad , \quad P_{min} = 156\ [\text{N}]$$

الحالة الثانية : نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق عندما يكون على وشك الانزلاق نحو الاعلى كما في الشكل(c) . وبما أن القوى المؤثرة في الصندوق بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها على أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر :

$$\sum F_x = P_{max} - F_{max}(0.25) - 294 \sin 45° = 0$$

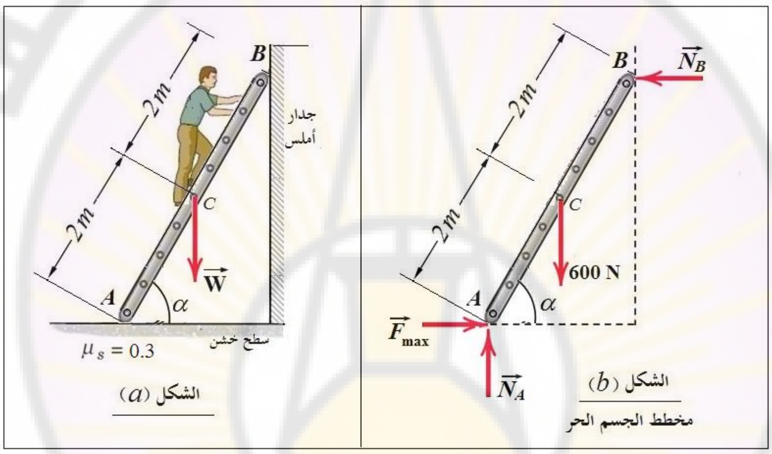
ونحصل من هذه المعادلة على القيمة العظمى للثقل P :

$$P_{max} = 260 \text{ [N]}$$

وهكذا نستنتج أن الجملة المفروضة تبقى في حالة سكون طالما أن وزن الثقل محصور بين القيمتين الصغرى والعظمى المحسوبتين آنفاً .

مثال رقم (31)

أوجد القيمة الدنيا للزاوية α الضرورية لمنع السلم الموضح في الشكل (a) من الانزلاق، وذلك في اللحظة التي يقف فيها شخص وزنه W=600N في النقطة C.مع العلم بأن معامل الاحتكاك بين السلم وسطح الارض الخشن يساوي الى 0.3 وأن الجدار أملس .



الحل : ....

نفرض في مسألتنا هذه أن السلم على وشك الانزلاق نحو اليسار .وبناء على ذلك نحدد اتجاه قوة الاحتكاك القصوى المتولدة في منطقة التماس بين السلم والأرض ، والتي تتعين قيمتها العددية بالعلاقة :

$$F_{max} = \mu_s N_A \;\Rightarrow\; F_{max} = 0.3 N_A$$

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر للسلم كما في الشكل (b) ، والذي يضم القوى الاتية : القوة $\boldsymbol{W}$ المطبقة في منتصفه والممثلة لوزن الشخص ، والقوة $\mathbf{N_B}$ الممثلة لرد فعل الجدار الاملس ، والقوة $\mathbf{N_A}$ الممثلة لرد الفعل الناظمي لسطح الارض ، وقوة الاحتكاك $\mathbf{F_{max}}$.

معادلات التوازن : بما أن القوى المؤثرة في السلم بحالة توازن ،فإن المجموع الجبري لمساقطها على أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر. فإذا اتخذنا جملة الاحداثيات (x,y) الموضحة في الشكل ، حصلنا على معادلات التوازن الاتية:

$$\sum F_x = 0.3N_A - N_B = 0$$

$$\sum F_y = N_A - 600 = 0$$

$$\sum M_A = N_B(4\sin\alpha) - 600(2\cos\alpha) = 0$$

ونحصل من المعادلتين الاولى والثانية على القوتين :

$$N_A = 600\ N \quad ; \quad N_B = 180\ N$$

وبالرجوع الى المعادلة الثالثة نحصل على:

$$180(\sin\alpha) - 300(\cos\alpha) = 0$$

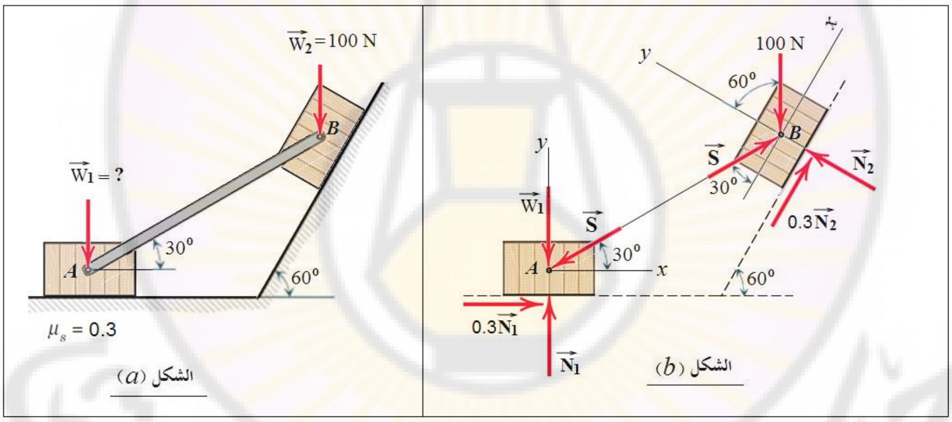
$$18\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 30 \quad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

ونحصل من ذلك على :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59°$$

مثال رقم (32)

تستند كتلتان مربوطتان بذراع مهمل الوزن إلى سطحين خشنين كما هو مُوضَّح في الشكل (a) .فإذا كان وزن الكتلة B يساوي W_2=100N، فأوجد القيمة الدنيا لوزن الكتلة A والتي تستطيع أن تجعل هذه الجملة بحالة توازن . بفرض أن معامل الاحتكاك الستاتيكي لجميع سطوح التماس هو μ_s =0.3 .



الحل : ....

نبدأ أولاً برسم مخطط الجسم الحر لكلا الكتلتين ، مع ملاحظة أنه إذا كان وزن الكتلةA أصغر من قيمة معينة ، فإنها ستنزلق على المستوي الافقي ساحبة وراءها الكتلة B . ونستنتج من ذلك أنه لا بد إذن من وجود قيمة صغرى للكتلة A في حالة التوازن .

الكتلة الأولى A : نرسم مخطط الجسم الحر لهذه الكتلة عندما تكون على وشك الانزلاق نحو اليسار كما في الشكل(b) . يضم المخطط القوى الآتية : وزن الكتلة ، وقوة ضغط الذراع ، ورد الفعل الناظمي لسطح الاستناد ، وقوة الاحتكاك .

$$\sum F_x = 0.3N_1 - S.\cos 30° = 0$$

$$\sum F_y = N_1 - W_1 - S.\sin 30° = 0$$

من هاتين المعادلتين نحصل على :

$$W_1 = 2.39(S)$$

الكتلة الثانية B : نرسم مخطط الجسم الحر لهذه الكتلة عندما تكون على وشك الانزلاق نحو الأسفل كما في الشكل(b) . يضم المخطط القوى الآتية : وزن الكتلة ، وقوة ضغط الذراع ، ورد الفعل الناظمي لسطح الاستناد ، وقوة الاحتكاك .

$$\sum F_x = 0.3N_2 + S.\cos 30° - 100 \sin 60° = 0$$
$$\sum F_y = N_2 - S.\sin 30° - 100 \cos 60° = 0$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على قوة ضغط المتولدة في الذراع :

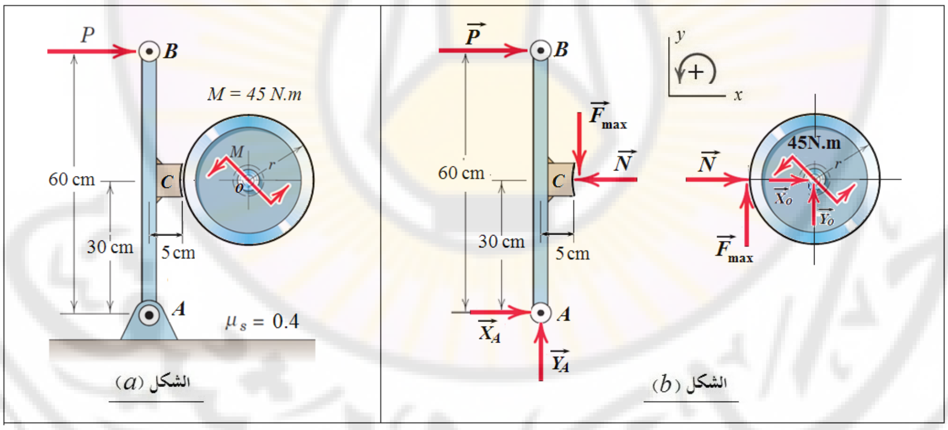
$$S = 70.5\ N$$

ومن ذلك نجد القيمة الدنيا W_1 ، والتي تستطيع أن تجعل هذه الجملة بحالة توازن :

$$W_1 = 2.39(70.5\ ) = 168.5\ N$$

مثال رقم (33)

تتألف الجملة الموضحة في الشكل (a) من ذراع شاقولي AB يمكنه الدوران حول المفصل A ، ومن دولاب تؤثر فيه مزدوجة عزمها M=45 N.m في اتجاه يعاكس دوران عقارب الساعة. والمطلوب : أوجد القيمة الدنيا للقوة الافقية P التي يجب أن يضغط بها الذراع على الدولاب حتى تبقى في حالة سكون ، اذا كان معامل الاحتكاك بين الدولاب وحذاء الكبح C المثبَّت بالذراع مساوياً $\mu_s = 0.4$.



الحل : ....

نفرض في مسألتنا هذه أن الانزلاق يوشك أن يحدث بين الدولاب وحذاء الكبح .وبناء على ذلك نبحث عن القيمة الدنيا للقوة P التي يجب أن يضغط بها الذراع على الدولاب حتى يبقى في حالة سكون .نبتدئ الحل بفصل أجزاء الجملة عن بعضها البعض، ثم نرسم مخطط الجسم الحر للدولاب من جهة ، وللذراع من جهة أخرى كما هو مبين في الشكل (b) .

الدولاب : نلاحظ أن هذا الجسم متوازن تحت قوة الضغط N وقوة الاحتكاك القصوى $\mathbf{F_{max}}$ ، وعزم الدوران M ، بالإضافة الى رد فعل مركز الدولاب. وبتطبيق معادلة العزوم حول النقطة O نجد قوة الاحتكاك القصوى التي يمكن أن تنشأ بين سطحي التماس :

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow 45 - F_{max}(0.15) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{max} = 300\ [N]$$

وبتطبيق قانون الاحتكاك نحصل على قوة ضغط حذاء الكبح على الدولاب :

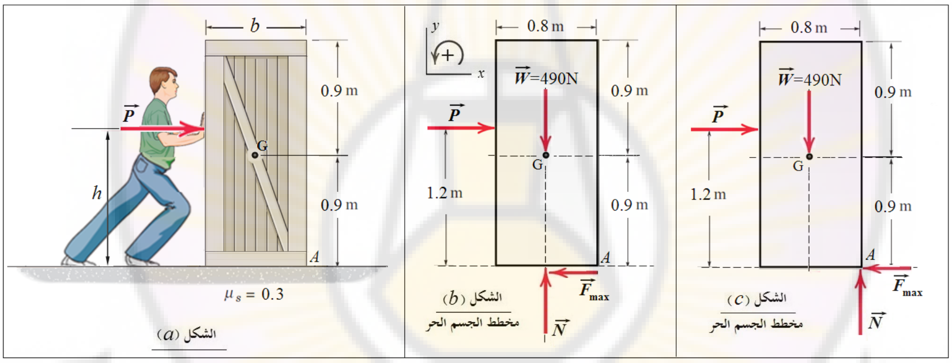
$$F_{max} = \mu_s N \Rightarrow N = \frac{F_{max}}{\mu_s} = \frac{300}{0.4} = 750\ [\mathrm{N}]$$

الذراع والحذاء : نلاحظ أن جملة الذراع والحذاء في حالة توازن تحت قوة الضغط N وقوة الاحتكاك القصوى F ، والقوة الافقية P ، بالإضافة الى رد فعل المسند المفصلي الثابت A . وبتطبيق معادلة العزوم حول النقطة A نجد القوة المطلوبة :

$$\sum M_o = -P(0.6) - F_{max}(0.05) + N(0.3) = 0$$
$$\Rightarrow P = 350\ [\mathrm{N}]$$

مثال رقم (34)

صندوق متجانس كتلته 50kg ، يستند جسم إلى سطح أفقي خشن كما هو مبين في الشكل. فإذا كان معامل الاحتكاك بين الصندوق والمستوي المائل يساوي 0.3 ، فأوجد مقدار قوة الدفع الأفقية **P** التي تستطيع تحريك هذا الصندوق نحو الامام ، وذلك بتطبيق المعطيات الاتية : $b = 0.8\mathrm{m}\ ,\ h = 1.2\mathrm{m}$



الحل : ....

اذا فرضنا أن القوة تطبق بشكل تدريجي ، فإن الصندوق إما أن يترلق إلى الأمام وإما أن يميل وينقلب بالنسبة للحافة الأمامية A . وبناء على ذلك لابد من دراسة هاتين الحالتين.

حالة الانزلاق : نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق عندما يكون على وشك الانزلاق إلى الأمام كما في الشكل(b) . وبما أن القوى المؤثرة في الصندوق بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها على أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر :

$$\sum F_y = N - 490 = 0 \Longrightarrow N = 490[\mathrm{N}]$$
$$\sum F_x = P - (0.3)N = 0 \Longrightarrow P = 147\ [\mathrm{N}]$$

حالة الانقلاب : نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق عندما يكون على وشك الانقلاب كما في الشكل(c)

.نلاحظ في هذه الحالة أن رد الفعل الناظمي قد انتقل الى الحافة الامامية A وذلك لمنع الصندوق من الانقلاب

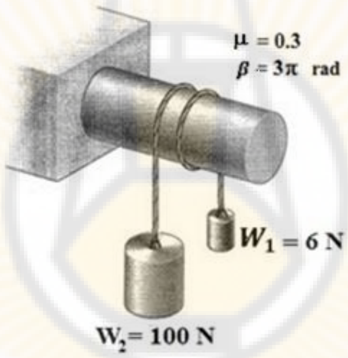
.من معادلة العزوم حول النقطة A نجد:

$$\sum M_A = -P(1.2) + 490(0.4) = 0 \Longrightarrow P = 163.33[\mathrm{N}]$$

وهكذا نستنتج بأن الانزلاق يحدث لحظة وصول القوة P الى القيمة 147 N ، بينما يصبح الانقلاب وشيكا لحظة وصول تلك القوة الى القيمة 163.33 N . وهنا نلاحظ أن الانزلاق يحدث قبل الانقلاب.

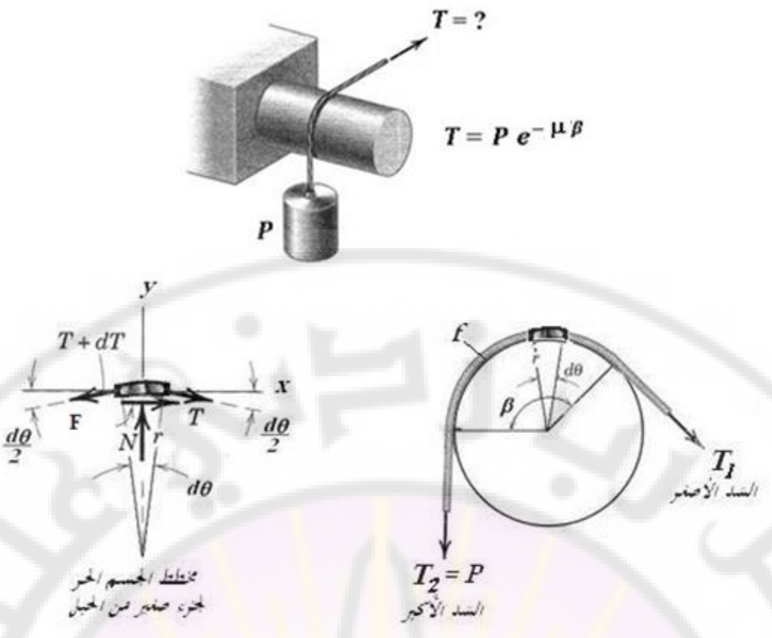
2– احتكاك الحبال والسيور (Belt and Rope Friction):

في الواقع العملي ، يمكن لحمل صغير وزنه W_1 أن يوازن حملاً كبيراً وزنه W_2 وذلك بلف الحبل عدة مرات حول عمود ثابت كما هو مبين في المثال الموضح في الشكل(5–4). لدراسة هذه المسألة واستنتاج العلاقة الرياضية التي تربط بين القوتين W_1 و W_2 نبسّط الموضوع بحيث نتصور حبلاً يلتف حول محيط اسطوانة خشنة ثابتة، ويؤثر في نهايته اليسرى حمل وزنه P ، وسوف نبحث عن أقل قوة شد T يجب أن تؤثر في نهاية الحبل الأخرى كي لا يسقط ، علماً بأن زاوية التماس β بين الحبل والاسطوانة معلومة ، وأن معامل الاحتكاك μ بين الحبل والاسطوانة معلوم أيضاً .



الشكل(5–4)

لاستنتاج العلاقة التي تربط بين القوتين T و P ندرس اتزان جزء صغير جداً من الحبل (انظر الشكل 5–5) في اللحظة التي يكون فيها الحبل على وشك الانزلاق على سطح الاسطوانة في اتجاه الحمل P . في هذه الحالة تؤثر في الجزء المدروس كما هو واضح من مخطط الجسم الحر أربع قوى وهي : رد الفعل الناظمي N ،وقوة الاحتكاك F التي تعاكس جهة انزلاق السير والتي تؤدي إلى زيادة قوة الشد المؤثرة في الجانب الأيسر بمقدار dT ، وقوة الشدّ T التي تؤثر في الجانب الأيمن ، وأخيرا قوة الشدّ (T+ dT) التي تؤثر في الجانب الأيسر.



الشكل(5–5)

نكتب معادلات التوازن بالنسبة لجملة المحاور المبينة في الشكل:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad F + T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad N - T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (T + dT)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

وبما أن الزاوية $d\theta$ صغيرة جداً لذا يمكن أن نكتب :

$$cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1 \quad ; \quad sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2} \quad ; \quad dT\ sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

وبالتعويض نجد :

$$\mu N = dT \quad ; \quad N = Td\theta$$

ومنه ينتج :

$$dT = \mu T d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

وبإجراء التكامل مع مراعاة أن القوة T_1 تمثل الشدّ الأصغر وهي تؤثر بعكس جهة الانزلاق الوشيك للحبل بينما القوة T_2 تمثل الشدّ الأكبر وهي تؤثر بنفس جهة الانزلاق:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu d\theta$$

ومنه نجد :

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$

ومن هذا ينتج أن :

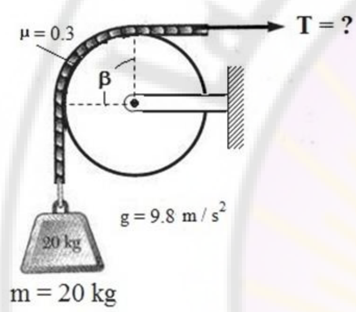
$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\, e^{\mu\beta} \qquad (4)$$

وبناء على ذلك تتعين قوة الشدّ المطلوبة بالعلاقة :

$$T = P\, e^{-\mu\beta} \qquad (5)$$

حيث $e = 2.718$ وهو يمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي . وتقدر زاوية التماس β بوحدة الراديان. وكما نرى من العلاقة الأخيرة أن مقدار القوة المطلوبة يتعلق بمعامل الاحتكاك وزاوية التماس فقط ولا علاقة لها بنصف قطر الاسطوانة. وعند انعدام الاحتكاك نحصل كما هو متوقع على المساواة $T=P$. ويمكن بزيادة زاوية التماس أن نقلل مقدار T اللازم لتوازن الحمل P . ولهذه الحقيقة أهمية كبيرة في الحياة العملية.

مثال رقم (35)



يُربط حمل كتلته $m = 20\ kg$ بكبل ملفوف ربع لفة حول بكرة ثابتة ، ويُحافظ على توازنه بتطبيق القوة $\mathbf{T}$ في النهاية الحرة لهذا الكبل كما هو موضح في الشكل . بفرض أن معامل الاحتكاك يساوي 0.3 أوجد ما يلي :

1. قيمة القوة $\mathbf{T}$ الضرورية لمنع الحمل من السقوط.
2. قيمة القوة $\mathbf{T}$ اللازمة للبدء برفع الحمل .

الحل : ....

القوة الضرورية لمنع الحمل من السقوط : تتعين هذه القوة عندما يكون الحبل على وشك الانزلاق باتجاه الحمل .

وبالعودة إلى العلاقة الآتية :

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta}$$

نلاحظ أن :

$$T_1 = T \ ,\ T_2 = mg = 20\times9.8=196\ N$$

وبالتعويض نجد أن :

$$T = 196\, e^{-0.3(0.5\pi)} = 122\, N$$

القوة اللازمة للبدء برفع الحمل: تتعين هذه القوة عندما يكون الحبل على وشك الانزلاق باتجاه الأعلى .

وبالعودة إلى نفس العلاقة السابقة مع مراعاة الآتي :

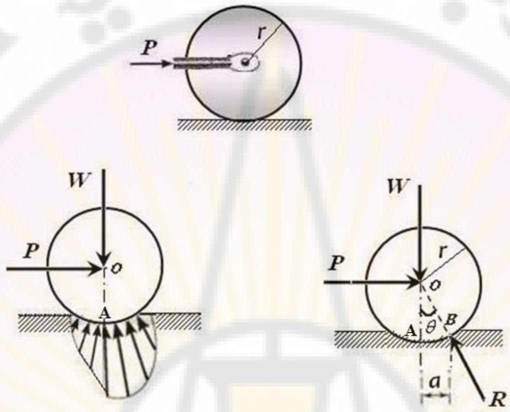
$$T_1 = 196\ N \ ,\ T_2 = T$$

وبالتعويض ينتج :

$$T = 196\, e^{0.3(0.5\pi)} = 314\, N$$

3– الاحتكاك التدحرجي (Rolling Friction):

تعدّ العجلة من الاكتشافات العظيمة في حياة البشر ، إذ إنها تساعد في نقل الحمولات الكبيرة بأقل جهد ممكن. وتدعى المقاومة التي تنشأ نتيجة لتدحرج جسم على سطح جسم آخر باحتكاك التدحرج. نفرض أن عجلة جسمها صلب ونصف قطرها r ووزنها W ، موضوعة على سطح أفقي غير قاسٍ كما هو مبين في الشكل(5–6). نلاحظ هنا أن تلامس العجلة مع سطح الاستناد يحدث في واقع الأمر على امتداد منخفض صغير نتيجة لتشوه سطح الاستناد ، وهذا ما أكدته التجارب .



الشكل(5–6)

إذا أثّرنا الآن في مركز العجلة بقوة أفقية **P** من أجل جرّ العجلة خارج المنخفض ، فإن شدة قوى الضغط الذي تتعرض له العجلة في منطقة التماس تكون أكبر في المقدمة مقارنة بالضغط في الجزء الخلفي من المنخفض. ونتيجة لذلك يؤثر رد الفعل **R** (محصلة قوى الضغط) في النقطة B التي تبعد مسافة مقدارها a عن نقطة التماس A . وبما أن خطوط تأثير القوى الثلاث **(P,W,R)** التي تخضع لها العجلة عندما تتدحرج بانتظام يجب أن تتقاطع في نقطة واحدة وهي مركز العجلة فإن ذلك يستدعي أن تميل القوة R بزاوية مقدارها θ بالنسبة للشاقول المار من مركز العجلة. ولتعيين القوة P اللازمة لتدحرج العجلة نكتب معادلة العزوم بالنسبة للنقطة B :

$$\Sigma \mathrm{M_B} = 0 \;\Rightarrow\; P\,(r\cos\theta) - W\,a = 0$$

$$P = \frac{a}{r\cos\theta} W \qquad (6)$$

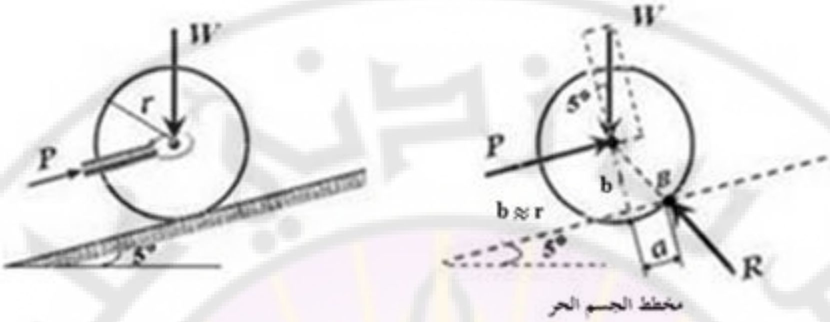
ونظرا لأن θ صغيرة فإن cos θ = 1 ويكون :

$$P \approx \frac{a}{r}\, W \qquad (7)$$

تسمى المسافة a بمعامل مقاومة التدحرج وهو يقدر بالمليمترات ، ويعتمد مقداره على مادة الجسم كما أنه يتحدد تجريبياً. على سبيل المثال ، يبلغ معامل مقاومة التدحرج لعجلة مطاطية مملوءة بالهواء المضغوط تتدحرج على طريق عام 0.75 mm - 0.50.

مثال رقم (36)

عجلة فولاذية نصف قطرها $r = 100\ mm$ ووزنها $W = 100\ N$ وضعت على سطح خشبي خشن يميل بزاوية مقدارها $5°$ كما هو موضح في الشكل . أوجد القوة **P** اللازمة لتدحرج العجلة بحركة منتظمة باتجاه الأعلى ، علماً بأن معامل احتكاك التدحرج يساوي $8.75mm$.



الحل : ....

نرسم مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل ثم نكتب معادلة العزوم الآتية:

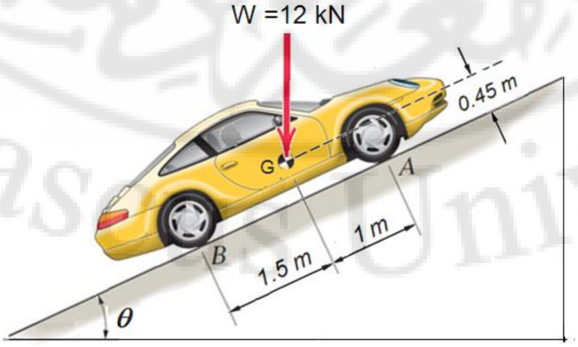
$$\sum M_B = 0$$

$$-P\,(r) + W\cos 5°\,(a) + W\sin 5°\,(r) = 0$$

$$P = 100\left[\cos 5°\left(\frac{8.75}{100}\right) + \sin 5°\right] = 17.4\ N$$

مثال رقم (37)

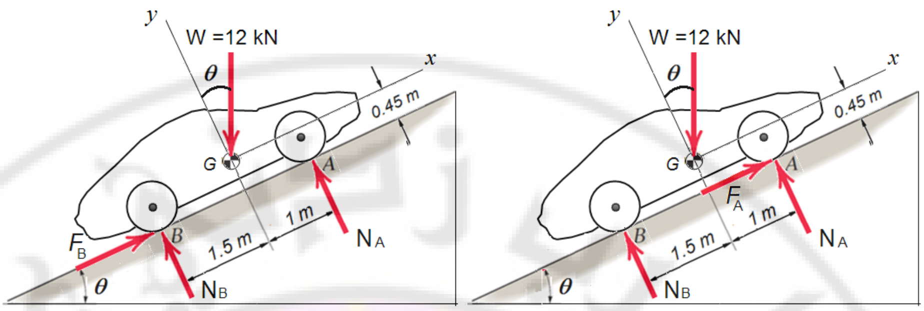
تتحرك سيارة حركة منتظمة على طريق رئيسي يصنع زاوية قدرها θ مع الافق كما في الشكل المرافق . فإذا كان وزن السيارة مع الحمولة $W=12\ kN$، وكان معامل الاحتكاك الستاتيكي بين عجلات السيارة وسطح الطريق يساوي $\mu_s = 0.6$، وكان نصف قطر عجلة السيارة يساوي $r = 0.3m$ ، فأوجد زاوية الصعود العظمى عند حركة السيارة بسرعة ثابتة وذلك في الحالتين الاتيتين : 1) السيارة ذات دفع خلفي . 2) السيارة ذات دفع أمامي . وذلك بإهمال مقاومة الهواء وكذلك مقاومة التدحرج الناجمة عن تشوه الاطارات المطاطية للعجلات .



الحل : ....

1) السيارة ذات دفع خلفي : نرسم مخطط الجسم الحر للسيارة كما هو مبين في الشكل (a)، حيث تمثِّل العجلة الامامية زوج العجلات الامامية ، بينما تمثِّل العجلة الخلفية زوج العجلات الخلفية . ويضمُّ المخطط القوى

الآتية : قوة الوزن W ، وقوة رد الفعل الناظمي N_A ، وقوة رد الفعل الناظمي N_B ، وقوة الاحتكاك F_B التي توافق اتجاه الحركة في هذا النوع من المسائل ، والتي تتولد نتيجة لتأثير العزم المنقول من المحرك الى العجلات الخلفية.



الشكل (a)　　　　الشكل (b)

قوة الاحتكاك : تتعين أكبر زاوية صعود θ_{max} يمكن للسيارة تجاوزها ، بعد ملاحظة أن قوة الاحتكاك F_B يجب أن تكون في حدودها القصوى . وبناء على ذلك نكتب :

$$F_B = F_{max} = \mu_s N = 0.6\, N_B$$

معادلات التوازن : بما أن القوى المؤثرة في السيارة بحالة توازن ،فإن المجموع الجبري لمساقطها على أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر. فإذا اتخذنا جملة الاحداثيات (x,y) الموضحة في الشكل ، حصلنا على معادلات التوازن الاتية:

$$\sum F_x = F_B - 12\,(\sin\theta_{max}) = 0$$

$$\sum F_y = N_A + N_B - 12\,(\cos\theta_{max}) = 0$$

$$\sum M_B = N_A(2.5) + 12\sin\theta_{max}\ (0.45) - 12\cos\theta_{max}\ (1.5) = 0$$

ونحصل من المعادلتين الاولى والثانية على العلاقة :

$$N_A = 12\cos\theta_{max} - 20\sin\theta_{max}$$

وبالرجوع الى المعادلة الثالثة نحصل على:

$$12(\cos\theta_{max}) - 44.6(\sin\theta_{max}) = 0$$

$$44.6\left(\frac{\sin\theta_{max}}{\cos\theta_{max}}\right) = 12 \quad \Rightarrow \tan\theta_{max} = \frac{12}{44.6} = 0.27$$

ونحصل من ذلك على :

$$\theta_{max} = \tan^{-1}(0.27) = 15.1°$$

واعتمادا على هذه النتيجة يمكننا الحصول على القوى المجهولة الآتية :

$$N_A = 6.415\ kN \quad ; \quad N_B = 5.176\ kN \quad , \quad F_B = 3.106\ kN$$

2) **السيارة ذات دفع أمامي** : نرسم مخطط الجسم الحر للسيارة كما في الشكل (b).

قوة الاحتكاك : تتعين قوة الاحتكاك F_A بالعلاقة :

$$F_A = F_{max} = \mu_s N = 0.6\, N_A$$

معادلات التوازن :

$$\sum F_x = F_A - 12\,(\sin\theta_{max}) = 0$$
$$\sum F_y = N_A + N_B - 12\,(\cos\theta_{max}) = 0$$
$$\sum M_A = -\,N_B(2.5) + 12\sin\theta_{max}\ (0.45) + 12\cos\theta_{max}\ (1) = 0$$

ونحصل من هذه المعادلات على العلاقة :

$$22.16(\sin\theta_{max}) = 7.2(\cos\theta_{max})$$
$$\tan\theta_{max} = \frac{7.2}{22.16} = 0.325$$
$$\theta_{max} = \tan^{-1}(0.325) = 18.0°$$

واعتمادا على هذه النتيجة يمكننا الحصول على القوى المجهولة الآتية :

$$N_A = 6.18\,kN \quad ; \quad N_B = 5.23\,kN \quad , \quad F_A = 3.71\,kN$$

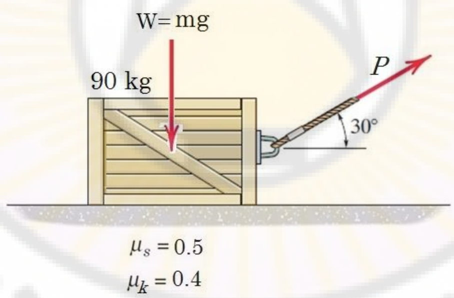
مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

يبين الشكل صندوقاً كتلته 90 kg ، يرتكز على سطح أفقي خشن ويخضع لتأثير قوة السحب **P**. والمطلوب : عيّن قوة الاحتكاك المماسية **F** بالإضافة إلى حالة الصندوق (سكون أم حركة) في الحالتين : a) P = 300 N b) P = 400 N

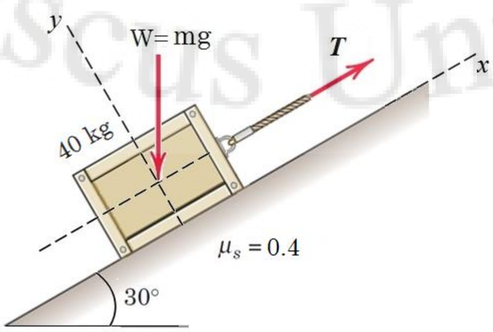
الجواب : a) F = 259.8 N (no motion) , b) F = 272.8 N (motion)



مسألة رقم (2) :

أوجد القيمة الدنيا لقوة الشد **T** ، الضرورية لمنع ثقل كتلته 40 kg من الانزلاق نحو الاسفل . بفرض أن معامل الاحتكاك بين هذا الثقل وسطح الاستناد المائل الخشن يساوي 0.4 .

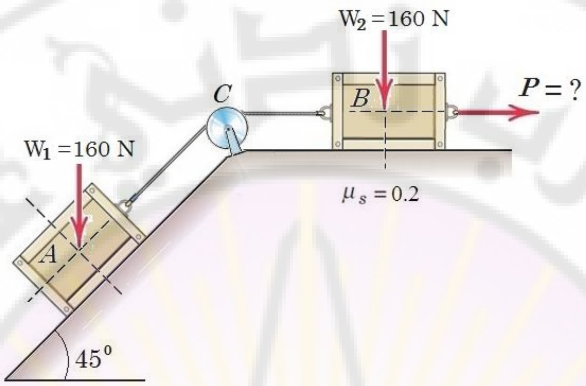
الجواب : T_{min} = 60.2 N



مسألة رقم (3) :

يربط جسمان متساويا الوزن بطرفي حبل يلتف على بكرة ثابتة كما هو موضح في الشكل المجاور . بفرض أن وزن كل من الجسمين 160 N ، وأن معامل الاحتكاك بين كل من الجسمين وسطح الاستناد الخشن $\mu_s = 0.2$. والمطلوب : أوجد القيمة الدنيا للقوة P الضرورية لمنع الجسمين A و B من الانزلاق نحو اليسار .وضّح إجابتك بالرسم.

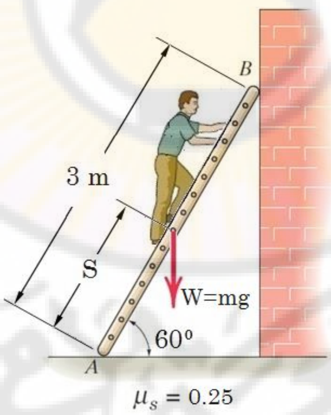
الجواب : $P_{min} = 58.5$ N



مسألة رقم (4) :

أوجد المسافة العظمى S التي يستطيع شخص كتلته m=70 kg أن يصعد إليها بأمان بحيث لا يتعرض السلم الموضح في الشكل (a) للانزلاق . مع العلم بأن معامل الاحتكاك بين السلم وسطح الارض الخشن يساوي الى 0.25 ، وأن الجدار أملس .

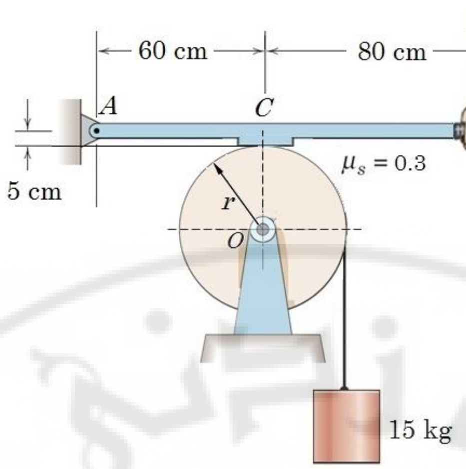
الجواب : S = 1.3 m



مسألة رقم (5) :

أوجد في وضع التوازن ، القيمة الدنيا للقوة P الضرورية لمنع سقوط حمل كتلته *15 kg* . بفرض أن معامل الاحتكاك بين ذراع الكبح AB والبكرة يساوي 0.3.

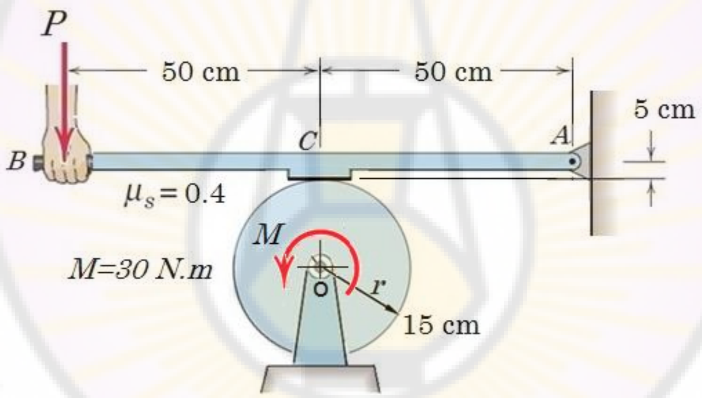
الجواب : $P_{min} = 215.25$ N



مسألة رقم (6) :

أوجد في وضع التوازن ، القيمة الدنيا للقوة P الضرورية لمنع دوران بكرة تخضع لتأثير عزم دوران مقداره 30 N.m . بفرض أن معامل الاحتكاك بين ذراع الكبح AB والبكرة يساوي 0.4.

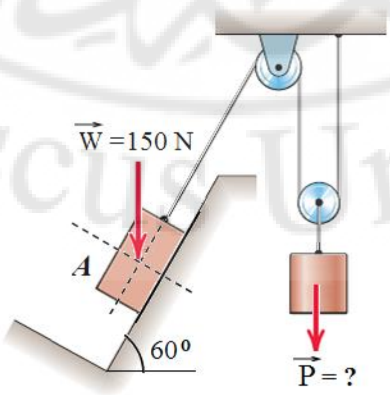
الجواب : $P_{min} = 260$ N



مسألة رقم (7) :

أوجد في وضع التوازن ، القيمة الدنيا للثقل P الضرورية لمنع صندوق A وزنه $150\ N$ من الانزلاق نحو الاسفل . بفرض أن معامل الاحتكاك بين هذا الصندوق وسطح الاستناد المائل الخشن يساوي 0.3.

الجواب : $P_{min} = 214.8$ N



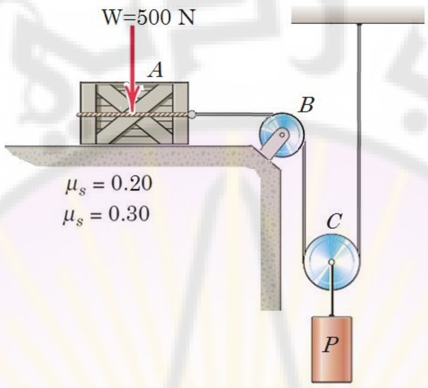
مسألة رقم (8) :

أوجد في وضع التوازن ، القيمة العظمى للثقل P الضرورية لبدء انزلاق صندوق A وزنه $500\ N$ ، وذلك في الحالتين الاتيتين :

a) معامل الاحتكاك بين الصندوق وسطح الاستناد الخشن يساوي 0.2.

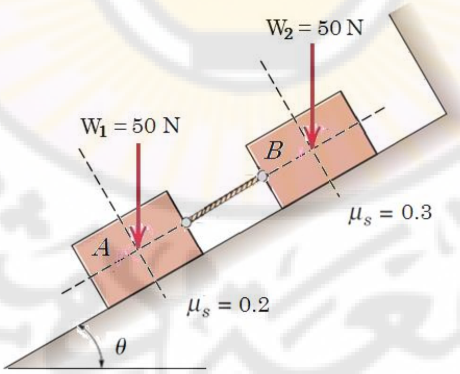
b) معامل الاحتكاك بين الصندوق وسطح الاستناد الخشن يساوي 0.3.

الجواب : a) $P_{max} = 200\ N$, b) $P_{max} = 300\ N$



مسألة رقم (9) :

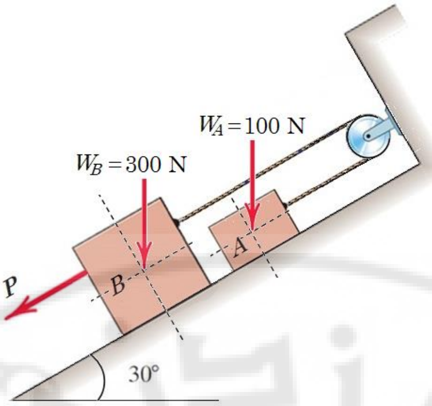
يُربط جسمان متساويا الوزن بقطعة حبل صغيرة كما هو موضح في الشكل المجاور . فإذا كان وزن كل من الجسمين 50 N ، وأن معامل الاحتكاك للجسم الاول A يساوي 0.2 ، وللجسم الثاني B يساوي 0.3 ، فأوجد زاوية ميل المستوي θ التي يبدأ عندها الانزلاق . الجواب : $\theta = 14^\circ$



مسألة رقم (10) :

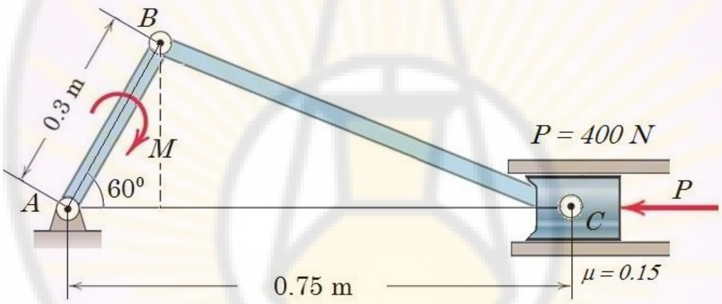
يُربط جسمان A وB بحبل يلتف على بكرة ثابتة كما في الشكل المرافق . فإذا كان وزن الجسم الاول $W_A=100\ N$ ، وكان وزن الجسم الثاني $W_B= 300\ N$ ، فأوجد مقدار القوة P عندما تكون المجموعة على وشك الحركة . اذا علمت ان معامل الاحتكاك بين سطح الاستناد المائل والجسمين يساوي 0.4 .

الجواب : $P = 38.56\ N$



مسألة رقم (11) :

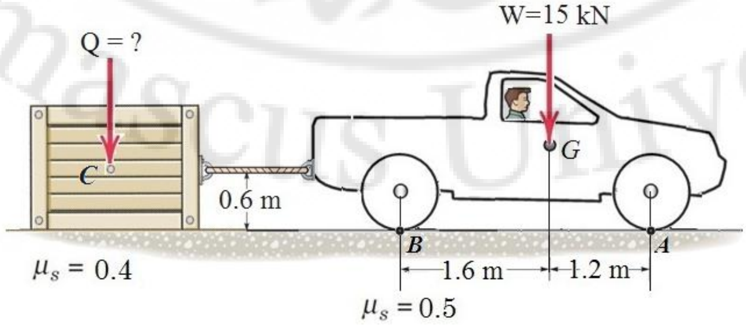
تتكون الجملة المركَّبة المبينة في الشكل من العمود AB وذراع التوصيل BC والمكبس C . فإذا كان المكبس تحت تأثير قوة قدرها $P=400\ N$ ، فأوجد مقدار العزم M الواجب تطبيقه على العمود ، بحيث يصبح المكبس على وشك الحركة نحو اليمين . اذا علمت ان معامل الاحتكاك بين المكبس وجدران الاسطوانة التي يتحرك بداخلها يساوي 0.15 .   الجواب : $M = 139$ N.m



مسألة رقم (12) :

شاحنة وزنها W=15 kN تقف على أرض أفقية ، وتحاول سحب حمل وزنه Q كما في الشكل المرافق . اذا علمت أن معامل الاحتكاك الستاتيكي بين عجلات السيارة وسطح الطريق $\mu_s = 0.5$ ، وأن معامل الاحتكاك الستاتيكي بين الحمل وسطح الطريق $\mu_s = 0.4$ ، فأوجد أكبر حمل تستطيع سحبه هذه الشاحنة وذلك في الحالتين الآتيتين: a- الشاحنة ذات دفع خلفي. b- الشاحنة ذات دفع رباعي .

الجواب : a) Q = 9 kN ; b) Q = 18.75 kN



الفصل السادس

توازن القوى الفراغية

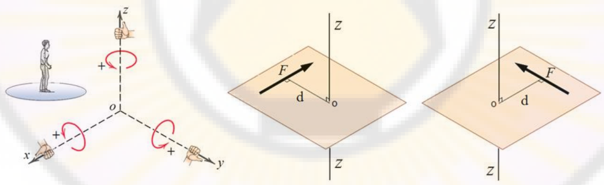
EQUILIBRIUM OF FORCES IN SPACE

1- عزم القوة بالنسبة إلى محور (Moment of a force about axis).
2- اختزال القوى (Force reduction).
3- معادلات التوازن (Equations of equilibrium) .

1- عزم القوة بالنسبة إلى محور : (Moment of a force about axis)

لكي ننتقل الى حل مسائل القوى الفراغية ، من الضروري التعرف على كيفية حساب عزم القوة بالنسبة لأي محور من المحاور الإحداثية كما هو واضح في المثالين (1)و(2).وفي هذه الحالة ينبغي مراعاة الامور الآتية :

- إذا كان اتجاه القوة عمودياً على محور الإحداثيات المختار فإن عزمها يساوي جداء مقدار هذه القوة في بأقصر مسافة عن ذلك المحور ، كما في الشكل(6-1).
- إذا كانت القوة موازية لمحور الإحداثيات المختار فإن عزمها حوله يساوي صفراً.
- إذا كان خط تأثير القوة يقطع محور الإحداثيات فإن عزمها حوله يساوي صفراً أيضاً.



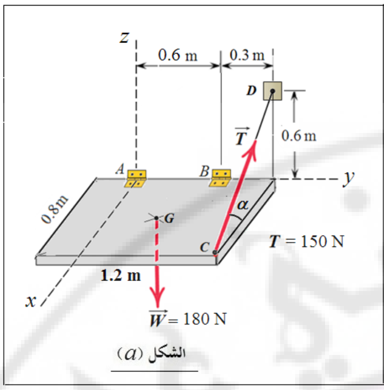
الشكل (6-1)

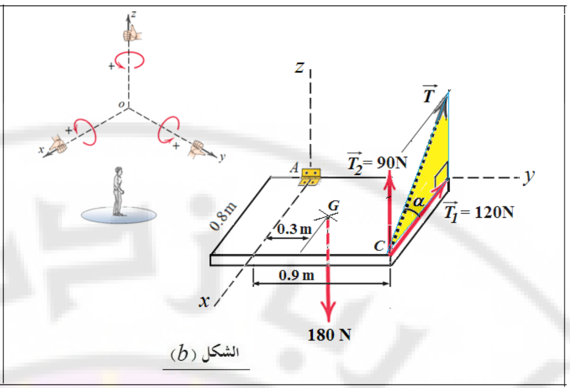
- تتعلق إشارة العزم باتجاه الدوران الذي تولده القوة . وتكون عادة موجبة ، إذا تبيّن للمشاهد من الطرف الموجب لمحور الاحداثيات أن الدوران يحدث في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة ، وتكون سالبة اذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة.
- كما يمكن استخدام قاعدة اليد اليمنى من أجل تحديد اشارة عزم الدوران الذي تولده القوة حول محور الاحداثيات .حيث يكون العزم موجبا ، اذا كان اتجاه الدوران الذي تحدثه القوة باتجاه ثني أصابع اليد اليمنى عندما يتجه الابهام بالاتجاه الموجب للمحور.

مثال رقم (38)

صفيحة متجانسة وزنها W=180 N ، وتحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الكبل CD المثبت في الجدار ،كما هو موضح في الشكل . اذا كانت قوة الشد T المتولدة في الكبل تساوي 150N فأوجد : 1- العزم الذي

تولده القوة W حول المسند A . 2- العزم الذي تولده قوة الشد حول المسند A. 3- العزم الاجمالي الناتج عن تأثير القوتين معاً.





الحل : ....

يتحدد مقدار العزم الذي تولده أية قوة حول النقطة المفروضة A باستخدام العلاقة :

$$\overrightarrow{M_A} = M_x\hat{\imath} + M_y\hat{\jmath} + M_z\hat{k}$$

وتتعلق إشارة العزم باتجاه الدوران الذي تولده القوة . وتكون عادة موجبة ، إذا تبيَّن للمشاهد من الطرف الموجب لمحور الاحداثيات أن الدوران يحدث في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة ، وتكون سالبة اذا كان اتجاه الدوران يحدث مع عقارب الساعة.

القوة الأولى W : نلاحظ ان هذه القوة توازي المحور الشاقولي z ، ومتعامدة مع المحورين x و y . وكما يبدو للمشاهد الموضح في الشكل ، فهي تولد عزماً سالباً حول المحور x ، وتولد عزماً موجباً حول المحور y ، بينما ينعدم تأثيرها الدوراني بالنسبة للمحور z (فهي تحاول فقط ازاحته على امتداد المحور). وبناء على ذلك نحسب عزم القوة المذكورة حول محاور الاحداثيات على النحو الاتي :

$$M_x = -180(0.3) = -54 \;\; [\text{N.m}]$$
$$M_y = 180(0.4) = 72 \;\; [\text{N.m}]$$
$$M_z = 0$$

وبالتعويض نحصل على العزم المطلوب بالنسبة الى النقطة A :

$$\overrightarrow{M_A} = -54\hat{\imath} + 72\hat{\jmath}$$
$$M_A = \sqrt{(-54)^2 + (72)^2} = 90 \; [\text{N}.m]$$

القوة الثانية T : نبدأ أولاً بتحليل هذه القوة الى مركبتين متعامدتين : الاولى T_1 توازي محور الاحداثيات x ، والثانية T_2 توازي المحور الشاقولي z كما هو واضح في الشكل (b) . ثم نحدد قيمة كل منهما على النحو الاتي :

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{0.6}{0.8} = 36.87°$$
$$T_1 = 150\cos 36.87° = 120 \;\; [\text{N}]$$
$$T_2 = 150\sin 36.87° = 90 \;\; [\text{N}]$$

وبناء على ذلك وانطلاقا من قاعدة العزوم، نحسب عزم القوة حول محاور الاحداثيات :

$$M_x = 90(0.9) = 81 \text{ [N.m]}$$
$$M_y = -90(0.4) = -36 \text{ [N.m]}$$
$$M_z = 120(0.9) = 108 \text{ [N.m]}$$

وبالتعويض نجد أن :
$$\overrightarrow{M_A} = 81\hat{\imath} - 36\hat{\jmath} + 108\hat{k}$$

$$M_A = \sqrt{(81)^2 + +(-36)^2 + (108)^2} = 140 \text{ [N.}m\text{]}$$

العزم الاجمالي للقوتين : يتعين مقدار العزم الاجمالي الذي توله القوتين بالعلاقة :

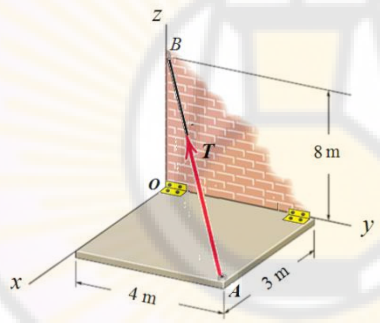
$$\overrightarrow{M_A} = \left(\sum M_x\right)\boldsymbol{i} + \left(\sum M_y\right)\boldsymbol{j} + \left(\sum M_z\right)\boldsymbol{k}$$

وبالتعويض ينتج أن :
$$\overrightarrow{M_A} = 27\boldsymbol{i} + 36\boldsymbol{j} + 108\boldsymbol{k}$$

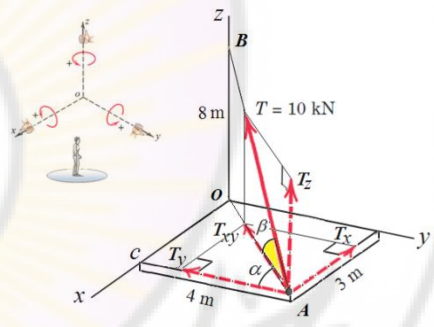
$$M_A = \sqrt{(27)^2 + +(36)^2 + (108)^2} = 117 \text{ [N.}m\text{]}$$

مثال رقم (39)

صفيحة مستطيلة الشكل ، تحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الكبل AB المثبَّت في الحائط، كما هو موضح في الشكل . اذا كانت قوة الشد T المتولدة في الكبل تساوي 10 kN فأوجد : 1-المركبات القائمة لقوة الشد.
2- العزم الذي تولده قوة الشد حول المركزo.



الشكل (a)



الشكل (b)

الحل :..

المركبات القائمة لقوة الشد T :

يوضح الشكل (b) كيفية تحليل قوة الشد T الى ثلاث مركبات متعامدة : الاولى T_x توازي محور الاحداثيات x ، والثانية T_y توازي محور الاحداثيات y ، والثالثة T_z توازي محور الاحداثيات z . وللحصول على المركبتين الاولى والثانية ، نسقط القوة T في البداية على المستوي الافقي xy ، فنحصل عندئذ على القوة T_{xy} ،والتي بتحليلها نحصل بعد ذلك على القوتين T_x وT_y . هذا وتتعين المركبات الثلاث المذكورة بالعلاقات الاتية :

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36.87° \ ; \ \beta = \tan^{-1}\frac{8}{5} = 58°$$
$$T_{xy} = T\cos\beta = 10(0.53) = 5.3 \text{ [kN]}$$
$$T_x = -T_{xy}\sin\alpha = -5.3(0.6) = -3.18 \text{ [kN]}$$
$$T_y = -T_{xy}\cos\alpha = -5.3(0.8) = -4.24 \text{ [kN]}$$

$$T_z = T_z \sin\beta = 10(0.85) = 8.5\ [\text{kN}]$$
$$\vec{T} = -3.18\boldsymbol{i} - 4.24\boldsymbol{j} + 8.5\boldsymbol{k}$$

عزم قوة الشد T :يتحدد مقدار العزم الذي تولده هذه القوة حول المركز O بالعلاقة :

$$\overrightarrow{M_o} = M_x\hat{\imath} + M_y\hat{\jmath} + M_z\hat{k}$$

وتتعلق إشارة العزم باتجاه الدوران الذي تولده القوة . وتكون عادة موجبة ، إذا تبيَّن للمشاهد من الطرف الموجب لمحور الاحداثيات أن الدوران يحدث في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة ، وتكون سالبة اذا كان اتجاه الدوران يحدث مع عقارب الساعة.

وبناء على ذلك وانطلاقا من قاعدة العزوم ،نحسب عزم القوة حول محاور الاحداثيات :

$$M_x = T_z(4) = 8.5(4) = 34\ [\text{kN.m}]$$
$$M_y = -T_z(3) = -8.5(3) = -25.5\ [\text{kN.m}]$$
$$M_z = 0$$

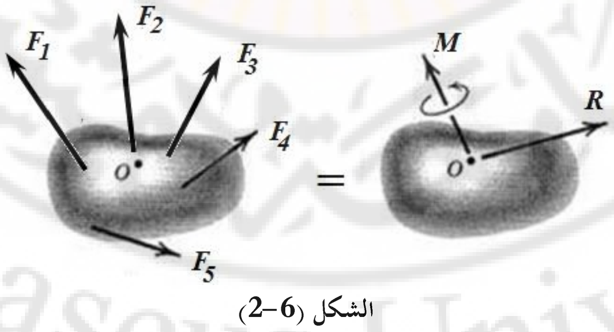
وبالتعويض نحصل على العزم المطلوب بالنسبة الى النقطة o :

$$\overrightarrow{M_o} = 34\hat{\imath} - 25.5\hat{\jmath}$$
$$M_o = \sqrt{(34)^2 + (-25.5)^2} = 42.5\ [\text{kN}.m]$$

2– اختزال القوى : (Force Reduction)

يمكننا كما هو واضح في الشكل (6–2) اختزال مجموعة من القوى الفراغية المؤثرة في جسم ما بطريقة مماثلة للطريقة التي استخدمت في حالة القوى الواقعة في مستوٍ واحد . ويجري عادة اختزال جملة القوى الفراغية إلى القوة **R** والمزدوجة **M** بالنسبة لمركز تحويل كيفي ، كمركز جملة الإحداثيات الديكارتية o مثلاً ، باستخدام العلاقات الآتية :

$$\mathbf{R} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} \qquad (1)$$
$$\mathbf{M} = (\Sigma M_x)\mathbf{i} + (\Sigma M_y)\mathbf{j} + (\Sigma M_z)\mathbf{k} \qquad (2)$$



الشكل (6–2)

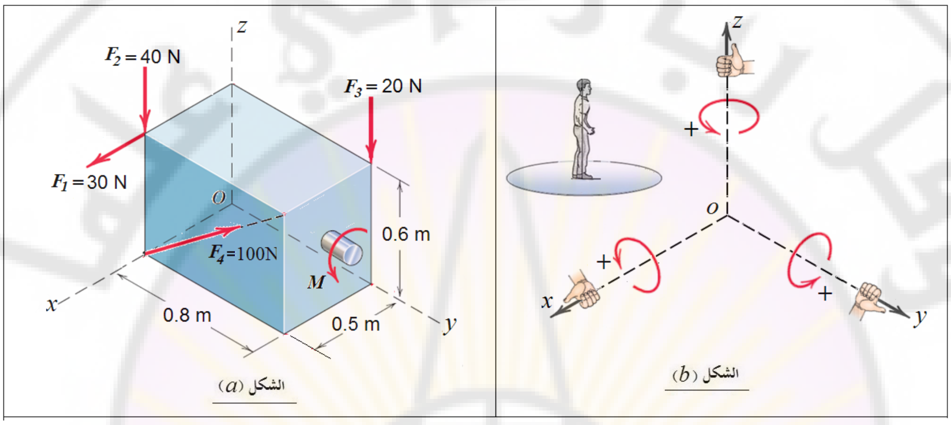
وعند اختزال مجموعة قوى فراغية ، فإننا نلاحظ إحدى الحالتين الآتيتين :

- الحالة الأولى : ويكون فيها الجداء العددي (السُّلَّمي) **R.M = 0** . في هذه الحالة تتحول مجموعة القوى المفروضة إما إلى قوة **R** فقط ، وإما إلى مزدوجة **M** فقط ، أو أن مجموعة القوى تقع في حالة توازن **(R=0 , M=0)** .

- الحالة الثانية : ويكون فيها الجداء العددي (السُّلَّمي) $\mathbf{R.M \neq 0}$. في هذه الحالة تتحول مجموعة القوى المفروضة إلى لولب حركي ، أي أن الجسم الذي يقع تحت تأثيرها تكون حركته لولبية .

مثال رقم (40)

يبين الشكل (a) متوازي مستطيلات يخضع لتأثير أربع قوى ، بالإضافة الى مزدوجة عزمها M=12N.m تؤثر في الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة. بفرض أن المزدوجة تقع في مستو يوازي المستوي OXZ . والمطلوب هو اختزال هذه المجموعة إلى قوة وعزم فقط.



الشكل (a) الشكل (b)

الحل : ....

تتحدد محصلة مجموعة من القوى الفراغية بالعلاقتين :

$$\mathbf{R} = (\Sigma\, F_x)\mathbf{i} + (\Sigma\, F_y)\mathbf{j} + (\Sigma\, F_z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M} = (\Sigma\, M_x)\mathbf{i} + (\Sigma\, M_y)\mathbf{j} + (\Sigma\, M_z)\mathbf{k}$$

ولإجراء الحساب نستخدم قاعدة اليد اليمنى أو عقارب الساعة من أجل تحديد اشارة عزم الدوران الذي تولده القوة حول محور الاحداثيات كما هو مبين في الشكل (b).حيث يكون العزم موجبا ، اذا كان اتجاه الدوران الذي تحدثه القوة بعكس عقارب الساعة ، أو باتجاه ثني أصابع اليد اليمنى عندما يتجه الابهام بالاتجاه الموجب للمحور . مع الانتباه الى أن عزم القوة يكون معدوما اذا كانت القوة موازية للمحور او قاطعة له .

نبدأ أولاً بتحليل القوة $\boldsymbol{F_4}$ الى مركبتين متعامدتين : الاولى $\boldsymbol{F_y}$ توازي محور الاحداثيات y ، والثانية $\boldsymbol{F_z}$ توازي المحور الشاقولي z كما هو واضح في الشكل (b) . ثم نحدد قيمة كل منهما على النحو الاتي :

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{0.6}{0.8} = 36.87°$$

$$F_y = 100\cos 36.87° = 80 \ \ [\mathrm{N}]$$

$$F_z = 100\sin 36.87° = 60 \ \ [\mathrm{N}]$$

بعد ذلك ، ولتسهيل الحل نقوم بحساب مساقط القوى وعزومها بالنسبة للمحاور الإحداثية باستخدام الجدول الآتي :

Forces		F_1	F_2	F_3	F_4
المساقط	x	30	0	0	0
	y	0	0	0	100 (cos α) = 80
	z	0	- 40	- 20	100 (sin α) = 60

العزوم	M_x	0	0	- 20(0.8)	0
	M_y	30(0.6)	40(0.5)	0	- 60(0.5)
	M_z	0	0	0	80(0.5)

عندئذ يمكن أن نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 30 \text{ N}$$
$$\Sigma F_y = 80 \text{ N}$$
$$\Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = -20(0.8) = -16 \text{ N.m}$$
$$\Sigma M_y = 30(0.6) + 40\,(0.5) - 60\,(0.5) + 12 = 20 \text{ N.m}$$
$$\Sigma M_z = 80(0.5 = 40 \text{ N.m}$$

وبالتعويض نحصل على القيم الشعاعية والعددية الاتية :

$$\mathbf{R} = 304\mathbf{i} + 80\mathbf{j} \quad \text{N}$$
$$R = \sqrt{(30)^2 + (80)^2} = 85.44 \text{ [N]}$$
$$\mathbf{M} = -16\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \quad \text{N-m}$$
$$M = \sqrt{(-16)^2 + +(20)^2 + (40)^2} = 47.5 \text{ [N.}m]$$

وبما أن **R** و **M** لا يساويان الصفر فإنه من الضروري حساب الجداء الآتي:

$$\mathbf{R} \,.\, \mathbf{M} = \Sigma F_x \,.\, \Sigma M_x + \Sigma F_y \,.\, \Sigma M_y + \Sigma F_z \,.\, \Sigma M_z$$
$$\mathbf{R} \,.\, \mathbf{M} = 30\,(-16) + 80\,(20) + 0\,(40) = 1120$$

وطالما أن هذا الجداء لا يساوي صفراً فإن المتجهين **R** و **M** غير متعامدين ولهذا فإن مجموعة القوى المفروضة تتحول إلى لولب حركي .

3– معادلات التوازن :(Equations of Equilibrium)

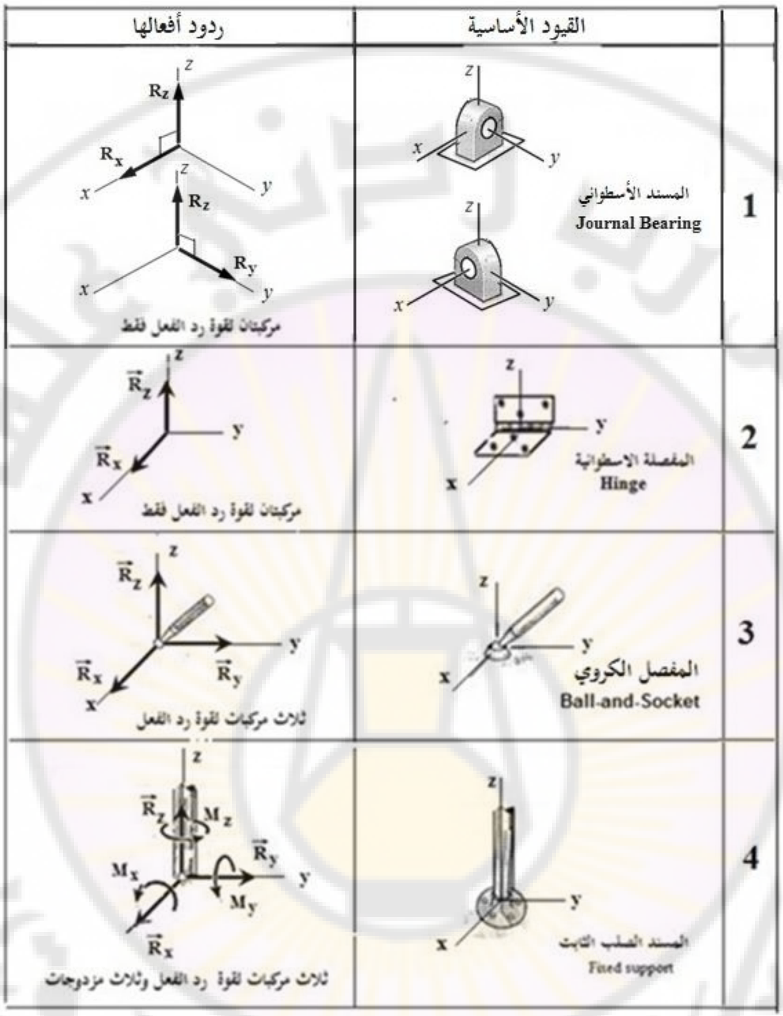
إن دراسة توازن جسم صلب يخضع لتأثير مجموعة من القوى الفراغية لا تختلف عن دراسة توازن جسم صلب يخضع لتأثير مجموعة من القوى المستوية . الفرق الوحيد هو أن عدد المجاهيل وعدد المعادلات يكون أكبر عند دراسة أنظمة القوى ذات الأبعاد الثلاثة . وبما أننا نستطيع على وجه العموم تحويل أية مجموعة من القوى الفراغية إلى جملة مكافئة أبسط تتألف من قوة **R** تساوي $\Sigma \mathbf{F}$ ومزدوجة **M** عزمها يساوي $\Sigma \mathbf{M_o}$ عندئذ نحصل على معادلتي التوازن بالصيغة الشعاعية الآتية :

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad (3)$$
$$\Sigma \mathbf{M_o} = \mathbf{0} \qquad (4)$$

وفي حل المسائل يجري عادة استخدام جملة المعادلات الجبرية البسيطة الآتية :

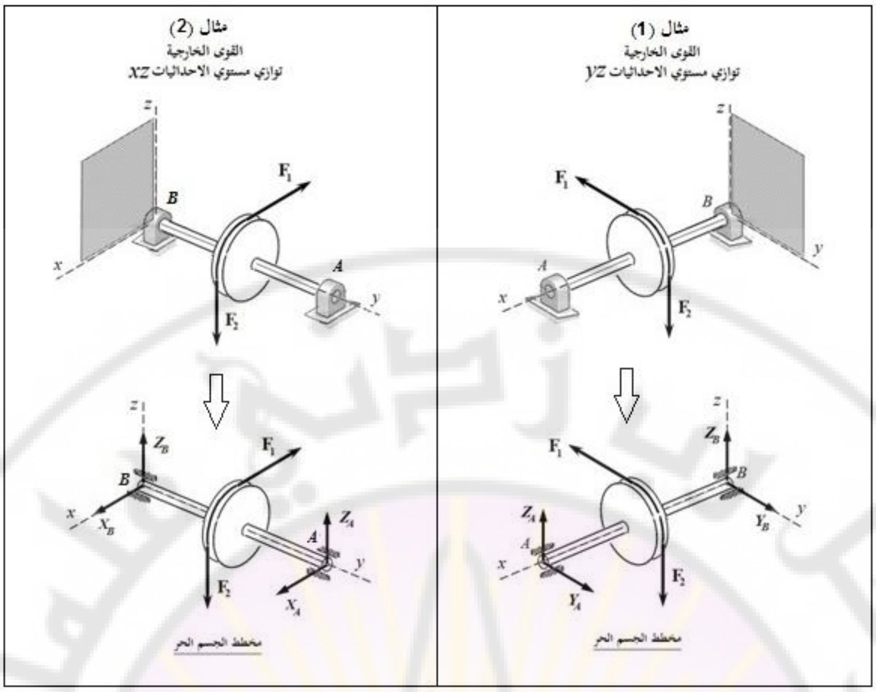
$$\begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array} \qquad (5)$$

ولكي نقوم بتطبيق هذه المعادلات في مسائل القوى الفراغية ، من الضروري في البداية رسم مخطط الجسم الحر الذي يوضح جميع القوى المؤثرة فيه بما في ذلك ردود أفعال المساند والقيود . ولهذا يبين الشكل (4–2) كيفية تحديد ردود الأفعال في الأنواع المختلفة للمساند والقيود التي تصادفنا في المسائل الفراغية ، وتشمل الآتي :



الشكل(6–3)

1. المسند الاسطواني (Journal Bearing) : عندما يقيد جسم بمسند اسطواني، ويخضع في الوقت نفسه لتأثير قوى خارجية أشعتها موازية لمستو معين ، فإن رد الفعل يكون مجهول الاتجاه ، ويحلَّل عند حل المسائل إلى مركبتين باتجاه المحورين المتعامدين مع محور ذلك الجسم. وهنا سينحصر اهتمامنا على المسائل التي تكون فيها أشعة القوى الخارجية موازية لأحد المستويين (yz) أو (xz) من مستويات جملة الإحداثيات القائمة كما هو واضح في الشكل (4–3).



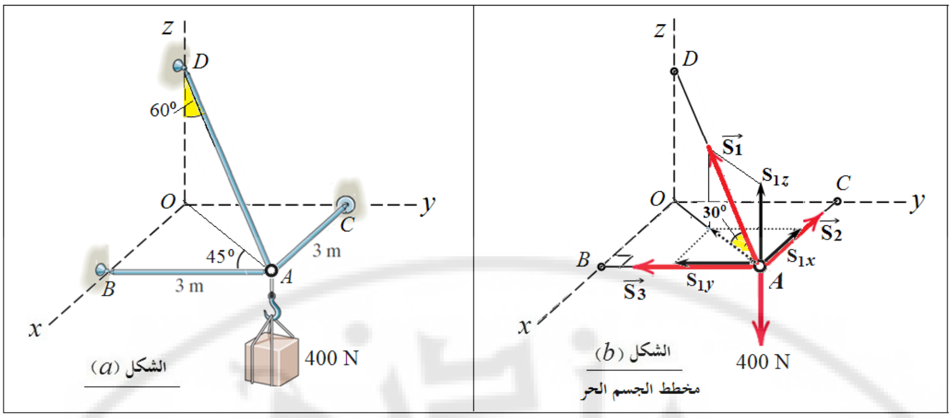
الشكل(6–4)

2. المفصلة الاسطوانية (Hinge) : عندما يقيد جسم ثلاثي الأبعاد بمفصلة اسطوانية، ويخضع في الوقت نفسه لتأثير قوى خارجية من النوع المذكور سابقاً ، فإن رد الفعل يكون مجهول الاتجاه ويحلل عندئذ إلى مركبتين كما هو مبين في الشكل .
3. المفصل الكروي (Ball-and-Socket) : عندما يقيد جسم ثلاثي الأبعاد بمفصل كروي ، فإن رد الفعل يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى ثلاث مركبات.
4. المسند الصلب الثابت لجسم ثلاثي الأبعاد (Fixed support) : عندما يثبت طرف جسم ثلاثي الأبعاد بشكل صلب ، فإن رد الفعل يكافئ ثلاث مركبات لقوة رد الفعل وثلاث مزدوجات.

توضح الأمثلة المحلولة الآتية كيفية استخدام شروط التوازن في حل المسائل المتعلقة بأنظمة القوى ذات الأبعاد الثلاثة .

مثال رقم (41)

يُعلَّق حمل وزنه $P = 400$ N بثلاثة قضبان مهملة الوزن ، ومتصلة معاً اتصالاً مفصلياً في النقطة A ، ومُثبَّتة تثبيتاً مفصلياً في المساند B وC وD الواقعة على محاور الاحداثيات المتعامدة ، كما هو موضح في الشكل (a) . والمطلوب : أوجد القوى الداخلية المتولدة في هذه القضبان ، إذا كانت الزاوية التي يصنعها القضيب AD مع المستوي الشاقولي $60°$ ، وكان AB=AC=3m .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن العقدة A ، ولهذا نرسم مخطط الجسم للحر كما هو واضح في الشكل (b) .وهنا نلاحظ حالة توازن مجموعة من القوى الفراغية المتلاقية .

معادلات التوازن : نبدأ أولاً بتحليل القوة المائلة S_1 الى ثلاث مركبات متعامدة : الاولى S_{1x} توازي محور الاحداثيات x ، والثانية S_{1y} توازي محور الاحداثيات y ، والثالثة S_{1z} توازي محور الاحداثيات z كما في الشكل (b). وللحصول على المركبتين الاولى والثانية ، نسقط القوة S_1 في البداية على المستوي الافقي xy ، ثم نحللها بعد ذلك الى مركبتين ، نستطيع بسهولة حسابهما بالعلاقتين الاتيتين :

$$S_{1x} = -S_1 \cos 30° \,(\sin 45°)$$
$$S_{1y} = -S_1 \cos 30° \,(\cos 45°)$$

وبما أن القوى المؤثرة في العقدة A بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها على محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر . واعتماداً على ما سبق يمكن أن نكتب معادلات التوازن الاتية :

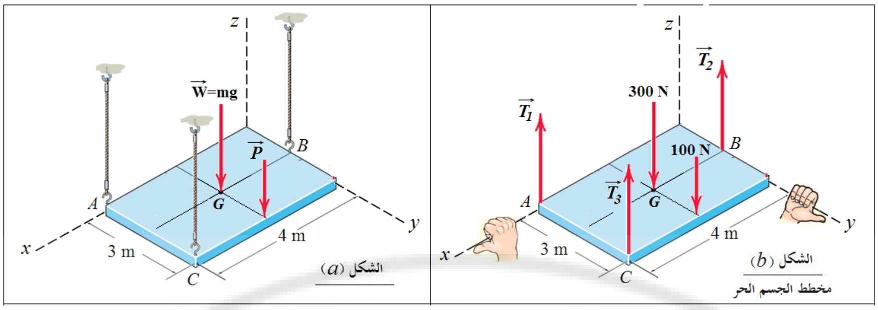
$$\sum F_x = -S_1 \cos 30° \,(\sin 45°) - S_2 = 0$$
$$\sum F_y = -S_1 \cos 30° \,(\cos 45°) - S_3 = 0$$
$$\sum F_z = S_1 \sin 30° - 400 = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد : $S_1 = 800 \text{ [N]} \quad , \quad S_2 = S_3 = -490 \text{ [N]}$

تُبيِّن هذه النتيجة أن القضيب المائل AD في حالة شد ، بينما القضيبان AB وAC فهما في حالة انضغاط .

مثال رقم (42)

صفيحة مستطيلة الشكل ومتجانسة ، وزنها $300N$ ، تُعلَّق بشكل أفقي بثلاثة حبال شاقولية ، ثم تُطبَّق عليها قوة خارجية قدرها $P=100N$ كما هو موضح في الشكل (a). والمطلوب أوجد قوى الشد المتولدة في الحبال الثلاثة الحاملة للصفيحة .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر للصفيحة ، والذي يضم خمس قوى متوازية فقط ،كما هو مبين في الشكل (b) . في هذه الحالة تتجه قوى الشد الثلاث المجهولة T_1 وT_2 وT_3 باتجاه الاعلى وعلى امتداد الحبال الحاملة للصفيحة .

معادلات التوازن : بما أن القوى المؤثرة في الصفيحة بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها على محور الاحداثيات z يجب أن يكون مساوياً الصفر ، كما أن المجموع الجبري لعزوم القوى حول محوري الاحداثيات x وy يجب أن يكون مساوياً الصفر أيضاً. وبناء على ما سبق ، واعتماداً على قاعدة اليد اليمنى أو عقارب الساعة في تحديد إشارات العزوم ، يمكن أن نكتب معادلات التوازن :

$$\sum F_z = T_1 + T_2 + T_3 - 300 - 100 = 0$$

$$\sum M_x = T_2(1.5) + T_3(3) - 300(1.5) - 100(3) = 0$$

$$\sum M_y = -T_1(4) - T_3(4) - 300(2) - 100(2) = 0$$

وبعد التبسيط تأخذ هذه المعادلات الصيغة الآتية :

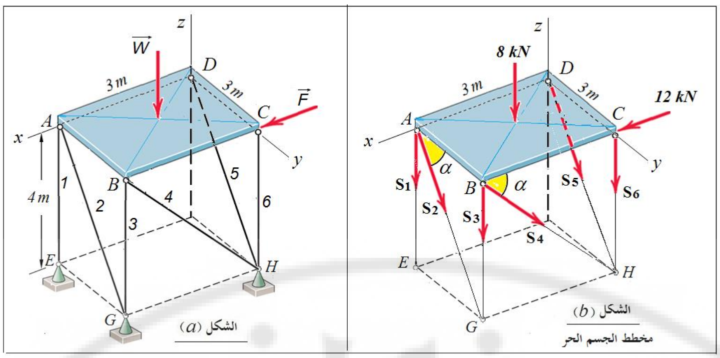
$$T_1 + T_2 + T_3 = 400$$
$$T_2 + 2T_3 = 500 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 500 - 2T_3$$
$$T_1 + T_3 = 200 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 200 - T_3$$

من هذه المعادلات الثلاث ينتج لدينا قوى الشد الآتية :

$$T_1 = 50\ [\mathrm{N}] \quad ; \quad T_2 = 200\ [\mathrm{N}] \quad ; \quad T_3 = 150\ [\mathrm{N}]$$

مثال رقم (43)

صفيحة ABCD متجانسة وأفقية وزنها W=8 kN ، ثُبِّتت على ستة قضبان كما هو موضح في الشكل (a) . أوجد القوى الداخلية المتولدة في قضبان الاستناد إذا علمت أن القوة الأفقية **F** الموازية للمحور x تساوي 12 kN. الأبعاد موضحة في الشكل .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن الصفيحة ABCD لهذا نفرض أن جميع القضبان في حالة شد ثم نرسم مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل (*b*) . في هذه الحالة نستطيع أن نحسب الزاوية α من المثلث القائم ABG ، وذلك على النحو الآتي :

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.13° \Rightarrow \sin\alpha = 0.8\ ;\ \cos\alpha = 0.6$$

معادلات التوازن : بما أن القوى المؤثرة في الصفيحة بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها على أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر ، كما أن المجموع الجبري لعزوم القوى حول أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر أيضاً. وبناء على ما سبق ، واعتماداً على قاعدة اليد اليمنى أو عقارب الساعة في تحديد إشارات العزوم ، يمكن أن نكتب معادلات التوازن :

$\Sigma F_x = -S_4 \cos\alpha + 12 = 0$
$\Sigma F_y = S_2 \cos\alpha + S_5 \cos\alpha = 0$
$\Sigma F_z = -S_1 - S_2 \sin\alpha - S_3 - S_4 \sin\alpha - S_5 \sin\alpha - S_6 - 8 = 0$
$\Sigma M_x = -S_3 (3) - S_4 \sin\alpha (3) - S_6 (3) - 8 (1.5) = 0$
$\Sigma M_y = S_1 (3) + S_2 \sin\alpha (3) + S_3 (3) + S_4 \sin\alpha (3) + 8(1.5) = 0$
$\Sigma M_z = S_2 \cos\alpha (3) + S_4 \cos\alpha (3) - 12 (3) = 0$

وبالتعويض تأخذ معادلات التوازن الصيغة الاتية :

$\Sigma F_x = -S_4 (0.6) + 12 = 0$
$\Sigma F_y = S_2 (0.6) + S_5 (0.6) = 0$
$\Sigma F_z = -S_1 - S_2 (0.8) - S_3 - S_4 (0.8) - S_5 (0.8) - S_6 - 8 = 0$
$\Sigma M_x = -S_3 (3) - S_4 (0.8) (3) - S_6 (3) - 8 (1.5) = 0$
$\Sigma M_y = S_1 (3) + S_2 (0.8) (3) + S_3 (3) + S_4 (0.8) (3) + 8(1.5) = 0$
$\Sigma M_z = S_2 (0.6) (3) + S_4 (0.6) (3) - 12 (3) = 0$

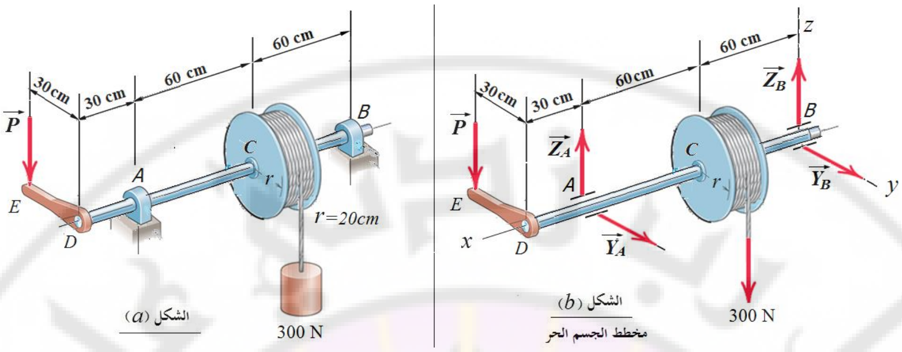
وبحل هذه المعادلات نجد :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
- 4 kN	0	-16 kN	20 kN	0	- 4 kN

تُبيِّن هذه النتيجة أن القضبان : 1 و3 و 6 في حالة ضغط ، وأن القضيب الرابع في حالة شدّ ، وأن القضيبين الثاني والخامس لا تتولد فيهما قوى داخلية .

مثال رقم (44)

يقوم ملفاف برفع حمل مقداره 300 N كما هو موضح في الشكل (a) . أوجد في وضع التوازن قوة الضغط الشاقولية P المؤثرة على الذراع الافقي DE ، وكذلك مركّبات ردي فعل المسندين A و B .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : نختار محاور احداثية ، بحيث ينطبق مركزها على أحد المسندين ، ثم نرسم مخطط الجسم الحر للملفاف والعمود معاً كما في الشكل (b) .

معادلات التوازن : لكتابة معادلات التوازن، نحسب مساقط كل القوى على محاور الاحداثيات ، وكذلك عزومها حول تلك المحاور ، مع ملاحظة أن مساقط كل القوى على المحور الافقي x تساوي صفراً ، فنحصل عندئذ على الجدول الآتي :

	Y_A	Z_A	Y_B	Z_B	P	W
Y	Y_A	0	Y_B	0	0	0
Z	0	Z_A	0	Z_B	- P	-300
M_x	0	0	0	0	P(0.3)	-300(0.2)
M_y	0	$-Z_A(1.2)$	0	0	P(1.5)	300(0.6)
M_z	$Y_A(1.2)$	0	0	0	0	0

واستناداً إلى معطيات هذا الجدول نكتب معادلات التوازن الآتية :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A + Y_B = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_B - P - 300 = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P(0.3) - 300(0.2) = 0$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -Z_A(1.2) + P(1.5) + 300(0.6) = 0$$

$$\Sigma M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A(1.2) = 0$$

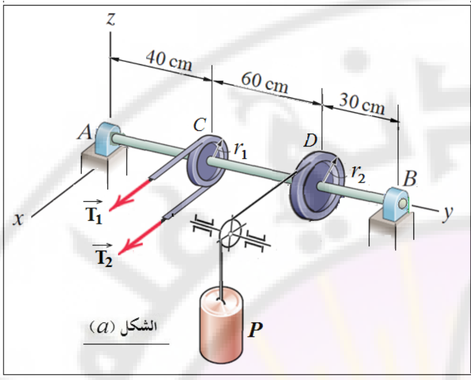
وبحل هذه المعادلات نجد :

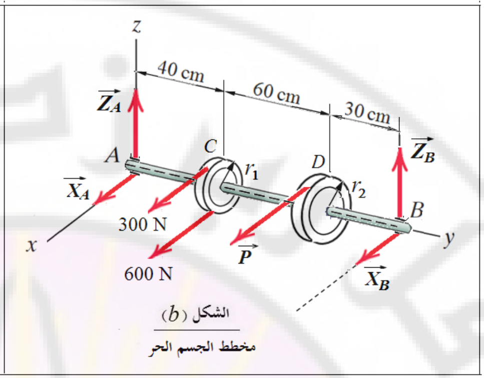
P	Y_A	Z_A	Y_B	Z_B
200 N	0	400 N	0	100 N

تُبيِّن هذه النتيجة أن الجملة تقع تحت تأثير قوى متوازية شاقولية فقط .

مثال رقم (45)

يبين الشكل (a) عموداً أفقياً يحمل البكرتين C و D ، ويرتكز على المسندين الاسطوانيين A و B. أوجد في وضع التوازن مقدار الثقل المرفوع P ، والمركّبات القائمة لردّي فعل المسندين الاسطوانيين A و B ، إذا علمت أن قوتي الشد المؤثرتين في سير البكرة C هما: T_1=300N و T_2=600 N .





الحل : ....

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن العمود مع الأجسام المثبتة عليه . وبناء على ذلك نرسم مخطط الجسم الحر لهذه الجملة كما هو واضح في الشكل (b). وهنا نلاحظ بأن لكل من ردّي فعل المسندين A وB مُركّبتان فقط ، باتجاه المحورين X و Z .

معادلات التوازن : لكتابة معادلات التوازن ، نحسب مساقط كل القوى على محاور الاحداثيات ، وكذلك عزومها حول تلك المحاور ، مع ملاحظة أن مساقط كل القوى على المحور الافقي y تساوي الى الصفر ، فنحصل عندئذ على الجدول الآتي :

Forces	P	T_1	T_2	R_A	R_B
X	P	300	600	X_A	X_B
Z	0	0	0	Z_A	Z_B
M_x	0	0	0	0	Z_B (1.3)
M_y	P(0.2)	-300(0.15)	- 600(0.15)	0	0
M_z	-P(1)	-300(0.4)	- 600(0.4)	0	$-X_B$ (1.3)

وبما أن القوى المؤثرة في الجملة المدروسة بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها وعزومها بالنسبة إلى أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر. واستناداً الى الجدول السابق نستطيع أن نكتب معادلات التوازن الاتية :

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; P + 300 + 600 + X_A + X_B = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \;\Rightarrow\; Z_A + Z_B = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \;\Rightarrow\; Z_B\,(1.3) = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \;\Rightarrow\; P\,(0.2) - 300\,(0.15) - 600\,(0.15) = 0$$

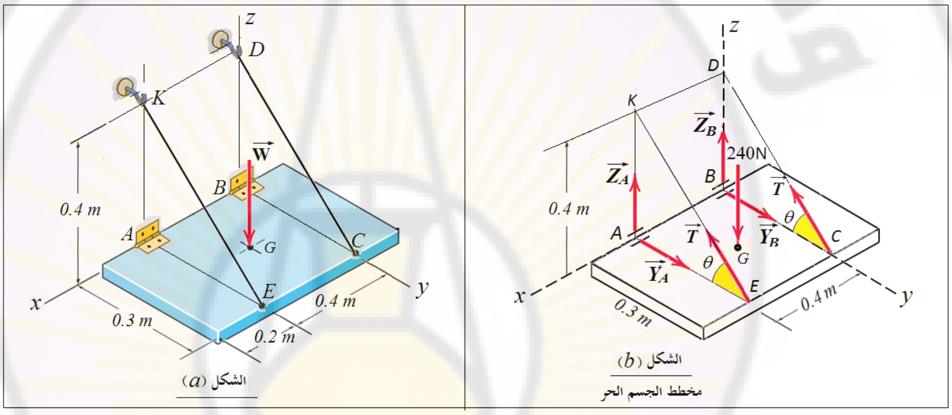
$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow -P(1) - 300(0.4) - 600(0.4) - X_B(1.3) = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

P	X_A	Z_A	X_B	Z_B
225 N	-1575 N	0	450 N	0

مثال رقم (46)

قاعدة متجانسة شكلها مستطيل ، ثُبِّتت في الحائط بواسطة المفصلتين الاسطوانيتين A وB ، وتحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الكبلين CD و EK كما هو مبين في الشكل (a). إذا علمت أن وزن القاعدة W=240 N ، وأن الشدّ متماثل في الكبلين ، فأوجد عندئذ قوة الشدّ **T** المؤثرة في كل منهما ، وكذلك مركّبات ردّي فعل المفصلتين A وB .



الشكل (a)　　الشكل (b) مخطط الجسم الحر

الحل : ....

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر للقاعدة كما في الشكل (b).وفيه نلاحظ بأن لكل من ردّي فعل المسندين A وB مُركّبتان فقط ، باتجاه المحورين y و z. كما تتعين زاوية ميل قوة الشد T من المثلث KAE وباستخدام العلاقة :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0.4}{0.3} = 53.13° \Rightarrow \sin\alpha = 0.8\,;\ \cos\alpha = 0.6$$

معادلات التوازن : بما أن القوى المؤثرة في القاعدة بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها وعزومها بالنسبة إلى أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر. وطالما أن جميع مساقط القوى على المحور x في هذه المسألة معدومة ، لذا نستطيع أن نكتب خمس معادلات فقط ، وذلك على النحو الآتي :

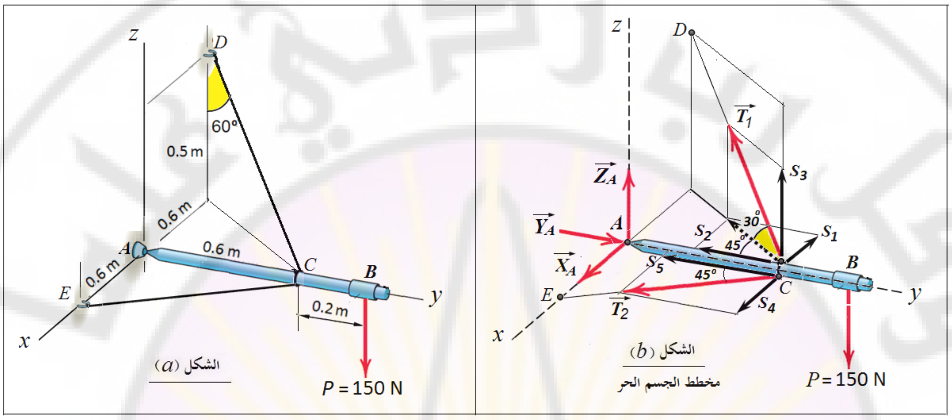
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - 2T\cos\theta = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B - 2T\sin\theta - 240 = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow 2T\sin\theta\,(0.3) - 240(0.15) = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow -Z_A(0.4) - T\sin\theta\,(0.4) + 240(0.2) = 0$$
$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow Y_A(0.4) - T\cos\theta\,(0.4) = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد القوى المجهولة :

T	Y_A	Z_A	Y_B	Z_B
75 N	45 N	60 N	45 N	60 N

مثال رقم (47)

أنبوب معدني AB مهمل الوزن ، طوله 0.8m ، يخضع لتأثير قوة شاقولية مقدارها P=150 N ، ويحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الكبلين CD و CE كما هو مبين في الشكل (a). أوجد قوتي الشدّ المتولدتين في الكبلين ، وكذلك المركّبات القائمة لردّ فعل المفصل الكروي A . جميع الابعاد موضحة في الشكل .



الحل : ....

مخطط الجسم الحر : نرسم مخطط الجسم الحر للأنبوب AB كما في الشكل(b) ، حيث تؤثر فيه القوة الخارجية P ، وردود الافعال : X_A, Y_A, Z_A, T_1, T_2.

معادلات التوازن : : نبدأ أولاً بتحليل قوة الشد T_1 الى ثلاث مركبات متعامدة : الاولى S_1 توازي محور الاحداثيات x ، والثانية S_2 تنطبق على محور الاحداثيات y ، والثالثة S_3 توازي محور الاحداثيات z كما في الشكل (b). وللحصول على المركبتين الاولى والثانية ، نسقط القوة T_1 في البداية على المستوي الافقي xy ، ثم نحللها الى مركبتين متعامدتين . بعد ذلك نقوم بتحليل قوة الشد T_2 الى مركبتين متعامدتين : الاولى S_4 توازي محور الاحداثيات x والثانية S_5 تنطبق على محور الاحداثيات y . هذا وتتعين المركبات الخمس المذكورة بسهولة بالعلاقات الاتية :

$$S_1 = S_2 = T_1(\cos 30°)(\sin 45°) = (0.612)\, T_1$$

$$S_3 = T_1(\sin 30°) = 0.5\,(T_1)$$

$$S_4 = S_5 = T_2(\sin 45°) = (0.707) T_2$$

وبما أن القوى المؤثرة في الانبوب بحالة توازن ، فإن المجموع الجبري لمساقطها وعزومها بالنسبة إلى أي محور من محاور الاحداثيات يجب أن يكون مساوياً الصفر. وبعد ملاحظة أن جميع عزوم القوى حول المحور y في هذه المسألة معدومة ، لذا نستطيع أن نكتب خمس معادلات فقط ، وذلك على النحو الاتي :

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A - S_1 + S_4 = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Y_A - S_2 - S_5 = 0$

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z_A + S_3 - 150 = 0$

$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \; S_3\,(0.6) - 150\,(0.8) = 0$

$\Sigma M_z = 0 \quad \Rightarrow \; S_1\,(0.6) - S_4\,(0.6) = 0$

وبالتعويض عن قيم مركبات قوتي الشد نحصل على :

$$X_A - (0.612)\,T_1 + (0.707)T_2 = 0$$

$$Y_A - (0.612)\,T_1 - (0.707)T_2 = 0$$

$$Z_A + (0.5)\,T_1 - 150 = 0$$

$$(0.5)(0.6)T_1 - 150(0.8) = 0$$

$$(0.612)(0.6)T_1 - (0.707)(0.6)T_2 = 0$$

وبحل جملة المعادلات هذه نجد أن :

T_1	T_2	X_A	Y_A	Z_A
400 N	346 N	0	490 N	-50 N

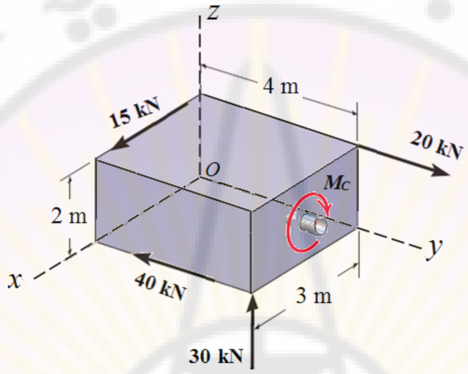
مسائل غير محلولة

UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

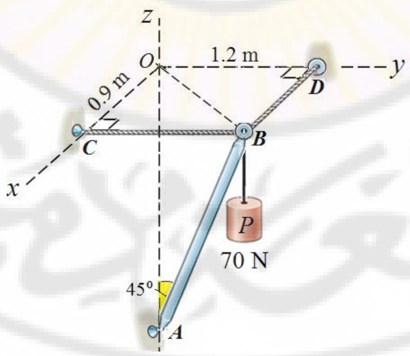
يُبيِّن الشكل المرافق متوازي مستطيلات يخضع لتأثير ثلاث قوى خارجية بالإضافة الى مزدوجة Couple عزمها $M_c=10$ kN.m . والمطلوب : اختزال هذه المجموعة إلى قوة وعزم فقط ، وذلك بتطبيق المعطيات الموضحة في الشكل.

الجواب : $\mathbf{R} = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$, $\mathbf{M} = 80\mathbf{i} - 70\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$



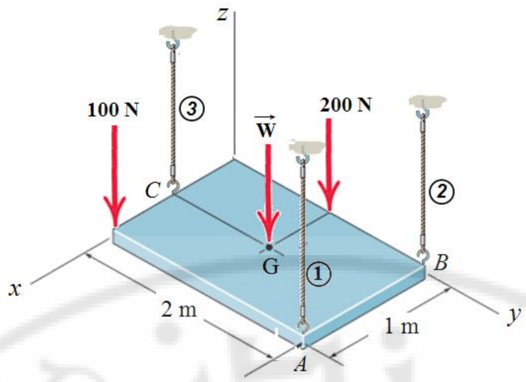
مسألة رقم (2) :

يُعلَّق حمل وزنه P = 70 N بالذراع المائل AB ، وهو مشدود بحبلين BC وBD كما في الشكل المرافق . والمطلوب : ارسم مخطط الجسم الحر للعقدة B ، ثم أوجد قوة الضغط الداخلية S المتولدة في الذراع AB ، وكذلك قوتي الشد T1 وT2 المتولدتين في الحبلين BC وBD على الترتيب . الجواب : $T_1 = 56$ N , $T_2 = 42$, S = -99 N N



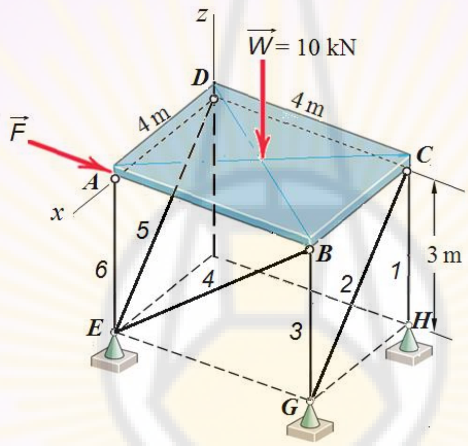
مسألة رقم (3) :

صفيحة مستطيلة الشكل ومتجانسة ، وزنها W= 160 N ، تُعلَّق بشكل أفقي بثلاثة حبال شاقولية كما في الشكل المرافق . والمطلوب : ارسم مخطط الجسم الحر للصفيحة ، ثم أوجد قوى الشد المتولدة في الحبال الثلاثة الحاملة لها.　الجواب : $T_1= 40N$, $T_2 = 140N$, $T_3 = 280$ N



مسألة رقم (**4**) :

صفيحة ABCD متجانسة وأفقية وزنها W=10 kN ، ثُبِّتت على ستة قضبان كما هو موضح في الشكل .والمطلوب : ارسم مخطط الجسم الحر للصفيحة ، ثم أوجد القوى الداخلية المتولدة في قضبان الاستناد إذا علمت أن القوة الأفقية **F** الموازية للمحور y تساوي 8 kN. الأبعاد موضحة في الشكل .

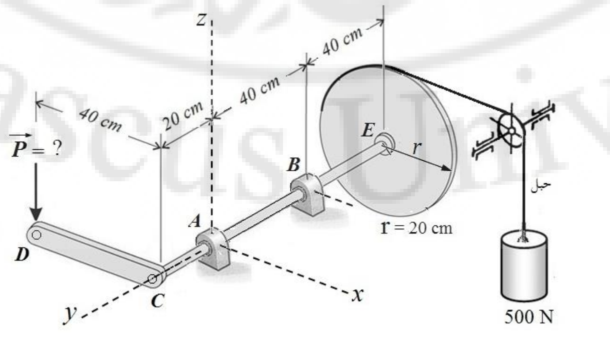


الجواب :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	**القوة**
-5	0	4	10	0	-15	**القيمة** (kN)

مسألة رقم (**5**) :

يقوم ملفاف برفع حمل مقداره 500 N . والمطلوب : أوجد مُركّبات ردّي فعل المسندين الاسطوانيين A وB ، وكذلك مقدار قوة الضغط ***P*** المؤثرة في نهاية المقبض CD الضرورية للحفاظ على حالة التوازن المبينة في الشكل .

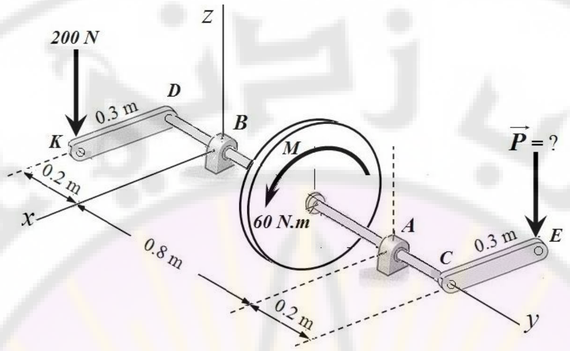


الجواب :

P	X_A	Z_A	X_B	Z_B	**القوة**
250	500	375	-1000	-125	**القيمة** (N)

مسألة رقم (6) :

يُبيّن الشكل المرافق عموداً أفقياً CD يحمل بكرة يؤثر فيها عزم مقداره M=60 N.m ، ويرتكز على المسندين الاسطوانيين A و B . والمطلوب: ارسم مخطط الجسم الحر للجملة كاملة ، ثم أوجد مُركّبات ردّي فعل المسندين ، وكذلك مقدار قوة الضغط $\boldsymbol{P}$ المؤثرة على نهاية الذراع CE للحفاظ على حالة التوازن المبينة في الشكل .

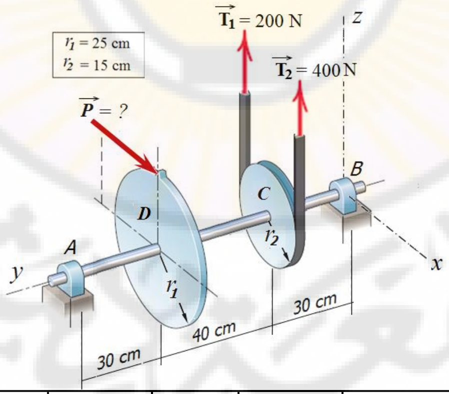


الجواب :

القوة	Z_B	X_B	Z_A	X_A	P
القيمة (N)	150	0	450	0	400

مسألة رقم (7) :

يبيّن الشكل عموداً أفقياً يحمل البكرة C والقرص D ، ويرتكز على المسندين الاسطوانيين A و B . تؤثر في البكرة C قوتا الشد $\mathbf{T_1}$ و $\mathbf{T_2}$ ، وتؤثر في القرص D القوة الأفقية المجهولة $\boldsymbol{P}$. والمطلوب : أوجد قوة الضغط $\boldsymbol{P}$ الضرورية للحفاظ على التوازن ، وكذلك مُركّبات ردّي فعل المسندين A وB .

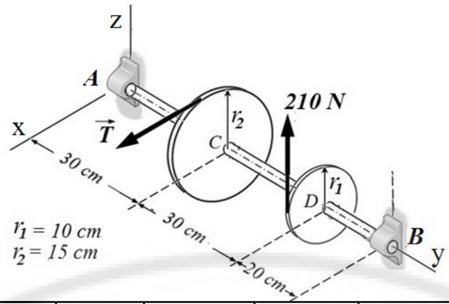


الجواب :

القوة	Z_B	X_B	Z_A	X_A	P
القيمة (N)	- 420	- 36	- 180	- 84	120

مسألة رقم (8) :

يبيّن الشكل عموداً أفقياً يحمل البكرتين C و D ، ويرتكز على المسندين الاسطوانيين A و B . المطلوب : أوجد في حالة التوازن مُركّبات ردّي فعل المسندين الاسطوانيين A وB ، وكذلك مقدار القوة $\boldsymbol{T}$.

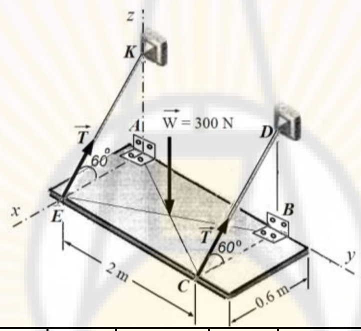


الجواب :

P	X_A	Z_A	X_B	Z_B	القوة
100	- 62.5	- 50	- 37.5	- 150	القيمة (N)

مسألة رقم (**9**) :

قاعدة متجانسة شكلها مستطيل ، ثُبِّتت في الحائط بواسطة المفصلتين الاسطوانيتين A وB ، وتحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الكبلين CD و EK كما هو مبين في الشكل. إذا علمت أن وزن القاعدة W=300 N ، وأن الشدّ متماثل في الكبلين ، فأوجد عندئذ قوة الشدّ **T** المؤثرة في كل منهما ، وكذلك مركّبات ردّي فعل المفصلتين A وB .

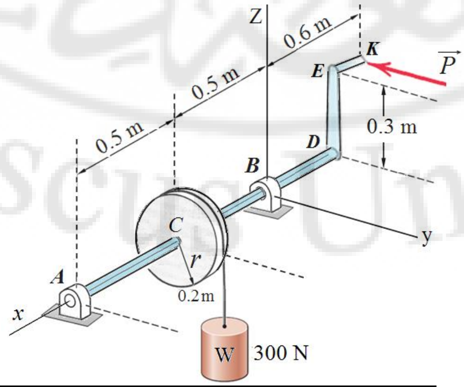


الجواب :

P	X_A	Z_A	X_B	Z_B	القوة
86.6	43.3	75	43.3	75	القيمة (N)

مسألة رقم (**10**) :

يبيّن الشكل عموداً أفقياً يرتكز على المسندين الاسطوانيين A وB . تقوم البكرة C برفع حمل مقداره W=300 N ، والمطلوب : أوجد في وضع التوازن ، مقدار قوة الضغط الأفقية $\boldsymbol{P}$ الموازية للمحور y والمؤثرة في المقبض EK ، وكذلك مُركّبات ردّي فعل المسندين A وB .

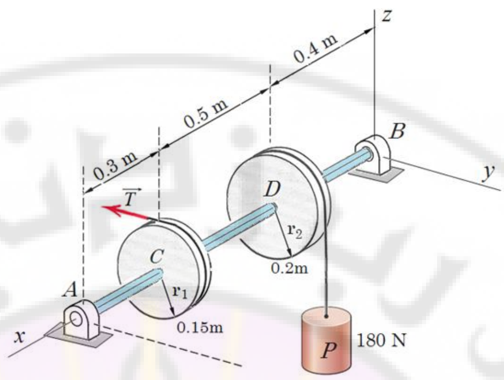


الجواب :

M	X_A	Z_A	X_B	Z_B	القوة
60 N.m	0	240	0	160	القيمة (N)

مسألة رقم (11) :

أوجد في وضع التوازن مقدار الشد T ، وكذلك مُركّبات ردّي فعل المسندين الاسطوانيين A و B بالنسبة لجملة العمود والبكرتين كما هو موضّح في الشكل المرافق.

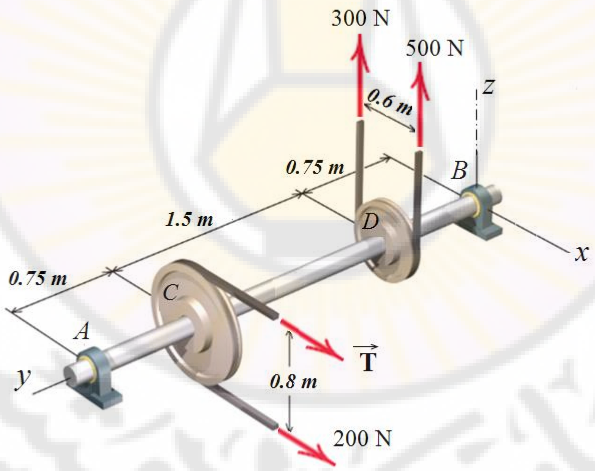


الجواب :

القوة	Z_B	Y_B	Z_A	Y_A	T
القيمة (N)	120	60	60	180	240

مسألة رقم (12) :

أوجد في وضع التوازن مقدار الشد T ، وكذلك مُركّبات ردّي فعل المسندين الاسطوانيين A و B بالنسبة لجملة العمود والبكرتين كما هو موضّح في الشكل المرافق .



الجواب :

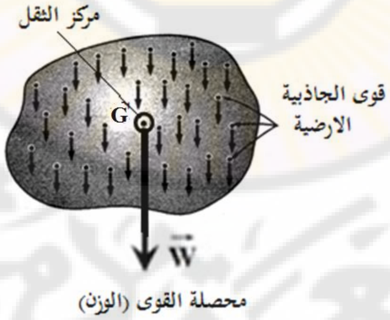
القوة	Z_B	Y_B	Z_A	Y_A	T
القيمة (N)	-600	-137.5	-200	-412.5	350

الفصل السابع
مراكز الثّقل
CENTERS OF GRAVITY

1- إحداثيات مركز ثقل الجسم (Coordinates of Centre of Gravity).
2- مراكز الأشكال الهندسية البسيطة (Centroids of Geometrical Shapes)
3- مراكز مساحات السطوح والأطوال (Centroids of Areas and Lines) .

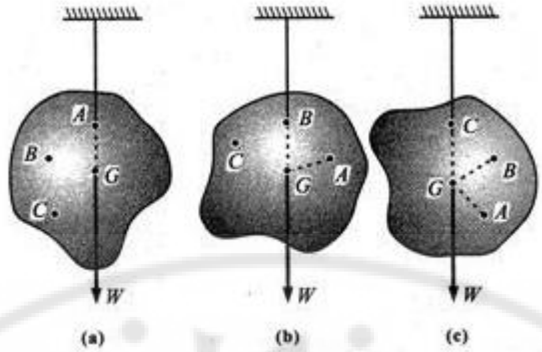
1- إحداثيات مركز ثقل الجسم (Coordinates of Centre of Gravity) :

تحديد مركز الثقل تجريبياً : تؤثر في الجزيئات المختلفة التي يتكون منها أي جسم صلب يقع على سطح الأرض أو قريباً منها قوى متجهة رأسياً نحو الأسفل باتجاه مركز الأرض، تسمى قوى الجاذبية الأرضية وذلك كما هو مبين في الشكل(7-1). ويمكن اعتبار قوى الجاذبية الأرضية قوى متوازية كما نرمز لمحصلتها بالرمز **W**ويسمى مقدار هذه المحصلة وزن الجسم (Weight of the Body) كما تدعى النقطة التي تمر منها محصلة قوى الجاذبية بمركز ثقل الجسم ، ويرمز له بالحرف **G** .



الشكل (**7-1**)

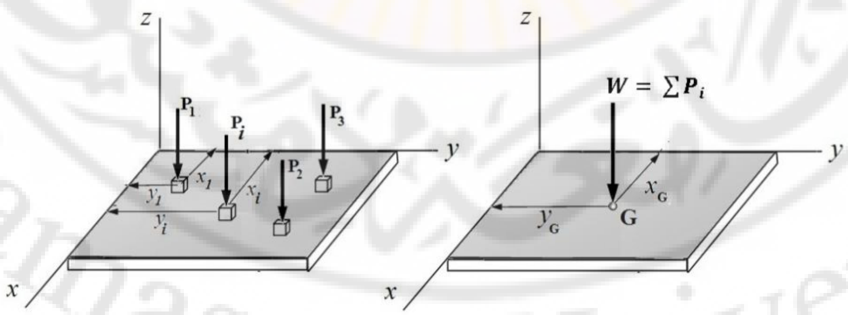
المثال الآتي يوضح مفهوم مركز الثقل وكيفية تعيينه تجريبياً : نأخذ جسماً ونُثبِّت على سطحه ثلاثة مسامير في النقاط A وB وC كما هو موضح في الشكل(7-2) ، ثم نقوم بالخطوات الثلاث الآتية : في الخطوة الأولى نعلق الجسم في النقطة A ثم نرسم خطاً (متقطعاً مثلاً) شاقولياً يمثل حامل قوة الوزن ، وفي الخطوة الثانية نعلق الجسم في النقطة B ثم نرسم خطاً شاقولياً يمثل حامل قوة الوزن ، وفي الخطوة الثالثة نعلق الجسم في النقطة C ثم نرسم خطاً شاقولياً يمثل حامل قوة وزن الجسم . نلاحظ أن الخطوط المرسومة تلتقي في نقطة واحدة تمثل في واقع الأمر مركز ثقل الجسم.



الشكل (7–2)

خلاصة القول ، إن مركز ثقل جسم ما هو النقطة التي تمر منها محصلة قوى الوزن الموزعة والعائدة لجميع جزيئات هذا الجسم. ومن المعروف أن الأجسام في الطبيعة كلها ثلاثية البعد ، ولذا فإن قوى الوزن المؤثرة في الجزيئات المختلفة للجسم تمثل جملة من القوى المتوازية الفراغية. إلا أن هنالك بعض الحالات التي تبرر إهمال بُعد أو بُعدين للجسم المدروس ، وافتراض أن الجزيئات التي يتركب منها محدودة بمستو واحد أو بخط فقط. يقتصر هذا الفصل على هذه الحالات الخاصة والتي تشمل مساحات السطوح المستوية والخطوط .حيث يدخل في عداد هذه الخطوط : الأسلاك والقضبان والأطر(Frames) بأشكالها الهندسية المختلفة .

تعيين إحداثيات مركز الثقل : إذا افترضنا أن الجسم الصلب هو عبارة عن صفيحة مستوية ورقيقة كما هو مبين في الشكل (7–3) فإنه يمكن بسهولة تعيين إحداثيات مركز ثقله G بتطبيق قاعدة العزوم الواردة في الفصل الأول ، والتي تقول : إن عزم القوة حول محور ما يساوي مجموع عزوم مركباتها حول نفس المحور . فإذا نظرنا إلى الجسم على أنه جملة كبيرة من الجزيئات عددها n وافترضنا أن وزن أية جزيئة i من جزيئات هذا الجسم يساوي P_i عندئذ يكون وزن الجسم كله : $W=\sum P_i$. وبما أن عزم القوة W يساوي مجموع عزوم مركباتها P_i حول نفس المحور،لذا نستطيع أن نكتب معادلتي العزوم الآتيتين :



الشكل (7–3)

$$\sum M_y:\ W\times x_G = P_1x_1+P_2x_2+\cdots+P_nx_n=\sum_{i=1}^{n}(P_i\,x_i)$$

$$\sum M_x:\ W\times y_G = P_1y_1+P_2y_2+\cdots+P_ny_n=\sum_{i=1}^{n}(P_i\,y_i)$$

ومن هنا نجد أن إحداثيات مركز الثقل العام لأي جسم صلب هي :

$$x_G = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} \qquad (1)$$

حالات خاصة :

- إذا وقع الجسم في مجال الجاذبية الأرضية المتجانس (g=constant) عندئذ نلاحظ أن: $P_i=m_i g$ ، وتصبح إحداثيات مركز الثقل العام :

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad (2)$$

حيث m_i هي كتلة الجزيئة الواحدة ، والرمز $\sum m_i$ يشير إلى كتلة الجسم كله . وتسمى النقطة التي تتعين إحداثياتها بهاتين العلاقتين بمركز العطالة أو مركز كتلة الجسم (center of mass).ولهذا المفهوم أهمية كبيرة في علم التحريك كما سنرى في الباب الثالث من هذا الكتاب.

- إذا وقع الجسم في مجال الجاذبية الأرضية المتجانس (g=constant) وكان من ناحية أخرى هذا الجسم متجانسا (ρ=constant)، عندئذ تتحدد الكتلة كما يلي :

$m = \rho\, V$ بالنسبة للحجوم

$m = \rho\, A$ بالنسبة للسطوح

$m = \rho\, L$ بالنسبة للاطوال

حيث ρ هي كثافة الجسم ، والرمز V يشير إلى الحجم ، ويشير الرمز A إلى المساحة ، بينما يشير الرمز L إلى الطول . وبالتعويض في معادلتي مركز الثقل فإننا نحصل بالنسبة للسطوح والأطوال المتجانسة على العلاقات الآتية :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \qquad (3)$$

$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i} \qquad (4)$$

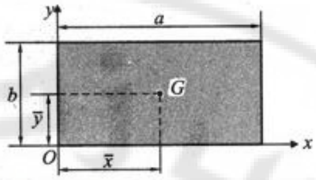
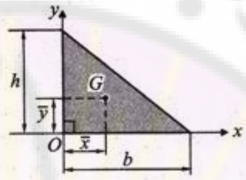
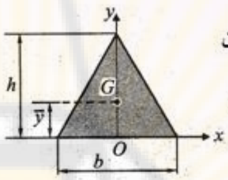
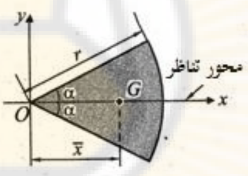
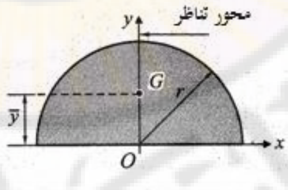
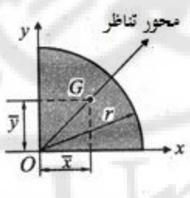
وكما نرى يتوقف موضع مركز الثقل $G(x,y)$ للجسم المتجانس على شكله الهندسي فقط، ولهذا السبب تسمى النقطة G التي تتعين إحداثياتها بهذه العلاقات بالمركز المتوسط الهندسي Centroid .

2- مراكز الأشكال الهندسية البسيطة (Centroids of Geometrical Shapes) :

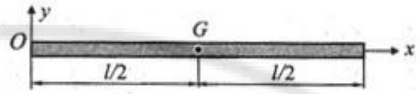
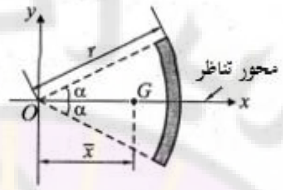
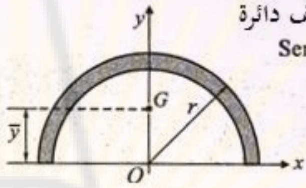
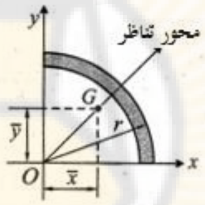
يوضح كل من الشكلين (7-4)و(7-5) مراكز ثقل الأشكال الهندسية البسيطة الآتية والتي تشمل بصورة أساسية المستطيل والمثلث والقطاع الدائري :

- المستطيل : إن مركز ثقل المستطيل يقع في نقطة تلاقي قطريه.
- المثلث : إن مركز ثقل المثلث يقع في نقطة تلاقي متوسطاته.

- القطاع الدائري : إن مركز ثقل القطاع الدائري يقع على محور تناظره ويبعد عن مركز دائرته بالمقدار المبين في الشكل. حيث تمثل α نصف الزاوية المركزية للقطاع .

الشكل الهندسي للسطح Geometrical Shapes	المساحة Area	احداثيات مركز الثقل X_i	Y_i
1 - مستطيل Rectangle 	ab	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$
2 - مثلث قائم الزاوية Right Angled Triangle 	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$
3 - مثلث متساوي الساقين أو الأضلاع Isosceles/Equillateral Triangle 	$\frac{bh}{2}$	0	$\frac{h}{3}$
4 - قطاع دائري Circular Sector 	αr^2 حيث : α بوحدة الراديان	$\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ حيث : α بوحدة الراديان	0
5 - نصف دائرة Semicircle 	$\frac{\pi r^2}{2}$	0	$\frac{4r}{3\pi}$
6 - ربع دائرة Quarter Circle 	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$

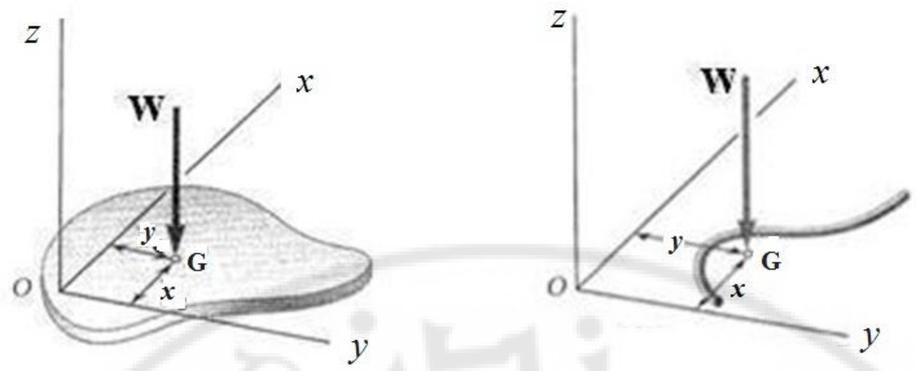
الشكل (7–4)

الشكل الهندسي للاطار Geometrical Shapes	الطول Length	احداثيات مركز الثقل X_i	احداثيات مركز الثقل Y_i
1 - مستقيم Straight Line 	l	$\frac{l}{2}$	0
2 - قوس دائري Arc of Circle 	$2\alpha r$ حيث : α بوحدة الراديان	$\frac{r \sin\alpha}{\alpha}$ حيث : α بوحدة الراديان	0
3 - قوس شكله نصف دائرة Semicircular Arc 	πr	0	$\frac{2r}{\pi}$
4 - قوس شكله ربع دائرة Quarter Circular Arc 	$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$

الشكل (7–5)

3– مراكز مساحات السطوح والأطوال (Centroids of Areas and Lines) :

تتناول هذه الفقرة كيفية تعيين موضع مركز الثقل G للمساحات (Areas) والأطوال (Lines) كما هو مبين في الشكل(7–6). وعلى وجه العموم ، يحتاج البحث عن إحداثيات مركز الثقل لسطح أو إطار ما إلى إجراء عملية تقسيم للسطح أو الإطار إلى عدة أشكال هندسية بسيطة بحيث تكون مراكز ثقلها معلومة. ففي حالة السطوح المتجانسة ، يُقسّم السطح المفروض إلى عدة سطوح بسيطة الشكل ويُرمز لمساحاتها A_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i.



الشكل (6–6)

عندئذ يمكن تعيين إحداثيات مركز الثقل العام $G(x\ ,\ y)$ للسطح المفروض باستعمال العلاقتين الآتيتين :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 \ + A_2 x_2 \ + \cdots + A_n x_n}{A_1 + A_1 + \cdots + A_n} \qquad (5)$$

$$y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 \ + A_2 y_2 \ + \cdots + A_n y_n}{A_1 + A_1 + \cdots + A_n} \qquad (6)$$

أما في حالة الأطوال كالأطر (Frames) مثلاً ، يُقسّم الإطار المفروض إلى عدة عناصر بسيطة الشكل ويُرمز لأطوالها L_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i. وبما أن مقدار قوة الوزن w_i لأي عنصر من العناصر متناسب مع طول هذا العنصر(Li) لذا يمكن تعيين موضع مركز الثقل العام للإطار كما يلي:

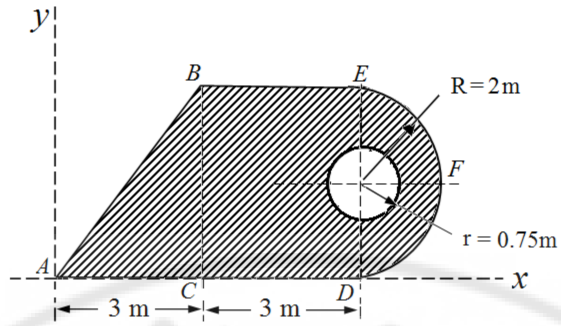
$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 x_1 \ + L_2 x_2 \ + \cdots + L_n x_n}{L_1 + L_1 + \cdots + L_n} \qquad (7)$$

$$y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 y_1 \ + L_2 y_2 \ + \cdots + L_n y_n}{L_1 + L_1 + \cdots + L_n} \qquad (8)$$

يوضح كل من المثالين الآتيين كيفية استخدام المعادلات الرياضية السابقة في حساب إحداثيات موضع مركز الثقل وذلك في حالتي السطوح والأطر المستوية .

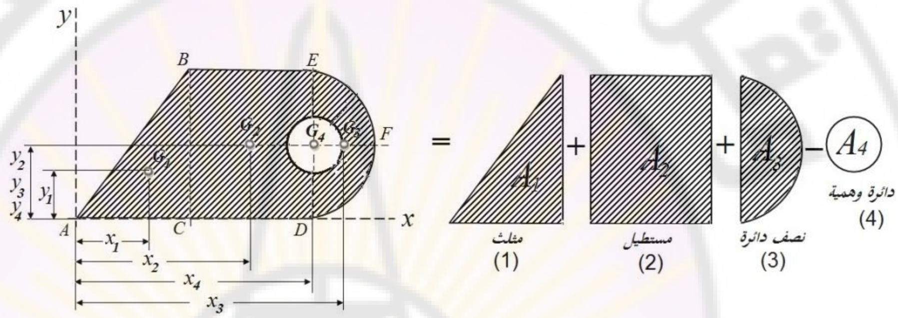
مثال رقم (48)

احسب إحداثيات مركز الثقل العام $G(x\ ,\ y)$ للصفيحة المتجانسة الموضحة في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الحل : ....

نُقسّم السطح المعطى إلى أربعة أجزاء ثم نحسب مساحة كل جزء وإحداثيات مركز ثقله بمساعدة الشكل الآتي :



$$A_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6\ m^2$$
$$A_2 = 3 \times 4 = 12\ m^2$$
$$A_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 6.28\ m^2$$
$$A_4 = -\pi \times 0.75^2 = -1.77\ m^2$$

ثم نحدد إحداثيات مراكز الثقل لجميع الأجزاء المكونة للصفيحة المستوية كما هو مبين في الشكل السابق ونضعها في جدول كالآتي :

y_i (m)	x_i (m)	A_i المساحة (m^2)	الأجزاء
1.33	2	6	المثلث *ABC*
2	4.5	12	المستطيل *BCDE*
2	6.85	6.28	نصف الدائرة *DEF*
2	6	– 1.77	الدائرة الوهمية

يتعين مركز الثقل العام لأي سطح مستو بالمعادلتين الآتيتين :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

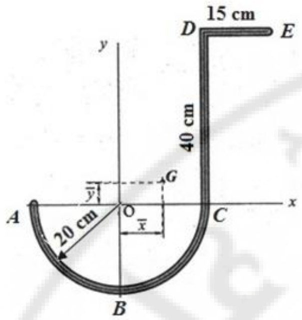
نعوض فنحصل على :

$$x = \frac{6 \times 2 + 12 \times 4.5 + 6.28 \times 2 - 1.77 \times 2}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 4.37\ m$$

$$y = \frac{6 \times 1.33 + 12 \times 2 + 6.28 \times 6.85 - 1.77 \times 6}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 1.82\ m$$

مثال رقم (49)

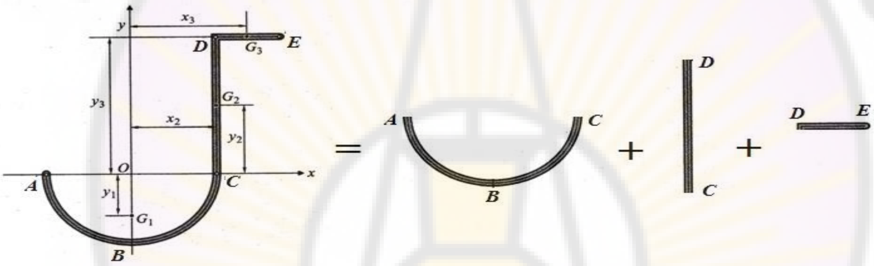
احسب إحداثيات مركز الثقل العام C(x , y) للإطار (Frame) الموضح في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الحل :

....

نُقسّم الإطار المفروض إلى ثلاثة أجزاء ثم نحسب طول كل جزء وإحداثيات مركز ثقله ، كما هو مبين في الجدول.



y_i (cm)	x_i (cm)	الطول L_i (cm)	الأجزاء
−12.73	0	20 π	القوس ABC
20	20	40	القطعة المستقيمة CD
40	27.5	15	القطعة المستقيمة DE

يتعين مركز الثقل العام لأي إطار (Frame) بالمعادلتين الآتيتين :

$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i}$$

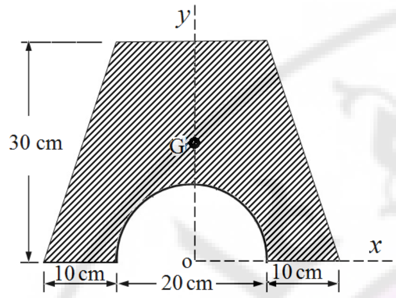
وباستخدام القيم الواردة في الجدول السابق نحصل على :

$$x = \frac{(20\pi \times 0) + (40 \times 20) + (15 \times 27.5)}{20\pi + 40 + 15} = 10.29\ cm$$

$$y = \frac{(-12.73 \times 20\pi) + (40 \times 20) + (15 \times 40)}{20\pi + 40 + 15} = 5.09\ cm$$

مسائل غير محلولة
UNSOLVED PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

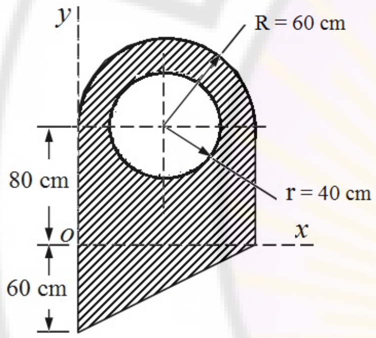


احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المهشَّرة الموضحة في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.

الجواب :

x = 0 , y = 15.26 cm

مسألة رقم (2) :

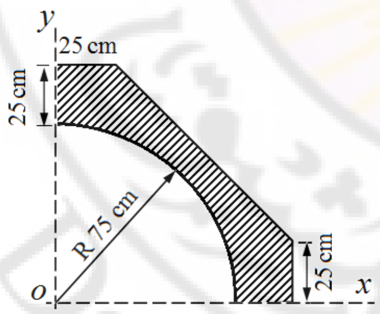


احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المهشَّرة الموضحة في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .

الجواب :

x = 54.8 cm , y = 36.62 cm

مسألة رقم (3) :

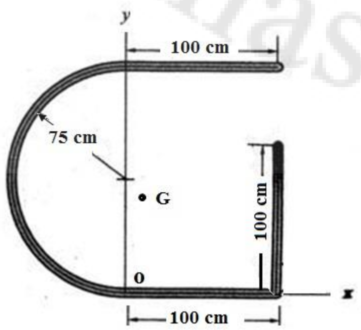


احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المهشَّرة الموضحة في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .

الجواب :

x = y = 53.6 cm

مسألة رقم (4) :



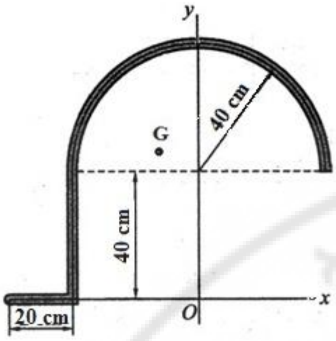
احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.

الجواب :

x = 16.4 cm , y = 70.3 cm

مسألة رقم (5) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.

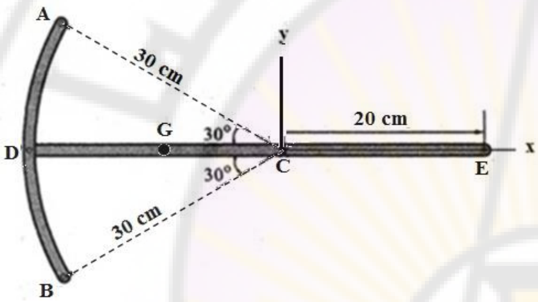


الجواب :

x = -14 cm , y = 48.6 cm

مسألة رقم (6) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.



الجواب :

x = -14.13 cm , y =0

تم بحمد الله