الرياضيات المتقطعة

السنة : الثانية

القسم: العلوم الأساسية

الاختصاص: هندسة الحواسيب

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الرياضيات المتقطعة

الدكتور
عماد فتاش
أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

الدكتور
قصي كنفاني
مدرس في قسم العلوم الأساسية

جامعة دمشق
١٤٣٧ هـ – ١٤٣٨ هـ
٢٠١٦ م – ٢٠١٧ م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرست

المقدمة ١٥
1- القضايا والعمليات المنطقية، والمسندات والمسورات ١٩
1-1 القضايا والعبارات المنطقية ١٩
2-1 النفي (Negation) ٢٠
3-1 الوصل والفصل (Conjunction and Disjunction) ٢١
4-1 العبارات الشرطية (Conditional Statements) ٢٢
1-4-1 العكس (Converse) ٢٣
2-4-1 المكافئ العكسي (Contrapositive)..... ٢٤
3-4-1 المعكوس (Inverse) ٢٤
5-1 العبارة ثنائية الشرط (Biconditional)..... ٢٤
6-1 العبارات المتكافئة (Equivalent Statements)..... ٢٥
1-6-1 خواص التكافؤ المنطقي..... ٢٩
2-6-1 العبارة XOR..... ٣٠
7-1 المنطق والعمليات البتية (Logic and Bit Operations)..... ٣٠
تمارين غير محلولة..... ٣٣
8-1 المسندات والمسورات (Predicates and Quantifiers)..... ٣٤
1-8-1 المسندات (Predicates) ٣٤
2-8-1 المسورات (Quantifiers)..... ٣٧
3-8-1 التكافؤات المنطقية التي تتضمن المسورات:..... ٤٣
4-8-1 نفي التعابير المسورة:..... ٤٤

1-8-5 المسورات المركبة (Nested Quantifiers): ٤٨
1-8-6 نفي المسورات المركبة:..... ٤٩
تمارين غير محلولة: ٥٠
2 - الأعداد الصحيحة، والأعداد الأولية، وتقنيات الإثبات..... ٥٣
2-1 الأعداد الصحيحة ٥٣
2-1-1 خواص العمليات الأساسية..... ٥٤
2-1-2 تمثيل الأعداد الصحيحة..... ٥٤
2-1-3 قابلية القسمة (Divisibility)..... ٥٤
2-2 الأعداد الأولية (prime numbers)..... ٥٥
2-2-1 الأعداد الأولية والمتتاليات ٦١
2-2-2 الحدسيات والمسائل المفتوحة للأعداد الأولية..... ٦٢
2-3 القاسم المشترك الأعظم..... ٦٣
2-4 الأعداد الأولية نسبياً..... ٦٤
2-5 الأعداد الأولية نسبياً مثنى مثنى..... ٦٤
2-6 المضاعف المشترك الأصغر ٦٥
تمارين غير محلولة ٦٦
2-7 تقنيات الإثبات..... ٦٧
2-7-1 الإثبات المباشر (Direct proof) ٦٧
2-7-2 الإثبات باستخدام المكافئ العكسي (proof by contraposition)..... ٦٩
2-7-3 الإثبات بالتناقض (proof by contradiction) ٧٢
2-7-4 الإثبات بالاختبار الشامل والإثبات بالحالات..... ٧٤

2-7-5 الإثبات باستخدام if المضاعفة ٧٨
2-8 الأخطاء أثناء عمليات الإثبات..... ٨٠
أمثلة وتمارين محلولة ٨١
تمارين غير محلولة ٨٣
2-9 تمثيل العدد الصحيح ٨٦
2-9-1 النظام الثنائي ٨٧
2-9-2 النظام الثماني والست عشري ٨٧
2-9-3 تحويل القاعدة..... ٨٨
تمارين غير محلولة ٩١
2-10 مبدأ برج الحمام ٩٣
2-10-1 مبدأ برج الحمام العام..... ٩٨
تمارين محلولة..... ٩٨
تمارين غير محلولة..... ١٠٠
2-11 مبدأ العد الأساسي..... ١٠٣
2-11-1 مبدأ قاعدة الجمع..... ١٠٣
2-11-2 مبدأ قاعدة الجداء..... ١٠٣
2-11-3 الدوال الرياضية..... ١٠٤
2-11-4 التباديل Permutations ١٠٩
2-11-5 التباديل مع تكرار..... ١١٠
2-11-6 العينات المرتبة..... ١١٢
2-11-7 التوافيق Combinations ١١٣
تمارين محلولة..... ١١٤

تمارين متنوعة..... ١٢١
تمارين غير محلولة..... ١٢٣
3- البنى الأساسية في الرياضيات المتقطعة..... ١٣٩
1-3 المجموعات (Sets)..... ١٣٩
1-1-3: العمليات على المجموعات..... ١٤٣
2-1-3 جدول العمليات على المجموعات:..... ١٤٤
3-1-3 تعميم الاتحاد والتقاطع..... ١٤٥
4-1-3 العد باستخدام مبدأ الإضافة والحذف ١٤٧
2-3 الحاويات (Bags) ١٥١
1-2-3 العمليات على الحاويات ١٥٢
3-3 متعددات العناصر (Tuples):..... ١٥٥
1-3-3 الجداء الديكارتي للمجموعات..... ١٥٧
2-3-3 التمثيل الحاسوبي للمتعددات:..... ١٥٩
4-3 القوائم (Lists)..... ١٦٠
1-4-3 تمثيل القائمة حاسوبياً..... ١٦٢
5-3 العلاقات وخواصها:..... ١٦٣
1-5-3 العلاقة الثنائية (binary relation):..... ١٦٣
2-5-3 العلاقة من الدرجة n..... ١٦٤
3-5-3 العلاقات على مجموعة..... ١٦٦
4-5-3 خواص العلاقات..... ١٦٧
5-5-3 تركيب العلاقات ١٦٩
6-5-3 العلاقات وقواعد المعطيات..... ١٧٢

3-5-7 تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات..... ١٧٣
3-5-8 تمثيل العلاقات باستخدام البيانات ١٧٧
3-5-9 علاقات التكافؤ ١٧٩
3-5-10 صفوف التكافؤ ١٨٠
3-5-11 صفوف التكافؤ والتجزئة ١٨١
تمارين غير محلولة..... ١٨٤
3-6 التوابع (functions): ١٨٩
3-6-1 حقائق وخواص عن التوابع..... ١٩٠
3-6-2 بعض التوابع المستخدمة في التطبيقات الحاسوبية..... ١٩٢
3-7 جبر بول (Boolean Algebra)..... ١٩٩
3-7-1 التعابير البوليانية والتوابع البوليانية..... ٢٠٢
3-7-2 المساويات في جبر بول..... ٢٠٥
3-7-3 الإثنانية أو الإزدواجية (Duality) ٢٠٧
3-7-4 تمثيل التوابع البوليانية..... ٢٠٩
3-7-5 الإتمام التابعي (Functional Completeness)..... ٢١٣
تمارين غير محلولة..... ٢١٤
3-8 البوابات والدارات المنطقية Logic Gates ٢١٦
3-8-1 تجميع البوابات..... ٢١٧
3-8-2 المجمعات (Adders) ٢٢١
تمارين غير محلولة..... ٢٢٢
4- الاستقراء الرياضي ٢٢٥
4-1 المتتاليات والمجاميع: ٢٢٥

4-1-1 المتتالية المتناوبة ٢٢٧
4-1-2 مفهوم المجاميع ٢٢٨
4-1-3 مفهوم الجداءات ٢٣٢
4-1-4 خواص المجاميع والجداءات ٢٣٣
تمارين غير محلولة ٢٣٥
4-2 الاستقراء الرياضي ٢٣٩
4-2-1 أساس الاستقراء الرياضي ٢٤١
4-2-2 مبدأ الاستقراء الرياضي ٢٤٢
4-2-3 الشكل القوي للاستقراء الرياضي ٢٤٣
تمارين محلولة ٢٤٩
تمارين غير محلولة ٢٥٨
5- الخوارزميات والعودية ٢٦٥
5-1 التوابع والخوارزميات العودية ٢٦٥
تمارين غير محلولة ٢٧٧
5-2 الأشكال المغلقة (Closed Forms) ٢٧٨
5-2-1 الأشكال المغلقة للمجاميع ٢٧٩
تمارين غير محلولة ٢٨٣
5-3 العلاقات العودية ٢٨٤
5-3-1 حل العوديات البسيطة ٢٨٥
5-3-2 التوابع المولدة ٢٨٩
تمارين غير محلولة ٢٩٣
5-4 معدلات النمو (Rates of growth) ٢٩٤

1- معيار Θ الكبيرة (Big Theta)..... ٢٩٤
2- معيار ***o*** الصغيرة (Littele oh) ٢٩٩
3- معيار O الكبيرة (Big Oh)..... ٣٠٠
4- معيار Ω الكبيرة (Big Omega) ٣٠١
تمارين غير محلولة..... ٣٠١
6- البيان، والبيان الموجه، والأشجار ٣٠٥
1-6 البيان (Graph)..... ٣٠٥
1-1-6 بعض المفاهيم والحقائق المتعلقة بالبيانات غير الموجهة..... ٣٠٦
أمثلة إضافية محلولة..... ٣١٩
تمارين غير محلولة..... ٣٢٣
2-6 البيانات الموجهة (Digraph= Directed Graph) ٣٢٦
1-2-6 بعض المفاهيم والحقائق المتعلقة بالبيانات الموجهة..... ٣٢٧
تمارين غير محلولة..... ٣٣١
3-6 الأشجار (Trees) ٣٣٤
1-3-6 نماذج للأشجار ٣٣٩
2-3-6 خواص الأشجار ٣٤٢
تمارين محلولة..... ٣٤٦
تمارين غير محلولة..... ٣٤٧
4-6 الأشجار الهيكلية (Spanning Trees)..... ٣٥٠
1-4-6 الأشجار الهيكلية الصغرى (Minimum Spanning Trees) ... ٣٥٢
2-4-6 خوارزمية كروسكال (Kruskal's Algorithm) ٣٥٣
3-4-6 خوارزمية بريم (Prim's Algorithm) ٣٥٩

4-4-6 خوارزمية دايجكسترا لأقصر مسار (Dijkstra's Shortest Path Algo.) ٣٦٥
تمارين غير محلولة ٣٧١
7- اللغات، والقواعد، واللغات النظامية والتعابير النظامية ٣٧٧
1-7 أشرطة المحارف (Strings) ٣٧٧
2-7 اللغات (Languages) ٣٧٩
3-7 جداء اللغات ٣٨٠
4-7 غلاقة اللغة (Language closure) ٣٨١
5-7 عد الأشرطة المحرفية ٣٨٤
تمارين غير محلولة ٣٨٤
6-7 الأشرطة المحرفية واللغات المعرفة استقرائياً ٣٨٥
تمارين غير محلولة ٣٨٨
7-7 القواعد ٣٨٩
1-7-7 بنية القواعد ٣٩١
2-7-7 تعريف القاعدة ٣٩٣
3-7-7 الأجزاء الأربعة لقاعدة: ٣٩٤
4-7-7 الاشتقاقات ٣٩٥
5-7-7 اللغة المتعلقة بقاعدة ٣٩٧
6-7-7 الصانعات العددية ٣٩٨
7-7-7 التعريف الاستقرائي للغة قاعدة ***LG*** ٣٩٩
8-7-7 بناء القواعد ٤٠١
9-7-7 دمج القواعد ٤٠٢

7-7-10 المعنى والغموض ٤٠٦
7-7-11 تعريف القاعدة الغامضة ٤٠٦
تمارين غير محلولة ٤٠٨
7-8 اللغات المنتظمة والتعابير المنتظمة ٤١١
7-8-1 اللغات المنتظمة ٤١١
7-8-2 التعابير المنتظمة ٤١٣
7-8-3 جبر التعابير المنتظمة ٤١٧
تمارين غير محلولة ٤٢٠
8- مقدمة في الأتوماتات المنتهية وآلة تورينغ ٤٢٣
8-1 الأتوماتات المنتهية ٤٢٣
8-2 آلة تورينغ (Turing Machine) ٤٤٠
تمارين غير محلولة ٤٤٥
9- المدخل إلى نظام Maple ٤٤٩
9-1 كيفية تنفيذ المهام الأساسية في Maple ٤٤٩
9-2 الأوامر الشائعة والقواعد ٤٥١
9-3 بعض تجارب Maple في الرياضيات المتقطعة ٤٥٩
1- العمليات المنطقية ٤٥٩
2- العمليات على المجموعات ٤٦٠
3- العمليات على القوائم (Lists) ٤٦٢
4- العمليات على الأشرطة المحرفية (Strings) ٤٦٤
5- إنشاء البيان في Maple ٤٦٥
6- الأشجار الهيكلية (Spanning Tree) ٤٦٩

7- المتتاليات (Sequences) ٤٧٠
8- التابع map ٤٧١
9- تركيب التوابع ٤٧٣
10- استخدام if-then-else في تعريف التوابع ٤٧٥
11- حساب قيم التعابير ٤٧٦
12- اختبار الأنماط ٤٧٨
13- الأشرطة والبالندرومات ٤٧٨
14- المجموعات الجزئية ومجموعات القوى ٤٧٩
15- المجاميع المنتهية ٤٨٠
دليل المصطلحات العلمية ٤٨٣
المراجع References ٥٣١
الرموز Symbols ٥٣٣
اللجنة العلمية ٥٣٩

Damascus University

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

عزيزي الطالب

إن هذا الكتاب مقدمة في الرياضيات، وخصوصاً في الرياضيات المتقطعة، فماذا تعني كلمة «رياضيات»؟ وماذا تعني كلمة «متقطعة»؟ فعلم الرياضيات ينقسم إلى مجالين: مستمر ومتقطع، ويتضح الفرق جلياً في ساعات اليد. فالرياضيات المستمرة تتوافق مع الساعة العادية ذات العقارب، فيها عقرب للساعات وعقرب للدقائق وعقرب للثواني، وتتحرك ثلاثتها بنعومة وسلاسة مع مرور الوقت، من خواص الساعات العادية يوجد عدد لا محدود من الحركات بين الساعة 12:02 P.M. والساعة 12:03 P.M. تدرس الرياضيات المستمرة في نطاقها المفاهيم اللا محدودة، وفي مزج غرض بآخر بسلاسة. يكمن نظام الأعداد الحقيقية في صلب الرياضيات المستمرة، وتماماً كما هو الحال في الساعات العادية، فإن بين أي عددين حقيقيين يوجد عدد لا نهائي من النقاط أو الأعداد. تُقدّم الرياضيات المستمرة نماذج وأدوات ممتازة لتحليل الظواهر في العالم الحقيقي والتي تتغير بسلاسة مع مرور الوقت، بما في ذلك حركة الكواكب حول الشمس وتدفق الدم في الشرايين عبر الجسم.

أما الرياضيات المتقطعة، من ناحية أخرى، فهي تتوافق مع الساعة الرقمية. لا يوجد على الساعة الرقمية سوى عدد محدود من الأوقات المختلفة بين الساعة 12:02 P.M. والساعة 12:03 P.M. وفي الساعات الرقمية ذات خانة الثواني فإنه يوجد وقت واحد بين 12:02:03 و12:02:04 فالساعة تقفز قفزاً من وقت لآخر. ويمكن أن تُظهر الساعة الرقمية الأوقات المختلفة الكثيرة إظهاراً محدوداً، والانتقال من مرة واحدة إلى أخرى يكون حاداً وواضحاً لا لبس فيه. كما أن الأرقام الحقيقية تؤدي دوراً مركزياً في الرياضيات المستمرة، فالأعداد الصحيحة هي الأداة الأساسية للرياضيات المتقطعة. تقدم الرياضيات

المتقطعة نماذج وأدوات ممتازة لتحليل الظواهر في العالم الحقيقي التي تتغير فجأة، وترتبط ارتباطاً واضحاً من حالة لأخرى. تعد الرياضيات المتقطعة الأداة المفضلة في مجموعة من التطبيقات، بدءاً من أجهزة الكمبيوتر إلى توجيه مكالمة هاتفية، ومن مهام الموظفين إلى علم الوراثة.

دعنا ننتقل الآن إلى السؤال الصعب: ما هي الرياضيات؟ الإجابة المنطقية هي أن الرياضيات تقوم بدراسة الأعداد والأشكال. نود توضيح كلمة الدراسة في هذا الوصف. كيف يفعل الرياضيون لتوضيح عمل وجهة نظرهم؟

إن كل مجال من العلوم له معاييره الخاصة للنجاح. ففي الطب، النجاح هو الشفاء وتخفيف المعاناة. في مجال العلوم، يتم التحقق من نجاح نظرية ما من خلال التجارب. النجاح في الفن هو الإبداع والجمال. ينجح المحامون عندما يأتون بحججهم قِبَلَ هيئة المحلفين وإقناعهم ببراءة موكليهم. ويتم الحكم على اللاعبين وما هي وظائفهم الفنية والرياضية من قَبْل معرفة نهاية اللعبة سواء أكان الفوز أم الخسارة. والنجاح في العمل والتجارة هو الربح.

ما هي الرياضيات الناجحة؟ يربط كثير من الناس الرياضيات مع العلم. هذا أمر وارد، لأن الرياضيات أداة نافعة ومفيدة للغاية بالنسبة للعلم. يقاس النجاح الرياضي بإيجاد الدليل (البرهان أو الإثبات) على المسائل المطروحة. والإثبات هو مقولة فيها تأكيد، مثلاً «هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية»، أُثْبِتَ أن هذه القضية صحيحة بطريقة لا تقبل الجدال. فالبيانات الحسابية والبراهين هي، أولا وقبل كل شيء، الحكم على المسألة من حيث صحتها. هناك معايير ثانوية أخرى مهمة أيضاً. يشعر علماء الرياضيات بالقلق عند إنشاء الرياضيات الجميلة. وغالباً ما يحكم على الرياضيات من حيث فائدتها. إن المفاهيم والتقنيات الرياضية مفيدة جداً في حل مشاكل العالم الحقيقي.

إن أحد الأهداف الرئيسية لهذا الكتاب هو أن تتعلم، أيها الطالب، كيفية كتابة وصياغة البراهين. إن كتابة البراهين، بالمقابل، ســـتؤمّن لك التوفيق الدائم، وتنمّي لك التفكير

بوضـوح وتقدم قضـيتك تقديماً منطقياً. يجد العديد من الطلاب كتابة البراهين مخيفة وصعبة، لأنهم قد يتجمدون بعد كتابة كلمة «البرهان» على ورقتهم، وغير متأكدين مما ينبغي عمله لاحقاً. يمكن العثور على ترياق وقاية لهذا الخوف في صـــفحات هذا الكتاب! إننا سنبسط عملية كتابة الإثبات لإزالة الغموض وذلك بفك خصوصيات لغة الرياضـيات وتقديم قوالب واقية وصـحيحة. إن قوالب الإثبات هذه منتشـرة في جميع صـفحات هذا الكتاب، وتوفر بنية (ولغة نمطية) للأصـناف الأكثر شـيوعاً في البراهين الرياضية.

تم إعداد كتاب الرياضيات المتقطعة وفق المفردات المقترحة في مجلس قسم العلوم الأسـاسـية في كلية الهندسـة الميكانيكية والكهربائية في جامعة دمشـق، وذلك لطلاب السنة الثانية اختصاص هندسة الحواسيب، ومرجعاً لطلاب العلوم والهندسة.

ويتناول هذا الكتاب الموضوعات الآتية:

في الفصل الأول تُطُرّق لمفاهيم القضايا والعمليات المنطقية، والمسندات والمسورات.

وفي الفصل الثاني دراسة للأعداد الصحيحة والأعداد الأولية، وتقنيات الإثبات، وتمثيل العدد الصحيح، وأنظمة العدّ، والمبادئ الأساسية في العدّ، ومبدأ برج الحمام، والتباديل والتوافيق، ومعاملات ثنائي الحدّ، ومثلث باسكال.

وفي الفصـــل الثالث تم إلقاء الضـــوء على البنى الأســـاســـية في الرياضـــيات المتقطعة، والمجموعات، والحاويات، والقوائم، والعلاقات، وتركيب العلاقات، والعلاقات وقواعد المعطيات، وتمثيل العلاقات مصـفوفياً، وتمثيل العلاقات باسـتخدام البيانات، ودراسـة علاقات التكافؤ وصـــفوف التكافؤ، وعلاقات الترتيب والتجزئة. وأيضـــاً تم التطرق إلى التوابع وتعريفها، ودراســة التوابع المســتخدمة في التطبيقات الحاســوبية، وتقديم لجبر بول، التعابير البوليانية والتوابع البوليانية، والإثنانية، وتمثيل التوابع البوليانية، ومن ثم البوابات والدارات المنطقية، وتجميع البوابات.

وفي الفصل الرابع تم التطرق للاستقراء الرياضي ومبدئه وتعريفه المبدئي والعام.

أما في الفصـــل الخامس فتم التطرق للخوارزميات والعوديات، والأشـــكال المغلقة، والعلاقات العودية، والتوابع المولدة، ومعدلات النمو.

وفي الفصل السادس تمت دراسة البيانات، والبيان الموجه، والأشجار وتطبيقاتها.

وفي الفصل السابع تمت دراسة اللغات، والقواعد، واللغات النظامية والتعابير النظامية، وجداء اللغات، وغلاقة اللغة، وأشرطة المحارف وعدها، وبنية القاعدة، والأجزاء الأربعة للقاعدة، والاشتقاقات، والصانعات العددية، والتعريف الاستقرائي للغة، وبناء القواعد ودمجها، والمعنى والغموض، وتعريف القاعدة الغامضة، وجبر اللغات المنتظمة.

وفي الفصل الثامن تمت دراسة الأتوماتات المنتهية وآلة تورينغ.

أمّا في الفصـــل التاســع والأخير تمّ شـــرح مدخل إلى نظام مابل Maple وكيفية تنفيذ المهام الأساسية فيه، وسرد للأوامر الشائعة والمفيدة في الرياضيات المتقطعة، وسرد لكثير من الأمثلة المفيدة والتطبيقية للمفاهيم التي تمّ شرحها بين دفتي هذا الكتاب.

تمّ في هذا الكتاب مراعاة دعم كلّ فكرة نظرية بتطبيق عملي مباشـــر، وذلك بهدف إغناء الفكرة النظرية وتوضيحها من جهة وتطويرها وترسيخها في ذهن الطالب من جهة أخرى، حيث أوردنا العديد من الأمثلة خلال عرضنا للمفاهيم النظرية، وأتبعنا كل فصل بتطبيقات وتمارين عديدة يتجلى فيها فهم الطالب للقسم النظري ليترقى إلى المستوى المنشود.

آملين في الختام أن يكون هذا الكتاب واضـحاً وسـهلاً، وأن يؤدّي الغاية المرجوة من تأليفه، والله ولي التوفيق.

المؤلفان

الفصل الأول

1- القضايا والعمليات المنطقية، والمسندات والمسورات

تعطي قواعد المنطق المعنى الدقيق للعبارات الرياضية. إن المنطق هو أساس التفكير الرياضي، وله تطبيقات عملية كثيرة في مختلف مجالات علوم الحاسوب، فمن تصميم الآلات الحاسبة إلى توصيف النظم والذكاء الصناعي، إلى برمجة الحواسيب ولغات البرمجة وغيرها الكثير من مجالات الدراسة والبحث المتنوعة.

سنقوم في هذا الفصل بالتعرف على الخطوات الأولى في المنطق وبعض المفاهيم المنطقية المهمّة المستخدمة في الرياضيات المتقطعة.

1-1 القضايا والعبارات المنطقية

تعريف (1-1): إن القضية (Proposition) هي عبارة (Statement) أو جملة تصريحية يمكن أن تقترن بالقيمة صح (True) أو القيمة خطأ (False) وليس كليهما معاً. تدعى القيمة المقترنة بالعبارة بقيمة الحقيقة (Truth Value).

إن الجمل التي تتضمن:

1)- الاستفهام.

2)- الأمر.

3)- التعجب.

4)- التناقض والاختلاف الذاتي.

لا تعدُّ قضايا منطقية.

نعلم أن الجمل تتكون من أشـباه الجمل وأدوات الربط التي توحّد هذه المكونات مع بعضـها، بالتالي يمكن تشـكيل الجمل المركبة الأكثر تعقيداً. إن أدوات الربط الشـائعة موضحة بالجدول (1-1):

أدوات الربط	
and	و
or	أو
not	النفي
if ... then	إذا ... فإن
if and only if	إذا وفقط إذا

الجدول (1-1)

سـنقوم وبدقّة بتحديد الدلالة المنطقية لأدوات الربط. وسـوف تتحدد قيمة الحقيقة لأي قضـــية مركبة من خلال صـــدق أو زيف الأجزاء المكونة لها. تدعى العبارة غير الحاوية على أدوات الربط بالقضـــية البســـيطة، أما العبارة الحاوية على أدوات الربط فتدعى بالقضـية المركبة. يتضـمن جدول الحقيقة كل التركيبات الممكنة لصـدق وزيف مكونات القضية.

سوف نستخدم فيما بعد الرمز T للدلالة على الصح $(True)$ والرمز F للدلالة على الخطأ $(False)$.

2-1 النفي (Negation)

إذا كـانت S تمثل عبارة ما، فإن نفي S هي عبارة أخرى تكتب "not S" وقيمة الحقيقة لها عكس ما كان للعبارة S. يمكن تمثيل الارتباط بين العبارة S ونفيها "not S" من خلال جدول الحقيقة (Truth Table) الموضـــح في الجدول (1-2)، حيث تعطى في كل سطر فيه قيمة للعبارة S وما يقابلها من أجل "not S".

S	"not S"
T	F
F	T

الجدول (1-2)

من الواضح أن النفي عملية أحادية. كما تستخدم رموز أخرى مثل: $\sim S$، $\neg S$ للتعبير عن "not S".

3-1 الوصل والفصل (Conjunction and Disjunction)

إن وصل (Conjunction) العبارتين A و B هو عبارة تأخذ الشكل A and B وتكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت كل من A و B صحيحتين معاً، أما فصل (Disjunction) العبارتين A و B فهو عبارة جديدة تأخذ الشكل: A or B والتي تكون صحيحة إذا كانت كل من A أو B صحيحة أو أن كليهما صحيحان معاً.

يبين الجدول (1-3) جدول الحقيقة لكل من عمليتي الوصل والفصل.

A	B	A and B	A or B
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

الجدول (1-3)

من الواضح أن عمليتي الوصل والفصل هي عمليات ثنائية. كما يستخدم الرمز $\wedge$ لعملية الوصل and ويستخدم الرمز $\vee$ لعملية الفصل or.

تعريف (1-1):

إن الفرضية المركبة هي أي عبارة منطقية لعدة فرضيات بسيطة لعدة متغيرات مثل p, q, r مرتبطة مع بعضها بأدوات ربط منطقية مثل $\neg, \wedge, \vee$.

مثال (1–1):

أنشئ جدول الحقيقة للعبارة الافتراضية التالية: $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

الجدول (1–4)

هذه العبارة تدعى «أو الصريحة» أو XOR وهي تمثل p أو q ولكن ليس كليهما.

1–4 العبارات الشرطية (Conditional Statements)

تكتب العديد من العبارات كتابة عامة كالآتي:

if A, then B

حيث إن A و B هما عباراتان منطقيتان. تدعى مثل هذه العبارة بالعبارة الشرطية، وتكون A في هذه العبارة هي الفرض (hypothesis)، أما B فهي النتيجة (conclusion).

يمكن قراءة العبارة الشرطية بأشكال متعددة:

- A تقتضي B.
- B هي لزوم الشرط A.
- A هي كفاية الشرط B.

يرمز للعبارة الشرطية if A, then B بشكل مختصر من خلال التعبير الرمزي $A \rightarrow B$. يبين الجدول (1-5) جدول الحقيقة للعبارة الشرطية:

A	B	if A, then B
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الجدول (1–5)

نلاحظ من خلال جدول الحقيقة للعبارة الشرطية، أنها تكون خاطئة F فقط عندما يكون الشرط (الفرض) صحيحاً T والنتيجة خاطئة F. وتكون صحيحة T في الحالات الثلاث الأخرى المتبقية.

تستخدم العبارة if ⋯ then في لغات البرمجة بشكل مختلف عما هو مستخدم في المنطق. فغالبية لغات البرمجة تتضمن عبارات تحكم مثل: if A, then B، حيث A هي قضية أو شرط، وتكون B جزءًا من برنامج (عبارة أو أكثر للتنفيذ). عندما يتم تنفيذ البرنامج، فإن B تنفذ فقط إذا كانت A صحيحة، بينما لا تنفذ B فيما إذا كانت A خاطئة.

مثال (1–2):

سنبين قيمة المتحول x بعد تنفيذ العبارة:

$$\text{if } 2+2=4, \quad \text{then } x := x+1$$

إذا كانت $x = 2$ قبل أن تنفذ هذه العبارة، فإن العبارة $x := x + 1$ تعني إسناد قيمة $x + 1$ إلى x. نلاحظ أنه طالما أن $2 + 2 = 4$ عبارة صحيحة، فإن عملية الإسناد $x := x + 1$ سوف تنفذ، وتكون قيمة x هي $2 + 1 = 3$.

هناك عبارات يمكن أن تشكل من العبارة الشرطية، لذلك سوف نورد تعريفاً لكل من عبارة: العكس، عبارة المكافئ العكسي، وعبارة المعكوس.

1-4-1 العكس (Converse)

بفرض أنه لدينا العبارة الشرطية:

$$\text{if } A, \quad \text{then } B \qquad (1)$$

تدعى العبارة الشرطية

$$\text{if } B, \quad \text{then } A$$

بعكس العبارة الشرطية (1).

2-4-1 المكافئ العكسي (Contrapositive)

إن المكافئ العكسي للعبارة الشرطية (1) هو العبارة:

$$\text{if } \text{“not } B\text{”}, \quad \text{then “not } A\text{”}$$

3-4-1 المعكوس (Inverse)

تدعى العبارة الشرطية:

$$\text{if “not } A\text{”}, \quad \text{then “not } B\text{”}$$

بمعكوس العبارة الشرطية (1).

مثال (1–3):

لنوجد كل من: العكس، والمكافئ العكسي، والمعكوس للعبارة الشرطية الآتية:

$$\text{if } x > 0 \text{ and } y > 0, \quad \text{then } x + y > 0 \quad (2)$$

إن العكس هو العبارة الشرطية:

$$\text{if } x + y > 0, \quad \text{then } x > 0 \text{ and } y > 0$$

والمكافئ العكسي للعبارة الشرطية (2) هو:

$$\text{if } x + y \leq 0, \quad \text{then } x \leq 0 \text{ or } y \leq 0$$

ومعكوس العبارة الشرطية (2) هو:

$$\text{if } x \leq 0 \text{ or } y \leq 0, \quad \text{then } x + y \leq 0$$

1–5 العبارة ثنائية الشرط (Biconditional)

لتكن A و B عبارتين. إن العبارة

$$A \text{ if and only if } B \quad (3)$$

عبارة ثنائية الشرط. تكون هذه العبارة المركبة صحيحة عندما تكون للعبارتين A و B قيمة الحقيقة نفسها، وتكون خاطئة في خلاف ذلك.

نلاحظ أن العبارة المنطقية ثنائية الشـــرط تكون صـــحيحة عندما تكون العبارتان الشرطيتان الآتيتان:

$$\text{if } A, \quad \text{then } B$$

$$\text{if } B, \quad \text{then } A$$

صحيحتين.

يمكن أن نستخدم أشكالاً أخرى مكافئة للعبارة ثنائية الشرط (3)، وكأمثلة:

$$A \text{ iff } B$$
$$A \leftrightarrows B$$
$$A \leftrightarrow B$$
$$(\text{if } A, \text{ then } B) \text{ and } (\text{if } B, \text{ then } A)$$
$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

يبين الجدول (1-6)، جدول الحقيقة للعبارة ثنائية الشرط:

A	B	A if and only if B
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

الجدول (1-6)

1-6 العبارات المتكافئة (Equivalent Statements)

يقال عن عبارتين إنهما متكافئتان إذا كان لهما جدول الحقيقة نفسه.

يوضح الجدول (1-7) بعض العبارات المتكافئة التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ.

ملاحظة: إن للمكافئ العكسي لعبارة منطقية جدول حقيقة نفسه. ومن السهل أن نرى أن للعبارتين:

$$\text{if } A, \text{ then } B$$
$$\text{if not } B, \text{ then not } A$$

جدول الحقيقة نفســـه، فهما متكافئتان، ولا يتحقق هذا الأمر من أجل حالة العبارة وعكسها.

العبارة S تكافئ العبارة T	
$\text{not}(A \text{ and } B) \equiv \neg(A \wedge B)$	$(\text{not } A) \text{ or } (\text{not } B) \equiv \neg A \vee \neg B$
$\text{not } (A \text{ or } B) \equiv \neg(A \vee B)$	$(\text{not } A) \text{ and } (\text{not } B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

A and $(B$ or $C) \equiv A \wedge (B \vee C)$	$(A$ and $B)$ or $(A$ and $C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A or $(B$ and $C) \equiv A \vee (B \wedge C)$	$(A$ or $B)$ and $(A$ or $C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
if A, then $B \equiv A \rightarrow B$	if (not B), then (not A) $\equiv \neg B \rightarrow \neg A$
if A, then $B \equiv A \rightarrow B$	(not A)or $B \equiv \neg A \vee B$
not (if A, then $B) \equiv \neg(A \rightarrow B)$	A and (not $B) \equiv A \wedge \neg B$

الجدول (1-7)

لقد عرضنا فيما سبق لخمس من أدوات الربط المنطقية والتي حددت في الجدول (1-1). يمكن أن نستخدم هذه الأدوات في بناء القضايا والعبارات المركبة، التي يمكن أن تتضمن أي عدد من المتغيرات. كما يمكن استخدام جداول الحقيقة لتحديد قيم الحقيقة للعبارات التي تتكون منها العبارة المركبة.

مثال (1-4):

أنشئ جدول الحقيقة للعبارة المركبة الآتية:

if (A or "not B"), then (A and B)

والتي يمكن أن تكتب كتابة مختصرة ومكافئة من الشكل:

$$(A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$$

يمثل الجدول (1-8) جدول الحقيقة لهذه العبارة:

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$(A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

الجدول (1-8)

ويتضمن الجدول (1-9) بعض العبارات ثنائية الشرط المتكافئة:

العبارة S تكافئ العبارة T	
A if and only if B	(if A, then B) and (if B, then A)

A if and only if B	not A if and only if not B
A if and only if B	(A and B) or (not A and not B)
not (A if and only if B)	A if and only if not B

الجدول (1-9)

يستخدم الرمز ≡ للتعبير عن التكافؤ بين عبارتين وطالما أن العبارتين الآتيتين متكافئتان:

$$A \text{ if and only if } B$$
$$(\text{if } A, \text{then } B) \text{ and } (\text{if } B, \text{then } A)$$

فإننا نكتب:

$$A \text{ if and only if } B \equiv (\text{if } A, \text{then } B) \text{ and } (\text{if } B, \text{then } A)$$

نعني بالرمز ≡ تكافؤ العبارتين المنطقيتين الواقعتين على طرفيه.

مثال (1-5):

لتكن لدينا القضية الآتية:

«يحب زيد كرة القدم، وليس صحيح أنه يحب لعبة الجولف أو لعبة التنس».

سنتعامل مع هذه القضية من خلال تفكيكها:

أولاً– «يحب زيد لعبة الجولف أو لعبة التنس». سنرمز لذلك بالعبارة $q \text{ or } r$.

ثانياً– إن نفي العبارة السابقة هو: $\text{not } (q \text{ or } r)$

ثالثاً– سنعتبر أن p تمثل العبارة: «يحب زيد كرة القدم»

على هذا الأساس، فإن القضية تأخذ الشكل:

$$p \text{ and } (\text{not } (q \text{ or } r))$$

والجدول (1-10) يمثل جدول الحقيقة لهذه العبارة.

p	q	r	q or r	not $(q$ or $r)$	p and $(\text{not } (q \text{ or } r))$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T

F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F
F	F	F	F	T	F

الجدول (1-10)

مثال (1-6):

لنوجد جدول الحقيقة للعبارة

(if p then q) and (if q then p)

سوف نحدد أولاً جدول الحقيقة للعبارتين:

if p, then q if q, then p

كما في الجدول (1-11). ومن ثم نوجد جدول الحقيقة لكامل العبارة:

(if p then q) and (if q then p)

الموضح في الجدول (1-12):

p	q	if p	then	q	if q	then	p
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F	T	F

الجدول (1-11)

(if p then q)	and	(if q then p)
T	T	T
F	F	T
T	F	F
T	T	T

الجدول (1-12)

يوضح الجدول (1-13) جدول الحقيقة للعبارة السابقة أيضاً:

p	q	(if p then q)	and	(if q then p)	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F

F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

الجدول (1-13)

1-6-1 خواص التكافؤ المنطقي

لتكن p, q, r قضايا فإن الجدول (1-14) يبين بعض خواص التكافؤ المنطقي لها.

خاصة الحيادي	$p \equiv p \wedge T \quad \& \quad p \equiv p \vee F$
خاصة التماثل	$p \equiv p \wedge p \quad \& \quad p \equiv p \vee p$
خاصة نفي النفي (ثنائية النفي)	$\neg(\neg p) \equiv p$
الخاصة التوزيعية من اليسار	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
خاصة الامتصاص	$p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$
خاصة الاقتضاء	$p \to q \equiv \neg p \vee q$
خاصة التصدير	$(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$
خاصة المعاكس	$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
خاصة الهيمنة	$p \wedge F \equiv F \quad \& \quad p \vee T \equiv T$
الخاصة التبديلية	$p \vee q \equiv q \vee p \quad \& \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$
الخاصة التوزيعية من اليمين	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
قانونا دومورغان	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
خاصة النفي	$p \vee \neg p \equiv T \quad \& \quad p \wedge \neg p \equiv F$
خاصة الاقتضاء المزدوج	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
خاصة السخافة	$(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \equiv \neg p$

الجدول (1-14)

والجدول (1-15) يبين بعض العبارات المنطقية المتكافئة:

$p \to q$	$\equiv$	$\neg p \vee q$
$p \to q$	$\equiv$	$\neg q \to \neg p$

$p \vee q$	$\equiv$	$\neg p \rightarrow q$
$p \wedge q$	$\equiv$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q)$	$\equiv$	$p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$\equiv$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\equiv$	$(p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$	$\equiv$	$p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	$\equiv$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\equiv$	$p \leftrightarrow \neg q$

الجدول (1-15)

1-6-2 العبارة XOR

إن الرمز $\oplus$ يدل على عبارة (أو الصريحة) XOR وهي عبارة ثنائية ولا تكون صحيحة إلا إذا اختلفت القضيتان بالصحة والخطأ وهي تعطى أيضاً بعلاقة التكافؤ:

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

وجدول الحقيقة لها هو:

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

الجدول (1-16)

1-7 المنطق والعمليات البتية (Logic and Bit Operations)

تمثل المعطيات في الحواسيب باستخدام البتات. إن لرمز البت قيمتين ممكنتين هما الصفر 0 والواحد 1. إن معنى الكلمة البتية يأتي من الرقم الثنائي، لأن الأصفار

والواحدات هي أرقام تستخدم في التمثيل الثنائي للأعداد، ويمكن استخدام البت لتمثيل قيمة الحقيقة لوجود قيمتي الحقيقة هما الصح $True$ والخطأ $False$.

سوف نستخدم البت 1 لتمثيل الصح $True$ والبت (0) لتمثيل الخطأ $False$، أي أن 1 تمثل T و 0 تمثل F كما هو موضح في الجدول (1-17):

البت	قيمة الحقيقة
1	T
0	F

الجدول (1–17)

يقال عن متحول إنه بولياني Boolean إذا كانت قيمة هذا المتحول إما الصح أو الخطأ وبناءً على ذلك فإنه يمكن للمتحول البولياني أن يمثل باستخدام البت.

إن العمليات البتية الحاسوبية تماثل الارتباطات المنطقية باستبدال الصح بالواحد 1 والخطأ بالصفر 0 في جداول الحقيقة من أجل المؤثرات: AND, OR, XOR.

يوضح الجدول (1-18) العمليات البتية.

x	y	x OR y	x AND y	x XOR y
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

الجدول (1-18)

تستخدم الأشرطة البتية (Bit Strings) لتمثيل المعلومات، وهي عبارة عن لوائح من الواحدات والأصفار. عندما يتم ذلك، فإن العمليات على الأشرطة البتية يمكن أن تستخدم للتحكم بضبط هذه المعلومات. نشير أيضاً إلى أن الشريط البتي هو متتالية مكونة من صفر أو أكثر من البتات ويتحدد طول الشريط البتي بعدد البتات الموجودة فيه.

مثال (1-7):

إن للشريط البتي 10101001 الطول 9.

يمكن أن نوسع استخدام العمليات البتية إلى الشرائط البتية، من خلال تعريف العمليات (bitwize AND) و (bitwize OR) و (bitwize XOR) على شريطين لهما نفس الطول وناتج هذه العمليات أشرطة البتات الناتجة عن العمليات السابقة بشكل مماثل للعمليات: AND, OR, XOR على البتات المتقابلة في الشريطين على الترتيب. سوف نستخدم الرموز السابقة التي استخدمناها للعمليات المنطقية للعمل مع المؤثرات الجديدة:

bitwize AND ، bitwize OR, bitwize XOR.

والتي سندعوها: AND البتية، OR البتية، XOR البتية.

يوضح المثال الآتي العمليات السابقة على الأشرطة البتية.

مثال (1-8):

لتوجد ناتج العمليات: AND البتية، OR البتية، XOR البتية.

على الشريطين البتيين:

01101101110
11000111101

نجزئ هذه الأشرطة (بهدف تسهيل قراءتها) إلى بلوكات مكونة من أربعة بتات.

إن العمليات الثلاث المطلوبة على الشريطين، تُنتِج ثلاثة أشرطة موضحة على النحو الآتي:

011 0110 1110
110 0011 1101

bitwize OR : 111 0111 1111
bitwize AND : 010 0010 1100
bitwize XOR : 101 0101 0011

تمارين غير محلولة

أنشئ جدول الحقيقة لكل من القضايا المركبة الآتية:

1- if p, then not q.
2- (if p, then q) or (if not p, then q).
3- (if p, then q) and (if not p, then q).
4- (p or q) or r.
5- (p and q) or r.
6- (p or q) and not r.
7- (p and q) and r.
8- (p and q) or not r.
9- if (if (if p, then q), then r), then s.

ما هي قيمة x بعد أن تكون كل عبارة من العبارات الآتية قد نفذت حاسوبياً علماً أن $x = 1$ قبل البدء بالتنفيذ.

10- if $1 + 2 = 3$, then $x := x + 1$.
11- if $(1 + 1 = 3)$ or $(2 + 2 = 3)$, then $x := x + 1$.
12- if $(2 + 3 = 5)$ and $(3 + 4 = 7)$, then $x := x + 1$.
13- if $(1 + 1 = 2)$ XOR $(1 + 2 = 3)$, then $x := x + 1$.
14- if $x < 2$ then $x := x + 1$.

أوجد العبارات المكافئة للعبارات $p \oplus p$ و $(p \oplus p) \oplus p$.

هل العملية $\oplus$ تجميعية أي هل $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$ ؟.

هل العملية $\oplus$ تحقق العبارة $(p \oplus q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \oplus (q \wedge r)$ ؟.

أوجد: AND البتية، OR البتية، XOR البتية، على كل زوج من الشرائط البتية الآتية:

15- 1011110 , 0100001 .
16- 11110000 , 10101010 .
17- 0001110001 , 1001001000 .
18- 1111111111 , 0000000000 .
19- 11000 , 01011 .
20- 011111 , 101010 .
21- 11011 , 01010 .
22- 10001 , 11011 .
23- 010000 , 010000 .

استخدم جداول الحقيقة لاختبار صحة التكافؤات الآتية:

24- p and $T \equiv p$.
25- p and $F \equiv F$.
26- p or $p \equiv p$.
27- p or $F \equiv p$.
28- p or $T \equiv T$.
29- p and $p \equiv p$.
30- p or $q \equiv q$ or p.
31- p and $q \equiv q$ and p.
32- not (p and q) $\equiv$ not p or not q.
33- (p and q) or (p and r) $\equiv p$ and (q or r).
34- (p or q) or $r \equiv p$ or (q or r).
35- (p and q) and $r \equiv p$ and (q and r).

8-1 المسندات والمسورات (Predicates and Quantifiers)

1-8-1 المسندات (Predicates)

في الكثير من الحالات تبدو بعض العبارات وكأنها ليست بقضايا، لأنها تتضمن متحولات ذات قيم غير واضحة. فهذه العبارات يمكن أن تكون صحيحة من أجل بعض القيم التي يمكن أن تسند إلى المتحولات، ويمكن أن تكون خاطئة من أجل قيم أخرى. وعلى هذا الأساس فإننا لا نستطيع أن نسند لهذه العبارات قيم الحقيقة (Truth Values).

تدعى العبارات، مثل:

$$\begin{aligned} P(x) &: 3 + x = 5 \\ Q(x,y,z) &: x^2 + y^2 \le z^2 \\ R(x,y) &: x^2 + y^2 \ge 0 \\ S(x) &: -1 \le \sin x \le +1 \end{aligned}$$

بالمسندات (Predicates).

تصبح المسندات قضايا عندما تُوَصَّف متحولاتها، على سبيل المثال:

$$P(2) : 3 + 2 = 5$$

هي قضية صحيحة، إلا أن:

$$P(7): 3+7=5$$

قضية خاطئة.

إن قيم المتحول التي تجعل المسند صحيحاً، هي قيم تحقق المسند ونجد أن 2 تحقق $P(x)$ لأن $P(2)$ صحيحة، لكن 7 لا تحقق $P(x)$ لأن $P(7)$ خاطئة.

مثال (1-9):

إذا كان المسند $Q(x,y)$ معرفاً على النحو الآتي:

$$Q(x,y): x=y+3$$

لنوجد قيمة الحقيقة للقضايا: $Q(1,2), Q(3,0)$

للحصول على $Q(1,2)$ ، نضع $x=1, y=2$ فنجد:

$$Q(1,2): 1=2+3$$

وهي قضية خاطئة. وللحصول على $Q(3,0)$ نضع $x=3, y=0$ فنجد:

$$Q(1,3): 3=0+3$$

وهي قضية صحيحة.

مثال (1-10):

إذا كانت R مسنداً له الشكل:

$$R(x,y,z): x+y=z$$

فإن $R(1,2,3)$ صحيحة و $R(0,0,1)$ خاطئة.

عامةً إن العبارة التي تتضمن n من المتغيرات: $x_1, x_2, \cdots, x_n$، يمكن أن يرمز لها بالشكل $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. ونقول عن هذه العبارة إنها مسند فيه n من المواضع. إن مثل هذه العبارات يمكن أن تحدث في البرامج الحاسوبية.

مثال (1-11):

لنأخذ العبارة:

$$\text{if } x>0, \quad \text{then } x := x+1$$

عندما تكون في برنامج حاسوبي، فإن قيمة x في لحظة تنفيذ البرنامج تعوض في $P(x)$ والتي هي $x > 0$. إذا كانت $P(x)$ صحيحة من أجل هذه القيمة للمتغير x، فإن عبارة الإسناد $x := x + 1$ تنفذ، وتزداد قيمة x بمقدار 1. أما إذا كانت $P(x)$ خاطئة من أجل هذه القيمة للمتغير x، فإن عبارة الإسناد لن تنفذ، ولا تتغير قيمة x في هذه الحالة.

مثال (12-1):

إذا كان البرنامج التالي يقوم بمبادلة قيم المتغيرين x وy:

$temp := x$
$x := y$
$y := temp$

نوجد المسندات التي يمكن أن تستخدم في اختبار صحة هذا البرنامج. بالتالي علينا أن نظهر أن للمتغيرات x وy قيماً خاصة قبل تنفيذ البرنامج. لأجل ذلك سوف نستخدم المسند $P(x,y)$، حيث إن $P(x,y)$ تمثل العبارة: $x = a$ and $y = b$ علماً أن a وb هي قيم x وy قبل القيام بتنفيذ البرنامج، وطالما أننا نريد أن نختبر برنامج تبديل قيم x وy من أجل كل مدخلات البرنامج. كما أننا سوف نستخدم المسند x و$Q(x,y)$ من أجل العبارة: $(x = b \text{ and } y = a)$. سنفرض أن $P(x,y)$ محققة، أي إن العبارة: $(x = a \text{ and } y = b)$ صحيحة، وهذا يعني أن $x = a$ و$y = b$ ، إن الخطوة الأولى في البرنامج هي $temp := x$ أي أن تسند قيمة x إلى $temp$، بعد هذه الخطوة نعلم أن $x = a$ و$temp = a$ و$y = b$. ثم بعد هذه الخطوة يتم وضع $x := y$، ونعلم أن $x = b$ و$temp = a$ و$y = b$. أخيراً، فإنه ومن الخطوة السابقة نعلم أن: $x = b$ و$temp = a$ و$y = a$. ينتج من جراء تنفيذ البرنامج أن $Q(x,y)$ محققة، أي إن العبارة $(x = b \text{ and } y = a)$ صحيحة.

2-8-1 المسورات (Quantifiers)

عندما تعطى قيم إلى متغيرات مسند فيه n من المواضع فإن ناتج العبارة يمثل قضية بقيمة حقيقة محددة. هنالك أسلوب آخر يدعى التسوير (quantification) لإنشاء قضية من مسند فيه n من المواضع.

يعبر التسوير عن التوسع في أن يكون المسند صحيحاً على مجال للعناصر. تستخدم الكلمات الإنكليزية: all, some, many, none, few في التسويرات، وسوف نركز على نمطين من التسويرات.

إن **التسوير الشامل** (universal quantification) يعلمنا بأن المسند صحيح من أجل كل عنصر وفقاً لشرط، ويعلمنا **التسوير الوجودي** (existential quantification) بوجود عنصر أو أكثر يكون من أجلها المسند صحيحاً.

إن الجزء من المنطق الذي يعالج المسندات والمسورات يدعى بحساب المسندات (predicate calculus).

إن العديد من العبارات الرياضية تؤكد صحة خاصة ما من أجل كل قيم المتحول في نطاق أو مجال ما. ويمكن إظهار مثل هذه العبارات باستخدام التسوير الشامل.

إن التسوير الشامل لـ $P(x)$ من أجل نطاق (مجال، ساحة)، هو القضية التي تؤكد أن $P(x)$ صحيحة من أجل كل قيم x في هذا النطاق. نلاحظ أن النطاق يحدد القيم الممكنة للمتحول x. ومعنى التسوير الشامل يتغير عندما نغير النطاق، ويجب أن يكون النطاق محدداً عندما يتم استخدام المسور الشامل، من دون ذلك فإن التسوير الشامل لعبارة لا يكون معرفاً.

إن التسوير الشامل لـ $P(x)$ هو العبارة: $\forall x\, P(x)$

يشير هذا الرمز إلى التسوير الشامل لـ $P(x)$ ويدعى $\forall$ بالمسور الشامل وتقرأ $\forall x\, P(x)$ بالشكل:

«لكل x فإن $P(x)$» أو «أياً كان x فإن $P(x)$» والعنصر الذي تكون من أجله $P(x)$ خاطئة، يدعى بالمثال المناقض (counter example) لـ $\forall x\, P(x)$.

يوضح المثال الآتي معنى المسور الشامل:

مثال (1-13):

لتكن $P(x)$ هي العبارة $(x+1 > x)$، ولنوجد قيمة الحقيقة للتسوير $\forall x\, P(x)$ حيث إن النطاق يتكون من كل الأعداد الحقيقية.

من الواضح أن $P(x)$ صحيحة من أجل كل الأعداد الحقيقية x، بالتالي فإن التسوير:

$$\forall x\, P(x)$$

صحيح.

نشير إلى أن هنالك افتراضاً ضمنياً بأن كل النطاقات تُشكَّل بحيث لا تكون خالية، فإذا كان النطاق خالياً فإن $\forall x\, P(x)$ صحيحة من أجل أي مسند $P(x)$ وذلك لعدم وجود عناصر x في النطاق تكون من أجلها $P(x)$ خاطئة. يوضح الجدول المحدد بالجدول (1-19) معنى المسور الشامل في سطره الأول:

العبارة	صحتها	خطؤها
$\forall x\, P(x)$	$P(x)$ صحيحة من أجل كل x	يوجد x تكون من أجلها $P(x)$ خاطئة
$\exists x\, P(x)$	يوجد x من أجلها تكون $P(x)$ صحيحة	إن $P(x)$ خاطئة من أجل كل x

الجدول (1-19)

تكون العبارة $\forall x\, P(x)$ خاطئة، إذا وفقط إذا كانت $P(x)$ ليست دائماً صحيحة عندما تكون x من النطاق. أحد الأساليب التي تبين أن $P(x)$ ليست دائماً صحيحة عندما تكون x مأخوذة من النطاق، هو أن نوجد مثالاً مناقضاً للعبارة $\forall x\, P(x)$. ومن الواضح أن مثالاً مناقضاً واحداً سوف يكون كافياً لهذه الغاية.

مثال (1-14):

لتكن $Q(x)$ هي العبارة $(x > 2)$، لتوجد قيمة الحقيقة للتسوير، حيث يتكون النطاق من كل الأعداد الحقيقية.

إن $Q(x)$ ليست صحيحة أياً كان العدد الحقيقي x. وفي هذه الحالة نرى أن $Q(3)$ خاطئة، أي إن $x = 3$ هو مثال مناقض للعبارة $\forall x\, Q(x)$، بالتالي فإن: $\forall x\, Q(x)$ خاطئة.

مثال (1-15):

لتكن $P(x)$ هي $x^2 > 0$ لنبين أن العبارة $\forall x\, P(x)$ خاطئة حيث النطاق مكون من كل الأعداد الصحيحة، إن وضع $x = 0$ هو مثال مناقض لأن $x^2 = 0$ عندما تكون $x = 0$، وx^2 ليست بأكبر من 0 عندما $x = 0$.

إن النظر في الأمثلة المناقضة أمر مهم في العبارات المسورة شمولياً وخصوصاً في الدراسات الرياضية.

عندما تكون كل عناصر النطاق معطاة بالشكل $x_1, x_2, \cdots, x_n$ فإنه ينتج أن التسوير الشامل $\forall x\, P(x)$ هو من الشكل:

$$P(x_1) \text{ and } P(x_2) \text{ and } \cdots \text{ and } P(x_n)$$

ولأن هذا الوصل يكون صحيحاً إذا وفقط إذا كانت $P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_n)$ جميعها صحيحة.

مثال (1-16):

لنوجد قيمة الحقيقة من أجل $\forall x\, P(x)$ حيث $P(x)$ هي العبارة $x^2 < 10$ ويتكون النطاق من الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 4.

إن العبارة:

$$\forall x\, P(x)$$

تُمثَّل بالشكل

$$P(1) \text{ and } P(2) \text{ and } P(3) \text{ and } P(4)$$

ذلك لأن النطاق يتكون من الأعداد الصحيحة $1,2,3,4$. وبما أن $P(4)$ هي $4^2 < 10$ وتمثل عبارة خاطئة، ينتج أن $\forall x\, P(x)$ خاطئة.

مثال (1-17):

لنبين معنى العبارة $\forall x\, N(x)$، إذا كانت $N(x)$ تمثل: «الكمبيوتر x متصل بالشبكة الحاسوبية» والنطاق يتكون من كل الحواسيب الموجودة في مُجمَّعٍ ما.

إن العبارة $\forall x\, N(x)$ تعني أنه من أجل كل كمبيوتر x في المجمَّع، فإن هذا الكمبيوتر x متصل بالشبكة. أو أن نقول إن كل كمبيوتر في المجمع متصل بالشبكة.

مثال (1-18):

لنوجد قيمة الحقيقة للعبارة:

$$\forall x\, (x^2 \geq x)$$

على اعتبار أن النطاق يتشكل من كل الأعداد الحقيقية.

لنوجد أيضاً قيمة الحقيقة إذا كان النطاق يتكون من كل الأعداد الصحيحة.

إن التسوير الشامل:

$$\forall x\, (x^2 \geq x)$$

حيث النطاق هو كل الأعداد الحقيقية، هذا خاطئ لوجود $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$. ونلاحظ أن $x^2 \geq x$ إذا وفقط إذا كان $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ ينتج من ذلك أن $x^2 \geq x$ إذا وفقط إذا كانت $x \leq 0$ أو $x \geq 1$. ينتج إذن أن $\forall x\, (x^2 \geq x)$ خاطئة إذا كان النطاق يمثل كل الأعداد الحقيقية. أما إذا كان النطاق هو كل الأعداد الصحيحة فإن:

$$\forall x\, (x^2 \geq x)$$

صحيحة.

تؤكد العديد من العبارات الرياضية على وجود عنصر يتمتع بخاصية معينة، يمكن إظهار مثل هذه العبارات باستخدام التسوير الوجودي، وبالتسوير الوجودي نقوم

بتشكيل القضية التي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت $P(x)$ صحيحة من أجل قيمة واحدة على الأقل للمتغير x من النطاق.

إن التسوير الوجودي لـ $P(x)$ هو القضية:

«يوجد عنصر x في النطاق بحيث تكون $P(x)$»

يستخدم الرمز $\exists x\, P(x)$ من أجل التسوير الوجودي لـــ $P(x)$. ويدعى الرمز $\exists$ بالمسور الوجودي (existential quantifier).

ينبغي دائماً أن يكون النطاق محدداً عندما يتم استخدام العبارة $\exists x\, P(x)$. إن هذا يقودنا إلى أن نعتبر أن $\exists x\, P(x)$ تتغير إذا تغير النطاق ومن دون تحديد وتعريف النطاق فإنه لا معنى للعبارة $\exists x\, P(x)$.

يوضح السطر الثاني في الجدول الموضح بالشكل (1-19) معنى المسوَّر الوجودي.

مثال (1-19):

لتكن $P(x)$ ترمز للعبارة $x > 3$، إن قيمة الحقيقة للتسوير الوجودي $\exists x\, P(x)$ على اعتبار أن النطاق هو كل الأعداد الحقيقية، ويتم إيضاحها من خلال المناقشة الآتية:

بما أن $x > 3$ صحيحة في بعض الأحيان، فمثلاً إذا كانت $x = 4$ فإن التسوير الوجودي لـ $P(x)$ وهو العبارة $\exists x\, P(x)$ صحيح.

نلاحظ أن العبارة $\exists x\, P(x)$ خاطئة إذا وفقط إذا لم يكن هنالك أي عنصر x في النطاق تكون من أجله $P(x)$ صحيحة، أي إن $\exists x\, P(x)$ تكون خاطئة إذا وفقط إذا كانت $P(x)$ خاطئة من أجل كل عنصر من النطاق.

مثال (1-20):

لتكن $Q(x)$ ترمز للعبارة $x = x + 1$، لنوجد قيمة الحقيقة للتسوير الوجودي $\exists x\, Q(x)$ حيث يتكون النطاق من كل الأعداد الحقيقية.

نلاحظ، بما أن $Q(x)$ خاطئة من أجل كل عدد x، فإن التسوير الوجودي لـ $Q(x)$ والذي هو العبارة $\exists x\, Q(x)$ خاطئ.

عامّة فإن هنالك افتراضاً ضمنياً بأن تكون النطاقات المستخدمة من أجل المسورات غير خالية، فإذا كان النطاق خالياً، فإن $\exists x\, Q(x)$ خاطئة لأننا لا نستطيع إيجاد عنصر من النطاق بحيث تكون $Q(x)$ صحيحة.

عندما تكون كل عناصر النطاق معطاة بالشكل: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ فإنه ينتج أن التسوير الوجودي $\exists x\, P(x)$ هو من الشكل:

$$P(x_1) \text{ or } P(x_2) \text{ or } P(x_3) \text{ or} \cdots \text{ or } P(x_n)$$

ولأن هذا الفصل يكون صحيحاً إذا وفقط إذا كانت واحدة على الأقل من العبارات الآتية صحيحة: $P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_n)$.

مثال (1-21):

لنوجد قيمة الحقيقة من أجل $\exists x\, P(x)$ حيث $P(x)$ هي العبارة $x^2 < 10$ ويتكون النطاق من الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 4.

إن عناصر النطاق هي الأعداد الصحيحة الموجبة: $1, 2, 3, 4$ والقضية $\exists x\, P(x)$ هي ذاتها التي تعرض من خلال عملية الفصل:

$$P(1) \text{ or } P(2) \text{ or } P(3) \text{ or } P(4)$$

وبما أن $P(3)$ صحيحة لأن $3^2 < 10$ صحيحة، فإنه ينتج من ذلك أن $\exists x\, P(x)$ صحيحة.

إن المسورات الشاملة والمسورات الوجودية هي الأكثر استخداماً في الرياضيات وعلوم الحاسب، وتجدر الإشارة إلى أنه لا توجد حدود على عدد المسورات المختلفة التي يمكن أن نُعرِّفها.

3-8-1 التكافؤات المنطقية التي تتضمن المسورات:

تكون العبارات التي تحتوي على المسندات والمسورات متكافئة منطقياً، إذا وفقط إذا كان لهذه العبارات جدول الحقيقة نفسه، ولا مشكلة في ماهية المسندات التي تتوضع في هذه العبارات وما هي ساحاتها المستخدمة من أجل المتغيرات.

نستخدم الرمز $S \equiv T$ للإشارة إلى أن العبارتين S وT الحاويتين على المسندات والمسورات، متكافئتان منطقياً.

مثال (1-22):

لنبين أن العبارتين:

$$\forall x \left(P(x) \text{ and } Q(x)\right)$$
$$\forall x\, P(x) \text{ and } \forall x\, Q(x)$$

متكافئتان منطقياً.

إن هذا التكافؤ المنطقي يظهر أننا نستطيع أن نوزع المسور الشامل على الوصل، وأكثر من ذلك نستطيع أيضاً أن نوزع المسور الوجودي على الفصل، لكننا لا نستطيع أن نوزع المسور الشامل على الفصل وكذلك لا نستطيع أن نوزع المسور الوجودي على الوصل.

نبين الآن أن للعبارتين جدول الحقيقة نفسه، لا توجد مشكلة في ماهية المسندين P وQ، ولا مشكلة في ساحات هذه المسندات. لنفرض الآن أنه لدينا مسندات خاصة هي P وQ ولهما ساحة مشتركة، نستطيع أن نبين أن:

$$\forall x\, P(x) \text{ and } \forall x\, Q(x) \quad \text{و} \quad \forall x \left(P(x) \text{ and } Q(x)\right)$$

هي عبارات متكافئة منطقياً من خلال إجراء الأمرين الآتيين:

- أن نبين أنه إذا كانت $\forall x \left(P(x) \text{ and } Q(x)\right)$ صحيحة، فإن $\forall x\, P(x) \text{ and } \forall x\, Q(x)$ صحيحة.

- وأن نبين بأنه إذا كانت $\forall x\, P(x)$ and $\forall x\, Q(x)$ صحيحة، فإن $\forall x\, \big(P(x)$ and $Q(x)\big)$ صحيحة أيضاً.

لأجل ذلك ومن خلال افتراضنا أن $\forall x\, \big(P(x)$ and $Q(x)\big)$ صحيحة، فإن هذا يعني أنه إذا كانت α من الساحة المشتركة، فإن $P(\alpha)$ and $Q(\alpha)$ صحيحة، بالتالي فإن $P(\alpha)$ صحيحة وكذلك $Q(\alpha)$ صحيحة، ولأن $P(\alpha)$ صحيحة و $Q(\alpha)$ صحيحة أياً كان العنصر α من الساحة المشتركة، نصل إلى أن $\forall x\, P(x)$ صحيحة وكذلك $\forall x\, Q(x)$ صحيحة أيضاً، ويترتب على ذلك أن تكون $\forall x\, P(x)$ and $\forall x\, Q(x)$ صحيحة.

إجراء الافتراض بأن $\forall x\, P(x)$ and $\forall x\, Q(x)$ صحيحة يقود إلى أن $\forall x\, P(x)$ صحيحة وكذلك $\forall x\, Q(x)$ صحيحة أيضاً، لأنه إذا أخذنا α عنصراً من الساحة، فإن $P(\alpha)$ صحيحة و $Q(\alpha)$ صحيحة أيضاً، وينتج من ذلك أنه من أجل كل العناصر α من الساحة تكون $P(\alpha)$ and $Q(\alpha)$ صحيحة، بناء على هذا فإن $\forall x\, \big(P(x)$ and $Q(x)\big)$ صحيحة.

نستطيع أن نخلص إلى النتيجة الآتية:

$$\forall x\, \big(P(x) \text{ and } Q(x)\big) \equiv \forall x\, P(x) \text{ and } \forall x\, Q(x)$$

4-8-1 نفي التعابير المسورة:

لنتأمل العبارة:

«كل طالب في الصف قد درس مقرر الرياضيات المتقطعة»

إن هذه العبارة هي عبارة تسوير شامل من النمط:

$$\forall x\, P(x)$$

حيث $P(x)$ هي العبارة:

«x قد درس مقرر الرياضيات المتقطعة»

تتكون الساحة من كل طلاب الصف، ونفي العبارة السابقة التي توقفنا عندها يأخذ الشكل الآتي:

«ليست هنالك الحالة بأن كل طالب في الصف قد درس مقرر الرياضيات المتقطعة»

إن هذه العبارة تعني أن هنالك تكافؤاً مع العبارة الآتية:

«يوجد طالب في الصف لم يدرس مقرر الرياضيات المتقطعة»

ببساطة إن هذا تسوير وجودي لنفي ويأخذ الشكل الآتي:

$$\exists x \neg P(x)$$

وبالتالي لدينا التكافؤ المنطقي:

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

لبيان هذا التكافؤ يجب أن نبين أن $\neg \forall x\, P(x)$ صحيحة إذا وفقط إذا كانت $\forall x\, P(x)$ خاطئة. وعلينا أن نتذكر أن $\forall x\, P(x)$ تكون خاطئة إذا وفقط إذا كان العنصر x من الساحة والذي تكون من أجله $P(x)$ خاطئة، يتحقق ذلك إذا وفقط إذا كان يوجد العنصر x من الساحة والذي تكون من أجله $P(x)$ خاطئة، يتحقق ذلك إذا وفقط إذا كان يوجد العنصر x من الساحة والذي تكون من أجله $\neg P(x)$ صحيحة. وأخيراً، نلاحظ أنه يوجد العنصر x من الساحة من أجله تكون $\neg P(x)$ صحيحة إذا وفقط إذا كانت $\exists x \neg P(x)$ صحيحة. بوضع هذه الخطوات مع بعضها بعضاً، فإننا نصل إلى أن $\neg \forall x\, P(x)$ تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت $\exists x \neg P(x)$ صحيحة، ينتج أن العبارات $\neg \forall x\, P(x)$ و $\exists x \neg P(x)$ متكافئة منطقياً.

نفرض أننا نبحث عن نفي التسوير الوجودي للعبارة:

«يوجد طالب في الصف درس مقرر الرياضيات المتقطعة»

إنها تمثل تسويراً وجودياً من النمط:

$$\exists x\, Q(x)$$

حيث $Q(x)$ هي العبارة:

«x درس مقرر الرياضيات المتقطعة»

إن نفي هذه العبارة هو:

«ليست هنالك حالة لوجود طالب في الصف درس مقرر الرياضيات المتقطعة»

إن هذا يكافئ:

«إن كل طالب في الصف قد درس مقرر الرياضيات المتقطعة»

وهي تسوير شامل، ومن ذلك نكتب:

$$\forall x \neg Q(x)$$

نخلص إلى وجود التكافؤ المنطقي الآتي:

$$\neg \exists x\, Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$$

ويمكن إثبات صحة هذا التكافؤ وفقاً لما أوردناه في الحالات المشابهة وتركها للقارئ كتمرين.

تدعى قوانين نفي المسورات الآتية:

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$
$$\neg \exists x\, Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$$

بقوانين دومورغان في المسورات.

تنويه: عندما تكون ساحة المسند مكونة من n عنصراً (n صحيح موجب)، فإن قوانين نفي العبارات المسورة هي ذاتها المستخدمة على أنها قوانين دومورغان على البنى الجبرية الأخرى والتي سترد لاحقاً (الفصل الرابع) ونميزها عن سواها في حالتنا على أنها قوانين دومورغان على المسورات.

أوغسطس دومورغان
(1806–1871)

إذا كانت الساحة مكونة من العناصر $x_1, x_2, \cdots, x_n$، فإنه ينتج أن $\neg \forall x P(x)$ هي ذاتها تعطى بشكل آخر هو $\neg \left(P(x_1) \text{ and } P(x_2) \text{ and} \cdots \text{and } P(x_n)\right)$، وهي تكافئ $\neg P(x_1) \text{ or } \neg P(x_2) \text{ or} \cdots \text{or } \neg P(x_n)$ وهي ذاتها

$\exists x \neg P(x)$. بشكل مشابه فإن $\neg \exists x P(x)$ هي ذاتها معطاة بشكل آخر هو $\neg P(x_1)$ and $\neg P(x_2)$ and $\cdots$ وتكافئ $\neg\big(P(x_1)$ or $P(x_2)$ or $\cdots$ or $P(x_n)\big)$ and $\neg P(x_n)$ وهذه أيضاً هي ذاتها $\forall x \neg P(x)$.

مثال (1-23):

لنوجد نفي العبارتين:

1- $\forall x(x^2 > x)$

2- $\exists x(x^2 = x)$

إن نفي العبارة الأولى هو العبارة $\neg \forall x(x^2 > x)$ وتكافئ $\exists x \neg(x^2 > x)$. نعيد كتابة الأخيرة بالشكل $\exists x(x^2 \leq x)$. أما نفي العبارة الثانية فهو العبارة $\neg \exists x(x^2 = x)$ والتي تكافئ $\forall x \neg(x^2 = x)$. نعيد كتابة الأخيرة بالشكل $\forall x(x^2 \neq x)$.

إن قيم الحقيقة لهذه العبارات يرتبط بالساحات المستخدمة في كلٍ منهما.

مثال (1-24):

لنبين أن العبارتين:

1- $\neg \forall x\big(\text{if } P(x), \text{ then } Q(x)\big)$

2- $\exists x\big(P(x) \text{ and } \neg Q(x)\big)$

متكافئتان منطقياً.

باستخدام قوانين دومورغان من أجل المسورات الشاملة، فإننا نعلم أن $\neg \forall\big(\text{if } P(x), \text{ then } Q(x)\big)$ و $\exists x \left(\neg\big(\text{if } P(x), \text{ then } Q(x)\big)\right)$ متكافئتان منطقياً.

كما نعلم من التكافؤ المنطقي أن: $\neg\big(\text{if } P(x), \text{ then } Q(x)\big)$ و $P(x)$ and $\neg Q(x)$ متكافئتان منطقياً من أجل كل عنصر x. يمكن أن نقوم هنا بوضع التعبير المنطقي المكافئ مكان الآخر، فينتج أن:

$$\neg \forall x\big(\text{if } P(x), \quad \text{then } Q(x)\big)$$

و

$$\exists x\big(P(x) \text{ and } \neg Q(x)\big)$$

متكافئتان منطقياً.

إن أحد أنماط لغات البرمجة قد صـــمم بهدف اســـتخدام قواعد وقوانين منطق المسـندات، على هذا الأسـاس فإن لغة prolog قد طورت عام 1970 من قبل علماء الحاســـب العاملين في حقل الذكاء الصـــنعي كمثال على ذلك، تتضـــمن مجموعة التصـــريحات في هذه اللغة على [prolog facts] التي تعرف مســـندات من خلال عناصـر محددة تحققها كما يتم أيضـاً في [prolog rules] تعريف مسـندات جديدة تستخدم مسندات عرفت في [prolog facts].

5-8-1 المسورات المركبة (Nested Quantifiers):

يكون المسوران مركبين، إذا كان أحدهما في نطاق الآخر، مثل:

$$\forall x \exists y\ (x + y = 0)$$

إن ذات الأمر لو نظرنـا إليهـا على أنهـا $\forall x\ Q(x)$، حيـث $Q(x)$ هنـا تمثـل $\exists y\ P(x,y)$ و $P(x,y)$ هي $x + y = 0$.

يحدث في الرياضـيات وعلوم الحاسـب اسـتخدام المسـورات المركبة اسـتخداماً واسعاً، ويمكن للمسورات المركبة أيضاً أن تكون صعبة الفهم في بعض الأحيان. لفهم العبارات التي تتضمن عدة مسورات علينا أن نحدد ما تعنيه المسورات والمسندات في هذه العبارات.

مثال (1-25):

بفرض أن ساحة كل من x وy هي كل الأعداد الحقيقية، والعبارة المركبة:

$$\forall x \forall y(x + y = y + x)$$

تقول إن $x + y = y + x$ من أجل كل الأعداد الحقيقية x وy وتمثل الخاصـــة التبديلية المستخدمة في جميع الأعداد الحقيقية. وبشكل مماثل فإن العبارة:

$$\forall x \exists y(x + y = 0)$$

تقول إنه من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y بحيث يكون $x + y = 0$.

وبشكل مشابه، فإن العبارة:

$$\forall x \forall y \forall z \, (x + (y + z) = (x + y) + z)$$

تمثل الخاصة التجميعية عند جمع الأعداد الحقيقية.

6-8-1 نفي المسورات المركبة:

يتم نفي العبارات الحاوية على مسورات مركبة بنجاح من خلال تطبيق القوانين المستخدمة في نفي العبارات التي تتضمن مسوراً واحداً. توضح الأمثلة الآتية هذا المفهوم.

مثال (1-26):

سنقوم بالتعبير عن نفي العبارة:

$$\forall x \, \exists y \, (xy = 1)$$

بتطبيق قوانين دومورغان على المسورات، فإننا نستطيع أن نكتب أولاً:

$$\neg \forall x \, \exists y \, (xy = 1)$$

إن ذلك يكافئ: $\exists x \neg \exists y \, (xy = 1)$ وهي بدورها تكافئ $\exists x \forall y \neg (xy = 1)$.

ذلك لأن $\neg (xy = 1)$ يعبر عنه تعبيراً أبسط من خلال $xy \neq 1$، ونصل إلى نفي العبارة المعطاة هو:

$$\exists x \forall y \, (xy \neq 1)$$

مثال (1-27):

لإيجاد نفي العبارة: $\forall x \forall y \, R(x, y)$ لدينا:

$$\neg \forall x \forall y \, R(x, y) \equiv \exists x \neg \forall y \, R(x, y) \equiv \exists x \exists y \neg R(x, y)$$

وبالمثل فإن النفي:

$$\neg \exists x \forall y \exists z \, Q(x, y, z)$$

يكتب بالشكل:

$$\neg\exists x\forall y\exists z\, Q(x,y,z) \equiv \forall x\neg\forall y\exists z\, Q(x,y,z) \equiv \forall x\exists y\neg\exists z\, Q(x,y,z)$$
$$\equiv \forall x\exists y\forall z\neg Q(x,y,z)$$

تنـــويه: لنفي عبارة تحوي مسورات، نستبدل ∃ بالرمز ∀ وبالعكس وكذلك نقوم بنفي المسند المتعلق بالمسور الذي نقوم بنفيه.

مثال (1-28):

لنوجد نفي العبارة:

$$\forall x(x^2 > 0)$$

على اعتبار أن الساحة هي الأعداد الصحيحة.

إشارة إلى ما سبق فإن النفي هو العبارة:

$$\exists x\neg(x^2 > 0)$$

والتي يعبر عنها بالشكل:

$$\exists x(x^2 \leq 0)$$

إن العبارة الأصـــل المعطاة كمســـور شـــامل عبارة خاطئة لأنه في حال $x = 0$ لا يمكن أن يكون x^2 أكبر من الصـــفر. كما أن هذه العبارة خاطئة لأن $\exists x(x^2 \leq 0)$ صحيحة.

تمارين غير محلولة:

1- لتكون $P(x)$ تمثل العبارة: $(x \leq 4)$. ما هي قيم الحقيقة: $P(0)$، $P(4)$، $P(6)$؟

2- لتكن $P(x)$ تمثل العبارة «تحوي الكلمة x الحرف a». ما هي قيم الحقيقة:

$$P(\text{orange}),\quad P(\text{lemon}),\quad P(\text{true}),\quad P(\text{false})$$

3- لتكن $P(x)$ هي العبارة $(x = x^2)$. إذا كانت ساحة العبارة كل الأعداد الصحيحة، ما هي قيمة الحقيقة:

$$P(0),\quad P(1),\quad P(2),\quad P(-1),\quad \exists x\, P(x),\quad \forall x\, P(x)$$

4- إذا كانت $Q(x)$ تمثل العبارة: $(x+1>2x)$. وعلى اعتبار أن الساحة هي كل الأعداد الصحيحة، ما هي قيم الحقيقة:

$$Q(0),\ Q(-1),\ Q(1),\ \exists x\, Q(x),\ \forall x\, Q(x),\ \exists x \neg Q(x),\ \forall x \neg Q(x)$$

5- حدد قيمة حقيقة كل من العبارات الآتية، حيث إن الساحة هي كل الأعداد الصحيحة:

$$\forall n(n+1>n) \quad \exists n(n^2=2) \quad \forall n(n^2\geq n) \quad \exists n(n^2<0)$$
$$\exists n(2n=3n) \quad \forall n(n^2\geq n) \quad \exists n(n=-n) \quad \forall n(n^2=2)$$
$$\forall n(n^2\geq 0) \quad \forall n\left(n^2=\sqrt{5}\right)$$

6- إذا كانت $P(x,y)$ هي العبارة:

«الطالب x درس الصف y»

وساحة x تتكون من كل الطلاب في صفك، وساحة y تتكون من كل مقررات علوم الحاسوب في مدرستك. عبّر عن كل من هذه التسويرات:

$$\exists x\exists y\, P(x,y), \quad \forall x\exists y\, P(x,y), \quad \forall y\exists x\, P(x,y)$$
$$\exists x\forall y\, P(x,y), \quad \exists y\forall x\, P(x,y), \quad \forall x\forall y\, P(x,y)$$

7- لتكن $Q(x,y)$ تمثل العبارة «x أرسل e-mail إلى y». حيث إن ساحة كل من x وy تتكون من كل الطلاب في الكلية. عبر لغوياً عن التسويرات الآتية:

$$\exists x\exists y\, Q(x,y), \quad \forall x\exists y\, Q(x,y), \quad \forall y\exists x\, Q(x,y)$$
$$\exists x\forall y\, Q(x,y), \quad \exists y\forall x\, Q(x,y), \quad \forall x\forall y\, Q(x,y)$$

8- حدد قيمة الحقيقة لكل من العبارات، إذا كانت ساحة المتغيرات هي كل الأعداد الصحيحة:

$$\forall n\exists m(n^2<m) \quad \forall n\forall m\exists p(p=(m+n)/2)$$
$$\forall n\exists m(n+m=0) \quad \forall n\forall m(n<m^2)$$
$$\exists n\exists m(n^2+m^2=5) \quad \exists n\forall m(nm=m)$$
$$\exists n\exists m(n+m=4 \text{ and } n-m=1) \quad \exists n\exists m(n^2+m^2=6)$$

9- أعد كتابة العبارات الآتية بحيث يتم إظهار النفي على المسندات فقط:

$\neg\forall x\exists y\ P(x,y)$ $\neg\exists y\exists x\ P(x,y)$

$\neg\exists y\exists x\ P(x,y)$ $\neg\exists y\big(Q(x)\text{ and }\forall x\neg R(x,y)\big)$

$\neg\forall x\forall y\ P(x,y)$ $\neg\exists y\big(\exists xR(x,y)\text{ or }\forall x\ S(x,y)\big)$

$\neg\big(\exists x\exists y\neg P(x,y)\text{ and }\forall x\forall y\ Q(x,y)\big)$ $\neg\forall y\forall x\big(P(x,y)\text{ or }Q(x,y)\big)$

$\neg\forall x\big(\exists y\forall z\ B(x,y,z)\text{ and }\exists z\forall y\ B(x,y,z)\big)$

10- أوجد مثالاً معاكساً لكل من العبارات المسورة شمولياً، إن كان ذلك ممكناً، حيث إن ساحة المتغيرات تتكون من كل الأعداد الصحيحة:

$\forall x\exists y\ (y^2 = x)$ $\forall x\forall y\ (\text{if } x^2 = y^2,\ \text{then } x = y)$

$\forall x\exists y\ (x = 1/y)$ $\forall x\forall y\ (xy \geq x)$

$\forall x\forall y\ (x^2 \neq y^3)$ $\forall x\exists y\ (y^2 - x < 100)$

Damascus University

الفصل الثاني

2 - الأعداد الصحيحة، والأعداد الأولية، وتقنيات الإثبات

تهتم نظرية الأعداد (number theory) بدراسة الأعداد الصحيحة (integers) ودراسة خواصها. سوف نقوم في هذا الفصل بمراجعة بعض المفاهيم الأساسية في هذه النظرية وتطويرها بما يخدم الحاجة إلى استخدامها في بعض التطبيقات. على سبيل المثال سوف نراجع مفهوم قابلية القسمة الهام ونستخدمه لنؤسس لمفهوم الأعداد الأولية والقاسم المشترك الأعظم وغيرها. كما سنقوم في هذا الفصل بوصف الطرق المتبعة في الإثبات وتطبيقها على أمثلة عددية. وهذه الطرق ليست مهمة للرياضيات فقط بل في تطبيقات علوم الحاسب أيضاً.

2-1 الأعداد الصحيحة

سوف نستخدم الأعداد الصحيحة عند مناقشة تقنيات الإثبات. وهذه الأعداد هي:

$$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

تدعى الأعداد الصحيحة الآتية:

$$\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots$$

بالأعداد الصحيحة الزوجية (even). كما تدعى الأعداد الصحيحة الآتية:

$$\cdots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots$$

بالأعداد الصحيحة الفردية (odd).

تجدر الإشارة إلى أن العدد الصحيح نمط واحد، فإمّا أن يكون زوجياً وإما أن يكون فردياً، وليس يُمثّل النمطين معاً. كما أنّ لكل عدد صحيح زوجي الشكل $2n$ من أجل n عدد صحيح ما. ولكل عدد صحيح فردي الشكل $2n + 1$ من أجل n عدد صحيح ما.

1-1-2 خواص العمليات الأساسية

بفرض أن: m, n, k أعداداً صحيحة، عندئذٍ يكون من أجل عمليتي الجمع والضرب الخواص الآتية:

1- الخاصة التبديلية:

$$m \cdot n = n \cdot m \qquad m + n = n + m$$

2- الخاصة التجميعية:

$$m(nk) = (mn)k \qquad (m + n) + k = m + (n + k)$$

3- خاصة التوزيع:

$$(m + n)k = mk + nk \qquad m(n + k) = mn + mk$$

2-1-2 تمثيل الأعداد الصحيحة

بفرض أن b عدد صحيح موجب أكبر من الواحد. إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإنه يمكن لهذا العدد n أن يمثل تمثيلاً وحيداً على النحو الآتي:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

حيث k عدد صحيح غير سالب، وكذلك $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ أعداد صحيحة غير سالبة أقل من b، كما أنّ $a_k \neq 0$. يفيد هذا الأسلوب المتبع في تمثيل الأعداد الصحيحة بكتابة العدد الصحيح في أنظمة العد المختلفة.

3-1-2 قابلية القسمة (Divisibility)

نقول عن العدد الصحيح d إنه يقسم العدد الصحيح n إذا كان $d \neq 0$ ووجد عدد صحيح ما مثل k بحيث يكون $n = dk$. على سبيل المثال إنّ العدد الصحيح 3 يقسم العدد الصحيح 24 حيث نستطيع أن نكتب $24 = 3(8)$. لكن العدد 5 لا يقسم العدد الصحيح 24 لعدم وجود عدد صحيح مثل k بحيث نستطيع أن نكتب $24 = 5k$. يمكن أن يكون للعدد الصحيح أكثر من قاسم، فعلى سبيل المثال، إنّ للعدد 18 القواسم الآتية:

$$-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18$$

يعبَّر عن عبارة «إنّ d يقسم n» من خلال عبارات أخرى مثل: العدد n يقبل القسمة على d وسنعبر عن ذلك اختصاراً بأن يكون d قاسماً للعدد n من خلال الرمز:

$$d \mid n$$

على سبيل المثال، لقد وجدنا فيما سبق أنّ 3 تقسم العدد 24 ونكتب $3 \mid 24$.

نورد الخاصتين الآتيتين لقابلية القسمة:

1- إذا كان: $d \mid a$ و$a \mid b$، فإنّ $d \mid b$.

2- إذا كان: $d \mid a$ و$a \mid b$، فإنّ $d \mid (ax + by)$، من أجل أي عددين صحيحين x وy.

2-2 الأعداد الأولية (prime numbers)

نقول عن العدد الصحيح $p > 1$، إنه عدد أولي إذا كانت الأعداد 1 وp هي قواسمه الموجبة فقط. والعدد الصحيح الذي يكبر 1 وليس عدداً أولياً، ندعوه بالعدد المركَّب.

مثال (2-1):

نورد لائحة الأعداد الأولية الـ 500 الأوائل والتي هي:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193,

1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837, 2843, 2851, 2857, 2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971, 2999, 3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121, 3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271, 3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371, 3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511, 3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571.

للأعداد الأولية خواص كثيرة مهمّة والعديد من التطبيقات في علوم الحاسب.

ملاحظة:

يكون العدد الصحيح n مركباً إذا وفقط إذا وجد العدد الصحيح a بحيث يكون $a \mid n$ و $1 < a < n$.

نظرية (2-1): (النظرية الأساسية في الحساب)

إنّ أي عدد صحيح أكبر من 1، يمكن أن يكتب كتابة وحيدة على إنه أولي أو إنه جداء لعددين أوليين أو أكثر، حيث إنّ العوامل الأولية تكتب بترتيب غير متناقص.

مثال (2-2):

إنّ التحليل إلى عوامل أولية للأعداد 1024 ,999 ,641 ,100 يعطى بالشكل الآتي:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$$
$$641 = 641$$
$$999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 3^3 \cdot 37$$
$$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$$

نظرية (2-2):

إذا كان n عدداً صحيحاً مركباً، فإنّ للعدد n قاسماً أولياً أصغر أو يساوي $\sqrt{n}$.

مثال (2-3):

لنبيّن أنّ 101 هو عدد أولي. إنّ الأعداد الأولية التي لا تتجاوز $\sqrt{101}$ هي الأعداد: $2, 3, 5, 7$. وطالما أنّ العدد 101 لا يقبل القسمة على الأعداد $2, 3, 5, 7$، فإنه ينتج من ذلك أنّ العدد 101 هو عدد أولي.

يمكن إعادة صياغة النظرية (2-2) على النحو الآتي:

إذا كان العدد الصحيح الموجب n عدداً مركباً، فإنّ للعدد n عامل أولي p بحيث يكون $p^2 \leq n$.

بفرض أنّ p هو العامل الأولي الأصغر للعدد n. إذا كانت عوامل n هي r و s، فإنّ $p \leq r$ كما أنّ $p \leq s$، بالتالي $p^2 \leq rs = n$.

مثال (2-4):

لتحديد فيما إذا كان العدد 521 أولياً، فإننا نحتاج إلى أن نأخذ الأعداد الأولية p التي تصغر أو تساوي العدد 22، (لأنّ $22^2 = 484$ و$23^2 = 529$). لذلك فالأعداد الأولية التي تقل عن 22 هي: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. بالاختبار نجد أنّ أياً من هذه الأعداد لا تقسم العدد 521. لذلك فإنّ 521 هو عدد أولي استناداً إلى ما سبق.

مثال (2-5):

لنوجد العوامل الأولية للعدد 7007 نلاحظ أنّ هذا العدد يكتب من خلال الشكل:

$$7007 = 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

لقد دُرست الأعداد الأولية في الماضي لأسباب فلسفية. وتوجد في وقتنا الحالي أسباب تطبيقية عديدة لدراستها. وخاصة إنّ الأعداد الأولية الكبيرة تؤدي دوراً مهماً في التعمية (cryptography).

إذا كانت الأعداد الأولية الآتية:

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$$

والتي تمثل n عدداً أولياً هي الأصغر، فإننا نعلم أنّ هنالك عدداً أولياً أكبر غير موجود في اللائحة السابقة. تبين النظرية الآتية هذه الحقيقة والتي أثبت صحتها إقليدس في مخطوطة (العناصر).

إقليدس (300) ق.م.

نظرية (2-3):

يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

سوف نورد إثباتاً لهذه النظرية في المثال (2-35).

مثال (2-6):

هل تعلم كم مرة تكررت كلمة (الله) في القرآن؟

المفاجأة أنّ اسم (الله) ورد بصيغ مختلفة (الله، فالله، تالله، لله، بالله، فلِلَّهِ، أبالله) وهذه الكلمة تكررت بالضبط 2699 مرة، وهو عدد أولي لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى واحد... لأن الله واحد!

ولكن هناك شيء مذهل وهو أن عدد صيغ اسم (الله) في القرآن هو سبعة !! لنكتب صيغ اسم (الله) وكل صيغة كم مرة تكررت في القرآن كله كما يلي:

١- **الله** تكررت في القرآن 2395 مرة.

٢- **لله** تكررت في القرآن 149 مرة.

٣- **تالله** تكررت في القرآن 9 مرات.

٤- **فالله** تكررت في القرآن 6 مرات.

٥- **بالله** تكررت في القرآن 139 مرة.

٦- **فَلِلَّهِ** تكررت في القرآن 6 مرات.

٧- **أبالله** تكررت في القرآن 1 مرة واحدة.

المجموع 2699 مرة ... هل هذه مصادفة ؟

مثال (2-7):

إنّ الأعداد الأولية من الشكل:

$$M_2 = 2^2 - 1, \quad M_3 = 2^3 - 1, \quad M_5 = 2^5 - 1, \quad M_7 = 2^7 - 1$$

هي من نمط أعداد ميرسين الأولية (Mersenne Primes)، والتي تعرف بأنها تعطى بالعلاقة $M_p = 2^p - 1$، حيث p عدد أولي أيضاً. بينما العدد $2^{11} - 1 = 2047$ ليس من النمط السابق لأنه يُكتب بالشكل $2047 = 23 \cdot 89$.

ماران ميرسين
(1588–1648)

نشير إلى أنه حتى العام 2016 فإنّ أعداد ميرسين الأولية المعروفة هي 49 عدداً، وقد تم إيجاد 17 منها منذ العام 1990. والعدد الأكبر من بين هذه الأعداد المكتشفة هو: $M_{74,207,281} = 2^{74,207,281} - 1$. يتضمن هذا العدد 22,338,618 رقماً، أي أكثر من اثنين وعشرين مليوناً من الأرقام، وقد أثبت أنه عدد أولي (اكتشف في 07 كانون الثاني 2016). كما يوجد موقع إلكتروني بحثي يختص بأعداد ميرسين Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)، ويمكن للمرء الاشتراك به والحصول على جائزة نقدية كبيرة في حال اكتشافه عدداً من أعداد ميرسين غير المكتشفة بعد. وفي نهاية الفصل جدول بأعداد ميرسين المكتشفة حتى الآن علماً أنه قد يوجد أعداد مرشحة لتكون عدد ميرسين بين العددين $M_{30,402,457}$ و $M_{74,207,281}$.

يجيب نص النظرية الآتية على السؤال:

ما هو عدد الأعداد الأولية التي تصغر العدد الموجب x ؟

لقد اهتم الرياضيون بهذا السؤال لسنوات عديدة، وقد قاموا بإعداد جداول كبيرة للأعداد الأولية لإظهار جملة من الصفات متعلقة بتوزيع الأعداد الأولية. وانطلاقاً من الوضوح البادي في الجداول، فإن الرياضيين ومن بينهم غاوس (Gauss) وليجاندر (Legendre) وحتى يومنا هذا يعتقد بصحة النظرية الآتية التي لم تثبت بعد.

كارل غاوس (1777-1855)

نظرية (2-4) (نظرية العدد الأولي):

تسعى النسبة بين عدد الأعداد الأولية التي لا تزيد عن x و $\frac{x}{\ln x}$ إلى 1 عندما تنمو x بلا حدود.

نستطيع استخدام نظرية العدد الأولي لتقدير الاختيار العشوائي لعدد بأن يكون أولياً. كما تخبرنا هذه النظرية أنّ عدد الأعداد الأولية التي لا تزيد عن x يمكن أن يقرَّب من خلال $\frac{x}{\ln x}$.

ولقد تمكن من إثبات نظرية العدد الأولي لأول مرة في عام 1896 كل من العالمين الرياضيين الفرنسي جاك هدمار (Hadamard) والبلجيكي تشالز جين غوستاف نيقولاس دي لافالي بوسان (De La Vallée-Poussin) مستخدمين نظرية المتغيرات المركبة.

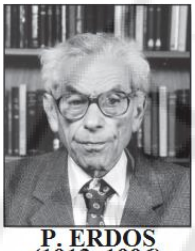
مثال (2-8):

من خلال نظرية العدد الأولي يمكن أن نرى أن احتمال أن يكون العدد الصحيح n أولياً هو تقريباً $1/\ln n$.

مثال (2-9):

إنّ أرجحية أن يكون العدد الصحيح الواقع قرب 10^{1000} عدداً أولياً هو تقريباً $1/\ln(10^{1000})$ ويساوي تقريباً $1/2300$ وباختيارنا للأعداد الفردية فإننا نضاعف احتمالات وجود العدد الأولي.

1-2-2 الأعداد الأولية والمتتاليات

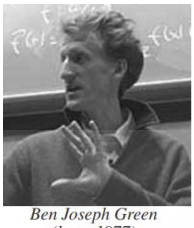

P. ERDOS
(1913–1996)

إنّ أي عدد صحيح فردي هو عدد ناتج من إحدى المتتاليتين الحسابيتين $4k+1$ و$4k+3$ حيث $k=1,2,\cdots$. وبما أنّ هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية، نتساءل فيما إذا كان في كلتا المتتاليتين عدد لا نهائي من الأعداد الأولية. إن الأعداد الأولية $5,13,17,29,37,41,\cdots$ ناتجة من المتتالية الحسابية $4k+1$ والأعداد الأولية $3,7,11,19,23,31,43,\cdots$ ناتجة من المتتالية الحسابية $4k+3$. وهذا دليل واضح على وجود لا نهائي من الأعداد الأولية في كلتا المتتالتين. الآن ماذا لو كانت المتتالية الحسابية من الشكل $ak+b$ حيث $k=1,2,\cdots$، ولا يوجد عدد أكبر من 1 يقسم كلا العددين a وb معاً، هل يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية ؟. الجواب نعم وأثبت ذلك العالم الألماني جي ليجون ديرخليه (G. Lejeune Dirichlet) أن كل متتالية من الشكل السابق تحتوي على عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

J. P. G. L. Dirichlet
1805-1859

ولكن هل يوجد متتاليات حسابية طويلة تتكون من الأعداد الأولية فقط، على سبيل المثال نرى أن $5,11,17,23,29$ متتالية حسابية من خمسة أعداد أولية، وأيضاً:

$$199,403,619,829,1039,1249,1459,1669,1879,2089$$


Ben Joseph Green
(born 1977)

متتالية حسابية تحتوي على عشرة أعداد أولية. في الثلاثينيات من القرن الماضي خمن العالم الرياضي الشهير بول إيردوس (Paul Erdős) أنه من أجل أي عدد صحيح موجب n أكبر من 2 توجد متتالية حسابية من الأعداد الأولية طولها n. وفي عام 2006 تمكن الباحثان الشابان بن جرين (Ben Green) وترنس تاو (Terence Tao) من إثبات هذا الحدس (التخمين). إثباتهم هذا اعتبر من أبهر الأعمال في الرياضيات.

ترنس تاو (ولد 1975)

2-2-2 الحدسيات والمسائل المفتوحة للأعداد الأولية

هنالك العديد من المسائل المتعلقة بالأعداد الأولية تنتظر الحل. سوف نعرض عدداً من هذه المسائل المفتوحة من خلال الأمثلة الآتية.

مثال (2-10): حدسية «جولدن ياخ»

في عام 1742 وفي رسالة جولدن ياخ إلى ليوناردو أولر (Leonhard Euler) خمَّن أنّ أيّ عدد صحيح فردي n أكبر من 5 هو عبارة عن مجموع لثلاثة أعداد أوليّة. لقد أجاب أولر أنّ هذا مكافئ للحدسية التي تقول: إنّ أيّ عدد صحيح زوجي n أكبر من 2، هو مجموع لعددين أوليين.

ليونارد أولر
(1707-1783)

إنّ الحدسية الأخيرة التي تنصّ على أنّ أيّ عدد صحيح زوجي $n > 2$ هو مجموع لعددين أوليين، تدعى بحدسية جولدن ياخ. يمكن أن نختبر ذلك من أجل بعض الحالات، فمثلاً:

$$4 = 2 + 2 \quad ; \quad 6 = 3 + 3 \quad ; \quad 8 = 5 + 3$$
$$10 = 7 + 3 \quad ; \quad 12 = 7 + 5 \quad ; \quad \ldots\ldots$$

لقد تمت مراجعة هذا الحدس من خلال الحسابات اليدوية، وبمساعدة الحاسب من أجل أعداد كبيرة جداً، وحتى العام 2006 فإنه قد تم اختبار هذه الحدسية من أجل كل

الأعداد الزوجية الصحيحة الموجبة حتى $2 \cdot 10^{17}$ وعلى الرغم من عدم وجود إثبات لحدسية جولدن ياخ إلاّ أنّ الرياضيين يعتقدون بصحتها.

مثال (2-11):

هنالك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية من الشكل $n^2 + 1$، حيث n صحيح موجب. وكأمثلة على ذلك:

$$37 = 6^2 + 1 \quad ; \quad 17 = 4^2 + 1 \quad ; \quad 5 = 2^2 + 1$$

مثال (2-12):

إنّ توائم الأعداد الأولية هي أعداد أولية تختلف عن بعضها بالمقدار 2. على سبيل المثال، العددان الأوليان 3 و5، كذلك 11 و13، وأيضاً 4967 و4969 وغيرها. إنّ التوقع (الحدس) حول هذه الأعداد يقول إنّ هنالك عدد لا نهائي من التوائم الأولية. نشير إلى أنه حتى منتصف عام 2011 وفيما يخص توائم الأعداد الأولية، فقد سُجِّل التوأم المكون من الأعداد:

$$65{,}516{,}468{,}355 \cdot 2^{333{,}333} \pm 1$$

وهي أعداد تتضمن 100,355 مئة ألف وثلاث مئة وخمسة وخمسين رقماً.

ملاحظة: هنالك العديد من الأمثلة المشابهة للحالة الواردة في المثال (9).

نظرية (2-5):

إذا كان p عدداً أولياً، وكان $p \mid ab$، حيث إنّ a وb أعداد صحيحة موجبة، فإنّ $p \mid a$ أو $p \mid b$.

2-3 القاسم المشترك الأعظم

بفرض أنّ a وb عددان صحيحان ليس كلاهما مساوياً للصفر. إنّ القاسم المشترك الأعظم للعددين الصحيحين a وb، هو القاسم الأكبر d بحيث يكون $d \mid a$ و$d \mid b$. نرمز للقاسم المشترك الأعظم للعددين a وb من خلال $\gcd(a, b)$.

مثال (2-13):

إنّ القاسم المشترك الأعظم للعددين 24 و36 هو $\gcd(24,36)=12$ بينما لا نجد قواسم مشتركة للعددين 17 و22 إلاّ 1، لذلك $\gcd(17,22)=1$.

2-4 الأعداد الأولية نسبياً

نقول عن العددين a وb إنهما عددان أوليان نسبياً، إذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما هو 1.

مثال (2-14):

بالعودة إلى المثال السابق فإنّ $\gcd(17,22)=1$، بالتالي فإنّ العددين 17 و22 هما عددان أوليان نسبياً.

2-5 الأعداد الأولية نسبياً مثنى مثنى

نقول عن الأعداد الصحيحة $a_1, a_2, \cdots, a_n$ إنها أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى، إذا كان $\gcd(a_i, a_j)=1$ من أجل كل القيّم $1 \le i < j \le n$.

مثال (2-15):

لنبيّن فيما إذا كانت الأعداد: $10, 17, 21$ هي أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى. نلاحظ أنّ:

$$\gcd(10,17)=1, \quad \gcd(10,21)=1, \quad \gcd(17,21)=1$$

وهذا يعني أنها أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى.

مثال (2-16):

لنبيّن أنّ الأعداد: $10, 19, 24$ ليست أعداداً أولية نسبياً مثنى مثنى. نلاحظ أنّ: $\gcd(10,24)=2$ بالتالي فإنّ الأعداد $10, 19, 24$ ليست أعداداً أولية نسبياً مثنى مثنى.

من المعلوم أنّ القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين a وb (ليس كلاهما مساوياً للصفر معاً) يتم إيجاده من خلال تحليل هذين العددين إلى عوامل أولية على النحو الآتي:

$$a = p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \qquad b = p_1^{b_1}\, p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}$$

حيث إنّ كلَّ أسّ هو عدد صحيح غيرُ سالبٍ، وإنّ كل الأعداد الأولية التي تحدث في التحليل إلى عوامل أولية في كل من a أو b موجودة في الاثنين معاً بأس صفري إذا كان ضرورياً. عندئذٍ يعطى القاسم المشترك الأعظم من خلال:

$$\gcd(a,b) = p_1^{\min(a_1,b_1)}\, p_2^{\min(a_2,b_2)} \cdots p_n^{\min(a_n,b_n)}$$

مثال (2-17):

إنّ التحليل إلى عوامل أولية للعددين 120 و500 هو:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5\,, \qquad 500 = 2^2 \cdot 5^3$$

بالتالي إنّ القاسم المشترك الأعظم لهذين العددين هو:

$$\gcd(120,500) = 2^{\min(2,3)}\, 3^{\min(1,0)}\, 5^{\min(1,3)} = 2^2\, 3^0\, 5^1 = 20$$

2-6 المضاعف المشترك الأصغر

إنّ المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين a وb الموجبين، هو العدد الصحيح الموجب الأصغر الذي يقسمه كلا العددين a وb. ويرمز للمضاعف المشترك الأصغر للعددين a وb بـ $\mathrm{lcm}(a,b)$، يمكن أيضاً أن يتم إيجاد المضاعف المشترك الأصغر $\mathrm{lcm}(a,b)$ من خلال التحليل إلى عوامل أولية للعددين a وb ومن ثم حسابه بالعلاقة:

$$\mathrm{lcm}(a,b) = p_1^{\max(a_1,b_1)}\, p_2^{\max(a_2,b_2)} \cdots p_n^{\max(a_n,b_n)}$$

مثال (2-18):

لنوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين: $2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^2$ و$2^4 \cdot 3^3$.

ممّا سبق لدينا:

$\text{lcm}(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^2, 2^4 \cdot 3^3) = 2^{\max(3,4)}\ 3^{\max(5,3)}\ 7^{\max(2,0)} = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2$

تعطي النظرية الآتية العلاقة بين gcd و lcm لعددين صحيحين (يترك إثباتها كتمرين للقارئ)

نظرية (2-6):

ليكن a و b عددين صحيحين. عندئذٍ يكون:

$$ab = \gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b)$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد التحليل إلى عوامل أولية للعدد $10!$.

2- أوجد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تصغر عن 30 والتي هي أعداد أولية نسبياً.

3- بيّن فيما إذا كانت الأعداد الصحيحة الواردة في كل من أ و ب و جـ و د أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى:

أ – $21, 34, 55$ جـ – $25, 41, 49, 64$

ب – $14, 17, 85$ د – $17, 18, 19, 23$

4- هل الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة من الشكل:

$$p, \quad p + 2, \quad p + 4$$

أعداد أولية؟

5- نقول عن العدد الصحيح الموجب إنه تام إذا كان مساوياً لمجموع قواسمه الموجبة (غير العدد ذاته)، والمطلوب:

أ – بيّن أنّ 6 و 28 أعداد تامة.

ب – بيّن أنّ $2^{p-1}(2^p - 1)$ عدد تام عندما يكون $2^p - 1$ أولياً.

6- بيّن أنه إذا كان $2^n - 1$ عدداً أولياً، فإنّ n عدد أولي.

7- إذا كان جداء عددين صحيحين هو $2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ والقاسم المشترك الأعظم لهما $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$، فما هو المضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين؟

8- أثبت أنّ جداء أيّ ثلاثة أعداد صحيحة متتالية يقبل القسمة على 6.

9- أثبت أو ادحض أنّ $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ عدد أولي من أجل أيّ عدد موجب n، حيث $p_1, p_2, \cdots, p_n$ هي الأعداد الأولية الـ n الأصغر.

10- أوجد كلاً ممّا يلي:

$$\gcd(1000, 625) \ , \qquad \text{lcm}(1000, 625)$$

ثم أثبت أنّ:

$$\gcd(1000, 625) \cdot \text{lcm}(1000, 625) = 1000 \cdot 625$$

2-7 تقنيات الإثبات

سوف نقوم في هذه الفقرة بوصف الأساليب المتبعة في بناء الإثباتات والبراهين المتعلقة بالنظريات والعبارات الرياضية.

إنّ العمل في إثبات النظريات والعبارات الرياضية عملٌ صعب، لذلك ينبغي علينا أن نوظف كل المعلومات والمعطيات المتاحة للمساعدة في إثبات أو دحض ما نريده. سوف نورد عدداً من الأساليب المتبعة في هذا الخصوص.

2-7-1 الإثبات المباشر (Direct proof)

يتم بناء الإثبات المباشر للعبارة الشرطية if A , then B

وكخطوة أولى بافتراض أنّ A صحيحة، ثم نقوم بعد ذلك بإنشاء متتالية من الخطوات مستخدمين جملة من القواعد التي تؤول في النهاية إلى إظهار أنّ B ينبغي أن تكون صحيحة.

مثال (2-19):

سنعطي إثباتاً مباشراً للعبارة:

إذا كان n عدداً فردياً، فإنّ n^2 عدد فردي .

يمكن أن نكتب العبارة السابقة في شكل عبارة شرطية من النمط:

$$\text{if } A(n), \text{then } B(n)$$

حيث إنّ:

$A(n)$: تمثل حالة أنّ n عدد صحيح فردي.

$B(n)$: تمثل حالة أنّ n^2 عدد صحيح فردي.

نقوم الآن بإظهار أن تحقق $A(n)$ يقتضي تحقق $B(n)$.

للبدء بالإثبات نفترض أولاً أنّ $A(n)$ صحيحة، أي أننا نفرض أن n عدد صحيح فردي، واستناداً إلى تعريف الأعداد الصحيحة الفردية فإنّ n يُكتب بالشكل $n = 2k + 1$ من أجل k عدد صحيح ما. نقوم بتربيع n فنحصل:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

بالعودة ثانية إلى تعريف الأعداد الصحيحة الفردية، فإنّ الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة يمثل عدداً فردياً. بذلك نكون قد أثبتنا صحة العبارة المعطاة.

نقول عن العدد a إنه مربع تام (perfect square) إذا وجد عدد صحيح ما b بحيث يكون $a = b^2$. سوف نستخدم هذا التعريف في إثبات صحة العبارة الواردة في المثال التالي.

مثال (2-20):

لنثبت أنه إذا كانت الأعداد m وn مربعات تامة، فإنّ جداءهما $m\,n$ مربع تام.

الحل: نفترض كخطوة أولى أنّ الأعداد m وn مربعات تامة. ينتج من ذلك وجود العددين الصحيحين s وt بحيث يكون $m = s^2$ و$n = t^2$ نقوم الآن بتشكيل الجداء $m\,n$ فنحصل على المعادلة:

$$m\,n = s^2t^2$$

التي تكتب بالشكل الآتي: $m\,n = (st)^2$

استناداً إلى خواص عملية ضرب الأعداد الصحيحة. وبالعودة إلى تعريف المربع التام نجد أنّ $m\,n$ هو مربع تام. بذلك نكون قد أثبتنا صحة العبارة المطلوبة.

2-7-2 الإثبات باستخدام المكافئ العكسي (proof by contraposition)

بيّنّا في الأسلوب المباشر للإثبات كيفية إثبات صحة العبارات من الشكل:

if A, then B مستنتجين صحة B انطلاقاً من افتراض صحة A. قد لا يكون هذا الأسلوب متاحاً لإثبات ما نريده، وقد يكون من الأسهل في بعض الحالات استبدال العبارة المعطاة بعبارة مكافئها العكسي if not B, then not A. من المعلوم أنّ لهاتين العبارتين نفس جدول الحقيقة وهما عبارتان متكافئتان. إنّ القيام بإثبات صحة عبارة المكافئ العكسي يعني إثبات صحة العبارة الأصل نتيجة للتكافؤ بينهما.

يتم اتباع هذا الأسلوب عندما تكون عبارة المكافئ العكسي أسهل في الإثبات من العبارة الأصل. من الواضح أنّ هذا الأسلوب أسلوب غير مباشر في الإثبات.

مثال (2-21):

لنثبت صحة العبارة:

إذا كان n عدداً صحيحاً وكان $3n + 2$ فردياً، فإنّ n عدد فردي.

الحل: نقوم أولاً بمحاولة الإثبات بالأسلوب المباشر. لذلك ننطلق من كون أنّ n عدد صحيح وأنّ $3n + 2$ عدد فردي. استناداً إلى تعريف الأعداد الفردية، فإنّ:

$$3n + 2 = 2k + 1$$

من أجل k عدد صحيح ما.

إنّ ما نريده هو إظهار أنّ n عدد فردي. والعبارة الأخيرة تُكتب بالشكل $3n + 1 = 2k$، لكن لا يبدو أنها تقودنا للتعبير عن n على أنه عدد فردي. بالتالي إن اتباع الأسلوب المباشر في هذه الحالة لم يوصلنا إلى النتيجة المرجوَّة.

نقوم الآن بإجراء الإثبات مستخدمين أسلوب المكافئ العكسي للعبارة الأصل والتي سيكون لها الشكل:

«إذا كان n عدد زوجي، فإنّ $3n+2$ عدد زوجي»

طالما أنّ n عدد زوجي فإنه يكتب بالشكل $n=2k$، من أجل k عدد صحيح ما. بالتعويض في $3n+2$ نجد أنه من الشكل $3n+2=3(2k)+2=2(3k+1)$.

من الواضح أنّ الطرف الأيمن يمثل عدداً زوجياً استناداً إلى تعريف الأعداد الزوجية. بالتالي نكون قد أثبتنا صحة عبارة المكافئ العكسي المكافئة للعبارة الأصل المعطاة. إذن العبارة:

«إذا كان $3n+2$ فردياً، فإنّ n عدد فردي»

هي عبارة صحيحة.

مثال (2-22):

لنثبت صحة العبارة:

إذا كان a وb عددين صحيحين موجبين وكان $n=ab$، فإنّ $a\le\sqrt{n}$ أو $b\le\sqrt{n}$

الحل: سوف نقوم بإثبات العبارة من خلال استخدام أسلوب المكافئ العكسي للعبارة المعطاة والتي نكتبها بالشكل:

إذا كان $a>\sqrt{n}$ و $b>\sqrt{n}$، فإنّ $ab\ne n$.

انطلاقاً من كون $a>\sqrt{n}$ و$b>\sqrt{n}$ فرضاً فإنّ تشكيل الجداء للعددين a وb يقود إلى المتراجحة $ab>\sqrt{n}\sqrt{n}=n$.

وهذا يعني أنّ $ab>n$ الذي يقود إلى أن $ab\ne n$ وإلى صحة عبارة المكافئ العكسي. إذن العبارة الأصل المعطاة صحيحة أيضاً.

مثال (2-23):

لنثبت صحة العبارة الآتية من أجل n عدداً صحيحاً:

إذا كان $n > 1$، فإنّ $n^2 > n$.

الحل: نستخدم الأسلوب المباشر في الإثبات. فطالما أنّ $n > 1$، فإنّ ضرب طرفي المتراجحة بالعدد n لا يؤثر على جهتها، بالتالي يكون: $n^2 > n$.

وبذلك يتم إثبات صحة العبارة المعطاة.

نقول عن العدد r إنه نسبي (rational)، إذا وجد العددان الصحيحان p و$q \neq 0$، بحيث يكون:

$$r = \frac{p}{q}$$

سوف نستخدم هذا المفهوم في إثبات صحة العبارة الواردة في المثال الآتي:

مثال (2-24):

لنثبت أنّ مجموع عددين نسبيين هو عدد نسبي.

يمكن صياغة العبارة المطلوب إثباتها في شكل عبارة شرطية من الشكل:

إذا كان العددان r وs نسبيان، فإنّ $r + s$ نسبي.

الحل: بفرض أنّ r وs أعداد نسبية بالتالي يمكن أن نعبر عنهما بالشكل $r = p/q$ و $s = t/u$، حيث إنّ الأعداد: p، $q \neq 0$، t، $u \neq 0$ أعداد صحيحة. نستطيع استخدام هذه المعلومات في حساب مجموع العددين r وs، لنجد:

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}$$

استناداً إلى ما سبق فإنّ $qu \neq 0$، لأنّ $q \neq 0$ و$u \neq 0$. كما أنّ $pu + qt$ وqu هي أعداد صحيحة. إذن النسبة التي تمثل المجموع $r + s$ هي عدد نسبي استناداً إلى التعريف. وبذلك نكون قد أثبتنا صحة العبارة المعطاة.

مثال (2-25):

بفرض أنّ n عدد صحيح لنثبت صحة العبارة:

إذا كان n^2 عدداً فردياً، فإنّ n عدد فردي.

الحل: نفرض أنّ n عدد صحيح مربعه n^2 عدد فردي، الذي يكتب بالشـــــــكل $n^2 = 2k + 1$ من أجل k عدد صحيح ما.

إنّ جذر هذه الصيغة يقود إلى أن $n = \pm\sqrt{2k+1}$. وهي لا تفيدنا في استنتاج أنّ n عدد فردي، لذلك سوف نقوم باستخدام أسلوب المكافئ العكسي وإثبات صحة العبارة:

إذا كان n زوجياً، فإنّ n^2 عدد زوجي.

المكافئة للعبارة الأصل المعطاة، وذلك أياً كان العدد الصحيح n. انطلاقاً من عبارة المكافئ العكسي وعلى افتراض أنّ n عدد زوجي فهذا يعني أنه من الشكل $n = 2k$ من أجل k عدد صحيح ما. وبأخذ مربع n فإنه يتشكل:

$$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$$

والذي يكتب بالشكل $n^2 = 2t$ (حيث $t = 2k^2$ عدد صحيح)، الذي يقود إلى استنتاج أنّ n^2 هو عدد زوجي. بالتالي ونظراً لكون عبارة المكافئ العكسي صحيحة، فإنّ العبارة الأصل المعطاة صحيحة أيضاً.

3-7-2 الإثبات بالتناقض (proof by contradiction)

لنفترض أننا نريد أن نثبت أنّ A صحيحة. لأجل ذلك نفترض بأنه يمكن أن نجد تناقضاً B بحيث تكون العبارة:

$$\text{if not } A, \text{ then } B \qquad (1)$$

صحيحة. ولأنّ B خاطئة (تناقض)، والعبارة الشرطية (1) صحيحة، فإنه يمكن أن نستنتج أنّ not A خاطئة، والتي تعني أنّ A صحيحة.

إنّ السؤال الذي يمكن أن يُطرح الآن: كيف يمكن لنا أن نجد التناقض B الذي يساعدنا في إثبات أنّ A صحيحة باتباع الأسلوب السابق؟

من ناحية عملية عادة ما نقوم بافتراض أنّ القضية A خاطئة ونتحرى وجود التناقض انطلاقاً من هذا الافتراض مستخدمين ما تيسر من الأدوات والأساليب والمحاكمات

الملائمة التي توصلنا إلى هذا التناقض. عندئذٍ نقول عن افتراضنا إن A خاطئة يوصلنا إلى تناقض، إذا ما افترضناه ليس صحيحاً، وA صحيحة.

مثال (2-26):

لنثبت بالتناقض صحة العبارة:

إنّ العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

الحل: نبدأ الافتراض بأنّ القضية السابقة خاطئة، أي إنه لا وجود للحالة بأن يكون $\sqrt{2}$ غير نسبي، التي تقتضي أن يكون $\sqrt{2}$ نسبياً. إنّ هذا يقودنا إلى تناقض، لأنه إذا كان $\sqrt{2}$ نسبياً فإنه يوجد العددان الصحيحان a وb الغير متضمنين عوامل مشتركة بينهما وبحيث يكون $\sqrt{2} = a/b$. بأخذ مربع $\sqrt{2}$ نستنتج أنّ $2 = a^2/b^2$ الذي يعطي $2b^2 = a^2$. استناداً إلى تعريف الأعداد الزوجية، فإنّ a^2 عدد زوجي (نعلم أنه إذا كان a^2 عدد زوجي، فإن a زوجي أيضاً)، بالتالي a عدد زوجي أيضاً يكتب بالشكل $a = 2c$ من أجل c عدد صحيح ما، لذلك يكون:

$$2b^2 = 4c^2$$

بعد إجراء التبسيط على الطرفين فإنّ:

$$b^2 = 2c^2$$

الذي يعطي أن b^2 عدد زوجي بالتالي b عدد زوجي أيضاً. إنّ الاستنتاج بأنّ كل من a وb هي أعداد زوجية يعني وجود عوامل مشتركة بينهما وهذا مخالف للفرض الذي انطلقنا منه وأوصلنا إلى تناقض. لذلك الافتراض بأنّ $\sqrt{2}$ نسبي خاطئ، والعبارة التي تقول إنّ $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي عبارة صحيحة.

مثال (2-27):

لنثبت بالتناقض صحة العبارة:

إذا كان $3n + 2$ فردياً، فإنّ n عدد فردي.

الحل: نفرض أولاً أنّ $3n+2$ عدد فردي، وأنّ n ليس فردياً. أي إنّ n عدد زوجي. [لقد أثبتنا في المثال (2-19) أنه إذا كان n زوجياً، فإنّ $3n+2$ عدد زوجي]. ولنبيّن الآن إلى أين يقودنا ذلك؟

طالما أنّ n زوجي فإنّ $n=2k$ من أجل k عدد صحيح ما، بالتعويض في $3n+2$ نجد $3n+2=3(2k)+2=2(3k+1)$ هذا يعني أنّ $3n+2$ يساوي $2t$ حيث إن $t=3k+1$ بالتالي فإنّ $3n+2$ زوجي. وهذا يعني أنّ $3n+2$ زوجي وفردي بنفس الوقت، وهذا تناقض لأنه لا يمكن للعدد الصحيح إلاّ أن يكون في إحدى الحالتين إمّا فردياً وإمّا زوجياً. إذن الافتراض بأن n زوجي خاطئ. والعبارة الأصل المعطاة صحيحة.

عندما يقوم الرياضيون بالعمل فإنهم يصوغون العديد من النظريات والعبارات التي تحتاج الإثبات. إنّ السعي إلى إثبات أو دحض هذه النظريات والعبارات من خلال جملة من الإجراءات والخطوات يتطلب معرفةً بأساليب وطرائق الإثبات. نعرض في الفقرات الآتية أساليب جديدة متنوعة مستخدمة في عمليات الإثبات.

4-7-2 الإثبات بالاختبار الشامل والإثبات بالحالات

(exhaustive proof and proof by cases)

قد يكون من المتعذر علينا أن نقوم بإثبات عبارة أو نظرية باستخدام حُجَّة واحدة تكون محققة من أجل كلّ الحالات الممكنة المحتملة. سوف نجري عملية الإثبات آخذين بعين الاعتبار الحالات المختلفة أخذاً منفصلاً عن بعضها بعضاً.

إذا كان لدينا عبارة من الشكل:

$$\text{if } (A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } \cdots \text{ or } A_n), \quad \text{then } B$$

فهي مكافئة للعبارة الآتية:

$$[(\text{if } A_1, \text{then } B) \text{ and } (\text{if } A_2, \text{then } B) \text{ and } \cdots \text{ and } (\text{if } A_n, \text{then } B)] \quad (3)$$

نلاحظ في العبارة الشرطية (3)، أنّ الفرض فيها مشكل من فصل القضايا: $A_1, A_2, \cdots, A_n$. ويمكن لهذه العبارة أن تثبت بإثبات صحة كل عبارة من العبارات الشرطية الآتية:

$$\text{if } A_i, \quad \text{then } B, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

يدعى الأسلوب السابق المتبع في الإثبات، بأنه أسلوب الإثبات بالحالات. حيث نقوم في بعض الأحيان وعند إثبات صحة عبارة شرطية من الشكل: $\text{if } A, \text{then } B$، فإننا نقوم بإرجاعها إلى عبارة شرطية أخرى، يكون الفرض فيها: $A_1 \text{ or } A_2 \text{ or} \cdots \text{or } A_n$ بدلاً من A، حيث إنّ $A_1 \text{ or } A_2 \text{ or} \cdots \text{or } A_n$ و A قضايا متكافئة.

نشير إلى أن بعض النظريات أو العبارات تثبت من خلال اختبار عدد صغير نسبياً من الأمثلة. يُدعى هذا الأسلوب في الإثبات بأسلوب الاختبار الشامل، حيث يتم فيه إجراء مسح واستنفاذ كل الحالات الممكنة واختبارها. إنّ الإثبات بأسلوب الاختبار الشامل ما هو إلاّ حالة خاصة من أسلوب الإثبات بالحالات حيث إن كل حالة تتضمن اختباراً لمثال وحيد. نقوم من خلال الأمثلة بتوضيح هذين الأسلوبين.

مثال (2-28):

لنثبت صحة المتراجحة:

$(n+1)^3 \geq 3^n$ وذلك من أجل n عدد صحيح موجب و $n \leq 4$.

الحل: نستخدم أسلوب الاختبار الشامل (عدد صغير من الأمثلة) لإثبات صحة المتراجحة $(n+1)^3 \geq 3^n$ فقط من أجل الحالات الأربع: $n = 1, 2, 3, 4$.

الحالة	$(n+1)^3$	3^n
1	8	3
2	27	9
3	64	27
4	125	81

الشكل (2-1)

يُظهر الجدول الموضّح في الشكل (2-1) صحة المتراجحة المعطاة من أجل الحالات المختلفة $4 \leq n$ وn صحيح موجب.

إنّ الإثبات بأسلوب الاختبار الشامل يمكن أن يستخدم إذا كان عدد حالات الاختبار صغيراً نسبياً. ويمكن استخدام الحواسيب في إثبات العديد من القضايا من خلال هذا الأسلوب. وفي حال كون عدد الحالات كبير جداً فإنّ استخدام الحواسيب يبقى محدوداً.

ينبغي أن يشمل الإثبات بالحالات كل الحالات الممكنة التي يمكن أن تبرز في النظرية أو القضية المراد إثباتها، وهذا ما سيتم إيضاحه من خلال الأمثلة التالية:

مثال (2-29):

استخدم أسلوب الإثبات بالحالات في بيان صحة العبارة:

إذا كان n عدداً صحيحاً، فإنّ $n^2 \geq n$

الحل: يمكن أن نثبت أنّ $n^2 \geq n$ من أجل كل عدد صحيح n، بأخذ الحالات الثلاث الآتية: $n = 0,\ n \geq 1,\ n \leq -1$. بالتالي سوف نقوم بتجزيء عملية الإثبات إلى ثلاث حالات وبشكل منفصل:

الحالة الأولى: عندما تكون $n = 0$، فإنّ $0^2 = 0$ كما أنّ $0^2 \geq 0$. وهذا يعني صحة المتراجحة $n^2 \geq n$ في هذه الحالة.

الحالة الثانية: عندما تكون $n \geq 1$، فإنّنا نضرب طرفي هذه المتراجحة بالعدد n لنحصل على متراجحة جديدة $n \cdot n \geq n$. وهذا يعني أنّ $n^2 \geq n$ صحيحة في هذه الحالة.

الحالة الثالثة: عندما تكون $n \leq -1$، وطالما أنّ مربع أي عدد هو عدد موجب، فإنّ $n^2 \geq 0$. وهذا يقتضي تحقق المتراجحة $n^2 \geq n$ أيضاً في هذه الحالة.

بما أنّ المتراجحة $n^2 \geq n$ محققة في الحالات الثلاث فهي صحيحة دوماً أياً كان العدد الصحيح n.

مثال (2-30):

لننظر في العبارة الآتية:

كل عدد صحيح فردي أكبر من 1 وغير أولي، له الشكل $p+2$ من أجل p عدد أولي ما.

إنّ هذه العبارة خاطئة لأنه من السهل أن نجد أنّ العدد 27 عدد صحيح أكبر من 1 وليس بأولي، يكتب بالشكل $27=2+25$ وهنا 25 ليس عدداً أولياً. وهذا المثال يناقض العبارة. إذن هي عبارة خاطئة.

مثال (2-31):

استخدم أسلوب الإثبات بالحالات لبيان صحة المساواة:

$$|xy|=|x||y|$$

حيث إن x وy أعداد حقيقية.

من المعروف أنّ القيمة المطلقة للعدد a والتي نرمز لها بالرمز $|a|$ تساوي إلى a إذا كان $a\geq 0$، وتساوي إلى $-a$ إذا كان $a<0$.

الحل: من أجل إجراء عملية الإثبات، نميّز الحالات الأربع الآتية:

x وy غير سالبتين.

x غير سالبة وy سالبة.

x موجبة وy سالبة.

x سالبة وy سالبة.

الحالة الأولى: نلاحظ أنّ العبارة if A_1 , then B صحيحة ذلك لأنّ $xy\geq 0$ عندما تكون $x\geq 0$ و $y\geq 0$، لذلك فإنّ $|xy|=|x||y|$.

الحالة الثانية: لإثبات صحة العبارة if A_2 , then B نلاحظ أنه إذا كان $x \geq 0$ و $y <$ 0، فإنّ $xy < 0$، لذلك فإنّ: $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$ (هنا $|y| = -y$ لأنّ $y < 0$).

الحالة الثالثة: لإثبات صحة العبارة if A_3 , then B، سوف نتبع ذات الأسلوب الذي استخدمناه في الحالة السابقة، ونستنتج صحة المساواة في هذه الحالة أيضاً.

الحالة الرابعة: لإثبات صحة العبارة if A_4 , then B فإنه عندما تكون $x < 0$ و $y < 0$، ينتج أنّ $xy > 0$. فبالتالي:

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$$

والمساواة صحيحة في هذه الحالة.

بما أننا أنجزنا عملية الإثبات في الحالات الأربع وهي الحالات التي تستنفذ كل الإمكانيات الممكنة، فإننا نصل إلى أن المساواة $|xy| = |x||y|$ صحيحة أياً كانت الأعداد الحقيقية x وy.

الاختبار بمثال مناقض (counter example): إنّ المثال الذي يدحض عبارة أو نظرية ما ندعوه بالمثال المناقض. يمكن أن يتم إيجاد الأمثلة المناقضة في بعض الأحيان عند القيام بالاختبار الشامل. وبمجرد الوصول إلى مثال مناقض للعبارة أو النظرية نتوقف ونستخلص أن هذه العبارة أو النظرية غير صحيحة.

5-7-2 الإثبات باستخدام if المضاعفة

نقصد if المضاعفة العبارة من الشكل "A if and only if B" والتي نرمز لها اختصاراً بالشكل "A iff B" ونتذكر هنا أنّ إثبات عبارات تتضمن if المضاعفة يقتضي أن نثبت عبارتين شرطيتين هما:

if A, then B if B, then A

أي الإثبات بالاتجاهين.

مثال (2-32):

سوف نقوم بإثبات عبارة if المضاعفة على الأعداد الصحيحة والمعطاة بالشكل الآتي

يكون x عدداً فردياً إذا وفقط إذا كانت $8 \mid (x^2-1)$.

الحل: لإثبات عبارة if المضاعفة، ينبغي إثبات صحة العبارتين الشرطيتين:

1- إذا كان x فردياً فإنّ $8 \mid (x^2-1)$

2- إذا كانت $8 \mid (x^2-1)$، فإنّ x عدد فردي.

لإثبات العبارة الشرطية (1) فإننا نفرض أنّ x هو عدد فردي والذي نكتبه بالشكل $x = 2k+1$ من أجل k عدد صحيح ما. بتعويض ذلك في العبارة x^2-1 نجد أنّ: $x^2-1 = 4k^2+4k = 4k(k+1)$. بما أنّ العددين k و$k+1$ هما عددان صحيحان متتاليان فإنّ أحدهما فردي والآخر زوجي، بالتالي فإنّ جداؤهما $k(k+1)$ عدد زوجي، أي إنّ $k(k+1) = 2m$ من أجل m عدد صحيح ما وبالتعويض، فإنّ:

$$x^2-1 = 4k(k+1) = 4(2m) = 8m$$

وهذا يعني أنّ $8 \mid (x^2-1)$ وتكون العبارة (1) قد أثبتت.

لإثبات العبارة الشرطية (2)، فإننا نفرض أنّ $8 \mid (x^2-1)$ لذلك فإنّ $x^2-1 = 8k$ من أجل k عدد صحيح ما. ونكتب $x^2 = 8k+1 = 2(4k)+1$ التي لها شكل عدد فردي، وذلك يقتضي أن يكون x عدداً فردياً أيضاً. من صحة العبارات الشرطية (1) و(2) تكون العبارة المعطاة صحيحة.

تنويه: إذا كانت العبارة تؤكد وجود غرض ما، فإننا نستطيع القيام بمحاولة إثباتها في واحدة من الطريقتين، الطريقة الأولى في أن نستخدم الإثبات بالتناقض، والتي نفرض فيها أنّ الفرض غير موجود ومن ثم نصل إلى نوع ما من التناقض. والطريقة الثانية في أن نقوم ببناء حالة للفرض. في كِلْتي الطريقتين نعلم أنّ الفرض موجود، لكن الطريق الثانية تعطينا حالة للفرض. يميل علم الحاسب نحو إنشاء وبناء الأغراض من خلال

الخوارزميات الحاسوبية. إنّ هذا الأسلوب الذي ندعوه بالمدخل الإنشائي (constructive approach) وهو أسلوب عملي وناجح، لكنه ليس ممكناً دائماً.

يوضّح المثال التالي المدخل الإنشائي في الإثبات:

مثال (2-33):

لنثبت صحة العبارة الآتية:

إنّ لكل عدد صحيح موجب n الشكل $2^k m$ حيث إنّ k عدد صحيح و m عدد فردي.

الإثبات: يمكن إثبات صحة هذه العبارة بأساليب مختلفة وسنتبع لهذه الغاية الإجرائية الإنشائية الآتية.

إذا كان n فردياً، نفرض أنّ $k = 0$ و $m = n$ في خلاف ذلك نقسم n على 2. ونطبق الإجرائية على $n/2$ ونستمر بالعمل إلى أن نصل إلى العدد الفردي m. بالتالي يتم أخذ العدد k بحيث يكون مساوياً لعدد مرّات القسمة على 2 اللازمة للوصول إلى m.

على سبيل المثال:

$$73 = 2^0 \times 73\,, \qquad 14 = 2^1 \times 7$$
$$96 = 2^5 \times 3\,, \qquad 1168 = 2^4 \times 73$$

2-8 الأخطاء أثناء عمليات الإثبات

هنالك الكثير من الأخطاء التي تُرتكب أثناء إنشاء البراهين والإثباتات الرياضية. سوف نقوم بوصف أحد أكثر أنواع الأخطاء شيوعاً وهي الأخطاء الحسابية التي يمكن أن يرتكبها حتى أكبر الرياضيين وخصوصاً عند التعامل مع صيغ مركبة. يوضّح المثال التالي هذا النوع من الأخطاء.

مثال (2-34):

لنوجد الخطأ المرتكب في عملية إثبات العبارة الشهيرة "$2 = 1$"، حيث نعرض هذا الإثبات من خلال عدة خطوات موضّحة بجدول في الشكل (2-2):

N	الخطوة	السبب
1	$a = b$	معطاة
2	$a^2 = ab$	نضرب طرفي (1) بالعدد a
3	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	نطرح b^2 من طرفي (2)
4	$(a-b)(a+b) = b(a-b)$	نأخذ العوامل المشتركة في (3)
5	$a + b = b$	نقسّم طرفي (4) على $a - b$
6	$2b = b$	نعوّض كل a بالعدد b لأنّ $a = b$
7	$2 = 1$	نقسّم طرفي (6) على b

الشكل (2-2)

الحل: يكمن الخطأ في الخطوة (5) التي اقتضت إجراء عملية القسمة على $a - b$ وهذا مقدار يساوي الصفر، لأنّ $a = b$ وهذا غير ممكن.

أمثلة وتمارين محلولة

مثال (2-35):

لنثبت أنه:

«من أجل أي عدد صحيح موجب n، يكون $n^3 + n$ عدداً زوجياً».

الإثبات: نقوم باستخدام أسلوب الإثبات بالحالات لبيان صحة العبارة المعطاة:

الحالة الأولى: بفرض أنّ n عدد زوجي، بالتالي نكتب n بالشكل $n = 2k$ من أجل عدد صحيح ما k. ونجد أنّ:

$$n^3 + n = 8k^3 + 2k = 2(4k^3 + k)$$

يمثل عدداً زوجياً.

الحالة الثانية: بفرض أنّ n عدد فردي، بالتالي نكتب n بالشكل $n = 2k + 1$ من أجل عدد صحيح ما k. ونجد أنّ:

$$n^3 + n = (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) + 2k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

يمثل عدداً زوجياً.

يمكن أن نورد إثباتاً آخراً مختصراً لهذه العبارة، فإذا عبّرنا عن $n^3 + n$ بالشكل $n(n^2 + 1)$ يكون لدينا:

الحالة الأولى: إذا كان n زوجياً فإنّه من الواضح أنّ $n(n^2 + 1)$ هو عدد زوجي.

الحالة الثانية: إذا كان n فردياً فإنّ n^2 عدد فردي. ويكون $n^2 + 1$ عدداً زوجياً، إذن الجداء $n(n^2 + 1)$ هو عدد زوجي.

مثال (2-36):

لنثبت صحة النظرية (2-3) التي تنص على أنه:

«يوجد عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية».

الإثبات: سوف نثبت صحة هذه النظرية باستخدام أسلوب التناقض. لذلك سوف نفرض وجود عدد منتهٍ من الأعداد الأولية عددها n وهي: $p_1, p_2, \cdots, p_n$ بحيث يكون $p_1 = 2$ ، $p_2 = 3$ ، ... ، وهكذا. ليكن:

$$Q = 1 + p_1 p_2 \cdots p_n$$

بما أنّ $Q > p_j$ من أجل كل القيّم $1 \le j \le n$. إنّ العدد Q هو عدد غير أولي، إلاّ إنه يُكتب على شكل جداء لأعداد أولية استناداً إلى النظرية الأساسية في الحساب. على هذا الأساس يوجد عدد واحد على الأقل من الأعداد الأولية p_j ينبغي أن يقسم Q. وبما أنّ كل من الأعداد p_j يقسم $Q - 1$ ، بالتالي هنالك عدد واحد على الأقل من الأعداد p_j يقسم كلا العددين Q و$Q - 1$ وهذا غير ممكن. في الواقع إذا كان p_j يقسم كلا العددين Q و$Q - 1$، فإنه يقسم العدد 1 الذي يُمثل الفرق بينهما. وهذا تناقض.

إذن ما افترضناه خاطئ والصحيح وجود عدد غير منته من الأعداد الأولية.

مثال (2-37):

لنثبت باستخدام أسلوب التناقض صحة العبارة الآتية:

«جداء أي عددين فرديين، هو عدد فردي».

الإثبات: نفرض أنّ القضية المعطاة خاطئة، أي إنّ جداء العددين الصحيحين الفرديين n وm، هو العدد الزوجي $m\,n$. بما أنّ n وm أعداد فردية فإنه يوجد عددان صحيحان k و ℓ بحيث يكون $m = 2k + 1$ و $n = 2\ell + 1$. بالتالي بتشكيل جداء العددين نجد:

$$m\,n = 4k\ell + 2k + 2\ell + 1 = 2(2k\ell + k + \ell) + 1$$

نجد أنه يمثل عدداً فردياً، وهذا ما يناقض ما افترضناه، إذن العبارة المعطاة صحيحة.

نلاحظ أنّ استخدام أسلوب الإثبات بالتناقض في هذه الحالة هو مصطنع، لأننا لم نستخدم الافتراض بأن $m\,n$ زوجي، حتى بعد أن قمنا باستنتاج أن $m\,n$ فردي.

تمارين غير محلولة

1- استخدم الأسلوب المباشر في إثبات أن مجموع عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح فردي.

2- استخدم الأسلوب المباشر في إثبات أنّ مجموع عددين صحيحين زوجيين هو عدد صحيح زوجي.

3- أثبت أنه إذا كان n مربعاً تاماً، فإنّ $n + 2$ ليس مربعاً تاماً.

4- بيّن أنه إذا كان n عدداً صحيحاً وكان $n^3 + 5$ عدداً فردياً، فإنّ n عدد زوجي.

5- بيّن أنه إذا كان n عدداً صحيحاً وكان $3n + 2$ عدداً زوجياً، فإنّ n عدد زوجي.

استخدم لهذه الغاية أسلوب الإثبات بالتناقض وأسلوب الإثبات بالمكافئ العكسي.

6- استخدم أسلوب الإثبات بالمكافئ العكسي لبيان صحة العبارة:

« إذا كان $x + y \geq 2$ حيث x وy أعداد حقيقية، فإنّ $x \geq 1$ أو $y \geq 1$».

7- أثبت أنه: إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ n يكون فردياً إذا وفقط إذا كان $5n + 6$ فردياً.

8- أثبت أنه إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ n يكون زوجياً إذا وفقط إذا كان $7n + 4$ زوجياً.

9- أثبت أنّ $n^2 = m^2$ يكون إذا وفقط إذا كان $n = m$ أو $n = -m$.

10- أثبت أنّ العبارات الثلاث الآتية متكافئة:

i. a أصغر من b.

ii. متوسط a وb أكبر من a.

iii. متوسط a وb أصغر من b.

وذلك بفرض أنّ a وb أعداد حقيقية.

11- بفرض أنّ x عدد صحيح، أثبت أنّ العبارات الثلاث الآتية متكافئة:

i. إنّ $3x + 2$ عدد زوجي.

ii. إنّ $x + 5$ عدد فردي.

iii. إنّ x^2 عدد زوجي.

12- بفرض أنّ x عدد حقيقي، أثبت تكافؤ العبارات الثلاث الآتية:

i. إنّ x عدد نسبي.

ii. إنّ $x/2$ عدد نسبي.

iii. إنّ $3x - 1$ عدد نسبي.

13- بفرض أنّ n عدد صحيح، أثبت تكافؤ العبارات الآتية:

i. إنّ n عدد زوجي.

ii. إنّ $n + 1$ عدد فردي.

iii. إنّ $3n + 1$ عدد فردي.

iv. إنّ $3n$ عدد زوجي.

14- أثبت أنّ $n^2 + 1 \geq 2^n$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً و $1 \leq n \leq 4$.

15- أثبت متراجحة المثلث الآتية:

«إذا كانت x و y أعداداً حقيقية، فإنّ $|x + y| \geq |x| + |y|$».

16- أثبت أنه لا يوجد حلول صحيحة في x و y للمعادلة $2x^2 + 5y^2 = 14$.

17- أثبت أنه لا توجد حلول صحيحة في x و y للمعادلة $x^4 + y^4 = 625$.

18- أثبت أنه لا يوجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون $n^2 + n^3 = 100$.

19- أثبت وجود عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة في x و y و z للمعادلة:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

20- أثبت صحة العبارة الآتية:

تكون x فردية إذا وفقط إذا كانت $x^2 + 2x + 1$ زوجية وذلك من أجل x عدد صحيح.

21- أثبت أنّ كل عدد صحيح أكبر من 1، يقبل القسمة على عدد أولي.

22- أثبت أنه إذا كان n عدداً صحيحاً، فإنّ $n^2 + 2$ لا يقبل القسمة على 4.

23- أثبت كلاً من العبارات الآتية، حيث إنّ m و n أعداد صحيحة.

أ- إذا كان $x = 3m + 4$ و $y = 3n + 4$، فإنّ $xy = 3k + 4$ من أجل k عدداً صحيحاً ما.

ب- إذا كان $x = 5m + 6$ و $y = 5n + 6$، فإنّ $xy = 5k + 6$ من أجل k عدداً صحيحاً ما.

ت- إذا كان $x = 7m + 8$ و $y = 7n + 8$، فإنّ $xy = 7k + 8$ من أجل k عدداً صحيحاً ما.

24- أثبت صحة كل من العبارات الآتية:

أ- إذا كان $d \mid (da + b)$، فإنّ $d \mid b$.

ب- إذا كان $d \mid (a + b)$ و $d \mid a$، فإنّ $d \mid b$.

حيث a و b و d أعداد صحيحة.

25- أثبت صحة كل من العبارات الآتية حول الأعداد الصحيحة.

أ- يكون x زوجياً إذا وفقط إذا كان x^2 زوجياً.

ب- يكون xy فردياً إذا وفقط إذا كان x فردياً وكان y فردياً.

ت- يكون x فردياً إذا وفقط إذا كان $x^2 + 6x + 9$ زوجياً.

ث- يكون $m|n$ و $n|m$ إذا وفقط إذا كان $n = m$ أو $n = -m$.

2-9 تمثيل العدد الصحيح

يمكن الدلالة على أي عدد صحيح أكبر من العدد 1 وفق قاعدة معينة. بالرغم من أننا عادة نستعمل النظام العشري decimal (قاعدة 10) لتمثيل العدد، يمكن أيضاً تمثيله وفق النظام الثنائي binary (قاعدة 2) أو تمثيله وفق النظام الثماني octal (قاعدة 8) أو تمثيله وفق النظام الست عشري hexadecimal (قاعدة 16) والذي يستعمل غالباً في علوم الحاسوب. ليكن لدينا العدد الصحيح a والقاعدة b، سنرى كيفية تمثيل هذا العدد بناءً على القاعدة b، وسنرى أيضاً كيفية الانتقال السريع من النظام الثنائي والثماني وكذلك بين النظام الثنائي والست عشري.

في الحياة العادية نستعمل النظام العشري لتمثيل العدد الصحيح، فمثلاً العدد 965 يكتب بالشكل: $9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5$. على أية حال، من السهل استعمال قاعدة نظام مغايرة للعدد 10، عملياً يستعمل النظام الثنائي في عمليات الحساب، ويستعمل النظام الثماني والست عشري، للتعبير عن الحروف والكلمات. في الحقيقة أي عدد صحيح أكبر من 1 يمكن تمثيله كقاعدة وفق النظرية التالية:

نظرية (2-7):

ليكن b عدد صحيح أكبر من 1. عندها إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإنه يكتب كتابة وحيدة وفق الصيغة:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

حيث k عدد صحيح غير سالب، و $a_0, a_1, \cdots, a_k$ أعداد صحيحة غير سالبة أصغر من القاعدة b، و $a_k \neq 0$.

يمكن برهان هذه النظرية باعتماد الاستقراء الرياضي الذي سنراه في الفصل الرابع. وتدعى هذه النظرية بتمثيل العدد n وفق القاعدة b ونكتب $(a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_b$. فمثلاً $(245)_8$ يمثل $2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 5 = 165$. عادة تهمل كتابة القاعدة 10 (في التمثيل العشري للعدد) لكثرة استعمالها في الأعداد الصحيحة.

2-9-1 النظام الثنائي

باختيار العدد 2 كقاعدة لتمثيل العدد الصحيح، نحصل على التمثيل الثنائي وأرقامه هي إما 0 وإما 1. بمعنى آخر العدد الصحيح في النظام الثنائي هو شريط من البتات.

مثال (2-38):

ما هو التمثيل العشري للعدد الصحيح المعطى بالصيغة الثنائية $(1\ 0101\ 1111)_2$.

الحل: لدينا:

$$(1\ 0101\ 1111)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 351$$

2-9-2 النظام الثماني والست عشري

بين القواعد الأكثر أهمية في علوم الحواسيب بالإضافة إلى القاعدة 2 هي القاعدة 8 للتمثيل الثماني والقاعدة 16 للتمثيل الست عشري. في النظام الثماني إن الأرقام المختلفة هي كل الأرقام التي أصغر من القاعدة 8 وهي: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

مثال (2-39):

ما هو التمثيل العشري للعدد الصحيح المعطى بالصيغة الثمانية $(7016)_8$.

الحل: حسب تعريف القاعدة $b = 8$ وبالتالي نجد أن:

$$(7016)_8 = 7 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 3598$$

أما في النظام الست عشري، إن الأرقام المختلفة المتطلبة هي كل الأرقام التي أصغر من القاعدة 16 وهي: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, F$، حيث الحروف من A إلى F تمثل الأرقام من 10 إلى 15 في النظام العشري.

مثال (2-40):

ما هو التمثيل العشري للعدد الصحيح المعطى بالصيغة الست عشرية $(2AE0B)_{16}$.

الحل: حسب تعريف القاعدة $b = 16$ وبالتالي نجد أن:

$$(2AE0B)_{16} = 2 \cdot 16^4 + 10 \cdot 16^3 + 14 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 11 = 175627$$

إن كل رقم ست عشري نستطيع تمثيله باستعمال أربعة بتات. فمثلاً: $(1110\ 0101)_2 = (E5)_{16}$ لأن $(1110)_2 = (E)_{16}$ و $(0101)_2 = (5)_{16}$.

نسمي بايت Byte كل شريط بتي طوله ثمانية بتات، لذلك يمكن تمثيله برقمين ست عشريين.

3-9-2 تحويل القاعدة

سنقوم بوصف خوارزمية بناء تمثيل عدد صحيح n وفق القاعدة b. أولاً نقسم العدد n على b لنحصل على ناتج القسمة والباقي بالشكل:

$$n = bq_0 + a_0\,, \qquad 0 \le a_0 < b$$

الباقي a_0 هو الرقم الأيمن في تمثيل العدد وفق القاعدة b. ثم نقسم q_0 على b بالطريقة السابقة نفسها لنحصل على ناتج القسمة والباقي بالشكل:

$$q_0 = bq_1 + a_1\,, \qquad 0 \le a_1 < b$$

حيث إن a_1 هو الرقم الثاني من اليمين في تمثيل العدد وفق القاعدة b. بتكرار نفس الإجراء على التوالي نحصل على رقم إضافي. وينتهي الإجراء عندما نحصل على ناتج قسمة مساوياً للصفر، وبذلك نحصل على التمثيل بترتيب الأرقام من اليمين إلى اليسار.

مثال (2-41):

أوجد التمثيل الثماني للعدد $(12345)_{10}$.

الحل: أولاً نقسم العدد 12345 على 8 لنحصل على:

$$12345 = 8 \cdot 1543 + 1$$

على التوالي بتقسيم ناتج القسمة على 8 لنحصل على:

$$\begin{aligned} 1543 &= 8 \cdot 192 + 7 \\ 192 &= 8 \cdot 24 + 0 \\ 24 &= 8 \cdot 3 + 0 \\ 3 &= 8 \cdot 0 + 3 \end{aligned}$$

فبواقي القسمة هي على التوالي 1 ثم 7 ثم 0 ثم 0 ثم 3 وهي الأرقام التي بترتيبها من اليمين إلى اليسار نحصل على العدد بالصيغة الثمانية إذن:

$$(12345)_{10} = (30071)_8$$

مثال (2-42):

أوجد التمثيل الست عشري للعدد $(177130)_{10}$.

الحل: أولاً نقسم العدد 177130 على 16 لنحصل على:

$$177130 = 16 \cdot 11070 + 10$$

على التوالي بتقسيم ناتج القسمة على 16 لنحصل على:

$$\begin{aligned} 11070 &= 16 \cdot 691 + 14 \\ 691 &= 16 \cdot 43 + 3 \\ 43 &= 16 \cdot 2 + 11 \\ 2 &= 16 \cdot 0 + 2 \end{aligned}$$

فبواقي القسمة هي على التوالي 10 ثم 14 ثم 3 ثم 11 ثم 2 وهي الأرقام التي بترتيبها من اليمين إلى اليسار نحصل على العدد بالصيغة الست عشرية إذن:

$$(177130)_{10} = (2B3EA)_{16}$$

مثال (2-43):

أوجد التمثيل الثنائي للعدد $(241)_{10}$.

الحل: أولاً نقسم العدد 241 على 2 لنحصل على:

$$241 = 2 \cdot 120 + 1$$

على التوالي بتقسيم ناتج القسمة على 2 لنحصل على:

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\ 30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\ 15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 1 &= 2 \cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

فبواقي القسمة هي على التوالي 1 ثم 0 ثم 0 ثم 0 ثم 1 ثم 1 ثم 1 ثم 1 وهي الأرقام التي بترتيبها من اليمين إلى اليسار نحصل على العدد بالصيغة الثنائية إذن:

$$(241)_{10} = (1111\ 0001)_2$$

التحويل من النظام الثنائي إلى الثماني ومن النظام الثنائي إلى الست عشري سهل جداً لأن كل رقم ثماني يمثل بثلاثة بتات (أرقام ثنائية) وكل رقم ست عشري يمثل بأربعة بتات، كما هو موضح في الشكل (2-3).

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Octal	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
Binary	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

الشكل (2-3): التمثيل الست عشري والثماني والثنائي للأعداد من 0 إلى 15.

مثال (2-44):

أوجد التمثيل الثماني والست عشري للصيغة $(1100\ 1011\ 1110\ 11)_2$، وأوجد التمثيل الثنائي للصيغ $(765)_8$ و $(A8D)_{16}$.

الحل: لتحويل العدد $(1100\ 1011\ 1110\ 11)_2$ إلى النظام الثماني نقوم بتجميع الأرقام إلى مجموعات من ثلاث خانات (بتات) وبإضافة أصفار إلى اليسار إذا تطلب

ذلك الأمر، أي 100، 111، 010، 111، و011، والأرقام المقابلة لها في النظام الثماني هي على الترتيب 4، 7، 2، 7، و3 فيكون: $(11\ 1110\ 1011\ 1100)_2 = (37274)_8$.

لتحويل العدد $(11\ 1110\ 1011\ 1100)_2$ إلى النظام الست عشري نقوم بتجميع الأرقام إلى مجموعات من أربع خانات (بتات) وبإضافة أصفاراً إلى اليسار إذا تطلب ذلك الأمر، أي 1100، 1011، 1110، و0011، والأرقام المقابلة لها في النظام الست عشري هي على الترتيب C، B، E، و3 فيكون: $(11\ 1110\ 1011\ 1100)_2 = (3EBC)_{16}$.

لتحويل العدد $(765)_8$ إلى النظام الثنائي نقوم بتحويل كل رقم إلى عدد ثنائي من ثلاث خانات (بتات)، فالرقم 5 يقابله 101 و6 يقابله 110 وأخيراً 7 يقابله 111 فيكون: $(765)_8 = (1\ 1111\ 0101)_2$.

لتحويل العدد $(A8D)_{16}$ إلى النظام الثنائي نقوم بتحويل كل رقم إلى عدد ثنائي من أربع خانات (بتات)، فالرقم D يقابله 1101 و8 يقابله 1000 وأخيراً A يقابله 1010 فيكون: $(A8D)_{16} = (1010\ 1000\ 1101)_2$.

تمارين غير محلولة

1- حول الأعداد الصحيحة الآتية من النظام العشري إلى النظام الثنائي.

أ) 231 ب) 4532 جـ) 97644

د) 321 هـ) 1023 ز) 100632

2- حول الأعداد الصحيحة الآتية من النظام الثنائي إلى النظام العشري.

أ) $(1\ 1111)_2$ ب) $(10\ 0000\ 0001)_2$

جـ) $(1\ 0101\ 0101)_2$ د) $(110\ 1001\ 0001\ 0000)_2$

هـ) $(1\ 1011)_2$ ز) $(10\ 1011\ 0101)_2$

ح) $(11\ 1011\ 1110)_2$ ط) $(111\ 1100\ 0001\ 1111)_2$

3- حول الأعداد الصحيحة الآتية من النظام الثماني إلى النظام الثنائي.

أ) $(572)_8$ ب) $(1604)_8$

جـ) $(423)_8$ د) $(2417)_8$

4- حول الأعداد الصحيحة الآتية من النظام الثنائي إلى النظام الثماني ثم إلى النظام الست عشري ثم إلى النظام العشري.

أ) $(1111\ 0111)_2$ ب) $(1010\ 1010\ 1010)_2$

جـ) $(111\ 0111\ 0111\ 0111)_2$ د) $(101\ 0101\ 0101\ 0101)_2$

هـ) $(1011\ 0111\ 1011)_2$ ز) $(1\ 1000\ 0110\ 0011)_2$

5- حول الأعداد الصحيحة الآتية من النظام الست عشري إلى النظام الثنائي.

أ) $(80E)_{16}$ ب) $(135AB)_{16}$

جـ) $(ABBA)_{16}$ د) $(DEFACED)_{16}$

هـ) $(BADFACED)_{16}$ ز) $(ABCDEF)_{16}$

6- حول العدد $(7345321)_8$ إلى النظام الثنائي والست عشري وحول العدد $(10\ 1011\ 1011)_2$ إلى النظام الثماني والنظام الست عشري.

7- أوجد مجموع وجداء كل زوج من الأعداد الصحيحة الآتية:

أ) $(100\ 0111)_2$ و $(111\ 0111)_2$.

ب) $(1110\ 1111)_2$ و $(1011\ 1101)_2$.

جـ) $(10\ 1010\ 1010)_2$ و $(1\ 1111\ 0000)_2$.

د) $(10\ 0000\ 0001)_2$ و $(11\ 1111\ 1111)_2$.

8- أوجد مجموع وجداء كل زوج من الأعداد الصحيحة الآتية المعطاة بالنظام الثلاثي:

أ) $(112)_3$ و $(210)_3$.

ب) $(2112)_3$ و $(12021)_3$.

جـ) $(20001)_3$ و $(1111)_3$.

د) $(120021)_3$ و $(2002)_3$.

9- أوجد مجموع وجداء كل زوج من الأعداد الصحيحة الآتية المعطاة بالنظام الثماني:

أ) $(763)_8$ و $(147)_8$.

ب) $(6001)_8$ و $(272)_8$.

جـ) $(777)_8$ و $(1111)_8$.

د) $(54321)_8$ و $(3456)_8$.

10- أوجد مجموع وجداء كل زوج من الأعداد الصحيحة الآتية المعطاة بالنظام 16:

أ) $(1AE)_{16}$ و $(BBC)_{16}$.

ب) $(20CBA)_{16}$ و $(A01)_{16}$.

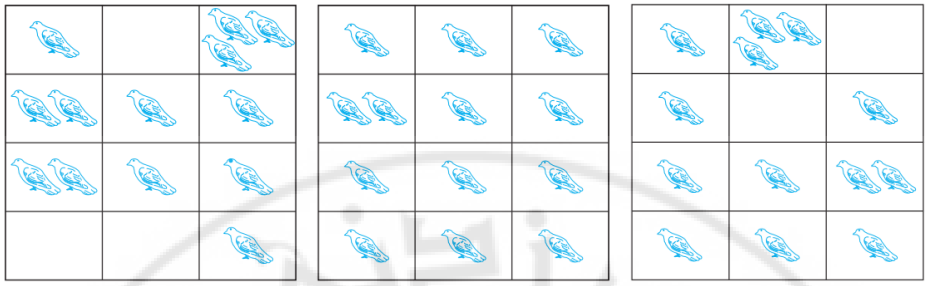
جـ) $(ABCDE)_{16}$ و $(1111)_{16}$.

د) $(E0000E)_{16}$ و $(BAAA)_{16}$.

2-10 مبدأ برج الحمام

لنفرض أنه لدينا 13 حمامة طيارة، نريد وضعها في 12 حجرة من برج حمام للمبيت. بما أن لدينا عدد الحمام أكبر من عدد الحجرات، لذلك يجب وضع حمامتين على الأقل في حجرة واحدة.

وهذه حقيقة واضحة لأنه لو وضعنا حمامة واحدة في كل حجرة سيتم استيعاب 12 حمامة فقط وتبقى واحدة خارج البرج. هذا يوضح المبدأ العام الذي يدعى مبدأ برج الحمام، والشكل (2-4) يوضح هذا المبدأ.



(أ) (ب) (جـ)

الشكل (2-4): يوجد حمام أكثر من عدد الأبراج.

نظرية (2-8):

إذا كان k عدداً صحيحاً موجباً، وكان لدينا $k+1$ أو أكثر من الأغراض، نريد وضعها في k صندوقاً، عندها سيكون في أحد الصناديق غرضان أو أكثر.

الإثبات: سنقوم بإثبات مبدأ برج الحمام بطريقة المكافئ العكسي. لنفرض عدم وجود صندوق من k صندوقاً يحتوي على أكثر من غرض واحد. عندها يكون العدد الكلي للأغراض لايتجاوز العدد k، وبذلك نكون وصلنا إلى تناقض لأنه لدينا $k+1$ غرضاً.

إن مبدأ برج الحمام يدعى أيضاً **مبدأ الساحب لديريخليه** نسبة للعالم الألماني ديريخليه، الذي استخدم هذا المبدأ بكثرة، ومن فوائد هذا المبدأ النتيجة الآتية:

نتيجة (2-1):

أي تابع من مجموعة مؤلفة من $k+1$ عنصراً، إلى مجموعة مؤلفة من k عنصراً، هو تابع غير متباين.

الإثبات: لنفرض أن y من مستقر التابع f، يوجد حينها صندوق يحتوي على جميع العناصر x بحيث يكون $f(x)=y$. وبما أن المنطلق يحتوي على $k+1$ عنصراً والمستقر يحتوي على k عنصراً فقط، فحسب مبدأ برج الحمام فإنه يوجد في أحد هذه الصناديق عنصران x على الأقل، وهذا ما يدل على أن التابع f ليس متبايناً.

مثال (2-45):

من بين 367 شخصاً يوجد على الأقل اثنان منهم لهم نفس يوم الميلاد، لأنه يوجد 366 يوماً مختلفاً فقط في السنة.

مثال (2-46):

من بين 27 مجموعة من الكلمات في اللغة الإنكليزية يوجد على الأقل كلمتين تبدأ كل منهما بنفس الحرف، لأنه في اللغة الإنكليزية يوجد 26 حرفاً مختلفاً فقط.

مثال (2-47):

كم يجب أن يكون عدد الطلاب في صف ما، حتى يحصل اثنان منهم على الأقل على نفس العلامة في الامتحان النهائي، إذا كانت درجات الامتحان من 0 إلى 100.

الحل: يوجد 101 احتمال للحصول على درجة معينة، فحسب مبدأ برج الحمام يجب أن يكون عدد الطلاب 102 حتى يحصل اثنان منهم على الدرجة ذاتها.

يمثل مبدأ برج الحمام أداة نافعة في العديد من الإثباتات، ويدخل أيضاً في إثبات النتائج المفاجئة كما هو في المثال الآتي:

مثال (2-48):

برهن أنه من أية مجموعة من ثمانية أعداد صحيحة متباينة يمكن أن نجد عددين x وy فرقهما $x - y$ يقبل القسمة على العدد 7.

الحل: من خواص عملية القسمة نجد أن أي عدد صحيح n يمكن كتابته بالشكل:

$$n = 7q + r \quad \text{حيث} \quad 0 \le r \le 6$$

وبما أن الأعداد هي ثمانية وعدد إمكانيات البواقي r بعد القسمة على العدد 7 هي سبعة إمكانيات، إما 0 أو 1 أو ⋯ أو 6. فحسب مبدأ برج الحمام يوجد عددان على الأقل لهما الباقي نفسه وليكن s حيث $0 \le s \le 6$. لنفرض أن $x = 7q_1 + s$ و$y = 7q_2 + s$ وبالتالي نجد أن:

$$\begin{aligned} x - y &= (7q_1 + s) - (7q_2 + s) \\ &= 7q_1 + s - 7q_2 - s \\ &= 7(q_1 - q_2) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $x - y$ يقبل القسمة على 7.

مثال (2-49):

إذا اختير 8 أشخاص من أيّ مجموعة من الناس، يمكن أن نجد اثنين منهم على الأقل قد ولدا في اليوم نفسه من أيام الأسبوع.

الحل: حسب مبدأ برج الحمام يمكن أن يكون كل شخص قد ولد في يوم من أيام الأسبوع السبعة، وبما أنّ عدد الأشخاص $8 > 7$ فإن اثنين منهم على الأقل قد ولدا في اليوم نفسه.

مثال (2-50):

برهن أن أيّ خمسة أعداد مختارة من 1 إلى 8 ، تتضمن عددين سيكون مجموعهما 9.

الحل: لنشكل المجموعات المختلفة والمؤلفة من عددين مجموعهما 9 فنجد أنها:

$$A_1 = \{1, 8\}, \quad A_2 = \{2, 7\}, \quad A_3 = \{3, 6\}, \quad A_4 = \{4, 5\}$$

إن أي عدد من الأعداد الخمسة المختارة سينتمي إلى أحد هذه المجموعات، وبما أنّ هناك أربع مجموعات فقط فإن مبدأ برج الحمام يخبرنا أن عددين من الأعداد الخمسة على الأقل ينتمي إلى المجموعة ذاتها، وبالتالي يكون مجموعهما يساوي 9.

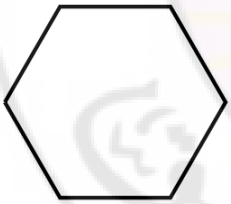
مثال (2-51):

برهن أنه إذا اختير 11 أحد عشر عدداً من بين الأعداد $\{1,2,\cdots,20\}$، فإن أحدها سيكون مضاعفاً لعدد آخر.

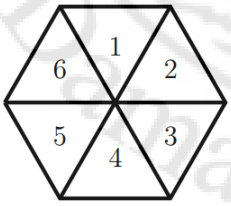
الحل: مفتاح حل هذه المشكلة أن نصنع 10 أو أقل من الأماكن (غرف الحمام) بحيث أي عدد نختاره ينتمي إلى إحدى هذه الغرف، وإذا انتمى العددان x وy إلى

غرفة واحدة فإننا نضمن أنه إما $y|x$ أو $x|y$ (أحدهما قاسم للآخر). إن التحليل إلى عوامل هي ميزة طبيعية للاستكشاف. لدينا 8 أعداد أولية بين 1 و20، ولكن بمعرفة أن العددين x وy من مضاعفات العدد الأولي نفسه فإنّ ذلك لا يؤدي إلى كون $y|x$ أو $x|y$. لنحاول مرة أخرى. هناك 10 أعداد فردية بين 1 و20. إن أي عدد صحيح موجب n يمكن كتابته بالشكل $n = 2^k m$ حيث m عدد فردي و$k \geq 0$. إن ذلك يمكن رؤيته ببساطة بتحليل n إلى قوى 2 إن وجدت. في هذه الحالة ندعو m القسم الفردي للعدد n. إذا اختير 11 عدداً من المجموعة $\{1, 2, \cdots, 20\}$، فإن اثنين منها على الأقل لهما القسم الفردي نفسه. هذا حسب مبدأ برج الحمام لدينا 11 عدداً موزعين على 10 أعداد فردية بين 1 و20. ليكن n_1 وn_2 عددان لهما القسم الفردي نفسه، لدينا $n_1 = 2^{k_1} m$ و$n_2 = 2^{k_2} m$، فإذا كان $k_1 \geq k_2$ عندها يكون n_1 من مضاعفات العدد n_2، وإذا كان $k_2 \geq k_1$ فإن n_2 من مضاعفات العدد n_1.

مثال (2-52):



لتكن لدينا المنطقة المحصورة بالشكل السداسي المنتظم والذي طول ضلعه مساوياً لـ $1cm$ والمبين جانباً، برهن أنّ أيّ سبع نقاط مختارة من هذه المنطقة، اثنتان منها على الأقل لا تبعد عن بعضهما بأكثر من $1cm$.



الحل: نقسم المنطقة إلى ستة مثلثات متساوية، كما هو مبين في الشكل الجانبي، فإذا اخترنا سبع نقاط من هذه المنطقة فإنه حسب مبدأ برج الحمام اثنتان منها على الأقل تقع في نفس المثلث مما يدل على أن المسافة بينهما أقل من $1cm$.

2-10-1 مبدأ برج الحمام العام

ينص مبدأ برج الحمام على وجوب وجود غرضين في صندوق واحد على الأقل عندما يكون عدد الأغراض يتجاوز عدد الصناديق. وبشكل أوسع، في حالة كون عدد الأغراض يتجاوز من مضاعفات عدد الصناديق. فمثلاً إذا كان لدينا 21 غرضاً نريد وضعهم في 10 صناديق، فيجب أن يحتوي أحد الصناديق على 3 أغراض على الأقل.

نظرية (2-9) (مبدأ برج الحمام المعمم)

إذا وزعنا N غرضاً على k صندوقاً، عندها يكون أحد الصناديق يحتوي على الأقل $\lceil N/k \rceil$ غرضاً. (المصطلح $\lceil x \rceil$ يعني سقف العدد floor x وهو أصغر عدد صحيح أكبر من العدد x).

الإثبات: باستخدام الإثبات بالمكافئ المعاكس، لنفرض أنه لا يوجد أي من الصناديق يحتوي أكثر من $\lceil N/k \rceil - 1$ غرضاً. عندها يكون عدد الأغراض الكلي على الأكثر هو:

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

وهذا مناقض للفرض، لأن العدد الكلي للأغراض هو N.

تمارين محلولة

تمرين 1. أثبت أنه من كل 30 شخصاً مختاراً، يوجد بينها مجموعة من خمسة أشخاص قد ولدوا في اليوم نفسه من الأسبوع.

الحل: بتوزيع الأشخاص الثلاثين على أيام ميلادهم من أيام الأسبوع، فحسب مبدأ برج الحمام العام، لدينا $N = 30$ و$k = 7$ فعلى الأقل $\lceil N/k \rceil = \lceil 30/7 \rceil = 5$، خمسة منهم قد ولدوا في اليوم نفسه من الأسبوع.

تمرين 2. لدينا في مكتبة 30 قاموساً، عدد صفحاتهم مجتمعة 61237 صفحةً، أثبت أنه يوجد واحد من بينها عدد صفحاته على الأقل 2045 صفحةً.

الحل: حسب مبدأ برج الحمام العام، لدينا $N = 61237$ و$k = 30$ فعلى الأقل يوجد قاموس واحد عدد صفحاته $\lceil N/k \rceil = \lceil 61237/30 \rceil = 2045$ صفحةً.

تمرين 3. أثبت أن كل تجمع فيه n من الأشخاص يوجد بينهما اثنان على الأقل لهما العدد نفسه من المعارف (الأصدقاء) داخل هذا التجمع، هنا خذ في الاعتبار أن الشخص x صديق للشخص y يعني أن y صديق x.

الحل: للحل أنشئ n موضعاً وكل موضع نحدد له رقماً وحيداً k من بين الأرقام:

$$0, 1, 2, \cdots, n-2, n-1$$

ليتجمع في ذلك الموضع الأشخاص الذين لهم k من الأصدقاء. مثلاً الموضع ذو الرقم 3 سيجتمع فيه أولئك الذين لكل فرد منهم 3 أصدقاء.

لننظر أولاً للموضع رقم صفر: إذا كان هناك شخص على الأقل في هذا الموضع فهذا يعني أنه لا يعرف أحداً وبالتالي لا يعرفه أحدٌ، وبالتالي الموضع رقم $(n-1)$ ليس فيه أحد لأنه خاص بمن يعرف الكل وبذلك يتوزع n شخصاً على $(n-1)$ موضعاً. أما إذا كان الموضع رقم صفر خالياً فإن n شخصاً سيوزعون على بقية المواضع وعددها $(n-1)$.

إذن في كلتا الحالتين سيتوزع n شخصاً على $(n-1)$ موضعاً ومن مبدأ برج الحمام أحد هذه المواضع فيها شخصان أو أكثر، وهذا يبين أن شخصين على الأقل لهما العدد نفسه من الأصدقاء.

تمرين 4. حقيبة فيها 6 أقلام زرقاء و8 حمراء و11 سوداء، ما هو أقل عدد من الأقلام يجب سحبه عشوائياً من الحقيبة حتى نضمن أن من ضمنه 5 أقلام على الأقل من لون واحد؟

الحل: نستخدم الصيغة الثانية لمبدأ برج الحمام. لو سحبنا مجموعة من الأقلام ووزعت على ثلاثة صناديق ملونة بحسب ألوان الأقلام بحيث نضع كل قلم في الصندوق المطابق له في اللون. إذن علينا وفق مبدأ برج الحمام أن نحسب ما عدده $4 \times 3 + 1$ أي 13 قلماً.

ماذا لو كان المطلوب عدد الأقلام التي يجب سحبها عشوائياً من الحقيبة حتى نضمن حصولنا على 9 أقلام على الأقل من لون واحد؟

في هذه الحالة $n = 3, k = 8$ ولكن نلاحظ أن هناك حد علوي للأقلام الزرقاء وهو 6 فما زاد عن هذا العدد (أي 2) لن يكون ضرورياً فيجب أن يستبعد من الحساب. إذن أقل عدد ممكن من الأقلام المسحوبة هو:

$$8 \times 3 + 1 - (8 - 6) = 25 - 2 = 23$$

تمارين غير محلولة

تمرين 1. كم يكون أقل عدد يجب سحبة من ضمن مجموعة كرات مكونة من 3 خضراء، 5 بيضاء، 9 حمراء، 12 سوداء، حتى نضمن الحصول على 6 كرات من نفس النوع على الأقل؟.

تمرين 2. سبعة من صيادي السمك اصطادوا ما مجموعه 100 سمكة وكل واحد منهم اصطاد عدداً مختلفاً عن باقي الصيادين برهن على أن ثلاثة من بين السبعة اصطادوا 50 سمكة على الأقل.

تمرين 3. أثبت أنه من كل $n + 1$ عدداً من بين الأعداد $1, 2, \cdots, 2n$ يوجد عددان أحدهما يقسم الآخر.

تمرين 4. لدينا A, B قرصان دائريان من البلاستيك. قسم كل واحد منهما إلى 200 قطاع دائري متطابق. لونت قطاعات القرص A بالأحمر والأزرق بالتساوي، بمعنى 100 قطاع عشوائي لونت بالأزرق والقطاعات المتبقية لونت بالأحمر، ولون القرص B عشوائياً

باستخدام الأحمر والأزرق كذلك دون اعتبار لعدد الملونة بالأحمر أو الأزرق ووضع القرص B على A متطابقي المركز. أثبت أن هناك وضعاً معيناً للقرص B بحيث يكون عدد القطاعات منه والمطابقة للتي تحتها مباشرة من القرص A لا يقل عن 100 قطاع.

تمرين 5. إذا اجتمع 13 شخصاً في غرفة واحدة، برهن أن اثنين منهم قد ولدوا في الشهر نفسه من السنة.

تمرين 6. إذا اخترنا سبعة أعدادٍ من بين الأعداد 1 إلى 12، برهن أن اثنين منهما مجموعما يساوي 13.

تمرين 7. ليكن T مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 1، برهن أنه إذا وضعنا خمس نقاط على محيطه أو داخله فإن اثنتين منها تبعد عن بضعهما مسافة $\frac{1}{2}$ على الأقل.

تمرين 8. برهن أنه إذا اخترنا ثمانية أعداد صحيحة موجبة فإن اثنين منها له باقي القسمة نفسه على سبعة.

تمرين 9. برهن أنه إذا استخدم سبعة ألوان لطلاء خمسين دراجة هوائية فإن ثمانية منها على الأقل لها اللون نفسه.

تمرين 10. يتطوع عشرة أشخاص لتشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة أعضاء. كل لجنة ممكنة يتم تشكيلها من قبل عشرة الأشخاص المتطوعين بكتابة أسماء أعضائها على قصاصة ورقة، قصاصة واحدة لكل لجنة، ثم توزع القصاصات الورقية في عشر قبعات. بين أن كل قبعة تحتوي على الأقل 12 قصاصة ورقية.

تمرين 11. اكتشف ستة أصدقاء أن لديهم ما مجموعه 21.61 يورو في رحلة إلى الأفلام. بين أن أحدهم أو أكثر كان لديه على الأقل 3.61 يورو.

تمرين 12. بين أنه يجب إيجاد 90 طريقة على الأقل لاختيار ستة أعداد من بين 1 إلى 15 والتي لها المجموع نفسه.

تمرين 13. كم يجب أن تحظى بأصدقاء حتى تضمن أن خمسة منهم لهم يوم الميلاد في الشهر نفسه من السنة.

تمرين 14. بين أنه إذا اخترنا خمس نقاط من مربع طول ضلعه $1\ inch$، اثنتان منها على الأقل لا تبعد عن بعضهما مسافة بأكثر من $\sqrt{2}\ inch$.

تمرين 15. لتكن A مصفوفة بوليانية مربعة من قياس 8×8. إذا كان مجموع عناصر المصفوفة A يساوي 51، برهن أنه يوجد سطر رقم i وعمود رقم j فيها بحيث يكون مجموع عناصرهما معاً أكثر من 13.

تمرين 16. برهن أنه من ضمن أي 14 عدداً مختاراً من بين الأعداد 1 إلى 25 يوجد عدد مضاعفٌ لعدد آخر.

تمرين 17. رُقّمَ عشرون قرصاً من 1 إلى 20 ووضعت على منضدة بحيث يكون الرقم من الأسفل، اختير عشرة أقراص بحيث يختار أحدها ثم يقلب ثم يختار الآخر ويقلب حتى يتم العشرة، إذا كان مجموع رقمي قرصين منها مساوياً لـ 21 يخسر اللاعب، هل يمكن أن يربح أحدهم اللعبة.

تمرين 18. لنفرض أن اللعبة في التمرين السابق غيرت بحيث نختار 12 قرصاً بدل 10 أقراص هل يمكن أن يربح أحدهم اللعبة.

تمرين 19. برهن أن أيّ متتالية من ستة أعداد، يجب أن تحتوي على متتالية جزئية مجموع أعدادها يقبل القسمة على 6. (تلميح: اعتبر المجاميع $c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3, \cdots$ مع باقي القسمة على 6).

تمرين 20. برهن أن أيّ متتالية من n عدداً، يجب أن تحتوي على متتالية جزئية مجموع أعدادها يقبل القسمة على n.

2-11 مبدأ العد الأساسي

نستخدم في هذا الفصل مبدأين أساسيين للعد. أولهما يتضمن مبدأ الجمع والثاني مبدأ الجداء أو الضرب.

2-11-1 مبدأ قاعدة الجمع

لنفرض أنّ لدينا حدث E يمكن ظهوره في m طريقة وحدث آخر F يمكن ظهوره في n طريقة، ولنفرض أن هذين الحدثين لا يمكن ظهورهما معاً في آن واحد. عندها يمكن ظهور الحدث E أو الحدث F في $m+n$ طريقة.

2-11-2 مبدأ قاعدة الجداء

لنفرض أنّ لدينا حدث E يمكن ظهوره في m طريقة، وبشكل مستقل عن هذا الحدث، يوجد حدث آخر F يمكن ظهوره في n طريقة. عندها يمكن ظهور الحدثين E و F معاً في mn طريقة.

ويمكن تعميم المبدأين السابقين إلى ثلاثة أو أكثر من الأحداث. فإذا كان الحدث E_1 يمكن ظهوره في n_1، وكذلك الحدث E_2 يمكن ظهوره في n_2، وأيضاً الحدث E_3 يمكن ظهوره في n_3، وهكذا ... فحسب قاعدة الجمع فإن عدد طرق ظهور أحد هذه الأحداث، بشرط عدم ظهور حدثين معاً في نفس الوقت، هو:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots$$

وحسب قاعدة الجداء فإن عدد طرق ظهور هذه الأحداث جميعها، بشرط ظهور حدث تلو الآخر في ترتيب، هو:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$$

مثال (2-53):

لنفرض أن مدرسة ما فيها ثلاثة مقررات مختلفة للتاريخ، وأربعة مقررات مختلفة للقراءة، ومقرران مختلفان للاجتماعيات.

فإن عدد الطرق m لاختيار طالب ما مقرراً واحداً من كل نوع من المقررات هو:

$$m = (3)(4)(2) = 24$$

وإن عدد الطرق n لاختيار طالب مقرراً واحداً فقط من هذه المقررات هو:

$$n = 3 + 4 + 2 = 9$$

3-11-2 الدوال الرياضية

سنناقش دالتين مهمتين من الدوال الرياضية الكثيرة الاستعمال في التراكيب العددية.

دالة العاملي

إن جداء الأعداد الصحيحة الموجبة المتضمنة من 1 إلى n يرمز له بـ $n!$ ويدعى n عاملي:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

إن $1! = 1$ و $n! = n(n-1)!$ وأيضاً يناسب التعريف أن: $0! = 1$.

مثال (2-54):

(a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$

$$5! = 5 \cdot 4! = 120.$$

(b) $$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9!} = \frac{12!}{3!\,9!}$$

ويمكن التعميم:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

(c) من أجل n عدد كبير جداً، نستخدم تقريب ستيرلينغ (حيث $e = 2.7128 \ldots$)

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n\, e^{-n}$$

معاملات ثنائي الحد

إن اصطلاح $\binom{n}{r}$ أو nCr أو n Choose r أو C_n^r والذي يدل على عدد اختيار r شيئاً من n شيئاً حيث إن r وn عددان صحيحان موجبان و$r \le n$ ويعرف بالعلاقة:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}, \quad \Rightarrow \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

نلاحظ أن $n-(n-r)=r$. وهذا ما يؤدي إلى النتيجة المهمة الآتية:

نتيجة (2-2):

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r} \quad \text{أو} \quad \binom{n}{a} = \binom{n}{b}\ ;\ a+b=n$$

وبما أن $0! = 1$ فإننا نجد:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \quad , \quad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

مثال (2-55):

$$(a)\ \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28 \quad ; \quad \binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126\,;$$

$$\binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792.$$

نلاحظ أن $\binom{n}{r}$ له تماماً r مضروباً في البسط وأيضاً r مضروباً في المقام.

(b) لنفرض أننا نريد حساب $\binom{10}{7}$. فإنه سيكون في كل من البسط والمقام سبعة مضاريب. فاستناداً إلى النتيجة (2-2)، لدينا $10-7=3$ وبالتالي:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120.$$

معاملات ثنائي الحد ومثلث باسكال

إن الأعداد $\binom{n}{r}$ تدعى معاملات ثنائي الحد، لذلك تظهر ظهوراً خاصاً كأمثال في مفكوك ثنائي الحد $(a+b)^n$.

نظرية (2-10) (نظرية ثنائي الحد):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

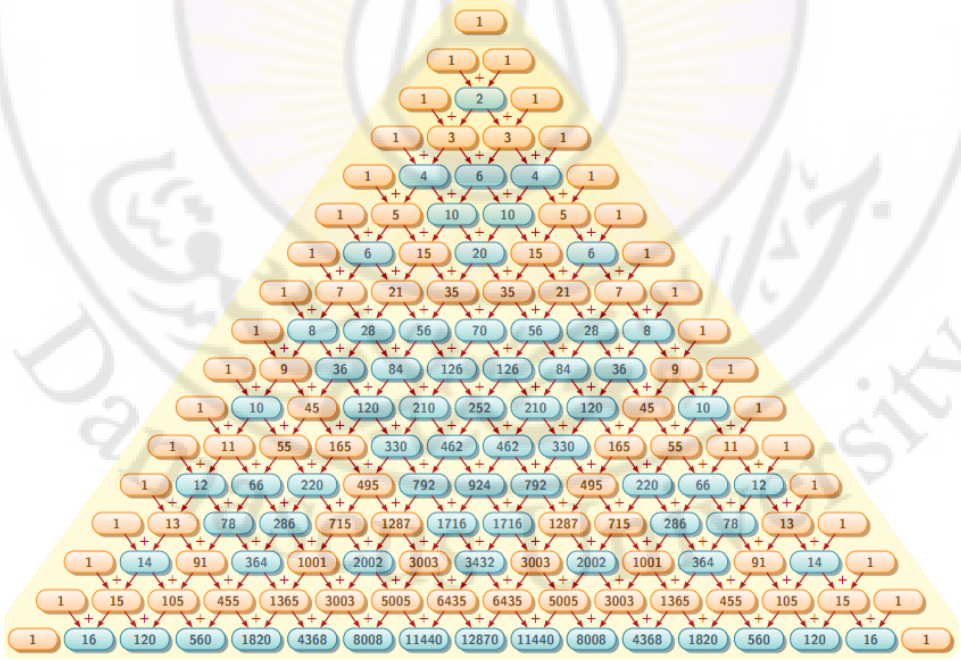
إن أمثال القوى المتعاقبة لـ $a+b$ يمكن ترتيبها في مصفوفة أعداد مثلثية، تدعى مثلث باسكال Pascal's triangle كما في الشكل (2-5).

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

الشكل (2-5): مثلث باسكال.

أو كما في الشكل (2-6):



الشكل (2-6): مثلث باسكال.

(أ) العدد الأول والأخير في كل سطر من مثلث باسكال هو 1.

(ب) كل عدد آخر في مثلث باسكال يمكن الحصول عليه من جمع العددين اللّذين يقعان فوقه. مثلاً (من الشكل 2-5):

$$10 = 4 + 6\,, \qquad 15 = 5 + 10\,, \qquad 20 = 10 + 10$$

مثال (2-56):

ما هو معامل الحد $x^{12}y^{13}$ في مفكوك ثنائي الحد $(2x - 3y)^{25}$؟

الحل: نلاحظ أن المفكوك يمكن كتابته بالشكل: $\big(2x + (-3y)\big)^{25}$. حسب نظرية ثنائي الحد، لدينا:

$$\big(2x + (-3y)\big)^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} (2x)^{25-k}(-3y)^{k}$$

بالنتيجة فإن معامل الحد $x^{12}y^{13}$ في المفكوك نحصل عليه عندما $k = 13$. وبالتالي هو:

$$\binom{25}{13} (2)^{25-13}(-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!} 2^{12}3^{13}$$

نتيجة (2-3):

برهن أن:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n}$$

البرهان:

باستخدام نظرية ثنائي الحد بوضع $a = 1$ و$b = 1$ نجد أن:

$$2^{n} = (1 + 1)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}1^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

نتيجة (2-4):

بفرض أنّ n عددٌ صحيحٌ موجبٌ. برهن أنّ:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

البرهان:

باستخدام نظرية ثنائي الحد بوضع $a=-1$ و$b=1$ نجد أن:

$$0=0^n=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

وهذا يؤدي بالتالي إلى أن:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\cdots$$

نتيجة (2-5):

بفرض أنّ n عدد صحيح غيرُ سالبٍ. برهن أن:

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$$

البرهان:

باستخدام نظرية ثنائي الحد بوضع $a=1$ و$b=2$ نجد أن:

$$3^n=(1+2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$$

نظرية (2-11) (مطابقة باسكال):

بفرض أن n وk عددان صحيحان موجبان وكان $k\le n$. فإن:

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

نظرية (2-12) (مطابقة ڤاندرموند):

بفرض أن n وm وr أعداد صحيحة غير سالبة وكان $r\le n,m$. فإن:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

نتيجة (2-6):

إذا كان n عدد صحيح غير سالب فإن:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

البرهان:

باستخدام مطابقة ڤاندرموند بوضع $n = m = r$ نجد:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \quad ; \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

4-11-2 التباديل Permutations

إن أي تنظيم لمجموعة ما مؤلفة من n عنصراً حسب ترتيب معين يدعى تبديل (بأخذ الكل كل مرة). وأي تنظيم لأي عدد r من العناصر وفق ترتيب معين يدعي r–تبديل وهو ترتيب n عنصراً بأخذ r عنصراً منها كل مرة. فمثلاً باعتبار مجموعة حروف اللغة الإنكليزية A, B, C, D عندها:

1- إن $BDCA, DCBA, ACDB$ هي تباديل لأربعة أحرف مأخوذ كلها كل مرة.

2- إن BAD, ACB, DBC هي تباديل لأربعة أحرف مأخوذ ثلاثة منها كل مرة.

3- إن AD, BC, CA هي تباديل لأربعة أحرف مأخوذ اثنان منها كل مرة.

عادة ما يكون العدد الدال على التباديل دون سرد كيفية الترتيب هو المهم. إن عدد التباديل لـ n عنصراً مأخوذ منها r عنصراً كل مرة يرمز له بـ: $(n)_r$, $P_{n,r}$, ${}_nP_r$, $P(n,r)$.

تعطي النظرية التالية علاقة حساب التباديل:

نظرية (2-13):

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تأكد أنه يوجد r مضروباً في الجداء $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

مثال (2-57):

أوجد عدد التباديل m لستة حروف هي A,B,C,D,E,F مأخوذة ثلاثة منها كل مرة. بمعنى آخر أوجد عدد الكلمات المؤلفة من ثلاثة حروف من الحروف الست السابقة دون تكرارها.

إن الحرف الأول يمكن اختياره بـ 6 طرق. والحرف الذي يليه يمكن اختياره بـ 5 طرق. وأخيراً الحرف الثالث يمكن اختياره بـ 4 طرق. وبالتالي يكون: $m = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ أي إنه يوجد 120 تبديلاً. وهذا مطابق لما ورد في النظرية (2-13).

في الحقيقية يمكن برهان النظرية السابقة بنفس أسلوب هذا المثال.

نتيجة (2-7):

إذا كان $n = r$ فإنه يوجد $n!$ تبديلاً لترتيب n عنصراً مختارةً كلها في كل مرة.

$$P(n,r) = P(n,n) = n! \quad ; \quad n = r$$

فمثلاً يوجد $3! = 6$ تباديل لترتيب ثلاثة حروف A,B,C أي يوجد:

$$ABC, \quad ACB, \quad BAC, \quad BCA, \quad CAB, \quad CBA.$$

2-11-5 التباديل مع تكرار

نريد غالباً معرفة عدد التباديل لمجموعات متعددة والتي تتكون من عدة عناصر على حد سواء، أي نريد حساب:

$$P(n; n_1, n_2, \cdots, n_r)$$

والذي يدل على عدد تباديل n عنصراً، مختارة منها n_1 على حدة وn_2 على حدة وهكذا حتى n_r على حد سواء. والعلاقة العامة تعطى بالنظرية التالية:

نظرية (2-14):

بفرض أن $n, n_1, n_2, \cdots, n_r$ أعداد صحيحة غير سالبة و $n_1, n_2, \cdots, n_r \leq n$ فإن:

$$P(n; n_1, n_2, \cdots, n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

سنقوم ببرهان النظرية السابقة من خلال المثال الآتي. لنفرض أننا نريد تشكيل كل الكلمات المؤلفة من خمسة حروف مستخدمين حروف كلمة $BABBY$. الآن يوجد $5! = 120$ تبديلاً للعناصر الخمسة B_1, A, B_2, B_3, Y، حيث إن حروف B متباينة عن بعضها البعض. نلاحظ أن التباديل الستة الآتية:

$$B_1B_2B_3AY, \quad B_2B_1B_3AY, \quad B_3B_1B_2AY, \quad B_1B_3B_2AY,$$
$$B_2B_3B_1AY, \quad B_3B_2B_1AY$$

تشكل الكلمة نفسها. وهذه النتائج الست هي بالحقيقة $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$، ست طرق مختلفة لوضع حروف الـ B الظاهرة. وبالتالي فإن عدد الطرق المختلفة لتشكيل كلمة من 5 حروف مشكلة من حروف كلمة "$BABBY$" هي:

$$P(5; 3) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

مثال (2-58):

أوجد العدد m لتشكيل كلمات من سبعة حروف مستخدمين حروف كلمة BENZENE.

الحل: نريد إيجاد عدد تباديل 7 عناصر والتي فيها 3 على حدة (الحرف E)، و2 على حدة (الحرف N)، فحسب النظرية (2-14) لدينا:

$$m = P(7; 3, 2) = \frac{7!}{3!\, 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 420$$

6-11-2 العينات المرتبة

تتعلق عدة مسائل باختيار عنصر ما من مجموعة S المؤلفة من n عنصراً، عندما نختار عنصراً واحداً تلو الآخر r مرة، فإننا نحصل على عينة مرتبة من الحجم r. فإننا أمام حالتين:

(١) السحب مع إعادة:

العنصر المسحوب يعاد إلى المجموعة قبل سحب العنصر الذي يليه، في كل مرة لدينا n اختياراً، عدد هذه السحوبات يعطى حسب قاعدة الجداء بـ:

$$n \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n \ \left(r \text{ مرة}\right) = n^r$$

(٢) السحب من دون إعادة:

العنصر المسحوب لا يعاد إلى المجموعة قبل سحب العنصر الذي يليه، في كل مرة ينقص عدد الاختيارات واحداً، عدد السحوبات في هذه الحالة يعطى حسب r–تباديل بـ:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال (2-59):

ثلاث ورقات اختيرت من مجموعة أوراق اللعب الـ 52. أوجد العدد m الدال على عدد طرق سحب هذه الورقات الثلاث:

(أ) السحب مع إعادة

(ب) السحب من دون إعادة

الحل: (أ) كل ورقة لعب في هذه الحالة يمكن سحبها بـ 52 طريقة فيكون:

$$m = (52)(52)(52) = 140\ 608.$$

(ب) في هذه الحالة لا يوجد إعادة، فالورقة الأولى يمكن سحبها بـ 52 طريقة، والورقة الثانية يمكن سحبها بـ 51 طريقة، والورقة الثالثة يمكن سحبها بـ 50 طريقة، فيكون:

$$m = P(52,3) = (52)(51)(50) = 132\,600.$$

7-11-2 التوافيق Combinations

لتكن S مجموعة مؤلفة من n عنصراً. فإن توافيق n عنصراً مأخوذة منها r عنصراً كل مرة هو عدد اختيارات r عنصراً دون النظر إلى الترتيب، أو بشكل أبسط هو عدد المجموعات الجزئية من S والمؤلفة من r عنصراً. يرمز للتوافيق بالرمز: $C(n,r)$, ${}_nC_r$, $C_{n,r}$, C_r^n.

مثال (2-60):

أوجد عدد التوافيق لأربعة عناصر A,B,C,D مأخوذ 3 منها كل مرة.

الحل: كل توافيق لثلاثة عناصر تحدد $3! = 6$ تباديل من العناصر كما يلي:

ABC: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD: ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD: ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD: BDC, BCD, CBD, CDB, DBC, DCB

إذن عدد التوافيق مضروباً بـ $3!$ يعطينا عدد التباديل، وبالتالي:

$$C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{أو} \quad C(4,3)\cdot 3! = P(4,3)$$

إذن كما هو مبين أعلاه فإن عدد توافيق n عنصراً مختار منها r عنصراً كل مرة، يحدد $r!$ تبديلاً، أي إن:

$$P(n,r) = r!\,C(n,r)$$

ويمكن أن تكتب علاقة التوافيق بالصيغة التالية:

نظرية (2-16):

إذا كان n,r عددان صحيحان غير سالبين وكان $n \geq r$ فإن:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

نعود إلى صيغة معاملات ثنائي الحد $\binom{n}{r}$ والمعرفة بـ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ فإن:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال (2-61):

مزارع يشتري 3 بقرات وخروفان و4 دجاجات من رجل يملك 6 أبقار و5 خراف و8 دجاجات. أوجد العدد m الدال على اختيارات المزارع.

الحل: يمكن اختيار الأبقار بـ $C(6,3)$ طريقة، ويمكن اختيار الخراف بـ $C(5,2)$ طريقة، ويمكن اختيار الدجاجات بـ $C(8,4)$ طريقة. فإن العدد m يعطى بـ:

$$m = \binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 20\cdot 10\cdot 70 = 14000$$

تمارين محلولة

١ – عن مفهوم العاملي، ومعاملات ثنائي الحد

1- احسب قيمة المقادير الآتية:

$(a)\ 4!, 5!; \quad (b)\ 6!, 7!, 8!, 9!; \quad (c)\ 50!$

$(a)\ 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24, \quad 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = (5)(24) = 120.$

$(b)\ (n+1)! = (n+1)n!\ ; \Longrightarrow$

$6! = 6(5!) = 6(120) = 720, \quad 7! = 7(6!) = 7(720) = 5\,040,$

$8! = 8(7!) = 8(5040) = 40320, \quad 9! = 9(8!) = 9(40320) = 362880$

(c) بما أن $n = 50$ كبير جداً لذلك نستخدم تقريب ستيرلينغ $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ أي:

$$50! \approx N = \sqrt{100\pi}\, 50^{50} e^{-50} = 3.04 \times 10^{64}$$

2- احسب قيمة المقادير الآتية:

$$(a)\ \frac{13!}{11!}, \qquad (b)\ \frac{7!}{10!}$$

$$(a)\ \frac{13!}{11!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 13\cdot 12 = 156.$$

أو بطريقة أخرى:

$$\frac{13!}{11!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11!}{11!} = 13\cdot 12 = 156.$$

$$(b)\ \frac{7!}{10!} = \frac{7!}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!} = \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{720}.$$

3- بسّط المقادير الآتية:

$$(a)\ \frac{n!}{(n-1)!}; \qquad (b)\ \frac{(n+2)!}{n!}.$$

$$(a)\ \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = n \qquad \text{أو}$$

$$(a)\ \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$(b)\ \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n-1)n!}{n!} = (n+2)(n-1) = n^2+3n+2.$$

4- احسب قيمة المقادير الآتية:

$$(a)\ \binom{16}{3}; \qquad (b)\ \binom{12}{4}; \qquad (c)\ \binom{8}{5}.$$

$$(a)\ \binom{16}{3} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2\cdot 1} = 560; \qquad (b)\ \binom{12}{4} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495;$$

$$(c)\ \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56 \quad ; \quad 8-5=3 \text{ لأن}$$

5- برهن أن: $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

لدينا:

$$\binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{16!}{5!\,11!} + \frac{16!}{6!\,10!}$$

بضرب الأول بـ $\frac{6}{6}$ والثاني بـ $\frac{11}{11}$ نجد:

$$\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\frac{6\cdot 16!}{6\cdot 5!\cdot 11!}+\frac{11\cdot 16!}{6!\cdot 11\cdot 10!}=\frac{6\cdot 16!}{6!\cdot 11!}+\frac{11\cdot 16!}{6!\cdot 11!}=$$
$$=\frac{6\cdot 16!+11\cdot 16!}{6!\cdot 11!}=\frac{(6+11)16!}{6!\cdot 11!}=\frac{17\cdot 16!}{6!\cdot 11!}=\frac{17!}{6!\cdot 11!}=\binom{17}{6}$$

6- برهن النظرية (2-11) (مطابقة باسكال): $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

البرهان: طريقة البرهان مشابهة تماماً للحل في التمرين السابق.

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}.$$

للحصول على مقام موحد نضرب الأول بـ $\frac{r}{r}$ والثاني بـ $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ ، وبالتالي:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{r\cdot n!}{r\cdot(r-1)!\cdot(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)\cdot n!}{r!\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)!}$$
$$=\frac{r\cdot n!}{r!\cdot(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)\cdot n!}{r!\cdot(n-r+1)!}$$
$$=\frac{r\cdot n!+(n-r+1)\cdot n!}{r!\cdot(n-r+1)!}=\frac{[r+(n-r+1)]\cdot n!}{r!\cdot(n-r+1)!}$$
$$=\frac{(n+1)\cdot n!}{r!\,(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}=\binom{n+1}{r}$$

٢– عن مبادئ العد

7- لنفرض أن رف مكتبة عليه 5 كتب تاريخ، و3 كتب اجتماعيات، و6 كتب علم نفس بشرية، و4 كتب فلسفة. أوجد العدد n الدال على عدد طرق إمكانية اختيار طالب:

(a) كتاب واحد فقط.

(b) كتاب واحد من كل نوع.

الحل: (a) ينطبق عليه قاعدة الجمع وبالتالي: $n=5+3+6+4=18$.

(b) ينطبق عليه قاعدة الجداء وبالتالي: $n=5\cdot 3\cdot 6\cdot 4=360$.

8- بفرض أن صفاً في مدرسة مؤلفٌ من 8 طلاب ذكور و6 طالبات. أوجد n الدال على عدد طرق إمكانية اختيار:

(a) ممثل واحد للصف.

(b) ممثلين للصف، 1 ذكر و1 أنثى.

(c) رئيس للصف ونائب له.

الحل: (a) نستخدم قاعدة الجمع هنا، أي: $n = 8 + 6 = 14$.

(b) نستخدم قاعدة الجداء هنا، أي: $n = 8 \cdot 6 = 48$.

(c) هناك 14 طريقة لاختيار الرئيس، و13 طريقة لاختيار نائبه، وبالتالي:

$$n = 14 \cdot 13 = 182.$$

9- يوجد أربعة خطوط للباصات بين A وB، وثلاثة خطوط للباصات بين B وC. أوجد m عدد طرق إمكانية سفر شخص بالباص في الحالات الآتية:

(a) من A إلى C مروراً من B.

(b) رحلة ذهاب وإياب من A إلى C مروراً من B.

(c) رحلة ذهاب وإياب من A إلى C مروراً من B دون استخدام الباص أكثر من مرة.

الحل: (a) يوجد 4 طرق من A إلى B، و3 من B إلى C فحسب قاعدة الجداء فإن:

$$n = 4 \cdot 3 = 12.$$

(b) هناك 12 طريقاً من A إلى C مروراً من B، و12 طريقاً للعودة، إذن:

$$n = 12 \cdot 12 = 144.$$

(c) إن الشخص الذي يريد السفر من A إلى B إلى C إلى B إلى A يمكن أن يسافر من A إلى B بأربع طرق، ومن B إلى C بثلاث طرق، ومن C إلى B بثلاث طرق، ومن B إلى A بثلاث طرق، كما يلي:

$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A$$

وبالتالي حسب قاعدة الجداء: $n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$.

٣– عن التباديل

10- حدد الفرق الأساسي ما بين التباديل والتوافيق، من خلال الأمثلة.

الحل: في التباديل الترتيب يؤخذ بعين الاعتبار، كإنشاء كلمة، أو الجلوس في صف، أو انتخاب رئيس ونائب رئيس وأمين صندوق. أما في التوافيق لا يؤخذ الترتيب بعين الاعتبار، مثل جمعية، أو فريق (دون النظر لمواضعهم). إن قاعدة الجداء عادة ما تستخدم في التباديل، لأن اختيار أي من الموضوعات المرتبة ينظر لها كمتتالية من الأحداث.

11- أوجد كلاً من: $(a)\ P(7,3);\quad (b)\ P(14,2)$.

بما أن $P(n,r)$ يحتوي على r مضروباً متتالياً ابتداءً من n فإن:

$$(a)\ P(7,3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210\ ;\quad (b)\ P(14,2) = 14 \cdot 13 = 182.$$

12- أوجد m عدد طرق تنظيم 7 أشخاص لأنفسهم:

(a) في صف من الكراسي.

(b) حول طاولة مستديرة.

الحل: (a) هنا $m = P(7,7) = 7! = 5\ 040$ طريقة.

(b) أي شخص يمكن أن يجلس في أي مكان حول الطاولة. والستة أشخاص الباقين يمكن أن ينظموا أنفسهم في $6!$ طريقة حول الطاولة، إذن $m = 6! = 720$ طريقة.

وهذا المثال يدل على عدد التباديل الدائرية. بشكل عام، إن عدد طرق تنظيم n شيئاً بشكل دائري هو $(n-1)!$.

13- أوجد n عدد التباديل المختلفة الممكن تشكيلها من أحرف كل من الكلمات الآتية:

$$(a)\ THOSE;\qquad (b)\ UNUSUAL;\qquad (c)\ SOCIOLOGICAL$$

الحل: هذه المسألة تتعلق بالتباديل مع تكرار.

(a) $n = 5! = 120$ لأن الحروف الخمسة غير مكررة.

(b) $n = \frac{7!}{3!} = 840$ لأنه هناك 7 حروف منها، 3 للحرف U وباقي الحروف غير مكررة.

(c) $n = \frac{12!}{3!2!2!2!} = 9979200$ لأنه هناك 12 حرفاً، منها 3 للحرف O، و2 للحرف C، و2 للحرف I، و2 للحرف L وباقي الحروف غير مكررة.

14- يوجد في صف 8 طلاب. أوجد n عدد العينات من الحجم 3 إذا كان:

(a) السحب مع إعادة.

(b) السحب من دون إعادة.

الحل: (a) كل طلب من العينة يمكن اختياره بـ 8 طرق، أي إن: $n = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$ عينة من الحجم 3، مع الإعادة.

(b) يمكن اختيار الطالب الأول من العينة بـ 8 طرق، ويمكن اختيار الطالب الثاني من العينة بـ 7 طرق، ويمكن اختيار الطالب الأخير من العينة بـ 6 طرق. إذن من دون إعادة:

$$n = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

15- أوجد العدد n إذا كان $P(n,2) = 72$.

$$P(n,2) = n(n-1) = n^2 - n \Longrightarrow n^2 - n = 72 \Longrightarrow n^2 - n - 72 = 0$$
$$\Longrightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

وبما أن n يجب أن يكون موجباً، فالجواب الوحيد هو: $n = 9$.

٤– عن التوافيق

16- يحتوي صف على 10 طلاب منهم 6 رجال و4 نساء. أوجد n عدد طرق:

(a) اختيار 4 أعضاء جمعية من الطلاب.

(b) اختيار 4 أعضاء جمعية من الطلاب فيها رجلان وامرأتان.

(c) اختيار رئيس ونائب رئيس وأمين صندوق.

الحل: (a) إنّه يتعلق بالتوافيق وليس بالتباديل، لأن الترتيب ليس مهماً في الجمعية، أي:

$$n = C(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

(b) يمكن اختيار الرجلين من 6 رجال بـ $C(6,2)$ طريقة، ويمكن اختيار الامرأتين من 4 نساء بـ $C(4,2)$ طريقة، فحسب قاعدة الجداء يكون:

$$n = \binom{6}{2}\binom{4}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 15 \cdot 6 = 90.$$

(c) هذا يتعلق بالتباديل لأن المسألة تتعلق بالترتيب. أي:

$$n = P(10,3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

17- يحتوي صندوق على 4 جوارب زرقاء، و6 جوارب حمراء. أوجد عدد طرق اختيار جوربين من هذا الصندوق إذا:

(a) يمكن أن يكونا من أي لون.

(b) يجب أن يكونا من اللون نفسه.

الحل: (a) يوجد في هذه الحالة (اختيار 2 من 14) طريقة من الجوارب، أي:

$$n = C(14,2) = \binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91$$

(b) يوجد $C(8,2) = 28$ طريقة لاختيار جوربين من الجوارب الزرقاء الثمانية، ويوجد $C(6,2) = 15$ طريقة لاختيار جوربين من الجوارب الحمراء الستة. فحسب قاعدة الجمع:

$$n = 28 + 15 = 43.$$

18- أوجد m عدد الجمعيات المكونة من 5 أعضاء، فيها رئيس يمكن اختيارهم من 12 شخصاً.

الحل: يمكن اختيار الرئيس بـ 12 طريقة، ويمكن اختيار الأربعة الباقين من 11 بـ $C(11,4)$ طريقة. إذن يكون:

$$m = 12 \cdot C(11,4) = 12 \cdot 330 = 3960.$$

تمارين متنوعة

1- يوجد 12 طالباً في صف ما. أوجد n العدد الدال على طرق إمكانية الطلاب الـ 12 اجتياز 3 امتحانات إذا أخذ 4 طلاب منهم كل الاختبارات.

الحل: يوجد $C(12,4) = 495$ طريقة لاختيار 4 من 12 طالباً للامتحان الأول. ومن ثم، يوجد $C(8,4) = 70$ طريقة لاختيار 4 من 8 الطلاب الباقين للامتحان الثاني. ومن ثم، يتقدم الباقون الأربعة كلهم للامتحان الثالث. أي إن:

$$n = (70)(495) = 34\,650.$$

2- برهن النظرية (2-10) نظرية ثنائي الحد:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

البرهان: (حسب الاستقراء الرياضي) إن هذه النظرية صحيحة من أجل $n = 1$ لأن:

$$\sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} a^{1-r} b^r = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1$$

لنفرض أن النظرية صحيحة من أجل n أي $(a+b)^n$ ولنبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $(a+b)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}\right. \\ &\quad \left. + \cdots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n\right]\end{aligned}$$

إن الحد الذي يحوي b^r في المفكوك يمكن الحصول عليه من:

$$b\left[\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}\right] + a\left[\binom{n}{r} a^{n-r} b^r\right] =$$

$$= \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}b^r + \binom{n}{r} a^{n-r+1}b^r = \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right] a^{n-r+1}b^r$$

ولكن حسب نظرية (مطابقة باسكال) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ فإن الحد الذي يحوي b^r هو: $\binom{n+1}{r} a^{n-r+1}b^r$.

وبما أن $(a+b)^{n+1}$ هو كثير حدود من الدرجة $n+1$ في b فإن:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n-r+1}b^r$$

فنحصل على المطلوب إثباته.

3- ليكن n و $n_1, n_2, \cdots, n_r$ أعداد صحيحة غير سالبة، حيث إن:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

فإن معاملات متعددة الحدود تعطى بالعلاقة:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

احسب المعاملات المتعددة الآتية:

$$(a)\ \binom{6}{3,\ 2,\ 1};\quad (b)\ \binom{8}{4,\ 2,\ 2,\ 0};\quad (c)\ \binom{10}{5,\ 3,\ 2,\ 2}.$$

$$(a)\ \binom{6}{3,\ 2,\ 1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 60$$

$$(b)\ \binom{8}{4,\ 2,\ 2,\ 0} = \frac{8!}{4!\,2!\,2!\,0!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 420$$

$(c)\ \binom{10}{5,\ 3,\ 2,\ 2}$ ليس له معنى لأن $5 + 3 + 2 + 2 \neq 10$.

4- يجب على طالب المرور بخمسة صفوف في ثلاث مناطق للدراسة. الصفوف المتعددة معروضة في كل فرع من فروع المعرفة. ولكن لا يحق للطالب المرور بأكثر من صفين في أيّ منطقة معطاة. مستخدماً مبدأ برج الحمام، أثبت أن الطالب سيأخذ على الأقل صفين في منطقة واحدة.

الحل: لنعتبر المناطق الثلاث للدراسة هي خانات الحمام، والطالب يجب أن يأخذ خمسة صفوف (الحمام). إذن فإن الطالب يجب أن يأخذ صفين على الأقل في منطقة واحدة.

تمارين غير محلولة

١ – عن مفهوم العاملي، ومعاملات ثنائي الحد

1- أوجد قيمة ما يلي (للأعداد الكبيرة استعمل صيغة ستيرلينغ التقريبية)

(a) $10!,\quad 11!,\quad 12!$ $\qquad (b)$ $60!$

2- احسب قيمة المقادير الآتية:

$$(a)\ \frac{16!}{14!}\ ;\quad (b)\ \frac{14!}{11!}\ ;\quad (c)\ \frac{8!}{10!};\quad (d)\ \frac{10!}{13!}.$$

3- بسط المقادير الآتية:

$$(a)\ \frac{(n+1)!}{n!}\ ;\quad (b)\frac{n!}{(n-2)!}\ ;\quad (c)\frac{(n-1)!}{(n+2)!};\quad (d)\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}.$$

4- أوجد قيمة ما يلي:

$$(a)\ \binom{5}{2};\ (b)\ \binom{7}{3};\ (c)\ \binom{14}{2};\ (d)\ \binom{6}{4};\ (e)\ \binom{20}{17};\ (f)\ \binom{18}{15}$$

5- أثبت أن:

$$(a)\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$(b)\ \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=0$$

6- ليكن لدينا السطر الثامن التالي من مثلث باسكال، أوجد:

(a) السطر التاسع.

(b) السطر العاشر.

1 8 28 56 70 56 28 8 1

7- أوجد قيمة المعاملات المتعددة الآتية:

$$(a)\binom{6}{2,\ 3,\ 1};\ (b)\binom{7}{3,\ 2,\ 2,\ 0};\ (c)\binom{9}{3,\ 5,\ 1};\ (d)\binom{8}{4,\ 3,\ 2}$$

الأجوبة:

1- (a) 3628 800 ; 39 916 800 ; 479 001 600 ; $(b)\ \log(60!) = 81.92 \Longrightarrow 60! = 6.59 \times 10^{81}$.

2- (a) 240 ; (b) 2 184 ; $(c)\ \frac{1}{90}$; $(d)\ \frac{1}{1716}$.

3- $(a)\ n+1$; $(b)\ n(n-1)$; $(c)\ \frac{1}{[n(n+1)(n+2)]}$; $(d)\ (n-r)(n-r+1)$.

4- (a) 10 ; (b) 35 ; (c) 91 ; (d) 15 ; (e) 1140 ; (f) 816.

5- (a) $(1+1)^n$ احسب, (b) $(1-1)^n$ احسب.

6- (a) 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
(b) 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

7- (a) 60 ; (b) 210 ; (c) 504 ; (d) غير معرّف.

٢– عن مبادئ العد

8- يبيع مخزن ثياب للرجال. يوجد فيه 3 أنواع من جاكيتات، 7 أنواع من كنزات، 5 أنواع من سراويل. أوجد عدد طرق إمكانية شخص ما من شراء:

(a) واحدة من إحدى المواد.

(b) واحد من كل نوع من أنواع الملابس.

9- صف مؤلف من 10 طلاب ذكور و8 طالبات إناث. أوجد عدد طرق اختيار شخص من الصف ليكون:

(a) ممثلاً للصف.

(b) ممثلين للصف، أحدهما ذكر والآخر أنثى.

(c) رئيس للصف ونائب له.

10- لنفرض أن كوداً ما مؤلف من 5 محارف، حرفان يتبعهما ثلاثة أرقام. أوجد عدد:

(a) الأكواد.

(b) الأكواد بحروف مختلفة.

(c) الأكواد بحروف متشابهة.

الأجوبة:

8- $(a)\ 15\ ;\ (b)\ 105.$ 9- $(a)\ 18\ ;\ (b)\ 80\ ;\ (c)\ 306.$

10- $(a)\ 26^2 \cdot 10^3\ ;\ (b)\ 26 \cdot 25 \cdot 10^3\ ;\ (c)\ 26 \cdot 10^3.$

٣– عن التباديل

11- أوجد عدد لوحات رخص السيارات حيث:

(a) كل لوحة تحتوي على حرفين مختلفين متبوعة بثلاثة أرقام مختلفة.

(b) الرقم الأول لا يمكن أن يكون 0.

12- أوجد m عدد طرق إمكانية منح أحد الحكام للمركز الأول والثاني والثالث في مسابقة مؤلفة من 18 متسابقاً.

13- أوجد عدد طرق وضع 5 كتب كبيرة، و4 كتب متوسطة الحجم، و3 كتب صغيرة، على رف حيث:

(a) إنه لا يوجد قيود.

(b) كل الكتب من نفس الحجم مع بعضها بعضاً.

14- فريق للمنافسة مؤلف من 3 أولاد و3 بنات. أوجد عدد طرق إمكانية جلوسهم في صف واحد حيث:

(a) إنه لا يوجد قيود.

(b) يجلس الأولاد مع بعضهم بعضاً وكذلك البنات.

(c) فقط تجلس البنات مع بعضهنّ بعضاً.

15- أوجد عدد طرق إمكانية جلوس 5 أشخاص إذا كان:

(a) لا يوجد قيود.

(b) اثنان من الناس يصران أن يجلسا سوية (بجانب بعضهما بعضاً).

16- أعد المسألة السابقة رقم (15) إذا كانوا يجلسون حول طاولة مستديرة.

17- لنعتبر كل الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 3 أرقام. (لاحظ أن الصفر 0 لا يمكن أن يكون الرقم الأيسر). أوجد عددهم إذا كانوا:

(a) أكبر تماماً من 700.

(b) أعداداً فردية.

(c) قابلية قسمتهم على العدد 5.

18- بفرض أن التكرار غير مسموح.

(a) أوجد عدد الأعداد المؤلفة من 3 أرقام والتي يمكن تشكيلها من الأرقام الست الآتية:

2, 3, 5, 6, 7, 9.

(b) كم عدد الذين هم أصغر تماماً من 400 من هذه الأعداد؟

(c) كم عدد الأعداد الزوجية منهم.

19- أوجد m عدد الطرق الذي يمكن لـ 6 أشخاص الركوب في مركبة إذا كان واحداً من 3 منهم يجب أن يقود.

20- أوجد n إذا كان:

(a) $P(n,4) = 42\,P(n,2)$

(b) $2\,P(n,2) + 50 = P(2n,2)$

21- أوجد عدد التباديل التي يمكن تشكيلها من جميع حروف كل كلمة من الكلمات:
$(a)\ QUEUE\ ;\ (b)\ COMMITEE\ ;\ (c)\ PROPOSITION\ ;\ (d)\ BASEBALL.$

22- لنفرض أنه لدينا 4 أعلام حمراء متطابقة، و2 علمان زرقاوان متطابقان، و3 أعلام خضراء متطابقة. أوجد m الدال على الإشارات المختلفة التي يمكن تشكيلها من تعليق الأعلام التسعة بخط عامودي.

23- يحتوي صندوق على 12 مصباحاً. أوجد العدد n الدال على العينات المرتبة من الحجم 3 إذا كان السحب:

(a) مع إعادة.

(b) من دون إعادة.

24- يحتوي صف على 10 طلاب. أوجد العدد n الدال على العينات المرتبة من الحجم 4 إذا كان السحب:

(a) مع إعادة.

(b) من دون إعادة.

الأجوبة:

11- $(a)\ 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468\,000\ ;\ (b)\ 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 421\,200.$
12- $m = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\,896.$
13- $(a)\ 12!\ ;\ (b)\ 3!\,5!\,4!\,3! = 103\,680.$
14- $(a)\ 6! = 720\ ;\ (b)\ 2 \cdot 3! \cdot 3! = 72\ ;\ (c)\ 4 \cdot 3! \cdot 3! = 144.$
15- $(a)\ 120\ ;\ (b)\ 48.$
16- $(a)\ 24\ ;\ (b)\ 12.$
17- $(a)\ 3 \cdot 9 \cdot 8\ ;\ (b)\ 9 \cdot 8 \cdot 5\ ;\ (c)\ \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2}\ ;\ (d)\ \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5}$
18- $(a)\ P(6,3) = 120\ ;\ (b)\ 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40\ ;\ (c)\ 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40.$
19- $(a)\ m = 360.$
20- $(a)\ 9\ ;\ (b)\ 5.$
21- $(a)\ 30\ ;\ (b)\ \frac{9!}{[2!2!2!]} = 45\,360\ ;\ (c)\ \frac{11!}{[2!3!2!]} = 1\,663\,200\ ;\ (d)\ \frac{8!}{[2!2!2!]} = 5\,040.$
22- $m = \frac{9!}{[4!2!3!]} = 1\,260.$

23- $(a)\ 12^3 = 1\,728$; $(b)\ P(12,3) = 1\,320$.
24- $(a)\ 10^4 = 10\,000$; $(b)\ P(10,4) = 5\,040$.

٤– عن التوافيق

25- يقدم مطعم ستة أنواع من الحلويات. أوجد عدد طرق إمكانية اختيار زبون لـ:

(a) نوع واحد من الحلوى.

(b) نوعين من الحلوى.

(c) 3 أنواع من الحلوى.

26- يحتوي صف على تسعة رجال وثلاث نساء. أوجد عدد طرق إمكانية اختيار معلم لمجموعة أعضاء مكونة من أربعة أشخاص من هذا الصف إذا كان:

(a) لا توجد قيود.

(b) أعضاء المجموعة هم رجلان وامرأتان.

(c) في المجموعة امرأة واحدة فقط.

(d) في المجموعة على الأقل امرأة واحدة.

27- تمتلك امرأة أحد عشر صديقاً مقرباً. أوجد عدد طرق إمكانية دعوة خمسة منهم للعشاء لديها إذا كان:

(a) لا توجد أية قيود.

(b) اثنان من أصدقائها متزوجان ولا يمكن دعوتهما منفردين.

(c) اثنان من أصدقائها لا يتكلم أحدهما مع الآخر لذلك لا يمكن دعوتهما معاً.

28- يحتوي صف على ثمانية رجال وست نساء يوجد بينهم زوج وزوجة. أوجد m عدد طرق إمكانية اختيار معلم لمجموعة أعضاء مكونة من أربعة أشخاص من هذا الصف بحيث يكون الزوج أو الزوجة فيها ولكن ليس كلاهما.

29- يحتوي صندوق على ستة جوارب زرقاء وستة جوارب بيضاء. أوجد عدد طرق سحب جوربين من هذا الصندوق عندما:

(a) لا توجد أية قيود.

(b) يكونان من لونين مختلفين.

(c) يكونان من نفس اللون.

30- طالبة يجب أن تجيب في امتحان على 10 أسئلة من 13 سؤالاً. أوجد عدد طرق إمكانية اختيارها إذا وجب عليها الإجابة:

(a) على أول سؤالين من الامتحان.

(b) على السؤال الأول أو الثاني ولكن ليس كلاهما.

(c) على 3 أسئلة تماماً من الخمسة الأُولى.

(d) على الأقل 3 أسئلة من الخمسة الأُولى.

الأجوبة:

25- $(a)\ 6\ ;\ (b)\ 15\ ;\ (c)\ 20.$

26- $(a)\ C(12,4)\ ;\ (b)\ C(9,2)\cdot C(3,2)=108\ ;\ (c)\ C(9,3)\cdot 3=252\ ;\ (d)\ 9+108+252=369\ \ or\ \ C(12,4)-C(9,4)=369.$

27- $(a)\ C(11,5)=462\ ;\ (b)\ 126+84=210\ ;\ (c)\ C(9,5)+2C(9,4)=378.$

28- $m=C(12,4)+2C(12,3)=935.$

29- $(a)\ C(10,2)=45\ ;\ (b)\ 6\cdot 4=24\ ;\ (c)\ C(6,2)+C(4,2)=21\ or\ 45-24=21.$

30- $(a)\ 165\ ;\ (b)\ 110\ ;\ (c)\ 80\ ;\ (d)\ 276.$

تمارين ومسائل متنوعة

31- ليكن لدينا 32 طالباً في صف الفنون A و24 طالباً في صف البيولوجيا B، ولنفرض أن 10 طلاب منهم في كل من الصفين. أوجد عدد الطلاب الذين هم:

(a) في الصف A أو في الصف B.

(b) فقط في الصف A.

(c) فقط في الصف B.

32- في عملية جرد لمالكي 80 سيارة، وجد أن 24 منها مصنوعة خارج البلاد، و64 منها محلية الصنع. أوجد عدد المالكين في الحالات الآتية:

(a) يملكون سيارات محلية الصنع وسيارات من خارج البلاد.

(b) المالكون لسيارات مصنوعة خارج البلاد فقط.

(c) المالكون لسيارات محلية الصنع فقط.

33- لنعتبر مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 وحتى 100. أوجد عددهم في حالة كونهم:

(a) أعداد فردية أو هي مربع لعدد صحيح.

(b) أعداد زوجية أو هي مكعب لعدد صحيح.

34- في صف مؤلف من 30 طالباً، 10 منهم حصل على درجة A في الامتحان الأول، و9 منهم حصل على درجة A في الامتحان الثاني، و15 منهم لم حصل على درجة A في كليهما، أوجد عدد الطلاب الذين حصلوا على:

(a) على درجة A في كلا الامتحانين.

(b) على درجة A في الامتحان الأول ولكن ليس في الثاني.

(c) على درجة A في الامتحان الثاني ولكن ليس في الأول.

35- لنعتبر مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 وحتى 300. أوجد عددهم في حالة قابلية قسمتهم على:

(a) واحد من الأعداد 3, 5, 7 على الأقل.

(b) 3 و5 ولكن لا تقبل القسمة على 7.

(c) 5 ولكن لا تقبل القسمة على 3 ولا على 7.

(d) ولا واحد من الأعداد 3, 5, 7.

36- في مدرسة للغات، نرمز للغة الفرنسية بـ(F) والإسبانية بـ(S)، والألمانية بـ(G) وهي اللغات التي تدرس فيها. من بين 80 طالباً:

(i) 20 يدرسون (F) و25 يدرسون (S) و15 يدرسون (G).

(ii) 8 يدرسون (F) و(S) ، و6 يدرسون (S) و (G) ، و5 يدرسون (F) و (G).

(iii) 2 يدرسان جميع اللغات الثلاث.

أوجد عدد الطلاب من الثمانين الذين يدرسون:

(a) لا يدرسون أية لغة (لا يدرسون اللغات).

(b) الفرنسية فقط.

(c) لغة واحدة فقط.

(d) اللغة الإسبانية والألمانية فقط.

(e) لغتان تماماً من اللغات الثلاثة.

37- أوجد m عدد عناصر اجتماع المجموعات A, B, C, D إذا كانت:

(i) A, B, C, D تحتوي على الترتيب $50, 60, 70, 80$ عنصراً.

(ii) كل زوج من المجموعات يحتوي تقاطعهما على 20 عنصراً.

(iii) كل ثلاث مجموعات يحتوي تقاطعها على 10 عناصر.

(iv) المجموعات الأربع يحتوي تقاطعها على 5 عناصر.

38- أوجد عدد الطلاب الأصغر الذي يحتاج لضمان أن 4 منهم قد ولدوا:

(a) قد ولدوا في اليوم نفسه من الأسبوع.

(b) في الشهر نفسه من السنة.

39- أوجد عدد الطلاب الأصغر الذي يحتاج لضمان أن 3 منهم:

(a) يمتلكون كنية تبدأ بالحرف الأول نفسه.

(b) قد ولدوا في اليوم نفسه من الشهر (شهر 31 يوماً).

40- ليكن لدينا بطولة من n لاعباً حيث يلعب كل لاعب فيها ضد اللاعبين الآخرين. لنفرض أن كل لاعب يفوز على الأقل مرة. أثبت أنه على الأقل يحصل لاعبان على العدد نفسه من الانتصارات.

41- لنفرض أنه لدينا 5 نقاط مختارة عشوائياً في داخل مثلث متساوي الأضلاع T والذي طول ضلعه 2 بوصة. أثبت أن المسافة بين أي نقطتين منها يجب أن تكون أصغر تماماً من 1 بوصة.

42- لنعتبر أية مجموعة $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_7\}$ مؤلفة من أعداد صحيحة مختلفة. أثبت أنه يوجد عددان $x, y \in X$ بحيث $x + y$ أو $x - y$ قابل للقسمة على 10.

43- أوجد m عدد طرق تقسيم 10 طلاب إلى ثلاثة فرق بحيث يتألف أول فريق من 4 طلاب ويتألف الفريقان الباقيان من 3 طلاب.

44- بفرض أن المجموعة يمكن أن تكون خالية، أوجد n عدد طرق تجزئة مجموعة مؤلفة من 3 عناصر إلى:

(a) 3 مجموعات مرتبة.

(b) 3 مجموعات غير مرتبة.

45- بفرض أن المجموعة يمكن أن تكون خالية، أوجد n عدد طرق تجزئة مجموعة مؤلفة من 4 عناصر إلى:

(a) 3 مجموعات مرتبة.

(b) 3 مجموعات غير مرتبة.

46- إن الأبجدية الإنكليزية مؤلفة من 26 حرفاً منها 5 حروف صوتية. لنعتبر أن الكلمة "words" مؤلفة من 5 حروف فقط تتألف من 3 حروف ساكنة وحرفين صوتيين. أوجد عدد الكلمات التي:

(a) في حالة لا يوجد قيود.

(b) تحتوي على الحرف B.

(c) تحتوي على الحرفين B وC.

(d) تبدأ بالحرف B وتحتوي على الحرف C.

47- يلعب فريقان A وB في البطولة العالمية للبيسبول، حيث إن الفريق الذي يفوز في أول 4 جولات هو الذي يفوز بالبطولة. لنفرض أن A يفوز أول لعبة، والفريق الذي يفوز في ثاني لعبة يفوز أيضاً في الرابعة.

(a) أوجد وأدرج العدد n الذي هو عدد طرق البطولة التي يمكن أن تحدث.

(b) أوجد عدد الطرق ليفوز B في البطولة.

(c) أوجد عدد طرق البطولة والتي تدوم سبع جولات.

48- أوجد عدد الطرق لإمكان رمي قطعة نقود:

(a) 6 مرات حيث حصلنا تماماً على 3 رؤوس (نقوش) ولم يظهر نقشان بشكل متتالٍ.

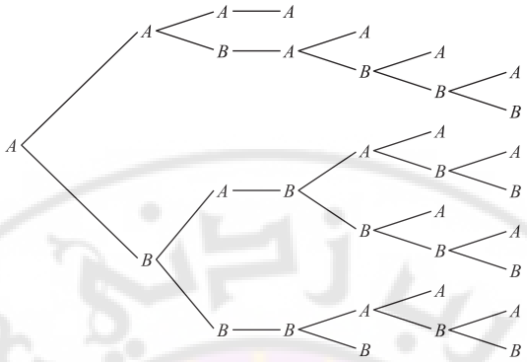
(b) $2n$ مرة حيث حصلنا تماماً على n رأساً (نقشاً) ولم يظهر نقشان بشكل متتالٍ.

49- أوجد عدد طرق إمكان انتماء 3 عناصر a, b, c لثلاث مجموعات، إحدى هذه المجموعات هي المجموعة الخالية.

50- أوجد عدد طرق إمكان انتماء n عنصراً مختلفاً لـ n مجموعة، إحدى هذه المجموعات هي المجموعة الخالية.

الأجوبة:

31- $(a)\ 46$; $(b)\ 22$; $(c)\ 14$.
32- $(a)\ 4$; $(b)\ 20$; $(c)\ 56$.
33- $(a)\ 55$; $(b)\ 52$.
34- $(a)\ 4$; $(b)\ 6$; $(c)\ 5$.
35- $(a)\ 100+60+42-20-14-8+2=162$; $(b)\ 20-2=18$; $(c)\ 60-20-8+2=34$; $(d)\ 300-162=138$.
36- $(a)\ 37$; $(b)\ 9$; $(c)\ 28$; $(d)\ 4$; $(e)\ 13$.
37- $m=175$.
38- $(a)\ 22$; $(b)\ 37$.
39- $(a)\ 53$; $(b)\ 63$.
40- كل لاعب سيربح في أية حالة من 1 إلى $n-1$ لعبة (الخانات). ويوجد لدينا n لاعب (الحمام).
41- ارسم ثلاثة خطوط ما بين منتصفات جوانب المثلث T. تحول هذه التجزئة المثلث إلى 4 مثلثات متساوية الأضلاع (الخانات) وطول ضلع كل منها يساوي 1. نقطتان من النقاط الخمس (الحمام) يجب أن تنتمي إلى أحد هذه المثلثات.
42- ليكن r_i الباقي عندما x_i يقبل القسمة على 10. لنعتبر الخانات الست $H_1=\{x_i|r_i=0\}$، $H_2=\{x_i|r_i=5\}$، $H_3=\{x_i|r_i=1$ أو $9\}$، $H_4=\{x_i|r_i=2$ أو $8\}$، $H_5=\{x_i|r_i=3$ أو $7\}$، $H_6=\{x_i|r_i=4$ أو $6\}$. عندئذٍ بعض x و y ينتمي إلى بعض H_k.
43- $m=C(10,4)\cdot C(6,3)=420$.
44- $(a)\ n=3^3=27$; $(b)\ [3,0,0],\ [2,1,0]$ أو $[1,1,1]\Rightarrow n=1+3+1=5$.
45- $(a)\ n=3^4=81$; $(b)\ [4,0,0],\ [3,1,0],\ [2,2,0]$ أو $[2,1,1]\Rightarrow n=1+4+3+6=14$.
46- $(a)\ C(21,3)\cdot C(5,2)\cdot 5!$; $(b)\ C(20,2)\cdot C(5,2)\cdot 5!$; $(c)\ 19\cdot C(5,2)\cdot 5!$; $(d)\ 19\cdot C(5,2)\cdot 4!$.
47- ارسم الشجرة T كما في الشكل (2-7):



الشكل (2-7)

لاحظ أن T تبدأ عند A الذي هو الفائز في اللعبة الأولى، ويوجد اختيار واحد فقط في اللعبة الرابعة، هو الفائز في اللعبة الثانية. (a) $n = 15$ كما هو مبين أدناه:

$AAAA,\ AABAA,\ AABABA,\ AABABBA,\ AABABBB,\ ABABAA,$
$ABABABA,\ ABABABB,\ ABABBAA,\ ABABBAB,\ ABABBB,$
$ABBBAAA,\ ABBBAAB,\ ABBBAB,\ ABBBB.$

48- (a) 4, $HTHTHT,\ HTTHTH,\ HTHTTH,\ THTHTH$; $(b)\ n+1$.

49- 18.

50- $n!\,C(n,2)$.

* Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)				جدول بأعداد ميرسين المعروفة حتى الآن
#	$2^p - 1$	Digits	Date Discovered	Discovered By
1	$2^2 - 1$	1	c. 500 BCE	Ancient Greek mathematicians
2	$2^3 - 1$	1	c. 500 BCE	Ancient Greek mathematicians
3	$2^5 - 1$	2	c. 275 BCE	Ancient Greek mathematicians
4	$2^7 - 1$	3	c. 275 BCE	Ancient Greek mathematicians
5	$2^{13} - 1$	4	1456	Anonymous
6	$2^{17} - 1$	6	1588	Pietro Cataldi
7	$2^{19} - 1$	6	1588	Pietro Cataldi
8	$2^{31} - 1$	10	1772	Leonhard Euler
9	$2^{61} - 1$	19	1883	Ivan Mikheevich Pervushin
10	$2^{89} - 1$	27	1911 Jun	R. E. Powers
11	$2^{107} - 1$	33	1914 Jun 11	R. E. Powers
12	$2^{127} - 1$	39	1876 Jan 10	Édouard Lucas
13	$2^{521} - 1$	157	1952 Jan 30	Raphael M. Robinson
14	$2^{607} - 1$	183	1952 Jan 30	Raphael M. Robinson
15	$2^{1,279} - 1$	386	1952 Jun 25	Raphael M. Robinson
16	$2^{2,203} - 1$	664	1952 Oct 07	Raphael M. Robinson
17	$2^{2,281} - 1$	687	1952 Oct 09	Raphael M. Robinson
18	$2^{3,217} - 1$	969	1957 Sep 08	Hans Riesel
19	$2^{4,253} - 1$	1,281	1961 Nov 03	Alexander Hurwitz
20	$2^{4,423} - 1$	1,332	1961 Nov 03	Alexander Hurwitz
21	$2^{9,689} - 1$	2,917	1963 May 11	Donald B. Gillies
22	$2^{9,941} - 1$	2,993	1963 May 16	Donald B. Gillies
23	$2^{11,213} - 1$	3,376	1963 Jun 02	Donald B. Gillies
24	$2^{19,937} - 1$	6,002	1971 Mar 04	Bryant Tuckerman
25	$2^{21,701} - 1$	6,533	1978 Oct 30	Landon Curt Noll & Laura Nickel
26	$2^{23,209} - 1$	6,987	1979 Feb 09	Landon Curt Noll
27	$2^{44,497} - 1$	13,395	1979 Apr 08	Harry Lewis Nelson & David Slowinski
28	$2^{86,243} - 1$	25,962	1982 Sep 25	David Slowinski
29	$2^{110,503} - 1$	33,265	1988 Jan 28	Walter Colquitt & Luke Welsh
30	$2^{132,049} - 1$	39,751	1983 Sep 19	David Slowinski
31	$2^{216,091} - 1$	65,050	1985 Sep 01	David Slowinski
32	$2^{756,839} - 1$	227,832	1992 Feb 19	David Slowinski & Paul Gage

33	$2^{859,433}-1$	258,716	1994 Jan 04	David Slowinski & Paul Gage
34	$2^{1,257,787}-1$	378,632	1996 Sep 03	David Slowinski & Paul Gage
35	$2^{1,398,269}-1$	420,921	1996 Nov 13	GIMPS* / Joel Armengaud
36	$2^{2,976,221}-1$	895,932	1997 Aug 24	GIMPS / Gordon Spence
37	$2^{3,021,377}-1$	909,526	1998 Jan 27	GIMPS / Roland Clarkson
38	$2^{6,972,593}-1$	2,098,960	1999 Jun 01	GIMPS / Nayan Hajratwala
39	$2^{13,466,917}-1$	4,053,946	2001 Nov 14	GIMPS / Michael Cameron
40	$2^{20,996,011}-1$	6,320,430	2003 Nov 17	GIMPS / Michael Shafer
41	$2^{24,036,583}-1$	7,235,733	2004 May 15	GIMPS / Josh Findley
42	$2^{25,964,951}-1$	7,816,230	2005 Feb 18	GIMPS / Martin Nowak
43	$2^{30,402,457}-1$	9,152,052	2005 Dec 15	GIMPS / Curtis Cooper & Steven Boone
44	$2^{32,582,657}-1$	9,808,358	2006 Sep 04	GIMPS / Curtis Cooper & Steven Boone
45	$2^{37,156,667}-1$	11,185,272	2008 Sep 06	GIMPS / Hans-Michael Elvenich
46	$2^{42,643,801}-1$	12,837,064	2009 Apr 12	GIMPS / Odd M. Strindmo
47	$2^{43,112,609}-1$	12,978,189	2008 Aug 23	GIMPS / Edson Smith
48	$2^{57,885,161}-1$	17,425,170	2013 Jan 25	GIMPS / Curtis Cooper
49	$2^{74,207,281}-1$	22,338,618	2016 Jan 07	GIMPS / Curtis Cooper

* Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

3- البنى الأساسية في الرياضيات المتقطعة

نقوم في هذا الفصل بدراسة عدد من البنى الأساسية المستخدمة في الرياضيات المتقطعة، مثل: المجموعات (Sets)، الحاويات (Bags)، القوائم (Lists)، العلاقات (Relations)، التوابع (Functions)، جبر بول (Boolean Alebra)، وغيرها من البنى الأخرى. من المعلوم أنّ المجموعة هي البنية الأساسية التي ترتكز عليها كافة البنى الأخرى في الرياضيات المتقطعة.

3-1 المجموعات (Sets)

سوف نورد مفهوم المجموعة من خلال تعريفها حدسياً (ليس جزءًا من النظرية الصورية للمجموعات). تعرّف المجموعة بأنها: جماعة غير مرتبة من الأغراض. إنّ مفهوم الغرض (object) قد استخدم دون القيام بتوصيف له، وأي غرض هو؟. ووصف المجموعة على أنها جماعة من الأغراض ارتكز على التعريف الذي وضع من قبل الرياضي الألماني جورج كانتور (George Cantor) في العام 1892. إنّ النظرية التي نتجت من هذا التعريف، واستخدام المفهوم الحدسي: بأنّ أي خاصة مهما تكن فإنه توجد مجموعة مكونة من هذه الأغراض تتمتع بهذه الخاصة، يقودان إلى تناقضات منطقية أو إلى غموض. لقد لاحظ ذلك الفيلسوف الإنجليزي رسل (Bertrand Russell) في العام 1902. ولتجنب الوقوع بالتناقضات المنطقية يمكن بناء نظرية المجموعات من خلال وضع بعض المسلمات. سوف نستخدم في هذا الكتاب تعريف كانتور الأصلي في نظرية المجموعات المعروف بأساس نظرية المجموعات دون أن نطوِّر الإصدار المسلماتي

لنظرية المجموعات، لأنّ كل المجموعات المستخدمة في هذا الفصل خصوصاً وفي الكتاب عموماً قد عولجت وفقاً لرؤية كانتور للمجموعة. تدعى الأغراض في المجموعة بعناصرها، أو بأعضائها. ويُقال عن المجموعة إنها تحوي عناصرها. سوف نحدد بعض الرموز المستخدمة في وصف المجموعات، كما سنورد الحقائق المتعلقة بالمجموعات:

1- نكتب $a \in A$ للدلالة على أن a عنصر من المجموعة A.

2- نكتب $a \notin A$ للدلالة على أن a ليس عنصراً من المجموعة A.

3- هنالك عدة أساليب لوصف المجموعة. أحدها أن يتم عرض كل عناصر المجموعة، عندما يكون ذلك ممكناً. ويتم عرض هذه العناصر بوضعها بين قوسين. فمثلاً $\{a, b, c, d\}$ تمثل مجموعة مكونة من العناصر الأربع: a, b, c, d .

4- للمجموعات خاصتان أساسيتان، هما:

- لا يوجد تكرار لعناصر المجموعة.
- لا تخضع عناصر المجموعة لأي ترتيب خاص.

5- نورد بعض المجموعات الخاصة الكثيرة الاستخدام:

أ- مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

ب- مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

ت- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

ث- مجموعة الأعداد النسبية:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0 \right\}$$

ج- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

6- يمكن أن تكون المجموعة مشكّلة من عناصر في شكل مجموعات.

مثال (3-1):

إنّ المجموعة $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ هي مجموعة تتضمن أربعة عناصر، كل منها مجموعة.

7- يعنى مفهوم نمط المعطيات أو النمط في علوم الحاسب على المجموعة. وخاصة إنّ data type أو type هو اسم لمجموعة مع مجموعة العمليات التي تطبق على أغراض هذه المجموعة. وكمثال فإنّ البوليان (Boolean) هو اسم المجموعة $\{0, 1\}$ مع العمليات : NOT، OR، AND على العناصر في هذه المجموعة.

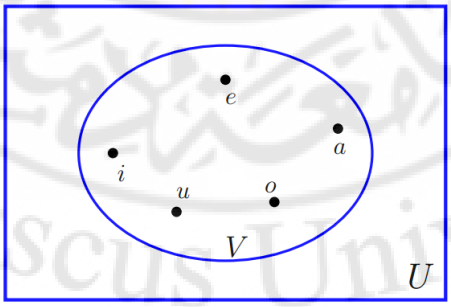
8- تتساوى مجموعتان إذا وفقط إذا كان لهما العناصر نفسها ونكتب في هذه الحالة $A = B$ للدلالة على أن المجموعتين A و B متساويتان.

9- إنّ U تمثل المجموعة الكلية التي تتضمن كل الأغراض وتمثل من خلال مخططات فن (Venn) على شكل مستطيل. في داخل المستطيل دوائر أو أشكال هندسية أخرى تستخدم لتمثيل المجموعات. وتستخدم النقاط لتمثيل العناصر الخاصة بالمجموعة. عادة ما نستخدم مخططات فن للإشارة إلى العلاقات بين المجموعات.

مثال (3-2):

تمثِّل المجموعة V مجموعة الأحرف الصوتية في اللغة الإنجليزية: $V = \{a, e, i, o, u\}$.

يوضِّح الشكل (3-1) مخطط فن لهذه المجموعة.



الشكل (3-1)

10- المجموعة التي لا تحوي عناصر تدعى بالمجموعة الخالية (empty set)، ونرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$. ويجب أن نشير إلى أنه من الأخطاء الشائعة أن نعتبر أنّ ϕ هي ذاتها $\{\phi\}$، فهما مجموعتان مختلفتان. حيث إنّ المجموعة الخالية ϕ لا تحوي أي عنصر. بينما $\{\phi\}$ هي مجموعة فيها عنصر وحيد هو ϕ يمثل المجموعة الخالية.

11- يُقال عن المجموعة A إنها مجموعة جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من A هو أيضاً عنصر من B. نستخدم الرمز $A \subseteq B$ للإشارة إلى أن A مجموعة جزئية من B.

12- من أجل أية مجموعة S يكون:

$$S \subseteq S, \qquad \phi \subseteq S$$

وتتساوى المجموعتان A وB، إذا وفقط إذا كانت $A \subseteq B$ و$B \subseteq A$.

13- إذا كانت S مجموعة، فيها n عنصراً مختلفاً، حيث n عدد صحيح غير سالب. نقول في هذه الحالة عن S إنها مجموعة منتهية وإنّ رئيسي (cardinality) المجموعة S يساوي n. نرمز لرئيسي المجموعة S من خلال $|S|$.

مثال (3-3):

إنّ رئيسي مجموعة الأحرف الصوتية V في اللغة الإنجليزية هو: $|V| = 5$.

14- نقول عن مجموعة إنها غير منتهية إن لم يكن عدد عناصرها منتهياً.

15- إنّ قوة مجموعة S معطاة هو مجموعة كل المجموعات الجزئية في S. نرمز لقوة المجموعة S بالرمز $P(S)$.

مثال (4-3):

لنوجد مجموعة قوى كل المجموعات الآتية:

$$\phi, \qquad \{\phi\}, \qquad \{0,1,2\}$$

الحل: نلاحظ أنّ:

$$P(\phi) = \{\phi\}$$
$$P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$P(\{0,1,2\}) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

16- إذا كان للمجموعة S عدد n من العناصر، فإنّ لمجموعة قوى S العدد 2^n من العناصر، أي إنّ: $|P(S)| = 2^n$.

1-1-3: العمليات على المجموعات

1- **اتحاد المجموعات**: لتكن A وB مجموعتان. إنّ اتحاد المجموعة A وB الذي نرمز له من خلال $A \cup B$، هو المجموعة التي تتضمن عناصر كل من A أو B أو كليهما. ونكتب:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

2- **تقاطع المجموعات**: لتكن A وB مجموعتين. إنّ تقاطع المجموعتين A وB والذي سنرمز له بالرمز $A \cap B$، هو مجموعة تتضمن العناصر الواقعة في كلتا المجموعتين معاً. نكتب:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

مثال (3-5):

نقول عن مجموعتين إنهما منفصلتان إذا كان تقاطعهما هو المجموعة الخالية. فإذا كانت: $A = \{1,3,5,7,9\}$ وكانت $B = \{2,4,6,8,16\}$ فإنّ $A \cap B = \phi$، أي إنّ المجموعتين A وB منفصلتان.

3- **فرق المجموعات**: لتكن A وB مجموعتان. إنّ فرق المجموعتين A وB والذي نرمز له من خلال $A - B$، هو المجموعة التي تتضمن تلك العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B وتدعى أيضاً إنها متممة B بالنسبة إلى A. نكتب الفرق على النحو الآتي:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

4- **الفرق التناظري:** يعرَّف الفرق التناظري لمجموعتين A وB على أنه اتحاد المجموعتين $A-B$ و$B-A$ ونرمز له بالرمز $\oplus$ وهو توسيع طبيعي لمفهوم الفرق، حيث نكتب:

$$A\oplus B=\{x \mid x\in A-B \text{ or } x\in B-A\}$$

من السهل أن نرى:

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

كما أنّ:

$$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$$

نوضّح إلى أنه إذا تم تحديد المجموعة الشاملة، فإنّ متمم مجموعة يعرّف على النحو الآتي.

5- **متمم مجموعة:** لتكن U هي المجموعة الشاملة. إنّ متمم المجموعة A والذي نرمز له من خلال $\bar{A}$ وهو مجموعة تمثل متممة A بالنسبة إلى U. بالعودة إلى مفهوم الفرق فإنه يمكن أن نكتب أن متمم A هو: $A^c=\bar{A}=U-A$.

2-1-3 جدول العمليات على المجموعات:

يبيّن الجدول (2-3) الموضح أدناه المطابقات المجموعاتية والتي سنتركها كتمارين للقارئ، وذلك بافتراض أنه لدينا المجموعات الثلاث: A,B,C.

المطابقة	الاسم
$A\cup\phi=A$ $A\cap U=A$	قوانين التطابق
$A\cup U=U$ $A\cap\phi=\phi$	قوانين السيطرة
$A\cup A=A$ $A\cap A=A$	قوانين تساوي القوى
$\overline{(\bar{A})}=\bar{\bar{A}}=A$	قانون الاتمام
$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	القوانين التبديلية

القوانين التجميعية	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
قوانين التوزيع	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
قوانين دومورغان	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
قوانين الامتصاص	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
قوانين الاتمام	$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \phi$

الجدول (3-2)

3-1-3 تعميم الاتحاد والتقاطع

بفرض أنّ: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ هي مجموعات عددها n. إنّ اتحاد جماعة المجموعات السابقة، هو مجموعة تتضمن تلك العناصر الأعضاء في مجموعة واحدة على الأقل في الجماعة. نستخدم الرمز:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

للإشارة إلى اتحاد المجموعات: $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

إنّ تقاطع المجموعات $A_1, A_2, \cdots, A_n$، هو مجموعة تتضمن تلك العناصر والتي هي أعضاء في كل مجموعات الجماعة. نستخدم الرمز:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

للإشارة إلى تقاطع المجموعات: $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

مثال (3-6):

لتكن: $A_i = \{i, i+1, i+2, \cdots\}$، عندئذٍ:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots\} = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

كما أنّ:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

يمكن أن نوسع مفهوم الاتحاد والتقاطع لعدد غير منتهٍ من المجموعات، ونستخدم:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

وبشكل أكثر عمومية، إنّ الرمزين $\bigcup_{i\in I} A_i$ و $\bigcap_{i\in I} A_i$ يستخدمان للإشارة إلى الاتحاد والتقاطع للمجموعات A_i من أجل $i \in I$، وتمثل I مجموعة قيم الدليل i.

مثال (3-7):

لتكن: $A_i = \{1, 2, 3, \cdots, i\}$ من أجل: $i = 1, 2, 3, \cdots$. عندئذٍ يكون اتحاد هذه المجموعات هو المجموعة:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \cdots, i\} = \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{Z}^+$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \cdots, i\} = \{1\}$$

مثال (3-8):

ليكن من أجل كل عدد طبيعي i لدينا المجموعة:

$$A_i = \{-i, -i+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, i-1, i\}$$

وكمثال على ذلك فإنّ A_3 هي المجموعة الآتية:

$$A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

لتكن Odd مجموعة كل الأعداد الفردية الطبيعية، يمكن أن نوجد تقاطع المجموعات A_i و i ينتمي إلى Odd بحيث يكون:

$$\bigcap_{i\in \text{Odd}} A_i = \{-1, 0, 1\}$$

مثال (3-9):

لنوجد اتحاد المجموعات:

$$A_i = \{-2i, 2i\}$$

حيث إنّ i ينتمي إلى مجموعة الأعداد الفردية الطبيعية Odd. بأخذ اتحاد هذه المجموعات نجد:

$$\bigcup_{i\in \text{Odd}} A_i = \{\cdots, -14, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \cdots\}$$

3-1-4 العد باستخدام مبدأ الإضافة والحذف (clusion and Exclusion):

نفرض أننا نريد عدد عناصر اتحاد المجموعتين:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad ; \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

بما أنّ:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

فإنّ رئيسي الاتحاد $|A \cup B| = 7$. وبشكل مشابه، وبما أنّ:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

فإنّ رئيسي التقاطع $|A \cap B| = 2$.

إذا تمت معرفة أيّ ثلاثة أعداد من الأعداد الأربعة:

$$|A|, |B|, |A \cap B|, |A \cup B|$$

فإنه يمكن معرفة العدد الرابع باستخدام قاعدة العد التالية من أجل المجموعات المنتهية بعدد العناصر $|A|, |B|, |A \cap B|, |A \cup B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

يمكن توسيع هذه القاعدة من أجل ثلاث مجموعات: A, B, C منتهية، لنوجد:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

إنّ تعميم القاعدة السابقة من أجل ثلاث مجموعات أو أكثر يُدعى بمبدأ الإضافة والحذف (enclusion and conclusion)، والذي يمكن صياغته على النحو الآتي:

لتكن: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعات منتهية، عندئذٍ:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

مثال (3-10):

لنكتب صيغة مبدأ الإضافة والحذف من أجل أربع مجموعات منتهية A_1, A_2, A_3, A_4، نلاحظ أنّ:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4|$$
$$-|A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$+|A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

من الواضح أنّ هذه العلاقة تتضمن 15 حداً مختلفاً، ناتجة من تقاطع المجموعات الجزئية من المجموعة: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

إنّ الكثير من مسائل العد تحلّ باستخدام مبدأ الإضافة والحذف، فعلى سبيل المثال يمكن استخدام هذا المبدأ لإيجاد عدد الأعداد الأولية التي لا تزيد عن عدد صحيح موجب ما. وكما أنّ العديد من المسائل يمكن أن تحل من خلال معرفة عدد أعداد التوابع من مجموعة منتهية إلى أخرى، فإنه يمكن استخدام مبدأ الإضافة والحذف لمعرفة عدد هذه التوابع المطلوبة.

مثال (3-11):

ما هو عدد حلول المعادلة: $x_1 + x_2 + x_3 = 11$، حيث إنّ: x_1, x_2, x_3 أعداد صحيحة غير سالبة وتحقق المتراجحات: $x_3 \le 6$, $x_2 \le 4$, $x_1 \le 3$.

الحل: لتطبيق مبدأ الإضافة والحذف، نفرض أنّ الحل يحقق الخواص: p_1, p_2, p_3، على النحو الآتي:

الخاصة p_1: إذا كان $x_1 > 3$

الخاصة p_2: إذا كان $x_2 > 4$

الخاصة p_3: إذا كان $x_3 > 6$

إنّ عدد الحلول التي تحقق المتراجحات $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$, $x_3 \le 6$: هو:

$$N(p_1' p_2' p_3') = N - N(p_1) - N(p_2) - N(p_3) + N(p_1 p_2) + N(p_1 p_3) + N(p_2 p_3) - N(p_1 p_2 p_3) \quad (1)$$

نلاحظ:

- إذا كان N هو عدد الحلول، فإنه يساوي:

$$C(3+11-1,11) = C(13,11) = \binom{13}{11} = \frac{13!}{11!\,2!} = 78$$

- إذا كان $N(p_1)$ يمثل عدد الحلول من أجل $x_1 \ge 4$، فإنه يساوي:

$$C(3+7-1,7) = C(9,7) = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36$$

- إذا كان $N(p_2)$ يمثل عدد الحلول من أجل $x_2 \ge 5$، فإنه يساوي:

$$C(3+6-1,6) = C(8,6) = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

- إذا كان $N(p_3)$ يمثل عدد الحلول من أجل $x_3 \ge 7$، فإنه يساوي:

$$C(3+4-1,4) = C(6,4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

- إذا كان $N(p_1 p_2)$ عدد الحلول من أجل $x_1 \ge 4$ و $x_2 \ge 5$، فإنه يساوي:

$$C(3+2-1,2) = C(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

- إذا كان $N(p_1 p_3)$ عدد الحلول من أجل $x_1 \ge 4$ و $x_3 \ge 7$، فإنه يساوي:

$$C(3+0-1,0) = C(2,0) = \binom{2}{0} = \frac{2!}{0!\,2!} = 1$$

- إذا كان $N(p_2 p_3)$ عدد الحلول من أجل $x_2 \ge 5$ و $x_3 \ge 7$، فإنه يساوي:

$$N(p_2p_3) = 0$$

– إذا كان $N(p_1p_2p_3)$ عدد الحلول من أجل $x_1 \geq 4$ و$x_2 \geq 5$ و$x_3 \geq 7$، فإنه يساوي:

$$N(p_1p_2p_3) = 0$$

بالتعويض في العلاقة (1)، نحصل على عدد الحلول الموافقة لكون $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$, $x_3 \leq 6$ ويساوي:

$$N(p_1' p_2' p_3') = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$$

لقد أوجدنا الحل من خلال حالة خاصة لمبدأ الإضافة والحذف لمعرفة عدد العناصر في مجموعة والتي لا تحقق أياً من الخواص: $p_1, p_2, \cdots, p_n$.

لتكن A_i هي المجموعة الجزئية التي تحوي على عناصر تحقق الخاصة p_i ولتكن $N(p_1\, p_2 \cdots p_n)$ تمثل عدد العناصر التي تحقق كل الخواص: $p_1, p_2, \cdots, p_n$. وسنرمز لعدد العناصر التي تحقق كل الخواص $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_k}$ بالرمز $N(p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_k})$، ونكتب هذه الكميات من خلال المجموعات على النحو الآتي:

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_k})$$

فإذا كان عدد العناصر التي لا تحقق أياً من الخواص $p_1, p_2, \cdots, p_n$ هو $N(p_1'p_2' \cdots p_n')$ وكان N يمثل عدد كل العناصر في المجموعة، فإنه ينتج:

$$N(p_1'p_2' \cdots p_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

ومن مبدأ الإضافة والحذف والتعويض في (1)، نرى أنّ:

$$N(p_1'p_2' \cdots p_n') = N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(p_ip_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(p_ip_jp_k) + \cdots + (-1)^n N(p_1p_2 \cdots p_n)$$

مثال (12-3):

(عد فرق مجموعتين) لنفرض بأننا نريد عدّ فرق المجموعتين: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و$B = \{2, 3, 4, 8, 10\}$، بالتالي فإنّ: $A - B = \{1, 5, 7, 9\}$ لذلك فإنّ $|A - B|$

4. إذا عرفنا أي عددين من الأعداد: $|A|, |A-B|, |A\cap B|$، فإنه يمكن معرفة العدد الثالث من خلال قاعدة العد الآتية:

$$|A-B| = |A| - |A\cap B| \qquad (2)$$

يمكن أن نثبت صحة هذه القاعدة من خلال مخططات فن. كما يمكن أن نجد أيضاً القاعدتين الآتيتين كحالات خاصة من القاعدة (1):

- إذا كانت $B \subset A$، فإنّ: $|A-B| = |A| - |B|$.
- إذا كانت $A\cap B = \phi$، فإنّ: $|A-B| = |A|$.

2-3 الحاويات (Bags)

إنّ الحاوية جماعة من الأغراض التي يمكن أن تتضمن حدوث تكرار هذه الأغراض التي تمثل العناصر فيها. لتمييز الحاويات عن المجموعات سوف نستخدم أقواساً أخرى تختلف عن الأقواس المستخدمة في المجموعات، ونضع العناصر فيها. فعلى سبيل المثال، إنّ الحاوية $[h,u,g,h]$ تتضمن أربعة عناصر. نورد الآن بعض الحقائق المتعلقة بالحاويات:

1- نقول عن الحاويتين A و B إنهما متساويتان، إذا كان عدد مرات حدوث كل عنصر في A أو B هو ذاته في كلتا الحاويتين.

2- إذا كانت الحاويتان A و B متساويتين، فإننا نكتب إنّ $A = B$. وكمثال على ذلك فإنّ: $[h,u,g,h] = [h,h,g,u]$، لكن $[h,u,g,h] \neq [h,u,g]$.

3- إنّ للحاويات الميزتان الأساسيتان الآتيتان:

- يمكن حدوث تكرار العناصر في الحاويات.
- لا يوجد ترتيب خاص لعناصر الحاوية.

4- نقول عن A إنها حاوية جزئية من B ونكتب $A \subset B$ إذا كان عدد مرّات حدوث أي عنصر x من A أصغر أو يساوي عدد مرّات حدوثه في الحاوية B. على سبيل المثال $[a,b] \subset [a,b,a]$، بينما $[a,b,a] \not\subset [a,b]$.

5- ينتج من تعريف الحاوية الجزئية، أنّ الحاويتين A وB متساويتان إذا كانت A حاوية جزئية من B، وكانت B حاوية جزئية من A.

1-2-3 العمليات على الحاويات

1- جمع الحاويات: إذا كانت A وB حاويتين، نعرِّف جمع الحاويتين A وB على النحو الآتي:

إذا كان x يحدث m مرة في A ويحدث n مرة في B، فإنه يحدث $n+m$ مرة في حاوية الجمع التي نرمز لها من خلال $A+B$.

مثال (3-13):

$$[2,2,3]+[2,3,3,4]=[2,2,2,3,3,3,4]$$

2- اتحاد الحاويات: نعرف اتحاد الحاويتين A وB والذي نرمز له بالحاوية $A \cup B$، على النحو الآتي:

إذا كان m وn عدد مرات حدوث العنصر x في كل من A وB على الترتيب، فإننا نضع العدد الأكبر من بين العددين m وn ليمثل عدد مرّات حدوث x في حاوية الاتحاد $A \cup B$.

مثال (3-14):

نلاحظ أنّ:

$$[2,2,3] \cup [2,3,3,4]=[2,2,3,3,4]$$

2- تقاطع الحاويات: إذا كانت A وB حاويتين فإنّ تقاطعهما $A \cap B$، يعرّف على النحو الآتي:

إذا كان m وn عدد مرات حدوث العنصر x في كل من A وB على الترتيب، فإننا نضع العدد الأصغر من بين العددين m وn ليمثل عدد مرّات حدوث x في $A \cap B$.

مثال (3-15):

نلاحظ أنّ:

$$[2,2,3] \cap [2,3,3,4] = [2,3]$$

مثال (3-16):

بفرض $p(x)$ هي حاوية الأعداد الأولية التي تنشأ من تحليل العدد الطبيعي x إلى عوامله الأولية. فمثلاً نجد أنّ:

$$p(12) = [2,2,3], \qquad p(54) = [2,3,3,3]$$

لنوجد اتحاد وتقاطع هاتين الحاويتين. إنّ الاتحاد هو:

$$p(54) \cup p(12) = [2,2,3,3,3] = p(108)$$

ويمثل ناتج الاتحاد العدد 108 وهو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 54 و12 كما أنّ ناتج التقاطع:

$$p(54) \cap p(12) = [2,3] = p(6)$$

يمثل العدد 6 وهو القاسم المشترك الأعظم للعددين 54 و12. يتضح من خلال هذا المثال أنّ $p(x) \cup p(y)$ و $p(x) \cap p(y)$ تحسب على الترتيب المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأعظم للعددين x وy.

لقد أسس جورج كانتور نظرية المجموعات في الفترة $1874 - 1895$. وفيما بعد فقد تم ملاحظة العديد من التناقضات في هذه النظرية. إنّ كل شيء يعمل عملاً رائعاً طالما أنّنا لم نسمح أن تكون المجموعات معقدة جداً. وبشكل أساسي، فإننا لا نسمح أن تعرَّف المجموعة من خلال المعيار الذي يختبر فيما إذا كانت هي عنصر من ذاتها. إذا سمحنا بهذا الأمر فإنّنا لا نستطيع أن نجيب على بعض الأسئلة المتعلقة بعضوية المجموعة. لنفرض أنّنا نعرِّف T على النحو الآتي:

$$T = \{A \mid A \notin A \text{ و } A \text{ مجموعة}\}$$

أي إنّ T هي مجموعة كل المجموعات التي ليست عنصراً من ذاتها. ولنتساءل فيما إذا كانت: $T \in T$؟ إذا كان ذلك صحيحاً فإنّ الشرط المتعلق بالعضوية في T يجب أن يتحقق. لكن ذلك يشير إلى $T \notin T$. من ناحية ثانية إذا افترضنا بأن $T \notin T$، فإنه يجب أن نستنتج أنّ $T \in T$. في كلتا الحالتين نحصل على تناقض. إنّ هذا المثال معروف بتناقض رسل (Russell's paradox) إنّ هذا نوع من التناقض يؤدي إلى الحذر في دراسة أساسيات نظرية المجموعات. عندما طوَّر وايتهيد ورسل (Whitehead and Russell) في 1910 نظرية المجموعات، استندا على هرمية من المستويات دعيت بالأنماط types. إنّ النمط الأدنى يتضمن عناصر مفردة. وأي نمط آخر يتضمن فقط المجموعات التي عناصرها من النمط التالي الأدنى في الهرمية. يمكن أن نعرض هرمية الأنماط من خلال: $T_0, T_1, T_2, \cdots, T_k$. حيث T_0 هو النمط الأدنى الذي يتضمن العناصر المفردة وبشكل عام فإنّ T_{k+1} هو النمط الذي يتكون من المجموعات المأخوذة عناصرها من النمط T_k. لذلك فإنّ أية مجموعة في النظرية تنتمي إلى نمط واحد فقط T_k من أجل عدد ما k، حيث $k \geq 1$. ووفقاً للتعريف نقول إنّ $A \notin A$ من أجل كل المجموعات A في النظرية. لرؤية ذلك نفرض أنّ A هي مجموعة من النمطT_{k+1}. إنّ هذا يعني أنّ عناصر A من النمط T_k. إذا افترضنا بأنّ $A \in A$ سيكون لدينا استنتاج أنّ A هي أيضاً مجموعة من النمط T_k. وهذا يقود إلى أن A تنتمي إلى الأنماط T_k وT_{k+1} ما يناقض كون A ينبغي أن تنتمي إلى نمط واحد فقط. نختبر غموض وتناقض رسل الذي تحدثنا عنه، ولماذا لا يحدث هذا التناقض في النظرية الجديدة للمجموعات بما أنّ $A \notin A$ من أجل كل المجموعات A في نظرية المجموعات، إنّ التعريف الأساسي للمجموعة T يمكن أن يُبسّط إلى الشكل $T = \{A \mid A$ مجموعة$\}$ إنّ ذلك يشير إلى أن T تتضمن كل المجموعات، لكن T ليست هي مجموعة في هذه النظرية لأنها تتضمن مجموعات من أنماط مختلفة. ومن كون أنّ

T هي مجموعة في النظرية، فكل A في T ينبغي أن تنتمي إلى نفس النمط. على سبيل المثال، سوف ننتقي نمط ما T_k ونعرّف $T = \{A \mid T_k \text{ مجموعة من النمط } A\}$، إنّ ذلك يعني أنّ T مجموعة من النمط T_{k+1}. والآن وبما أنّها مجموعة من النظرية، فإننّا نعلم أنّ $T \notin T$ لكن هذه الحقيقة لا تقودنا إلى تناقض.

إنّ البنيتين المدروستين :المجموعة والحاوية، تستخدمان من أجل تمثيل المعلومات غير المرتبة. وهما بنى غير مرتبة، كما ورد في تعريف كل منهما وفي خواصهما الأساسية. نعرض في الفقرات: (3-3)، (3-4)، (3-5) البنى المرتبة المستخدمة بشكل كبير في تطبيقات علوم الحاسب.

3-3 متعددات العناصر (Tuples):

عندما نكتب جملة ما، فإننّا نستخدم الخاصة المتعلقة بالتتالي المرتب لكلمات هذه الجملة، وأي تعديل في موضع أية كلمة من كلمات الجملة يغير فيها وربما يغير معناها لتشير إلى دلالات أخرى غير المقصودة. نعرّف متعدد العناصر (tuple) على أنه جماعة من الأشياء ندعوها بعناصره والتي وضعت في ترتيب ثابت: العنصر الأول يليه الثاني وهكذا... تسمى أيضاً عناصر المتعدد بأسماء مختلفة: أعضاء (members)، أو أغراض (objects)، أو مكونات (components). نشير إلى المتعدد من خلال كتابة عناصره محاطةً بالأقواس ونفصل فيما بينها بالفاصلة. فمثلاً، إنّ للمتعدد $(13, 5, 9)$ ثلاثة عناصر، الأول هو 13، والثاني 5 والثالث 9.

بعض الحقائق عن المتعددات:

1- إذا كان للمتعدد n عنصراً، فإننّا نقول إنّ طوله n وندعوه متعدد$-n$ (أي له الطول n).

مثال (3-17):

إنّ المتعدد $(7, k, hello)$ هو متعدد-3 كما أنّ المتعدد $(x_1, x_2, \cdots, x_8)$ هو متعدد-8 . أمّا المتعدد ( ) الخالي فإنه متعدد-0.

2- يدعى المتعدد الذي طوله 2 وهو متعدد-2 بأنه زوج مرتب ونقول عن متعدد-3 إنها ثلاثية مرتبة.

3- نشير إلى استخدام كلمات وتسميات أخرى للمتعدد مثل المتجه والمتتالية.

4- إذا كان لدينا متعددان لهما نفس الطول:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,, \qquad (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

فإنّنا نقول إنهما متساويان، إذا كان $x_i = y_i$ من أجل $1 \le i \le n$ ونكتب:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

مثال (3-18):

الزوجان المرتبان $(3,7)$ و$(7,3)$ غير متساويين ونكتب $(7,3) \neq (3,7)$.

5- تحمل المتعددات فكرة الترتيب، لذلك فهي مختلفة عن المجموعات والحاويات.

مثال (3-19):

يوضّح المثال الآتي الاختلاف بين المجموعات والحاويات (الحافظات) والمتعددات.

المجموعات: $\{b, a, t\} = \{t, a, b\}$

الحافظات: $[t, o, o, t] = [o, t, t, o]$

المتعددات: $(t, o, o, t) \neq (o, t, t, o)$ و $(b, a, t) \neq (t, a, b)$.

6- لمتعددات العناصر ميزتان أساسيتان:

- يمكن حدوث تكرار في عناصر المتعددات.
- هنالك ترتيب محدد لعناصر المتعددات.

سوف ندرس بعض البنى من نمط المتعددات .

1-3-3 الجداء الديكارتي للمجموعات

في كثير من الأحيان تستدعي الحاجة تمثيل المعلومات في شكل متعددات، حيث إنّ العناصر في كل متعدد تأتي من مجموعات معروفة. مثل هذه المجموعة تدعى بالجداء الديكارتي الذي سنورد تعريفه على النحو الآتي:

إذا كانت A وB مجموعتين. إنّ الجداء الديكارتي للمجموعتين A وB، والذي سنرمز له بالرمز $A \times B$، هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (a,b)، بحيث تكون $a \in A$ و$b \in B$. يعبر أيضاً عن الجداء الديكارتي من خلال:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

مثال (3-20):

إذا كانت $A = \{x,y\}$ و$B = \{0,1\}$، فإنّ:

$$A \times B = \{(x,0),(x,1),(y,0),(y,1)\}$$

بفرض أنّ $A = \phi$ و$B = \{0,1\}$ ما هو $A \times B$؟ إذا تمّ استخدام تعريف الجداء الديكارتي، فإنه لا توجد أزواج مرتبة عناصرها الأولى من المجموعة الخالية، لذلك فإنّ $A \times B = \phi$. لذلك من السهل إجراء تعميم بالقول إنّ $A \times B$ تكون غير خالية إذا وفقط إذا كانت المجموعتان A وB غير خاليتين معاً.

الجداء الديكارتي من أجل أي عدد من المجموعات: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ من خلال:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

إذا كانت كل المجموعات A_i في الجداء الديكارتي هي نفس المجموعة A، فإننّا نستخدم الرمز:

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A$$

ومن خلال هذا الرمز، فإنه لدينا تعريف لكل من A^1 وA^0:

$$A^0 = \{(\,)\}$$
$$A^1 = \{(a) \mid a \in A\}$$

ومن هنا نستنتج أنّ: $A^1 \neq A$ و$A^0 \neq \phi$.

مثال (3-21):

لتكن $A = \{a, b, c\}$، لنوجد الجداءات الديكارتية:

$$A^0, A^1, A^2, A^3$$

نلاحظ أنّ:

$$A^0 = \{(\ )\}$$

$$A^1 = \{(a), (b), (c)\}$$

$$A^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$$

$$A^3 = \left\{\begin{matrix}(a,a,a), (a,a,b), (a,a,c), (a,b,a), (a,b,b), (a,b,c), (a,c,a),\\ (a,c,b), (a,c,c), (b,a,a), (b,a,b), (b,a,c), (b,b,a), (b,b,b),\\ (b,b,c), (b,c,a), (b,c,b), (b,c,c), (c,a,a), (c,a,b), (c,a,c),\\ (c,b,a), (c,b,b), (c,b,c), (c,c,a), (c,c,b), (c,c,c)\end{matrix}\right\}$$

إنّ A^3 هي مجموعة كبيرة تتكوّن من ثلاثيات مرتبة عددها 27.

عند العمل مع المتعددات، فإننا نحتاج القدرة لكي يتم الدخول العشوائي إلى أي مكون. يمكن لمكونات متعدد-n أن تكتب بأشكال مختلفة وفقاً للمسألة التي نقوم بمعالجتها. فإذا كان: $t \in A \times B \times C$ فإننا نستطيع أن نمثل t في أي من الأساليب الآتية:

$$(t_1, t_2, t_3), \quad (t(1), t(2), t(3)), \quad (t[1], t[2], t[3]),$$
$$(t(A), t(B), t(C)), \quad (A(t), B(t), C(t))$$

سوف ننظر في مثال يبيّن كيف أن الجداءات الديكارتية والمتعددات مرتبطة ببعض الأغراض البرمجية المألوفة.

مثال (3-22):

نوضّح في هذا المثال بعض الأغراض البرمجية مثل الصفيفات (arrays) والمصفوفات (Matrices) والسجلات (Records).

إنّ الصفيفة الأحادية البعد من القياس n وبعناصر من المجموعة عبارة عن متعدد-n من الجداء الديكارتي A^n. لذلك فإننّا نستطيع أن نقول إنّ الجداء الديكارتي A^n هو

مجموعة كل الصفيفات الأحادية البعد من القياس n على المجموعة A. إذا كان $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$، فإنه عادةً ما يرمز للمكوّن x_i بالرمز $x[i]$ في لغات البرمجة.

كما تدعى الصفيفة ثنائية البعد، بالمصفوفة، والتي يمكن النظر إليها على أنها جدول من الأغراض التي تحدد من خلال الأسطر والأعمدة. إذا كانت مصفوفة لها m من الأسطر وn من الأعمدة، فإنه يمكن أن نمثلها من خلال:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

إذا كانت $m = 3$ و$n = 4$، فإنّ x تمثل بالشكل:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}$$

كما يمكن تمثيل x من خلال متعدد-3 مكوناته هي متعددات من الطول 4 على النحو الآتي:

$$x = \big((x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}), (x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}), (x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34})\big)$$

عادة ما يستخدم لتمثيل x_{ij} في لغات البرمجة الرمز $x[i,j]$. وكمثال آخر، يمكن النظر أيضاً إلى $A \times B$ على أنه مجموعة من السجلات (records) أو البنى ذات حقلين A وB. فمن أجل السجل:

$$r = (a, b) \in A \times B$$

يتم أيضاً استخدام الرموز $r \cdot A$ و$r \cdot B$ لتمثيل مكوناته a وb على الترتيب.

2-3-3 التمثيل الحاسوبي للمتعددات:

تمثل المتعددات في الحواسيب في خلايا مستمرة من الذاكرة، بحيث يتم الدخول إلى أي مكون بسرعة. نفرض أنّنا نحتاج من أجل كل مكون من المتعدد $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ إلى M من خلايا الذاكرة لتخزينه. إذا كان B عنوان البدء في الذاكرة حيث يتوضع المتعدد، فإنّ x_1 في الموضع B وx_2 في الموضع $B + M$ وبشكل عام

فإنّ x_k في الموضع: $B + M(k-1)$. إنّ كل مكون x_k من x يمكن الدخول إليه بالزمن المستغرق لحساب $B + M(k-1)$.

من أجل الصفيفات المتعددة الأبعاد، فإنّ زمن الدخول هو سريع أيضاً. فعلى سبيل المثال لنفرض أنه لدينا المصفوفة ذات 3 أسطر و4 أعمدة والممثلة في (3-3-1). ولنفرض أنّ كل مكون في x يحتاج M من خلايا الذاكرة. فإذا كانت B عنوان البدء في الذاكرة لتوضع x، فإنّ x_{11} يتوضع عند B وx_{12} يتوضع في $B + 4M$ وx_{31} يتوضع في $B + 8M$. بالتالي يكون توضع أي عنصر كيفي x_{jk} معطى بالتعبير:

$$B + 4M(j-1) + M(k-1)$$

تدعى التعابير من هذا النمط، بكثيرات حدود العنوان ويمكن الدخول إلى كل مكوّن بزمن قدره الزمن المستغرق في حساب كثير حدود العنوان والتي تقرب إلى ثابت من أجل أي j وk.

4-3 القوائم (Lists)

تعرّف القائمة بأنها متتالية مرتبة من العناصر عددها صفر أو أكثر والتي يمكن أن تتكرر. من هذه الناحية تبدو القائمة مشابهة تماماً للمتعدد. ومن المشروع طرح التساؤل عن الاختلاف بين البنيتين. إن الاختلاف من وجهة علوم الحاسب متعلق بتحديد الأجزاء التي يتم الدخول إليها عشوائياً. ففي حالة المتعددات يمكن الدخول عشوائياً إلى أي مكون في زمن ثابت. وفي حالة القوائم فإنه بمقدورنا الدخول عشوائياً إلى شيئين فقط في زمن ثابت:

a. المكون الأول للقائمة والذي يدعى بالرأس (head).

b. وقائمة تتشكل من كل شيء ما عدا المكون الأول، والتي ندعوها بالذيل (tail).

نورد بعض الحقائق عن القوائم:

1- سوف نستخدم رموزاً مختلفة من أجل القوائم من خلال كتابة عناصرها ضمن القوسين "<" ، ">" ونفصل بين عناصرها بالفواصل.

2- نرمز للقائمة الخالية بالرمز $< >$.

3- نقول عن عدد عناصر القائمة إنها تمثل طول هذه القائمة.

مثال (3-23):

إنّ للقائمة $< w, x, y, z >$ الطول 4 ورأسها w والذيل فيها هو القائمة $< x, y, z >$.

4- سوف نستخدم الرموز: $\text{head}(L)$ و $\text{tail}(L)$ للإشارة إلى رأس القائمة L وذيلها على الترتيب.

مثال (3-24): نلاحظ أن:

$$\text{head}(< w, x, y, z >) = w$$
$$\text{tail}(< w, x, y, z >) =< x, y, z >$$

5- ليس للقائمة الخالية $< >$ رأس أو ذيل.

6- تتميّز القوائم بصفة حسابية وهي قدرتها على إنشاء قائمة جديدة بإضافة عنصر جديد عند رأس قائمة موجودة. يستخدم الرمز cons للإشارة إلى عملية الإنشاء. فإذا كان h عنصراً من نمط ما، وكانت L قائمة، فإنّ:

$$\text{cons}(h, L)$$

تعني قائمةً رأسها h وذيلها L.

مثال (3-25):

نورد بعض الحالات لاستخدام العملية cons:

$$\text{cons}(w, < x, y, z >) =< w, x, y, z >$$
$$\text{cons}(a, < >) =< a >$$
$$\text{cons}(\text{this}, < \text{is}, \text{helpful} >) =< \text{this}, \text{is}, \text{helpful} >$$

7- تقوم العمليات الثلاث head, tail, cons بعمل فعّال وديناميكي أثناء تنفيذ البرنامج.

وترتبط العمليات الثلاث السابقة فيما بينها بالمعادلة التالية:

$$\text{cons}\big(\text{head}(L), \text{tail}(L)\big) = L$$

وذلك من أجل أي قائمة L غير خالية.

8- لا يوجد أي تقييد على نوع الغرض الذي يمكن للقائمة أن تحويه. كما يمكن لعناصر القائمة أن تكون أيضاً عبارة عن قوائم.

مثال (3-26):

نعرض بعض الحالات لقوائم مع تحديد رأس أو ذيل كل منها:

L	$\text{head}(L)$	$\text{tail}(L)$
$< a, < b >>$	a	$<< b >>$
$<< a >, < b, a >>$	$< a >$	$<< b, a >>$
$<<< >, a, < >>, b, < >>$	$<< >, a, < >>$	$< b, < >>$

9- إذا كانت كل عناصر القائمة L من مجموعة خاصة A فإننّا نقول إنّ L قائمة على A.

مثال(3-27):

إنّ كل قائمة من القوائم الآتية هي قائمة على المجموعة $\{a, b, c\}$:

$< b, c, a, b, c >$	$< a, b >$	$< >$
$< a, b, b, c, a >$	$< b, a >$	$< a >$

10- نرمز لمجموعة كل القوائم على المجموعة A، بالرمز $\text{Lists}(A)$.

3-4-1 تمثيل القائمة حاسوبياً

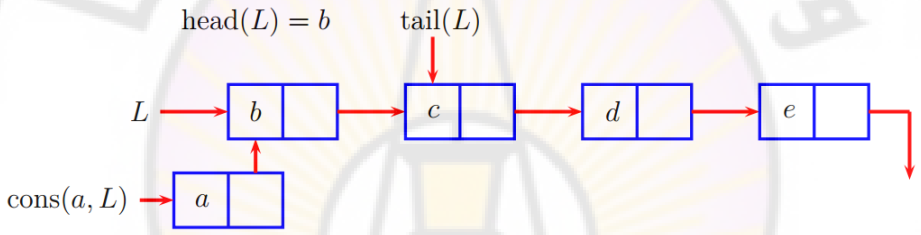
إنّ الأسلوب الأسهل لتمثيل القائمة في الحاسب هو أن نضع بلوك ذاكرة لكل عنصر من القائمة. يتضمن بلوك الذاكرة العنصر مع عنوان بلوك الذاكرة التالي من أجل العنصر التالي في القائمة. بهذا الأسلوب لا حاجة لنا بقائمة تقع عناصرها خلف بعضها بشكل متتالٍ، لذلك فإنّ إنشاء أو حذف عناصر القائمة يمكن أن يتم ديناميكياً أثناء تنفيذ البرنامج.

مثال (3-28):

إذا كانت L قائمة معطاة بالشكل:

$$L =< a, b, c, d >$$

يوضّح الشكل (3-3) تمثيل L في الذاكرة، حيث إنّ كل سهم يمثل عنواناً (مؤشراً) وكل صندوق يمثل بلوك ذاكرة يتضمن عنصراً من القائمة، ويشير السهم إلى عنوان الصندوق التالي. إنّ السهم الأخير في الصندوق من أجل e يشير إلى رمز الأرضية لتحديد نهاية القائمة. تشير القوائم الفارغة أيضاً إلى رمز الأرضية. يظهر الشكل أنّ $\text{head}(L) = b$ و$\text{tail}(< c, d, e >)$ لذا فإنّ الرأس والذيل يُحسبان بسهولة من L. كما يظهر الشكل كيف تبني العملية cons القائمة الجديدة $\text{cons}(a, L) =< a, b, c, d, e >$ بوضع بلوك جديد ليحتوي a ومؤشر L.



الشكل (3-3)

3-5 العلاقات وخواصها:

إنّ الأسلوب المباشر للتعبير عن الارتباط بين عناصر من مجموعتين هو في استخدام أزواج مرتبة مشكّلة من العنصرين المرتبطين. لهذا السبب، فإنّ مجموعات الأزواج المرتبة تدعى بالعلاقات الثنائية. سوف نقوم في هذه الفقرة بتحديد المفاهيم والتعاريف المستخدمة في وصف العلاقات الثنائية وخواصها والعلاقات من الدرجة n.

3-5-1 العلاقة الثنائية (binary relation):

لتكن لدينا المجموعتين A وB. إنّ العلاقة الثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B هي مجموعة جزئية من $A \times B$.

إنّ العلاقة الثنائية من A إلى B هي مجموعة R من الأزواج المرتبة، حيث إنّ العنصر الأول من كل زوج مرتب يؤخذ من المجموعة A ويؤخذ العنصر الثاني فيه من المجموعة B. سوف نستخدم الرمز aRb للإشارة إلى أن $(a,b) \in R$ والرمز $a\not{R}b$ للإشارة إلى أن $(a,b) \notin R$. أكثر من ذلك، فإنه عندما تكون $(a,b) \in R$، نقول إن a مرتبط بالعنصر b وفق العلاقة R.

لقد عبر عن العلاقة الثنائية بأنها ارتباط بين عناصر مجموعتين. سوف نعرِّف علاقات جديدة عبر عن الارتباط بين عناصر أكثر من مجموعتين.

3-5-2 العلاقة من الدرجة n

إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ عبارة عن n مجموعة. إنّ العلاقة ذات القياس n على هذه المجموعة هي عبارة عن مجموعة جزئية من: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. تدعى المجموعات: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ في هذه الحالة بساحات العلاقة وتدعى n بدرجة العلاقة.

مثال (3-29):

بفرض أنّ: $A = \{0,1,2\}$ و$B = \{a,b\}$. بالتالي فإنّ:

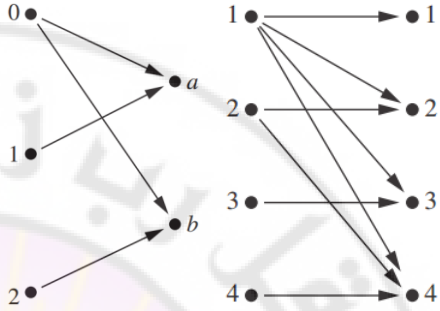
$$R = \{(0,a),(0,b),(1,a),(2,b)\}$$

هي علاقة من A إلى B. ونرى من خلال هذه العلاقة أنّ: $0Ra$، لكن $1\not{R}b$.

أيضاً إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ فإن العلاقة المعرفة عليها $R =$ $\{(a,b) \mid b$ لـ a قاسم$\}$ تعطى بالأزواج: $R =$ $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$.

يمكن للعلاقات أن تمثل بيانياً، حيث تستخدم الأسهم لتمثيل الأزواج المرتبة. هنالك أسلوب آخر للتعبير عن العلاقة من خلال استخدام جدول. يوضّح الشكل (3-4) التعبير

عن العلاقة من خلال الأسهم والشكل (5-3) للتعبير عن العلاقة من خلال جدول، وكتطبيق اخترنا العلاقتين الواردتين في المثال (29-3) السابق.



الشكل (4-3)

R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

الشكل (5-3)

مثال (30-3):

لتكن R علاقة على $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ مؤلفة من الثلاثيات (a,b,c) حيث: a,b,c تحقق الشرط $(a<b<c)$. نلاحظ أنّ $(1,2,3)\in R$ بينما $(2,4,3)\notin R$. إنّ درجة هذه العلاقة هي $n=3$ وساحات هذه العلاقة جميعها تساوي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية.

مثال (31-3):

لتكن R علاقة على $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ مؤلفة من كل الثلاثيات (a,b,c) حيث تشكل الأعداد a,b,c متتالية حسابية، أي إنّ $(a,b,c)\in R$ تنتمي إلى R إذا وفقط إذا كان يوجد عدد صحيح مثل k بحيث يكون:

$$b=a+k\,,\qquad c=a+2k$$

أو بشكل مكافئ، بحيث يكون:

$$b-a=k\,,\qquad c-b=k$$

نلاحظ أنّ: $(1,2,3)\in R$، لأنه من الواضح:

$$3=1+2\,,\qquad 5=1+2\cdot 2$$

لكن $(2,5,9)\notin R$ لأنّ $5-2=3$، بينما $9-5=4$.

من الواضح أنّ لهذه العلاقة R الدرجة $n=3$.

3-5-3 العلاقات على مجموعة

تؤدي العلاقات من مجموعة A إلى ذات المجموعة دوراً فاعلاً في العديد من التطبيقات وهي ذات أهمية كبيرة. والعلاقة على مجموعة A هي علاقة من A إلى A. أي إنّ العلاقة على مجموعة A هي مجموعة جزئية من $A \times A$.

مثال (3-32):

بفرض أنه لدينا العلاقات الآتية على مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \le b\}$$
$$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$$
$$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ أو } a = -b\}$$
$$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$$
$$R_5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$$
$$R_6 = \{(a,b) \mid a + b \le 3\}$$

ولنتساءل عن العلاقات التي تحوي كل من الأزواج:

$$(1,1), (1,2), (2,1), (1,-1), (2,2)$$

نلاحظ أنّ هذه العلاقة هي علاقات على مجموعة غير منتهية.

إنّ الزوج $(1,1)$ ينتمي إلى العلاقات R_1, R_3, R_4, R_6

والزوج $(1,2)$ ينتمي إلى العلاقتين R_1, R_2

والزوج $(2,1)$ ينتمي إلى العلاقات R_2, R_5, R_6

والزوج $(1,-1)$ ينتمي إلى العلاقات R_2, R_3, R_6

والزوج $(2,2)$ ينتمي إلى العلاقات R_1, R_3, R_4

ليس من الصعب أن يحدد عدد العلاقات على مجموعة منتهية، ذلك لأنّ العلاقة على المجموعة A هي بكل بساطة مجموعة جزئية من $A \times A$.

مثال (3-33):

لنحدد عدد العلاقات الممكنة على مجموعة فيها n عنصراً.

إنّ العلاقة على المجموعة A هي مجموعة جزئية من $A \times A$. إنّ عدد عناصر المجموعة $A \times A$ هو n^2 من العناصر؛ طالما أنّ عدد عناصر المجموعة A هو n من العناصر. نعلم أنّ المجموعة التي عدد عناصرها n ، لها 2^n من المجموعات الجزئية، بالتالي فإنّ هنالك عدد 2^{n^2} من المجموعات الجزئية من $A \times A$، بالتالي فإنّ هنالك 2^{n^2} من العلاقات على المجموعة A.

مثال (3-34):

لنوجد عدد العلاقات الثنائية الممكنة على المجموعة $\{a, b, c\}$.

من الواضح أنّ عدد العلاقات على المجموعة المعطاة يساوي $2^{3^2} = 2^9 = 512$ علاقة.

3-5-4 خواص العلاقات

هنالك عدد من الخواص المستخدمة لتصنيف العلاقات على مجموعة. سوف نعرض الخواص الأكثر أهمية للعلاقات في هذه الفقرة.

تربط بعض العلاقات العنصر بنفسه. فمثلاً إذا كانت R علاقة على المجموعة المكونة من كل الناس، تتألف العلاقة هذه من الأزواج (x, y) حيث إن للعنصرين x وy نفس الأم ونفس الأب. من الواضح أنّ xRx من أجل أي شخص في المجموعة.

نورد بعض الخواص الهامة للعلاقة على مجموعة:

1- إذا كانت R علاقة على المجموعة A. يُقال عن هذه العلاقة إنها انعكاسية (reflexive)، إذا كان $(a, a) \in R$ من أجل أي عنصر a من A.

2- يُقال عن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة متناظرة (symmetric)، إذا كان $(a, b) \in R$ يقتضي أن يكون $(b, a) \in R$ وذلك من أجل كل العناصر a وb من A.

3- إذا كانت R علاقة على A، بحيث إنه من أجل كل العناصر a وb من A يتحقق: إذا كان $(a,b) \in R$ و$(b,a) \in R$، فإنّ $a = b$. فإننا نقول عندئذٍ عن هذه العلاقة إنها علاقة تخالفية (antisymmetric).

4- نقول عن العلاقة R على المجموعة A إنها متعدية (transitive) إذا كان $(a,b) \in R$ و$(b,c) \in R$، فإنّ $(a,c) \in R$، ذلك من أجل كل العناصر a,b,c من A.

مثال (3-35):

لننظر في العلاقات التالية على المجموعة $\{1,2,3,4\}$:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
$R_6 = \{(3,4)\}$

إنّ العلاقات R_3 وR_5 هي علاقات انعكاسية لأنهما تحويان كل الأزواج من الشكل (a,a)، وتحديداً: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$. أمّا العلاقات الأخرى فهي ليست انعكاسية لأنها لا تحوي على كل هذه الأزواج المرتبة. وبشكل خاص فإنّ R_1, R_2, R_4, R_6 ليست انعكاسية لأنّ $(3,3)$ ليست موجودة في أيٍّ من هذه العلاقات.

مثال (3-36):

لندرس العلاقات الواردة في المثال (3-32) ونبيّن فيما إذا كانت متناظرة أو تخالفية.

إنّ العلاقات R_3, R_4, R_6 هي علاقات متناظرة. نجد في العلاقة R_3 أنه إذا كان $a = b$ أو $a = -b$ فإنّ $b = a$ أو $b = -a$، بالتالي هي متناظرة.

وفي العلاقة R_6 فإنه من أجل $a + b \leq 3$ يكون $b + a \leq 3$.

إنّ العلاقات R_1, R_2, R_4, R_5 تخالفية. في العلاقة R_1 إنّ $a \leq b$ و$b \leq a$ يقتضي أن يكون $a = b$.

في العلاقة R_2 من غير الممكن أن يكون $a > b$ و $b > a$.

في العلاقة R_4 يرتبط عنصران إذا وفقط إذا كانا متساويين.

في العلاقة R_5 من غير الممكن أن يكون $a = b + 1$ و $b = a + 1$.

مثال (3-37):

لندرس العلاقات الواردة في المثال (3-32) ونبيّن فيما إذا كانت متعدية أم لا.

إنّ العلاقات R_1, R_2, R_3, R_4 هي علاقات متعدية.

إنّ العلاقة R_1 متعدية لأنّ $a \leq b$ و $b \leq c$ يؤدي إلى كون $a \leq c$.

إنّ العلاقة R_2 متعدية لأنّ $a > b$ و $b > c$ يؤدي إلى كون $a > c$.

إنّ العلاقة R_3 متعدية لأنّ $a = \pm b$ و $b = \pm c$ يؤدي إلى كون $a = \pm c$.

ومن الواضح أيضاً أنّ R_4 علاقة متعدية.

وما تبقى من علاقات R_5, R_6 فغير متعدية. حيث نجد أنّ R_5 غير متعدية لأنّ $(2,1)$ و $(1,0)$ تنتميان إلى R_5، لكن $(2,0)$ لا تنتمي إلى R_5. وكذلك R_6 غير متعدية لأنّ $(2,1)$ و $(1,2)$ تنتميان إلى R_6، لكن $(2,2)$ لا تنتمي إلى R_6.

3-5-5 تركيب العلاقات

لقد بيّنا أنّ العلاقات من A إلى B هي مجموعات جزئية من $A \times B$. يمكن القيام بتشكيل علاقتين من A إلى B في أي أسلوب من الأساليب المتبعة في تشكيل المجموعات.

مثال (3-38):

لتكن $A = \{1,2,3\}, \ B = \{1,2,3,4\}$ لتكن العلاقة R_1 معطاة على النحو الآتي:

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

ولتكن العلاقة R_2 معطاة بالشكل:

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$$

سوف نقوم بتشكيل علاقات جديدة من خلال العمليات الآتية:

$R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$
$R_1 - R_2 = \{(2,2),(3,3)\}$
$R_2 - R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

مثال (3-39):

لتكن R_1 هي العلاقة «أصغر من:$<$» على مجموعة الأعداد الحقيقية. ولتكن R_2 هي العلاقة «أكبر من:$>$» على مجموعة الأعداد الحقيقية. عندئذٍ يكون:

$$R_1 = \{(x,y) \mid x < y\}, \qquad R_2 = \{(x,y) \mid x > y\}$$

ولنوجد $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1, R_1 \oplus R_2$.

نلاحظ أنّ $(x,y) \in R_1 \cup R_2$ إذا وفقط إذا $(x,y) \in R_1$ أو $(x,y) \in R_1$. بالتالي فإنّ: $(x,y) \in R_1 \cup R_2$. وبما أنّ الشروط الواردة في تعريف العلاقة هي: $x < y$ أو $x > y$، فإنّ ذلك هو ذاته إذا كتبنا $x \neq y$، فإنه ينتج أنّ $R_1 \cup R_2 = \{(x,y) \mid x \neq y\}$. بكلمات أخرى إنّ اتحاد العلاقتين «أكبر» و «أصغر» هو علاقة «لا يساوي». من الواضح أنه من غير الممكن أن يكون الزوج (x,y) منتمياً إلى العلاقتين R_1 وR_2. ينتج من ذلك أنّ $R_1 \cap R_2 = \phi$. نلاحظ أيضاً أنّ:

$$R_2 - R_1 = R_2, \qquad R_1 - R_2 = R_1$$

كما أنّ:

$$R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2 - R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \mid x \neq y\}$$

تركيب علاقتين

لتكن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B. ولتكن علاقة أخرى S من B إلى المجموعة C. إنّ تركيب R وS هو علاقة مكونة من الأزواج المرتبة (a,c) حيث a من A وc من C، والتي يوجد من أجلها العنصر b من B بحيث يكون الزوج (a,b) منتمياً إلى S. سوف نرمز لتركيب R وS بالرمز $S \circ R$.

مثال (3-40):

لنوجد تركيب العلاقتين R وS، حيث R هي علاقة من $\{1,2,3\}$ إلى $\{1,2,3,4\}$. كما إنّ S هي علاقة من $\{1,2,3,4\}$ إلى $\{0,1,2\}$. فإذا عرفت R وS من خلال:

$$R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$$
$$S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

يتم إنشاء $S \circ R$ باستخدام كل الأزواج المرتبة في S حيث إنّ العنصر التالي في الزوج المرتب من R يتوافق مع العنصر الأول من الزوج المرتب S. على سبيل المثال، إنّ العنصر $(2,3)$ في R والعنصر $(3,1)$ في S، ينتجان الزوج المرتب $(2,1)$ في $S \circ R$ بحساب كل الأزواج المرتبة في التركيب، نجد:

$$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

لتكن R علاقة على المجموعة A. تتحدد قوى العلاقة R من خلال تعريف تركيب علاقتين. فإذا كانت R علاقة A، فإنّ القوى R^n (حيث $n = 1,2,3,\cdots$) تعرَّف من خلال العلاقات:

$$\begin{cases} R^1 = R \\ R^{n+1} = R^n \circ R \end{cases}$$

من خلال ما سبق فإننّا نستطيع أن نكتب أنّ:

$$R^2 = R \circ R\,, \qquad R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R\,, \cdots$$

وهكذا ...

مثال (3-41):

لتكن R علاقة معرفة على النحو الآتي:

$$R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$$

ولنوجد قوى هذه العلاقة R^n من أجل $n = 1,2,3,\cdots$.

بما أنّ $R^2 = R \circ R$ فإننّا نجد: $R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$ كما أنّ:

$$R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$$

بإجراء حساب $R^4 = R^3 \circ R$ نجد أنها هي ذاتها R^3، لذلك فإنّ:

$$R^4 = R^3 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\} = R^3$$

وبالاستمرار بالحساب نجد أيضاً أنّ: $R^n = R^3$

من أجل $n = 5, 6, 7, \cdots$. ونترك اختبار ذلك للقارئ.

توضّح النظرية الآتية أنّ قوى علاقة متعدية هي مجموعات جزئية من هذه العلاقة.

نظرية (3-1)

تكون العلاقة R على المجموعة A متعدية، إذا وفقط إذا كانت $R^n \subseteq R$، من أجل $n = 1, 2, 3, \cdots$.

3-5-6 العلاقات وقواعد المعطيات

إنّ الزمن الذي تتطلبه عملية معالجة المعلومات في قاعدة معطيات يتعلق بكيفية تخزين هذه المعلومات. فعمليات إضافة وحذف السجلات (records)، تحديثها والبحث فيها، بالإضافة إلى تشكيل وبناء سجلات جديدة من تراكب قواعد معطيات تحدث ملايين المرّات ربما في اليوم الواحد في قاعدة معطيات ضخمة. ومن المهم لهذه العمليات الطرق والأساليب المختلفة المتبعة في تمثيل قواعد المعطيات المطوَّرة. سوف نتوقف عند واحدة من هذه الطرائق، والتي تدعى بنموذج المعطيات العلائقي (relational data model) المرتكزة على مفهوم العلاقة. تتألف قاعدة المعطيات من سجلات (records) من نمط متعددات العناصر (ذات الطول n). وتتشكل هذه السجلات من حقول (fields)، وهذه الحقول هي عناصر المتعدد. وكمثال على ذلك قاعدة سجلات الطلاب التي يمكن أن تتشكل من حقول تتضمن: اسم الطالب، ورقم الطالب، والاختصاص، والمعدل التراكمي للطالب. إنّ نموذج المعطيات العلاقي يتمثل في قاعدة معطيات مكونة من سجلات كعلاقة من النوع n (الدرجة n). إنّ سجلات الطلاب معطاة في هذا المثال من خلال متعددات عناصر من الطول 4 على النحو الآتي:

(Student name, IQ number, Major, GPA)

لنأخذ بعض من هذه السجلات

(Ahmad, 241555, Mathematics, 4.67)
(Basel, 882233, Physics, 3.56)
(Sara, 102144, Computer Science, 3.62)
(Eiad, 234821, Mathematics, 4.32)
(Amaar, 623482, Computer Science, 3.98)

إنّ العلاقات المستخدمة في تمثيل قواعد المعطيات هي الجداول (tables) حيث يتم إظهار هذه العلاقات في الغالب كجداول، وكل عامود في الجدول يتعلق بصفة (attribute) لقاعدة المعطيات. إنّ قاعدة المعطيات السابقة يتم إظهارها في الجدول الموضّح بالشكل (3-4). هنالك أساليب متعددة لتمثيل العلاقة بين مجموعات منتهية. إنّ أحد هذه الأساليب هو أن نضع العلاقة كقائمة لأزواج مرتبة أو أن نضعها في جدول.

سوف نستخدم أسلوبين لتمثيل العلاقة:

استخدام المصفوفات ذات العناصر الصفرية والواحدية.

استخدام التمثيلات التصويرية (pictorial)، والتي تدعى بالبيانات الموجهة (Directed Graphs).

Student name	ID-Number	Major	GPA
Ahmad	241555	Mathematics	4.67
Basel	882233	Physics	3.56
Sara	102144	Computer Science	3.62
Eiad	234821	Mathematics	4.32
Amaar	623482	Computer Science	3.98

الشكل (3-4)

إنّ المصفوفات هي أداة ملائمة لتمثيل العلاقات في البرامج الحاسوبية. كما أنّ تمثيل العلاقات بالأسلوب التصويري سوف يكون مغيراً لفهم خواص هذه العلاقات.

3-5-7 تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات

تمثل العلاقة بين مجموعات منتهية باستخدام مصفوفة عناصرها تأخذ إحدى القيمتين 0 أو1. لنفرض أنّ R هي علاقة من $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ إلى $B =$

$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. نشير إلى أن عناصر A و B قد وضعت في ترتيب خاص لكن كيفي. عندما تكون $A = B$، فإنّنا نستخدم نفس الترتيب من أجل A و B. يمكن للعلاقة R أن تمثل من خلال المصفوفة:

$$M_R = [m_{ij}] \ ; \ \text{حيث} \ \ m_{ij} = \begin{cases} 1 \ ; (a_i, b_j) \in R \\ 0 \ ; (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

بتعبير آخر، إنّ المصفوفة التي تمثل العلاقة R يكون فيها 1 في الموضع (i,j) عندما تكون a_i مرتبطة بالعنصر b_j. ويكون 0 في هذا الموضع إن لم تكن a_i مرتبطة بالعنصر b_j وفق العلاقة R.

مثال (3-42):

لتكن $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2\}$ لتكن R علاقة من A إلى B تحوي (a,b) إذا كانت $a \in A$ و $b \in B$ بحيث $a > b$. لنوجد المصفوفة التي تمثل العلاقة R. إذا اخترنا:

$$a_1 = 1\,, \qquad a_2 = 2\,, \qquad a_3 = 3\,, \qquad b_1 = 1\,, \qquad b_2 = 2$$

فإننا نجد أنّ:

$$R = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$$

والمصفوفة الممثلة للعلاقة R هي:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إنّ العناصر الواحدية في المصفوفة تبيّن انتماء الأزواج $(2,1), (3,1), (3,2)$ إلى العلاقة R. وتشير الأصفار إلى عدم وجود ثنائيات أخرى تنتمي إلى R.

مثال (3-43):

إذا كانت $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. إذا كانت مصفوفة العلاقة R من A إلى B معطاة على النحو الآتي:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإنّ الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى العلاقة R هي الثنائيات (a_i, b_j) حيث $m_{ij} = 1$، من ذلك نكتب:

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$$

إنّ مصفوفة علاقة على مجموعة، هي مصفوفة مربعة ويمكن استخدامها أيضاً لمعرفة فيما إذا كانت هذه العلاقة تتمتع بخواص محددة:

– تكون العلاقة R انعكاسية، إذا كانت $(a, a) \in R$ و $a \in A$ والخاصة الانعكاسية للعلاقة R على A تتحقق إذا وفقط إذا كانت $(a_i, a_i) \in R$ ومن أجل $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. ومن خلال تمثيل العلاقة في مصفوفة فإنها تكون انعكاسية إذا وفقط إذا كانت $m_{ii} = 1$ من أجل $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ (أي إذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة M_R للعلاقة R جميعها تساوي 1).

– تكون العلاقة R تناظرية، إذا وفقط إذا كانت $(a, b) \in R$ تقتضي أن يكون $(b, a) \in R$. إذن العلاقة R على A تكون تناظرية إذا وفقط إذا كانت $(a_i, a_j) \in R$ تقتضي أن يكون $(a_j, a_i) \in R$ بالتالي من خلال M_R مصفوفة العلاقة R على A، تكون هذه العلاقة تناظرية إذا وفقط إذا كانت $m_{ij} = 1$ حيث $m_{ji} = 1$. إنّ هذا يعني أنّ $m_{ij} = 0$ حيث $m_{ji} = 0$. من ذلك فإنّ العلاقة R على A تكون تناظرية إذا كان $m_{ij} = m_{ji}$. هذا يعني أن المصفوفة M_R تساوي منقولها $(M_R)^T$ أي إنّ R تناظرية إذا وفقط إذا كانت:

$$M_R = (M_R)^T$$

وذلك من أجل كل الأزواج: $j = 1, 2, 3, \cdots, n$ $\quad$ $i = 1, 2, 3, \cdots, n$

أي إذا كانت M_R تناظرية.

تكون العلاقة R تخالفية، إذا وفقط إذا كانت $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ تقتضي أن يكون $a = b$. أي إذا كان لمصفوفة العلاقة التخالفية الخاصة الآتية:

إذا كانت $m_{ij} = 1$ و $i \neq j$ فإنّ $m_{ji} = 0$، وأنّ $m_{ij} = m_{ji} = 0$ عندما $i \neq j$.

مثال (3-44):

إذا كانت M_R مصفوفة العلاقة R على مجموعة ما A معطاة على النحو الآتي:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ولندرس بعض صفات هذه العلاقة من خلال مصفوفتها المعطاة:

إنّ عناصر القطر الرئيسي في M_R جميعها تساوي 1. فهي انعكاسية.

وبما أنّ M_R تناظرية، فالعلاقة R تناظرية.

ومن السهل أن نرى أنّ العلاقة R ليست تخالفية أيضاً.

تستخدم العمليات المنطقية في إيجاد مصفوفات العلاقات، فإذا كانت: R_1, R_2 علاقتين على المجموعة A والتي مصفوفتها على الترتيب هي: M_{R_1}, M_{R_2}. إنّ المصفوفة التي تمثل اتحاد علاقتين يكون فيها 1 في المواضع حيث تكون للمصفوفتين M_{R_1} أو M_{R_2} القيمة 1 في ذات المواضع المقابلة. ويكون في المصفوفة التي تمثل تقاطع العلاقتين القيمة 1 في المواضع حيث يكون للمصفوفتين M_{R_1} و M_{R_2} القيمة 1 في ذات المواضع المقابلة. استناداً إلى ما سبق فإننّا نستطيع أن نكتب:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \text{ or } M_{R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$
$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \text{ and } M_{R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

مثال (3-45):

بفرض أنّ R_1, R_2 علاقتان ممثلة على الترتيب بالمصفوفتين:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لنوجد الآن مصفوفة كل من العلاقات: $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2$

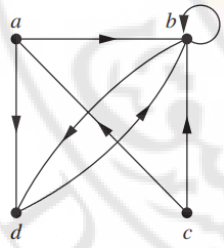
$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8-5-3 تمثيل العلاقات باستخدام البيانات

يعتبر هذا التمثيل من الأساليب الهامة للتعبير عن العلاقة باستخدام التمثيل التصويري. يمثل العنصر من المجموعة بنقطة وكل زوج مرتب يمثل باستخدام سهم مع مؤشر الاتجاه. يستخدم هذا الأسلوب في التمثيل عندما نفكر بأنّ العلاقات على مجموعات منتهية ما هي إلاّ بيانات موجهة (Digraphs).

يتألف البيان الموجه من مجموعة V من العناصر تمثل العقد، ومجموعة E من الأزواج المرتبة من عناصر V والتي ندعوها بمجموعة الأضلاع (الحواف). سوف نقوم بشكل موسّع في الفصل السادس بدراسة البيانات (Graphs) بشكل عام والبيانات الموجهة بشكل خاص.



مثال (3-46):

في الشكل المجاور نرى البيان الموجه ذا العقد a, b, c و d والأضلاع: $(a,b),(a,d),(b,b),(c,b),(b,d),(c,a)$ و (d,b).

مثال (3-47):

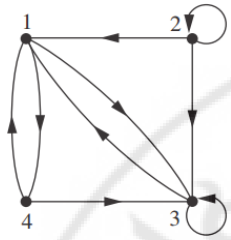
البيان الموجه للعلاقة:

$$R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

على المجموعة $\{1,2,3,4\}$ يظهر في الشكل المجاور.

مثال (3-48):

ما هي أزواج العلاقة R الممثلة بالبيان الموجه في الشكل المجاور.



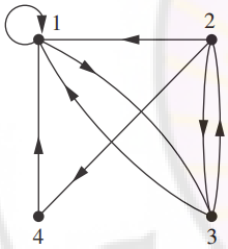
الحل: الأزواج المرتبة (x, y) للعلاقة R هي:

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)\}$$

كما ويمكن معرفة خواص أية علاقة R من تمثيلها بالبيان الموجه وذلك كما يلي:

1- تكون العلاقة انعكاسية إذا وفقط إذا وجدت حلقة loop على كل عقدة في البيان.

2- تكون العلاقة تناظرية إذا وفقط إذا كان لكل ضلع موجه بين عقدتين مختلفتين ضلع معاكس له بالاتجاه في البيان الموجه.

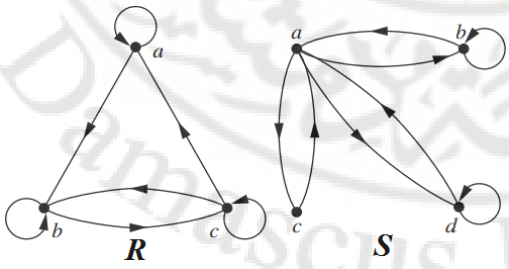


3- تكون العلاقة تخالفية إذا وفقط إذا لم يوجد ضلعان موجهان متعاكسان بالاتجاه بين عقدتين مختلفتين في البيان الموجه.

4- تكون العلاقة متعدية إذا وفقط إذا وجد ضلع موجه من العقدة x إلى العقدة y، ووجد ضلع موجه من العقدة y إلى العقدة z، فإنه يوجد ضلع موجه من العقدة x إلى العقدة z في البيان الموجه (يشكّل مثلثاً بين العقد الثلاث أضلاعه موجهة).

مثال (3-49):

بين فيما إذا كانت العلاقتان في الشكل المجاور انعكاسية أم تناظرية أم تخالفية أم متعدية؟



الحل: نلاحظ في بيان العلاقة R الموجه أن لكل عقدة حلقة وبالتالي فهي علاقة انعكاسية. ونلاحظ أن R ليست تناظرية لأنه يوجد ضلع موجه من العقدة a إلى العقدة b ولا يوجد ضلع موجه من العقدة b إلى العقدة a. ونلاحظ أن R ليست تخالفية لأنه

يوجد ضلعان موجهان بين العقدتين b وc متعاكسين. وأيضاً نلاحظ أن R ليست متعدية لأنه يوجد ضلع موجه من العقدة a إلى العقدة b، ويوجد ضلع موجه من العقدة b إلى العقدة c، ولكن لا يوجد ضلع موجه من العقدة a إلى العقدة c.

في بيان العلاقة S نلاحظ أنه ليس لكل عقدة حلقة، وبالتالي فهي ليست انعكاسية. ونلاحظ أنها تناظرية لأن كل ضلع موجه بين عقدتين مختلفتين يقابله ضلع موجه معاكس له. ونلاحظ أنها ليست تخالفية، يوجد ضلعان موجهان بين العقدتين b وa متعاكسين. وأيضاً نلاحظ أن S ليست متعدية لأن الزوج (c,a) ينتمي إلى S، والزوج (a,b) ينتمي إلى S، ولكن الزوج (c,b) لا ينتمي إلى S.

9-5-3 علاقات التكافؤ

سوف ندرس علاقات التكافؤ التي تتصف بمجموعة من الخواص التي تسمح باستخدامها الأغراض المرتبطة والمتشابهة بطريقة ما. إذا كانت R علاقة على المجموعة A، نقول عن R إنها علاقة تكافؤ إذا كانت تتصف بأنها علاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

إنّ علاقات التكافؤ مهمة للغاية في الرياضيات وعلوم الحاسب، وأحد الأسباب التي تجعلها كذلك، أنه في علاقة التكافؤ عندما يكون هنالك عنصران مرتبطان وفق هذه العلاقة فإنها تمكننا من القول إنهما عنصران متكافئان. إذا افترضنا أنّ العنصرين a وb مرتبطان وفق علاقة تكافؤ فإننّا ندعوهما متكافئين ونستخدم الرمز $a \sim b$ للقول إن a وb عناصر متكافئة بالنسبة إلى علاقة التكافؤ الخاصة.

مثال (3-50):

بفرض أنّ R علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة بحيث يكون aRb إذا وفقط إذا كان $a = b$ أو $a = -b$ يمكن بكل بساطة أن نبيّن أنّ هذه العلاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية. إذن هي علاقة تكافؤ.

مثال (3-51):

إنّ علاقة القسمة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليست علاقة تكافؤ، لأنها غير تناظرية. فعلى سبيل المثال: إن 2 تقسم 4 لكن 4 لا تقسم 2.

مثال (3-52):

لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث يكون: xRy إذا وفقط إذا كان الفرق بين العددين الحقيقيين x وy أقل من 1، أي $|x-y|<1$. لنبيّن أنّ العلاقة R ليست بعلاقة تكافؤ.

إنّ هذه العلاقة انعكاسية، لأنّ أياً كان العدد الحقيقي x فإنّ: $|x-x|=0<1$.

وهذه العلاقة تناظرية لأنه من أجل أي عددين حقيقيين x وy مرتبطين وفق R فإنه يكون $|x-y|<1$ وهذا يقود إلى أن $|y-x|<1$ بالتالي yRx.

وهي غير متعدية، لأنه إذا أخذنا الأعداد الحقيقية التالية:

$$x=2.8\,,\qquad y=1.9\,,\qquad z=1.1$$

فإننا نجد أنّ:

$$|x-y|=|2.8-1.9|=0.9<1$$
$$|y-z|=|1.9-1.1|=0.8<1$$

لكن: $$|x-z|=|2.8-1.1|=1.7>1$$

أي إنّ: $2.8R1.9$ و $1.9R1.1$ ، لكن $2.8\not R1.1$.

10-5-3 صفوف التكافؤ

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A. إنّ مجموعة كل العناصر المرتبطة بالعنصر من المجموعة A ، تدعى بصف تكافؤ a. يرمز لصف تكافؤ a بالنسبة للعلاقة R بالرمز $[a]_R$. ويمكن في بعض الأحيان إهمال رمز العلاقة في الصف إذا تم أخذها بعين الاعتبار. إذا كانت R علاقة تكافؤ على مجموعة A، فإنّ صف تكافؤ العنصر a هو:

$$[a]_R=\{s\mid (a,s)\in R\}$$

وإذا كان $b \in [a]_R$، فإن b يدعى بممثل (representative) صف التكافؤ هذا. من الواضح أن أي عنصر من الصف يمكن أن يستخدم كممثل لهذا الصف. أي إنه لا يوجد شيء خاص للعنصر المختار كممثل لهذا الصف.

مثال (3-53):

إذا كانت R علاقة التكافؤ المعرفة في المثال (3-50) فما هو صف تكافؤ العدد الصحيح؟.

بما أنّ العدد الصحيح يكافئ نفسه وسالبه في علاقة التكافؤ هذه، فإنه ينتج أنّ $[a]_R = \{-a, a\}$. إنّ هذه المجموعة تحوي عنصرين مختلفين باستثناء $a = 0$. وأمثلة على ذلك:

$$[0]_R = \{0\}, \qquad [-5]_R = \{-5, 5\}, \qquad [7]_R = \{-7, 7\}$$

3-5-11 صفوف التكافؤ والتجزئة

لتكن R علاقة على المجموعة A، توضّح النظرية الآتية أنّ صفي تكافؤ عنصرين من A هما إمّا متطابقين أو منفصلين.

نظرية (3-2):

لتكن R علاقة على المجموعة A. إنّ العبارات الآتية من أجل العنصرين a وb من A هي عبارات متكافئة:

1- aRb
2- $[a]_R = [b]_R$
3- $[a]_R \cap [b]_R = \phi$

الإثبات:

سنبيّن أولاً أنّ العبارة الأولى تقتضي الثانية. لنفرض أنّ aRb. سوف نثبت أنّ $[a]_R = [b]_R$ من خلال أنّ $[a]_R \subseteq [b]_R$ و$[b]_R \subseteq [a]_R$. لنفرض أنّ $c \in [a]_R$. بالتالي aRc. وبما أنّ aRb وR تناظرية، فإنّ bRa. وبما أنّ R متعدية وأنّ bRa وaRc ، فإنه

ينتج أنّ bRc. إنّ هذا يعني أنّ $c \in [b]_R$. إنّ هذا يعني أنّ $[a]_R \subseteq [b]_R$. وبشكل مشابه فإنه يمكن إثبات أنّ $[b]_R \subseteq [a]_R$ ونتركها كتمرين للقارئ.

ثانياً، سوف نبيّن أنّ الثانية تقتضي الثالثة، لذلك نفرض أنّ $[a]_R = [b]_R$. ينتج أنّ $[a]_R \cap [b]_R = \phi$ ذلك لأنّ $[a]_R$ ليست خالية (طالما أنّ $a \in [a]_R$ و R انعكاسية).

أخيراً، سنبيّن أنّ الثالثة تقتضي الأولى. لذلك نفرض أنّ $[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$. بالتالي يوجد عنصر c بحيث يكون $c \in [a]_R$ و $c \in [b]_R$. بكلمات أخرى فإنّ aRc و bRc. ومن خاصة التناظر، فإنّ cRb. ومن خاصة التعدي ولأنّ aRc و cRb فإنّ aRb، وهكذا فإنّ aRb. وطالما أنّ الأولى تقتضي الأولى، والثانية تقتضي الثالثة، والثالثة تقتضي الأولى فإنّ العبارات الثلاث الواردة في نص النظرية متكافئة. لنبيّن الآن مفهوم تجزئة علاقة التكافؤ. فإذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A، فإنّ اتحاد صفوف تكافؤ العلاقة R يساوي إلى A، ذلك لأنّ للعنصر a من A. صف تكافؤ ونقصد $[a]_R$. بتعبير آخر فإنّ:

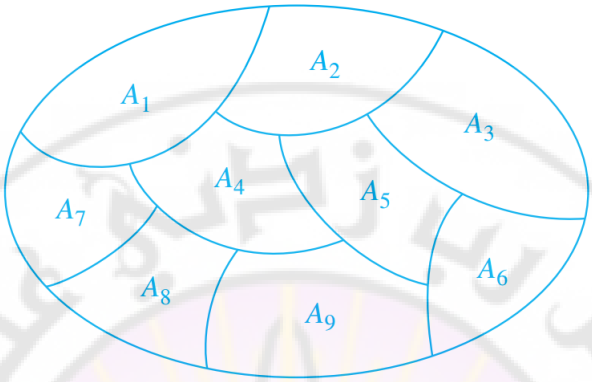
$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

من النظرية (2-3) السابقة، ينتج أنّ صفوف التكافؤ إمّا أن تكون متساوية أو منفصلة. لذلك، فإنّ: $[a]_R \cap [b]_R = \phi$ عندما يكون $[a]_R \neq [b]_R$

من خلال ما سبق نجد أنّ صفوف التكافؤ تشكل تجزئة للمجموعة A، لأنّها تقسمها إلى مجموعات جزئية منفصلة. وبخصوصية أكبر فإنّ تجزئة المجموعة S هي عبارة عن جماعة من المجموعات الجزئية المنفصلة والغير خالية من S والتي يكون اتحادها مساوياً للمجموعة S ذاتها. بكلمات أخرى فإنّ جماعة كل المجموعات الجزئية A_i و $i \in I$ (حيث I مجموعة قيم الدليل i) تشكل تجزئة للمجموعة S إذا وفقط إذا كان:

$A_i \neq \phi$ من أجل $i \in I$، $A_i \cap A_j \neq \phi$ عندما $i \neq j$، و $\cup_{i \in I} A_i = S$.

يوضّح الشكل (3-5) مفهوم تجزئة المجموعة.



الشكل (3-5)

مثال (3-54):

لتكن $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. إنّ جماعة المجموعات:

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, \quad A_2 = \{4, 5\}, \quad A_3 = \{6\}$$

تشكل تجزئةً للمجموعة S، لأنها مجموعات منفصلة واتحادها يساوي S.

– لقد بيّنا بأنّ صفوف تكافؤ علاقة على مجموعة تشكل تجزئة لهذه المجموعة. والمجموعات الجزئية لهذه التجزئة هي صفوف التكافؤ. وبالعكس، إنّ كل تجزئة على مجموعة يمكن أن تستخدم لتشكل علاقة تكافؤ.

– يكون العنصران متكافئين بالنسبة إلى علاقة، إذا وفقط إذا كان في نفس المجموعة الجزئية من التجزئة.

إنّ الحقائق السابقة التي أوردناها يتم إثباتها بسهولة. وسنجملها في النظرية الآتية التي نترك إثباتها للقارئ.

نظرية (3-3):

إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة S. تشكل صفوف تكافؤ هذه العلاقة تجزئة للمجموعة S. وبالعكس، فإنه من أجل التجزئة المعطاة $\{A_i \mid i \in I\}$ للمجموعة S، توجد علاقة تكافؤ R والتي تكون فيها المجموعات A_i و $i \in I$ صفوف تكافؤ لها.

مثال (3-55):

لنوجد الأزواج المرتبة في علاقة التكافؤ R المولدة من خلال التجزئة: $A_1 = \{1,2,3\}$، $A_2 = \{4,5\}$، $A_3 = \{6\}$، للمجموعة: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

نعتبر أنّ المجموعات الجزئية للتجزئة هي صفوف تكافؤ للعلاقة R. إنّ الزوج (a,b) ينتمي إلى R إذا وفقط إذا كان a و b موجودين في المجموعة الجزئية نفسها من التجزئة.

من الواضح أنّ الأزواج:

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$$

تنتمي إلى R، لأنّ $A_1 = \{1,2,3\}$ هي صف تكافؤ. كما أنّ الأزواج:

$$(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)$$

تنتمي إلى R لأنّ $A_2 = \{4,5\}$ هي صف تكافؤ. وأخيراً فإنّ الزوج $(6,6)$ ينتمي إلى R لأنّ $A_3 = \{6\}$ هي صف تكافؤ. ولا توجد أزواج أخرى غير تلك التي أوردناها تنتمي إلى R.

تمارين غير محلولة

1- اكتب العلاقة R من المجموعة $A = \{0,1,2,3,4\}$ إلى المجموعة $B = \{0,1,2,3\}$ والتي تحقق ما يلي $(a,b) \in R$ إذا كان:

a) $a = b$ b) $a + b = 4$ c) $a > b$
d) $a|b$ e) $\gcd(a,b) = 1$ e) $\text{lcm}(a,b) = 2$

2- بين أياً من العلاقات على المجموعة $\{1,2,3,4\}$ انعكاسية، أم تناظرية، أم تخالفية، أم متعدية إذا كانت:

a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

c) $\{(2,4),(4,2)\}$
d) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
e) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
f) $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

3- بين فيما إذا كانت R علاقة على مجموعة كل صفحات الويب، انعكاسية، أم تناظرية، أم تخالفية، أم متعدية عندما $(a,b) \in R$ إذا وفقط إذا:

أ- أي شخص كان قد زار صفحة الويب a، فإنه زار أيضاً صفحة الويب b.

ب- لا يوجد روابط مشتركة بين صفحة الويب a وصفحة الويب b.

جـ- يوجد على الأقل رابط مشترك بين صفحة الويب a وصفحة الويب b.

د- توجد صفحة ويب تتضمن روابط صفحة الويب a وصفحة الويب b.

4- بين فيما إذا كانت R علاقة على مجموعة كل الأعداد الصحيحة، انعكاسية، أم تناظرية، أم تخالفية، أم متعدية عندما $(x,y) \in R$ إذا وفقط إذا:

أ) $x \neq y$ ب) $xy \geq 1$

جـ) $x = y + 1$ أو $x = y - 1$ د) $x \equiv y \pmod 7$

هـ) x مضاعف للعدد y و) x, y موجبان معاً أو سالبان معاً

ز) $x = y^2$ حـ) $x \geq y^2$

5- إذا كانت العلاقات الآتية معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بحيث:

$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$ $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\}$
$R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\}$ $R_4 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$
$R_5 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}$ $R_6 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\}$

أوجد كلاً مما يلي:

1- $R_1 \cup R_3$	2- $R_1 \cup R_5$	3- $R_2 \cap R_4$	4- $R_3 \cap R_5$
5- $R_1 - R_2$	6- $R_2 - R_1$	7- $R_1 \oplus R_3$	8- $R_2 \oplus R_4$
9- $R_2 \cup R_4$	10- $R_3 \cup R_6$	11- $R_3 \cap R_6$	12- $R_4 \cap R_6$
13- $R_3 - R_6$	14- $R_6 - R_3$	15- $R_2 \oplus R_6$	16- $R_3 \oplus R_5$
17- $R_1 \circ R_1$	18- $R_1 \circ R_2$	19- $R_4 \circ R_1$	20- $R_3 \circ R_6$
21- $R_4 \circ R_6$	22- $R_5 \circ R_3$	23- $R_3 \circ R_5$	24- $R_6 \circ R_6$
25- $R_1 \cup R_4$	26- $R_1 \cap R_4$	27- $R_1 - R_4$	28- $R_2 - R_4$

29- $R_6 \oplus R_3$ 30- $R_5 \oplus R_1$ 31- $R_5 - R_1$ 32- $R_5 \cap R_1$

6- لتكن R علاقة على المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ تحتوي على الأزواج: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 2), و (5, 4) . أوجد ما يلي:

a) R^2 b) R^3 c) R^4 d) R^5

7- ما هي ثلاثيات العلاقة $\{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Z}, 0 < a < b < c < 5\}$.

8- أي من الرباعيات ينتمي للعلاقة $\{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}^+, abcd = 6\}$.

9- مثّل العلاقات الآتية على المجموعة $\{1,2,3\}$ بالشكل المصفوفي.

أ- $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$.

ب- $\{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$.

ت- $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$.

جـ- $\{(1,3),(3,1)\}$.

10- مثّل العلاقات الآتية على المجموعة $\{1,2,3,4\}$ بالشكل المصفوفي وبالبيانات.

أ- $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

ب- $\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)\}$.

ت- $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

جـ- $\{(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$.

11- أوجد أزواج العلاقة الممثلة بالشكل المصفوفي الآتي:

a) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

12- أوجد أزواج العلاقة الممثلة بالشكل المصفوفي الآتي:

a) $\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$

13- إذا كانت العلاقة ممثلة بالشكل المصفوفي $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. أوجد مصفوفات تمثيل العلاقات الآتية: $R^2,\ \bar{R},\ R^{-1}$.

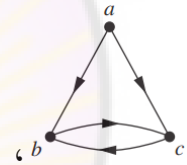
14- لتكن العلاقتان R_1, R_2 الممثلتان بالشكل المصفوفي الآتي:

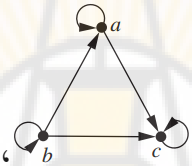
$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

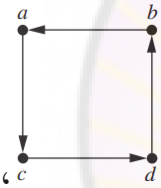
أوجد مصفوفات تمثيل العلاقات:

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 \circ R_2$ d) $R_2 \circ R_1$
e) $R_1 \oplus R_2$ f) $R_1 \circ R_1$ g) R_1^3 h) R_2^4

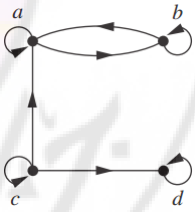
15- أوجد أزواج العلاقات الممثلة بالشكل البياني الآتي:

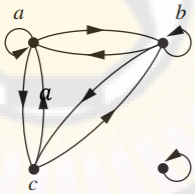
أ- 

ب- 

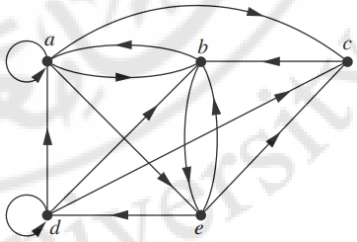
جـ- 

د-

هـ- 

و- 

ز-

ح- 

16- بين أياً من العلاقات الآتية على المجموعة $\{0, 1, 2, 3\}$ هي علاقة تكافؤ.

أ- $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$.

ب- $\{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$.

جـ- $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$.

د- $\{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

هـ- $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$.

17- بيّن أياً من العلاقات الآتية على مجموعة التوابع من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ علاقة تكافؤ.

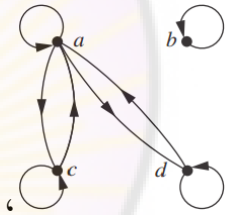
أ- $\{(f,g) \mid f(1) = g(1)\}$.

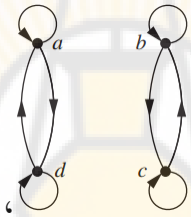
ب- $\{(f,g) \mid f(0) = g(0) \text{ or } f(1) = g(1)\}$.

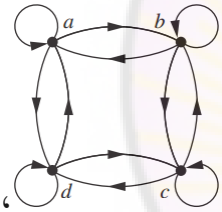
جـ- $\{(f,g) \mid f(x) - g(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{Z}\}$.

د- $\{(f,g) \mid f(1) = g(0) \text{ and } f(0) = g(1)\}$.

18- بين أياً من العلاقات الممثلة بالأشكال الآتية هي علاقة تكافؤ.

أ- 

ب- 

جـ- 

د- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$، هـ- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، حـ- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19- ما هو صف التكافؤ الموافق لـ $[n]_5$ (صف التكافؤ لـ n يمثل باقي القسمة على 5) إذا كانت n هي: أ- 2 ؟، ب- 3 ؟، جـ- 6 ؟، د- 3− ؟.

20- ما هو صف التكافؤ الموافق لـ $[4]_m$ (صف التكافؤ لـ 4 يمثل باقي القسمة على m) إذا كانت m هي: أ- 2 ؟، ب- 3 ؟، جـ- 6 ؟، د- 8 ؟.

21- بين أياً من هذه المجموعات الآتية يمثل تجزئة للمجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$.

أ- $\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5,6\}$ ب- $\{1\},\{2,3,6\},\{4\},\{5\}$

جـ- $\{2,4,6\},\{1,3,5\}$ د- $\{1,4,5\},\{2,6\}$

22- بين أياً من هذه المجموعات الآتية يمثل تجزئة للمجموعة $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

أ- $\{-3,-1,1,3\},\{-2,0,2\}$ ب- $\{-3,-2,-1,0\},\{0,1,2,3\}$

جـ- $\{0\},\{-1,1\},\{-2,2\},\{-3,3\}$ د- $\{-1,1\},\{-3,-2,2,3\}$

23- أوجد أصغر علاقة تكافؤ على المجموعة $\{a,b,c,d,e\}$، تحتوي على العلاقة $\{(a,b),(a,c),(d,e)\}$.

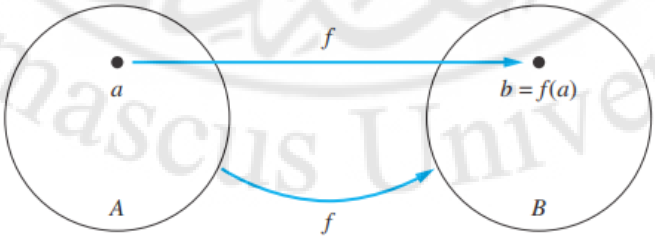
24- بفرض أن R_1 و R_2 علاقتا تكافؤ على المجموعة S. هل تمثل التراكيب الآتية أيضاً علاقات تكافؤ على نفس المجموعة S.

أ- $R_1 \cup R_2$ ب- $R_1 \cap R_2$ جـ- $R_1 \oplus R_2$

6-3 التوابع (functions):

سوف نذكر بمفهوم التابع المهمّ للغاية في الرياضيات وعلوم الحاسب. كما سنورد بعض التوابع الخاصة المستخدمة في التطبيقات الحاسوبية مثل التابعين: floor و ceiling وندرس خواصها وغيرها من التوابع الأخرى.

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين. إنّ التابع f من A إلى B هو علاقة تقرن كل عنصر من A بعنصرٍ وحيد من B. نكتب عندئذٍ $f(a)=b$ للتعبير عن العنصر الوحيد من B المقابل للعنصر a من A وفقاً للتابع f. يوضّح الشكل (6-3) التابع f من A إلى B إذا كان f تابعاً من A إلى B، فإننّا نرمز لذلك بالرمز $f:A\to B$. يُقال في بعض الأحيان عن التوابع إنها تطبيقات (mappings) أو تحويلات (transformations).



الشكل (6-3)

لقد ذكرنا أنّ التابع $f: A \to B$ هو علاقة. وسوف نورد الآن تعريفاً للتابع من خلال عناصر العلاقة التي أوردناها سابقاً. وطالما أنّ f علاقة من A إلى B بشروط معينة فإنّ هذه العلاقة هي مجموعة جزئية من $A \times B$. إنّ العلاقة من A إلى B التي تحوي الزوج المرتب الوحيد فقط (a, b) من أجل أي عنصر a من A، تعرف تابعاً من A إلى B. وهذا التابع يعرَّف من خلال الاقتران $f(a) = b$، حيث (a, b) هو الزوج المرتب الوحيد في العلاقة الذي تكون a فيه العنصر الأول. تدعى A في التابع $f: A \to B$ ساحة هذا التابع أو مجموعة تعريفه (domain) وتدعى B مجموعة قيمه (codomain) وإذا كانت $f(a) = b$ ، فإننا نقول عن b إنها صورة a وفق f. وإذا كان f تابعاً من A إلى B، فإننا نقول إنّ f يطبق (maps) A في B.

1-6-3 حقائق وخواص عن التوابع

نورد بعض الحقائق والخواص المتعلقة بالتوابع

1- إذا كانت f_1 وf_2 توابع من A إلى $\mathbb{R}$ (مجموعةالأعدادالحقيقية)، فإنّ $f_1 + f_2$ و$f_1 f_2$ هي توابع من A إلى $\mathbb{R}$، معرفة على النحو الآتي:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

2- إذا كان f تابعاً من المجموعة A إلى f، ولتكن S مجموعة جزئية من A. إنّ صورة S وفق f هي مجموعة جزئية من B التي تتشكل من صور عناصر S. نرمز لصورة S من خلال $f(S)$، لذا فإنّ:

$$f(S) = \{t \mid \exists s \in S, \quad t = f(s)\}$$

واختصاراً نكتب ذلك:

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

3- يُقال عن التابع إنه متباين (one-to-one) إذا وفقط إذا كانت $f(a) = f(b)$ تقتضي أن يكون $a = b$ من أجل كل العناصر a وb في ساحة f.

4- يُقال عن التابع $f: A \to B$ إنه غامر (onto) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عنصر $b \in B$ هنالك عنصر $a \in A$ بحيث يكون $f(a) = b$.

مثال (3-56):

التابع $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $f(x) = x^2$ هو تابع متباين وهو ليس بغامر.

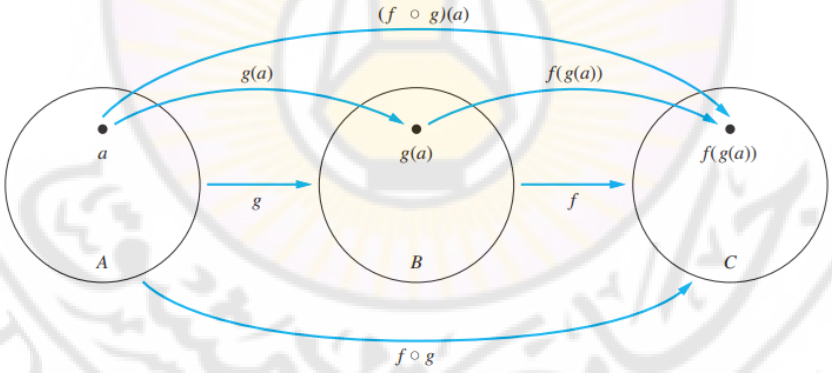
مثال (3-57):

التابع $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $f(x) = x + 1$ هو تابع غامر.

5- إذا كان g تابعاً من A إلى B، وكان f تابعاً من B إلى C. إنّ تركيب (composition) التابعين f و g والذي نرمز له بالرمز $f \circ g$ يعرّف على النحو الآتي:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

يوضّح الشكل (3-7) تركيب التابعين f و g.



الشكل (3-7)

مثال (3-58):

إذا كانت التوابع f و g معرفة من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة من خلال العلاقات: $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = 3x + 2$، ولنوجد $f \circ g$ و $g \circ f$.

نلاحظ أنّ:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x+2) = 6x+7$$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x+3) = 6x+11$$

نلاحظ بشكل عام أنّ $f \circ g \neq g \circ f$. أي إنّ عملية تركيب التوابع ليست عملية تبديلية.

2-6-3 بعض التوابع المستخدمة في التطبيقات الحاسوبية

تزخر لغات البرمجة والنظم والتطبيقات البرمجية بالعديد من التوابع الرياضية. نورد في هذه الفقرة بعض المهم منها، مركزون على دراسة خواصها.

أولاً– تابع القيمة الصحيحة الأصغر floor:

يعرف هذا التابع $\text{floor}: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ وهو تابع يقرن العدد الحقيقي x بالعدد الصحيح الأكبر الذي يصغر أو يساوي x، وسنرمز لذلك بالرمز $\text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$.

ثانياً– تابع القيمة الصحيحة الأعلى ceiling:

ويعرف هذا التابع $\text{ceiling}: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ والذي يقرن العدد الحقيقي x بالعدد الصحيح الأصغر الذي يكبر أو يساوي x، وسوف نرمز لهذا التابع بالرمز $\text{ceiling}(x) = \lceil x \rceil$.

مثال (3-59):

توضح الحالات الآتية هذين التعريفين:

$$\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = 0\,; \quad \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0\,; \quad \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor = -1\,; \quad \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil = 1\,;$$
$$\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1\,; \quad \left\lceil -\frac{1}{3} \right\rceil = 0\,; \quad \lfloor 4.1 \rfloor = 4\,; \quad \lfloor 8 \rfloor = 8\,;$$
$$\lfloor -8 \rfloor = -8\,; \quad \lceil 4.1 \rceil = 5\,; \quad \lceil 8 \rceil = 8\,; \quad \lceil -8 \rceil = -8$$

خواص التابعين floor و ceiling:

تبين العبارات الآتية عدداً من الخواص المفيدة للتابعين floor و ceiling وذلك من أجل n عدد صحيح:

1) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor \quad \text{iff} \quad x \in \mathbb{Z}$
2) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{iff} \quad x \notin \mathbb{Z}$

3) $\lfloor x \rfloor = \lceil x-1 \rceil \quad \text{iff} \quad x \notin \mathbb{Z}$
4) $\lfloor x \rfloor = n \quad \text{iff} \quad n \le x < n+1$
5) $\lceil x \rceil = n \quad \text{iff} \quad n-1 < x \le n$
6) $\lceil x \rceil = n \quad \text{iff} \quad x \le n < x+1$
7) $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
8) $\lceil x-1 \rceil = \lceil x \rceil$
9) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$
10) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
11) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
12) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
13) $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

يمكن إثبات هذه العبارات التي تمثل خواص التابعين floor وceiling من خلال استخدام تقنيات الإثبات التي وردت آنفاً.

مثال (3-60):

لنثبت صحة العبارة الآتية:

$$\text{if } x \in \mathbb{R}, \quad \text{then } \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

الحل: لإثبات صحة هذه العبارة سوف نميز حالتين، فعلى اعتبار أن $x = n + \varepsilon$، حيث n أكبر عدد صحيح أصغر من x وε مقدار حقيقي يحقق المتراجحة $0 \le \varepsilon < 1$ وندرس فيما إذا كان $0 \le \varepsilon < \frac{1}{2}$ و$\frac{1}{2} \le \varepsilon < 1$.

الحالة الأولى: إذا كان $0 \le \varepsilon < \frac{1}{2}$ بالتالي فإن $2x = 2n + 2\varepsilon$، كما أن $\lfloor 2x \rfloor = 2n$ لأن $0 \le 2\varepsilon < 1$. وبشكل مشابه فإن الحد الثاني في الطرف الأيمن من العبارة $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ يمكن إعادة كتابته بالشكل $x + \frac{1}{2} = n + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ من ذلك ينتج $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n$، لأن $0 \le \frac{1}{2} + \varepsilon < 1$.

وطالما أن $\lfloor 2x \rfloor = 2n$ و$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + n = 2n$ فإن العبارة صحيحة.

الحالة الثانية: سوف ندرس هذه الحالة من أجل $\frac{1}{2} \le \varepsilon < 1$ حيث نجد أن:

$$2x = 2n + 2\varepsilon = (2n+1) + (2\varepsilon - 1)$$

وبما أن $0 \le 2\varepsilon - 1 < 1$، فإن ذلك يقتضي $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$. يمكن كتابة الحد الثاني في الطرف الأيمن بالشكل:

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \right\rfloor = \left\lfloor n + 1 + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) \right\rfloor$$

وطالما أن $\frac{1}{2} \le \varepsilon < 1$، فإن $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + 1$ وعليه طالما أن $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$ والطرف الأيمن من العبارة: $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + (n + 1) = 2n + 1$ نستنتج صحة المساواة.

ثالثاً – تابع القيمة المطلقة "abs"

يُعرّف تابع القيمة المطلقة على أنه تابع من الشكل $\text{abs}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرف على النحو الآتي:

$$\text{abs}(x) = \begin{cases} x\,; & x \ge 0 \\ -x\,; & x < 0 \end{cases}$$

يمكن أيضاً أن نكتب هذا التابع من خلال العبارة if-then-else على النحو الآتي:

$$\text{abs}(x) = \text{if } x \ge 0 \text{ then } x \text{ else } -x$$

رابعاً – تابع القاسم المشترك الأعظم gcd

إنّ القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين ليسا معاً مساويين للصفر، هو عبارة عن العدد الصحيح الأكبر الذي يقسم كلا العددين. ونرمز لهذا التابع بالرمز: $\gcd(a, b)$.

خواص التابع gcd:

1- $\gcd(a, b) = \gcd(b, a) = \gcd(a, -b)$

2- إنّ $\gcd(a, b) = \gcd(b, a - bg)$ وذلك من أجل أي عدد صحيح g.

3- إذا كان $g = \gcd(a, b)$، فإنه يوجد العددين الصحيحين x وy بحيث يكون $g = ax + by$.

4- إذا كان $d \mid ab$ وكان $\gcd(d, a) = 1$، فإنّ $d \mid b$.

خامساً – تابع باقي القسمة (mod):

إذا كانت a وb أعداداً صحيحة، حيث $b > 0$، إنّ $b \mid a$ إذا وجد عددان وحيدان q وr صحيحان بحيث يكون $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$.

نقول عن q إنها النسبة (quotient) وr هي باقي (remainder) قسمة a على b.

يُكتب الباقي أيضاً بالشكل: $r = a - bq$.

لنعرف الآن تابع باقي القسمة (mod): إذا كانت a وb أعداداً صحيحة و$b > 0$، فإنه يرمز لباقي قسمة a على b بالرمز: $a \bmod b$.

إذا اتفقنا على تثبيت n على أنه عدد صحيح موجب، عندئذٍ يأخذ التابع $x \bmod n$ قيمة من المجموعة $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ وهي مجموعة البواقي الممكنة التي يتم الحصول عليها من جراء قسمة أي عدد صحيح x على n.

مثال (3-61):

يعطي الجدول الوارد في الشكل (3-8) وفي كل سطر من أسطره بعض قيم $x \bmod n$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x \bmod 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x \bmod 2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \bmod 3$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
$x \bmod 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$x \bmod 5$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

الشكل (3-8)

نستخدم في بعض الأحيان المجموعة N_n والتي نعرفها على النحو الآتي:

$$N_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

فعلى سبيل المثال: $N_0 = \phi$، $N_1 = \{0\}$، $N_2 = \{0, 1\}$.

لذلك ومن أجل n مثبّتة، فإنّ التابع المعرّف بالعلاقة $f(x) = x \bmod n$ ، هو من الشكل:

$$f: \mathbb{Z} \to N_n$$

صيغة لتابع باقي القسمة.

يمكن أن توجد صيغة من أجل: $a \bmod b$ والتي سوف نستخلصها من خلال الخطوات الآتية:

لدينا: $a \bmod b = r = a - bq$ حيث $0 \leq r < b$ والتي ننطلق منها في بدء متتالية الخطوات المطلوبة.

$$0 \leq r < b$$
$$-b < -r \leq 0$$
$$a - b < a - r \leq a$$
$$\frac{a-b}{b} < \frac{a-r}{b} \leq \frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{b} - 1 < \frac{a-r}{b} \leq \frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{b} - 1 < q \leq \frac{a}{b}$$
$$q = \frac{a-r}{b}$$

وبما أن q عدد صحيح، فإنّ المتراجحة الأخيرة تقتضي أنه يمكن كتابة q من خلال تابع floor على النحو الآتي:

$$q = \text{floor}\left(\frac{a}{b}\right) = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

بما أنّ $r = a - bq$، فإنه سوف يكون لدينا التمثيل الآتي للباقي r عندما $b > 0$:

$$r = a - b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

وهذه هي صيغة لتابع باقي القسمة. أي إنّ:

$$a \bmod b = a - b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

خواص التابع mod:

لتابع باقي القسمة عدد من الخواص، سنورد بعضاً منها.

1- إنّ تعريف تابع باقي القسمة يخبرنا أن: $0 < x \bmod n < n$ من أجل أي عدد صحيح x.

2- من أجل أي عدد صحيح x، لدينا: $(x \bmod n) \bmod n = x \bmod n$

3- إنّ $x \bmod n = x$ إذا وفقط إذا كان $0 \leq x < n$.

4- $(x + y) \bmod n = \big((x \bmod n) + (y \bmod n)\big) \bmod n$

5- $(xy) \bmod n = \big((x \bmod n)(y \bmod n)\big) \bmod n$

6- إذا كان $ax \bmod n = ay \bmod n$، وكان $\gcd(a, n) = 1$ فإنّ:

$$x \bmod n = y \bmod n$$

7- إذا كان $\gcd(a, n) = 1$، فإنّ $1 \bmod n = ax \bmod n$، من أجل x عدداً صحيحاً ما.

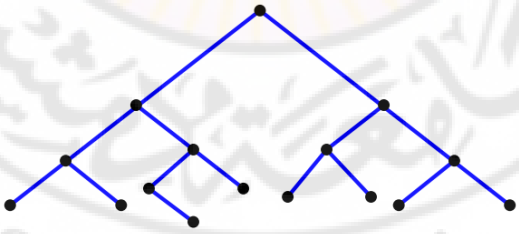
سادساً – التابع اللغاريتمي (The log function)

إنّ التابع **log** اختصار لكلمة Logarithm وهذا التابع يقوم بقياس حجم الأس. سوف نبدأ من العدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$. فإذا كانت x عدداً حقيقياً موجباً، فإنّ:

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

ونقول إنّ لغاريتم x بالنسبة للأساس b، يساوي y.

إنّ تابع اللغاريتم الثنائي $\log_2$ أي بالأساس 2 يستخدم استخداماً كبيراً في علوم الحاسب، لوجود العديد من الخوارزميات ثنائية الخيارات، كما أنّ الشجرة الثنائية أداة مهمة لبنى المعطيات. على سبيل المثال: نفرض أنه لدينا شجرة بحث ثنائية فيها 16 عقدة وبنيتها موضّحة بالشكل (3-9) كمثال على شجرة ثنائية.



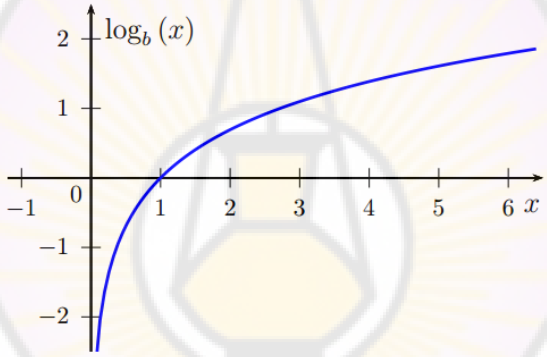
الشكل (3-9)

إنّ عمق الشجرة هو 4، لذا فإنّنا نحتاج كحد أعظمي إلى 5 مقارنات لإيجاد أي عنصر في الشجرة. نلاحظ في هذه الحالة أنّ $2^4 = 16$، لذلك يمكن أن نكتب في حدود من عدد العقد: $\log_2 16 = 4$ يعطي الشكل (3-10) بعض من القيّم المختارة للتابع $\log_2$. ومن

الطبيعي أن يأخذ $\log_2$ قيماً حقيقية. فمثلاً إذا كانت $8 < x < 16$ فإنّ $3 < \log_2 x < 4$. من أجل أي عدد حقيقي $b > 1$، إنّ التابع $\log_b x$ هو تابع متزايد على اعتبار أنّ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة هي مجموعة تعريفه أو ساحته وأنّ مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة قيمه، في هذه الحالة فإنّ المنحني البياني للتابع $\log_b$ في الحالة العامة موضح في الشكل (3-11).

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

الشكل (3-10)



الشكل (3-11)

إنّ للتابع $\log_b$ العديد من الخواص، فمن السهل أن نرى أنّ:

$$\log_b 1 = 0\,, \qquad \log_b b = 1$$

تسمح الخواص الأساسية للتابع $\log_b$ القيام بحساب التعابير اللغاريتمية.

الخواص الأساسية للتابع log:

1- $\log_b(b^x) = x$

2- $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

3- $\log_b(x^y) = y \log_b x$

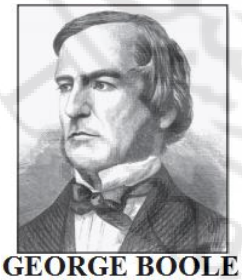
4- $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$

5- قاعدة تغيير الأساس (change of base): $(\log_a x) = (\log_a b)(\log_b x)$

سابعاً – التوابع الجزئية (partial function)

إنّ التابع الجزئي من A إلى B يشبه التابع ما عدا إنه يمكن أن يكون غير معرّف من أجل بعض العناصر من A. بكلمات أخرى، إنّ بعض العناصر من A يمكن أن لا تكون مرتبطة بأي عنصر من B. لكن ما زال لدينا المتطلب بأنه إذا كانت $x \in A$ المرتبطة من خلال $y \in B$ ، فإنّ x لا يمكن أن تكون مرتبطة بأي عنصر آخر من B. على سبيل المثال، نعلم أنّ القسمة على صفر غير مسموحة، لأجل ذلك فإنّ عملية القسمة $\div$ هي تابع جزئي من النمط $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، لأنّ عملية القسمة غير معرفة من أجل الأزواج من الشكل $(x, 0)$ للتمييز بين التوابع، فإنه يستخدم في بعض الأحيان مصطلح التابع الكلي (total function) والذي يقصد فيه أنه التابع المعرّف على كل عناصر A. ومن المعلوم أنّ أي تابع جزئي يمكن أن يحول إلى تابع كلي. على سبيل المثال إنّ عملية القسمة هي تابع كلي من النمط: $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$.

يمكن أن نورد إحدى التقنيات المستخدمة في تحويل التابع الجزئي إلى كلي. إذا كان $f: A \to B$ تابعاً جزئياً. لنحدد رمزاً ما غير موجود في B، وليكن على سبيل المثال $\# \notin B$، ثم نضع $f(x) = \#$ حيث يكون $f(x)$ غيرَ معرفٍ. عندئذٍ يمكن النظر إلى f على أنه تابع كلي من النمط $A \to B \cup \{\#\}$. برمجياً فإنه يتم بشكل مماثل وضع رسالة خطأ للإشارة إلى أنه قد تمّ التعامل مع مدخلات غير ملائمة.


GEORGE BOOLE
(1815–1864)

7-3 جبر بول (Boolean Algebra)

يقدم جبر بول أسس وقواعد العمل مع المجموعة $\{0, 1\}$. إنّ العديد من المسائل التطبيقية تدرس من خلال هذه المجموعة وقواعد جبر بول. يستخدم في جبر بول ثلاث عمليات أساسية هي:

أ- الجمع البولياني والذي سنرمز له من خلال $(+)$ بدلاً من or.

ب- الجداء البولياني والذي سنرمز له من خلال (·) بدلاً من and.

ت- متمم عنصر باستخدام خط فوق العنصر، على سبيل المثال $\overline{0} = 1$ و $\overline{1} = 0$.

إنّ لعملية الجمع البولياني القيم الآتية على عناصر المجموعة $\{0,1\}$:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=1$$

كما إنّ للجداء البولياني القيّم الآتية على عناصر المجموعة $\{0,1\}$:

$$0\cdot 0=0, \quad 1\cdot 0=0, \quad 0\cdot 1=0, \quad 1\cdot 1=1$$

للسهولة يمكن أن نهمل إشارة الجداء (·) دون أن يؤدي ذلك إلى أي التباس كما في حالة الجداء الجبري المعروف.

مثال (3-62):

لنوجد $1\cdot 0+\overline{(0+1)}$

باستخدام مفهوم المتمم والجمع والجداء البولياني، نجد أنّ:

$$1\cdot 0+\overline{(0+1)}=0+\overline{1}=0+0=0$$

إنّ المتمم والجداء والجمع البولياني تتعلق بعمليات منطقية سبق أن توقفنا عندها وهي: النفي not، والجداء and، والجمع or. ويقرن 0 بالقيمة المنطقية F ويقرن 1 بالقيمة المنطقية T. إنّ المساويات في جبر بول يمكن أن تحوَّل مباشرةً إلى قضايا وعبارات مركبة متكافئة وبالعكس فإنّ القضايا والعبارات المركبة المتكافئة يمكن أن تحوَّل إلى مساوايات جبر بول، وسنرى في هذه الفترة كيف يمكن لهذه التحويلات أن تعطي مكافئات منطقية صحيحة ومساويات في جبر بول.

مثال (3-63):

لنحول المساواة $1\cdot 0+\overline{(1+0)}=0$، إلى تكافؤ منطقي.

نلاحظ أننّا نصل إلى التكافؤ المنطقي عندما نحول كل 1 إلى T وكل 0 إلى F، بالاضافة إلى ذلك يجب أن نحوّل الجمع البولياني إلى فصل، وكل جداء بولياني إلى وصل، وكل إتمام بولياني إلى النفي المنطقي. نحصل عندئذٍ على:

$$(T \wedge F) \vee \neg(T \vee F) \equiv F$$

أو بشكل آخر:

$$(T \text{ and } F) \text{ or not } (T \text{ or } F) \equiv F$$

مثال (3-64):

إنّ التابع $F(x,y) = x\,\bar{y}$ من مجموعة الأزواج المرتبة من المتحولات البوليانية، إلى المجموعة $\{0,1\}$ هو تابع بولياني من الدرجة 2، حيث:

$$F(0,0) = 0\,, \quad F(1,1) = 0\,, \quad F(1,0) = 1\,, \quad F(0,1) = 0$$

وسوف نظهر قيّم F في الجدول الموضّح في الشكل (3-12):

x	y	$F(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

الشكل (3-12)

يمكن للتابع البولياني أن يمثل باستخدام تعابير مشكلة من متحولات وعمليات بوليانية.

إنّ التعابير البوليانية في المتحولات: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ تعرف عمودياً على النحو الآتي:

إنّ $0, 1, x_1, x_2, \cdots, x_n$ هي تعابير بوليانية.

إذا كانت E_1 وE_2 تعابير بوليانية، فإنّ $\bar{E}_1$ و(E_1E_2) و$(E_1 + E_2)$ هي تعابير بوليانية.

مثال (3-65)

سنقوم في هذا المثال بتحويل تكافؤ منطقي إلى مساواة. فإذا كان لدينا التكافؤ المنطقي الآتي:

$$(T \text{ and } T) \text{ or not } F \equiv T$$

لنوجد المساواة المقابلة لهذا التكافؤ في جبر بول. لذلك سوف نقوم بتحويل كل T إلى 1، وكل F إلى صفر، وكل فصل إلى الجمع البولياني، والوصل إلى الجداء البولياني، وكذلك النفي إلى الإتمام. نحصل بعد ذلك على المساواة: $1 \cdot 1 + \bar{0} = 1$.

1-7-3 التعابير البولیانیة والتوابع البولیانیة

لتكن $B = \{0,1\}$. بالتالي فإن $B^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,;\, x_i \in B\,;\, 1 \le i \le n\}$ هي مجموعة كل المرتبات ذات الطول n المكونة من أصفار وواحدات. نقول عن x إنه متحول بولياني إذا كانت قيمه المفترضة تؤخذ من المجموعة B فقط، أي إذا كانت قيّم هذا المتحول هي 0 و1 فقط. ويدعى التابع من B^n إلى B بالتابع البولياني من الدرجة n.

ملاحظة: إنّ كل تعبير بولياني يمثل تابعاً بولياناً. وقيم هذا التابع يتم الحصول عليها من خلال تعويض متحولات التعبير بالقيم 0 و1.

وسنرى فيما بعد أيضاً أنّ كل تابع بولياني هو تعبير بولياني.

مثال (3-66):

لنوجد قيم التابع البولياني المعطى من خلال:

$$F(x,y,z) = xy + \bar{z}$$

يوضّح الشكل (3-13) جدولاً بقيم التابع البولياني F.

يمكننا أن نمثل التابع البولياني بيانياً من خلال رؤوس مختلفة في مكعب-n، والتي اقترنت بالمتعددات ذات الطول n من البتات حيث يكون للتابع القيمة 1.

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x,y,z) = xy + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

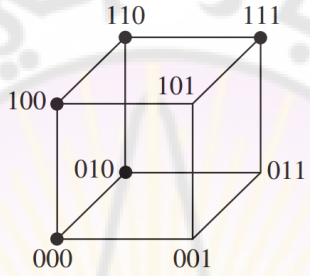
الشكل (3-13)

مثال (3-67):

التابع البوليانيّ $F(x,y,z)=xy+\bar{z}$ من B^3 إلى B يمكن أن يمثل برؤوس مختلفة اقترنت بخمس من المتعددات الثلاثية الطول وهي:

$$(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0)$$

حيث يكون عندها $F(x,y,z)=1$. يوضّح الشكل (3-14) هذه الرؤوس بإظهارها على شكل دوائر سوداء.



الشكل (3-14)

يتساوى التابعان البوليانيان F و G بـ n من المتحولات، إذا وفقط إذا كان:

$$F(b_1,b_2,\cdots,b_n)=G(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

أياً كانت: $b_1,b_2,\cdots,b_n$ من B.

يدعى التعبيران البوليانيان المختلفان إنهما تعبيران متكافئان، إذا كان كل منهما يمثل التابع البوليانيّ نفسه.

مثال (3-68):

التعابير: xy ، $xy+0$ ، $xy\cdot 1$ هي تعابير بوليانية متكافئة.

مثال (3-69):

يمكن طرح السؤال الأكثر عمومية عن عدد التوابع البوليانية المختلفة من الدرجة n الممكنة.

نلاحظ أنه من قاعدة الجداء في العد، فإنه ينتج وجود 2^n من المتعددات ذات الطول n المختلفة المكونة من أصفار وواحدات. وبما أنه يسند للتابع البوليانيّ القيمة 0 أو 1

إلى كل من 2^n من المتعددات ذات الطول والمختلفة، فإنّ قاعدة الجداء تظهر وجود 2^{2^n} من التوابع البوليانية المختلفة من الدرجة n.

مثال (3-70):

يظهر الجدول الموضّح في الشكل (3-15) عدد التوابع البوليانية المختلفة من الدرجة الأولى وحتى الدرجة السادسة. ويظهر هذا الجدول النمو السريع لعدد التوابع.

الدرجة	العدد
1	4
2	16
3	256
4	65,536
5	4,294,967,296
6	18,446,744,073,709,551,616

الشكل (3-15)

إنّ متمم التابع البولياني F هو التابع $\bar{F}$، حيث إنّ:

$$\bar{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

ليكن F و G تابعان بوليانيان من الدرجة n. إنّ الجمع البولياني $F + G$ والجداء البولياني FG، يعرفان على النحو الآتي:

$$(F + G)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) + G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$(FG)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

إنّ التابع البولياني من الدرجة 2 هو تابع من مجموعة مكونة من أربعة عناصر (الأزواج من $B = \{0, 1\}$)، إلى المجموعة B وهي مجموعة مكونة من عنصرين. هذا يعني أنه يوجد 16 من التوابع البوليانية من الدرجة 2 والموضحة بالشكل (3-16). سوف نرمز لهذه التوابع من خلال: $F_1, F_2, F_3, \cdots, F_{15}, F_{16}$

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

الشكل (3-16)

2-7-3 المساويات في جبر بول

هنالك العديد من المساويات في جبر بول. إنّ الأكثر أهمية من هذه المساويات موضّح في الشكل (3-18). وتعتبر بأنها ذات أهمية بالغة في تبسيط اختصار الدارات. سوف نقوم باثبات إحدى هذه المساويات في المثال الآتي:

مثال (3-71):

لنبيّن صحة قانون التوزيع: $x(y+z) = xy + xz$. يبيّن الشكل (3-17) مراجعة المساواة. ونلاحظ أنّ هذه المساواة صحيحة لأنّ العامودين الأخيرين من هذا الجدول متوافقان.

x	y	z	$y+z$	$x\,y$	$x\,z$	$x(y+z)$	$xy+xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

الشكل (3-17)

سنقوم بتوضيح ذلك من خلال المثال الآتي.

المساواة	الاسم
$\bar{\bar{x}} = x$	الإتمام المضاعف

قوانين تساوي القوى	$x + x = x$ $x \cdot x = x$
قوانين الحيادي	$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$
قوانين الهيمنة	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$
قوانين التبديل	$x + y = y + x$ $x \cdot y = y \cdot x$
قوانين التجميع	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$
قوانين التوزيع	$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$
قوانين دمورغان	$\overline{(xy)} = \bar{x} + \bar{y}$ $\overline{(x + y)} = \bar{x}\bar{y}$
قوانين الامتصاص	$x + xy = x$ $x(x + z) = x$
الخاصة الواحدية	$x + \bar{x} = 1$
الخاصة الصفرية	$x\bar{x} = 0$

الشكل (3-18)

مثال (3-72):

سنقوم بتحويل قانون التوزيع: $x + yz = (x + y)(x + z)$ إلى تكافؤ منطقي.

لأجل ذلك، سوف نقوم بتغيير كل متحول بولياني إلى متحول عبارة. وهنا نستبدل المتحولات البوليانية: x, y, z بالمتحولات: p, q, r. ثم بعد ذلك نقوم باستبدال كل مجموع بولياني إلى فصل وكل جداء إلى وصل (نلاحظ هنا عدم ظهور 0 و1 في هذه المساواة وكذلك الإتمام). إنّ هذه العمليات التي قمنا بها تحول المساواة البوليانية إلى التكافؤ المنطقي:

$$p \text{ or } (q \text{ and } r) \equiv (p \text{ or } q) \text{ and } (p \text{ or } r)$$

وهذا التكافؤ المنطقي الذي حصلنا عليه، هو أحد قوانين التوزيع الواردة في الجدول (3-18). وعامة يمكن استخدام المساويات في الجبر البولياني في إثبات العديد من المساويات الأخرى الإضافية.

مثال (3-73):

لنثبت صحة قانون الامتصاص $x(x+y)=x$. يمكن استخدام مساويات أخرى من جبر بول. والخطوات المستخدمة للوصول إلى الإثبات موضحة في الشكل (3-19):

الناتج في كل خطوة	العمل المطبق في الخطوة
$x(x+y)=(x+0)(x+y)$	استخدام قانون الحيادي من أجل الجمع البولياني
$=x+0\cdot y$	استخدام قانون توزيع الجمع على الجداء البوليانيين
$=x+y\cdot 0$	استخدام قانون التبديل في الجداء البولياني
$=x+0$	استخدام قانون السيطرة من أجل الجداء البولياني
$=x$	قانون الحيادي من أجل الجمع البولياني

الشكل (3-19)

3-7-3 الإثنانية أو الإزدواجية (Duality)

لقد وجدنا أن المساويات الواردة في الجدول الموضّح بالشكل (3-18) قد أتت في شكل ثنائيات باستثناء: حالة الإتمام المضاعف والخاصة الواحدية والخاصة الصفرية. لتوضيح العلاقة بين المساوتين الواردتين في كل زوج، سنقوم باستخدام الإثناني (Dual). إنّ الإثناني في تعبير بولياني يتم الحصول عليه من خلال استبدال المجاميع البولينية بالجداءات وباستبدال الأصفار بواحدات.

مثال (3-74):

لنوجد إثناني كل من التعابير الآتية:

$$x(y+0) \quad ; \quad \bar{x}\cdot 1+(\bar{y}+z)$$

نقوم باستبدال إشاراته ومن ثم استبدال الأصفار والواحدات في هذه التعابير التي تنتج الإثناني. ونلاحظ أنّ $x+(y\cdot 1)$ هو ثنوي $x(y+0)$، كما أنّ $(\bar{x}+0)(\bar{y}z)$ هو ثنوي $\bar{x}\cdot 1+(\bar{y}+z)$.

يتمثل ثنوي التابع البولياني F من خلال تعبير بولياني هو تابع ممثل لإثناني هذا التعبير. يرمز إثناني التابع بالرمز F^d وليس متعلقاً بالتعبير البولياني الخاص المستخدم في تمثيل F. والمطابقة بين التوابع التي مثلت بتعابير بولينية تبقى صحيحة عندما يكون إثناني الطرفين معاً للمطابقة قد أخذا. إنّ هذه النتيجة، تدعى بالمبدأ الإثناني وهو مفيد في الحصول على مطابقات جديدة.

مثال (3-75):

لننشئ المطابقة من قانون الامتصاص $x(x+y)=x$ بأخذ إثنانيات.

بأخذ إثناني الجانبين معاً للمطابقة، فإنّنا نحصل على المطابقة $x+xy=x$، والتي تدعى أيضاً بقانون الامتصاص الموضّح بالشكل (3-18).

التعريف المجرد لجبر بول

سوف نركز في هذه الفقرة على التوابع والتعابير البولينية. وبما أنّنا قد أسسنا فإنه بمقدورنا أن نحولها إلى نتائج عن القضايا والعبارات أو نحولها إلى نتائج على المجموعات. ولهذا فمن المفيد أن نعرف معرفة مجردة لجبر بول.

يمكن أن نعرف جبر بول (Boolean Algebra) بطرق وأساليب مختلفة. والأسلوب الأكثر شيوعاً هو أن نحدد الخواص التي ينبغي على العمليات أن تحققها.

تعريف: إنّ جبر بول مجموعة B بعمليتين ثنائيتين هما or وand، إضافة إلى العناصر: $0,1$، والعملية الأحادية (الإتمام أو النفي) not، وبحيث تكون هذه الخواص محققة من أجل كل القيم: x,y,z من B:

1- $\begin{cases} x \vee 0 = x + 0 = x \\ x \wedge 1 = x \cdot 1 = x \end{cases}$ قوانين التطابق.

2- $\begin{cases} x \vee \bar{x} = x + \bar{x} = 1 \\ x \wedge \bar{x} = x \cdot \bar{x} = 0 \end{cases}$ قوانين الاتحاد.

3- $\begin{cases} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \end{cases}$ قوانين التجميع.

4- $\begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$ قوانين التبديل.

5- $\begin{cases} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$ قوانين التوزيع.

إنّ المجموعة $B = \{0, 1\}$ والعمليتين and وor بالإضافة إلى مؤثر الإتمام تحقق كل القوانين الواردة في التعريف السابق.

باستخدام القوانين الواردة في تعريف جبر بول، فإنه من الممكن القيام بإثبات العديد من القوانين الأخرى والتي تتحقق من أجل كل جبر بول.

من خلال المناقشة السابقة فإنّ $B = \{0, 1\}$ مع العمليتين: and, or وعملية الإتمام تحقق معاً كل الخواص السابقة. كما أن المجموعة المكونة من قضايا تتضمن n من المتغيرات مع عمليتي الوصل والفصل وF وT وعملية النفي تحقق أيضاً كل الخواص السابقة الواردة في التعريف لجبر بول. بشكل مشابه فإنّ مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة الكلية الشاملة U ومع عمليتي الاتحاد والتقاطع والمجموعة الخالية والمجموعة الكلية وعملية الاتمام هي عبارة عن جبر بول.

4-7-3 تمثيل التوابع البوليانية

سوف ندرس مسألتين هامتين في جبر بول. الأولى تتعلق بأنه إذا أعطيت قيم تابع بولياني، فكيف يمكن للتعبير البولياني الذي يمثل هذا التابع أن يتم إيجاده. والثانية تتعلق بوجود مجموعة أصغر من العمليات التي يمكن أن تستخدم لتمثيل كل التوابع البوليانية؟

سوف نقوم في البدء بعرض عدد من الأمثلة تبيّن كيفية إيجاد التعبير البولياني الذي يمثل تابعاً بولياناً.

مثال(3-76):

لنوحد التوابع البوليانية التي تمثل التوابع: $F(x,y,z), G(x,y,z)$ والمعطاة من خلال الجدول الموضّح بالشكل (3-20).

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

الشكل (3-20)

إنّ التعبير الذي له القيمة 1 عندما $x = z = 1$ و$y = 0$ وله القيمة 0 في خلاف ذلك سوف نحدده ليمثل F.

يمكن لمثل هذا التعبير أن يشكل بأخذ الجداء البولياني للمتغيرات: $x, \bar{y}, z$. إنّ هذا الجداء هو $x, \bar{y}, z$ وله القيمة 1 إذا وفقط إذا كانت $x = \bar{y} = z = 1$، والتي تتحقق إذا وفقط إذا كانت $x = 1$ و$y = 0$ أمّا لتمثيل G فإننّا نحتاج إلى تعبير تساوي قيمته 1 عندما $x = y = 1$ و$z = 0$ أو عندما $x = z = 0$ و$y = 1$. يمكن تشكيل هذا التعبير من خلال أخذ الجمع البولياني لجدائين بوليانيين مختلفين. إنّ للجداء البولياني $xy\bar{z}$ القيمة 1 إذا وفقط إذا كانت $x = y = 1$ و$z = 0$. بشكل مشابه، إنّ للجداء $\bar{x}y\bar{z}$ القيمة 1 إذا وفقط إذا كانت $x = z = 0$ و$y = 1$. إنّ الجمع البولياني لهذه

الجداءات هو: $xy\bar{z} + \bar{x}yz$ يمثل G لأنّ له القيمة 1 إذا وفقط إذا كانت $x = y = 1$ و$z = 0$ أو $x = z = 0$ و$y = 1$.

يوضّح المثال (3-72) إجرائية إنشاء تعبير بولياني يمثل تابعاً أعطيت قيمه. إنّ كل تركيب من قيم المتحولات التي يكون من أجلها للتابع القيمة 1 تقود إلى جداء بولياني للمتحولات أو لمتمماتها.

إنّ المحرف (litral) عبارة عن متغير بولياني أو متممه. كما إنّ الحد الأصغر (minterm) للمتغيرات البوليانية $x_1, x_2, \cdots, x_n$ عبارة عن الجداء البولياني $y_1, y_2, \cdots, y_n$ حيث إنّ $y_i = x_i$ أو $y_i = \bar{x}_i$. ومن الواضح هنا أنّ الحد الأصغر هو جداء n من المحارف وذلك بمحرفٍ لكل متغير.

إنّ للحد الأصغر القيمة 1 من أجل واحد وواحد فقط من تركيب قيم متغيراته. وبدقة أكبر فإنّ الحد الأصغر $y_1, y_2, \cdots, y_n$ له القيمة 1 إذا وفقط إذا كانت كل y_i هي 1، وهذا يحدث إذا وفقط إذا كانت $x_i = 1$ عندما تكون $y_i = x_i$ و$x_i = 0$ عندما تكون $y_i = \bar{x}_i$.

مثال (3-77):

لنوجد الحد الأصغر المساوي 1 إذا كانت $x_1 = x_3 = 0$ و$x_2 = x_4 = x_5 = 1$ والذي يساوي الصفر في الحالات الأخرى.

إنّ الحد الأصغر هو: $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$ وله مجموعة صحيحة من القيم.

عند أخذ المجاميع البوليانية لحدود أصغرية مختلفة فإنه يمكن بناء التعبير البولياني مع مجموعة محددة من القيم. وبشكل خاص فإنّ الجمع البولياني للحدود الأصغرية التي لها القيمة 1 عندما يكون لواحدة بالضبط من الحدود الأصغرية في الجمع له القيمة 1. وله القيمة 0 من أجل كل التركيبات الأخرى لقيّم المتحولات.

إذا أعطي تابع بولياني، فإنّ مجموع الحدود الأصغرية يمكن أن يشكل بحيث يكون له القيمة 1 عندما يكون للتابع البولياني القيمة 1، وله القيمة 0 عندما يكون للتابع البولياني القيمة 0. إنّ الحدود الأصغرية في هذا المجموع البولياني تقابل تلك التركيبات من القيم التي يكون من أجلها للتابع البولياني القيمة 1. إنّ مجموع الحدود الأصغرية التي تمثل تابعاً تدعى بصيغة الفصل العادية DNF (disjunctive normal form) للتابع البولياني.

مثال (3-78):

لنوجد صيغة الفصل العادية للتابع: $F(x,y,z)=(x+y)\bar{z}$

سوف نوجد المطلوب بطريقتين. أولاً باستخدام المطابقات البولينية على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (x+y)\bar{z} \\ &= x\bar{z}+y\bar{z} \\ &= x1\bar{z}+1y\bar{z} \\ &= x(y+\bar{y})\bar{z}+(x+\bar{x})y\bar{z} \\ &= xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z} \\ &= xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z} \end{aligned}$$

والطريقة الثانية من خلال بناء صيغة الفصل العادية بتحديد قيم F من أجل كل القيم الممكنة للمتحولات الثلاثة: x,y,z. يبين الجدول الموضّح بالشكل (3-21) صيغة الفصل العادية للتابع F وهو عبارة عن مجموع لثلاثة حدود أصغرية تقابل الأسطر الثلاثة من هذا الجدول التي تعطي القيمة 1 للتابع. وهذا يعني أنّ:

$$F(x,y,z)=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$$

x	y	z	$x+y$	$\bar{z}$	$(x+y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1

0 0	0 0	1 0	0 0	0 1	0 0

الشكل (3-21)

يمكن أيضاً أن نوجد التعبير البولياني الذي يمثل تابعاً بولياناً بأخذ الجداء البولياني للمجاميع البوليانية.

3-7-5 الإتمام التابعي (Functional Completeness)

يمكن التعبير عن كل تابع بولياني على أنه مجموع بولياني للحدود الأصغرية. إنّ كل حدّ أصغر هو جداء بولياني للمتحولات البولينية أو متمماتها. وهذا يبيّن أنّ كل تابع بولياني يمكن أن يمثل باستخدام العمليات البولينية: $(+), (\cdot), (^-)$. ولأنّ كل تابع بولياني يمثل باستخدام هذه العمليات، فإننّا نقول عن المجموعة $\{+, \cdot, ^-\}$ إنها متمم تابعي. ولنتساءل هل يمكن أن نوجد المجموعة الأصغر من هذه العمليات أي مجموعة عمليات المتمم التابعي؟. إنّنا نستطيع القيام بذلك إذا كانت واحدة من العمليات الثلاث في هذه المجموعة يعبّر عنها من الاثنتين المتبقيتين. يمكن أن ننجز ذلك باستخدام قوانين دومورغان. ونستطيع أن نحذف كل المجاميع البولينية باستخدام المطابقة:

$$x + y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$$

ويتم الحصول عليها من أخذ متممة طرفي قانون دومورغان الثاني المعطى في الشكل (18)، ومن ثم تطبيق قانون الإتمام المضاعف.

إنّ هذا يعني أنّ المجموعة $\{\cdot, ^-\}$ متمم تابعي. بشكل مشابه يمكن أن نحذف كل الجداءات البولينية باستخدام المطابقة:

$$xy = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$$

والتي يتم الحصول عليها بأخذ متممات طرفي قانون دومورغان الأول الوارد في الشكل (3-18)، ومن ثم تطبيق قانون المتمم المضاعف. بالتالي فإنّ $\{+, ^-\}$ هي متمم

تابعي. نلاحظ أنّ {+,·} متمم تابعي لأنه من الممكن التعبير عن التابع البولياني $F(x) = \bar{x}$ باستخدام هذه العمليات.

لقد وجدنا مجموعات حاوية على عمليتين وهي عبارة عن متممات تابعية. ولنتساءل أيضاً هل يمكن أن نوجد مجموعة حاوية على عملية واحدة فقط؟ إنّ مثل هذه المجموعات موجود. لنعرف العمليتين الآتيتين:

* العملية ↑ أو NAND والتي تعرف على النحو:

$$1 \uparrow 1 = 0, \qquad 1 \uparrow 0 = 1 \uparrow 0 = 0 \uparrow 0 = 1$$

* والعملية ↓ أو NOR والتي تعرف على النحو:

$$1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0, \qquad 0 \downarrow 0 = 1$$

إنّ المجموعتين {↑},{↓} هي متممات تابعية. ولنبيّن أنّ {↑} هي متمم تابعي. بما أنّ {·, ¯} هي متمم تابعي فإنه علينا أن نبيّن أنه يعبّر عن العمليتين ¯, · باستخدام العملية ↑ فقط يمكن إنجاز ذلك على النحو:

$$\bar{x} = x \uparrow x$$
$$xy = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$$

تمارين غير محلولة

1- استخدم جداول الحقيقة لإيجاد قيم التوابع البولينية الآتية:

$a)\ F(x,y,z) = \bar{x}y$ $\qquad$ $b)\ F(x,y,z) = x + yz$

$c)\ F(x,y,z) = x\bar{y} + \overline{(xyz)}$ $\qquad$ $d)\ F(x,y,z) = x(yz + \bar{y}\bar{z})$

$e)\ F(x,y,z) = \bar{z}$ $\qquad$ $f)\ F(x,y,z) = \bar{x}y + \bar{y}z$

$g)\ F(x,y,z) = x\bar{y}z + \overline{(xyz)}$ $\qquad$ $h)\ F(x,y,z) = \bar{y}(xz + \bar{x}\bar{z})$

2- استخدم التمثيل المكعبي لتمثيل التوابع البولينية الواردة في التمرين السابق.

3- ما هي قيم المتغيرات البولينية x وy التي تحقق العلاقة: $xy = x + y$؟

4- ما هو عدد التوابع البولينية المختلفة من الدرجة السابعة 7؟

5- برهن أن التابع البولياني $F(x,y,z) = xy + xz + yz$، يأخذ القيمة 1 إذا وفقط إذا كان اثنان على الأقل من المتغيرات x أو y أو z يأخذان القيمة 1.

6- برهن أن $x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z = \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z}$.

7- تعرف العملية $\oplus$ البوليانية بالشكل:

$$0 \oplus 0 = 0 \qquad 0 \oplus 1 = 1 \qquad 1 \oplus 0 = 1 \qquad 1 \oplus 1 = 0$$

لذلك أوجد ناتج العبارات الآتية:

$a) x \oplus 0 \qquad b) x \oplus 1 \qquad c) x \oplus x \qquad d) x \oplus \bar{x}$

8- برهن أن:

$a) x \oplus y = (x + y)\overline{(xy)}$
$b) x \oplus y = (x\bar{y})(\bar{x}y)$
$c) x \oplus y = y \oplus x$

9- هل هذه المساواة الآتية صحيحة أم لا.

$a) x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
$b) x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$
$c) x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$

10- أوجد الإثنانية للتعابير البوليانية الآتية:

$a) x + y \qquad b) \bar{x}\,\bar{y}$
$c) xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \qquad d) x\bar{z} + x \cdot 0 + \bar{x} \cdot 1$

11- أوجد صيغة الفصل العادية DNF للعبارات البوليانية الآتية:

$a) f(x,y) = \bar{x} + y \qquad b) f(x,y) = x\,\bar{y}$
$c) f(x,y) = 1 \qquad d) f(x,y) = \bar{y}$

12- أوجد صيغة الفصل العادية DNF للعبارات البوليانية الآتية:

$a) f(x,y,z) = x + y + z \qquad b) f(x,y,z) = (x + z)y$
$c) f(x,y,z) = x \qquad d) f(x,y,z) = x\,\bar{y}$

13- عبر عن كل من التوابع البوليانية الآتية باستخدام $\{\cdot, \bar{}\}$.

$a) x + y + z \qquad b) x + \bar{y}(\bar{x} + z)$
$c) \overline{x + \bar{y}} \qquad d) \bar{x}(x + \bar{y} + \bar{z})$

14- عبر عن كل من التوابع البوليانية الموجودة في السؤال السابق باستخدام $\{+, \bar{}\}$.

15- برهن أنّ:

$a) \bar{x} = x \uparrow x \qquad b) x\,y = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$
$c) x + y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$

16- برهن أن:

$a)\ \bar{x} = x \downarrow x$ $\qquad b)\ x\,y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

$c)\ x + y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

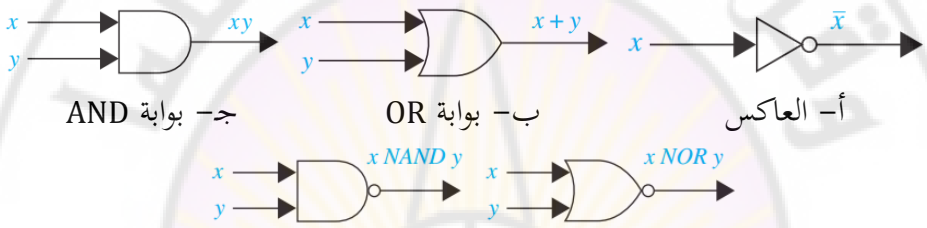
8-3 البوابات والدارات المنطقية Logic Gates

يُستعمل جبر بول لتشكيل مجموعة دارات الأجهزة الإلكترونية. يمكن أن يكون كل مدخل وكل مخرج لهذه الأدوات عبارة عن عنصر من المجموعة $\{0, 1\}$. يتكون جهاز الحاسوب أو أي جهاز إلكتروني آخر من العديد من الدارات المنطقية. تصمم كل دارة حسب قواعد جبر بول التي درسناها سابقاً. تدعى العناصر الأساسية للدارات المنطقية بوابات، يقوم كل نوع من البوابات بتطبيق عملية منطقية معينة. في هذا القسم سنقوم بتعريف عدة أنواع من البوابات، وسوف نطبق قواعد الجبر المنطقي لتصميم الدارات التي تؤدي مجموعة متنوعة من المهام. ندرس في هذا الفصل الدارات التي يكون المخرج فيها معتمداً فقط على المدخلات، وليس على الوضع الحالي للدارة. وبعبارة أخرى، فإن هذه الدوائر ليس لديها قدرات الذاكرة. وتسمى هذه الدارات بالدارات التوافقية أو الشبكات المعزولة.

سنقوم ببناء الدارات التوافقية باستخدام ثلاثة أنواع من العناصر. الأول هو العاكس، والذي يقبل قيمة واحدة لمتغير منطقي كمدخل وينتج مكملاً لهذه القيمة. يظهر الشكل (3-22) (أ) رمز للعاكس. النوع الثاني الذي نستخدمه هو البوابة OR، حيث يكون لها مدخلان أو أكثر من القيم المنطقية، ويكون الناتج هو مجموع هذه القيم، يظهر الشكل (3-22) (ب) الرمز المستخدم للبوابة OR. النوع الثالث من العناصر التي سوف نستخدمها هي البوابة AND. المدخلات لهذه البوابة هي اثنان أو أكثر من قيم المتغيرات المنطقية، والإخراج هو جداء منطقي لهذه القيم. يظهر الشكل (3-22) (ج) الرمز الذي يستخدم للبوابة AND.

يوجد أيضاً نوعان آخران من البوابات هي بوابة NAND وبوابة NOR يستخدمان في تصميم الدارات المنطقية، باستعمال أحدهما في الدارة لا نستعمل البوابات الأخرى. يظهر الشكل (3-22) (د) الرمز الذي يستخدم للبوابة NAND، و للبوابة NOR.

ملاحظة: تظهر في الشكل (3-22) المدخلات إلى أي من هذه البوابات على الجانب الأيسر (دخول العنصر)، ويتم عرض الإخراج على الجانب الأيمن (مغادرة العنصر).

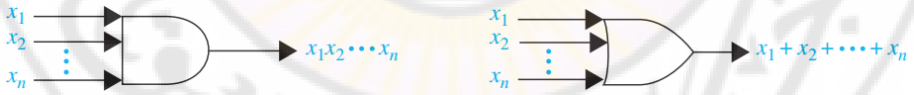


أ- العاكس ب- بوابة OR جـ- بوابة AND

د- بوابة NAND وبوابة NOR.

الشكل (3-22): الأنماط الأساسية للبوابات.

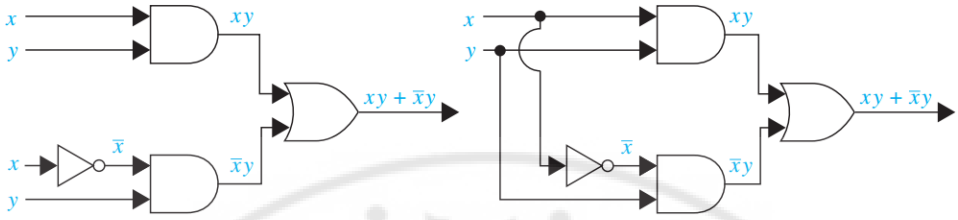
سنسمح بإدخال متعدد لكل من بوابتي OR وAND كما يرى ذلك في الشكل (3-23).



الشكل (3-23): بوابات n مدخلة.

3-8-1 تجميع البوابات

تبنى الدارات التوافقية من مجموعة من العواكس وبوابات OR وAND. يمكن أن يكون لعدة بوابات مدخلات مشتركة، فيمكن حينها تصور رسمها بطريقة من طريقتين. يظهر الشكل (3-24) طريقتين لرسم الدارة التي تنتج المخرج $xy + \bar{x}y$.



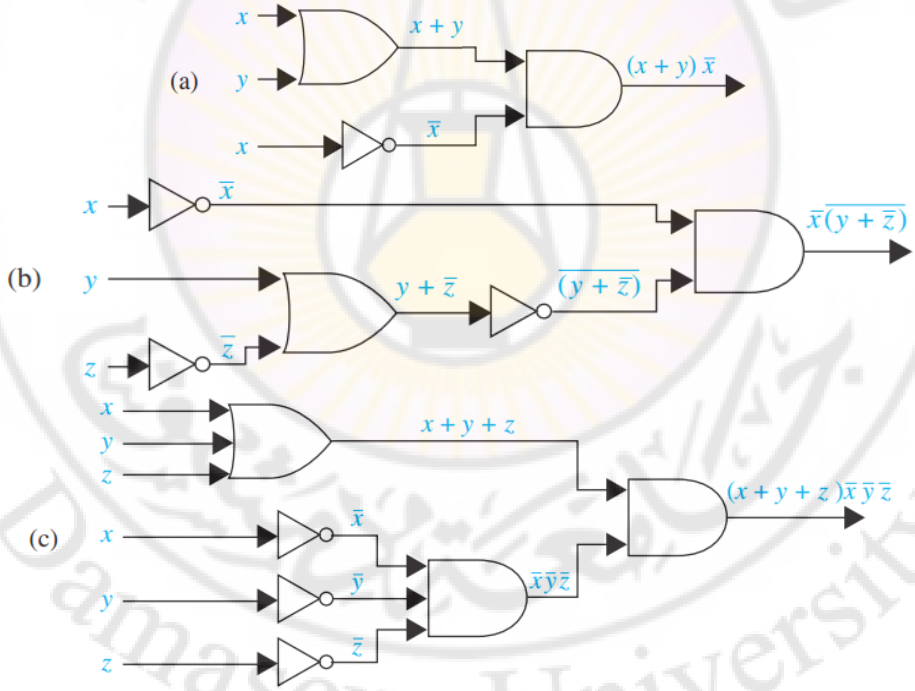
الشكل (3-24): طريقتان لرسم نفس الدارة.

مثال (3-79):

أنشئ الدارات التي تنتج المخرجات الآتية:

$(a)\ (x+y)\bar{x}, \qquad (b)\ \bar{x}\overline{(y+\bar{z})}, \qquad (c)\ (x+y+z)(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}).$

الحل: الدارات التي تعطي النواتج تظهر في الشكل (3-25).



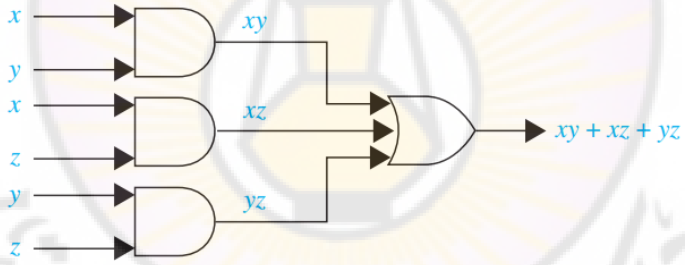
الشكل (3-25)

مثال (3-80):

تقرر لجنة مؤلفة من ثلاثة أفراد القضايا لمنظمة ما، كل فرد يصوت إما بـ (نعم) وإما بـ (لا) لكل مقترح يراد إظهاره، أي مقترح يحصل على صوتي (نعم) أو أكثر يتم إمراره. صمم الدارة المنطقية الدالة على المقترحات المصادق عليها.

الحل: لنفرض أن $x = 1$ إذا صوّت الفرد الأول بـ (نعم)، و$x = 0$ إذا صوّت ذاته بـ (لا)، وأن $y = 1$ إذا صوّت الفرد الثاني بـ (نعم)، و$y = 0$ إذا صوّت ذاته بـ (لا)، أن $z = 1$ إذا صوّت الفرد الثالث بـ (نعم)، و$z = 0$ إذا صوّت ذاته بـ (لا)، عندها تصمم الدارة على أن يكون المخرج الناتج هو 1، من أجل المدخلات x, y, z، عندما يكون اثنان منها على الأقل مساوياً للقيمة 1. إن التابع البولياني الممثل لهذه الدارة هو $xy + yz + xz$.

الشكل (3-26) يبين تصميم هذه الدارة.



الشكل (3-26): الدارة المنطقية الدالة على تصويت الأغلبية.

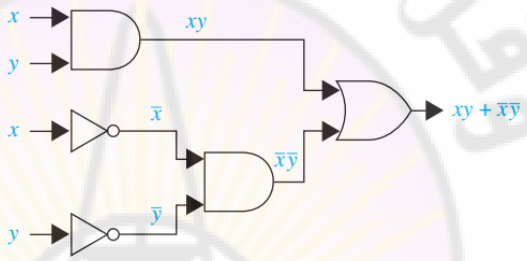
مثال (3-81):

أحياناً يتم التحكم بجهاز إضاءة بأكثر من قاطع، تحتاج الدارات الواجب إنشاؤها إلى التحكم بتقليب القواطع بحيث يضيئ جهاز الإضاءة عندما يغلق القاطع، ويطفأ جهاز الإضاءة عندما يفتح القاطع. صمم دارات لهذا النوع من الأجهزة بحيث تحتوي على قاطعين أو ثلاثة قواطع.

الحل: سنبدأ أولاً بتصميم دارة لجهاز إضاءة مؤلفة من قاطعين مختلفين. ليكن $x = 1$ عندما يكون القاطع الأول مغلقاً، و$x = 0$ عندما يكون القاطع الأول مفتوحاً، وليكن

$y = 1$ عندما يكون القاطع الثاني مغلقاً، و$y = 0$ عندما يكون القاطع الثاني مفتوحاً. ليكن $F(x, y) = 1$ عندما يضيئ الجهاز، $F(x, y) = 0$ عندما يُطفأ الجهاز. يمكن أن نقرر اعتباطياً أن جهاز الإضاءة يضيئ إذا كان القاطعان مغلقين أم مفتوحين أي إنّ: $F(1, 1) = F(0, 0) = 1$ ويطفأ الجهاز إذا كان أحد القاطعين مفتوحاً، أي إن: $F(0, 1) = F(1, 0) = 0$. يبين الشكل (27-3) الدارة وجدول الحقيقة للتابع البولياني لهذه الدارة والذي هو: $F(x, y) = xy + \bar{x}\bar{y}$.

x	y	$F(x, y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



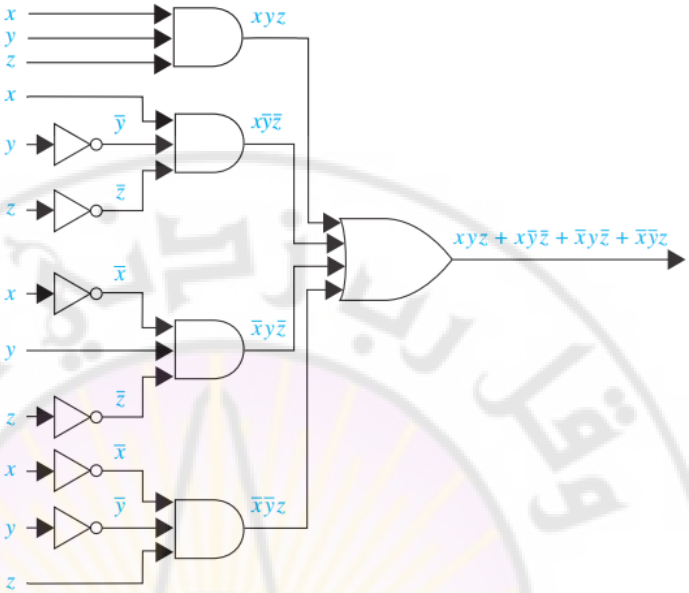
الشكل (27-3): الدارة المنطقية لجهاز إضاءة بقاطعين x, y.

الآن سنقوم بتصميم الدارة المنطقية لجهاز إضاءة بثلاثة قواطع. لنفرض أن x وy وz المتغيرات البولينية الدالة على القواطع الثلاثة الأول والثاني والثالث على الترتيب. ليكن $x = y = z = 1$ عندما تكون القواطع مغلقة، و$x = y = z = 0$ عندما تكون القواطع مفتوحة. ليكن $F(x, y, z) = 1$ عندما يضيئ الجهاز و$F(x, y, z) = 0$ عندما يُطفأ الجهاز. ويمكن أن نكتب:

$$F(1, 1, 1) = F(1, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(0, 0, 1) = 1$$
$$F(0, 0, 0) = F(1, 1, 0) = F(1, 0, 1) = F(0, 1, 1) = 0$$

يبين الشكل (28-3) الدارة وجدول الحقيقة للتابع البولياني لهذه الدارة والذي هو: $F(x, y, z) = xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$.

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

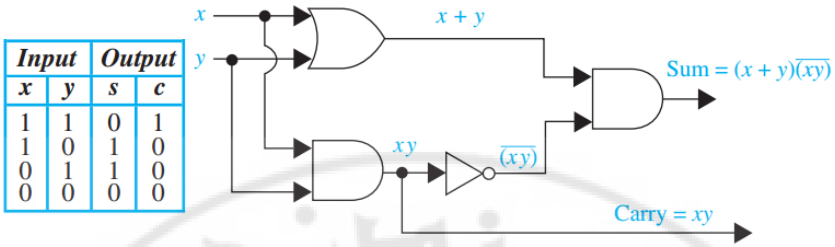


الشكل (3-28): الدارة المنطقية لجهاز إضاءة بثلاثة قواطع x, y, z.

3-8-2 المجمعات (Adders)

سنقوم بإيضاح كيف يمكن استخدام الدارات المنطقية لتنفيذ عملية الجمع لعددين موجبين من خلال عبارتهما الثنائية. أولاً ننصمم دارة تستعمل لإيجاد $x + y$، حيث x وy هما عبارة عن البتات، المدخلات للدارة هما x وy لأن كليهما يمكن أن يأخذ القيمة 0 أو 1. المخرجان هما s وc حيث s تمثل الجمع البتي وc تمثل التحميل البتي. تدعى هذه الدارة "دارة متعددة المخرجات"، وتدعى أيضاً "دارة الجامع النصفي" لأنها تقوم بجمع بتين من دون تحميل مسبق للبتات، حيث إن $c = xy$ و $s = x\bar{y} + \bar{x}y = (x + y)\overline{(xy)}$ كما هو موضح في الجدول والشكل (3-29).

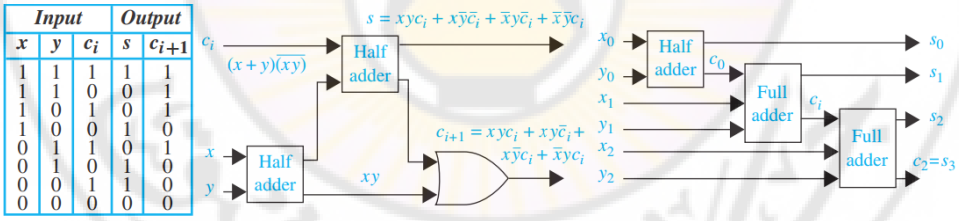
نستعمل "الجامع الكلي" لحساب مجموع بتي وتحميل بتي عندما يكون هناك تحميل بتي مضاف. مدخلات الجامع الكلي هي x وy والتحميل البتي c_i، والمخرجات هي المجموع البتي s والتحميل البتي الجديد c_{i+1} كما في الجدول التالي.



Input		Output	
x	y	s	c
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

الشكل (3-29): الدارة المنطقية للجامع النصفي.

تعطى المخرجات s و c_{i+1} بعبارة مجموع المضاريب $xyc_i + x\bar{y}\bar{c}_i + \bar{x}y\bar{c}_i + \bar{x}\bar{y}c_i$ و $xyc_i + xy\bar{c}_i + x\bar{y}c_i + \bar{x}yc_i$ على الترتيب، وبدلاً من تصميم الجامع الكامل مباشرة، يمكن تصميمه من خلال الجامع النصفي، انظر الشكل (3-30). أخيراً في نفس الشكل نرى كيفية تصميم دارة من الجامع النصفي والجامع الكلي لجمع عددين صحيحين من مؤلفين من ثلاثة بتات $(x_2x_1x_0)_2$ و $(y_2y_1y_0)_2$ لنحصل على الناتج $(s_3s_2s_1s_0)_2$، حيث s_3 هو مرتبة البت الأعلى في المجموع والمعطى من قبل التحميل c_2.

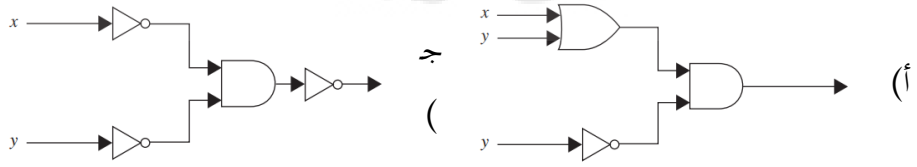


Input			Output	
x	y	c_i	s	c_{i+1}
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

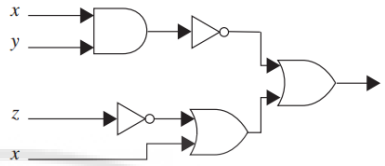
الشكل (3-30): جدول الحقيقة مع الدارة المنطقية للجامع الكلي، مع دارة جمع عددين صحيحين من ثلاثة بتات.

تمارين غير محلولة

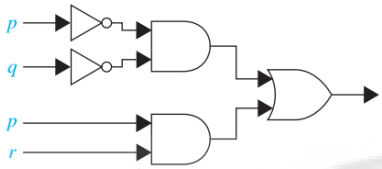
1- أوجد مخرجات كل من الدارات المنطقية الآتية:



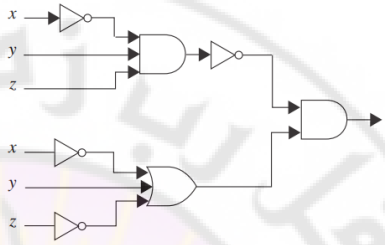
ب)



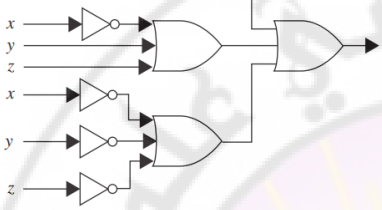
د)



هـ)



ز)



2- صمم الدارات المنطقية مستخدماً العاكس وبوابة OR وبوابة AND الموافقة للتعابير البوليانية الآتية:

أ) $\bar{x} + y$ ب) $\overline{(x+y)}\,x$

جـ) $xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ د) $\overline{(\bar{x}+z)(y+\bar{z})}$

3- صمم دارة تنفذ تصويت الأغلبية لخمسة أفراد.

4- صمم دارة لجهاز إضاءة مؤلف من أربعة قواطع، عندما نقلب أحد القواطع، فإن الجهاز يضيئ إذا كان القاطع مغلقاً ويطفأ إذا كان القاطع مفتوحاً.

5- حدد كيف يمكن حساب مجموع عددين صحيحين من خمس خانات بتية مستخدماً دارة الجامع النصفي والجامع الكلي.

6- استخدم بوابة NAND لتصميم دارات منطقية ذات المخرجات الآتية:

أ) $\bar{x}$ ب) $x + y$

جـ) xy د) $x \oplus y$

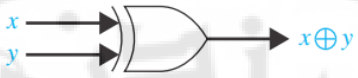
7- استخدم بوابة NOR لتصميم دارات منطقية ذات المخرجات السابقة:

أ) $\bar{x}$ ب) $x + y$

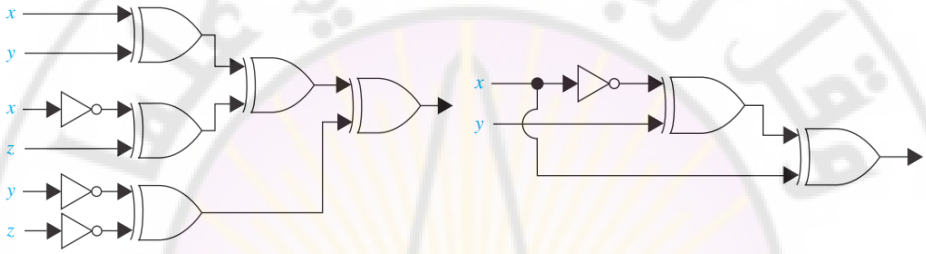
جـ) xy د) $x \oplus y$

8- استخدم بوابة NOR مرة وبوابة NAND مرة أخرى لتصميم دارة منطقية للجامع النصفي.

9- إن مفهوم بوابة XOR الذي يتنج المخرج $x \oplus y$ للمدخلين x وy تعطى بالشكل:



لذلك حدد مخرجات الدارات المنطقية الآتية:



-ب- -أ-

الفصل الرابع

4- الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

إن إحدى أهم مهام الرياضيات أن تكتشف وتميز أنماط منتظمة، مثل تلك التي تكون مرتبطة بالعمليات المتكررة. إن التركيب الرياضي الرئيسي المستعمل في العمليات المتكررة هو المتتالية والسلسلة، والأداة الرياضية الرئيسية التي تستعمل لتحقيق التخمين حول المتتالية والسلسلة هي الاستقراء الرياضي.

نقدم في هذا الفصل تعريف مصطلح المتتالية والسلسلة، ونعرض كيفية استعمال كلاً من الاستقراء الرياضي العادي والقوي لإثبات خصائصها، ونظهر صوراً للطرق المختلفة لعرض المتتالية عرضاً تكرارياً، ونوضح كيفية التحقق من صواب مثل هذه الصيغ، وكيفية تكيّف الاستقراء الرياضي لإثبات صواب خوارزميات الحاسوب.

4-1 المتتاليات والمجاميع:

لنتخيل أن إنساناً قرر أن يعدد أسلافه. إنه يمتلك أبوين، أربعة أجداد، ثمانية أباء الأجداد، وهكذا فصاعداً، يمكن كتابة هذه الأعداد في صف واحد بالشكل:

$$2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad 64,\quad 128,\quad \cdots$$

للتعبير عن نمط الأعداد، نفترض أن كل عدد منها مرتبط بعدد صحيح يدل على موقعه في الصف، فنجد أن:

الموضع في الصف	1	2	3	4	5	6	7	⋯
عدد الأسلاف	2	4	8	16	32	64	128	⋯

العدد المقابل للموضع 1 هو 2 أي يساوي 2^1، والعدد المقابل للموضع 2 هو 4 أي يساوي 2^2، والمواضع $3,4,5,6,7$ يقابلها الأعداد $8,16,32,64,128$ والتي تساوي $2^3,2^4,2^5,2^6,2^7$ على الترتيب، من أجل قيمة عامة k ليكن A_k العدد الدال على الأسلاف في الجيل السابق k. وبالتالي يكون النمط المطلوب:

$$A_k = 2^k.$$

تعريف (1-4)

المتتالية العددية هي دالة (تطبيق) منطلقها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة ومستقرها مجموعة الأعداد الصحيحة أو أية مجموعة أخرى من الأعداد.

نمثل المتتالية العددية عادة بمجموعة من العناصر مكتوبة في سطر، فمثلاً لدينا المتتالية:

$$a_m,\quad a_{m+1},\quad a_{m+2},\quad \cdots,\quad a_n,$$

كل عنصر من الشكل a_k يدعى حداً، k هو دليل الحد a_k، m هو دليل الحد الابتدائي أو الأول وn هو دليل الحد الأخير، $m < n$. إن العبارة:

$$a_m,\quad a_{m+1},\quad a_{m+2},\quad \cdots,$$

تدل على متتالية عددية غير منتهية.

الصيغة الصريحة أو الصيغة العامة للمتتالية العددية هي التي توضح قيمة الحد العام a_k المتعلقة بـ k. المثال التالي يوضح إمكانية إيجاد صيغتين مختلفتين لمتتالية معطاة بنفس الحدود.

مثال (1-4):

لنعرف المتتاليتين العدديتين: $a_1, a_2, a_3, \cdots$ و$b_2, b_3, b_4, \cdots$ بالصيغتين العامتين التاليتين:

$$a_k = \frac{k}{k+1}\ ;\ k \geq 1, \qquad b_i = \frac{i-1}{i}\ ;\ i \geq 2$$

أوجد الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليتين السابقتين.

الحل:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\ , \qquad b_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}\ , \qquad b_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}\ , \qquad b_4 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}\ , \qquad b_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$$
$$a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}\ , \qquad b_6 = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

كما نلاحظ أن الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليتين العدديتين هي $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$.

في الحقيقة نستطيع أن نبرهن أن كل الحدود المتتالية في كل من المتتاليتين متطابقة.

1-1-4 المتتالية المتناوبة

المتتالية العددية المتناوبة هي المتتالية العددية التي تتناوب حدودها بالإشارة، أي حد موجب يليه حد سالب ويليه حد موجب ثم حد سالب وهلم جرّا.

مثال (2-4):

احسب الحدود الستة الأولى من المتتالية العددية $c_0, c_1, c_2, \cdots$ المعرفة بالشكل:

$$c_j = (-1)^j \ ; \quad j \geq 0.$$

الحل:

$$c_0 = (-1)^0 = 1, \quad c_1 = (-1)^1 = -1, \quad c_2 = (-1)^2 = 1,$$
$$c_3 = (-1)^3 = -1, \quad c_4 = (-1)^4 = 1, \quad c_5 = (-1)^5 = -1,$$

فالحدود الستة الأولى هي: $1, -1, 1, -1, 1, -1$.

مثال (3-4):

أوجد الصيغة الصريحة للمتتالية العددية التي حدودها الأولى من الشكل:

$$1, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad -\frac{1}{16}, \quad \frac{1}{25}, \quad -\frac{1}{36}, \quad \cdots$$

الحل: لنرمز للحد العام لهذه المتتالية بـ a_k فيكون الحد الأول a_1 حيث $k \geq 1$:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1^2} & \frac{(-1)}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \frac{(-1)}{4^2} & \frac{1}{5^2} & \frac{(-1)}{6^2} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array}$$

إن هذه المتتالية متناوبة والبسط هو دوماً 1 والمقام هو مربع الأعداد المتتابعة ابتداءً من 1، فالحد العام للمتتالية يمكن كتابته بالشكل:

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{أو} \quad a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \quad ; \quad k \geq 1$$

ويمكن أيضاً كتابته بشكل ثالث بجعل الحد الأول هو a_0 أي:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \quad ; \quad k \geq 0.$$

2-1-4 مفهوم المجاميع

لنعتبر مثال الأسلاف في أول هذا الفصل والذي وجدنا فيه أن الحد العام للمتتالية العددية هو $A_k = 2^k$ والذي يمثل عدد الأسلاف في الجيل السابق رقم k. الآن فإذا أردنا حساب مجموع الأسلاف حتى الجيل السادس الماضي فيكون الجواب:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126.$$

Joseph Louis Lagrange
(1736–1813)

ويمكن كتابة المجموع السابق كتابة مختصرة، ففي عام 1772 أدخل العالم الفرنسي جوزيف لويس لاغرانج الحرف اليوناني الكبير سيغما sigma , Σ للدلالة على المجاميع.

تعريف (2-4)

ليكن لدينا العددان الصحيحان $m, n\,; m \leq n$ إن الاصطلاح $\sum_{k=m}^{n} a_k$ هو مجموع الحدود $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$. ونكتب:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n.$$

ندعو k دليل المجموع، وm الحد الأدنى للمجموع، وn الحد الأعلى للمجموع.

مثال (4-4):

ليكن $a_1 = -2$، $a_2 = -1$، $a_3 = 0$، $a_4 = 1$ و $a_5 = 2$. أوجد المجاميع الآتية:

$$a.\ \sum_{k=1}^{5} a_k \qquad b.\ \sum_{k=2}^{2} a_k \qquad c.\ \sum_{k=1}^{2} a_{2k}$$

الحل:

$$a.\ \sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0.$$

$$b.\ \sum_{k=2}^{2} a_k = a_2 = -1.$$

$$c.\ \sum_{k=1}^{2} a_{2k} = a_{2\cdot 1} + a_{2\cdot 2} = a_2 + a_4 = -1 + 1 = 0.$$

يمكن تمثيل المجاميع بالصيغة الصريحة أو الصيغة العامة مثلاً:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 \qquad \text{أو} \qquad \sum_{i=0}^{8} \frac{(-1)^i}{i+1}.$$

مثال (4-5):

احسب قيمة المجموع الآتي:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

الحل:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

مثال (4-6):

اكتب المجموع الآتي بالشكل المفكوك:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

الحل:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1} = \frac{(-1)^0}{0+1} + \frac{(-1)^1}{1+1} + \frac{(-1)^2}{2+1} + \frac{(-1)^3}{3+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$
$$= \frac{1}{1} + \frac{(-1)}{2} + \frac{1}{3} + \frac{(-1)}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

مثال (4-7):

عبر عن الجمع التالي بدلالة المجاميع:

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+2} + \cdots + \frac{n+1}{2n}.$$

الحل: إن الحد العام لهذا المجموع يمكن كتابته بالشكل: $\frac{k+1}{n+k}$ حيث $0 \le k \le n$، أي:

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+2} + \cdots + \frac{n+1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+k}.$$

مثال (4-8):

ما هي قيمة المقدار $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ عندما: $n = 1$ ؟، $n = 2$ ؟، و$n = 3$ ؟.

الحل: من أجل $n = 1$ فإن المقدار يساوي:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

من أجل $n = 2$ فإن المقدار يساوي:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

من أجل $n = 3$ فإن المقدار يساوي:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}.$$

ويمكن تعريف المجاميع بشكل أدق رياضياً وهو التعريف التكراري كما يلي: إذا كان m عدداً صحيحاً فإن:

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m \quad \text{و} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n \quad ; \quad n > m.$$

فاستعمال الصيغة التكرارية غالباً ما يكون أداة فعالة لحل كثير من المسائل، إما بفصل الحد الأخير من المجموع، أو بإضافة الحد الأخير إلى المجموع. المثال التالي يبين ذلك.

مثال (4-9):

a) أعد كتابة المجموع $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}$ بفصل الحد الأخير.

b) أعد كتابة العبارة: $\sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1}$ بمجموع واحد.

الحل:

$$a)\ \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2}. \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^k.$$

في بعض المجاميع تحتوي على حدود متخالفة مع بعضها، مما يؤدي لحذفها ويتبقى فقط الحدان الأول والأخير. الحذف المتتالي للحدود يشبه ما يسمى بالمجموع التلسكوبي.

مثال (4-10):

بعض المجاميع يمكن تحويلها إلى مجاميع تلسكوبية، والتي يمكن كتابتها بعبارة أبسط. لنلاحظ أن المقدار التالي يكتب:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

استخدم هذه المساواة لإيجاد العبارة الأبسط للمجموع: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

الحل:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

3-1-4 مفهوم الجداءات

إن مفهوم الجداءات ينتج من جداءات عناصر متتالية عددية وهو مماثل لمفهوم المجاميع. يرمز له عادة بالحرف اليوناني الكبير Π فمثلاً:

$$\prod_{k=1}^{5}a_k=a_1a_2a_3a_4a_5.$$

تعريف (3-4)

ليكن لدينا العددان الصحيحان $m,n\,;m\le n$ إن الاصطلاح $\prod_{k=m}^{n}a_k$ هو جداء الحدود $a_m,a_{m+1},\cdots,a_n$. ونكتب:

$$\prod_{k=m}^{n}a_k=a_m\cdot a_{m+1}\cdot a_{m+2}\cdot\ \cdots\cdot a_n.$$

ندعو k دليل الجداء، وm الحد الأدنى للجداء، وn الحد الأعلى للجداء.

أما التعريف التكراري أو التراجعي للجداءات فيكون كما يلي:

$$\prod_{k=m}^{m}a_k=a_m\ ,\quad \prod_{k=m}^{n}a_k=\left(\prod_{k=m}^{n-1}a_k\right)\cdot a_n\ ;\ n,m\in\mathbb{Z},\qquad n>m.$$

مثال (11-4):

احسب قيمة الجداءات:

$$a.\ \prod_{k=1}^{5} k \qquad b.\ \prod_{k=1}^{1} \frac{k}{k+1}$$

الحل:

$$a.\ \prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \qquad b.\ \prod_{k=1}^{1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

4-1-4 خواص المجاميع والجداءات

نظرية (4-1):

إذا كانت $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots$ و $b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \cdots$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية، و c عدداً حقيقياً ما، فإن العلاقات التالية صحيحة من أجل $n \geq m$:

$$1-\ \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

$$2-\ c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$$

$$3-\ \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$$

مثال (12-4):

ليكن $a_k = k + 1$ و $b_k = k - 1$ من أجل العدد الصحيح k. اكتب العبارات الآتية بمجموع أو جداء منفرد.

$$a.\ \sum_{k=m}^{n} a_k + 2 \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k \qquad b.\ \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$$

الحل:

$$a.\ \sum_{k=m}^{n} a_k + 2 \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (k+1) + 2 \cdot \sum_{k=m}^{n} (k-1)$$

$$= \sum_{k=m}^{n} (k+1) + \sum_{k=m}^{n} 2 \cdot (k-1) = \sum_{k=m}^{n} [(k+1) + 2 \cdot (k-1)]$$

$$= \sum_{k=m}^{n} (3k-1).$$

$$b. \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \left(\prod_{k=m}^{n} (k+1)\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} (k-1)\right)$$

$$= \prod_{k=m}^{n} (k+1) \cdot (k-1) = \prod_{k=m}^{n} (k^2-1).$$

ملاحظة (4-1)

إن تغير رمز المجموع أو الجداء لا يغير من قيمته فمثلاً:

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \quad \text{أي أن :}$$

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{i=1}^{3} i^2$$

إن تغيير رمز المجاميع والجداءات يعدل من التغيرات الأكثر تعقيداً، ولتوضيح ذلك نجد:

$$\sum_{j=2}^{4} (j-1)^2 = (2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$= \sum_{k=1}^{3} k^2$$

مثال (4-13):

حوّل المجموع الآتي باستخدام التغيير المعطى:

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1} \qquad \text{باستخدام التغيير} \qquad j = k+1$$

الحل: أولاً نقوم بحساب حدود المجموع الأدنى والأعلى وبالتالي:

$$\left.\begin{array}{l} k=0, \Longrightarrow j=k+1=0+1=1. \\ k=6, \Longrightarrow j=k+1=6+1=7. \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 \le j \le 7.$$

نقوم الآن بإيجاد الحد العام للمجموع:

$$j=k+1 \Longrightarrow k=j-1 \Longrightarrow \frac{1}{k+1}=\frac{1}{(j-1)+1}=\frac{1}{j}. \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{1}{k+1}=\sum_{j=1}^{7}\frac{1}{j}=\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{k}.$$

مثال (4-14):

حوّل المجموع الآتي باستخدام التغيير المعطى:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k}{n+k}\right) \qquad \text{باستخدام التغيير} \qquad j=k-1$$

الحل: أولاً نقوم بحساب حدود المجموع الأدنى والأعلى وبالتالي:

$$\left.\begin{array}{l} k=1, \Longrightarrow j=k-1=1-1=0. \\ k=n+1, \Longrightarrow j=k-1=(n+1)-1=n. \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \le j \le n.$$

نقوم الآن بإيجاد الحد العام للمجموع:

$$j=k-1 \Longrightarrow k=j+1 \Longrightarrow \frac{k}{n+k}=\frac{j+1}{n+(j+1)}=\frac{j+1}{n+j+1}. \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+k}=\sum_{j=0}^{n}\frac{j+1}{n+j+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n+k+1}.$$

تمارين غير محلولة

1- اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتاليات العددية الآتية:

$a.\quad a_k=\dfrac{k}{10+k}\ ;\quad k\ge 1.$ $\qquad b.\quad b_j=\dfrac{5-j}{5+j}\ ;\quad j\ge 1.$

$c.\quad c_i=\dfrac{(-1)^i}{3^i}\ ;\quad i\ge 0.$ $\qquad d.\quad d_m=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\ ;\quad m\ge 0.$

$e.\quad e_n=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor\cdot 2\ ;\quad n\ge 0.$ $\qquad f.\quad f_n=\left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor\cdot 4\ ;\quad n\ge 1.$

2- ليكن $a_k = 2k + 1$ و $b_k = (k-1)^3 + k + 2$ من أجل جميع الأعداد الصحيحة $k \geq 0$. أثبت أن الحدود الثلاثة الأولى لكل من المتتاليتين العدديتين السابقتين متطابقة.

3- أوجد الحدود الخمسة عشر الأولى من المتتاليات الآتية ووضح السلوك العام لكل منها.

$a.\ g_n = \lfloor \log_2 n \rfloor \ ;\ n \geq 1.$ $b.\ h_n = n\lfloor \log_2 n \rfloor \ ;\ n \geq 1.$

4- أوجد الصيغة الصريحة (الحد العام) للمتتاليات العددية $a_1, a_2, a_3, \cdots$ التي حدودها الأولى معطاة كما يلي:

$a.\ -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$

$b.\ 0, 1, -2, 3, -4, 5, \cdots$

$c.\ \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \frac{6}{49}, \cdots$

$d.\ 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \frac{1}{6} - \frac{1}{7}, \cdots$

$e.\ \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{9}{27}, \frac{16}{81}, \frac{25}{243}, \frac{36}{729}, \cdots$

$f.\ 0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \cdots$

$g.\ 3, 6, 12, 24, 48, 96, \cdots$

5- لنعتبر أن الحد العام للمتتالية هو $a_n = \frac{2n + (-1)^n - 1}{4}$ من أجل $n \geq 0$. أوجد صيغة صريحة أخرى لهذه المتتالية باستخدام مفهوم أرضية العدد (floor).

6- ليكن $a_0 = 2$، $a_1 = 3$، $a_2 = -2$، $a_3 = 1$، $a_4 = 0$، $a_5 = -1$ و $a_6 = -2$. احسب المجاميع والجداءات الآتية:

$$a)\ \sum_{i=0}^{6} a_i \quad b)\ \sum_{i=0}^{0} a_i \quad c)\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j} \quad d)\ \prod_{k=0}^{6} a_k \quad e)\ \prod_{k=2}^{2} a_k$$

7- احسب المجاميع والجداءات الآتية:

$a.\ \sum_{k=1}^{5}(k+1)$ $\quad b.\ \prod_{k=2}^{4}k^2$ $\quad c.\ \sum_{m=0}^{3}\frac{1}{2^m}$

$d.\ \prod_{j=0}^{4}(-1)^j$ $\quad e.\ \sum_{i=1}^{1}i\cdot(i+1)$ $\quad f.\ \sum_{j=0}^{0}(j+1)\cdot 2^j$

$g.\ \prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ $\quad h.\ \sum_{k=-1}^{1}(k^2+3)$

$i.\ \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ $\quad j.\ \prod_{i=2}^{5}\frac{i\cdot(i+2)}{(i-1)\cdot(i+1)}$

8- أوجد مفكوك المجاميع الآتية:

$a)\ \sum_{i=1}^{n}(-2)^i$ $\quad b)\ \sum_{j=1}^{n}j\cdot(j+1)$ $\quad c)\ \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}$ $\quad d)\ \sum_{i=1}^{k+1}i\cdot(i!)$

9- احسب قيمة المجاميع والجداءات وفق القيمة المعطاة للمتغير.

$a.\quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\quad ;\quad n=1.$

$b.\quad 1(1!)+2(2!)+3(3!)+\cdots+m(m!)\quad ;\quad m=2.$

$c.\quad \left(\frac{1}{1+1}\right)\left(\frac{1}{2+1}\right)\left(\frac{1}{3+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{k+1}\right)\quad ;\quad k=3.$

$d.\quad \left(\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\right)\left(\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}\right)\left(\frac{3\cdot 4}{5\cdot 6}\right)\cdots\left(\frac{m\cdot(m+1)}{(m+2)\cdot(m+3)}\right)\quad ;\quad m=2.$

10- أعد كتابة المجاميع الآتية بفصل الحد الأخير منها.

$a)\ \sum_{i=1}^{k+1}i(i!)$ $\quad b)\ \sum_{k=1}^{m+1}k^2$ $\quad c)\ \sum_{m=1}^{n+1}m(m+1)$

11- اكتب العبارات الآتية بشكل مجموع واحد.

$a)\ \sum_{i=1}^{k}i^3+(k+1)^3$ $\quad b)\ \sum_{k=1}^{m}\frac{k}{k+1}+\frac{m+1}{m+2}$

$$c)\ \sum_{m=0}^{n}(m+1)\cdot 2^m + (n+2)\cdot 2^{n+1}$$

12- اكتب العبارات الآتية مستخدماً مفهوم المجموع أو الجداء.

$a.\ 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2.$

$b.\ (1^3-1)-(2^3-1)+(3^3-1)-(4^3-1)+(5^3-1).$

$c.\ (2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)$

$d.\ \frac{2}{3\cdot 4}-\frac{3}{4\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 6}-\frac{5}{6\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 8}.$

$e.\ 1-r+r^2-r^3+r^4-r^5.$

$f.\ (1-t)\cdot(1-t^2)\cdot(1-t^3)\cdot(1-t^4).$

$g.\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$

$h.\ \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}.$

$i.\ n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1\ .$

$j.\ n+\frac{n-1}{2!}+\frac{n-2}{3!}+\frac{n-3}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$

13- حول كلاً من المجاميع والجداءات الآتية بفرض أن $i=k+1$.

$a.\ \sum_{k=0}^{5}k(k-1)$ $\qquad b.\ \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+4}.$

14- حول كلاً من المجاميع والجداءات الآتية بفرض أن $j=i-1$.

$a.\ \sum_{i=1}^{n+1}\frac{(i-1)^2}{i\cdot n}$ $\qquad b.\ \sum_{i=3}^{n}\frac{i}{i+n-1}$

$c.\ \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{(n-i)^2}$ $\qquad d.\ \prod_{i=n}^{2n}\frac{n-i+1}{n+i}.$

15- اكتب العبارات الآتية بمجموع أو جداء واحد.

$a.\ 3\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k-3)+\sum_{k=1}^{n}(4-5k)$

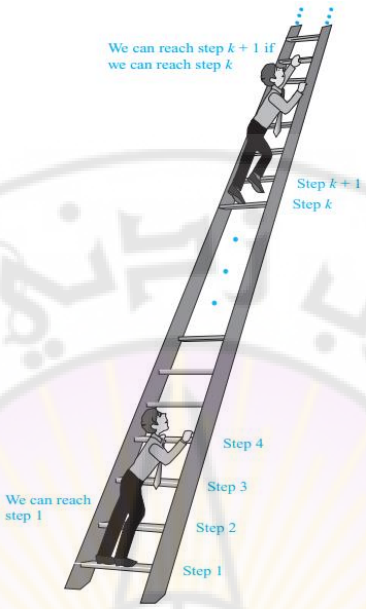
$b.\quad 2\cdot\sum_{k=1}^{n}(3k^2+4)+5\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k^2-1)$

$c.\quad \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k+2}\right)$

2-4 الاستقراء الرياضي

نبين في هذا السياق، مفهوم الاستقراء الرياضي وكيفية استخدامه من أجل إثبات صحة العديد من النتائج والحقائق التي يتم الحصول عليها بطريقة ما.

هنالك العديد من الأساليب التي تقدم وتعرض كيفية عمل الاستقراء الرياضي، وتكون مساعدةً في فهم هذا المبدأ وآلية عمله. لأجل ذلك سوف نتصور مجموعة من الأشخاص اصطفوا في رتلٍ الواحدَ تلو الآخر، أي الشخص الأول، ثم الشخص الثاني،... وهكذا. يتم إعلامُ الشخص الأول بسرٍّ، وكل شخص يعلم الشخص الذي يليه مباشرةً في الرتل بهذا السر، بعد أن يكون قد تلقاه من الذي يسبقه في الرتل كما في الشكل (4-1). ولتكن $P(n)$ العبارة التي تدل على أن الشخص رقم (n) في الرتل يعرف بالسر. ووفقاً لما ورد فإن العبارة $P(1)$ صحيحة لأنه قد تم إعلامُ الشخص الأول بالسر، والعبارة $P(2)$ صحيحة لأن الشخص الأول أعلم الثاني بالسر، وكذلك العبارة $P(3)$ صحيحة لأن الشخص الثاني أعلم الثالث بالسر وهكذا.



الشكل (4-1)

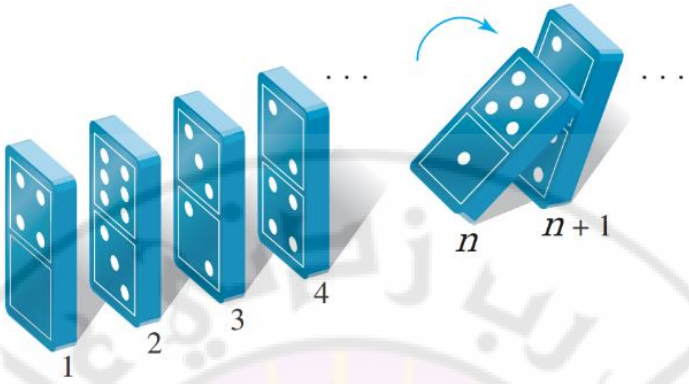
يتيح لنا مبدأ الاستقراء الرياضي الاستنتاج بأن كل شخص في الرتل قد علم بالسر.

نسوق مثالاً آخراً، ونعرض فيه مفهوم الاستقراء الرياضي من خلال صف أحجار الدومينو المرقمة بالأعداد $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$، وكل حجر من أحجار الدومينو في وضع الوقوف (الاستعداد). لتكن $P(n)$ هي العبارة التي تمثل الحجر n في حالة السقوط، إن هذا يقود إلى أن الحجر $n+1$ سوف يكون أيضاً في حالة السقوط كما في الشكل (4-2).

إذن إنّ حدوث $P(n)$ المتعلق بسقوط الحجر n يقتضي حدوث $P(n+1)$ المتعلق بسقوط الحجر $n+1$ ونكتب:

$$\text{if } P(n) \quad \text{then, } \quad P(n+1)$$

هذا يعني أن كل أحجار الدومينو سوف تكون قد سقطت.



الشكل (2-4)

1-2-4 أساس الاستقراء الرياضي

تساعد النتيجة الآتية في إيجاد أداة لإثبات العديد من الأشياء في خطوتين من خلال تشكيل أساس تقنية الإثبات الاستقرائي.

نظرية (2-4) (أساس الاستقراء الرياضي)

لتكن $m \in \mathbb{Z}$ و $W = \{m, m+1, \cdots\}$. ولتكن S مجموعة جزئية ما غير خالية من W، بحيث يتحقق الشرطان:

1- $m \in S$.

2- إذا كان $k \in S$، فإن $k+1 \in S$.

عندئذ تكون $S = W$.

الإثبات:

سوف نقوم بإثبات صحة هذه المبرهنة باستخدام التناقض. نفرض أن $S \neq W$، بالتالي فإن $W - S$ تحوي عنصراً واحداً على الأقل مثل x، لأن أية مجموعة جزئية غير خالية من W فيها عنصر واحد على الأقل.

إن الشرط الأول من المبرهنة يخبرنا أن $m \in S$ ينتج من ذلك أن $x > m$.

إذن $x - 1 \geq m$ ويكون $x - 1 \in S$.

وبما أننا نستطيع تطبيق الشرط الثاني في المبرهنة، فإننا نحصل من جراء ذلك على أن $(x-1)+1 \in S$، أي إن $x \in S$. وهذا تناقض، لأنه لا يمكننا أن نضع $x \in S$ و$x \in W - S$ في نفس الوقت، لذلك الفرض خاطئ و$W = S$.

نضع المبرهنة السابقة في شكل تطبيقي من أجل استخدامها كتقنية إثبات صحة عبارة في حالات عديدة. تدعى هذه التقنية بمبدأ الاستقراء الرياضي.

2-2-4 مبدأ الاستقراء الرياضي

لتكن $m \in \mathbb{Z}$. لإثبات أن العبارة $P(n)$ صحيحة من أجل كل القيم $n \geq m$، فإننا نقوم بالخطوتين الآتيتين:

1- نبرهن أن $P(m)$ صحيحة.

2- نفرض أن $P(k)$ صحيحة من أجل k صحيحاً كيفياً و$k \geq m$. ونبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة أيضاً.

الإثبات:

لتكن $W = \{n : n \geq m\}$، ولتكن $S = \{n : n \geq m \text{ and } P(n) = true\}$ وعلى افتراض أننا قمنا بتشكيل الخطوتين الواردتين في المبدأ، فإن S تحقق شروط أساس الاستقراء الرياضي، لذلك فإن $S = W$. إذن $P(n)$ صحيحة من أجل كل القيم $n = m$.

في كثير من الحالات يستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي من أجل $m = 1$، ليكون على النحو الآتي:

لإثبات صحة العبارة $P(n)$ من أجل كل القيم الصحيحة $n \geq 1$، فإننا نقوم بالخطوتين:

1- نبرهن أن $P(1)$ صحيحة.

2- نفرض أن $P(k)$ صحيحة من أجل k كيفياً و$k \geq 1$. ونبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي ينبغي أن نبين صحة العبارة الشرطية $P(k) \rightarrow P(k+1)$ من أجل كل

القيم الصحيحة الموجبة للوسيط k. ويمكن التعبير عن خطوتي الإثبات بالاستقراء الرياضي السابقتين من خلال:

$$[P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n\, P(n)$$

على اعتبار أن النطاق هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

يمكننا المبدأ الثاني الآتي من وضع افتراضات أكبر مما كان عليه مبدأ الاستقراء الرياضي.

3-2-4 الشكل القوي للاستقراء الرياضي

لتكن $m \in \mathbb{Z}$. ولإثبات صحة العبارة $P(n)$ من أجل كل الأعداد الصحيحة $n \geq m$، فإننا نقوم بالخطوتين الآتيتين:

1- نبرهن أن $P(m)$ صحيحة.

2- بفرض أن n عدداً صحيحاً كيفياً و$n > m$، وبفرض أن $P(k)$ صحيحة من أجل كل القيم k في المجال $m \leq k < n$، نثبت أن $P(n)$ صحيحة.

مثال (4-15):

استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة المتراجحة: $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ وn عدد صحيح غير سالب، علماً أن H_j هي الأعداد التوافقية (أعداد هاملتون) التي تعرف على النحو الآتي:

$$\begin{cases} H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j} \\ j = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

الحل: نعتبر أن العبارة $P(n)$ هي المتراجحة $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

أولاً- نلاحظ أن $P(0)$ صحيحة، لأن: $H_{2^0} = H_1 \geq 1 + \frac{0}{2}$.

ثانياً- نفرض أن العبارة $P(k)$ صحيحة، أي إن: $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$.

ولنثبت صحة العبارة $P(k+1)$، أي لنثبت أن المتراجحة $H_{2^{(k+1)}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$ صحيحة.

نلاحظ أن:

$$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

وذلك بوجود 2^k حداً، كل واحد منها أكبر أو يساوي $\frac{1}{2^{k+1}}$.

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}$$

هذا ما يؤكد صحة العبارة $P(k+1)$. ووفقاً للاستقراء فإن المتراجحة $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ صحيحة، من أجل n عدداً صحيحاً غير سالب.

مثال (4-16):

استخدم الاستقراء الرياضي في إثبات أن $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 من أجل n صحيحاً موجباً.

الحل: لإثبات ذلك سوف نعتبر أن $P(n)$ تمثل العبارة التي تدل على أن $n^3 - n$ تقبل القسمة على 3.

أولاً- إن $P(1)$ صحيحة، لأن $1^3 - 1 = 0$ تقبل القسمة على 3.

ثانياً- سنفرض الآن أن $P(k)$ صحيحة، أي إن $k^3 - k$ يقبل القسمة على 3 لنبين أن $P(k+1)$ صحيحة أيضاً و $k \geq 1$ لنشكل الفرض في العبارة $P(k+1)$.

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$$
$$= k^3 - k + 3k^2 + 3k$$
$$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$$

نلاحظ أن: k^3-k تقبل القسمة على 3 من الفرض. كما أن $3(k^2+k)$ يقبل القسمة على 3 لأنه من مضاعفات العدد 3. وبالتالي مجموع هذين الحدين يقبل القسمة على 3.

استناداً إلى ما سبق فإنه n^3-n يقبل القسمة على 3 حيث n عدداً صحيحاً موجباً.

مثال (4-17):

أثبت أنه إذا كان $\sin\alpha \neq 0$، فإن المساواة:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

صحيحة من أجل أي عدد طبيعي n.

الحل: نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي في عملية الإثبات من خلال الخطوتين:

أولاً- نلاحظ أنه من أجل الحالة $n=1$، فإن المساواة السابقة صحيحة ولدينا:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}$$

لأن:

$$\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{4\sin\alpha}=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}{4\sin\alpha}=\cos\alpha\cos 2\alpha$$

ثانياً- نفرض أن العبارة صحيحة من أجل الحالة k ولنبرهن صحتها من أجل $k+1$، أي إن:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^k\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}$$

بما أن $\sin 2^{k+1}\alpha=2\sin 2^k\alpha\cos 2^k\alpha$ أياً كان k، فإن ذلك يؤدي إلى أن:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}\cos 2^{k+1}\alpha$$

$$=\frac{2}{2}\cdot\frac{\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}=\frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}$$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة في الحالة $k+1$.

استناداً إلى الاستقراء الرياضي، فإن المساواة المعطاة في التمرين صحيحة أياً كانت $1 \leq n$.

مثال (4-18):

أثبت أن المتراجحة $(1+a)^n \geq 1+na$ صحيحة من أجل $a \geq -1$ وذلك من أجل أي عدد طبيعي n.

تدعى المتراجحة السابقة بمتراجحة برنولي، وسوف نستخدم الاستقراء الرياضي من أجل إثبات صحة المتراجحة.

أولاً- من أجل $n = 1$، فإن المتراجحة $1 + a \geq 1 + a$ وهي محققة.

ثانياً- نفرض أن المتراجحة صحيحة من أجل الحالة $n = k$ أي إن:

$$(1+a)^k \geq 1 + k \cdot a$$

ولنشكل المتراجحة من أجل الحالة $k + 1$ ولنثبت صحتها.

نلاحظ أن المتراجحة الأساسية محققة من أجل $a = -1$، لذلك من الكافي الآن أن نأخذ $a > -1$، أي إن $a + 1 > 0$.

في هذه الحالة سوف نضرب المتراجحة من أجل الحالة k بالحد $a + 1$، فنحصل على:

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$$

وهذا ما يبرهن على صحة المتراجحة المعطاة وفقاً للاستقراء الرياضي.

مثال (4-19):

أوجد المجموع:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

سوف نوجد المجاميع S_1, S_2, S_3, S_4 ولدينا:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$
$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

إن هذه المجاميع هي كسور وكل كسر منها، فيه البسط يمثل عدد الحدود والمقام فيه يمثل عدد الحدود مضافاً إليه 1. أو أن نقول إن المقام يكبر البسط بمقدار 1. إن هذا الاستنتاج يقودنا إلى تحسين الافتراضات المتعلقة بالصيغة، أي أن نكتب:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

سوف نستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة العلاقة الأخيرة.

أولاً- نلاحظ أنه من أجل $n = 1$ فإن الافتراض السابق صحيح، ولدينا: $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

ثانياً- نفرض أن العبارة صحيحة من أجل $n = k$، (حيث $k \geq 1$). ولنثبت صحتها من أجل $n = k + 1$.

أي إن $S_k = \frac{k}{k+1}$ صحيحة، ونبرهن أن $S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$، لذلك سوف نشكل:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

ولنبرهن أن هذا المجموع يساوي إلى المقدار $(k+1)/(k+2)$ نلاحظ أن:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$
$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

وبالتالي الافتراض صحيح، ومن أن العبارة صحيحة من أجل الحالة $k+1$ $(k \geq 1)$ وفقاً للاستقراء الرياضي فإن العبارة صحيحة.

مثال (4-20):

أثبت صحة المتراجحة:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

وكذلك من أجل أي عدد طبيعي $n \geq 2$.

سوف نستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات ما سبق.

أولاً- سوف نختبر صحة المتراجحة من أجل $n = 2$. لدينا:

$$\frac{4^2}{2+1} = \frac{16}{3} < \frac{18}{3} = 6 = \frac{6 \times 4}{4} = \frac{4!}{2^2} = \frac{(2 \times 2)!}{(2!)^2}$$

وهذا يعني صحة المتراجحة من أجل $n = 2$.

ثانياً- نفرض أن المتراجحة السابقة صحيحة من أجل $n = k$ حيث $k \geq 2$، أي إن:

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

ولنبرهن على صحة الحالة من أجل $n = k + 1$، أي:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}$$

سوف نعيد كتابة الطرف الأيسر من المتراجحة:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4^k}{(k+1)} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$

نستخدم الآن صحة المتراجحة من أجل الحالة $n = k$.

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4^k}{(k+1)} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$

نعيد كتابة الطرف الأيمن من المتراجحة على النحو الآتي:

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} = \frac{4 \cdot (2k)!\,(2k+1)(2k+2)(k+1)(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)(k!)^2(k+1)^2(k+2)} =$$

ونجد بعد التبسيط:

$$\frac{4 \cdot [2(k+1)]!\,(k+1)(k+1)^2}{[(k+1)!]^2(2k+1)(2k+2)(k+2)} = \frac{2 \cdot [2(k+1)]!\,(k+1)^2}{[(k+1)!]^2(2k+1)(k+2)}$$

لكن بما أن:

$$\frac{2(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)} = \frac{2k^2+4k+2}{2k^2+2k+2} < 1$$

إذن نحصل على المتراجحة المطلوبة للحالة $k+1$، أي إن:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}$$

ووفقاً للاستقراء الرياضي فالعبارة صحيحة من أجل قيمة $n \geq 2$.

توضيح:

إن الافتراضات المرتكزة على تصورات خاصة ذاتية ليست دائماً صحيحة بالضرورة. يوضح المثال الآتي المتعلق بحساب قيمة ثلاثي الحدود n^2+n+41 هذا المضمون. يبين الجدول (3-4) حساب قيمة ثلاثي الحدود n^2+n+41 من أجل القيم الأولى للمتغير الطبيعي n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2+n+41	43	47	53	61	71	83	97	113

الجدول (3-4)

نلاحظ أن قيم ثلاثي الحدود الناتجة هي أعداد أولية، ويمكن التحقق بشكل مباشر أنه من أجل كل القيم $1 \leq n \leq 39$، فإن القيم المقابلة لها من ثلاثي الحدود هي أيضاً أولية وتتفق مع التصور السابق. وقد يتبادر إلى الذهن الآن أنه يمكن أن يطوَّر هذا الافتراض من خلال صياغة جديدة: إنه من أجل أي قيمة n من $\mathbb{N}$ فإن قيمة ثلاثي الحدود n^2+n+41 هي عدد أولي، إلّا أنّ ذلك ليس صحيحاً وخصوصاً إذا اخترنا $n=40$ فإن قيمة ثلاثي الحدود المقابلة هي: $(41)^2 = 1681$ والذي يقتضي بأن افتراضنا الذي وضعناه خاطئ لأن الناتج الأخير ليس بعدد أولي.

تمارين محلولة

تمرين (1):

أي عدد صحيح موجب من الليرات أكبر من أو يساوي 8¢ يمكن الحصول عليها من 3¢ و5¢ من الليرات، أو بشكل آخر:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 8 \Longrightarrow n = f(3,5)$$

الحل: لإثبات ذلك سوف نعتبر أن $P(n)$ تمثل العبارة السابقة (يمكن الحصول على $n¢$ من 3¢ و5¢)، إنه من أجل $n \geq 8$، فإن $P(n)$ صحيحة من أجل قيم مبدئية كما في الجدول (4-4) التالي.

عدد الليرات	كيفية تبديلها
8¢	3¢ + 5¢
9¢	3¢ + 3¢ + 3¢
10¢	5¢ + 5¢
11¢	3¢ + 3¢ + 5¢
12¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 3¢
13¢	3¢ + 5¢ + 5¢
14¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 5¢
15¢	5¢ + 5¢ + 5¢
16¢	3¢ + 3¢ + 5¢ + 5¢
17¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 3¢ + 5¢

الجدول (4-4)

لنبرهن الآن أن هذه الظاهرة صحيحة من أجل أي عدد صحيح $n \geq 8$.

لنفرض أن الجدول السابق صحيح حتى السطر رقم k ولنبرهن أنه يبقى صحيحاً من أجل السطر الذي يليه $k + 1$. إذن إن العدد $k¢$ يمكن الحصول عليه من 3¢ و5¢ من الليرات.

في حالة الحصول على السطر $k¢$ بإضافة 5¢، عندئذ يمكن الحصول على $(k + 1)¢$ بتبديل 5¢ باثنين من 3¢ من الليرات كما في الشكل (4-5).

الشكل (4-5)

من جهة أخرى، في حالة عدم الحصول على السطر $k¢$ بإضافة $5¢$، عندئذٍ يمكن الحصول على $(k+1)¢$ بتبديل ثلاث من $3¢$ باثنين من $5¢$ من الليرات كما في الشكل (4-6).

الشكل (4-6)

يمكن الآن تلخيص الحجة أعلاه كما يلي:

القضية $P(n)$ هي: $n¢$ يمكن الحصول عليها من مجاميع لـ $3¢$ و $5¢$.

i. إن $P(8)$ صحيحة، لأنه يمكن أن الحصول عليها بجمع $3¢$ و $5¢$.

ii. بفرض أن $P(k)$ صحيحة من أجل $k \geq 8$. أي إنّ $k¢$ يمكن الحصول عليها من مجاميع لـ $3¢$ و $5¢$.

iii. لبرهان أن $P(k+1)$ أيضاً صحيحة، نميز حالتين.

الحالة الأولى: يوجد $5¢$ بين الذين تم الحصول عليهم في $k¢$، عندئذٍ نعوض $5¢$ بمجموع اثنين من $3¢$ والنتيجة تصبح في $(k+1)¢$.

الحالة الثانية: لا يوجد 5¢ بين الذين تم الحصول عليهم في $k¢$، بما أن $k \geq 8$ فإنه يوجد على الأقل ثلاثة 3¢، عندئذٍ نعوض مجموع ثلاثة 3¢ بمجموع اثنين من 5¢ والنتيجة تصبح في $(k+1)¢$.

تمرين (2):

أثبت صحة المساواة الآتية باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n} \quad ; \quad n \geq 2.$$

الحل: لدينا من أجل $n \in \mathbb{Z}$ و $n \geq 2$ أن:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{محققة}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \quad \text{محققة}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{محققة}$$

الآن نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k$ أي:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}$$

ولنبرهن على صحتها من أجل $n=k+1$ لدينا:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}.$$

تمرين (3):

استخدم الاستقرار الرياضي لإثبات أنه من أجل أي عدد صحيح موجب $n \geq 0$ فإن $2^{2n}-1$ قابل للقسمة على العدد 3.

الحل: إن $P(n)$ تمثل جملة أن: $2^{2n}-1$ قابل للقسمة على العدد 3. من أجل القيمة الابتدائية $n=0$، لدينا:

$P(0) = 2^{2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0 \Longrightarrow$ $P(0)$ قابل للقسمة على 3

الآن لنفرض أن $P(n)$ محققة من أجل $n = k$ أي أن:

$$P(k) = 2^{2k} - 1 \Longrightarrow \text{ } P(k) \Longrightarrow P(k) = 3 \cdot m \text{ قابل للقسمة على } 3$$

لنبرهن أن $P(k+1)$ يحقق ذلك أيضاً:

$$P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 = 2^{2k} \cdot 4 - 1 =$$
$$= 2^{2k} \cdot 3 + 2^{2k} - 1 = 2^{2k} \cdot 3 + P(k) = 2^{2k} \cdot 3 + 3 \cdot m$$
$$= 3 \cdot (2^{2k} + m)$$

مما يدل أنّ $P(k)$ يقبل القسمة على 3.

تمرين (4):

استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لبرهان أن المتراجحة الآتية صحيحة من أجل $n \geq 3$.

$$2n + 1 < 2^n.$$

الحل: في هذا التمرين إن $\boxed{2n + 1 < 2^n} \equiv P(n)$. لنبرهن صحة هذه المتراجحة من أجل قيمة ابتدائية $n = 3$. لدينا:

$$P(3) \equiv 2 \cdot 3 + 1 = 7 < 2^3 = 8.$$

نفرض أن المتراجحة صحيحة من أجل $n = k$، أي $P(k)$ محققة، أي $2k + 1 < 2^k$، $(k \geq 3)$. ولنبرهن على صحتها من أجل $n = k + 1$. أي لنبرهن أن:

$$2(k+1) + 1 < 2^{k+1}$$

لدينا:

$$2(k+1) + 1 = 2k + 3 = (2k + 1) + 2 < 2^k + 2 < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k$$
$$= 2^{k+1} \quad ; \quad k \geq 3. \Longrightarrow P(k+1) \text{ محققة}$$

تمرين (5):

لتكن المتتالية $a_1, a_2, a_3, \cdots$ المعرفة كما يلي:

$$a_1 = 2, \qquad a_k = 5a_{k-1} \quad ; \quad k \geq 2.$$

أ) اكتب الحدود الأربعة الأولى لها.

ب) إذا فرضنا $n \geq 1$، أثبت أن الحد العام لهذه المتتالية هو $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$، مستخدماً مبدأ الاستقراء الرياضي.

الحل: أ) إن الحدود الأربعة الأولى هي:

$a_1 = 2.$
$a_2 = 5a_{2-1} = 5a_1 = 5 \cdot 2 = 10.$
$a_3 = 5a_{3-1} = 5a_2 = 5 \cdot 10 = 50.$
$a_4 = 5a_{4-1} = 5a_3 = 5 \cdot 50 = 250.$

ب) إن القضية هنا هي $P(n) \rightarrow a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$.

لنثبت أن $P(1)$ محققة لدينا:

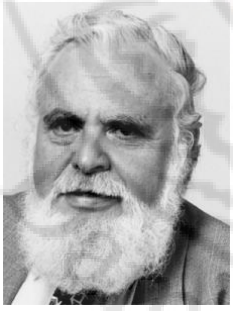
$$P(1) \rightarrow a_1 = 2 \cdot 5^{1-1} = 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2 \Longrightarrow P(1) \text{ محققة}$$

لنفرض أنه من أجل $k \geq 1$ أن $P(k)$ محققة، ولنثبت أن $P(k+1)$ محققة؛ بما أن $P(k)$ محققة هذا يعني $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ وبالتالي:

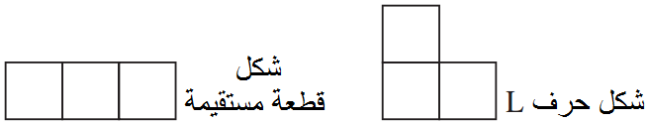
$$a_{k+1} = 5a_{(k+1)-1} = 5a_k = 5 \cdot (2 \cdot 5^{k-1}) = 2 \cdot (5 \cdot 5^{k-1}) = 2 \cdot 5^k.$$

$$a_{k+1} = 2 \cdot 5^k = 2 \cdot 5^{(k+1)-1} \Longrightarrow P(k+1) \text{ محققة}$$

تمرين (6): (مشكلة التروميno)

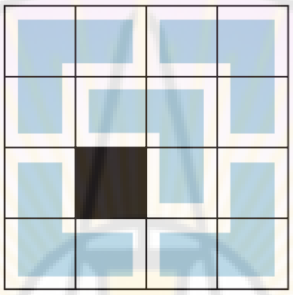


إن كلمة كثير–مينو Polyominoes هي تعميم لكلمة دومينو، أدخلت هذه الكلمة من قبل العالم سُلُمون غولومب (Solomon Golomb) في عام 1954 عندما كان عمره آنذاك 22 سنة، عندما كان طالباً في هارفارد. أثبت هو وزملاؤه العديد من الخصائص الهامة والمثيرة وأصبحوا أساس لعبة الحاسوب الشعبية تيتريس (Tetris). يدعى أي نوع من كثير–مينو **تروميno** trominoes إذا تكوّن من ثلاثة مربعات متصلة، والتي يمكن أن تأخذ شكلين مختلفين هما شكل حرف **L** أو شكل قطعة مستقيمة، كما هو مبين في (الشكل 4-7).



الشكل (4-7)

لنفرض أن لدينا لوحة مربعة من الحجم 4×4، مؤلفة من 4 مربعات في 4 مربعات. إذا حذفنا مربعاً واحداً فقط منها، فإنه يمكن تغطيتها بالترومينو من شكل حرف L. كما هو مبين في (الشكل 4-8).



الشكل (4-8)

في أول بحث للعالم غولومب أثبت النظرية الآتية مستخدماً الاستقراء الرياضي.

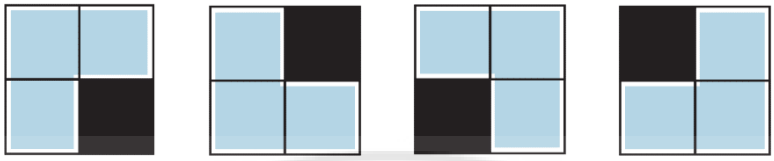
نظرية (4-3) (تغطية لوحة بالترومينو):

من أجل أي عدد صحيح $n \geq 1$، إذا حذف مربع واحد من لوحة مؤلفة من $2^n \times 2^n$ مربعاً، فإن المربعات الباقية يمكن تغطيتها بالعديد من الترومينو ذي الشكل L.

الإثبات:

لتكن $P(n)$ قضية (إذا حذف مربع واحد من لوحة مؤلفة من $2^n \times 2^n$ مربعاً، فإن المربعات الباقية يمكن تغطيتها بالعديد من الترومينو ذي الشكل L)

لنرَ صحة هذه القضية في حالة لوحة مؤلفة من $2^1 \times 2^1$ مربعاً، أي فيها 4 مربعات، فإذا حذف أحدها يبقى ثلاثة مربعات على شكل L. أي يبقى ترومينو واحدة على شكل L كما هو مبين في الشكل (4-9).



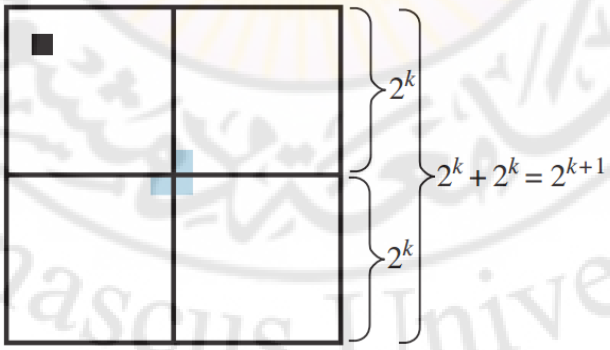
الشكل (4-9)

لنفرض جدلاً أن القضية صحيحة من أجل $n = k$، أي $P(k)$ محققة مما يدل أنّ لوحة مربعة من حجم $2^k \times 2^k$ مربعاً، إذا حذف منها مربع واحد، تم تغطيتها بترومينو متعددة على شكل L.

لنبرهن الآن صحة القضية من أجل $n = k + 1$، أي إنّ $P(k + 1)$ محققة، أي إذا حذف مربع من لوحة مربعة من حجم $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ مربعاً، فإنه يتم تغطيتها بالترومينو المتعددة على شكل L.

نقسم اللوحة السابقة إلى أربع لوحات مربعة متساوية، كما هو مبين في الشكل (4-10).

إنّ كل لوحة من هذه اللوحات حجمها $2^k \times 2^k$، فحسب الفرض السابق كل لوحة منها يمكن تغطيتها بترومينو متعددة على شكل L.



الشكل (4-10)

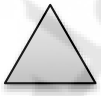
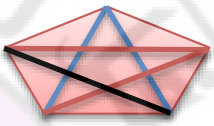
إن إحداها تمتلك مربعاً محذوفاً، وأما بقية المربعات في اللوحات الباقية يمكن إرسالها إلى مركز اللوحة الأم فيشكّل الترومينو على شكل L، كما هو واضح في الشكل (4-10

4). فيكون كل مربعات اللوحة الأم المطلوبة من الحجم $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ قد تم تغطيتها بالترومينو المتعددة على شكل L.

تمرين (7):

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب مؤلف من n ضلعاً، $(n \geq 3)$ هو $\frac{n(n-3)}{2}$.

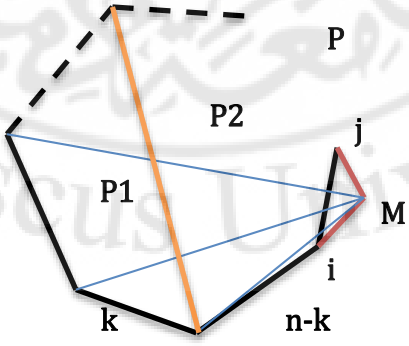
الحل: لدينا من أجل قيم ابتدائية لـ n ما يلي:

		
عدد الأقطار, $n = 3$ $= \frac{n(n-3)}{2} = 0$	عدد الأقطار, $n = 4$ $= \frac{n(n-3)}{2} = 2$	عدد الأقطار, $n = 5$ $= \frac{n(n-3)}{2} = 5$

والقضية صحيحة من أجل هذه القيم الابتدائية.

نفرض أن القضية صحيحة من أجل المضلعات المحدبة من n ضلعاً، ولنثبت صحتها من أجل المضلعات المحدبة من $n+1$ ضلعاً، أي إنّ عدد أقطارها $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

إن المضلع المحدب P من n ضلعاً، حسب الفرض، عدد أقطاره هو: $\frac{n(n-3)}{2}$. نأخذ من المضلع المحدب نقطة M خارجه ونصل هذه النقطة برؤوس المضلع جميعها كما هو مبين في الشكل (4-11). ونجد أننا حصلنا على مضلع محدب من $n+1$ ضلعاً.



الشكل (4-11)

تحول الضلع ij في المضلع إلى قطر، وبالتالي عدد الأقطار فيه يصبح عبارة عن مجموع عدد الأقطار من المضلع السابق أي $\frac{n(n-3)}{2}$، ومجموع الأقطار الجديدة المرسومة من النقطة M أي $n-2$، زائدَ الضلعِ الذي تحول لقطر أي 1.

$$\frac{n(n-3)}{2}+(n-2)+1=\frac{n^2-3n+2n-4+2}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}=$$
$$=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

وهو المطلوب إثباته.

تمرين (8):

باستخدام المبدأ القوي للاستقراء الرياضي، أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب من n ضلعاً، يعطى بالعلاقة $\frac{\pi}{2}(2n-4)$ أو $(n-2)\pi$.

الحل: في المثلث $n=3$، نعلم أنّ مجموع زوايا المثلث $180°$ وبتطبيق العلاقة نجد:

$$n=3\Longrightarrow(n-2)\pi=(3-2)\pi=\pi=180°$$

وبالتالي فالعلاقة محققة.

نفرض الآن أنّ العلاقة محققة من أجل $k=3,4,5,\cdots,n-1$، ولنثبت صحتها من أجل $k=n$. نقسم المضلع P إلى مضلعين P_1 وP_2 أحدهما مؤلف من k ضلعاً زائداً القطر القاسم والثاني مؤلف من $n-k$ ضلعاً زائداً القطر القاسم. كما في الشكل (11-4).

إن مجموع الزوايا الداخلية للمضلع P هو عبارة عن مجموع الزوايا الداخلية للمضلع P_1 والزوايا الداخلية للمضلع P_2، أي إنّ عدد الزوايا يعطى بالعلاقة:

$$(k+1-2)\pi+(n-k+1-2)\pi=(n-2)\pi$$

والقضية محققة من أجل n.

تمارين غير محلولة

أثبت صحة كل من العبارات الآتية من أجل أي قيمة للعدد الصحيح n غير السالب:

1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4) $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

5) $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$

6) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$

7) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

8) $1\cdot 2\cdot 3+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

9) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+3)}=\dfrac{n}{4n+1}$

10) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

11) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

12) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

13) $1+3+6+\cdots+\dfrac{(n-1)n}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

14) $2+7+14+\cdots+(n^2+2n-1)=\dfrac{(n+1)^2(2n+5)-11n-5}{6}$

15) $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$

16) $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\cdots+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\frac{1}{7n+1}=1$

17) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$

18) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

19) $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2^{n-1}+2(n-1)$

20) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

21) $\sum_{i=0}^{n} r^i=1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\ ;\ r\neq 1$

22) $1+6+11+16+\cdots+(5n-4)=\frac{n(5n-3)}{2}\quad ;\quad n\geq 1$

23) $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1\ ;\quad n\geq 0$

24) $4^3+4^4+4^5+4^6+\cdots+4^n=\frac{4(4^n-16)}{3}\quad ;\quad n\geq 3$

25) $\sum_{i=1}^{n} i(i!)=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1\ ;\ n\geq 1$

26) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\quad ;\quad n\geq 2$

27) $\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2i+2}\right)=\frac{1}{(2n+2)!}\quad ;\quad n\geq 0$

28) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x=\frac{1-\cos 2nx}{2\sin x}$

حيث $n\in\mathbb{Z}$ و $n\geq 1$ و x لايقبل القسمة على العدد π.

29) أثبت أن المتراجحة:

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

تكون محققة أياً كانت الأعداد: $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

30) أوجد كل الأعداد الطبيعية n التي تتحقق من أجلها المتراجحة $5^n \geq 5n^3 + 2$.

31) أثبت أن المتراجحة

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$$

تتحقق من أجل أي عدد طبيعي n.

32) أوجد المجموع

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$$

أياً كان n من $\mathbb{N}$.

33) أثبت أن

$$3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{33\cdots3}_{n \text{ مرة}} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$$

34) أثبت أن المتراجحة $2^n \geq n + 1$ تكون محققة من أجل أي عدد طبيعي n.

35) أثبت أن $|\sin nk| \leq n|\sin k|$ أياً كان n من $\mathbb{N}$.

36) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي وقاعدة مشتق الجداء أنه من أجل أي عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1} \;;\; \frac{d(x)}{dx} = 1\,, \quad \text{و} \quad x^{k+1} = x \cdot x^k$$

37) استخدم المجاميع في التمارين السابقة لحساب قيمة المقادير الآتية:

$a.$ $4 + 8 + 12 + 16 + \cdots + 200$
$b.$ $5 + 10 + 15 + 20 + \cdots + 300$
$c.$ $3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 1000$
$d.$ $7 + 8 + 9 + 10 + \cdots + 600$
$e.$ $1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) \;\; ; \;\; k \geq 2.$

$f.\quad 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{25}$
$g.\quad 2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{26}$
$h.\quad 3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n \quad ; \quad n\geq 1.$
$i.\quad 5^3+5^4+5^5+5^6+\cdots+5^k \quad ; \quad k\geq 3.$
$j.\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n} \quad ; \quad n\geq 0.$
$k.\quad 1-2+2^2-2^3+\cdots+(-1)^n 2^n \quad ; \quad n\geq 0.$

38) استنتج الصيغة العامة للجداء الآتي بعد إعطاء قيم صغيرة للعدد n ثم أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

39) لاحظ أن:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{2}{5},$$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{3}{7},$$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}=\frac{4}{9},$$

خمّن الصيغة العامة لما سبق، ثم أثبت صحتها باستخدام الاستقراء الرياضي.

40) لاحظ أن:

$$1=1,$$
$$1-4=-(1+2),$$
$$1-4+9=1+2+3,$$
$$1-4+9-16=-(1+2+3+4),$$
$$1-4+9-16+25=1+2+3+4+5.$$

خمّن الصيغة العامة المناسبة لما سبق، ثم أثبت صحتها باستخدام الاستقراء الرياضي.

41) أثبت صحة العلاقات الآتية مستخدماً مبدأ الاستقراء الرياضي:

a) المقدار 5^n-1 قابل للقسمة على العدد 4، من أجل $n\geq 0$.

b) المقدار $7^n - 1$ قابل للقسمة على العدد 6، من أجل $n \geq 0$.

c) المقدار $n^3 - 7n + 3$ قابل للقسمة على العدد 3، من أجل $n \geq 0$.

d) المقدار $3^{2n} - 1$ قابل للقسمة على العدد 8، من أجل $n \geq 0$.

e) المقدار $7^n - 2^n$ قابل للقسمة على العدد 5، من أجل $n \geq 0$.

f) المقدار $x^n - y^n$ قابل للقسمة على العدد $x - y$، من أجل $n \geq 0$، حيث $x, y \in \mathbb{Z}$ و $x \neq y$.

g) المقدار $n^3 - n$ قابل للقسمة على العدد 6، من أجل $n \geq 0$.

h) المقدار $n(n^2 + 5)$ قابل للقسمة على العدد 6، من أجل $n \geq 0$.

i) إنّ $2^n < (n + 1)!$ من أجل $n \geq 2$.

j) إنّ $1 + 3n \leq 4^n$ من أجل $n \geq 0$.

k) إنّ $5^n + 9 < 6^n$ من أجل $n \geq 2$.

l) إنّ $n^2 < 2^n$ من أجل $n \geq 5$.

m) إنّ $2^n < (n + 2)!$ من أجل $n \geq 0$.

n) إنّ $\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} < \sqrt{n}$ من أجل $n \geq 2$.

o) إنّ $n^3 > 2n + 1$ من أجل $n \geq 2$.

p) إنّ $n! > n^2$ من أجل $n \geq 4$.

42) متتالية $a_1, a_2, a_3, \cdots$ معرفة بالشكل $a_1 = 3$ و $a_k = 7a_{k-1}$ من أجل $k \geq 2$، أثبت أن حدها العام يعطى بالعلاقة $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ من أجل $n \geq 1$.

43) متتالية $b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$ معرفة بالشكل $b_0 = 5$ و $b_k = 4 + b_{k-1}$ من أجل $k \geq 1$، أثبت أن حدها العام يحقق المتراجحة $b_n > 4n$ من أجل $n \geq 0$.

44) متتالية $c_0, c_1, c_2, \cdots$ معرفة بالشكل $c_0 = 3$ و $c_k = (c_{k-1})^2$ من أجل $k \geq 1$، أثبت أن حدها العام يعطى بالعلاقة $c_n = 3^{2^n}$ من أجل $n \geq 0$.

45) متتالية $d_1, d_2, d_3, \cdots$ معرفة بالشكل $a_1 = 2$ و $d_k = \frac{d_{k-1}}{k}$ من أجل $k \geq 2$، أثبت أن حدها العام يعطى بالعلاقة $d_n = \frac{2}{n!}$ من أجل $n \geq 1$.

46) أثبت أن العلاقة الآتية صحيحة من أجل $n \geq 1$.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots = \frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(4n-1)}$$

47) أ) أثبت باستخدم الاستقراء الرياضي أنّ أيّ لوحةٍ ذات أبعاد $2n \times 3$ يمكن تغطيتها كاملة بالترومينو ذات شكل L، حيث $n \geq 1$.

ب) إذا كان $n, m \in \mathbb{N}, n \geq 1$، استفد من النتيجة التي حصلت عليها من الطلب (أ) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أنّ أيّ لوحةٍ ذاتُ أبعاد $2m \times 3n$ يمكن تغطيتها كاملة بالترومينو المتعددة ذات شكل L.

الفصل الخامس

5- الخوارزميات والعودية

5-1 التوابع والخوارزميات العودية (Recursive Functions and Algorithms)

الخوارزمية هي مجموعة من التعليمات (instructions) حول كيفية أداء مهمة. إنّ مجموعات التعليمات التي نحصل عليها مع أدوات تخبرنا عن كيفية استخدامها أو إرسائها (مع إنها في المعتاد قد تبدو كأنها مبهمة) تمثل الخوارزميات. يحتاج الحاسب إلى الخوارزميات لتبين كيفية أداء المهام. فالبرنامج الحاسوبي هو خوارزمية ومن المرغوب فيه أن تكون الخوارزمية عامة ما أمكن. على الرغم أنه من المناسب عادةً أن نعرِّف التابع مباشرة بدلالة متحولات هذا التابع، إلاّ أنه في بعض الأحيان وبشكل تقليدي أو حتى من الضروري أن نستخدم طريقةً أخرى تدعى بالعودية. لأجل هذه الغاية سوف نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لتحديد مفهوم التابع المعرف عودياً. فإذا كان:

1- التابع معرّف من أجل قيمة ابتدائية a (عادة ما تكون 0 أو 1)

2- وعندما يكون التابع معرفاً من أجل القيمة k التي تزيد عن a، فإن ذلك يقود إلى تعريفه من أجل القيمة $k+1$.

فنقول إن التابع معرف من أجل كل الأعداد الصحيحة التي تزيد أو تكبر a.

ولعلَّ الأكثر دقة أن نقول إنّ التابع معرّف عودياً. يستخدم هذا التعريف العودي من أجل التوابع المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. وستتم مناقشة الشكل الأكثر عمومية للتعريف العودي فيما بعد. وسنرى أنه ليس ضرورياً دائماً أن يكون التابع العودي معرفاً عودياً. كمثال ذلك ننظر في الحالة الآتية:

مثال (5-1):

إنّ التابع f معرّف من خلال:

$$\begin{cases} f(0) = 2\,, \\ f(k+1) = \dfrac{f(k)!}{(k+1)!} \end{cases}$$

ربما يبدو أنّ هذا التابع يحقق الجزأين (1) و(2)، من أجل كل الأعداد الصحيحة الموجبة، لكننا نرى على الرغم من وجود $f(1) = 2$ و$f(2) = 1$ و$f(3) = \frac{1}{6}$، إلاّ أنّ $f(4)$ غير معرفة، إذ إنّه لا معنى للمقدار $\left(\frac{1}{6}\right)!$.

بشكل مشابه، إذا كانت الخوارزمية تؤدَّى من أجل قيمة مثبتة a، وعندما يكون عمل الخوارزمية من أجل القيمة k التي تزيد عن a، يقود إلى تعريفها وأداء عملها من أجل القيمة $k+1$، فإنه يمكن لهذه الخوارزمية أن تؤدَّى من أجل كل القيم $n \geq a$. عندئذٍ نقول عن هذه الخوارزمية إنها خوارزمية عودية.

سوف نبدأ ببعض الأمثلة على التوابع المعرفة عودياً.

مثال (5-2):

التابع $f(n) = a^n$ المعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. يمكن أن يكتب على شكل جداء للقيمة a مع نفسها n مرة. يمكن أيضاً لهذا التابع أن يعرف عودياً على النحو الآتي:

$$\begin{cases} f(0) = 1\,, \\ f(n+1) = af(n) \end{cases}$$

مثال (5-3):

لننظر في التابع $f(n) = n!$ من السهل التعبير عن هذا التابع من خلال مفهوم العاملي:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

لكن من الصعب أن نشرح للحاسب الذي سيقوم بإجراء الحساب ما هو؟ أو النقاط .... من الممكن بالطبع أن نكتب إجراءً أو خوارزمية تقوم بحساب $n!$ مباشرةً. إنّ وصف هذه الخوارزمية يمكن أن يكون على النحو الآتي:

```
procedure Factorial(n)
  if n = 0 then Factorial(n)=1
  Let Factorial(n)=1
for k = 1 to n
    Factorial(k) = k · Factorial(k − 1)
end for
end
```

إذا كتبنا تابع العاملي عودياً، فإنّ له الشكل:

$$\begin{cases} \text{Factorial}(0) = 1 \\ \text{Factorial}(k+1) = (k+1) \cdot \text{Factorial}(k) \end{cases}$$

والوصف الخوارزمي كبرنامج حاسوبي هو:

```
procedure Factorial(n)
   if n = 0  then  Factorial(n) = 1
   if n > 0  then  Factorial(n) = n · Factorial(n − 1)
end.
```

مثال (5-4):

إنّ التابع الذي سنناقشه في هذا المثال عادة ما يستخدم لوصف العودية وهو عبارة عن متتالية فيبوناشي (Fibonacci). العنصر الأول والثاني هو 1 وكل عنصر تالٍ من المتتالية يكتب كمجموع للعددين السابقين له. إذا تم أخذ الحدود العشر الأولى من هذه المتتالية، فإنّ لها الشكل:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

يصف الإجراء الآتي برنامج حساب $\text{Fib}(n)$ قيمة الحد النوني (رقم n) في هذه المتتالية:

```
procedure Fib(n)
   if n = 1,      then  Fib(n) = 1
   if n = 2,      then  Fib(n) = 1
   if n > 2,      then  Fib(n) = Fib(n − 1) + Fib(n − 2)
end.
```

مثال (5-5):

تعطى متتالية أعداد كتالان (Catalan numbers) بالصيغة:

$$\mathrm{Cat}(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n)!}$$

إذا تم البدء بالحد الصفري، فإنّ الحدود الأحد عشر الأولى هي:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796$$

نعرّف التابع Cat عودياً من خلال:

$$\begin{cases} \mathrm{Cat}(0) = 1 \\ \mathrm{Cat}(n+1) = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}\mathrm{Cat}(n) \end{cases}$$

لإثبات ذلك، نحسب أولاً:

$$\mathrm{Cat}(0) = \frac{0!}{1!\,0!} = 1$$

ولنبيّن أنّ:

$$\frac{2(2n+1)}{n+2}\mathrm{Cat}(n) = \mathrm{Cat}(n+1)$$

نأخذ الطرف الأيسر من هذه العلاقة، فإنه يمكن أن يكتب بالشكل:

$$\begin{aligned} \frac{2(2n+1)}{n+2}\mathrm{Cat}(n) &= \frac{2(2n+1)}{n+2}\frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n!)} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+2)!\,(n!)} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+2)!\,(n+1)(n!)} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+2)!\,(n+1)!} \\ &= \mathrm{Cat}(n+1) \end{aligned}$$

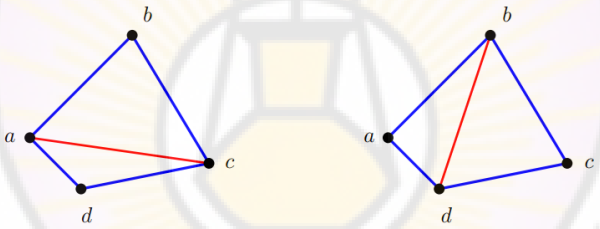
نشير إلى حالتين تظهر فيهما أعداد كتالان:

الحالة الأولى: إذا أعطي مضلع محدب فيه $(n+2)$ من الأضلاع، فإنّ عدد الطرق التي يمكن أن يُقسَّم فيها هذا المضلع إلى مثلثات من خلال وصل أركان المضلع بمستقيمات عددها $(n-1)$، يساوي إلى $\mathrm{Cat}(n)$.

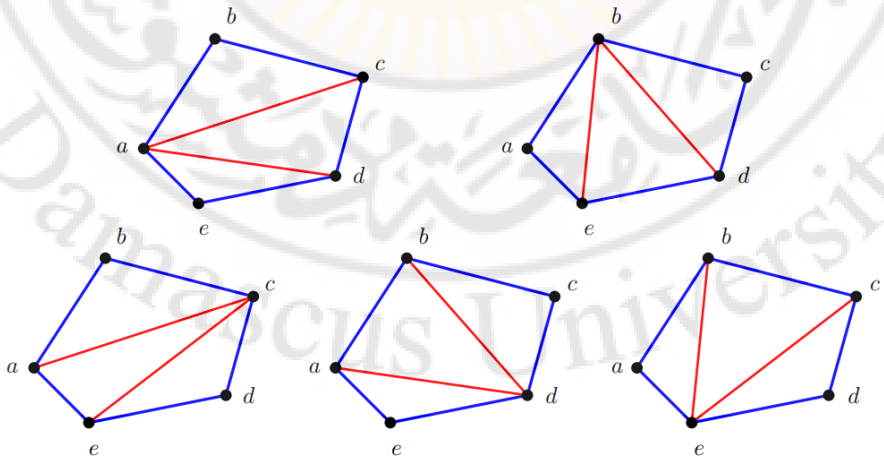
إذا أخذنا الحالات الآتية:

في المضلع الثلاثي الأضلاع (أي أنّ $n=1$)، توجد طريقة واحدة فقط لتشكيل مثلث باستخدام 0 من المستقيمات و $\mathrm{Cat}(1)=1$.

وفي المضلع الرباعي الأضلاع (أي أنّ $n=2$)، توجد طريقتان فقط. يوضّح الشكل (1-5) هاتين الحالتين. كما نلاحظ أنّ $\mathrm{Cat}(2)=2$. توجد للمضلع الخماسي الأضلاع $(n=3)$، خمس طرق موضحة بالشكل (2-5). نجد في هذه الحالة أنّ $\mathrm{Cat}(3)=5$.



الشكل (1-5)



الشكل (2-5)

الحالة الثانية: إنّ عدد الطرق التي تمكن وضع n زوجاً من الأقواس في التعبير $a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}$ لتشكيل n من جداءات أزواج الأعداد التي تمثل عوامل التعبير يساوي إلى $\mathrm{Cat}(n)$. عندما تكون $n=1$، لدينا فقط (a_1a_2) أو أن نقول طريقة واحدة. كما نجد عندما تكون $n=2$، أنه لدينا الحالتين: $((a_1a_2)a_3)$، $(a_1(a_2a_3))$. في حالة $n=3$ لدينا الحالات:

$$\big(((a_1a_2)a_3)a_4\big),\quad \big(a_1\big(a_2(a_3a_4)\big)\big),\quad ((a_1a_2)(a_3a_4))$$
$$\big((a_1(a_2a_3))a_4\big),\quad \big(a_1((a_2a_3)a_4)\big)$$

أي إنه توجد خمس طرق.

مثال (5-6):

يعتبر تابع أكرمان (Ackermann) من التوابع الهامة وله الشكل:

$$\mathrm{Ack}:\ \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$$

ونعرفه عودياً على $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الغير سالبة)، على النحو الآتي:

$$\begin{cases}\mathrm{Ack}(0,n)=n+1\\ \mathrm{Ack}(m,0)=\mathrm{Ack}(m-1,1)\ ;\ m>0\\ \mathrm{Ack}(m,n)=\mathrm{Ack}\big(m-1,\mathrm{Ack}(m,n-1)\big)\ ;\ m,n>0\end{cases}$$

نكتب الإجرائية المتعلقة بهذه العمليات على النحو الآتي:

$\mathrm{Ack}(m,n)$
  if $m=0$, then $\mathrm{Ack}(m,n)=n+1$
  if $m>0$ and $n=0$, then $\mathrm{Ack}(m,n)=\mathrm{Ack}(m-1,1)$
  if $m>0$ and $n>0$, then $\mathrm{Ack}(m,n)=\mathrm{Ack}\big(m-1,\mathrm{Ack}(m,n-1)\big)$
end.

يمكن القيام يدوياً بحساب $\mathrm{Ack}(3,2)$.

مثال (5-7):

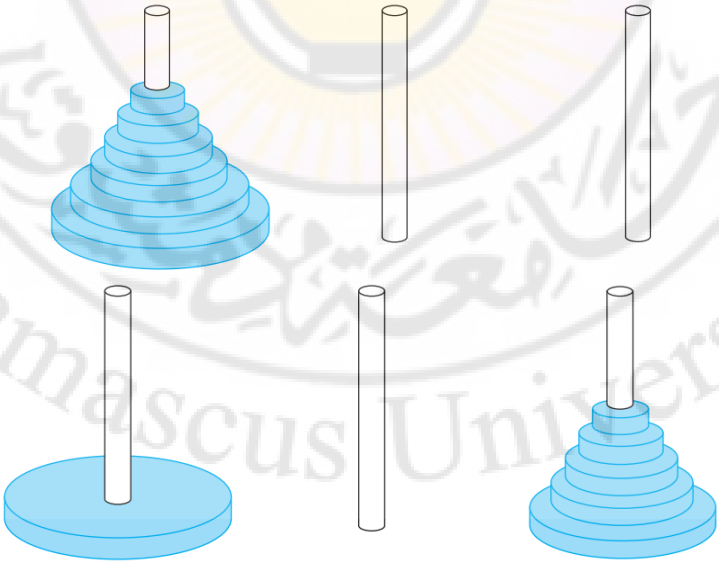
برج هانوي (Tower of Hanoi)

سوف نتعرف على خوارزمية عودية. تتكون مسألة برج هانوي من ثلاثة أوتاد ومجموعة من الأقراص بالإضافة إلى أسطورة. توجد في هذه المسألة ثلاثةُ أوتادٍ وأقراصٍ ذات أحجام مختلفة عن بعضها بعضاً متوضعةً في واحد من الأوتاد وبترتيب تناقصي من الأسفل إلى الأعلى. حيث إن القرص الأكبر يتوضع في الأسفل ويليه الأقل فالأقل إلى أن يكون الأصغر فيها متوضعاً في الأعلى. إنّ هدف هذه المسألة هو أن نضع كل الأقراص في وتدٍ آخر بذات الترتيب وفق الشرطين الآتيين:

يتم نقل قرص واحد في كل مرة من وتدٍ لآخر.

لا يوضع القرص الأكبر على قرص أصغر منه.

إنّ هذه المسألة عودية. لنأخذ الحالة عندما يكون هنالك ستة أقراص على الوتد، فإذا تمت معرفة كيفية تحريك خمسة أقراص منها، فإنّنا نستطيع تحريك الخمسة الأولى من الأقراص إلى الوتد الأوسط ونحرك القرص الأخير إلى الوتد غير المشغول بأي قرص، نقوم بعد ذلك بوضع الأقراص الخمسة الموجودة في الوتد الأوسط، بحيث تتوضع فوق القرص الأكبر. إنّ الشكل (5-3) يوضّح هذه الحالة.



الشكل (5-3)

إنّ الخوارزمية الآتية التي تقوم بتحريك n من الأقراص من الوتد الأول إلى الثالث هي خوارزمية عودية. سوف نرقم الأوتاد بالأرقام: $1,2,3$ ونعلمها أيضاً بالأحرف: A,B,C على الترتيب، وهي تمثل متغيرات نفرض أن كلاً منها تأخذ القيم: $1,2,3$.

Procedure Hanoi(A,C,n)
  if $(n=1)$, more the single disk from A to C
  Let $B=6-A-C$
  if $n>1$
  Use Hanoi$(A,B,n-1)$ to more the top $n-1$ disks to B
  Use Hanoi$(A,C,1)$ to more the last disks from A to B
  Use Hanoi$(B,C,n-1)$ to more the top $n-1$ disks to C
  enf if
end.

إذا تم أخذ $n=3$، نبدأ بالحالة Hanoi$(1,2,3)$ حيث: $A=1,B=2,C=3$. من خلال Hanoi$(1,2,3)$ يتم أولاً استدعاء Hanoi$(1,2,2)$ لتحريك القرصين الموجودين في الأعلى إلى الوتد 2. وفي Hanoi$(1,2,2)$ لدينا: $A=1,B=3,C=2$. من خلال Hanoi$(1,2,2)$ يتم أولاً استدعاء Hanoi$(1,2,1)$ لتحريك القرص الثاني إلى الوتد 2. نقوم بعد ذلك باستدعاء Hanoi$(1,3,1)$ لتحريك القرص الثاني من الوتد 1 إلى الوتد 3. نستدعي الآن Hanoi$(3,2,1)$ لتحريك القرص الموجود في أعلى الوتد 2 لنضعه على القرص الثاني في الوتد 3. نعود إلى Hanoi$(1,3,3)$ ونستدعي Hanoi$(1,3,1)$ لتحريك القرص السفلي من الوتد 3 إلى الوتد 1. نستدعي بعد ذلك Hanoi$(2,3,2)$ لتحريك قرصين من 2 إلى 3. وهنا لدينا $A=2,B=1,C=3$ من خلال Hanoi$(2,3,2)$ نستدعي Hanoi$(2,1,1)$ لتحريك القرص الموجود في أعلى الوتد 2 إلى 1. ثم نقوم بعد ذلك باستدعاء Hanoi$(2,3,1)$ لتحريك القرص الثاني من الوتد 2 إلى 3. أخيراً نستدعي Hanoi$(1,3,1)$ لتحريك القرص الموجود في الأعلى من الوتد 1 إلى الوتد 3. بذلك نكون قد أتممنا Hanoi$(2,3,2)$ و Hanoi$(1,3,3)$ وبذلك ننهي العمل.

تقول الأسطورة القديمة بوجود 64 من الأقراص الذهبية وثلاثة من الأوتاد الماسية. يتم تحريك هذه الأقراص لنقلها وفق الشرطين المذكورين سابقاً.

والسؤال الذي يُطرح دائماً هو في طول هذه العملية لإعادة توضُّع الأقراص في الوتد الآخر وبنفس الترتيب وضمن القواعد المحددة. تقول الأسطورة إنه عند إتمام عملية النقل فإنّ العالم سينتهي. لتحديد عدد مرات نقل الأقراص المطلوبة لحل مسألة نقل n قرص من وتد إلى آخر وفق الشروط، نستخدم لهذه الغاية التابع H. نعلم أنه إذا كانت $n = 1$، فإننّا نضع $H(1) = 1$ لوجود عملية نقل واحدة. نفرض أنّ $H(k-1)$ معروفة، بالتالي فإنّ $H(k)$ تمثل عدد مرات نقل k قرص من الوتد 1 إلى الوتد 3. ويتضمن هذا العدد نقل $k-1$ قرص من الوتد 1 إلى الوتد 2 والتي تتطلب $H(k-1)$ عمليةً، عندئذٍ إنّ تحريك القرص الموجود في أسفل الوتد 1 إلى 3 تتم بنقلة واحدة ومن ثم فإنّ تحريك $k-1$ قرصاً من 2 إلى 3 تأخذ $H(k-1)$ عملية. بالتالي يكون لدينا:

$$H(k) = 2H(k-1) + 1$$

وهذا تابع عودي. يمكن أن نغير هذا التابع إلى تابع مباشر. للقيام بذلك سوف نحسب في البداية بعض القيم للتابع H ومن ثم نقوم بإيجاد النموذج:

$$H(1) = 1$$
$$H(2) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$H(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$
$$H(4) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$
$$H(5) = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

إذا قمنا بإضافة 1 إلى كل حد من المتتالية $1, 3, 7, 15, 31, \cdots$ نحصل على:

$$2, 4, 8, 16, 32, \cdots$$

يبدو من خلال هذه القيم أنّ: $H(n) = 2^n - 1$.

يمكن إثبات صحة هذه العلاقة باستخدام الاستقراء الرياضي.

من الواضح أنّ العبارة السابقة صحيحة من أجل $n = 1$. لنفرض الآن أنّ هذه العبارة صحيحة من أجل $n = k$، أي إنّ $H(k) = 2^k - 1$. ونرغب في إثبات صحتها من أجل $n = k + 1$. أي لنثبت صحة العبارة: $H(k+1) = 2^{k+1} - 1$

ننطلق من $H(k+1)$ ونكتبها بالشكل:

$$H(k+1) = 2H(k) + 1 = 2 \cdot (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

بالتالي فإنّ ما نريد إثبات صحته قد تم.

في النقاشات السابقة قمنا بتغيير وصف التابع المعرف عودياً إلى المباشر. لقد أشار هذا الإجراء إلى كيفية حل التابع المعرف عودياً. لقد تم القيام بحساب بعض القيم الأولى للتابع من ساحته، من ثم تم بناء النموذج أو صيغة هذا التابع، وسنقوم بمناقشة العديد من هذه الأمثلة بالإضافة إلى القيام بتغيير وصف التابع من المباشر إلى العودي. كما سنقوم بحل التابع بحسابه، من ثم بناء صيغته.

مثال (5-8):

لنوجد حل التابع المعرف عودياً:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(k) = f(k-1) + k \end{cases}$$

بما أنّ:

$$f(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$$f(2) = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$f(3) = (1 + 2) + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$f(4) = (1 + 2 + 3) + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$f(5) = (1 + 2 + 3 + 4) + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

من الواضح أنّ هذا التابع هو:

$$f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

لإثبات أنّ هذه الصيغة محققة، ينبغي أن نبين أن هذا التابع يحقق تعريف التابع العودي، أي يجب أن نبيّن أنّ $f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ يحقق:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(k)=f(k-1)+k \end{cases}$$

نلاحظ أنّ: $f(1)=1$:

$$f(1)=\frac{1\cdot 2}{2}=1$$

بعد ذلك نبيّن أنّ: $f(k)=f(k-1)+k$:

$$f(k-1)+k=\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{k^2-k}{2}+k=\frac{k^2+k}{2}=\frac{k(k+1)}{2}=f(k)$$

إذن، إنّ $f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ يحقق التابع المعطى المعرف عودياً.

مثال (5-9):

لنوجد حل التابع المعرف عودياً:

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(k)=2\cdot k\cdot f(k-1) \end{cases}$$

بما أنّ:

$$\begin{aligned} f(1)&=2 && =2^1\cdot 1! \\ f(2)&=2\cdot 2\cdot 2 && =2^2\cdot 2! \\ f(3)&=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 && =2^3\cdot 3! \\ f(4)&=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4 && =2^4\cdot 4! \\ f(5)&=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 5 && =2^5\cdot 5! \end{aligned}$$

يبدو أنّ هذا التابع هو: $f(n)=2^n\cdot n!$ يحقق:

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(k)=2\cdot k\cdot f(k-1) \end{cases}$$

نلاحظ أولاً أنّ: $f(1)=2$:

$$f(1)=2^1\cdot 1!=2$$

ولنبيّن أنّ: $f(k)=2\cdot k\cdot f(k-1)$ لكن:

$$2kf(k-1)=2k(2^{k-1}(k-1)!)=2\cdot 2^{k-1}\cdot k(k-1)!=2^k\cdot k!$$

نستنتج أنّ: $f(n) = 2^n \cdot n!$ يحقق التابع العودي المعطى.

مثال (5-10):

سوف نعبر عن التابع المعطى:

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

على أنه تابع معرف عودياً. لأجل ذلك نلاحظ:

$$f(1) = 1 = 1^2$$
$$f(2) = 5 = 1^2 + 2^2$$
$$f(3) = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$f(4) = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$
$$f(5) = 55 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

هذا ما يظهر أنّ للتابع الشكل الآتي:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(k) = f(k-1) + k^2 \end{cases}$$

لإثبات ذلك نستخدم الاستقراء الرياضي.

بالتأكيد إنّ $f(1) = 1$.لنفرض بعد ذلك أنّ:

$$f(k-1) = \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}$$

ولنبيّن أنّ:

$$f(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

نلاحظ، أنّ:

$$f(k-1) + k^2 = \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6} + k^2$$
$$= \frac{(k-1)(k)(2k-1) + 6k^2}{6}$$
$$= k\frac{(k-1)(2k-1) + 6k}{6} = k\frac{2k^2 - 3k + 1 + 6k}{6}$$
$$= k\frac{(k+1)(2k+1)}{6} = f(k)$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد: $f(1), f(2), f(3), f(4)$ من أجل كل من التوابع الآتية المعطاة عودياً:

$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(k)=\left(f(k-1)\right)^2+3k\,;k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=k^2 f(k-1)\,;k>0 \end{cases}$
$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=\left\lfloor \frac{f(k-1)}{2} \right\rfloor+3k\,;k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=2k^{f(k-1)}\,;k>0 \end{cases}$
$\begin{cases} f(0)=4 \\ f(k)=\frac{f(k-1)}{k^2}\,;k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(k)=k+f(k-1)\,;k>0 \end{cases}$
$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(k)=\frac{f(k-1)}{k!}\,;k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(k)=3f(k-1)\,;k>0 \end{cases}$

2- أوجد: $f(2), f(3), f(4), f(5)$ من أجل كل من التوابع الآتية المعطاة عودياً :

$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=3 \\ f(k)=2f(k-1)-f(k-2);k>1 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=2 \\ f(k)=\left(f(k-1)\right)^2-f(k-2)+k^2 \end{cases}\ ;k>1$
$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(1)=4 \\ f(k)=3f(k-1)-2f(k-2);k>1 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \\ f(k)=\frac{f(k-1)}{(f(k-2))^2} \end{cases}\ ;k>1$

3- حل التوابع المعطاة عودياً بإيجاد تعابير غير عودية من أجل $f(n)$:

$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=2f(k-1)\,;k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=2+f(k-1);k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=\frac{f(k-1)}{k} \end{cases}\ ;k>0$
$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=5f(k-1)\,;k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(k)=\frac{f(k-1)}{k} \end{cases}\ ;k>0$	$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(k)=\frac{-1}{k(k-1)} \end{cases}\ ;k>0$
$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \\ f(k)=\frac{f(k-1)}{f(k-2)} \end{cases}\ ;k>1$	$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=-3f(k-1)\,;k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(k)=5+2f(k-1)\,; \\ k>0 \end{cases}$

4- أثبت أنّ $a_n = 7 - 2^{n+1}$ تحقق التابع المعطى عودياً:

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_n = 2a_{k-1} - 7 \ ; k > 0 \end{cases}$$

5- أثبت أنّ: $r \neq 1$; $a_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ تحقق التابع المعطى عودياً:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_k = a_{k-1} + k^k \ ; \ k > 0 \end{cases}$$

6- أثبت أنّ: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ تحقق التابع المعطى عودياً:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \ ; \ k > 2 \end{cases}$$

7- أثبت أنّ: $a_n = 3(-2)^n + 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$ تحقق التابع المعطى عودياً:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = -6 \\ a_k = a_{k-1} + 6\, a_{k-2} + 3 \cdot 2^k \ ; \ k > 1 \end{cases}$$

تبرز الحاجة عندَ عدّ الأشياء إلى تعابير حسابية وارتباطات لازمة كي يبسَّط الشكل الذي يمكننا من إجراء الحساب بسهولة من خلال عمليات مألوفة.

2-5 الأشكال المغلقة (Closed Forms)

إنّ الشكل المغلق (closed form) هو تعبير يمكن أن يحسب بتطبيق عدد ثابت من العمليات المعروفة على حدود التعبير. على سبيل المثال إنّ التعبير $n(n+1)/2$ هو شكل مغلق، لكن التعبير $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ ليس بشكل مغلق. سوف نتعامل في هذه الفقرة مع بعض الأشكال المغلقة من أجل المجاميع.

1-2-5 الأشكال المغلقة للمجاميع

سوف نقوم في البدء بمراجعة بعض الحقائق الأساسية على رمز المجموع $\sum$ والدلائل المستخدمة سابقاً، كما سنستخدم رمز المجموع $\sum$ لتمثيل مجموع من الشكل:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

من خلال الكتابة:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

إنّ العديد من المسائل تحل من خلال استخدام مفهوم المجاميع. وسنقوم بعرض بعض الحقائق على المجاميع التي يمكن التحقق من صحتها بسهولة:

1- $\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)\,c$ (c ثابت)

2- $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

3- $\sum_{i=m}^{n} c\,a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$ (c ثابت)

4- $\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i$ (حيث k أي عدد صحيح)

5- $\sum_{i=m}^{n} a_i x^{i+k} = x^k \sum_{i=m}^{n} a_i x^i$ (حيث k أي عدد صحيح)

إنّ هذه الحقائق مفيدة للغاية عند التعامل مع المجاميع وتحليلها إلى أشكال أبسط والتي تمكننا من إيجاد الأشكال المغلقة. لذلك من الأفضل أن ننظر في عدد من الأشكال المغلقة لبعض المجاميع المنتهية:

1- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad -2$$

$$(a \neq 1) \quad \sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad -3$$

$$(a \neq 1) \quad \sum_{i=1}^{n} i\,a^i = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(a-1)^2} \quad -4$$

إنّ هذه الأشكال المغلقة مفيدة للغاية لأنها يمكن أن تستخدم في حالات مختلفة وخصوصاً عند الحاجة لعد عدد العمليات التي تتشكل من إجراء خوارزمية. إنّ الإجابة على سهولة إيجاد الأشكال المغلقة، هذا أمر ممكن في بعض الأحيان وغير ممكن في حالات أخرى. تستخدم العديد من التقنيات عند إيجاد الأشكال المغلقة وتطبق الخواص والحقائق السابقة وذلك لضبط المجاميع والبحث عن أشكال مغلقة معروفة لها، من مثل ما أوردناه من الأشكال المغلقة الأساسية. توضّح الأمثلة الآتية كيفية إيجاد الأشكال المغلقة بأساليب مختلفة.

مثال (5-11):

لنفترض بأنّ المطلوب أن يوجد الشكل المغلق لمجموع الأعداد الطبيعية الفردية على النحو الآتي:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$$

يمكن أن نكتب التعبير السابق باستخدام رمز المجموع $\sum$ على النحو الآتي:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$$

سوف نتعامل الآن مع المجموع في الطرف الأيسر وصولاً إلى الشكل المغلق المطلوب للتعبير السابق:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)=\sum_{i=0}^{n}2i+\sum_{i=0}^{n}1=2\sum_{i=0}^{n}i+\sum_{i=0}^{n}1$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

مثال (5-12):

سوف نقوم بايجاد الشكل المغلق للمتسلسلة الهندسية: $\sum_{i=0}^{n}a^i$ حيث $a\neq 1$، لذلك سوف نرمز للمتسلسلة الهندسية بالرمز:

$$S_n=1+a+a^2+\cdots+a^n$$

نلاحظ أنّنا نستطيع أن نشكل الحد (المجموع) S_{n+1} بأسلوبين مختلفين في حدود من S_n:

$$S_{n+1}=1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}$$
$$=(1+a+a^2+\cdots+a^n)+a^{n+1}=S_n+a^{n+1}$$

كما أنّ:

$$S_{n+1}=1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}=1+a(1+a+a^2+\cdots+a^n)$$
$$=1+a\,S_n$$

بمساواة التعبيرين، نجد أنّ:

$$S_n+a^{n+1}=1+a\,S_n$$

وبما أنّ $a\neq 1$، فإنه يمكن أن نحل المعادلة السابقة من أجل S_n، فنحصل على:

$$\sum_{i=0}^{\infty}a^i=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

يمكن أن نختبر صحة الناتج من خلال الاستقراء الرياضي، أو من خلال ضرب الطرفين بالمقدار $a-1$ للحصول على المساواة.

مثال (5-13):

نحاول أن نصل إلى الشكل المغلق للمجموع: $\sum_{i=1}^{n}ia^i$.

لأجل ذلك نفرض أولاً أنّ: $S_n=\sum_{i=1}^{n}ia^i$. وهنا يجب أن نوجد تعبيرين من أجل S_{n+1} في حدود من S_n:

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} ia^i = \sum_{i=1}^{n} \left(ia^i + (n+1)a^{n+1}\right) = S_n + (n+1)a^{n+1}$$

من أجل التعبير الآخر فإنّنا نقوم بالمعالجة على النحو الآتي:

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} ia^i = \sum_{i=0}^{n} (i+1)a^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} ia^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} a^{i+1}$$
$$= a\sum_{i=0}^{n} ia^i + a\sum_{i=0}^{n} a^i = a\,S_n + a\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)$$

نساوي بين الصيغتين اللتين تحسبان S_{n+1} وصولاً إلى المعادلة:

$$S_n + (n+1)a^{n+1} = a\,S_n + a\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)$$

نحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ: S_n، للحصول على الشكل المغلق:

$$\sum_{i=1}^{n} i\,a^i = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(a-1)^2}$$

مثال (5-14):

إنّ المجموع من الشكل $\sum_{i=1}^{n} i^3$ يمكن أن يحل بحدود من المجموعين: $\sum_{i=1}^{n} i^2$; $\sum_{i=1}^{n} i$.

نبدأ الحل بإضافة الحد $(n+1)^4$ إلى $\sum_{i=1}^{n} i^4$ بعد ذلك نحصل على المعادلات الآتية:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 + (n+1)^4 = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^4 = \sum_{i=0}^{n} (i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^4 + 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$

نحذف الحد $\sum_{i=1}^{n} i^4$ من طرفي المعادلة الأخيرة لنحصل على معادلة جديدة لها الشكل:

$$(n+1)^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$

بما أنّنا نعلم الأشكال المغلقة للمجاميع الثلاث الأخيرة في الطرف الأيمن من المعادلة، فإنّنا نستطيع أن نقوم بالحل من أجل $\sum_{i=1}^{n} i^3$ لإيجاد الشكل المغلق والتي سنتركها كتمرين للقارئ. يمكن استخدام ذات الأسلوب السابق من أجل إيجاد الشكل المغلق. للتعبير $\sum_{i=1}^{n} i^k$ وذلك من أجل أي عدد طبيعي k.

مثال (5-15):

بفرض أنّ اهتمامنا يتركز على عدد العمليات الحسابية التي نحتاجها لحساب قيمة كثير الحدود الآتي من أجل قيمة ما x:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

إنّ عدد العمليات المتشكلة سيرتبط بكيفية إجرائنا لعملية الحساب. فعلى سبيل المثال، إذا قمنا بحساب كل حد بشكل منفرد وأضفناه بعد ذلك إلى مجموع الحدود. نلاحظ في هذه الحالة أنه لا توجد عمليات إذا كانت $n = 0$. وإذا كانت $n > 0$، فيوجد $n - 1$ عملية جمع وكل حد من الشكل c_ix^i يتطلب i من عمليات الجداء. بناء على هذا النقاش، فإنّ عدد العمليات من أجل $n > 0$ يعطى من خلال المجموع الآتي:

$$(n-1) + (1 + 2 + \cdots + n) = (n-1) + \sum_{i=1}^{n} i = (n-1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$$

لذا فإنه حتى من أجل قيم صغيرة تأخذها n، فإنه يتشكل عدد كبير من العمليات الحسابية، فمثلاً إذا اخترنا $n = 30$، فإنّ عدد العمليات الحسابية المتشكلة 494.

تمارين غير محلولة

أوجد الشكل المغلق لكل من المجاميع الآتية:

1- $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3n$

2- $3 + 9 + 15 + 21 + \cdots + (6n + 3)$

3- $3 + 6 + 12 + 24 + \cdots + 3(2^n)$

4- $3 + (2)3^2 + (3)3^3 + (4)3^4 + \cdots + n3^n$

استخدم المجاميع والأشكال المتعلقة المعروفة لتحويل كل مجموع من المجاميع الآتية إلى شكل مغلق:

5- $\sum_{i=1}^{n} i\,2^i$

6- $\sum_{i=1}^{n} (2i + 3)$

7- $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1)$

8- $\sum_{i=1}^{n} (2i + 2)$

9- $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$

10- $\sum_{i=1}^{n} (4i - 2)$

11- $\sum_{i=1}^{n} (i^2 - i)$

12- $\sum_{i=1}^{n} (4i - 1)$

3-5 العلاقات العودية

إن نتائج العديد من مسائل العد هي أجوبة يعبر عنها بحدود لتوابع معرفة عودياً. على سبيل المثال، إن أيّ برنامج يتضمن توابعاً أو إجراءات عودية سوف يؤدي إلى تعابير، وللعديد من هذه التعابير أشكال مغلقة تمكن من تبسيط إجراءات العد والحساب.

سنناقش في هذه الفقرة كيفية إيجاد الأشكال المغلقة لتعابير كهذه.

تعريف العلاقة العودية:

إن أيّ تابع f معرفاً عودياً وساحته $\mathbb{N}$ يقوم بحساب أعداد، يدعى بالعلاقة العودية. عندما يتم التعامل مع العوديات، عادةً ما نكتب f_n كبديل للرمز $f(n)$ و r_n كبديل للرمز $r(n)$.

مثال (5-16):

إن التعريف الآتي هو عودي:

$$\begin{cases} r(0) = 1 \\ r(n) = 2r(n-1) + n \end{cases}$$

يمكن لنا أن نكتب العودية بشكل آخر على النحو الآتي:

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ r_n = 2r_{n-1} + n \end{cases}$$

إن حل العودية r يتطلب منا إيجاد التعبير الملائم من أجل الحد العام r_n والذي يظهر الحد العام من دون الصفة العودية.

1-3-5 حل العوديات البسيطة

نبدأ ببعض العوديات البسيطة التي يمكن أن تحل دون استخدام الكثير من الخطوات.

إنّ العوديات التي سندرسها لها الشكل العام الآتي:

$$\begin{cases} r_0 = b_0 \\ r_n = a_n r_{n-1} + b_n \end{cases}$$

حيث إنّ a_n وb_n تشير إلى ثوابت أو تعابير تتضمن n دون أن تكون حاوية على r.

ندرس تقنيتين متشابهتين لحل هذه العودياتِ.

1- الحل بالتعويض:

إحدى طرق حل العودية من النمط السابق هو التعويض، حيث نبدأ بتعريف r_n ونعوض في الطرف الأيمن حيث توجد r_{n-1} في المعادلة، ثم نجمّع الحدود الناتجة ومن ثم نعوض بما تساويه r_{n-1} وهكذا إلى أن نصل إلى الصيغة الحاوية على r_0 والتي بدورها تعوض بما تساويه من العودية المعطاة وصولاً إلى النموذج الذي يمثل الحل.

نقوم بتشكيل واستعراض هذه التقنية من خلال حدود عامة، على النحو الآتي:

نبدأ بالعلاقة:

$$r_n = a_n r_{n-1} + b_n$$

نعوض $r_{n-1} = a_{n-1} r_{n-2} + b_{n-1}$ في الطرف الأيمن فنجد:

$$r_n = a_n(a_{n-1} r_{n-2} + b_{n-1}) + b_n$$

وبتجميع الحدود، فإن:

$$= a_n a_{n-1} r_{n-2} + a_n b_{n-1} + b_n$$
$$= a_n a_{n-1}(a_{n-2} r_{n-3} + b_{n-2}) + a_n b_{n-1} + b_n$$

بعد أن نستبدل r_{n-2} بما تساويه من العلاقة $r_{n-2} = a_{n-2} r_{n-3} + b_{n-2}$، بإعادة تجميع الحدود، نجد:

$$r_n = a_n a_{n-1} a_{n-2} r_{n-3} + a_n a_{n-1} b_{n-2} + a_n b_{n-1} + b_n$$

بتكرار التعويض، نصل إلى أن:

$$r_n = a_n \cdots a_2 r_1 + a_n \cdots a_3 b_2 + \cdots + a_n b_{n-1} + b_n$$

ويوضع $r_1 = a_1 r_0 + b_1$ يكون:

$$r_n = a_n \cdots a_2 (a_1 r_0 + b_1) + a_n \cdots a_3 b_2 + \cdots + a_n b_{n-1} + b_n$$

بتجميع الحدود، يكون:

$$r_n = a_n \cdots a_2 a_1 r_0 + a_n \cdots a_2 b_1 + a_n \cdots a_3 b_2 + \cdots + a_n b_{n-1} + b_n$$

وبوضع $r_0 = b_0$، نحصل:

$$r_n = a_n \cdots a_2 a_1 b_0 + a_n \cdots a_2 b_1 + a_n \cdots a_3 b_2 + \cdots + a_n b_{n-1} + b_n$$

مثال (5-17):

سنقوم بحل العودية الآتية بالتعويض:

$$\begin{cases} r_0 = b_0 = 1 \\ r_n = 2\, r_{n-1} + n \end{cases}$$

نوجد أولاً النموذج من خلال التعويض وفقاً لما شرحناه فيما سبق وإعادة تجميع الحدود.

نلاحظ أن:

$$\begin{aligned} r_n &= 2\, r_{n-1} + n \\ &= 2^2 r_{n-2} + 2(n-1) + n \\ &= 2^3 r_{n-3} + 2^2(n-2) + 2(n-1) + n \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1} r_1 + 2^{n-2}(2) + 2^{n-3}(3) + \cdots + 2^2(n-2) + 2^1(n-1) + 2^0 n \\ &= 2^n r_0 + 2^{n-1}(1) + 2^{n-2}(2) + \cdots + 2^2(n-2) + 2^1(n-1) + 2^0 n \\ &= 2^n(1) + 2^{n-1}(1) + 2^{n-2}(2) + \cdots + 2^2(n-2) + 2^1(n-1) + 2^0 n \end{aligned}$$

باستخدام خواص المجاميع المنتهية، نرُد هذا المجموع إلى شكل مغلق من خلال التأكد من كل خطوة للانتقال إلى الصيغة النهائية.

بما أن:

$$\begin{aligned} r_n &= 2^n(1) + n + 2(n-1) + 2^2(n-2) + \cdots + 2^{n-2}(2) + 2^{n-1}(1) \\ &= 2^n + [2^0 n + 2^1(n-1) + 2^2(n-2) + \cdots + 2^{n-2}(2) + 2^{n-1}(1)] \end{aligned}$$

فإن العلاقة الأخيرة، تكتب بالشكل:

$$\begin{aligned} r_n &= 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i) \\ &= 2^n + n\sum_{i=0}^{n-1} 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} i\,2^i \\ &= 2^n + n(2^n - 1) - (2 - n\,2^n + (n-1)2^{n+1}) \\ &= 2^n(1 + n + n - 2n + 2) - n - 2 \\ &= 3(2^n) - n - 2 \end{aligned}$$

نختبر الصيغة الأخيرة التي تعطي r_n من أجل بعض القيم، للتأكد من أن متتالية الأعداد للشكل المغلق والعودية هي ذات الأعداد:

$$1, 3, 8, 19, 42, \cdots$$

2- الحل بالحذف:

إحدى التقنيات المستخدمة في حل العوديات هي الحل بالحذف، حيث نبدأ بالمعادلة العامة r_n. نقوم باستبدال الحد الموجود في الطرف الأيسر r_n بالصيغة $a_n r_{n-1} + b_n$ وكذلك نعوض الحد الموجود في الطرف الأيمن الذي يحوي r بما يساويه، وهكذا وصولاً إلى المعادلة الأخيرة التي تحتوي على العنصر القاعدي r_0 في طرفها الأيمن. لتوضيح ذلك نبدأ بالمعادلة العامة:

$$r_n = a_n r_{n-1} + b_n$$

ومن ثم:

$$\begin{aligned} a_n r_{n-1} &= a_n a_{n-1} r_{n-2} + a_n b_{n-1} \\ a_n a_{n-1} r_{n-2} &= a_n a_{n-1} a_{n-2} r_{n-3} + a_n a_{n-1} b_{n-2} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_n \cdots a_3 r_2 &= a_n \cdots a_2 r_1 + a_n \cdots a_3 b_2 \\ a_n \cdots a_2 r_1 &= a_n \cdots a_1 r_0 + a_n \cdots a_2 b_1 \end{aligned}$$

بجمع المعادلات السابقة مع بعضها وملاحظة أن كل الحدود في الطرف الأيسر من المعادلات المتبقية تحذف مع حدود مشابهة في الطرف الأيمن، ما عدا المعادلة الأولى. لذلك فإن مجموع المعادلات يعطي الصيغة الآتية من أجل r_n، حيث نقوم فيها باستبدال r_0 بالقيمة b_0.

$$\boldsymbol{r_n = a_n \cdots a_1 b_0 + (b_n + a_n b_{n-1} + a_n a_{n-1} b_{n-2} + \cdots + a_n \cdots a_3 b_2 + a_n \cdots a_2 b_1)}$$

نلاحظ من الطريقتين المتبعتين في حل العودة، هو أننا نصل إلى ذات الصيغة سواء استخدمنا التعويض أو الحذف. وينبغي القيام باختبار الصيغة الناتجة إما من خلال التعويض أو استخدام الاستقراء الرياضي للتأكد من صحة ما تم الوصول إليه كنموذج يمثل الحل المطلوب للعودية.

مثال (5-18):

سنقوم باستخدام طريقة الحذف من أجل حل العودية الآتية:

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ r_n = 2r_{n-1} + n \end{cases}$$

يتم البدء انطلاقاً من الحد العام، وسنحصل بعد إجراء التعويض في الطرفين الأيسر والأيمن على متتالية من المعادلات من الشكل:

$$\begin{aligned} r_n &= 2r_{n-1} + n \\ 2r_{n-1} &= 2^2 r_{n-2} + 2(n-1) \\ 2^2 r_{n-2} &= 2^3 r_{n-3} + 2^2 (n-2) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 2^{n-2} r_2 &= 2^{n-1} r_1 + 2^{n-2}(2) \\ 2^{n-1} r_1 &= 2^n r_0 + 2^{n-1}(1) \end{aligned}$$

نجمع هذه المعادلات ونحذف الحدود المتشابهة ونضع r_0 مساوية للقيمة 1 وفقاً للتعريف، فنجد:

$$r_n = 2^n(1) + n + 2(n-1) + 2^2(n-2) + \cdots + 2^{n-2}(2) + 2^{n-1}(1)$$

من الواضح أن الصيغة الناتجة هي ذاتها التي حصلنا عليها من أجل نفس المثال -17) (5 بطريقة التعويض باستثناء ترتيب الحدود في الحلين.

2-3-5 التوابع المولدة (Generating Functions)

نحتاج في بعض المسائل العودية إلى إيجاد تقنيات جديدة. إذا افترضنا بأننا نريد إيجاد الشكل المغلق من أجل عدد فيبوناشي رقم n أي F_n، من المعلوم أن أعداد فيبوناشي تعرف عودياً من خلال الجملة:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad ; \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

نقوم بالحل دون استخدام التعويض أو الحذف مستخدمين تقنية منشأها فكرة بسيطة تتعلق بمساواة الأمثال في كثيري الحدود. فإذا كان لدينا المعادلة الآتية:

$$a + bx + cx^2 = 4 + 7x^2$$

فإنّ:

$$a = 4, \qquad b = 0, \qquad c = 7$$

ويمكن توسيع هذا المفهوم وتعميميه من أجل تعابير لها عدد غير منته من الحدود من خلال التعريف الآتي:

إن التابع المولد لمتتالية غير منتهية من الأعداد: $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ هو التعبير غير المنتهي الآتي (يدعى أيضاً بسلسلة قوى):

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

مثال (5-19):

من المعروف أن التابع المولد للمتسلسلة الهندسية هو:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad ; \quad |x| < 1$$

مثال (5-20):

نقوم بإيجاد صيغة التابع المولد في هذا المثال، لكن يمكن أن نتساءل عن كيفية إيجاد الشكل المغلق $A(x)$ من أجل العودية الآتية:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = 5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2} \qquad (n \geq 2) \end{cases} \qquad (1)$$

يتم القيام بالحل من خلال أربع خطوات:

الخطوة الأولى:

نستخدم المعادلة العامة الواردة في العودية لكتابة كثير الحدود غير المنتهي وأمثاله a_n. نبدأ بدليل المجموع من القيمة 2 لأن المعادلة العامة الواردة في العودية تتحقق من أجل $n \geq 2$، فنحصل:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} (5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2}) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} 5\,a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 6\,a_{n-2} x^n \qquad (2) \\ &= 5 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

نريد القيام بالحل من أجل $A(x)$. لذلك ينبغي تحويل كل كثير حدود غير منتهٍ في المعادلة الأخيرة إلى تعبير يحوي $A(x)$. لفعل ذلك نلاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة الأخيرة (2)، يمكن أن يكتب بالشكل:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = A(x) - a_0 - a_1 x$$

بتعويض a_0 و a_1 بما تساويانه من الجملة العودية ينتج:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = A(x) - x$$

إن كثير الحدود الأول غير المنتهي في الطرف الأيمن من (2)، يكتب بالشكل:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x(A(x) - a_0) = x\,A(x)$$

كما أن كثير الحدود الثاني في الطرف الأيمن من (2) يكتب بالشكل:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2\,A(x)$$

نستطيع الآن كتابة المعادلة (2) بحدود من $A(x)$ على النحو الآتي:

$$A(x) - x = 5\,x\,A(x) - 6\,x^2A(x) \qquad (3)$$

يمكن إنجاز ما قمنا به في الخطوة الأولى من خلال البدء بتعريف $A(x)$ والاستمرار إلى أن يتم الحصول على معادلة تتضمن $A(x)$. فمن أجل المثال المعطى، فإن الإجراءات تكون على النحو الآتي:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} (5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2})x^n = x + 5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$= x + 5\,x\,(A(x) - a_0) - 6\,x^2A(x) = x + 5\,x\,A(x) - 6\,x^2A(x)$$

الخطوة الثانية:

نحل المعادلة من أجل $A(x)$ ونعمل على تحويل النتيجة إلى تعبير يحوي أشكال مغلقة لتوابع مولدة معروفة. أي نحل المعادلة (3) بعزل $A(x)$ على النحو الآتي:

$$A(x)(1 - 5x + 6x^2) = x$$

لأجل ذلك، فإننا نكتب:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5\,x + 6\,x^2} = \frac{x}{(2x-1)(3x-1)}$$

يفرق الكسر السابق إلى نسبتين جزئيتين من الشكل:

$$\frac{x}{(2x-1)(3x-1)} = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3x-1} \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

وكلّ كسر من هذه الكسور يمثل شكلاً مغلقاً، كمجموع لمتسلسلة هندسية، فبالتالي يمكن أن نكتب:

$$A(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}2^n\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty}3^n\,x^n$$

ومن ذلك، يكون:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2^n + 3^n)\,x^n$$

الخطوة الثالثة:

نحدد الأمثال من خلال مساواة المعادلة الأصلية لتعريف $A(x)$ والشكل $A(x)$ الذي حصلنا عليه في الخطوة الثانية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2^n + 3^n)\,x^n$$

وهما كثيرا حدود غير منتهيين، يتساويان إذا وفقط إذا كانت الأمثال المتقابلة متساوية، أي يجب أن يكون:

$$a_n = 3^n - 2^n \qquad (4)$$

من أجل $n \geq 0$.

الخطوة الرابعة:

تتعلق هذه الخطوة باختبار ما تم الوصول إليه في الخطوات الثلاث السابقة، وبالتحديد يجب أن نختبر فيما إذا كانت (4) هي الجواب الصحيح للجملة العودية المعطاة. بما أن للعودية المعطاة حالتين قاعديتين أساسيتين، نبدأ باختبار الحالات الخاصة الموافقة: $n = 0$ و$n = 1$ ، بالتعويض نجد:

$$a_0 = 3^0 - 2^0 = 0$$
$$a_1 = 3^1 - 2^1 = 1$$

بعد ذلك نقوم بالاختبار من أجل الحالة العامة أي من أجل $n \geq 2$. نبدأ بالطرف الأيمن من (1) ونعوض فيها (4)، فنحصل على الطرف الأيسر من (1):

$$5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2} = 5(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 6(3^{n-2} - 2^{n-2}) = 3^n - 2^n = a_n$$

هنالك العديد من التوابع المولدة الهامة والمفيدة في الكثير من التطبيقات، ومن أكثر التوابع المولدة استخداماً التابعان الآتيان:

$$\frac{1}{(1-x)^{x+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} x^n \quad ; \quad x \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} \right) x^n \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$$

تمارين غير محلولة

1) حلّ كلاً من العوديات الآتية باستخدام تقنيتي التعويض والحذف، ثم ضع الجواب في شكل مغلق:

-1 $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$

-2 $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 2n \end{cases}$

-3 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2\,a_{n-1} + 3 \end{cases}$

2) إذا كان التابع المولد المعطى هو $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، أوجد الشكل المغلق من أجل الحد العام a_n ومن أجل التمثيليات الآتية للتابع $A(x)$:

-4 $A(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{3x} + 1$

-5 $A(x) = \frac{1}{2x+1} + \frac{3}{x+6}$

-6 $A(x) = \frac{1}{3x-2} - \frac{1}{(1-x)^2}$

3) استخدم التوابع المولدة لحل كل من العوديات الآتية:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 4 \\ a_n = 2\,a_{n-1} + 3\,a_{n-2} \;;(n \geq 2) \end{cases} \quad -7$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = 7\,a_{n-1} - 12\,a_{n-2} \;;(n \geq 2) \end{cases} \quad -8$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = 2\,a_{n-1} + a_{n-2} - 2\,a_{n-3} \;;(n \geq 3) \end{cases} \quad -9$$

4-5 معدلات النمو (Rates of growth)

من المعقول في بعض الأحيان القيام بتقريب عدد الخطوات التي تتطلبها عملية تنفيذ الخوارزمية، لأن الصعوبة تكمن في إيجاد شكل مغلق للتعبير، أو أن تكون الصعوبة في حساب هذا التعبير. لكي نقرب تابعاً إلى تابعٍ آخر نحتاج إلى أسلوب ما للمقارنة. وهذا ما سنقوم بدراسته في هذه الفقرة، حيث نعرض المعايير المستخدمة في إجراء المقارنات، من أجل فهم معنى العبارات، مثل:

- للتابع f نفس معدل نمو التابع g.
- للتابع f معدل نمو أقل من معدل نمو التابع g.

نستخدم في هذه الفقرة توابع حقيقية معرفة على مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية. كما سنقوم باختبار سلوك تابعين f وg من خلال مقارنة $f(n)$ و$g(n)$ من أجل قيم كبيرة للمتحول n (عندما تسعى n إلى اللانهاية).

1- معيار Θ الكبيرة (Big Theta)

نقول إن للتابع f نفس معدل نمو التابع g (أو أن للتابع f نفس مرتبة التابع g)، إذا أمكننا إيجاد العدد m وثابتين موجبين آخرين c وd، بحيث يكون:

$$c|g(n)| \leq |f(n)| \leq d|g(n)| \qquad (5)$$

وذلك من أجل كل القيم: $n \geq m$.

ونكتب في هذه الحالة $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.

من السهل أن نجد أنّ العلاقة الواردة في التعريف والتي ترتبط بين التابعين f وg: لها نفس معدل نمو أو لها نفس المرتبة، هي علاقة تكافؤ. وهذا يعني تحقيق الشروط الثلاثة الآتية من أجل كل التوابع:

1- $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.

2- إذا كان $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$، فإن $g(n) = \Theta\big(f(n)\big)$.

3- إذا كان $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$ وكان $g(n) = \Theta\big(h(n)\big)$، فإن $f(n) = \Theta\big(h(n)\big)$.

توضيح:

إذا كان $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$، ونعلم أنّ $g(n) \neq 0$ من أجل كل القيم $n \geq m$، فإننا نستطيع قسمة المتراجحة (5) على $g(n)$، لنحصل بعد ذلك على متراجحة جديدة:

$$c \leq \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leq d \qquad (6)$$

وذلك من أجل كل القيم $n \geq m$.

تعطي المتراجحة السابقة (6) الطريق الأفضل للتفكير حول وجود معدل النمو نفسه لتابعين من خلال نسبة هذين التابعين. سوف نأخذ هذه الحقيقة بعين الاعتبار من أجل التوابع التي تعد الخطوات في الخوارزميات وهي ذات قيم موجبة.

نبين فيما إذا كان بمقدورنا أن نوجد بعض التوابع التي لها معدل النمو نفسه. وفي البدء سوف نفرض أن f وg تابعان متناسبان، وهذا يعني وجود ثابت غير صفري c، بحيث نستطيع أن نكتب:

$$f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$$

من أجل كل قيم n. ونلاحظ هنا أن التعريف السابق يكون محققاً في وضع $d = c$، وهذا ما يمكننا من صياغة الحقيقة الآتية:

إذا كان f و g تابعين متناسبين، فإن $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.

مثال (5-21):

التابع اللوغاريتمي log، نشير إلى أن التوابع اللوغاريتمية log أياً كان الأساس لها، هي توابع متناسبة، وهذا يستنتج بسهولة من قاعدة تغيير الأساس الآتية:

إذا كانت $a > 1$ و $b > 1$، فإن:

$$\log_a n = (\log_a b)(\log_b n)$$

من أجل كل القيم $n > 0$.

لذلك يمكن أن نهمل أساس التابع اللوغاريتمي عند العمل مع معدلات النمو، دون أن يكون لهذا الإهمال أيّ تأثير، لأنه لدينا من التناسب:

$$\log_a n = \Theta(\log_b n)$$

ملاحظة: من المهم ملاحظة أنه من الممكن أن يكون لتابعين معدل النمو نفسه دون أن يكونا متناسبين.

مثال (5-22):

بفرض أنّ لدينا كثيري حدود لهما الدرجة نفسها في شكل تابعين f و g معرفين على النحو الآتي:

$$f(n) = n^2 + n \quad ; \quad g(n) = n^2$$

إن لهذين التابعين معدل النمو نفسها، وذلك لوجود الأعداد الموجبة c, d, m والتي تحقق المتراجحة الواردة في التعريف (5)، حيث نجد أن المتراجحة:

$$1 \cdot n^2 \leq n^2 + n \leq 2 \cdot n^2$$

محققة من أجل كل القيم $n \geq 1$.

تعطي النظرية الآتية أداة رائعة لمعرفة فيما إذا كان لتابعين معدلي النمو نفسه.

نظرية (5-1):

إذا كانت $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$، حيث $c \neq 0$ و $c \neq \infty$ ، فإن: $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.

مثال (5-23):

بفرض أن $f(n) = 24\,n^2 + n$ وأن $g(n) = n^2$، نلاحظ أن نهاية النسبة $\frac{f(n)}{g(n)}$ تقترب من 24 عندما تسعى n إلى اللانهاية. لذلك يمكن استناداً إلى النظرية السابقة، القول إن:

$$24\,n^2 + n = \Theta(n^2)$$

مثال (5-24):

سوف نعطي تعريفاً للتابع f من خلال عبارة $\text{if} - \text{then} - \text{else}$.

$$f(n) = \text{if } n \text{ is odd, then 2 else 4}$$

ونعرف التابع $g(n)$ على النحو الآتي:

$$g(n) = 2$$

يمكن أن نكتب:

$$1 \cdot g(n) \le f(n) \le 2 \cdot g(n)$$

من أجل كل القيم $n \ge 1$، لذلك $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.

ومن الواضح أن نهاية النسبة $f(n)/g(n)$ تتأرجح بين قيمتين هما 1 و2 استناداً إلى هذه النتيجة فإن النهاية غير موجودة ولا تغير النظرية (5-1) في الدراسة.

يمكن للتقريب أن يكون مفيداً نوعاً ما وخصوصاً إلى أولئك الأشخاص الذين لا يذكرون الصيغ التي لا تستخدم استخداماً دائماً. يبين الجدول (5-1) التقريبات لبعض الصيغ المستخدمة في حساب المجاميع المنتهية:

المجموع والنوع	ناتج المجموع
$\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} a^i = \Theta(a^{n+1})\ ;\ a \ne 1$	$\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\ ;\ a \ne 1$

$\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(a-1)^2}\ ;a\neq 1$	$\sum_{i=1}^{n} i\,a^i=\Theta(n\,a^{n+1})\ ;\ a\neq 1$

الجدول (5-1)

كما أن المجموع: $\sum_{i=1}^{n} i^k=\Theta(n^{k+1})$، ومن الواضح أن الحالة الأولى والثانية هي حالات خاصة من هذه الحالة.

مثال (5-25):

لنبين أنّ: $\log n!=\Theta(n\log n)$. لإثبات صحة هذه العبارة سوف نكتب:

$$\log n!=\log 1+\log 2+\cdots+\log n\le \log n+\log n+\cdots+\log n$$

بالتالي، فإنّ:

$$\log n!\le n\log n \qquad (7)$$

لكن أيضاً يمكن أن نكتب، أن:

$$\log n!=\log n+\log(n-1)+\cdots+\log 2+\log 1$$

كما أن:

$$\log n!\ge \log n+\log(n-1)+\cdots+\log\lceil n/2\rceil$$

حيث إن عدد الحدود في الطرف الأيمن من العبارة هو $\lceil n/2\rceil$ بالتالي:

$$\log n!\ge \log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\cdots+\log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$$

ونستنتج أن:

$$\log n!\ge\left(\frac{n}{2}\right)\log\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (8)$$

من المتراجحتين (7) و(8)، نحصل على المتراجحة الجديدة:

$$\left(\frac{n}{2}\right)\log\left(\frac{n}{2}\right)\le\log n!\le n\log n$$

من السهل الآن أن نرى أنه إذا كانت $n>4$، فإن:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\log n<\log\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (9)$$

ولأجل ذلك، فإننا قد وصلنا الآن واستناداً إلى ما سبق، إلى أنّه من أجل $n>1$، فإن:

$$\left(\frac{1}{4}\right)(n\log n) \le \left(\frac{n}{2}\right)\log\left(\frac{n}{2}\right) \le \log n! \le n\log n$$

أي إن:

$$\left(\frac{1}{4}\right)(n\log n) \le \log n! \le n\log n$$

أي إن هناك الثوابت الموجبة غير الصفرية $1/4$ و1 والعدد الصحيح الموجب $m = 4$، بحيث يكون:

$$\left(\frac{1}{4}\right)(n\log n) \le \log n! \le 1 \cdot (n\log n)$$

من أجل كل القيم $n > 4$. بالتالي نكون قد وصلنا إلى إثبات $\log n! = \Theta(n\log n)$.

ملاحظة: أحد التقريبات الهامة لحساب العاملي عندما يكون n مقداراً كبيراً جداً هو صيغة سيترلنغ، حيث نكتب: $n! = \Theta\left(\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\right)$.

2- معيار o الصغيرة (Littele oh)

بفرض أنّ لدينا التابعين f وg، نقول إن للتابع f معدل نمو أدنى من g (أو إن للتابع f مرتبةً أدنى من مرتبة التابع g)، إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

ونكتب في هذه الحالة $f(n) = o\big(g(n)\big)$.

مثال (5-26):

إن نسبة التابعين $f(n) = n$ و$g(n) = n^2$ تقترب من الصفر عندما تسعى n إلى اللانهاية، لذلك نكتب $n = o(n^2)$، ونقول إن للتابع $f(n) = n$ مرتبة أدنى من مرتبة التابع $g(n) = n^2$.

مثال (5-27):

إذا كانت a وb أعداداً موجبة، وبحيث يكون $a < b$، بالتالي فإن:

$$a^n = o(b^n)$$

ذلك لأن النسبة $0 < \frac{a}{b} < 1$، وعندما تسعى n إلى اللانهاية فإن النسبة $\frac{a^n}{b^n}$ تقترب من الصفر.

نظرية (5-2) إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = 0$$

وكان التابعين f وg، قابلين للاشتقاق، عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

مثال (5-28):

يمكن أن نرى أن $\log n = o(n)$ ونترك ذلك كتمرين للقارئ.

3- معيار O الكبيرة (Big Oh)

بفرض أنّ لدينا التابعين f وg، نقول إن: $f(n) = O(g(n))$ إذا وجدت الأعداد الموجبة c وm بحيث يكون:

$$|f(n)| \le c|g(n)|$$

وذلك من أجل كل القيم $n \ge m$.

مثال (5-29):

نلاحظ أنّ $n^2 = O(n^3)$ استناداً إلى التعريف السابق، فإن هنالك الأعداد الموجبة $c = 1$ و$m = 1$، بحيث يكون:

$$n^2 \le 1 \cdot n^3$$

مثال (5-30):

نلاحظ أنّ $5n^3 + 2n^2 = O(n^3)$ استناداً إلى ما سبق، فإننا نجد أن:

$$5n^3 + 2n^2 \le 7n^3$$

وهذا محقق من أجل كل القيم $n \ge 1$.

4- معيار Ω الكبيرة (Big Omega)

بفرض أنّ لدينا التابعين f وg، نقول إن: $f(n) = \Omega(g(n))$ إذا وجد العددان الموجبان c وm بحيث يكون:

$$|f(n)| \geq c|g(n)|$$

وذلك من أجل كل القيم $n \geq m$.

مثال (5-31):

نلاحظ أنّ: $n^3 = \Omega(n^2)$ كما أن: $2n^2 + 2n = \Omega(n^2)$ وذلك لأنه يمكن إيجاد الأعداد الموجبة التي تحقق التعريف السابق، حيث:

$$2n^2 + 2n \geq 1 \cdot n^2$$

ومن أجل كل القيم $n \geq 1$.

كما أنّ:

$$n^3 \geq 1 \cdot n^2$$

ومن أجل كل القيم $n \geq 1$.

ملاحظة: يمكن ربط المفاهيم المتعلقة بالمعايير السابقة حيث يمكن القول إن المعيار Θ يتحقق إذا كان معيار O الكبيرة ومعيار Ω الكبيرة محققين.

تمارين غير محلولة

1- قرر من أجل كل التوابع الآتية متى تحقق معيار $O(x)$ وحدد القيم C وk التي من أجلها يكون $|f(x)| \leq C|g(x)|$ بحيث إنّ $x > k$.

a) $f(x) = 10$ b) $f(x) = 3x + 7$ c) $f(x) = x^2 + x + 1$
d) $f(x) = 5 \log x$ e) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ f) $f(x) = \lceil x/2 \rceil$

الجواب: إن اختيار العددين C, k ليس وحيداً.

a) $C = 1, k = 10$ b) $C = 4, k = 7$ c) No
d) $C = 5, k = 1$ e) $C = 1, k = 0$ f) $C = 1, k = 2$

2- قرر من أجل كل التوابع الآتية متى تحقق معيار $O(x^2)$ وحدد القيم C وk التي من أجلها يكون $|f(x)| \le C|g(x)|$ حيث إن $x > k$.

a) $f(x) = 17x + 11$ b) $f(x) = x^2 + 1000$ c) $f(x) = x \log x$
d) $f(x) = x^4/2$ e) $f(x) = 2^x$ f) $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \lceil x \rceil$

3- استخدم التعريف $f(x)$ ليحقق المعيار $O\big(g(x)\big)$ ولتبرهن أن $x^4 + 9x^3 + 4x + 7$ يحقق $O(x^4)$.

الجواب: $x^4 + 9x^3 + 4x + 7 \le 4x^4$ من أجل كل $x > 9$ و$C = 4, k = 9$.

4- استخدم معيار O الكبيرة لتبرهن أن: $2^x + 17$ هو $O(3^x)$.

5- برهن أنّ: $(x^2 + 1)/(x + 1)$ هو $O(x)$.

الجواب: $x > \frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ من أجل كل $x > 1$ و$C = 1, k = 1$.

5- بشكل مشابه لما سبق برهن أن: $(x^3 + 2x)/(2x + 1)$ هو $O(x^2)$.

6- أوجد أصغر عدد صحيح n بحيث يكون $f(x)$ يحقق المعيار $O(x^n)$. إذا كان:

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 \log x$
b) $f(x) = 3x^3 + (\log x)^4$
c) $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)/(x^3 + 1)$
d) $f(x) = (x^4 + 5 \log x)/(x^4 + 1)$

الجواب: إن اختيار الأعداد C, k ليس وحيداً.

a) $n = 3, C = 3, k = 1$ b) $n = 3, C = 4, k = 1$
c) $n = 1, C = 2, k = 1$ d) $n = 0, C = 2, k = 1$

7- ليكن $f(x)$ و$g(x)$ و$h(x)$ ثلاثة توابع وكان $f(x)$ هو $O\big(g(x)\big)$ و$g(x)$ هو $O\big(h(x)\big)$ فبرهن أنّ $f(x)$ هو $O\big(h(x)\big)$.

8- ليكن k عدداً صحيحاً موجباً برهن أن $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ يحقق المعيار $O(n^{k+1})$.

9- أعطِ أجود معيار O الكبيرة لتقدير التوابع الآتية:

a) $(n^2 + 8)(n + 1)$
b) $(n \log n + n^2)(n^3 + 2)$
c) $(n! + 2^n)\left(n^3 + \log(n^2 + 1)\right)$

الجواب: a) $O(n^3)$ b) $O(n^5)$ c) $O(n^3 \cdot n!)$

10- أعطِ أجود معيار O الكبيرة لتقدير التوابع الآتية:

a) $(n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (17 \log n + 19)(n^3 + 2)$
b) $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$
c) $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5^n)$
d) $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$
e) $(n \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$
f) $n^{2^n} + n^{n^2}$

11- بين فيما إذا كانت التوابع المذكورة في التمرين رقم 1 تحقق معايير $\Omega(x)$ و $\Theta(x)$.

12- بين فيما إذا كانت التوابع المذكورة في التمرين رقم 2 تحقق معايير $\Omega(x^2)$ و $\Theta(x^2)$.

الجواب:

a) $\Theta(x^2)$ ولا $\Omega(x^2)$ ليست
b) $\Theta(x^2)$ و $\Omega(x^2)$
c) $\Theta(x^2)$ ولا $\Omega(x^2)$ ليست
d) $\Theta(x^2)$ وليست $\Omega(x^2)$
e) $\Theta(x^2)$ وليست $\Omega(x^2)$
f) $\Theta(x^2)$ و $\Omega(x^2)$

13- برهن أنّ:

أ) $3x + 7$ تحقق معيار $\Theta(x)$.
ب) $2x^2 + x - 7$ تحقق معيار $\Theta(x^2)$.

جـ) $\lfloor x + 1/2 \rfloor$ تحقق معيار $\Theta(x)$. د) $\log_{10} x$ تحقق معيار $\Theta(\log_2 x)$.

هـ) $\log(x^2 + 1)$ تحقق معيار $\Theta(\log_2 x)$.

14- برهن أنّ $f(x)$ يحقق معيار $\Theta(g(x))$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ يحقق معيار $O(g(x))$ وكان $g(x)$ يحقق معيار $O(f(x))$.

15- لنفرض أنّ $f(x)$ يحقق معيار $O(g(x))$. هل هذا يدل على أنّ $2^{f(x)}$ يحقق معيار $O(2^{g(x)})$.

الفصل السادس

6- البيان، والبيان الموجه، والأشجار

في هذا الفصل سنعرض بعض المفاهيم الرياضية عن البيانات والأشجار، وسنناقش مفاهيم مثل درجة عقدة ما، والاتصال، وحلقة أولر وهاملتون، وتمثيل البيان في مصفوفة، وإيزومورفيزم البيانات، والعلاقة بين عدد العقد وعدد الأغصان في الأشجار، والأشجار الهيكلية الممتدة، وأقصر مسار في بيان ما. ومن ثم تطبيقات تتعلق بالبيانات والأشجار في الذكاء الصنعي، والكيمياء، ومشاكل الجدولة، وأنظمة النقل.

لقد درسنا في الفصل الثالث (الفقرة 3-7) كيف أنّ البيان يستخدم لتمثيل العلاقة. إنّ نظرية البيان هي أحد المجالات الرياضية المهمة والتي تستخدم في العديد من التطبيقات. سوف نورد تعريفاً مباشراً للبيان دون أن نستخدم العلاقات.

6-1 البيان (Graph)

إنّ البيان G هو الثنائية من مجموعتين منتهيتين $G(V,E)$ حيث إنّ V تمثل مجموعة العقد وE مجموعة مكونة من ثنائيات من المجموعة $V \times V$ (أي إنّ $E \subseteq V \times V$) وتدعى E بمجموعة أضلاع البيان. يرمز للبيان بالشكل $G(V,E)$ أو $G =< V,E >$ والعنصران a وb من V يكونان مرتبطين أو متصلين من خلال الضلع $\{a,b\}$ إذا كانت $\{a,b\}$ عنصراً في E. تدعى البيانات من هذا النوع: بالبيانات غير الموجهة. وعند ذكر مصطلح البيان فإنّنا نقصد بذلك فقط البيان غير الموجه وفقاً للتعريف السابق دون حدوث أي التباس.

1-1-6 بعض المفاهيم والحقائق المتعلقة بالبيانات غير الموجهة

1- يمثل البيان من خلال مخطط فيه العقد والأضلاع، حيث تمثل العقد بنقاط وتمثل الأضلاع الواصلة بين عقدتين على شكل خطوط بين نقاطها.

2- إذا كانت $\{a,b\}$ ضلعاً ما، فإننا ندعو العقد a وb بأنها نقاط طرفية لهذه الضلع. ونقول أيضاً عن الضلع $\{a,b\}$ إنها واقعة على العقد a وb. وبشكل معاكس أيضاً نقول عن العقد a وb إنهما واقعتين على الضلع $\{a,b\}$. ونقول أيضاً عن a وb إنهما متجاورتين، إذا كانتا نقاطاً طرفية في ضلع ما، أو بشكل مكافئ نقول: إنهما واقعتين على ذات الضلع.

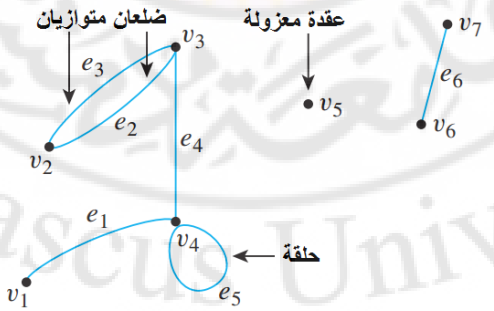
3- نقول عن ضلعين إنهما متجاوران إذا كانا واقعين على عقدة مشتركة.

4- إذا كان لعقدة ما ضلع بدايته ونهايته تلك العقدة فإنه يدعى حلقة loop، وتكون هذه العقدة متجاورة مع نفسها.

5- إذا كان لنقطتين طرفي ضلعين مختلفين أو أكثر فإن هذه الأضلاع تدعى أضلاعاً متوازية.

6- تدعى العقدة التي لا تمتلك أضلاعاً بالعقدة المعزولة (المنعزلة).

الشكل (6-1) يبين المفاهيم السابقة.

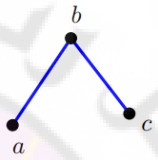


الشكل (6-1): بيان فيه 7 عقد و6 أضلاع

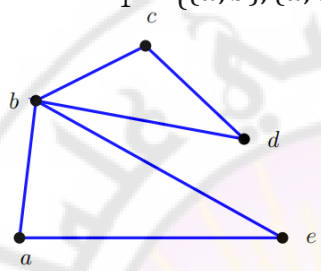
مثال (6-1):

يوضح الشكل (2-6) البيان الذي مجموعة عقده $V = \{a, b, c\}$ ومجموعة أضلاعه $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. ويوضح الشكل (3-6)، البيان الذي مجموعة عقده هي المجموعة $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$ ومجموعة أضلاعه هي المجموعة:

$$E_1 = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$$



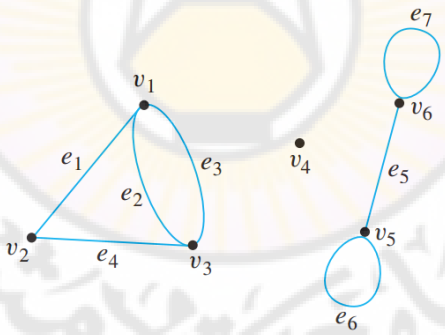
الشكل (2-6): مخطط البيان (V, E)



الشكل (3-6): مخطط البيان (V_1, E_1)

مثال (2-6):

ليكن البيان المعطى بالشكل (4-6) التالي:



الشكل (4-6)

a- اكتب مجموعة العقد ومجموعة الأضلاع لهذا البيان، وأعطِ جدولاً توضح فيه ذلك.

b- أوجد كل الأضلاع المشتركة للعقدة v_1، وكل العقد المجاورة للعقدة v_1، وكل الأضلاع المجاورة للضلع e_1، وكل الحلقات، وكل الأضلاع المتوازية، وكل العقد المجاورة لذاتها، وكل العقد المعزولة.

الحل: a- إن مجموعة العقد هي $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ومجموعة الأضلاع هي $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ أما الجدول الذي يوضح ذلك هو:

الأضلاع	e_7	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1
النقاط الطرفية	$\{v_6\}$	$\{v_5\}$	$\{v_5, v_6\}$	$\{v_2, v_3\}$	$\{v_1, v_3\}$	$\{v_1, v_3\}$	$\{v_1, v_2\}$

الجدول (6-5)

لاحظ أن العقدة المعزولة v_4 لم تظهر في الجدول.

b- إن الأضلاع e_1, e_2, e_3 مشتركة بالعقدة v_1.

العقدتان v_2 و v_3 مجاورتان للعقدة v_1.

الأضلاع e_2, v_3 و e_4 مجاورة للضلع e_1.

الضلعان e_6 و e_7 هما حلقتان.

الضلعان e_3 و e_2 متوازيان.

العقدتان v_6 و v_5 متجاورتان لنفسيهما.

v_4 هي عقدة معزولة.

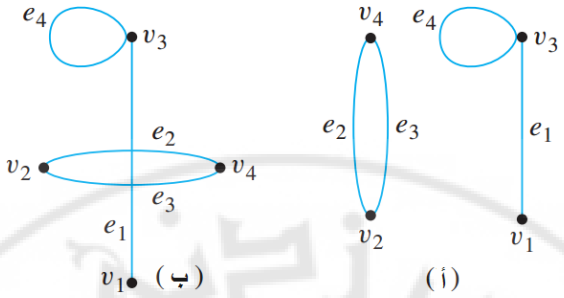
يمكن رسم البيان بعدة صور. فمثلاً: ليكن لدينا البيان المخصص بما يلي:

مجموعة العقد $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ومجموعة الأضلاع $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ والعلاقة بين العقد كما في الجدول التالي:

الضلع	e_1	e_2	e_3	e_4
نهايات الضلع	$\{v_1, v_3\}$	$\{v_2, v_4\}$	$\{v_2, v_4\}$	$\{v_3\}$

الجدول (6-6)

إن الرسمين (أ) و(ب) في الشكل (6-7) يمثلان البيان السابق نفسه.

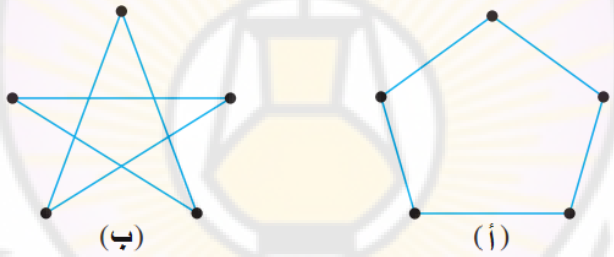


الشكل (6-7)

كما ويمكن لرسمين مختلفين أن يمثل كل منهما البيان نفسه كما في المثال التالي:

مثال (6-3):

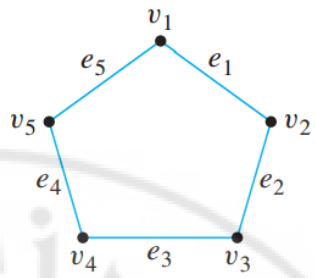
ليكن لدينا الرسمان الموضحان في الشكل (6-8)، سَمِّ العقد والأضلاع في هذين الرسمين ليمثلا البيان نفسه.



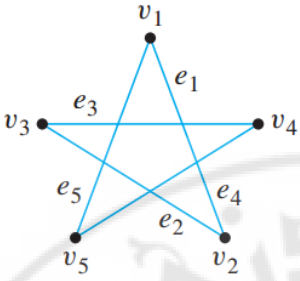
الشكل (6-8)

الحل: لنتصور أنّ لدينا سلكاً نريد بوساطته وصل العقد وصلاً متتالياً بعد تسميتها v_1 وv_2 وv_3 وv_4 وv_5 فنحصل على التمثيل المعطى في الشكل (6-9).

الآن لنفرض أننا وضعنا السلك في العقدة العليا (تدعى v_1) وفق الضلع e_1 وبوصله بالعقدة السفلى اليمنى (تدعى v_2) وفق الضلع e_2 ثم بوصله بالعقدة التي في الأعلى من اليسار (تدعى v_3) وفق الضلع e_3 ثم بوصله بالعقدة عن اليمين (تدعى v_4) وفق الضلع e_4 ثم بالعقدة الأخيرة (تدعى v_5) ثم العودة إلى العقدة الأولى وفق الضلع e_5، الشكل (6-10).



الشكل (6-9)

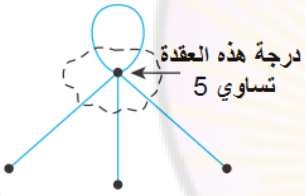


الشكل (6-10)

فنحصل على البيان نفسه الممثل بالجدول التالي:

الضلع	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
نهايات الضلع	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_2, v_3\}$	$\{v_3, v_4\}$	$\{v_4, v_5\}$	$\{v_5, v_1\}$

الجدول (6-11)



7- تعريف درجة العقدة: إنّ درجة العقدة v في البيان G، هي عدد الأضلاع الواقعة على هذه العقدة. ونرمز لدرجة العقدة v من خلال $\deg(v)$.

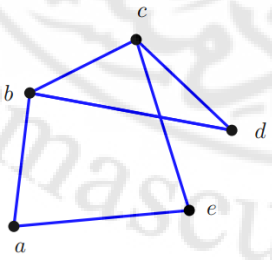
وتدعى العقدة التي درجتها 0 بالعقدة المعزولة (isolated).

مثال (6-4):

يبين الجدول (6-12) درجات عقد البيان الموضح بالشكل (6-13).

العنصر v	$\deg(v)$
a	2
b	3
c	3
d	2
e	2

الشكل (6-12)



الشكل (6-13)

8- **نظرية (6-1):** (نظرية المصافحة) (The Handshake Theorem)

إنّ مجموع درجات عقد البيان، عدد زوجي دائماً.

الإثبات: بما أنّ لكل ضلع في البيان نقطتين طرفيتين، فإنّ درجة كل من هاتين النقطتين الطرفيتين قد ازدادت بمقدار 1 بسبب هذه الضلع. وعلى هذا الأساس فكل ضلع في البيان تضيف الرقم 2 إلى مجموع درجات عقد البيان. وهذا المجموع ما هو إلاّ ضعف عدد أضلاع البيان. إذن مجموع درجات عقد البيان هو عدد زوجي.

يمكن صياغة هذه النظرية على النحو الآتي:

بفرض أنّ العدد e يمثل عدد الأضلاع في البيان $G(V,E)$، عندئذٍ يكون:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

وهذا ما سوف نستخدمه في إثبات صحة النظرية الآتية.

9- **نظرية (6-2)**: في أي بيان غير موجه، يوجد عدد زوجي من العقد، مجموع درجاتها عدد فردي.

الإثبات: بفرض أنّ V_1 هي مجموعة العقد ذات الدرجات الزوجية في $G(V,E)$. وبفرض أنّ V_2 مجموعة العقد ذات الدرجات الفردية في $G(V,E)$. عندئذٍ واستناداً إلى النظرية السابقة (6-1) نكتب:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

وبما أنّ $\deg(v)$ عدد زوجي من أجل v من V_1، فإنّ الحد الأول من الطرف الأيمن في المساواة الأخيرة عدد زوجي. أكثر من ذلك فإنّ مجموع الحدين الموجودين في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة هو زوجي أيضاً لأنه يساوي $2e$. من ذلك، فإنّ الحد الثاني في المجموع هو عدد زوجي أيضاً. وطالما أنّ كل الحدود في المجموع

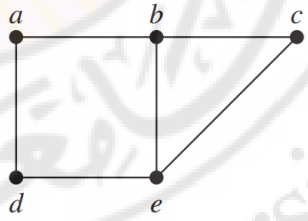
الذي يمثل الحد الثاني، فإنه ينبغي أن يوجد عدد زوجي. وعلى ذلك فإنه يوجد عدد زوجي من العقد درجاتها أعداد فردية.

يمكن أيضاً استخدام التناقض في إثبات صحة هذه النظرية. فإذا كانت هذه النظرية غير صحيحة، فإنه يوجد عدد فردي من العقد والتي درجة كل منها عدد فردي. إنّ هذا الافتراض يقودنا إلى التناقض (بيّن ذلك). وبالتالي فإنّ الفرض بعدم صحة النظرية خاطئ والنظرية صحيحة.

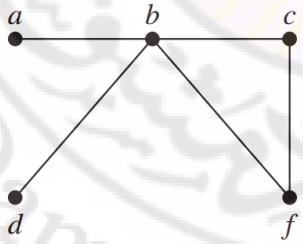
10- تعريف البيان الجزئي (Subgraph): نقول عن البيان $G'(V',E')$ إنه بيان جزئي من البيان $G(V,E)$، إذا كانت $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$. نرمز لذلك من خلال $G'(V',E') \leq G(V,E)$ للدلالة على أنّ G' بيان جزئي من G. من الواضح أنّ هذا التعريف يعني أنّ كل عقدة في G' هي عقدة في G وكل ضلع في G' هي ضلع في G أيضاً.

مثال (6-5):

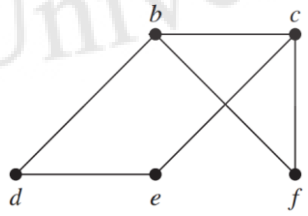
تبيّن الأشكال (6-14)، (6-15)، (6-16) بيانات جزئية من البيان الموضح بالشكل (6-17).

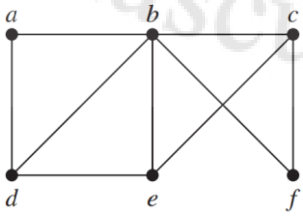


الشكل (6-14)



الشكل (6-15)

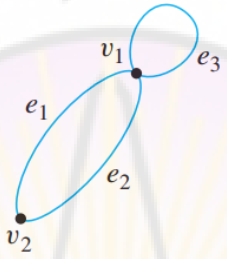




الشكل (6-16) **الشكل (6-17)**

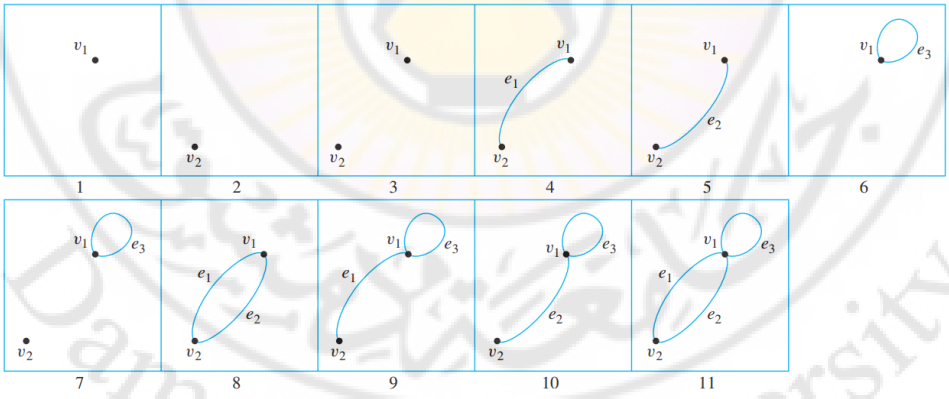
مثال (6-6):

حدد جميع البيانات الجزئية الممكنة للبيان G الذي مجموعة عقده هي $\{v_1, v_2\}$ ومجموعة أضلاعه هي $\{e_1, e_2, e_3\}$، حيث إن الضلعين e_1, e_2 نهايتيهما v_1 و v_2، والضلع e_3 هو حلقة في العقدة v_1، كما هو مبين في الشكل (6-18).



الشكل (6-18)

الحل: يوجد أحد عشر بياناً جزئياً للبيان G، منها من لا يملك أضلاعاً، ومنها من يملك ضلعاً واحداً ومنها يملك اثنين، ومنها يملك ثلاثة. يوضح الشكل (6-19) ذلك.



الشكل (6-19)

إنّ المسار في البيان هو ببساطة عبارة عن مجموعة من الأضلاع المرتبطة مع بعضها من خلال العقد.

سوف نورد تعريفاً دقيقاً للمسار مستخدمين رموزاً للعقد مثل: u, v و $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n$.

11- تعريف المسار (Path): بفرض أنّ $G = G(V, E)$. ولتكن v_0 و v_k عقدتان فيه أي إنّ $v_0, v_k \in V$. إنّ المسار من الطول k من العقدة v_0 إلى العقدة v_k (أو بين v_0 و v_k) هو المتتالية:

$$v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ e_3\ v_3 \cdots v_{k-1}\ e_k\ v_k$$

حيث إنّ العقد: $v_0, v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ تنتمي إلى V. أمّا $e_0, e_1, e_2, e_3, \cdots, e_k$ هي من الشكل $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ وعلى هذا فإنّ المسار الذي طوله k فيه k من الأضلاع. سوف نرمز للسهولة عامة للمسار بأنّه المتتالية: $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k$ وكل ضلعين متتالين في المسار تتشاركان مع بعضهما في عقدة، لذلك فهما متجاوران.

12- تعريف المسار البسيط (Simple Path): إن المسار البسيط في البيان $G(V, E)$ من العقدة v_0 إلى العقدة v_k هو مسار لا يتضمن عقدة مكررة.

مثال (6-7):

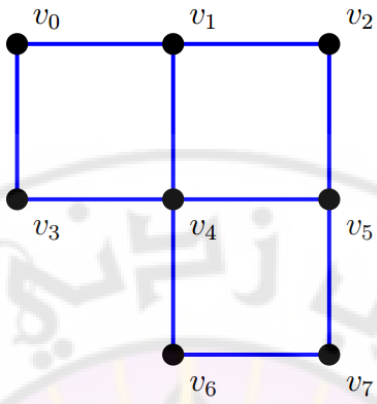
يتضمن البيان الموضّح في الشكل (6-20) مسارات من v_0 إلى v_7 هي:

المسار $v_0\ v_1\ v_2\ v_5\ v_7$ من الطول 4 (وهو مسار بسيط).

المسار $v_0\ v_1\ v_2\ v_5\ v_4\ v_1\ v_2\ v_5\ v_7$ من الطول 8.

المسار $v_0\ v_1\ v_4\ v_5\ v_4\ v_5\ v_7$ من الطول 6.

المسار $v_0\ v_3\ v_4\ v_6\ v_7$ من الطول 4 (وهو مسار بسيط).

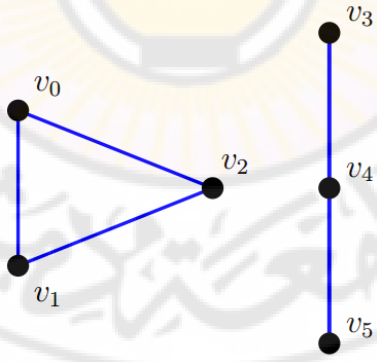


الشكل (6-20)

13- تعريف البيان المتصل (Connected Graph): نقول عن البيان G إنه بيان متصل، إذا وجد مسار بين أي عقدتين مختلفتين في G.

مثال (6-8):

إنّ البيان الموضّح في الشكل (6-21) ليس بياناً متصلاً. فعلى سبيل المثال، لا يوجد مسار من v_0 إلى v_5، ولا يوجد مسار من v_1 إلى v_4.



الشكل (6-21)

14- **نظرية (6-3):** إذا وجد في البيان $G = G(V, E)$ مسار من العقدة v_i إلى العقدة v_j، فإن هنالك مساراً بسيطاً من v_i إلى v_j.

بأخذ التعريف (13) للاتصال، والنظرية (3-6) السابقة معاً فإننا نحصل على: corollary الآتية:

نتيجة (corollary): يكون البيان G متصلاً إذا وفقط إذا كان هنالك مسارٌ بسيطٌ بين أيّ عقدتين في G.

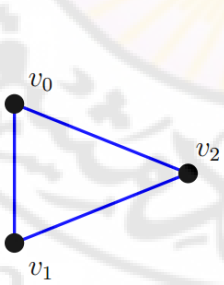
15- تعريف المكون الأساسي للبيان (Component of Graph): ليكن لدينا البيان $G = G(V,E)$. نقول عن البيان الجزئي G' من G إنه مكون أساسي للبيان G إذا تحقق:

إنّ G' بيان غير خالٍ ومتصل.

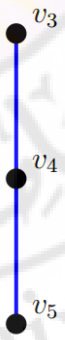
إذا كان G'' بيان جزئي متصل من G وكان $G' \leq G''$ (G' جزءاً من G'')، فإنّ $G' = G''$. وبالتالي يكون G' هو البيان الجزئي الأكبر والمتصل من G.

مثال (6-9):

يتضمن البيان الموضح في الشكل (6-21)، مكونين أساسيين موضحين بالشكلين (6-22) و (6-23).



الشكل (6-23)



الشكل (6-22)

16- تعريف الحلقة (Cycle): ليكن $G = G(V,E)$ بياناً. إنّ الحلقة في البيان هي مسار بطول أكبر من الصفر من عقدة إلى ذاتها دون أن يتضمن المسار أضلاعاً

مكررة. والحلقة البسيطة هي حلقة من العقدة v إلى ذاتها بحيث تكون العقدة v هي الوحيدة المكررة. والحلقة$-n$ هي حلقة تتضمن n من الأضلاع وn من العقد المختلفة.

مثال (6-10):

في البيان الموضّح بالشكل (6-17)، لدينا المسارات:

المسار $a\,b\,e\,d\,a$ يمثل حلقة وهو أيضاً حلقة بسيطة.

المسار $a\,b\,c\,f\,b\,e\,d\,a$ ويمثل حلقة حيث لا يتضمن هذا المسار أي تكرار في الأضلاع، بينما نجد أنّ العقدة b مكررة.

المسار $a\,d\,e\,c\,b\,a$ ويمثل حلقة وهو حلقة بسيطة.

المسار $e\,c\,b\,d\,e$ ويمثل حلقة وهو أيضاً حلقة بسيطة.

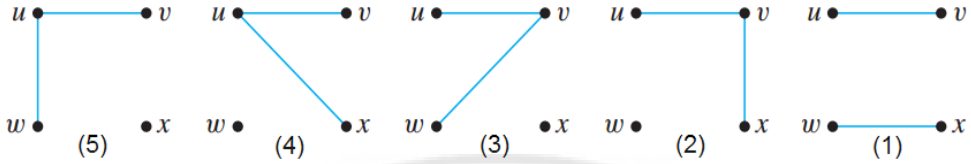
من خلال ما سبق فإننا سنقوم بتعريف بعض البيانات الخاصة، والتي سوف تستخدم فيما بعد.

17- تعريف البيان البسيط (Simple Graph): نقول عن بيان ما إنه بيان بسيط، إذا لم يوجد فيه حلقة أو إذا لم يوجد فيه ضلعان متوازيان.

مثال (6-11):

ارسم جميع البيانات البسيطة التي تحتوي على أربع عقد $\{u,v,w,x\}$ وضلعين، أحدهما الضلع $\{u,v\}$.

الحل: كل ضلع ممكن من البيان البسيط يقابل مجموعة جزئية مؤلفة من عقدتين. ليكن لدينا أربع عقد، فإنه يوجد $\binom{4}{2}=6$ مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين هي: $\{u,v\}$، و$\{u,w\}$، و$\{u,x\}$، و$\{v,w\}$، و$\{v,x\}$، و$\{w,x\}$. اختيرت واحدة منها لتمثيل الضلع $\{u,v\}$ وبقي خمسة يمكن اختيارها للضلع الثاني. الاختيارات الممكنة نجدها في الشكل (6-24) التالي وهي جميع البيانات البسيطة المطلوبة.



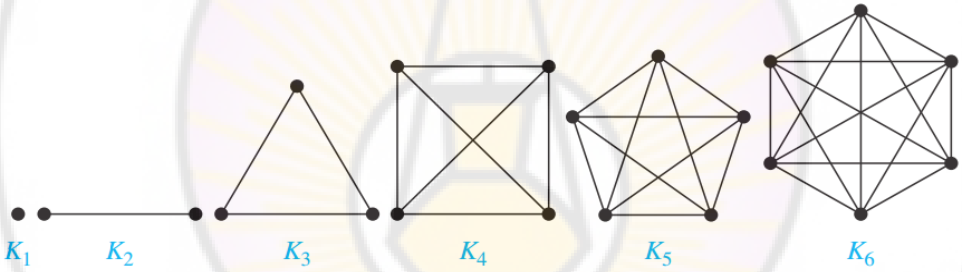
الشكل (6-24)

18- تعريف البيان التام (Compete Graphs): نقول عن بيان إنه بيان تام (ممتلئ)، إذا وجدت ضلعاً تربط بين كلّ عقدتين مختلفتين في هذا البيان.

نرمز للبيان التام المتضمن n من العقد بالرمز K_n.

مثال (6-12):

يوضّح الشكل (6-25) البيانات التامة: $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$.



الشكل (6-25)

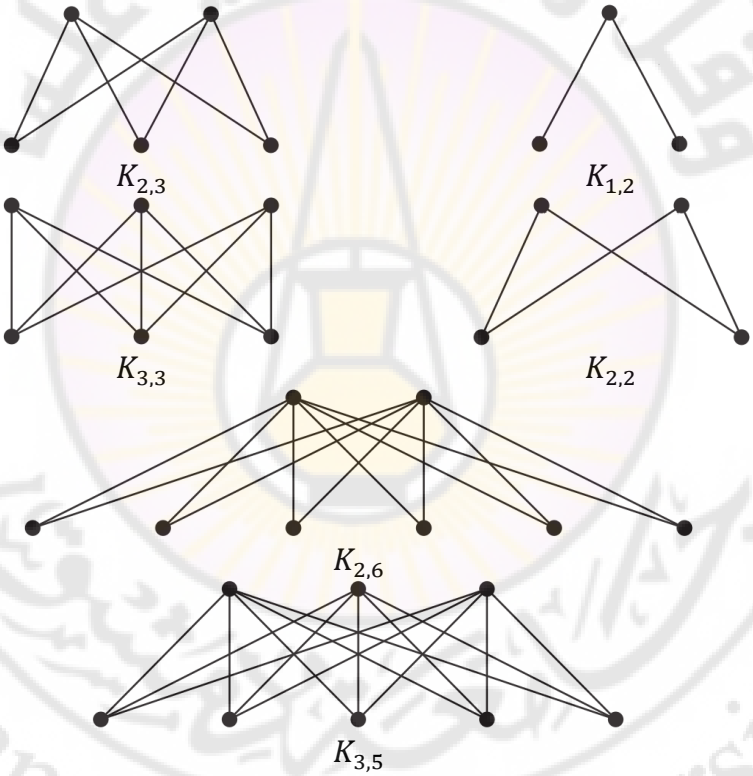
19- تعريف البيان ثنائي التجزيء (Bipartite Graphs): نقول عن البيان $G = G(V, E)$ إنه بيان ثنائي التجزيء، إذا كان من الممكن التعبير عن V على أنها اتحاد لمجموعتين منفصلتين غير خاليتين A و B (أي إنّ $V = A \cup B$ و $A \cap B = \phi$)، وبحيث تكون كل ضلع من الشكل $\{a, b\}$ فيها $a \in A$ و $b \in B$. أي إنّ كل ضلع تصل عقدة من A بعقدة من B، ولا توجد عقد متصلة مع بعضها من A، كما لا توجد عقد متصلة مع بعضها من B أيضاً.

نقول عن البيان ثنائي التجزيء، إنه بيان ثنائي التجزيء تام (Complete Bipartite)، ونرمز له بـ $K_{m,n}$، إذا كانت A تتضمن m عقدة وكانت B تتضمن n

عقدة، ومن أجل كل $a \in A$ و $b \in B$، فإنّ $\{a, b\}$ هي ضلع من E. أيّ إنّ من أجل كل $a \in A$ وكل $b \in B$، هنالك ضلع تربط بينهما في البيان.

مثال (6-13):

يوضّح الشكل (6-26) البيانات ثنائية التجزيء التامة من الأنماط: $K_{1,2}$، $K_{2,3}$، $K_{2,2}$، $K_{3,3}$، $K_{2,6}$ و $K_{3,5}$.

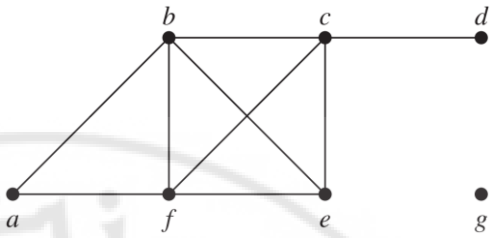


الشكل (6-26)

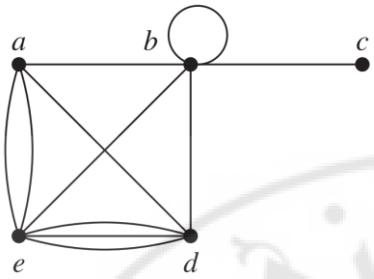
أمثلة إضافية محلولة

مثال (6-14):

أوجد درجات عقد البيانات G و H الموضحين بالشكلين (6-27) و(6-28) على الترتيب:



الشكل (6-27): البيان G



الشكل (6-28): البيان H

الحل: تبين الجداول (6-29) و(6-30) العقد ودرجاتها في كل من G وH.

عقد البيان G	درجة العقدة
a	2
b	4
c	4
d	1
e	3
f	4
g	0

الجدول (6-29)

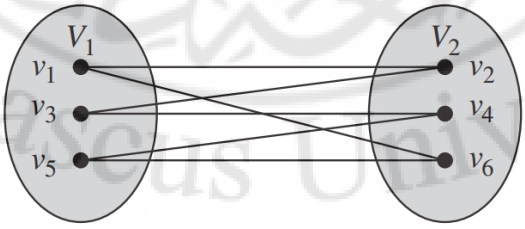
عقد البيان H	درجة العقدة
a	4
b	6
c	1
d	5
e	6

الجدول (6-30)

نلاحظ أنّ العقدة g في البيان G هي عقدة منعزلة حيث $\deg(g) = 0$.

مثال (6-15):

هل البيان الموضح بالشكل (6-31) بيان ثنائي التجزيء؟

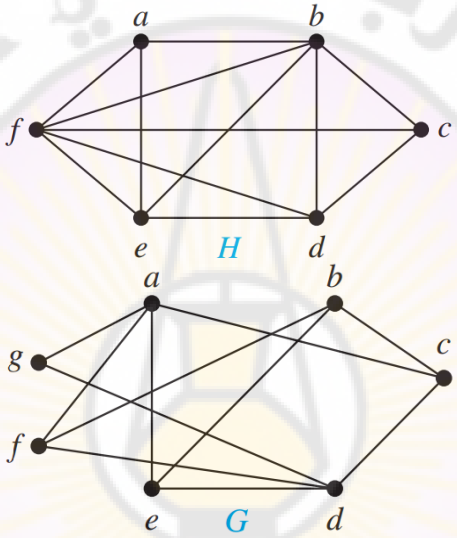


الشكل (6-31)

الحل: من الواضح أنّ هذا البيان بيان ثنائي التجزيء، لأنّ مجموعة عقده مجزأةٌ إلى مجموعتين: $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ و $V_2 = \{v_2, v_3, v_6\}$ وكل ضلع في هذا البيان يربط بين عقدة من V_1 مع عقدة أخرى من V_2.

مثال (6-16):

هل البيانان G و H الموضّحان بالشكل (6-32) هي بيانات ثنائية التجزيء؟



الشكل (6-32)

الحل: إنّ البيان G هو بيان ثنائي التجزيء، لأنّ مجموعة عقده اتحاد لمجموعتين منفصلتين هما: $A = \{a, b, d\}$ و $B = \{c, e, f, g\}$ وكل ضلع في G تربط بين عقدتين إحداها في A والأخرى في B.

وسنرى أنّ البيان H ليس ببيان ثنائي التجزيء. ذلك لأنه ليس من الممكن تجزيء مجموعة عقد H إلى مجموعتين جزئيتين.

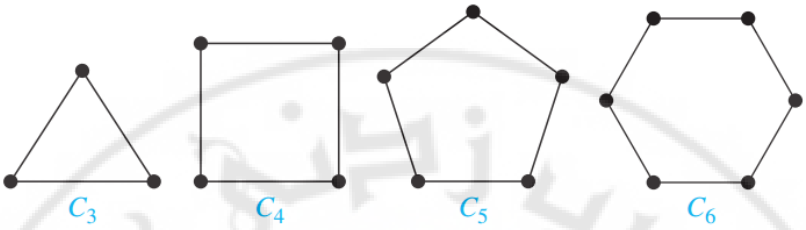
– سبق أن عرفنا الحلقات. يعبر الرمز C_n عن الحلقة المكونة من n من العقد $(n \geq 3)$:

$$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$$

وفيها n من الأضلاع هي:

$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \cdots, \{v_{n-1}, v_n\}$

يوضّح الشكل (6-33) الحلقات: C_3, C_4, C_5, C_6

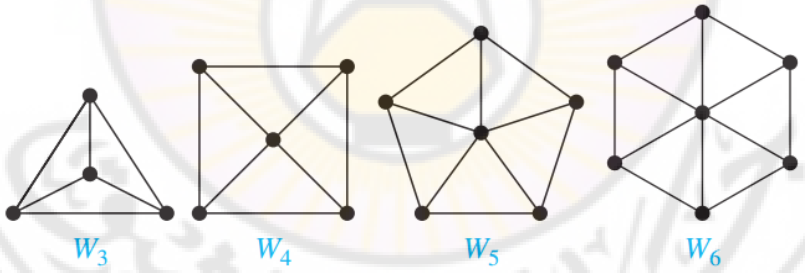


الشكل (6-33)

مثال (6-17):

20- العجلات (Wells): نحصل على العجلة W_n، عند إضافة عقدة إضافية إلى الحلقة C_n الواردة في المثال السابق (من أجل $(n \geq 3)$)، ونوصل هذه العقدة الجديدة بكل عقد الحلقة C_n بأضلاع جديدة.

يوضّح الشكل (6-34) العجلات: W_3, W_4, W_5, W_6



الشكل (6-34)

مثال (6-18):

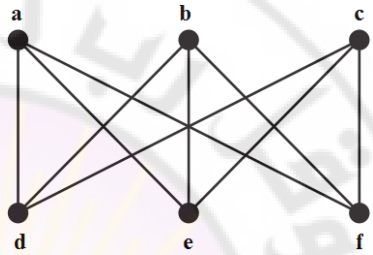
ما هو عدد الأضلاع الموجودة في بيان يتضمن 10 عقد ودرجة كل منها تساوي 6؟

الحل: بما أنّ مجموع درجات العقد يساوي إلى $6 \times 10 = 60$، فإنه ينتج استناداً إلى النظرية (6-1)، بأنّ ضعف عدد الأضلاع $2e$ يساوي إلى هذا المجموع، أي إنّ $2e = 60$، من ذلك فإنّ عدد الأضلاع هو 30.

تمارين غير محلولة

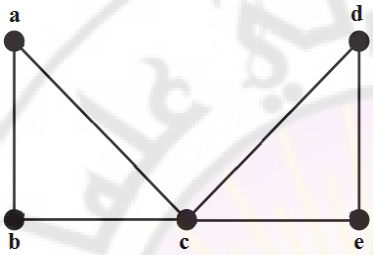
– أوجد المسارات في البيانات الواردة في أ و ب؟ أوجد المسارات البسيطة بينها، ثم أوجد طول كل منها؟

(أ)



الشكل (6-35)

(ب)



الشكل (6-36)

– في كل من الشكلين الآتيين (6-37) و(6-38):

(i) أوجد جميع الأضلاع المتعلقة بالعقدة v_1.

(ii) أوجد جميع العقد المجاورة للعقدة v_3.

(iii) أوجد جميع الأضلاع المجاورة للضلع e_1.

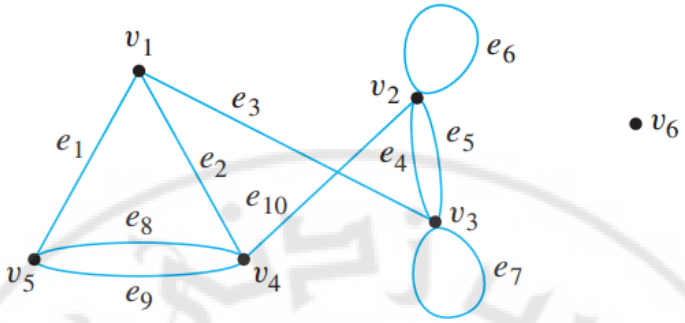
(iv) أوجد جميع الحلقات البسيطة وغير البسيطة.

(v) أوجد جميع الأضلاع المتوازية.

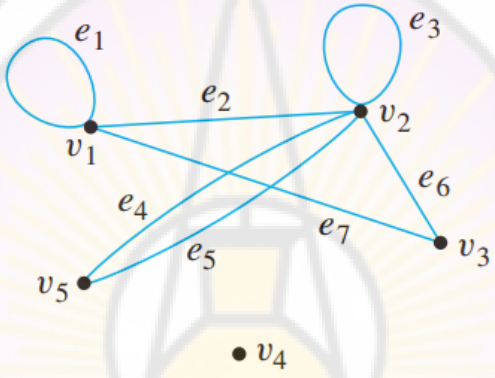
(vi) أوجد جميع العقد المعزولة.

(vii) أوجد درجة العقدة v_3.

(viii) أوجد الدرجة الكلية للبيان.

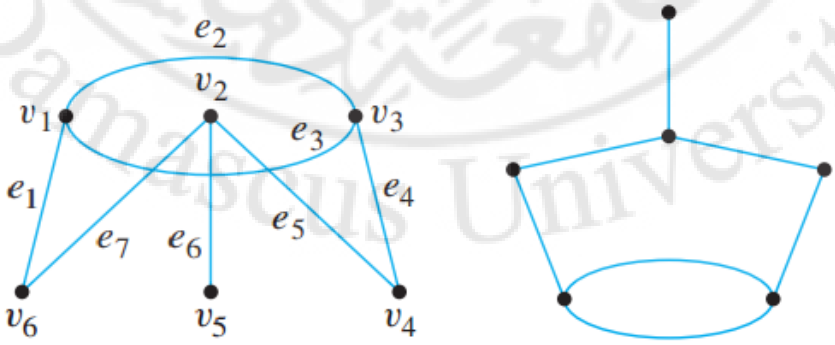


الشكل (6-37)

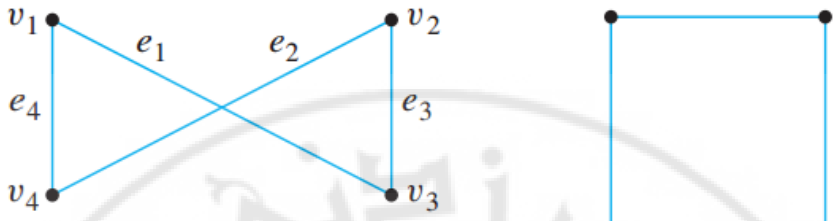


الشكل (6-38)

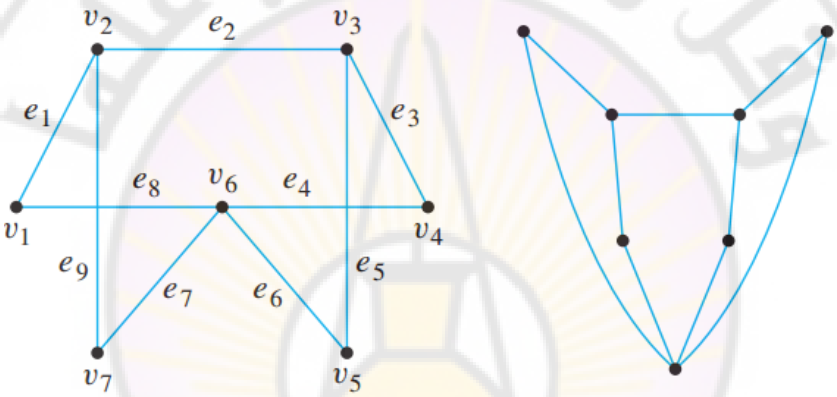
– برهن أن الرسمين المتقابلين في كل من الأشكال الآتية تمثل البيان نفسه مع تسمية كل العقد والأضلاع.



الشكل (6-39)

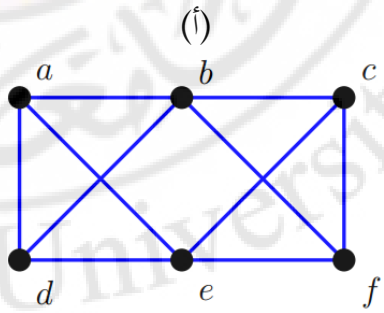


الشكل (6-40)

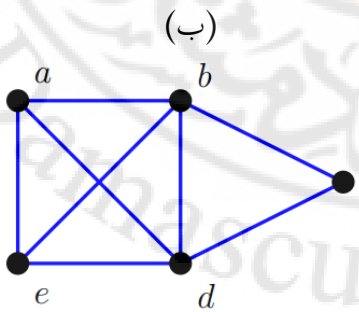


الشكل (6-41)

– ما هي الحلقات في البيانات الواردة في أ و ب؟ وما هي الحلقات البسيطة وغير البسيطة فيها؟



الشكل (6-42)



الشكل (6-43)

– ارسم البيانات الآتية: K_6، $K_{1,2}$، $K_{1,4}$ و $K_{3,4}$.

– ما هي الدرجة الأكبر للعقدة في بيان يتضمن n عقدة؟

– ما هو العدد الأكبر للأضلاع في بيان يتضمن n عقدة؟

– أثبت أنّ البيان ثنائي التجزيء المتضمن n عقدة، فيه على الأكثر $n^2/4$ ضلعاً.

– أثبت أنه في البيان الذي يتضمن عقدتين على الأقل فيه زوج من العقد المختلفة لهما الدرجة نفسها.

– أوجد عدد الأضلاع الموجودة في البيان K_n.

– أوجد عدد الأضلاع الموجودة في البيان $K_{m,n}$.

– أثبت أنه إذا تضمن البيان حلقة من العقدة v إلى ذاتها، فإنه يتضمن حلقة بسيطة من العقدة v إلى ذاتها.

– كم هو عدد الأضلاع في بيان يتضمن 10 عقد، إذا كان لكل عقدة فيه الدرجة 2 ؟

– ارسم البيانات: K_7، $K_{4,4}$، $K_{1,8}$، C_7 و W_7.

2-6 البيانات الموجهة (Digraph= Directed Graph)

نحتاج في كثير من الأحيان إلى بيانات لتمثيل شبكات الطرقات في اتجاه محدد، وشبكات وخطوط الإنتاج، ومتتاليات الأعمال في الإنشاءات، وتدفق الحسابات في الحاسب والكثير من التطبيقات الأخرى المتعددة التي تحتاج إلى مفهوم البيان الموجه، حيث كل ضلع فيه له اتجاه مستخدم لتمثيل هذه الأضلاع في البيان الموجه إلى الأسهم.

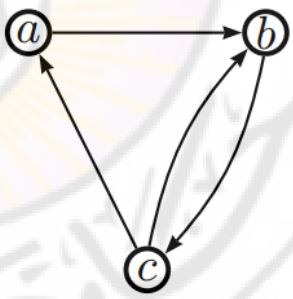
تعريف البيان الموجه: البيان الموجه $G = G(V, E)$ هو بيان لكل ضلع فيه من الشكل $e = (a, b)$ يوجد اتجاه من العقدة الابتدائية a إلى العقدة الطرفية b. ونشير هنا إلى أن مجموعة الأضلاع E في البيان الموجه هي مجموعة مكونة من أزواج مرتبة من V. وندعو E بمجموعة الأضلاع الموجهة أو اختصاراً بمجموعة الأضلاع فقط.

1-2-6 بعض المفاهيم والحقائق المتعلقة بالبيانات الموجهة

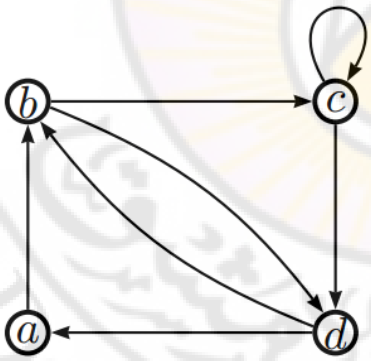
1- لقد سبق أن استخدمنا رمز المجموعة المكونة من عنصرين لتمثيل العقدة في البيان غير الموجه مثل $\{a,b\}$ في الفقرة (6-1). أمّا في البيان الموجه فإننا نستخدم الرمز (a,b) لتمثيل الضلع الموجه من a إلى b، حيث إنّ الزوج الذي يمثل هذه الضلع زوج مرتب، والترتيب في البيان الموجه هام حيث لا يمكن أن تكون الضلع الموجهة (a,b) هي ذاتها الضلع (b,a)، بل هي ضلع أخرى فيها العقدة b هي العقدة الابتدائية والعقدة a هي العقدة الطرفية.

مثال (6-19):

بفرض أنّ لدينا بيان موجه $G=G(V,E)$ حيث إنّ مجموعة العقد $V=\{a,b,c\}$ ومجموعة الأضلاع الموجهة هي: $E=\{(a,b),(b,c),(c,b),(c,a)\}$. يوضح الشكل (6-44) هذا البيان.



الشكل (6-44)



الشكل (6-45)

مثال (6-20):

يوضّح الشكل (6-45) البيان الموجه $G=G(V,E)$ حيث إنّ مجموعة العقد $V=\{a,b,c,d\}$ ومجموعة الأضلاع الموجهة:

$$E=\{(a,b),(b,c),(c,c),(b,d),(d,b)\}$$

2 - إذا كانت (a,b) ضلعاً في البيان الموجه $G=G(V,E)$، لذا فإنّ العقدة a هي عقدة ابتدائية و b عقدة طرفية للضلع الموجه (a,b). وبالتالي فإنّ العقدتين a و b واقعتان على الضلع الموجهة (a,b). كما أنّ العقدة a مجاورة للعقدة b. بالإضافة إلى ذلك فإنّ b مجاورة للعقدة a.

3- تعريف درجة خرج العقدة: نرمز لدرجة خرج العقدة بالرمز $\text{outdeg}(v)$ ونعني بذلك عدد الأضلاع التي تكون لها v بالنسبة لها عقدة ابتدائية.

4- تعريف درجة دخل العقدة: نرمز لدرجة دخل العقدة v بالرمز $\text{indeg}(v)$ ونعني بذلك عدد الأضلاع التي تكون لها العقدة b عقدة طرفية.

ملاحظة:

إذا كانت $\text{indeg}(v)=0$ ، فإننا نقول إنّ v هي عقدة مصدر.

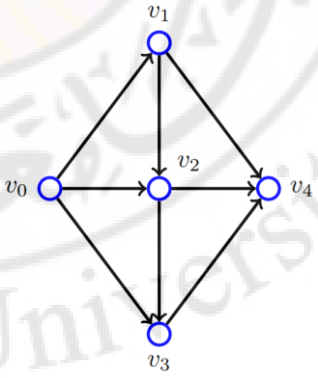
إذا كانت $\text{outdeg}(v)=0$ ، فإننا نقول إنّ v عقدة ماصة.

مثال (21-6):

لنوجد في البيان الموجه الموضّح بالشكل (46-6)، درجتي دخل وخرج كل عقدة من عقد البيان. يوضّح الجدول (47-6) درجتي دخل وخرج كل عقدة من عقد البيان الموجه المعطى.

outdeg درجة الخرج	indeg درجة الدخل	vertex العقدة
3	0	v_0
2	1	v_1
2	2	v_2
1	2	v_3
0	3	v_4

الجدول (47-6)



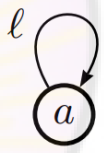
الشكل (46-6)

من الواضح في الجدول (6-47) أنّ العقدة هي عقدة ماصة لأنّ $\text{outdeg}(v_4)=0$، كما أنّ العقدة هي عقدة مصدر لأنّ $\text{indeg}(v_0)=0$.

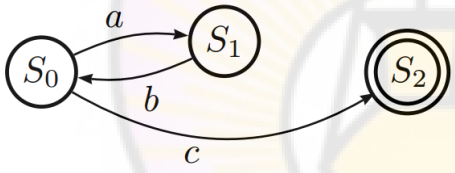
5- تعريف البيان المعلَّم: بفرض أنّ G بيان من الشكل $G=G(V,L,E)$ حيث فيه المجموعة V عبارة عن مجموعة عقد G والمجموعة E هي مجموعة أضلاعه وهي مجموعة جزئية من $V\times L\times V$. وللضلع في البيان G الشكل (a,ℓ,b)، حيث إنّ ℓ هي علاقة، a وb هي عقد الضلع. ندعو البيان $G=G(V,L,E)$ الموجَّه بالبيان المعلَّم.

مثال (6-22):

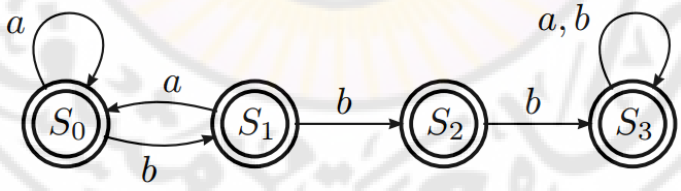
توضّح الأشكال (6-48)، (6-49)، (6-50) حالات لبيانات معلَّمة.



الشكل (6-48)



الشكل (6-49)



الشكل (6-50)

6- تعريف البيان الجزئي الموجه: نقول عن البيان الموجه $G'(V',E')$ إنه بيان جزئي موجه من $G(V,E)$ ونرمز لذلك من خلال $G'(V',E')\leq G(V,E)$ إذا كان $V'\subseteq V$ و$E'\subseteq E$. حيث إنّ كل عقدة في G'، هي عقدة في G، وكل ضلع موجهة من G' هي ضلع موجهة في G أيضاً.

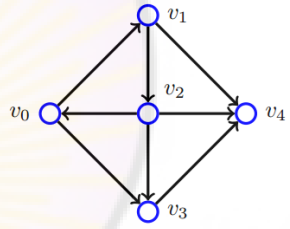
إنّ المسار الموجه في البيان الموجه يشابه المسار في البيان باستثناء إنه عند الانتقال إلى المسار الموجه، يجب الانتقال في ذات اتجاه الأضلاع الموجهة في هذا المسار.

7- تعريف المسار الموجه: يوصف المسار الموجه من a إلى b من خلال متتالية من العقد $v_0, v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ حيث: $a = v_0$ و $b = v_n$ كما أنّ: (v_{i-1}, v_i) هي ضلع موجهة من أجل $1 \le i \le n$.

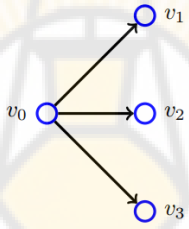
إنّ طول المسار الموجه هو عدد الأضلاع الموجهة الداخلة في هذا المسار.

مثال (6-23):

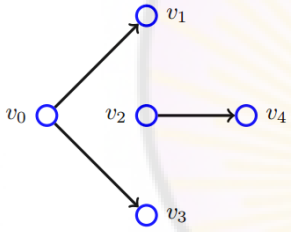
ليكن G بياناً موجهاً مُعطى بالشكل (6-51)



الشكل (6-51)



الشكل (6-52)



الشكل (6-53)

تمثل الأشكال (6-52) و (6-53) بيانات جزئية موجهة من G ونلاحظ أنه يوجد في G مسارات موجهة مثل:

المسار الموجه $v_0\ v_1\ v_2\ v_4$

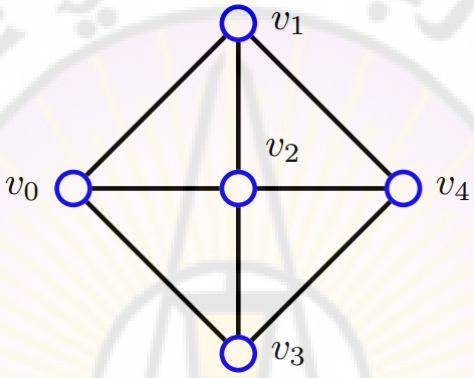
المسار الموجه $v_1\ v_2\ v_4$

المسار الموجه $v_0\ v_3\ v_4$

8- تعريف البيان الموجه المتصل: نقول عن البيان الموجه $G(V, E)$ إنه بيان متصل، إذا كان البيان الموجود تحته بياناً متصلاً. ونقول إنّ البيان الموجه شديد الاتصال، إذا كان من أجل كل زوج من العقد a و b من V، يوجد مسار موجه من a إلى b.

مثال (6-24):

من أجل البيان الموضح بالشكل (6-51)، فإنّ البيان الواقع تحته والموضّح بالشكل (6-54) هو بيان متصل. بالتالي هو بيان موجه متصل وهو ليس بشديد الاتصال لأنه لا يوجد بين v_1 وv_3، مساراً موجهاً يربط بينهما.

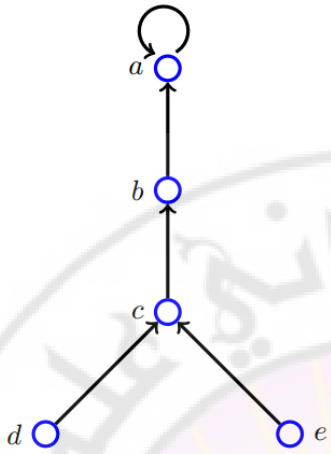


الشكل (6-54)

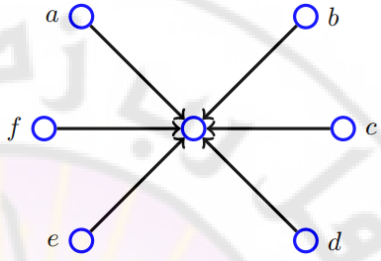
تمارين غير محلولة

1- أوجد مجموعة العقد ومجموعة الأضلاع الموجهة في كل من البيانات الموجهة الآتية.

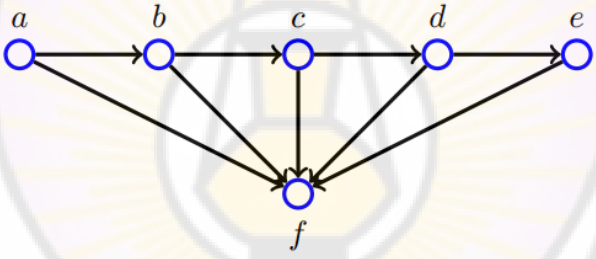
- أوجد درجة الدخل indeg ودرجة الخرج outdeg لكل عقدة.
- بيّن فيما إذا كان هنالك عقد مصدر أو عقد ماصة.



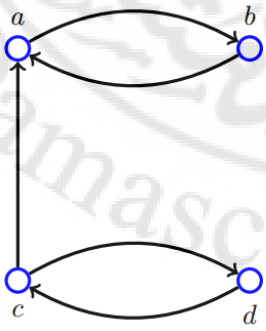
(ب)



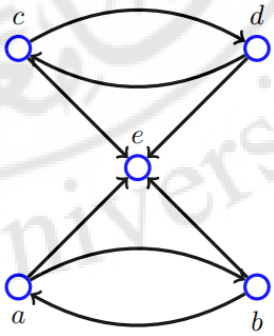
(أ)



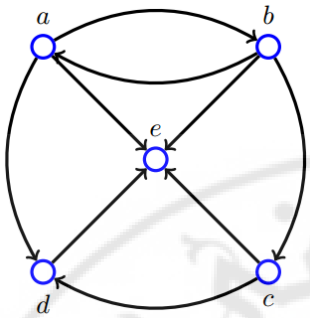
(ج)



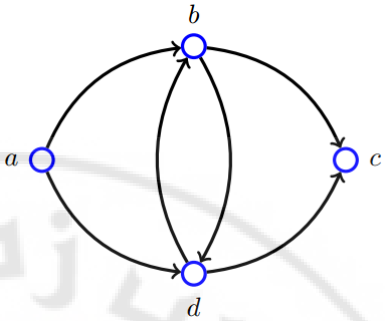
(هـ)



(د)

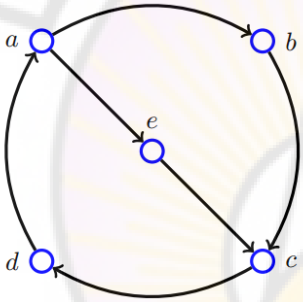


(ح)

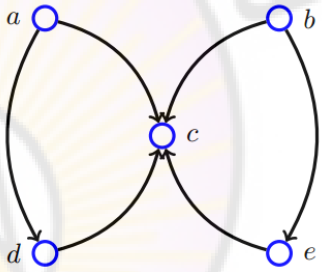


(ز)

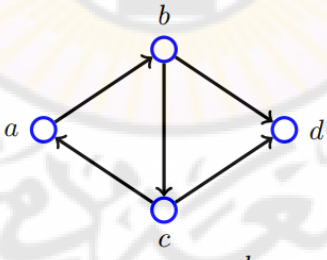
2- بيّن أي البيانات الموجهة الآتية متصلة وأي منها شديدة الاتصال؟

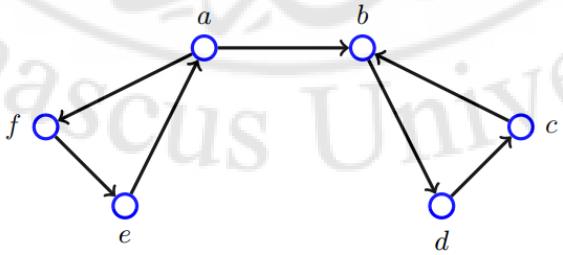


(ب)



(أ)



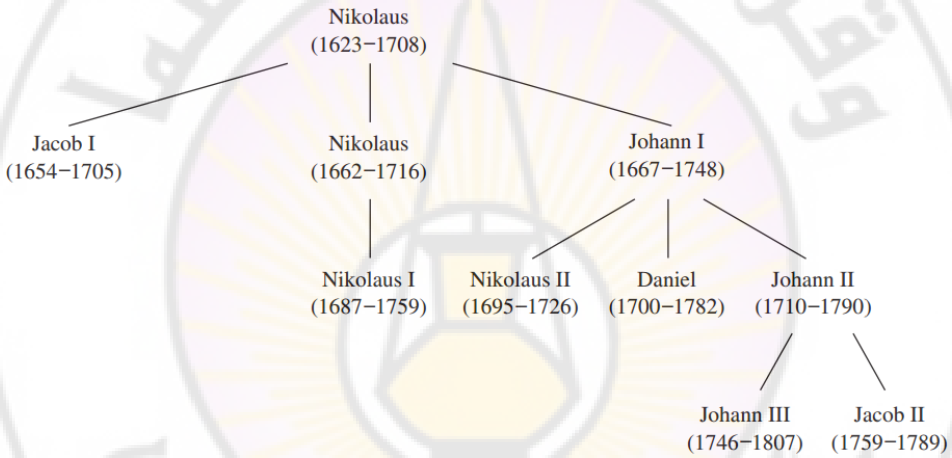


(د)

(ج)

3-6 الأشجار (Trees)

في الفقرة السابقة والتي قبلها درسنا البيان والبيان الموجه، ورأينا أنه يساعد في حل كثير من المسائل، وفي هذه الفقرة ندرس نوعاً خاصاً من البيان يدعى الأشجار. وسمي البيان بهذا الاسم لتشابهه مع الأشجار العادية، وأقرب مثال لهذا هو شجرة العائلة التي تمثل الأجيال المتعددة لعائلة ما. لنأخذ مثالاً على ذلك شجرة عائلة علماء الرياضيات السويسريين برنولي كما في الشكل (6-55) التالي:

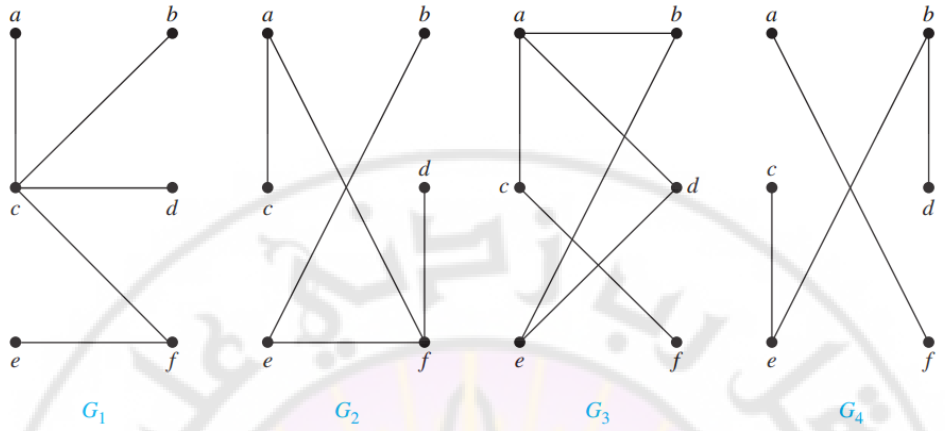


الشكل (6-55): شجرة عائلة علماء الرياضيات السويسريين برنولي

1- تعريف الشجرة: هي عبارة عن بيان غير موجه متصل لا يحتوي على حلقات ودوائر. لذلك فإنّ الشجرة لا يمكن أن تحتوي على أضلاع متوازية، فأيّ شجرة هي عبارة عن بيان بسيط. والمثال التالي يبين ذلك.

مثال (6-25):

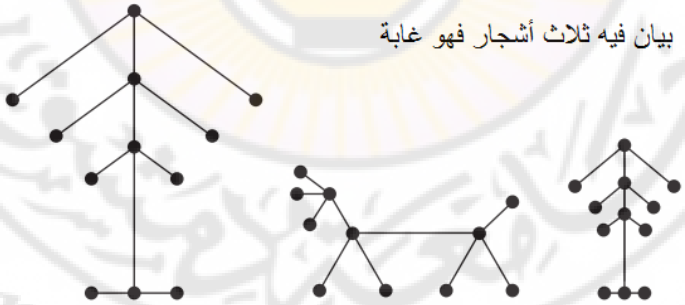
أي من البيانات في الشكل (6-56) يمثل شجرة وأي منها لا يمثل؟



الشكل (6-56)

الحل: إن البيانات G_1 وG_2 هي أشجار لأنها بيانات بسيطة ليست فيها حلقات ولا دوائر. أما G_3 ليس شجرة لأن e, b, a, d, e يشكل دائرة. وG_4 ليس شجرة لأنه بيان غير متصل.

2- تعريف الغابة forest: هي عبارة عن مجموعة من الأشجار، بمعنى آخر هي بيان غير موجه غير متصل لا يحتوي على حلقات ولا دوائر. انظر الشكل (6-57).



الشكل (6-57): غابة مؤلفة من ثلاث أشجار

نظرية (6-4)

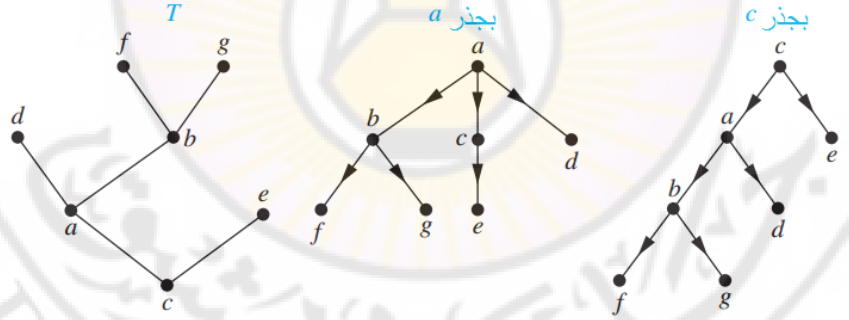
إن أي بيان غير موجه يمثل شجرة إذا وفقط إذا وجد مسار بسيط وحيد بين أيّ عقدين منه.

الإثبات: لزوم الشرط: لنفرض أولاً أن لدينا شجرة T فهي عبارة عن بيان متصل لا يوجد فيه حلقات. لتكن x وy عقدتان من T، وبما أن البيان متصل فإنه يوجد مسار بسيط بين x وy، فيكفي أن برهن أنه وحيد. لنفرض جدلاً وجود مسار بسيط آخر بين x وy، مما يعني أنه يوجد مسارين أحدهما من x وy والآخر من y وx، فهما يشكلان حلقة في T، وهذا مناقض لتعريف الشجرة. إذا فالمسار وحيد.

كفاية الشرط: لنفرض أنه يوجد مسار وحيد بين أيّ عقدين من البيان T، هذا يدل أن البيان T متصل، وبما أن المسار وحيد فلا يمكن وجود حلقات، وبالتالي T هو شجرة.

3- تعريف الشجرة المجذّرة rooted tree: هي عبارة عن شجرة، والتي يمكن جعل عقدة فيها عبارة عن جذر وأي ضلع في الشجرة متوجه من هذا الجذر.

فيمكن تغير شجرة غير مجذّرة إلى أخرى مجذّرة بحسب اختيار العقدة المناسبة ويمكن الحصول على شجرتين مجذّرتين مختلفتين من شجرة واحدة، كما في الشكل (6-58).



الشكل (6-58) شجرتان مجذرتان متشكلتان بجذرين مختلفين من شجرة واحدة.

أتى مفهوم الشجرة المجذّرة من النباتات أو من النسب والأجيال. فإذا فرضنا أن T شجرة مجذّرة (ذات جذر) وكانت v عقدة منها مختلفة عن الجذر، فإن أب (والد) العقدة v parent هو العقدة الوحيدة u التي يوجد منها ضلع موجه نحو العقدة v، وتدعى حينها العقدة v بولد العقدة u child. إن جميع العقد المنحدرة من أب واحد يدعون أشقاء siblings. وتدعى العقد الموجودة على المسار من الجذر إلى العقدة v

بأسلاف العقدة v ancestors. أما أحفاد العقدة v descendants هم جميع العقد التي ينظر فيها للعقدة v كسلف لهم. والعقدة التي لا تمتلك أولاداً تدعى ورقة leaf. والعقد التي تمتلك أولاداً تدعى عقداً داخلية internal vertices، كما يعد الجذر عقدة داخلية ما لم يكن البيان مؤلفاً من عقدة وحيدة، في هذه الحالة يكون الجذر ورقة.

4- تعريف الشجرة الفرعية subtree: إذا كانت a عقدة ما من شجرة، فإن الشجرة الفرعية التي جذرها a عبارة عن بيان فرعي مؤلف من العقدة a، وجميع أحفادها، وجميع الأضلاع الواصلة إلى جميع أحفادها.

مثال (6-26):

في الشكل (6-59) شجرة مجذرة جذرها في العقدة a، أوجد والد العقدة c، وأولاد العقدة g، وأشقاء العقدة h، وجميع أسلاف العقدة b، وجميع العقد الداخلية، وجميع الأوراق. ثم ما هي الشجرة الفرعية التي جذرها في العقدة g؟

الحل: إن والد العقدة c هو العقدة b.

إن أولاد العقدة g هم h وi وj.

إن شقيقي العقدة h هما العقدتان: i وj.

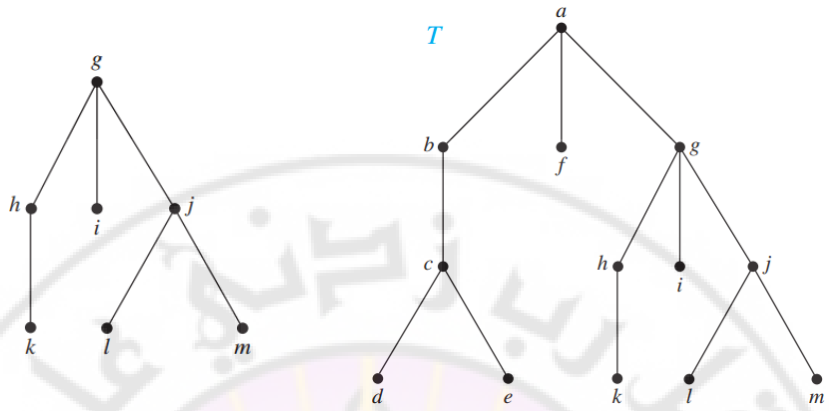
إن أسلاف العقدة e هم العقد c وb وa.

إن أحفاد العقدة b هم العقد c وd وe.

إن العقد الداخلية هي العقد a وb وc وg وh وj.

إن الأوراق هي العقد d وe وf وi وk وl وm.

إن الشجرة الفرعية التي جذرها العقدة g موضحة في الشكل (6-60).



الشكل (6-59) شجرة مجذرة **الشكل (6-60) شجرة فرعية**

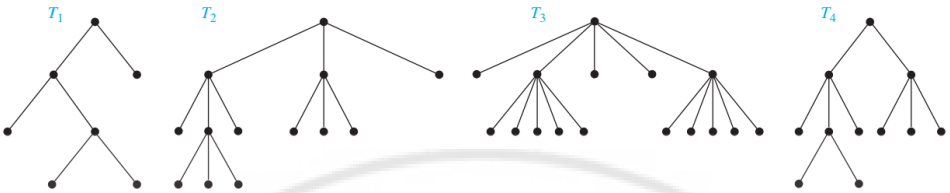
إن الأشجار المجذرة والتي تمتلك عقدها الداخلية العدد نفسه من الأولاد تستخدم في العديد من التطبيقات، كالبحث والترتيب التصاعدي والتنازلي والترميز إلخ...

5- تعريف الشجرة المتعددة $m-ary$ tree: نقول عن الشجرة المجذرة إنها $m-$ متعددة، إذا لم تمتلك كل عقدة من عقدها الداخلية أكثر من m ولداً. وتدعى الشجرة $m-$متعددة ممتلئة إذا امتلكت كل عقدة من عقدها الداخلية m ولداً تماماً. وتدعى الشجرة $m-$متعددة حيث $m = 2$ بالشجرة الثنائية.

مثال (6-27):

هل الأشجار في الشكل (6-61) هي $m-$متعددة ممتلئة من أجل m عدد صحيح موجب.

الحل: إن T_1 هي شجرة ثنائية ممتلئة لأن كل عقدة داخلية فيها تمتلك ولدين. وإن T_2 هي شجرة ثلاثية ممتلئة لأن كل عقدة داخلية فيها تمتلك 3 أولاد. وفي T_3 كل عقدة داخلية تمتلك 5 أولاد فهي شجرة خماسية ممتلئة. بينما T_4 فإنها ليست $m-$متعددة ممتلئة لأن بعض من عقدها الداخلية يمتلك ولدين وبعضها 3 أولاد.

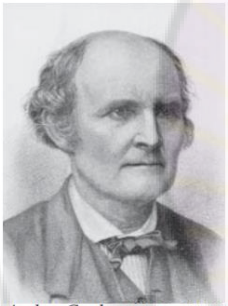


الشكل (6-61) شجرات لها جذور

6-3-1 نماذج للأشجار

تستخدم الأشجار كنماذج في فروع عدة، كعلوم الحاسوب، والكيمياء، والجيولوجيا، وعلم النباتات، والفلسفة وعلم النفس.

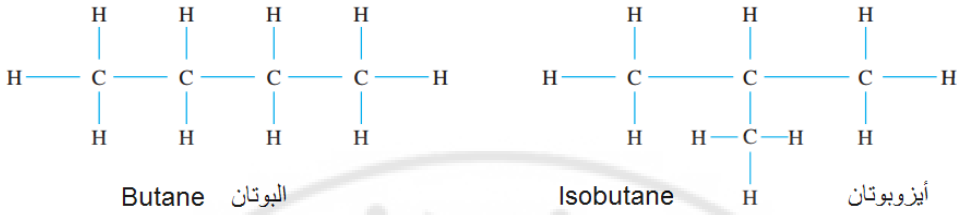
مثال (6-28): تركيب جزيئات الهيدروكربونات


Arthur Cayley(1821–1895)

يستخدم البيان لتمثيل الجزيئات، حيث يمكن تمثيل الذرات كعقد والحدود فيما بينها كأضلاع. اكتشف العالم الرياضي الإنكليزي آرثر كَيْلي الأشجار عام 1857 عندما كان يحاول تعداد المركبات المتشابهة والمختلفة بالخواص isomers من الشكل C_nH_{2n+2}، والتي تدعى هيدروكربونات المشبعة.

في أنموذج بيانات الهيدروكربونات المشبعة، كل ذرة كربون تعد كعقدة من الدرجة الرابعة، وكل ذرة هيدروجين تعد عقدة من الدرجة الأولى. يوجد $3n+2$ عقدةً في بيان تمثيل جزيئة من الشكل C_nH_{2n+2}. إن عدد الأضلاع في البيان يساوي نصف مجموع درجات العقد، أي إنّه يساوي $3n+1=\frac{4n+2n+2}{2}$ ضلعاً.

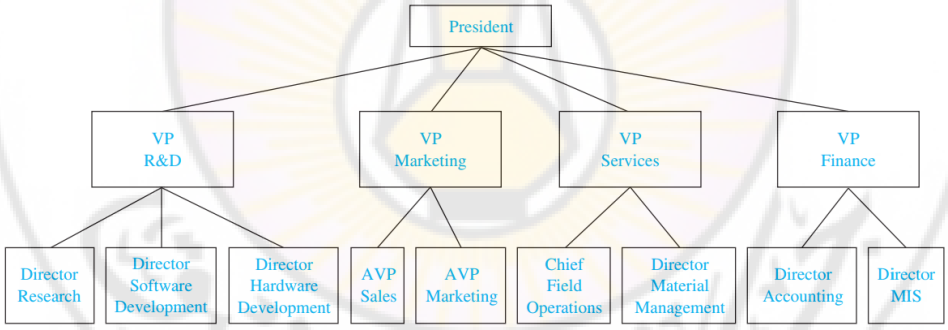
إن الأشجار غير المتماثلة بـ n عقدة من الدرجة الرابعة و$2n+2$ عقدة من الدرجة الأولى تمثل أيزومر isomers مختلفة للمركب C_nH_{2n+2}، لنفرض أن $n=4$ يوجد مركبان غير متماثلين فقط لجزيء البوتان C_4H_{10}، الشكل (6-62).



الشكل (6-62) تمثيل جزيء البوتان

مثال (6-29): تمثيل منظمات

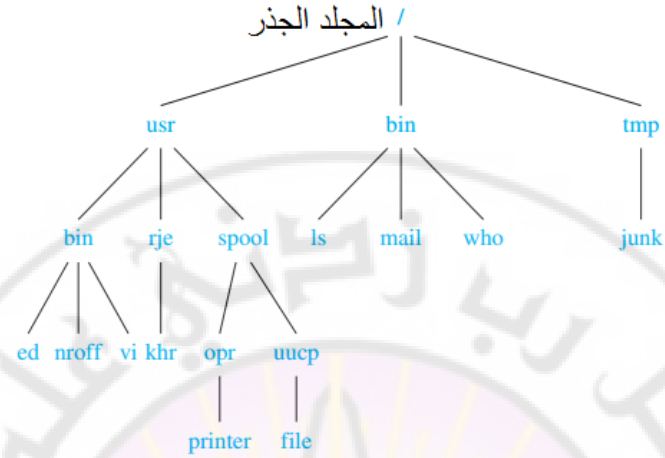
يمكن تمثيل بنية منظمة ضخمة باستخدام الأشجار. كل عقدة من هذه الشجرة تشكل منصب في المنظمة أو الشركة. يدل كل ضلع فيها أن عقدة البداية هي الرئيس المباشر لعقدة النهاية. البيان في الشكل (6-63) يظهر شجرة لتنظيم شركة كومبيوتر ضخمة.



الشكل (6-63) شجرة تمثل تنظيم شركة للحاسوب

مثال (6-30): تنظيم ملفات الحاسوب

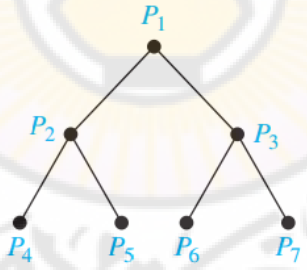
يمكن تنظيم ملفات ذاكرة الحاسوب في مجلدات، فالمجلد يمكن أن يحتوي على ملفات ومجلدات فرعية. يحتوي المجلد الرئيس (الجذر) على كافة ملفات النظام. فيمكن تمثيل ذلك بشجرة جذرها هو المجلد الرئيس، وتمثل العقد الداخلية المجلدات الفرعية، وتمثل الأوراق الملفات أو المجلدات الفارغة، كما هو موضح في الشكل (6-64).



الشكل (6-64) نظام الملفات في الحاسوب

مثال (6-31): عمل المعالجات على التوازي

إن الشبكة المؤلفة من شجرة متصلة هي وسيلة مهمة لتوصيل المعالجات داخلياً، إن البيان الممثل لشبكة كهذه هو عبارة عن شجرة ثنائية ممتلئة، تحتوي على $n = 2^k - 1$ معالجاً، في الشكل (6-65) يوضح اتصال سبعة معالجات على التوازي.



الشكل (6-65)

لنوضح مثلاً كيفية جمع ثمانية أعداد باستخدام الحساب على التوازي. يتم ذلك عبر ثلاث مراحل. في المرحلة الأولى يقوم المعالج P_4 بجمع العددين x_1 وx_2، ويقوم المعالج P_5 بجمع العددين x_3 وx_4، ويقوم المعالج P_6 بجمع العددين x_5 وx_6، ويقوم المعالج P_7 بجمع العددين x_7 وx_8. في المرحلة الثانية يقوم المعالج P_2 بجمع العددين $x_1 + x_2$ و$x_3 + x_4$، ويقوم المعالج P_3 بجمع العددين $x_5 + x_6$ و$x_7 + x_8$. في

النهاية (المرحلة الثالثة) يقوم المعالج P_1 بجمع الناتجين السابقين $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ و $x_5 + x_6 + x_7 + x_8$. بهذه العملية نكون قد جمعنا ثمانية أعداد بثلاث مراحل. بينما إذا أردنا جمعها بمعالج واحد نحتاج إلى سبع مراحل على التسلسل.

2-3-6 خواص الأشجار

غالباً ما نحتاج لمعرفة العلاقة بين عدد الأضلاع والعقد للأنواع المختلفة في الأشجار.

نظرية (5-6)

برهن أن أية شجرة مؤلفة من n عقدةً تمتلك $n-1$ ضلعاً.

الإثبات: سنستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات هذه النظرية.

من أجل $n = 1$ أي لدينا شجرة من عقدة معزولة لا أضلاع لها. وبالتالي النظرية محققة.

نفرض الآن أن الشجرة تحقق النظرية من أجل k عقدةً أي يوجد $k + 1$ ضلعاً، لنفرض أن الشجرة T تمتلك $k + 1$ عقدة، ولتكن العقدة v ورقة في الشجرة T، ولتكن العقدة w تمثل والد للعقدة v. الآن بحذف العقدة v من الشجرة T فيحذف معها الضلع الذي يصلها بالعقدة w فنحصل على شجرة T' تمتلك على k عقدة، وحسب الفرض فإن T' تحقق النظرية أي لها $k - 1$ وبالتالي فإن الشجرة T تمتلك $k - 1 + 1 = k$ وبالتالي فالنظرية محققة من أجل الشجرة T.

نظرية (6-6)

برهن أن عدد عقد شجرة m–متعددة ممتلئة فيها i عقدة داخلية هو $n = mi + 1$ عقدة.

الإثبات: كل عقدة ما عدا الجذر هي عبارة عن ولد لعقدة داخلية، وبما أنه لدينا i عقدة داخلية لديها m ولداً فإنه لدينا mi عقدة ما عدا الجذر، وبالتالي يكون في الشجرة ما مجموعه $n = mi + 1$ عقدة.

نظرية (6-7)

يتحقق في كل شجرة m–متعددة ممتلئة ما يلي:

(i) إذا كانت مؤلفة من n عقدة فإنها تحتوي على $i = (n-1)/m$ عقدة داخلية وتحتوي على $l = [(m-1)n+1]/m$ ورقة.

(ii) إذا كان فيها i عقدة داخلية، فإنها تحتوي على $n = mi+1$ عقدة وتحتوي على $l = (m-1)i+1$ ورقة.

(iii) إذا كان فيها l ورقة فإنها تحتوي على $n = (ml-1)/(m-1)$ عقدة وتحتوي على $i = (l-1)/(m-1)$ عقدة داخلية.

الإثبات: ليكن n يمثل عدد العقد، و i يمثل عدد العقد الداخلية، و l يمثل عدد الورقات.

يمكن إثبات الأجزاء الثلاثة من النظرية باستخدام المساواة في النظرية (6-6) لدينا:

$$n = mi+1 \quad , \quad n = l+i \quad \Longrightarrow \quad i = \frac{n-1}{m}$$

$$\Longrightarrow l = n - i = n - \frac{n-1}{m} = \frac{(m-1)n+1}{m}$$

يترك للقارئ إثبات (ii) و (iii) بنفس الطريقة السابقة.

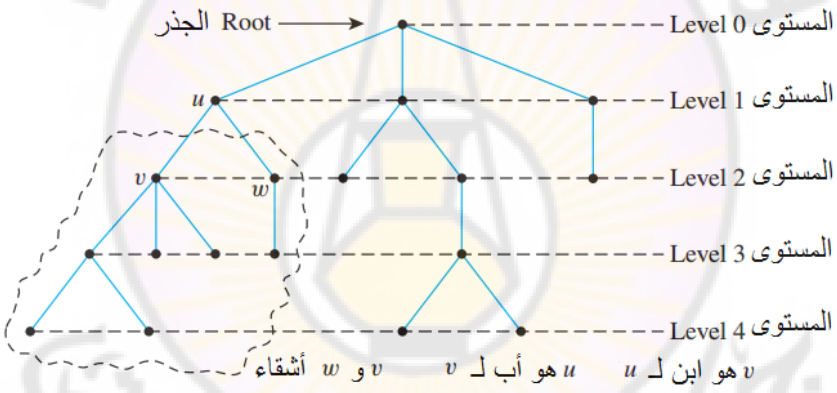
مثال (6-32):

لنفرض أن أحدهم يبدأ سلسلة من الحروف. كل شخص يستقبل الحرف يطلب منه إرساله لأربعة أشخاص آخرين. يفعل بعض الأشخاص ذلك وبعضهم لا يرسل أي حرف. كم هو عدد الأشخاص الذين يرسلون الحرف، مع الشخص الأول، إذا لم يرسل أحدهم أكثر من حرف واحد، وإذا كانت سلسلة الحروف تنتهي بعد قراءتها من قبل 100 شخصٍ ولكن لم يرسلوا الحرف. أوجد عدد الأشخاص الذين أرسلوا الحرف.

الحل: يمكن تمثيل سلسلة الحروف كشجرة رباعية. تمثل العقد الداخلية عدد الأشخاص الذين يرسلون الحرف، وتمثل الأوراق عدد الذين لم يرسلوا الحرف. وبما أنّ عدد الذين لم يرسلوا الحرف هو 100 فهو عدد الأوراق أي $l = 100$. وحسب (iii)

من النظرية (6-7) نجد أن عدد الأشخاص الذين قرؤوا الحرف هو $n = (4 \cdot 100 - 1)/(4 - 1) = 133$. ويكون عدد العقد الداخلية هو $133 - 100 = 33$ وهو عدد الأشخاص الذين أرسلوا الحرف بعد قراءته.

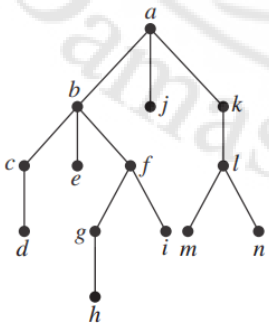
6- تعريف الشجرة المتعددة المتوازنة: إن مستوى عقدة من شجرة مجذرة هو طول المسار من هذه العقدة إلى الجذر، فالجذر هو في المستوى صفر (0)، فإن ارتفاع الشجرة هو أطول مسار فيها. ونقول عن الشجرة المجذرة إنها m–متعددة متوازنة بطول h، إذا كانت جميع الأوراق فيها من مستوى واحد h أو من مستوى $h - 1$، الشكل (6-65).



الشكل (6-65)

مثال (6-33):

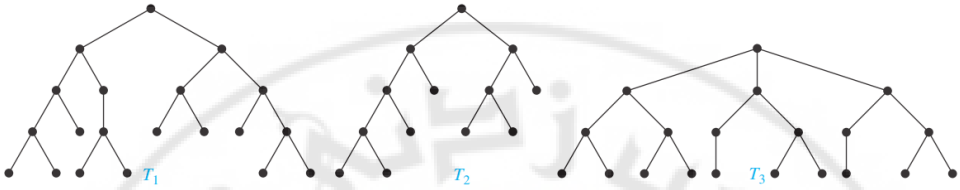
أوجد مستوى كل عقدة من الشجرة المجذرة في الشكل المجاور. وما هو ارتفاعها.



الحل: إن الجذر a في المستوى (0)، والعقد b, j, k هي في المستوى 1، والعقد c, e, f, l هي في المستوى 2، والعقد d, g, i, m, n هي في المستوى 3، وفي النهاية العقدة h في المستوى 4. إن ارتفاع الشجرة هو 4 لأنه أكبر مستوىً للعقد.

مثال (6-34):

أي من الأشجار الموضحة في الشكل (6-66) هي شجرة متوازنة.



الشكل (6-66)

الحل: إن T_1 متوازنة لأن كل أوراقها من المستوى 3 و4، بينما T_2 ليست متوازنة، لأن أوراقها من المستويات 2 و3 و4. في النهاية إن T_3 شجرة متوازنة، لأن جميع أوراقها من المستوى 3.

نظرية (6-8)

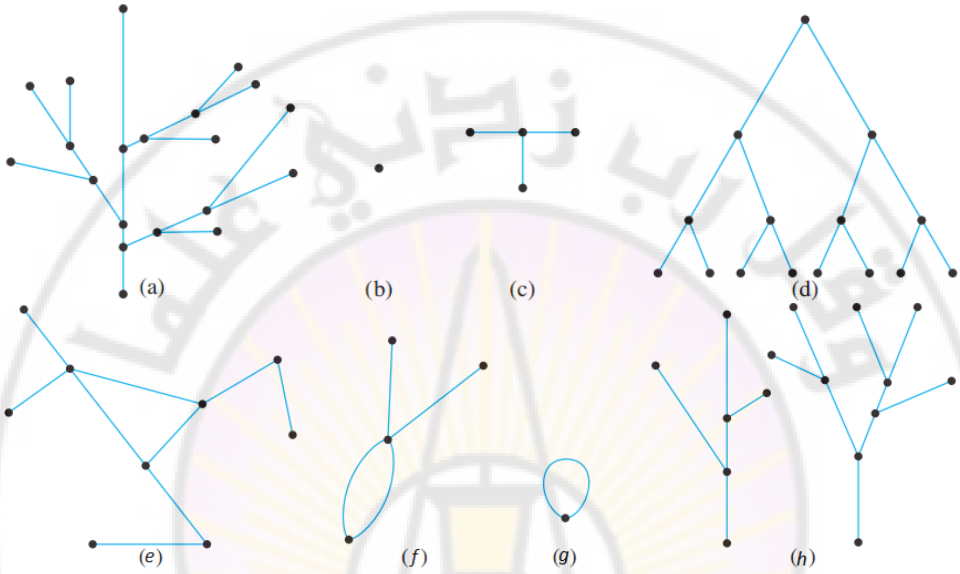
يوجد على الأكثر m^h ورقة في شجرة m–متعددة من ارتفاع h.

الإثبات: نقوم بإثبات هذه النظرية مستخدمين مبدأ الاستقراء الرياضي. لنفرض أولاً أنّ لدينا شجرة m–متعددة من ارتفاع 1. هذه الشجرة مؤلفة من جذر وعلى الأكثر m ولداً، يعتبر كل منها ورقة، وبالتالي يوجد على الأكثر $m^1 = m$ ورقة في شجرة m–متعددة من ارتفاع 1، وبهذا نكون قد أثبتنا المرحلة الأولى.

الآن لنفرض أن النتيجة صحيحة من أجل الأشجار m–متعددة من ارتفاع أقل تماماً من h. لتكن T شجرة m–متعددة من ارتفاع h. إن أوراق الشجرة T هي أوراق الأشجار الفرعية من T والحاصلة من حذف الأضلاع من الجذر إلى العقد في المستوى الأول. كل شجرة فرعية هي من ارتفاع $h-1$. فحسب الفرضية السابقة كل منها فيها على الأكثر m^{h-1} ورقة، وبما أنّه لدينا على الأكثر m شجرة فرعية كل منها أقصى ما تمتلكه من أوراق هو m^{h-1}، وبالتالي T تحتوي على $m \cdot m^{h-1} = m^h$ ورقة. وهو المطلوب.

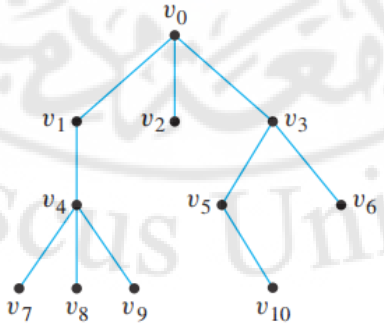
تمارين محلولة

1- بين أياً من البيانات الآتية تمثل أشجاراً.



الحل: إن البيانات $(a),(b),(c),(d)$ تمثل أشجاراً لأنها بيانات بسيطة ولا تحتوي على حلقات ولا دوائر. أما البيانات $(e),(f),(g)$ كلها لا تمثل أشجاراً لوجود حلقات فيها. والبيان (h) كذلك لا يمثل شجرة لأنه غير متصل.

2- لتكن الشجرة التي جذرها العقدة v_0 والموضحة في الشكل (6-67) أدناه.



الشكل (6-67)

أ- ما هو مستوى العقدة v_5 ؟ ب- ما هو مستوى العقدة v_0 ؟

جـ- ما هو ارتفاع هذه الشجرة ؟ د- من هم أولاد العقدة v_3 ؟

هـ- من هو والد العقدة v_2 ؟ و- من هم أشقاء العقدة v_8 ؟

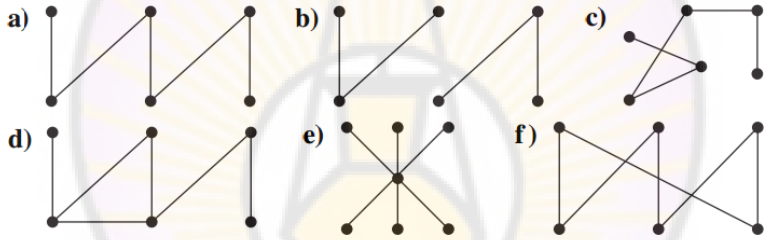
ز- من هم أحفاد العقدة v_3 ؟

الحل: أ- 2. ب- 0. جـ- 3. د- v_5, v_6. هـ- v_0.

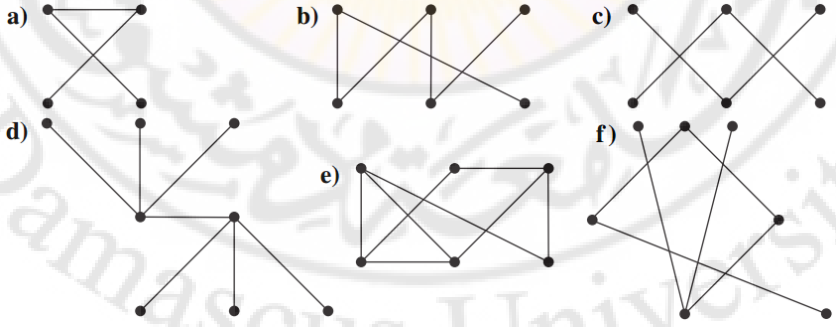
و- v_7, v_9. ز- v_5, v_6, v_{10}.

تمارين غير محلولة

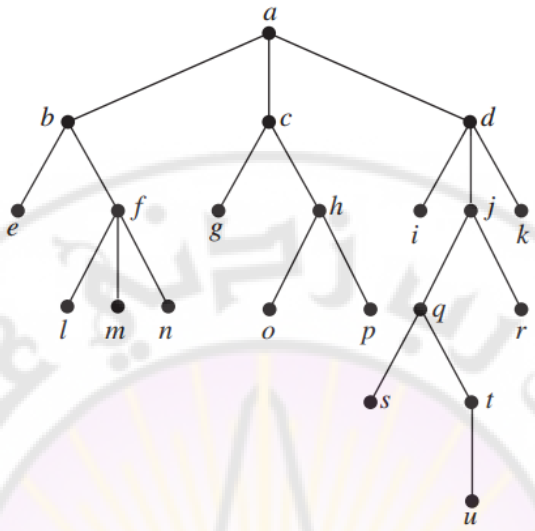
1- أي من هذه البيانات الآتية هي أشجار ؟



2- أي من هذه البيانات الآتية هي أشجار ؟



3- أجب عن الأسئلة الآتية من أجل الشجرة الموضحة بالشكل أدناه.



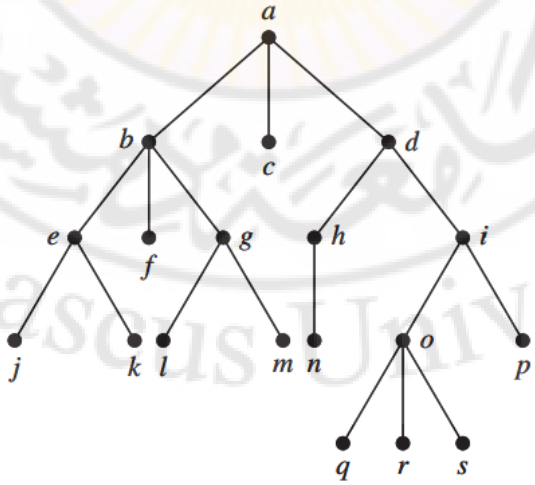
أ- أية عقدة هي الجذر؟ ب- أي من العقد هي داخلية ؟

جـ- أي من العقد هي أوراق ؟ د- أي من العقد هم أولاد j ؟

هـ- أية عقدة هي والد لـ h ؟ ز- أي من العقد هم أشقاء o ؟

حـ- أي من العقد هم أسلاف m ؟ ط- أي من العقد هم أحفاد b ؟

4- أجب عن الأسئلة الآتية من أجل الشجرة الموضحة بالشكل أدناه.



أ- أية عقدة هي الجذر؟ ب- أي من العقد هي داخلية ؟

جـ- أي من العقد هي أوراق ؟ د- أي من العقد هم أولاد j ؟

هـ- أية عقدة هي والد لـ h ؟ ز- أي من العقد هم أشقاء o ؟

حـ- أي من العقد هم أسلاف m ؟ ط- أي من العقد هم أحفاد b ؟

5- هل الشجرة ذات الجذر في التمرين 3 هي m-متعددة ممتلئة؟. وما هو مستوى كل عقدة فيها؟. ثم ارسم الأشجار الفرعية التي جذرها في العقدة:

أ- a . ب- c . جـ- e .

6- هل الشجرة ذات الجذر في التمرين 4 هي m-متعددة ممتلئة؟. وما هو مستوى كل عقدة فيها؟. ثم ارسم الأشجار الفرعية التي جذرها في العقدة:

أ- a . ب- c . جـ- e .

7- أوجد مع الرسم شجرة ثنائية تحتوي على سبع عقد منها أربع عقد داخلية.

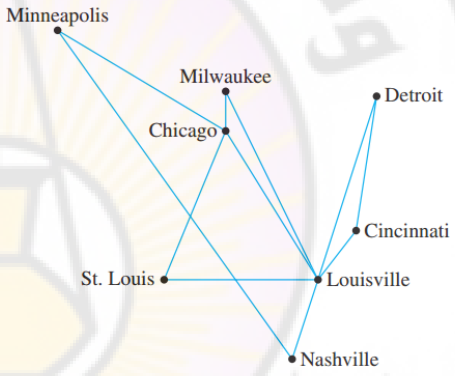
8- أوجد شجرة ثنائية تحتوي على اثنتي عشرة عقدة وأخرى تحتوي على تسع عقد.

6-4 الأشجار الهيكلية (Spanning Trees)

أرادت شركة الساحل الشرقي توسيع خدماتها إلى وسط غرب الولايات المتحدة، وحصلت على رخصة من سلطة الطيران الاتحادية للطيران وفق المسارات المحددة في الشكل (6-68).

تتمنى الشركة إعلان الخدمة بشكل شرعي إلى كل المدن الموجودة في الشكل ولكن، لأسباب اقتصادية، تريد استخدام أقل عدد ممكن من المسارات لتصل بين هذه المدن. أحد هذه الطرق الممكنة نراه في الشكل (6-69).

الشكل (6-68)



الشكل (6-69)

واضح أنّ هذا النظام يصل المدن ببعضها بأقل عددٍ ممكن من المسارات.

1- تعريف الشجرة الهيكلية spanning tree: إن الشجرة الهيكلية من بيان G، هي بيان جزيء من G يحتوي على جميع العقد في G وتحقق مفهوم الشجرة.

نظرية (6-9)

١- كلّ بيان متصل يمتلك شجرة هيكلية.

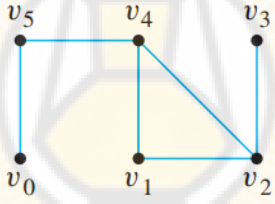
٢- أيّ شجرتين هيكليتين لبيان ما يمتلكان العدد نفسه من الأضلاع.

الإثبات: سنبرهن الطلب الأول ونترك الطلب الثاني تمريناً للقارئ.

١- ليكن G بياناً متصلاً. إذا كان G خالٍ من الحلقات، عندها يكون شجرة هيكلية ويتم المطلوب. أما إذا حوى حلقة واحدة على الأقل ولتكن C_1، فإننا نحصل على بيان جزئي من البيان G ناتج من حذف ضلع من C_1. الآن إذا كان البيان الجزئي خالٍ من الحلقات فإننا نحصل على شجرة هيكلية ويتم المطلوب. في حالةِ النفي فإنّ البيان الجزئي يحوي حلقة واحدة على الأقل ولتكن C_2، وكما فعلنا أعلاه يمكن حذف ضلع من C_2، للحصول على بيان جزئي متصل. وبالمتابعة على النهج نفسه حتى نحصل على بيان جزئي T من G. هذا الشيء ممكن لأن عدد أضلاع البيان G منته. وبما أن T يحوي جميع عقد البيان G، فإن T هي شجرة هيكلية له.

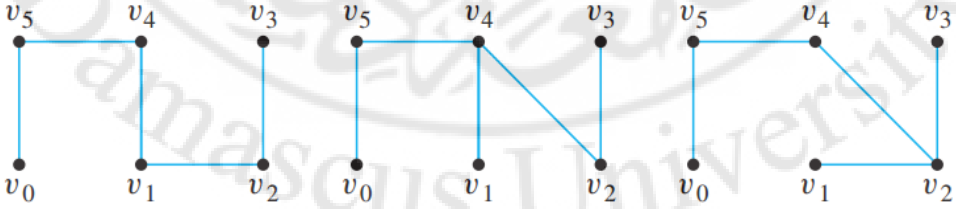
مثال (6-35):

أوجد جميع الأشجار الهيكلية من البيان G الموضح في الشكل (6-70) أدناه.



الشكل (6-70)

الحل: إن البيان G يحتوي على حلقة واحدة $v_2v_1v_4v_2$، وبحذف أيّ ضلع من هذه الحلقة نحصل على شجرة. وكما هو موضح أدناه يوجد ثلاث أشجار هيكلية للبيان G.

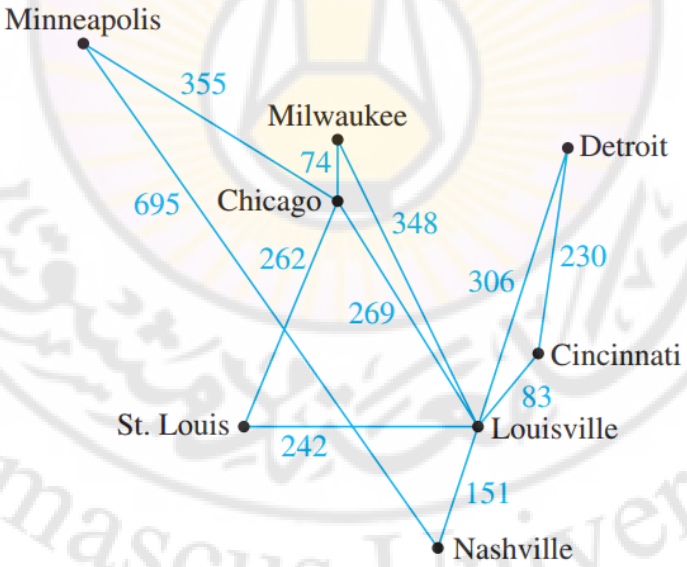


الشكل (6-71)

1-4-6 الأشجار الهيكلية الصغرى (Minimum Spanning Trees)

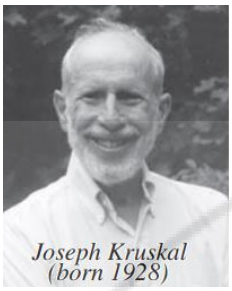
إنّ بيان المسارات المسموحة من قبل سلطة الطيران الاتحادية الموجودة في الشكل (6-68)، يمكن أن نضع عليه المسافات بين المدن (بالميل) كما في الشكل (6-72). لنفرض الآن أنّ شركة الطيران تريد خدمة جميع المدن أدناه ولكن بنظام يكون فيه المجموع الكلي للأميال أقل ما يمكن. لاحظ أنّ هذا النظام هو شجرة ولكن بأقلّ المسافات.

2- تعريف البيان الموزون weighted graph: هو بيان فيه كلّ ضلع مرتبط بعدد حقيقي موجب يدعى **الوزن**، إن مجموع أوزان جميع الأضلاع يدعى **الوزن الكلي** للبيان. والشجرة الهيكلية الصغرى لبيان موزون هي الشجرة الهيكلية التي تمتلك أقلّ وزن كلي ممكن مقارنة بجميع الأشجار الهيكلية للبيان.



الشكل (6-72)

إذا كان G بياناً موزوناً و e ضلعاً في البيان G، عندها يرمز لوزن الضلع e بـ $w(e)$ ويرمز بـ $w(G)$ للوزن الكلي للبيان G.


Joseph Kruskal
(born 1928)

إنّ مشكلة إيجاد الشجرة الهيكلية الصغرى لبيان ما مشكلة قابلة للحل بالتأكيد. إن الحل هو وضع جميع الأشجار الهيكلية للبيان في قائمة والبحث عن أصغرها. ولكن هذا الإجراء من الصعب تحقيقه بسبب الوقت الهائل الذي يستخدمه الحاسوب في إيجاد الأشجار الهيكلية المختلفة، لأن البيان المؤلف من n عقدة يحتوي على n^{n-2} شجرة هيكلية. فاستخدام الحواسيب السريعة جداً المتوفرة في يومنا هذا، وبفحص جميع الأشجار في بيان من 100 عقدة، سيتطلب ذلك وقت أكبر من عمر الكون كله.

ففي عامي 1956 و1957 قام كل من العالمين جوزيف كروسكال J. B. Kruskal وروبرت بريم R. C. Prim بوضع خوارزمية فعالة لإنشاء شجرة هيكلية صغرى، فمهما كان البيان كبيراً فإن وقت إجراء الخوارزمية في الحاسوب قصير نسبياً.

2-4-6 خوارزمية كروسكال (Kruskal's Algorithm)

في خوارزمية كروسكال يقام بفحص جميع الأضلاع في البيان الموزون ووضعها بترتيب تصاعدي. في كل حالة يضاف الضلع المفحوص إلى ما ستصبح شجرة هيكلية صغرى مع ملاحظة أنّ إضافة هذا الضلع لا يشكل حلقة. بعد إضافة $n-1$ ضلعاً (حيث n عدد عقد البيان) فإن هذه الأضلاع مع العقد تشكل شجرة هيكلية صغرى للبيان.

خوارزمية كروسكال: يمكن كتابة هذه الخوارزمية بالشكل التالي:

ALGORITHM Kruskal's Algorithm.

procedure *Kruskal*(G: weighted connected undirected graph with n vertices)
T := empty graph
for $i := 1$ **to** $n - 1$
  e := any edge in G with smallest weight that does not form a simple circuit when added to T
  $T := T$ with e added
return T {T is a minimum spanning tree of G}

مثال (6-36):

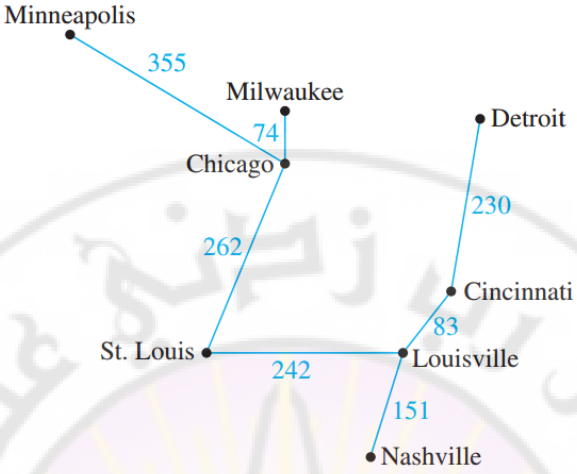
اشرح عمل خوارزمية كروسكال على البيان الموضح في الشكل (6-72) السابق.

الحل: لدينا $n = 8$ وهو عدد المدن (العقد). يمثل الجدول التالي عمل الخوارزمية.

التكرار	الضلع المعتبر	الوزن	العمل المأخوذ
1	Chicago–Milwaukee	74	إضافة
2	Louisville–Cincinnati	83	إضافة
3	Louisville–Nashville	151	إضافة
4	Cincinnati–Detroit	230	إضافة
5	St. Louis–Louisville	242	إضافة
6	St. Louis–Chicago	262	إضافة
7	Chicago–Louisville	269	عدم إضافة
8	Louisville–Detroit	306	عدم إضافة
9	Louisville–Milwaukee	348	عدم إضافة
10	Minneapolis–Chicago	355	إضافة

الجدول (6-73)

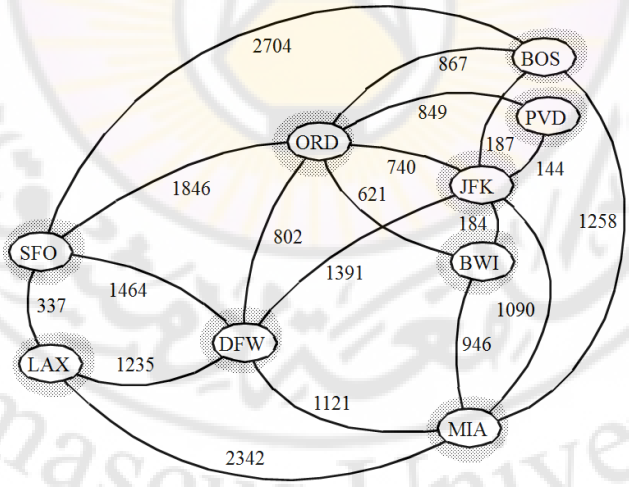
والشجرة الهيكلية الناتجة من خوارزمية كروسكال موضحة في الشكل (6-74).



الشكل (6-74)

مثال (6-36):

اشرح عمل خوارزمية كروسكال للحصول على الشجرة الهيكلية الصغرى على البيان التالي.



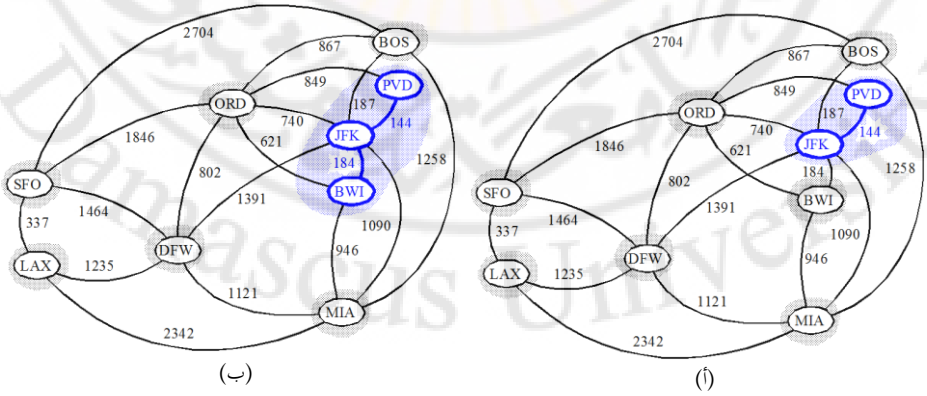
الشكل (6-75)

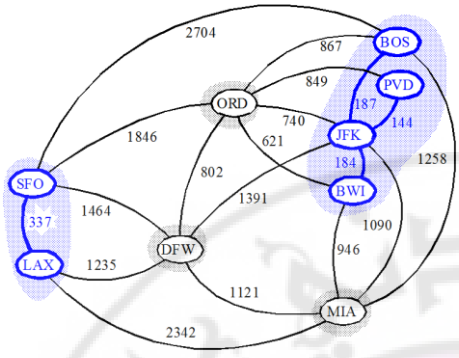
الحل: نرتب أوزان البيان تصاعدياً في جدول كما في الجدول (6-76)، ثم نصل الأضلاع في البيان بالترتيب على ألّا يشكل ذلك حلقة. نبدأ بأصغر الأوزان ثم الذي يليه ونقف عندما يصبح عدد الأضلاع الموصولة يساوي $n-1=9-1=8$.

الضلع	PVD -JFK	JFK-BWI	JFK-BOS	SFO-LAX	BWI-ORD	JFK-ORD	DFW-ORD	PVD - ORD	ORD -BOS
الوزن	144	184	187	337	621	740	802	849	867
الوصل	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	×	×
الضلع	BWI -MIA	JFK-MIA	MIA-DFW	DFW -LAX	STOP	بما أن $n=9$ فإننا نقف عندما نصل $n-1=9-1=8$ أضلاع			
الوزن	946	1090	1121	1235					
الوصل	✓	×	×	✓					

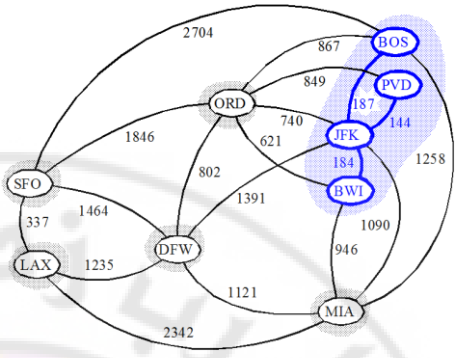
الجدول (6-76)

والشكل (6-77) يوضح الخطوات المتتالية للأضلاع الثمانية الموجودة في الجدول السابق.

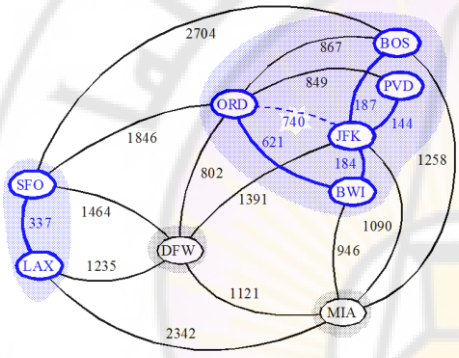



BOS
PVD
ORD
JFK
BWI
SFO
LAX
DFW
MIA
2704
867
849
187
144
740
621
1846
184
1258
802
1391
1090
946
337
1464
1235
1121
2342

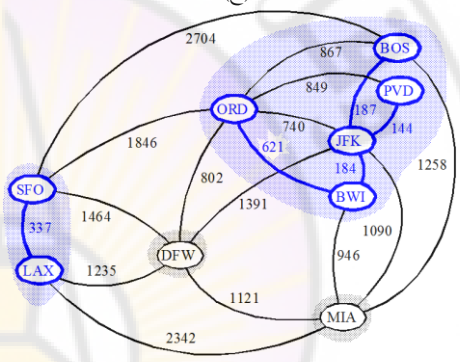
(د)


BOS
PVD
ORD
JFK
BWI
SFO
LAX
DFW
MIA
2704
867
849
187
144
740
621
1846
184
1258
802
1391
1090
946
337
1464
1235
1121
2342

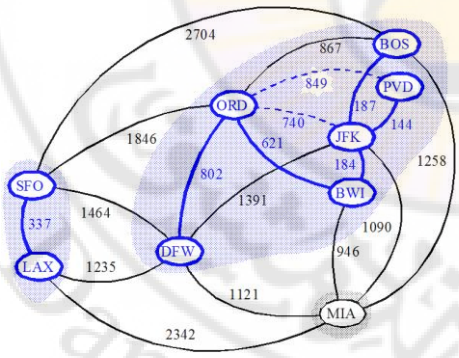
(ج)


BOS
PVD
ORD
JFK
BWI
SFO
LAX
DFW
MIA
2704
867
849
187
144
740
621
1846
184
1258
802
1391
1090
946
337
1464
1235
1121
2342

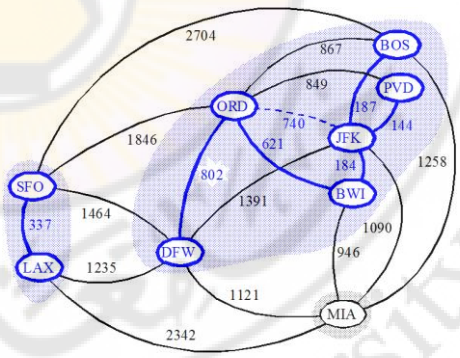
(و)


BOS
PVD
ORD
JFK
BWI
SFO
LAX
DFW
MIA
2704
867
849
187
144
740
621
1846
184
1258
802
1391
1090
946
337
1464
1235
1121
2342

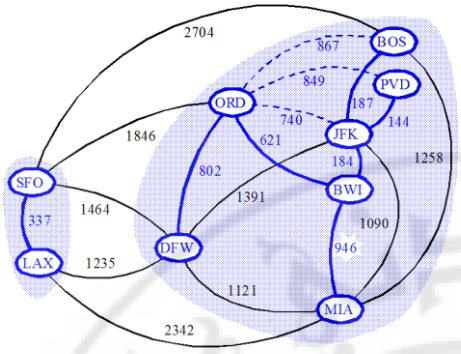
(هـ)


BOS
PVD
ORD
JFK
BWI
SFO
LAX
DFW
MIA
2704
867
849
187
144
740
621
1846
184
1258
802
1391
1090
946
337
1464
1235
1121
2342

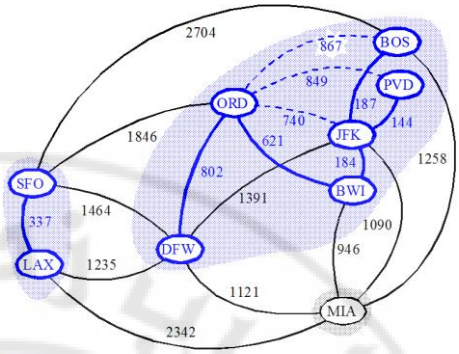
(ح)


BOS
PVD
ORD
JFK
BWI
SFO
LAX
DFW
MIA
2704
867
849
187
144
740
621
1846
184
1258
802
1391
1090
946
337
1464
1235
1121
2342

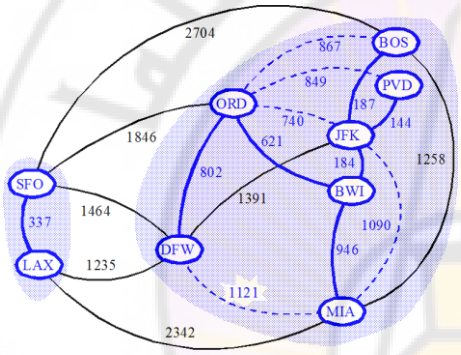
(ز)



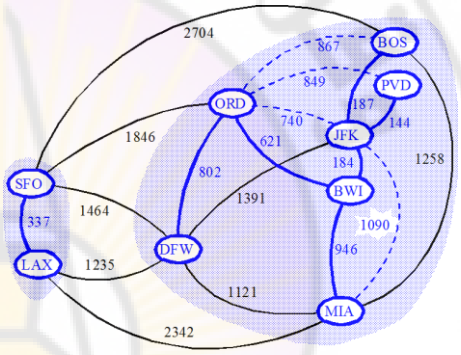
(ي)



(ط)

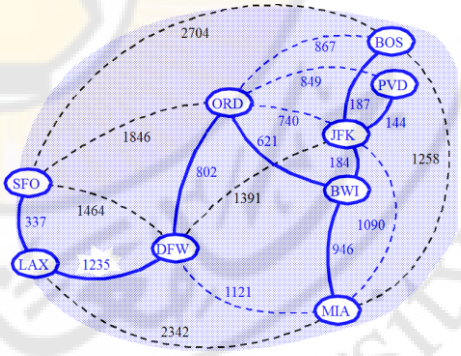


(ل)



(ك)

الآن نقف لأن عدد الأضلاع وصل إلى العدد $n-1=9-1=8$



(م)

الشكل (6-77)

نظرية (6-10) صواب خوارزمية كروسكال

عندما يكون لدينا بيان موزون متصل في مدخلات خوارزمية كروسكال فإنّ المخرجات هي شجرة هيكلية صغرى.

الإثبات: (تقبل بلا برهان)

Robert Prim (born 1921)

3-4-6 خوارزمية بريم (Prim's Algorithm)

تعمل خوارزمية بريم بشكل مختلف عن خوارزمية كروسكال. إنها تبني شجرة هيكلية صغرى T بتوسيع الارتباطات الخارجية ابتداءً من عقدة معينة. يضاف ضلع واحد فقط وعقدة واحدة فقط في كل مرحلة. الضلع الذي له أقل وزن للعقدة الموجودة حالياً في T هو الذي يوصل بالعقدة التي من خارج T، والعقدة التي في نهاية هذه الضلع حالياً هي خارج الشجرة T.

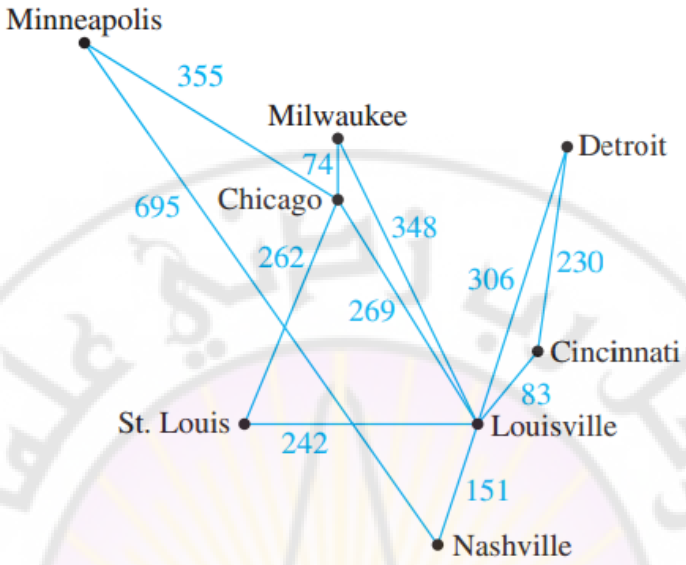
خوارزمية بريم: يمكن كتابة هذه الخوارزمية بالشكل التالي:

ALGORITHM Prim's Algorithm.

procedure *Prim*(G: weighted connected undirected graph with n vertices)
T := a minimum-weight edge
for $i := 1$ **to** $n - 2$
  e := an edge of minimum weight incident to a vertex in T and not forming a simple circuit in T if added to T
  $T := T$ with e added
return T {T is a minimum spanning tree of G}

مثال (6-37):

صف عمل خوارزمية بريم للبيان المعطى في الشكل (6-78) مستخدماً عقدة Minneapolis نقطة للبداية.



الشكل (6-78)

الحل: لنقوم بوضع مراحل خوارزمية بريم المطبقة على البيان في الجدول التالي:

الوزن	الضلع المضاف	العقدة المضافة	المرحلة
		Minneapolis	0
355	Minneapolis-Chicago	Chicago	1
74	Chicago-Milwaukee	Milwaukee	2
262	Chicago-St. Louis	St. Louis	3
242	St. Louis-Louisville	Louisville	4
83	Louisville-Cincinnati	Cincinnati	5
151	Louisville-Nashville	Nashville	6
230	Cincinnati-Detroit	Detroit	7

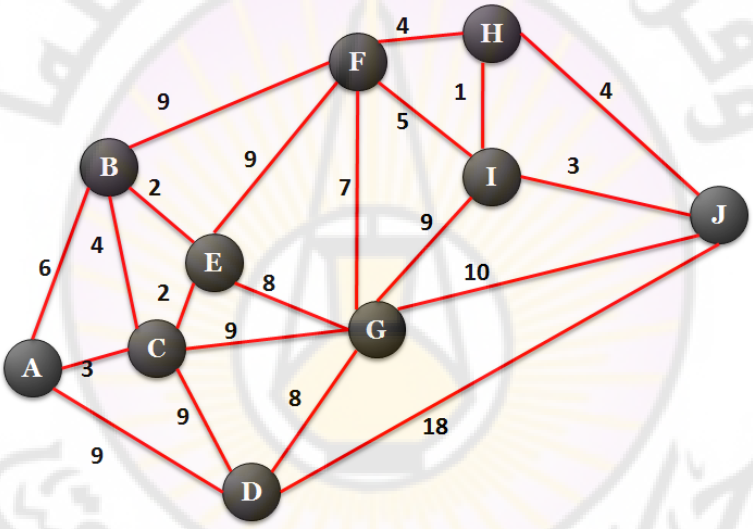
الجدول (6-79)

نلاحظ أنّ الشجرة الحاصلة هي ذاتها التي حصلنا عليها باستخدام خوارزمية كروسكال، ولكن أضيفت الأضلاع بترتيب مختلف.

ملاحظة: نلاحظ عند استخدام خوارزمية كروسكال أو خوارزمية بريم على بيان ما، فإننا قد نجد ضلعين أو أكثر لها الوزن نفسه، وهذا ما يدل على احتمال الحصول على أكثر من شجرة هيكلية صغرى لهذا البيان.

مثال (6-38):

صف عمل خوارزمية بريم للبيان المعطى في الشكل (6-80)، مستخدماً العقدة A نقطة البداية للشجرة الهيكلية الصغرى.



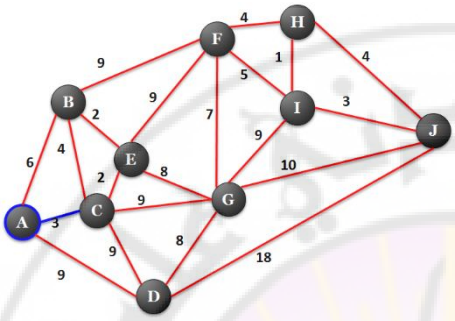
الشكل (6-80)

الحل: إنّ الجدول التالي يدل على مراحل خوارزمية بريم المتّبعة.

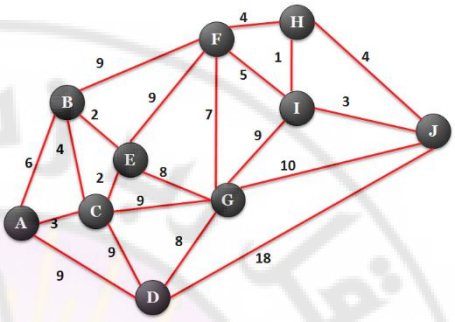
المرحلة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
العقدة	A	C	E	B	G	F	H	I	J	D
الضلع		AC	CE	EB	EG	GF	FH	HI	IJ	GD
الوزن		3	2	2	8	7	4	1	3	8

الجدول (6-81)

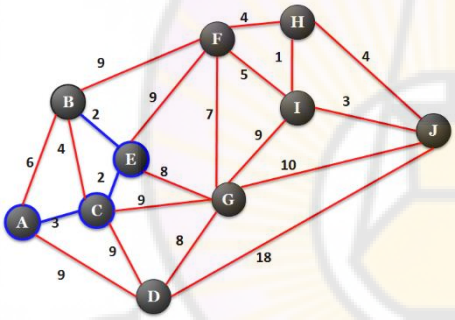
ويوضّح الشكل (6-82) كيفية الحصول على الشجرة الهيكلية الصغرى حسب المراحل السابقة الموجودة في الجدول (6-81).



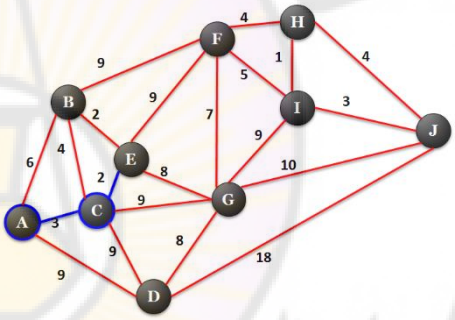
$\{A\}$



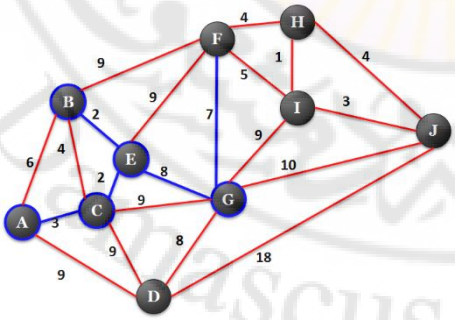
ϕ



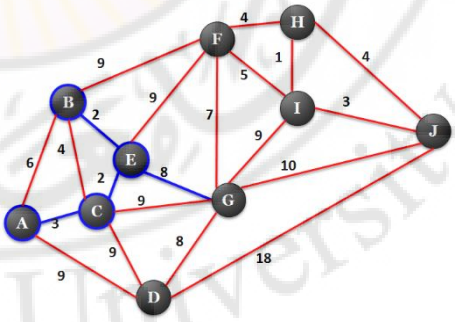
$\{A, C, E\}$



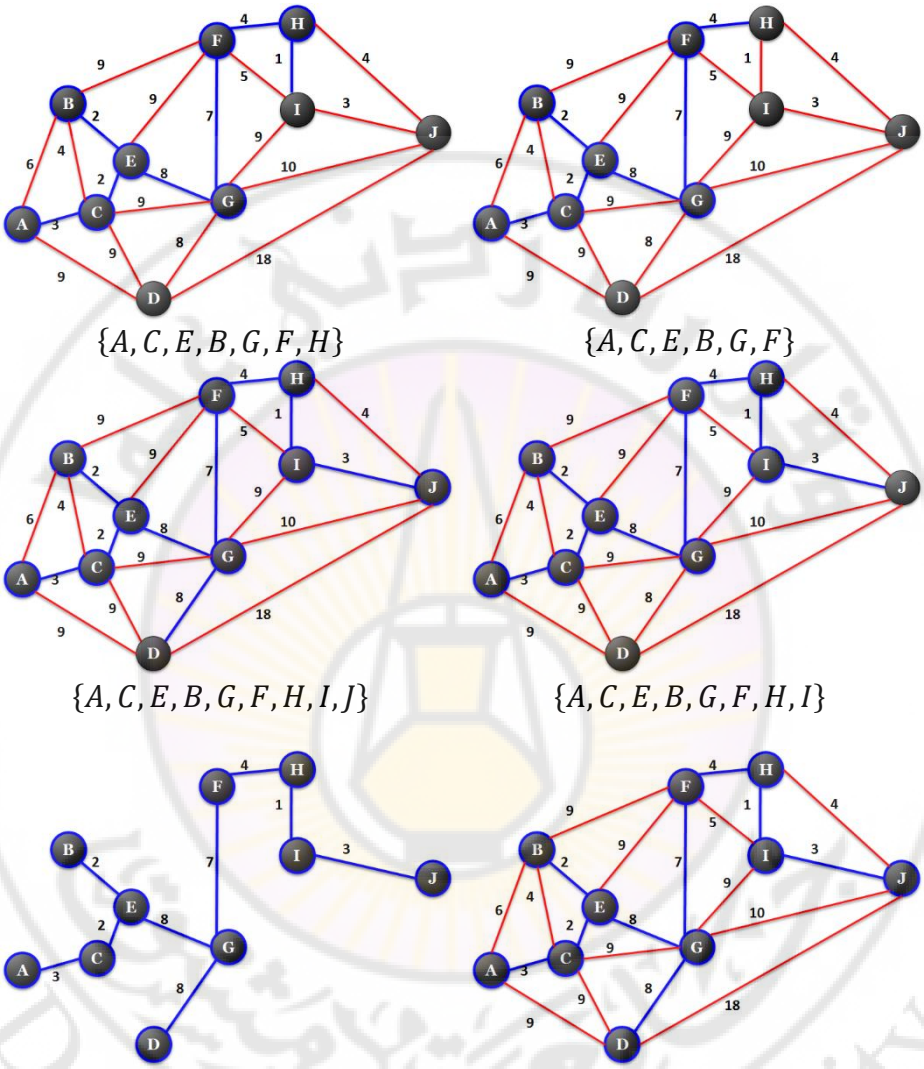
$\{A, C\}$



$\{A, C, E, B, G\}$



$\{A, C, E, B\}$



الشكل (6-82)

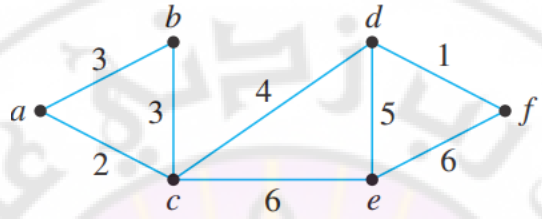
نظرية (6-11): صواب خوارزمية بريم

عندما يكون لدينا بيان موزون متصل في مدخلات خوارزمية بريم فإن المخرجات هي شجرة هيكلية صغرى.

الإثبات: (تقبل بلا برهان)

مثال (6-39):

أوجد جميع الأشجار الهيكلية الصغرى للبيان الآتي. استخدم خوارزمية كروسكال وخوارزمية بريم مبتدئاً من العقدة a. حدد ترتيب كل ضلع في تشكيل كل شجرة.



الشكل (6-83)

الحل: عند تطبيق خوارزمية كروسكال، نضيف الأضلاع، كل ضلع تلو الآخر، فنحصل على الترتيبين التاليين (أيّ شجرتين مختلفتين):

1- $\{d,f\}$ ثم $\{a,c\}$ ثم $\{a,b\}$ ثم $\{c,d\}$ ثم $\{d,e\}$

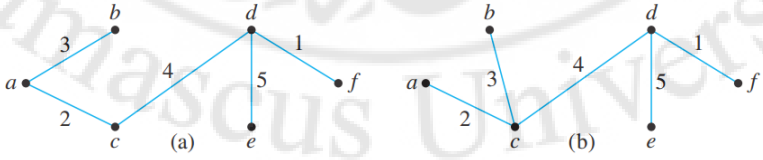
2- $\{d,f\}$ ثم $\{a,c\}$ ثم $\{b,c\}$ ثم $\{c,d\}$ ثم $\{d,e\}$

وعند تطبيق خوارزمية بريم، نضيف الأضلاع، كل ضلع تلو الآخر، فنحصل على الترتيبين التاليين (أيّ شجرتين مختلفتين):

1- $\{a,c\}$ ثم $\{a,b\}$ ثم $\{c,d\}$ ثم $\{d,f\}$ ثم $\{d,e\}$

2- $\{a,c\}$ ثم $\{b,c\}$ ثم $\{c,d\}$ ثم $\{d,f\}$ ثم $\{d,e\}$

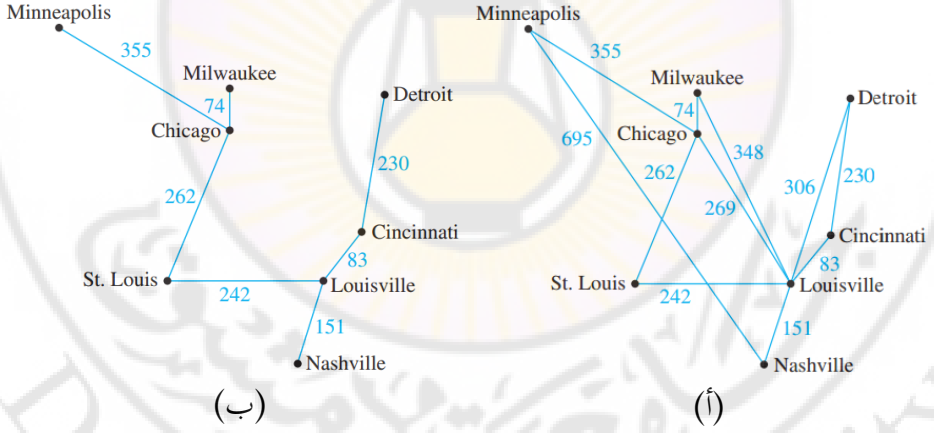
وهذا يدل أننا حصلنا على شجرتين هيكليتين صغراوين مختلفتين لهذا البيان، كما هو واضح في الشكل (6-84).



الشكل (6-84)

4-4-6 خوارزمية دايجكسترا لأقصر مسار (Dijkstra's Shortest Path Algo.)

بالرغم من أنّ الأشجار الناتجة من خوارزميتي كروسكال وبريم تمتلك الوزن الكلي الأقل مقارنة بالأشجار الهيكلية الأخرى للبيان المعطى، ولكن ذلك لا يكتشف المسافة الأقصر بين أي عقدتين من البيان. على سبيل المثال، وطبقاً للنظام الكامل للمسارات في الشكل (6-85-أ) يستطيع أحد المسافرين الطيران مباشرة من ناشفيل إلى مينيابوليس بقطع مسافة 695 ميلاً، بينما إذا استخدم الشجرة الهيكلية الصغرى الموضحة في الشكل (6-85-ب) فإن الطريق الوحيد للطيران من ناشفيل إلى مينيابوليس ماراً بـ لويسفيل وسان لويس وشيكاغو، وتكون المسافة الكلية حينها 151+242+262+355=1010 ميلاً، مع ثلاث تغييرات للطائرة.



الشكل (6-85)

Edsger W. Dijkstra
(1930–2002)

ففي عام 1959 قام رائد الحواسيب إدسغر دايجكسترا E. Dijkstra بتطوير خوارزمية لإيجاد أقصر مسار بين عقدة البداية وعقدة النهاية في بيان موزون في حالة كانت جميع الأوزان موجبة. إن هذه الخوارزمية مشابهة لحد ما لخوارزمية بريم في اختيار عقدة البداية a، وإضافة العقد والأضلاع، واحدٍ تلو الآخر، حتى إنشاء الشجرة T. على أية حال فهي مختلفة عن خوارزمية بريم في اختيار العقدة المضافة، والتي تؤكد من أجل أيّ عقدة v أن طول المسار من a إلى v هو أقصر ما يمكن.

في بداية تنفيذ الخوارزمية، كل عقدة u من G معطاة تعلَّم بـ $L(u)$، والذي يدل على أفضل تقدير لطول أقصر مسار من a إلى u. إن $L(a)$ بدايةً يساوي الصفر (0) لأن أقصر مسار من a إلى a يساوي الصفر، وبما أنه لا توجد معلومات مسبقة عن طول أقصر مسار من a إلى أيّ عقدة أخرى من G، فالعلامة $L(u)$ تعطى القيمة ∞ لكل عقدة u غير a، والتي هي أكبر من مجموع أوزان أضلاع البيان G كلها. ومع الإجراء التنفيذي للخوارزمية فإن قيمة $L(u)$ تتغير، في النهاية نحصل على القيمة الفعلية لأقصر مسار من a إلى u في G.

بما أن الشجرة T منشأة من العقدة a، في كل مرحلة من تنفيذ الخوارزمية، إنّ العقد المرشحة لتتصل بـ T هي العقد المجاورة على الأقل لعقدة واحدة من T. يمكن في كلّ مرحلة من خوارزمية دايجكسترا تقسيم البيان إلى ثلاثة أجزاء: الشجرة المنشأة T، مجموعة عقد الحواف المجاورة على الأقل لعقدة واحدة من الشجرة، والعقد الباقية. العقدة المختارة هي التي تحقق طول أقصر مسار من a إليها عبر الشجرة T مقارنة بجميع عقد الحواف. إذن بعد كل إضافة لعقدة ما v إلى T، تُفحص كل "عقدة حواف" u مجاورة لـ v، وعندها يقارن عددان: القيمة الحالية لـ $L(u)$ مع القيمة $L(v) +$

$w(u,v)$، حيث $L(v)$ هو طول أقصر مسار إلى v (في T) و $w(u,v)$ هو وزن الضلع الواصل بين u و v. إذا كان:

$$L(v) + w(u,v) < L(u)$$

فإن قيمة $L(u)$ تتغير إلى $L(v) + w(u,v)$.

عندما تبدأ الخوارزمية بالعمل فإن الشجرة تحتوي فقط العقدة a ويكون $L(a) = 0$.

وعندما تنتهي الخوارزمية يكون $L(z)$ هو طول أقصر مسار من a إلى z.

إن خوارزميتي كروسكال وبريم قادرتان على إيجاد الشجرة الهيكلية الصغرى، ولكن من الصعب إيجادهما لطول أقصر مسار من عقدة إلى أخرى، وقد يحتاج ذلك إلى حساب أطوال جميع المسارات والذي يتطلب وقتاً هائلاً يصل إلى بلايين السنين، بينما خوارزمية دايجكسترا تستطيع عمل ذلك بثوانٍ قليلة.

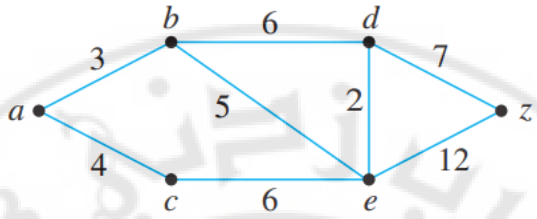
خوارزمية دايجكسترا: يمكن كتابة هذه الخوارزمية بالشكل الآتي:

ALGORITHM Dijkstra's Algorithm.

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
$L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
$u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
$S := S \cup \{u\}$
for all vertices v not in S
if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
{this adds a vertex to S with minimal label and updates the labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}

مثال (6-40):

اشرح مراحل تنفيذ خوارزمية دايجكسترا لإيجاد طول أقصر مسار من العقدة a (البداية) إلى العقدة z (النهاية) في البيان الموضح في الشكل أدناه.



الشكل (6-86)

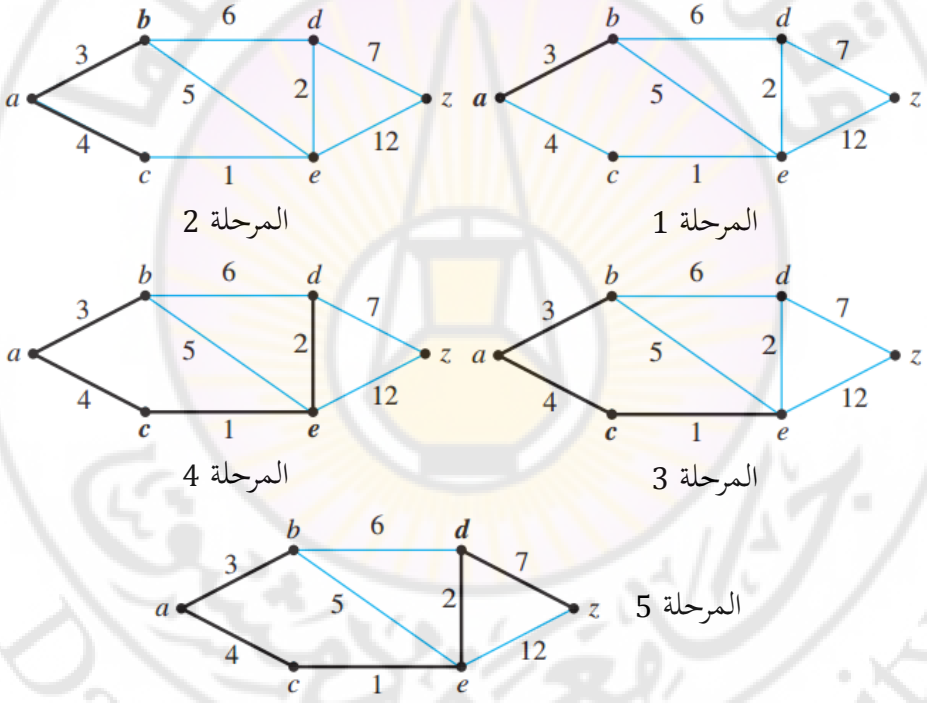
الحل: المرحلة 1: لدينا بداية: $V(T) = \{a\}, E(T) = \phi, F = \{a\}$ حيث V مجموعة عقد الشجرة T و E مجموعة أضلاع الشجرة T و F مجموعة عقد الحواف، خلال هذه المرحلة تصبح $F = \{b, c\}$ حيث $L(b) = 3, L(c) = 4$، وبما أنّ $L(b) < L(c)$ فإن b تضاف إلى $V(T)$، ويضاف الضلع $\{a, b\}$ إلى $E(T)$.

المرحلة 2: لدينا: $V(T) = \{a, b\}$، $E(T) = \{\{a, b\}\}$ ، و $F = \{c, d, e\}$ حيث $L(c) = 4$ و $L(d) = 9$ و $L(e) = 8$. بما أن $L(c) < L(d)$ و $L(c) < L(e)$ ، وبالتالي c تضاف إلى $V(T)$، ويضاف الضلع $\{a, c\}$ إلى $E(T)$.

المرحلة 3: لدينا: $V(T) = \{a, b, c\}$ ، $E(T) = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ ، و $F = \{d, e\}$ حيث $L(d) = 9$ و $L(e) = 5$. إنّ $L(e)$ تصبح 5 لأنّ ace طوله 5، وهو أقصر مسار إلى e بينما abe طوله 8. بما أنّ $L(e) < L(d)$، وبالتالي e تضاف إلى $V(T)$، ويضاف الضلع $\{c, e\}$ إلى $E(T)$.

المرحلة 4: لدينا: $V(T) = \{a, b, c, e\}$، $E(T) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, e\}\}$، وتصبح $F = \{d, z\}$ حيث $L(d) = 7$ و $L(e) = 17$. إنّ $L(d)$ تصبح 7 لأنّ $aced$ طوله 7، وهو أقصر مسار إلى d بينما abd طوله 9. بما أنّ $L(d) < L(z)$، وبالتالي d تضاف إلى $V(T)$، ويضاف الضلع $\{e, d\}$ إلى $E(T)$.

المرحلة 5: لدينا: $V(T)=\{a,b,c,e,d\}$، $E(T)=\{\{a,b\},\{a,c\},\{c,e\},\{e,d\}\}$، $F=\{z\}$ حيث $L(z)=14$. إنّ $L(z)$ تصبح 14 لأنّ $acedz$ طوله 14، وهو أقصر مسار إلى z بينما $abdz$ طوله 17. بما أنّ z العقدة الوحيدة في F فتضاف إلى $V(T)$، ويضاف الضلع $\{e,z\}$ إلى $E(T)$، وعند هذه النقطة ينتهي إجراء الخوارزمية وبالتالي المسار الأقصر من a إلى z طوله $L(z)=14$. والشكل (87-6) يوضح ذلك.



الشكل (87-6)

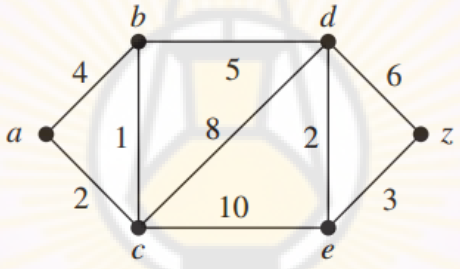
لرؤية الخطوات بشكل أسهل يمكن وضعها في جدول كما يلي:

Step	$V(T)$	$E(T)$	F	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
0	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	**0**	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$	0	**3**	4	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	$\{\{a, b\}\}$	$\{c, d, e\}$	0	3	**4**	9	8	∞
3	$\{a, b, c\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{d, e\}$	0	3	4	9	**5**	∞
4	$\{a, b, c, e\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, e\}\}$	$\{d, z\}$	0	3	4	**7**	5	17
5	$\{a, b, c, e, d\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}\}$	$\{z\}$	0	3	4	7	5	**14**
6	$\{a, b, c, e, d, z\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{e, z\}\}$							

الجدول (6-88)

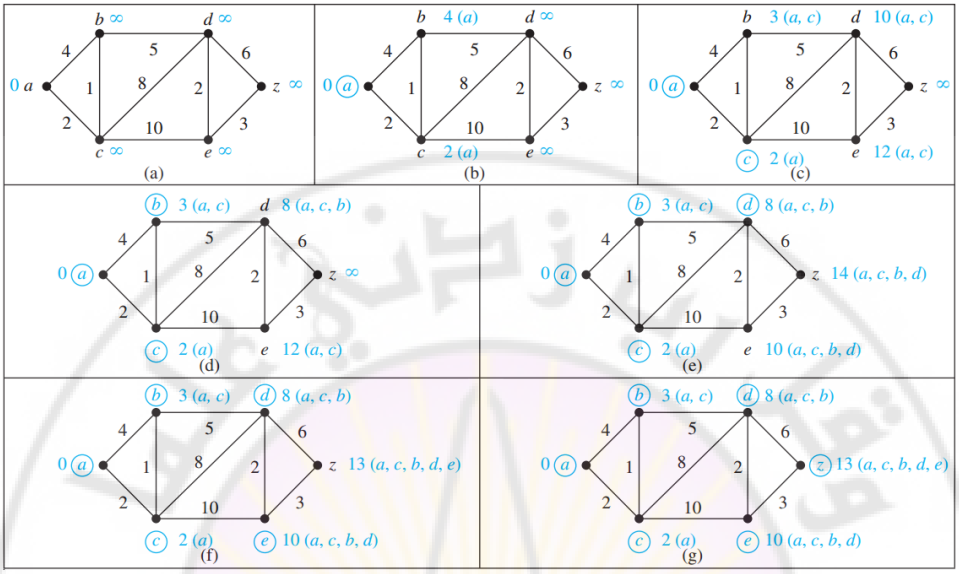
مثال (6-41):

استخدم خوارزمية دايجكسترا لإيجاد طول أقصر مسار بين العقدتين a وz في البيان الموزون الموضح في الشكل (6-89).



الشكل (6-89)

الحل: إن مراحل تنفيذ خوارزمية دايجكسترا لإيجاد طول أقصر مسار من العقدة a إلى العقدة z يوضحها الشكل (6-90).



الشكل (6-90): إيجاد طول أقصر مسار.

وبالتالي يكون طول أقصر مسار من العقدة a إلى العقدة z يساوي 13 والمسار هو: a, c, b, d, e, z.

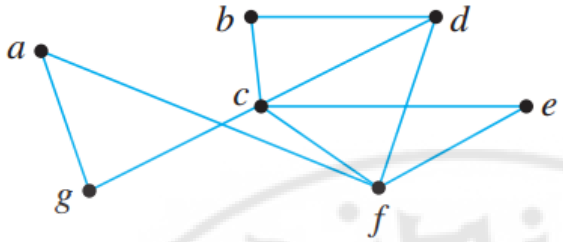
نظرية (6-12) صواب خوارزمية دايجكسترا

عندما يكون لدينا بيان متصل بأوزان موجبة لأجل أي ضلع في مدخلات خوارزمية دايجكسترا مبتدئة بالعقدة a ومنتهية بالعقدة z، فإن المخرجات هي طول أقصر مسار من العقدة a إلى العقدة z.

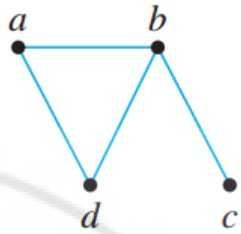
الإثبات: (تقبل بلا برهان)

تمارين غير محلولة

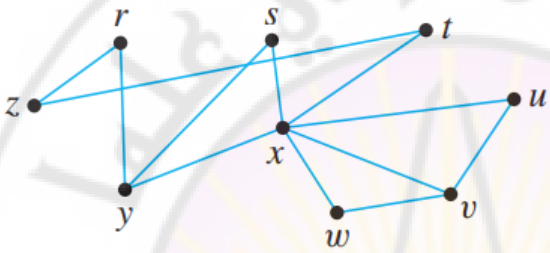
1- أوجد الأشجار الهيكلية الممكنة لكل بيان من البيانات الآتية:



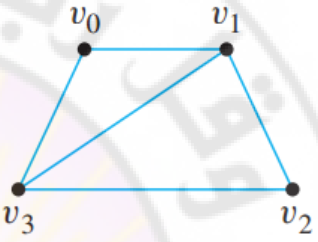
(ب)



(أ)

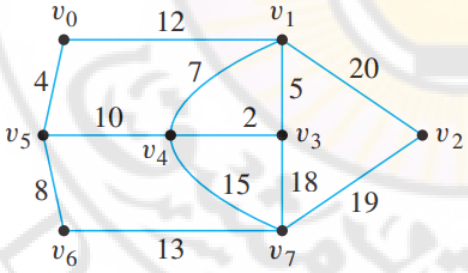


(د)

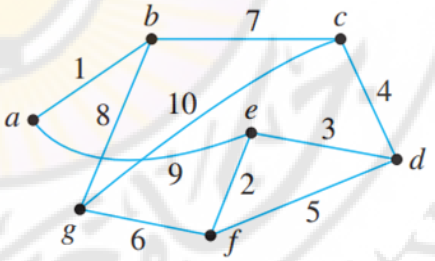


(ج)

2- استخدم خوارزمية كروسكال لإيجاد شجرة هيكلية صغرى لكل من البيانات الآتية. حدد ترتيب الأضلاع المضافة إلى أيّ شجرة.



(ب)



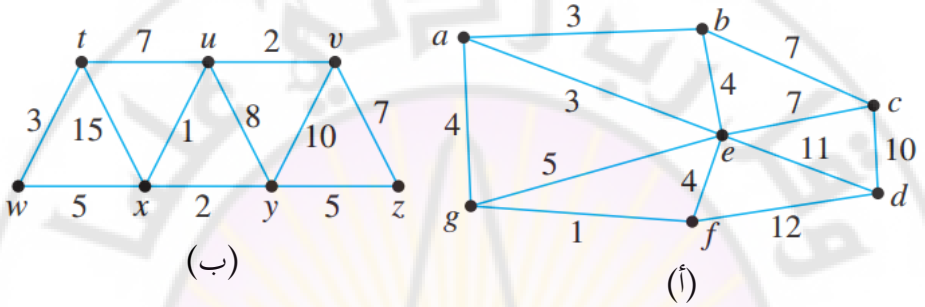
(أ)

3- استخدم خوارزمية بريم مبتدئاً بالعقدة a أو v_0 لإيجاد شجرة هيكلية صغرى لكل من البيانات في التمرين السابق. حدد ترتيب الأضلاع المضافة إلى أيّ شجرة.

4- من أجل البيانات الآتية، أوجد جميع الأشجار الهيكلية الصغرى وحدد ترتيب الأضلاع المضافة إلى أيّ شجرة، مستخدماً:

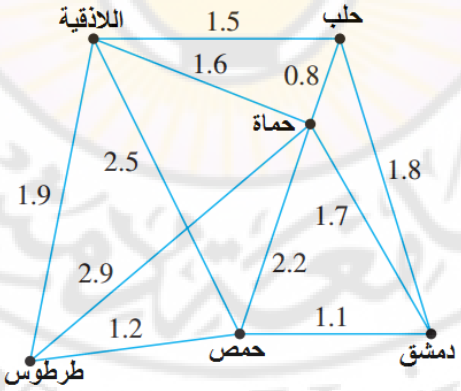
(a) خوارزمية كروسكال.

(b) خوارزمية بريم مبتدئاً من العقدة a أو t.



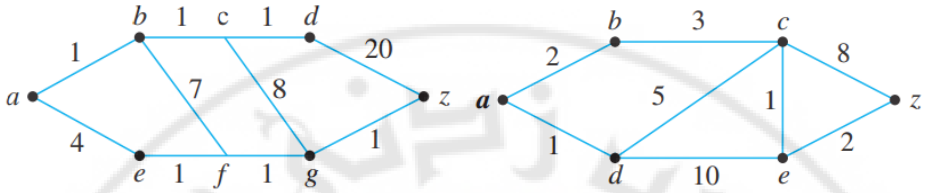
(أ) (ب)

5- يراد بناء خطوط أنابيب بين ست مدن. إن كلفة بناء كل وصلة (بمئات ملايين اليورو) تعتمد على المسافة والتضاريس والمبينة في البيان الموزون الآتي. أوجد نظام خطوط الأنابيب الذي يصل بين جميع المدن وبأقل تكلفة كلية ممكنة.

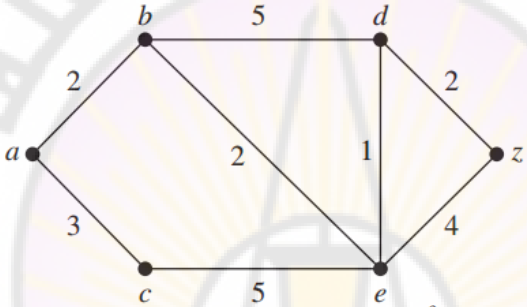


6- استخدم خوارزمية دايجكسترا على نظام خطوط الطيران الموضحة في الشكل (6-72) لإيجاد أقصر مسافة من ناشيفيل إلى مينيابوليس. رتب ذلك في جدول.

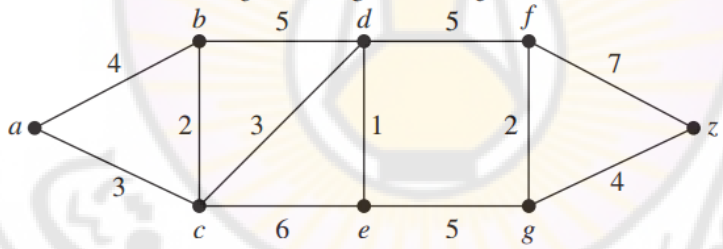
7- استخدم خوارزمية دايجكسترا لإيجاد طول أقصر مسار من a إلى z لكل بيان من البيانات الآتية أدناه. رتب ذلك في جدول لكل حالة مبيناً سلوك الخوارزمية.



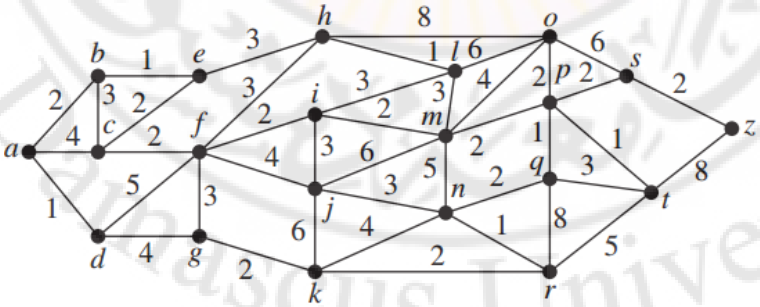
(ب) (أ)



(ج)



(د)



(هـ)

ثم أوجد طول أقصر مسار بين أزواج العقد الآتية في البيان الموزون (د):

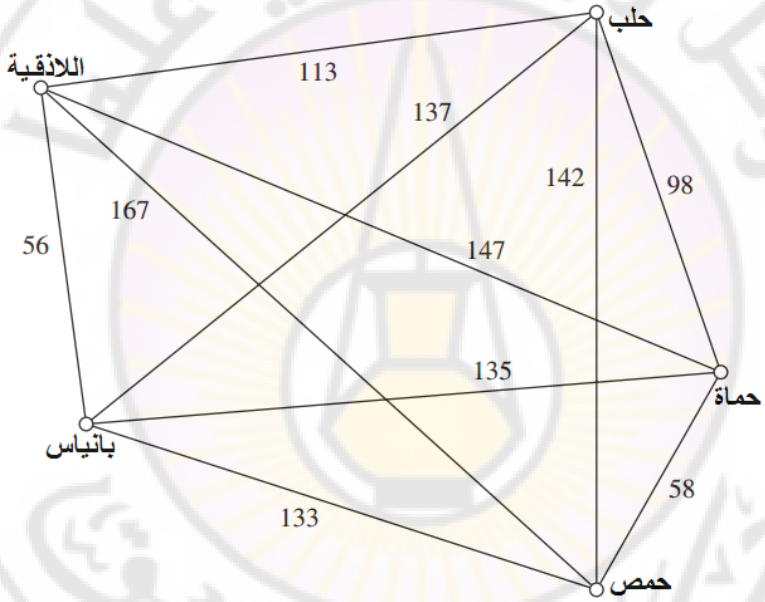
(a) بين a و d.

(b) بين a و f.

(c) بين c و f.

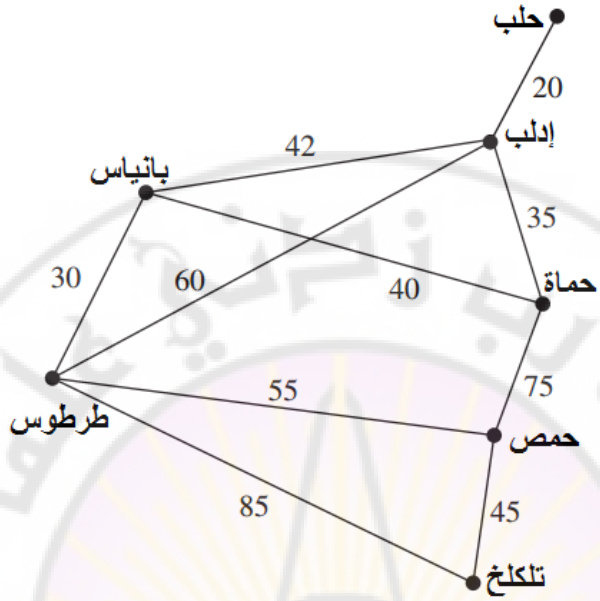
(d) بين b و z.

8- استخدم كل من خوارزمية كروسكال وبريم لإيجاد شجرة هيكلية صغرى للبيانات الآتية أدناه ثم استخدم خوارزمية دايجكسترا لإيجاد طول أقصر مسار من مدينة بانياس إلى أيّ مدينة أخرى. رتب ذلك في جدول لكل حالة مبيناً سلوك كل خوارزمية.



(أ)

Damascus University


حلب
20
إدلب
42
بانياس
35
30
60
40
حماة
55
75
طرطوس
حمص
85
45
تلكلخ

(ب)

الفصل السابع

7- اللغات، والقواعد، واللغات النظامية والتعابير النظامية

7-1 أشرطة المحارف (Strings)

يُعرّف شريط المحارف بأنه متتالية منتهية من صفر أو أكثر من العناصر المتوضعة خلف بعضها بشكل متجاور. إنّ العناصر التي تشكل شريط المحارف تؤخذ من مجموعة منتهية ندعوها بالأبجدية. إذا كانت A هي أبجدية فإننا نقول عن شريط المحارف من عناصر A إنه شريط محارف (محرفي) على A. يطلق على شريط المحارف أسماء أخرى مثل السلسلة أو الكلمة (word).

مثال (7-1):

لنأخذ بعضاً من الأشرطة المحرفية على الأبجدية $\{a, b, c\}$

$$a, ba, bba, aacabb, aabcabb$$

يدعى الشريط المحرفي غير الحاوي على عناصر بالشريط المحرفي الخالي، ونرمز لهذا الشريط بحرف يوناني كبير (Lambda): Λ.

يمثل عدد العناصر الداخلة في شريط محرفي S طول هذا الشريط. سنرمز لهذا الطول بالرمز $|S|$.

مثال (7-2):

إنّ طول الشريط المحرفي الخالي يساوي الصفر، أي إن: $|\Lambda| = 0$.

إنّ طول الشريط المحرفي $S = aabcabb$ يساوي 7، أي $|aabcabb| = 7$ على الأبجدية $\{a, b, c\}$.

ضم أشرطة المحارف (Concatenation):

إنّ عملية وضع شريطين محرفيين s وt الواحد تلو الآخر، هي عملية تشكيل شريط محرفي جديد st تدعى بعملية الضم.

مثال (7-3):

إذا كانت $aaab$ وba شرائط محرفية على الأبجدية $\{a,b\}$، فإنّ ضم $aaab$ وba هو الشريط الجديد:

$$aaabba$$

تجدر الإشارة إلى أنه عند وجود الشريط المحرفي الخالي كجزء من شريط محرفي آخر، فإنه لن يؤثر بجديد على هذا الشريط، أيّ إذا كان S شريطاً محرفياً، فإنّ:

$$S\Lambda = \Lambda S = S$$

تستخدم الأشرطة المحرفية في الاتصالات من أجل تمثيل المعلومات: في البرامج الحاسوبية، وكتابة النصوص في كل اللغات، والترميز المستخدم في المنطق، والرياضيات وكذلك العلوم الأخرى. كما أنّ هنالك ارتباطاً وثيقاً بين الأشرطة المحرفية والقوائم فكلاهما يعرّف على أنه متتالية منتهية من العناصر. وهذا الارتباط مهم جداً في علوم الحاسب، لأنّ البرامج الحاسوبية ينبغي أن تكون قادرة على تمييز أنواع محددة من الأشرطة المحرفية. وهذا يعني أنّ يفكك الشريط المحرفي إلى عناصر فردية كل على حدة، والتي يمكن أن تمثل من خلال قائمة.

مثال (7-4):

الشريط المحرفي $aaacbba$ يمكن أن يمثل من خلال القائمة $< a,a,a,c,b,b,a >$. وبشكل مشابه، فإنّ الشريط المحرفي الخالي Λ يمثل من خلال قائمة خالية من الشكل $< >$.

2-7 اللغات (Languages)

إنّ اللغة مجموعة من الأشرطة المحرفية. إذا كانت A أبجدية، فإنّ اللغة على A هي مجموعة من الأشرطة المحرفية على A. نرمز لمجموعة كل الأشرطة المحرفية الممكنة على A بالرمز A^*. لذا فإنّ أي لغة على A هي مجموعة جزئية من A^*.

مثال (7-5):

إنّ المثال الأبسط على اللغات على الأبجدية A هي المجموعات: $\phi, \{\Lambda\}, A, A^*$ وهي لغات.

مثال (7-6):

إذا كانت $A = \{a\}$ أبجدية، فإنّ اللغات الأبسط على A هي اللغات الأربع الآتية:

$$\phi, \{\Lambda\}, \{a\}, \{\Lambda, a, aa, aaa, \cdots\}$$

ملاحظة: من أجل أي عدد طبيعي n، فإنه يرمز لضم الشريط المحرفي S مع نفسه n مرة بالرمز S^n.

مثال (7-7):

نعرض لبعض حالات ضم شريط المحارف S مع نفسه إنّ: $S^0 = \Lambda$ و$S^1 = S$، كما إنّ:

$$S^2 = SS, \qquad S^3 = SSS$$

مثال (7-8):

يسمح الترميز الأسي لنا بتمثيل بعض اللغات في صورة واضحة. نعرض هنا بعض الأمثلة على لغات من خلال استخدام الترميز الأسي:

$$\{a^n : n \in \mathbb{N}\} = \{\Lambda, a, aa, aaa, \cdots\}$$
$$\{ab^n : n \in \mathbb{N}\} = \{a, ab, abb, abbb, \cdots\}$$
$$\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} = \{\Lambda, ab, aabb, aaabbb, \cdots\}$$
$$\{(ab)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{\Lambda, ab, abab, ababab, \cdots\}$$

مثال (7-9):

نعرف رمز العدد على أنه العدد المكتوب. وبلغة الأشرطة المحرفية، يمكن أن نقول إنّ رمز العدد هو شريط محرفي غير خالٍ من الرموز والتي تمثل العدد. من المألوف للكثير من أنظمة توصيف الأعداد الثلاثة الآتية:

رموز الأعداد الرومانية: وهي تمثل مجموعة من الأعداد الصحيحة غير السالبة باستخدام الأبجدية: $\{I, V, X, L, C, D, M\}$

واصفات الأعداد العشرية: وهي تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية باستخدام الأبجدية:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

واصفات الأعداد الثنائية: وهي تمثل الأعداد الطبيعية باستخدام الأبجدية: $\{0, 1\}$.

مثال (7-10):

إنّ واصف العدد الروماني MDCLXVI، هو العدد العشري 1666، كما أنّ واصف العدد الثنائي 11010000010 يمثل ذات العدد.

7-3 جداء اللغات

بما أنّ اللغات مجموعات من الأشرطة المحرفية التي تركب بواسطة عمليات المجموعة المألوفة مثل: الاتحاد، والتقاطع، والفرق والإتمام. لكن هنالك أسلوب آخر لتركيب اللغات.

يمكن أن نركب اللغتين L وM للحصول على مجموعة كل أشرطة المحارف في L المضمومة بأشرطة محارف M. تدعى اللغة الجديدة المتشكلة جداء L وM ونرمز لذلك بالرمز LM. نقوم الآن بصياغة المفهوم السابق من خلال التعريف الدقيق الآتي:

إنّ جداء اللغتين L وM هو اللغة: $LM = \{st : s \in L \text{ and } t \in M\}$.

مثال (7-11):

إذا كانت $L = \{ab, ac\}$ و$M = \{a, bc, abc\}$ لغتين، فإنّ جداؤهما LM هو اللغة:

$$LM = \{aba, abbc, ababc, aca, acbc, acabc\}$$

ملاحظة:

من السهل أن نرى من تعريف الجداء، أنّ الخواص الآتية تتحقق من أجل أية لغة L:

$$L\{\Lambda\} = \{\Lambda\}L = L\,, \qquad L\phi = \phi L = L$$

كما أنّ جداء اللغات هو عملية تجميعية، فإذا كانت L, M, N لغات، فإنّ:

$$L(MN) = (LM)N$$

لذلك يمكن أن نكتب فيما بعد الجداء دون أن نستخدم الأقواس. كما أنّه من السهل جداً أن نبيّن أنّ الجداء ليس تبديلياً، أي إنّ:

$$LM \neq ML$$

ملاحظة: من أجل أي عدد طبيعي n، فإنّ جداء اللغة L مع نفسها n مرة والذي نرمز له بالرمز L^n، هو اللغة: $L^n = \{S_1 S_2 \cdots S_n : S_k \in L, \forall k\}$.

والحالة الخاصة عندما $n = 0$، تعرف على النحو التالي: $L^0 = \{\Lambda\}$.

مثال (7-12):

سنقوم بحساب بعض جداءات اللغة $L = \{a, bb\}$ مع نفسها

$$L^0 = \{\Lambda\}, \qquad L^1 = L = \{a, bb\}, \qquad L^2 = LL = \{aa, abb, bba, bbbb\}$$
$$L^3 = LL^2 = \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}$$

4–7 غلاقة اللغة (Language closure)

إذا كانت L لغة، فإنّ غلاقة L هي مجموعة كل الأشرطة المحرفية الممكنة الناتجة عن ضم الأشرطة المحرفية في L. بكلمات أخرى لدينا:

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \cdots \cup L^n \cup \cdots$$

لذا، فإنّ $x \in L^*$ إذا وفقط إذا كان $x \in L^n$. لأجل ذلك، يكون لدينا x منتمياً إلى L^* إذا وفقط إذا كان $x = \Lambda$ أو $x = \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_n$ وذلك من أجل $n \geq k$، و ℓ_k ينتمي إلى L من أجل $1 \leq k \leq n$.

تعرف الغلاقة الموجبة للغة L، التي يرمز لها بالرمز L^+ على النحو الآتي:

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots \cup \cdots$$

ينتج من التعريف، أنّ $L^* = L^+ \cup \{\Lambda\}$. وليس من الضروري أن تكون $L^+ = L^* - \{\Lambda\}$ صحيحة.

مثال (7-13):

إذا كانت $L = \{\Lambda, a\}$، فإنّ $L^+ = L^*$.

سوف نعتبر أن أية أبجدية A هي بحد ذاتها لغة وغلاقتها A^* وفقاً للتعريف الأساسي للغلاقة، وهي مجموعة كل الأشرطة المحرفية الممكنة على A. تعطي الخواص الآتية بعض الحقائق الأساسية على الغلاقة واللغات.

خواص الغلاقة:

1- $\{\Lambda\}^* = \phi^* = \{\Lambda\}$

2- تنتمي Λ إلى L إذا وفقط إذا كانت $L^+ = L^*$.

3- $L^* = L^*L^* = (L^*)^*$

4- $(L^*M^*)^* = (L^* \cup M^*)^* = (L \cup M)^*$

5- $L(ML)^* = (LM)^*L$

يمكن إثبات صحة هذه الخواص الخمس حيث سنقوم بإثبات الخاصة 5 منها ونترك الأُخرى تمارين للقارىء.

من أجل إثبات 5 سوف نقوم باختبار بنية الشريط المحرفي الكيفي x المنتمي إلى الطرف الأيسر، أي $x \in L(ML)^*$ وبما أنّ $L(ML)^*$ هو جداء L مع $(ML)^*$، فإننا نستطيع أن نكتب أنّ $x = \ell y$ حيث $\ell \in L$ و $y \in (ML)^n$ وذلك من أجل عدد ما مثل n. إذا كانت: $n = 0$، فإنّ $y = \Lambda$ ويكون لدينا بالتالي: $x = \ell y = \ell\Lambda = \ell$ وهذا يعني أنّ: $x \in L$.

إذا كانت $n > 0$، فإنّ $y = w_1 w_2 \cdots w_n$، حيث w_k ينتمي إلى ML من أجل $1 \le k \le n$. وهذا يمكننا من كتابة كل w_k بالشكل $w_k = m_k \ell_k$ و ℓ_k ينتمي إلى L. والآن نقوم بجمع ما سبق من حقائق ونكتب x على شكل أشرطة محرفية موصولة من L و M. ونجد أنّ:

$$x = \ell y = \ell w_1 w_2 \cdots w_n = \ell m_1 \ell_1 m_2 \ell_2 \cdots m_n \ell_n$$

وبما أننا قادرين على تجميع الأشرطة المحرفية من خلال الأقواس وبالشكل الذي نريده، فإننا نستطيع وضع الأشياء خلف بعضها في الترتيب الآتي:

$$x = \ell y$$

حيث $\ell \in L$ و $y \in (ML)^n$

$$x = \ell(w_1 w_2 \cdots w_n)$$

حيث $\ell \in L$ وكل w_k تنتمي إلى ML

$$x = \ell(m_1 \ell_1 m_2 \ell_2 \cdots m_n \ell_n)$$

حيث $\ell \in L$ وكل ℓ_k تنتمي إلى L و m_k تنتمي إلى M

$$x = \ell(m_1 \ell_1 m_2 \ell_2 \cdots m_n)\ell_n$$

حيث $\ell \in L$ وكل ℓ_k تنتمي إلى L و m_k من M

$$x = (z_1 z_2 \cdots z_n)\ell_n$$

حيث إن كل z_k من LM و ℓ_n من L

$$x = u\ell_n$$

حيث u تنتمي إلى $(LM)^*$ و ℓ_n من L

لذلك فإنّ $L(LM)^* \in x$، بالتالي: $L(ML)^* \subseteq (LM)^*L$ والحقيقة هي في الاتجاهين.

لذلك فإنّ $L(ML)^* = (LM)^*L$.

مثال (7-14):

إنّ الجداء هو أداة قيِّمة لوصف اللغات في حدود من لغات أبسط. لنفرض أننا بحاجة لوصف اللغة L المكونة من كل الأشرطة المحرفية من الشكل $a \cdot b$، حيث إنّ a و b هي واصفات لأعداد عشرية. فمثلاً الأشرطة المحرفية:

$$0.45 \quad , \quad 1.569 \quad , \quad 000.34000$$

هي عناصر من L. فإذا اعتبرنا:

$$N = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \qquad D = \{\cdot\}$$

فإننا نستطيع أن نصف اللغة L على أنها جداء حدود من D و N.

$$L = N(N)^* = DN(N)^*$$

7-5 عد الأشرطة المحرفية

نستطيع استخدام قواعد الجداء لحساب عدد الأشرطة المحرفية. توضّح الأمثلة الآتية هذا العدد.

مثال (7-15):

نفرض أننا نريد معرفة عدد الأشرطة المحرفية ذات الطول 5 على الأبجدية $A = \{a, b, c\}$. إنّ كل شريط له الطول 5 يمكن أن نعتبره متعدداً من القياس 5. فعلى سبيل المثال $abccb$ يمثل كمتعدد من الشكل (a, b, c, c, b). لذلك فإنّ عدد الأشرطة المحرفية من الطول 5 على الأبجدية A، يساوي إلى عدد المتنوعات من القياس 5 على المجموعة A والتي تعطي من خلال قاعدة الجداء العدد:

$$|A^5| = |A|^5 = 3^5 = 243$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد كل الأشرطة المحرفية الممكنة من الطول 2 على المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$.

2- لتكن $L = \{\Lambda, abb, b\}$ و $M = \{bba, ab, a\}$. أوجد كلاً من التعابير اللغوية الآتية:

$$LM\,, \quad ML\,, \quad L^0\,, \quad L^1\,, \quad L^2$$

3- حل كلاً من المعادلات اللغوية الآتية، من أجل اللغة المجهولة:

أ – $\{\Lambda, a, ab\}L = \{b, ab, ba, aba, abb, abba\}$

ب – $L\{a, b\} = \{a, baa, b, bab\}$

جـ – $\{a, aa, ab\}L = \{ab, aab, abb, aa, aaa, aba\}$

د – $L\{\Lambda, a\} = \{\Lambda, a, b, ab, ba, aba\}$

هـ – $\{a, b\}L = \{a, b, aba, bba\}$

و – $L\{b, \Lambda, ab\} = \{abb, ab, abab, bab, b, bb\}$

4- لتكن L وM لغاتٍ ما. صف من أجل كل من اللغات الآتية البنية العامة للشريط المحرفي x من خلال كتابته على أنه أشرطة محرفية موصولة والتي هي في L أو M.

$$LML\,, \qquad LM^*\,, \qquad (L\cup M)^*\,, \qquad (L\cap M)^*\,, \qquad L^*M^*\,, \qquad (LM)^*$$

5- قم بمحاولة وصف كل من اللغات الآتية بطريقة ما من الطرق:

$$\{a,b\}^*\cap\{b,c\}^*, \qquad \{a,b\}^*-\{b\}^*\,, \qquad \{a,b,c\}^*-\{a,b\}^*$$

6-7 الأشرطة المحرفية واللغات المعرفة استقرائياً

غالباً ما نقوم بتعريف شريط من الأشياء بشكل استقرائي دون التفكير في هذه الأشياء. وهذا الأمر قد تعاملنا معه من خلال البنى الجبرية وتعريف قوانين التشكيل عليها سواءٌ أكانت هذه البنى عددية أم غير عددية. فإذا كانت A وB تمثل تعابير جبرية، فإنّ:

$$\frac{A}{B}\,, \qquad AB\,, \qquad A-B\,, \qquad A+B\,, \qquad (A)$$

هي أيضاً مجموعة تعابير جبرية. لذلك فإنّ مجموعة التعابير الجبرية هي مجموعة من الأشرطة المحرفية. فإذا أخذت كل من x وy كمتحولات، فإنّ الأشرطة المحرفية الآتية هي تعابير جبرية:

$$x,\ y,\ 30,\ 30x,\ x+y,\ 5x+4y,\ (x+y)(2xy),\ \frac{3x}{4}$$

إذا أردنا أن نجعل التعريف أكثر دقة، علينا أن نقوم بتحديد القاعدة والأجزاء الاستقرائية. لنفرض أنّ E ترمز لمجموعة التعابير الجبرية كما تم وصفها، فإنه لدينا التعريف الاستقرائي الآتي للمجموعة E:

الأساس: إذا كان x عدداً أومتغيراً، فإنّ x ينتمي إلى E.

الاستقراء: إذا كانت A وB تنتميان إلى E، فإنّ:

$$\frac{A}{B}\,, \qquad AB\,, \qquad A-B\,, \qquad A+B\,, \qquad (A)$$

تنتمي جميعها إلى E.

سوف نتعامل الآن مع A على أنها أبجدية، وسنرمز لمجموعة كل الأشرطة المحرفية على A بالرمز A^*. إن لهذه المجموعة التعريف الاستقرائي الآتي:

الأساس: إن Λ تنتمي إلى A^*.

الاستقراء: إذا كانت s من A^* وكان a من A، فإنّ as ينتمي إلى A^*.

يجب أن نلاحظ أنه عندما نضع شريطين محرفيين الواحد تلو الآخر بشكل متجاور لتشكيل شريط محرفي جديد فإننا نقوم بضم هذين الشريطين. لذا فإنه ومن وجهة نظر حاسوبية، فإنّ الضم يعتبر العملية المستخدمة لإنشاء أشرطة محرفية جديدة.

لنتذكر تعريف اللغة على أنها مجموعة من الأشرطة المحرفية. فإذا كانت A أبجدية، فإنّ أية لغة على A هي مجموعة جزئية من A^*. والكثير من اللغات يمكن تعريفها استقرائياً. وهذا ما توضحه الأمثلة الآتية.

مثال (7-16):

سوف نعطي في هذا المثال التعريف الاستقرائي لثلاث لغات:

1- لتكن S لغة معطاة على النحو الآتي:

$$S = \{a, ab, abb, abbb, \cdots\} = \{ab^n : n \in \mathbb{N}\}$$

يمكن ملاحظة أنّ الأشرطة المحرفية في S تتكون من الحرف a متبوعاً بصفر أو أكثر من الأحرف b. لكن a هو حرف في S أيضاً، وإذا كان x شريط محرفي في S فإنّ xb هو شريط محرفي في S أيضاً. إنّ هذه المناقشة تمكننا من وضع التعريف الاستقرائي للغة S.

الأساس: a ينتمي إلى S.

الاستقراء: إذا كان x من S، فإنّ xb ينتمي إلى S.

2- لتكن S لغة معطاة على النحو الآتي:

$$S = \{\Lambda, ab, aabb, aaabbb, \cdots\} = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

يمكن أن نرى أنّ الأشرطة المحرفية في S تتكون: من عدد من الأحرف a يتبعها العدد نفسه من الأحرف. لكن أيضاً الشريط Λ الذي يمثل الشريط المحرفي الخالي هو شريط ينتمي إلى S. وإذا كان x شريط في S فإنّ axb هو أيضاً شريط في S. إنّ هذه المناقشة تعطينا إمكانية تعريف S على النحو الاستقرائي الآتي:

الأساس: إن Λ تنتمي إلى S.

الاستقراء: إذا كان x من S، فإنّ axb ينتمي إلى S.

يتبين أنّ بعض توابع الشرائط المحرفية يمكن أن تعرف عامودياً .لإيضاح هذه الفكرة، نفرض أننا نريد أن نحسب متمم أي شريط محرفي على الأبجدية $\{a,b\}$.

مثال (7-17):

إنّ متمم الشريط المحرفي $bbab$ هو الشريط $aaba$.

مثال (7-18):

ليكن التابع $f(x)$ يمثل متمم الشريط x. لإيجاد التعريف العامودي للتابع f سوف نبدأ بملاحظة أنّ الشريط الكيفي على $\{a,b\}$ هو Λ أو من الشكل ay أو by وذلك من أجل شريط ما y، لذا فإننا سنعرف نتيجة f بتطبيقه على مختلف الأشكال على النحو الآتي:

$$f(\Lambda)=\Lambda, \qquad f(ax)=b\,f(x), \qquad f(bx)=a\,f(x)$$

كتطبيق على ذلك، سوف نوجد $f(bbab)$:

$$f(bbab)=af(bab)=aaf(ab)=aabf(b)=aaba$$

مثال (7-19):

نتطرق في هذا المثال إلى مسألة إيجاد البادئة المشتركة لشريطين محرفيين. إنّ الشريط p هو بادئة الشريط x، إذا كان من الممكن كتابة x بالشكل $x=ps$ من أجل s شريط محرفي ما. وكمثال على ذلك إنّ aab هو البادئة المشتركة للشريطين $aabbab$ و $aababb$.

ليكن $f(x,y)$ التابع الذي يمثل البادئة المشتركة للشريطين x و y على $\{a,b\}$ فهو إما الشريط الخالي Λ أو إن له الشكل as أو bs من أجل شريط كيفي ما s. بتعبير آخر فإنّ الشرائط على $\{a,b\}$ عبارة عن مجموعة معرفة استقرائياً. لذلك فإننا نعرف $f(s,t)$ من أجل كل تركيبات s و t. وبالتالي فإنّ f يعرف بالشكل:

$$f(\Lambda,x)=\Lambda\,,\quad f(x,\Lambda)=\Lambda\,,\quad f(ax,by)=\Lambda\,,\quad f(bx,ay)=\Lambda$$
$$f(ax,ay)=af(x,y)\,,\quad f(bx,by)=bf(x,y)$$

نستطيع أن نكتب هذا التعريف من خلال عبارة if-then-else على النحو الآتي:

$f(s,t)=$ if $s=\Lambda$ or $t=\Lambda$ then Λ,
else if $s=ax$ and $t=ay$ then $af(x,y)$,
else if $s=bx$ and $t=by$ then $bf(x,y)$,
else Λ,

وسنرى كيفية استخدام التعريف لحساب $f(aabbab,aababb)$:

$$\begin{aligned}f(aabbab,aababb)&=af(abbab,ababb)\\&=aaf(bbab,babb)\\&=aabf(bab,abb)\\&=aab\Lambda\\&=aab\end{aligned}$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد التعريف الاستقرائي لكل من المجموعات:

أ – $\{1,2,3,5,7,\cdots\}$

ب – $\{0,2,4,6,8,\cdots\}$

جـ – $\{-3,-1,1,3,5,\cdots\}$

د – $\{1,4,9,16,25,\cdots\}$

هـ – $\{1,3,7,15,31,63,\cdots\}$

2- أوجد التعريف الاستقرائي لكل من المجموعات:

أ – $\{4,7,10,13,\cdots\}\cup\{3,6,9,12,\cdots\}$

ب – $\{3, 4, 5, 8, 9, 12, 16, 17, \cdots\}$

جـ – $\{x \in \mathbb{N} : x \bmod 5 = 2\}$

د – $\{x \in \mathbb{N} : 2x \bmod 7 = 3\}$

3- أوجد التعريف الاستقرائي من أجل كل مجموعة S من الأشرطة المحرفية:

أ – $\{a^n bc^n : n \in \mathbb{N}\}$

ب – $\{a^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$

جـ – $\{a^{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

د – $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}\}$

هـ – $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$

و – $\{a^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

ز – $\{a^m bc^n : m, n \in \mathbb{N}\}$

4- أنشئ التعريف العمودي من أجل كل توابع الشرائط على الأبجدية $\{a, b\}$.

أ – $f(x) = xy$ حيث y هو معاكس x.

ب – $f(x, y)$ يختبر فيما إذا كانت x بادئة y.

جـ – $f(x, y)$ يختبر فيما إذا كانت $x = y$.

د – $f(x)$ يعطي معاكس x.

7–7 القواعد

إنّ القواعد مجموعة من القوانين المستخدمة لتعريف بنية الكلمات (الأشرطة المحرفية) في اللغة. يعتبر موضوع القواعد من الموضوعات المهمة في علوم الحاسب ليس فقط من أجل لغات البرمجة، بل وأيضاً من أجل تحديد مجموعات معطيات البرامج. تحاول التطبيقات النموذجية بناء خوارزميات اختبار فيما إذا كان شريط محرفي ينتمي إلى لغةٍ

ما أم لا. سنقوم فيما سيأتي بإيضاح أنّ القواعد تقدم أسلوباً مفيداً وملائماً لوصف اللغات بطريقة مشابهة للتعريف الاستقرائي والتي نوقشت سابقاً. سوف نرى أنّ القواعد تقدم تقنية لاختبار فيما إذا كان الشريط المحرفي ينتمي إلى لغة بطريقة مشابهة لحساب التابع المعرف عامودياً والتي تم التعرف عليها في الفقرة (7-5).

لنتذكر بعض التفاصيل المتعلقة بقواعد اللغة الإنجليزية. إنّ الجملة في اللغة الإنجليزية هي شريط من حروف الأبجدية المكونة من أحرف اللغة الإنجليزية والحرف الخالي، بالإضافة إلى النقطة والفاصلة وغيرها من الرموز الأخرى الخاصة. أمّا لإعراب الجملة فإننا نقوم بتقسيمها إلى أجزاء تتوافق مع القواعد المعطاة.

مثال (7-20):

تتكون الجملة

The Intellegent student answered the question

من جزأين subject و predicate على النحو الآتي:

Subject = The intellegent student
Predicat = answered the question

سنكتب الآن القانون القواعدي:

sentence = subject+ predicate

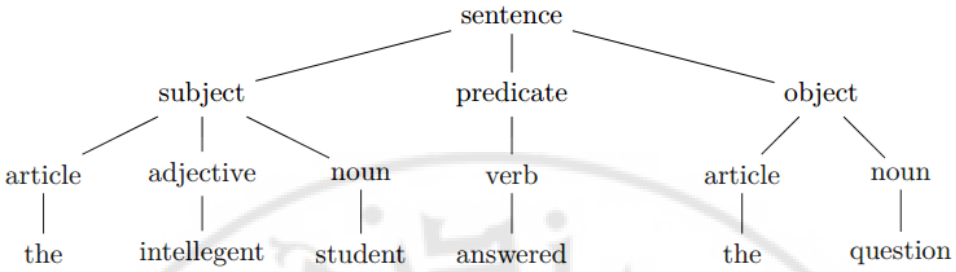
كذلك يمكن تجزيء subject إلى أجزاء أصغر، وكذلك أيضاً تجزيء predicate إلى أجزاء أصغر على النحو الآتي:

subject = article + adjective + noun
predicate = verb + object

إنّ هذا نمط من الفعاليات يمكن أن تستخدم لكشف فيما إذا كانت الجملة صحيحة قواعدياً أم لا. تمثل الجملة المعربة في شجرة، تدعى بالشجرة الإعرابية أو شجرة الاشتقاق. والشجرة الإعرابية للجملة:

The intellegent student answered the question

موضحة بالشكل (7-1)



الشكل (7-1)

1-7-7 بنية القواعد

سوف نقوم بوصف البنية العامة للقواعد المستخدمة في اللغات فإذا كانت L لغة على الأبجدية A، فإنّ قواعد اللغة L تتألف من مجموعة من القوانين القواعدية من الشكل:

$$\alpha \to \beta$$

ترمز α وβ لأشرطة محرفية من الرموز المأخوذة من A ومن مجموعة الرموز القواعدية المنفصلة عن A. وغالباً ما يدعى القانون القواعدي $\alpha \to \beta$ بالصانعة (production) التي يمكن أن تقرأ بأساليب مختلفة مثل:

تبديل α من خلال β

α تصنع (تنتج) β

α تعيد كتابة β

α ترجع إلى β

إنّ لكل قاعدة رمزاً قواعدياً خاصاً يدعى رمز البدء، وهنالك على الأقل صانعة واحدة في الجانب الأيسر تتكون من رمز البدء فقط.

مثال(7-21):

إذا كانت S رمز البدء لقاعدة، فينبغي أن تكون موجودة صانعة واحدة على الأقل من الشكل:

$$S \to \beta$$

مثال(7-22):

لتكن لدينا قاعدة للغة ولنناقش عملية اشتقاق الشرائط المحرفية من الصانعات. فإذا كانت $A = \{a, b, c\}$، فإنه يمكن أن نصف قاعدة للغة A^* من خلال الصانعات الأربع الآتية:

$$S \to \Lambda, \quad S \to aS, \quad S \to bS, \quad S \to cS,$$

كيف لنا أن نعرف أنّ هذه القاعدة تصف اللغة A^*؟ لعله يجب أن تكون لدينا القدرة على وصف كل شريط من اللغة في حدود من قوانين القاعدة. ليكن بمقدورنا استخدام الصانعات السابقة لمعرفة فيما إذا كان الشريط $aacb$ ينتمي إلى A^*. سوف ننطلق من رمز البدء S. نقوم بعد ذلك بتبديل S بالطرف الأيمن من الصانعة $S \to aS$. ونختار الصانعة $S \to aS$ لأنّ $aacb$ يربط الجانب الأيمن من $S \to aS$ من خلال وضع $S = acb$. تدعى عملية تبديل S بـ aS بعملية "الاشتقاق"، ونقول إن S تشتق aS. وسنرمز لهذا الاشتقاق من خلال الكتابة:

$$S \Longrightarrow aS$$

ويعني السهم $\Longrightarrow$: "تشتق في خطوة واحدة". إنّ الجانب الأيمن من هذا الاشتقاق يتضمن الرمز S. لذلك نقوم ثانية بتبديل S بـ aS مستخدمين الصانعة $S \to aS$. إنّ ناتج الاشتقاق هو:

$$S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaS$$

والجانب الأيمن من عبارة الاشتقاق الأخيرة يحوي S في هذه الحالة نقوم باستبدال S في الجانب الأيمن من $S \to cS$. وهذا يعطي الاشتقاق:

$$S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaS \Longrightarrow aacS$$

بالاستمرار، نستبدل S في الجانب الأيمن من $S \to bS$. وهذا يعطي الاشتقاق:

$$S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaS \Longrightarrow aacS \Longrightarrow aacbS$$

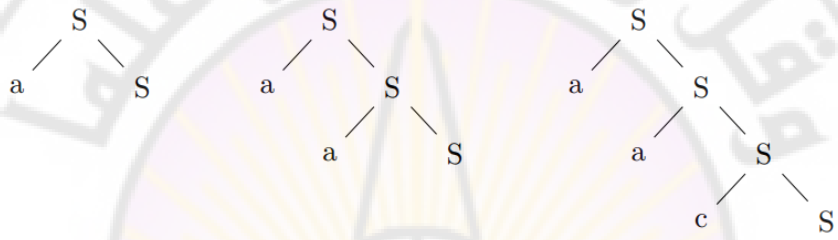
بما أننا نريد الاشتقاق للحصول على الشريط $aacb$، فإننا نقوم الآن باستبدال s في الجانب الأيمن من $S \to \Lambda$ وهذا ما يعطي الاشتقاق المطلوب للشريط $aacb$:

$$S \Longrightarrow as \Longrightarrow aas \Longrightarrow aacs \Longrightarrow aacbs = aacb\Lambda = aacb$$

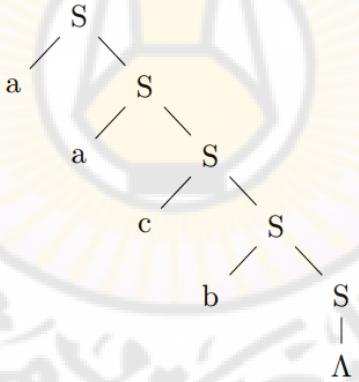
إنّ كل خطوة في الاشتقاق تقابل إلحاق شجرة جزئية جديدة إلى شجرة الإعراب التي جذرها رمز البدء. فعلى سبيل المثال، إنّ أشجار الإعراب المقابلة للخطوات الثلاث الأولى في المثال السابق موضحة في الشكل (2-7).

والاشتقاق بالكامل مع شجرة الإعراب موضّح بالشكل (3-7)

$S \Longrightarrow aS$ $S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaS$ $S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaS \Longrightarrow aacS$



الشكل (2-7)



الشكل (3-7)

2-7-7 تعريف القاعدة

لقد قمنا فيما مضى بتوضيح مفهوم القاعدة. وسوف نصف الآن المقومات الأربع الأساسية الأثبت لأية قاعدة.

3-7-7 الأجزاء الأربعة لقاعدة:

1- الأبجدية N لقاعدة الرموز، تدعى باللا طرفيات.

2- الأبجدية T من الرموز تدعى بالطرفيات وتختلف الطرفيات عن اللا طرفيات.

3- اللا طرفية S المميزة، تدعى برمز البدء.

4- المجموعة المنتهية من الصانعات التي لها الشكل $\alpha \to \beta$، حيث إنّ α و β هي أشرطة على الأبجدية $N \cup T$ (مع الحذر أن α ليست شريطاً خالياً). وهنالك صانعة واحدة على الأقل تحوي رمز البدء S في جانبها الأيسر. إنّ كل لا طرفية ينبغي أن تظهر في الجانب الأيسر لصانعة ما.

نفرض في هذا الفصل أنّ كل صانعات قاعدة يوجد لها لا طرفية وحيدة في الجانب الأيسر (للسهولة). وعندما يوجد لصانعتين أو أكثر الجانب الأيسر نفسه، فإننا نستطيع أن نبسط الرمز من خلال كتابة صانعة واحدة مع عدد من الجوانب اليمينية. المفصولة عن بعضها بالخط العمودي | . فمثلاً الصانعات الأربع، تكتب كتابة مختصرة على النحو الآتي:

$$S \to \Lambda|aS|bS|cS\ ,$$

ونقول إن S يمكن أن تستبدل بكل من Λ أو aS، أو bS أو cS.

يمكن أن نمثل القاعدة G من خلال الرباعية:

$$G =< N, T, S, P >$$

حيث P هي مجموعة الصانعات.

مثال (7-23):

إذا كانت مجموعة الصانعات $\Sigma = \{a, b, c\}$، فإنّ القاعدة تمثَّل من خلال الرباعية:

$$< \{S\}, \{a, b, c\}, S, P >$$

يفيد رمز الرباعية في مناقشة الخواص العامة للقواعد. لكن من أجل قاعدة خاصة ومن ناحية عملية فإننا نكتب أسفل صانعات القاعدة فقط، حيث إنّ اللا طرفيات أحرف الحالة العليا، وتحوي الصانعة الأولى رمز البدء في جانبها الأيسر.

مثال (7-24):

لتكن لدينا قاعدة معطاة على النحو الآتي:

$$S \to AB, \qquad A \to \Lambda|aA, \qquad B \to \Lambda|bB$$

نستطيع أن نستنتج أنّ اللا طرفيات هي S، A، B. ورمز البدء هو S. كما أنّ الطرفيات هي a، b.

4-7-7 الاشتقاقات

سنقوم بمناقشة أوسع للقواعد. لذلك نفرض أننا أعطينا قاعدة ما. إنّ الشريط المحرفي المشكَّل من الطرفيات و/أو اللا طرفيات يدعى بالشكل الجملي. نستطيع الآن صياغة فكرة الاشتقاق.

تعريف (7-1)

إذا كانت x وy أشكال جميلة وكانت $\alpha \to \beta$ صانعة، فإنّ استبدال α بـ β في $x \times y$ يدعى بالاشتقاق، ونرمز لذلك من خلال الكتابة:

$$x \times y \Longrightarrow x\beta y$$

تستخدم عند مناقشة الاشتقاقات الرموز الثلاثة الآتية وبجانب كل منها المعنى والدلالة كما هو موضّح في الشكل (7-4)

الرمز	المعنى والدلالة
$\Longrightarrow$	”تشتق في خطوة واحدة“
$\Longrightarrow^{+}$	”تشتق في واحدة أو أكثر من الخطوات“

$\Rightarrow^*$	”تشتق في صفر أو أكثر من الخطوات“

الشكل (7-4)

مثال (7-25):

لتكن لدينا القاعدة الآتية:

$$S \to AB, \qquad A \to \Lambda | aA, \qquad B \to \Lambda | bB$$

ولننظر في الشريط المحرفي aab. تعني العبارة:

$$S \Longrightarrow^+ aab$$

إنه يوجد اشتقاق للشريط aab يتطلب مرة أو أكثر من الخطوات.

من الواضح أنه لدينا:

$$S \Longrightarrow AB \Longrightarrow aAB \Longrightarrow aaAB \Longrightarrow aaB \Longrightarrow aabB \Longrightarrow aab$$

في بعض القواعد من الممكن أن يتم إيجاد عدة اشتقاقات مختلفة لنفس الشريط. يوجد نوعان من الاشتقاقات جديران بالاهتمام:

1- يقال عن الاشتقاق إنه اشتقاق أكثر يسارية، إذا كانت عند كل خطوة اللا طرفية الأكثر يسارية من الشكل الجملي قد أرجعت باستخدام صانعة ما.

2- يُقال عن الاشتقاق إنه أكثر يمينية، إذا كانت عند كل خطوة اللا طرفية الأكثر يمينية في الشكل الجملي، قد أرجعت باستخدام صانعة ما.

عندما نحاول كتابة قاعدة من أجل لغة، فإنه يتوجب أن نتفحص على الأقل فيما إذا كانت هذه اللغة منتهية أو غير منتهية. فإذا كانت اللغة منتهية، فإنّ القاعدة يمكن أن تتكون من كل الصانعات التي لها الشكل $S \to w$ ذلك من أجل كل شريط w في اللغة.

مثال (7-26):

يمكن للغة $\{a, ab\}$ أن توصف بواسطة القاعدة:

$$S \to a | ab$$

أمّا إذا كانت اللغة غير منتهية، فإنّ صانعة ما أو متتالية من الصانعات ينبغي أن تستخدم مرة تلو الأخرى لبناء الاشتقاقات. ولرؤية ذلك نلاحظ أنه لا يوجد حد على طول الأشرطة في اللغة غير المنتهية. لأجل ذلك فإنه لا يوجد حد على عدد خطوات الاشتقاق المستخدمة كي تشتق الأشرطة. إذا كان للقاعدة n من الصانعات، فإنّ أي اشتقاق يتكون من $n+1$ خطوة ينبغي أن يستخدم صانعة ما مرتين.

مثال (7-27):

إنّ اللغة $\{ ab^n : n \in \mathbb{N} \}$ هي لغة غير منتهية. يمكن أن نصف هذه اللغة من خلال القاعدة:

$$S \to b|aS$$

ولكي يشتق الشريط ab^n، سوف نستخدم الصانعة $S \to aS$ عدد من المرات يساوي إلى n مرة متتالية ومن ثم إيقاف الاشتقاق باستخدام الصانعة $S \to b$. إنّ هذه الحالة تشبه الأسلوب الذي اتبعناه عند استخدام التعاريف الاستقرائية للمجموعة وكمثال، فإنّ الصانعة $S \to aS$ تسمح لنا أن نكتب العبارة غير الدقيقة:

"إذا كانت S تشتق w، فإنها أيضاً تشتق aw"

مثال (7-28):

بالعودة إلى المثال السابق (7-26) المتعلق باشتقاق aab، فإننا نجد أنه اشتقاق أكثر يسارية:

$$S \Longrightarrow AB \Longrightarrow AbB \Longrightarrow Ab \Longrightarrow aAb \Longrightarrow aaAb \Longrightarrow aab$$

7-7-5 اللغة المتعلقة بقاعدة

يكون في بعض الأحيان من الصعب جداً، بل من غير الممكن أن نكتب قاعدة من أجل لغة معطاة. لذا فإنه من الأفضل لنا أن نسبر أغوار فكرة اللغة التي تتعلق بهذه

القاعدة. فإذا كانت G قاعدة، فإنّ لغة G هي مجموعة من الأشرطة الطرفية المشتقة من رمز البدء في G. نرمز لهذه اللغة المتعلقة بالقاعدة G بالرمز:

$$L(G)$$

يمكن لنا أيضاً أن نصف $L(G)$ بدقة أكبر على النحو الآتي:

لغة القاعدة: إذا كانت G قاعدة مع رمز بدء S ومجموعة من الطرفيات T، فإنّ لغة G هي المجموعة:

$$L(G) = \{s : \ s \in T^* \ \ and \ \ S \Longrightarrow^+ s\}$$

6-7-7 الصانعات العددية

نقول عن صانعة إنها عامودية إذا كان جانبها الأيسر يحدث على جانبها الأيمن.

مثال (7-29):

الصانعة $S \to aS$ عامودية.

إنّ الصانعة $\Lambda \to \alpha$ هي صانعة عامودية غير مباشرة إذا كانت A تشتق الشكل الجملي الحاوي على A. لنفرض الآن أنه لدينا القاعدة الآتية:

$$S \to b|aA\,, \qquad A \to c|bS$$

إنّ الصانعات $S \to aA$ و $A \to bS$ عامودية غير مباشرة، لأنها من الاشتقاقات الآتية:

$$S \Longrightarrow aA \Longrightarrow abS\,, \qquad A \Longrightarrow bS \Longrightarrow baA$$

نقول عن قاعدة إنها عامودية إذا احتوت إمّا على صانعة عددية وإما على صانعة عامودية غير مباشرة.

يمكننا الآن أن نجعل الآتي عبارة أكثر دقة حول القواعد من أجل اللغات غير المنتهية. يجب أن تكون قاعدة اللغة غير المنتهية، قاعدة عددية.

لننظر الآن في المسألة المعاكسة لوصف لغة قاعدة. فنحن نعلم من التعريف أنّ لغة قاعدة هي مجموعة كل الأشرطة المشتقة من القاعدة. لكن نستطيع أيضاً القيام بأمر آخر على اللغة المعرفة بقاعدة:

إنّ أية لغة معرفة من خلال قاعدة، هي مجموعة معرفة استقرائياً.

لنرى فيما إذا كان ذلك هو حالة من أجل أية قاعدة G. إنّ التعريف الاستقرائي الآتي يقوم بالعمل، حيث تشير S إلى رمز البدء في G. لتبسيط الوصف، سنقول إنّ الاشتقاق عددي إذا حدثت طرفية ما مرتين كناتج من صانعة عددية أو من سلسلة من الصانعات العددية غير المباشرة.

7-7-7 التعريف الاستقرائي للغة قاعدة $L(G)$

1- من أجل كل الأشرطة w التي يمكن أن تشتق من S دون استخدام الاشتقاق العددي، نضع w في $L(G)$.

2- إذا كانت w منتمية إلى $L(G)$ ويوجد الاشتقاق $S \Longrightarrow^{+} w$ الحاوي على لا طرفية من صانعة عددية أو صانعة عددية غير مباشرة، فإنّ الصانعة تستخدم لتعديل الاشتقاق للحصول على اشتقاق جديد $S \Longrightarrow^{+} x$، ووضع x في $L(G)$.

الإثبات: لتكن G قاعدة، ولتكن M مجموعة استقرائية معرفة من خلال (7-6)، نحتاج الآن إلى إظهار أنّ $M = L(G)$. من الواضح أن $M \subset L(G)$ لأنّ كل الأشرطة في M مشتقة من رمز البدء في G. نفرض (التناقض) أنّ $M \neq L(G)$. بعبارة أخرى، فإنه يمكننا كتابة $L(G) - M \neq \phi$. وبما أنّ S تشتق كل عناصر $L(G) - M$. يمكن أن نفرض أنّ هذا الاشتقاق عددي. إنّ حالة الأساس القاعدية الواردة في التعريف (7-7-2) تقودنا لوضع w في M، تناقض الافتراض بأنّ $w \in L(G) - M$. لذا فإنّ الاشتقاق الأكثر يساريةً لـ w ينبغي أن يكون له الشكل التالي، حيث s وt هي أشرطة طرفية وα, β, γ هي أشكال جميلة التي لا تتضمن B:

$$S \Longrightarrow^{+} sB\gamma \Longrightarrow^{+} stB\beta\gamma \Longrightarrow st\alpha\beta\gamma \Longrightarrow^{*} w$$

يمكن أن نستبدل $sB\gamma \Longrightarrow^{+} stB\beta\gamma$ في هذا الاشتقاق بـ: $sB\gamma \Longrightarrow s\alpha\gamma$ للحصول على الاشتقاق الآتي للشريط u من الطرفيات:

$$S \Longrightarrow^{+} sB\gamma \Longrightarrow s\alpha\gamma \Longrightarrow^{*} u$$

إنّ هذا الاشتقاق هو أقصر من اشتقاق w. لذا ينبغي أن تضمن u في M. والآن يمكن أن نطبق الجزء الاستقرائي من التعريف السابق على اشتقاق u الأخير للحصول على اشتقاق w. إنّ هذا يخبرنا أن w تنتمي إلى M مناقضاً افتراضنا بأنّ $w \notin M$. وهذا يقودنا إلى أن الافتراض بأنّ $M \neq L(G)$، لأجل ذلك فإنّ $M = L(G)$. تعرض الأمثلة الآتية كيفية استخدام التعريف السابق.

مثال (7-30):

نفرض أننا أعطينا القاعدة G على النحو الآتي:

$$S \to \Lambda | aB\,, \qquad B \to b | bB$$

سنعطي التعريف الاستقرائي للغة $L(G)$. هنالك اشتقاقان لا يحويان على صانعات عددية:

$$S \Longrightarrow \Lambda, \qquad S \Longrightarrow aB \Longrightarrow ab$$

إنّ هذا يمكننا من الوصول إلى الجزء الأساسي لتعريف:

الأساس: إنّ Λ وab تنتمي إلى $L(G)$. ولنوجد الآن الجزء الاستقرائي من التعريف. إنّ الصانعة العددية الوحيدة في G هي:

$$B \to ab$$

لذا فإنّ أي عنصر من $L(G)$ يحوي اشتقاقه حدوث B، ينبغي أن يكون له الشكل العام:

$$S \Longrightarrow aB \Longrightarrow^{+} ay$$

من أجل شريط ما مثل y. لذلك يمكن أن نستخدم الصانعة $B \to bB$ لإضافة خطوة واحدة أكثر للاشتقاق على النحو:

$$S \Longrightarrow aB \Longrightarrow abB \Longrightarrow^{+} aby$$

إنّ هذا يعطينا الخطوة الاستقرائية في تعريف $L(G)$.

الاستقراء: إذا كانت ay تنتمي إلى $L(G)$، عندئذٍ نضع aby في $L(G)$.

مثال (7-31):

تخبرنا الحالة الأساسية (القاعدية) أنّ ab ينتمي إلى $L(G)$ والاشتقاق $S \Longrightarrow aB \Longrightarrow ab$ يحوي حدوث B. لذا سوف نضيف خطوة واحدة أكثر إلى الاشتقاق باستخدام الصانعة $B \to bB$، للحصول على الاشتقاق:

$$S \Longrightarrow aB \Longrightarrow abB \Longrightarrow abb$$

لذا فإنّ ab ينتمي إلى $L(G)$ والذي يؤدي إلى أن abb تنتمي إلى $L(G)$ والتي تقتضي أيضاً أن يكون ab^3 منتمياً إلى $L(G)$ أيضاً، وهكذا. وعلى هذا فإنه وبشيء ما من الثقة، يمكن أن نقول إنّ $L(G)$ هي اللغة:

$$\{\Lambda\} \cup \{ab^n : n \in \mathbb{N}\}$$

7-7-8 بناء القواعد

سوف نقوم باستعراض بعض الأمثلة، ونعطي بعض التقنيات لربح القواعد البسيطة. وسنلاحظ أنه يمكن أن يكون للغة أكثر من قاعدة واحدة. لذلك يجب أن لا نندهش عندما يعطي شخصان قاعدتين مختلفتين للغة نفسها.

مثال (7-32):

سوف نكتب قاعدة لكل لغة من ثلاث لغات بسيطة. وفي كل حالة سوف نشمل نموذج اشتقاق لشريط في اللغة. بالإضافة إلى اختبار كل قاعدة بوساطة بناء العديد من الاشتقاقات للأشرطة.

1- اللغة:

$$\{\Lambda, a, aa, \cdots, a^n, \cdots\} = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$$

نلاحظ أنّ أي شريط في هذه اللغة هو إمّا Λ وإما أنّ له الشكل ax من أجل x شريط ما في اللغة. إنّ القاعدة الآتية تشتق أياً من تلك الأشرطة:

$$S \to \Lambda | aS$$

على سبيل المثال، سوف نشتق الشريط aaa

$$S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaS \Longrightarrow aaaS \Longrightarrow aaa$$

2- اللغة:

$$\{\Lambda, ab, aabb, \cdots, a^n b^n, \cdots\} = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

نلاحظ أنّ أي شريط في هذه اللغة هو إمّا Λ وإما أنّ له الشكل axb من أجل شريط ما x في اللغة. إنّ القاعدة الآتية تشتق أياً من تلك الأشرطة:

$$S \to \Lambda | aSb$$

على سبيل المثال، سوف نشتق الشريط $aaabbb$

$$S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow aaSbb \Longrightarrow aaaSbbb \Longrightarrow aaabbb$$

3- اللغة:

$$\{\Lambda, ab, abab, \cdots, (ab)^n, \cdots\} = \{(ab)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

نلاحظ أنّ أي شريط في هذه اللغة هو إمّا Λ وإما أنّ له الشكل abx من أجل شريط ما x في اللغة. إنّ القاعدة الآتية تشتق أياً من تلك الأشرطة:

$$S \to \Lambda | abS$$

على سبيل المثال، سوف نشتق الشريط $ababab$

$$S \Longrightarrow abS \Longrightarrow ababS \Longrightarrow abababS \Longrightarrow ababab$$

9-7-7 دمج القواعد

في بعض الأحيان يمكن أن نكتب لغة بحدود من لغات أخرى أبسط، ويمكن لقاعدة هذه اللغة أن تبنى في حدود من قواعد للغات أخرى أبسط. سوف نركز الآن على عمليات: الاتحاد، والجداء، والغلاقة.

بفرض أنّ M و N لغات لقواعدها مجموعات منفصلة من اللا طرفيات. لنفرض أيضاً أنّ رموز البدء لقاعدتي M و L هي على الترتيب A و B. عندئذٍ يكون لدينا اللغات والقواعد الجديدة الآتية:

قانون الاتحاد: تبدأ اللغة $M \cup N$ بالصانعتين:

$$S \to A | B$$

قانون الجداء: تبدأ اللغة MN بالصانعة:

$$S \to AB$$

قانون الغلاقة: تبدأ اللغة M^* بالصانعة:

$$S \to AS|\Lambda$$

مثال (7-33):

لنكتب قاعدة للغة الآتية L:

$$L = \{\Lambda, a, b, aabb, \cdots, a^n b^n, \cdots\}$$

نلاحظ أنّ اللغة L يمكن أن تكتب في شكل اتحاد للغتين $L = M \cup N$ حيث إنّ:

$$M = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$$
$$M = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

يمكن بالتالي أن نكتب القاعدة الآتية للغة L:

$$S \to A|B \qquad \text{(قانون الاتحاد)}$$
$$A \to \Lambda|aA \qquad (M \text{ قاعدة})$$
$$B \to \Lambda|bB \qquad (N \text{ قاعدة})$$

مثال (7-34):

لنكتب قاعدة للغة الآتية L:

$$L = \{a^m, b^n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

نلاحظ أنّ اللغة L تكتب بشكل جداء $L = MN$ حيث إنّ للغة M الشكل:

$$M = \{a^m : m \in \mathbb{N}\}$$

وللغة N الشكل:

$$N = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

يمكن الآن أن نكتب القاعدة الآتية للغة L:

$$S \to AB \qquad \text{(قانون الجداء)}$$
$$A \to \Lambda|aA \qquad (M \text{ قاعدة})$$
$$B \to \Lambda|bB \qquad (N \text{ قاعدة})$$

مثال (7-35):

سنقوم ببناء قاعدة للغة L من كل الأشرطة المكونة من صفر أو أكثر لمرات حدوث aa أو bb. بكلمات أخرى، إنّ $L = \{aa, bb\}^*$. إذا وضعنا $M = \{aa, bb\}$، فإنّ $L = M^*$. لنكتب الآن القاعدة الآتية للغة L:

$$S \to AS|\Lambda \qquad \text{(قانون الغلاقة)}$$

$$A \to \Lambda|aA \qquad (M \text{ قاعدة})$$

يمكن أن نبسط تبسيط القاعدة. بتعويض A للحصول على القاعدة الآتية:

$$S \to aaS|bbS|\Lambda$$

مثال (7-36):

يمكن أن نوجد قاعدة لغة الأعداد العشرية بملاحظة أنّ العدد العشري هو إمّا رقم أو رقم متبوع بعدد عشري. تعكس قوانين القاعدة الآتية هذه الفكرة:

$$S \to D|DS$$
$$D \to 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$$

يمكننا أن نقول إنّ S تستبدل إمّا من خلال D أو DS، كما أنّ D يمكن أن تستبدل بأيٍّ من الأرقام العشرية. إنّ اشتقاق العدد 7801 يكتب على النحو الآتي:

$$S \Rightarrow SD \Rightarrow 7S \Rightarrow 7DS \Rightarrow 7DDS \Rightarrow 78DS \Rightarrow 780S \Rightarrow 780D \Rightarrow 7801$$

إنّ الاشتقاق ليس وحيداً فعلى سبيل المثال هنالك اشتقاق آخر للشريط 7801 يكتب على النحو الآتي:

$$S \Rightarrow DS \Rightarrow DDS \Rightarrow D8S \Rightarrow D8DS \Rightarrow D80S \Rightarrow D801 \Rightarrow 7801$$

مثال (7-37):

سوف نوجد قاعدة للغة الأعداد العشرية من أجل الأعداد الطبيعية الزوجية وذلك من خلال ملاحظة أنّ كل عدد ينبغي أن يكون له رقم زوجي في جانبه الأيمن. بكلمات أخرى، فهو إمّا عبارة عن رقم زوجي أو إنه عدد عشري متبوع برقم زوجي. القاعدة الآتية سوف تقوم بالعمل:

$$S \to E|NE$$
$$N \to D|DN$$

$$E \to 0|2|4|6|8$$
$$D \to 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$$

على سبيل المثال، العدد الزور 136 له الاشتقاق:

$$S \Longrightarrow NE \Longrightarrow N6 \Longrightarrow DN6 \Longrightarrow DD6 \Longrightarrow D36 \Longrightarrow 136$$

مثال (7-38):

إنّ لغالبية اللغات البرمجية معرفات لأسماء الأشياء. نفرض أننا نريد أن نصف قاعدة لمجموعة المعرفات التي تبدأ بحرف من الأبجدية متبوعاً بصفر أو أكثر من الأحرف أو الأرقام. لتكن S رمز البدء. بالتالي فإن القاعدة يمكن أن توصف من خلال الصانعات الآتية:

$$S \to L|LA$$
$$A \to LA|DA|\Lambda$$
$$L \to a|b|c|d|e|f|g|h|i|j|k|l|m|n|o|p|q|r|s|t|u|v|w|x|y|z$$
$$D \to 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$$

سوف نوجد اشتقاق الشريط لبيان، إنه عبارة عن معرف:

$$S \Longrightarrow LA \Longrightarrow aA \Longrightarrow aDA \Longrightarrow a2A \Longrightarrow a2LA \Longrightarrow a2bA \Longrightarrow a2b$$

مثال (7-39):

سوف نوجد قاعدة للأعداد النسبية التي لها تمثيل عشري منته. بكلمات أخرى، نريد وصف قاعدة لغة الأشرطة التي لها الشكل $m.n$ أو $-m.n$، حيث إن $m.n$ و$-m.n$ أعداد عشرية فمثلاً إنّ 0.0 يمثل العدد 0. لتكن S رمز البدء. نستطيع بدء القاعدة بالصانعتين:

$$S \to N.N| - N.N$$

لإنهاء العمل نحتاج إلى كتابة بعض الصانعات التي تسمح لـ N بأن تشتق العدد العشري. نلاحظ أنّ الصانعات هي:

$$N \to D|DN$$
$$D \to 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$$

مثال (7-40):

يمكن أن نكتب قاعدة لمجموعة البالندرومات على الأبجدية A (البالندروم: هو شريط له نفس الشكل عندما يكتب بترتيب معاكس للاتجاه الأمامي مثال: madam). لتكن A معرفة على النحو الآتي $A = \{a, b, c\}$ لتكن P أيضاً رمز البدء. عندئذٍ يكون للغة البالندرومات على الأبجدية A القاعدة الآتية:

$$P \to aPa|bPb|cPc|a|b|c|\Lambda$$

كمثال على ذلك، إنّ البالندروم $abcba$ يمكن أن يشتق على النحو الآتي:

$$P \Longrightarrow aPa \Longrightarrow abPba \Longrightarrow abcba$$

10-7-7 المعنى والغموض

في أغلب الأحيان نرفق معاني من حياتنا للأشرطة المحرفية. فعلى سبيل المثال إنّ الشريط $3 + 4$ يعني 7 لغالبية الناس. بينما يكون للشريط $3 - 4 - 2$ معنيين مختلفين بالنسبة لشخصين مختلفين. فأحد الأشخاص يظن أنّ:

$$3 - 4 - 2 = (3 - 4) - 2 = -3$$

وربما يظن الشخص الآخر أنّ:

$$3 - 4 - 2 = 3 - (4 - 2) = 1$$

إذا كان لدينا قاعدة، فإننا نستطيع أن نحدد معنى أي شريط في لغة القاعدة إلى أن يتم صنع شجرة الإعراب بالاشتقاق. وفي الغالب نستطيع كتابة قاعدة بحيث يكون لأي شريط في لغة القاعدة معنى واحد بالضبط (أي وجود شجرة إعراب واحدة). وعندما لا تكون هذه الحالة فإنّ لدينا قاعدة غامضة. سنعطي تعريفاً دقيقاً لهذا المفهوم فيما سيأتي.

11-7-7 تعريف القاعدة الغامضة

يُقال عن قاعدة إنها غامضة، إذا كانت نعتها (صفتها) تحوي على شريط ما له شجرتي إعراب مختلفتين. إنّ هذا مكافئ للقول إنه لشريط ما اشتقاقين أكثر يسارية مختلفين أو إنه لشريط ما اشتقاقين أكثر يمينية مختلفين.

لتوضيح هذه الفكرة سوف ننظر في بعض القواعد المتعلقة بتعابير حسابية بسيطة.

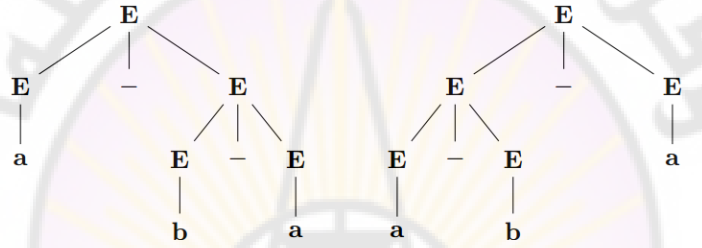
لنفرض على سبيل المثال، أننا نعرف مجموعة التعابير الحسابية، بالقاعدة:

$$E \to a|b|E - E$$

إنّ لغة هذه القاعدة تحوي على أشرطة مثل:

$$a, b, b - a, a - b - a, b - b - a - b$$

إنّ هذه القاعدة قاعدة غامضة، لوجود الشريط $a - b - a$ الذي له شجرتي إعراب، كما هو موضح في الشكل (7-4):



الشكل (7-4)

إنّ وجود شجرتي إعراب مختلفتين تعني الشيء ذاته لو كان هنالك اشتقاقان أكثر يسارية ومختلفان ولا مشكلة في إيجاد الاشتقاقين الأكثر يسارية والمختلفين للشريط $a - b - a$.

$$E \Rightarrow E - E \Rightarrow a - E \Rightarrow a - E - E \Rightarrow a - b - E \Rightarrow a - b - a$$
$$E \Rightarrow E - E \Rightarrow E - E \Rightarrow E - E - E \Rightarrow a - E - E \Rightarrow a - b - E$$
$$\Rightarrow a - b - a$$

تعكس شجرتا الإعراب في الشكل (7-4) الطريقتين المختارتين لحساب $a - b - a$.

وتشير الشجرة الأولى من اليسار إلى المعنى:

$$a - b - a = a - (b - a)$$

بينما تشير الثانية إلى المعنى:

$$a - b - a = (a - b) - a$$

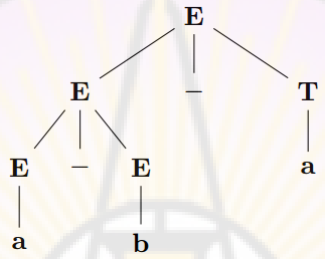
كيف يمكن لنا أن نتأكد من وجود شجرة إعراب واحدة من أجل كل شريط في اللغة ؟

نستطيع أن نحاول إيجاد قاعدة أخرى من أجل نفس مجموعة الأشرطة. على سبيل

المثال، نفرض أننا نريد $a-b-a$ تعني $(a-b)-a$. بعبارة أخرى نريد إشارة الطرح الأولى أن تنفذ قبل إشارة الطرح الثانية. يمكن أن نعطي لإشارة الطرح الأولى أهمية أكبر من الثانية من خلال صنع لا طرفية جديدة، كما هو موضّح في القاعدة الآتية:

$$E \to E-T|T$$
$$T \to a|b$$

نلاحظ أنه يمكن أن تستبدل T في الاشتقاق فقط بواسطة إمّا a أو b. لذلك فإنّ كل اشتقاق للشريط $a-b-a$ ينتج شجرة إعراب وحيدة موضحة بالشكل (7-5):



الشكل (7-5)

تمارين غير محلولة

1- لتكن لدينا القاعدة الآتية:

$$S \to D|DS$$
$$D \to 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$$

والمطلوب:

1- أوجد الصانعة المستخدمة في كل خطوة من الاشتقاق الآتي:

$$S \Longrightarrow DS \Longrightarrow 7S \Longrightarrow 7DS \Longrightarrow 7DDS \Longrightarrow 78DS \Longrightarrow 780S \Longrightarrow 7801$$

أوجد الاشتقاق الأكثر يسارية للشريط 7801

أوجد الاشتقاق الأكثر يمينية للشريط 7801

2- لتكن معطاة القاعدة الآتية:

$$S \to S[S]S|\Lambda$$

أنشئ من أجل كل من الأشرطة الآتية، الاشتقاق الأكثر يسارية والاشتقاق الأكثر يمينيةً، بالإضافة إلى شجرة الإعراب:

أ – [ ] ب – [[ ]]

جـ – [ ][ ] د – [[ ][ ]][ ]

3- أوجد قاعدة لكل من اللغات الآتية:

$$\{bb, bbbb, bbbbbb, \cdots\} = \{(bb)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{a, ba, bba, bbba, \cdots\} = \{b^n a : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{\Lambda, ab, abab, ababab, \cdots\} = \{(ab)^n : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{bb, bab, baab, baaab \ \cdots\} = \{ba^n b : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{ab, aabb, aaabbb, \cdots, a^n b^n, \cdots\} = \{a^{n+1} b^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{b, bbb, bbbbb, b^{2n+1}, \cdots\} = \{b^{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{ab, abab, ababab, (ab)^n, \cdots\} = \{(ab)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{b, abc, aabcc, \cdots, a^n bc^n, \cdots\} = \{a^n bc^n : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{ac, abc, abbc, \cdots, ab^n c, \cdots\} = \{ab^n c : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{\Lambda, aa, aaaa, aaaaaa, \cdots, a^{2n}, \cdots\} = \{a^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$

4- أوجد قاعدة لكل لغة:

$$\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{a^m bc^n : m, n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}, \ m > 0\}$$
$$\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}, \ n > 0\}$$
$$\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}, \ m > 0, \ n > 0\}$$

5- أوجد قاعدة لكل لغة:

البالندرومات الزوجية على $\{a, b\}$.

البالندرومات الفردية على $\{a, b\}$.

$$\{a^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{a^n bc^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^m a^n : m, n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}, \ m > 0 \text{ or } n > 0\}$$

6- بيّن أنّ كلاً من القواعد الآتية غامضة. أي أوجد شريطاً له شجرتا إعراب مختلفتين (مكافئ للقول إيجاد اشتقاقين أكثر يسارية مختلفين أو إيجاد اشتقاقين أكثر يمينية مختلفين).

أ – $S \to a|SbS$

ب – $S \to abB|AB \quad \& \quad \Lambda \to \Lambda$

جـ – $1\Lambda a \quad \& \quad B \to \Lambda|bB$

د – $S \to aS|Sa|a$

هـ – $S \to aS|Sa|b$

و – $S \to S[S]S|\Lambda$

ز – $S \to Ab|A \quad \& \quad A \to b|bA$

7- استخدم التعريف (2-7-7) لإيجاد التعريف الاستقرائي من أجل $L(G)$

أ – $S \to \Lambda|aaS$

ب – $S \to a|aBc \quad \& \quad b \to b|bB$

8- حاول إيجاد قاعدة مكافئة لكل قاعدة معطاة دون أن تكون غامضة:

أ – $S \to a|SbS$

ب – $S \to abB|AB \quad \& \quad A \to \Lambda|Aa \quad \& \quad B \to \Lambda|bB$

جـ – $S \to a|aS|Sa$

د – $S \to b|aS|Sa$

هـ – $S \to S[S]S|\Lambda$

و – $S \to Ab|A \quad \& \quad A \to b|bA$

10- أوجد قاعدة لغة كل الأشرطة على $\{a, b\}$ والتي فيها العدد نفس من تكرارات a وتكرارات b.

7-8 اللغات المنتظمة والتعابير المنتظمة

في كثير من الأحيان يطرح السؤال عن إمكانية الآلة للتعرف على اللغة؟ بالطبع إنّ الجواب سوف يكون بالإيجاب، لكن من أجل بعض الآلات وبعض اللغات، سنقوم في هذا الفصل بدراسة أحد الصفوف الأساسية للغات والتي سندعوها باللغات النظامية، وصف أساسي من الآلات التي تدعى بالأتومات المنتهية. وسنرى أنّ اللغات المنتظمة يمكن أن تمثل من خلال أنواع معينة من التعابير الجبرية، ومن خلال الأتومات المنتهية، إضافة إلى قواعد معينة.

لننظر أولاً في مسألة مألوفة للمبرمجين والمعروفة بمسألة التمييز (التعرف) التي يمكن أن تلخص في إيجاد خوارزمية للتعرف على أشرطة محارف من المدخلات والتي تتمتع بخاصة معينة.

على سبيل المثال، نفرض أننا نريد أن نحسب بالأعداد المستخدمة في الترميز العلمي. هل نستطيع أن نكتب خوارزمية لتمييز أشرطة محارف الرموز الممثلة بهذا الأسلوب؟ على الأغلب ستكون الإجابة بنعم بعد أن نكون قد حصلنا على أجوبة لبعض الأسئلة الإضافية مثل: ما هو المقصود بالرمز العلمي؟ هل نريد أن نعتمد إشارات؟ إنّ هذا المثال ما هو إلاّ حالة من صف عام من المسائل التي يمكن أن تحل باستخدام بعض التقنيات الخاصة والتي سوف نناقشها في هذا الفصل.

1-8-7 اللغات المنتظمة

لنتذكر أنّ اللغة على الأبجدية المنتهية A، عبارة عن مجموعة من الأشرطة المحرفية من أحرف A. لذا فإنّ اللغة على المجموعة A عبارة عن مجموعة جزئية من A^*. فإذا كان لدينا لغة ما L والشريط المحرفي w، فهل نستطيع أن نجيب عمّا إذا كان w من اللغة L. فبعض اللغات من السهل وصفها ولغات أخرى ليس من السهل وصفها. سنقوم في

هذا الفصل بالعمل مع صف من اللغات السهلة الوصف والتي يمكن للخوارزميات أن توجد حلاً لمسألة التمييز.

تنشأ اللغات التي نتحدث عنها من أحرف أبجدية للغة ما باستخدام العمليات على هذه اللغة، مثل: الاتحاد، والوصل، والغلاقة. تدعى هذه اللغات باللغات المنتظمة. سوف نعطي تعريفاً محدداً ومن ثم بعض الأمثلة.

إنّ جماعة اللغات النظامية على A تعرف استقرائياً على النحو الآتي:

اللغات المنتظمة:

1- إنّ ϕ، $\{\Lambda\}$ لغات منتظمة، كما أنّ $\{a\}$ لغة منتظمة من أجل كل العناصر a من A.

2- إذا كانت L، M لغاتان منتظمتان، فإنّ اللغات الآتية هي لغات منتظمة:

$$L \cup M, ML, L^*$$

مثال (7-41):

يُعطي التعريف السابق في حالته الأولية والتأسيسية اللغات الأربع الآتية على الأبجدية $A = \{a, b\}$ والمنتظمة.

$$\phi = \{\Lambda\}, \{a\}, \{b\}$$

لنستخدم الآن الجزء الاستقرائي من التعريف لإنشاء بعض اللغات المنتظمة على $\{a, b\}$.

ولنطرح الأسئلة الآتية:

(1) هل اللغة $\{\Lambda, b\}$ لغة منتظمة؟ بالطبع إنّ الإجابة بنعم، لأننا نستطيع أن نكتبها في شكل اتحاد للغتين $\{\Lambda\}$ و$\{b\}$:

$$\{\Lambda, b\} = \{\Lambda\} \cup \{b\}$$

(2) لنتساءل أيضاً فيما إذا كانت $\{a, ab\}$ لغة منتظمة؟ أيضاً هنا نلاحظ أننا نستطيع أن نكتب ما سبق كجداء للغتين: $\{a\}$ و$\{\Lambda, b\}$ على النحو الآتي:

$$\{a, ab\} = \{a\} \cup \{\Lambda, b\}$$

(3) هل اللغة $\{\Lambda, b, bb, bbb, \cdots, b^n, \cdots\}$ لغة منتظمة؟ بالتأكيد إنها لغة منتظمة لأنها هي ذاتها للغة $\{b\}$ حيث:

$$\{b\}^* = \{\Lambda, b, bb, bbb, \cdots, b^n, \cdots\}$$

يوجد أيضاً لغتان منتظمتان إضافيتان على $\{a, b\}$ هما:

$$\{a, ab, abb, \cdots, ab^n, \cdots\}$$
$$\{\Lambda, a, b, aa, bb, \cdots, a^n, b^n, \cdots\}$$

إذ إننا نستطيع كتابة الأولى على أنها جداء لغتين منتظمتين على الشكل:

$$\{a, ab, abb, \cdots, ab^n, \cdots\} = \{a\}\{\Lambda, b, bb, \cdots, b^n, \cdots\}$$

كما أنّ الثانية اتحاد لغتين منتظمتين على النحو الآتي:

$$\{\Lambda, a, b, aa, bb, \cdots, a^n, b^n, \cdots\} = \{a\}^* \cup \{b\}^*$$

لقد بيّن المثال السابق على وجود العديد من اللغات المنتظمة التي يمكن أن تؤخذ بعين الاعتبار. ومن وجهة نظر حسابية، فإننا نريد إيجاد الخوارزميات التي تستطيع أن تميز فيما إذا كان الشريط المحرقي منتمياً إلى اللغة المنتظمة ولإنجاز هذه المهمة سوف نقدم مفهوماً جبرياً ملائماً للغات المنتظمة.

2-8-7 التعابير المنتظمة

يتم في أغلب الأحيان وصف اللغة المنتظمة من خلال تعبير جبري، يدعى بالتعبير المنتظم. سنقوم بتعريف التعابير المنتظمة وتحديد علاقتها باللغات المنتظمة. إنّ مجموعة التعابير المنتظمة على الأبجدية A يعرف استقرائياً بخطوتين على النحو الآتي، حيث $+$ و $\cdot$ هي عمليات ثنائية والعملية $*$ أحادية.

التعابير المنتظمة

1- إنّ Λ و ϕ هي تعابير منتظمة، كما أنّ a تعبير منتظم من أجل كل العناصر a من A.

2- إذا كانت R وS تعابير منتظمة، فإنّ التعابير الآتية:

$$(R), R + S, R \cdot S, R^*$$

هي تعابير منتظمة.

مثال (7-42):

نعرض في هذا المثال بعضاً من التعابير المنتظمة على الأبجدية: $A = \{a, b\}$ المأخوذة من مجموعة غير منتهية من التعابير المنتظمة على هذه الأبجدية:

$$\Lambda, \phi, a, b, \Lambda + b, b^*, a + (b \cdot a), (a + b) \cdot a, ab^*, a^* + b^*$$

ولتفادي استخدام أقواس كثيرة متعددة، نفرض أنّ الأولية تكون للعملية (*)، ومن ثم (·) وآخرها العملية (+).

مثال (7-43):

يمكن أن نكتب التعبير المنتظم $a + b \cdot a^*$ من خلال الأقواس بالشكل:

$$(a + (b \cdot (a)^*))$$

سوف نحذف رمز العملية (·) حيث يكون تجاوراً دون أن يحدث ذلك أي التباس. فالتعبير المنتظم السابق، يمكن أن نكتبه بالشكل:

$$a + ba^*$$

وبناءً على ما تقدم من نقاش، فإنّ التعبير المنتظم ما هو إلاّ شريطاً محرفياً من الرموز والتي ليس لها معنى محدداً أو غاية. ومن أجل كل تعبير منتظم E سوف نقوم بربطه بلغة منتظمة $L(E)$ على النحو الآتي آخذين بعين الاعتبار أنّ A أبجدية وإنّ R وS تعابير منتظمة ما.

$$L(\phi) = \phi$$
$$L(\Lambda) = \{\Lambda\}$$
$$L(a) = \{a\} : \forall a \in A$$
$$L(R + S) = L(R) \cup L(S)$$
$$L(R \cdot S) = L(R)L(S) \quad \text{جداء اللغات}$$
$$L(R^*) = L(R)^* \quad \text{لصاقة اللغة}$$

من خلال هذا الربط، من الواضح أنّ كل تعبير منتظم يمثل لغة منتظمة، وبالعكس، فإنّ كل لغة منتظمة تمثل تعبيراً منتظماً.

مثال (7-44): على إيجاد اللغة.

سنقوم في هذا المثال بايجاد اللغة من التعبير المنتظم $a + bc^*$. يمكن أن نحسب التعبير $L(a + bc^*)$ على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} L(a + bc^*) &= L(a) \cup L(bc^*) \\ &= L(a) \cup L(b)L(c^*) \\ &= L(a) \cup (L(b)L(c)^*) \\ &= \{a\} \cup (\{b\}\{c\}^*) \\ &= \{a\} \cup (\{b\}\{\Lambda, c, cc, \cdots, c^n, \cdots\}) \\ &= \{a\} \cup \{b, bc, bcc, \cdots, bc^n, \cdots\} \\ &= \{a, b, bc, bcc, \cdots, bc^n, \cdots\} \end{aligned}$$

تعطي التعابير المنتظمة مفاتيحَ وصفية رائعة للغات التي تمثلها.

مثال (7-45):

يمثل التعبير المنتظم $a + bc^*$ لغة تتضمن الحرف الوحيد a أو الأشرطة المحرفية من الشكل b متبوعة بحدوث c بصفر أو أكثر من المرات. قد يحدث في بعض الأوقات وجود مشكلة بسيطة عند إيجاد التعبير المنتظم للغة المنتظمة.

مثال (7-46):

إنّ اللغة $\{a, b, c\}$ تمثل بتعبير منتظم $a + b + c$ وكحقيقة قائمة فإنه من السهل أن نجد التعبير المنتظم من أجل أية لغة منتهية. فإذا كانت اللغة خالية، فإنّ التعبير المنتظم المقابل هو ϕ. من ناحية أخرى إنّ شكل التعبير المنتظم المكون من أشرطة محارف في اللغة مفصولة بالرموز $+$.

أمّا اللغات غير المنتهية فهنالك قصة أخرى. فيمكن للغة غير المنتهية أن تكون غير منتظمة. وتجدر الإشارة إلى أن العديد من اللغات الغير منتهية يتم التأكد بسهولة من أنها لغات منتظمة.

مثال (7-47):

إنّ اللغة $\{a, aa, aaa, \cdots, a^n, \cdots\}$ لغة منتظمة، لأنها تكتب كلغة منتظمة من الشكل $\{a\}\{a\}^*$، والتي تمثل بتعبير منتظم يأخذ الشكل aa^*.

مثال (7-48):

إنّ اللغة الآتية:

$$\{\Lambda, a, b, ab, abb, \cdots, ab^n, \cdots\}$$

لغة منتظمة وتمثل بالتعبير المنتظم:

$$\Lambda + b + ab^*$$

نطرح الآن السؤال الآتي: هل تمثل التعابير المنتظمة المختلفة لغات مختلفة!؟ إنّ الإجابة على هذا السؤال المهم هي بالنفي.

مثال(7-49):

إنّ التعابير المنتظمة $a + b$ و $b + a$ هي تعابير مختلفة، لكن كلاً من هذه التعابير يمثل اللغة نفسها:

$$L(a + b) = L(b + a) = \{a + b\}$$

ونريد أن نبيّن هنا مفهوم تساوي تعبيرين منتظمين ممثلين للغة واحدة. إذ نقول إنّ التعابير المنتظمة R و S متساوية، إذا كان $L(R) = L(S)$، ونرمز لهذا التساوي من خلال العلاقة المألوفة:

$$R = S$$

مثال (7-50):

نعلم أنّ: $L(a + b) = \{a, b\} = \{b, a\} = L(b + a)$

لذلك يمكن أن نكتب: $a + b = b + a$

كما أنه لدينا المساواة الآتية: $(a + b) + \{a + b\} = a + b$.

مثال (7-51):

لدينا التعابير: $L(ab) = \{ab\}$ ، $L(ab) = \{ba\}$

من الواضح أنّ: $ab \neq ba$

بشكل مشابه نستنتج أنّ: $a(b + c) \neq (b + c)a$

إنّ الأمثلة السابقة تذكرنا بمفهوم الجبر حيث إننا هنا نتعامل مع التعابير واللغات المنتظمة وليس مع الأعداد.

3-8-7 جبر التعابير المنتظمة

هنالك العديد من المتساويات المتعلقة بالتعابير المنتظمة. سوف نعرض لقائمة من هذه المتساويات المتفاوتة من حيث البساطة أو التعقيد. وكل هذه المتساويات هي خواص يمكن التأكد من صحتها باستخدام خواص المجموعات واللغات. سنفرض في البدء أنّ التعابير الثلاث: R, S, T هي تعابير كيفية منتظمة.

خواص التعابير المنتظمة

1- خواص $(+)$

$$R + T = T + R$$
$$R + \phi = \phi + R = R$$
$$R + R = R$$
$$(R + S) + T = R + (S + T)$$

2- خواص $(\cdot)$

$$R\phi = \phi R = \phi$$
$$R\Lambda = \Lambda R = R$$
$$(RS)T = R(ST)$$

3- خواص التوزيع

$$R(S + T) = RS + RT$$
$$(S + T)R = SR + TR$$

خواص الغلاقة $(*)$

4- $\phi^* = \Lambda^* = \Lambda$

5- $R^* = R^*R^* = (R^*)^* = R + R^*$

$$R^* = \Lambda + R^* = (\Lambda + R)^* = (\Lambda + R)R^* = \Lambda + RR^*$$
$$R^* = (R + \cdots + R^k)^*$$

من أجل $k \geq 1$،

$$R^* = \Lambda + R + \cdots + R^{k-1} + R^k + R^*$$

من أجل $k \geq 1$،

$$R^*R = RR^* \quad -6$$
$$(R+S)^* = (R^* + S^*)^* = (R^*S^*)^* = (R^*S^*)R^* = R^*(SR^*)^* \quad -7$$
$$R(SR)^* = (RS)^*R \quad -8$$
$$(R^*S)^* = \Lambda + (R+S)^* \quad -9$$
$$(RS^*)^* = \Lambda + R(R+S)^* \quad -10$$

سوف نقوم بإثبات صحة ثلاث من الخواص السابقة ونترك إثبات الخواص الأخرى كتمارين.

أولاً – سوف نثبت أنّ $R + R = R$، فمن خلال ملاحظة التساوي الآتي:

$$L(R+R) = L(R) \cup L(R) = L(R)$$

ثانياً – سوف نثبت خاصة التوزيع:

$$R(S+T) = RS + RT$$

سنقوم بالاثبات من خلال المتساويات المتتابعة الآتية:

$$L\big(R(S+T)\big) = L(R)L(S+T) = L(R)\big(L(S) \cup L(T)\big)$$
$$= L(R)L(S) \cup L(R)L(T) = L(RS) \cup L(RT) = L(RS+RT)$$

ثالثاً – نثبت صحة الخاصة $R^* = R^*R^*$

بما أنّ $L(R^*) = L(R)^*$ فإنه ينبغي أن نبيّن صحة المساواة:

$$L(R^*) = L(R)^*L(R)^*$$

لتكن x من $L(R)^*$، فبالتالي إنّ $x = x\Lambda$، وهذا يعني أنّ $x = x\Lambda \in L(R)^*L(R)^*$.

لذلك فإننا نستنتج صحة الاحتواء الأول: $L(R)^*L(R)^* \subseteq L(R)^*$.

ومن أجل الاتجاه الآخر، فإننا نفرض أنّ x تنتمي إلى $L(R)^*L(R)^*$، فهذا يعني أنّ x تكتب بالشكل: $x = yz$.

حيث y من $L(R)^*$ و z من $L(R)^*$. وعلى هذا فإنّ y تنتمي إلى $L(R)^n$ و z تنتمي إلى $L(R)^n$ وذلك من أجل أعداد ما مثل k وn. لذلك فإنّ yz ينتمي إلى $L(R)^{n+k}$، والتي تعني أنّ yz ينتمي إلى $L(R)^*$. من ذلك نستنتج صحة الاحتواء الثاني:

$$L(R)^*L(R)^* \subseteq L(R)^*$$

من الاحتوائين الأول والثاني نجد:

$$L(R)^* = L(R)^* L(R)^*$$

لذلك: $R^* = R^* R^*$

إنّ الخواص الواردة في جبر التعابير المنتظمة يمكن أن تستخدم في تبسيط التعابير المنتظمة وفي إثبات تساوي التعابير المنتظمة.

مثال (7-52):

نفرض أنّنا نريد إثبات المساواة الآتية:

$$ba^*(baa^*)^* = b(a + ba)^*$$

بما أنّ التعبيرين يبدآن بالحرف b، فإننا سنقوم بهذا الإثبات إذا استطعنا إثبات صحة المساواة الأبسط التي تنتج من حذف b من الطرفين:

$$a^*(baa^*)^* = (a + ba)^*$$

واستناداً إلى الخاصة 7 في جبر التعابير المنتظمة وبافتراض أنّ $R = a$ وأنّ $S = ba$، بالتالي لدينا:

$$(a + ba)^* = (R + S)^* = R^*(SR^*)^* = a^*(baa^*)^*$$

لذلك المساواة صحيحة.

مثال (7-53):

سوف نقوم بإثبات صحة المساواة:

$$(\phi + a + b)^* = a^*(ba^*)^*$$

نبدأ من الطرف الأيسر ونستخدم خواص التعابير المنتظمة:

$(\phi + a + b)^* = (a + b)^*$ الخاصة (1).

$= a^*(ba^*)^*$ الخاصة (7).

مثال (7-54):

لنبيّن أنّ التعبيرين المنتظمين متساويان:

$$b^*(abb^* + aabb^* + aaabb^*)^* = (b + ab + aab + aaab)^*$$

نبدأ من الطرف الأيسر ونستخدم خواص التعابير المنتظمة:

$$b^*(abb^* + aabb^* + aaabb^*)^* = b^*\big((ab + aab + aaab)b^*\big)^*$$

وذلك من خلال الخاصة 3.

$$= (b + ab + aab + aaab)^*$$ استناداً إلى الخاصة 7.

مثال (7-55):

سنبيّن أنّ:

$$R + RS^*S = a^*bS^*$$

حيث إن: $R = b + aa^*b$ و S أيّ تعبير منتظم.

نلاحظ أنّ:

$$\begin{aligned}
R + RS^*S &= R\Lambda + RS^*S && (\text{الخاصة } 2)\\
&= R(\Lambda + S^*S) && (\text{الخاصة } 3)\\
&= R(\Lambda + SS^*) && (\text{الخاصة } 6)\\
&= RS^* && (\text{الخاصة } 5)\\
&= (b + aa^*b)S^* && (\text{تعريف } R)\\
&= (\Lambda + aa^*)bS^* && (\text{الخاصة } 2 \text{ و } 3)\\
&= a^*bS^* && (\text{الخاصة } 5)
\end{aligned}$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد اللغة التي تصف كل تعبير من التعابير المنتظمة الآتية:

أ) $a + b$ ب) $a + bc$ جـ) $a + b^*$

د) $ab^* + c$ هـ) $ab^* + bc^*$ و) $a^*bc^* + ac$

2- أوجد التعابير المنتظمة التي تصف كلاً من اللغات الآتية:

أ) $\{a, b, c\}$

ب) $\{aa, ab, ac\}$

ج) $\{a, b, ab, ba, abb, baa, \cdots, ab^n, ba^n, \cdots\}$

د) $\{a, aaa, aaaaa, \cdots, a^{2n+1}, \cdots\}$

هـ) $\{\Lambda, a, abb, abbbb, \cdots, ab^{2n}, \cdots\}$

و) $\{\Lambda, a, b, c, aa, bb, cc, \cdots, a^n, b^n, c^n, \cdots\}$

ز) $\{\Lambda, a, b, ca, bc, cca, bcc, \cdots, c^n a, bc^n, \cdots\}$

ر) $\{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{b^{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$

ل) $\{a^m bc^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

3- أوجد التعبير المنتظم على الأبجدية $\{0, 1\}$ لوصف مجموعة كل الأعداد الثنائية دون الأصفار. أي إنّ اللغة هي: $\{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \cdots\}$.

4- أوجد التعبير المنتظم من أجل كل من اللغات الآتية على الأبجدية $\{a, b\}$:

أ- لأشرطة المحارف طول زوجي.

ب- لأشرطة المحارف طولاً من مضاعفات 3.

ت- تحوي أشرطة المحارف على الشريط المحرقي الجزئي aba.

ث- في أشرطة المحارف: عدد فردي من a.

5- بسط كل من التعابير المنتظمة.

أ) $\Lambda + ab + abab(ab)^*$

ب) $aa(b^* + a) + a(ab^* + aa)$

جـ) $a(a + b)^* + aa(a + b)^* + aaa(a + b)^*$

6- أثبت صحة المتساويات الآتية للتعابير المنتظمة:

أ) $b + ab^* + aa^*b + aa^*ab^* = a^*(b + ab)^*$

ب) $a^*(b + ab^*) = b + aa^*b^*$

جـ) $ab^*a(a+bb^*a)^*b = a(b+aa^*b)^*aa^*b$

7- أثبت صحة كل من المتساويات الآتية للتعابير المنتظمة:

أ) $\phi^* = \Lambda^* = \Lambda$

ب) $R^* = (R^*)^* = R + R^*$

جـ) $R^* = \Lambda + R^* = (\Lambda + R)^* = (\Lambda + R)R^* = \Lambda + RR^*$

د) $R^* = (R + \cdots + R^k)^*$ من أجل كل القيم $k \geq 1$.

هـ) $(R^*S)^* = \Lambda + (R+S)^*S$

و) $(R+S)^* = (R^* + S^*)^* = (R^*S^*)^* = (R^*S)^*R^* = R^*(SR^*)^*$

ز) $R(SR)^* = (RS)^*R$

Damascus University

الفصل الثامن

8- مقدمة في الأتوماتات المنتهية وآلة تورينغ

إن الأتومات (automaton) جهاز يميز أو يقبل عناصر معينة من A^*، حيث إن A تمثل أبجدية منتهية. إن الأتومات (automata) المختلفة تميز أو تقبل عناصر مختلفة من A^*. والمجموعة الجزئية من عناصر A^* التي قبلت بواسطة الأتومات M تمثل لغة، تدعى بلغة على A قبلت بواسطة M ويرمز لها من خلال $M(L)$.

8-1 الأتوماتات المنتهية

إذا أعطيت أبجدية منتهية وأتومات يتكون من مجموعة S من الحالات، بالإضافة إلى التابع $F: A \times S \to S$ الذي ندعوه بتابع الانتقال (transition function). تتضمن المجموعة S عنصراً مثل s_0 بالإضافة إلى حالة قبول أو أكثر.

نرمز للأتومات M من خلال الخماسية (A, S, s_0, T, F)،حيث إن:

- A: أبجدية منتهية.
- S: مجموعة منتهية من الحالات.
- s_0: الحالة الابتدائية (initial state) .
- T: مجموعة حالات القبول (acceptance states) وتدعى أيضاً بالحالات النهائية (final states).
- F: تابع الانتقال.

نلاحظ أن دخل التابع F هو عنصر من A وحالة من الحالات المنتمية إلى S. أما خرج التابع F هو حالة من S. إذا كان الأتومات في الحالة s ويقرأ العنصر a من A فإن الثنائية

(a, s) تمثل الدخل للتابع ويكون $F = \{a, s\}$ عبارة عن الحالة التالية للحالة s. نستطيع أن نعتبر أن الأتومات يبدأ من الحالة s_0. إذا قرأ الأتومات العنصر a من A، فإنه ينتقل إلى الحالة $s = F(s_0, a)$، إذا قرأ الأتومات الآن الحالة $s = F(s_0, b)$. لأجل ذلك طالما أن الأتومات يقوم بقراءة عناصر الأبجدية A، فإنه ينتقل من حالة إلى أخرى. إذا كانت M أتومات مع الأبجدية $A = \{a, b\}$ ومجموعة الحالات هي $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ وعرف F من خلال الجدول الموضح بالشكل (8-1)

F	s_0	s_1	s_2
a	s_1	s_1	s_2
b	s_2	s_2	s_0

الشكل (8-1)

بفرض أن M يقرأ العنصر a ثم b بعد ذلك a. وبما أن الأتومات يبدأ من الحالة s_0 والعنصر المقروء هو a و $F(a, s_0) = s_1$ فبالتالي هذا يعني أن الأتومات الآن في الحالة s_1. العنصر التالي المقروء هو b و $F(b, s_1) = s_2$. أخيراً العنصر a هو آخر عنصر مقروء وبما أن $F(a, s_2) = s_2$، فإن الأتومات يبقى في الحالة s_2.

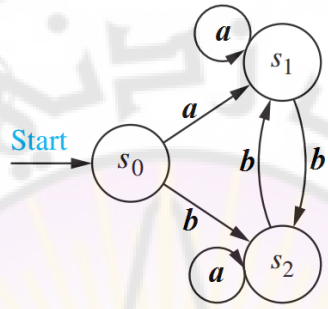
يمكن أيضًا أن نضع F في شكل مجموعة من القواعد على النحو الآتي:

- إذا كان في الحالة s_0 والعنصر a مقروءًا، اذهب إلى s_1.
- إذا كان في الحالة s_1 والعنصر a مقروءًا، اذهب إلى s_1.
- إذا كان في الحالة s_2 والعنصر a مقروءًا، اذهب إلى s_2.
- إذا كان في الحالة s_0 والعنصر b مقروءًا، اذهب إلى s_2.
- إذا كان في الحالة s_1 والعنصر b مقروءًا، اذهب إلى s_2.
- إذا كان في الحالة s_2 والعنصر b مقروءًا، اذهب إلى s_1.

من الأفضل أن يتم إظهار الأتوماتات صوريًا من خلال مخطط الحالة (state diagram)، وهذا المخطط هو بيان موجه، تمثل الحالات فيه من خلال العقد، وتُعلّم

الضلع الموجهة من s إلى s' بعنصر، لنقل مثلاً على أنّ العنصر a من الأبجدية A، إذا كان $F(a,s)=s'$. فإن الضلع الموجهة المعلمة بالعنصر a ندعوها بالضلع a.

يوضح الشكل (8-2) مخطط الحالة للأتومات السابق.



الشكل (8-2)

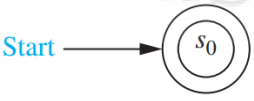
يجب أن نشير إلى أن تمثيل الأتومات من خلال مخطط الحالة على أنه بيان موجه هو ليس كذلك بدقة، كما سبق وعرفنا البيان الموجه ذلك لأنه يمكن أن يوجد أكثر من ضلع موجهة واحدة من حالة واحدة إلى أخرى لذلك من الأدق أن نقول إنه لدينا بيانات موجهة معلمة (labeled diagrphs).

إن الأتومات الذي يقرأ الشريط المحرفي: $a_0\ a_1\ a_2 \cdots a_n$

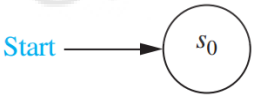
من A^*، يقوم أولاً بقراءة a_0 ومن ثم يقرأ a_1 وهكذا إلى أن تتم قراءة a_n. وكما سبق وأشرنا فإن بعض الحالات قد صممت لتكون حالات قبول.

ويقوم الأتومات بقبول أو تمييز $a_0\ a_1\ a_2 \cdots a_n$ بعد قيامه بقراءة كافة العناصر في الشريط وصولاً إلى a_n. وينتهي الأتومات في حالة قبول.

إذا كانت s هي الحالة الابتدائية، فإننا نظهر العقدة الموافقة لها من خلال الشكل (8-3). وإذا كانت s حالة قبول، فإننا نظهر العقدة الموافقة لها من خلال الشكل (8-4).



الشكل (8-4)

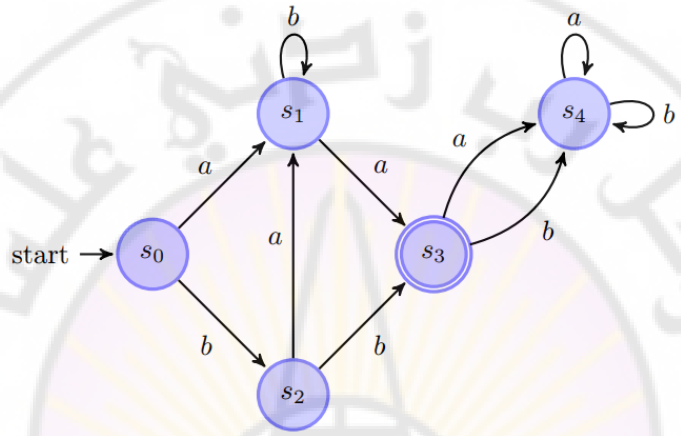


الشكل (8-3)

مثال (8-1):

في الأتومات المعطى مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-5):

- s_0 هي حالة ابتدائية.
- s_3 هي حالة قبول.



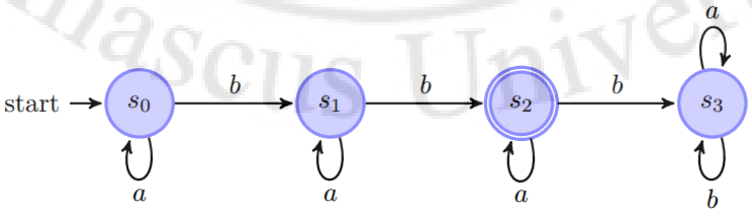
الشكل (8-5)

يقبل الشريط المحرفي $b\ a\ a$، لأنه بعد قراءة b فإنه في الحالة s_2 وبعد قراءة a فإنه في الحالة s_1. ثم بعد قراءة a الثانية، فإنه في الحالة s_3، والتي هي حالة قبول. يمكن أن ننظر كيف يقبل كل من $a\ b\ b\ b\ a$ و $b\ b$.

وكيف لا تقبل الأشرطة: $b\ b\ b,\ a\ b\ a\ b,\ a\ b\ b$. وكما نوهنا فإن مجموعة كل الأشرطة المقبولة بوساطة الأتومات، تدعى بدقة قبلت بوساطة الأتومات.

مثال (8-2):

ننظر في الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-6):



الشكل (8-6)

من الواضح أنه يقبل الشريط $b\ b$. في كل حالة، بما أنه يوجد حلقة من أجل a فإنه بقراءة a لا تتغير الحالة. إن هذا يخولنا من قراءة التعددات في a كما نشاء قبل قراءة b أخرى. لذلك إن الأتومات يقرأ شرائط مثل:

$$a\,a\,b\,a\,b\,a\,a,\ b\,a\,a\,b\,a\,b,\ b\,a\,a\,a\,b,\ b\,a\,b\,a\,a\,a,\ a\,a\,b\,a\,a\,b\,a\,a$$

وفي الحقيقة نستطيع قراءة أي شريط في لغة موصوفة بالتعبير النظامي:

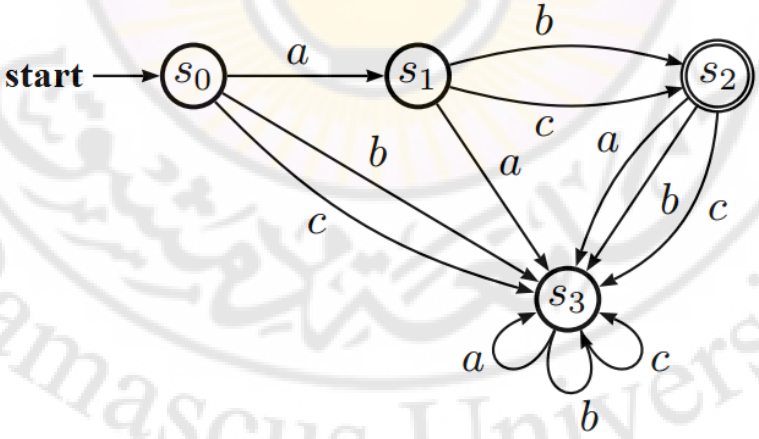
$$a^*\,b\,a^*\,b\,a^*$$

بما أن $a = \{a, b\}$، فإنه يمكننا أن نصف هذه اللغة على أنها مجموعة كل الشرائط الحاوية على عنصرين b بالضبط.

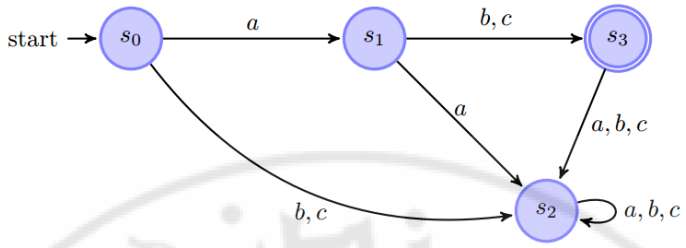
إن الحالة s_4 هي مثال على الحالة الماصة (sink state) ولمرة واحدة يكون الأتومات في هذه الحالة الماصة، ولا يمكنه الخروج منها ثانيةً.

مثال (8-3):

لندرس الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-7)، الذي يبسط لتخفيف عدد الأضلاع فيه من خلال الشكل (8-8).



الشكل (8-7)

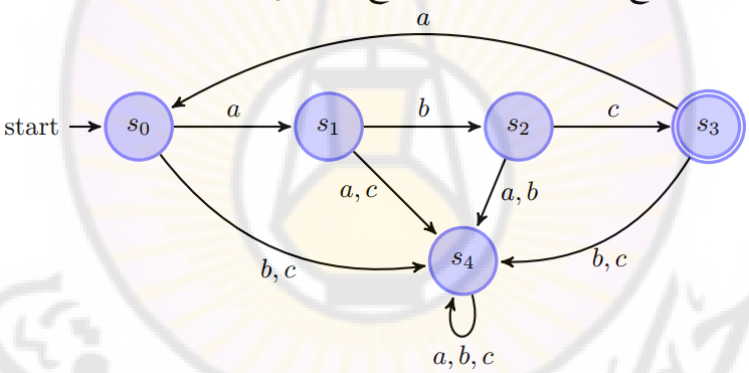


الشكل (8-8)

من الواضح أن هذا الأتومات يقبل الشرطين $a\ b$ و $a\ c$ فقط. ويمكن للغة أن توصف من خلال التعبير النظامي: $a(b \vee c)$

مثال (8-4):

لندرس الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-9)

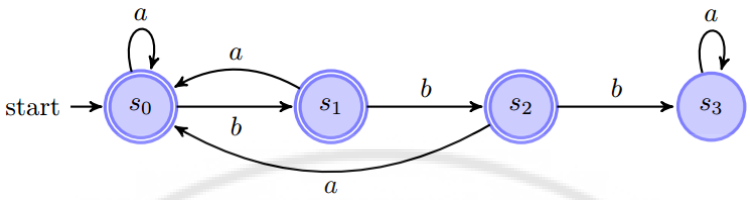


الشكل (8-9)

ينبغي أن تكون بداية أي شريط $a\ b$ ونهايته c. على الرغم من أن الحلقة $a\ a\ b\ c$ يمكن أن تتكرر كما نشاء لأنها تبدأ وتنتهي عند s_4. لأجل ذلك فإن التعبير النظامي لهذا الأتومات هو: $a\ b\ c\ (a\ a\ b\ c)^*$

مثال (8-5):

لندرس الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-10).



الشكل (8-10)

إذا تم قراءة ثلاث متتاليات للعنصر b في هذا الأتومات، فإن هذا الأتومات يكون في الحالة s_3، وهي حالة ماصة. وهذا هو الطريق الوحيد للحصول على s_3 وأية حالة أخرى هي حالة قبول. لذلك فإن اللغة التي قبلت بواسطة الأتومات تتكون من كل الشرائط التي لا تتضمن ثلاث متتاليات للعنصر b.

إن الأتوماتات التي ناقشناها، غالباً ما تدعى بالأتوماتات المنتهية الحتمية (DFAs: Deterministic Finite Automata) لأنه في كل حالة ومن أجل أية قيمة من الأبجدية التي تقرأ، توجد حالة وحالة واحدة فقط.

بكلمات أخرى، ذلك لأن $F: A \times S \to S$ تابع. إذا اعتبرنا ثانية أن F هو مجموعة من القوانين والقواعد، وأعطيت $a \in A$ و $s \in S$، يمكن أن تسمح القوانين والقواعد بالتقدم إلى كل عدة حالات أو يمكن أن لا يكون هنالك قانوناً أو قاعدة تسمح بالذهاب إلى أية حالة. في الوضع الأخير إن الأتومات ينتهي ويمكن أن يستأنف لا أكثر.

يدعى الأتومات الذي ليس من الضروري أن يكون فيه F تابعاً بالأتومات المنتهي اللاحتمي: (Nondeterinistic Finite Automaton «NFA») اختصاراً سوف نقوم باستخدام مصطلح الأتومات الحتمي ومصطلح الأتومات اللاحتمي داخل هذا الفصل.

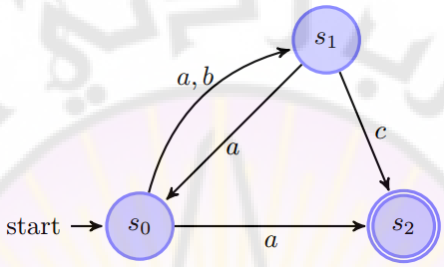
مثال (8-6):

إن الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-11) هو أتومات لا حتمي.

إذا قرأ في الحالة s_0 العنصر a فإن الأتومات يمكن أن يكون في أي من الحالتين s_1 أو s_2.

إذا كان الأتومات في الحالة s_1 يقرأ العنصر b، فإن الأتومات ينتهي، لأنه لا توجد ضلع b خارجة من الحالة s_1.

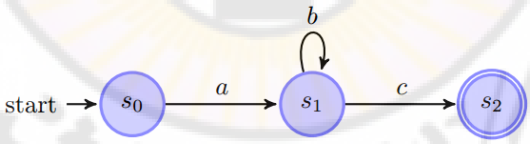
نلاحظ أنه من خلال تعريفنا لمجموعة الأتوماتات الحتمية فإنها مجموعة محتواة في مجموعة الأتوماتات اللاحتمية.



الشكل (8-11) أتومات لا حتمي

مثال (8-7):

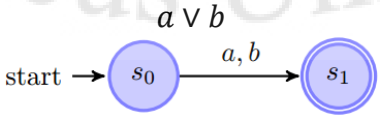
من السهل أن نرى الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-12)، يقبل اللغة ذات التعبير النظامي: $a\,b^*\,c$



الشكل (8-12)

مثال (8-8):

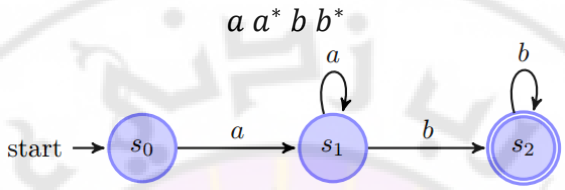
إن الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-13)، يقبل اللغة ذات التعبير النظامي:



الشكل (8-13)

مثال (8-9):

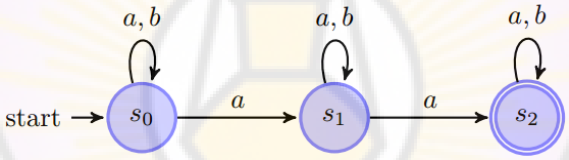
إن الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-14)، يقبل اللغة ذات التعبير النظامي:



الشكل (8-14)

مثال (8-10):

إن الأتومات مع مخطط الحالة الموضح بالشكل (8-15)، يقبل اللغة المكونة من الشرائط الحاوية عنصرين a على الأقل.



الشكل (8-15)

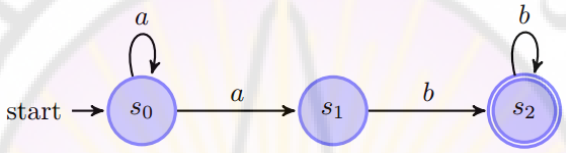
تنويه: من الأسهل استخدام الأتوماتات اللاحتمية لأننا لا نحتاج إلى تضمين أضلاع غير مفيدة. بشكل خاص، سنرى في بعض الإنشاءات التالية أنه من الأسهل بكثير أن نستخدم الأتومات اللاحتمية. من الواضح أن أية لغة قبلت بوساطة أتومات حتمي، هي أيضاً تقبل بوساطة أتومات لا حتمي. ذلك لأن مجموعة الأتوماتات الحتمية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأتوماتات اللا حتمية.

توضح النظرية الآتية أنّ أيّ لغة قبلت بوساطة أتومات لا حتمي، هي أيضاً قد قبلت بوساطة أتومات حتمي.

نظرية (8-1)

من أجل كل أتومات لا حتمي، يوجد أتومات حتمي مكافئ يقبل اللغة نفسها.

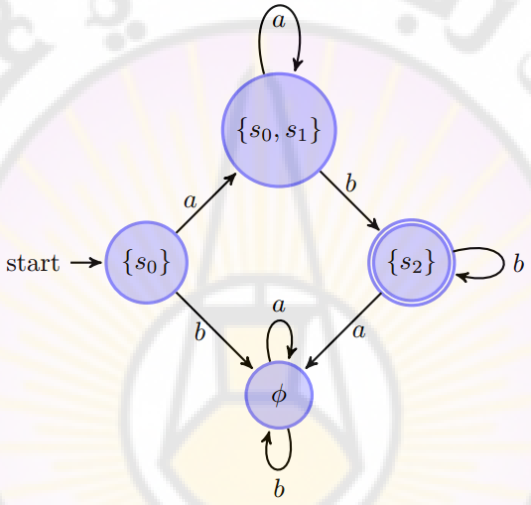
سوف نعرض كيف يمكن إنشاء الأتومات الحتمي الذي يقبل اللغة التي قبلت بوساطة الأتومات اللا حتمي.! إذا كانت S مجموعة حالات الأتومات غير الحتمي، فسوف نستخدم عناصر من Power(S) (مجموعة قوى S) أي مجموعة جزئية من S على أنها الحالات للأتومات الحتمي الذي نقوم ببنائه لننظر في الأتومات اللا حتمي N الموضّح بالشكل (8-16).



الشكل (8-16)

لتكن $\{s_0\}$ حالة البدء. لننشئ الضلع a من $\{s_0\}$ إلى مجموعة كل الحالات بحيث تكون الضلع b موجودة من s_0 إلى ذات الحالة. بالتالي توجد الضلع a من الحالة s_0 إلى s_0 والضلع a من s_0 إلى s_1 وعلى هذا فإننّا أنشأنا الضلع a من $\{s_0\}$ إلى $\{s_0, s_1\}$. ولا توجد الضلع b من s_0 إلى أية حالة. بالتالي فإننّا أنشأنا الضلع b من $\{s_0\}$ إلى المجموعة الخالية ϕ. لننظر الآن في الحالة $\{s_0, s_1\}$. لننشئ الضلع a من $\{s_0, s_1\}$ إلى مجموعة كل الحالات بحيث تكون الضلع a موجودة من أيّ من s_0 أو s_1 إلى ذات الحالة بذلك نكون قد أنشأنا الضلع a من $\{s_0, s_1\}$ إلى ذاتها. ننشئ الآن الضلع b من $\{s_0, s_1\}$ إلى مجموعة كل الحالات بحيث تكون الضلع b موجودة، أي من s_0 أو s_1 إلى ذات الحالة. بذلك نكون قد أنشأنا الضلع b من $\{s_0, s_1\}$ إلى $\{s_2\}$. ونظراً لعدم وجود أضلاع a أو ضلع b من أية حالة في المجموعة الخالية إلى أية حالة أخرى، فإننا نكون قد أنشأنا ضلعاً a وضلعاً b من المجموعة الخالية إلى ذاتها. نعير اهتمامنا الآن إلى $\{s_2\}$. بما أنه لا توجد ضلع a من s_2 إلى أية حالة أخرى، فإننّا ننشئ ضلعاً a من $\{s_2\}$ إلى المجموعة الخالية. ولأنّ الضلع b هي فقط من s_2 إلى ذاتها، فإننّا

ننشئ الضلع b من $\{s_2\}$ إلى ذاتها. إنّ الحالة (الحالات) الطرفية تتكون من كل المجموعات التي تتضمن عنصراً من المجموعة الطرفية في N. بالتالي فإنّ $\{s_2\}$ هي عبارة عن حالة طرفية. بذلك نكون قد أكملنا مخطط الحالة الموضّح بالشكل (8-17) والذي يبدو بسهولة على أنه مخطط حالة الأتومات حتمي. ويقرأ هذا الأتومات اللغة نفسها التي يقرؤها N، وهذه اللغة موصوفة بالتعبير: a^*abb^*



الشكل (8-17)

عامّة لدينا الإجراء الآتي لبناء الأتومات الحتمي انطلاقاً من أتومات لا حتمي:

1- نبدأ بالحالة $\{s_0\}$ حيث إنّ s_0 هي الحالة الابتدائية للأتومات اللا حتمي.

2- من أجل كل a_i من A نقوم بإنشاء الضلع a_i من $\{s_0\}$ إلى مجموعة كل الحالات بحيث تكون الضلع a موجودة من s_0 إلى ذات الحالة.

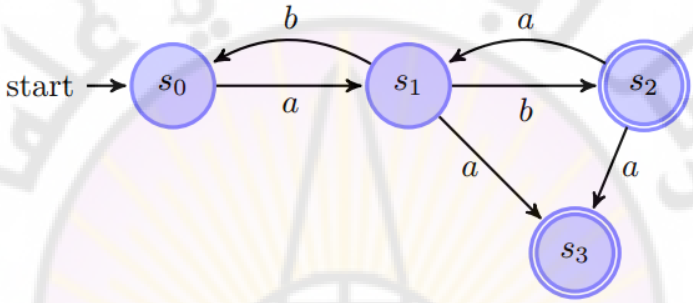
3- من أجل كل مجموعة جديدة الإنشاء من الحالات s_j ومن كل a_i من A نقوم بإنشاء الضلع a_i من s_j إلى مجموعة كل الحالات بحيث تكون الضلع a_i موجودة من عنصر من s_j إلى ذات الحالة.

4- نستمر بهذا الإجراء إلى أن لا تبقى حالات يمكن بناؤها.

5- نجعل كل مجموعة من الحالات s_j التي تحوي عنصراً من مجموعة طرفية للأتومات اللا حتمي حالة طرفية.

مثال (8-11):

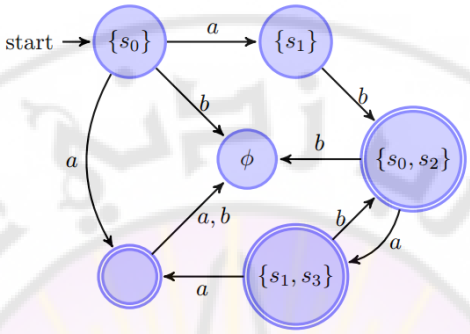
إذا أعطي الأتومات اللا حتمي الموضّح بالشكل (8-18). لنوجد الأتومات الحتمي الموافق له.



الشكل (8-18)

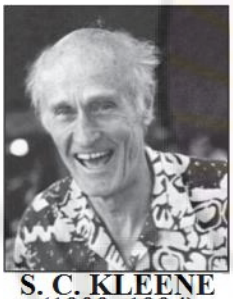
نظراً لوجود الضلع a من s_0 إلى s_1، فإنّنا ننشئ الضلع a من $\{s_0\}$ إلى $\{s_1\}$. ونظراً لعدم وجود الضلع b من s_0 إلى أية حالة أخرى، فإنّنا ننشئ الضلع b من s_0 إلى المجموعة الخالية ϕ. ولوجود ضلع a من s_1 إلى s_3، فإنّنا ننشئ الضلع a من $\{s_1\}$ إلى $\{s_3\}$. ولوجود الضلع b من s_0 إلى s_0 ومن s_1 إلى s_2، فإنّنا ننشئ الضلع b من $\{s_1\}$ إلى $\{s_0, s_2\}$. ونظراً لعدم وجود أضلاع من إلى أية حالة أخرى، فإنّنا ننشئ الضلع a والضلع b من إلى المجموعة الخالية. توجد أضلاع a من s_0 إلى s_1 ومن s_2 إلى s_1 ومن s_2 إلى s_3، لذلك ننشئ الضلع a من $\{s_0, s_2\}$ إلى $\{s_1, s_3\}$. ولعدم وجود أضلاع b من أي من s_0 أو s_2 إلى حالة أخرى، فإنّنا ننشئ الضلع b من $\{s_0, s_2\}$ إلى المجموعة الخالية. كما توجد الضلع a من s_1 إلى s_3، لذلك ننشئ الضلع a من $\{s_1, s_3\}$ إلى $\{s_3\}$. إنّ الأضلاع b موجودة من s_1 إلى s_0 ومن s_1 إلى s_2، لذلك

ننشئ الضلع b من $\{s_1, s_3\}$ إلى $\{s_0, s_2\}$. بذلك نكون قد أتممنا إنشاء الأتومات الحتمي الموضّح بالشكل (8-19).



الشكل (8-19)

سوف نقوم من خلال النظرية الآتية بتجميع ما درسناه عن اللغات النظامية والأتوماتات.

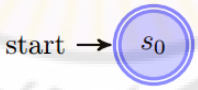

S. C. KLEENE
(1909–1994)

تدعى هذه النظرية بنظرية كلين (Kleene's Theorem).

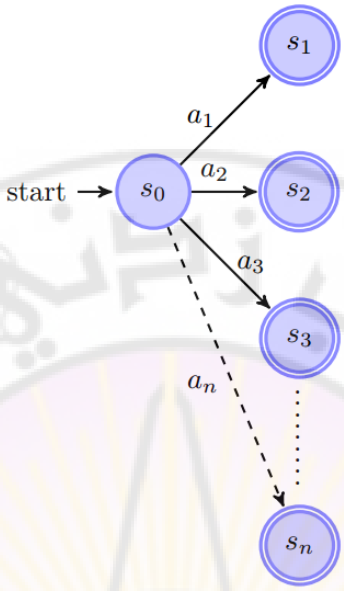
نظرية (8-2)

تكون اللغة نظامية إذا وفقط إذا كانت مقبولة بوساطة الأتومات.

الإثبات: نبيّن أولاً أنّ اللغة النظامية تقرأ بوساطة الأتومات. إنّ اللغة المكونة من مجموعة خالية تقبل بوساطة الأتومات الآتي:



إنّ مجموعة العناصر المنتهية $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ تقبل بواسطة الأتومات الآتي:



فيما يلي نحتاج إلى أن نبيّن أننا نستطيع إيجاد أتومات من أجل ضم لغتين. إذا أعطيت الأتوماتات:

- $M_1\{A, S, s_0, T, F\}$ الذي يقبل اللغة L.
- $M_2\{A, S', s_0', T', F'\}$ الذي يقبل اللغة L'.
- $M_3\{A, S'', s_0'', T'', F''\}$ الذي يقبل اللغة LL'.

لقد وضعنا M_2 بعد M_1.

لتكن: $\{s_2\}$

$$S'' = S \cup S'$$
$$T'' = T'$$
$$F'' = F \cup F''$$

ومع قوانين الإضافة المعطاة على النحو الآتي:

إذا وجدت ضلع a من الحالة s في S إلى حالة في T، نضيف ضلع من s إلى s_0''.

من السهل أن نرى أنّ هذا الأتومات يقبل اللغة LL'.

بعد ذلك ينبغي أن نبيّن أنه إذا كان الأتومات $M_1\{A, S, s_0, T, F\}$ الذي يقبل اللغة L، فإنه يوجد أتومات يقبل $M_2\{A, S', s_0', T', F'\}$ والذي يقبل اللغة L^*. لهذين الأتوماتين حالة البدء نفسها، وحالات القبول نفسها.

نضيف الآن الحالات الآتية لـ F. إذا وجدت ضلع a من الحالة s إلى حالة قبول t، فإننّا نضيف ضلع a من s إلى حالة البدء s_0. من السهل أن نرى أنّ هذا يمثل الأتومات المطلوب.

أخيراً، نحتاج إلى أن نبيّن أنه من أجل الأتوماتات المعطاة: M_1 وM_2 التي تقبل على الترتيب اللغات L وL'، يوجد أتومات يقبل اللغة $L \cup L'$. إنّ هذا الأتومات هو:

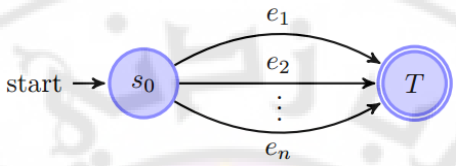
$$M = (A, S \times S', s_0 \times s_0', T', F')$$

أساساً نقوم بقراءة العناصر، ونتحرك من زوج واحد من الحالات إلى آخر إلى أن تكون واحدة من الحالات حالة نهائية، وعندها نقبل الشريط. نعرف F على النحو التالي: نبدأ في الحالة $s_0 \times s_0'$. إذا كنا في الحالة $s_1 \times s_2$ نقرأ a وهنالك أضلاع a من s_1 إلى s_1' في M_1 ومن s_2 إلى s_2' في M_2، فإننّا نعرف ضلع a من $s_1 \times s_2$ إلى $s_1' \times s_2'$. نستمر بقراءة العناصر إلى أن يتم الوصول إلى $s_n \times s_m$ حيث إن أي من s_m أو s_n هي عبارة عن حالة قبول في الأتومات المنتمية إليه. عندما يحدث ذلك، تكون $s_n \times s_m$ حالة قبول في M. نستمر بقراءة العناصر إلى أن يقبل الشريط في واحد من الأتوماتين.

نبيّن الآن أنه إذا أعطينا أتومات، فإننّا نستطيع إنشاء لغة مقبولة بواسطة هذا الأتومات. لأجل هذه الغاية سوف نستخدم بيانات النقل، التي تقرأ الشرائط المحرفية من A أكثر من عناصر A. سوف يكون لدينا قاعدة لقراءة الحالة الفارغة، والتي تعني تغير الحالات دون قراءة أي شيء. لنفرض أنه يوجد حالة قبول واحدة فقط. إذا وجدت أكثر من

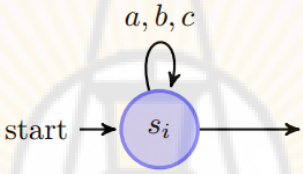
واحدة من حالة القبول الجديدة واستخدام الشريط الخالي لتحصل من حالات القبول القديمة إلى حالة قبول وحيدة جديدة.

نرغب القيام بحذف حالات وإنشاء شرائط محرفية إلى أن يكون لدينا:

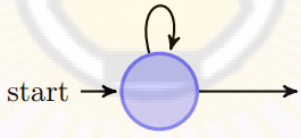


الذي يقبل التعبير: $e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee \cdots \vee e_n$ من أجل حذف s_i نستخدم القواعد الآتية إلى حين الحصول على الشكل المطلوب:

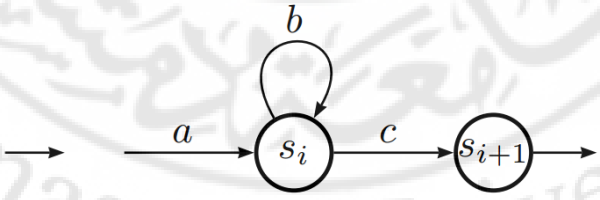
1- إذا كان:



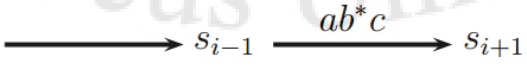
حادثاً، نستبدله من خلال:



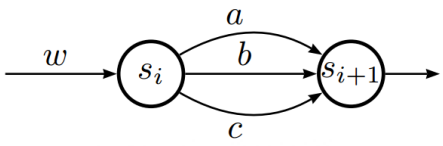
2- إذا كان المخطط:



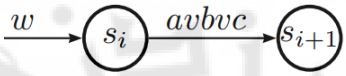
حادثاً، نستبدله من خلال:



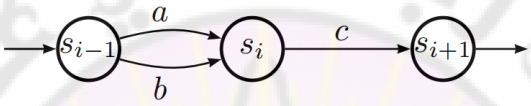
3- إذا كان المخطط:



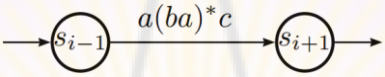
حادثاً، نستبدله من خلال:



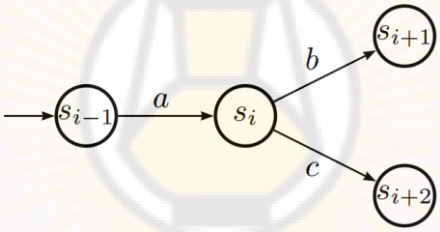
4- إذا كان المخطط:



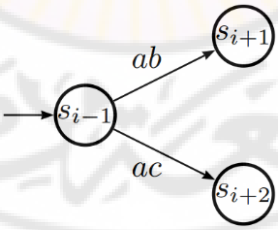
حادثاً، نستبدله من خلال:



5- إذا كان المخطط:



حادثاً، فإنّنا نستبدله بالمخطط:

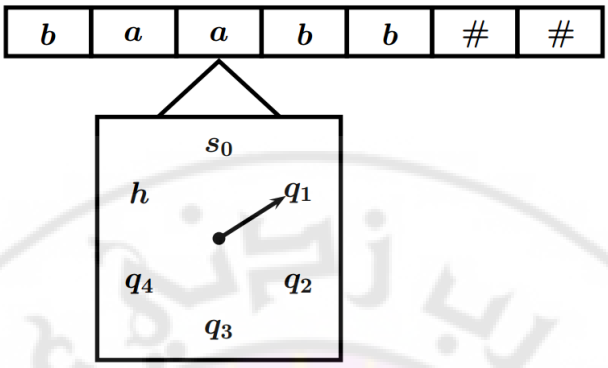


8–2 آلة تورينغ (Turing Machine)

A. M. TURING
(1912–1954)

إنّ آلة تورينغ هي آلة نظرية تبدو وكأنها بدائية بسيطة وقوية بشكل غير معقول يثير الإعجاب بالنسبة للوظائف التي تؤديها. إنّ لهذه الآلة أبجدية دخل A، ومجموعة من الحالات. وفيها حالتان خاصتان: الحالة الابتدائية s_0 وحالة التوقف h (halt state). تبدأ آلة تورينغ بالحالة الابتدائية s_0 وتوقفات. إذا وصل إلى حالة توقف. لا تحوي هذه الآلة على شريط (tape) بطول لا نهائي من جهة اليمين مع أبجدية خرج p. يمكن لأبجدية الدخل وأبجدية الخرج أن يكون لهما الشكل نفسه. ولن يكون هنالك فقدان للعمومية، إذا افترضنا أنّ هاتين الأبجديتين هما أبجدية واحدة. يتكون الشريط (tape) من سلسلة مربعات فيها رموز من الأبجدية قد تكون قد طبعت أو مسحت. هنالك عدد منتهٍ فقط من المربعات التي يمكن أن تحوي على رموز من أبجدية الدخل أو الخرج. وكل المربعات الواقعة إلى يمين آخر مربع فيه رمز من الأبجديات تعتبر فارغة. تحوي آلة توزيع أيضاً على رأس يقرأ الفراغ أو الرمز من أبجدية الدخل الموجود في مربع من الشريط. بعد قراءة الدخل المتعلق بالحالة الموجودة فيها الآلة، يمكن للرأس أن يقوم بطباعة أو مسح ما في المربع الموجود ومن ثم ينتقل يساراً أو يميناً بمقدار مربع واحد أو أن يبقى في مكانه.

سوف نقوم باستخدام الرمز # للفراغ. يوضّح الشكل (8-20) وضع آلة تورينغ في الحالة q_1 وقراءة:



الشكل (8-20)

لآلة تورينغ مجموعة من القواعد تدل على ما تقوم به الآلة. كمثال على ذلك، إذا كانت القاعدة هي (s_i, a, s_j, b, R) فإنها تقول إنه إذا كانت الآلة في الحالة وتقرأ، فإنها تتغير إلى الحالة تطبع b وتتحرك مربعاً واحداً إلى اليمين أمّا القاعدة $(s_i, a, s_j, \#, L)$، فإنها تقول إنه إذا كانت الآلة في الحالة s_i وتقرأ a، فإنها تتغير إلى الحالة s_j وتمسح الرمز b وتتحرك مربعاً واحداً إلى اليسار.

سنفرض أنّ آلة تورينغ تبدأ من المربع اليساري في الشريط (tape). إذا افترضنا أنّنا نريد الذهاب إلى نهاية السلسلة في الشريط حيث إنّ رموز الدخل والخرج هي من المجموعة $A = \{a, b\}$ لأجل ذلك، لتكن $S = (s_0, s_1, h)$ ولتكن القواعد هي:

$$(s_0, a, s_1, a, R)\ ;$$
$$(s_0, b, s_1, b, R)\ ;$$
$$(s_1, a, s_1, a, R)\ ;$$
$$(s_1, b, s_1, b, R)\ ;$$
$$(s_1, \#, h, \#, \#).$$

من السهولة أن نرى الآلة تقوم بكل بساطة بقراءة الرموز وتتحرك إلى اليمين إلى أن لا يبقى أي رمز للقراءة فتتوقف. سوف ندعو هذا الإجراء (routine) باسم go-end.

سنرى بعد ذلك تحرك الآلة n خطوة إلى اليمين لذلك سنفرض ثانيةً أنّ كلاً من أبجدية الدخل والخرج هي المجموعة $A = \{a, b\}$. لتكن مجموعة الحالات هي:

$S = (s_0, s_1, \cdots, s_n)$ وأنّنا نستخدم القواعد الآتية:

$$(s_0, a, s_1, a, R)\ ;$$
$$(s_1, a, s_2, a, R)\ ;$$
$$\vdots$$
$$(s_{n-1}, a, s_n, a, R)\ ;$$
$$(s_0, b, s_1, b, R)\ ;$$
$$(s_1, b, s_2, b, R)\ ;$$
$$\vdots$$
$$(s_{n-1}, b, s_n, b, R)\ .$$

من السهل أن نرى أنه إذا تم البدء بالحالة s_1 فإنّ كل تطبيق لقاعدة بغض النظر عن الرمز المقروء تتحرك الآلة يميناً وتزداد الحالة وبعد n من الخطوات فإنّ الرأس يكون قد تحرك إلى اليمين n مربعاً وتكون الآلة في الحالة s_{n+1}. سوف ندعو هذا الإجراء الجزئي go-right(n). بشكل مشابه نعرف go-left(n).

سننظر بعد ذلك بالإجراء الجزئي الذي يحشر رمزاً عند نقطة معطاة في السلسلة. إذا كانت $A = \{a, b, c\}$ هي الأبجدية. ولنقل بأنّ لدينا السلسلة:

$$a_1\ a_2 \cdots a_i\ a_{i+1} \cdots a_n$$

ونريد استبدالها بالسلسلة: $a_1\ a_2 \cdots a_i\ c\ a_{i+1} \cdots a_n$ لذلك ينبغي أن تتحرك السلسلة:

$$a_{i+1} \cdots a_n$$

مربعاً واحداً إلى اليمين. نستخدم أولاً go-right(n). لوضع الرأس حيث يتوضع الرمز c. لنفرض أنّنا في الحالة s_x عندما نقوم بقراءة هذا المربع. ونحن ذاهبون إلى الحالة المطلوبة من أجل أي رمز في الأبجدية. لأجل ذلك سوف نحتاج إلى s_a, s_b, s_c. إنّ الإجراء أكثر بساطة فعندما نطبع c نحتاج إلى أن نتذكر a_{i+1} لذا فإنه بمقدورنا أن نطبعه في المربع التالي. نقوم بفعل هذا بدخول $S_{a_{i+1}}$ بعد ذلك نكون قد طبعنا c والانتقال مربعاً إلى اليمين. بالتالي فإنّ القاعدة هي: $(s_i, a_i, S_{a_{i+1}}, c, R)$ في الحالة $S_{a_{i+1}}$ نطبع a_{i+1} في المربع المشغول بالرمز a_{i+2} وثانيةً يتم التحرك إلى اليمين. في كل مرة نقوم بطباعة رمز، ندخل الحالة الموافقة للرمز الذي قضي عليه، بهذا الطريق

نتذكر هذا الرمز لأنه يمكن أن يطبع في المربع التالي. أخيراً نصل إلى مربع فارغ، ونطبع a_n ونستخدم go-left(n) للعودة إلى بداية السلسلة. سوف ندعو هذا الإجراء insert(n). لقد بيّنت رسالة تشرش (Charch's thesis) أنّ الخوارزمية التي تؤدى بواسطة الحاسب يمكن أن تؤدى بوساطة آلة تورينغ. سوف نحيط أنفسنا بواحدة من خواص آلة تورينغ ونرى كيفية استخدام آلة تورينغ في تمييز (تعرف) لغة نظامية. فنحن نعلم أن الأتومات يميز ويتعرف على اللغة النظامية وما سنقوم به هو عمل برنامج لمحاكاة الأتومات. إنّ الأتومات يقرأ في البداية الشريط المحرفي من الرمز الأول ويقوم بالقراءة من اليسار إلى اليمين إلى أن يصل إلى الرمز الأخير وستقوم آلة تورينغ بفعل ذات الشيء. عندما تتم قراءة الشريط المحرفي نحتاج لآلة تورينغ أن تعرف أنّ هذا قد حدث فعلاً وعندها سوف تتوقف. نبدأ بآلة جاهزة لقراءة الرمز الأول. ويجب أن نكون حذرين لما ستطبعه، لذلك نفرض أننّا نطبع $a\#$ في كل مربع تمت قراءته. وكل مرة يقرأ رمزاً، نرغب بأن تتحرك آلة تورينغ مربعاً واحداً إلى اليمين بحيث يقرأ الرمز التالي.

نقوم الآن بمحاكاة وتقليد الأتومات. إذا كان الرمز

$$s_i \xrightarrow{\ a\ } s_j$$

يحدث في الأتومات، فسوف نقلده ونحاكيه بالقاعدة:

$$(s_i, a, s_j, \#, R)$$

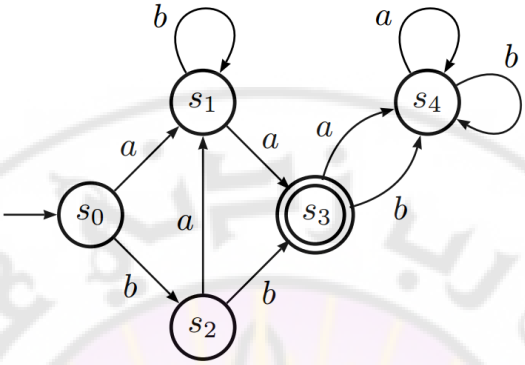
ومن أجل كل حالة قبول s للأتومات، سنضيف القاعدة:

$$(s_i, \#, h, \#, \#)$$

فيما إذا كان الشريط المحرفي قد قبل من خلال الأتومات، والذي سينتهي أيضاً إلى الحالة s لآلة تورينغ، ويقرأ # في مقدمة الشريط المحرفي ويتم التوقف. بذلك تكون آلة تورينغ قد برمجت لهذا الشكل الذي يقبل الشرائط المحرفية نفسها التي يقبلها محاكي الأتومات.

مثال (8-12):

إذا أعطى الأتومات من خلال المخطط الموضّح بالشكل (8-21)



الشكل (8-21)

إنّ آلة تورينغ الموافقة تتكون من قواعد ونفرض أنّ (#)insert قد وضعت الفراغ عند بداية الشريط المحرفي.

$$(s_0, a, s_1, \#, R)\ ;$$
$$(s_0, b, s_2, \#, R)\ ;$$
$$(s_1, a, s_3, \#, R)\ ;$$
$$(s_1, b, s_1, \#, R)\ ;$$
$$(s_2, a, s_1, \#, R)\ ;$$
$$(s_2, b, s_3, \#, R)\ ;$$
$$(s_3, a, s_4, \#, R)\ ;$$
$$(s_3, b, s_4, \#, R)\ ;$$
$$(s_4, a, s_4, \#, R)\ ;$$
$$(s_4, b, s_4, \#, R)\ ;$$
$$(s_3, \#, h, \#, \#)\ ;$$

يقبل الشريط $a\ b\ a$ بواسطة الأتومات في البداية للحالة s_0، وتتم القراءة والانتقال إلى الحالة s_1. إنّ هذا يحاكي القاعدة $(s_0, a, s_1, \#, R)$ في آلة تورينغ ومن ثم المغادرة و$\#\ b\ a$ على الشريط (tape). بعد ذلك وبينما يكون الأتومات في الحالة s_1، فإنه يقرأ b ويبقى في الحالة. وهذه محاكاة للقاعدة $(s_1, b, s_1, \#, R)$ في آلة تورينغ، ثم المغادرة و$a\ \#$ على الشريط (tape). بعد ذلك وبينما يكون الأتومات في الحالة s_1، فإنه يقرأ a وينتهي بحالة القبول s_3. إنّ هذا محاكاة للقاعدة $(s_1, a, s_3, \#, R)$ في آلة تورينغ،

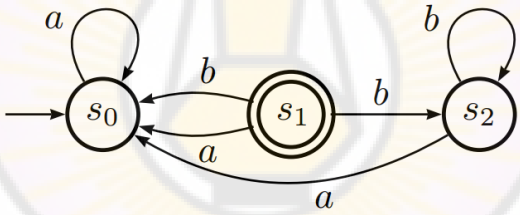
ومن ثم المغادرة و# على الشريط (tape). عندئذٍ تكون القاعدة $(s_3, \#, h, \#, \#)$ هي الناتج لآلة تورينغ بقبول الشريط المحرفي.

تدعى اللغات المقبولة بواسطة آلة تورينغ باللغات القابلة للعد عددياً (recursively innumerable)

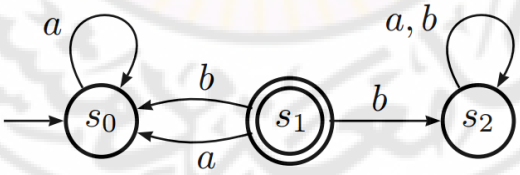
تمارين غير محلولة

1- أي من الشرائط الآتية مقبولة بوساطة الأتومات المعطى.

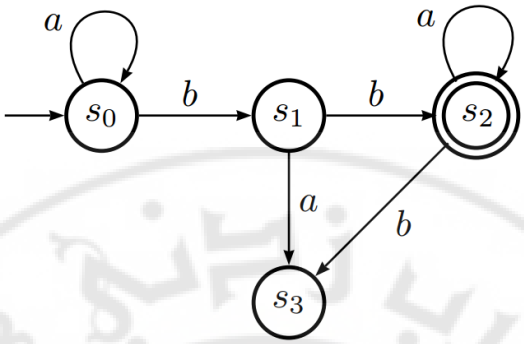
- $aaa\ bb$
- $a\ bbb\ a\ bbb$
- $ba\ ba\ ba$
- $bbb\ a\ b\ a\ b$



2- أوجد تعبيراً من أجل اللغة المقبولة بالأتومات المعطى بالشكل الآتي:



3- أوجد تعبيراً من أجل اللغة المقبولة بالأتومات المعطى بالشكل الآتي:



4- أوجد الأتومات الحتمي الذي يقبل اللغة المعبر عنها من خلال التعبير $aa^*bb^*cc^*$.

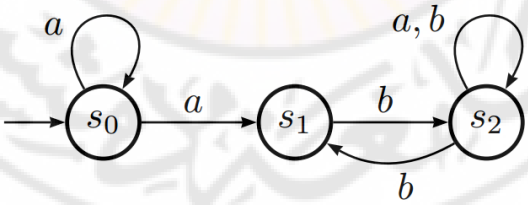
5- أوجد الأتومات الحتمي الذي يقبل اللغة المعبر عنها من خلال التعبير $(a^*ba^*ba^*b)^*$.

6- أوجد الأتومات اللا حتمي الذي يقبل اللغة المعبر عنها من خلال التعبير $aa^*bb^*cc^*$.

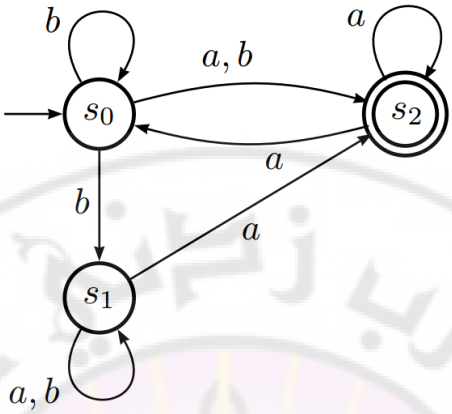
7- أوجد الأتومات اللا حتمي الذي يقبل اللغة المعبر عنها من خلال التعبير:

$$(a^*b) \vee (c^*b) \vee (ac)^*.$$

8- أوجد الأتومات الحتمي الذي يقبل اللغة نفسها الذي يقبلها الأتومات اللا حتمي المعطى بالشكل:



9- أوجد الأتومات الحتمي الذي يقبل اللغة نفسها الذي يقبلها الأتومات اللا حتمي المعطى بالشكل:



10- صف آلة تورينغ التي تقوم بقراءة كل الأشرطة المحرفية المكونة من سلسلة من الأصفار متبوعة بعددٍ مساوٍ من الوحدات.

11- صف آلة تورينغ go-left(n) والتي تذهب يساراً n مربعاً.

12- أنشئ الأتومات الذي يقرأ a^*bc ويستخدمه في بناء آلة تورينغ التي تقرأ a^*bc.

13- أنشئ الأتومات الذي يقرأ aa^*bb^* ويستخدمه في بناء آلة تورينغ التي تقرأ aa^*bb^*.

14- أنشئ الأتومات الذي يقرأ $(aa^*bb^*)^*$ ويستخدمه في بناء آلة تورينغ التي تقرأ aa^*bb^*.

15- صمّم آلة تورينغ التي تقبل لغة من الشرائط المحرفية في a وb والتي فيها نفس العدد من تكرارات a وتكرارات b.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع

9- المدخل إلى نظام Maple

يستخدم نظام **Maple** في إيجاد الحل التحليلي والعددي لعدد من المسائل الرياضية التي تبرز في الرياضيات والعلوم التطبيقية الأخرى. كما أن **Maple** هو لغة برمجية مدعومة بإمكانيات تابعية وإجرائية. يتكون هذا النظام من عدد من الإجراءات كتبت بلغة C، وعدد من المكتبات كتبت بلغة **Maple**، بالإضافة إلى واجهة (interface) صممت في شكل ورقة عمل (worksheet)، تكتب فيها الأوامر والبرامج وتظهر فيها النتائج ويمكن أن تستخدم لتحرير النصوص. كما يوجد في **Maple** إمكانات كبيرة للرسم في المستوي أو الرسم الثلاثي الأبعاد.

نغطي في هذا الفصل بعض من الاحتياجات الأولية لاستخدام نظام **Maple** بالإضافة إلى عرض قواعد استخدام الأوامر الأكثر شيوعاً. كما سنقوم بتوضيح كيفية استخدام تطبيقات **Maple** في الرياضيات المتقطعة. لقد تمت معالجة التطبيقات الواردة في هذا الفصل باستخدام الإصدار السابع عشر لنظام **Maple 17**.

9-1 كيفية تنفيذ المهام الأساسية في Maple

عند استخدام **Maple** يجب أن تتذكر:

1- نهايات أوامر Maple

يجب أن تنتهي الأوامر بالفاصلة المنقوطة لإظهار النتائج أو بالنقطتين المتراكبتين فقط لإلغاء إظهار النتيجة.

2 - استخدام ENTER وSHIFT+ENTER

يتم من خلال الضغط على ENTER إرسال الأمر إلى **Maple**؛ وبالضغط على SHIFT+ENTER يتم السماح بالاستمرار بكتابة الأمر في السطر الآتي.

3 - قوائم حساسية السياق (Context-sensitive Menus)

تقدم قوائم حساسية السياق اختصارات للعديد من العمليات. وتستخدم بالنقر الأيمن Right-click (نقر–الأمر) على الخيار المتاح المطلوب.

4- القواعد Syntax في **Maple** والرموز الرياضية (Standard Math)

يستخدم **Maple** تدوينات لإظهار المدخلات من خلال قواعد محددة ويستخدم كذلك الرموز الرياضية القياسية لإظهار التعابير. على سبيل المثال يمكن استخدام:

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(x^2\right) \qquad \text{و} \qquad \mathrm{diff}\left(x^2, x\right)$$

5- لوحة الرموز Palettes

يمكن استخدام لوحة الرموز من أجل إنشاء التعابير في المدخلات وفي المناطق النصية. لأجل ذلك يمكن مشاهدة القائمة View.

6- العودة إلى النتائج السابقة

تستخدم % للعودة إلى نتيجة التنفيذ السابق. وبشكل مشابه، تستخدم %% و%%% من أجل النتائج الثانية والثالثة الأخيرة على الترتيب.

7- الحساسية لحالة الحروف

إن **Maple** حساس لحالة الحروف (Case Sensitivity) يفرق بين الأحرف الكبيرة والصغيرة. على سبيل المثال Diff وdiff هي أوامر مختلفة.

8- تحويل الرمزي إلى عددي

لتحويل الكسر إلى التقريب العشري نستخدم ( )evalf وكمثال evalf(2/3).

9- استخدام الرُزم (Packages)

تنظّم العديد من التوابع في داخل رزم. يمكن الدخول إلى كل رزمة توابع خاصة من خلال with(package_name)، أو بالاسم الكامل بواسطة أمر الاستدعاء في البدء:

كمثال: with(networks) تعني استدعاء رزمة الشبكات للعمل.

10- استخدام help

هنالك إمكانية في **Maple** للاستفادة من نظام المساعدة help الذي يقدم شروحاً وتعاريف بالإضافة إلى أمثلة عملية على التعاريف والعمليات المستخدمة في هذا النظام. يمكن الحصول على المعلومات عن تابع أو عملية ما من خلال كتابة إشارة الاستفهام يليها اسم التابع المطلوب أو العملية المطلوبة. إذا تمَّ كتابة:

```
> ?help
```

فسوف يتم إظهار نظام المساعدة بالكامل ويمكن التنقل بين مكوناته وإجراء عمليات البحث اللازمة.

إذا كان المطلوب معرفة معلومات عن التابع floor على سبيل المثال فيكفي أن نكتب:

```
> ?floor
```

ومن ثم الضغط على Enter من أجل الحصول على المعلومات المطلوبة.

إذا كان المطلوب معرفة معلومات عن المستقيمات المقاربة Asymptotes يكفي أن نكتب:

```
> ?Asymptotes
```

ومن ثم الضغط على Enter من أجل الحصول على المعلومات المطلوبة.

9-2 الأوامر الشائعة والقواعد

1-تعريف المتغيرات Variables **والتوابع** Functions **والإجرائيات** Procedures:

```
n := 5;                                  # عبارة الإسناد
f := x->x^2;                             # تعريف التابع
p := proc(a,b) a^2+b^2 end proc:         # تعريف الإجرائية
```

أمثلة:

```
n := 5;
```

$$5$$

```
f := x->x^2;
```

$$x \to x^2$$

```
f(3);
```

$$9$$

```
myproc := proc(a,b)local c;   c := a^2 + b^2;   c; # returns last value
end proc:
myproc(2, y);
```

$$y^2 + 4$$

2- **معالجة التعبير** (Expression Manipulation)

```
factor(6*x^2+18*x-24);                # تحليل كثير الحدود إلى عوامل
expand((x+1)^3);                      # نشر التعابير
normal( (x^2-y^2)/(x-y)^3 );          # وضع التعبير في الشكل العادي
simplify(4^(1/2)+3);                  # تبسيط التعبير
numer(a/b); denom(a/b);               # الحصول على البسط والمقام
rhs(x=y); lhs(x=y);          # الحصول على الجانب الأيمن أو الأيسر من المعادلة
eval(x^3+2*x^2-7*x+5, x=3);           # حساب قيمة التعبير عند نقطة
```

أمثلة

```
factor(6*x^2+18*x-24);
```

$$6\,(x+4)\,(x-1)$$

```
expand((x+1)^3);
```

$$x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1$$

```
normal( (x^2-y^2)/(x-y)^3 );
```

$$\frac{x+y}{(x-y)^2}$$

```
simplify(4^(1/2)+3);
```

```
z := (x^2+1)/(x-y);
```

$$\frac{x^2+1}{x-y}$$

```
numer(z);
```

$$x^2+1$$

```
denom(z);
```

$$x-y$$

```
eq := y+1 = 12*y^2*x;
```

$$y+1=12\,y^2\,x$$

```
rhs(eq);
```

$$12\,y^2\,x$$

```
eval(x^3+2*x^2 - 7*x + 5, x=3);
```

$$29$$

3- حل المعادلات

حل المعادلة

```
solve(x^2+x=1,x);
```

إيجاد الحل العددي

```
fsolve( tan(sin(x))=1, x );
```

حل المعادلات التفاضلية

```
dsolve(diff(y(x),x)-y(x)^2+y(x));
```

أمثلة

إيجاد حلول المعادلة:

```
solve(x^2+x=1,x);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

```
solve({u+v+w=1, 3*u+v=3, u-2*v-w=0});
```

$$\left\{u=\frac{4}{5},\ v=\frac{3}{5},\ w=-\frac{2}{5}\right\}$$

للحصول على الحل العددي للمعادلة:

```
fsolve( tan(sin(x))=1, x );
```

$$0.9033391108$$

لحل المعادلة التفاضلية:

```
dsolve(diff(y(x),x)-y(x)^2+y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{x} _C1}$$

لإنشاء التابع (soln):

```
soln:= unapply(rhs(%),x);
```

$$x \rightarrow \frac{1}{1 + e^{x} _C1}$$

لحساب قيمة التابع soln عند القيمة x=0:

```
soln(0);
```

$$\frac{1}{1 + _C1}$$

4- التوابع الشائعة (Common Functions)

```
diff(x^2+x^4-3*x+2,x);                  # الإشتقاق
int(sin(x),x);                          # المكاملة
limit(sin(x)/x, x=0);                   # إيجاد النهاية
ln(x), ln[b](x), log10(x), exp(x)       # اللوغاريتم؛ التوابع الأسية
sin(x), cos(x), tan(x)                  # التوابع المثلثية
sqrt(x); surd(x, n)                     # الجذر التربيعي والجذر النوني
abs(-5)                                 # القيمة المطلقة
```

أمثلة

```
diff(x^2+x^4-3*x+2,x);
```

$$4x^3 + 2x - 3$$

```
int(sin(x),x);
```

$$-\cos(x)$$

```
limit(sin(x)/x, x=0);
```

$$1$$

الشكل الخامل (غير النشط) لهذه التوابع يحمل الأسماء ذاتها لكن بوضع الحرف الأول فيها كبيراً: Diff, Int, Limit.

تعرف التوابع الخاملة التعبير من دون عملية حساب و تعويض التابع. وهذا أمر مفيد لأنه يتيح لتابع آخر أن يعالج التعبير.

```
Int(exp(-x^3)/(x^2+1), x);
```

$$\int \frac{e^{-x^3}}{x^2+1}\,dx$$

لحساب قيمة التكامل عددياً:

```
evalf(Int(exp(-x^3)/(x^2+1), x = 0..1));
```

$$0.6649369431$$

```
exp(x^2) * ln(x)/cos(x);
```

$$\frac{e^{x^2}\ln(x)}{\cos(x)}$$

```
surd(5,3);
```

$$5^{1/3}$$

```
abs(-5);
```

$$5$$

5- الثوابت (Constants)

```
Pi          # π
infinity    # ∞
exp(1)      # exponential   e
I           # الواحدة التخيلية
```

أمثلة

```
2*x*Pi;
```

$$2\,x\,\pi$$

```
Limit(g(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x\to\infty} g(x)$$

```
exp(1);
```

$$e$$

```
2+3*I;
```

$$2 + 3\,I$$

6- الرسم (Plotting)

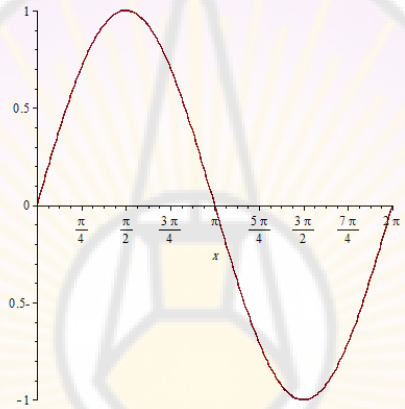
plot(sin(x),x=0..2*Pi); # 2-D الرسم في المستوي:

plot3d(sin(x)*y, x=0..1,y=0..1); # 3-D الرسم في الفراغ:

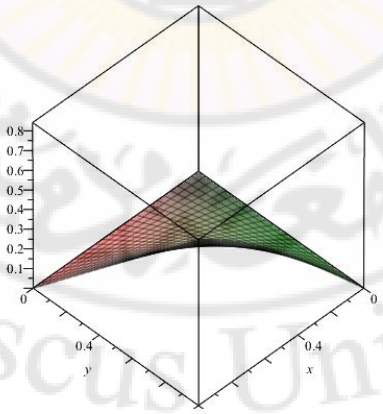
يمكن الرسم باستخدام قائمة حساسية السياق.

أمثلة

plot(sin(x),x=0..2*Pi);



plot3d(sin(x)*y, x=0..1,y=0..1);



sin(x); # right-click (command-click) the output and select Plots->Plot Builder from the context-sensitve menu

$$\sin(x)$$

7- الأشعة والمصفوفات

تعريف المصفوفة:

```
Matrix([[1,2],[3,4]]);   or   <<1 | 2>, <3 |4>>;
Vector([1,2,3]); or <1, 3, 3>;                    # تعريف شعاع العامود
Vector[row]([1,2,3]); or <1 | 2 | 3>;             # تعريف الشعاع السطري
a*M1 . M2                                         # الجداء العددي والمصفوفاتي
M^(-1);                                           # مقلوب مصفوفة
```

أمثلة

```
Matrix([[1,2],[3,4]]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
<1, 3, 3>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
Vector[row]([1,2,3]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
M1 := Matrix([[1,2],[3,4]]):
M2 := Matrix([[4,5], [3, -1]]):
a*M1.M2;
```

$$\begin{bmatrix} 10\,a & 3\,a \\ 24\,a & 11\,a \end{bmatrix}$$

8- أدوات التحكم

إنشاء حلقة

```
[for var] [from expr] [to expr] [by expr] while  [cond] do ... end do;
```

الحلقة عبر العناصر في تعبير

```
[for var] [in expr] [while expr] do … end do;
```

العبارة الشرطية

```
if cond then [expr] [elif cond then expr] [else expr] end if;
```

إنشاء متتالية

```
seq(k*x, k=1..5);
```

تطبيق تابع من أجل كل عنصر لتعبير ما

```
map(x->x^2, [a,b,c])
```

أمثلة

```
for i from 5 to 10 do i end do;
```

$$5$$
$$6$$
$$7$$
$$8$$
$$9$$
$$10$$

```
n := 3:
if n > 0 then x elif n=0 then y else z end if;
```

$$x$$

```
while n <> 0 do n:= n-1 end do;
```

$$2$$
$$1$$
$$0$$

```
for x in {a,b,c} do x^3 end do;
```

$$a^3$$
$$b^3$$
$$c^3$$

```
seq(sin(Pi*k/6), k=1..5);
```

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}$$

```
map(x->x^2, [a,b,c]);
```

$$[a^2, b^2, c^2]$$

9-3 بعض تجارب Maple في الرياضيات المتقطعة

سوف نحاول أن نعطي مدخلاً للنظر في الإمكانيات الهائلة والكبيرة التي يوفرها نظام Maple من أجل إجراء تطبيقات على مواضيع الرياضيات المتقطعة والتي أوردناها في الفصول السابقة مثل العمليات المنطقية والعمليات على البنى الجبرية المرتبة وغير المرتبة، بالإضافة إلى تطبيقات على البيانات والأشجار الهيكلية والمجاميع المنتهية وعلى التوابع أيضاً وصولاً إلى إمكانية إثبات بعض النظريات من خلال هذا النظام.

1- العمليات المنطقية

تبين التعليمات الواردة كيفية استخدام وتنفيذ العمليات المنطقية بحيث تعمل عملاً سليماً. والعمليات المنطقية المستخدمة هي: and, or, not.

نورد بعض حالات استخدام هذه العمليات وإلى يسارها نتائج التنفيذ:

```
true and false;
```
false

```
true or false;
```
true

```
not true;
```
false

```
a or false;
```
a

```
a or b;
```
a or b

```
a and false;
```
false

```
a and b;
```
a and b

```
not a;
```
not a

```
not a or false;
```
not a

سوف نقوم بتعريف عملية جديدة if_then من خلال تابع يحمل الاسم نفسه متعلق بالمتحولين: x و y على النحو الآتي:

```
if_then:=(x,y)-> not x or y;
```

$$(x, y) \rightarrow \textbf{not } x \textbf{ or } y$$

يمكن أن نختبر هذه العملية من خلال تطبيقها على قيم متنوعة. يبين المثال الآتي استدعاء التابع وتنفيذه من أجل بعض القيم:

```
if_then(true,true);
```

true

يمكن أن نعطي للتابع السابق تسمية أخرى مثل ofCourse. للقيام بذلك نكتب:

```
ofCourse:= if_then;
```

if_then

من ثم نستخدم الاسم الجديد للتابع:

```
ofCourse(true,true);
```

true

2- العمليات على المجموعات

نكتشف في هذه الفقرة، كيفية التعامل مع المجموعات في **Maple** وإجراء العمليات عليها، يظهر الجدول بعض من هذه العمليات في **Maple** ودلالتها في لغة المجموعات، يلي هذا الجدول التنفيذ العملي لهذه العمليات مصحوباً بالنتائج :

لغة المجموعات	في Maple
تعريف مجموعة ما A	$A := \{a, b\}$
اختبار انتماء a إلى المجموعة A	$\text{member}(a, A)$
اختبار تساوي مجموعتين	$\text{evalb}(\{a\} = \{a, a\})$
تعريف المجموعة B	$B := \{b, c\}$
اختبار تساوي A و B	$\text{evalb}(A = B)$
اتحاد المجموعتين: $A \cup B$	$A \text{ union } B$

A intersect B	تقاطع مجموعتين: $A \cap B$
nops(A)	عدد عناصر A
nops(B)	عدد عناصر B
nops(A union B)	عدد عناصر مجموعة الاتحاد $A \cup B$
A minus B	الفرق $A - B$
B minus A	الفرق $B - A$
nops(A minus B)	عدد عناصر المجموعة $A - B$

نورد هذه العمليات ونتائج تنفيذها :

```
A:={a,a,b,b,b};
```
{a, b}
```
member(a,A);
```
true
```
member(c,A);
```
false
```
evalb({a}={a,a});
```
true
```
B:={b,c};
```
{b, c}
```
evalb(A=B);
```
false
```
A union B;
```
{a, b, c}
```
A intersect B;
```
{b}
```
A minus B;
```
{a}
```
nops(A);
```
2
```
nops(B);
```
2
```
nops(A intersect B);
```

1

nops(A **union** B);

3

B **minus** A;

{c}

nops(A **minus** B);

1

يُعرف الفرق التناظري لمجموعتين: x و y من خلال تابع يحمل الاسم SymDiff على النحو الآتي:

SymDiff:=(x,y)->(x **minus** y) **union** (y **minus** x);

$$(x, y) \rightarrow (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

3- العمليات على القوائم (Lists)

تعتبر القوائم (Lists) من البنى ذات الأهمية الكبيرة في تمثيل المعلومات. ويتوفر في نظام **Maple** مجموعة جيدة من الأدوات التي تسمح بالعمل مع القوائم. تتيح العمليات الآتية التعرف على القوائم وكيفية التعامل معها وإلى جانب كل عملية نتائج التنفيذ إلى اليسار:

A:=[a,a,b,c,b];

[a, a, b, c, b]

B:=[b,c];

[b, c]

[op(A),op(B)];

[a, a, b, c, b, b, c]

إن الغرض من العملية الأخيرة الحصول على قائمة جديدة تتضمن القائمتين: A, B والتي عرفت في الخطوات الأخيرة التي سبقت. سوف نقوم بهذه العملية أيضاً من خلال تعريف تابع يحمل الاسم CatLists ويقوم بضم (وصل) القائمتين x و y:

CatLists:=(x,y)->[op(x),op(y)];

$$(x, y) \rightarrow [\,op(x), op(y)\,]$$

ولتطبيق ذلك على القائمتين A و B نقوم بالعملية:

```
CatLists(A,B);
```

$$[a, a, b, c, b, b, c]$$

سوف نقوم بإيجاد عملية الإنشاء cons على رأس وذيل قائمة وصولاً إلى قائمة جديدة.

من المعلوم أن العبور يتم أولاً إلى رأس القائمة ومن ثم إلى ذيل هذه القائمة.

لا يتضمن **Maple** تعريفاً لهذه العملية، لكن سوف نقوم بتعريفها من خلال تابع يحمل الاسم cons وسوف نستخدم hd لتعريف الرأس ونستخدم t1 لتعريف الذيل على النحو الآتي:

```
cons:=(x,y)->[x,op(y)];
```

$$(x, y) \rightarrow [x, op(y)]$$

```
cons(a,B);
```

$$[a, b, c]$$

```
hd:=x->x[1];
```

$$x \rightarrow x_1$$

```
hd(A);
```

$$a$$

وقبل تحديد وتعريف الذيل، علينا النظر في الحالتين الممكنتين، ذلك لأن الإصدارات المختلفة من **Maple** تعطي نتائج مختلفة:

التعريف الأول:

```
t11:=x->[x[2..nops(x)]];
```

$$x \rightarrow [x_{2..nops(x)}]$$

```
t11(A);
```

$$[[a, b, c, b]]$$

التعريف الثاني:

```
t12:=x->x[2..nops(x)];
```

$$x \rightarrow x_{2..nops(x)}$$

```
t12(A);
```

$$[a, b, c, b]$$

4- العمليات على الأشرطة المحرفية (Strings)

يمكن معالجة الأشرطة المحرفية في **Maple**. والشريط هو متتالية من المحارف متوضعة ضمن " ". ونقول عن الشريط الغير حاوي على عناصر إنه شريط خال ويرمز له في **Maple** من خلال " ". سوف نقوم بتنفيذ عدد من العمليات على الأشرطة المحرفية كالآتي:

```
A:="abc#*8cd";
```
"abc#*8cd"

```
length(A);
```
8

```
substring(A,1);
```
"a"

```
substring(A,2);
```
"b"

```
substring(A,length(A));
```
"d"

```
substring(A,1..3);
```
"abc"

```
substring(A,2..5);
```
"bc#*"

```
emptyString:="  ";
```
" "

```
cat(A,A);
```
"abc#*8cdabc#*8cd"

```
cat(A,emptyString);
```
"abc#*8cd "

```
cat("  ","abd","cda");
```
" abdcda"

```
cat(A,emptyString);
```
"abc#*8cd "

5- إنشاء البيان في Maple

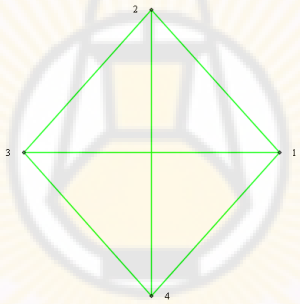
يُمكن نظام Maple القيام بالعمليات اللازمة لإنشاء البيانات (Graphs)، من خلال استدعاء رزمة خاصة networks قبل البدء بالعمل مع البيانات والشبكات.

إن عملية الاستدعاء لهذه الرزمة تتم من خلال الأمر الآتي:

```
with(networks):
```

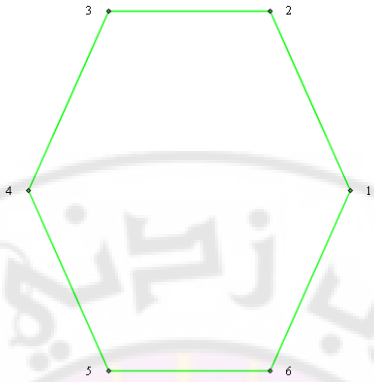
ومن ثم يتم التعامل مع الإمكانيات الكبيرة بهذه الرزمة الخاصة والتي تسمح بتوليد بعض البيانات اللازمة لحل المسائل. فعلى سبيل المثال:

```
draw(complete(4));
```

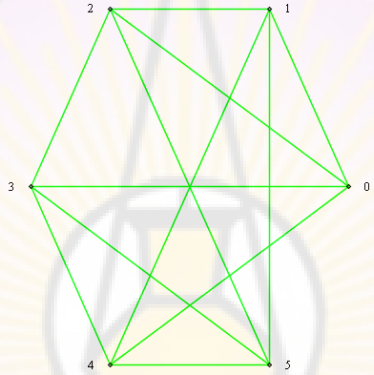



```
draw(void(6));
```

```
draw(cycle(6));
```



draw(octahedron());



لنفرض أننا نريد إنشاء البيان G والذي مجموعة عقده مكونة من ثماني عقد معلمة بالأرقام:

$$1, 2, 3, \cdots, 7, 8$$

G:=void(8);
draw(G);

```
vertices(G);
```

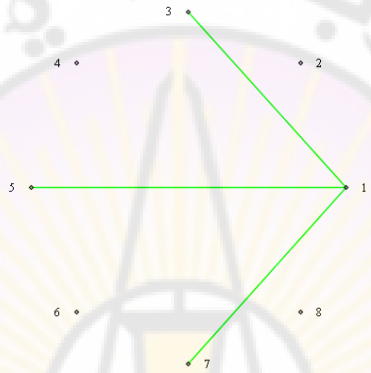
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

توضح العمليات الآتية كيفية القيام ببعض الإنشاءات. يمكن إضافة بعض الأضلاع إلى البيان G بأساليب مختلفة. على سبيل المثال:

```
connect({1}, {3, 5, 7}, G);
```

$$e1, e2, e3$$

```
draw(G);
```




```
edges(G);
```

$$\{e1, e2, e3\}$$

```
ends(G);
```

$$\{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}\}$$

```
ends(e1, G);
```

$$\{1, 3\}$$

يمكن للعقد في البيان أن تأخذ أسماء غير الأرقام. لأجل ذلك نعرف بياناً جديداً G مجموعة عقده $\{a, b, c, d\}$:

```
new(G);
addvertex({a, b, c, d}, G);
```

$$a, b, c, d$$

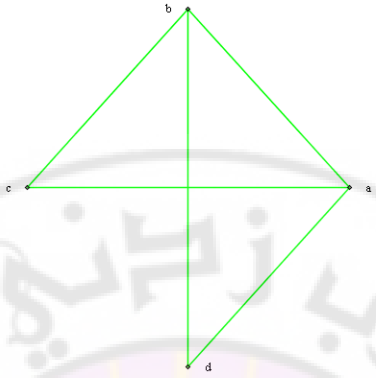
```
connect({a, b}, {c, d}, G);
```

$$e1, e2, e3, e4$$

```
connect(a, b, G);
```

$$e5$$

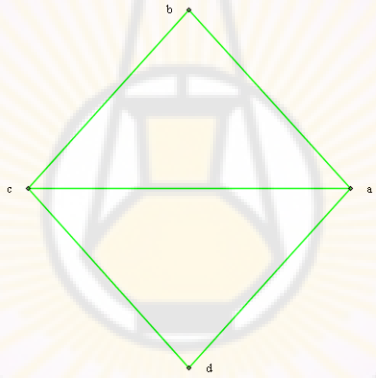
```
draw(G);
```




```
connect(c, d, G);
```

e6

```
delete(e4, G);
draw(G);
```



يمكن التعامل مع البيان بأسلوب آخر متعلق بكيفية إنشاء البيان الموجّه في **Maple**:

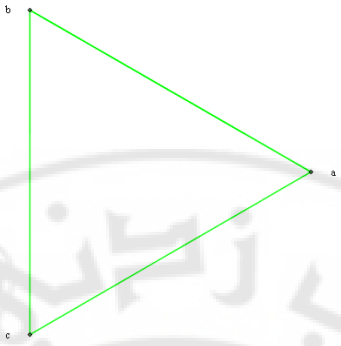
```
new(H);
addvertex({a, b, c}, H);
```

a, b, c

```
addedge([[a, b], [b, a], [b, c], [a, c]], weights=[4, 2, 1, 3], H);
```

e1, e2, e3, e4

```
draw(H);
```



eweight(H);

$$table([e2 = 2, e4 = 3, e1 = 4, e3 = 1])$$

6- الأشجار الهيكلية (Spanning Tree)

يسمح في Maple التعامل مع الأشجار الهيكلية في بيان ما متصل. نعلم أن الشجرة هي بيان جزئي من بيان ما، وهي شجرة تتضمن كل عقد البيان الذي أُخذت منه. والشجرة الهيكلية الأصغرية في بيان متصل موزَّن، هي عبارة عن الشجرة الهيكلية التي يكون مجموع أوزان أضلاعها أصغرياً من بين كل الأشجار الهيكلية في البيان. سوف تطبق بعض العمليات لاكتشاف الأفكار الأساسية المتعلقة بهذا الموضوع:

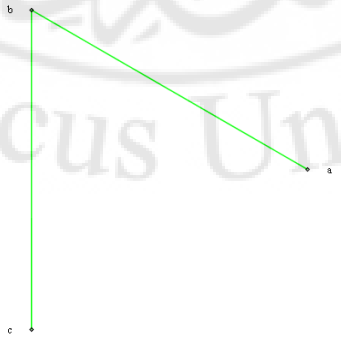
```
with(networks);
new(G);
addvertex({a, b, c}, G);
```

$$a, b, c$$

```
addedge([[a, b], [b, a], [b, c], [a, c]], weights=[4, 2, 1, 3], G);
```

$$e1, e2, e3, e4$$

```
draw(spantree(G));
```



```
spantree(G, a, w);
draw(%);
w;
```

3

```
spantree(G, a, w);
unassign('w');
w;
```

w

```
spantree(G, a, w);
w;
```

3

7- المتتاليات (Sequences)

يزخر نظام **Maple** ببعض التعابير التي تمكن من العمل مع متتاليات منتهية من الأغراض. والمتتالية في **Maple** هي قائمة (*List*) من الأغراض فصل بينها بالفواصل. لذلك فإن المتتالية هنا تشبه القائمة لكن دون الأقواس المحددة للعناصر في النهايات.

إذا كان هنالك من حاجة لإضافة الأقواس المحددة لنهايات القائمة فهذا أمر متاح وممكن. تعبر العمليات الآتية عن كيفية استخدام التقنيات المتاحة للعمل مع المتتاليات وكيفية إنشائها وإجراء تطبيقات معينة عليها:

```
seq(i,i=0..9);
```

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

```
seq(hello,i=1..3);
```

hello, hello, hello

```
seq({i,i+1},i=1..3);
```

{1, 2}, {2, 3}, {3, 4}

```
seq(i**2+i,i=1..6);
```

2, 6, 12, 20, 30, 42

```
f:=x->x*x;
```

x → x x

```
seq(f(i),i=3..12);
```

9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144

```
3..15;
```

3 ..15

```
$3..15;
```
$$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$$
```
A:=$1..12;
```
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$
```
seq(x+x,x=A);
```
$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$$
```
sequence:=x->[$0..x];
```
$$x \rightarrow [\text{`\$`}(0..x)]$$
```
sequence(17);
```
$$[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]$$
```
g:=x->{$-x..x};
```
$$x \rightarrow \{\text{`\$`}(-x..x)\}$$
```
g(5);
```
$$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
```
{$-4..4};
```
$$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

8- التابع map

إن التابع map هو تابع مفيد للعمل مع التوابع التي نحتاج حساب عدد من قيمها. لنتذكر أن التابع map يقوم بتطبيق تابع على مجموعة من العناصر للحصول على قائمة قيمة على هذه العناصر.

على سبيل المثال، إذا كانت $\{a, b, c\}$ هي مجموعة جزئية من ساحة التابع f، فإن:

$$map(f[a, b, c]) = [f(a), f(b), f(c)]$$

من الواضح بأن ناتج map هو الحصول على قائمة قيم التابع f على عناصر المجموعة $\{a, b, c\}$، أي الحصول على القيم: $f(a), f(b), f(c)$.

توضح الأمثلة الآتية تنفيذ بعض الأوامر المتعلقة بكيفية استخدام التابع map:

```
map(abs,[-1,-2,-3,-6,0]);
```
$$[1, 2, 3, 6, 0]$$
```
map(abs,{-1,-2,-3,-6,0});
```
$$\{0, 1, 2, 3, 6\}$$
```
f:=x->x**2-1;
```

$$x \to x^2 - 1$$

```
map(f,[1,2,3,4]);
```

$$[0, 3, 8, 15]$$

```
map(f,{$-2..2});
```

$$\{-1, 0, 3\}$$

```
map(f,[$-2..2]);
```

$$[3, 0, -1, 0, 3]$$

```
diff(x**3,x);
```

$$3x^2$$

```
diff(cos(2*x),x);
```

$$-2\sin(2x)$$

```
diff(sin(2*x),x);
```

$$2\cos(2x)$$

```
map(diff,[sin(2*x),cos(2*x),tan(2*x)],x);
```

$$[2\cos(2x), -2\sin(2x), 2 + 2\tan(2x)^2]$$

```
map(diff,[1,x,x**2,x**3],x);
```

$$[0, 1, 2x, 3x^2]$$

```
f:=(x,y,z)->x**2+y**2+z**2;
newf:=x->f(x[1],x[2],x[3]);
map(newf,{[1,2,3],[4,5,6]});
```

$$(x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2$$

$$x \to f(x_1, x_2, x_3)$$

$$\{14, 77\}$$

```
map(f,{1,2,3},4,5);
```

$$\{42, 45, 50\}$$

نلاحظ أن خطأً يحدث عندما نستخدم map في عملية مثل الاتحاد على النحو الآتي:

```
map(union,[{a},{b},{c}]);
```

يمكن أن نُفعِّل هذه العملية من خلال وضعها ضمن ` ` ولنقم بدراسة ناتج العمليتين الآتيتين:

```
map(`union`,[{a},{b},{c}]);
```

$$[\{a\}, \{b\}, \{c\}]$$

```
map(`union`,{{a},{b}},{c});
```

$$\{\{a, c\}, \{b, c\}\}$$

من خلال ما ورد من أمثلة فإنه يمكن العمل مع التوابع المتعلقة بعدة متحولات عددها n، أي $n \geq 2$. فإذا كان للتابع g ثلاث متحولات، ننظر من ناتج تنفيذ الأمر:

```
map(g,[a,b,c],x,y);
```

$$[g(a, x, y), g(b, x, y), g(c, x, y)]$$

هنالك أيضاً عملية أخرى هي map2 من أجل التوابع ذات n متحولاً و $n \geq 2$.

ففي عملية map2 إذا تم تحديد المتحول الأول والمتحول الثالث وقمنا بتنفيذ العملية الآتية:

```
map2(g,x,[a,b,c],y);
```

$$[g(x, a, y), g(x, b, y), g(x, c, y)]$$

فإننا نرى وبالمقارنة مع العمليات السابقة إمكانية map2.

9- تركيب التوابع

يتيح **Maple** تعريف توابع من خلال تركيب توابع أخرى ذات متحولات أو من دونها.

يستخدم الرمز @ في **Maple** في مكان العملية ∘ التي تشير إلى التركيب.

توضح الأمثلة الآتية كيف يمكن للتوابع أن تركَّب وتستخدم:

```
f:=x->x+1;
```

$$x \rightarrow x + 1$$

```
g:=x->x**2;
```

$$x \rightarrow x^2$$

```
f(g(x));
```

$$x^2 + 1$$

```
(f@g)(x);
```

$$x^2 + 1$$

```
(g@f)(x);
```

$$(x + 1)^2$$

```
h:=g@f;
```

$$g@f$$

```
k:=f@g;
```

$$f@g$$

h(x);

$$(x+1)^2$$

k(x);

$$x^2+1$$

h:=x->g(f(x));

$$x \to g(f(x))$$

k:=x->f(g(x));

$$x \to f(g(x))$$

h(x);

$$(x+1)^2$$

k(x);

$$x^2+1$$

يمكن أيضاً أن نُعرِّف h و k باستخدام المتحولات كما يلي:

h:=x->g(f(x));

$$x \to g(f(x))$$

k:=x->f(g(x));

$$x \to f(g(x))$$

h(x);

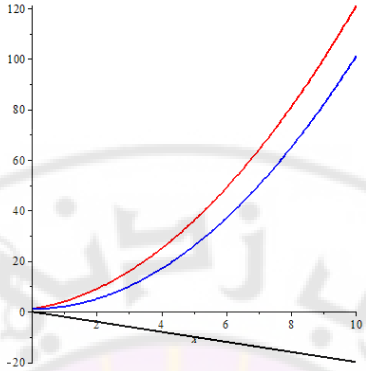
$$(x+1)^2$$

k(x);

$$x^2+1$$

من السهل أن نرى أن تركيب التوابع ليس تبديلياً، كمثال يمكن أن نرسم $f@g$ و $g@f$ وأيضاً $f@g - g@f$. وكتطبيق على ذلك يمكن القيام بالاختبار الآتي:

```
plot([h(x), k(x), k(x)-h(x)], x=0..10, color=[red, blue, black], thickness=2);
```



10- استخدام if-then-else في تعريف التوابع

عندما يُعرَّف التابع من خلال حالات، بإمكاننا أن نستخدم if-then-else لتنفيذ التابع في **Maple**. على سبيل المثال، إذا أردنا أن نعرف تابع القيمة المطلقة. على الرغم من وجود هذا التابع في النظام وهو abs، إلا أننا سنقوم بتعريفه بطريقة أخرى وفقاً لتعريف تابع القيمة المطلقة على الآتي:

$$\text{absolute}(x) = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

يمكن القيام بتعريف ذلك من خلال عبارة if-then-else على النحو الآتي:

```
absolute:=x->if x>0 then x else -x fi;
```

$$x \rightarrow \textbf{if } 0 < x \textbf{ then } x \textbf{ else } -x \textbf{ end if}$$

```
absolute(-5);
```

$$5$$

يمكن لقاعدة if-then-else أن تستخدم أكثر من مرة إذا وجدت عدة حالات في تعريف التابع. إذا أردنا أن نُصنِّف جذور معادلة من الدرجة الثانية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

نُعرِّف التابع classifyRoots الذي يقوم بهذا العمل من خلال العبارات الآتية:

```
classifyRoots:=(a,b,c)-> if b*b-4*a*c>0 then "The roots are real and
distinct" elif b*b-4*a*c <0 then "The roots are complex conjugate"
else "The roots are real and repeated" fi:
```

أمثلة

```
classifyRoots(1,0,1);
```
"The roots are complex conjugate"
```
classifyRoots(1,0,-1);
```
"The roots are real and distinct"
```
classifyRoots(1,-2,1);
```
"The roots are real and repeated"

11- حساب قيم التعابير

يعتبر نظام **Maple** نظاماً جيداً وعملياً عند التعامل مع الرموز وكيفية التحكم بها كما سبق ووجدنا في التطبيقات السابقة، وعلى الرغم من ذلك فإنه يبقى برنامجاً حاسوبياً لا يملك الذكاء الذي يتمتع به الإنسان العادي، فعند حساب قيم التعابير فإن **Maple** يطلب منا أن نشير إلى ذلك وأن نوجه للقيام بذلك من خلال أوامر محددة. على سبيل المثال، إن العمليات الآتية تبين طبيعة هذه الأوامر وكيفية التعامل معها.

```
1/2;
```
$$\frac{1}{2}$$
```
eval(1/2);
```
$$\frac{1}{2}$$
```
eval((1+3)/2);
```
$$2$$
```
evalf(1/2);
```
$$0.5000000000$$
```
evalf((1+3)/2);
```
$$2.$$
```
simplify(1/2);
```
$$\frac{1}{2}$$
```
simplify((1+3)/2);
```
$$2$$
```
g:=log[2];
```
$$\log_2$$
```
g(16);
```

```
g(64);
```

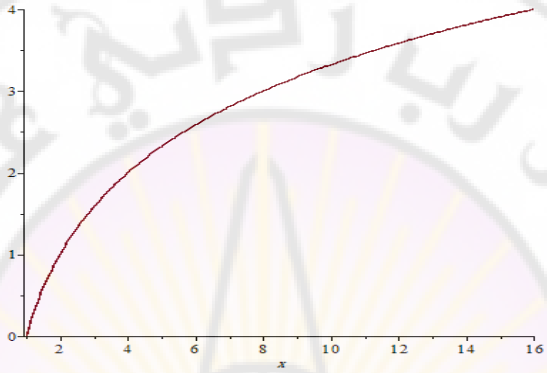
4

```
simplify(g(16));
```

6

```
plot(g(x),x=1..16);
```

4



كما يوجد في Maple العديد من التوابع من بينها توابع: trunk, ceiling, floor التي تستخدم لتصحيح العدد (أي جعله عدداً صحيحاً). توضح الأمثلة الآتية الاختلاف في عمل هذه التوابع الثلاثة:

```
floor(-3.1);
```

-4

```
floor(5.9);
```

5

```
ceil(-3.1);
```

-3

```
ceil(5.9);
```

6

```
trunc(-3.1);
```

-3

```
trunc(5.9);
```

5

12- اختبار الأنماط

لقد عرفت في Maple عدة أنماط تستخدم في البرامج والتطبيقات، لاختبار فيما إذا كان التعبير E من النمط T، فإننا نستخدم العملية:

type(E,T)

نورد عدد من الأمثلة على اختبار الأنماط:

```
type(2,integer);
```
true
```
type(1.22,integer);
```
false
```
type("xy",string);
```
true
```
type(9,string);
```
false
```
type("9",string);
```
true
```
type(4,{string,integer});
```
true
```
type(xy,{string,integer});
```
false
```
type(xy,string);
```
false

13- الأشرطة والبالندرومات

نتذكر بأن البالندروم هو الشريط الذي يبقى ذاته لو قرأ أمامياً أو من الجهة الخلفية المعاكسة. مثلاً إن aba هو بالندروم. يقرأ الشريط الرقمي 101 في Maple كعدد. ولجعله شريطاً نستخدم الأمر:

```
convert(101, string);
```
"101"

الذي يحوِّل 101 إلى شريط، يمكن فيما بعد أن نختبر فيما إذا كان البالندروم أولاً. يقوم التابع الآتي pal باختبار فيما إذا كان المدخل شريطاً أو عدداً في شكل شريط

رقمي من نوع البالندروم أولاً. التوابع: L, M, F ترجع الحرف الأول من الشريط وكذلك الحرف الأخير منه بالإضافة إلى وسط الشريط، على الترتيب:

```
pal:=x->if type(x,string) then if length(x)<=1 then true elif
F(x)=L(x) then pal(M(x)) else false fi else pal(convert(x,string)) fi:
```

14- المجموعات الجزئية ومجموعات القوى

تُمثَّل المجموعات في Maple بالأسلوب الذي تدخل فيه عناصرها، إلا أن ترتيب العناصر في المجموعة مستند على العناوين الداخلية للتعابير، والتي تختلف من حاسب إلى آخر، على سبيل المثال، إذا نفذنا الأوامر الآتية:

```
A:={a,c,c,b,b,d};
```

$$\{a, b, c, d\}$$

```
B:={a,b,d,x};
```

$$\{a, b, d, x\}$$

```
C:={c,c,b,d,a};
```

$$\{a, b, c, d\}$$

ويبقى عملنا مع المجموعات والعناصر المدخلة للمجموعة بالقدر الذي يعتمد على ترتيب معين للعناصر.

لننفذ الأوامر الآتية:

```
A:={a,b,c,d,e};
```

$$\{a, b, c, d, e\}$$

```
nops(A);
```

$$5$$

```
op(A);
```

$$a, b, c, d, e$$

```
A[1];
```

$$a$$

```
{A[1]};
```

$$\{a\}$$

```
A[2..4];
```

$$\{b, c, d\}$$

```
{A[2..4]};
```

$$\{\{b, c, d\}\}$$

نشير إلى أننا قمنا بالعمل مع توابع الرأس hd والذيل t1 في القوائم ويمكن أيضاً أن نطبقها هنا أيضاً على المجموعات.

```
hd:=x->x[1];
```

$$x \to x_1$$

```
t1:=x->x[2..nops(x)];
```

$$x \to x_{2\,..nops(x)}$$

```
hd(A);
```

$$a$$

```
t1(A);
```

$$\{b, c, d, e\}$$

إذا أردنا بناء المجموعة كما القائمة، فإننا نحتاج إلى تعريف آخر مختلف للتابع cons:

```
setCons:=(x,S)->{x,op(S)};
```

$$(x, S) \to \{op(S), x\}$$

```
setCons(A,{b,d,x});
```

$$\{b, d, x, \{a, b, c, d, e\}\}$$

من خلال هذا التعريف ينبغي أن تتحقق المعادلة الآتية من أجل كل المجموعات S:

$$S = \text{setCons}(hd(s), t1(s))$$

كمثال على ذلك، نستخدم evalb لاختبار المعادلة من أجل أي مجموعة خاصة:

```
evalb(A=setCons(hd(A),t1(A)));
```

$$true$$

15- المجاميع المنتهية

يمكن أن نقوم من خلال بعض الأوامر في **Maple** بإيجاد الأشكال المغلقة للمجاميع المنتهية في بعض الحالات. بالقيام بتنفيذ العمليات الآتية نرى إمكان حساب المجاميع المنتهية وكيفية استخدام هذه الأوامر في الكشف عن تساوي التعابير والأشكال المغلقة.

```
sum(i,i=1..20);
```

$$210$$

```
sum(i,i=1..n);
```

$$\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

```
sum(i*i,i=1..n);
```

$$\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}n+\frac{1}{6}$$

```
sum(i*i*i,i=1..n);
```

$$\frac{1}{4}(n+1)^4-\frac{1}{2}(n+1)^3+\frac{1}{4}(n+1)^2$$

```
sum(i*i*i*i,i=1..n);
```

$$\frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}n-\frac{1}{30}$$

```
sum(i*(a**i),i=1..n);
```

$$\frac{a^{n+1}(a(n+1)-a-n-1)}{(a-1)^2}+\frac{a}{(a-1)^2}$$

سنعالج التعابير الموجودة في المجاميع، كمثال:

$$\sum_{i=2}^{n+1}(i-1)=\sum_{i=1}^{n}i$$

ولاختبار صحة المجاميع بعد إجراء التغيير، نورد الأمثلة الآتية:

```
c:=sum(i-1,i=2..n+1);
```

$$\frac{1}{2}(n+2)^2-\frac{3}{2}n-2$$

```
b:=sum(i,i=1..n);
```

$$\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$$

```
evalb(simplify(c)=simplify(b));
```

$$\text{true}$$

```
simplify(c);
```

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

```
simplify(b);
```

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

دليل المصطلحات العلمية

(عربي-إنكليزي)

أ	
(أو التناظرية) البتية	Bitwize XOR
(أو) البتية	Bitwize OR
(أو) الحصرية	XOR=Exclusive or
(و) البتية	Bitwize AND
أبراج هانوي	Towers of Hanoi
اتجاه بيان غير موجه	Orientation of undirected graph
اتحاد	Union
اتحاد، وصل	Conjunction
إثبات	Proof
إثبات باطل	Proof vacuous
إثبات بالتناقض	Proof by contradiction
إثبات بالحالات	Proof by cases
إثبات بالمكافئ العكسي	Proof by contraposition
إثبات بديهي	Trivial proof
إثبات شامل	Exhaustive proof
إثبات مباشر	Direct proof

Existence proof	إثبات وجودي
Duality	الإثنانية، الثنيوية
Procedures	إجراءات
Device	أداة، قطعة
if ... then	إذا ... فإن
if and only if	إذا وفقط إذا
Floor	أرضية العدد
Exclusion	استثناء، حذف
Inference	استدلال
Proof strategy	استراتيجية إثبات
Mathematical Induction	استقراء رياضي
Noun	اسم
Exponential	أسي
Conjugate	اشتقاق، تصريف
Knaves	أشرار
Bit Strings	أشرطة محرفية
Minimum	أصغر
Less than or equal	أصغر من أو يساوي
Minimum spanning trees	الأشجار الهيكلية الأصغرية

Origin	أصل
Irrational	أصم، غير نسبي
Addition	إضافة
Clusion and Conclusion	الإضافة والحذف
Prime numbers	أعداد أولية
Integers	أعداد صحيحة
Catalan numbers	أعداد كتالان
Mersenne Primes	أعداد مرسين الأولية
Elements	أعضاء
Maximum	أعظم
Closure	إغلاق
Shortest-path	أقصر مسار
Greater than or equal	أكبر من أو يساوي
Ackermann	أكيرمان
Machine	آلة
Turing Machine	آلة تيورينغ
Puzzles	ألغاز
Electronic	إلكتروني
Absorption	امتصاص

Reflexive	انعكاسية
Instructions	أوامر
Automata, Automaton	أوتومات
Relatively prime	أولية نسبياً
ب	
mod	باقي القسمة (تابع)
Remainder	باقي قسمة
Byte	بايت
Bit	بت
Bitwize	البتية
Axiom	بديهة
Tower	برج
Program	برنامج
Simple	بسيط
Recursively	بشكل عودي
Complement	بشكل كامل
Constructing	بناء
NOR gate	بوابة معاكس (أو)
NAND gate	بوابة معاكس (نعم)

Gate	بوابة، دارة
Boolean	بولياني، منطقي
Random simple graph	بيان بسيط عشوائي
Subgraph	بيان جزئي
Nonseparable graph	بيان غير قابل للانفصال
Infinite graph	بيان غير منتهٍ
Complementary graph	بيان مكمل
Bipartite graphs	بيانات جزئية
Compete Graphs	بيانات كاملة
Connected graphs	بيانات متصلة
Digraphs, Directed graph	بيانات موجهة
Directed graphs	بيانات موجهة
Labeled diagrphs	بيانات موجهة معلمة
Weighted graphs	بيانات موزونة
ت	
Transition function	تابع الانتقال
Partial function	تابع جزئي
Onto function	تابع غامر
Surjective	تابع غامر

Total function	تابع كلي
Invertible function	تابع ليس عكسي
Injective	تابع متباين
One-to-one function	تابع متباين
Generalized permutations	تباديل معممة
Forward substitution	تبديل لاحق
Experiment	تجربة
Partition	تجزئة
Collection of sets	تجمع من المجموعات
Carry	تحميل
Transformations	تحويل
Minimization of	تخفيض الـ
Conjectures	تخمين
Quadratic	تربيعي
Dictionary ordering	ترتيب القاموس
Composition	تركيب
Composition of functions	تركيب التوابع
Coding	ترميز
Quantification	تسوير

Universal quantification	تسوير شامل
Existential quantification	تسوير وجودي
Cryptography	تشفير، تعمية
Derangements	تشويش
Design	تصميم
Majority voting	تصويت الأغلبية
Pictorial	تصويري
Application	تطبيق
Mappings	تطبيقات
Boolean expressions	تعابير بوليانية
Collaboration	تعاون
Expression	تعبير
Enumeration	تعداد
Definition	تعريف
Complexity of algorithm	تعقيد خوارزمية
Change of base	تغيير الحالة
Correspondence	تقابل
Intersection	تقاطع، فصل
Approximation	تقريب

Iterative	تكراري
Representation	تمثيل
Octal representation	تمثيل ثماني
Hexadecimal representation	تمثيل ست عشري
Symmetric	تناظرية
Paradox	تناقض
Boolean functions	توابع بوليانية
Generating Functions	توابع مولدة
Combinational	توافقي
Decimal expansions	توسعات عشرية
ث	
Constant	ثابت
Pythagorean triples	ثلاثيات فيثاغورث
Binary	ثنائي
Bi-implication	ثنائي التوافق
Biconditional	ثنائي الشرط (من الطرفين معاً)
ج	
Adder	جامع
Full adder	جامع كلي

Half adder	جامع نصفي
Boolean Algebra	جبر بول
Boolean product	جداء بولياني
Cartesian product	جداء ديكارتي
Truth Table	جدول الحقيقة
Roots	جذور، أصفار
Boolean sum	جمع بولياني
Sentence	جملة
Fixture controlled by three switches	جهاز إضاءة بثلاثة قواطع
Neighbors in graphs	تجاور في بيان
ح	
Computer	حاسوب
Case Sensitivity	حالات الحساسية
Acceptance states	حالات القبول
Final states	حالات نهائية
Initial state	حالة ابتدائية
Halt state	حالة توقف
Reachable state	حالة سهلة الوصول
Sink state	حالة ماصة

Average-case	حالة متوسطة
Bag	حاوية، حقيبة
Deterministic	حتمي
Argument	حجة
Minterm	حد أصغري
Upper limit of a summation	حد أعلى لمجموع
Datagrams	حزم بيانات
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Predicate calculus	حساب المسندات
Arithmetic	حسابي
Sensitive	حساسية
Fields	حقول
Real	حقيقي
Loop	حلقة
خ	
Out-degree of vertex	خارج درجة العقدة
Attribute	خاصية
Karnaugh maps	خرائط كارنوف
Properties of	خصائص الـ

False	خطأ، زيف
Parallel algorithms	خوارزميات متوازية
Algorithm	خوارزمية
د	
Circuit, Circuits	دارة، دارات
Function	دالة، تابع
Degree	درجة
Semantics	دلالات
Index of summation	دليل مجموع
Cycle	دورة، حلقة
Domino	الدومنة
ذ	
Tail	ذيل
ر	
Head	رأس
Packages	رُزم
Boolean power	رفع لقوة بولينية
Digital	رقمي
Standard Math	رموز رياضية

Routine	روتين، إجراء
Cardinality	رئيس مجموعة، عدد عناصر
ز	
Time	زمن
Even	زوجي
س	
Records	سجلات
Hexagon	سداسي
Ceiling	سقف العدد
Formal power series	سلسلة قوى
Context	سياق
ش	
Universal	شامل
Network	شبكة
Spanning Tree	شجرة هيكلية
Tape	شريط
Strings	شريط محرفي
Partner	شريك
Closed form	شكل مغلق

ص	
صالح	Valid
صانعة	Production
صح	True
صفحة ويب	Web page
صفيفات	Arrays
صواب	Correctness
صورة مجموعة	Image of a set
صيغة الفصل العادية	DNF=Disjunctive normal form
صيغة الوصل العادي	CNF=Conjunctive normal form
ض	
ضرب سريع	Fast multiplication
ضعف	Double
ضم أشرطة المحارف	Concatenation
ط	
طول شريط	Length of string
ع	
عاملي !	Factorial
عبارات شرطية	Conditional Statements

Equivalent Statements	عبارات متكافئة
Statement	عبارة
Wells	عجلات
Counting	عد
Object	عضو
Vertices	عقد
Interior vertices	عقد داخلية
Converse	العكس
Relation	علاقة
Or	علاقة (أو)
And	علاقة الاتحاد (و)
Antisymmetric	علاقة تخالفية
Binary relation	علاقة ثنائية
Recurrence relation	علاقة عودية
Complementary relation	علاقة مكملة
Operations	عمليات
Not	عملية (لا) للنفي
Cons	عملية الإنشاء
Multiplication	عملية الضرب

Division	عملية القسمة
Members	عناصر
Recursive	عودي، تكراري
غ	
Bijective	غامر
Ambiguous	غامض
Language closure	غلاقة اللغة
Innumerable	غير قابل للعد
Infinity	غير منتهٍ
ف	
Odd	فردي
Knights	فرسان
Hypothesis	فرضية
Difference	فرق
Disjunction	فصل
Space	فضاء
Verb	فعل
ق	
Derivable from	قابل للاشتقاق من

gcd=greatest common divisor	قاسم مشترك أعظمي
Exclusion rule	قاعدة استثناء
Database	قاعدة البيانات
List, Menu	قائمة
Resolution	قرار
Divisibility	قسمة
Proposition	قضية
Diameter of graph	قطر البيان
Diagonal of a polygon	قطر في مضلع
Cut	قطع
Gambling	قمار، ميسر
Grammars	قواعد
Prolog rules	قواعد لغة البرولوغ
Laws	قوانين
Distributive laws	قوانين التوزيع
Idempotent laws	قوانين المثلية
Negation laws	قوانين النفي
Domination laws	قوانين الهيمنة
Commutative laws	قوانين تبديلية

Associative laws	قوانين تجميعية
Identity laws	قوانين حيادية
De Morgan’s laws	قوانين دومورغان
Power	قوة، رفع إلى أس
Expected values	قيم متوقعة
Truth Value	قيمة الحقيقة
ك	
Polynomial	كثيرة حدود
Rational	نسبي
Word	كلمة
ل	
Nondeterinistic	لا حتمي
Language	لغة
Prolog	لغة برولوغ
Natural language	لغة طبيعية
Recognized language	لغة معترف بها
Palettes	لوحة الرموز
log=Logarithm	لوغاريتم
م	

Principle of	مبدأ الـ
Pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام
Lemma	مبرهنة
Sequential	متتالي
Adjacent	متجاورة
Inequality	متراجحة
Triangle inequality	متراجحة المثلث
Series	متسلسلات
Multiple edges	متعدد الأضلاع
Tuples	متعدد العناصر
n-tuples	متعدد من n عنصراً
Transitive	متعدية
Boolean variable	متغير بولياني
Variables	متغيرات
Discrete	متقطع
Distinct	متميز، مختلف
Examples of	مثال لـ
Counter example	مثال مناقض
Optimal	مثالي

Matching	مجاراة
Domain of discourse	مجال الحديث
Compilers	مجمّعات
Subsets	مجموعات جزئية
Disjoint sets	مجموعات منفصلة
Set	مجموعة
Domain	مجموعة التعريف
Empty set	مجموعة خالية
Codomain	مجموعة قيم التابع، مستقر
Literal	محرف
Engine	محرك
Computable	محسوب
Output	مخرجة
State diagram	مخطط الحالة
Venn diagram	مخطط فن
Diagrams	مخططات
Constructive approach	المدخل الإنشائي
Input	مدخلة
Perfect square	مربع كامل

Satisfiable	مُرضٍ، قابل للإرضاء
Composite	مركب
Complex	مركب، عقدي
Center	مركز
Path	مسار
Simple Path	مسار بسيط
Distance	مسافة
Equality	مساواة
Premise	مسلمة
Predicate	مسند
Prolog facts	مسندات لغة البرولوغ
Quantifier	مسور
Nested Quantifiers	مسورات مركبة
Lattices	مشابك
Solvable problems	مشاكل قابلة للحل
Yes-or-no problems	مشاكل نعم أو لا
Bridge problem	مشكلة العبور
Discrete logarithm problem	مشكلة اللوغاريتم المتقطعة
Halting problem	مشكلة توقف

Terminology of	مصطلح الـ
Matrices	مصفوفات
Zero–one matrices	مصفوفات صفر–واحد
lcm= least common multiple	مضاعف مشترك أصغري
Convex polygon	مضلع محدب
Congruence	مطابق
Equation	معادلة
Manipulation	معالجة
Concurrent processing	معالجة متزامنة
Coefficients	معاملات
Binomial coefficients	معاملات ثنائي الحد
Rates of growth	معدلات النمو
Isolated	معزول
Inverse	معكوس
Criterion	معيار
Big-Omega notation	معيار أوميغا الكبيرة
Little-o notation	معيار أوه الصغيرة
Big-O notation	معيار أوه الكبيرة
Big-Theta notation	معيار تيتا الكبيرة

Key exchange	مفتاح التبادل
Decryption key	مفتاح فك التشفير
Vocabulary	مفردات
Asymptotes	مقاربات
Article	مقال
Equivalence	مكافئ
Contrapositive	المكافئ العكسي
Repeated	مكرر
Components	مكونات
Extended	ممتد
Representative	ممثل
Forbidden	ممنوع
Finite	منتهي
Logic	منطق
Propositional logic	منطق اقتراحي
Fuzzy logic	منطق عائم
Initial position	موضع أولي
Subject	موضوع

Conclusion	نتيجة
Corollary	نتيجة، كرولاري
Syntax	نحو، قواعد
Quotient	نسبة
Range	نطاق
Regular	نظامي
Number theory	نظرية الأعداد
Adjective	نعت، صفة
Negation	نفي
Type	نمط
Data type	نمط البيانات
Growth	نمو
Relational data model	نموذج المعطيات العلائقي
Datatype	نوع البيانات
و	
Interface	واجهة
Worksheet	ورقة عمل
ي	
Flip-flops	يتقلب، يتأرجح

Contains	يحتوي
Maps	يطبق

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

(إنكليزي- عربي)

A	
Absorption	امتصاص
Acceptance states	حالات القبول
Ackermann	أكيرمان
Adder	الجامع
Addition	إضافة
Adjacent	متجاورة
Adjective	نعت، صفة
Algorithm	خوارزمية
Ambiguous	غامض
And	علاقة الاتحاد (و)
Antisymmetric	علاقة تخالفية
Application	تطبيق
Approximation	تقريب
Argument	حجة
Arithmetic	حسابي
Arrays	صفيفات
Article	مقال

Associative laws	قوانين تجميعية
Asymptotes	مقاربات
Attribute	خاصية
Automata, Automaton	أوتومات
Average-case	حالة متوسطة
Axiom	بديهة
B	
Bag	حاوية
Biconditional	ثنائي الشرط (من الطرفين معاً)
Big-O notation	معيار أوه الكبيرة
Big-Omega notation	معيار أوميغا الكبيرة
Big-Theta notation	معيار تيتا الكبيرة
Bi-implication	ثنائي التوافق
Bijective	غامر
Binary	ثنائي
Binary relation	علاقة ثنائية
Binomial coefficients	معاملات ثنائي الحد
Bipartite graphs	بيانات جزئية
Bit	بت

Bit Strings	أشرطة محرفية
Bitwize	البتية
Bitwize AND	(و) البتية
Bitwize OR	(أو) البتية
Bitwize XOR	(أو التناظرية) البتية
Boolean	بولياني، منطقي
Boolean Algebra	جبر بول
Boolean expressions	تعابير بوليانية
Boolean functions	توابع بوليانية
Boolean power	رفع لقوة بوليانية
Boolean product	جداء بولياني
Boolean sum	جمع بولياني
Boolean variable	متغير بولياني
Bridge problem	مشكلة العبور
Byte	بايت
C	
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Cardinality	رئيس مجموعة، عدد عناصر
Carry	تحميل

Cartesian product	جداء ديكارتي
Case Sensitivity	حالات الحساسية
Catalan numbers	أعداد كتالان
Ceiling	سقف العدد
Center	مركز
Change of base	تغيير الحالة
Circuit, Circuits	دارة، دارات
Closed form	شكل مغلق
Closure	إغلاق
Clusion and Conclusion	الإضافة والحذف
CNF=Conjunctive normal form	صيغة الوصل العادي
Coding	ترميز
Codomain	مجموعة قيم التابع، مستقر
Coefficients	معاملات
Collaboration	تعاون
Collection of sets	تجمع من المجموعات
Combinational	توافقي
Commutative laws	قوانين تبديلية
Compete Graphs	بيانات كاملة

Compilers	المجمّعات
Complement	بشكل كامل
Complementary graph	بيان مكمل
Complementary relation	علاقة مكملة
Complex	مركب، عقدي
Complexity of algorithm	تعقيد خوارزمية
Components	مكونات
Composite	مركب
Composition	تركيب
Composition of functions	تركيب التوابع
Computable	محسوب
Computer	حاسوب
Concatenation	ضم أشرطة المحارف
Conclusion	نتيجة
Concurrent processing	معالجة متزامنة
Conditional Statements	عبارات شرطية
Congruence	مطابق
Conjectures	تخمين
Conjugate	اشتقاق، تصريف

Conjunction	اتحاد، وصل
Connected graphs	بيانات متصلة
Cons	عملية الإنشاء
Constant	ثابت
Constructing	بناء
Constructive approach	المدخل الإنشائي
Contains	يحتوي
Context	سياق
Contrapositive	المكافئ العكسي
Converse	العكس
Convex polygon	مضلع محدب
Corollary	نتيجة، كرولاري
Correctness	صواب
Correspondence	تقابل
Counter example	مثال مناقض
Counting	عد
Criterion	معيار
Cryptography	تشفير، تعمية
Cut	قطع

Cycle	دورة، حلقة
D	
Data type	نمط البيانات
Database	قاعدة البيانات
Datagrams	حزم بيانات
Datatype	نوع البيانات
De Morgan’s laws	قوانين دومورغان
Decimal expansions	توسعات عشرية
Decryption key	مفتاح فك التشفير
Definition	تعريف
Degree	درجة
Derangements	تشويش
Derivable from	قابل للاشتقاق من
Design	تصميم
Deterministic	حتمي
Device	أداة، قطعة
Diagonal of a polygon	قطر في مضلع
Diagrams	مخططات
Diameter of graph	قطر البيان

Dictionary ordering	ترتيب القاموس
Difference	فرق
Digital	رقمي
Digraphs, Directed graph	بيانات موجهة
Direct proof	إثبات مباشر
Directed graphs	بيانات موجهة
Discrete	متقطع
Discrete logarithm problem	مشكلة اللوغاريتم المتقطعة
Disjoint sets	مجموعات منفصلة
Disjunction	فصل
Distance	مسافة
Distinct	متميز، مختلف
Distributive laws	قوانين التوزيع
Divisibility	قسمة
Division	عملية القسمة
DNF=Disjunctive normal form	صيغة الفصل العادية
Domain	مجموعة التعريف
Domain of discourse	مجال الحديث
Domination laws	قوانين الهيمنة

Domino	الدومنة
Double	ضعف
Duality	الإثنانية، الثنيوية
E	
Electronic	إلكتروني
Elements	أعضاء
Empty set	مجموعة خالية
Engine	محرك
Enumeration	تعداد
Equality	مساواة
Equation	معادلة
Equivalence	مكافئ
Equivalent Statements	عبارات متكافئة
Even	زوجي
Examples of	مثال لـ
Exclusion	استثناء، حذف
Exclusion rule	قاعدة استثناء
Exhaustive proof	إثبات شامل
Existence proof	إثبات وجودي

Existential quantification	تسوير وجودي
Expected values	قيم متوقعة
Experiment	تجربة
Exponential	أسي
Expression	تعبير
Extended	ممتد
F	
Factorial	عاملي !
False	خطأ
Fast multiplication	ضرب سريع
Fields	حقول
Final states	حالات نهائية
Finite	منتهي
Fixture controlled by three switches	جهاز إضاءة بثلاثة قواطع
Flip-flops	يتقلب، يتأرجح
Floor	أرضية العدد
Forbidden	ممنوع
Formal power series	سلسلة قوى
Forward substitution	تبديل لاحق

Full adder	الجامع الكلي
Function	دالة، تابع
Fuzzy logic	منطق عائم
G	
Gambling	قمار، ميسر
Gate	بوابة، دارة
gcd=greatest common divisor	قاسم مشترك أعظمي
Generalized permutations	تباديل معممة
Generating Functions	توابع مولدة
Grammars	قواعد
Greater than or equal	أكبر من أو يساوي
Growth	نمو
H	
Half adder	الجامع النصفي
Halt state	حالة توقف
Halting problem	مشكلة توقف
Head	رأس
Hexadecimal representation	تمثيل ست عشري
Hexagon	سداسي

Hypothesis	فرضية
I	
Idempotent laws	قوانين المثلية
Identity laws	قوانين حيادية
if ... then	إذا ... فإن
if and only if	إذا وفقط إذا
Image of a set	صورة مجموعة
Index of summation	دليل مجموع
Inequality	متراجحة
Inference	استدلال
Infinite graph	بيان غير منتهٍ
Infinity	غير منتهي
Initial position	موضع أولي
Initial state	حالة ابتدائية
Injective	تابع متباين
Innumerable	غير قابل للعد
Input	مدخلة
Instructions	أوامر
Integers	أعداد صحيحة

Interface	واجهة
Interior vertices	عقد داخلية
Intersection	تقاطع، فصل
Inverse	معكوس
Invertible function	تابع ليس عكسي
Irrational	أصم، غير نسبي
Isolated	معزول
Iterative	تكراري
K	
Karnaugh maps	خرائط كارنوف
Key exchange	مفتاح التبادل
Knaves	أشرار
Knights	فرسان
L	
Labeled diagrphs	بيانات موجهة معلمة
Language	لغة
Language closure	غلاقة اللغة
Lattices	مشابك
Laws	قوانين

lcm= least common multiple	مضاعف مشترك أصغري
Lemma	مبرهنة
Length of string	طول شريط
Less than or equal	أصغر من أو يساوي
List	قائمة
Literal	محرف
Little-o notation	معيار أوه الصغيرة
log=Logarithm	لوغاريتم
Logic	منطق
Loop	حلقة
M	
Machine	آلة
Majority voting	تصويت الأغلبية
Manipulation	معالجة
Mappings	تطبيقات
Maps	يطبق
Matching	مجاراة
Mathematical Induction	استقراء رياضي
Matrices	مصفوفات

Maximum	أعظم
Members	عناصر
Menu	قائمة
Mersenne Primes	أعداد مرسين الأولية
Minimization of	تخفيض الـ
Minimum	أصغر
Minimum spanning trees	الأشجار الهيكلية الأصغرية
Minterm	حد أصغري
mod	تابع باقي القسمة
Multiple edges	متعدد الأضلاع
Multiplication	عملية الضرب
N	
NAND gate	بوابة معاكس (نعم)
Natural language	لغة طبيعية
Negation	نفي
Negation laws	قوانين النفي
Neighbors in graphs	تجاور في بيان
Nested Quantifiers	مسورات مركبة
Network	شبكة

Nondeterinistic	لا حتمي
Nonseparable graph	بيان غير قابل للانفصال
NOR gate	بوابة معاكس (أو)
Not	عملية (لا) للنفي
Noun	اسم
n-tuples	متعدد من n عنصراً
Number theory	نظرية الأعداد
O	
Object	عضو
Octal representation	تمثيل ثماني
Odd	فردي
One-to-one function	تابع متباين
Onto function	تابع غامر
Operations	عمليات
Optimal	مثالي
Or	علاقة (أو)
Orientation of undirected graph	اتجاه بيان غير موجه
Origin	أصل
Out-degree of vertex	خارج درجة العقدة

Output	مخرجة
P	
Packages	رُزم
Palettes	لوحة الرموز
Paradox	تناقض
Parallel algorithms	خوارزميات متوازية
Partial function	تابع جزئي
Partition	تجزئة
Partner	شريك
Path	مسار
Perfect square	مربع كامل
Pictorial	تصويري
Pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام
Polynomial	كثيرة حدود
Power	قوة، رفع إلى أس
Predicate	مسند
Predicate calculus	حساب المسندات
Premise	مسلمة
Prime numbers	أعداد أولية

Principle of	مبدأ الـ
Procedures	إجراءات
Production	صانعة
Program	برنامج
Prolog	لغة برولوغ
Prolog facts	مسندات لغة البرولوغ
Prolog rules	قواعد لغة البرولوغ
Proof	إثبات
Proof by cases	إثبات بالحالات
Proof by contradiction	إثبات بالتناقض
Proof by contraposition	إثبات بالمكافئ العكسي
Proof strategy	استراتيجية إثبات
Proof vacuous	إثبات باطل
Properties of	خصائص الـ
Proposition	قضية
Propositional logic	منطق اقتراحي
Puzzles	ألغاز
Pythagorean triples	ثلاثيات فيثاغورث
Q	

Quadratic	تربيعي
Quantification	تسوير
Quantifier	مسور
Quotient	نسبة
R	
Random simple graph	بيان بسيط عشوائي
Range	نطاق
Rates of growth	معدلات النمو
Rational	نسبي
Reachable state	حالة سهلة الوصول
Real	حقيقي
Recognized language	لغة معترف بها
Records	سجلات
Recurrence relation	علاقة عودية
Recursive	عودي، تكراري
Recursively	بشكل عودي
Reflexive	انعكاسية
Regular	نظامي
Relation	علاقة

Relational data model	نموذج المعطيات العلائقي
Relatively prime	أولية نسبياً
Remainder	باقي قسمة
Repeated	مكرر
Representation	تمثيل
Representative	ممثل
Resolution	قرار
Roots	جذور، أصفار
Routine	روتين، إجراء
S	
Satisfiable	مُرضٍ، قابل للإرضاء
Semantics	دلالات
Sensitive	حساسية
Sentence	جملة
Sequential	متتالي
Series	متسلسلات
Set	مجموعة
Shortest-path	أقصر مسار
Simple	بسيط

Simple Path	مسار بسيط
Sink state	حالة ماصة
Solvable problems	مشاكل قابلة للحل
Space	فضاء
Spanning Tree	شجرة هيكلية
Standard Math	رموز رياضية
State diagram	مخطط الحالة
Statement	عبارة
Strings	شريط محرفي
Subgraph	بيان جزئي
Subject	موضوع
Subsets	مجموعات جزئية
Surjective	تابع غامر
Symmetric	تناظرية
Syntax	نحو، قواعد
T	
Tail	ذيل
Tape	شريط
Terminology of	مصطلح الـ

Time	زمن
Total function	تابع كلي
Tower	برج
Towers of Hanoi	أبراج هانوي
Transformations	تحويل
Transition function	تابع الانتقال
Transitive	متعدية
Triangle inequality	متراجحة المثلث
Trivial proof	إثبات بديهي
True	صح
Truth Table	جدول الحقيقة
Truth Value	قيمة الحقيقة
Tuples	متعدد العناصر
Turing Machine	آلة تيورينغ
Type	نمط
U	
Union	اتحاد
Universal	شامل
Universal quantification	تسوير شامل