جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الدكتور المهندس
رافع النبواني
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

الدكتور المهندس
محمد كامل حسن
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

الدكتور المهندس
نذير مكارم
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

الدكتور المهندس
جميل أبو جهجاه
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

الدكتور المهندس
رشدي النجار
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

الهندسة الوصفية

الكتاب النظري

لطلاب السنة الأولى ميكانيك وكهرباء

منشورات جامعة دمشق

للعام الدراسي
1999/2000

مقدمة

تعد الهندسة الوصفية إحدى أهم المواد الأساسية التي تدخل في صلب مناهج الدراسات الهندسية فهي تساعد في بناء الحس الهندسي المرن.

تعنى مادة الهندسة الوصفية في التعبير وإيجاد طرائق الحل لمسائل هندسية مختلفة وذلك بمعرفة طرائق تمثيل الأشكال الهندسية الفراغية، حيث يمكن تمثيلها ليس فقط على المستوي وإنما أيضاً على بعض السطوح الأخرى. يمكن إنجاز التمثيل والإنشاء حسب قواعد الهندسة الوصفية من إنشاء صورة فكرية واضحة للأشكال والمجسمات بأوضاعها المختلفة في الفراغ وكذلك في إيجاد صفاتها الهندسية، الأمر الذي يصب في تنمية القدرة على التخيل الفراغي وتطويره.

يستخدم نتاج الهندسة الوصفية في إنجاز الرسم الهندسي، الذي يعد بحد ذاته اللغة التي يتفاهم وفقها المهندسيون عند نقل أفكارهم الفراغية وترجمة تصوراتهم الفراغية انطلاقاً من مجسمات حقيقية إلى مستوي الورقة وبالعكس.

لما كان الرسم الهندسي بحق هو اللغة التي يتفاهم بوساطتها المهندسون خلال نقل أفكارهم، فإن الهندسة الوصفية هو العلم الذي يجمع في طياته قواعد تلك اللغة.

لغتنا تتألف من ثلاثة أحرف هي: النقطة، المستقيم والمستوي.

يلقى فهم مادة الهندسة الوصفية بعض الصعوبة، كونها تحتاج بعض التخيل الفراغي. وليس بعيداً ما يزيد في الأمر صعوبة، هو الاقتضاب الشديد إلى حد الإبهام والغموض في بعض المراجع المتاحة وأحياناً أخرى، الإسهاب إلى حد يولد عند الطالب الملل والشرود أثناء متابعته للشرح.

بدأنا بدراسة طرائق الإسقاط المختلفة بدراسة مساقط النقطة بفرض أنها المفهوم الأساس لكل عناصر السطوح والمجسمات، ثم المستقيمات فالمستويات والمجسمات. من ناحية ثانية يمكن تقسيم الكتاب نظرياً إلى ثلاثة أبحاث: الطرائق العامة في الهندسة الوصفية والطرائق الخاصة فالإسقاط الأكسونومتري. في الملحق فكرة عامة عن خاصة التآلف وبعض الأمثلة عن كيفية الاستفادة من هذه الخاصة في حل مسائل معينة.

حاولنا أن نغطي في هذا الكتاب، منهاج مادة الهندسة الوصفية، التي تـدرس في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة دمشق. وأعطينـا موضوعاتهـا التسلسـل المنطقي بغية الأخذ بيد الطالب نحو فهم موضوعاتها.

نرجو أن يجد فيه الطالب العون والفائدة المرجوة.

المؤلفون.

توطئة

الهندسة الوصفية هي مجموعة من القواعد والطرائق للتعامل مع العناصر والسطوح والأشكال الهندسية التي نعرفها من الهندسة المستوية والهندسة الفراغية، وبأوضاعها النسبية المختلفة التي تشكلها مع بعضها بعضاً. لذلك فإننا نعتمد اعتماداً كلياً على بديهيات وفرضيات الهندستين المذكورتين والتي سنعدها كلها بديهيات ومسلمات نستخدمها دون الحاجة إلى العودة لتوضيحها أو البرهان عليها كلما احتجنا إليها.

إذن فالعناصر التي سنستخدمها في الهندسة الوصفية (أحرف لغة الهندسة الوصفية) هي النقطة والمستقيم والمستوي، والتي يمكن أن توجد مع بعضها بعضاً بازدواجات مختلفة يمكن أن تنشأ عنها أوضاع نسبية مختلفة أهمها:

نقطة مع نقطة : إما منطبقتان أو تحددان مستقيماً.

نقطة مع مستقيم : إما أن تنطبق النقطة على المستقيم أو تشكل معه مستوياً.

نقطة مع مستو : إما أن تكون النقطة واقعة في المستوي أو كيفية في الفراغ.

مستقيم مع مستقيم : إما متوازيان أو متقاطعان أو متخالفان (شماليان).

مستقيم مع مستو : إما أن يوازي المستقيم المستوي أو يخترقه في نقطة ما (يتقاطع معه في نقطة).

مستو مع مستو : متوازيان أو متقاطعان بمستقيم هو فصلهما المشترك.

إن العناصر الهندسية الثلاثة كما رأينا يمكن أن تنشأ عن بعضها بعضاً بإحدى طريقتين:

أ ـ بالإنشاء: فمن نقطتين غير منطبقتين على بعض يمكن أن ننشئ مستقيماً ومن ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة أو من نقطة ومستقيم أو مستقيمين متوازيين أو متقاطعين يمكن أن ننشئ مستوياً... إلخ.

ب ـ بالتقاطع: فمن تقاطع مستويين نحصل على مستقيم هو فصلهما المشترك ومن تقاطع ثلاثة مستويات يمكن أن نحصل على نقطة التقاء الفصول المشتركة للمستويات المتقاطعة، ومن تقاطع مستقيم مع مستو نحصل على نقطة هي نقطة اختراق المستقيم للمستوي.

فمثل هذه المعلومات الأولية وغيرها من المعلومات الهندسية العامة مثل خواص المثلث القائم وتشابه المثلثات، وخواص الزوايا المتساوية والمتكاملة والمتتامة، وعلاقة قياس الزوايا بأطوال أقواس الدائرة المحصورة بين أضلاعها وغيرها، يجب أن تكون حاضرة في أذهاننا بشكل دائم لتسهل علينا دراسة موضوعات الهندسة الوصفية.

ومن المعلومات التي سوف نحتاج لاستخدامها بشكل مستمر ودائم تلك المتعلقة بالتعامد والتوازي بين العناصر الهندسية والتي نذكر فيما يلي بعضها. فعلى سبيل المثال لا الحصر:

من شروط وبديهيات التوازي:

1 ـ يتوازى مستقيمان إذا وازى كل منهما مستقيماً ثالثاً.

2 ـ يتوازى مستقيم مع مستو إذا وازى مستقيماً واحداً واقعاً في لمستوي.

3 ـ من نقطة واحدة يمكن إنشاء مستو واحد فقط مواز لمستو معلوم.

4 ـ من نقطة واحدة يمكن إنشاء عدد لا نهائي من المستقيمات الموازية لمستو معلوم.

5 ـ يتوازى مستويان إذا توازى مستقيمان مختلفا الاتجاه في أحدهما مع مستقيمين في الآخر.

6 ـ يتوازى مستويان إذا كان كل مستقيم في كل منهما يوازي المستوي الآخر.

7 ـ إذا قطع مستويان متوازيان بمستو ثالث فإن فصليهما المشتركين مع المستوي الثالث متوازيان.

8 ـ إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فإن كل مستو ينطبق على المستقيم ويقطع المستوي المعلوم يكون فصله المشترك مع المستوي موازياً للمستقيم.

9 ـ إذا وازى مستقيم مستويين متقاطعين فإنه يوازي الفصل المشترك لهذين المستويين.

يمكن أن تكون العناصر المتقاطعة متعامدة أيضاً حيث إن التعامد هو حالة خاصة من حالات التقاطع كما نعلم.

من شروط وبديهيات التعامد:

1 ـ يتعامد مستقيمان إذا كانت الزاوية المحصورة بينهما تساوي 90 درجة.

2 ـ يتعامد مستقيمان غير متقاطعين إذا كان المستقيمان الموازيان لهما المرسومان من نقطة واحدة متعامدين.

3 ـ يتعامد مستقيم مع مستو إذا تعامد مع مستقيمين مختلفي الاتجاه في المستوي.

4 ـ من نقطة واحدة على مستقيم يمكن رسم عدد لا نهائي من المستقيمات العمودية على المستقيم والتي يجمعها مستو واحد عمودي على المستقيم.

5 ـ من نقطة غير واقعة على مستقيم يمكن رسم عدد لا نهائي من المستقيمات العمودية على المستقيم والتي يجمعها مستو واحد عمودي على المستقيم وبين بين هذه المستقيمات مستقيم واحد فقط يتقاطع مع المستقيم.

6 ـ من نقطة واحدة يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم.

7 ـ من نقطة واحدة يمكن رسم مستو واحد عمودي على مستقيم معلوم.

8 ـ إذا تعامد أحد مستقيمين متوازيين مع مستو فإن الآخر أيضاً يتعامد معه.

9 ـ إذا تعامد مستقيمان مع مستو فإنهما متوازيان.

10 ـ المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين هو عمودي على الآخر.

11 ـ إذا تعامد مستويان مع مستقيم واحد فهما متوازيان.

12 ـ يتعامد مستويان إذا وجد في أحدهما مستقيم واحد على الأقل عمودي على المستقيم الآخر.

13 ـ إذا تعامد مستويان مع مستو ثالث فإن فصلهما المشترك عمودي على المستوي الثالث.

14 ـ من نقطة واحدة خارج المستوي يمكن رسم عدد لا نهائي من المستويات العمودية على المستوي المعلوم.

15 ـ من مستقيم غير واقع في المستوي يمكن رسم مستو واحد فقط عمودي على المستوي.

16 ـ كل المستقيمات العمودية على مستوي معلوم متوازية وذات اتجاه واحد.

17 ـ كل المستويات العمودية على مستقيم معلوم متوازية.

كما أننا سنعد الطالب ملماً إلماماً كافياً بكيفية استخدام المسطرة والفرجار من أجل تحقيق بعض العمليات الإنشائية مثل تصنيف قطعة مستقيمة أو تصنيف زاوية مستقيمين متقاطعين أو تقسيم قطعة مستقيمة إلى عدد من القطع المتساوية أو إنشاء شكل هندسي منتظم بطول ضلع معلوم... إلخ.

الفصل الأول

مدخل إلى طرائق الإسقاط

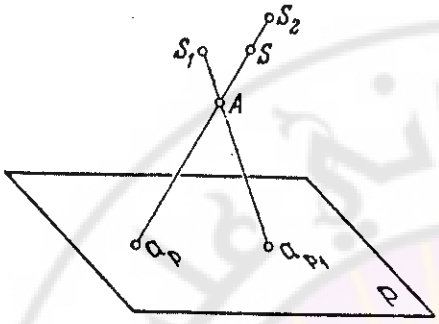
1 - 1 : الإسقاط المركزي:

وبهذا النوع من الإسقاط يتم عد نقطة من مركز للإسقاط بحيث يتم الإسقاط على مستو نسميه مستوي الإسقاط مثل المستوي P. بشكل عام تكون النقطة S خارج مستوي الإسقاط P انظر الشكل (1).

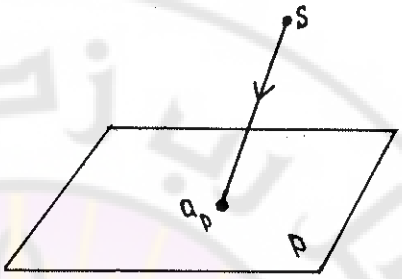
نلاحظ بأنه بغية الحصول على مسقط نقطة ما من الفراغ مثل النقطة A نقوم بتمرير مستقيم (شعاع) عبر هذه النقطة بحيث ينطلق من مركز الإسقاط (النقطة S) ويمتد هذا الشعاع بالاتجاهين بحيث يتقاطع مع مستوي الإسقاط P في نقطة ما مثل a_P. نكرر الشيء نفسه مع النقطتين B, C ونحصل بالتالي على النقاط b_P, c_P على التوالي. نسمي النقاط a_P, b_P, c_P بمساقط النقاط A, B, C على المستوي ونحصل عليها من تقاطع المستقيمات SA, SB, SC مع مستوي الإسقاط P.

يسمى مركز الإسقاط S أيضاً بالقطب ولذلك يسمى هذا النوع من الإسقاط بالإسقاط القطبي.

إذا كان مستقيم الإسقاط لنقطة مثل D بشكل مواز لمستوي الإسقاط، وبالتالي يكون مسقط مثل هذه النقطة في اللانهاية. بالمحافظة على وضع مستوي الإسقاط P وافتراض مركز الإسقاط مثل النقطة S مثلاً انظر الشكل (2) فإننا نحصل على مسقط آخر للنقطة A هو النقطة a_{P1} نلاحظ بأنه إذا كان مركز الإسقاط الجديد S واقعاً على المستقيم SA فإن مسقط النقطة يبقى نفسه a_P.

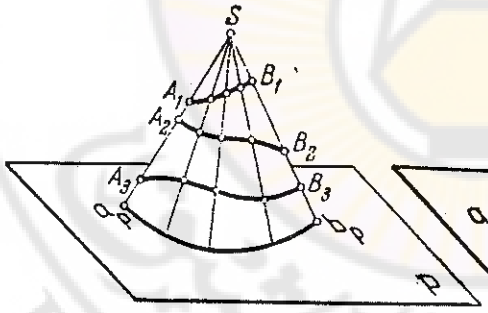


الشكل (2)

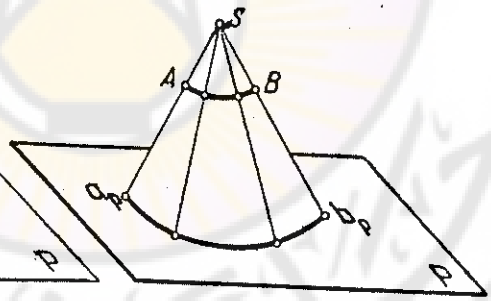


الشكل (1)

يمكن تمثيل خط منحنٍ بإسقاط عدة نقاط منه كما في الشكل (3) وتشكل مستقيمات الإسقاط بهذه الحالة سطحاً مخروطياً. ولذلك يسمى هذا النوع من الإسقاط بالإسقاط المخروطي أيضاً.



الشكل (4)



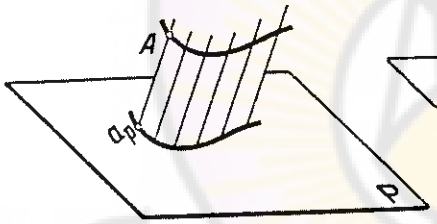
الشكل (3)

نلاحظ من الشكل (4) أن مساقط عدة خطوط منحنية هي ذاتها على مستوي الإسقاط P، وبالتالي لا يمكن تحديد الخط المنحني نفسه انطلاقاً من مسقطه فقط.

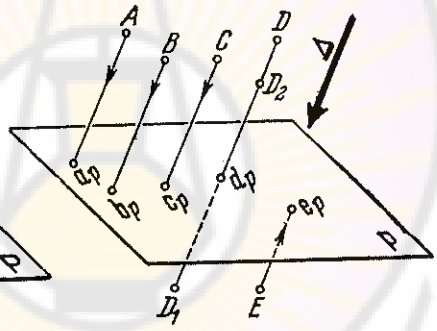
يجب التنويه إلى أنه يمكن الانتقال من نقاط وخطوط الإسقاط إلى إسقاط السطوح والاجسام بفرض أنها تتكون من مجموعة من النقاط أو المستقيمات أو المنحنيات الفراغية.

1 - 2 : الإسقاط المتوازي:

في هذا النوع من الإسقاط تكون كافة خطوط الإسقاط متوازية وتوازي اتجاها معلوماً Δ حسب الأسهم المبينة في الشكل (5). نشير إلى أن الإسقاط المتوازي يمكن عده إسقاطاً مركزياً، على فرض أن مركز الإسقاط هو نقطة بعيدة تقع في اللانهاية.



الشكل (6)



الشكل (5)

نلاحظ من الشكل السابق أن مسقط النقطة هو نقطة اختراق المستقيم الموازي لاتجاه الإسقاط والمار بالنقطة مع مستوي الإسقاط P.

بغية الحصول على مسقط خط أو منحني، يمكن إنشاء مساقط العديد من النقاط ويكون المسقط هو الخط أو المنحني الواصل بين مساقط تلك النقاط لتمثل مسقط هذا المنحني، نلاحظ بأن مستقيمات الإسقاط تشكل سطحاً اسطوانياً لذلك يسمى هذا النوع من الإسقاط بالإسقاط الاسطواني أيضاً. كما يمكن استنتاج النتائج التالية:

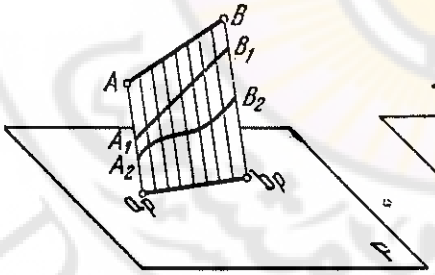
1 ـ للخط لمستقيم مسقط على شكل خط مستقيم ايضاً في الإسقاط المتوازي؛

2 ـ لكل نقطة أو خط في الفراغ مسقط وحيد؛

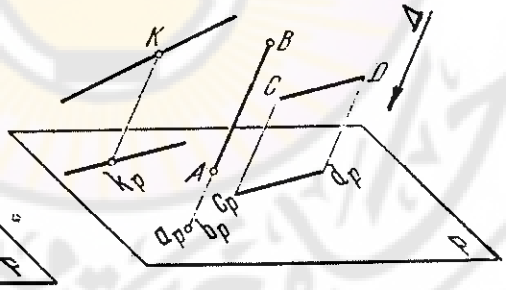
3 ـ كل نقطة من مستوي الإسقاط يمكن أن تكون مسقطاً لمجموعة نقاط في الفراغ تقع على خط مستقيم يوازي اتجاه الإسقاط المفترض فمثلاً نعد النقطة d_P مسقطاً لكافة النقاط D, D_1, D_2 على الشكل (5)؛

4 ـ كل خط في مستوي الإسقاط يمكن أن يكون مسقطاً لمجموعة خطوط، إذا كانت متوضعة جميعها في مستوي إسقاط واحد (الشكل (7) فالخط $a_P\ b_P$ هو مسقط للقطع المستقيمة أو المنحنية AB, A_1B_1, A_2B_2؛

5 ـ لإنشاء مسقط مستقيم يكفي إسقاط نقطتين من نقاط هذا المستقيم ولدى الوصل بين مسقطي هاتين النقطتين نحصل على مسقط المستقيم؛



الشكل (7)



الشكل (8)

6 ـ إذا وقعت النقطة على مستقيم فإن مسقط النقطة ينتمي غلى مسقط المستقيم الشكل (8) النقطة K تقع على المستقيم مسقطها k_P يقع على مسقط المستقيم؛

7 ـ إذا كان المستقيم موازياً لاتجاه الإسقاط (المستقيم AB على الشكل (8) فإن مسقط المستقيم كله (أو مسقط أي قطعة منه) يؤول إلى نقطة (a_P تنطبق على النقطة b_P)؛

8 ـ القطعة المستقيمة، الموازية لمستوي الإسقاط تسقط على هذا المستوي بطولها الحقيقي الشكل (8) حيث $CD = c_P\, d_P$ كقطعتين متوازيتين فيما بينهما.

لاحقاً سندرس أيضاً بعض صفات الإسقاط المتوازي، التي تبين، أي العلاقات الحقيقية بين العناصر الفراغية تحافظ على قيمتها على أنها علاقة بين مساقط هذه العناصر المدروسة.

نشير هنا إلى أن استخدام طرائق الإسقاط المتوازي للنقاط والخطوط يمكّن من إنشاء المساقط الموازية للسطوح والأجسام.

يقسم الإسقاط الموازي إلى إسقاط مائل وقائم. في الحالة الأولى فإن اتجاه شعاع الإسقاط يشكل مع مستوي الإسقاط زاوية، لا تساوي 90° وفي الحالة الثانية يكون شعاع الإسقاط معامداً لمستوي الإسقاط.

عند دراسة الإسقاط المتوازي علينا إذاً أن نتصور بمسافة كبيرة ـ لا نهائية عن مستوي الإسقاط. وبالواقع فإن الأجسان والسطوح تدرس بمسافات محدودة. الإسقاط المركزي، على خلاف ذلك، يشابه النظر الطبيعي ويعطي الناظر الانطباع نفس الذي تعطيه المساقط. إلا أن طريقة الإسقاط المركزي تبقى خارج منهاج مادة الهندسة الوصفية.

بالمقارنة مع طريقة الإسقاط المركزي فإن الإسقاط المتوازي أكثر بساطة في إنشائه، ومواصفاته، التي تحافظ على العلاقات القياسية الطبيعية، ما يسوغ الاستخدام الواسع لطريقة الإسقاط المتوازي.

1 - 3 . طريقة مونج:

مع تطور التقنيات واستمرار الجهود في البحث عن طرائق مناسبة في تمثيل المجسمات الفراغية برزت الحاجة إلى استخدام طريقة عامة تحقق الدقة وسهولة قياس الشكل التمثيلي. أي إمكانية تحديد وضع نقطة بدقة بالنسبة لمواقع نقاط أخرى. ومع الجمع المتتالي للقواعد المستقلة وطرائق الإنشاء لمثل هذا التمثيل وتطويرها ظهرت مجموعة أبحاث للعالم الفرنسي مونج ونشرت عام 1799 تحت اسم «الهندسة الوصفية».

هسبار مونج (1746-1818) دخل التاريخ كواحد من كبار المهندسين الفرنسيين في نهاية القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر، هو مهندس اجتماعي وشخصية حكومية في فترة الثورة 1789-1798. خلال تسلم نابليون الأول الحكم وكان أحد مؤسسي المدرسة التقنية المشهورة في باريس وشارك في عملية إدخال وحدات القياس المترية والوزنية وكان فيما بعد وزيراً في الحكومة الفرنسية آنذاك.

لم تتوفر الإمكانية المباشرة لدى مونج لنشر أعماله مع شرح طريقة عمله: وإذا أخذنا بالحسبان القيمة العملية الكبيرة لهذه الطريقة التي تسمح بتنفيذ رسوم للمواقع ذات الطابع الحربي، يكون من المرغوب به في حينه أن تصبح طريقة مونج المعروفة خارج حدود فرنسا ولهذا السبب فإن الحكومة الفرنسية لم تسمح بطباعة الكتاب حول تلك الطريقة.

في نهاية القرن الثامن عشر، وبعد أن قام برونوف بإصلاحات داخلية، اصبح مونج مطارداً واضطر غلى الاختفاء وأنهى حياته في فقر شديد.

حقق مونج طريقته في الإسقاط على مستويين متعامدين بأسلوب سهل واضح ودقيق وكانت عملية أخذ المقاسات على المساقط أمراً ممكناً أيضاً.

وهكذا صارت طريقة مونج للإسقاط الطريقة الأساس في تقانات الرسم الصناعي، طريقة الإسقاط المتوازي المتعامد على مستويين متعامدين للإسقاط.

هذا وقد أصبحت مادة الهندسة الوصفية، مادة تدريسية في المعاهد العليا بدءاً من عام 1810 في مختلف الدول الأوروبية. وتحظى من ذلك التاريخ وحتى الآن اهتماماً مميزاً في معاهد تخصصية كثيرة.

1 - 4 : تمارين:

1. كيف نمثل المسقط المركزي لنقطة؟
2. في أي حالة يشكل فيها الإسقاط المركزي لخط مستقيم نقطة؟
3. ماذا تتضمن طريقة الإسقاط المتوازي؟
4. كيف نمثل المسقط المتوازي لخط مستقيم؟
5. هل يمكن أن يشكل المسقط المتوازي لخط مستقيم نقطة، وكيف؟
6. إذا كانت نقطة تقع على مستقيم بالفراغ، كيف يمكن معرفة مساقطها انطلاقاً من مسقط المستقيم نفسه؟

الفصل الثاني

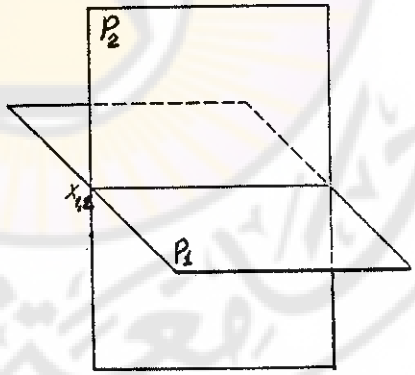
تمثيل النقطة والمستقيم

أولاً : تمثيل النقطة

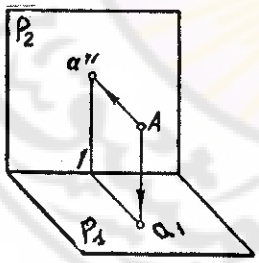
2 - 1 : تمثيل النقطة في الجملة P_1 و P_2:

نفترض مستويين للإسقاط العمودي، المستويين المتعامدين على الشكل (9) نسمي المستوي الأول المستوي الأفقي P_1 للإسقاط بينما المستوي الثاني العمودي على المستوي الأول هو المستوي P_2 نسميه بالمستوي الجبهي للإسقاط.

المستويان P_1 , P_2 يشكلان جملة للإسقاط العمودي، نسمي الخط المشترك بينهما بخط الأرض أو خط الأرض في هذه الجملة ونرمز له بالرمز $X_{1,2}$.



الشكل (9)

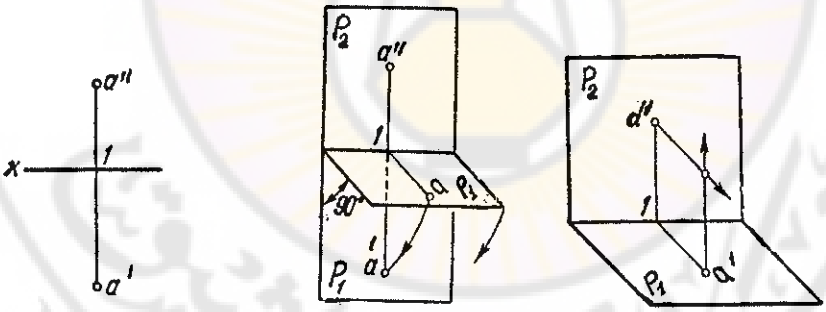


الشكل (10)

الشكل (10) يبين مسقطي النقطة في الجملة P_1 , P_2 حيث نحصل على المسقطين a' , a'' بإقامة مستقيمين عمودين على كل من مستوي الإسقاط ومارين من النقطة A. ونكون بذلك قد حصلنا على المسقط الأفقي للنقطة A وهو النقطة a' والمسقط الجبهي لها وهو النقطة a''، واضح بأن هاتين النقطتين هما نقطتا التقاء المستقيمين العمودين المارين من النقطة A مع مستويي الإسقاط P_1 , P_2.

يشكل هذان المستقيمان (العموديان على P_1 , P_2) مستوياً ماراً من النقطة A وعمودي على كل من مستويي الإسقاط P_1 , P_2. يشكل المستوي هذا ما يسمى (المستوي المسقِط للنقطة A) ويملك مع كلٍ من مستويي الإسقاط فصلاً مشتركاً ويتقاطع مع خط الأرض X في النقطة 1 كما في الشكل السابق.

إذا كانت المساقط a'' , a' للنقطة معلومة كما في الشكل (11) وأقمنا عموداً من النقطة a' على المستوي P_1 وعموداً من النقطة a'' على المستوي P_2 فيتقاطع هذان العمودان في النقطة الفراغية A (لأن هذين العمودين هما مستقيمان في مستو واحد) وهكذا فإن إيجاد النقطة في الفراغ ممكناً انطلاقاً من مسقطيهما في جملة معينة من الإسقاط.

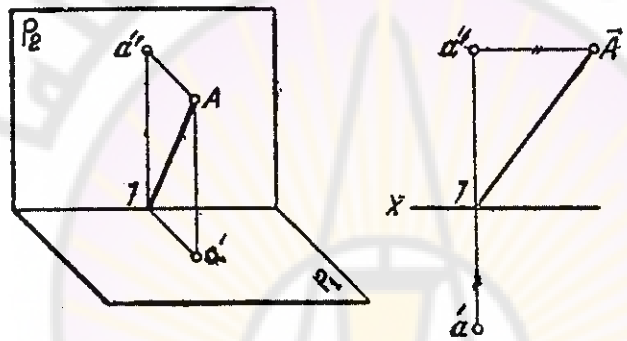


الشكل (13) الشكل (12) الشكل (11)

في الجملة الإسقاطية P_1 , P_2 نقوم بتدوير المستوي P_1 حول المحور X بزاوية قدرها 90° حتى ينطبق على المستوي P_2 تماماً كما في الشكل (12) وبالتالي نحصل

على مستو واحد هو مستوي الرسم، وعندها يدور المسقط a′ مع المستوي P_1 ويتوضع على امتداد القطعة المستقيمة 1 ″a كما في الشكل (13) يسمى الخط الواصل بين المسقطين ″a , a′ خط الوصل أو خط التداعي. واضح بأن خط الوصل هذا يكون عمودياً على المحور X.

يجب علينا، عندما تعطى المساقط كما في الشكل (13)، أن نتخيل موضع النقطة في الفراغ بالنسبة لمستويي الإسقاط كما في الشكل (10).

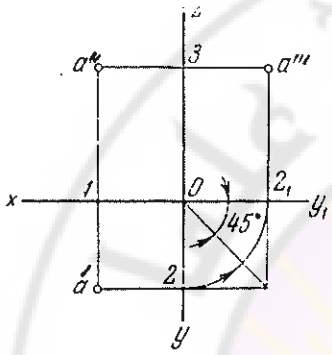


الشكل (14)

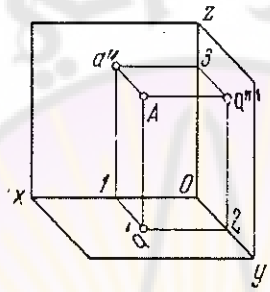
بغية التقريب من التصور الفراغي لموضع نقطة مثل A انطلاقاً من مساقطها نقوم بإنشاء القطعة المستقيمة $\overline{A}$ ″a بشكل متعامد مع خط الوصل a′ ″a ونأخذ طولها مساوياً لبعد النقطة عن المستوي الجبهي للإسقاط P_2 كما في الشكل (14).

2 ـ 2 : تمثيل النقطة في الجملة P_1 , P_2 , P_3:

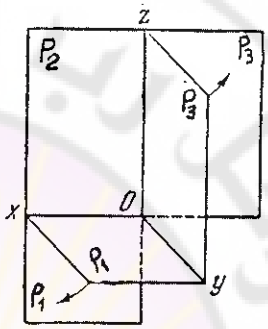
تتطلب الكثير من مسائل إنشاء الرسم الصناعي، الإسقاط على ثلاثة مستويات بغية الحصول على تمثيل كاف لقطع معقدة. لذلك نقوم بالإسقاط على مستو ثالث أيضاً، ويسمى هذا المستوي بالمستوي الجانبي للإسقاط.



الشكل (17)



الشكل (16)



الشكل (15)

يتوضع المستوي الثالث للإسقاط P_3 بشكل متعامد مع مستوي الإسقاط P_2 , P_1 تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة مشتركة هي النقطة 0 حيث تبدأ منها المحاور الثلاثة كما هو مبين على الشكل (15) نقوم بتدوير المستوي الجانبي بزاوية 90° حتى تمام الانطباق على المستوي الجبهي أيضاً.

يبين الشكل (16) المساقط الثلاثة a' , a'' , a''' لنقطة A على المستويات الثلاثة على الترتيب. يتضح من الشكل أن لكل نقطة بالفراغ ثلاثة مساقط a' , a'' , a''' وثلاث نقاط خاصة على محاور الجملة الإسقاطية هي 1, 2, 3 تشكل بمجموعها متوازي مستطيلات خاصاً بتلك النقطة.

يتضح من الشكل (16) أن مستوي الإسقاط الأفقي هو المستوي xy نفسه وكذلك المستوي الجبهي للإسقاط هو المستوي xz، بينما يشكل المستوي yz المستوي الجانبي للإسقاط. تبقى هذه المستويات نفسها على الشكل (17) لدى تدوير المستويين حتى تمام الانطباق على المستوي الجبهي P_2. كذلك تبقى المحاور x, y, z

غير أن المحور y يظهر على الرسم في وضعيتين نظراً لوجوده في المستويين P_1 , P_3 في الوقت نفسه نسمي المحور y الذي دار مع المستوي الجانبي للإسقاط y_1 للتمييز.

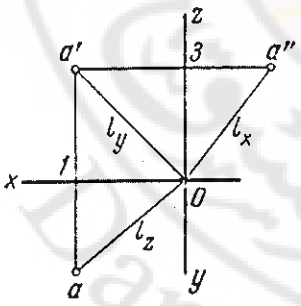
نلاحظ بأن المسقطين a′ , a″ يتوضعان على خط وصل واحد عمودي على المحور x كما أن المسقطين a″ , a‴ يتوضعان على خط وصل واحد متعامد مع المحور z.

يمكن الحصول على المسقط الثالث إذا عرفنا المسقطين الأول والثاني وذلك عن طريق قوس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها O2 أو عن طريق الخط المساعد منصف الزاوية yOy_1.

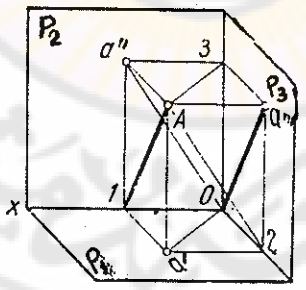
تبتعد النقطة A عن مستوي الإسقاط الأول P1 بمقدار القطعة المستقيمة a″ 1 كما تبتعد عن مستوي الإسقاط الثاني P_2 بمقدار القطعة المستقيمة a′ 1 كما تبتعد عن المستوي الجانبي بمقدار 10 أو a″ 3.

نلاحظ بأن القطعة المستقيمة a′ 1 مساوية دوماً للقطعة المستقيمة a‴ 3. انظر الشكل (18).

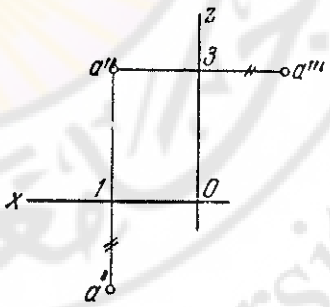
يمكن الحصول أيضاً على بعد النقطة A بالفراغ عن المحور X كما في الشكل (19)، هذا البعد نمثله بالقطعة ℓx على الشكل (20) كذلك بعدا النقطة عن المحورين y , z يمثله البعد ℓz , ℓy على الترتيب.



الشكل (20)



الشكل (19)

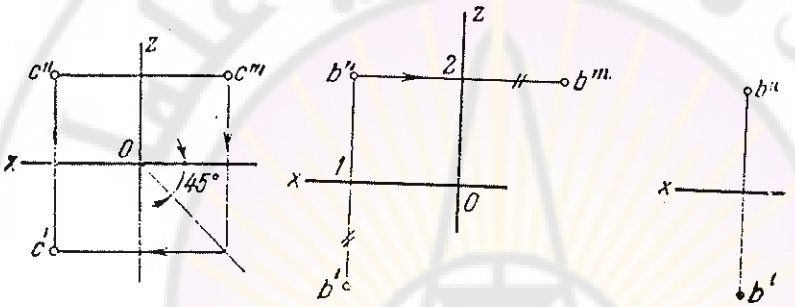


الشكل (18)

نلاحظ بأن بعد النقطة عن مستويات الإسقاط أو عن المحاور الثلاثة يمكن قياسها مباشرة على الرسم كما في الشكل (20).

في المثال التالي سنفترض أن النقطة B أعطيت بمسقطيها b″ , b′ كما على الشكل (21) والمطلوب إيجاد المسقط الثالث لها.

نقوم بإنشاء خط الوصل b″ 2 المتعامد مع المحور z ونمدده بالطول الذي يساوي الطول a′ 1 وبالتالي نكون قد حددنا موضع المسقط الثالث b‴ كما هو مبين بالشكل (22).



الشكل (23) الشكل (22) الشكل (21)

مثال آخر على إيجاد المسقط الغائب. لنفترض بأن النقطة C أعطيت بمسقطيها c″ , c‴ والمطلوب إيجاد المسقط الأول لها. الشكل (23) يبين هذه العملية، حيث نقوم بإيجاد المسقط بمساعدة منصف الزاوية yOy_1 (طريقة الرسم مبينة حسب اتجاه الأسهم).

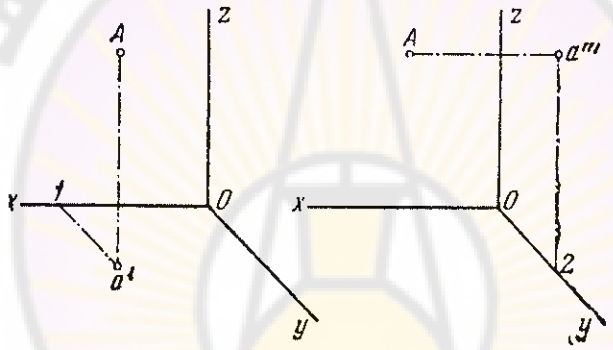
2 ـ 3 : الإسقاط المتعامد ونظام الإحداثيات الديكارتية

يتعين موضع نقطة ما بالفراغ بوساطة مساقطها، إذ يكفي أن يعطى مسقطان اثنان لنقطة بالفراغ ويكون ذلك كافياً لإيجاد مسقطها الغائب الثالث.

كل مستويين من مستويات الإسقاط يشترك في فصل مشترك، على شكل مستقيم، يشكل هذا الفصل محوراً ما لدى توجيهه باتجاه محدد.

إذا أعطينا في جملة إسقاطية ما، مسقطين لنقطة، نستطيع بناء متوازي المستطيلات الخاص بتلك النقطة، حيث تمثل النقاط a‴ , a″ , a′ مساقطها بينما تشكل النقاط 1, 2, 3 إحداثيات تلك النقطة على المحاور x, y, z على الترتيب (انظر الشكل (16) السابق).

الحصول على إحداثيات نقطة أمر ممكن انطلاقاً من أي مسقطين لنقطة ما ممثلاً في الشكل (24) أعطيت النقطة بموضعها في الفراغ A وكذلك مسقطها الأول وبالتالي يمكن بأخذ مواز للمحور إيجاد النقطة 1 التي يعد بعدها عن نقطة الأصل الإحداثي الأول للنقطة A.



الشكل (24)

كذلك لو أعطيت النقطة A ومسقطها الثالث a‴ يمكن إيجاد الإحداثي الثاني للنقطة a″.

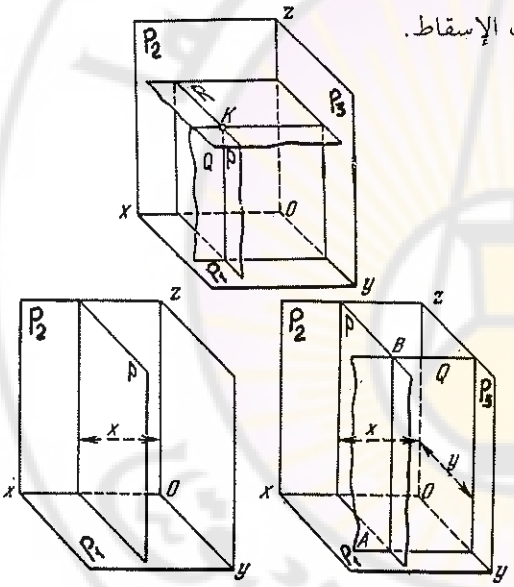
عند تدوير المستوي الأول والثالث حتى تمام انطباقهما على المستوي الثاني وافتراض موضع النقطة O (نقطة الأصل) والمحور X فقط يمكن تعيين مساقط النقطة A في هذه الجملة انطلاقاً من إحداثياتها الديكارتية. الشكل (25).

بفرض أن النقطة A أعطيت بإحداثياتها الديكارتية (7, 3, 5) A يمكن تمثيل مساقطها بأخذ 7 أطوال قياسية باتجاه المحور x ومنها إنشاء خط التداعي (خط

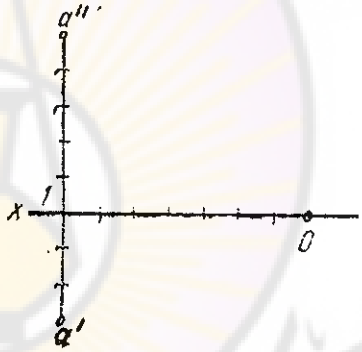
الوصل) وأخذ عليه الطول بمقدار 3 واحدات باتجاه المحور y (نحو الأسفل) وبالتالي نحصل على المسقط الأفقي (الأول) للنقطة a′.

وإذا أخذنا طولاً قدره 5 وحدات باتجاه المحور z (نحو الأعلى) كما في الشكل (25) فنحصل على المسقط الجبهي (الثاني) للنقطة أي a″.

يبين الشكل (26) كيف يمكن تمثيل مستو ما يوازي مستوي إسقاط معين. فمثلاً المستوي P_2 يوازي المستوي الجانبي للإسقاط، فالنقاط الواقعة فيه كافة تبعد البعد نفسه x = const عن المستوي الجانبي. بالمثل تكون نقاط المستوي Q متساوية البعد y = const عن المستوي الجبهي ونقاط المستوي R متساوية البعد z = const عن المستوي الأفقي. يكون موضع النقاط ذات الإحداثيات x, y, z هي نقطة التقاء المستويات P, Q, R الموازية لمستويات الإسقاط.



الشكل (26)



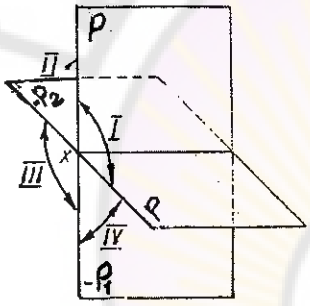
الشكل (25)

3 ـ 4 : النقاط في الأرباع والأثمان الفراغية

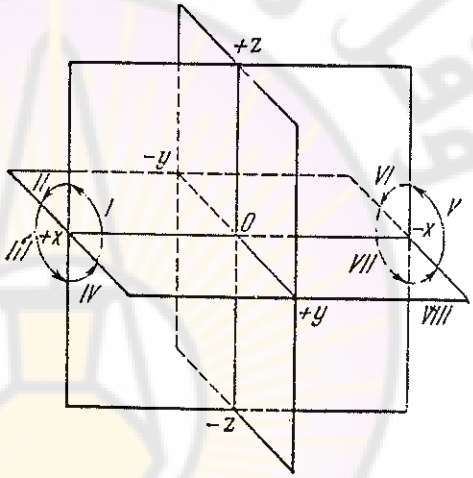
يظهر الشكل (27) توضع المستويات الثلاثة، المستوي الأفقي (x, y)، الممتد إلى الجهات كافة، المستوي الجبهي (x, z) والمستويين (y, z) الممتدين إلى الجهات كافة أيضاً.

يقسم المستوي الأفقي الفراغ إلى قسمين، (فوق ـ تحت) بالنسبة لـه. المستوي الجبهي يقسم الفراغ إلى قسمين (أمام ـ خلف)، أما المستوي الجانبي فيقسم الفراغ إلى قسمين (يمين ـ يسار) بالنسبة له.

المستويات الثلاثة مجتمعة تقسم نقاط الفراغ إلى ثماني مناطق تسمى بالأرباع أو الأثمان الثمانية وتأخذ هذه الأثمان الأرقام حسب الشكل (27)، التعداد بالأرقام اليونانية.



الشكل (28)

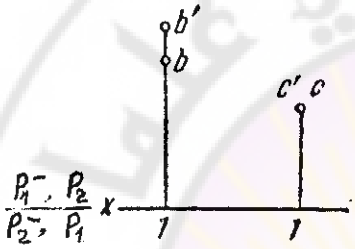


الشكل (27)

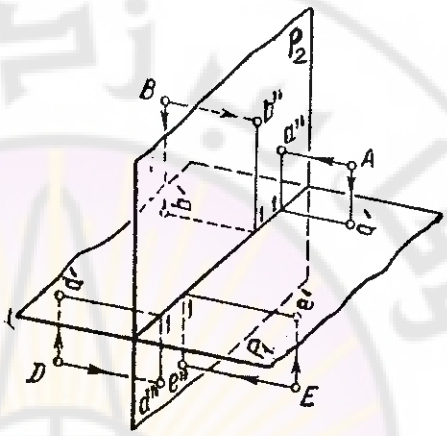
إذا تم الاكتفاء بالمستويين الأفقي والجبهي فإن نقاط الفراغ ستتوضع في أحد الأرباع الأربعة. انظر الشكل (28).

الفصل المشترك بين المستويين P_1 , P_2 يفصل كلاً من المستويين إلى (نصفي مستو) ونرمز اصطلاحاً بـ (P_1^-) , (P_1^+) , (P_2^-) , (P_2^+)، يظهر الشكل (29) مواضع

نقاط واقعة في أرباع مختلفة فالنقطة A تقع في الربع الأول، والنقطة B تقع في الربع الثاني، بينما تقع النقطة D في الربع الثالث، أما النقطة E تقع في الربع الرابع.



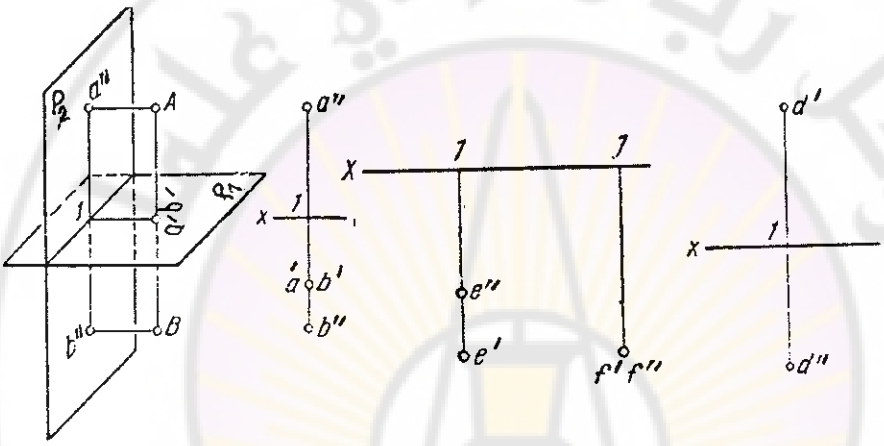
الشكل (30)



الشكل (29)

لدى تمثيل نقطة ما نرى أن مسقطي النقطة B في الشكل (29) (بعد تدوير المستوي الأفقي حتى انطباقه على المستوي الجبهي) ستأخذ المواقع المبينة على الشكل (30) فالمسقط الجبهي لها سيقع أعلى المحور بينما المسقط الأفقي (نظراً لدورانه على المستوي الأفقي) سيتوضع أيضاً أعلى المحور x. النقطة C، تقع في الربع الثاني أيضاً الشكل (30) بينما انطبق مسقطيها بسبب تساوي بعديها عن كل من المستويين الأفقي والجبهي.

يظهر الشكل (31) مسقطي نقطة D واقعة في الربع الثالث انظر الشكل (29). النقطة E تقع في الربع الرابع. النقطة F تقع أيضاً في الربع الرابع إلا أن بعديها عن المستويين الأفقي والجبهي متساويان. انظر الشكل (32).



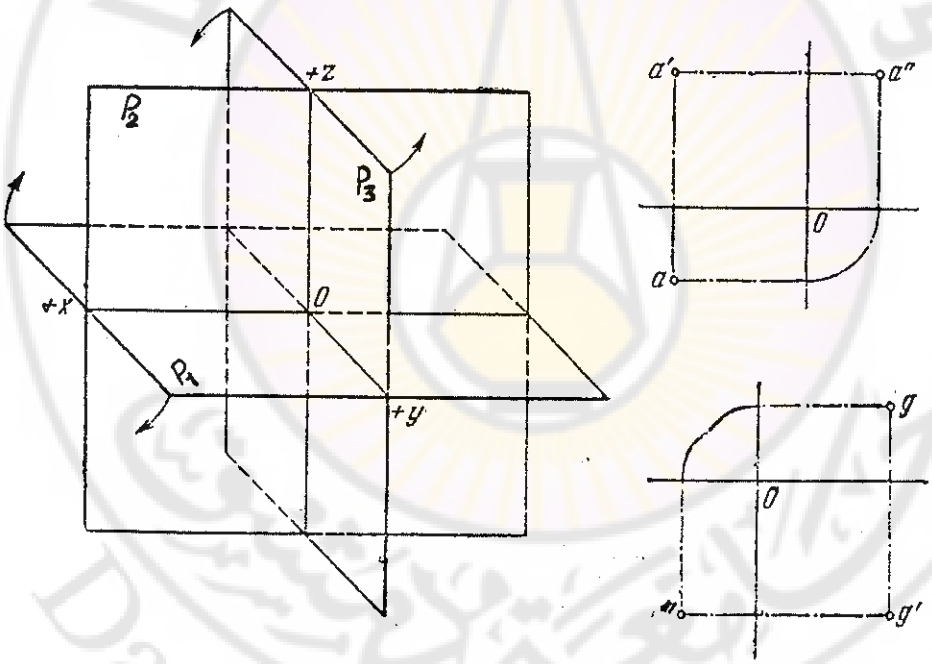
الشكل (33) الشكل (32) الشكل (31)

في الشكل الفراغي (33) تتوضع النقطتان A, B على مسافة واحدة من المستوي الجبهي وبالتالي يكون مسقطاهما الأفقيان منطبقين. الشيء ذاته يبينه الرسم المجاور للشكل. فالنقطة A تقع في الربع الأول بينما تقع النقطة B في الربع الرابع. إحداثيات النقطة A موجبة، بينما الإحداثي z للنقطة B سالب.

يظهر الجدول التالي العلاقة بين إشارات الإحداثيات في الأرباع أو الأثمان الثمانية. يسهل الجدول علينا إنشاء صورة ذهنية واضحة لمكان نقطة علمت إشارات إحداثياتها وبالعكس.

الثمن	x	y	z	الثمن	x	y	z
I	+	+	+	V	-	+	+
II	+	-	+	VI	-	-	+
III	+	-	-	VII	-	-	-
IV	+	+	-	VIII	-	+	-

فالنقطة (-18, 15, -20) تقع في الربع ـ الثمن ـ الثامن مثلاً وهكذا.



الشكل (34)

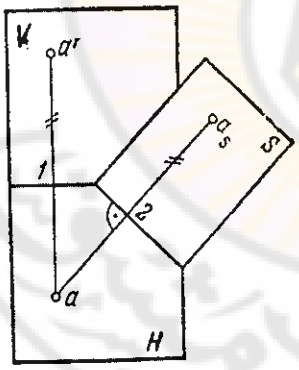
يبين الشكل (34) كيفية تدوير المستويات الأفقي والجانبي حتى تمام الانطباق على المستوي الجبهي. وكيفية الحصول على المسقط الثالث لنقطة A الواقعة في الربع الأول. وكذلك الحصول على المسقط الثالث لنقطة G واقعة في الربع السابع.

2 - 5 : الإسقاط المساعد (الإسقاط على مستو جديد)

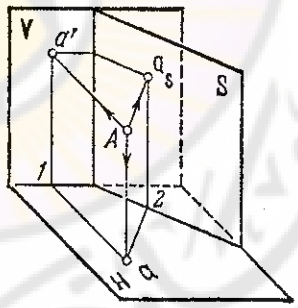
حتى الآن شاهدنا جملة الإسقاط P_1 , P_2 , P_3 كما أسقطنا على المستوي الثالث P_3 في الهندسة الوصفية، يمكن تسهيل عملية تمثيل وقياس عناصر فراغية بإسقاطها على مستو يقع بحالة خاصة بالنسبة لتلك العناصر، وبالتالي هناك ضرورة للحصول على مساقط تلك العناصر على مستويات جديدة مساعدة مثل المستوي S.

يشترط بالمستوي المساعد أن يكون عمودياً على أحد مستويي الإسقاط P_1 أو P_2. وبالتالي نحصل على جملة إسقاطية جديدة في الشكل (35) والشكل (36) اللذين يبينان عملية إسقاط مساعد لنقطة A على مستو جديد S المتعامد مع P_1.

جملة الإسقاط الجديدة بهذه الحالة هي الجملة S , P_1.



الشكل (36)

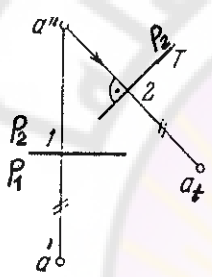


الشكل (35)

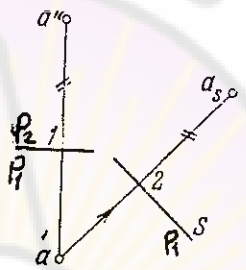
نلاحظ بأنه لا يمكن تشكيل جملة إسقاط جديدة أخرى مثل S , P_2 على الشكل السابق نظراً لأن المستويين المذكورين غير متعامدين مع بعضهما بعضاً.

المستوي P_1 يدخل في الجملتين القديمة P_2 , P_1 و P_1 , S وبالتالي يبقى المسقط الأول a' ثابتاً بينما نغير بهذه الحالة المسقط الجبهي من a'' إلى المسقط a_s في الجملة الجديدة.

يتضح من الشكل (37) بأن المسافة $2a_s$ تساوي المسافة $1a''$. والقطعة المستقيمة $a''a'$ هي خط وصل في الجملة الجديدة. أي أن $a''a'$ خط تداع بين المسقطين على المستويين P_1 و P_2 و $a'a^s$ خط تداع بين المسقطين على المستويين P_1 و s.

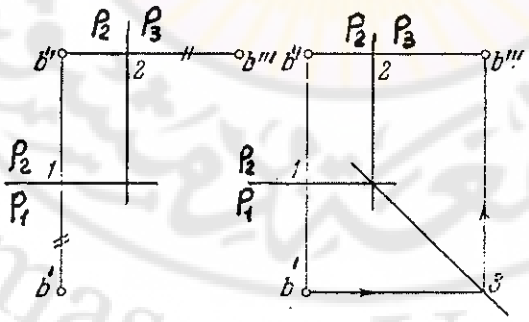


الشكل (38)



الشكل (37)

يوضح الشكل (38) عملية إسقاط على مستو مساعد جديد T. وبالتايل حصلنا على إسقاط في جملة جديدة هي الجملة P_2 , T، المسقط الأفقي a' هو الذي تغير بهذه الحالة.

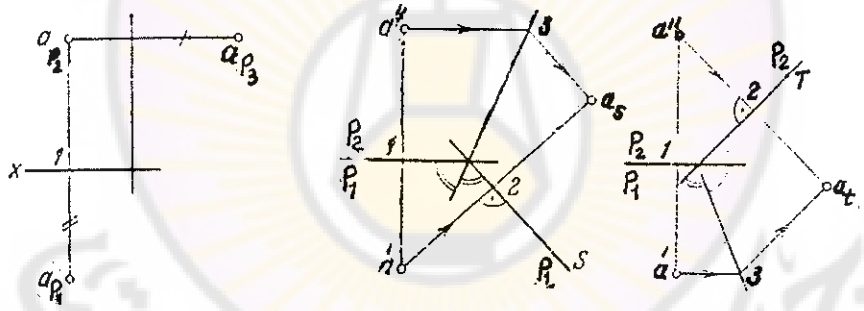


الشكل (39)

لدى الإسقاط على المستوي الثالث قمنا بإنشاء خط الوصل الجديد a″ a‴ بشكل معامد للمحور z (الفصل المشترك بين المستويين P_2 , P_3) وأخذنا على هذا الخط وبدءاً من النقطة 3 الطول 2b‴ مساو للبعد 1b′. انظر الشكل (39.

لدى إيجاد المسقط الثالث a‴ انطلاقاً من المسقطين a″ , a′ قمنا بإنشاء الخط المساعد المنصف للزاوية yOy_1 وأوجدنا النقطة 3 ثم المسقط a‴. انظر الشكل السابق نفسه.

العملية السابقة الخاصة بإيجاد المسقط الثالث من مسقطين، ولكن في جملة جددية يظهرها الشكل (40) والخطوات ذاتها كما في الشكل (39) حيث نصفنا الزاوية بين المحورين x والمحور الجديد (الفصل المشترك بين المستويين S , P_2). لاحقاً سنستخدم الرموز مثل a_t للإشارة إلى المسقط على المستوي الجديد T بينما سنحافظ على الرموز a‴ , a″ , a′ لدى الإسقاط على المستويات P_1 و P_2 و P_3.



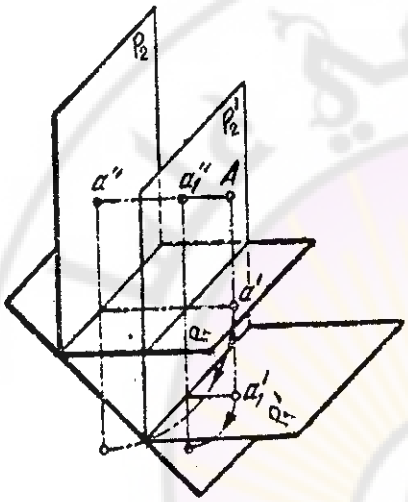
الشكل (40)

الشكل (41)

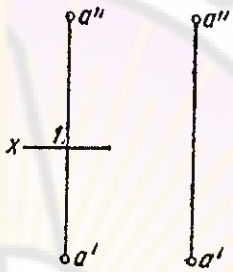
2 ـ 6 : تمثيل مساقط النقاط دون تبيان محاور الإسقاط

نسمي المحور (الفصل المشترك بين مستويي الإسقاط في الجملة المفترضة) بخط الأرض في هذه الجملة.

فيما يلي سوف نورد عددا من الرسوم التي تحوي محاور إسقاط ونبين كيفية استخدام الرسوم بدون تبيان المحاور. بمقارنة الرسم على الشكل (42) نرى في الأول منهما أن وضع المستويين محدد بإقامة خط تقاطعهما وأن بعد النقطة (A) محدد بالنسبة لهذه المستويات.



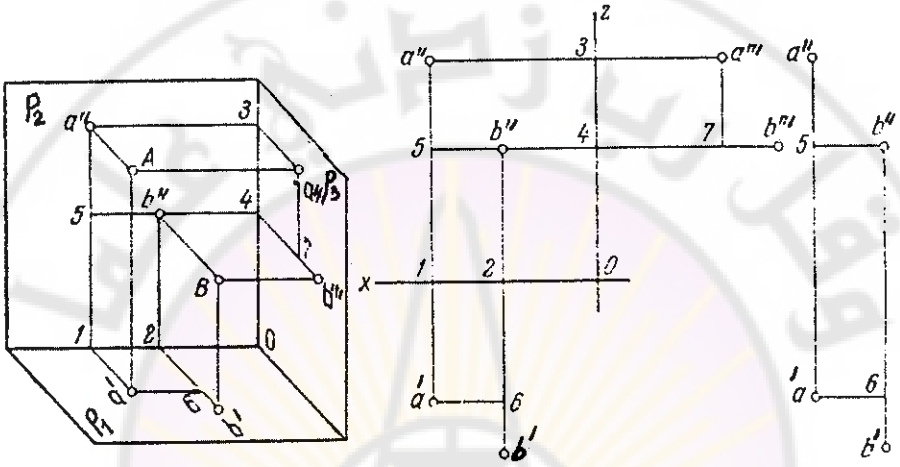
الشكل (43)



الشكل (42)

على الرسم الثاني في الشكل نفسه بعد النقطة (A) عن مستويات الإسقاط غير محدد لأن خط الأرض غير موجود وبالتالي فإن الرسم يمكن أن يعبر عن مساقط هذه النقطة على عدد غير محدود من الجمل الإسقاطية المتوازية فيما بينها. كما يبين ذلك الشكل (43) ولإقامة محور إسقاط لجملة محدودة علم موقع النقطة بالنسبة لها، يكفي إنشاء محور عمودي على خط الوصل a'' , a' يبعد عن a' أو a'' بمقدار بعد النقطة (A) على كل من P_2 و P_2 على الترتيب.

يبين الشكل المنظوري (44 a) موضع النقطتين A, B بالفراغ وكذلك المساقط الثلاثة لهما.



الشكل (44)

المساقط على الشكل (44 b) يبين مواقع مساقط كل من النقطتين A, B لـدى وجود خط الأرض x وبدونه على الرسم المجاور.

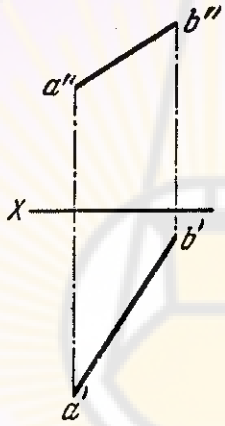
يتبين من الشكل السابق أن مواقع النقاط ومسـاقطها المطلقـة بالنسـبة لمسـتوي الإسقاط مختلفة بينما مواقع النقاط ومساقطها النسبية (موضـع نقطـة مثـل A بالنسـبة لنقطة أخرى مثل B) هي مواقع ثابتة لا تتغير حسب الجملة المتخذة للإسـقاط مـع أو بدون افتراض وجود خط الأرض. وبالتالي يكون a″ 5 = const مثلاً.

حذف خط الأرض أمر ممكن، بالأخص إذا ذكرنا بأن المواقـع المطلقـة للنقـاط في الفراغ غير ضرورية بينما يهمنا منها فقط مواقع النقاط، الأشكال بالنسبة لبعضهـا بعضاً.

ثانياً : تمثيل مستقيم

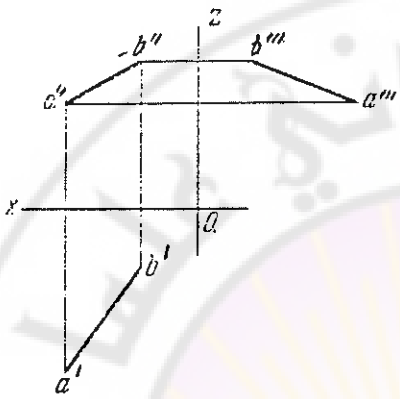
2 ـ 7 : إسقاط قطعة من خط مستقيم

إذا كانت المساقط الأفقية والجبهية لنقطتين معلومة ووصلنا بخط مستقيم بين المساقط المتماثلة للنقطتين فإننا نحصل على مسقطي القطعة المستقيمة. يوضح الشكل (45) هذا، حيث تشكل القطعة a′b′ المسقط الأفقي للمستقيم AB في الفراغ بينما تعبر القطعة المستقيمة a″b″ عن المسقط الجبهي له.

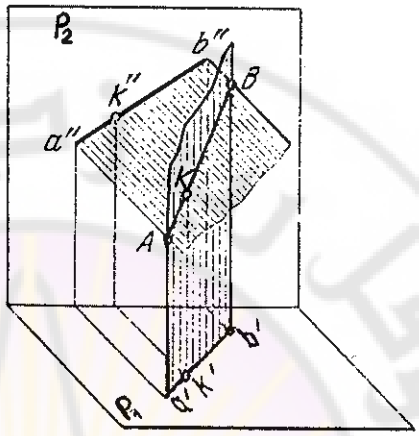


الشكل (45)

نلاحظ من الشكل السابق بأن المستقيم AB لا يوجد بحالة خاصة ما بالنسبة لمستويات الإسقاط وبالتالي وضعه عام بالنسبة لها. ندعو هذا المستقيم بالمستقيم الكيفي.



الشكل (47)



الشكل (46)

نلاحظ أن مساقط القطعة المستقيمة AB تصغر عند إسقاطها على مستويات الإسقاط حيث تكون:

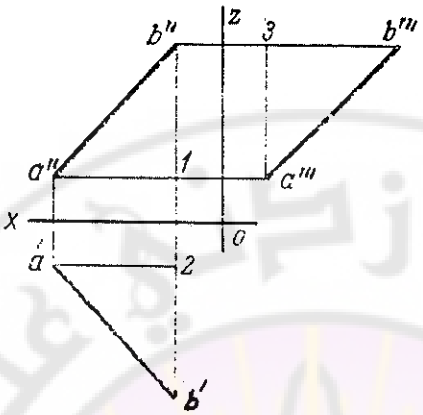
$$a'b' = AB \cdot \cos\alpha$$

$$a'b'' = AB \cdot \cos\beta$$

$$a'''b''' = AB \cdot \cos\gamma$$

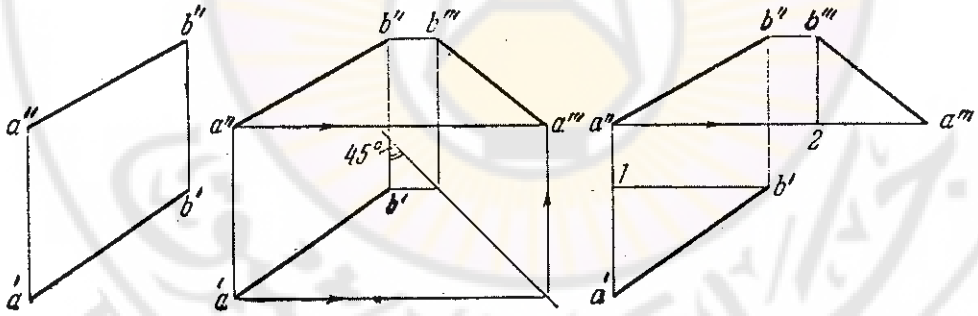
حيث: α , β , γ هي زوايا ميل المستقيم عن المستويات P_1 , P_2 , P_3 على الترتيب. وبالحالة عندما يكون $\alpha = \beta = \gamma$ تكون الأطوال $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$ متساوية.

بحالة كون $\alpha = \beta$ فإن $ab = a'b'$ الشكل (48)، في حالة كون إحدى الزوايا مثلاً $\alpha = 0$ يكون $a'b' = AB$ (المستقيم يوازي المستوي P_1) في حالة كون إحدى الزوايا $\alpha = 90°$ مثلاً يكون $a'b' = 0$ (المستقيم AB يعامد المستوي P_1).



الشكل (48)

يُظهر الشكل (49) كيفية استنتاج المسقط الثالث لقطعة مستقيمة AB انطلاقاً من المسقطين ab , a''b'' حيث يتم إيجاد المساقط b''' , a''' أولاً ثم يتم الوصل بين المساقط المتماثلة للحصول على المسقط الثالث للقطعة AB.



الشكل (49)

2 ـ 8 : الأوضاع الخاصة لمستقيم بالنسبة لمستويات الإسقاط

يمكن لمستقيم أن يأخذ وضعية خاصة بالنسبة لمستويات الإسقاط كأن يكون موازياً أو عمودياً على مستو منهم أو على مستويين بالوقت نفسه.

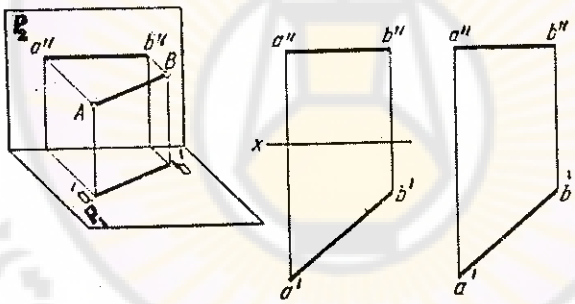
1) المستقيم الموازي لمستو إسقاط واحد؛

2) المستقيم الموازي لمستويين للإسقاط.

في الحالة الأولى يكون مسقط قطعة من خط مستقيم على المستوي الموازي مساوياً لطول القطعة نفسها وفي الحالة الثانية يكون مسقطاً قطعة من خط مستقيم على مستويين للإسقاط مساويين لطول القطعة نفسها.

2 - 8 - 1 : المستقيم الموازي لمستوي إسقاط واحد

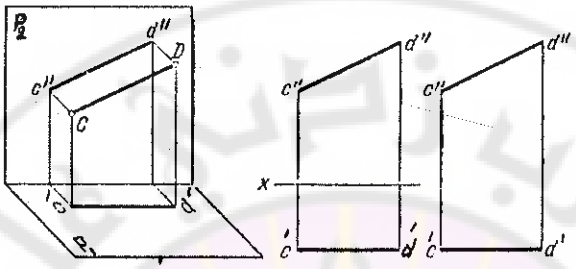
1) المستقيم الموازي للمستوي P_1: بهذه الحالة يكون المسقط الجبهي للمستقيم موازياً لمحور الإسقاط نظراً لكون بعد نقاطه كافة متساوية عن المستوي الأفقي P_1 بينما يكون المسقط الأول a′b′ مساوياً لطول القطعة AB نفسها بسبب كون الزاوية بين المستقيم والمستوي الأفقي للإسقاط تساوي الصفر. انظر الشكل (50). نسمي هذا المستقيم المستقيم الأفقي.



الشكل (50)

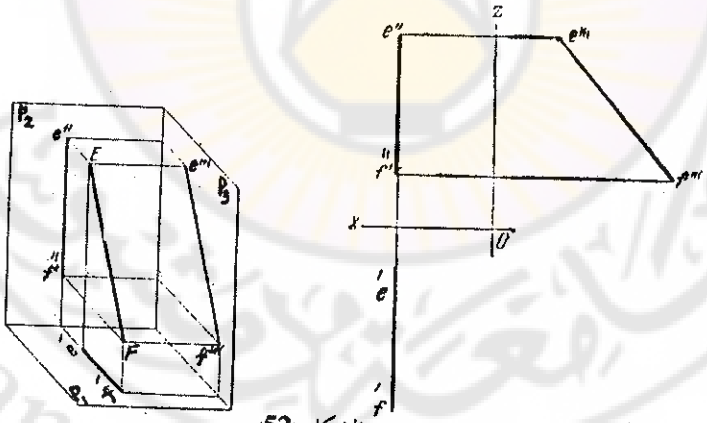
2) المستقيم الموازي للمستوي P_2: بهذه الحالة يكون المسقط الأفقي للمستقيم موازياً لمحور الإسقاط نظراً لكون بعد نقاطه كافة متساوية عن المستوي الجبهي P_2 بينما يكون المسقط الثاني a″b″ مساوياً لطول القطعة AB نفسها بسبب كون الزاوية

بين المستقيم والمستوي الجبهي للإسقاط معدومة. انظر الشكل (51). نسمي هذا المستقيم المستقيم الجبهي.



الشكل (51)

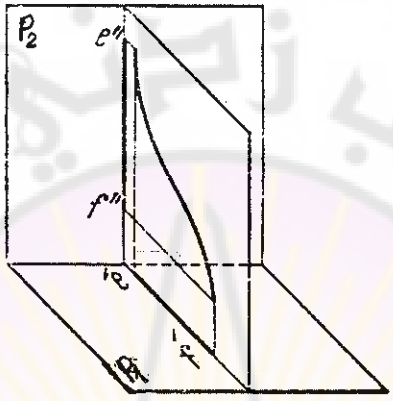
3) المستقيم الموازي للمستقيم P_3: بهذه الحالة يكون المستقيم موازياً للمستوي الجانبي وبالتالي يكون له مسقطان معامدان لخط الأرض كما في الشكل (52). أما الطول الحقيقي للقطعة المستقيمة مساوي لطول المسقط الثالث له. نسمي هذا المستقيم المستقيم الجانبي.



الشكل (52)

نلاحظ أن المسقطين الأول والثاني للقطعة EF غير كاف لتحديد شكل القطعة، إن كان خطاً مستقيماً أو منحنياً كما في الشكل (53) وكذلك لا يمكن التنبؤ بمسقط

نقطة تقع على هذا المستقيم انطلاقاً من مسقط واحد لها. وبالتالي يقال بأن المسقط الثالث للمستقيم بهذه الحالة ضروري، وكذلك من الضروري إعطاء مسقطي نقطتين من هذا المستقيم.



الشكل (53)

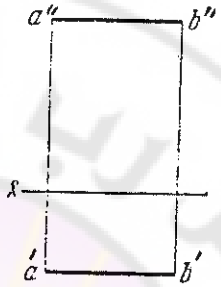
2 - 8 - 2 : المستقيم الموازي لمستويي إسقاط

طالما أن المستقيم مواز لمستويين للإسقاط فهو يعامد المستوي الباقي للإسقاط وبالتالي يكون مسقطه عليه نقطة بينما يظهر طوله الحقيقي على المستويين.

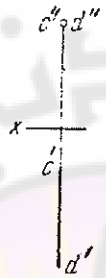
1) المستقيم الموازي للمستويين P_1 , P_2: هذا المستقيم يعامد المستوي P_3 ويكون مسقطه الثالث نقطة. وهو يوازي خط الأرض x انظر الشكل (54) ونسميه المستقيم الجنبي تمييزاً له عن الجانبي.

2) المستقيم الموازي للمستويين P_1 , P_3: فهو يعامد المستوي P_2 مسقطه الثاني يكون نقطة، الشكل (55) ونسميه المستقيم الأمامي أو المنصوب.

3) المستقيم الموازي للمستويين P_2 , P_3: هذا المستقيم يعامد المستوي الأفقي ويكون مسقطه الأول نقطة، الشكل (56) نسمي مستقيماً كهذا المستقيم الشاقولي أو الرأسي.



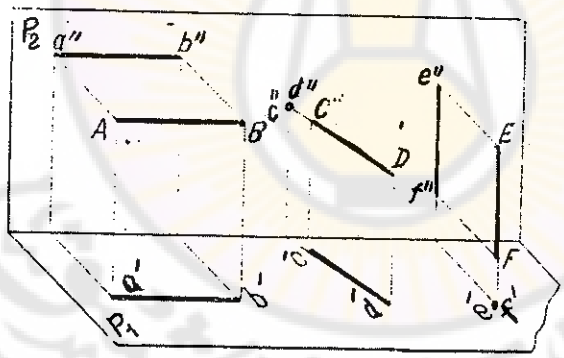
الشكل (54)



الشكل (55)

الشكل (56)

يبين الشكل الفراغي (57) المستقيمات السابقة.

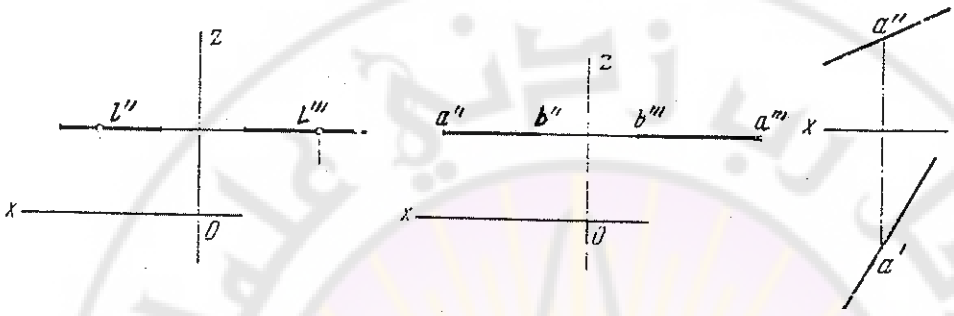


الشكل (57)

يظهر الشكل (58) مسقطي مستقيم يمر من النقطة A حيث ستقع المساقط الثلاثة للنقطة على المساقط المتماثلة للخط المستقيم.

الشيء نفسه يقال عن المستقيم المار من النقطة L.

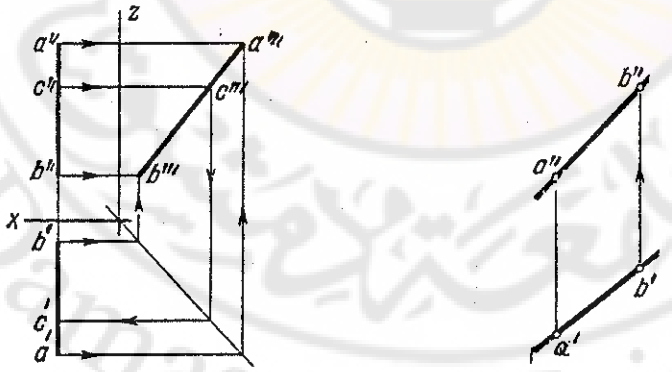
يبين الشكل (59) مسقطي القطعة المستقيمة AB فيه النقطة A أكثر بعداً من النقطة B. المستقيمين L و AB هما أفقيان في الحالة العامة.



الشكل (58)

الشكل (59)

يبين الشكل (60) مسقطي مستقيم مار من النقطة A وهو مستقيم كيفي (غير موجود بحالة خاصة بالنسبة لمستويات الإسقاط) فإذا علمت b′ المسقط الأول لنقطة مثل B تنتمي للمستقيم فإن إيجاد مسقطها الجبهي أمر ممكن بإنشاء خط وصل، المسقط b″ سيقع على خط الوصل المار من b′ وفي الوقت نفسه يقع على المسقط الجبهي للمستقيم أي يتقاطع معه في نقطة تكون هي المسقط الثاني للنقطة B.



الشكل (61)

الشكل (60)

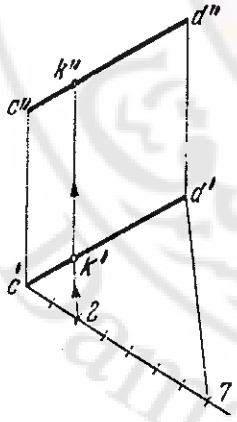
ذات الشيء يقال عن المستقيم AB (المستقيم الجانبي، يوازي المستوي الجانبي للإسقاط)، فلدى معرفة مسقط واحد لنقطة واقعة عليه مثل C يمكن استنتاج المسقطين الغائبين لها، (نتبع الأسهم). نفيد هنا بأن المستقيم الجانبي يتعين بتحديد نقطتين منه على الأقل. واستنتاج مساقط النقطة C يتم بمساعدة المسقط الثالث للمستقيم AB.

الشكل (61) يبين كيفية إيجاد المسقط الأفقي لمستقيم جانبي علم منه مسقطه الجبهي، ومسقط المستقيم نفسه على المستوي الثالث P_3 (أي أن المستقيم AB يوازي P_3) تسلسل الإنشاء حسب الأسهم.

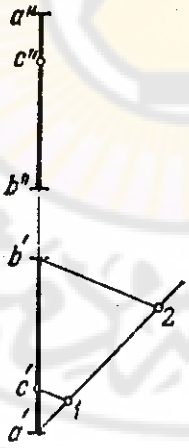
نفيد بأنه من خصائص الإسقاط المتوازي أن العلاقة بين القطع المستقيمة في الفراغ من خط مستقيم مساوية للعلاقة بين مساقط تلك القطع أي أن:

$AC / CB = (a_p c_p) / (c_p b_p)$ كما في الشكل (62).

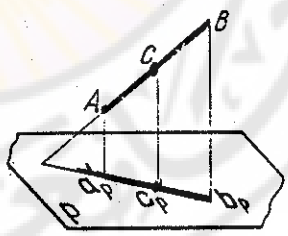
تسمى هذه الخاصة، الخاصة الإسقاطية، وهي بالتعريف، الخاصة التي تحافظ على نفسها في الفراغ والمساقط في الوقت نفسه. فالنقطة التي تقسم قطعة مستقيمة مثلاً النقطة C في الشكل (62) تقسم داخلاً القطعة المستقيمة AB بنسبة 1:1 في الشكل (62) فهي تحافظ على نسبة التقسيم نفسها في المساقط أي أن c_p تقسم القطعة $a_p b_p$ بالنسبة نفسها.



الشكل (64)



الشكل (63)



الشكل (62)

نستطيع أن نستفيد من هذه الخاصة في إيجاد المسقط الأفقي c' للنقطة C المعطاة بمسقطها الجبهي من المستقيم AB حيث تقسم النقطة C القطعة AB بنسبة معينة نأخذ النسبة نفسها في المسقط الأفقي حيث c' ستقسم القطعة $a'b'$ بالنسبة نفسها، عندها يمكن معرفة موقع النقطة بمساعدة القطعة المستقيمة وأخذ النسبة المذكورة حيث نرسم من 1 خطاً موازياً للخط $2b'$. الشكل (63).

الشكل (64) يوضح أيضاً هذه الطريقة لإيجاد مسقطي نقطة تقسم قطعة مستقيمة بنسبة معطاة. تعد هذه المسألة من تطبيقات التآلف (بالذات التحاكي). انظر الملحق في هذا الكتاب.

فمثلاً: إذا كانت النقطة تقسم القطعة المستقيمة CD بنسبة 5 : 2 والمطلوب إيجاد مسقطي تلك النقطة على القطعة المستقيمة CD المعطاة بمسقطيها. فهذه النسبة تحافظ على نفسها في المساقط أيضاً. فالتقسيم خاصة إسقاطية في الإسقاط المتوازي.

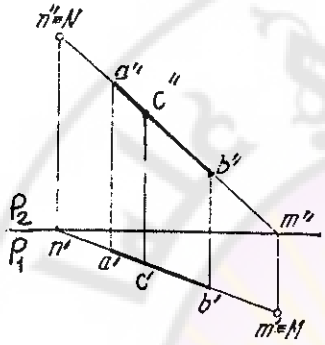
نستطيع بمد خط مار من النقطة c' مثلاً على المسقط الأفقي للمستقيم يميل هذا الخط بأي ميل مختار، ونأخذ عليه $7 = 5 + 2$ تدريجات متساوية نصل القطعة 7 مع النقطة d' ثم نرسم من موقع التدريجة 2 خطاً موازياً للخط $d'7$ فنحصل على المسقط الأول للنقطة K، إيجاد k'' يتم بأخذ خط وصل ليقطع المسقط الجبهي في موقع المسقط الجبهي للنقطة المطلوبة K.

2 ـ 9 : آثار مستقيم على المستويات الإسقاطية

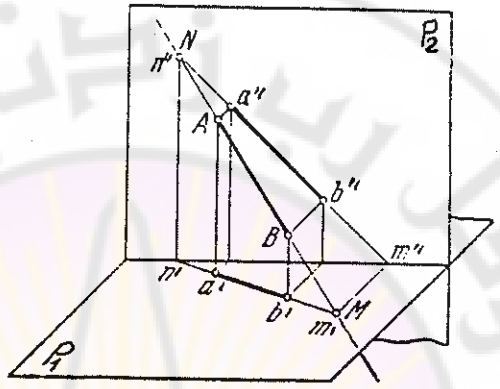
يُظهر الشكل (65) الخط المستقيم حامل القطعة المستقيمة. إذا مددنا القطعة المستقيمة AB في الاتجاهين لقطع المستقيم المستوي الأفقي في نقطة ما مثل M (m').

إن المسقط الأفقي للنقطة M هو نفسها m' أما مسقطها الجبهي فهو m'' على خط الأرض. كذلك سيقطع هذا المستقيم المستوي الجبهي عند النقطة N مثلاً فمسقطها الجبهي هو n'' بينما مسقطها الأفقي هو n' على خط الإسقاط (خط الأرض).

نقوم الآن بوصل المساقط المتماثلة للنقطتين M , N فنحصل على المساقط الموافقة للمستقيم.



الشكل (66)



الشكل (65)

بإسقاط النقاط A , B على المستويين نحصل على مساقط تلك النقطتين، المساقط ستقع على مساقط المستقيم الموافقة كما في الشكل.

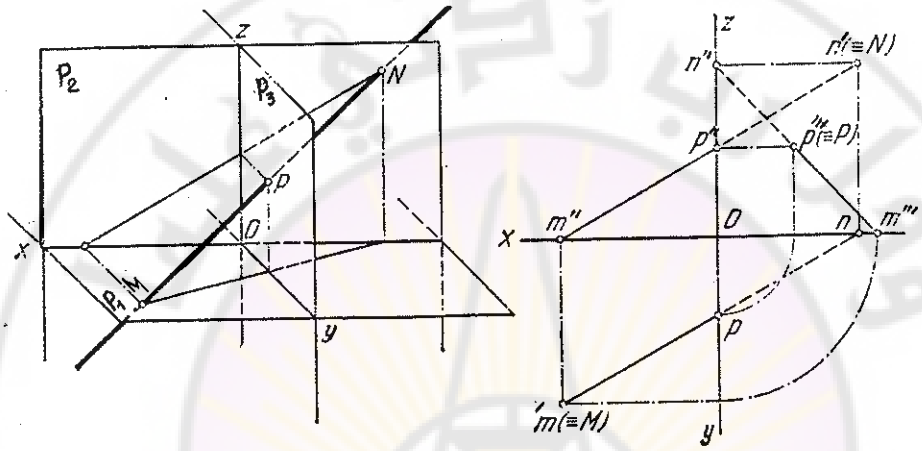
يُظهر الشكل (66) تمثيل مساقط تلك النقاط على مستويي الإسقاط.

نلاحظ أن المسقط m″ هي تقاطع امتداد القطعة a″b″ مع خط الأرض. بينما النقطة n′ هي تقاطع امتداد القطعة a′b′ مع خط الأرض.

إيجاد المسقط الغائب لنقطة مثل C واقعة على قطعة مستقيمة AB أمر ممكن إذا ذكرنا بأن مسقطي نقطة يتعامدان دوماً على خط وصل واحد.

المستقيم على الشكل السابق، يمر من الأرباع الفراغية I , II , IV.

على الشكل (67) مستقيماً يقطع المستويات الإسقاطية الثلاثة. النقطة P هي نقطة أثر المستقيم على المستوي الجانبي، المسقط الثالث p‴ لها ينطبق عليها، بينما المسقطان الأفقي والجبهي p′ , p″ يقعان على المحورين y , z على الترتيب.



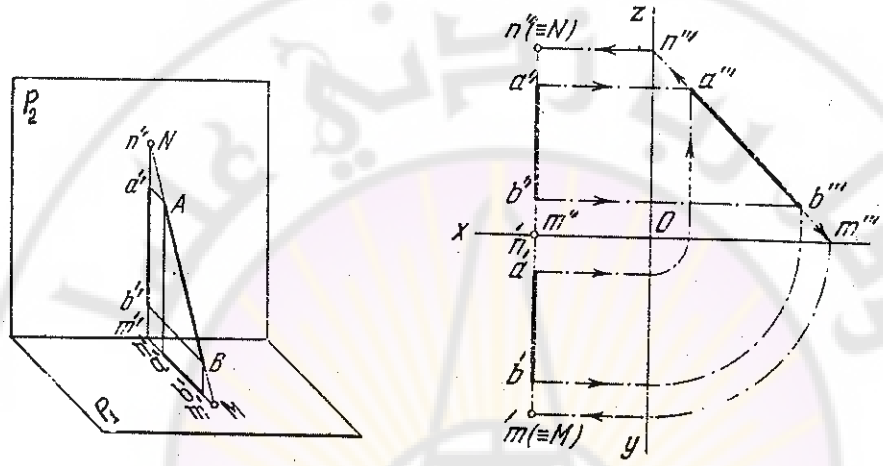
الشكل (67)

يُظهر الشكل السابق أيضاً المساقط الثلاثة للمستقيم المذكور، حيث تم استنتاج المسقط الجانبي له بمساعدة نصف الدائرة. مساقط النقاط كافة ستقع على المساقط المتماثلة للمستقيم.

ليس في الأمر صعوبة إذا قلنا بأن نقطة الأثر الأفقي لأي مستقيم يكون لها z = 0 بينما نقطة الأثر الجبهي لها y = 0 أما نقطة الأثر الجانبي فلها x = 0. المستقيم المذكور يمر بالأثمان IV , I , V كما يوضح ذلك الشكل الفراغي له.

عملية إيجاد نقاط أثر مستقيم جانبي مسألة أعقد من سابقاتها، حيث إن مساقط نقاط الأثر الأفقي والجبهي ستقع على خط وصل واحد. يُظهر الشكل (68) كيفية إيجاد آثار المستقيم AB في الفراغ والمساقط أيضاً.

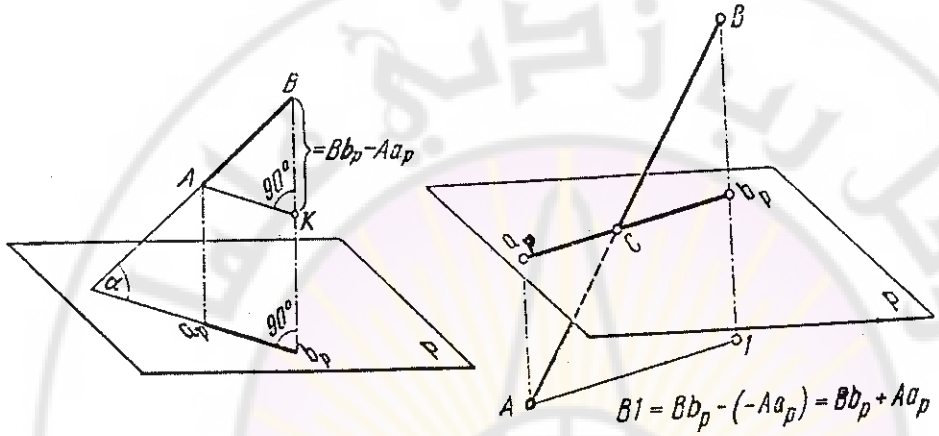
أوجدنا أولاً المسقط الثالث للمستقيم a'''b''' ثم مددنا هذا المسقط حتى التلاقي مع المحورين y , z وأرجعنا هذه النقاط إلى المسقطين الأفقي والجبهي للمستقيم. خطوات الإنشاء حسب الأسهم.



الشكل (68)

2 ـ 10 : إيجاد الطول الحقيقي لقطعة من مستقيم، وزوايا ميله عن مستويات الإسقاط

يبين الشكل (69) العلاقة بين طول قطعة مستقيمة في الفراغ (الطول الحقيقي للقطعة) ومسقطها على مستو ما. نرى من الشكل أن أضلاع المثلث المنشأ ABK هي الطول الحقيقي AB للقطعة المستقيمة، AK يساوي مسقط القطعة a_p b_p. والضلع BK يساوي فرق الإحداثيات بين النقطتين B , K بالنسبة لمستوي الإسقاط P.



الشكل (69)

يوضح الرسم الثاني على الشكل نفسه هذه العملية إذا كانت إحداثيات النقطتين مختلفتين بالإشارة حيث يؤخذ الفرق الجبري بهذه الحالة. من الواضح أنه بمعرفة أضلاع المثلث ABK يمكن إنشاؤه على الرسم حيث يمثل AB طول القطعة المستقيمة AB. في المساقط يكون فرق الإحداثيات هذا، هو الفرق الجبري للمساقط الجبرية للنقطتين A , B.

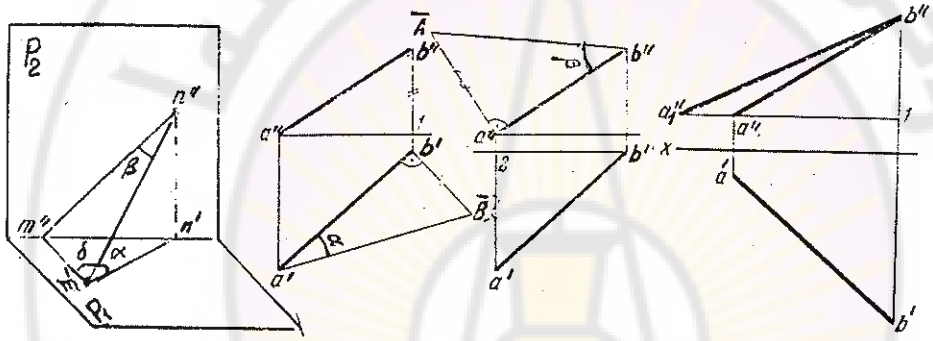
على الشكل (70) تم إنشاء القطعة $1a''_1$ التي تساوي طويلة ab وبهذا يكون المثلث $a''_1b''_1$ هو المثلث المنشود. حيث تشكل القطعة a'' , b'' الطول الحقيقي للقطعة AB.

الطريقة الأكثر سهولة هي أن نبقي على المسقط الأفقي ونأخذ على إحدى نهايتيه مستقيماً عمودياً عليه ونقيس على هذا العمود طولاً بقدر الفرق بين الإحداثيات الجبهية، يكون وتر المثلث الحاصل $a'b'\overline{B}$ هو الطول الحقيقي للقطعة

AB، وهنا تظهر زاوية ميل المستقيم عن المستوي الأفقي الزاوية α. انظر الشكل (71).

الشيء نفسه يمكن إجراؤه على المسقط الجبهي، حيث نأخذ على المستقيم العمودي المنشأ من "a الطويلة التي تساوي الفرق بين الإحداثيات الأفقية حيث يمثل الطول الحقيقي للقطعة "$\overline{A}b$ و B زاوية ميلها عن مستو الإسقاط الجبهي.

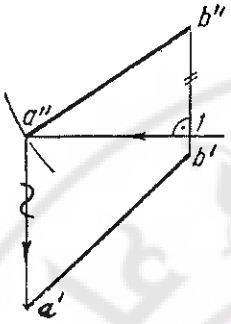
يُظهر الشكل (72) زوايا ميل مستقيم عن مستويات الإسقاط كما تبدو بالفراغ.



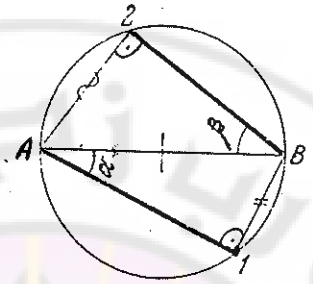
الشكل (72) الشكل (71) الشكل (70)

في الشكل (73) قمنا بجمع كل من المثلثين AB1 و AB2 على رسم واحد، فالمثلثان يشتركان بالضلع AB الذي يمثل الطول الحقيقي للقطعة المستقيمة. نلاحظ أن الزاوية α ستقابل فرق الإحداثيات على المستوي الجبهي بينما الزاوية β ستقابل فرق الإحداثيات على المستوي الأفقي.

بما أن الزاوية A1B و A2B هما زاويتان قائمتان، إذن فالمستقيم AB هو قطر في دائرة تمر برؤوس هذين المثلثين.



الشكل (74)



الشكل (73)

لنرى الآن المسألة التالية، المطلوب تمثيل مسقطي مستقيم كيفي AB علم منه طوله الحقيقي وزوايا ميله عن مستويات الإسقاط α , β.

نبدأ بإنشاء القطعة المستقيمة AB على رسم مساعد، وليكن على الرسم في الشكل (73) نفسه. نأخذ مستقيماً يميل عن القطعة AB بزاوية α، ونأخذ مستقيما آخراً يمر من B ويميل بزاوية β عن القطعة AB كما هو على الرسم.

الآن نقوم بإنزال عمود من على الخط الأول ولنفرض أن موقع العمود هو 1، نقوم أيضاً بإنزال عمود من A على الخط الثاني ولنفرض أن موقع العمود هو النقطة 2.

يتشكل معنا المثلثين A2B و A1B حيث يمثل أضلاع كل من المثلثين عن مثيلاتهم في المساقط ويكون:

A1 هو طول المسقط الأفقي، 1B هو فرق الإحداثيات Z، وكذلك:

B2 هو طول المسقط الجبهي، 2A هو فرق الإحداثيات Y بين النقطتين , A B. الآن نقوم بنقل تلك الأطوال إلى الرسم على الشكل (74).

من نقطة اختيارية مثل B نعين إحداثياتها نقوم بإنشاء الفرق (لنفرض نحو أسفل - أي أن $z_B < z_A$). ثم نرسم خطاً أفقياً، ننشئ الآن الطول المساوي لـ 2B في الشكل (73) بوساطة قوس دائرة مركزها b'' ونصف قطرها هو 2B فيتقاطع مع الخط الأفقي المار من 1 عند a''.

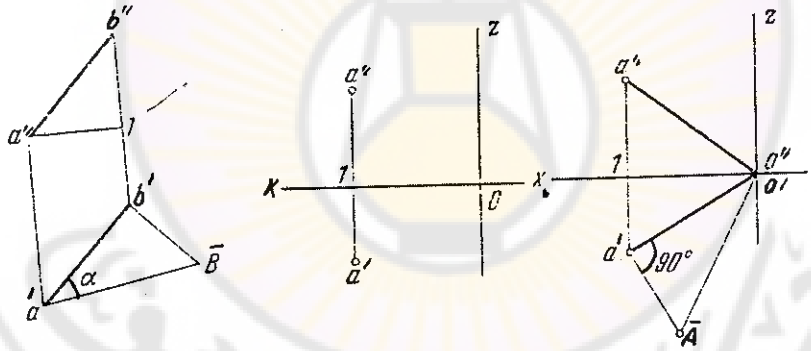
الشيء ذاته نجريه على المسقط الأفقي:

نقوم بتحديد الفرق $|Y_a - Y_b|$ من الشكل (73) ونرسم خطاً أفقياً ماراً من A ثم نرسم قوس الدائرة مركزه "b ونصف قطره 1A ونوجد المسقط "a. يجب أن يكون المسقطان "a , 'a على خط وصل واحد (خط تداعي).

على الرسم في الشكل (74) قمنا بإنشاء القوس الذي مركزه 'b ونصف قطره 2B وتمت مقاطعته مع خط الوصل المار من 'a. وهذا أيضاً ممكن ويمكن أن يكون أسرع أيضاً.

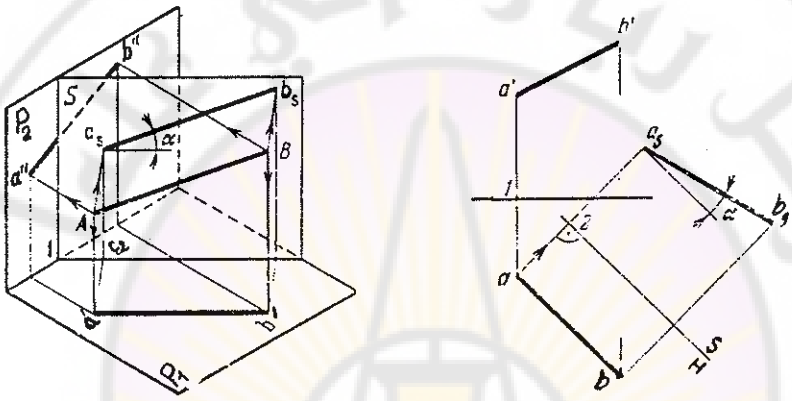
نلاحظ بأن فرق الإحداثيات المتخذ (نحو أسفل) هو جهة اختيارية. وبالتالي للمسألة حلول أخرى عددها سبعة على الطالب إيجاد هذه الوضعيات الممكنة.

يبين الشكل (75) والشكل (76) خطوات إيجاد طول وميل المستقيم الواصل بين مبدأ الإحداثيات O ونقطة ما مثل A عن مستوي الإسقاط الأفقي. وبين النقطتين A , B.



الشكل (76) الشكل (75)

في الشكل (77) يتم إيجاد زاوية ميل القطعة المستقيمة AB عن مستوي الإسقاط الأفقي حيث أخذنا مستوياً جديداً S معامداً للمستوي الأفقي للإسقاط وموازياً للمستقيم. خط الأرض في الجملة الجديدة S/P_1 مبين على الرسم.



الشكل (77)

تظهر على الرسم الأخير زاوية ميل المستقيم عن المستوي الأفقي α كذلك الطول الحقيقي للقطعة AB وهو الطول a_sb_s الذي يمكن قياسه مباشرةً على الرسم.

2 ـ 11 : الوضع المشترك لمستقيمين

2 ـ 11 ـ 1 : المستقيمات المتوازية

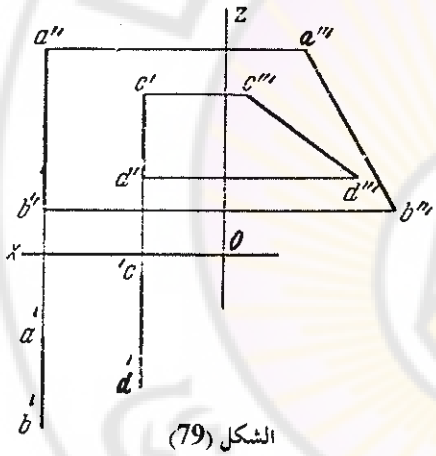
في الإسقاط الموازي، خاصة التوازي بين مستقيمين هي أيضاً خاصة إسقاطية، أي أن التوازي بين مستقيمين متوازيين يحافظ على نفسه بين مساقطيهما على أي مستوٍ. وبالتالي فإذا كان المستقيم AB//CD في الشكل (78) فإن مسقطيهما على المستوي هما أيضاً متوازيان أي أن a″b″//c″d″ و a′b′//c′d′، غير أن العكس غير

صحيح أي أنه إذا كان مسقطا مستقيمين متوازيين لا يشترط أن يكون المستقيمان متوازيين.

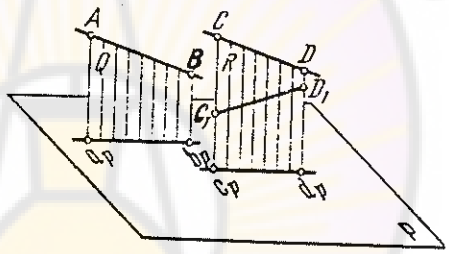
بالفعل في الشكل (78) يمكن أن يكون $c_p d_p$ مسقطاً للمستقيمين في الوقت نفسه، غير أن $CD \nparallel C_1D_1$.

نقول إن خاصة التوازي هي حالة خاصة من خاصة التقاطع، حيث يتقاطع أي مستقيمين متوازيين في نقطة اللانهاية منهما.

نذكر بأن خاصة التقاطع هي أيضاً خاصة إسقاطية فالتقاطع يظهر أيضاً في المساقط ويكون مسقطاً نقطة التقاطع على خط وصل واحد.



الشكل (79)



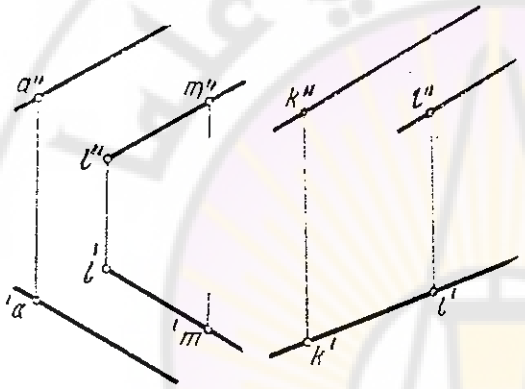
الشكل (78)

إذن، مسقطا مستقيمين متوازيين هما خطان متوازيان أيضاً. مساقط مستقيمين متوازيين هي متوازية فيما بينها (المساقط المتوافقة متوازية).

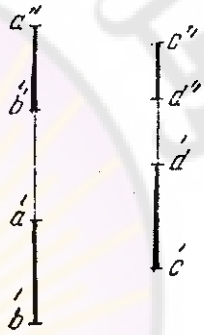
ففي حالة المستقيمين غير الجانبيين يكفي أن يكون المسقطان الأفقي والجبهي متوازيين حتى نستنتج أن المستقيمين هما متوازيان أيضاً. أي أن العكس صحيح هنا.

غير أن هذا الشيء لا يكفي في المستقيمات الجانبية، يُظهر الشكل (79) المسقطين المتوازيين للمستقيمين AB , CD، غير أن هذا لا يعني توازي المستقيمين وهذا واضح لدى استنتاج المسقط الثالث لكلا المستقيمين.

يمكن إثبات، بالطريقة نفسها، أن المستقيمين AB , CD على الشكل (80) هما مستقيمان غير متوازيين، هذا ما يمكن استنتاجه أيضاً من تناوب المساقط المتماثلة لهما.



الشكل (81)



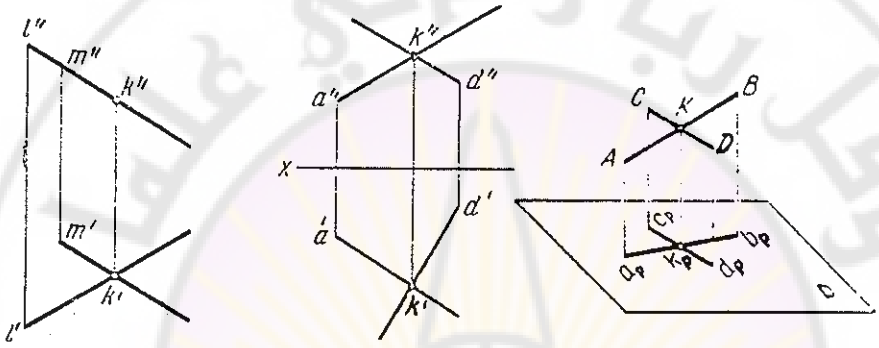
الشكل (80)

يمكن إنشاء مستقيم واحد مار من نقطة معطية مثل A ويوازي مستقيماً آخر معطياً LM، الشكل (81) يظهر هذا الإنشاء قد ينطبق أحد مسقطي مستقيمين متوازيين كما في الشكل السابق. فالمستقيمان بهذه الحالة يقعان في مستو شاقولي واحد.

2 ـ 11 ـ 2 : المستقيمات المتقاطعة

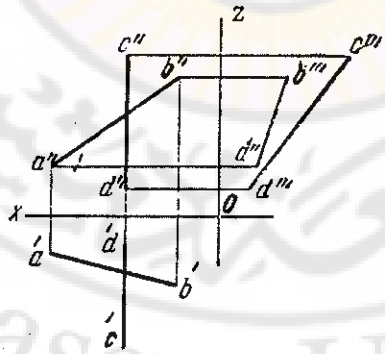
لما كانت نقطة تقاطع مستقيمين مثل AB , CD هي نقطة مشتركة تنتمي لكلا المستقيمين فمسقطا تلك النقطة ينتميانْ للمساقط المتماثلة للمستقيمين، أي أن التقاطع يظهر أيضاً في الفراغ، وبالتالي فخاصة التقاطع لمستقيمين هي خاصة إسقاطية. الشكل (82) يظهر هذا الشيء.

إذن: يكفي أن تكون نقطة تقاطع المسقطين المتماثلين لمستقيمين على خط وصل واحد، كي نستنتج بأن المستقيمين هما مستقيمان متقاطعان عند تلك النقطة. لاحظ الشكل (83) والشكل (84) بدون خط الأرض. حيث خط التداعي الواصل بين K K يوازي خط الوصل m m , l l.



الشكل (84) الشكل (83) الشكل (82)

يبين الشكل (85) مستقيمين أحدهما جانبي وغير متقاطعين، حيث يتم التأكد من حالة التقاطع عن طريق المسقط الجانبي للمستقيمين. إذ لا يكفي أن يملكان نقطة تبدو أنها مشتركة حيث مسقطاها يقعان على خط وصل واحد.

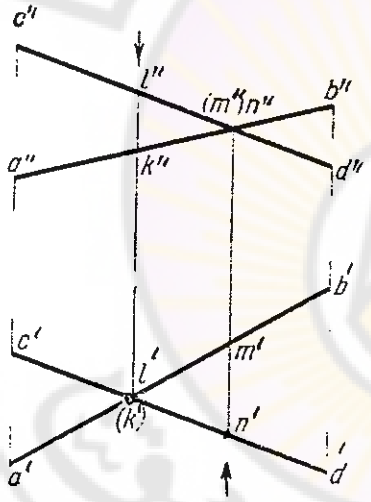


الشكل (85)

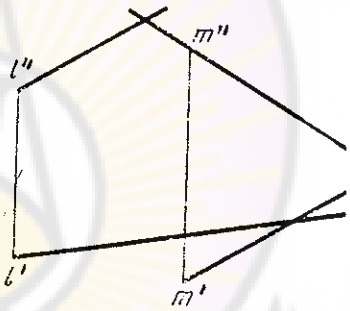
2 - 11 - 3 : المستقيمات المتخالفة

المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان غير متلاقيين وغير متوازيين (أي أنهما لا يشكلان مستوياً واحداً). كما يمكن أن ندعو المستقيمين المتخالفين بالمستقيمين المتصالبين أو الشماليين. على الشكل (86) والشكل (87) مستقيمان متخالفان حيث النقطتان K , L لا تشكلان نقطتي تقاطع، بل إن أحد المستقيمين يغطي الآخر في تلك النقطة (الشيء نفسه يقال عن النقطتين M , N).

حيث نلاحظ أن النقطة L تخفي تحتها النقطة K فيما لو نظرنا من الأعلى (باتجاه السهم) كما نلاحظ أن النقطة N تخفي وراءها النقطة M فيما لو نظرنا من الأمام (باتجاه السهم السفلي).

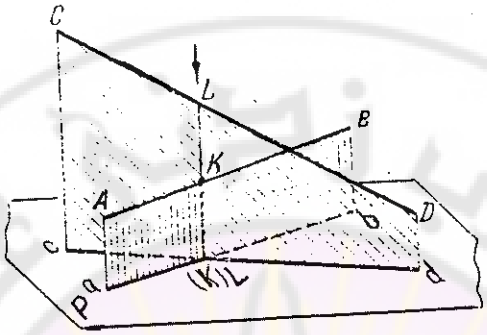


الشكل (87)



الشكل (86)

يبين الشكل (88) مستقيمين متخالفين كما يتوضعان بالفراغ.



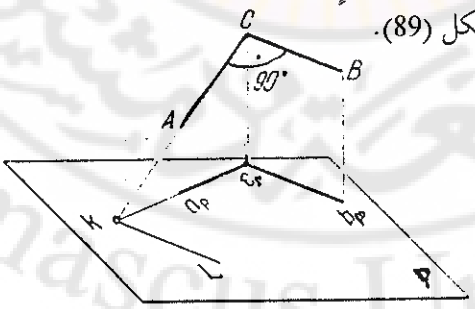
الشكل (88)

2 ـ 12 : مساقط الزوايا المستوية

كل مستقيمين متقاطعين يشكلان مستوياً (المستقيمان المتوازيان) هما أيضاً متقاطعان في اللانهاية).

إذا كان المستوي المشكل من مستقيمين متقاطعين عامودياً على مستوي الإسقاط فإن مسقط الزاوية بينهما عبارة عن خط مستقيم.

إذا كان مستوي الزاوية القائمة غير معامد لمستوي الإسقاط، وأحد ضلعي هذه الزاوية القائمة هو مستقيم موازٍ لمستوي الإسقاط، يكون مسقط هذه الزاوية هي زاوية قائمة أيضاً. الشكل (89).



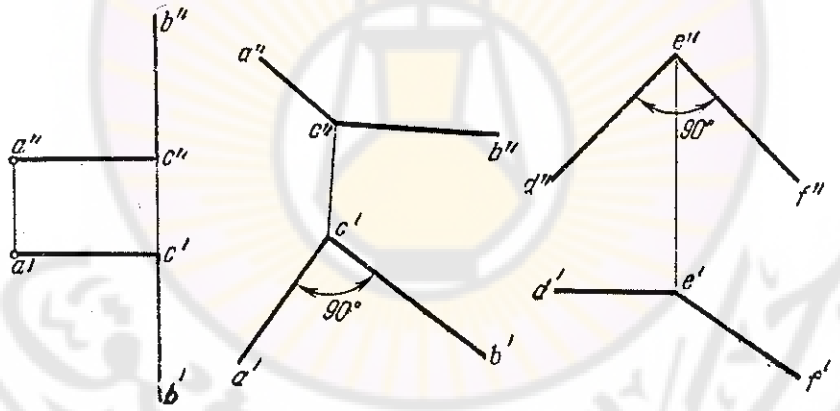
الشكل (89)

إذا كان مسقط زاوية قائمة، فإن الزاوية الحقيقية بالفراغ تكون زاوية قائمة فقط عندما يكون أحد ضلعيها موازياً لمستوي الإسقاط.

نلاحظ أن الزاوية DEF على الشكل (90) هي زاوية غير قائمة حتى ولو كان مسقطها a′b′d′ زاوية قائمة وذلك بسبب أن أي من ضلعيها لا يوازي مستوي الإسقاط.

بالمثل فإن الزاوية d″e″f″ القائمة بالفراغ، مسقطها a′e′f′ لا يشكل زاوية قائمة للسبب نفسه.

أما الزاوية ACB الشكل (91) فهي زاوية قائمة لأن أحد ضلعيها AC مواز لمستوي الإسقاط الأفقي والجبهي وفي الوقت نفسه هنا، ولذلك ظهر التعامد في المسقطين بينما الضلع الآخر هو جانبي.

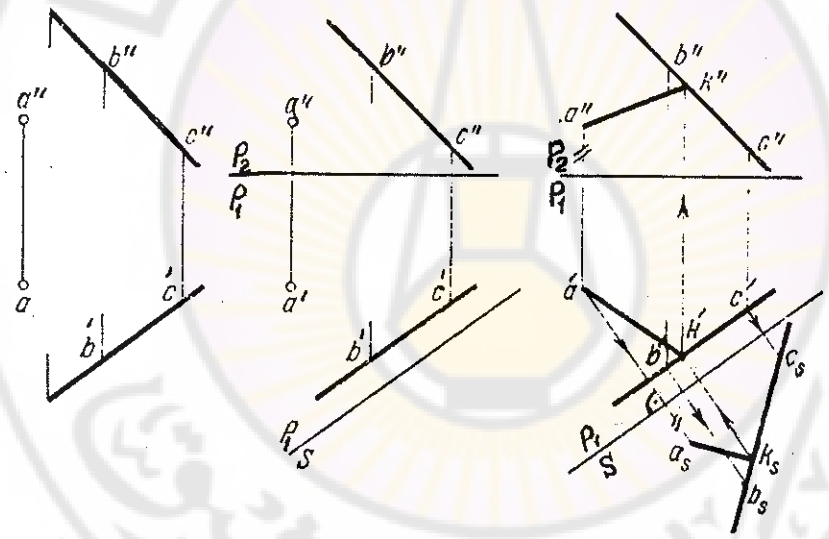


الشكل (91) الشكل (90)

يُظهر الشكل (92) كيفية إنشاء مستقيم يمر من نقطة معطاة A ويكون معامداً لمستقيم معطى مثل BC.

قمنا بإسقاط المستقيم والنقطة على مستوي إسقاط مساعد، (جديد)، بحيث يظهر هذا المستقيم (CB) بطوله الحقيقي ـ يجب أن يكون موازياً لمستوي الإسقاط الجديد S، وبالتالي نختار محور الإسقاط الجديد في الجملة الجديدة للإسقاط S/ بحيث يكون موازياً للمسقط الأفقي لهذا المستقيم.

في الجملة الجديدة، وعلى المساقط الجديدة سيظهر التعامد على المسقط b_sc_s. لذلك قمنا بإنشاء مستقيم عمودي على b_sc_s من النقطة a_s، يتقاطع هذا العمود مع المسقط هذا في نقطة مثل K_s.



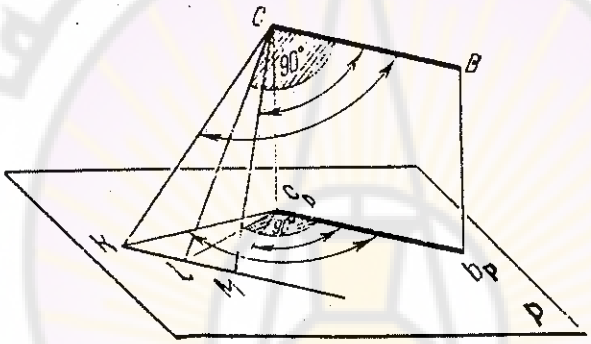
الشكل (92)

نقوم الآن بإرجاع مساقط النقطة على المساقط الأصلية بإنشاء خطوط الوصل حسب الأسهم، النقطة K هي نقطة تقاطع المستقيمين المتعامدين AK , BC.

من الشكل (92) يمكن استنتاج أن البعد $a'k'$ يمثل بعد النقطة A عن المستقيم CD فيمكن بمعرفة الطول الحقيقي للمستقيم AK معرفة البعد بين النقطة A عن المستقيم CD (عن طريق إسقاط المستقيم على مستو جديد يوازيه).

يكون مسقط زاوية حادة زاوية حادة حتماً فقط إذا كان أحد ضلعي هذه الزاوية موازياً لمستوي الإسقاط LCB حادة $L\ c_p\ b_p$ أيضاً حادة. يُظهر الشكل (93) هذه الحالة.

كذلك إذا كانت الزاوية منفرجة وكان أحد ضلعيها موازياً لمستوي الإسقاط يكون مسقط تلك الزاوية زاوية منفرجة أيضاً.



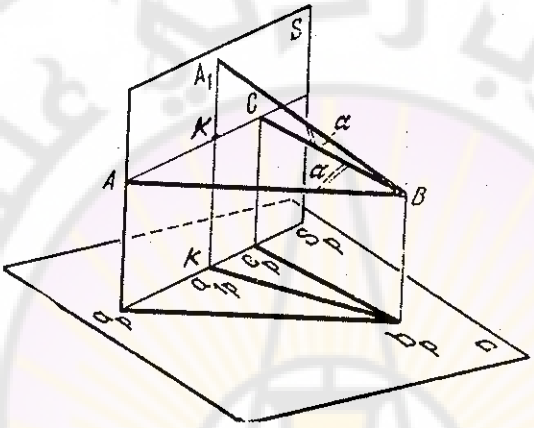
الشكل (93)

إذا كان ضلعا زاوية ما موازيين لمستوي الإسقاط فإن مسقط الزاوية هذه هو زاوية تساوي الزاوية في الفراغ.

في الشكل (94) تكون الزاوية $a_p\ b_p\ c_p$ تساوي الزاوية ABC بسبب أن ضلعيها يوازيان مستوي الإسقاط P.

نلاحظ من الشكل أنه إذا كانت الزاويتان A_1BC و ABA_1 متساويتين بالفراغ فلا يشترط أن يكون مسقطا هاتين الزاويتين متساويين أي أن $a_{1p}\ b_p\ c_p$ لا يساوي بالضرورة $a_p\ b_p\ a_{1p}$ فمسقط النقطة A_1 أي a_{1p} يمكن أن يكون أقرب إلى c_p من a_p.

واضح أن قياس الزوايا $a_{1p}\ b_p\ c_p$ و $a_p\ b_p\ a_{1p}$ في المساقط سيتعلق مباشرةً بميل المستويين المشكلين من هاتين الزاويتين. فالزاويتان المتساويتان اللتان يميل مستويهما بميل متساو عن مستوي الإسقاط يكون مسقطاهما متساويين.



الشكل (94)

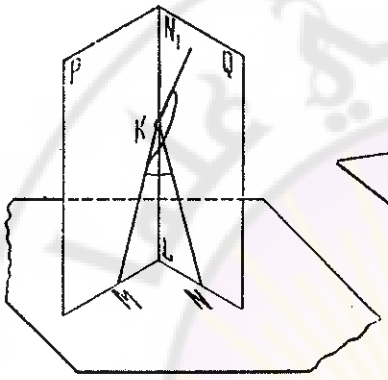
ليس من الصعوبة بناءً على ما جاء في الفقرة السابقة استنتاج ما يلي:

أنه إذا كان ضلعا زاوية موازيين لمستوي الإسقاط، فإن أي مستقيم ثالث يشكل زاويتين متساويتين مع ضلعي هذه الزاوية. يشكل مسقطه مع مسقطي ضلعي الزاوية، زاويتين متساويتين.

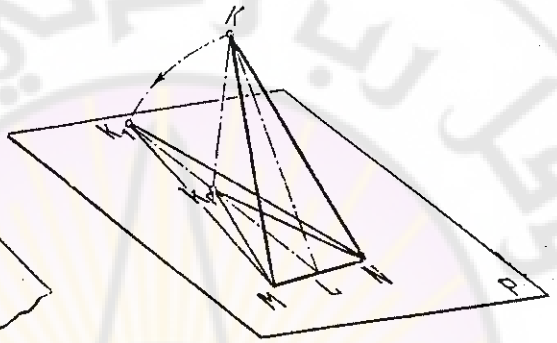
في الشكل (94) إذا كان ضلعا الزاوية ABC موازيين لمستوي الإسقاط و $AK = KC$ فإن $a_p\ b_p\ a_{1p} = a_{1p}\ b_p\ c_p$ وقياسهما يساوي نصف الزاوية الكبرى $a_p\ b_p\ c_p$.

إن مسقط منصف زاوية ضلعيها يميلان الميل نفسه عن مستوي الإسقاط يقسم مسقط الزاوية إلى زاويتين متساويتين الشكل (95) أي أن: إذا كان KL هو منصف للزاوية MKN فإن $MK_pL = NK_pL$.

يُظهر الشكل (96) أن مسقطي زاويتين أحدهما حادة MKN والأخرى منفرجة MKQ هو زاويتان متطابقتان. (الزاوية MLN).



الشكل (96)



الشكل (95)

الفصل الثالث

تمثيل المستوي

يتعين المستوي بالعناصر التالية:

1 ـ ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة؛ 2 ـ مستقيم ونقطة لا تقع عليه؛ 3 ـ مستقيمان متقاطعان؛ 4 ـ مستقيمان متوازيان (المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان متقاطعان في اللانهاية).

3 ـ 1 : طرائق إعطاء المستوي (تعيين مستوي)

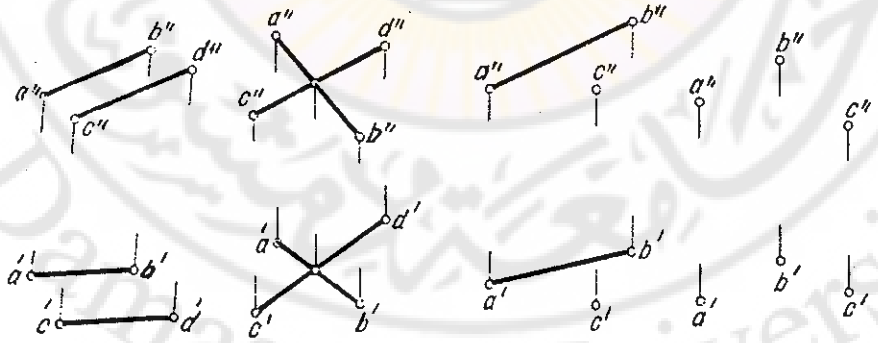
يتعين مستو على مستوي الإسقاط بإحدى الحالات التالية:

1 ـ مسقطا ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة الشكل (97)؛

2 ـ مسقطا مستقيم ونقطة خارجة عنه الشكل (98)؛

3 ـ مسقطا مستقيمين متقاطعين الشكل (99)؛

4 ـ مسقطا مستقيمين متوازيين الشكل (100).

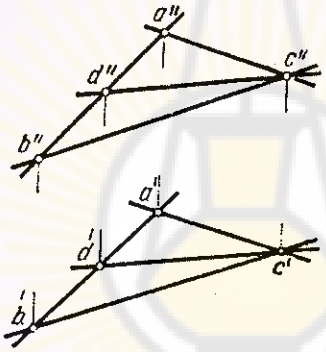


الشكل (97) الشكل (98) الشكل (99) الشكل (100)

نلاحظ أن الحالة الأولى عندما يعطى مسقطا ثلاث نقاط يمكن ردها إلى أي من الحالات الأخرى. ففي الشكل (98) بالوصل بين أي نقطتين من النقاط الثلاثة A , B , C كذلك يمكن إنشاء مستقيم آخر مار من النقطة الثالثة C ويتقاطع مع المستقيم AB كما في الشكل (99) أو أن ننشئ مستقيماً آخراً يمر من النقطة الثالثة C بحيث يكون موازياً للمستقيم AB. كما في الشكل (100).

أي شكل مستو محدود (مثلث، مربع، دائرة... إلخ) يعين مستوياً، الشكل (101). نلاحظ أن معرفة مسقطي أي ثلاث نقاط من هذا الشكل كاف لتعيين المستوي المحدود الذي على شكل مثلث.

كما نلاحظ بأن أي مستقيم مثل المستقيم CD مثلاً واقع في المستوي ABC سيقطع مستقيمات المستوي كافة (أو أن يكون موازياً لبعضها).



الشكل (101)

سنرى فيما بعد بأن المستوي المتعامد مع مستوي الإسقاط يكون مسقطه على ذلك المستوي هو عبارة عن خط. بينما يظهر الكبر الحقيقي له على مستوٍ يوازيه.

يبين الشكل الفراغي (103) مستوياً كيفياً غير محدود، يشترك مع المستوي الأفقي للإسقاط في الفصل المشترك P_{n1} ومع المستوي الجبهي في P_{n2}. كما سنميز بين المستوي المحدود على شكل هندسي ما، والمستوي غير المحدود، الممتد إلى اللانهاية بكل الجهات.

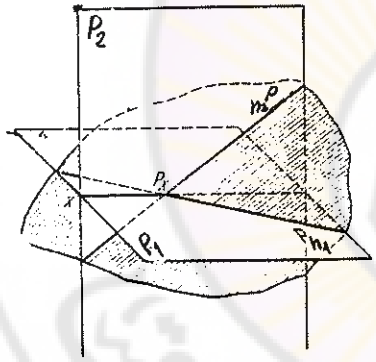
3 ـ 2 : آثار المستوي

يبين الشكل الفراغي (102) مستوياً كيفياً غير محدود P، يشترك مع المستوي الأفقي للإسقاط في الفصل المشترك P_{n1} كما يشترك مع المستوي الجبهي للإسقاط في الفصل المشترك P_{n2}.

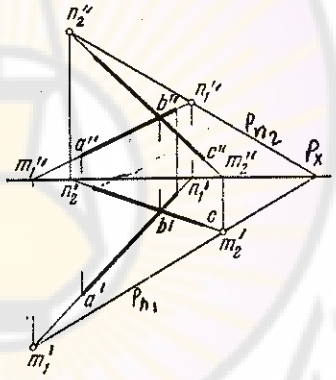
نلاحظ أن هذين الفصلين المشتركيم يلتقيان على خط الأرض في النقطة P_x.

نسمي المستقيمين: P_{n1} الأثر الأفقي للمستوي P و P_{n2} الأثر الجبهي للمستوي P. يتلاقى أثرا أي مستو على خط الأرض حتماً. كما يوضح ذلك الشكل (103).

نلاحظ أيضاً بأن الأثر الأفقي للمستوي P_{n1} هو مستقيم مسقطه الأفقي P_{n1} نفسه ومسقطه الجبهي يقع على خط الأرض، بينما P_{n2} هو مستقيم مسقطه الجبهي هو نفسه ومسقطه الأفقي يقع على خط الأرض.



الشكل (103)



الشكل (102)

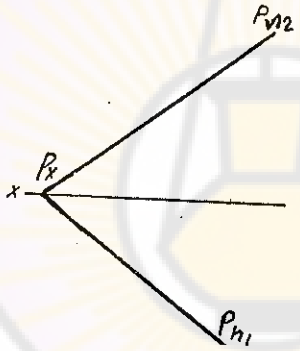
سنعرف أيضاً أنه يمكن تعيين مستو غير محدود بإعطاء آثاره على مستويات الإسقاط.

نبين الآن كيفية استنتاج أثري مستو معين بمستقيمين متقاطعين معطيين , AB BC.

إن أثري أي مستقيم على مستويي الإسقاط واقع في مستو سيقعان على الأثرين المماثلين للمستوي ذاته. وبالتالي نقوم أولاً باستنتاج آثار المستقيمين ونصل بين الآثار المتماثلة لهما ليتعين لدينا أثري المستوي الحامل للمستقيمين.

على الشكل (102) قمنا بإيجاد نقطتي أثر كل من المستقيمين وهما AB , BC حيث مددنا المسقط الأفقي للمستقيم AB حتى يتلاقى مع خط الأرض وأوجدنا n'_1، كذلك مددنا المسقط الجبهي للمستقيم (حتى أوجدنا الأثر الجبهي m''_1) الشيء ذاته نقوم به للمستقيم CD وحصلنا على M_2 و N_2 أثري المستقيم الأخير على مستوي الإسقاط.

بعد ذلك نقوم بوصل الآثار المتماثلة للمستقيمين المذكورين للحصول على الأثرين الأول والثاني لمستوي، الأثران يجب أن يلتقيا عند خط الأرض. - يجب التأكد من ذلك كل مرة. الشكل (104).

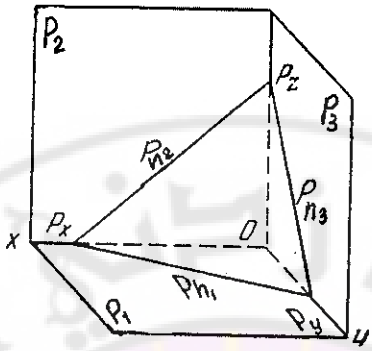


الشكل (104)

يبين الشكل الفراغي (105) توضع مستو كيفي P بالنسبة لمستويات الإسقاط، المستقيم P_{n3} يمثل الأثر الثالث للمستوي.

نلاحظ بأن النقاط Px , Py , Pz هي نقاط تقاطع المستوي P مع المحاور x , y , z على الترتيب، وهذه النقاط أيضاً هي نقاط تقاطع آثار المستوي مثنى مثنى.

نلاحظ أن تعين المستوي ممكن أيضاً بمعرفة نقاط تقاطعه مع المحاور الإحداثية فعندما نقول بأن المستوي P (10, 12, 7) يعني هذا بأن 0Px = 10; 0Py = 12; 0Pz = 7.

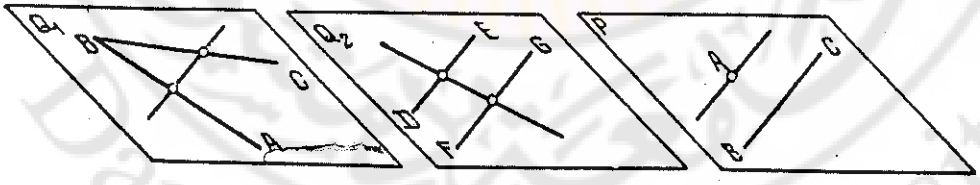


الشكل (105)

بتعين تلك النقاط على المحاور الإحداثية وبالوصل بينها يمكن الوصول إلى آثار المستوي الثلاثة.

3 ـ 3 : النقطة والمستقيم في المستوي

من المؤكد أن نقطة تنتمي لمستو، إذا وقعت على مستقيم ما واقع في ذلك المستوي. كما أن مستقيم يقع في مستو ما، إذا مر من نقطتين واقعتين في ذلك المستوي أو أن يمر من نقطة ما في ذلك المستوي، ويكون موازياً لمستقيم آخر يقع في المستوي. يبين الشكل (106) هذه الحالات.



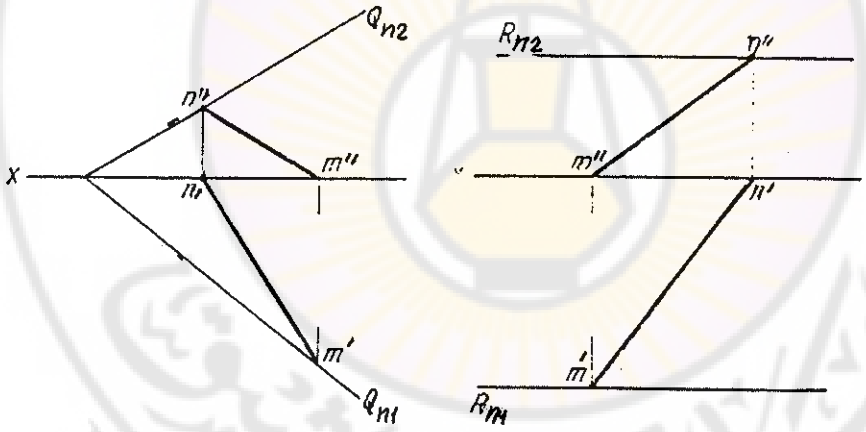
الشكل (106)

المستوي Q_1 معين بالمستقيمين AB , BC. واضح بأن مستقيماً يقع في المستوي نفسه سيقطع هذين المستقيمين حتماً إذا لم يكن موازياً لأحدهما عندئذٍ سيقطع أحدهما فقط.

المستوي Q_2 معين بالمستقيمين المتوازيين DE , FG.

المستوي P معين بالمستقيم BC ونقطة A لا تقع عليه، واضح أن المستقيم المار من A هو مستقيم يمر من نقطة واقعة في هذا المستوي وموازٍ لمستقيم BC فيه المستقيم الجديد (المار من A) حتماً سيقع في ذلك المستوي P أيضاً. بينما لو كان المستوي معين بأثريه، المستوي على الشكل (107) فإن مستقيماً ما سيقع فيه إذا وقعت آثار هذا المستقيم على الآثار المماثلة للمستوي هذا.

نلاحظ أن المستوي Q هو مستو كيفي، بينما المستوي R هو مستو مواز لخط الأرض. فأثراه موازيان له، ويتقاطعان على خط الأرض أيضاً ولكن في اللانهاية.

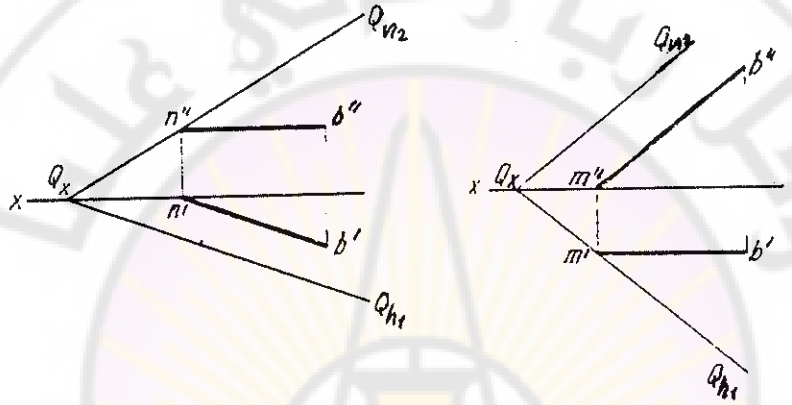


الشكل (107)

يبين الشكل (108) مستقيماً أفقياً ماراً من نقطة B واقعة في المستوي Q، يتضح من الشكل أن الأثر الجبهي للمستقيم هذا N سيقع على الأثر الجبهي للمستوي.

BN مستقيم مواز لخط الأثر الأفقي Q_{n1} (هذا الأثر مسقطه الأفقي هو Q_{n1} نفسه ومسقطه الجبهي على خط الأرض نفسه).

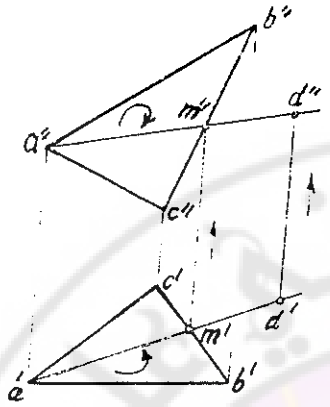
الشيء نفسه يقال عن المستقيم الجبهي BM ولكن المستقيم هذا يوازي الأثر الجبهي للمستوي Q_{n2} ويمر من نقطة B واقعة في ذلك المستوي.



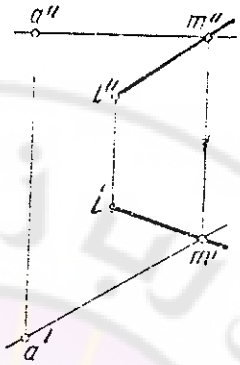
الشكل (108)

في الشكل (109) لدينا مستو عيّن بمستقيم مار من النقطة L ونقطة A لا تقع على المستقيم قمنا بإنشاء مستقيم أفقي يمر من النقطة حيث رسمنا منها مستقيماً موازياً لخط الأرض ليمثل المسقط الجبهي للمستقيم الأفقي المطلوب، ثم أوجدنا نقطة تقاطعه مع المستقيم المعطى (المار من L) ثم وصلنا بين المسقطين a , m وحصلنا على المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب، المستقيم المطلوب هو المستقيم AM أفقي وواقع في المستوي المعطى.

مثال آخر على المستقيمات الواقعة في المستوي: يطلب إيجاد المسقط الجبهي لنقطة D علم منها المسقط الأفقي d′ فقط على فرض أنها نقطة واقعة في المستوي المعين بالمثلث ABC، انظر الشكل (110).



الشكل (110)



الشكل (109)

الحل: ننشئ مستقيماً ماراً بالنقطة D وواقعاً في المستوي ABC وذلك بالوصل بين النقطتين d′, a′ فنحصل على المسقط الأفقي للمستقيم. ثم نستنتج المسقط الجبهي للنقطة m′ (نقطة تقاطع المستقيم الجديد مع BC). وبالوصل بين النقطتين m″ , a″ نحصل على المسقط الجبهي للمستقيم. بتمديده وإيجاد نقطة تقاطعه مع خط الوصل المقام من المسقط الأفقي للنقطة d′ نحصل على المسقط الجبهي المطلوب d″.

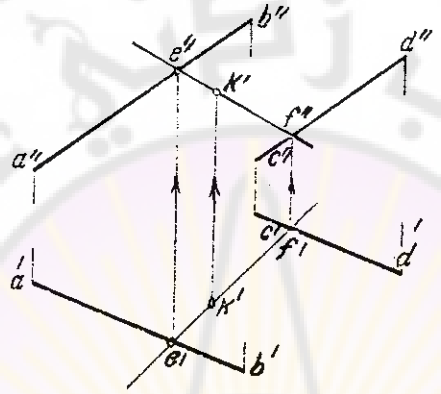
الآن: النقطة D تقع على مستقيم AM الواقع في مستوي المثلث، فالنقطة D واقعة في المستوي ABC وهي النقطة المطلوبة.

يمثل الشكل (111) مثالاً مشابهاً محلولاً حيث يطلب إيجاد المسقط الجبهي لنقطة K (معطى منها مسقطها الأفقي فقط) واقعة في المستوي المعين بالمستقيمين المتوازيين AB , CD.

قمنا بإيجاد مسقطي المستقيم EF المار من K حيث أنشأنا المسقط الأفقي a′ أولاً ثم استنتجنا المسقط الجبهي له. المسقط الجبهي للنقطة K سيقع على المسقط الجبهي للمستقيم EF، وتكون K (k′, k″) هي النقطة المطلوبة.

يبين الشكل (112) كيفية إنشاء مستقيم أفقي واقع في مستو معطى ABC، ويكون ماراً بالنقطة A أنشأ المسقط الجبهي للمستقيم المطلوب أولاً فهو يوازي خط

الأرض (يعامد خط الوصل a′, a″). ثم استنتجنا المسقط الأفقـي لـه علـى فـرض أنـه واقع في المستوي.

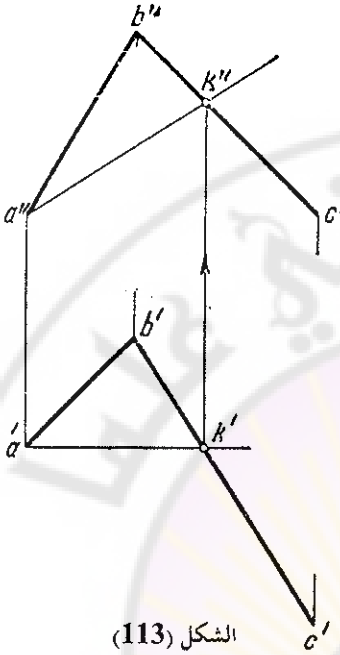


الشكل (111)

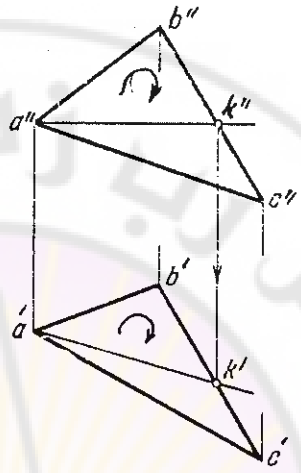
الشكل السابق (108) يمثل كيفية إنشاء مستقيم أفقي واقع في مستو غير محدود معين بأثريه كذلك على اليمين مستقيماً جبهياً BM واقعاً في المستو Q المعين بأثريه Q_{n1}, Q_{n2}.

يُظهر الشكل (113) كيفية إنشاء مستقيم جبهي مار من النقطة A وواقع في المستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين AB , BC قمنا بإنشاء المسقط الأفقي له أولاً، (المسقط الأفقي لمستقيم جبهي يوازي خط الأرض) وثم استنتجنا المسقط الجبهي له.

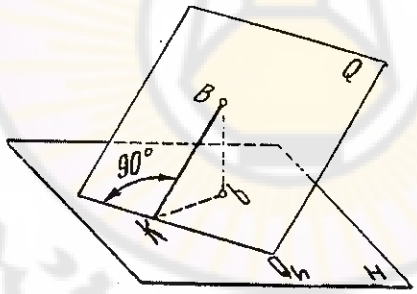
يبين الشكل الفراغي (114) مستقيماً ذا ميل أعظمي في المستوي Q فهو يعامد الأثر Q_h للمستوي فخط الميل الأعظم في المستوي يعامد كل افقيات المستوي (أفقيات المستوي الواحد هي مستقيمات متوازية فيما بينها). يتضح من الشكل أن bk يعامد Q_h أيضاً.



الشكل (113)



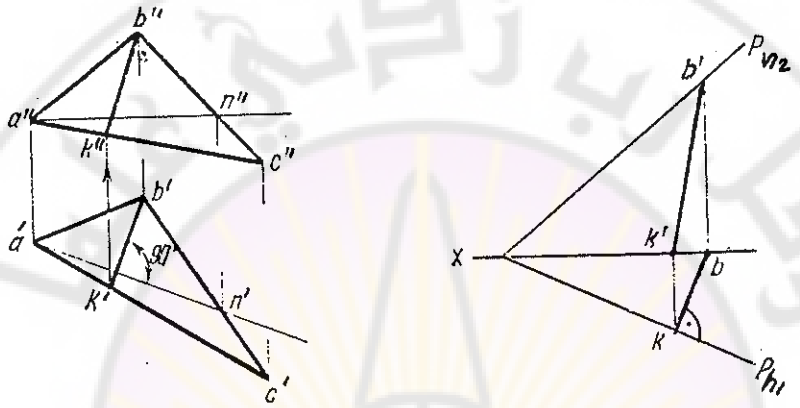
الشكل (112)



الشكل (114)

نصطلح أن تسمية خط الميل الأعظم لمستو تعني خط الميل الأعظم مع المستوي الأفقي فقط، علماً بأنه يمكن تعريف وإيجاد خط الميل الأعظم لأي مستو مع المستوي الجبهي للإسقاط أيضاً وله مفهوم مشابه تماماً.

الشكل (115) يبين هذا المستقيم (خط الميل الأعظم). حيث قمنا بإنشاء المسقط الأفقي له أولاً، فهو يعامد المستقيم P_n ثم استنتجنا مسقطه الجبهي، على فرض أنه يقع على المستوي P.



الشكل (115)

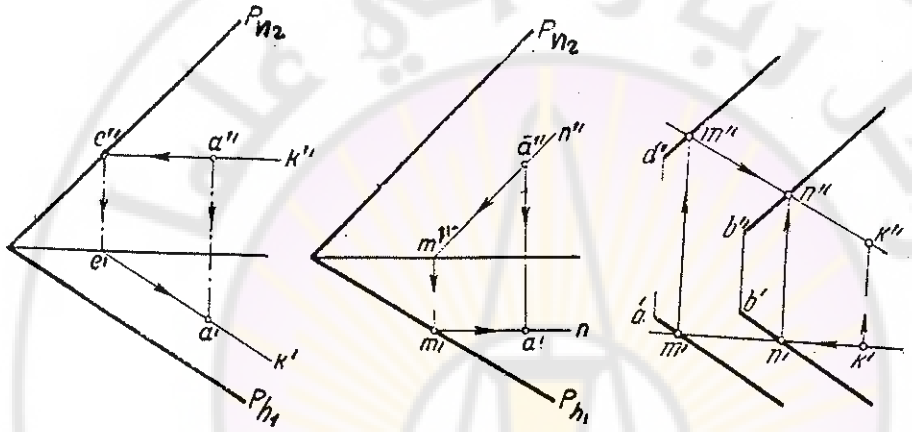
على الشكل السابق (إلى اليسار) مستقيم يمثل خط الميل الأعظم للمستوي ABC ومار من النقطة B فمسقطه الأفقي يمر من b′ ويعامد أحد أفقيات المستوي المعطى وهو المستقيم AN، حيث يظهر هذا التعامد في المسقط الأفقي، قمنا بعد ذلك باستنتاج المسقط الجبهي لهذا المستقيم، الذي يمثل مستقيم خط الميل الأعظم للمستوي المار من B وهو المستقيم BK.

تبين الأشكال (116)، (117) كيفية إيجاد المسقط الآخر لنقطة تعطى بأحد مسقطيها على فرض أنها تقع في مستو معطى، (الإنشاء حسب اتجاه الأسهم).

- الشكل (116) يعطي مستوياً معيناً بمستقيمين متوازيين والمسقط الأفقي لنقطة K واقعة فيه والمطلوب إيجاد المسقط الجبهي لها. (قمنا بالحل بمساعدة مستقيم جبهي مار من النقطة وواقع في المستوي المعطى).

- في الشكل (117) مستو غير محدود معين بأثريه $P\ (P_{n1}, P_{n2})$ ويعطى المسقط الجبهي لنقطة مثل A واقعة في ذلك المستوي حيث قمنا بإيجاد المسقط الأفقي لها عن طريق الأفقي المار فيها.

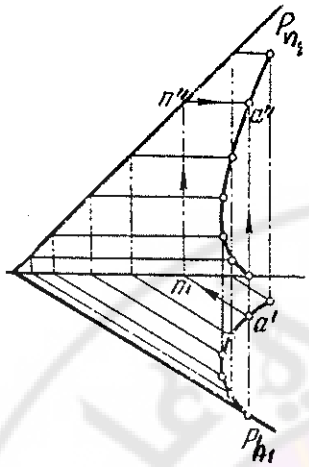
المسألة نفسها يمكن حلها بمساعدة المستقيم الجبهي المار من النقطة A والواقع في المستوي المعطى. الشكل السابق من اليمين.



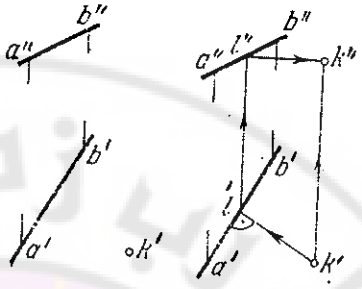
الشكل (117) الشكل (116)

على الشكل (118) معطى المستقيم AB خط ميل أعظم في مستو ويعطى المسقط الأول للنقطة K والمطلوب إنشاء مستقيم أفقي مار من هذه النقطة وواقع في المستوي KAB. (الإنشاء حسب اتجاه الأسهم). المستقيم LK الحاصل هو مستقيم أفقي في ذلك المستوي AB مستقيماً يعامده، حيث يظهر التعامد بينهما في المسقط الأفقي. لماذا؟

يبين الشكل (119) كيفية إيجاد المسقط الجبهي لخط منحن علم منه مسقطه الأفقي فقط وأنه واقع في مستو معطى $P\ (P_{n1}, P_{n2})$. قمنا بإيجاد المساقط الجبهية لعدد معين من نقاط ذلك المنحني عن طريق أفقيات ذلك المستوي (المساقط الأفقية لأفقيات المستوي توازي أثره الأفقي ومساقطها الجبهية توازي محور الإسقاط).



الشكل (119)



الشكل (118)

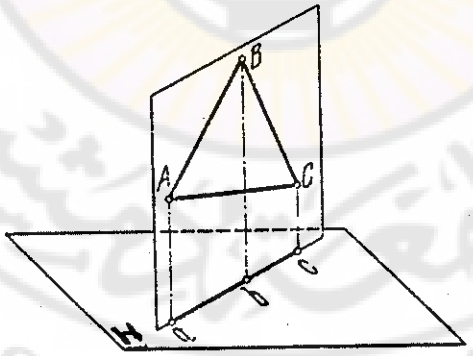
3 ـ 4 : وضع المستوي بالنسبة لمستويات الإسقاط

يمكن لمستو في الفراغ أن يكون بإحدى الوضعيات التالية بالنسبة لمستوي الإسقاط:

1 ـ أن لا يكون متعامداً مع أي من مستويي الإسقاط؛

2 ـ أن يكون معامداً لمستوي إسقاط واحد مثلاً في الشكل (120) المستوي ABC يعامد المستوي H.

3 ـ أن يكون معامداً لمستويي إسقاط.



الشكل (120)

من الواضح بأنه إذا كان مستو يعامد أحد مستويات الإسقاط فهو إما أن يوازي الآخر وعندئذ يكون أثره موازياً لمحور الإسقاط، أو يميل على الآخر بزاويةما هي زاوية ميل أثره نفسها في المستوي المتعامد معه مع محور الإسقاط.

إذا عامد مستويين فسيكون موازياً للثالث، لأن مستويات الإسقاط متعامدة فيما بينها.

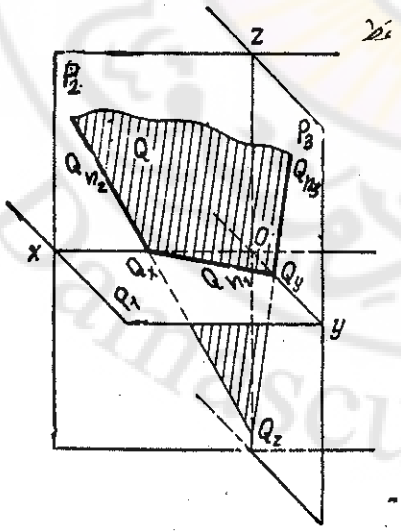
3 ـ 4 ـ 1 : المستوي الكيفي

وهو المستوي الذي لا يعامد أي من مستويات الإسقاط ونميز بين:

ـ المستوي المتكئ: وهو المستوي الذي نرى سطحه من جهة واحدة من الأمام أو الأعلى وتمثل الاشكال (116، 115، 108) أمثلة على مستويات كيفية متكئة وغير محدودة. لهذا المستوي نقرأ رؤوسه بالجهة نفسها على المسقطين انظر الشكل (112) حيث يمثل المستوي ABC مستوياً محدوداً متكئاً.

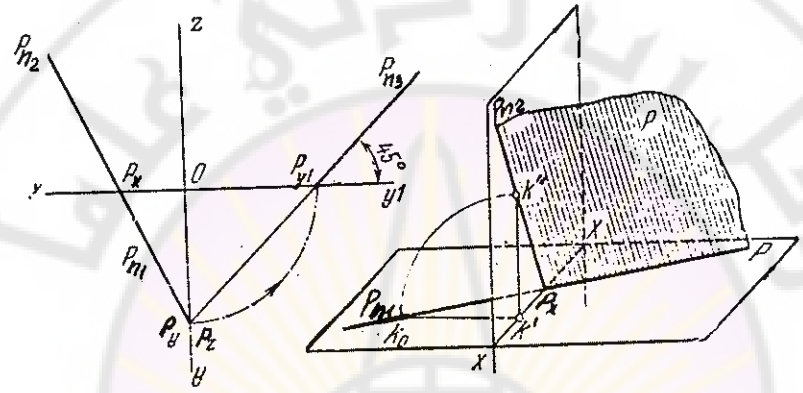
ـ المستوي المشدود: على الشكل (121) المستوي المشدود Q، نلاحظ أننا إذا نظرنا إليه من الأمام سنرى وجهه الأمامي (المهشر) بينما لو نظرنا من الأعلى فإن السطح الذي نراه هو الوجه الداخلي.

في هذا المستوي تكون جهة قراءة رؤوسه متعاكسة على المسقطين، انظر الشكل (110) حيث يمثل المستوي ABC مستوياً مشدوداً. نقرأ a′b′c′ على عكس جهة قراءة المسقط الجبهي a″b″c″.



الشكل (121)

مثال آخر على مستو مشدود (المستوي P مبين على الشكل (122) ويظهر على اليسار من هذا الشكل آثار هذا المستوي وكيفية إيجاد الأثر الثالث له انطلاقاً من معرفة الأثرين الأفقي P_{n1} والجبهي P_{n2} حيث إن النقطة P_y تنطبق على النقطة P_z هنا.



الشكل (122)

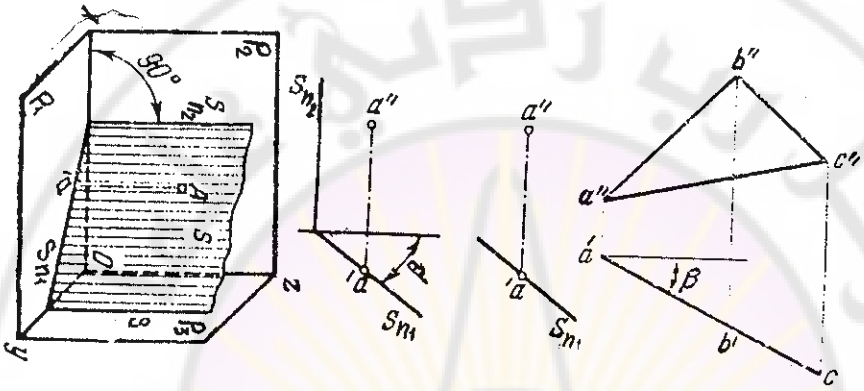
على المستوي الثالث ونظراً لكون الآثار تتلاقى مثنى مثنى على خطوط المحاور الإحداثية فإن الأثر الثالث هو الخط الذي يصل النقطتين P_{y1} , P_z ونلاحظ من الرسم أن P يصنع مع المحور الثاني y الزاوية 45. (هذا المستوي يعامد المستوي المنصف الثاني). لماذا؟

3 - 4 - 2 : المستوي المعامد لأحد مستويي الإسقاط

يمكن التمييز بين ثلاث حالات لمستو كهذا:

1) المستوي المعامد للمستوي الأفقي للإسقاط (الرأسي): وهو المستوي الذي نرى أحد وجهيه من الأمام بينما لا نرى إلا خطاً من الأعلى. على الشكل (123) المستوي المحدود ABC يعامد المستوي P_1، فالمساقط الأفقية لنقاطه كافة ستقع على الخط ABC، تظهر هنا زاوية ميل هذا المستوي مع مستوي الإسقاط الجبهي.

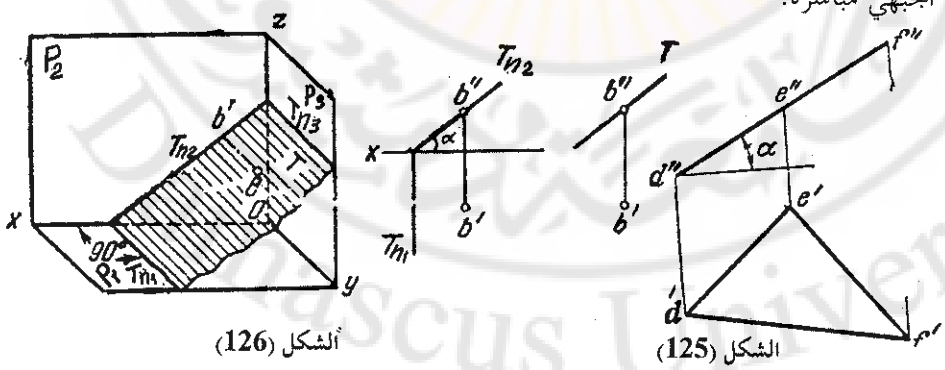
المستوي غير المحدود على الشكل (124) هو أيضاً رأسي، نلاحظ أيضاً آثاره حيث يصنع زاوية مع الجبهي تظهر مباشرة على المسقط الأفقي. كما أن أثره الجبهي يعامد خط الأرض. والمساقط الأفقية للنقاط المنتمية له كافة تقع على الأثر الأفقي S_{n1} له.



الشكل (124)

الشكل (123)

2) المستوي المعامد لمستوي الإسقاط الجبهي (المنصوب): وهو المستوي الذي لا نراه إلا خطاً منه من الأمام بينما نرى أحد وجهيه من الأعلى، ويسمى الأمامي أو المنصوب. يظهر الشكل (125) مستوياً محدوداً حيث تقع المساقط الجبهية لنقاطه على خط واحد. وتظهر زاوية ميله مع مستوي الإسقاط الأفقي بكبرها الحقيقي في المسقط الجبهي مباشرة.



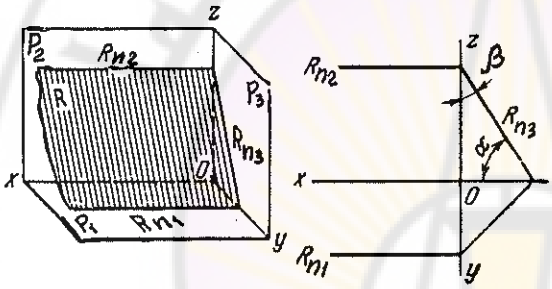
الشكل (126)

الشكل (125)

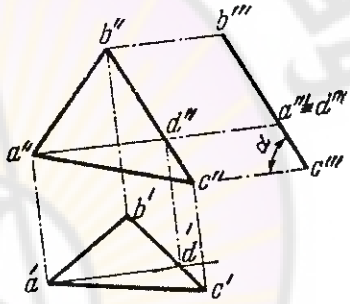
على الشكل (126) مستو غير محدود T هو أيضاً منصوب.

3) المستوي المعامد لمستوي الإسقاط الجانبي: (المستوي الجنبي) ويكون هذا المستوي موازياً لخط الأرض أيضاً ويسمى المستوي الجنبي أو الموازي لخط الأرض، تمييزاً عن المستوي الجانبي.

وتشكل زوايا ميله عن مستوي الإسقاط P_3, $\alpha + \beta = 90°$ أما زاوية ميله عن المستوي الجانبي $\gamma = 90°$ على الشكل (127) مستو جانبي محدود ABC أما الشكل (128) فيبين مستوياً جنبياً غير محدود حيث يكون أثراه موازيين لخط الأرض، بينما أثره الثالث يميل بزاوية α عن y وزاوية β عن z.



الشكل (128)



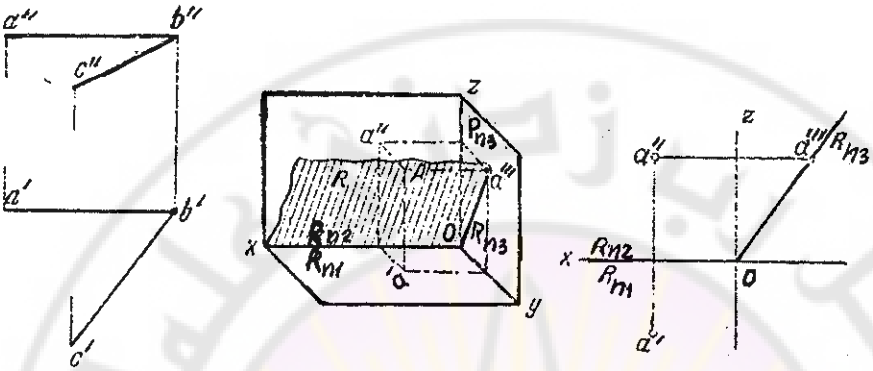
الشكل (127)

الشكل (129) يُظهر مستوياً غير محدود جنبياً ولكنه يمر من خط الأرض حيث ينطبق أثراه الأفقي والجبهي على خط الأرض. بينما خط أثره الجانبي يمر من النقطة 0.

كحالة خاصة من هذا المستوي هو المستوي المنصف للربع الأول والثالث وهو المستوي الذي يمر من خط الأرض ويكون له الميل نفسه عن المستوي الأفقي والجبهي أو أن أثره الجانبي يميل بزاوية 45° عن كل من y , z يمكن القول أيضاً بأن كافة نقاطه تبعد البعد نفسه عن المستويين الأفقي والجبهي.

نلاحظ بأن أفقيات المستوي الجبهي هي مستقيمات جبهية في الوقت نفسه أي أنها موازية لخط الأرض.

نقول إن كل مستو محدود فيه مستقيم واحد مواز لخط الأرض هو مستو جنبي، لماذا؟



الشكل (130) الشكل (129)

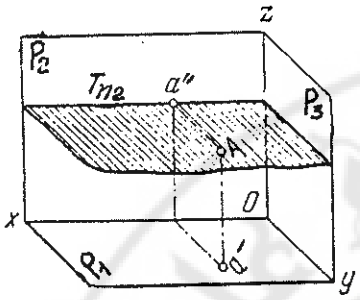
في الشكل (130) في المستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين AB , BC. يكفي أن يكون أحد مستقيماته موازياً لخط الأرض لكي يكون المستوي (AB , BC) مستوياً جنبياً.

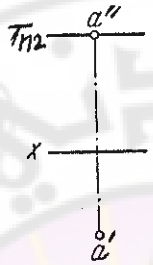
3 ـ 4 ـ 3 : المستوي المعامد لمستويي إسقاط

ونميز منه:

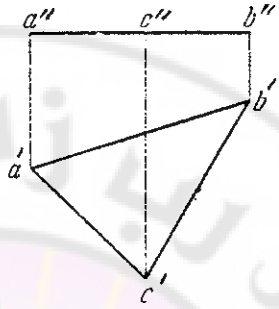
1) المستوي المعامد لمستويي الإسقاط P_1 , P_3 (المستوي الأفقي): وهو المستوي الذي يوازي المستوي الأفقي وهو حالة خاصة من المستوي المصوب حين يشكل زاويو معدومة مع المستوي الأفقي بينما يظهر الكبر الحقيقي لأي شكل فيه على المسقط الأفقي له.

يبين الشكل (131) مستوياً أفقياً محدوداً ويكون abc هو الكبر الحقيقي للمستوي ABC الشكل (132) يدعى مستوياً أفقياً غير محدود P فنقاطه كافة لها الارتفاع عن المستوي P نفسه.



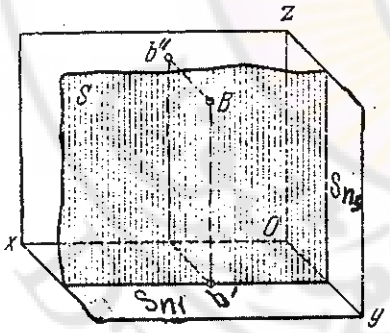


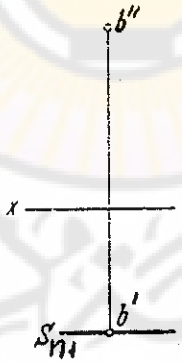
الشكل (132)



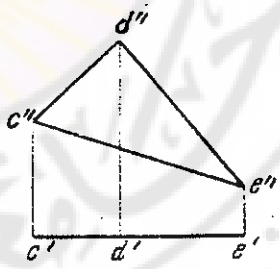
الشكل (131)

2) المستوي المعامد لمستويي الإسقاط P_2 , P_3 (المستوي الجبهي): وهو المستوي الذي يوازي المستوي الجبهي وهو حالة خاصة من المستوي الرأسي حين يشكل زاوية معدومة مع المستوي الجبهي بينما يظهر الكبر الحقيقي لأي شكل فيه على المسقط الجبهي لهذا الشكل.





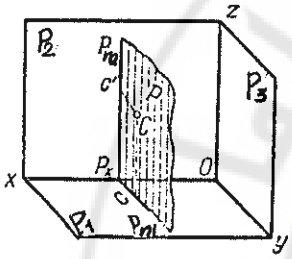
الشكل (134)



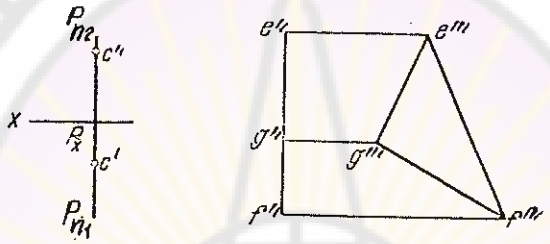
الشكل (133)

يبين الشكل (133) مستوياً جبهياً محدوداً ويكون a'b'c' هو الكبر الحقيقي للمستوي ABC الشكل (134) يدعى مستوياً جبهياً غير محدود S. فنقاطه كافة لها نفس الابتعاد نفسه عن المستوي الجبهي.

3) المستوي المعامد لمستويي الإسقاط P_1 , P_2 (المستوي الجانبي): وهو المستوي الذي يوازي المستوي الجانبي ويشكل زاوية معدومة مع المستوي الجانبي بينما يظهر الكبر الحقيقي لأي شكل فيه على المسقط الجانبي.



الشكل (136)



الشكل (135)

يبين الشكل (135) مستوياً أفقياً محدوداً ويكون a'''b'''c''' هو الكبر الحقيقي للمستوي ABC، الشكل (136) يبين مستوياً جانبياً غير محدود P. فنقاطه كافة لها البعد نفسه عن المستوي P_3.

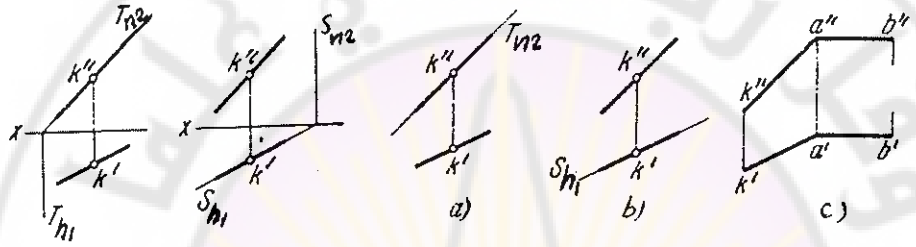
3 ـ 5 : إمرار مستويات إسقاط مساعدة من مستقيم معطى

بالحالة العامة يمكن إمرار عدد لا نهائي من المستويات المارة من مستقيم معطى، سيكون من الضروري لاحقاً إمرار مستويات إسقاط مساعدة (غالباً مستو رأسي، مستو منصوب، مستو أفقي، مستو جبهي) من مستقيم معطى.

يبين الشكل (137) مستقيماً يمر من نقطة وقمنا بإمرار مستوٍ منصوبٍ T أثره الجبهي هو T_{n2} وأثره الأل غير ضروري لأنه بهذه الحالة هو يعامد خط الأرض ويتقاطع مع T_{n2} على خط الأرض. الرسم (a.

كما أننا أمررنا من المستقيم نفسه على الرسم المجاور الرسم (b المستوي (الرأسي) حيث أثره الأفقي ينطبق على المسقط الأفقي للمستقيم كذلك أمررنا على الرسم (c المجاور مستوياً جانبياً.

يبين الشكل (138) أيضاً مستويات T , S مسقطة ومارة أيضاً من المستقيم المعطى للنقطة K.

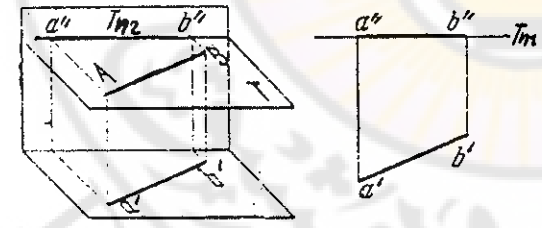


الشكل (137)

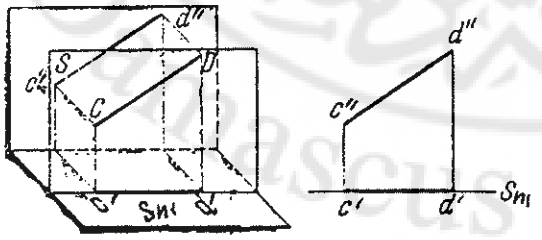
الشكل (138)

بالنتيجة نستطيع أن نمرر مستوياً رأسياً أو منصوباً، من مستقيم كيفي.

كما نستطيع أن نمرر فقط مستوياً أفقياً من مستقيم أفقي، ومستوياً جبهياً ماراً من مستقيم جبهي الشكل (139).



الشكل (139)



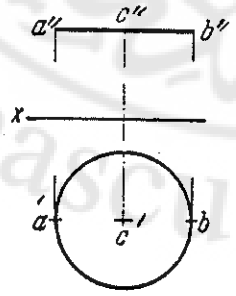
3 ـ 6 : مساقط الأشكال المستوية

الأشكال المستوية (مثلث، مربع، مسدس، دائرة...) هي أشكال مختلفة الأضلاع فمساقطها لها عدد الأضلاع نفسه وبشكل عام تتشوه هذه الأشكال لدى إسقاطها على مستويات الإسقاط غير الموازية لها فمثلاً بالحالة العامة ــ مسقط دائرة على مستوي غير موازٍ لها هو قطع ناقص، فالكبر الحقيقي للأشكال لا يظهر في المساقط العادية.

يجب التنويه إلى أن كل شكل مستو يمكن أن نعده مستوياً محدوداً محمولاً (جزءاً من) مستو ما غير محدود، فالحالة التي يتوضع بها مستوي الشكل ينطبق على ما يقال في المستوي الذي يحمله والعكس أيضاً صحيح. فمثلاً مستو محدود على شكل مثلث يكون منصوباً إذا كان المستوي الذي يحمله منصوباً، أي مسقطه الثاني هو خط مستقيم والعكس إذا كان مستو محدود منصوباً فالمستوي غير المحدود هو منصوب أيضاً. الشي نفسه يقال عن المستوي المحدود الكيفي المتكئ وهو المستوي الذي نرى وجهاً واحداً منه من الجهتين الأمامية والعلوية (على المسقطين) على عكس المستوي المشدود الذي نرى في كل مسقط منه أحد وجهيه.

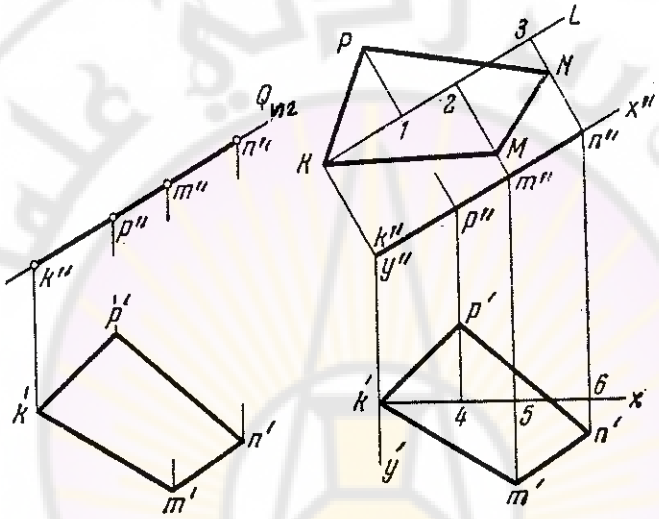
مثال ذلك على الشكل (112) المثلث ABC هو مستو متكئ فجهة القراءة a′b′c′ هي جهة قراءة المسقط a″b″c″ نفسها ويكون المستوي المحدود مشدوداً كما في الشكل (110) حيث نقرأ المسقط a′b′c′ على عكس القراءة للمسقط الجبهي a″b″c″. تأكد من ذلك حسب جهة القراءة على المسقطين.

يُظهر الشكل (140) مسقطي دائرة واقعة في مستو أفقي وبالتالي يظهر كبرها الحقيقي في المسقط الأفقي وشكلها لا يتشوه أما مسقطها الجبهي فيقع على خط الأثر الجبهي لمستويها، الخط a″b″.



الشكل (140)

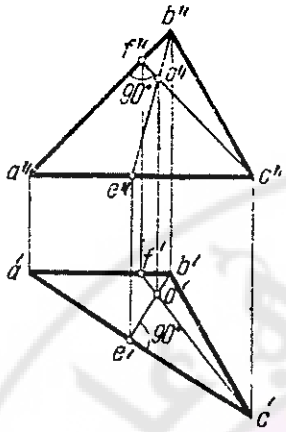
إذا كانت الأشكال المستوية غير واقعة في مستو منصوب (رأسي) يمكن إيجاد كبرها الحقيقي بإسقاطها على مستو جديد يوازيها (يوازي مستويها) فمثلاً في الشكل (141) لدينا المستوي الرباعي KMNP في الشكل السابق يمكن إسقاطه على المستوي الرابع (بأسقاط رؤوسه) لكي نراه بكبره الحقيقي حيث يمثل المسقط الأخير كبره الحقيقي.



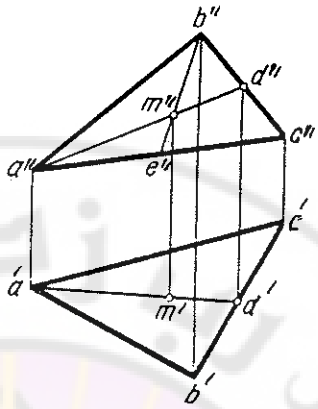
الشكل (141)

يلزمنا عملية تغيير مستوي الإسقاط ـ الإسقاط المساعد على مستو جديد ـــ في حالات كثيرة. عندما يكون حل مسائل معينة غير ممكن على المساقط الأصلية. فمثلاً: بالاعتماد فقط على مسقطي مثلث كيفي لا يمكن إيجاد مسقطي نقطة مركز ثقله بسبب أن تصنيف الزوايا هي خاصة غير إسقاطية إذ لا يعبر منصف زاوية في المساقط عن منصف الزاوية الحقيقي، إذاً يلزمنا لذلك إيجاد الكبر الحقيقي للمثلث أولاً.

أما نقطة تلاقي متوسطات المثلث فيمكن إيجادها مباشرة على المساقط الأصلية له حيث أن تصنيف قطعة مستقيمة هي خاصة إسقاطية. فالنقطة D على الضلع AB هي موقع المتوسط. الشكل (142).



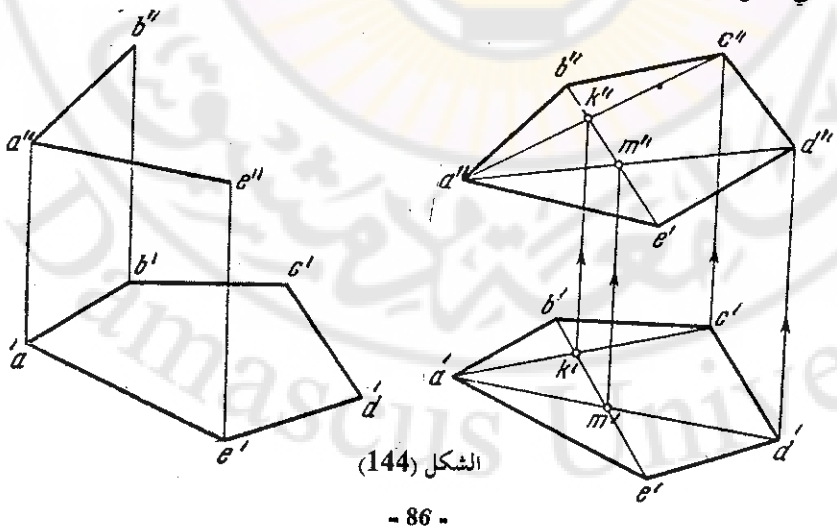
الشكل (143)



الشكل (142)

على الشكل (143) مثلث ABC موجـود في حالـة خاصـة حيـث ضلعـه AC أفقي وضلعه AB جبهي لذلك يمكن إيجاد نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث مباشرة علـى الرسم، يظهر التعامد مع المستقيم الأفقي في المسقط الأفقي ويظهر التعامد مع المستقيم الجبهي في المسقط الجبهي. دون أن يكون هناك ضرورة لإيجاد الشكل الحقيقي له.

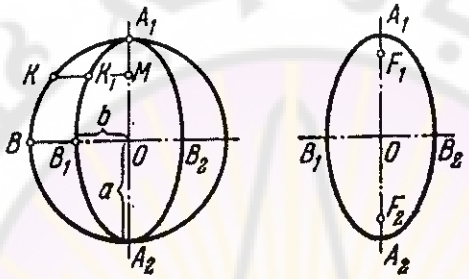
يمكن أن نوجد على الرسم مباشرة مساقط النقاط غير المعلومة وواقعة في مستو فمثلاً من الشكل (144) لدينا الشكل الخماسـي المبين علـى الرسـم، حيـث المسـقط الجبهي لكل من النقطتين C , D غير معلومين. الحل على الرسم المجاور للشكل.



الشكل (144)

يمكن أن ننشئ الضلع BE للمثلث ABE ثم بإنشاء المستقيم a′d′ الذي يقطع BE عندها يمكن إيجاد موقع المسقط d″ الواقع عليه. كذلك نوجد c″ بالطريقة نفسها بمساعدة المسقط c′. حيث يتقاطع AC مع BE في K نوجد k″ ثم نصل a″k″ فنمد المسقط الثاني للمستقيم AC الذي يحمل المسقط c″.

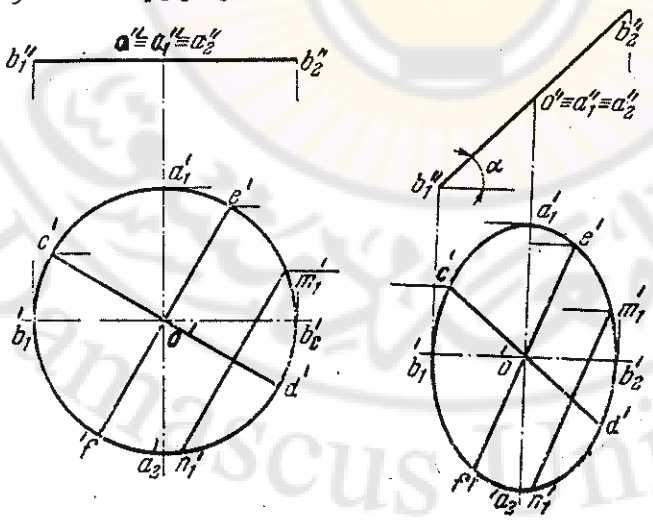
يبين الشكل (145) دائرة محورها A_1A_2 شاقولي. مسقطاها على مستو جبهي على الرسم حيث لا يتم تشويه هذا المحور، بينما المحور الآخر B_1B_2 يصغر في المساقط بنسبة معينة حسب وضع الدائرة بالنسبة للمستوي الجبهي. ولذلك $a > b$.



الشكل (145)

على الشكل (146) نجد أن $b'_1b'_2 = b''_1b''_2 . \cos\alpha$ نسمي القطرين EF , CD على القطع الناقص بالقطرين المترافقين لأنهما في الدائرة الأصلية كانا متعامدين.

إذا وازى وتر في دائرة أحد الأقطار مثلاً MN فهو يوازي هذا القطر في المسقط أيضاً.

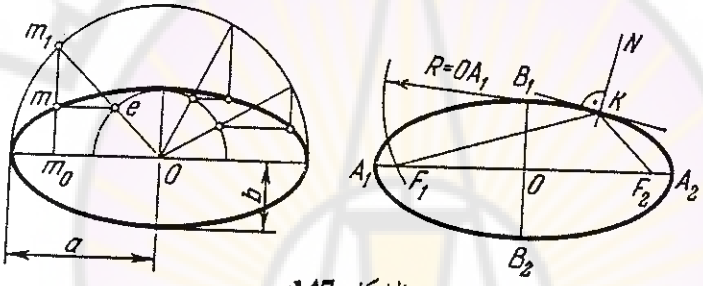


الشكل (146)

يبين الشكل (147) كيفية رسم القطع الناقص بمساعدة الدائرتين الأصلية ذات القطر a الذي يساوي القطر الكبير له، والثانوية ذات القطر الصغير الذي يساوي b القطر الصغير للقطع. ثم نقوم بأخذ Om_1 المستقيم الذي يقطع الدائرة الصغرى في e بعدها نقوم برسم أفقي وشاقولي من النقطتين m_1 و e ليتقاطعان في نقطة m من القطع.

بالفعل لدينا: $m\,m_0 / m_1\,m_0 = O\,e / O\,m1 = b / a$

على الرسم المجاور في الشكل (147) كيفية إيجاد محرق القطع الناقص حيث أقمنا من نقطة لا على التعيين مثل K عموداً على المماس في تلك النقطة وأخذنا قوساً.



الشكل (147)

يبين الشكل (148) كيفية إنشاء قطع ناقص علم منه قطران مترافقان:

لنفرض أن نصف القطرين المترافقين هما ca , cb نقوم:

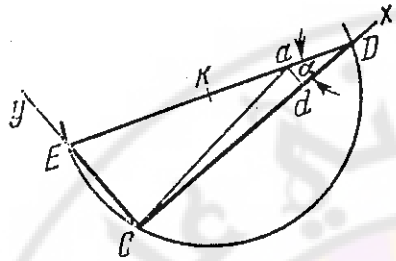
- بتدوير cb بزاوية 90° حتى يأخذ الوضع cb_2.
- نوصل ونرسم الدائرة التي مركزها النقطة k ونصف قطرها هو KD ثم نمدد القطعة ak حتى تقع الدائرة في D , E.
- يكون طول المحور الكبير هو القطعة 12 والمحور الصغير هو cb_2.
- تنتقل هذه الأطوال بحيث يكون:

$$C1 = C2 = aE$$

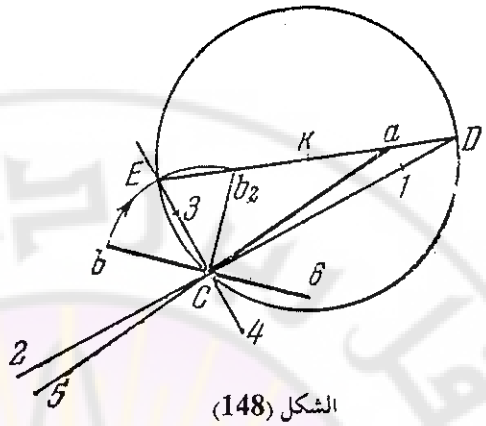
$$C3 = C4 = aD$$

الآن يمكن إتمام رسم القطع الناقص بوساطة النقاط التالية كافة:

(1 , a , 3 , b , 2 , 5 , 4 , 6)



الشكل (149)



الشكل (148)

بالفعل لدينا على الشكل المجاور للشكل (149):

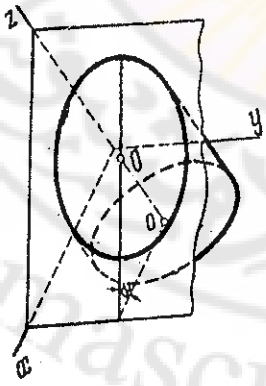
$$X = aE \,.\, \cos\alpha$$

$$Y = aD \,.\, \sin\alpha$$

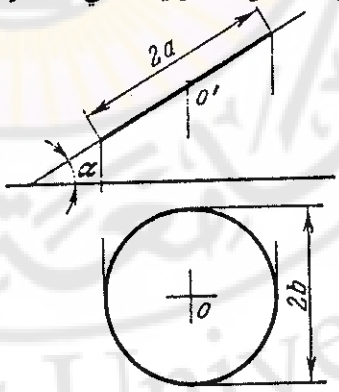
لذلك يكون: $X_a^2 / (aE)^2 + Y_a^2 / (aD)^2 = 1$

وهي معادلة قطع ناقص محوره الكبير هو aE ومحوره الصغير هو aD.

يبين الشكل (150) مسقطي المقطع الحاصل من قطع الأسطوانة بالمستوي المائل بزاوية α عن المستوي الأفقي كما في الشكل (151).



الشكل (151)



الشكل (150)

نلاحظ في الشكل (151) بأن:

الدائرة الناتجة في الأفقي يمكن أن تكون مسقط كل القطوع الناقصة الناتجة عن قطع الأسطوانة بمستويات مائلة بزوايا أخرى مختلفة الميل عن مستوي الإسقاط الأفقي.

نلاحظ أن المحور الصغير لتلك القطوع كافة هو ذات قطر الأسطوانة $b = R = const$ بينما ينقص في كل مرة القطر الكبير للقطع الناقص $a = f(\alpha)$.

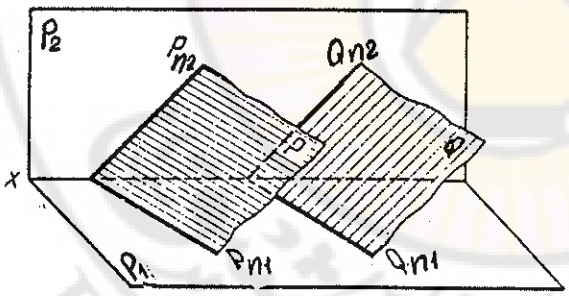
الفصل الرابع

الوضع المشترك لمستويين، لمستقيم ومستو

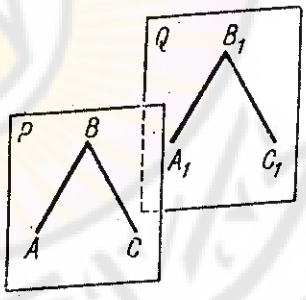
أولاً : الوضع المشترك لمستويين

يمكن لمستويين أن يكونا متوازيين أو متقاطعين فقط حيث (التوازي حال خاصة من التقاطع ـ التقاطع في اللانهاية).

إذا كان المستويان على الشكل الفراغي (153) متوازيين يمكن أن ننشئ مستقيمين متقاطعين في الأول بحيث يكونان موازيين للمستقيمين في الثاني، والعكس أيضاً صحيح، فلكي يكون مستويان متوازيين يجب أن يكون مستقيمان من الأول يوازيان مستقيمين من الثاني على الأقل انظر الشكل (152).



الشكل (153)



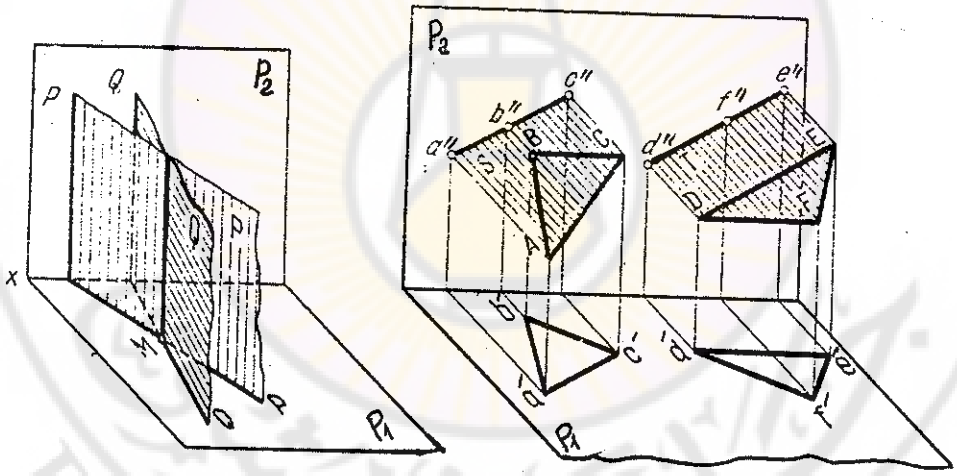
الشكل (152)

ويعد هذا الشرط لازماً وكافياً لتوازي المستويين. وعلى العكس، يكفي أن يثبت أن مستقيمين متقاطعين في مستو معطى ما، لا يمكن لمستقيمين

متقاطعين آخرين موازيين لهما أن يتقاطعا في مستو آخر لكي نثبت أن المستويين غير متوازيين.

الشرط السابق يقودنا إلى القول بأن مستويين أثريهما المتماثلين على مستوي الإسقاط متوازيين هما مستويان متوازيان، يوضح الشكل (153) هذا الشيء حيث $P_{n1} // Q_{n1}$, $P_{n2} // Q_{n2}$ (غير أن هذا غير كاف في المستويات التي توازي خط الأرض).

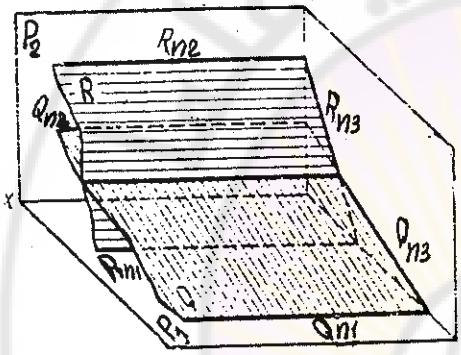
يصح هذا الأمر للمستويات المسقِطه حيث يكفي أن يتوازى أحد الأثرين المتماثلين لمستويين لكي يكونا متوازيين فيما بينهما، يُظهر الشكل (154) المستوي المحدود ABC // DEF وذلك لأن المستويين يمكن أن يحوي كل منهما مستوياً غير محدود منصوباً والأثرين الجبهيين لهذين المستويين منطبقان على المسقطين الجبهيين للمستويين (الخطين a"b"c" , d"f"e").



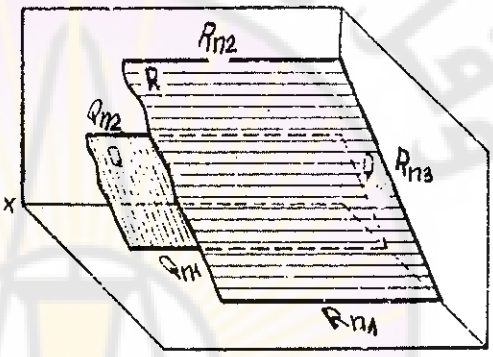
الشكل (155) الشكل (154)

إذا كان زوج من الأثرين لمستويين P , Q متقاطعين الشكل (155) فهذا يعني أن المستويين متقاطعان.

كذلك إذا توازى الأثرين المتماثلين لمستو فالمستويان متوازيان حتماً انظر الشكل (153) حيث P // Q الشكل (156) حيث R // Q. غير أن في المستويين الذين يوازيان خط الأرض. لا يكفي هذا الشرط حيث يوضح الشكل (157) هذه الحالة، في هذه الحالة للتأكد من حالة توازي مستويين موازيين لخط الأرض يجب إثبات أن الأثرين على المسقط الثالث أيضاً متوازيان وإلا فإنهما متقاطعان في فصل مشترك.



الشكل (157)



الشكل (156)

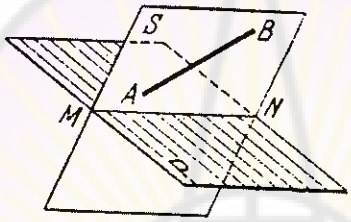
ثانياً : الوضع المشترك لمستو ومستقيم

يمكن أن يكون مستو كيفي ومستقيم كيفي بإحدى الحالات المشتركة التالية:

1. المستقيم يقع في المستوي.
2. المستقيم يوازي المستوي.
3. المستقيم يقطع (يخترق) المستوي.

إذا كان من غير الممكن على الرسم تحديد وضع المستقيم بالنسبة للمستوي فلابد من إجراء عملية إنشائية مساعدة لذلك.

نقوم بعملية ضم المستقيم في مستو ما يحويه (المستوي S)، فالمستوي المساعد هذا إما أن يوازي المستوي P (ما يؤكد أن المستقيم ذاته يوازي المستوي P)، أو أن يتقاطع المستويان في فصل مشترك كما في الشكل (158) فتؤول المسألة إلى تحديد وضع المستقيم المعطى مع الفصل المشترك هذا.



الشكل (158)

نميز إحدى الحالات التالية:

1 ـ الفصل المشترك MN ينطبق على المستقيم المعطى AB في نقطة وبالتالي المستقيم ينتمي للمستوي في تلك النقطة؛

2 ـ الفصل المشترك MN يقطع المستقيم المعطى AB وبالتالي المستقيم يخترق المستوي.

3 ـ الفصل المشترك MN يوازي المستقيم المعطى AB، وبالتالي المستقيم يوازي المستوي.

نلاحظ أن المستوي المساعد المتخذ يجب أن يكون إنشاؤه سهلاً بحيث يصبح حل المسألة أسهل فلذلك يجب أن يؤخذ بحالة خاصة. يؤخذ مستو مسقط فقط (رأسي، منصوب، أفقي، أو جبهي).

ثالثاً : مسائل في المستويات

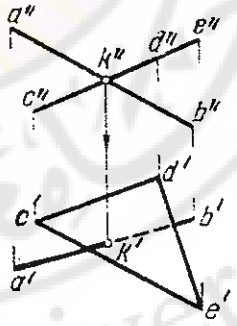
4 - 1 : تقاطع مستقيم مع مستو معامد لواحد أو لاثنين من مستويات الإسقاط

يشكل المستوي المعامد لمستو مع هذا المستوي أثراً على شكل خط مستقيم وتكون مساقط نقاطه كافة على ذلك المستوي واقعة على هذا الأثر.

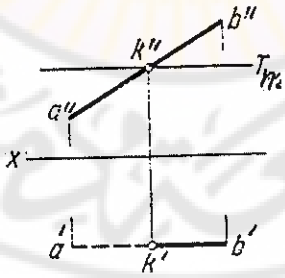
يُظهر الشكل (159) مسقطا مستو محدود C D E والمعامد للمستوي الجبهي حيث يؤول مسقطه الجبهي على خط واحد هو "c"d"e. بما أن المساقط الجبهية لنقاطه كافة تقع على هذا الخط، فالنقطة المشتركة بين هذا المستوي وبين المستقيم AB هي K حيث "k هو مسقطها الجبهي، نستنتج وفقه المسقط الأفقي 'k لأن هذه النقطة تقع على المستقيم AB فتكون النقطة K هي نقطة اختراق المستقيم للمستوي.

يمكن تنقيط المستقيم بالنسبة للمستوي، حيث إن المستوي يحجب فقط المسقط 'k في المسقط الجبهي أما في المساقط الأفقية فالمستوي يحجب الجزء من المستقيم الواقع على يمين المسقط 'k والسبب هو أننا لو نظرنا من الأعلى عند 'd لوجدنا أن 'd أقرب من أي نقطة من نقاط المستقيم في ذلك المجال، والعكس يكون في المجال الثاني.

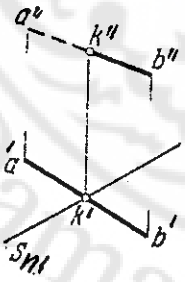
في الشكل (160) المستقيم يقطع المستوي الأفقي T في النقطة K منه والجزء غير المرئي من المستقيم هو الجزء الواقع على يسار النقطة هذه.



الشكل (159)



الشكل (160)



الشكل (161)

الشكل (161) يبين نقطة اختراق المستقيم AB للمستوي الرأسي S حيث S هو أثره الأفقي، لنبين بشكل أكثر تفصيلاً كيف يمكن إيجاد الأجزاء المرئية من الاجزاء غير المرئية في المستقيمات والمستويات بالنسبة لبعضها بعضاً.

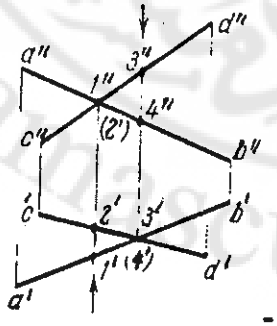
نصطلح أولاً بأن المستويات هي مستويات كتيمة لا تسمح برؤية الأشكال التي خلفها ونفترض أننا ننظر دوماً من الأمام ومن الأعلى أيضاً. وبالتالي نقوم بتنقيط الأشكال بالنسبة لبعضها وفق قواعد التنقيط التالية:

1 ـ الأجزاء المشتركة في الشكلين هي مرئية حتماً. (نقطة اختراق مستقيم لمستو، الفصل المشترك لمستويين)؛

2 ـ إذا تقاطع مستقيمان متخالفان تقاطعً ظاهرياً (المستقيماAB , CE على الرسم (159)) فإن أحدهما غير مرئي والآخر مرئي حتماً في تلك النقطة. كذلك بالنسبة للمستويات فلكل مستويين متقاطعين جهة (بالنسبة للفصل المشترك بينهما) مرئية وجهة غير مرئية حتماً؛

3 ـ الحدود الظاهرية للمستقيمين أو للمستويين المتقاطعين مرئية حتماً.

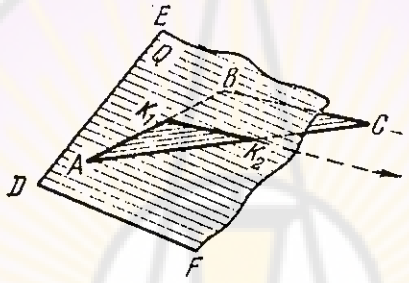
لنرى تطبيق ذلك على المستقيمين المتخالفين على الشكل (162): إن كان "1 هو المسقط الجبهي لنقطة '1 واقعة على المستقيم AB فإن "2 المنطبقة على "1 هي المسقط الجبهي لنقطة أخرى '2 واقعة على المستقيم CD. إذا نظرنا من الأمام (من الأسفل على الرسم) فإن النقطة '1 هي أقرب من '2 وبالتالي المستقيم AB سيحجب المستقيم CD عند تلك النقطة فقط. كذلك فإن النقطتين 4 , 3 تقعان على المستقيمين AB , CD على الترتيب، فإن نظرنا من الأعلى سنجد أن "3 أقرب من "4 بالنسبة للناظر (من الأعلى في الرسم). وبالتالي يكون المستقيم CD هو الذي سيحجب النقطة (4) من المستقيم AB. سنرى كيف سيطبق ذلك على تنقيط مستويين متقاطعين لاحقاً.



الشكل (162)

4 - 2 : تقاطع مستويين

يتقاطع مستويان وفق مستقيم هو الفصل المشترك بينهما انظر الشكل الفراغي (163) المستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين Q (DE , DF) ومستوي المثلث المحدود ABC يتقاطعان عند الفصل المشترك $K_1 K_2$. النقطتان K_1 , K_2 تقعان على AB , AC على الترتيب فهما تمثلان نقطتي اختراق المستقيمين AB , AC للمستوي Q (كذلك إذا مددنا BC سيقطع المستوي Q في نقطة ستقع على امتداد الفصل المشترك $K_1 K_2$ حتماً). إذن الفصل المشترك لمستويين هو الخط الواصل بين نقطتي اختراق أي مستقيمين مختارين بين المستوي الأول مع المستوي الثاني.



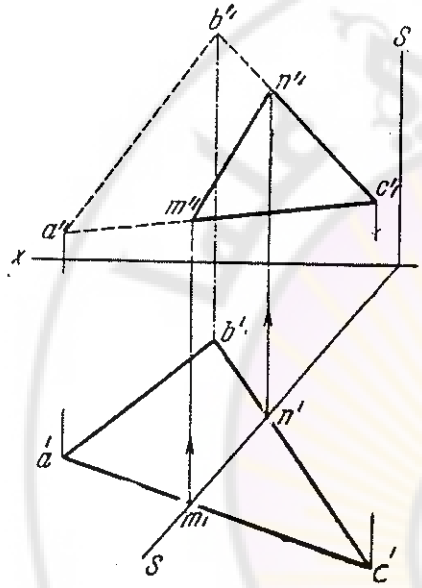
الشكل (163)

لذلك بغية إيجاد نقطتين مشتركتين من المستوي نختار مستقيماً من أحد المستويين ونوجد نقطة تقاطعه مع المستوي الآخر. ثم نأخذ مستقيماً آخراً واقعاً في أي من المستويين ونوجد نقطة اختراقه للمستوي الثاني فنكون قد حصلنا على نقطتين نصل بينهما نحصل على الفصل المشترك للمستويين.

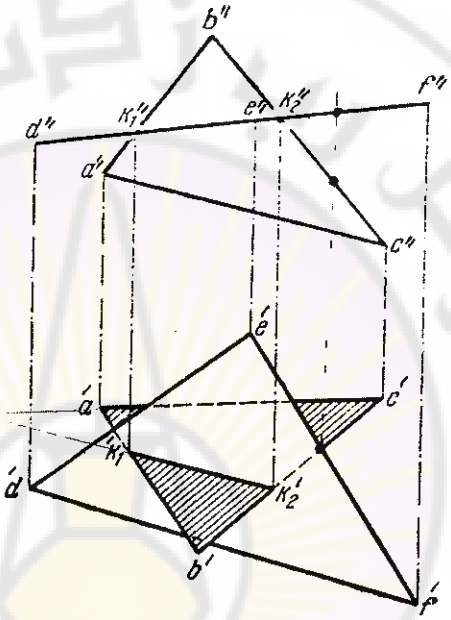
أما كيف يمكن إيجاد نقطة اختراق مستقيم لمستو بالحالة العامة، فهذا أسهل إذا كان المستوي عمودياً على أحد مستويي الإسقاط أو على كليهما معاً (إذا كان رأسياً أو منصوباً، أفقياً أو جبهياً)، رأينا ذلك سابقاً في الأشكال (161 - 159).

يبين الشكلان (164) و (165) أيضاً هذه الحالة، ولكن لدينا على الشكل (164) الآن مستويين متقاطعين أحدهما منصوب هو المستوي DEF فالمساقط الجبهية لنقاطه كافة ستقع على الخط d''e''f' وبالتالي تظهر نقاط اختراق المستقيمين AB , BC

مباشرة على هذا الخط، إيجاد المسقطين الأفقيين لهاتين النقطتين يتم عن طريق خط الوصل المار من المسقطين الجبهيين لهما. نقوم بعد ذلك بالوصل بين المسقطين المتماثلين للنقطتين K_1 , K_2 للحصول على مسقطي الفصل المشترك بين المستويين ثم نبدأ بتنقيط المستويين بالنسبة لبعضهما بعضاً وفق قواعد التنقيط.



الشكل (165)



الشكل (164)

نجد أولاً أن الفصل المشترك هو مرئي حتماً لأنه واقع في كلا المستويين. المستقيمان EF , BC متخالفان ولكن المستقيم EF هو أقرب إلى الناظر من المستقيم BC (إذا نظرنا من الأعلى) وبالتالي فمسقطه الأفقي مرئي، بينما المسقط b′c′ غير مرئي في الجهة اليمنى من نقطة التقاطع k'_2 الآن النقطة C تقع على BC فهي غير مرئية حتماً حتى ولو افترض أنها واقعة على المستقيم AC وبالتالي المسقط c′ للنقطة C هو غير مرئي على يمين نقطة التقاطع (التي هي الآن على امتداد a′e′ وذلك يبقى سائداً حتى التلاقي مع ممدد الفصل المشترك وبالتالي المسقط a′ للنقطة A غير مرئي

أيضاً على المسقط حتى نقطة التقاطع k'_1 بعد ذلك يغير المسقط حالتـه فيصبـح مرئيـاً حتى b' الواقعة أيضاً على $b'c'$ فالجزء $b'k'_1$ هو مرئي أيضاً.

أخيراً كل ما كان غير مرئي وفي الوقت نفسه هو محيط ظاهري يجب أن يكون مرئياً، هناك جزء من الضلع $d'f'$ غير مرئي بسـبب وقوعـه تحـت المسـتقيمين المرئيـين المارين من الرأس B وبالتالي نحصل على التنقيط المبين على الشكل (164).

الشكل (165) يبـين حالـة تقـاطع المسـتويين أحدهمـا محـدود (المثلـث ABC) والثاني هو مستو رأسي S.

نقطتا التقاطع تظهران على المسقط الأفقي m' , n' وبالتالي الفصل المشترك هـو القطعة MN، نلاحـظ أنـه إذا تظرنـا مـن الأسـفل فـالرأس C أقـرب مـن المسـتوي S فالمسقط الجبهي لهذه النقطـة c'' مرئـي في المسـتوي الجبهـي، بينمـا يحجـب المسـتوي المسقطين a'' , b'' وبالتالي يكون التنقيط كما هو مبين على الشكل (165).

على الشكل (166) مستويان الأول معـين بالمسـتقيمين المتقـاطعين AB , BC والثاني معين بالمستقيمين المتوازيين DE , FG والمطلوب إيجاد الفصل المشترك بينهما.

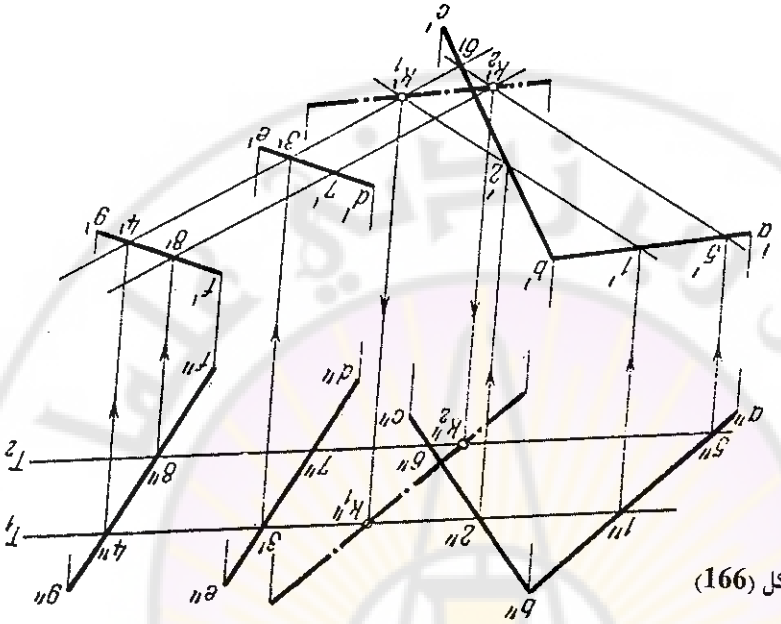
بأخذ مستو مساعد منصوب مثل T_1 يمكن إيجاد الفصل المشترك بـين المسـتوي المساعد والمستوي الأول وهو الفصل 2 1 كذلك نوجد الفصل المشترك بين المسـتوي المساعد T_1 والمستوي الثاني وهو الفصل 4 3 يتقاطع هذان الفصـلان في نقطـة مثـل K'_1، حيث أوجدنا مسقطها الأفقي أولاً ثم استنتجنا مسقطها الجبهي، وتكون هي النقطـة المشتركة الأولى بين المستويين المعطيين أي أنها إحدى نقاط الفصل المشترك بينهما.

بأخذ مستو مساعد جديد مثل $T_2 // T_1$، هنـا (حيـث يمكـن أخـذ مسـتويات مساعدة أخرى ـ أفقي أو جبهي أو رأسـي)، يمكـن إيجـاد الفصلـين اللذيـن يصنعهمـا المستوي المساعد الثاني مـع كـل مـن المسـتويين الأول والثـاني وبالتـالي نوجـد نقطـة تقاطعهما ولتكن K'_2 وهي نقطة ثانية من الفصل المشترك للمستويين المفروضين.

أخيراً نقوم بالوصل بين هاتين النقطتين ليمثل الفصل المشترك بين المسـتويين في المسقطين.

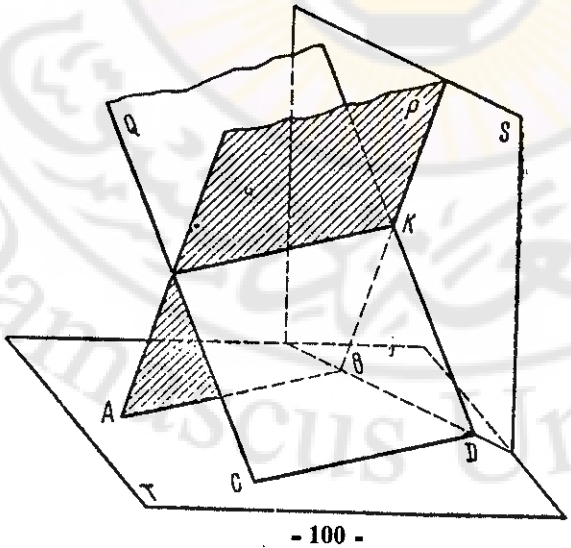
نفيد بأن المستويات المساعدة يجـب أن تكـون سـهلة الإنشـاء بحيـث يمكـن أن تظهر نقاط اختراق المستقيمات لها مباشرة على الرسـم كـأن نـأخذ تلـك المسـتويات

(أفقية، جبهية، رأسية، منصوبة) نسمي هذه المستويات المستويات المسقِطة كما رأينا سابقاً.



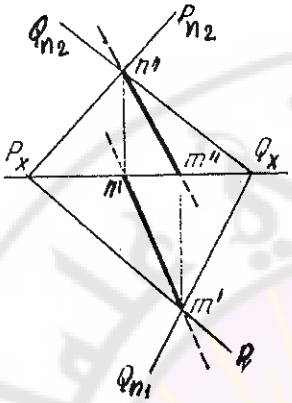
الشكل (166)

يظهر الشكل الفراغي (167) مستويين متقاطعين حيث يتقاطع أثريهما الجبهيين في نقطة بينما الأثران الأفقيان هما متوازيان (يتقاطعان في اللانهاية) فالفصل المشترك بينهما هو مستقيم يمر من K ويوازي الأثرين الأفقيين.



الشكل (167)

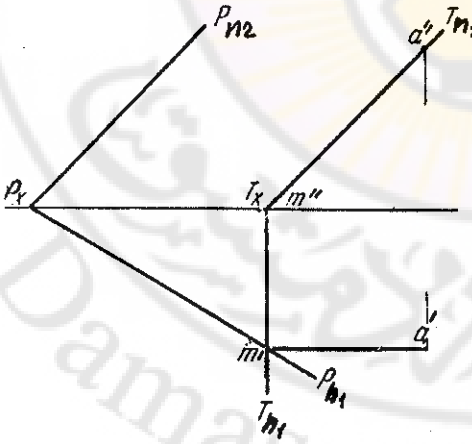
يبين الشكل (168) مستويين Q , P معينين بأثريهما حيث يتقاطع الأثران المتماثلان في النقطتين N , M فالخط الواصل بين المسقطين المتماثلين لهاتين النقطتين يمثل مسقط الفصل المشترك بينهما.



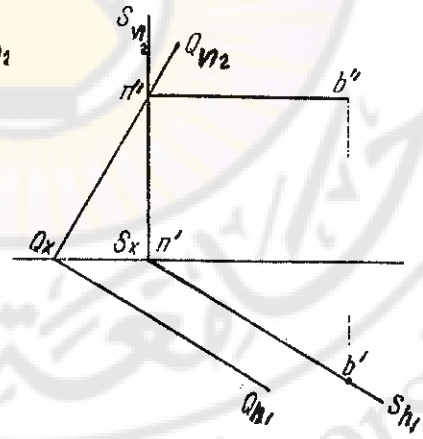
الشكل (168)

ويبين الشكل (169) مستويين متقاطعين S , Q أحدهما رأسي S، فصلهما المشترك هو الأفقي BN بسبب أن الأثرين الأفقيين للمستويين متوازيان (كلٍ منهما أفقي) فالفصل المشترك يوازيهما.

في الشكل (170) الفصل المشترك بين مستويين أحدهما منصوب هو المستوي T، فالفصل المشترك بينهما هو جبهي.

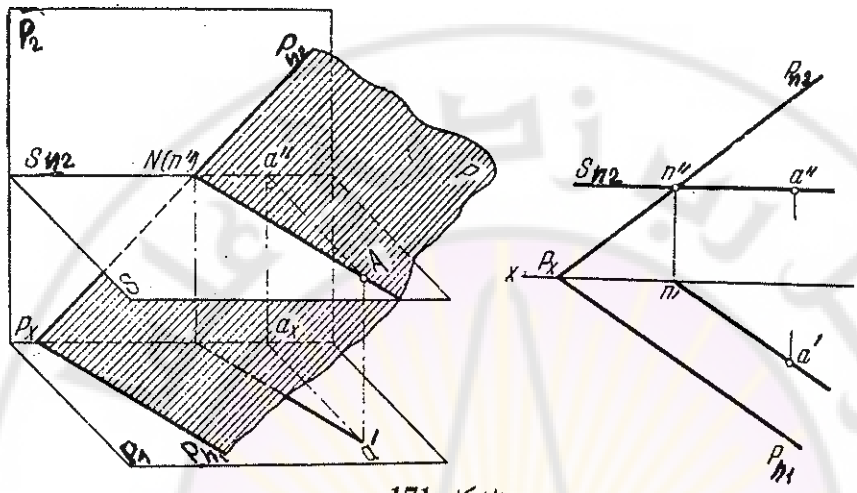


الشكل (170)



الشكل (169)

يبين الشكل (171) الشكل الفراغي والرسم على المساقط لمستويين كيفي P وأفقي S والفصل المشترك بينهما هو المستقيم NA وهو مستقيم أفقي.



الشكل (171)

4 ـ 3 : الطريقة العامة لإيجاد نقطة اختراق مستقيم لمستو

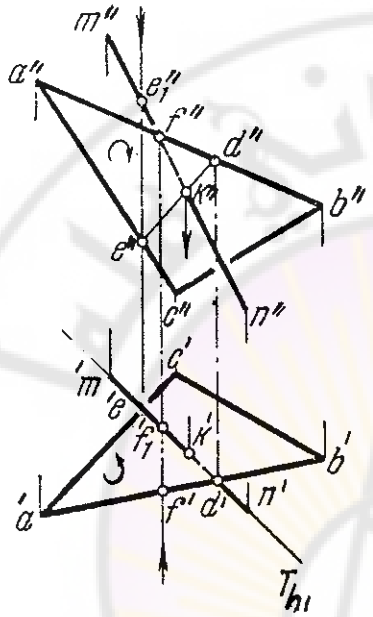
في الحالات السابقة عندما كان المستوي بحالة خاصة (بالتحديد أحد مسقطيه عبارة عن خط) كان يمكن إيجاد نقطة اختراق مستقيم كيفي له بسهولة غير أن هذا لا يمكن عندما يكون المستوي كيفي لذلك نلجأ إلى الطريقة العامة لإيجاد نقطة اختراق مستقيم كيفي لمستو كيفي، تبين هذه الطريقة في الشكل الفراغي السابق (158) وعلى المساقط في الشكل (172).

لنفرض أنه طلب إيجاد نقطة اختراق المستقيم المار من F للمستوي الكيفي المعين بالمستقيمين المتقاطعين AB , CD:

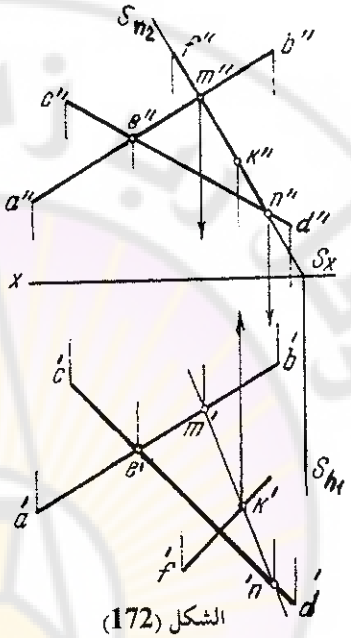
1 ـ نمرر عبر المستقيم المعطى المار من K المستوي المساعد المسقِط المساعد S (نحرص أن يكون المستوي المساعد رأسياً، منصوباً، أفقياً، أو جبهياً).

2 ـ نوجد الفصل المشترك بين المستوي المعطى والمستوي المساعد S وليكن MN على الرسم؛

3 ـ نوجد تقاطع المستقيم المعطى والفصل المشترك هـذا فتكـون نقطـة اخـتراق المستقيم للمستوي هـي هـذه النقطـة ولتكـن النقطـة ذات المسـقط k وبالتـالي تكـون K (K′ , k″) هي نقطة الاختراق المطلوبة.



الشكل (173)



الشكل (172)

مثال آخر على إيجاد نقطة اختراق مستقيم لمستو مبين على الشكل (173). حيث أوجدنا نقطة اختراق المستقيم MN للمستوي المحدود ABC أمررنا من هذا المستقيم مستوياً رأسياً مساعداً T وأوجدنا الفصل المشترك بين المستوي المساعد ومستوي المثلث، فكان الفصل المشترك بينهما هو DE يتقاطع هذا الفصل المشترك مع المستقيم المعطى MN في النقطة K فتكون هي نقطة الاختراق المطلوبة.

نقوم الآن بتحديد الأجزاء المرئية وغير المرئية من المستقيم القاطع على الشكل نفسه. نقوم بمد خط وصل مار من نقطة التغطية " f الواقعة على المسقط الجبهي للمستقيم AB نرى بأن المسقط الأول ′f الواقع على ′a′b هو الأقرب من المسقط الأول ′f1 الواقع على المسقط الأول ′m′n للمستقيم MN بالنسبة للناظر من الأمام

(من الأسفل على الرسم) فيكون المسقط الجبهي للمستقيم AB هو المرئي بجوار تلك النقطة أي على يسار مسقط نقطة الاختراق "k، أما على يمين هذا المسقط فالمستقيم يغير حالته (إلى مرئي) حتماً.

نقوم الآن بتنقيط المسقط الأفقي للمستقيم القاطع وذلك بمساعدة مسقط النقطة E وهي 'e نقطة تغطية للنقطتين (E الواقعة على AC ومسقطها الجبهي e''_1 واقعة على MN والثانية واقعة على الضلع AC وذات المسقط الجبهي "e) نلاحظ أن e''_1 أقرب إلى الناظر من الأعلى من "e وبالتالي يغطي المستقيم MN الضلع AC في المستوي الأفقي للإسقاط أو يكون المسقط الأفقي للمستقيم MN وهو 'm'n مرئياً بجوار تلك النقطة ويبقى مرئياً حتى نقطة التقاطع 'k حيث يغير حالته بعدها ويصبح غير مرئي حتماً.

من المعروف أن الجزء من المستقيم الواقع خارج الحدود الظاهرية للمستوي هو مرئي حتماً.

سنحاول فيما يلي التأكد من صحة تنقيط هذا المستقيم:

نلاحظ بأن المستوي ABC هو مستو مشدود أي أن اتجاه الدوران لدى قراءة المثلث في المسقط الأفقي 'a'b'c يعاكس اتجاه الدوران لدى القراءة في المسقط الجبهي "a"b"c ولذلك نرى أحد وجهي المثلث على المسقط الأفقي بينما على المسقط الجبهي سنرى الوجه المقابل له (على خلاف ذلك، في المستوي المتكئ نرى ذات الوجه في المسقطين).

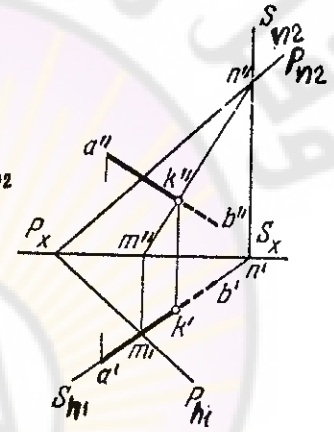
إذاً في الشكل (173) نرى النقطة في المسقطين الأفقي والجبهي من وجهين مختلفين للمستوي المشدود ABC وبالتالي يكون تنقيط المسيتقيم القاطع لهذا المستوي متعاكساً أي أن ما هو مرئي في المسقط الأفقي هو غير مرئي في المسقط الجبهي والعكس أيضاً صحيح. وهذا بالفعل ما نراه على الرسم.

نستطيع أن نستنتج القاعدة التالية: يكون تنقيط المستقيم القاطع لمستو متماثل في المسقطين إذا كان المستوي متكئاً، ويكون تنقيط المستقيم متعاكساً في المسقطين إذا كان المستوي مشدوداً.

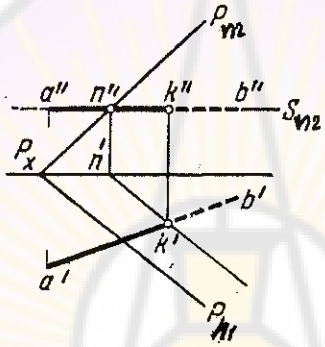
يبين الشكل (174) كيفية إيجاد نقطة اختراق المستقيم AB للمستوي غير المحدود P. تم الحل بوساطة المستوي المساعد الرأسي S الحاوي للمستقيم AB.

في الشكل (175) أوجدنا نقطة اختراق مستقيم أفقي لمستو كيفي، بوساطة المستوي المساعد الأفقي الحاوي لمستقيم.

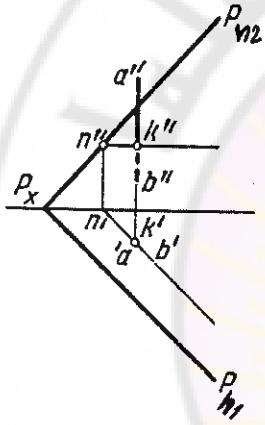
كذلك أوجدنا نقطة اختراق المستقيم الرأسي للمستوي الكيفي ـ بمساعدة مستقيم أفقي مار من المسقط الأفقي للمستقيم (الذي هو نقطة بهذه الحالة). حيث استنتجنا المسقط الجبهي لنقطة التقاطع K وهو "k.



الشكل (174)



الشكل (175)



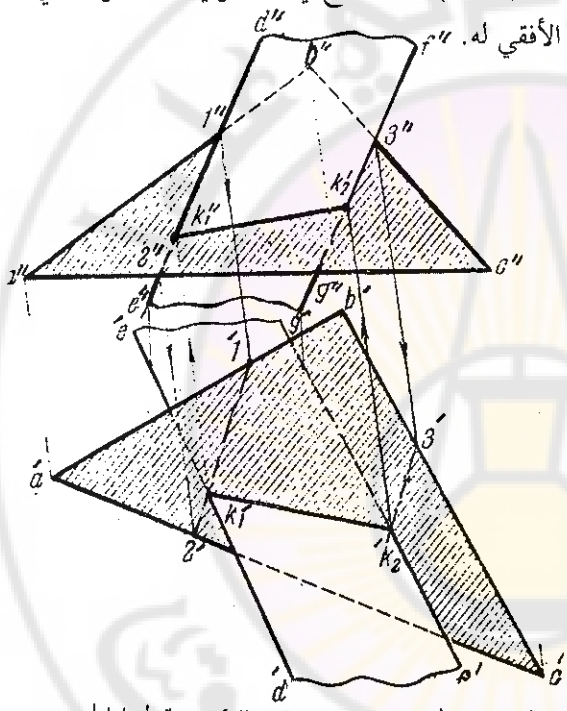
الشكل (176)

4 ـ 4 : إيجاد الفصل المشترك لمستويين بطريقة مستقيمات التغطية

تقتضي الطريقة العامة لإيجاد نقطة اختراق مستقيم لمستو بإمرار مستوٍ مساعد من المستقيم المعطى بحيث يكون مستوي مسقط مما يعطي إمكانية إيجاد الفصل المشترك بين المستوي المعطى والمستوي المساعد المختار T بسهولة، على الشكل (173) نلاحظ بأن مسقطي الفصل المشترك الحاصل ED هو عبارة عن مستقيم، أحد مسقطيه هو مسقط المستقيم "e"d نفسه، (المسقط "m"n)، على الشكل (173).

نسمي المسقط الأفقي للمستقيم MN وهو (m′n′) مستقيم تغطية لمستقيمين الأول هو المستقيم MN مسقطه الجبهي m″n″ والثاني هو (e″d″ , e′d′) ED بمسقطيه.

نستفيد من هذه النتيجة في إيجاد المسقط الأول للمستقيم ED على الشكل (177) حيث نفترض أن d″f″ هو مسقط مستقيم تغطية لمستقيمين. الأول ED مسقطه e′d′ نفسه والثاني هو (1″2″ , 1′2′) 2 1 يقع في المستوي ABC وبالتالي تكون K هي نقطة التقاء المسقط الأفقي له.



الشكل (177)

النقطة K'_1 هي نقطة التقاطع بين المستقيمين نوجد k''_1 مسقطها الجبهي بسهولة وتكون k'_1 نقطة اختراق المستقيم ED للمستوي ABC وهي تمثل إحدى نقاط الفصل المشترك بين المستوي الأول (المثلث) والمستوي الثاني المعين بالمستقيمين المتقاطعين (ED , GE).

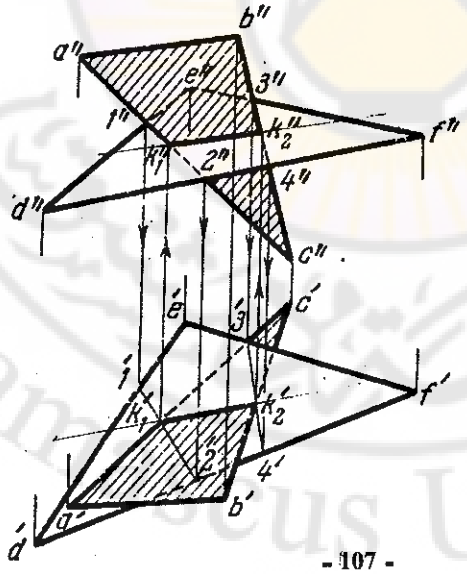
نلاحظ بأنه نحصل على النتيجة نفسها لو افترضنا أن هناك مستوياً منصوباً T يحوي CD والثاني نطبق على c″d″ ونتابع الحل تماماً (كما على الشكل (173)) ولحصلنا على النقطة K_1 نفسها.

نسمي الطريقة التي طبقناها على الشكل (171) لإيجاد النقطة K طريقة مستقيمات التغطية. الطريقة نفسها نستخدمها لاستنتاج نقطة اختراق المستقيم FG للمستوي ABC وهي النقطة K_2 ويكون الفصل المشترك بينها K_2 , K_1 هو الفصل المشترك بين المستويين المعطيين. على الرسم قمنا بإنشاء مستقيم K_2 3 والموازي للمستقيم 2 1 على المسقط الأفقي وذلك بسبب كون 1 2 , K_2 3 مستقيمين متوازيين يقعان في المستوي ABC نفسه واستنتجنا k''_2 بسهولة.

نتابع تنقيط المسقطين ونطبق قواعد التنقيط المعروفة ونحصل على الرسم كما على الشكل (177). أما على الشكل (178) فقد قمنا بإيجاد الفصل المشترك بين المستويين المحدودين DEF , ABC بطريقة مستقيمات التغطية. حيث "2 "1 هو مسقط تغطية لمستقيمين الأول هو 2 1 واقع في المستوي DEF والثاني هو AC الواقع في ABC وأوجدنا نقطة اختراق المستقيم AC للمستوي DEF وهي النقطة K_1.

بالطريقة نفسها أوجدنا K_2 وقمنا بتنقيط المستويين بالنسبة لبعضهما بعضاً.

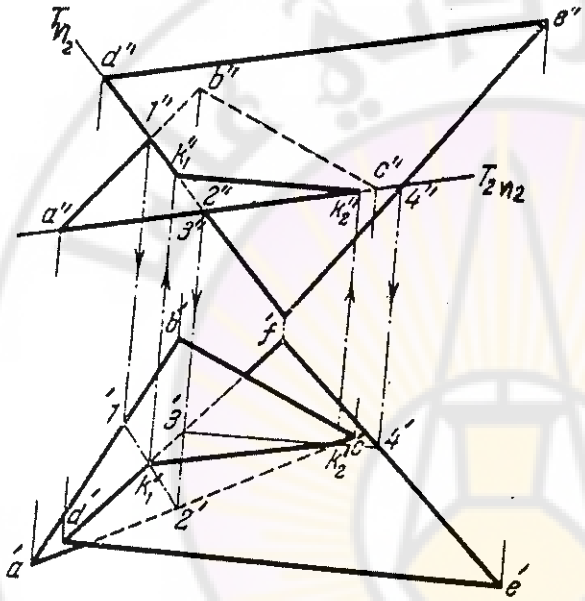
نلاحظ أن المستوي DEF هو مستو محدود ومتكئ وبالتالي فتنقيط المستوي القاطع له ABC متماثل، أي أن الجهة التي فيها النقطة C من المثلث (على الطرف اليميني بالنسبة للفصل المشترك) غير مرئية في المسقطين والعكس بالعكس، والمحيط الظاهري هو مرئي في الشكلين ولهذا السبب النقطة C ذاتها مرئية ولكنها في الأصل كانت غير مرئية.



الشكل (178)

كذلك نلاحظ أن مستوي المثلث ABC هو مستو مشدود، وبالتالي فتنقيط المستوي القاطع له DEF متعاكس. يعني هذا أن الجهة السفلى (جهة الضلع DF) منه (بالنسبة للفصل المشترك) هي مرئية في المسقط الجبهي بينما هي غير مرئية في المسقط الأفقي. وفي كل الحالات الفصل المشترك والمحيط الظاهري لكلا المستويين مرئيان دوماً.

على الشكل (179) مثال آخر على تقاطع مستويين محدودين كل منها على شكل مثلث.



الشكل (179)

أوجدنا أولاً K_1 نقطة اختراق المستقيم DF للمستوي ABC (بوساطة المستوي المساعد المنصوب T) وكذلك قمنا بإيجاد K_2 نقطة اختراق المستقيم AC للمستوي DEF (بوساطة المستوي المساعد المنصوب T) فحصلنا على الفصل المشترك K_1 K_2 ثم أجرينا التنقيط وفق قواعد التنقيط المعروفة.

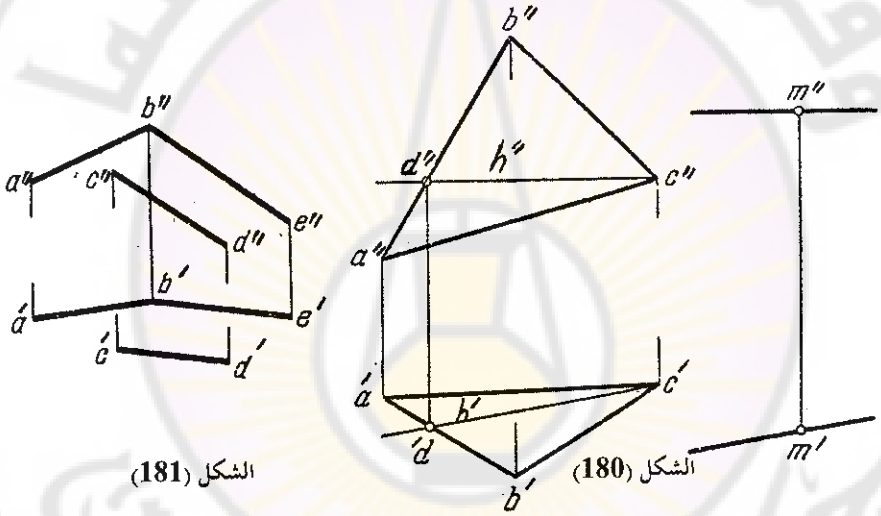
بغية الوضوح أكثر يمكن تهشير الاجزاء المرئية من أحد المستويين فقط.

4 ـ 5 : إنشاء مستقيم ومستو متوازيين بما بينهما

يتوازى مستقيم ومستو إذا ابتعدت نقطة اختراق المستقيم للمستوي إلى اللانهاية بكلمة أخرى تعذر إيجاد نقطة اختراقه للمستوي كذلك يكفي لكي يكون

مستقيم موازياً لمستوي أن يوازي هذا المستقيم مستقيماً واقعاً في ذلك المستوي. من نقطة من الفراغ يمكن إنشاء عدد غير محدود من المستقيمات الموازية لمستو معلوم (كلها ستقع في مستو يمر من النقطة ومواز لذلك المستوي).

لنفرض أنه أعطي مستو ABC والمطلوب إنشاء من نقطة معطية M مستقيماً موازياً لهذا المستوي بحيث يكون أيضاً يوازي المستوي الأفقي للإسقاط. انظر الشكل (180). واضح أن المستقيم المطلوب سيكون أفقياً، ويجب أن يوازي أفقيات المستوي المعطى. لهذا قمنا بإيجاد منحى المستقيمات الأفقية في المستوي المعطى، CD هو أحد أفقياته. ونمد المستقيم المار منه الموازي له فيكون المستقيم الأخير هو المطلوب.



الشكل (181)

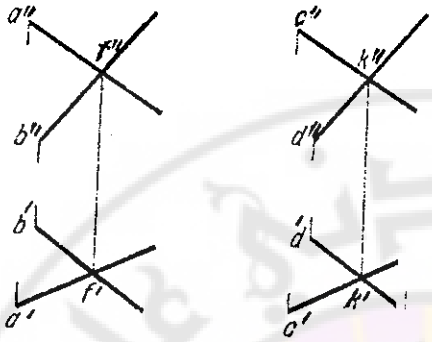
الشكل (180)

كما يمكن أن يطلب إيجاد مستو مار من مستقيم معطى AB يوازي مستقيماً معطياً CD. على الشكل (181) قمنا بإنشاء المستوي الموازي فيه مستقيماً هو المستقيم BE (المار من B) ومواز للمستقيم CD فيكون المستوي المطلوب هو المستوي (AB , BE).

4 ـ 6 : إنشاء مستويين متوازيين

لنفرض أنه أعطي مستو معين بمستقيمين متقاطعين (AF , FB) والمطلوب إيجاد مستوٍ موازٍ لهما ومار بالنقطة المعطاة K (k'k") في الشكل (182) نقوم بإنشاء

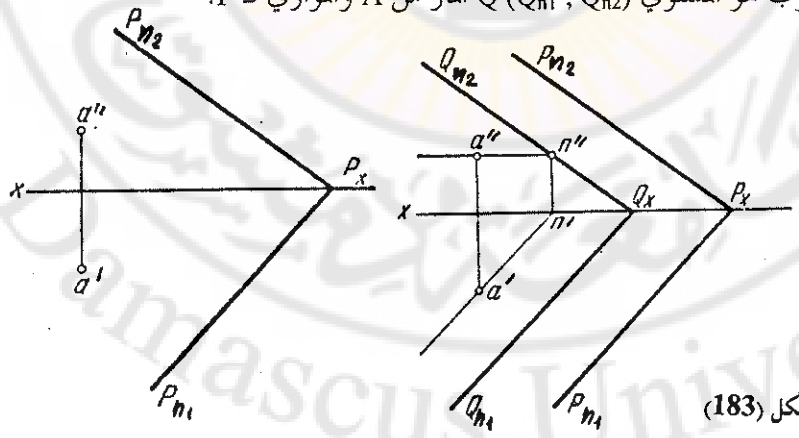
مستقيمين يمران من النقطة K وموازيين للمستقيمين المعطيين فيكون المستوي (CK , DK) هو المستوي المطلوب.



الشكل (182)

فيما لو أعطي المستوي المعين بأثريه P على الشكل (183) وطلب إمرار مستو من النقطة A بحيث يكون موازياً للمستوي P نعرف أن أفقيات (وكذلك جبهيات) المستويين المتوازيين هي مستقيمات متوازية وبالتالي نقوم بإنشاء مستقيمٍ مارٍ من النقطة ومواز لأفقيات المستوي المعطى.

لكي يقع المستقيم في المستوي لابد أن آثاره تقع على آثار ذلك المستوي. نقوم بإيجاد أثر المستقيم الأفقي (النقطة N هي الأثر الجبهي له الأثر الأفقي في اللانهاية) سيمر الأثر الثاني للمستوي المطلوب من المسقط "n، الآن من "n نرسم موازياً للأثر الجبهي P فيكون هو الأثر الجبهي للمستوي المطلوب Q ومن نقطة تقاطع هذا الأثر مع خط الأرض ننشئ الأثر الأول (الموازي للأثر الأول للمستوي P) المستوي المطلوب هو المستوي Q (Q_{n1} , Q_{n2}) المار من A والموازي لـ P.

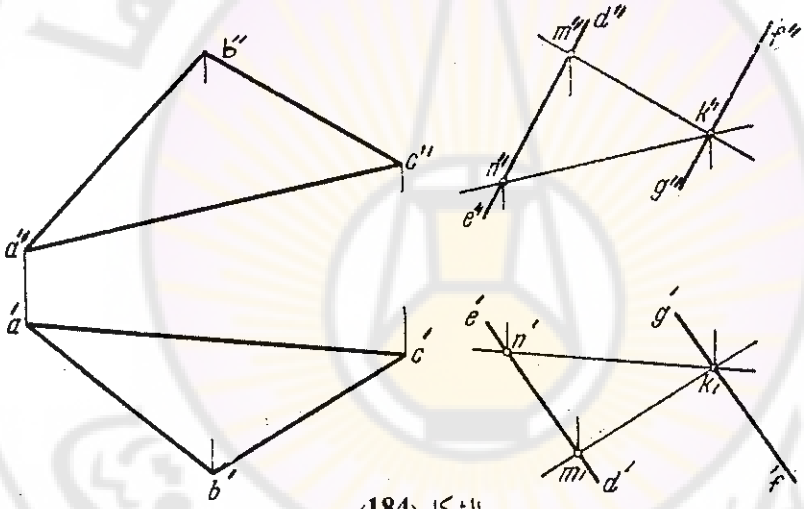


الشكل (183)

على الشكل (184) مستو معطى هو المستوي المحدود (على شكل مثلث) ABC ومستو آخر معين بالمستقيمين المتوازيين (DE , FG) يطلب التأكد من توازي أو عدم توازي هذين المستويين.

واضح أنه إذا قدرنا أن نوجد مستقيمين من المستوي الثاني موازيين لمستقيمين من المستوي الأول فالمستويان هما متوازيان.

الحل على الرسم حيث NK // AC , MK // BC (هنا نفرض أن أحد المسقطين مواز للمسقط المماثل للمستقيمين المشتركين) ونستنتج المسقط الآخر فإذا كان موازياً للمسقط الآخر للمستقيم في المثلث يكون إيجاد مستقيم في هذا المستوي مواز لضلع المثلث ممكناً وإلا فلا.



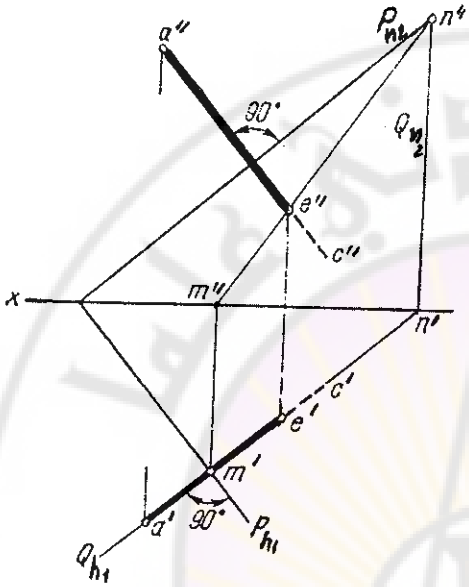
الشكل (184)

4 - 7 : إنشاء مستقيم ومستو متعامدين فيما بينهما

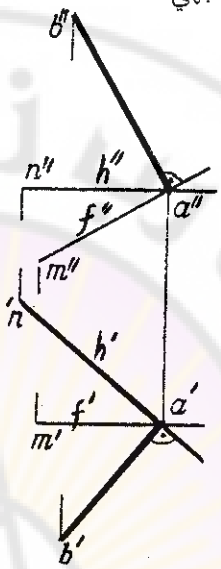
لكي يكون مستقيم عمودياً على مستو يجب أن يكون عمودياً على مستقيمين متقاطعين فيه.

فمثلاً على المستوي في الشكل (185) المستقيم المار من B يعامد المستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين المشكلين لمستو واحد هو المستوي (NA , MA).

نلاحظ بأن التعامد قد ظهر في المساقط بسبب كون المستقيم NA أفقياً (ظهر التعامد معه في المسقط الأفقي) وكذلك ظهر التعامد مع المستقيم الجبهي MA في المسقط الجبهي له.



الشكل (186)



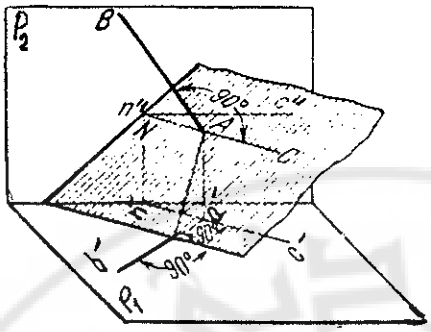
الشكل (185)

في الشكل (186) مستو P معين بأثريه فالمستقيم المار من A يعامده للسبب نفسه فالأثران هما مستقيمان واقعان في المستوي أحدهما أفقي أما الثاني فهو جبهي كما نعلم.

على الشكل أيضاً أوجدنا موقع هذا العمود على المستوي (النقطة E)، بوساطة المستوي المساعد الرأسي Q المار من المستقيم AC. الطول الحقيقي للقطعة ستمثل بعد النقطة A عن المستوي P.

هذا الشيء نراه أيضاً في الشكل الفراغي (187).

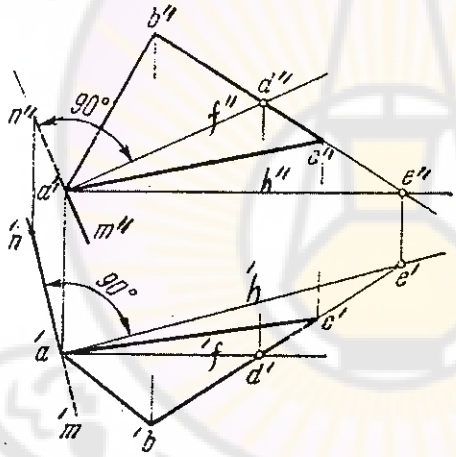
حالة خاصة تظهر في حالة كون المستوي موازياً لخط الأرض فالمستقيم العامودي عليه يجب أن يعامد خطي أثريه أي يعامد خط الأرض أيضاً، غير أن ذلك لا يكفي لإثبات التعامد، حيث يجب أن يَظهر التعامد على المسقط الثالث أيضاً بين المستقيم والأثر الجانبي. حاول تمثيل هذه الحالة.



الشكل (187)

على الشكل (188) قمنا بإيجاد الاتجاه المعامد لمستوي المثلث الذي أعطي بمسقطين.

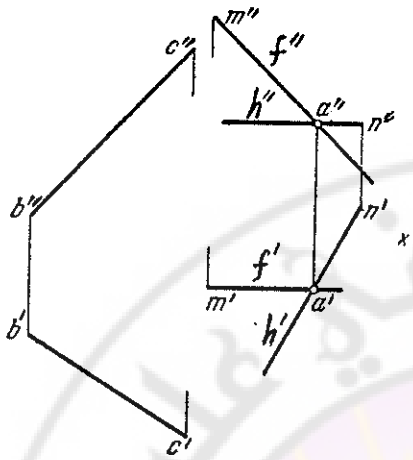
حيث قمنا باختيار المستقيمين أحدهما أفقي وآخر جبهي في هذا المثلث وأنشأنا المنحنى المعامد. كل مستقيم يوازي المنحى MN هو معامد للمستوي.



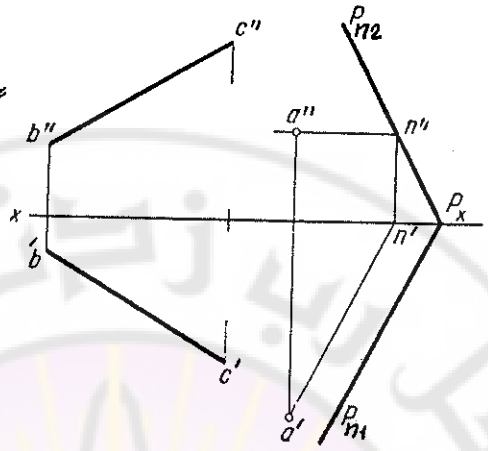
الشكل (188)

نلاحظ بأن المثلث ABC هو مستو مشدود ـ تم تنقيط مسقطي المستقيم بالنسبة لمستو غير محدود ويحمل هذا المثلث.

الحالة المقابلة لإنشاء مستو يعامد مستقيماً معطياً. حيث تم إيجاد مستو معين بأثريه معامد للمستقيم BC ومار من النقطة A على الشكل (189) أما على الشكل (190) فتم إنشاء مستو معين بمستقيمين متقاطعين في النقطة A (أحدهما أفقي والأخر جبهي) والمستوي المشكل منهما معامد للمستقيم المعطى BC.



الشكل (190)



الشكل (189)

يبين الشكل (191) كيفية إيجاد عامود AK مقام من نقطة ما مثل A على مستقيم معطى BC حيث قمنا بـ:

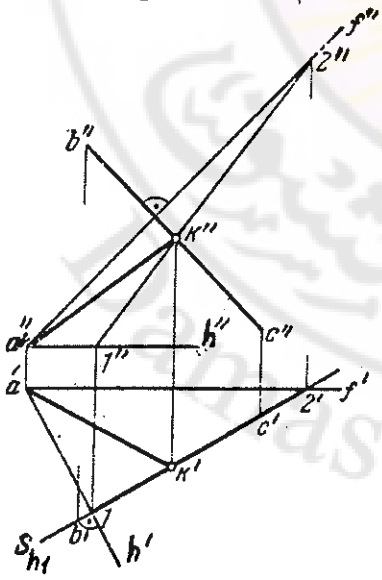
1 ـ إمرار من النقطة A مستو معامد للمستقيم BC؛

2 ـ إيجاد نقطة تقاطع المستقيم المعطى مع المستوي ولتكن النقطة K؛

3 ـ ننشئ المستقيم BK فيكون هو المستقيم المطلوب.

BK يقع في مستو يعامد المستقيم ويستند على المستقيم المعطى. نستنتج أن كل مستقيم في هذا المستوي يعامد المستقيم المعطى. لماذا؟

حاول إنشاء رسم فراغي يمثل خطوات الحل.



الشكل (191)

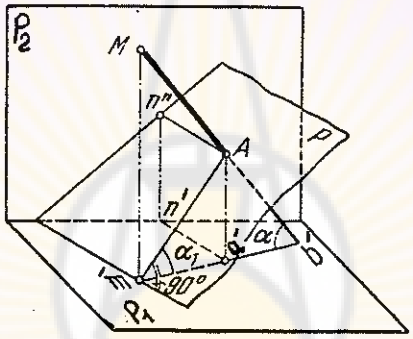
على الشكل (192) حل آخر لهذه المسألة حيث استطعنا الوصول إلى الحل بإستخدام إسقاط مساعد على مستو مواز للمستقيم.

إن زاوية ميل المستقيم المعامد لمستو وزاوية ميل المستوي نفسه عن مستو ما هما زاويتان متممتان.

بالفعل فإن $\alpha+\alpha_1=90$ في الشكل (192) كذلك يمكن استنتاج أن $\beta+\beta_1=90$ حيث:

α , β زاويتا ميل المستوي عن المستوي الأفقي والجبهي؛

α_1 , β_1 زاويتا ميل المستقيم المعامد للمستوي عن المستوي الأفقي والجبهي على الترتيب.



الشكل (192)

سنستفيد من هذه الحالة الخاصة لاحقاً، بالتحديد عند إيجاد قيمة الزاوية الكائنة بين مستقيم ما ومستو كيفي.

4 - 8 : إنشاء مستو معامد لمستو معطى

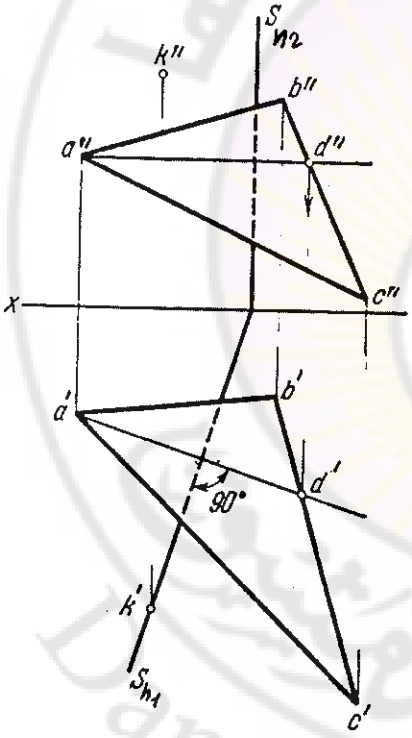
يكفي أن يحوي مستو ما مستقيماً واحداً معامداً لمستو معطى لكي يكون المستوي هذا معامداً للمستوي المعطى فللمسألة عدد لا نهائي من الحلول.

يمكن إنشاء مستو مار من مستقيم معطى ويكون في الوقت نفسه متعامداً مع مستو معطى. كما يمكن أن ننشئ مستوياً بحيث يكون معامداً لمستقيمٍ واقعٍ في المستوي المعطى.

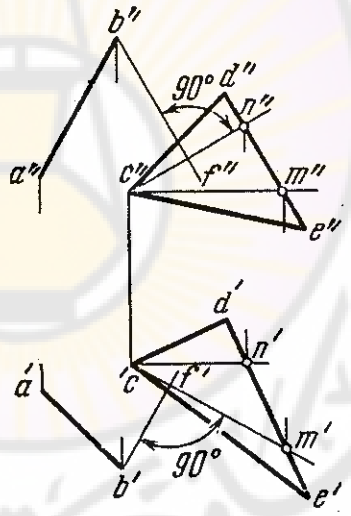
في الحالتين سيكون المستقيم المنشأ معامداً للمستوي المعطى.

على الشكل (193) أنشأنا مستوياً ماراً من مستقيم معطى AB ومعامداً لمستو معطى هو المستوي CDE.

يكفي إنشاء مستقيم مثل BF يقطع المستقيم المعطى ويكون معامداً للمستوي (يعامد أحد جبهياته في المسقط الجبهي ويعامد أحد أفقياته في المسقط الأفقي). فللمسألة أيضاً عدد لا نهائي من الحلول.



الشكل (194)

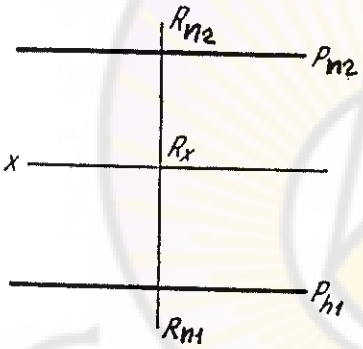


الشكل (193)

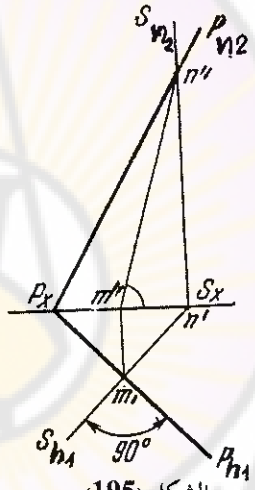
الشيء ذاته قمنا به في الشكل (194) حيث أنشأنا المستوي S معيناً بأثريه ومعامداً لمستقيم واحد AD واقع في المثلث المعطى ABC كما أننا أمررناه من نقطة معطاة K أيضاً. نعم كل المستويات الموازية للمستوي S تعامد المبستو ABC أيضاً.

على الشكل (195) أنشأنا مستوياً معيناً بأثريه S معامداً للمستوي المعطى P. ففي المستوي P أثره الأفقي هو مستقيم أفقي ويعامد المستوي S وهذا يكفي لتعامد المستويين.

على الشكل (196) المستوي الجانبي R يعامد المستوي P الموازي لخط الأرض أيضاً للسبب نفسه نذكر بأن أفقيات وجبهيات المستوي P الموازي لخط الأرض هي مستقيمات موازية لخط الأرض، كل هذه المستقيمات ستعامد المستوي R.



الشكل (196)



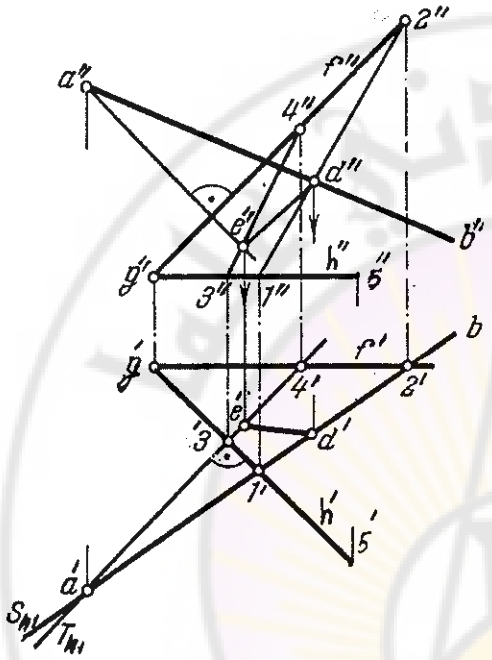
الشكل (195)

4 ـ 9 : إيجاد مسقطي الزاوية الكائنة بين مستقيم ومستو وبين مستويين

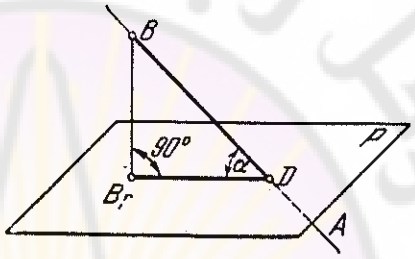
4 ـ 9 ـ 1 : الزاوية بين مستقيم ومستو

الزاوية بين مستقيم ومستو بالتعريف هي الزاوية الكائنة بين المستقيم نفسه ومسقطه على المستوي انظر الشكل الفراغي (197) حيث: α هي الزاوية بين المستقيم AB والمستوي P.

على الرسم في الشكل (198) قمنا بإيجاد نقطة اختراق المستقيم للمستوي المعطى للمستقيمين المتقاطعين P (g 5 , g 2) وهي النقطة D (d′ , d″).



الشكل (198)

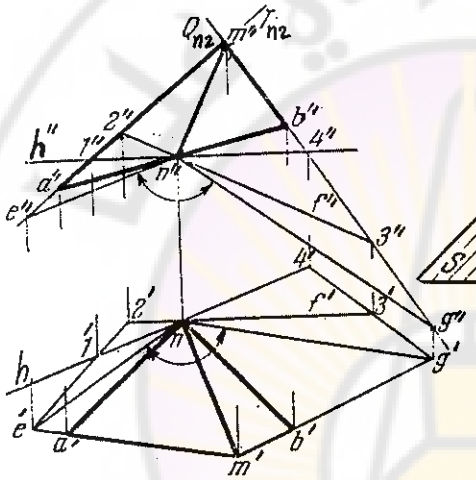


الشكل (197)

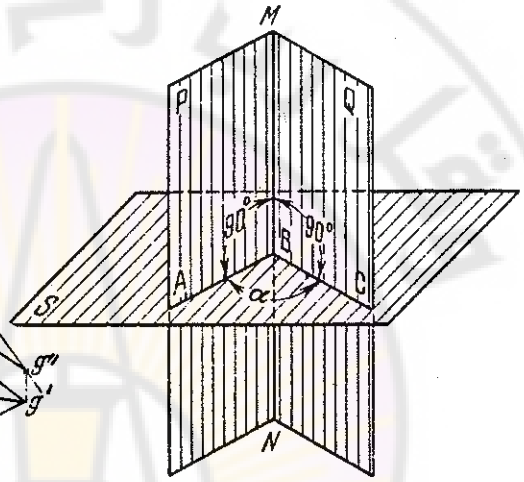
- أنزلنا من النقطة A عموداً على المستوي P وأوجدنا نقطة اختراقه E للمستوي P.
- وصلنا بين المساقط المتماثلة للنقطتين D , E فمسقطا الزاوية الكائنة بين المستقيم والمستوي هي الزاوية a″d″e″ في الجبهي والزاوية a′d′e′ في الأفقي.

4 - 9 - 2 : الزاوية بين مستويين

يمكن معرفة الزاوية بين مستويين معطيين P ; Q عن طريق إيجاد الفصل المشترك لكل منهما مع مستو مساعد S. ثم نوجد الزاوية الكائنة بين هذين الفصلين المشتركين BC و AB على الشكل (199) الزاوية الثنائية الكائنة بين المستويين. قمنا بهذا الشيء في الرسم على المساقط أيضاً انظر الشكل (200).



الشكل (200)



الشكل (199)

تعد هذه الطريقة معقدة بعض الشيء.

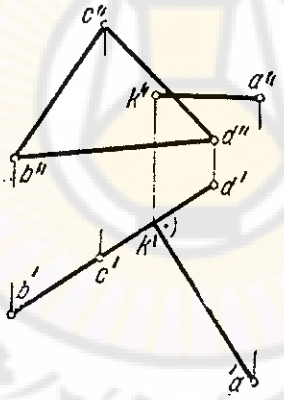
يمكننا إيجاد قياس الزاوية الثنائية بين مستويين بطريقة أسهل. تتلخص هذه الطريقة بأن الزاوية الثنائية بين مستويين هي الزاوية المكملة للزاوية بين المستقيمين المعامدين للمستويين المعطيين، عندها ستؤول المسألة إلى إيجاد الزاوية الكائنة بين مستقيمين. سيكون إيجاد مسقطي وقياس الزاوية بين مستقيمين أسهل بكثير.

الفصل الخامس

الطرائق الخاصة في الهندسة الوصفية

تعد طرائق إنشاء وحل المسائل في الهندسة الوصفية دون إجراء تعديل على الأشكال الهندسية أو على مساقطها، تعد طرائق اعمة لإنشاء وحل المسائل. أما عندما نقوم بتغيير موضع الأشكال أو مساقطها فتعد طرائق خاصة في الحل.

نلاحظ من الشكل (201) أن المستوي المعطى ABC يقع في حالة خاصة بالنسبة لمستويات الإسقاط، فهو هنا يعامد المستوي الافقي للإسقاط. نلاحظ أننا نستطيع مباشرةً على الرسم إنزال عمود على المستوي حيث يظهر التعامد مع المستوي مباشرةً على المسقط الأفقي للمستوي.



الشكل (201)

من شأن الطرائق الخاصة في الهندسة الوصفية أن تُرجع الشكل الكيفي المعطى إلى حالة خاصة ما، يتم فيها الاستفادة من خواص التوضع الخاص الجديد للمستقيم والمستوي بالنسبة لمستويات الإسقاط.

الطرائق الخاصة في حل مسائل الهندسة الوصفية:

1 ـ طريقة تغيير مستو (تحويل مستو)، (إسقاط مساعد)؛

2 ـ طريقة الدوران حول محور عمودي على مستوي إسقاط (التدوير)؛

3 ـ طريقة الدوران حول محور مواز لمستوي إسقاط (التطبيق).

سنحاول في الفقرات التالية إعطاء شرح كافٍ لتلك العمليات وإعطاء الأمثلة الوافية عليها.

أولاً : طريقة تغيير مستويات الإسقاط

وبهذه الطريقة نقوم بإسقاط الأشكال المعطاة على مستوي إسقاط مساعد جديد، يتم اختياره بشكل يبدو الشكل المعطى بحالة خاصة. واضح أن الأشكال تبقى ثابتة بينما نقوم بعملية إسقاطها على مستو جديد. لكي يتم الحصول على جملة جديدة للإسقاط لابد من أن يكون المستوي الجديد المختار معامداً لأحد مستويات الإسقاط الأصليين ليشكل معه جملة مستويين متعامدين للإسقاط.

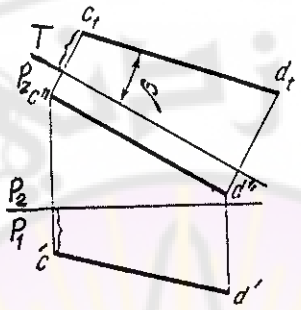
إذا كانت عملية الإسقاط الجديدة تفي بالغرض فيجب إسقاط الشكل بحالته الجديدة على مستو إسقاط آخر وإسقاطه في الجملة الثانية.

مثال ذلك هو إسقاط على مستو مساعد مواز لمستقيم كيفي، فمسقط هذا المستقيم على المستوي الجديد ندعوه بالإسقاط المساعد، نلاحظ أننا في هذه الحالة أمام مسقطي مستقيم في جملة إسقاط جديدة، والمستقيم قد اصبح وموازياً للمستوي الجديد، يمكن بعد ذلك إجراء إسقاط جديد على مستو يعامده ويؤول مسقطه الآخر إلى نقطة يمكن الاستفادة من هذا المسقط بغية إجراء إنشاء مطلوب.

مثال محلول على الشكل (202)؛ يعطى مسقطا المستقيم CD والمطلوب عمل إسقاط جديد لهذا المستقيم على المستوي T الذي أعطي فصله المشترك مع المستوي الجبهي للإسقاط.

قمنا بإسقاط نقطتين من المستقيم المعطى (وفق قواعد الإسقاط على مستو جديد)، لدى الوصل بين المساقط المتماثلة للمستقيم على المستوي الجديد نكون قد حصلنا على المسقط الجديد للمستقيم CD. على المسقط الجديد للمستوي سيظهر

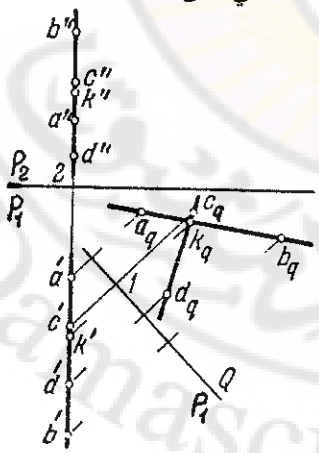
الطول الحقيقي للمستقيم وكذلك زاوية ميله عن المستوي الجبهي مباشرةً على الرسم، والسبب في ذلك أن المستقيم أصبح أفقياً في الجملة الجديدة P_2 , T هذا لم يكن ممكناً في الجملة الأصلية P_2 , P_1.



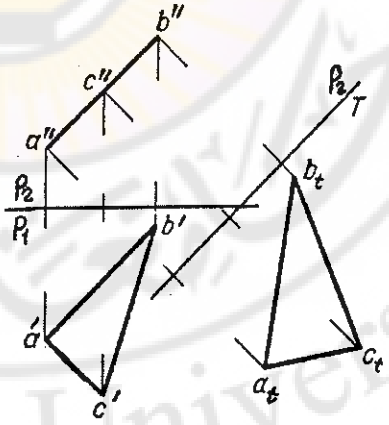
الشكل (202)

نلاحظ في هذه المسألة أنه قد تم تغيير المستوي الأفقي للإسقاط أما المستوي الجبهي فبقي مكانه والمساقط الجبهية c'' , d'' بقيت ثابتة.

المسألة السابقة نفسها تم حلها من أجل مستو منصوب هو مستوي المثلث ABC الشكل (203). تم تغيير المستوي الأفقي للإسقاط على مستو جديد، المستوي في الجملة الجديدة P_2 , T أصبح أفقياً ويظهر كبره الحقيقي على المسقط الأخير.



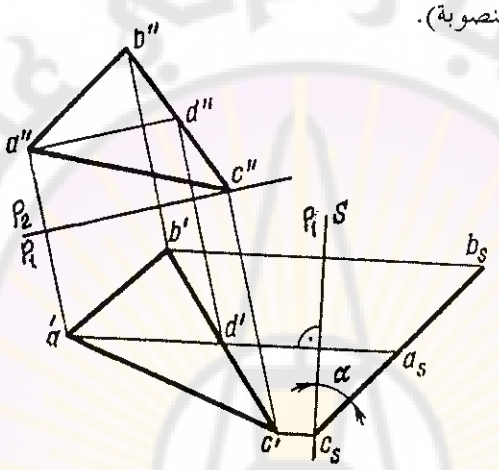
الشكل (204)



الشكل (203)

في الشكل (204) تم إسقاط المستقيم الجانبي AB على المستوي الجديد Q، كما تم تحويل المستقيم CD أيضاً على المستوي الجديد، نقطة تلاقي المستقيمين أصبحت الآن واضحة على المسقط الجديد.

على الشكل (205) عملنا مسقطاً مساعداً للمثلث ABC على المستوي الذي تم اختياره معامداً لأحد أفقيات مستوي المثلث، (نعرف أن افقيات المستوي المنصوب هي مستقيمات منصوبة).

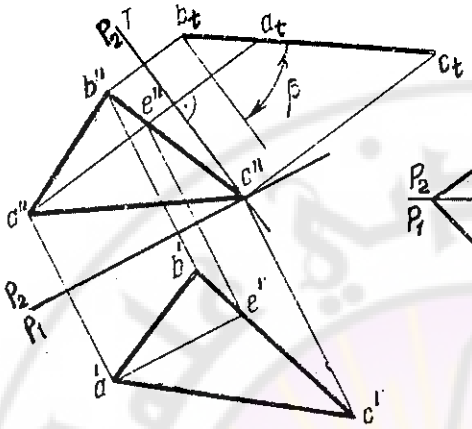


الشكل (205)

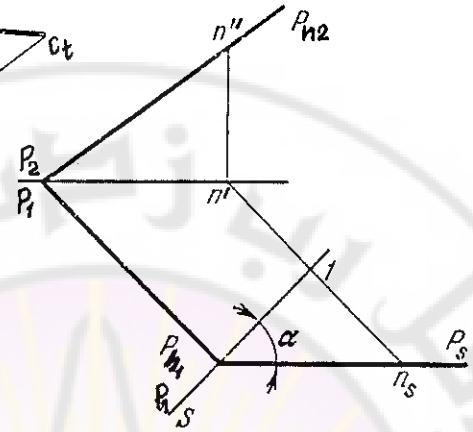
وبالتالي يؤول المسقط الأخير للمستقيم إلى نقطة a ومسقط المستوي على شكل خط مستقيم c b. المستوي ABC اصبح منصوباً أيضاً، المساقط الأخيرة لنقاطه كافة ستقع على مسقطه الأخير.

في الشكل (206) تم إسقاط الأثر الجبهي للمستوي P على المستوي الجديد S. لكي يصبح المستوي منصوباً، اخترنا المستوي الجديد بشكل يكون عمودياً على الأثر الأفقي للمستوي P_{n1} (الأثر الأفقي للمستوي هو أحد أفقياته).

يبين الشكل (207) عملية تغيير المستوي الأفقي من أجل مستوي المثلث ABC، وذلك على مستو جديد يعامده (خط الأرض الجديد يعامد أحد جبهيات المثلث)، في الجملة الأخيرة P_2 , T نحن أمام المستوي الرأسي ABC.

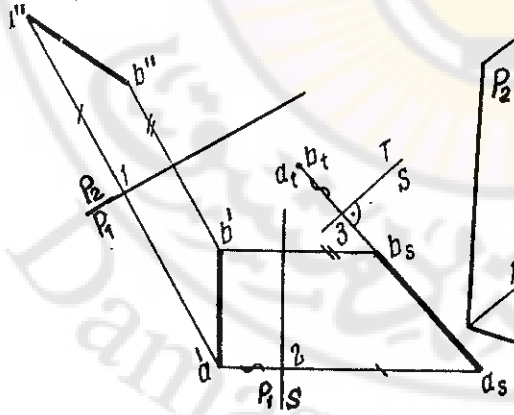


الشكل (207)

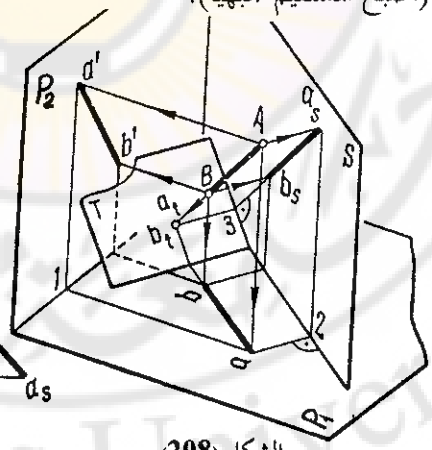


الشكل (206)

نبين في الشكل الفراغي (208) عمليتين متتاليتين لتغيير مستوي الإسقاط على مستو جديد، لدينا في الجملة الأصلية P_1 , P_2 مسقطا المستقيم AB، قمنا بإسقاط هذا المستقيم على المستوي الجديد S الذي يعامد المستوي الأفقي ويوازي المستقيم، (أصبح المستقيم جبهياً).



الشكل (209)



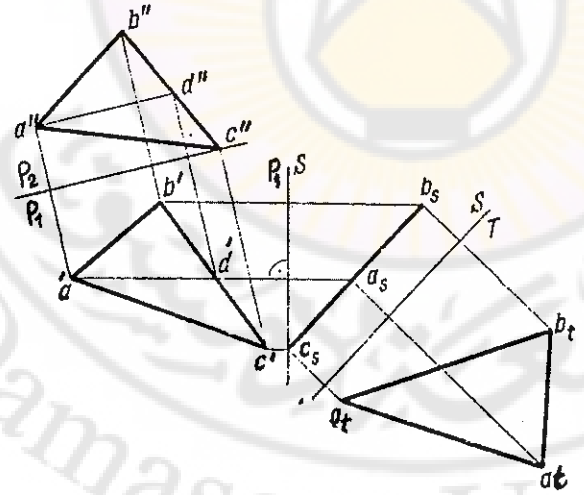
الشكل (208)

بعدها أسقطنا المستقيم على المستوي المعامد له T حتى آل مسقطه الأخير إلى نقطة b_t (أصبح المستقيم رأسياً). تم تغيير المسقط الجبهي في المرة الأولى وحصلنا على الجملة الجديدة P_1 , S ومن ثم قمنا بتغيير المستوي الأفقي للإسقاط وحصلنا على الجملة T , S. يبين الشكل (209) هذه العملية في المساقط.

نلاحظ أنه لا يمكننا في عملية تغيير مستو لمرةٍ واحدة إسقاط المستقيم الكيفي على مستو مساعد يعامد المستقيم، فجعلنا المستقيم أولاً جبهياً، ثم جعلناه رأسياً في عملية التغيير الثانية.

نقول أنه لا يمكننا أن نجعل مستقيماً عمودياً على مستو ما لم يكن في الأصل موازياً لمستو آخر. بالمثل يجب جعل مستقيم كيفي أفقي ثم منصوب، علل ذلك؟ قم بهذا في المساقط.

في الشكل (210) قمنا بعمليتي تحويل لمستوي المثلث ـ الأول أسقطناه على مستو S يعامده (يعامد أحد أفقياته) حتى صار منصوباً والثانية أسقطناه على مستو T يوازيه وحصلنا على الكبر الحقيقي للمثلث، لأنه أُسقط على مستو يوازيه هذه المرة.



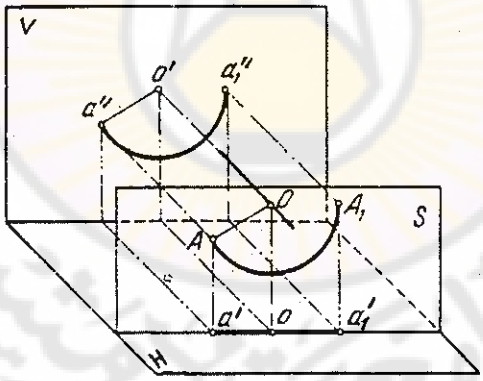
الشكل (210)

نقول إنه لا يمكننا أن نجعل مستوياً كيفياً موازياً لمستو ما لم يكن في الأصل معامداً لمستو آخر. بالمثل يجب جعل مستو كيفي رأسي ثم جبهي، علل؟ قم بهذا في المساقط.

ثانياً : طريقة التدوير

في هذه الحالة نقوم بتدوير الأشكال حول مستقيم معامد لأحد مستويي الإسقاط بزاوية معينة حتى يبدو الشكل بحالةٍ خاصة بالنسبة لأحد مستويي الإسقاط، فلدينا جملة واحدة.

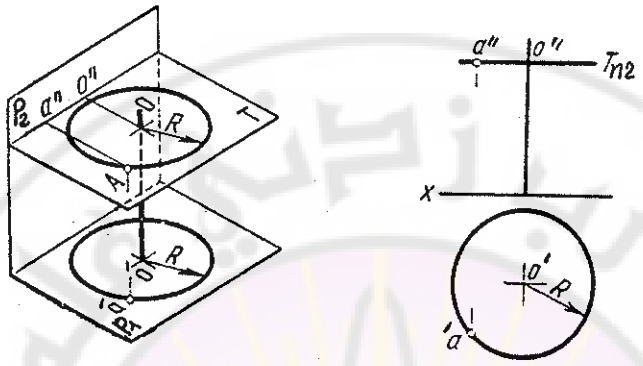
مبدأ عملية التدوير مبينة على الشكل (211). حيث يتم تدوير النقطة A حول المستقيم الثابت المنصوب المار من مركز التدوير O، نصف قطر التدوير هو الطول OA بزاوية معينة AOA_1. نلاحظ أننا ندور في المستوي S العمودي على المستوي الأفقي والمار من النقطة A قوس الدوران هو القوس AA_1، المسقط الأفقي له هو خط مستقيم $a'a'_1$ وعلى المسقط الجبهي نرى القوس $a''a''_1$.



الشكل (211)

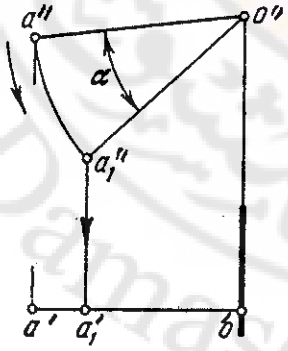
في الشكل الفراغي (212) تدور النقطة A حول المحور الرأسي OO بزاوية دوران 360° وعلى جانبه الرسم في المساقط. تسمى هذه العملية الانتقال الأفقي

لأن النقطة (نقاط الشكل بحالة تدوير شكل ما) تنتقل بشكل تبقى فيه موازيةً للمستوي الأفقي.

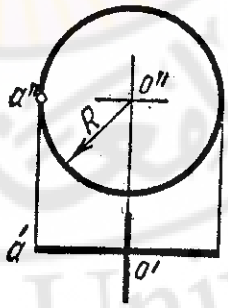


الشكل (212)

في الشكل (213) عملية تدوير النقطة A حول المحور المنصوب في المساقط تسمى هذه العملية الانتقال الجبهي لأن النقطة (نقاط الشكل بحالة تدوير شكل ما) تنتقل بشكل تبقى فيه موازية للمستوي الجبهي. في الشكل (214) عملية تدوير النقطة حول المحور المنصوب وبزاوية α بالاتجاه المبين بالشكل وقد دارت في المستوي الجبهي من a''_1 إلى a'' ثم نستنتج المسقط الأفقي الجديد لها النقطة قد انتقلت انتقالاً جبهياً على الخط $a'a'_1$.

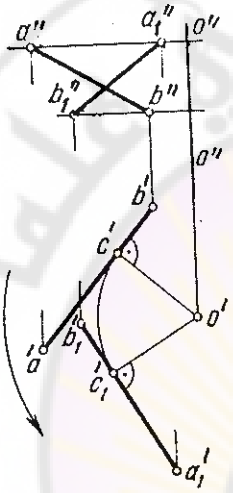


الشكل (214)

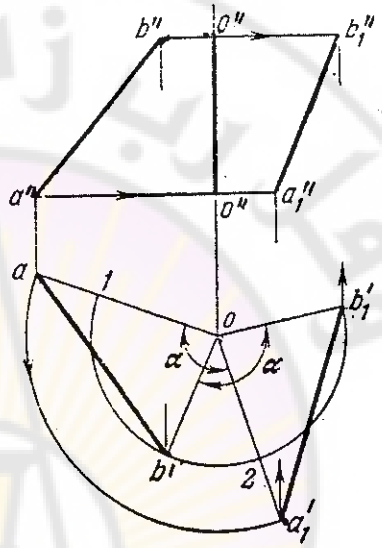


الشكل (213)

يبين الشكل (215) عملية تدوير المستقيم AB حول المحور الرأسي وبزاوية α - قمنا بتدوير النقطتين A , B منه، من البديهي أنهما دارتا بالزاوية نفسها. نلاحظ أن المستقيم قد انتقل انتقالاً جبهياً (بشكل مواز للمستوي الجبهي).



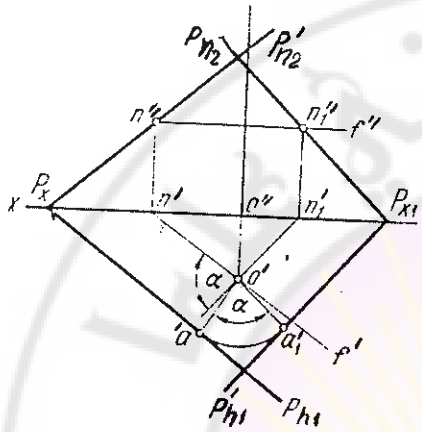
الشكل (216)



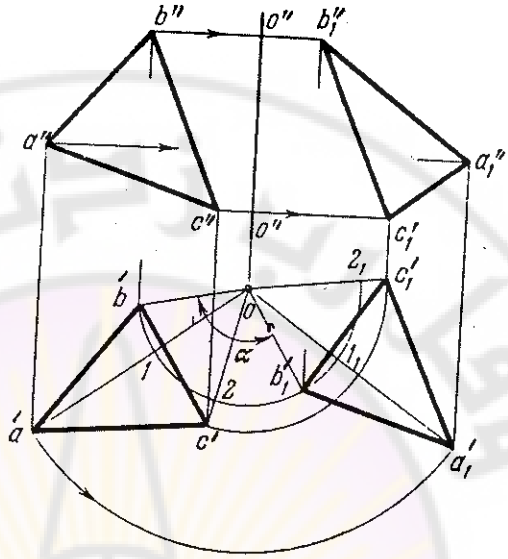
الشكل (215)

النتيجة نفسها نحصل عليها لو أنزلنا من مركز التدوير عموداً على المستقيم AB ودورنا المستقيم بالزاوية المبينة حول المحور الرأسي الشكل (216)، العمود oc يبقى عمودياً على المستقيم قبل الدوران وبعده. نحصل على الوضع الجديد للمسقط الأول للمستقيم ونستنتج المسقط الجبهي له. نلاحظ ثبات الأبعاد النسبية بين نقاط المستقيم في المسقط الأفقي.

على الشكل (217) عملية تدوير المثلث ABC حول المحور الرأسي، في الأفقي شكل المستوي يحافظ على نفسه تماماً غير أن موقعه قد دار بزاوية تساوي α، المسقط الجبهي له انتقل انتقالاً أفقياً حيث قمنا باستنتاج المساقط الجبهية لرؤوسه.



الشكل (218)



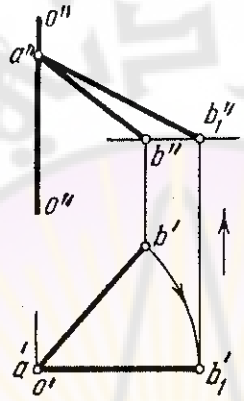
الشكل (217)

المستوي غير المحدود المعين بأثريه P يمكن أن يدور حول المحور الرأسي المار من O. نقوم بتدوير أقرب نقطة من الأثر الأفقي للمستوي وهي النقطة a. ندوره بزاوية α مثلاً، المستقيم Oa يبقى معامداً للأثر قبل التدوير وبعده، عندما يقطع الأثر الجديد خط الأرض في النقطة Px، الأثر الجبهي للمستوي سوف يمر منها ومن المسقط الجبهي لنقطة أثر المستقيم الأفقي المار من مركز الدوران في المستوي P_1 (أفقيات المستوي تبقى أفقيات بعد التدوير).

1 ـ التدوير حول محور تم اختياره

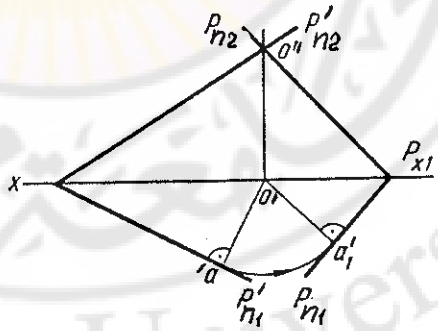
نقوم بعملية تدوير الأشكال الهندسية بغية حل مسائل قياس مختلفة، وبالتالي يكون من الطبيعي اختيار محور الدوران وزاوية الدوران بحيث يصبح فيها الشكل في حالة خاصة بالنسبة لمستويات الإسقاط مما يسمح بأخذ القياس مباشرةً على المساقط

في الشكل (219) تم اختيار محور التدوير الرأسي ماراً من النقطة A من المستقيم AB (مركز الدوران يبقى ثابتاً). ثم قمنا بتدوير المستقيم حول المحور هذا وبزاوية يصبح فيها المستقيم جبهياً، نستنتج المسقط الجبهي للنقطة B، المستقيم بالوضعية الأخيرة AB_1 جبهي.

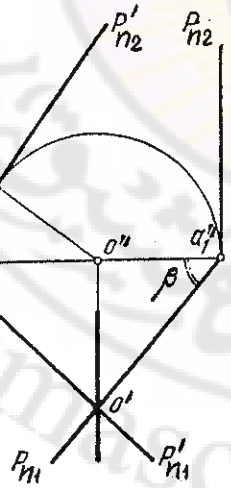


الشكل (219)

قمنا في الشكل (220) بتدوير المستوي P المعين بأثريه حول المحور الرأسي الواقع في المستو الجبهي، الوضع الجديد للمستوي على الرسم.



الشكل (220)



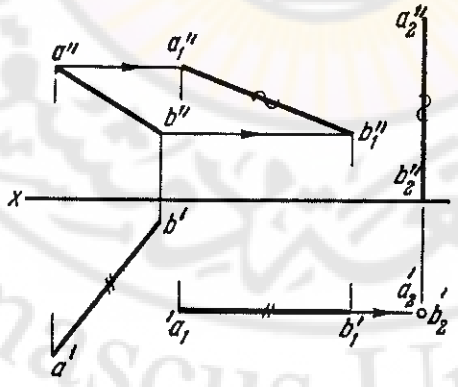
الشكل (221)

في الشكل (221) حولنا المستوي المعين بأثريه إلى مستو رأسي بتدويره حول المحور المنصوب OO' الواقع في المستوي الأفقي، زاوية التدوير اختيارية نأخذها بحيث يصبح الأثر الجبهي له عمودياً على خط الأرض. (نقاط محور الدوران كافة ثابتة قبل التدوير وبعده). المستوي أصبح رأسياً يصنع زاوية β مع المستوي الجبهي.

2 ـ استخدام طريقة الدوران بدون تحديد محور الدوران

طالما أن الهدف من عملية الدوران هي إرجاع الشكل الهندسي إلى وضعية خاصة بالنسبة لمستويات الإسقاط، فيمكن جعلها كذلك دون الإشارة إلى محور التدور.

لنفرض أن المطلوب هو تحويل وضع المستقيم الكيفي على الشكل (222) إلى الوضع الرأسي، قبل أن يكون بإمكاننا تحويل المستقيم إلى رأسي يجب تحويله إلى جبهي أولاً. لذلك نقوم على رسم مجاور (لا على التعيين) بوضع المسقط الأفقي له بشكل يكون فيها موازياً لخط الأرض (المسقط $a'_1b'_1$) ثم نستنتج المسقط الجبهي له وقد انتقل المستقيم انتقالاً افقياً ما، المستقيم A_1B_1 في هذه الوضعية أصبح جبهياً. يمكن إن أردنا استنتاج محور الدوران، مركزه هو نقطة التقاء مستقيمين متعامدين للمسقطين الأفقيين $a'b'$, $a'_1b'_1$ ومن أي نقطتين نختارهما على هذين المسقطين، المحور هو المستيقيم الرأسي المار من هذه النقطة.

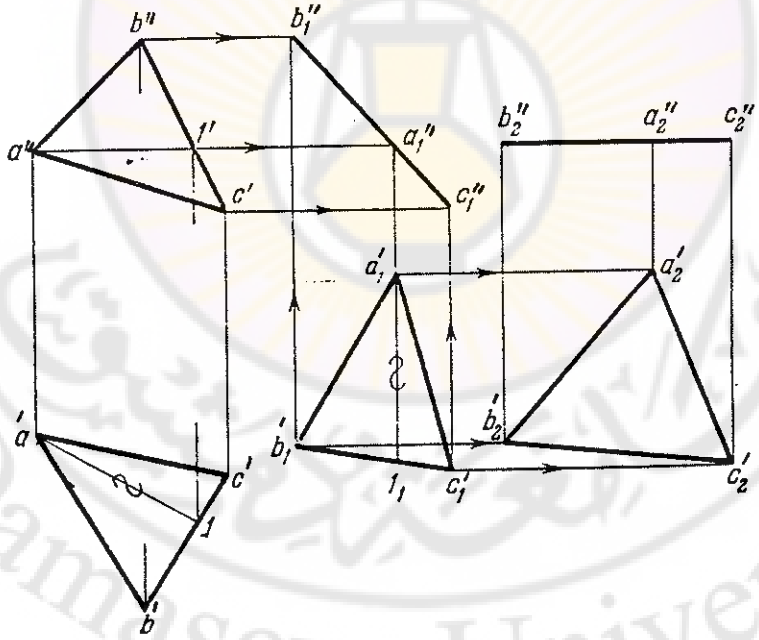


الشكل (222)

نقوم على رسم مجاور آخر (لا على التعيين) بوضع المسقط الجبهي بوضعيته الجديدة (A_2B_2) له بشكل يكون فيها عمودياً على خط الأرض (المسقط $a'_2b'_2$) ثم نستنتج المسقط الأفقي له وقد انتقل المستقيم انتقالاً جبهياً ما، المستقيم A_2B_2 في الوضعية الأخيرة أصبح رأسياً. يمكن إن أردنا استنتاج محور الدوران، مركزه هو نقطة التقاء محوري المسقطين الجبهيين $a''_2b''_2$, $a''_1b''_1$ ومن أي نقطتين على هذين المسقطين، المحور هو المستقيم المنصوب المار من هذه النقطة. قم بهذا العمل بنفسك.

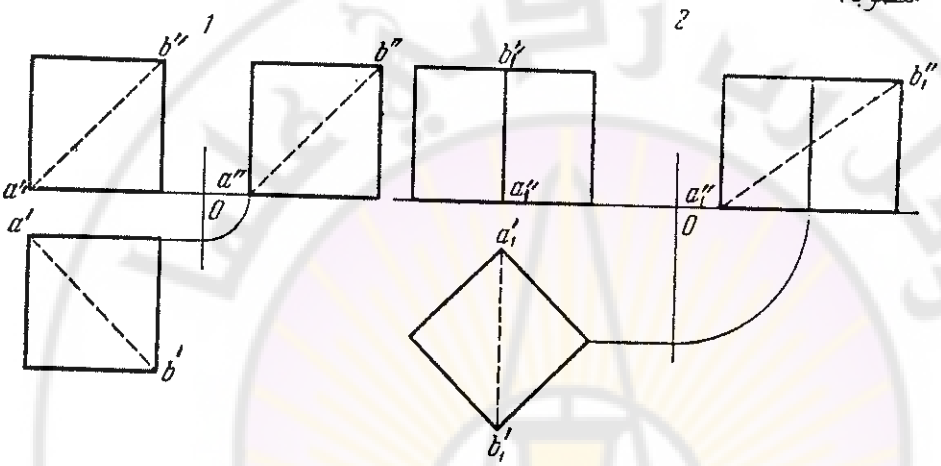
على الشكل (223) قمنا بتدوير وضعية المستوي الكيفي ABC إلى الوضع المنصوب $A_1B_1C_1$ (بطريقة تحويل أحد افقياته وهو A1 إلى مستقيم منصوب)، ثم قمنا بتدويره حتى أصبح أفقياً ليظهر بكبره الحقيقي $A_2B_2C_2$. اتجاه الأسهم يدل على تسلسل الإنشاء في الوضعين لا يهمنا معرفة محور الدوران ولا زاوية الدوران.

يمكن إجراء مسائل القياس في الوضعية الجديدة (مثل: إيجاد مركز الدائرة المارة برؤوسه، ثم تعيين المساقط الأصلية لها).

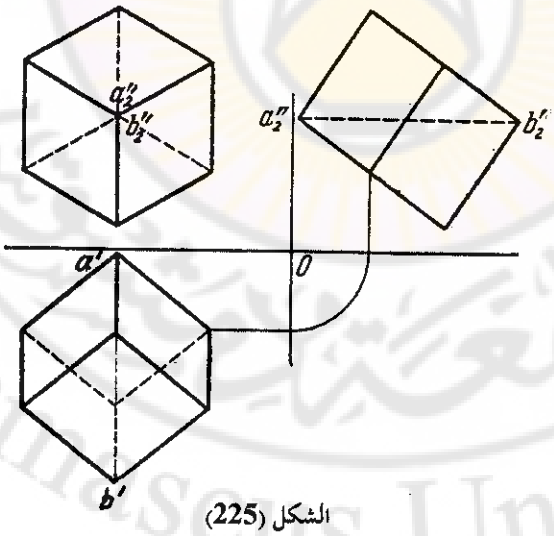


الشكل (223)

أمثلة أخرى على عملية الدوران مبينة على الشكل (224) والشكل (225) حيث تم في الشكل الأول تدوير المكعب (المعطى بمساقطه الثلاثة) حتى أصبح قطره AB مستقيماً جانبياً. قد يكون الوضع الجديد للمكعب مفيداً في عمليات أخرى. على الشكل الثاني قمنا بتدوير المكعب نفسه إلى وضعية أصبح فيها القطر AB منصوباً.



الشكل (224)



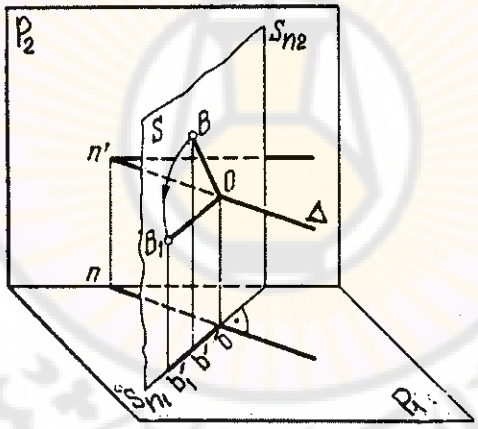
الشكل (225)

ثالثاً : طريقة التطبيق

(الدوران حول محور مواز لمستوي إسقاط)

في الشكل (226) قمنا بتدوير النقطة B حول المحور الأفقي المار من النقطة N، ستدور النقطة حول المحور الأفقي ON وتبقى واقعة في المستوي S المعامد لمحور الدوران. ندور النقطة هذه حتى يصبح نصف قطر الدوران OB أفقياً ونحصل على الوضعية الجديدة للنقطة وهو الوضع B_1 مسقطها الأول هو b'_1، الآن أصبح نصف قطر التدوير أفقياً OB_1 وقياسه الحقيقي ظهر مباشرةً على المسقط الأول له.

تسمى عملية التدوير حول مستقيمٍ موازٍ لأحد مستويي الإسقاط حتى تمام الانطباق على المستوي الموافق (الموازي لمستويٍ الإسقاط المعتبر) عملية التطبيق. وهي تمثل عمليتي تغيير مستو بالإضافة لعملية التدوير كما سنرى ذلك لاحقاً.

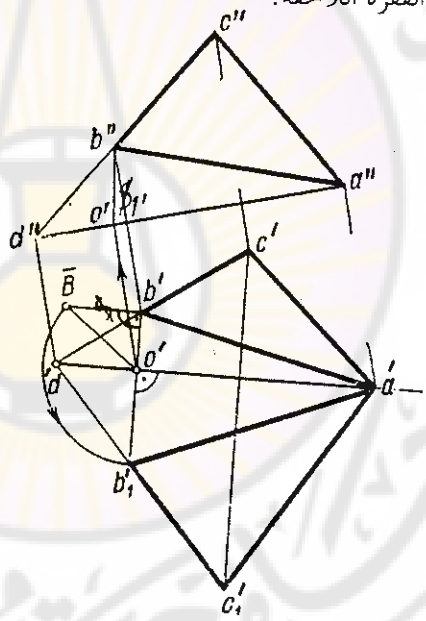


الشكل (226)

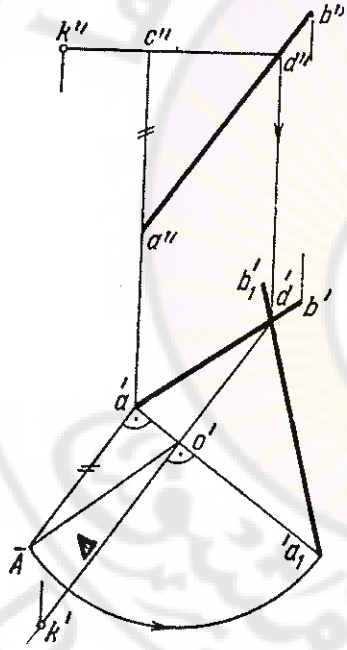
في الشكل (227) تم تدوير مستوي المثلث ABC حول محور افقي AB مختار (مواز للمستوي الأفقي) النقطة a' ستبقى ثابتة لأنها تقع على محور الدوران، بينما يأخذ المسقط b' الوضع الجديد b'_1 بعد التدوير.

بما أن $o'b'$ سيمثل الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير فقد قمنا بإيجاد هذه الطويلة أولاً وهو طول الوتر $o'\overline{B}$ في المثلث القائم $bo\overline{B}$، حيث أخذنا الطول $\overline{B}b'$ المساوي لبعد المسقط الجبهي للنقطة B عن محور التدوير (الطول $b''1''$) – نسمي المثلث الحاصل مثلث التطبيق الخاص بالنقطة B.

عملية إنشاء مثلث التطبيق تأخذ التسلسل التالي: ننزل من النقطة b'' عموداً على محور الدوران وهو $b'o'$، نرسم من b' أيضاً عموداً على هذا المستقيم ونأخذ عليه الطول $b\overline{B}=b''1''$ ثم نصل بين النقطتين o' , $\overline{B}$ لنحصل على مثلث التطبيق، يمثل وتره الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير المطلوب (النقطة $\overline{B}$ هي مسقط النقطة B على مستو مساعد مواز للقطعة OB). سيكون فهم ذلك أسهل في الفقرة اللاحقة.



الشكل (227)



الشكل (228)

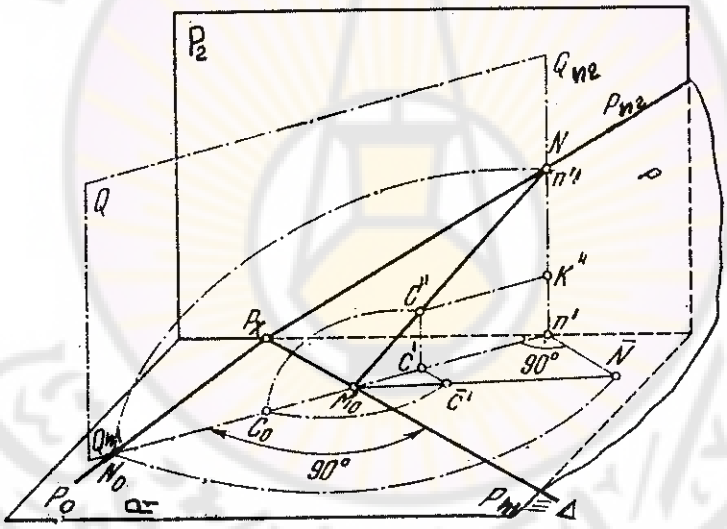
يمثل الشكل (228) عملية تطبيق المستوي المعين بالمستقيم AB والنقطة K حتى تمام الانطباق على المستوي الأفقي. نختار محور الدوران الأفقي $\Delta = KD$، موقع

المسقطين d′ , k′ سيبقى ثابتاً على محور الدوران، بينما موقع المسقط a′ سيأخذ الوضع a′₁ الجديد. يأخذ المستوي (k′ , AB) الآن وضعاً أفقياً.

تدوير مستو حول أحد أثريه: (تطبيق مستو)

عندما نقوم بتدوير مستو معين بأثريه حول أثره حتى تمام الانطباق على المستوي الموافق، سيظهر المستوي في وضعه الحاصل بشكله الحقيقي، دون تشويه الأشكال الواقعة فيه، وستكون عملية القياس على الشكل الحقيقي ممكنة بعد عملية التدوير هذه.

في الشكل (229) نقوم بتدوير المستوي المعين بأثريه P حول الأثر الأفقي له، أو بتطبيق المستوي على المستوي الأفقي للإسقاط.



الشكل (229)

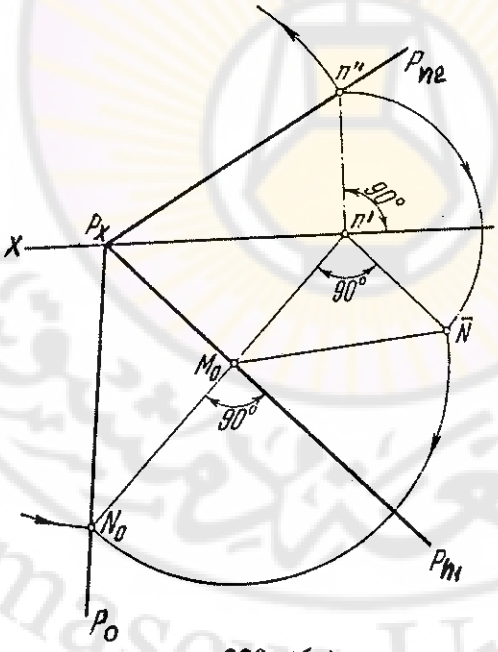
لتطبيق المستوي، نطبق نقطة واحدة منه واقعة على الأثر الجبهي له، النقطة N. عندما نقوم بالتدوير ستدور النقطة هذه في المستوي Q المعامد لمحور التدوير Pn_1. بغية إيجاد الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران NM_0، لذلك نقوم بتدوير المثلث Nm_0n'

حول ضلعه الأفقي M_0n' حتى ينطبق على المستوي الأفقي وتأخذ النقطة N الوضع الجديد $\overline{N}$ (حصلنا على ما أسميناه مثلث التطبيق $NM_0\overline{N}$) بعد ذلك نقوم بتدوير النقطة $\overline{N}$ حول مركز تدوير هو M_0 حتى التلاقي مع امتداد المستقيم $h'M_0$ في النقطة N_0.

النقطة الأخيرة تمثل موقع النقطة N في موضعها الجديد بعد التطبيق والأثر الجبهي يأخذ الوضع الجديد P_xN_0 كما هو مبين على الرسم الفراغي (229).

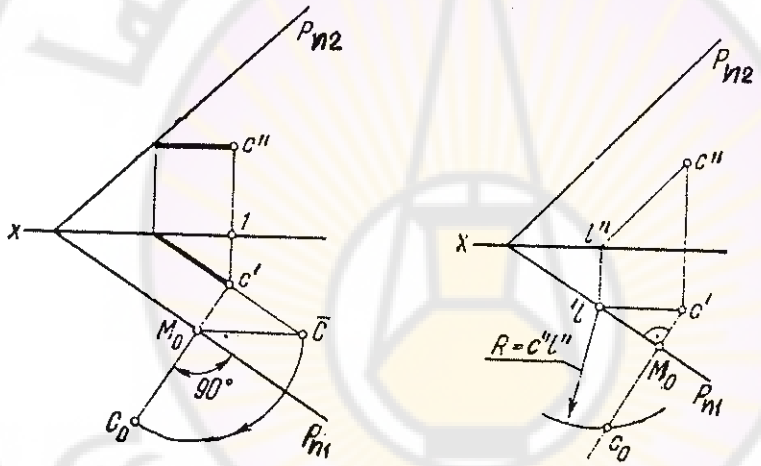
الشكل (230) يوضح عملية التطبيق هذه في المساقط. دورنا المستوي الكيفي المعين بأثريه حول أثره الأفقي حتى تمام الانطباق على المستوي الافقي، حيث قمنا بتطبيق نقطة من أثره الجبهي مثل N حول الأثر الأفقي هذا (مثلث التطبيق الخاص بالنقطة N هو المثلث $\overline{N}M_0n'$). حصلنا على الوضع الجديد للمستوي P.

المستوي المطبق هو المستوي $P(Pn_1, P_0)$ الواقع في المستوي الأفقي، نلاحظ أن الأثر الأفقي بقي ثابتاً لأنه يمثل محور الدوران نفسه.



الشكل (230)

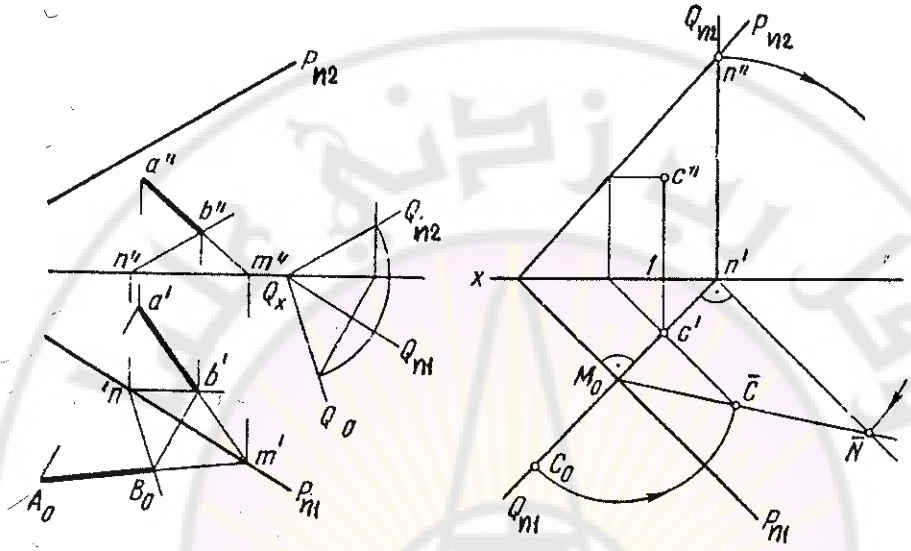
في الشكل (231) نبين مقارنة بين تطبيق النقطة C الواقعة في المستوي P بإنشاء مثلث التطبيق $c'M_0\overline{C}$ وعلى الرسم المجاور تم إجراء عملية التطبيق بمساعدة المستقيم الجبهي المار من النقطة C وهو المستقيم LC. نعلم بأن الشكل الحاصل للمستوي في المطبق هو الشكل الحقيقي، كل ما فيه الآن سيظهر بكبره وشكله الحقيقي، المستقيم LC أيضاً سيظهر في طوله الحقيقي وبالتالي نقوم بنقل مقدار هذه الطويلة من المسقط الجبهي له مباشرةً، بمساعدة قوس الدائرة نحصل على مسقطه بعد التطبيق، ضمناً المسقط c′ في المطبق. سيكون إنشاء مطبق مستو معين بأثريه وفقاً لهذه الطريقة أسهل من سابقتها.



الشكل (231)

على الشكل (232) أوجدنا المطبق الافقي للنقطة C بمساعدة مثلث تطبيق النقطة N الواقعة على الأثر الجبهي للمستوي.

على الشكل (233) أوجدنا المطبق الأفقي للمستقيم AB الواقع في المستوي P. قمنا بتطبيق النقطة B أولاً وحصلنا على مطبقها الأفقي B_0 بمساعدة المستقيم الجبهي NB المار بها.



الشكل (233)

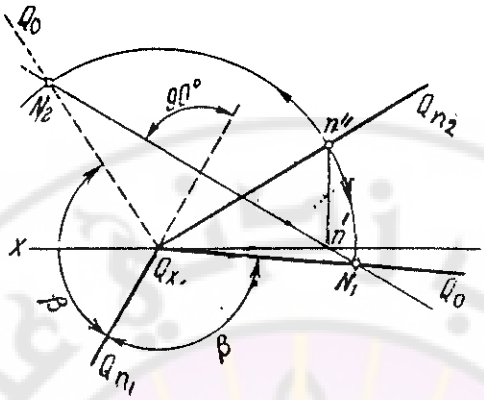
الشكل (232)

بعد ذلك مددنا مسقطي المستقيم AB حتى يتلاقى مع محور التدوير (محور التطبيق Pn_1 وحصلنا على النقطة M_0 بمسقطيها. الآن المستقيم BM يحمل النقطة A وبالتالي نمدد مطبقه حتى يتلاقى مع العمود المقام من المسقط a′ في مطبق النقطة A. المطبق الأفقي للمستقيم AB هو القطعة A B، سيظهر الطول الحقيقي له في المطبق.

أخيراً، على الشكل (234) نبين عملية تطبيق المستوي المشدود q المعين بأثريه حول أثره الافقي.

قمنا بإيجاد مطبق النقطة N الواقعة على الأثر الجبهي للمستوي P، أقمنا عموداً على محور التدوير (Q_{n1} , Q_x) ثم أوجدنا مطبق تلك النقطة N بمساعدة قوس الدائرة التي مركزها Q_x ونصف قطرها هو Q_x n″.

نلاحظ من الشكل أن عملية الدوران يمكن أن تكون في الجهة المعاكسة أيضاً.



الشكل (234)

يجدر الإشارة إلى أن التطبيق الجبهي لا يختلف عن التطبيق الأفقي من حيث المبدأ. محور التطبيق يصبح الأثر الجبهي للمستوي المراد تطبيقه، ويتم الدوران حتى تمام انطباقه على المستوي الجبهي، بهذه الحالة، نفيد بأن التطبيق الأفقي كافٍ لحل مسائل القياس ولذلك اكتفينا بالشرح فقط حول هذا التطبيق.

رابعاً : حل المسائل بإستخدام الطرائق الخاصة

نبين فيما يلي كيفية حل بعض المسائل بإستخدام الطرائق الخاصة في الهندسة الوصفية:

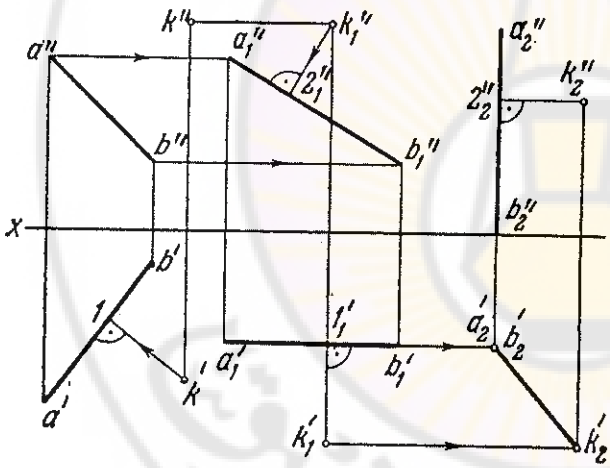
1 ـ إيجاد نقطة تلاقي مستقيمين جانبيين. تم الحل بمساعدة إسقاط مساعد على الشكل (204).

2 ـ جعل مستقيم كيفي عمودي على مستوي إسقاط. الحل بطريقة تغيير مستوي الإسقاط على الشكل (209). يمكن رؤية ذلك أيضاً في الشكل (239) التالي. كما يمكن الوصول إلى النتيجة نفسها بإستخدام طريقة الدوران انظر الشكل (222) والشكل (236) اللاحق.

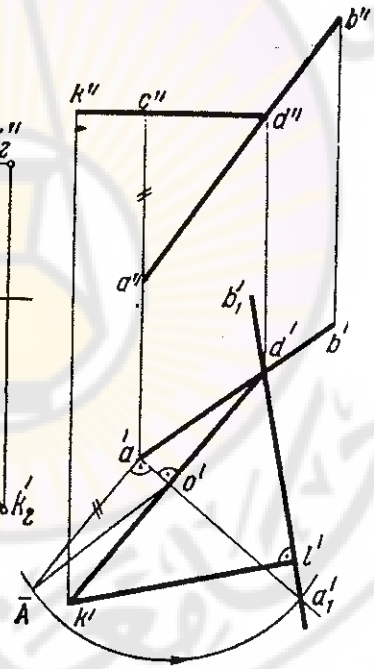
3 ـ إيجاد طول قطعة مستقيمة وزاوية الميل عن مستوي إسقاط. انظر الشكل (202)، بطريقة تغيير مستوي الإسقاط والحل بطريقة الدوران على الشكل (219).

4 ـ إيجاد بعد نقطة عن مستقيم ويمكن أن تحل هذه المسألة بطريقة التطبيق كما في الشكل (235) حيث يمثل طول العمود المقام من المسقط k على المستقيم بعد تدويره حول محور التدوير d'k'. وكذلك يمكن الحل بطريقة الدوران كما في الشكل (236) حيث تم تحويل المستقيم إلى جبهي ثم، بعملية التدوير الثانية، تم جعله رأسياً.

طول مسقط العمود المنزل $k'_2b'_2$ سيمثل البعد الحقيقي للنقطة K عن المستقيم AB وذلك لأن العمود K 2 هو مستقيم أفقي في الوضعية الأخيرة له.

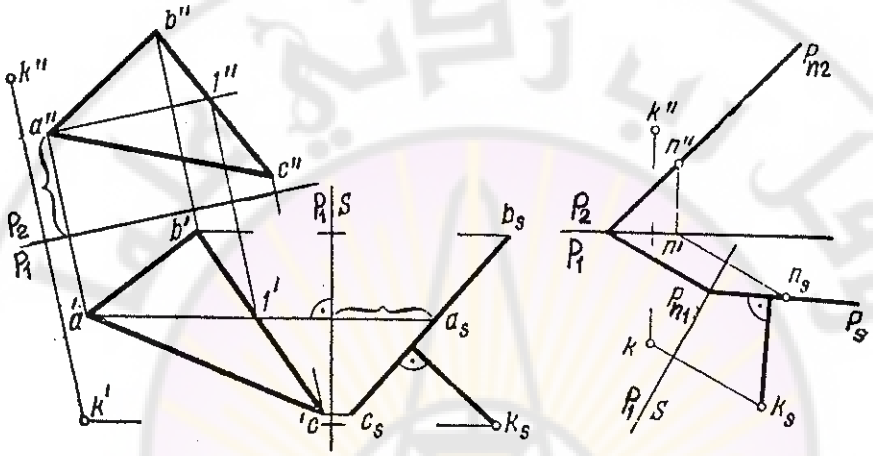


الشكل (236)



الشكل (235)

6 ـ إيجاد المسافة بين نقطة ومستقيم. يبين الشكل (201) حيث تم إنزال عمود بشكل مباشر على المسقط الأفقي للمستوي الرأسي BCD. يظهر التعامد مباشرةً على هذا المسقط، فيكون البعد المطلوب هو طول المسقط a′k′ لأن العمود على مستو رأسي هو مستقيم أفقي حتماً.



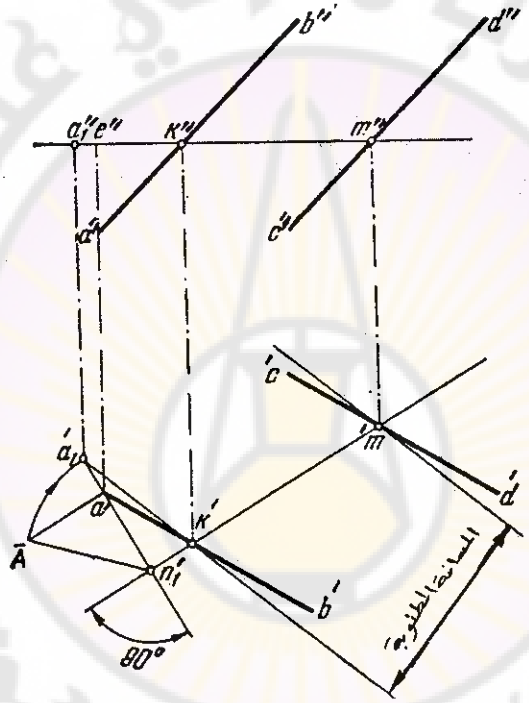
الشكل (237)

في الحالة عندما لا يكون المستوي معطى بالحالة الخاصة السابقة يمكن إرجاعه إليها بإسقاطه على مستو جديد يعامده (يعامد أحد أفقياته A 1)، انظر الشكل (237).

ننزل من المسقط الأخير k′ للنقطة K عموداً على الخط P_1S فيكون هو الطول الحقيقي للبعد بين النقطة والمستوي المعطيين. السبب في ذلك أن المستوي في الجملة الأخيرة أصبح منصوباً والعمود على المستوي الرأسي هو جبهي.

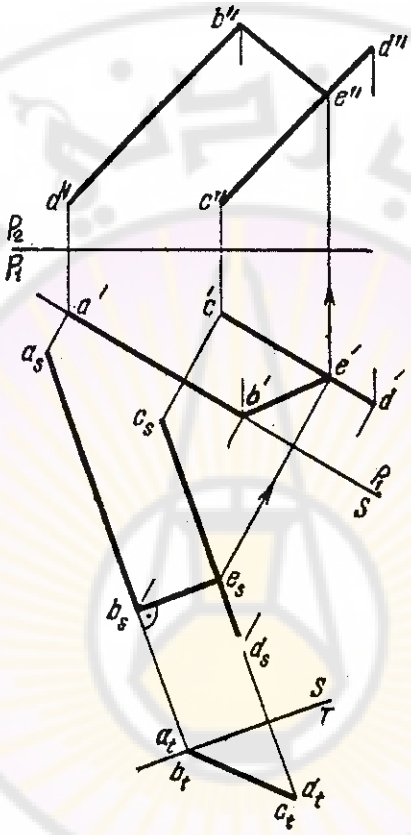
8 ـ إيجاد المسافة بين مستقيمين متوازيين: يمكن رد هذه المسألة إلى إيجاد البعد بين نقطة واقعة على أحد المستقيمين عن المستقيم الآخر، والحل يكون بالخطوات نفسها في الفقرة رقم 6.

كما يمكن الحل بعملية تطبيق المستقيمين بتدويرهما حول أحد افقيات المستوي المشكل منهما انظر الشكل (238) وهو المستقيم KM، تبقى النقطتان على محور التدوير قبل وبعد التدوير، نوجد مطبق النقطة A من المستقيم AB، بالوصل بين المطبقين k'a' نحصل على مطبق المستقيم AB (الخط a'k'). المستقيم CD يمر من M ويوازي مطبق المستقيم الأول a'k'، يكون البعد بين المستقيمين هو العمود المشترك بينهما.



الشكل (238)

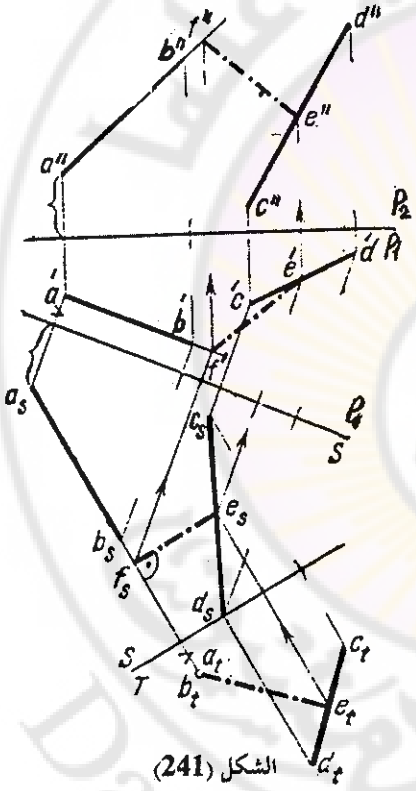
النتيجة نفسها نحصل عليها بجعل كلا المستقيمين رأسيين (أو منصوبين)، بإسقاطهما على مستو يعامدهما. الحل مبين على الشكل (239). نحتاج لعمليتي تغيير مستوي الإسقاط.



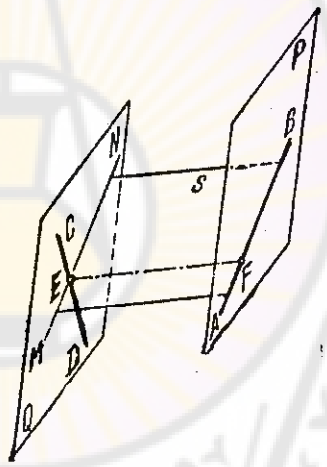
الشكل (239)

9 ـ إيجاد المسافة الكائنة بين مستقيمين يساريين: المسافة بين مستقيمين يساريين هي أقصر مسافة بينهما، وتساوي طول العمود المشترك بينهما، كما أنها تساوي المسافة بين مستويين مارين من المستقيمين اليساريين كما يبين ذلك الشكل (240).

سنقوم بإيجاد البعد بين المستقيمين اليساريين AB , CD. نجعل أحد المستقيمين (المستقيم الكيفي AB) رأسياً وذلك بعملية إسقاطه على مستو يوازيه أولاً وحصولنا على الوضعية الجديدة له a_sb_s ثم نسقطه على مستو يعامده في عملية التحويل الثانية ليؤول مسقطه الأخير إلى نقطة a_tb_t. في الوقت نفسه نقوم بإيجاد مسقط المستقيم الثاني على المستوي S و T أيضاً. المستقيمان في المسقطين الأخيرين أحدهما رأسي هو المستقيم AB، فالعمودي عليه هو مستقيم أفقي وسيمر من مسقطه الأخير (النقطة a_tb_t)، سيظهر التعامد بين المستقيم CD والعمودي هذا بسبب كون العمودي هذا أفقياً.



الشكل (241)



الشكل (240)

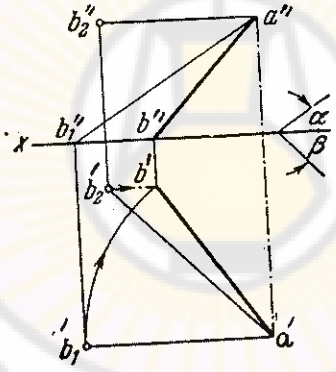
لذلك نقوم بإنزال عمود من المسقط a_tb_t على المسقط الأخير (c_td_t) للمستقيم CD، نستنتج موضع العمود في المسقط الأخير (a_te_t) وفي المسقط قبل الأخير (e_sf_s)

وبإرجاع مساقطه إلى المساقط الأصلية نكون قد حصلنا على مسقطي العمود المشترك للمستقيمين المعطيين وهو المستقيم EF طول البعد هذا هو a_1e_1 على المسقط الأخير.

10 - إيجاد مسقطي قطعة مستقيمة علم ميلها عن مستويي الإسقاط α و β:

لقد قمنا بحل هذه المسألة انظر الشكل (73) والشكل (74).

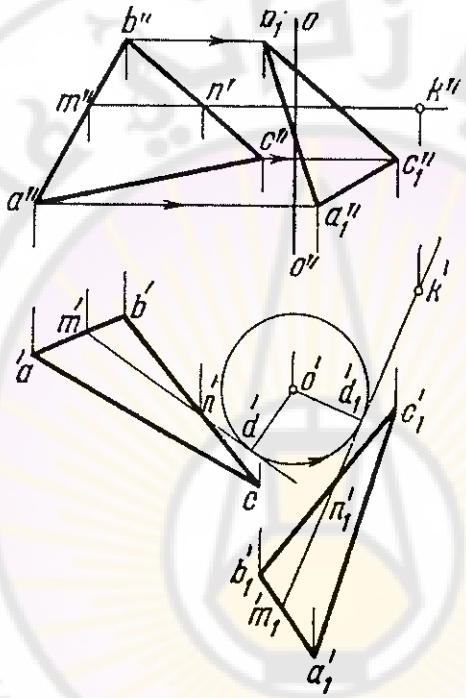
كما يمكن الحل بطريقة الدوران على الشكل (242) حيث أنشأنا مسقطي المستقيم الجبهي AB الذي يميل بزاوية الميل نفسها للمستقيم المطلوب إنشاؤه من المستوي الأفقي، سيظهر ميله عن المستوي الأفقي. في الوقت نفسه (على الشكل نفسه) نقوم بإنشاء مسقطي المستقيم AB الذي يميل بزاوية الميل نفسها للمستقيم المطلوب إنشاؤه عن المستوي الجبهي، سيظهر ميله عن المستوي الجبهي، وبشرط أن $a''b'' = a'b'$. بعد ذلك نقوم بنقل المسقط b'' انتقالاً أفقياً وانتقالاً جبهياً للمسقط b'. المستقيم الذي يميل بزاوية α عن الأفقي و β عن الجبهي هو المستقيم AB. للمسألة أربعة حلول أخرى، ما هي؟



الشكل (242)

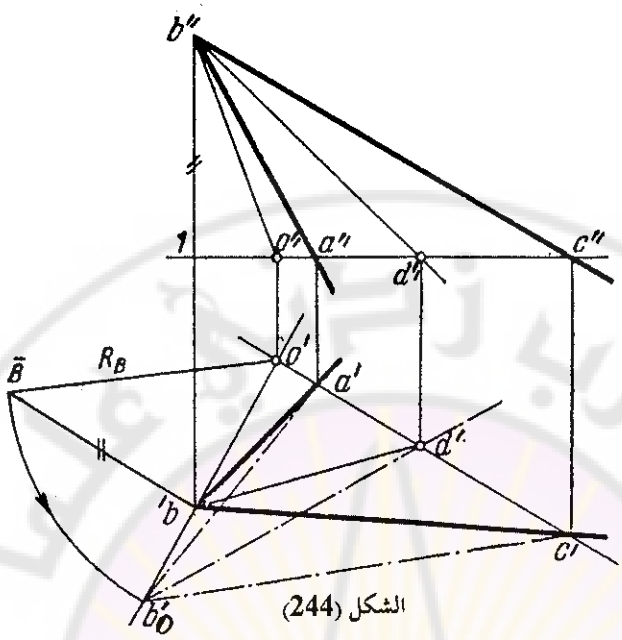
11 - جعل مستو كيفي مار من نقطة: لنفرض أن المطلوب هو إمرار المستوي الكيفي ABC من النقطة K. الشكل (243) يكفي أن نمر من النقطة مستقيماً واحداً وليكن الأفقي المار من k'، نستنتج المسقط الأفقي لهذا المستقيم. بقي علينا أن ندور

المسقط الأفقي للمثلث حول محور رأسي لكي يمر المسقط m′n′ من النقطة K مركز الدوران على العمود المقام على المسقط m′n′ وأقرب إلى المستوي من المسقط k′.



الشكل (243)

12 ـ تقسيم مسقطي زاوية إلى أقسام متساوية: لنفرض أنه لدينا مسقطا زاوية ABC، ضلعيها المستقيمين AB , BC على الشكل (244) ويراد تقسيمها إلى n جزء متساو. من المعروف أن تنصيف الزاوية لا يظهر في المساقط. وبالتالي نقوم بتطبيق مستوي الزاوية حول محور تطبيق أفقي مختار هو o′c′ لكي تظهر بكبرها الحقيقي ثم نقوم بتنصيفها (مثلاً) وإرجاع المنصفات إلى المساقط الأصلية.

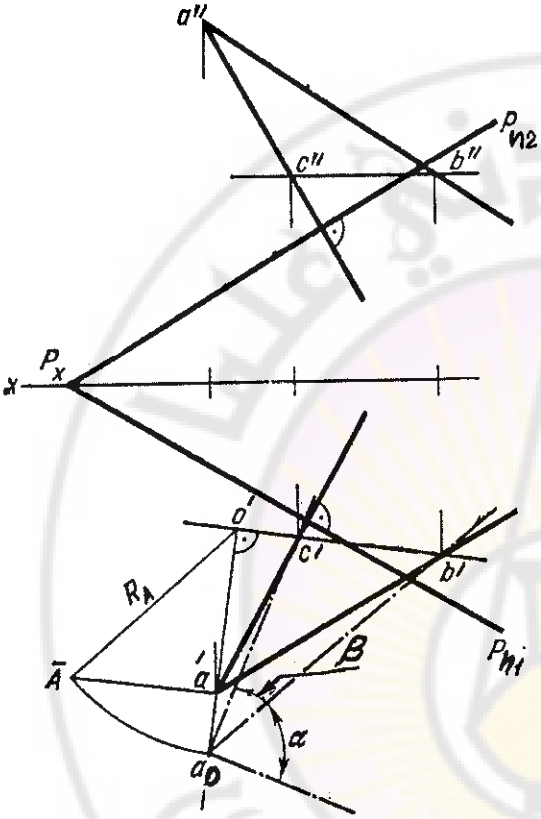


الشكل (244)

حصلنا على مطبق النقطة B فقط، مطبق النقاط A , C تبقى ثابتة لوقوعها على محور التطبيق. بعدها قمنا بإرجاع المنصف BD إلى المساقط الأصلية، يظهر الآن مسقطا الزاوية مقسمة إلى زاويتين متساويتين. كان تقسيم الزاوية إلى عدد أكبر من الزوايا ممكناً أيضاً.

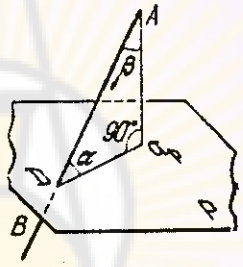
13 ـ إيجاد الزاوية الكائنة بين مستقيم ومستو: كنا قد أوجدنا الزاوية بين مستقيم ومستو سابقاً وفقاً للطرائق العامة. انظر الشكل (219) والشكل (220)، غير أن إيجاد الزاوية هذه ممكن بطريقة أسهل. نلاحظ في الشكل (245-a) أن الزاوية بين المستوي P والمستقيم AD هي مكملة للزاوية β الكائنة بين المستقيم والعمود المقام من أي نقطة لا على التعيين من المستقيم ذاته. إذا عرفنا قيمة الزاوية β نستطيع بسهولة تعيينها على الرسم أو حساب الزاوية $\alpha = 90 - \beta$.

تؤول مسألة تحديد الزاوية بين مستقيم ومستو إذن إلى إيجاد الزاوية الكائنة بين المستقيم ومستقيم آخر يقطع هذا المستقيم ويعامد المستوي على الشكل (245-b) يعطى المستوي P والمستقيم AB ويطلب إيجاد الزاوية الثنائية الكائنة بينهما.



a)

الشكل (245)



b)

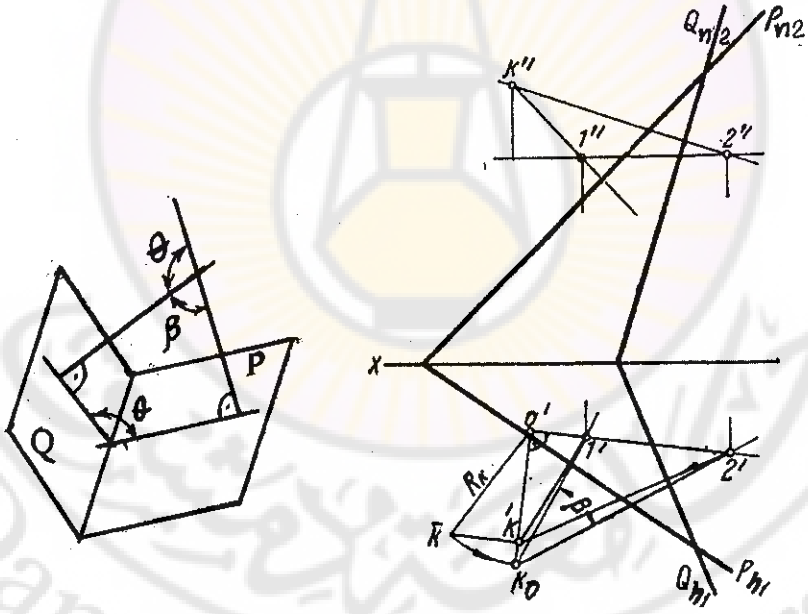
الشكل (245)

نقوم بإنشاء المستقيم المار من نقطة ما على المستقيم ولتكن النقطة A ويكون عمودياً على المستوي المعطى. إيجاد الزاوية بين هذين المستقيمين ممكن بوساطة تطبيق المستوي المشكل منهما حول أحد أفقياته وليكن CB فتكون الزاوية المطلوبة هي الزاوية المكملة أي الزاوية α التي يمكن قياس قيمتها مباشرةً على الرسم.

14 - إيجاد الزاوية الثنائية بين مستويين: أوجدنا هذه الزاوية بإستخدام الطرائق العامة انظر الشكل (199)، غير أن استخدام الطرائق الخاصة، بالتحديد طريقة التطبيق تسهل الحل بدرجة كبيرة.

نصطلح على أن قياس الزاوية هي الزاوية الحادة، وبالتالي إذا كانت الزاوية المقاسة حادة نفترضها هي الزاوية الكائنة بين المستويين أما إذا كانت منفرجة فنفترض أن متممتها هي الزاوية الثنائية الكائنة بين المستويين. انظر الشكل (246-a).

يعطى في الشكل (246-b) المستويان المعينان بآثارهما Q , P والمطلوب إيجاد الزاوية الثنائية الكائنة بينهما. الزاوية المطلوبة هي متممة الزاوية الكائنة بين المستقيمين المعامدين للمستويين والمقامين من نقطة ما بالفراغ مثل K، نقيس هذه الزاوية مباشرةً في المطبق، الزاوية بين المستويين المعطيين هي الزاوية β هنا.

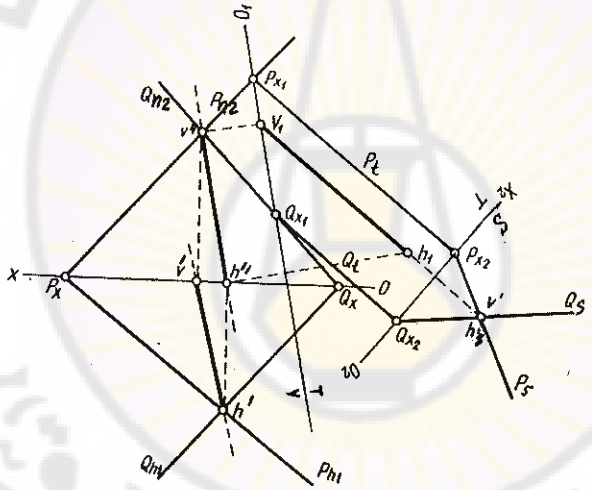


a) b)

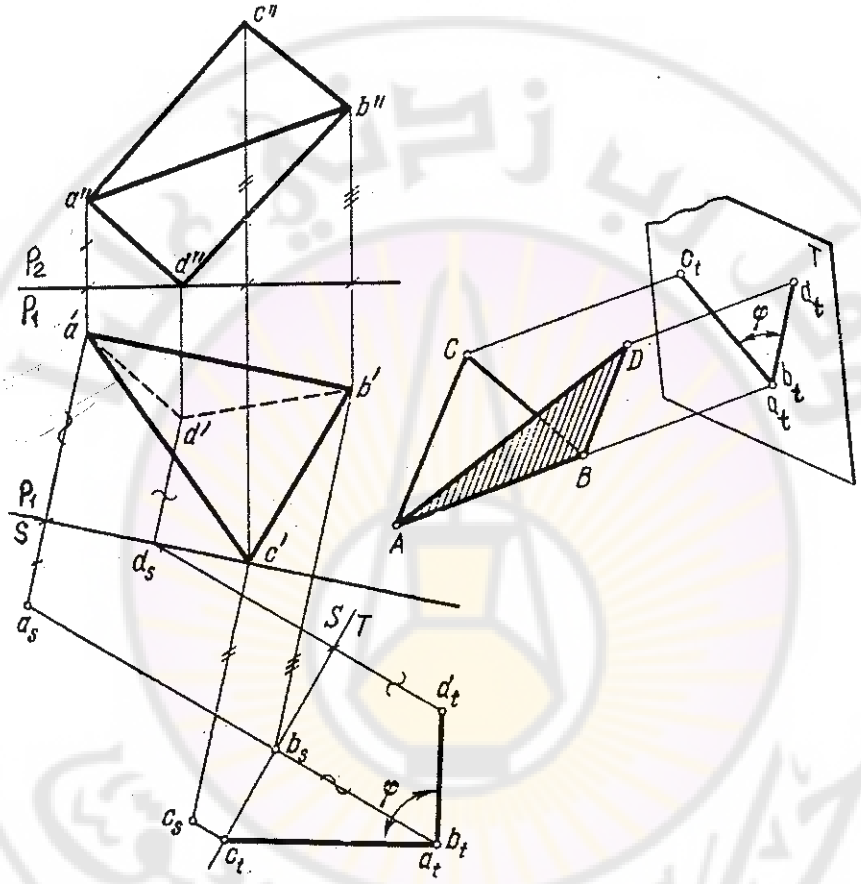
الشكل (246)

يمكن إيجاد الزاوية بين المستويين بطريقة تغيير مستو حيث نقوم بإسقاط المستويين على مستو يعامدهما (أي يعامد فصلهما المشترك). تظهر الزاوية الثنائية المطلوبة على المسقط الأخير. غالباً عندما يعطى المستويان محددان بمستقيمات متقاطعة يكون الإنشاء بهذه الطريقة أسهل.

المثال محلول على الشكل (247)، إذا أعطي المستوي بأثريه: (a) أو بمستقيمات متقاطعة (b). حيث حولنا المستقيم الفصل المشترك بين المستويين المعطيين إلى جبهي ثم إلى رأسي. حولنا على المساقط الجديدة نقطة من كل مستو لا تقع على الفصل المشترك، المستويان في المسقط الأخير اصبحا رأسيين. قياس الزاوية الثنائية بينهما تظهر مباشرةً على الرسم وهي الزاوية $c_1a_1d_1$. يمكن إيجاد قيمة الزاوية بهذا التسلسل بطريقة الدوران أيضاً.



الشكل (247)



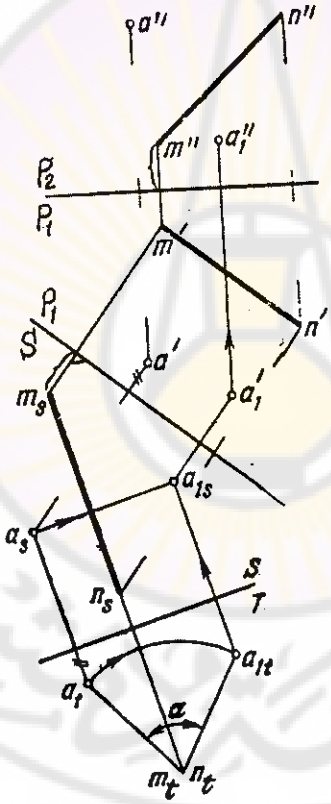
b)

الشكل (247)

15 ـ تدوير نقطة حـول مستقيم بزاوية معطـاة: لنفـرض أن المطلـوب تدويـر النقطة A حول المستقيم MN بزاوية معطاة α، في الشكل (248).

من المعروف أن الدوران حول مستقيم يصبح واضحاً على الرسم إذا كان هذا المستقيم معامداً لأحد مستويي الإسقاط. نقوم بتغيير مستوي الإسقاط مرتين كي يصبح المستقيم رأسياً مثلاً - كما على الرسم، نحول النقطة A أيضاً إلى تلك المساقط. الآن نقوم بتدوير النقطة في مسقطها الأخري حول مركز الدوران m_1 وبقيمة الزاوية المطلوبة α.

نستنتج المسقط a_{1t} لها ثم المسقطين الأصليين a'_1 , a''_1 بإرجاعهما إلى المساقط الأصلية. الوضع الجديد للنقطة في المساقط الأصلية $A\ (a'_1\ a''_1)$ يمثل وضع النقطة بعد أن دارت حول المستقيم المعطى بالزاوية المعطاة.

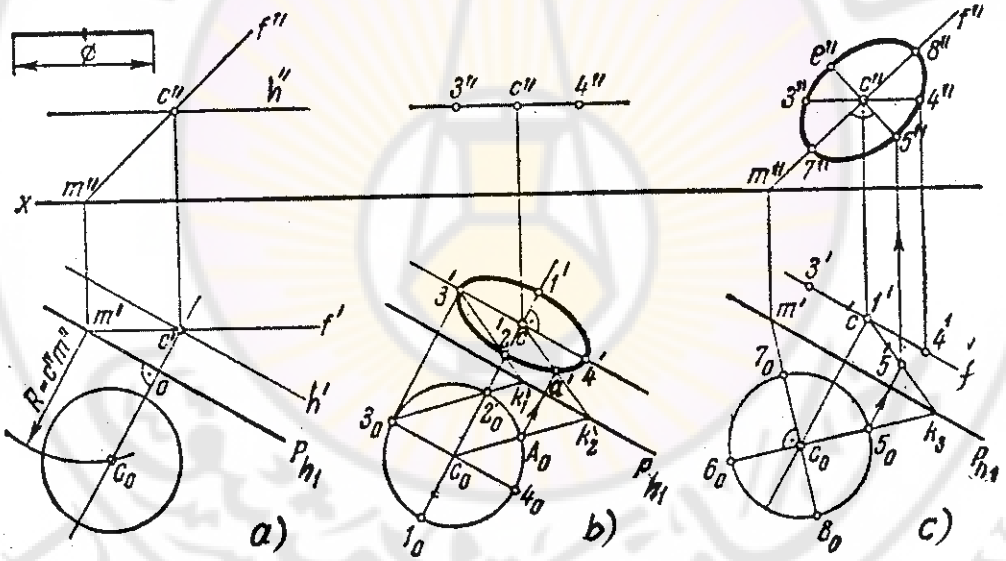


الشكل (248)

16 ـ إنشاء مسقطي دائرة معلومة المركز والقطر: من المعروف أن مسقط دائرة على مستو لا يوازيها بالحالة العامة هو قطع ناقص.

لنفرض أن الدائرة واقعة في المستوي P الذي أعطي أثره الأفقي فقط، كما أعطي مسقطا مركز الدائرة C (c′ , c″) وقطرها ϕ، الشكل (249) والمطلوب تمثيل مسقطي الدائرة على مستويي الإسقاط.

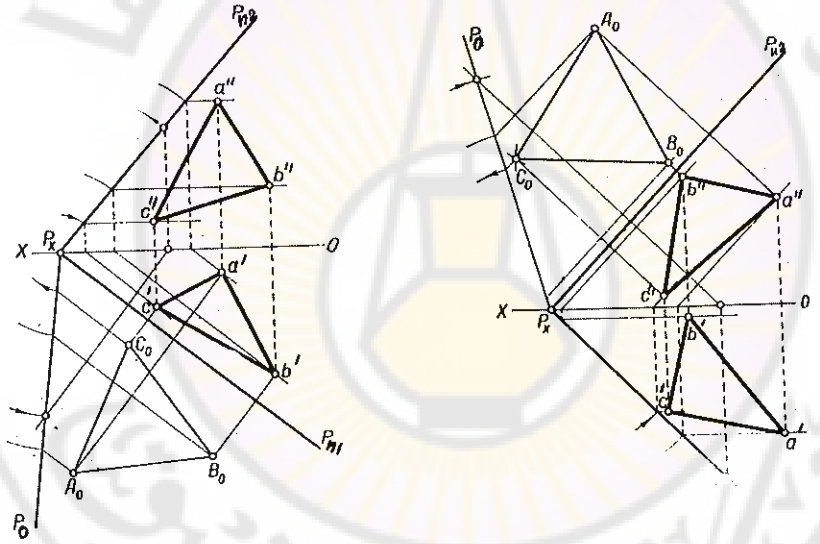
بغية إيجاد الدائرة أولاً لابد من تطبيق مستويها لكي تبدو بكبرها الحقيقي. نقوم بتطبيق مستوي الدائرة حول أثره الأفقي حيث نوجد مطبق النقطة C بوساطة المستقيم الجبهي MC الواقع في المستوي P نرسم الدائرة التي مركزها هي النقطة C0 ونصف قطرها $\frac{\phi}{2}$ المعطى. الشكل (a.



الشكل (249)

نرسم أولاً القطرين $1_0\,2_0$, $3_0\,4_0$ في الدائرة، ثم نقوم بإرجاع هذين القطرين إلى المساقط الأصلية ليشكلا قطرين مترافقين في المساقط $1'\,2'$, $3'\,4'$. ثم نقوم بإتمام إنشاء القطع الناقص في المسقطين بمعرفة القطرين المترافقين لهما. بطريقة ثانية نستطيع أن نأخذ عدداً أكبر من النقاط في الدائرة وإيجاد المساقط الأصلية لتلك النقاط كي نرسم القطعين الناقصين كما في الشكل (c).

17 ـ إيجاد الكبر الحقيقي لشكل مستو: قمنا بإيجاد الكبر الحقيقي للمثلث المعطى بالشكل (250) بطريقة التطبيق حول الأثر الأفقي للمستوي (a) ويمكن أيضاً بتطبيق المستوي حول أثره الجبهي (b). انظر الأشكال (227، 223، 210، 203) أيضاً.



a)

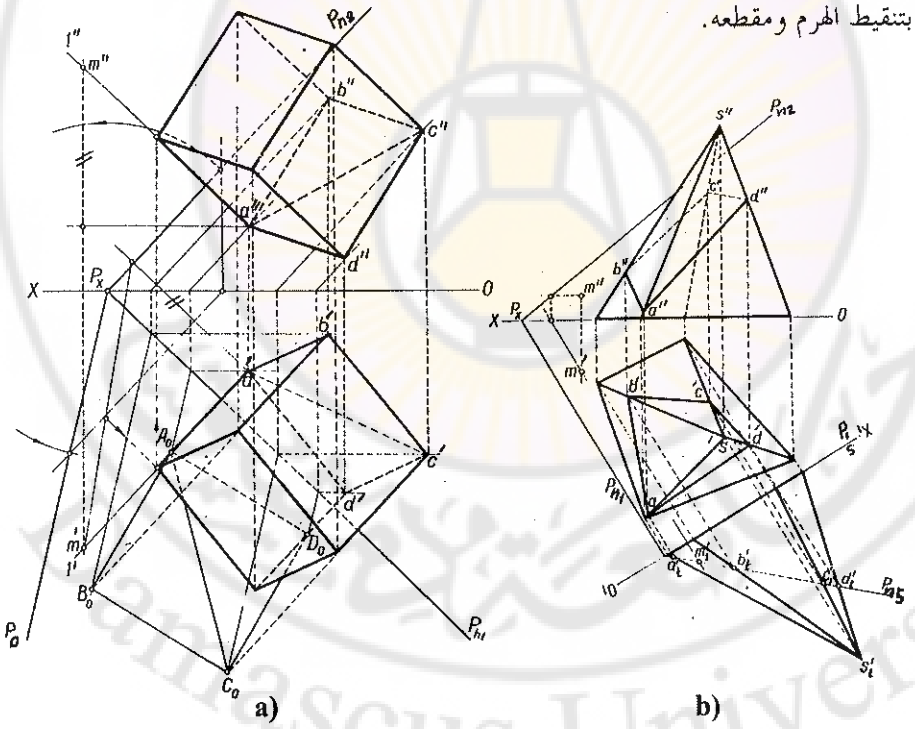
الشكل (250)

18 ـ تمثيل المجسمات وإيجاد مقاطعها بمستويات: لنفرض أنه المطلوب تمثيل مكعب طول ضلعه معطى واتجاه قطره AC وكذلك أحد رؤوس قاعدته A الواقعة في المستوي المعطى P.

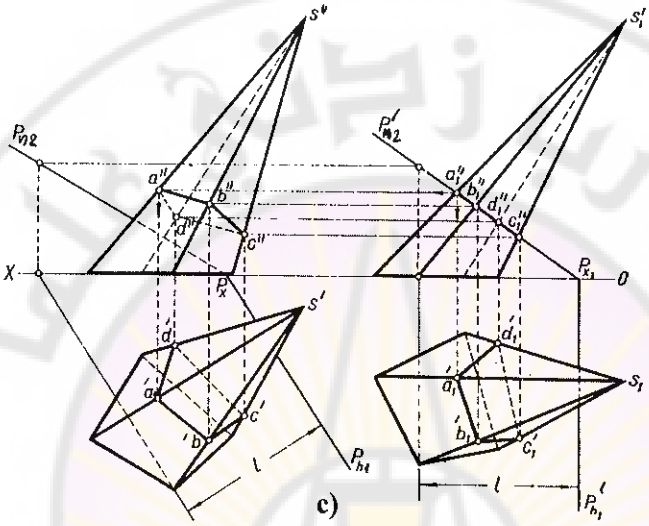
على الشكل (a-251) قمنا بإيجاد مسقطي قاعدة المكعب بطريقة التطبيق. ثم أقمنا أعمدة على المستوي من رؤوس القاعدة وأخذنا على الحرف المار من a طولاً يساوي طول ضلع المكعب فأوجدنا أحد رؤوس القاعدة العليا وأنشأناها بكونها توازي القاعدة السفلى للمكعب. قمنا أيضاً بتنقيط المسقطين وفق قواعد التنقيط المعروفة.

على الشكل (b-251) قمنا بإيجاد مقطع الهرم المعطى بالمستوي الكيفي P. حيث حولنا المستوي القاطع إلى حالة خاصة (مستو منصوب)، أوجدنا نقاط اختراق حروفه للمستوي المعطى وأرجعنا تلك النقاط إلى مساقطها. نقطنا الشكل الحاصل للمقطع بعدها.

على الشكل (c-251) قمنا بتحويل المستوي القاطع P إلى مستو منصوب ثم أوجدنا المقطع المطلوب للهرم المعطى، أرجعنا المقطع إلى المساقط الأصلية ثم قمنا بتنقيط الهرم ومقطعه.



الشكل (251)


s''
P_{n2}
a''
b''
d''
c''
X
P_x
s'
d'
a'
c'
b'
l
P_{h1}
s_1'
P_{n2}'
a_1''
b_1''
d_1''
c_1''
P_{x_1}
0
d_1'
a_1'
s_1
b_1'
c_1'
l
P_{h_1}'

c)

الشكل (251)

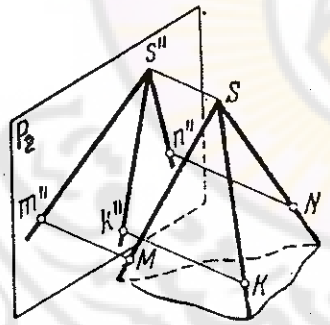
الفصل السادس

تمثيل كثيرات الوجوه

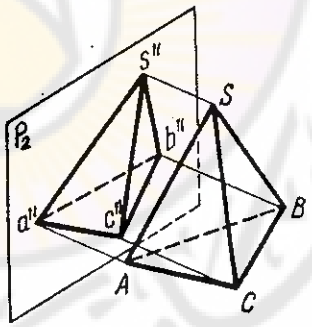
6 - 1 : إنشاء مساقط كثير الوجوه

يقودنا إسقاط كثير الوجوه إلى إنشاء مساقط نقاط هذا الجسم كافة، مثال ذلك أنه عندما نسقط الهرم SABC على المستوي P كما في الشكل (252) فنقوم بإيجاد مساقط رؤوس هذا الهرم (القمة أو الرأس S والرؤوس C , B , A ونكون بذلك قد أسقطنا القاعدة ABC والوجوه SAB , SBC , SAC أيضاً).

كذلك نستطيع إسقاط الزاوية ثلاثية السطوح ذات الرأس S، لاحظ الشكل (253) يمكن إسقاط الرأس S ونقطة من كل ضلع لهذه الزاوية M , N , K.



الشكل (253)

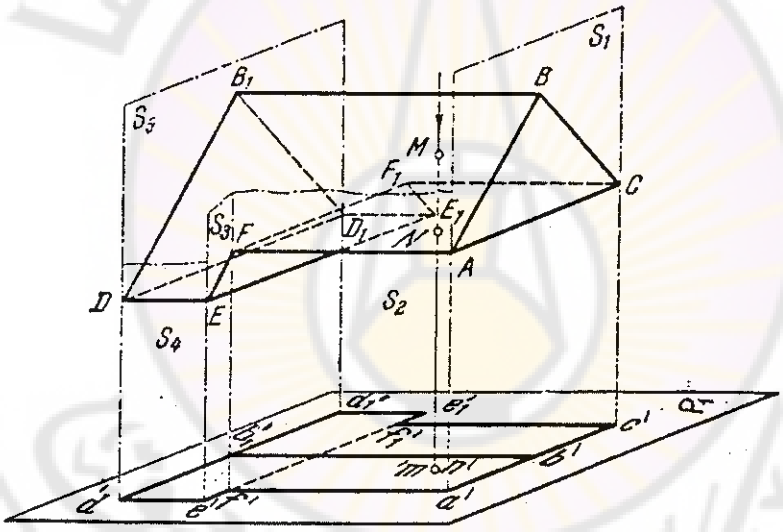


الشكل (252)

نلاحظ أننا في كل مرة نحدد على الرسم الفراغي أو على المساقط الفصول المشتركة بين وجوه الشكل متعدد الوجوه (المجسم)، ويعد هذا مبدأ التمثيل الهندسي.

على الشكل (254) كثير وجوه معقد، لدى إسقاطه على المستوي P نسقط رؤوس الزوايا الثلاثية أو رؤوس المجسم نفسه ونحصل على المسقط الممثل في النقاط $b'\ c'f'_1\ e'_1\ d'_1\ b'_1\ d'\ e'f'\ a'a'$ وهي النقاط التي تحد إطار المسقط، نسمي المحيط الحاصل من هذه النقاط بالمحيط الظاهري لمسقط المجسم.

نلاحظ أن الضلع FF_1 غير مرئي بالنسبة للناظر من الأعلى، لذلك فإن مسقط هذا الضلع ظهر بخط متقطع. كما نلاحظ أن النقطتين من وجوه المجسم N , M لم نسقطهما على الرسم، غير أن إيجاد مساقطهما ممكن دوماً بتحميلهما على مستقيمات تمر منها وتقطع ضلعين من الوجه الواقعة فيه.



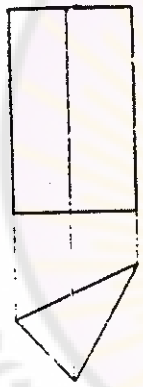
الشكل (254)

6 - 2 : التمثيل الهندسي للموشور والهرم

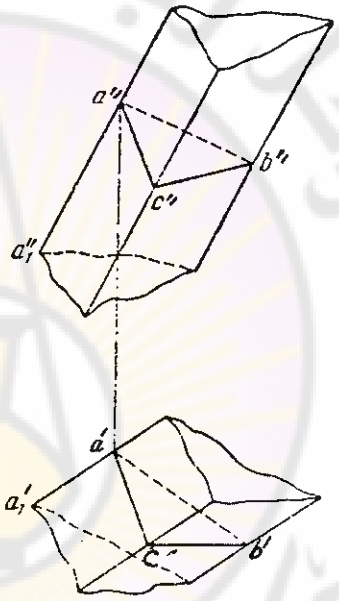
لنفرض أنه لدينا الموشور الثلاثي المبين في الشكل (225)، إذا قطعنا هذا الموشور بالمستوي المعامد لحروفه نحصل على قاعدة الموشور $ABC\ (a'\ b'\ c'\ ,\ a''\ b''\ c'')$ لنثبت

الموشور الثلاثي الحاصل في المساقط على مستويين أحدهما هو المستوي القاطع نفسه نفترضه هو المستوي الأفقي والآخر (المستوي الجبهي) هو مستو يعامده.

في الشكل (256) نلاحظ أن المثلث الحاصل من القطع هو قاعدة الموشور نفسها وحروفه هي المستقيمات العمودية على القاعدة والمارة من رؤوسها. نسمي الموشور الحاصل بالموشور القائم بحالة كون القاعدة هي مثلث منتظم (مثلث متساوي الأضلاع) يسمى بالموشور الثلاثي المنتظم، غير ذلك يكون الموشور مائلاً.



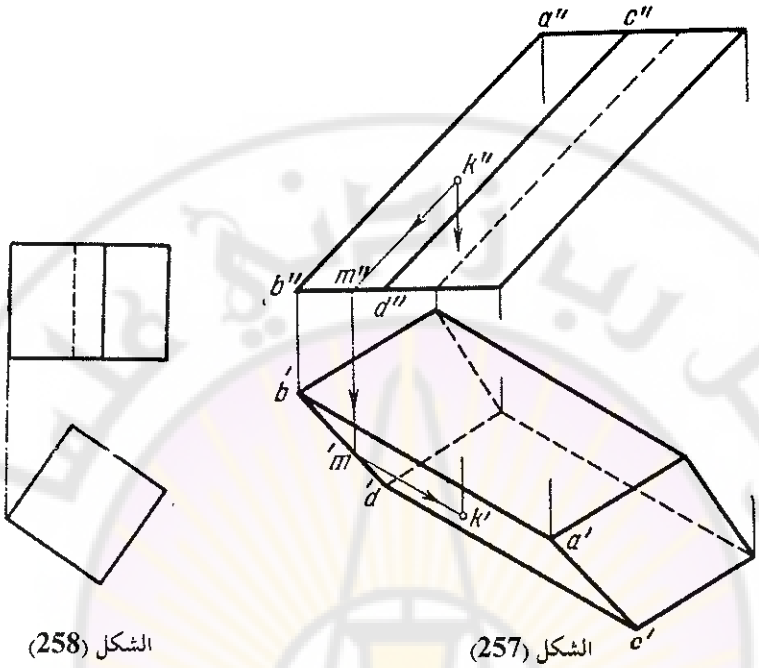
الشكل (256)



الشكل (255)

يبين الشكل (257) مسقطي موشور رباعي مائل النقطة K تقع على الوجه ABCD نستطيع تحديد أحد مسقطيها بمعرفة الآخر بتحميلها على مستقيم مار منها، اتجاه الأسهم يوضح كيفية إيجاد المسقط الأفقي للنقطة إذا أعطينا المسقط الجبهي لها.

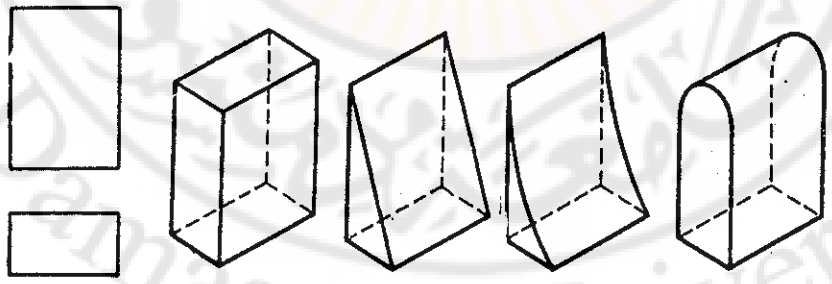
الشكل (258) يبين مسقطي موشور رباعي منتظم.



الشكل (258)

الشكل (257)

يعبر تمثيل المسقطين المبينين في الشكل (259) عن متوازي السطوح الفراغي في الشكل (260) غير أ، هذا لا يعد الجواب الوحيد فالأشكال الفراغية في الشكل (261) كافة يمكن أن تكون حلاً أيضاً للمساقط المعطاة على الشكل (259).



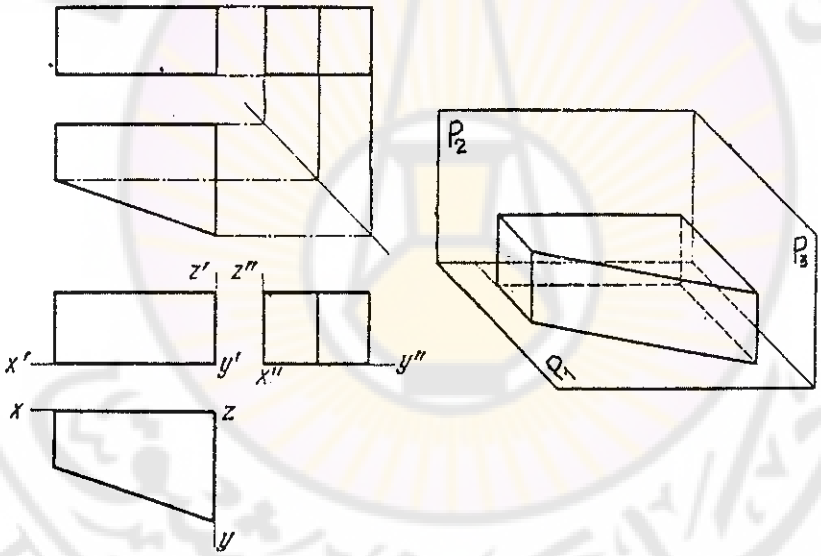
الشكل (259)

الشكل (260)

الشكل (261)

من الواضح أن المسقطين بهذه الحالة لا يكيفان لتحديد المجسم الفراغي الذي يمكن إسقاطه بالشكل المعطى. لابد من مسقط آخر لتوضيح الشكل الكامل للمجسم.

يبين الشكل (262) الشكل الفراغي لموشور رباعي غير منتظم (قاعدته هي شبه منحرف) وتمثيل مساقطه الثلاثة (الأفقي، الرأسي والجانبي) على الشكل (263)، تبدو المحاور مباشرةً على الرسم، في كل المساقط يمكن الاكتفاء بإسقاط رؤوس الموشور وتكفي عملية الوصل بين تلك الرؤوس كي تمثل مساقط حروفه وبالتالي مساقط الموشور نفسه.

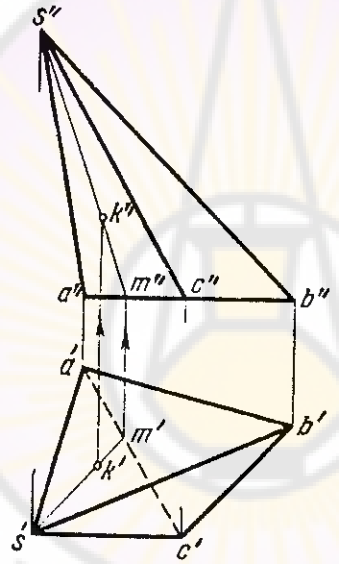


الشكل (263) الشكل (262)

يبين الشكل (264) مسقطي هرم ثلاثي مائل، قاعدته ABC ورأسه S، حيث تم تمثيل مساقط رؤوس القاعدة ورأس الهرم ثم تم الوصل بين مساقط تلك النقاط.

نلاحظ أنه يمكن أيضاً إيجاد مسقط أي نقطة من وجوه الهرم معطى فيه المسقط الأفقي للنقطة فقط K (k , ?) الواعقة على الوجه SAC، يمكن بإمرار مستقيم من هذا الوجه (SM) مثلاً إيجاد المسقط الجبهي لها.

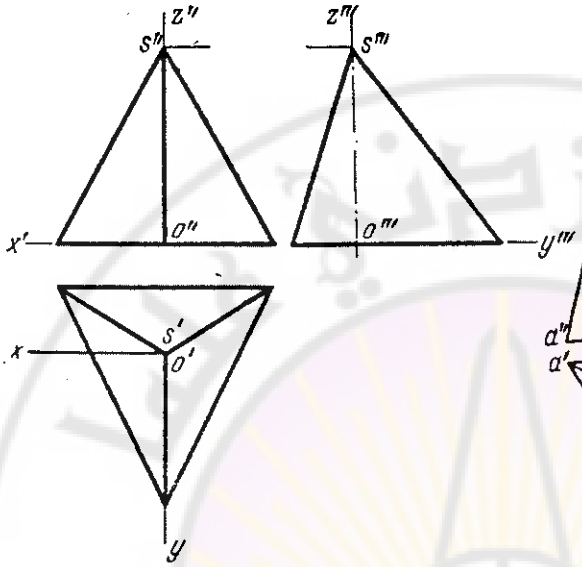
يبين الشكل (265) مسقطي هرم ثلاثي قائم ومنتظم (الهرم القائم: مسقط الهرم يقع على نقطة مركز ثقل قاعدته)، في الحالة العامة لا يكفي معرفة المسقطين لتحديد الشكل الفراغي للهرم هذا، يبين الشكل الفراغي المجاور للشكل هذا الشيء.



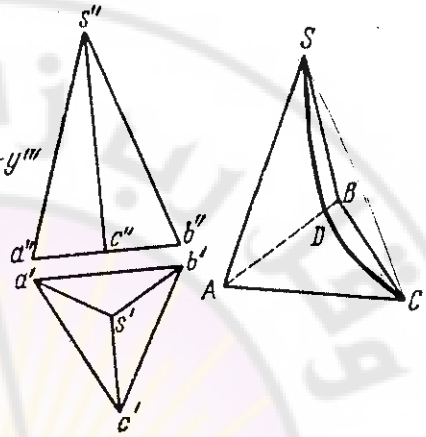
الشكل (264)

في الشكل (266) المساقط الثلاثة لهرم ثلاثي منتظم وقائم. المحاور الإحداثية مبينة أيضاً على الرسم.

على الشكل (267) المساقط الثلاثة لجذع هرم خماسي غير منتظم (جذع الهرم هو الهرم المقطوع).



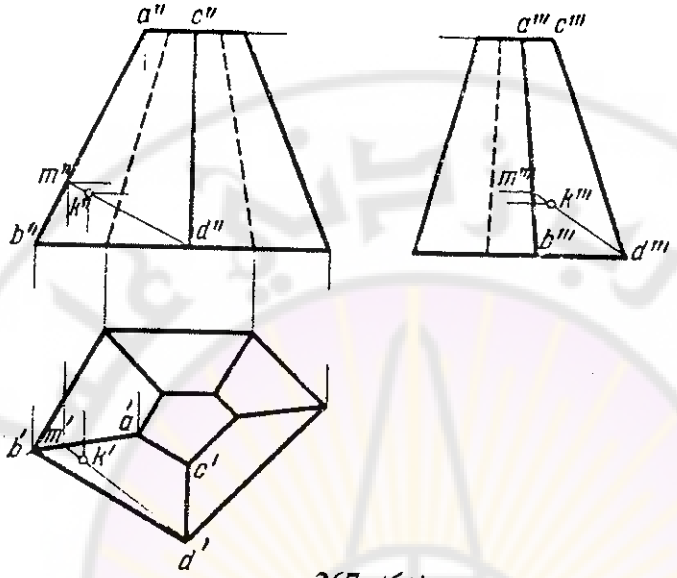
الشكل (266)



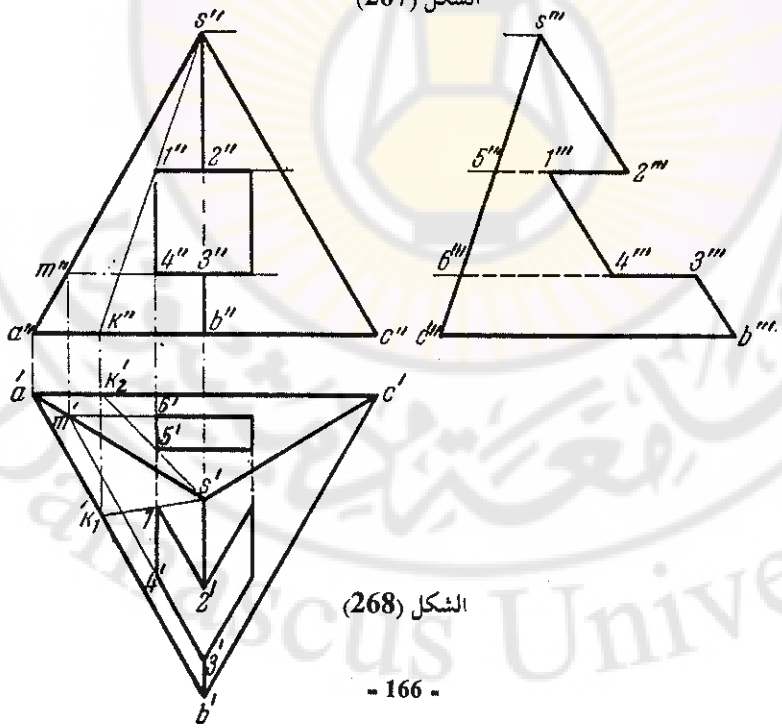
الشكل (265)

يبين الرسم كيفية إيجاد مسقطين غائبين لأي نقطة في أي وجه على هذا المجسم. لنفرض أنه أعطي المسقط الأفقي k للنقطة K الواقعة على الوجه ABCD والمطلوب إيجاد المساقط الغائبة لها. نستطيع بتحميل المسقط المعطى على مستقيم مار بها وليكن المسقط d′m′ (نختار المستقيم ماراً من أحد الرؤوس للسهولة) على الوجه المذكور استنتاج المسقطين الباقيين للمستقيم هذا ومن ثم استنتاج المسقطين الغائبين النقطة.

على الشكل (268) المساقط الثلاثة لهرم ثلاثي قائم ومنتظم مقتطع منه مجسم موشوري حروفه أفقية كما يظهر الرسم. النقطة 2 تقع على الحرف SB مباشرةً. النقطة 1 تقع على المستقيم SK في المساقط الثلاثة ـ تتبع ذلك على المساقط. كما أن النقاط 6 , 4 , 1 تقع على المستقيمين المارين من النقطة M وفي وجهين الهرم , SAB SAC.

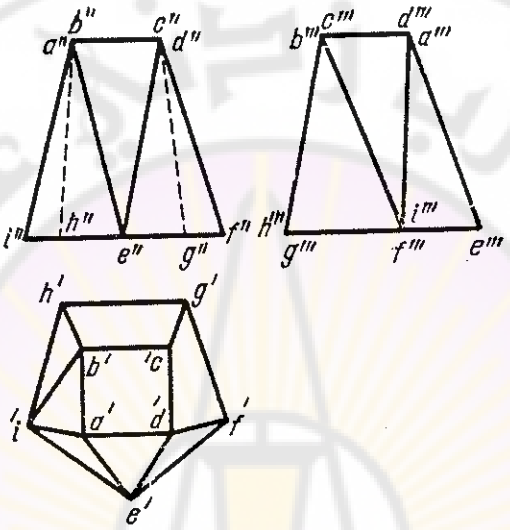


الشكل (267)



الشكل (268)

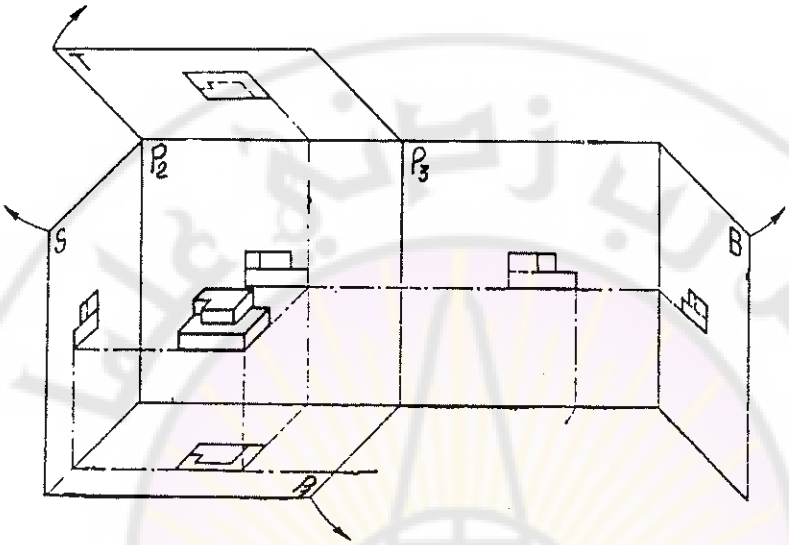
الشكل (269) يعطي مثالاً آخر على مساقط الأشكال الفراغية (المجسمات) وهو يبين المساقط الثلاثة لمجسم قاعدته السفلى تقع في المستوي الأفقي للإسقاط هي المخمس EFGHI وقاعدته العليا ABCD أفقية أيضاً.



الشكل (269)

6 ـ 3 : نظام توضع مساقط الأشكال الهندسية على الرسوم الهندسية

ثمة قاعدة يتفق عليها المهندسون في إظهار مساقط المجسمات الفراغية على الرسم. يبين الشكل (270) كيفية توضع مجسم ما والمستويات التي يمكن الإسقاط عليها، المستوي الأفقي P_1، المستوي الجبهي P_2، المستوي الجانبي P_3، المستوي الجانبي الأيسر S، المستوي العلوي T، المستوي الخلفي B. كما يتم تسمية المساقط الموافقة على تلك المستويات فنقول المسقط الافقي للجسم، المسقط الجبهي، المسقط الجانبي، المسقط الجانبي الايسر، المسقط العلوي، المسقط الخلفي.

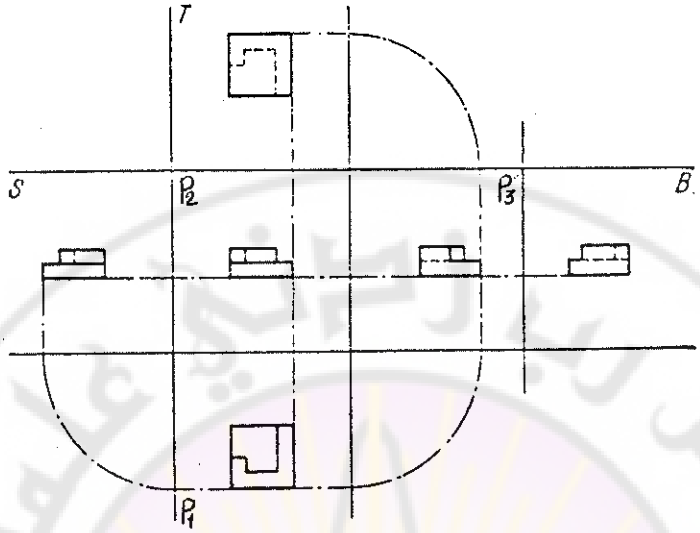


الشكل (270)

في كل مرة نتخيل وجـود المجسـم في المكعـب المبين في الشـكل ويتـم إسـقاط المجسم على وجوهه الداخلية الستة. في كل الأحيان يمكـن الاكتفـاء بالمسـاقط الثلاثـة الأولى وفي بعض الأحيان يكتفى بمسقطين (الأول والثـاني) ـ عندمـا لا يقبـل الرسـم على مسقطين تأويلاً غير مطلوبـاً للواقـع الفراغـي للمجسـم المعـني. في كـل الحـالات نفترض المسقط الجبهي هو المسقط الأساسي للجسم.

من الواضح أن الرسم المعطى يجب أن يسمح بقراءة المعلومات كافـة واللازمـة لتحديد المجسم تحديداً وحيداً لا يقبل تـأويلات أخـرى، وبحيـث تكـون عمليـة إيجـاد المساقط الغائبة ممكنة.

على الشكل (271) التوضع القياسـي للمسـاقط المذكـورة أعـلاه، علـى ورقـة الرسم.



الشكل (271)

هناك نظام آخر يعمل به في بعض البلدان (أمريكا، إنكلترا، هولندا) حيث تتوضع المساقط كما في الشكل (272). اتجاه الأسهم هو اتجاه الإسقاط المتخذ في المساقط هنا يعدون المسقط الافقي هو المسقط الأساسي.

الشكل (272)

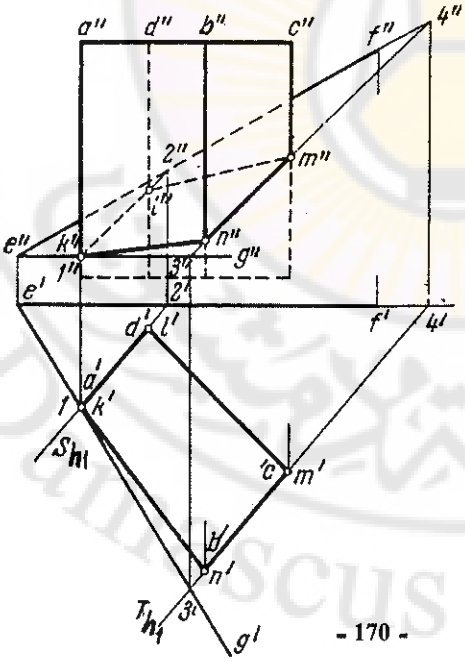
من وجهة نظر الهندسة الوصفية النظام الأول يتفق مع كون الجسم موجوداً في الربع الأول، كما أن هذا النظام أسهل للتخيل الفراغي ونتبعه في بلادنا.

6 ـ 4 : تقاطع مستقيم ومستو مع موشور وهرم

يقطع مستو بجسم ما (موشور أو هرم) في سطح مستو متعدد الأضلاع في الحالة العامة (مضلع تقاطع). رؤوس هذا المضلع عبارة عن نقاط اختراق حروف المجسم للمستوي القاطع، بينما تكون أضلاع المضلع الناتج هي عبارة عن الفصول المشتركة بين المستوي القاطع ووجوه هذا المجسم.

إيجاد مضلع التقاطع الحاصل يقودنا هذا إلى إيجاد نقاط اختراق حروف المجسم للمستوي القاطع في الحالة الأولى، وفي الحالة الثانية ـ إلى إيجاد الفصول المشتركة بين وجوه المجسم والمستوي القاطع، من المعلوم أن هذه الحالة أيضاً يمكن ردها إلى الحالة الأولى.

على الشكل (273) مسقطي مجسم (موشور رباعي قائم)، يراد إيجاد المقطع الحاصل من قطعه بالمستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين (EF , EG).

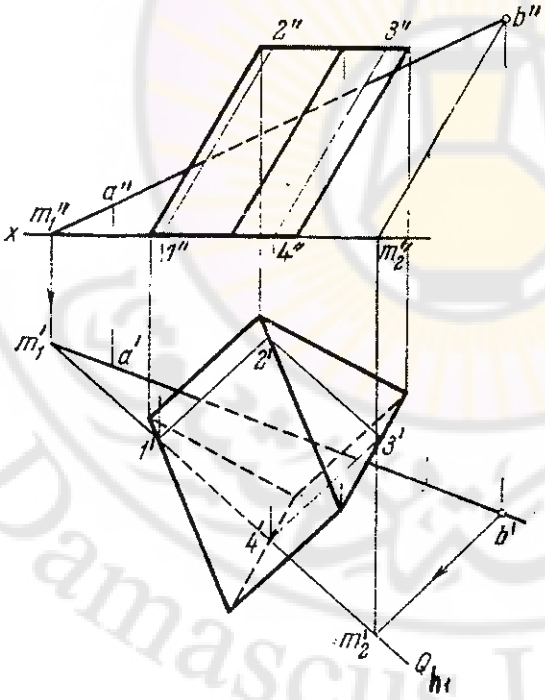


الشكل (273)

نقوم بإيجاد نقاط اختراق حروف الموشور للمستوي القاطع. إذا أخذنا مستوياً مساعداً رأسياً T ماراً من وجه الموشور الحاوي ضلع القاعدة العليا له (B C)، سيقطع هذا المستوي الحرفين الشاقوليين في النقطتين N , M، كذلك سيقطع المستوي المساعد S أحرف الموشور المارين من D , A في L , K. نكون بذلك قد أوجدنا رؤوس المقطع الحاصل وهو عبارة عن المضلع K L M N يبين الرسم مسقطيه حيث مسقطه الأفقي ينطبق على المسقط الأفقي للموشور نفسه.

أبقينا على الرسم الجزء العلوي فقط من الموشور. قمنا أيضاً بتنقيط مسقطي المضلع الحاصل، ضلع المقطع الحاصل غير مرئي إن وقع على وجه غير مرئي ورأس المقطع الحاصل غير مرئي إن وقع على حرف غير مرئي.

نبين على الشكل (274) إلى اليسار، المقطع الحاصل من قطع الموشور الرباعي القائم بالمستوي المنصوب Q، المسقط الجبهي لمضلع التقاطع على الأثر الجبهي للمستوي القاطع بهذه الحالة، بينما المسقط الأفقي على المسقط الموافق للموشور.



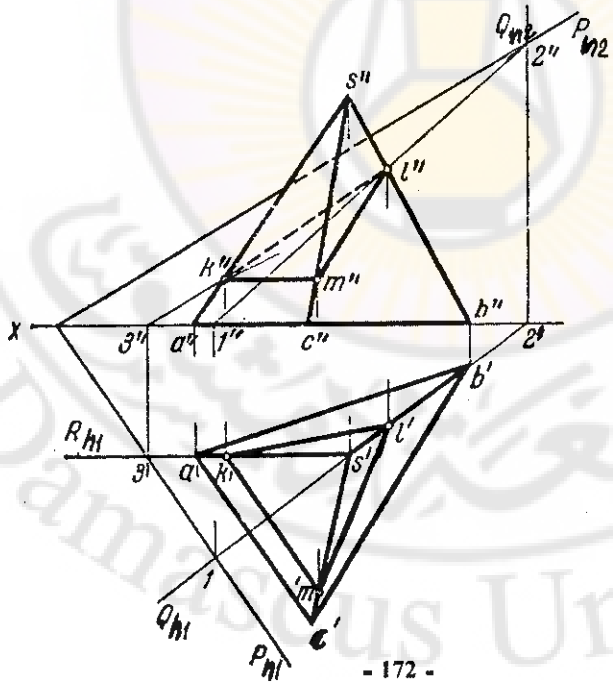
الشكل (274)

على الشكل (274) إلى اليمين، المقطع الحاصل من قطع الموشور الثلاثي المائل بالمستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين MB , M M.

نوجد أولاً الأثر الأفقي للمستوي القاطع (عن طريق أثري المستقيمين الواقعين فيه (MB , M_1B_1)، الأثر الأفقي لهذا المستوي هو Q_{h1}.

يقطع هذا المستوي قاعدة الموشور الأفقية في الفصل المشترك 4 1 نرسم منهما المستقيمين 3 4 ، 2 1 الموازيين لحروف الموشور، فنحصل على مضلع التقاطع 4 3 2 1.

على الشكل (275) مقطع الهرم الثلاثي SABC مع المستوي الكيفي المعين بأثريه P قمنا بإيجاد النقطة L التي تمثل نقطة اختراق الحرف SB مع المستوي القاطع بمساعدة المستوي المساعد الرأسي Q، ثم قمنا بإيجاد النقطة K التي تمثل نقطة اختراق الحرف SA مع المستوي القاطع بمساعدة المستوي المساعد الجبهي R. حرف الهرم AC أفقي فهو يوازي الاثر الأفقي للمستوي القاطع وبالتالي يكون الفصل المشترك للوجه SAC مع المستوي القاطع أيضاً افقياً، المستقيم KM. مضلع التقاطع الحاصل هو المثلث KLM يظهر على الرسم مسقطيه، الضلع "K"L منه غير مرئي لأنه واقع في وجه غير مرئي.



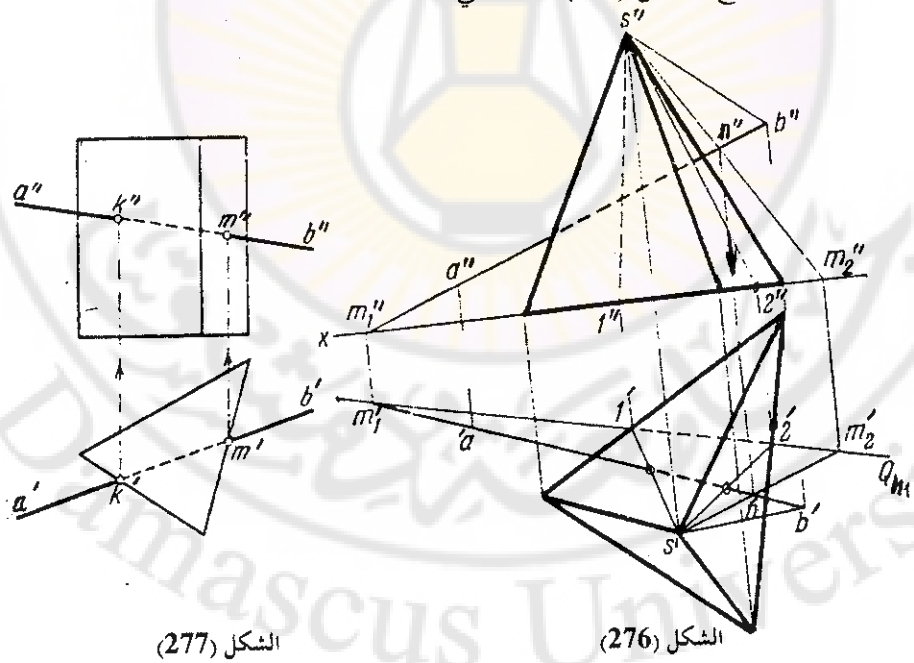
الشكل (275)

ننتقل الآن إلى دراسة تقاطع مستقيم مع مجسم. سيتقاطع المستقيم مع وجوه المجسم، للأجسام المحدبة (كل زواياه الفراغية ـ عند الرؤوس أقل من 180°) يخترقها أي مستقيم في نقطتين على الأكثر، نسميهما نقطة الدخول ونقطة الخروج (نقطتي الاختراق).

يبين الشكل (276) هرماً ثلاثياً رأسياً هو النقطة S والمطلوب إيجاد نقاط اختراق المستقيم AB معه.

نقوم بإمرار مستو يحوي المستقيم القاطع AB ومار من رأس الهرم Q. نوجد الأثر الافقي له Q_{n1} للمستوي هذا (عن طريق أثري المستقيمين SN , AB الواقعين فيه مثلاً). سيتقاطع هذا المستوي مع قاعدة الهرم (الأفقية) في الفصل المشترك 2 1، نقوم بوصل نهايتي الفصل هذا مع رأس الهرم فيقطع المستقيم في نقطتي الاختراق المطلوبة. لم نبين هاتين النقطتين على الرسم.

إذا كانت قاعدة موشور قائم افقية فإيجاد نقطتي اختراق مستقيماً له أكثر سهولةً. يوضح الشكل (277) هذا الشيء.



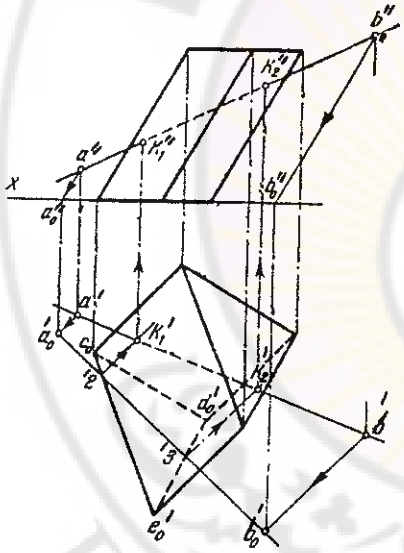
الشكل (277) الشكل (276)

غير أن ما قمنا به ممكن هنا فقط عندما تكون قاعدة المجسم أفقية.

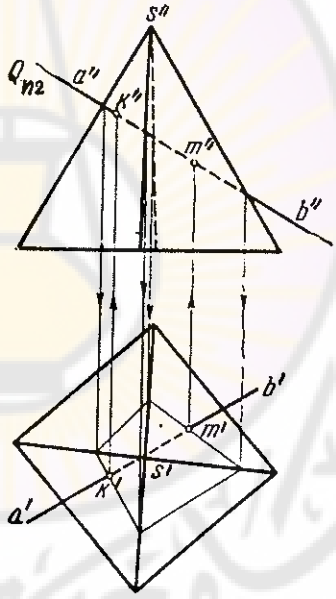
ثمة طريقة عامة وأسهل لإيجاد نقاط اختراق مستقيم لمجسم. سنوضح هذا على الشكل (278).

نقوم بتمرير مستو منصوب هو المستوي Q مثلاً من المستقيم القاطع. سيتقاطع هذا المستوي مع الهرم في مضلع التقاطع المبين على الرسم. نقطتي اختراق المستقيم للهرم هي نقطتا التقاء المستقيم مع مضلع التقاطع الحاصل، نوجد مسقطيهما.

نقوم بتنقيط هذا المستقيم، جزء المستقيم القاطع المحصور بين نقطتي التقاطع غير مرئي دوماً. النقطة الواقعة على وجه غير مرئي هي غير مرئية أيضاً.



الشكل (279)

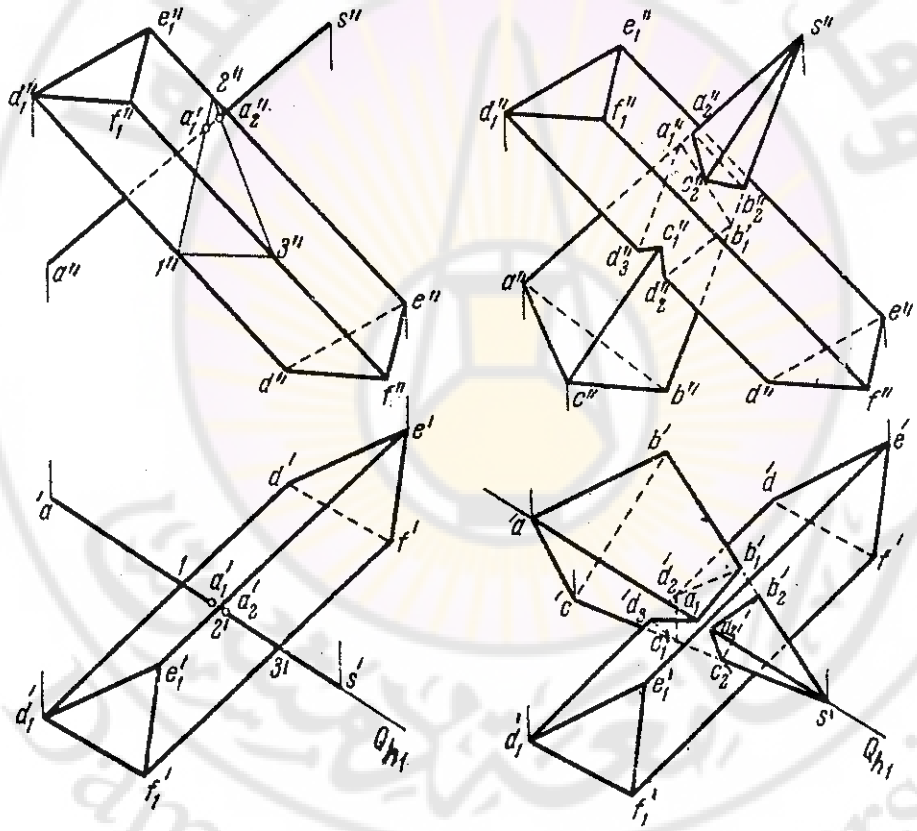


الشكل (278)

على الشكل (279) أوجدنا نقطتي تقاطع المستقيم AB للموشور الثلاثي المبين. أوجدنا أثر مستو يحوي المستقيم الموازي لحروف الموشور. يتقاطع هذا

المستوي مع القاعدة في الفصل المشترك 3 2. ويتقاطع مع الوجه الحاوي CE في فصل مشترك مار من 2 ومواز لحروف الموشور. سيتقاطع هذا الأخير مع المستقيم القاطع في نقطتي التقاطع K_1 , K_2 المطلوبتين. الأسهم تساعدك على تتبع خطوات الحل.

كان إيجاد نقطتي التقاطع عن طريق تحديد مضلع التقاطع الحاصل (مثلث بهذه الحالة) من قطع الموشور بمستو رأسي مار من المستقيم القاطع أسهل بكثير كما في المثال السابق. قم بذلك بنفسك!



الشكل (280)

الشكل (281)

ثم وبالطريقة نفسها نوجد نقاط اختراق حروف الموشور لأوجه الهرم ونوجد نقطتي اختراق الحرف $D D_1$ لوجهي الهرم (S AC , S BC) وهما النقطتان (D_3 , D_2)، نلاحظ أن الحرفين EE , EF لا يخترقان أوجه الهرم.

نقاط الاختراق	الحرف القاطع	الوجه المعني	الحرف	المجسم
1 ,6	A1	DEE1D1	SA	الهرم
1	A2	EFF1E1	//	//
2	B1	DEE1D1	SB	//
II	B2	DFF1E1	//	//
4	C1	DFF1D1	SC	//
III	C2	DFF1E1	//	//
3	D2	SCB	DD1	الموشور
5	D3	SAC	//	//
/	/	/	EE1	//
/	/	/	FF1	//

نقوم بتنقيط نقاط رؤوس المجسم احلاصل. النقطة الواقعة على حرف مرئي تكون مرئية وإلا تكون غير مرئية. الجزء من الحرف الواحد في أي من المجسمين والواقع بين نقطتي اختراقه للمجسم الآخر هو حتماً غير مرئي لأنه يقع داخل المجسمين.

بعد ذلك نقوم بالوصل بين اي نقطتين واقعتين على وجه واحد من أوجه الموشور والهرم فنحصل على أضلاع مضلع التقاطع. الضلع الواقع على وجه مرئي هو مرئي وإلا عكس ذلك.

من الواضح أن تنقيط مجسم التقاطع يعتمد على أن وجوه كلٍ من المجسمين المتقاطعين هي عاتمة وتستطيع أن تحجب ما خلفها من نقاط في المجسم الآخر.

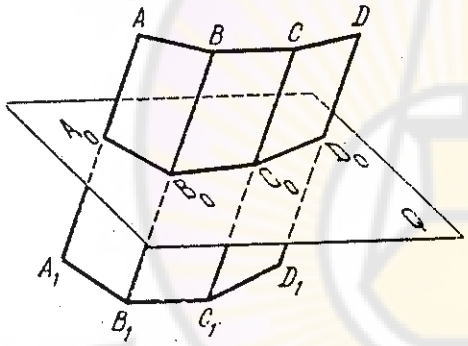
6 - 6 : الطريقة العامة في إيجاد منشورات كثيرات الأوجه

يمكن أن نوجد (بسط، انفراد) موشور الشكل (282) على رسم مجاور الشكل (283)، كما يلي:

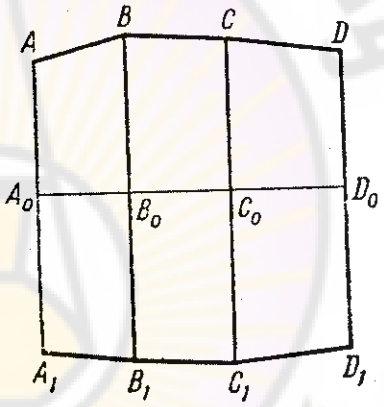
1 - نقاطع أوجه الموشور بمستو يعامد أحرف هذا الموشور؛

2 - نوجد أطوال القطع المستقيمة الحاصلة من تقاطع هذا المستوي للموشور؛

3 - إقامة الأعمدة و AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 من نهايات هذه القطع، وأخذ الأطوال الموافقة عليها (من الطرفين)؛



الشكل (282)



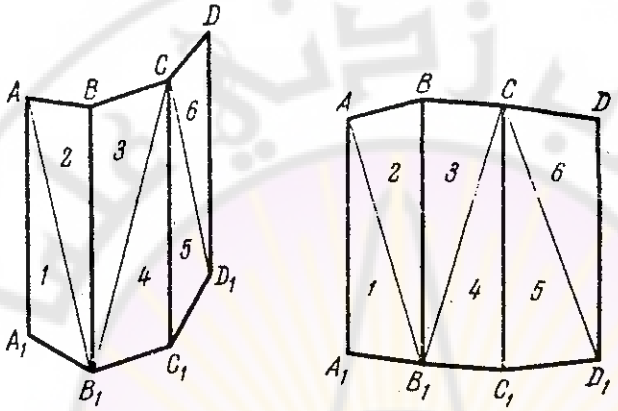
الشكل (283)

4 - الوصل بين نهايات هذه الأعمدة.

سيمثل الشكل الناتج ($A\ B\ C\ D$, $D_1\ C_1\ B_1\ A_1$) منشور الموشور الرباعي المفرود جزئياً على الشكل.

يمكن إيجاد منشور الموشور بمساعدة أقطار أوجه هذا الموشور أيضاً، الشكل (284) يوضح ذلك. ينصح بتقسيم الأوجه التي تحتوي أكثر من أربعة أضلاع فقط.

من الواضح أن الأطوال التي يجب أن تؤخذ على المنشور القيم الحقيقية لحروف المجسم. من الضروري إيجاد الأطوال الحقيقية لهذه الحروف بدءاً من مساقطها.

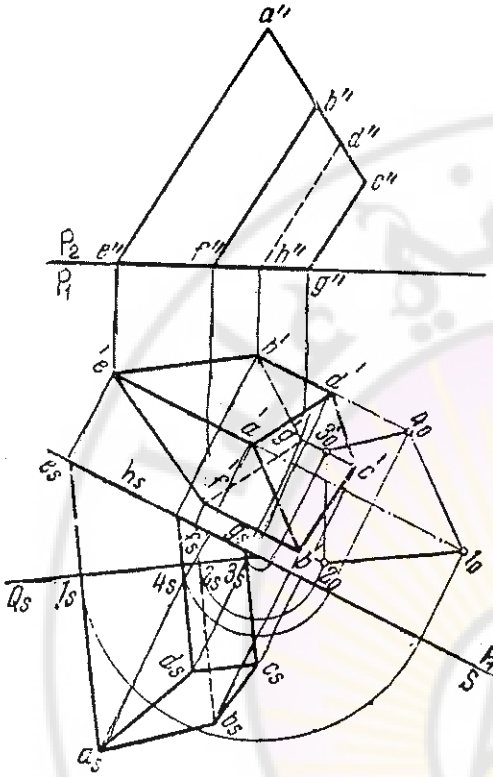


الشكل (284)

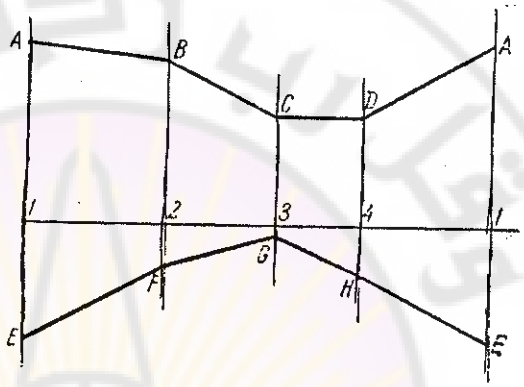
يمكن إيجاد الأطوال الحقيقية لحروف الموشور بمساعدة المساقط المعطاة للموشور بإسقاط هذا الموشور على مستو يوازي تلك الأوجه كما في الشكل (285). كما يمكن إيجاد الأطوال الحقيقية لأضلاع المضلع الناتج عن قطع الموشور بمستو معامد لحروف الموشور. (وذلك بإيجاد الكبر الحقيقي لهذا المضلع - في الشكل تم إيجاد المضلع الحاصل $1_s\ 2_s\ 3_s\ 4_s$ ثم تم تطبيقه على المستوي P_1 وأوجدنا الكبر الحقيقي له $(1_0\ 2_0\ 3_0\ 4_0)$. محور التطبيق هو Q_{n1} - لم نبينه على الرسم.

بعد ذلك نقوم بنقل أطوال أجزاء الحروف وأضلاع القاعدة وفقاً للترتيب الذي شرحناه في الشكل (283)، لنحصل أخيراً على المنشور المطلوب في الشكل (286).

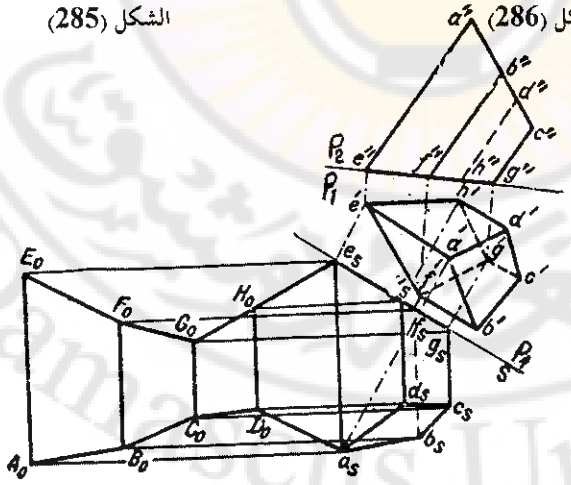
على الشكل (287) منشور موشور.



الشكل (285)



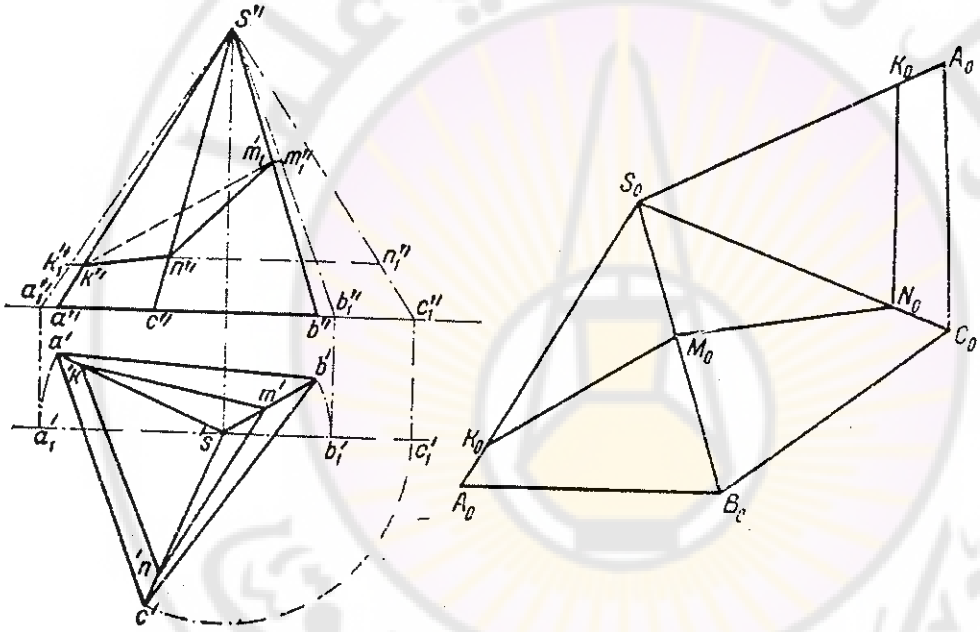
الشكل (286)



الشكل (287)

أظهرنا المنشور مباشرةً على الرسم حيث بدأنا بالحرف A E على المسقط الأخير a'e'، ثم تم أخذ مقاسات الحروف الأخرى كافة، على أبعاد تساوي ارتفاعات وجوه الموشور المعطى. في النهاية حصلنا على منشور الموشور A_0 B_0 C_0 D_0 a_s e_s H_0 G_0 F_0 E_0.

في الشكل (288) تم إيجاد منشور هرم معطى SABC مسقطيه. بما أن القاعدة أفقية فكبرها الحقيقي سيظهر على مسقطها الافقي.



الشكل (288)

الأطوال الحقيقية لحروف الهرم قمنا بإيجادها بطريقة الدوران، حيث قمنا بتدوير كل حرف على حدة حتى أصبح جبهياً، الطول الحقيقي للحروف، الأطوال الحقيقية لها ستظهر مباشرةً على المساقط الجبهية لها.

قمنا، على رسم مستقل، بدءاً من رأس الهرم S_0 بتمثيل هذه الأطـوال ـ مثلاً: طول الحرف S C هو طول المسقط $s''c''_1$ أما على المنشور هو الحرف $S_0\ C_0$ (يمكـن إيجاد نقاط رؤوس القاعدة بوساطة الفرجار).

قمنا بتمثيل المضلع المعطـي K N M، علـى المنشـور أيضـاً $K_0\ N_0\ M_0$ بغيـة التدريب. قد يكون هذا المضلع هو عبارة عن مقطع الهرم بمستو قاطع ما.

الفصل السابع

الإسقاط الفراغي (الأكسونومتري)

7 - 1 : معلومات عامة في الإسقاط الفراغي

في حالات كثيرة، عند استخدام الرسوم الفنية على المساقط، إلى جانب الرسوم يكون من الضروري الحصول على رسوم أكثر وضوحاً.

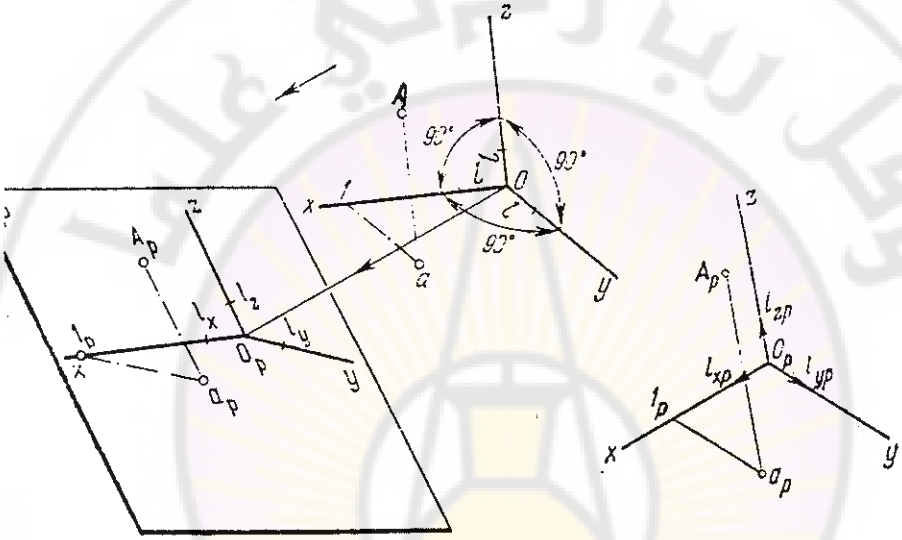
بغية إنشاء مثل هذه الرسوم نستخدم الإسقاط الفراغي (الأكسونومتري). من الأصل الإغريقي حيث تعني أكزونو - محوراً، وتعني كلمة متريو - أقيس. معاً القياس على المحاور.

طريقة الإسقاط الفراغي تبدأ من معرفة الإحداثيات الديكارتية بحيث تُنقل نقاط المجسم إلى الفراغ وتسقط على مستو واحد هو مستوي الورقة.

يكون الإسقاط متوازياً أي أن اتجاه أشعة الإسقاط تكون متوازية فيما بينها ومتعامدة مع مستوي الإسقاط. نعرف الإسقاط المركزي - عندما تأتي أشعة الإسقاط من منبع واحد هو مركز الإسقاط. نقول إن الإسقاط المتوازي هو ذاته الإسقاط المركزي غير أن مركز الإسقاط هو نقطة في اللانهاية (الشمس).

على الشكل (289) مخطط نقطة معرّفة بإحداثياتها الثلاثة A (Ax ; Ay , Az) في الإحداثيات الديكارتية والعلاقة مع مساقطها الثلاثة A (a′ , a″ , a‴) وكيفية الوصول، انطلاقاً من مساقطها، إلى مسقطها الفراغي (الأكسونومتري) على مستو الإسقاط الأكسونومتري P، (الذي سيقوم مقام مستوي الإسقاط وله وظيفة مشابهة).

يمكن لاتجاه الأشعة المسقطة (اتجاه الإسقاط) أن يشكل أي زاوية مع مستوي الإسقاط الأكسونومتري، غير أننا يجب أن نتجنب الاتجاه الذي يوازي أياً من المحاور الثلاثة.



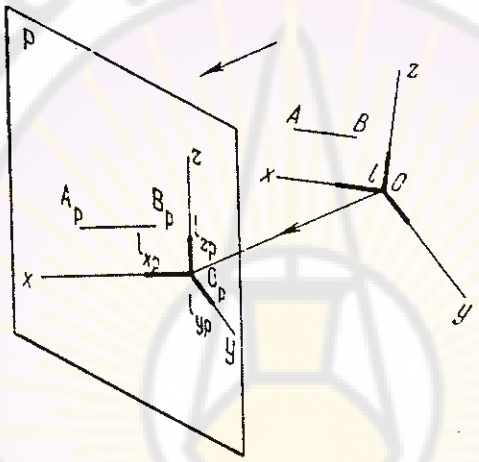
الشكل (289)

في الشكل (290) تمثل المحاور (Op x, Op y, Op z) المحاور الأكسونومترية المنقولة من المحاور الإحداثية الديكارتية (O x, O y, O z).

تمثل القطعة l قيمة القياس الواحدي على المحور الإحداثية الديكارتية الثلاثة، في الإحداثيات الأكسونومترية تُنقل هذه القيمة الواحدية على المحاور الإحداثية الأكسونومترية بنسب تشويه (تصغير أو تكبير حسب موقع المحاور بالنسبة لبعضها بعضاً) مختلفة (lx, ly, lz)، ولا يشترط أن تكون هذه الأطوال متساوية أو تساوي القيمة الأصلية l. نعرف نسب التشويه (دالة التشوه) على المحاور الثلاثة:

$$n = l\,x : l \quad , \quad m = l\,y : l \quad , \quad k = l\,z : l$$

نلاحظ أن الاتجاه الموازي لأحد المحاور الديكارتية يبقى مواز للمحور نفسه في جملة المحاور الأكسونومترية وتبقى النسب التي يشكلها بعدان متوافقان باتجاه أي من المحاور مساوية لنسبة التشويه الخاصة بهذا المحور. فمثلاً: الطول A a الموازي لـ Oz يوافقه الطول Ap ap الذي يبقى موازياً للمحور Op z في المحاور الأكسونومترية ويكون (Ap ap) : (A a) = k. كذلك تبقى أطوال القطع المستقيمة موازية للمحاور المتوافقة في الجملتين وتحقق أطوالها نسب التشويه على تلك المحاور. مثلاً: على الشكل (290) يكون (Ap Bp) : (A B) = n.



الشكل (290)

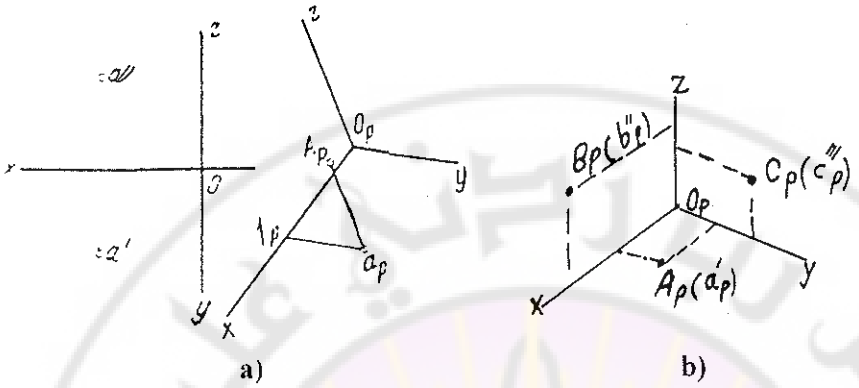
ما ذكر أعلاه يسمح بالقول إن الانتقال من نوع من الإحداثيات إلى الجملة الأخرى أمرٌ ممكنٌ في كل الحالات، وذلك بوساطة نسب التشويه المناسبة.

يمكن أيضاً الانتقال من الرسم على المساقط إلى الإسقاط الأكسونومتري وبالعكس، يوضح الشكل (291-a) ذلك. ويتحقق لدينا:

(Op 1p) = (0 1) . n

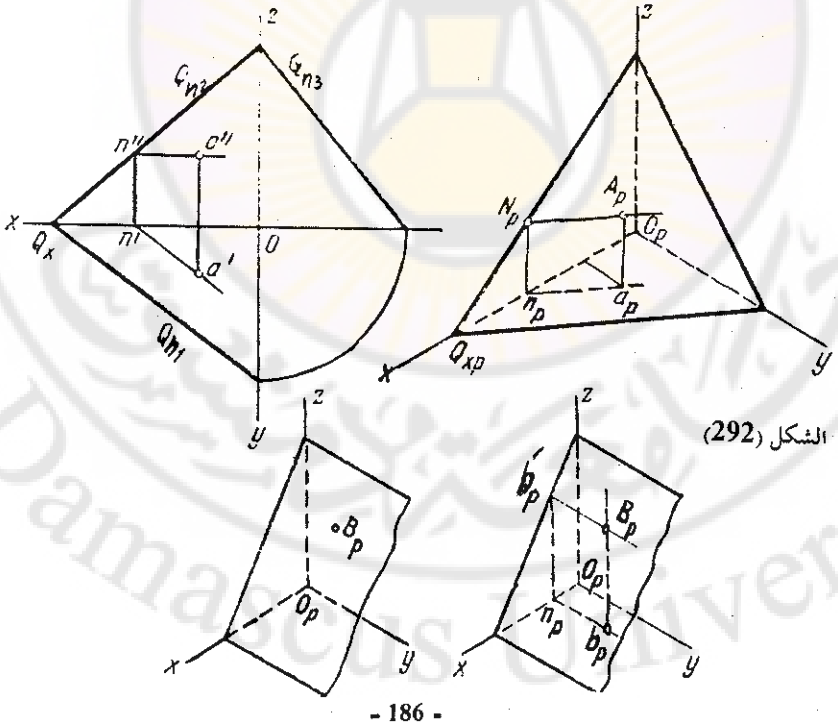
(1p ap) = (1 a) . m

(Ap ap) = (1 a) . k



الشكل (291)

على الشكل (b-291) تمثيل نقاط واقعة في مستوياتُ الإسقاط الأكسونومتري نفسها. من أجل المستويات أيضاً يتحقق النقل المتبادل للأطوال في جملتين على المساقط وفي الإسقاط الأكسونومتري، يبين الشكل (292) هذا الشيء.



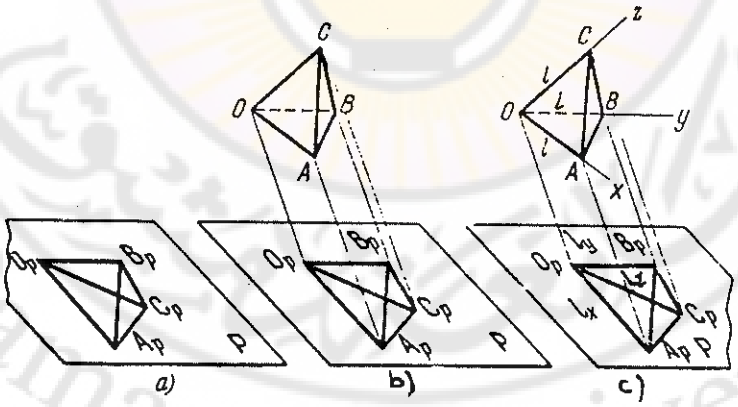
الشكل (292)

يبقى المستقيم A N (a'n' ، a"n") الواقع في المستوي المتكئ Q (Qn1 ، Qn2) أفقياً في الجملتين، ومسقطه الجبهي مواز لمحور الإسقاط والأفقي مواز للأثر الأفقي للمستوي الذي يحويه في المساقط وكذلك في الإسقاط الأكسونومتري ـ المساقط متوافقة لها الخواص نفسها فالمستقيم A N (Ap Np . ap np) أفقي أيضاً. الطول (Op Qp x) = (O Qx) . n وهكذا.

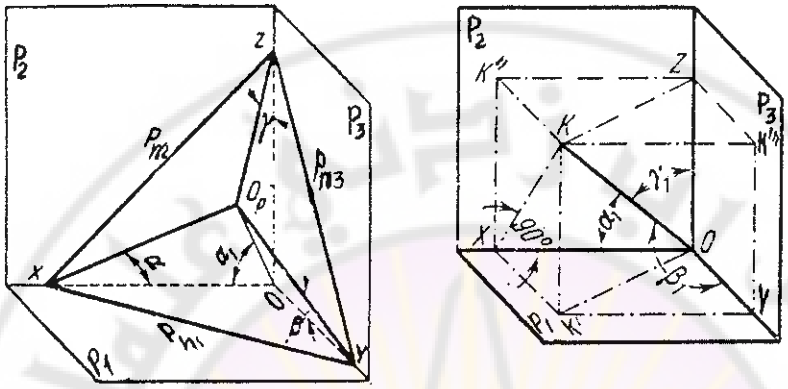
يمكن إيجاد المساقط الغائبة في الإسقاط الأكسونومتري أيضاً انطلاقاً من مسقط معطى. أوجدنا على الشكل (292) المسقط الأفقي لنقطة واقعة في مستو معطى انطلاقاً من معرفة المسقط الأكسونومتري لها. (وذلك عن طريق أحد أفقيات المستوي المار بتلك النقطة، كما هو معروف).

في الشكل (293) لدينا مسقط مجسم متعدد السطوح، يمكن برفع مستقيمات موازية لاتجاه إسقاط مختار أن نعين مجسما ما في الفراغ ـ لدينا حلول كثيرة، فكل نقطة من الرؤوس الأربعة ستقع على تلك المستقيمات المقامة على مستوي الإسقاط وعند بعدٍ ما عن هذا المستوي.

نستطيع أن نمد المحاور الإحداثية حسب ثلاثة من أضلاع الهرم الحاصل. في كل مرة نغير فيها ابتعادات تلك الرؤوس عن مستوي الإسقاط سنحصل على ثلاثية إحداثيات أكسونومترية مختلفة.



الشكل (293)



الشكل (294)

في الشكل (294) نلاحظ أن مساقط المحاور الأكسونومترية (Op x, Op y, Op z) مرتبطة مع المحاور الديكارتية (O x , O y , O z) في العلاقات التالية:

$$(Op\ x) = (O\ x)\ .\ \cos\alpha \Rightarrow (Op\ x) : (O\ x) = \cos\alpha \equiv n$$

$$(Op\ y) = (O\ y)\ .\ \cos\beta \Rightarrow (Op\ y) : (O\ y) = \cos\beta \equiv m$$

$$(Op\ z) = (O\ z)\ .\ \cos\gamma \Rightarrow (Op\ z) : (O\ z) = \cos\gamma \equiv k$$

فالمحاور الإحداثية تسقط على مستوي الإسقاط الأكسونومتري وفق نسب التشويه الموافقة على المحاور.

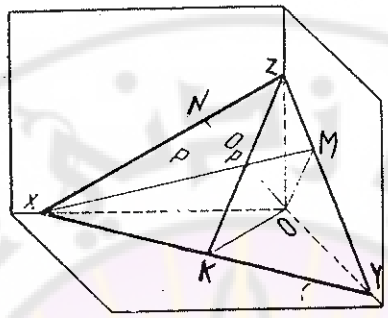
تميل القطعة العامودية على مستوي الإسقاط الأكسونومتري (O Op) عن مستويات الإسقاط بزوايا مكملة لزوايا ميل مستوي الإسقاط الأكسونومتري P نفسه، أي أن: $\alpha = (\pi / 2) - \alpha_1$ وهكذا فيما يتعلق بالزاويتين γ ، β.

وكذلك لدينا: $\cos\alpha_1 + \cos\beta_1 + \cos\gamma_1 = 1$

وبالتالي يكون: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2$

فيكون: $n + m + k = 2$

نسمي آثار مستوي الإسقاط الأكسونومتري (xy. yx. zx) بمثلث الآثار. في هذا المثلث تتلاقى الارتفاعات الثلاثة في نقطة واحدة هي النقطة Op نفسها.



الشكل (295)

يعود السبب إلى أن OK هو مسقط القطعة O Op على المستوي الافقي، ولما كانت القطعة O Op تعامد المستوي P فمسقطها الأفقي O K يعامد الأثر الأفقي x y انظر الشكل (295). وبالتالي يكون z K معامداً لـ x y وبالتالي هو ارتفاع متعلق بالرأس z في مثلث الآثار.

يقال الشيء نفسه عن القطعتين x M , y N فهما ارتفاعان في مثلث الآثار.

إذا افترضنا أن مستوي الإسقاط الأكسونومتري هو مستوي الورقة نفسها، فاتجاه الإسقاط عليه عمودي عليه. إذن في المساقط الأكسونومترية العمودية (اتجاه الإسقاط يعامد مستوي الإسقاط) يكون لدينا مثلث الآثار وارتفاعات هذا المثلث ذاته تكون هي محاور الإسقاط الأكسونومتري. انظر الشكل (296-b).

يمكن الانتقال من المحاور الإحداثية إلى آثار مستوي الإسقاط وبالعكس تبعاً لهذه الخاصة.

مثال ذلك، تعطى المحاور الإحداثية في جملة الإسقاط الأكسونومتري الشكل (296-a)، يطلب إيجاد مثلث آثار لمستوي إسقاط أكسونومتري ما مرتبط بتلك الجملة.

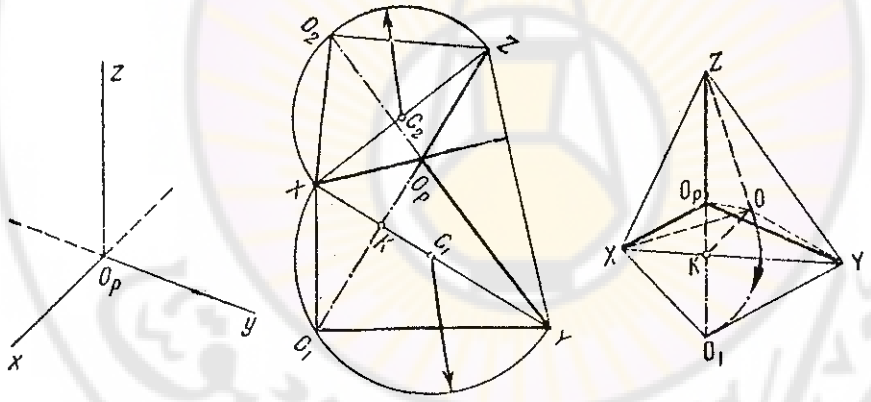
نعرف أن آثار مستوي الإسقاط الأكسونومتري المرتبط بهذه المحاور ستكون معامدة للمحاور الإحداثية المعطاة، من جهة ثانية الزوايا:

$$x\,Op\,y = x\,Op\,z = z\,Op\,y$$

هي مساقط الزوايا القائمة في جملة الإحداثيات الديكارتية أي:

$$x\,Op\,y = x\,Op\,z = z\,Op\,y = 90°$$

إذن قياس تلك الزوايا معروف ويساوي 90°. فإذا دورنا المستوي الأفقي x Op y حول الأثر الأفقي x y حتى تمام انطباقه على مستوي الإسقاط P (مستوي الورقة نفسها) فستكون هذه الزاوية قائمة، فهي إذاً تقع على محيط دائرة قطرها هو الطول x y (محور الدوران هنا). انظر الشكل (c-296) أيضاً.



a) b) c)

الشكل (296)

نعرف أيضاً أن النقطة Op ستدور بالمستوي المعامد لهذا المحور. فالنقطة O_1 ستمثل موضع النقطة Op بعد الدوران وستمثل مطبق تلك النقطة ذاته بسبب أن

المستوي x Op y أصبح بعد الدوران ممثلاً بالمستوي x O y الذي يشكل الكبر الحقيقي له - كل الأطوال والأشكال الواقعة فيه ستظهر على المطبق بكبرها الحقيقي. نسمي المطبق الحاصل بمطبق المستوي الأفقي حول الأثر الأفقي. انظر الشكل (296-b).

الشيء نفسه يقال عن مطبق المستوي الجبهي، ومطبق المستوي الجانبي، مطبق المستوي الجانبي لم نبينه على الرسم.

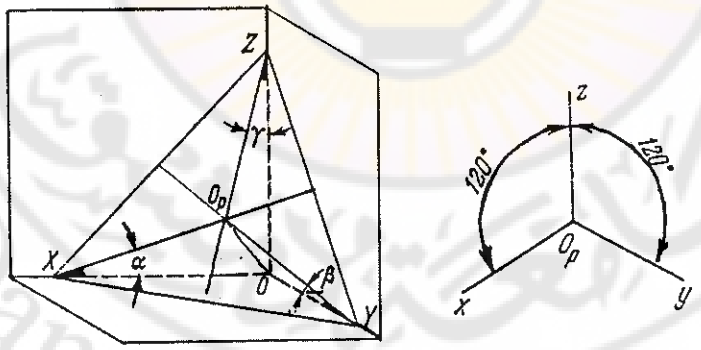
واضح بأن الآثار المبينة على الرسم هي كيفية يشترط أن تعامد المحاور المقابلة لها وتكون متلاقية عند المحاور. وبالتالي هناك عدد لا نهائي من مثلثات الآثار التي تصلح أن تكون آثار لمستويات إسقاط أكسونومترية تقبل المحاور المعطاة كمحاور إحداثية في الإسقاط الأكسونومتري.

7 - 2 - 1 : الإسقاط الأكسونومتري الأيزومتري:

تكون نسب التشويه في هذا النوع من الإسقاط متساوية:

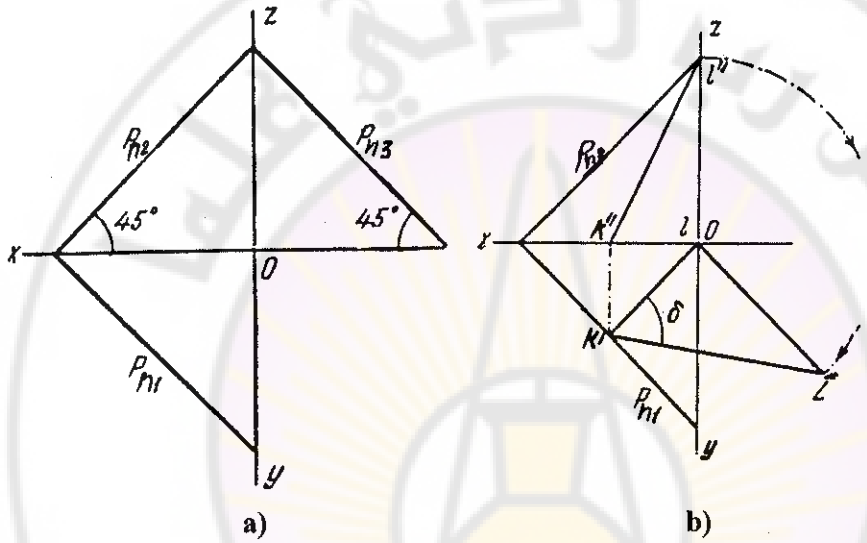
$$n = m = k = const \Rightarrow n = m = k \cong 0.8$$

وهذا يقودنا إلى أن زوايا ميل المحاور هي أيضاً متساوية فيما بينها وتساوي $360 / 3 = 120°$، مثلث الآثار الأكسونومتري في جملة كهذه هو مثلث متساوي الأضلاع. انظر الشكل (297).



الشكل (297)

يلتقي مستوي مثلث الآثار مع المحاور الإحداثية عند نقاط متساوية الابتعاد عن المبدأ Op. لدى نقل هذا المستوي وتحديد آثاره في المساقط تكون الزوايا التي تصنعها تلك الآثار في الرسم مساوية 45°. غير أن هذه الزوايا لا تمثل الميل الحقيقي للمستوي عن مستويات الإسقاط الموافقة. الشكل (a-298).



الشكل (298)

القيمة الحقيقية لزوايا ميل المستوي $\alpha \neq 45°$ بل تساوي زاوية ميل المستقيم خط الميل الأعظم في هذا المستوي كما يظهر هذا الرسم على الشكل (b-298). حيث إن قيمة زاوية ميل المستوي ستكون $\alpha = \delta \approx 55°$. والزاوية δ هي زاوية ميل المستقيم خط الميل الأعظم لهذا المستوي. وتؤخذ نسب التوجيه في هذه الجملة (جملة الإسقاط الأكسونومترية): 1 : 1 : 1.

7 - 2 - 2 : الإسقاط الأكسونومتري الديمتري

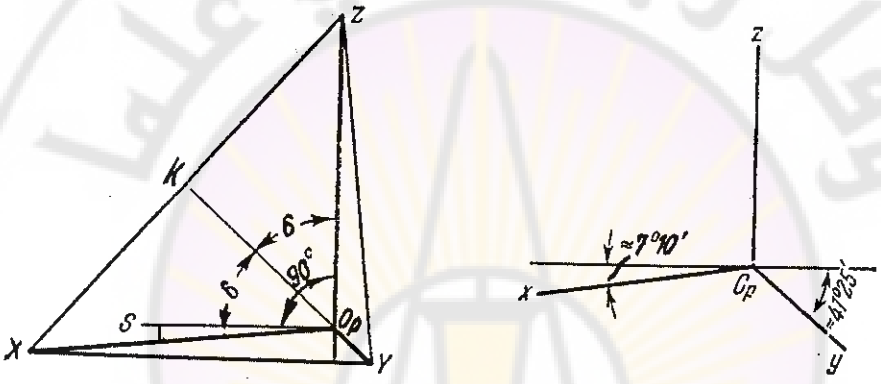
وتكون اثنتان من نسب التشويه في هذا النوع من الإسقاط متساوية:

وبفرض أن النسبة الثالثة هي مثلاً m وقيمتها هي: $m = 0.5\ n$ يكون:

$$n = k\ ,\ m = 0.5\ n \Rightarrow$$

$$n = k = 2 \cdot \sqrt{2}/3 \cong 0.94\ ,\ m = \sqrt{2}/3 \cong 0.47$$

تبعاً لذلك نحصل على مثلث الآثار على شكل مثلث متساوي الساقين فيه $xy = yz$. وبفرض أن $Ox = 1$ يكون $x\ z = \sqrt{2}$ أما الضلعان الباقيان (الأثران) $Op\ x = Op\ z = 2 \cdot \sqrt{2}/3$. انظر الشكل (299).



الشكل (299)

في هذا الشكل لدينا: $x\ k = z\ k = x\ z/2 = \sqrt{2}/2$

وبالتالي: $\sin\delta = z\ k / Op\ z = \sqrt{2}/2 : 2\sqrt{2}/3 \cong 0.75$

فالزاوية: $\delta = 48°\ 35' \cong 48°$

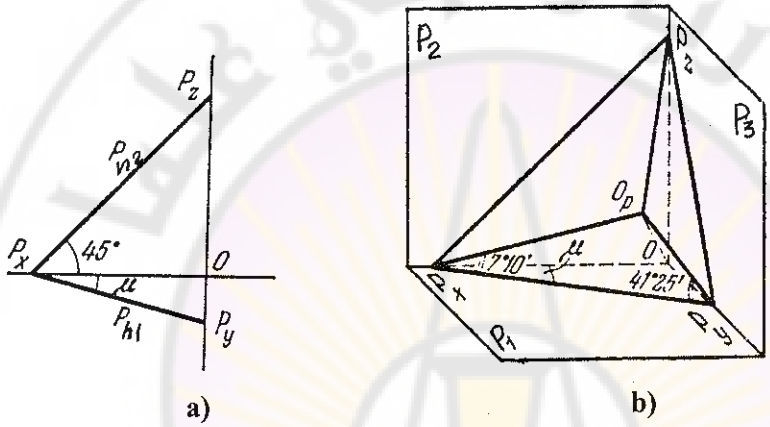
ويكون قياس الزاوية $S\ Op\ x = 2 \cdot 48°\ 35' - 90 = 7°\ 10'$

ويكون قياس الزاوية $S\ Op\ y = 48°\ 35' - 7°\ 10' = 41°\ 25'$

وتؤخذ نسب التوجيه في هذه الجملة كالتالي: $1 : 0.5 : 1$

كما تؤخذ الأطوال: $(O\ Px) = (O\ p\ z)\ ,\ O\ Py \cong 0.4\ (O\ Px)$

على المساقط انظر الشكل (300-a).

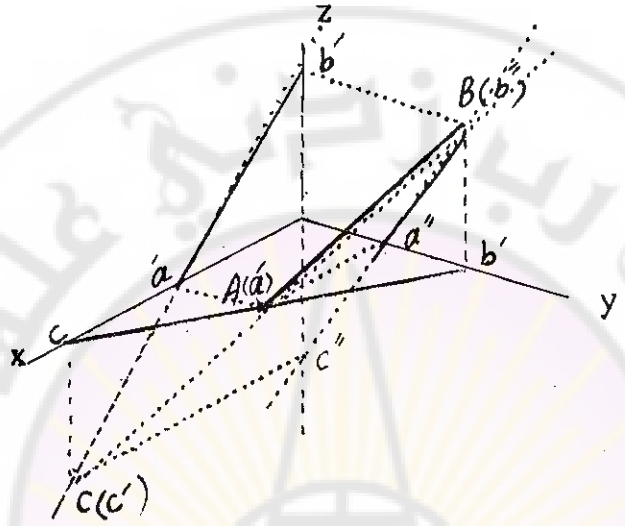


الشكل (300)

7 - 3 : إنشاء المساقط الأكسونومترية لمستقيم

لا تشكل عملية إيجاد مساقط نقطة معطاة إحداثياتها الديكارتية صعوبة تذكر. بما أن المستقيم هو الخط الواصل بين نقطتين، يكفي أن نصل بين المساقط المتماثلة لنقطتين واقعتين عليه.

يتعين المستقيم بمسقطيه الأكسونومتري A B والافقي a b لاحقاً سنكتفي بهما، أوجدنا في الشكل (301) المساقط الأكسونومترية الباقية. كما أوجدنا آثار هذا المستقيم، أثر المستقيم على أحد مستويات الإسقاط هو نقطة تقاطع المسقط الأكسونومتري للمستقيم ومسقطه على ذلك المستوي فمثلاً الأثر الأفقي للمستقيم المبين هو نقطة تقاطع المسقط الأكسونومتري A B والمسقط الأفقي a'b' له.



الشكل (301)

7 - 4 : الحالات الخاصة للمستقيمات والمستويات

لا تختلف الحالات التي يمكن أن يتوضع بها المستقيم بالنسبة للمحاور والمستويات الإسقاطية الأكسونومترية عن الجملة الديكارتية الثلاثية.

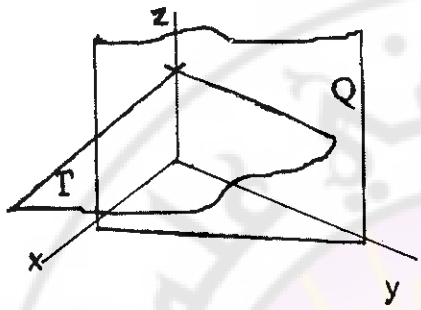
نميز بين المستقيم الأفقي، الجبهي، الجانبي وهي مستقيمات توازي المستويات الإسقاطية الثلاثة الموافقة.

كما يمكن أن تكون هذه المستقيمات معامدة للمستوي الأفقي أو للجبهي أو للجانبي، وهي المستقيمات الرأسي والمنصوب والجبهي.

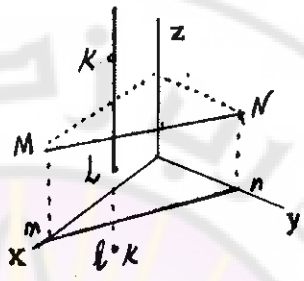
على الشكل (302) مستقيم يوازي المستوي الأفقي A B وآخر يعامده B C.

يبين الشكل (303) كيفية توضع مستو أفقي وآخر رأسي الأول T يوازي المستوي

الأفقي للإسقاط الأكسونومتري والثاني Q يعامده. بشكل مماثل يقال عن المستويات الجبهي والمنصوب.



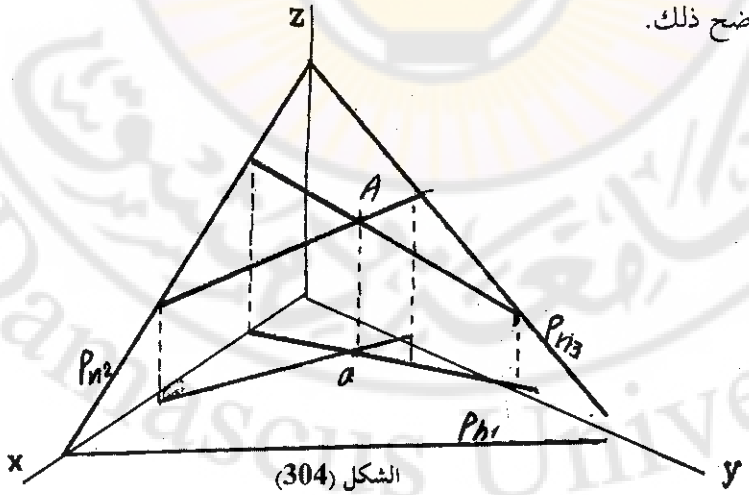
الشكل (303)



الشكل (302)

7 ـ 5 : إيجاد آثار مستو معين بمستقيمين متقاطعين

إذا أعطي مستو بمستقيمين متقاطعين فيمكن إيجاد آثاره بسهولة، الآثار المتماثلة للمستقيمات ستقع على خط الأثر الموافق للمستوي المعين بهذين المستقيمين. أوجدنا أثري كل من المستقيمين ثم أوجدنا آثار المستوي P المشكل منهما. الشكل (304) يوضح ذلك.

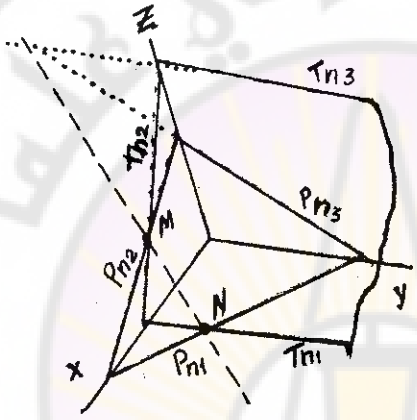


الشكل (304)

ليبس من الصعب الانتقال العكسي. إذا أعطينا مستوياً فأي مستقيمين واقعين فيه يمكن أن يعبرا عن ذلك المستوي أيضاً.

7 ـ 6 : تقاطع مستويين

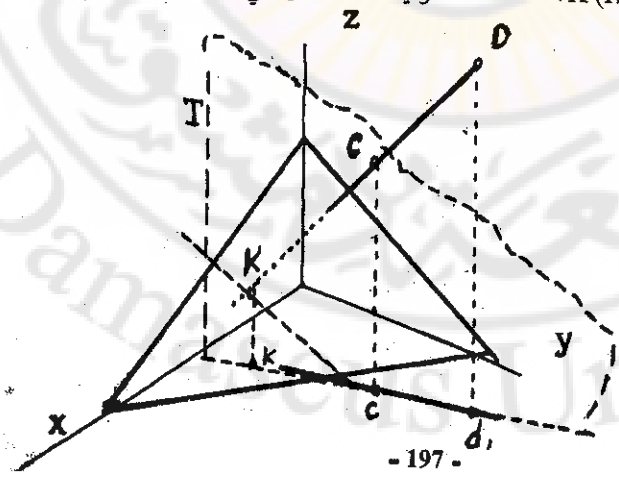
يبين الشكل (305) تقاطع مستويين أحدهما منصوب (T)، لاحظ الآثار الثلاثة يجب أن تتلاقى على الفصل المشترك بينهما.



الشكل (305)

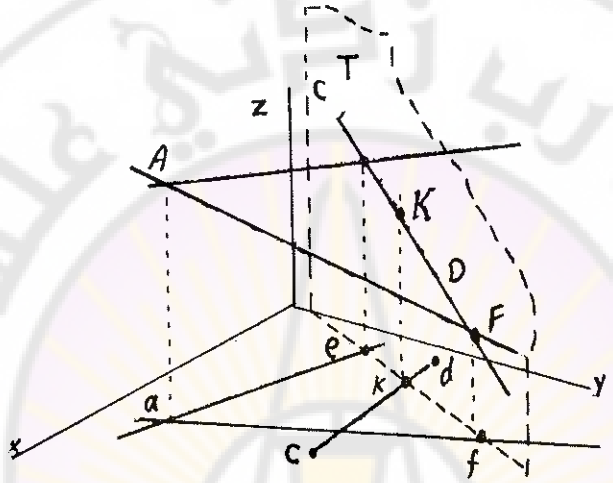
7 ـ 7 : تقاطع مستقيم مع مستو

يوضح الشكل (306) تقاطع مستقيم كيفي (C D , c d) C D مع مستو كيفي، تم إيجاد نقطة الاختراق K (K , k) بمساعدة المستوي المساعد الرأسي T المار بالمستقيم.



الشكل (306)

في الشكل (307) توضيح لإيجاد نقطة اختراق مستقيم كيفي (CD (C D , c d لمستو كيفي معين بمستقيمين متقاطعين (A B , A C)، تم إيجاد نقطة الاختراق K (K . k) بمساعدة المستوي المساعد الرأسي T المار بالمستقيم.



الشكل (307)

7 ـ 8 : إنشاء مساقط السطوح المستوية في الإسقاط الأكسونومتري

لا تظهر السطوح المستوية في المساقط بكبرها الحقيقي، وبالتالي لابد من إيجاد كبرها الحقيقي أولاً ثم إرجاع مساقط بعض النقاط فيها إلى المساقط الواقعة فيها لكي يتم إنشاء مسقطها في ذلك المستوي.

في الشكل (308) أعطي مثلث الآثار المبين، وطلب إنشاء مسقط المثلث AOC المتساوي الساقين، أعطي المسقط الأفقي لرأسه A وعلم أن ضلعه المقابل يقع على المحور y.

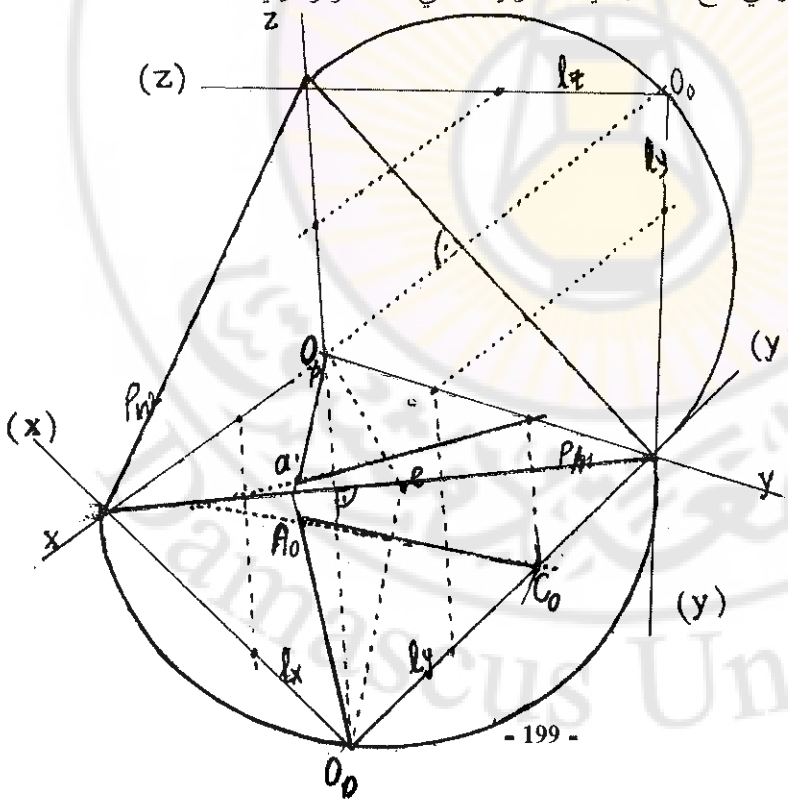
نقوم بإيجاد المحاور التي تعامد الأضلاع المقابلة في جملة الإسقاط الأكسونومترية العمودية وتمر من نقطة تلاقي الآثار. ثم نطبق المستوي الأفقي للإسقاط حول الأثر

الأفقي حتى تمام انطباقه على مستوي الإسقاط الأكسونومتري. عند ذلك سيظهر المستوي الافقي في مطبقه ((x) O (y)) بكبره الحقيقي، ضمن المثلث AOC الواقع فيه.

نقوم بإيجاد موضع النقطة بعد التدوير، بوساطة المستقيم O E المتآلف مع المستقيم Op e (E = e لأنها تقع على محور التدوير). نوجد الرأس الثالث C للمثلث في مطبقه A O C ثم نوجد موقعها الأصلي على المحور y.

المسقط الأكسونومتري لهذا المثلث هو المسقط الأفقي نفسه بسبب وقوعه في المستوي الافقي ذاته. يصلح هذا المثلث لأن يكون قاعدة موشور أو هرم قائم ارتفاعه سيكون باتجاه المحور z.

يمكن إيجاد الأبعاد (بعد التشويه) على المحاور x , y , z بأخذ الأطوال الواحدية على المحاور (z) , (y) , (x) الموافقة. انظر الشكل (308) الأطوال على المحور z يمكن استخدامها لدى أخذ الأبعاد باتجاه هذا المحور، بالتحديد عند أخذ ارتفاعات المجسمات القائمة والتي تقع قاعدتها في المستوي الأفقي الأكسونومتري.



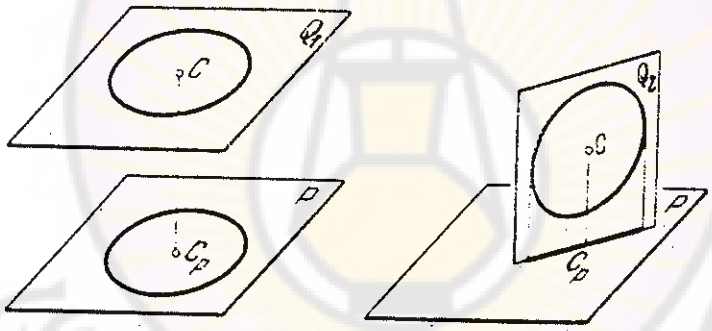
الشكل (308)

- إنشاء مساقط الدائرة في الإسقاط الأكسونومتري

بشكل عام، يكون مساقط دائرة على شكل قطع ناقص، يمكن بعد إيجاد القطرين المترافقين في القطع الناقص رسم هذا القطع. (القطران المترافقان في القطع الناقص هما القطران المتعامدان في الدائرة الاصلية).

في الحالة الخاصة عندما نسقط الدائرة على مستو يوازيها فإن مسقطها يكون دائرة يساويها. انظر الشكل (a-309).

في الحالة عندما نسقط الدائرة على مستو يعامدها يؤول مسقطها على ذلك المستوي إلى خط مستقيم، وتكون طويلته هي طول قطر الدائرة الأصلية. انظر الشكل (b-309).



a) b)

الشكل (309)

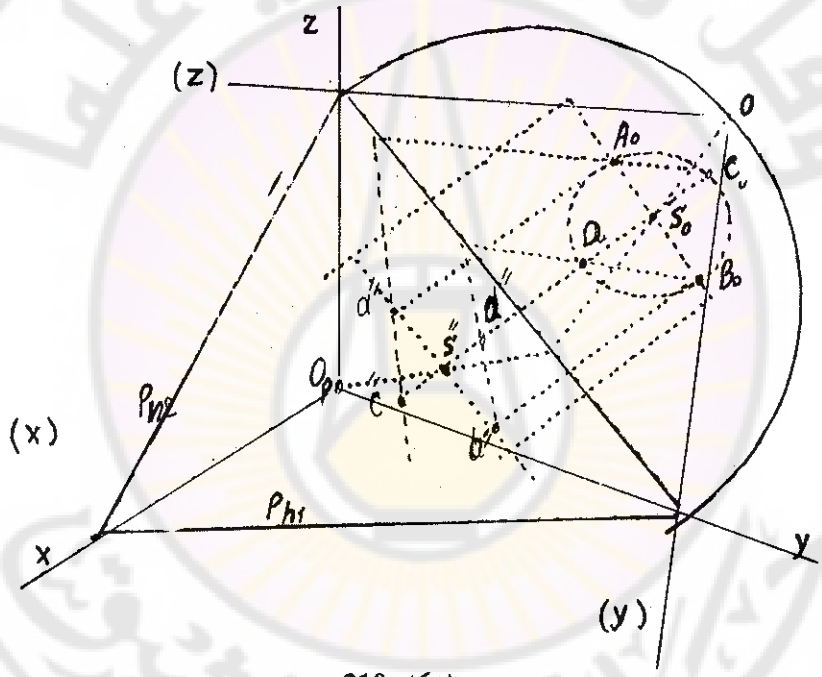
إنشاء دائرة واقعة في المستوي الجبهي علم مركزها S ونصف قطرها R:

تم إيجاد مطبق نقطة المركز المعطى، بعد أن دورنا المستوي الثاني للإسقاط حول الأثر الثاني لمستوي الإسقاط الأكسونومتري ورسمنا الدائرة المطلوبة (S_0 , R)،

انظر الشكل (310). ثم تم إرجاع بعض نقاط محيط هذه الدائرة. بالتحديد نقاط القطرين المتعامدين A B , C D في هذه الدائرة، القطر A B يبقى موازياً لمحور التآلف في المسقط أيضاً.

أرجعنا هذه النقاط إلى المسقط الثاني بوساطة أزواج المستقيمات المتآلفة (A D , a d) و (B C , b c).

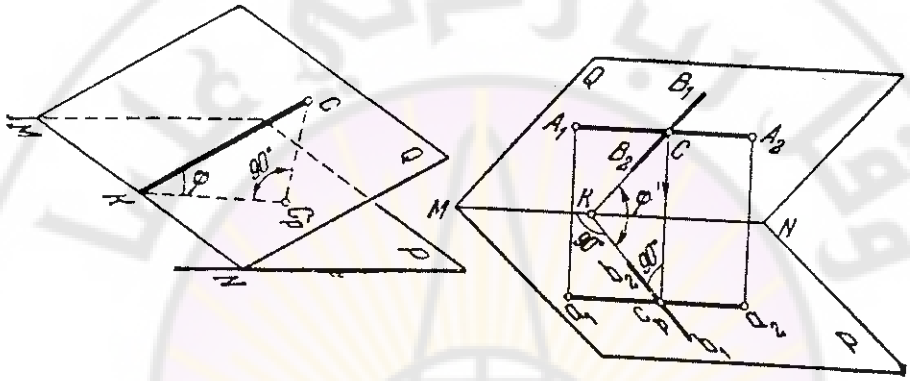
التآلف هو بين مسقط الدائرة المطلوب ومطبقها، محور التآلف هو محور التدوير ذاته واتجاه التآلف معامد لمحور التدوير هذا.



الشكل (310)

لنأخذ الدائرة المتوضعة في المستوي Q المائل بزاوية عن مستو مثل P، في الشكل (311) ويراد إيجاد مسقطها على المستوي P. لنفترض أن المستوي الأكسونومتري للإسقاط هو المستوي P.

لنأخذ قطري الدائرة ـ الموازي والمعامد للفصل المشترك بينهما. نلاحظ أن المحور الموازي يسقط بطويلته نفسها $a\,a = A\,A = 2\,R$. بينما سيسقط المحور الصغير بتشويه معين $b\,b = B\,B = 2\,.\,R\,.\,\cos\varphi$.



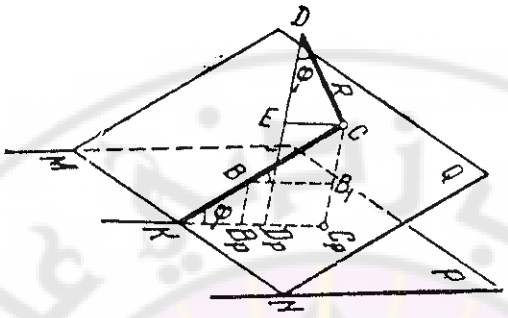
الشكل (311)

لنتصور أن دائرة واقعة في المستوي Q المائل بزاوية φ. سنحاول إنشاء مسقط الدائرة هذه على مستوي إسقاط مثل P، كما في الشكل (312) بطريقة بيانية, سيبقى المحور الكبير للقطع هو هو ذاته قطر الدائرة، بينما سيصغر المحور الصغير.

نلاحظ أن المستقيم المعامد للمستوي سوف يسقط على مستوي الإسقاط على مسقط المستقيم KC نفسه. إذا أخذنا على هذا العمودي طولاً بقدر قطر الدائرة وبيّنا المثلث DEC فإن مسقط القطر الصغير سيكون هو $DE = R\cos\varphi$ وسيساوي الطول DE. المثلثان DEC, CB_1B متساويان وبالتالي يكون $DE = BB = R\cos\varphi$ وبالتالي سيكون $C_pB_p = BB_1 = R\cos\varphi$ هو مسقط القطر الصغير للقطع الناقص (مسقط الدائرة على المستوي P).

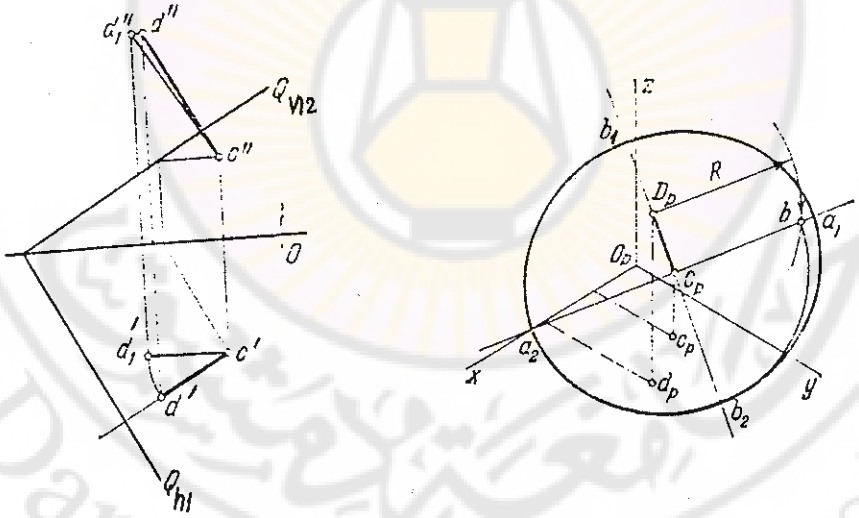
سنستفيد من هذه النتيجة في إيجاد القطر الصغير لمسقط الدائرة على مستوي إسقاط ما. لنفرض أنه المطلوب إيجاد المسقط الأكسونومتري على المحاور المعطاة

لدائرة نصف قطرها R ومركزها هو النقطة C، الدائرة واقعة في المستوي الكيفـي Q. انظر الشكل (313).



الشكل (312)

في المساقط نقوم بإيجاد المستقيم المعامد للمستوي والمقام من مركز الدائرة، نأخذ على هذا العمود الطول المساوي لقطر الدائرة.

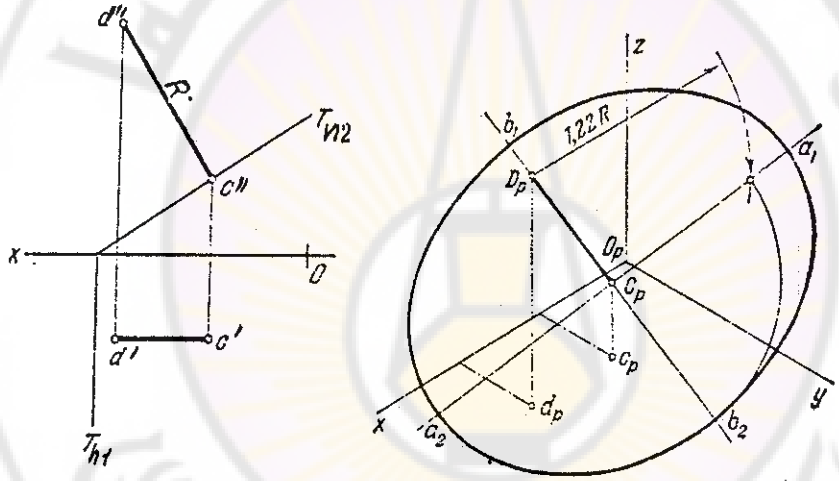


الشكل (313)

في الإسقاط الأكسونومتري الشكل (313) إلى اليمين نقوم بنقل موقع النقطتين C , D في الإسقاط الأكسونومتري، فيكون قد تعين الاتجاه والطول على هذا المستقيم المعامد للمستوي نعين بدءاً من المركز القطر الكبير المساوي لقطر الدائرة (اتجاهه معامد لاتجاه المحور الصغير الحاصل). نعين على هذا الاتجاه الطول المساوي لضعف قطر الدائرة a a بينما ننقل الطول الناتج على الاتجاه المعامد b b.

بتعيين القطرين المترافقين في القطع. نتابع رسم هذا القطع ليمثل المسقط الأكسونومتري المطلوب للدائرة المعطاة.

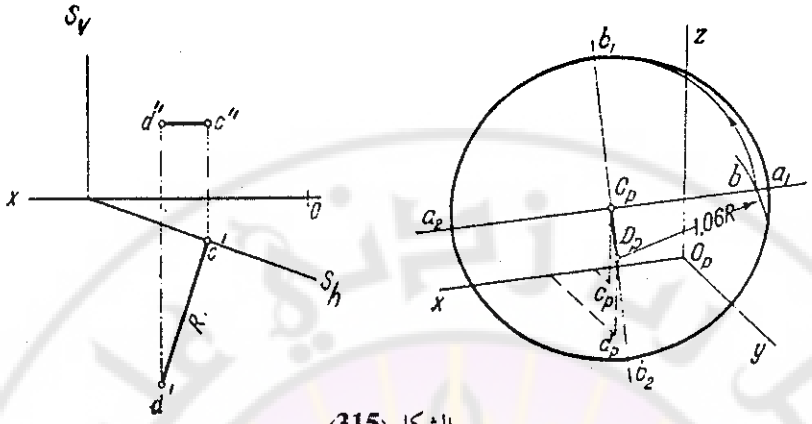
في الشكل (314) مسقط الأكسونومتري لدائرة أخرى (C , R) واقعة في المستوي المنصوب T.



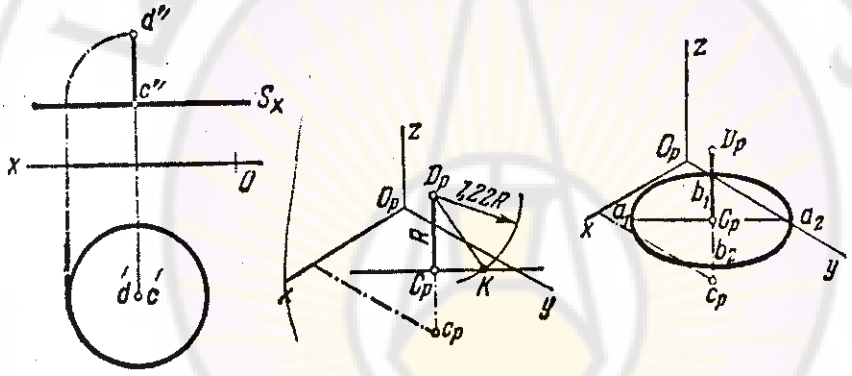
الشكل (314)

في الشكل (315) المسقط الأكسونومتري لدائرة أخرى (C , D) واقعة في المستوي الرأسي S.

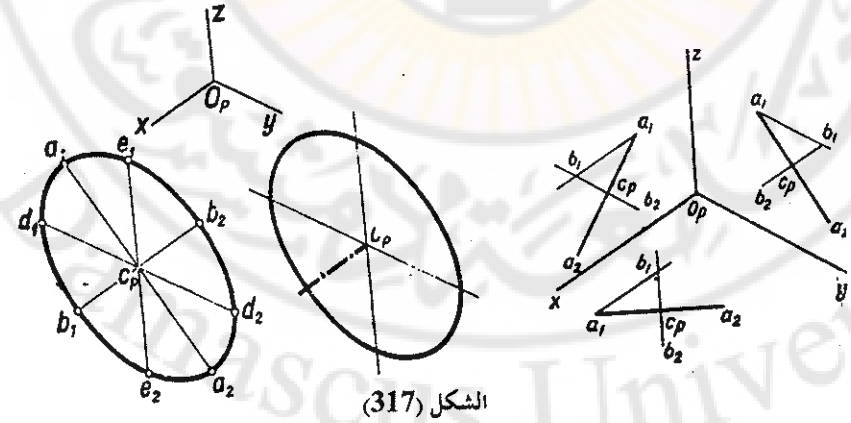
يبين الشكل (316) طريقة إيجاد المساقط الأكسونومترية لدائرة واقعة في المستويات الإسقاطية الأكسونومترية الأيسومترية، وفي الشكل (317) مساقط لدوائر تقع في المستويات الثلاثة.



الشكل (315)

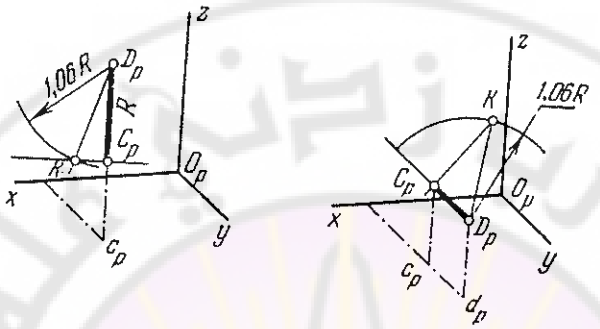


الشكل (316)

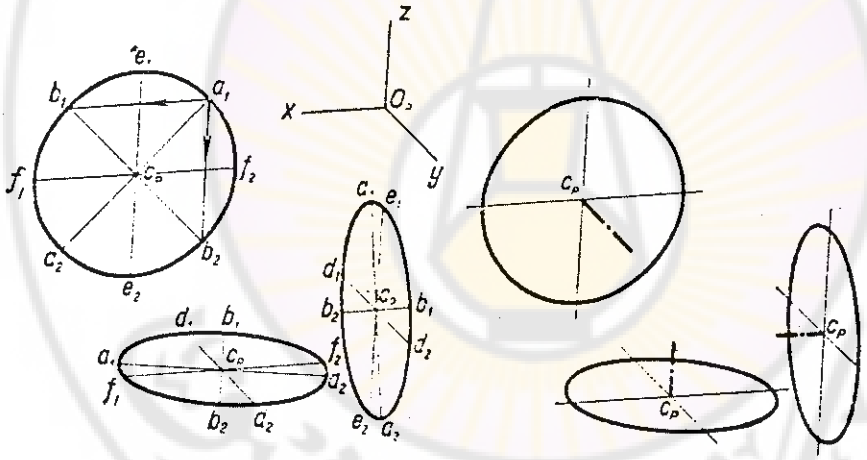


الشكل (317)

في الإسقاط الأكسونومتري الديمتري يبين الشكل (318) والشكل (319) طريقة والمسقط الأكسونومتري لدوائر (C , R) واقعة في المستويات الإسقاطية الأكسونومترية الثلاثة.



الشكل (318)

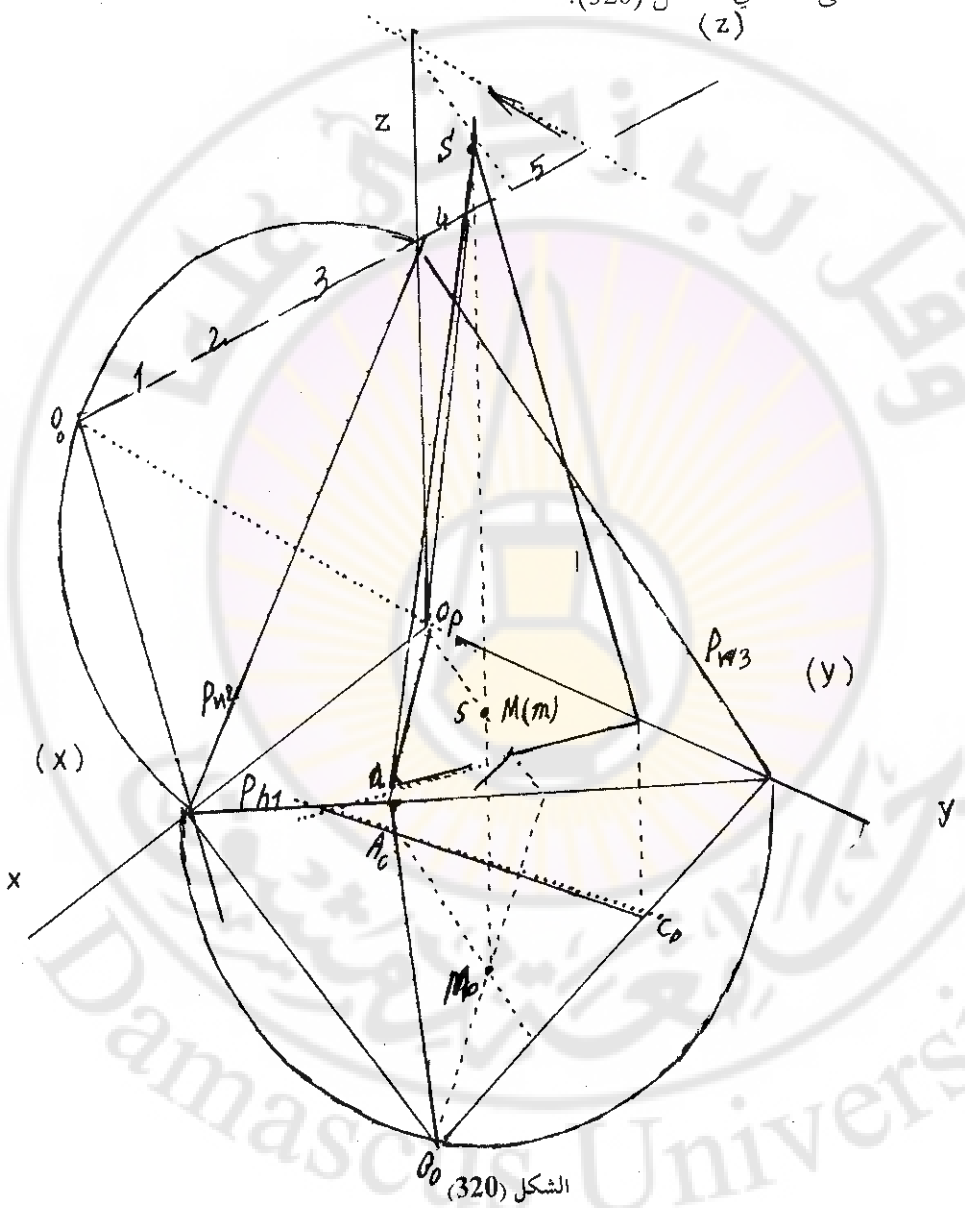


الشكل (319)

7 ـ 9 : إنشاء المسقط الأكسونومتري لمجسم

بعد إيجاد قاعدة المجسم يمكن إيجاد حروفه المارة من رؤوس تلك القاعدة، وذلك حسب شكل المجسم المطلوب.

في حالة الهرم والمخروط نصل رؤوس القاعدة إلى الرأس فنجد هذا المجسم (بحالة المخروط ـ ننشئ مولدي المخروط اللذين يمثلان المحيط الظاهري له). نعطي مثالاً على ذلك في الشكل (320).



الشكل (320)

لنفرض أن المطلوب تمثيل هرم S AOB ثلاثي قائم ارتفاعه 5 واحدات (مثلاً). قاعدته مثلث متساوي الساقين أحد أضلاعه يقع على المحور y رأس المثلث هو النقطة A يعطى مسقطاه الأول فقط.

ننشئ المثلث المتساوي الساقين في المطبق ثم نشكل المثلث (قاعدة الهرم) في المسقط الأكسونومتري الأول. انظر الشكل (320). نوجد في المطبق مركز ثقل القاعدة ومنها ننشئ الارتفاع المقام على القاعدة، ونأخذ (باتجاه المحور z هنا) الطول المساوي للطول المعطى لهذا الارتفاع وذلك بتطبيق المحور هذا. الهرم المطلوب هو S AOB الحاصل.

7 ـ 10 : إيجاد التقاطعات

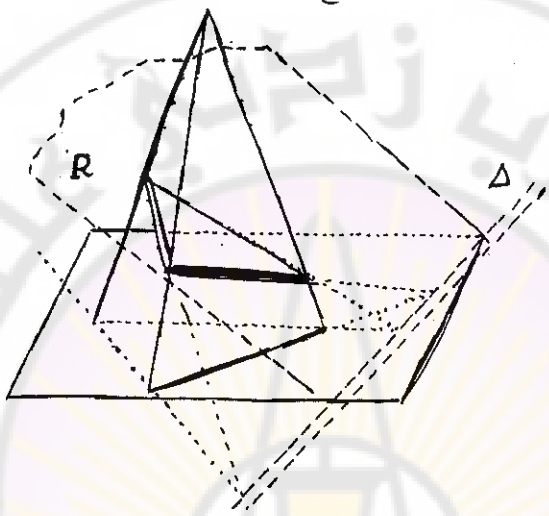
بعد أن عرفنا كيف يتم إسقاط مجسم في الإسقاط الأكسونومتري، نتعرف إلى مسألة ضرورية في الإسقاط الأكسونومتري وهي مقطع المجسمات بمستو أو بمستقيم أو مع مجسم آخر. يمكن أيضاً إرجاع مسألة تقاطع مستقيم كيفي لمجسم عن طريق المستوي الحاوي المستوي والذي يتوضع بوضعية خاصة بالنسبة للمستويات الإسقاطية الأكسونومترية (مستو رأسي، منصوب غالباً، وفي حالات أخرى مستو أفقي أو جبهي). كما يمكن إرجاع مسألة إيجاد مقطع مجسمٍ لآخر إلى إيجاد نقاط تقاطع حروف أي من الجسمين للمجسم الآخر. بالتالي تؤول هذه المسائل بالنهاية إلى عملية إيجاد مقطع مجسم بمستو.

7 ـ 10 ـ 1 : مقطع مستو لمجسم

الشكل (321) يوضح المبدأ العام لإيجاد هذه التقاطعات مهما كانت هذه المجسمات (هرماً، مخروطاً، موشوراً أو غير ذلك). يقطع المستوي T في شكل مستو (مضلع تقاطع)، رؤوسه هي نقاط اختراق حروف المجسم للمستوي القاطع وأضلاعه هي الفصول المشتركة بين المستوي القاطع وأوجه المجسم المفروض.

كما يتقاطع مستقيم كيفي مع المجسم عند نقاط اشتراك هذا المستقيم مع مضلع التقاطع الحاصل من قطع المجسم بمستو يحوي المستقيم.

نلاحظ أنه هناك تـآلف بـين المقطـع الحـاصل ومسـتوي قـاعدة المجسـم. محـور التآلف هو الفصل المشترك بين المستوي القاطع ومستوي قاعدة هذا المجسم (الفصل Δ على الشكل). يمكن الاستفادة من هذا التـآلف أثنـاء حـل مسـائل التقاطعـات هـذه. سنورد فيما يلي بعض المسائل لتوضيح ذلك.



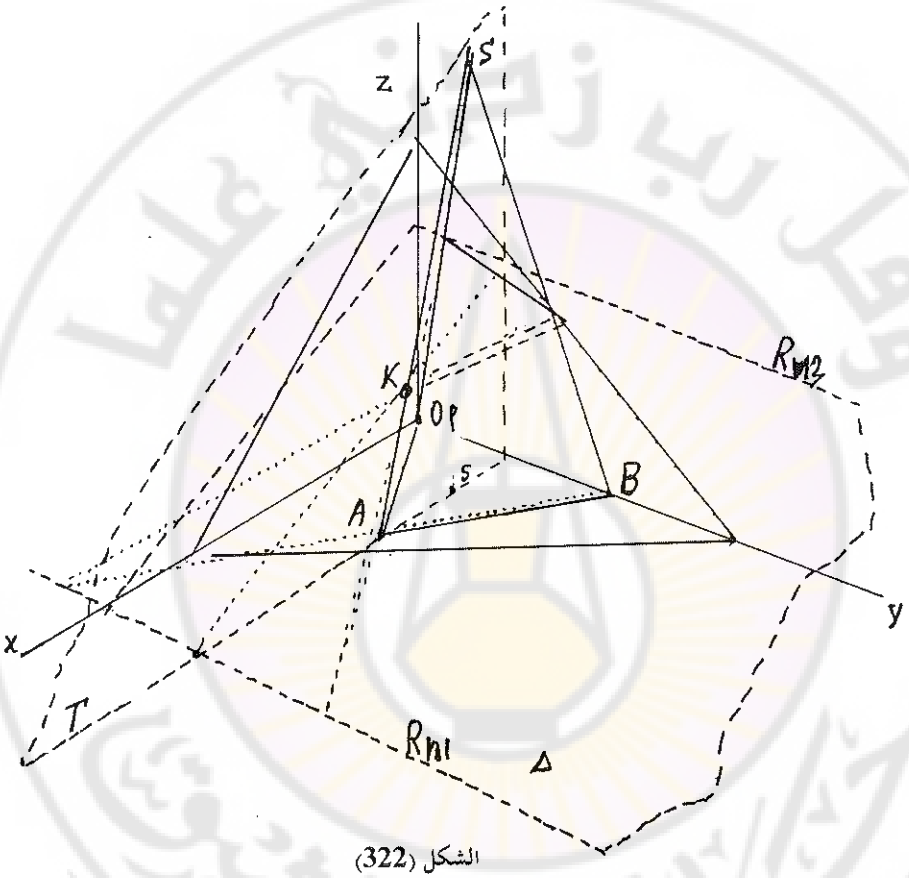
الشكل (321)

لنفرض أن المطلـوب إيجـاد المقطـع الحـاصل مـن قطـع الهـرم المنشـأ في الشـكل (322) بالمستوي المنصوب R.

نسمي أحد حروف الهرم وليكن الحرف SA، نقوم بإيجاد نقطـة اخـتراق هـذا الحرف لمستوي T بأخذ مستو مساعد رأسي T يحوي المستقيم هذا، ولتكن النقطة K.

هناك تآلف بين المقطع الحاصل ومستوي قاعدة الهرم. محور التآلف هو الفصـل المشترك بينهما. لهذا نقوم بتمديد الضلع OA حتى يتقاطع مع محور التآلف ثم نوصـل هذه النقطة بالنقطة K فيتقاطع مع الحرف المار من O. نكمل المضلع إلى مثلـث ليعـبر عن مضلع التقاطع.

بغية التأكد من صحة الإنشاء يمكن تمديد الضلع AB حتى التلاقي مع محور التآلف ووصل هذه النقطة بالنقطة K. يجب أن نحصل على الضلع الأخير لمضلع التقاطع.



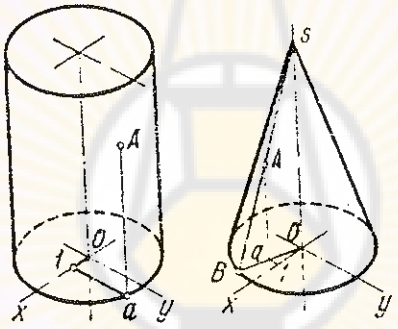
الشكل (322)

نورد فيما يلي ملخص القاعدة العامة في إيجاد مقطع مجسم بمستو:

نقوم بإيجاد نقطة واحدة من نقاط مضلع التقاطع (نقطة اختراق أحد حروف المجسم للمستوي القاطع)، ثم نقوم باستنتاج أضلاع القطع الحاصل بوساطة خواص التآلف. التآلف يكون دوماً بين المستوي القاطع والمستوي الحاوي قاعدة المجسم، محور التآلف هو الفصل المشترك بين هذين المستويين.

من حيث المبدأ لا فرق في طريقة إيجاد مضلع التقاطع بمستو مع أي مجسم كان. في حالة الموشور يمكن أن يصبح المستوي المساعد حاوياً أحد أوجه الموشور مما يسهل الإنشاء في حالة كون المستوي القاطع مستوياً مسقِطاً، يمكن إسقاط المجسم على المستوي المعامد له (المستوي المنصوب على الشكل السابق يعامد المستوي الجبهي) تبين على المستوي الأخير المساقط الموافقة (بحالة المستوي المنصوب ـ المساقط الجبهية) لكافة نقاط اختراق أحرف المجسم للمستوي القاطع وتسهل عملية إيجاد مضلع التقاطع المطلوب. قم بذلك بنفسك على الرسم في الشكل (322).

في الشكل (323-a) المسقط الأكسونومتري لاسطوانة ومخروط دوراني. يبين الشكل كيفية استنتاج المسقط الأكسونومتري لنقطة تقع على سطح المجسم في الحالتين.



a)

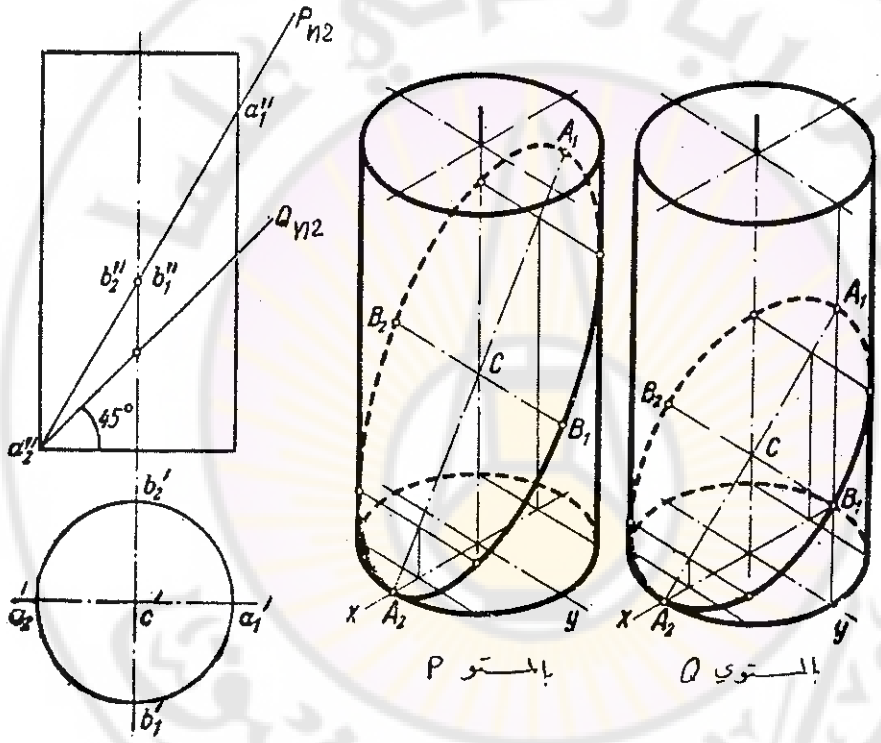
الشكل (323)

في الشكل (323-b) مقطع اسطوانة دورانية بمستو مائل. يوضح الرسم مسقطي الاسطوانة وتوضع المستوي القاطع P لها.

يبين الرسم المجاور المسقط الأكسونومتري للاسطوانة والمقطع الحاصل من قطعها بالمستوي. المقطع الحاصل هو قطع ناقص حيث حددنا على الرسم الأكسونومتري

مركز القطع وهو النقطة C والمحورين المترافقين ـ المحور الكبير A A = a a والمحور الصغير B B = b b، واضح أن هذين القطرين متعامدان.

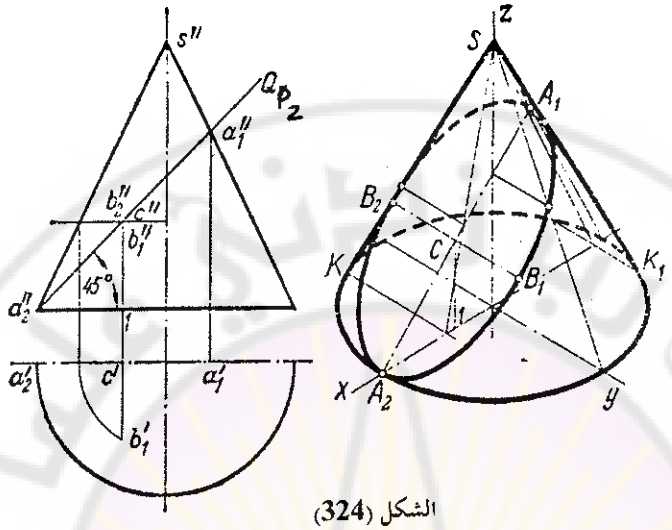
على الشكل نفسه ـ على اليمين مقطع الاسطوانة بالمستوي Q.



b)

الشكل (**323**)

يبين الشكل (324) مقطع مخروط دوراني بالمستوي Q حيث تم تحديد مركز القطع الناتج C والمحورين المترافقين فيه ـ المحور الكبير A A = a′ a′ والمحور الصغير B B = 2 . (b c) وذلك بوساطة الدائرة التي تمثل النقطة B، انظر المساقط.



الشكل (324)

7 - 10 - 2 : تقاطع مستقيم مع مجسم

يتقاطع المستقيم مع المجسم بعدة نقاط، ولكن نعين عادةً نقطة دخول المستقيم في الجسم ونقطة خروجه منه (يتقاطع مستقيم مع وجوه مجسم محدب في نقطتين فقط)، ويتم تعيين هاتين النقطتين كما يلي:

1 - نمرر بالمستقيم مستوياً مساعداً T يحوي المستقيم المفروض بحيث يمر من رأس المجسم.

2 - نعين مقطع تقاطع المستوي المساعد مع المجسم.

3 - نعين نقطتي دخول المستقيم وخروجه في المقطع الناتج فنحصل على نقطتي الاختراق المطلوبتين.

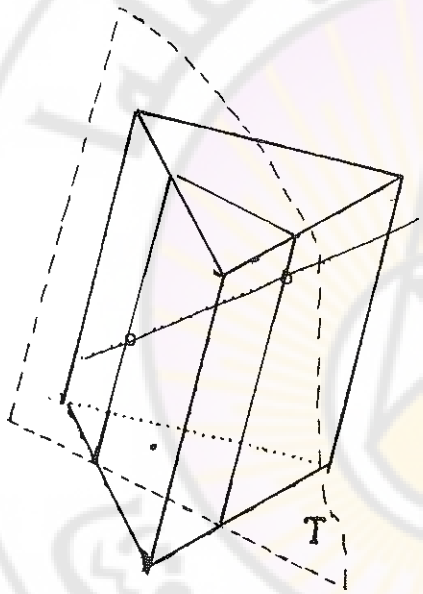
يجب اختيار المستوي المساعد بحيث يكون المقطع الناتج سهل الرسم كالخطوط المستقيمة والدوائر. وفيما يلي بعض الإرشادات في اختيار المستوي المساعد:

1 - إذا كان الجسم المفروض كثير وجوه فيمكن أن يكون المستوي المساعد شاقولياً أو رأسياً.

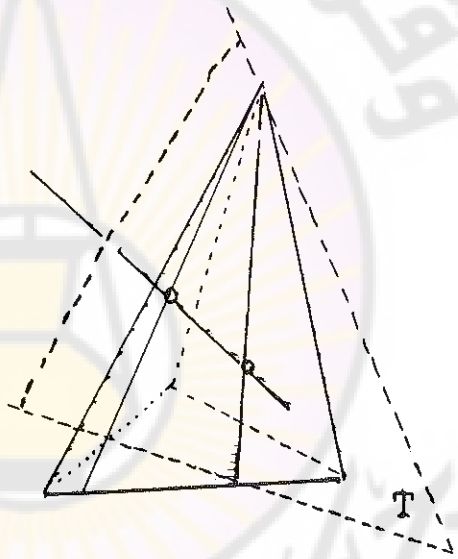
2 ـ إذا كان الجسم المفروض هرماً أو مخروطاً، فالمستوي المساعد يتعين برأس هذا الجسم المفروض، يتقاطع المستوي المساعد المار برأس المخروط معه بمولدين، فيتقاطع هذان المولدان مع المستقيم المفروض في نقتطي اختراقه للمخروط.

3 ـ في حالة الاسطوانة أو الموشور ـ ينتقل رأس المخروط إلى اللانهاية وبالتالي سيوازي المستوي المساعد الحاوي المستقيم مولدات المجسم المفروض.

نبين على الشكل الفراغي (325) تقاطع مستقيم مع هرم، على الشكل الفراغي (326) تقاطع مستقيم مع موشور.



الشكل (326)



الشكل (325)

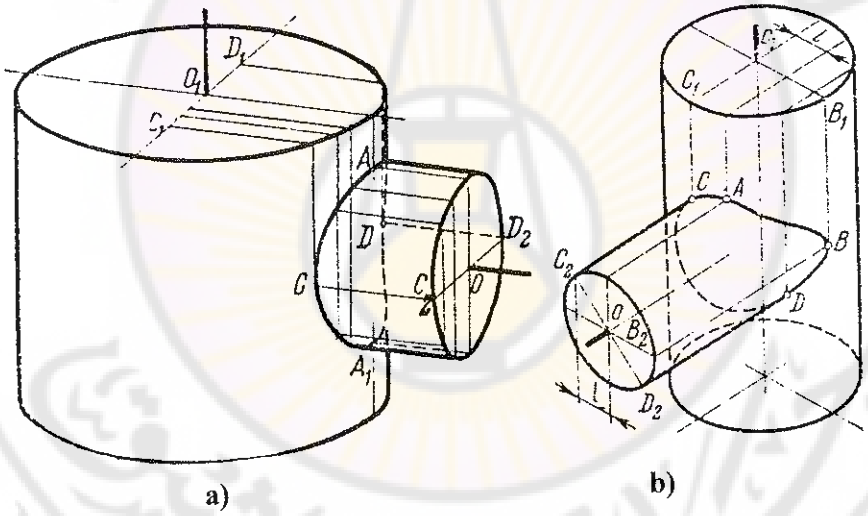
7 ـ 10 ـ 3 : إيجاد منحنيات تقاطع المجسمات مع بعضها بعضاً (مجسمات التقاطع)

تتقاطع المجسمات وفق منحني تقطع معقد تكون معادلته من الدرجة الثانية وأكثر غالباً وقد لا يكون معرّف بمعادلة تحليلية أيضاً. في كل الأحوال يمكن إيجاد هذا

المنحني على الرسم في المساقط (بطريقة المستويات المساعدة غالباً) وكذلك في المساقط الأكسونومترية لهذه الأجسام ونكون بذلك قد حددنا على الرسم المسقط الأكسونومتري لمنحني التقاطع.

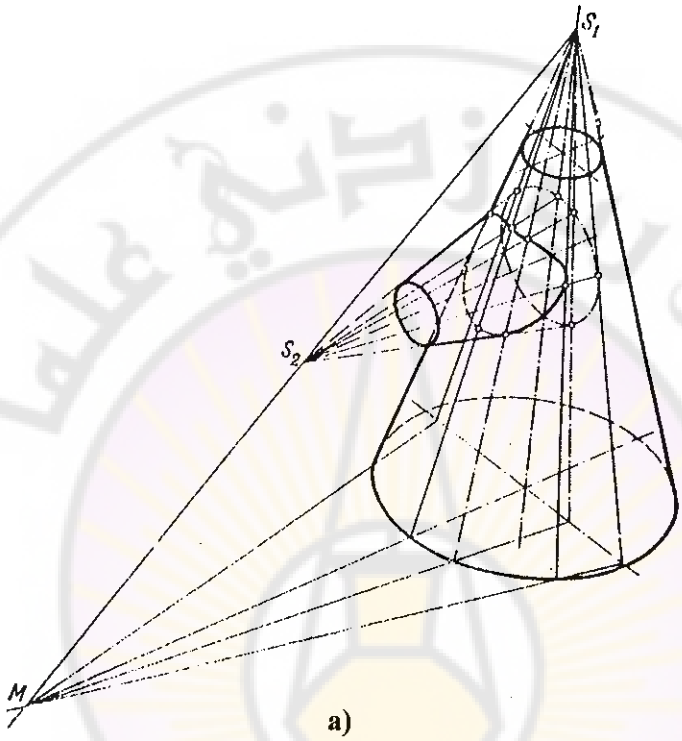
في الشكل (227-a) توضيح لكيفية إيجاد منحني تقاطع اسطوانتين متعامدتين ومتمركزتين مختلفتي الأقطار. يتم أخذ مستو مساعد مواز لمحوري الاسطوانتين (يوازي المستوي المشكل من هذين المحورين) ويعمد إلى إيجاد مواقع النقاط المشتركة. مثلاً المستوي المار من المحورين يحدد النقطة المشتركة بين الاسطوانتين (A) النقطة A في المستوي نفسه. وهكذا بالنسبة للنقاط C , D.

الطريقة نفسها يمكن اتباعها في إيجاد منحني التقاطع بين الاسطوانتين المتعامدتين غير المتمركزتين مختلفتي الأقطار تبين على الشكل (327-b).



الشكل (327)

على الشكل (328-a) تقاطع جذعي مخروطين محوريهما متعامدان. حيث تم إيجاد منحني التقاطع الحاصل بوساطة المستويات المساعدة المارة برأسي الهرمين المقتطع منهما الجذعين المعنيين.



a)

الشكل (328)

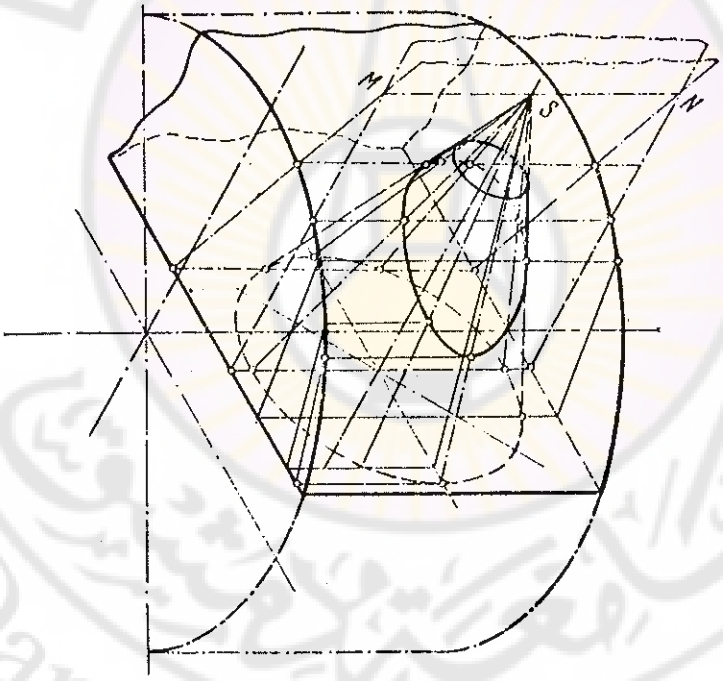
المستويات المساعدة المساعدة ستمر كلها أيضاً من النقطة M ـ نقطة تقاطع المستقيم المار بمحوري الهرمين والمستقيم الذي يمثل الفصل المشترك للقاعدة الأولى والمستوي المار بمحورين الهرمين. كل مستو قاطع للهرمين سيشكل فصولاً مشتركة يمكن استنتاجها بوساطة النقاط المتوافقة على محيط قاعدتي الهرمين.

على الشكل (328-b) منحني التقاطع الحاصل من تقاطع اسطوانة دورانية محورها أفقي وهرم محوره شاقولي. أخذنا مستويات مساعدة مارة من رأس الهرم وبشكل تبقى موازية لمحور الاسطوانة.

في كل مرة نصل النقاط على محيط قاعدة الهرم برأس الهرم فنحصل على مقطع الهرم بالمستوي القاطع، كذلك نصل نهايات النقاط على سطح الاسطوانة فنحصل على مقطع سطح الاسطوانة بالمستوي القاطع، نستنتج النقاط المشتركة بين المقطعين.

حددت هذه المستويات مع قاعدة الهرم الأفقية فصولاً مشتركة توازي محور الاسطوانة ومع كامل سطح الرسم سطوحاً على شكل مثلثات. مع الاسطوانة حددت هذه المستويات سطوحاً على شكل متوازيات للاضلاع. عين كل منها.

وهكذا بتعدد المستويات المساعدة المأخوذة نستطيع أن نرسم منحني التقاطع المطلوب. واضح أن تعدد المستويات المساعدة سيكون في صالح الوصول إلى دقة أكبر في الرسم.



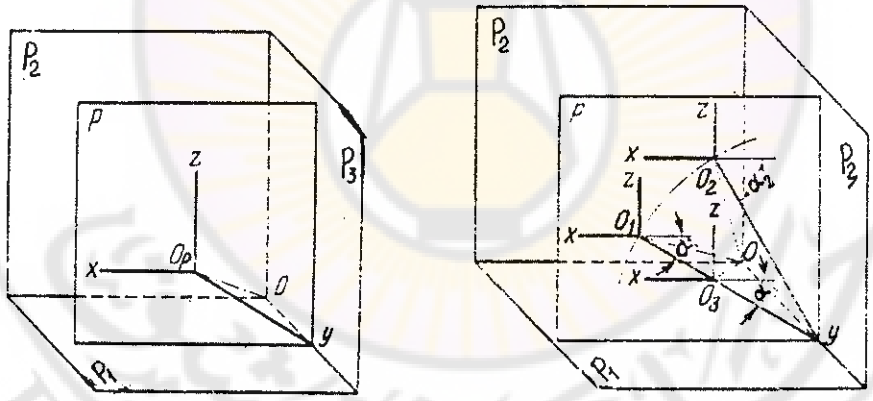
b)

الشكل (328)

7 - 11 : الإسقاط الأكسونومتري المائل

في بعض الحالات بالأخص عندما يتطلب الأمر إيجاد المسقط الأكسونومتري للدوائر يتعقد رسم المساقط الأكسونومترية الموافقة. يتم في الإسقاط الأكسونومتري المائل تجنب هذا التعقيد، حيث تؤخذ الدوائر (أو العدد الأكبر من الدوائر في المنظور الواحد) بشكل تكون فيه موازية لمستوي الإسقاط الأكسونومتري الجبهي مثلاً. في الوقت الذي يكون فيه مستوي الإسقاط الأكسونومتري الجبهي موازياً للمستوي الذي تقع فيه هذه الدوائر. انظر الشكل (329)، حيث مستوي الإسقاط الأكسونومتري P يوازي المستوي الجبهي للإسقاط P.

تُسقط الأبعاد على المحورين x , z بدون أي تشويه. بينما تؤخذ نسبة التشويه على المحور y هي 0.5. (نسب التشويه 1 : 0.5 : 1). فهذا النوع من الإسقاط هو أحد أنواع الإسقاط الديمتري.

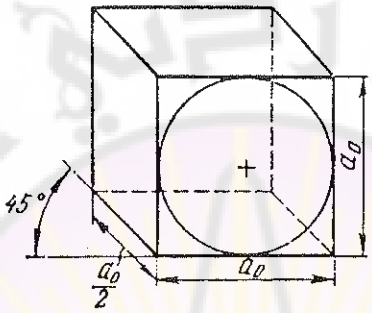


الشكل (329)

تسحب نقطة المبدأ إلى نقطة مثل Op في مستوي الإسقاط الأكسونومتري P. ويراعى أن لا يكون اتجاه الإسقاط موازياً للمحور y.

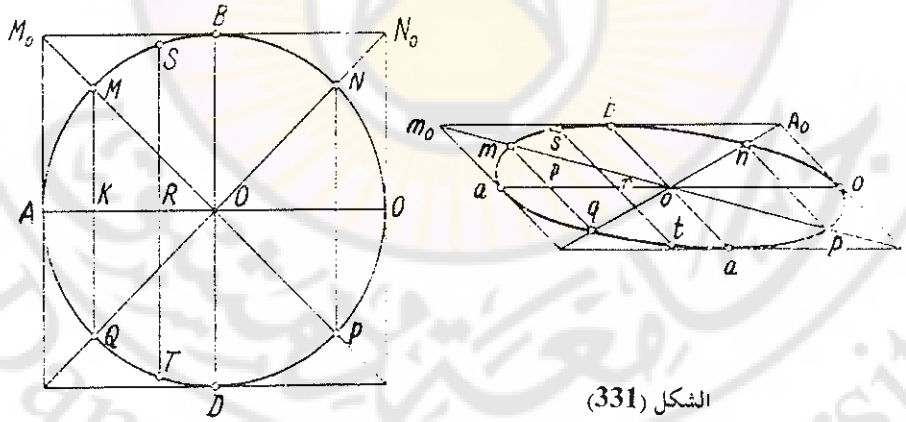
في حالات كثيرة يؤخذ اتجاه المحور y بحيث يشكل زاوية 45° مع المحور x كما في الشكل (330). يبين هذا الشكل المسقط الأكسونومتري لمكعب توضعت على وجهه المقابل دائرة.

سيبقى مسقطها الأكسونومتري دائرة مساوية لها مما يسهل الإسقاط إلى حد كبير.



الشكل (330)

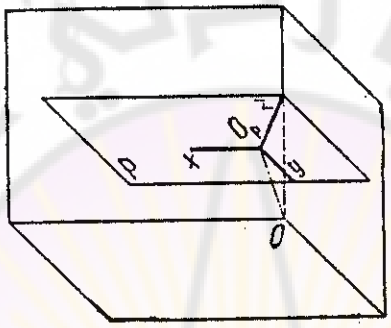
على الشكل (331) مسقط دائرة كما تبدو في مستو يوازيها، ومسقطها على المستوي الأفقي في جملة الإسقاط الأكسونومترية المائلة.



الشكل (331)

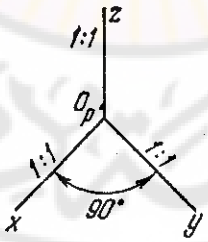
تؤخذ مستويات الإسقاط الأكسونومترية بشكل تكون فيه موازية لأحد المستويات الإسقاطية وتكون نسبة التشويه على المحور المعامد تساوي الـ 0.5، وتفرض شروط الرسم نسب التوجيه على المحاور.

في الشكل (332) مستوي الإسقاط الأكسونومتري يوازي المستوي الأفقي ونسبة التشويه باتجاه المحور Z هي 0.5.



الشكل (332)

يبين الشكل (333) أيضاً المحاور الإحداثية لإسقاط أكسونومتري من نوع آخر، حيث يؤخذ المحور z نحو أعلى، بينما تؤخذ المحاور x , y متناظره بالنسبة له والزاوية بينهما قائمة، وترسم المساقط دون أي تشويه. يسمى مثل هذا المنظور بالمنظور العسكري، ليس في التسمية غرابة ـ إنجاز الرسوم يتم بسهولة وسرعة.

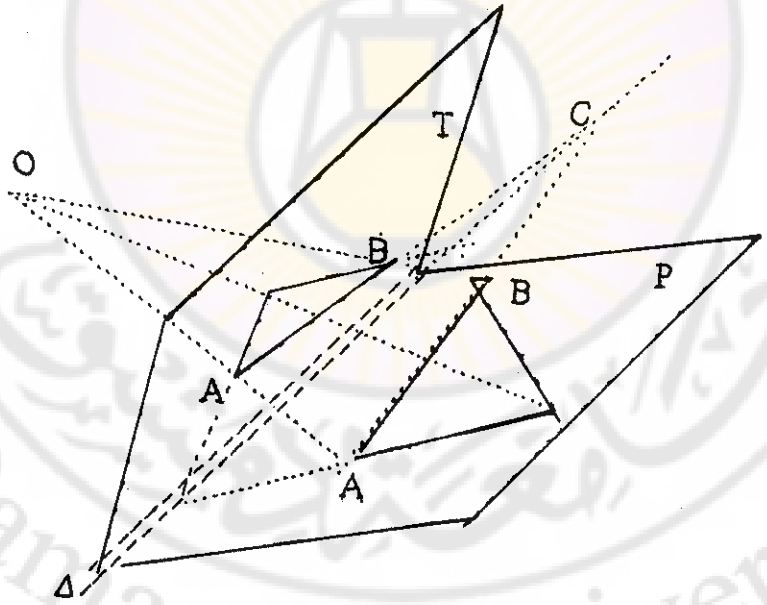


الشكل (333)

ملحق

التـــآلـــف

لنأخذ المستويين المتقاطعين T , P المتقاطعين في الفصـل المشـترك M N، مهمـا كانت الزاويـة بينهمـا. نـأخذ مستوياً ثالثـاً قاطعـاً لهمـا، ليكـن الفصـلان المشـتركان للمستوي الثالث (هذا المستوي غير مبين على الرسم) هذا مـع مستويي P , T همـا المستقيمان C B , C B على الترتيب. واضح بأن نقطة تلاقي هذيـن الخطـين سـتكون على الخط الفاصل بين المستويين MN. الشكل (334).



الشكل (334)

تمثل هذه الحالة حالة عامة، لم نشترط فيها أي شرط لمواقع وحالات المستويات. كل مستويين مشتركين في فصل مشترك يسقط عليهما شكل فراغي ما، يأخذان هذا الشكل.

نسمي المستويين P , T مستويين متآلفين. ونسمي الفصل المشترك بينهما Δ محور التآلف بينهما. نسمي النقطة O مركز التآلف.

نلاحظ، في الشكل السابق، أن هناك علاقة بين النقاط على المستويين P , T وبالتحديد علاقة مطابقة متقاربة، (تآلف). مثال هذين المستويين المتآلفين هو اي مستو في الفراغ وظله على الأرض. يملك هذا التآلف الخصائص التالية:

1) كل نقطة من مستو تآلف نقطة واحدة من المستوي الثاني. مثلاً: النقطة B تآلف النقطة B؛

2) كل مستقيم من مستو يآلف مستقيماً واحداً من المستوي الثاني. مثلاً: المستقيم AB يآلف المستقيم AB؛

3) كل نقاط الفصل المشترك بين المستويين (محور التآلف)، تتآلف مع نفسها، وبالتالي محور التآلف يآلف نفسه؛

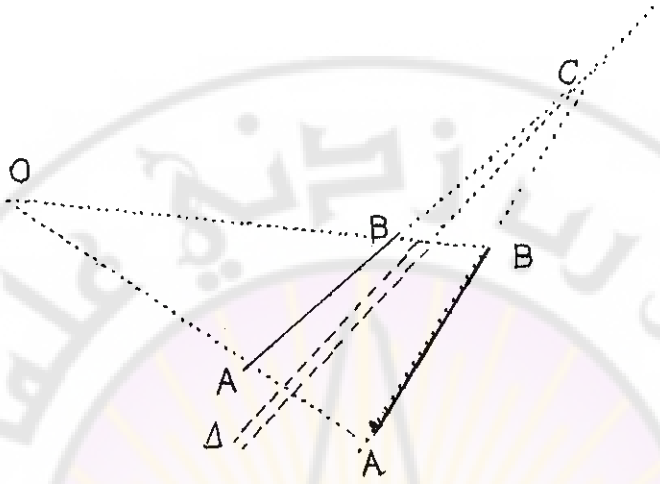
4) كل مستقيم في مستوي يآلف مستقيماً آخراً في المستوي الثاني يلتقي معه في نقطة تقع على محور التآلف، مثلاً يلتقي المستقيمان المتآلفان AB , AB في نقطة C تقع على محور التآلف؛

5) بين أي مستقيمين متآلفين علاقة تناسب (نسبة تآلف) ثابتة. أي أن:

$$CA / CA = CB / CB = AB / AB = const$$

6) كل شكل مستو في أحد المستويين يآلف شكلاً آخراً في المستوي الثاني، نسبة التآلف بينهما تساوي نسبة التآلف. انظر المثلث في المستويين P , T، اضلاعه كافة تتآلف مع أضلاع مقابلة لها في المستوي الثاني، وتتلاقى أزواج الأضلاع المتوافقة (المتآلفة) مع بعضها بعضاً في نقطة على محور التآلف.

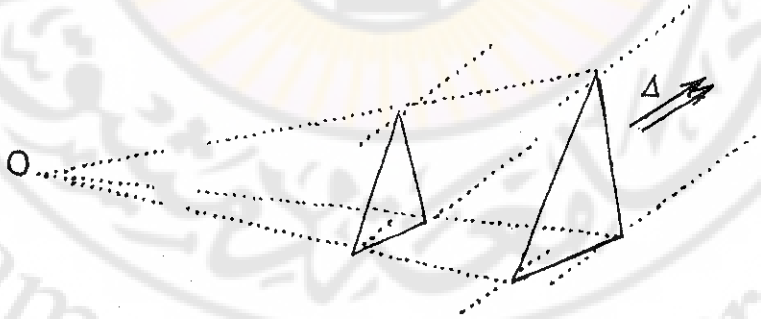
يتعين التآلف بمحور التآلف ومركز التآلف ونقطتين متآلفتين. انظر الشكل (335).



الشكل (335)

حالات خاصة في التآلف:

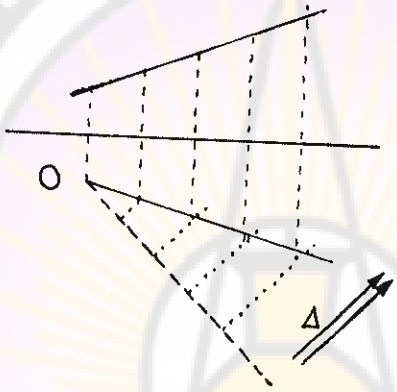
1) محور التآلف في اللانهاية (التحاكي): يصبح أي مستقيمين متآلفين متوازيين (متحاكيين) وأي شكلين متآلفين متوازيين (متحاكيين)، كما في الشكل (336).



الشكل (336)

يمكن الاستفادة من هذه الخاصة في إيجاد الشكل المتحاكي مع شكل معطى، كما يمكن استخدام هذه الخاصة في إيجاد مستقيم واصل بين نقطة معطية ونقطة التقاء مستقيمتين. يمكن الاستفادة من هذه الخاصة أيضاً في تقسيم قطعة مستقيمة إلى عدد ما من القطع المتساوية.

على الشكل (337) قمنا بتقسيم المسقط الأفقي إلى أربعة أجزاء متساوية قمنا بإنشاء أربعة أجزاء عيارية متساوية (كل منها تساوي واحدة الطول). على اتجاه ما، وصلنا بين نهايتي القطعتين o b , s فحصلنا على اتجاه التحاكي الكائن بين هاتين القطعتين. القطع الناتجة في المسقطين هي قطع متساوية.

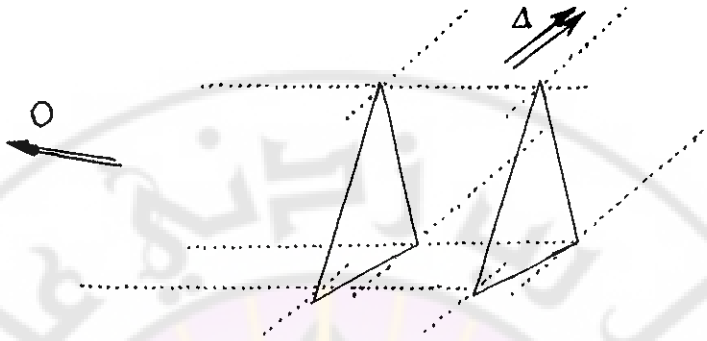


الشكل (337)

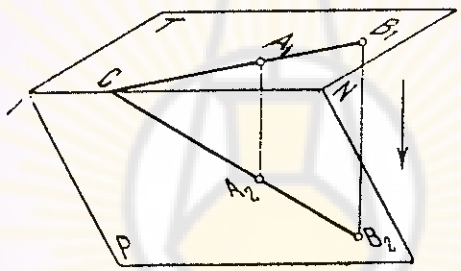
2) مركز التآلف في اللانهاية: يصبح اتجاه الإسقاط متوازياً ويصبح المستقيمان المتآلفان (والشكلان المستويان) متساويين. وبالتالي نحدد اتجاه التآلف بهذا الاتجاه. الشكل (339).

3) التآلف ومركز التآلف في اللانهاية: يؤول التآلف إلى تواز وتساو في الوقت نفسه (التساير). الشكل (338).

لنفرض أن اتجاه النظر هو باتجاه كل من A A , B B، كما هو موضح بالشكل (339). المستويان T , P مستويان متآلفان. والفصل المشترك بينهما M N هو محور التآلف بينما. اتجاه الإسقاط، الاتجاه المبين على الرسم وهو اتجاه التآلف.



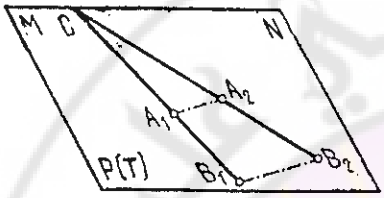
الشكل (338)



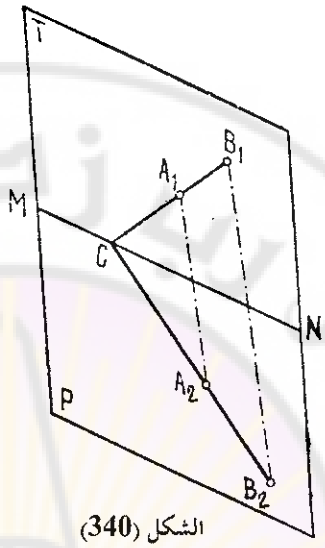
الشكل (339)

لنفرض أننا قمنا بتدوير المستوي T حول محور التآلف MN حتى تمام انطباقه على المستوي P، يصبح وضع المستويين (T) P، كما في الشكل (340). انظر إلى موضع محور التآلف.

إذا قمنا بتدوير المستوي T حول محور التآلف MN حتى تمام انطباقه على المستوي P ولكن في الاتجاه المعاكس، فيصبح وضع المستويين (T) P كما في الشكل (341). انظر إلى موضع محور التآلف.



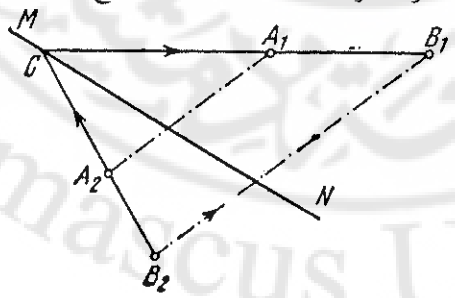
الشكل (341)



الشكل (340)

تحافظ نسبة التآلف على قيمة واحدة في الشكل الواحد. في الشكلين السابقين يكون محور التآلف هو المحور MN وأزواج النقاط BB , AA أزواج متآلفة، المستقيمان AB , AB هما مستقيمان متآلفان متقاطعان على محور التآلف والعلاقة بين طوليهما تساوي نسبة التآلف. اتجاه التآلف هو الاتجاه AA.

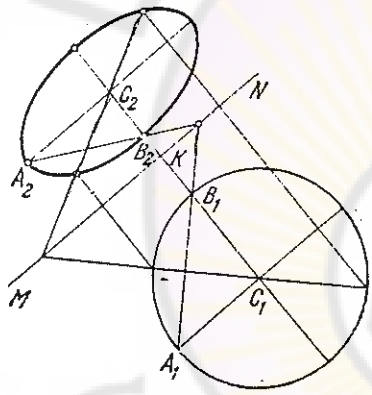
يمكن إيجاد مسقط غائب لنقطة علم منها أحد مسقطيها وجملة التآلف التابعة لها. على الشكل (342) تعطى جملة التآلف ـ محور التآلف هو المستقيم MN، ونقطتان متآلفتان A , A، والمطلوب إيجاد النقطة المتآلفة مع النقطة B.



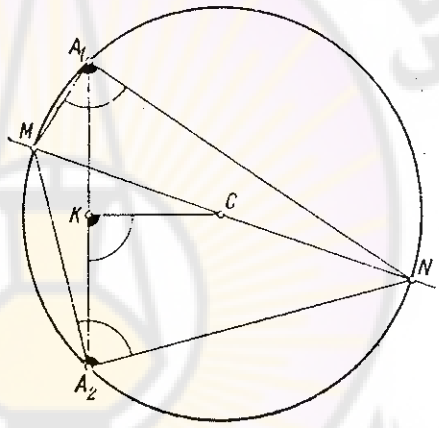
الشكل (342)

نصل النقطتين AB في المستوي الأول ونمدد حتى يتقاطع مع محور التآلف عند نقطة مثل C، ثم نصل مع النقطة، تقع النقطة B على هذا المستقيم وفي اتجاه الخط الواصل بين النقطتين المتآلفتين AA.

على الشكل (343) أعطى محور التآلف MN نقطتان متآلفتان A , A. بالوصل بين النقطتين المتآلفتين المعطيتين نحصل على اتجاه التآلف المبين في الرسم. ننصف القطعة AA وإقامة العمود المار من C نحصل على مركز الدائرة المارة بالنقطتين A , A. الزاويتان الحاصلتان MAN , MAN هما زاويتان متآلفتان ومتساويتان هنا قائمتان، المثلثان الحاصلان هما أيضاً متآلفان.



الشكل (344)



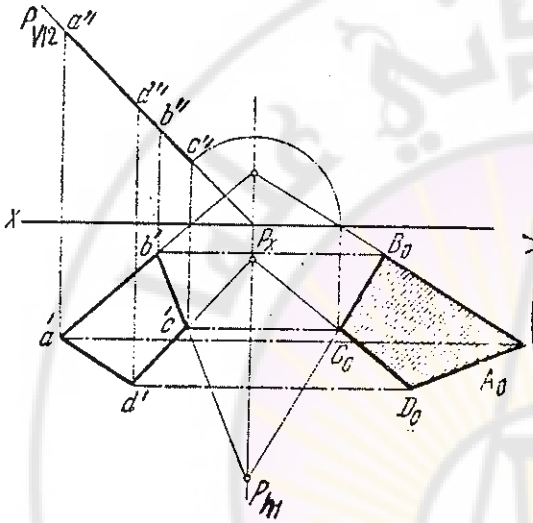
الشكل (343)

على الشكل (344) جملة تآلف ثانية أعطي محورها وزوج من النقاط المتآلفة A , C والمطلوب تكملة رسم الشكل المتآلف مع الدائرة التي مركزها النقطة C ونصف قطرها هو R = AC.

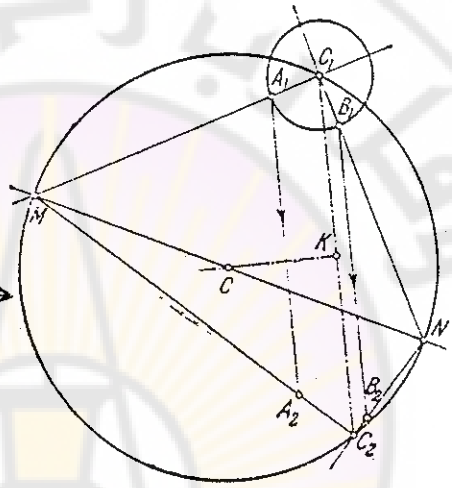
نرسم الدائرة في المستوي الأول (الجهة الأولى في جملة التآلف المعطاة) ثم نقوم باستنتاج النقاط المتآلفة مع نقاط مختارة من محيط الدائرة. نكرر ذلك حتى يكون

رسم القطع الناقص الحاصل ممكناً. يمكن الاكتفاء بالمحورين المتزافقين فيه AC , CB وهما المحور الكبير والصغير في القطع.

يبين الشكل (345) كيفية إيجاد النقاط المتآلفة مع نقاط تقع في أحد المستويين المتآلفين MCN , MCN لا يشترط أن تقع النقاط على محيط الدائرة:



الشكل (346)



الشكل (345)

على الشكل (346) مستو على شكل رباعي كيفي يقع في مستو منصوب هو المستوي P. يمكن إيجاد الكبر الحقيقي لهذا الرباعي بطريقة الدوران، حيث ندور المستوي المنصوب حتى يصبح موازياً للمستوي الأفقي للإسقاط (ندور المسقط الثاني له حول النقطة Px) ونحصل على مسقط هذا الرباعي في المطبق ABCD.

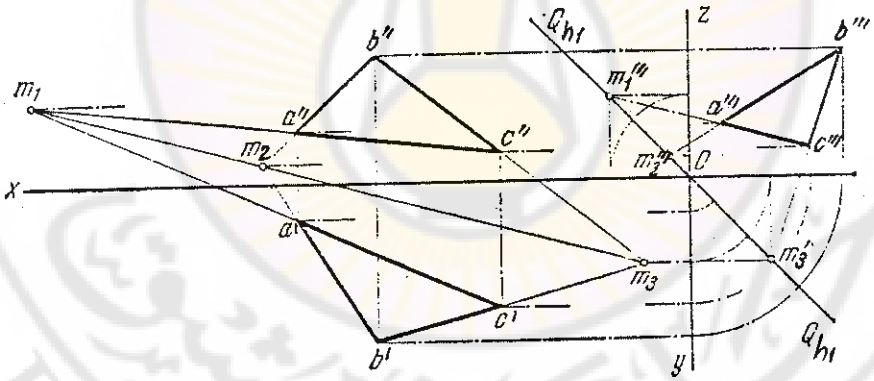
يمكن الاستفادة من علاقة التآلف الكائن بين المسقط الأفقي للرباعي هذا والمطبق. حيث إن بين نقاطه كافة علاقة تآلف. نكتفي بإيجاد أربعة أزواج من النقاط المتآلفة لتمثيل رؤوس هذا الرباعي. للبدء بالحل لابد من معرفة جملة التآلف الحاصلة. محور التآلف هو الفصل المشترك بين المستوي والمستوي الأفقي (الأثر الأفقي نفسه P)، اتجاه التآلف هو الاتجاه الموازي لمحور الإسقاط.

نوجد مطبق نقطة واحدة ولتكن النقطة C ونوجد الزوج الأول من النقاط المتآلفة C , c أولاً ثم نتابع الحصول على أزواج النقاط المتآلفة الباقية.

كذلك هناك علاقة تآلف بين المسقطين الأفقي والجبهي لأي مستو. محور هذا التآلف هو الفصل المشترك بين المستوي ذاته والمستوي المنصف للربع الثاني والرابع، اتجاه التآلف هو الاتجاه المعامد لمحور الإسقاط.

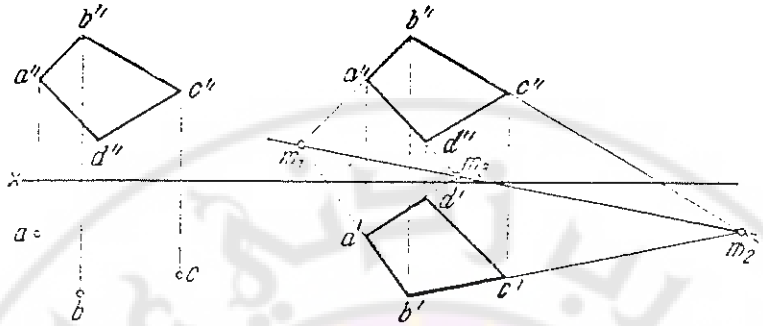
واضح أن نقاط محور التآلف متآلفة مع نفسها بالفعل، الفصل المشترك بين المستوي والمستوي منصف الربع الثاني هو مستقيم واقع في المستوي المنصف الثاني، ونحن نعرف أن نقاط هذا المستوي كافة تنطبق فيها المساقط الأفقية والجبهية على بعضها بعضاً.

الشكل (347) يبين التآلف الكائن بين المسقطين الأفقي والجبهي لمستوي على شكل مثلث ABC. نمدد اي ضلعين لهذا المثلث في المسقطين حتى تتلاقى المساقط المتماثلة فنحصل على محور التآلف وهو المحور mm.



الشكل (347)

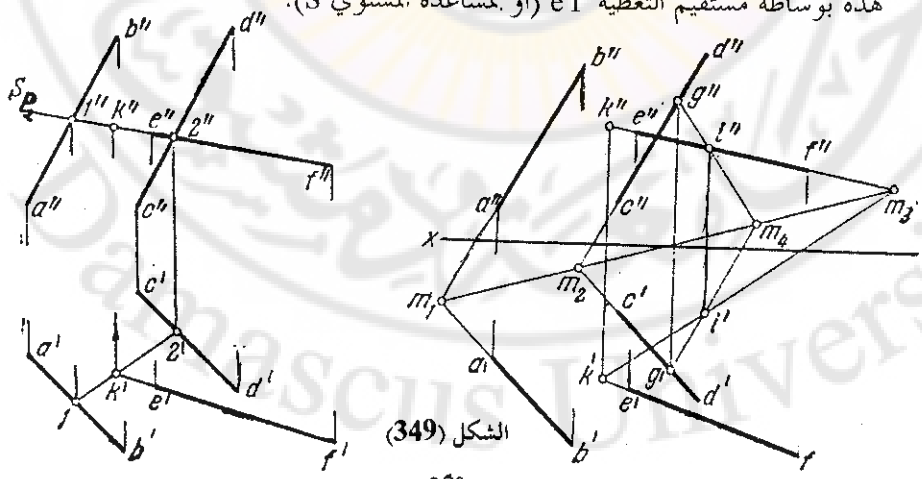
يمكن الاستفادة من خواص التآلف الحاصل في إيجاد المساقط الغائبة لنقاط أعطي أحد مسقطيها. الشكل (348) يعطي مثالاً على ذلك.



الشكل (348)

في الشكل (349) أوجدنا نقطة اختراق المستقيم الكيفي (ef , e'f') EF مع المستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين (AB , CD) بالاستفادة من خواص التآلف بين المسقطين الأفقي والجبهي. أوجدنا أولاً محور التآلف MN ثم من نقطة G على أحد المستقيمين (CD) أنشأنا مستقيماً جديداً (G M) يقطع المسقط الجبهي للبمستقيم المعطى في نقطة مثل I، ننشئ المستقيم المتآلف مع المستقيم IM في الأفقي فيكون المسقط الأفقي له هو im، يتقاطع هذا الأخير مع المسقط الأول للمستقيم عند k المسقط الأول لنقطة اختراق المستقيم EF مع المستوي المعطى، نوجد مسقطها الجبهي k' على e'f'.

بغية المقارنة، على الرسم المجاور على الشكل (349) أوجدنا نقطة الاختراق هذه بوساطة مستقيم التغطية e'f' (أو بمساعده المستوي S).

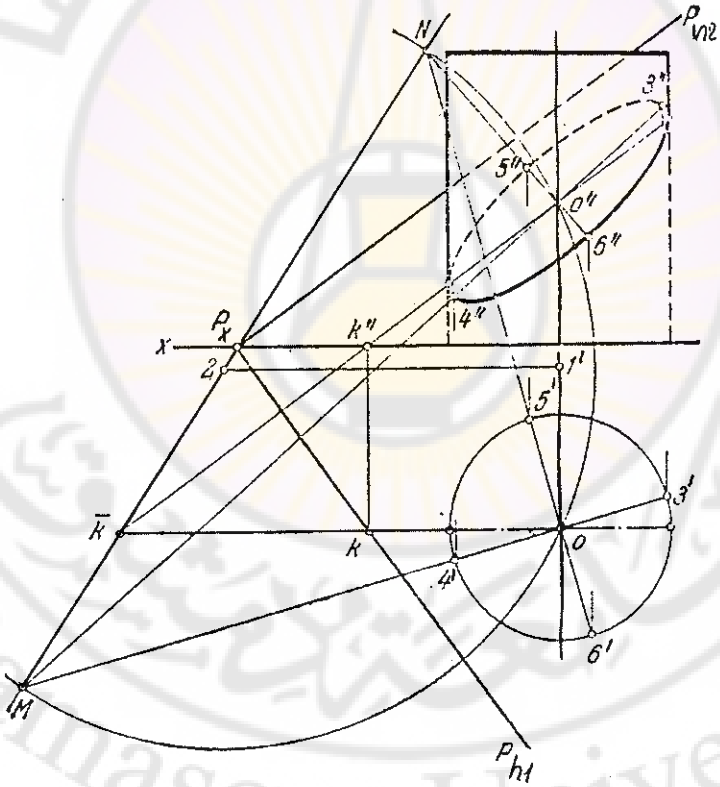


الشكل (349)

على الشكل (350) قمنا بإيجاد المقطع الحاصل من قطع الاسطوانة الدورانية القائمة بالمستوي الكيفي P بمساعدة خواص التآلف الكائن بين المسقطين الأول والثاني.

بفرض أن المسقط الأفقي للمقطع الحاصل معروف (هو نفسه المسقط الأفقي للاسطوانة) أوجدنا محور التآلف (الفصل المشترك بين المستوي القاطع P والمستوي المنصف للربع الثاني، عن طريق المستقيم الجبهي OK (ok , o'k') الواقع في المستوي القاطع.

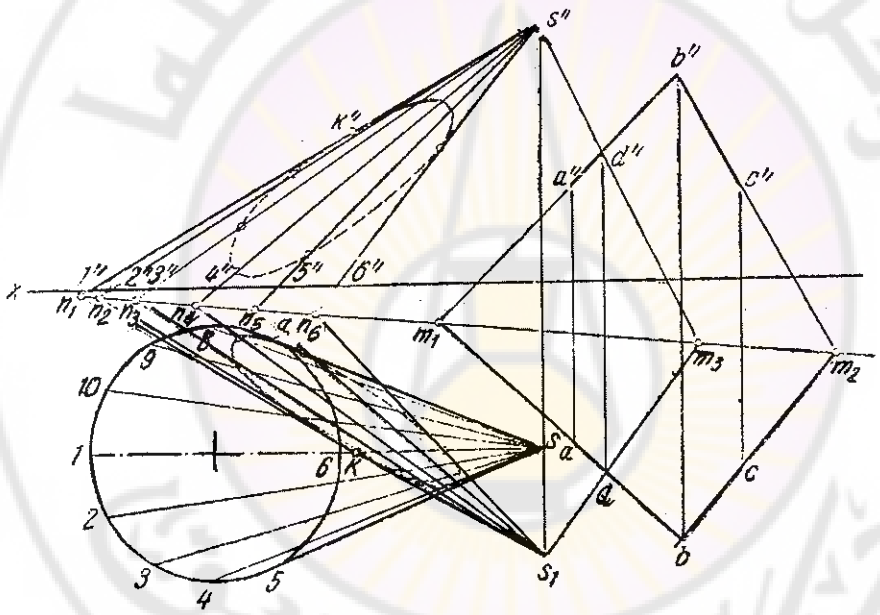
بعد ذلك بإستخدام المساقط الأفقية (مثلاً المسقط o m) للمستقيمات الحاملة للنقاط 4 , 3 أنشأنا للمستقيمات المتآلفة معها (o'm') في المسقط الجبهي أوجدنا المساقط الجبهية لها 4' , 3'.



الشكل (350)

على الشكل (351) قمنا بإيجاد المسقطين الأفقي والجبهي للمقطع الحاصل من قطع المخروط الدوراني المائل بالمستوي المعين بالمستقيمين المتقاطعين (AB , BC).

أوجدنا محور التآلف. اتجاه التآلف يعامد محور الإسقاط. بعد ذلك أوجدنا عدداً من المولدات في الهرم كافية لإنشاء المقطع. ثم استنتجنا المسقط الأول لنقاط التقاطع الحاصلة أولاً ومن ثم أوجدنا المساقط الجبهية لتلك النقاط بمساعدة خواص التآلف الكائن بين مسقطي المقطع الحاصل.



الشكل (351)

العناصر والرموز المستخدمة في هذا الكتاب
ورموز أخرى ممكنة (في مراجع أخرى)

الرموز (العناصر)	في هذا الكتاب	رموز أخرى ممكنة (في مراجع أخرى)
مستوي الإسقاط: الأفقي، الجبهي، الجانبي	P_1 , P_2 , P_3	P , P , P
تغيير مستوي إسقاط: التغيير الأول، التغيير الثاني، التغيير الثالث	Q , T , S , R	4 , 5 , 6 ...
المستويات المساعدة: المساعد 1، المساعد 2، المساعد 3	Q , T , S , R	T , S
محاور الإسقاط	x , y , z P / Q , Q / S	X , X , X
النقاط في الفراغ	A	
النقاط في المساقط 1، 2، 3	a′ , a″ , a‴	A′ , A″, A‴ A , A , A
النقاط في المساقط على المستويات المساعد: 1، 2، 3	a , a , a	A , A , A
مساقط المستقيم	a′b′ , a″b″ , a‴b‴ h , f	a , b , c , g , f
آثار مستقيم	M , N , K . L	H , V , W , R , S
آثار مستو	P_{n1} , P_{n2} , P_{n3}	P , P , P n , n , n

فهرس المحتويات

المراجع المستخدمة في الكتاب

1 ـ جميل أبو جهجاه: دكتور مهندس. أستاذ في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة دمشق: الوجيز في الهندسة الوصفية. 1981-1982.

2 ـ محمد صالح بساطة: مهندس. أستاذ الهندسة الوصفية في كلية الهندسة، جامعة حلب: الهندسة الوصفية. 1977-1998 في جزأين.

3 ـ محمود وردة، وليد خرطبيل، فاروق العادلي: دكتور مهندس، أساتذة في كلية الهندسة المدنية، جامعة دمشق: الوجيز في الهندسة الوصفية. 1981-1982.

4 ـ محمد العطري: دكتور مهندس. أستاذ سابق في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة دمشق: تطبيقات ومسائل محلولة في الهندسة الوصفية.

5 ـ أروستاموف: مجموعة مسائل في الهندسة الوصفية. 1995.

6 ـ بوبنيكوف: الهندسة الوصفية. 1965.

7 ـ بوبنيكوف: مجموعة مسائل في الهندسة الوصفية. 1963.

8 ـ إيفانوف: مجموعة الهندسة الوصفية.