جامعة دمشق
كلية الاقتصاد
قسم ادارة الأعمال – السنة الثالثة

المقرر

الأساليب الكمية في الإدارة

اعداد : د. زكوان قريط

الفصل الأول : مفاهيم أساسية للأساليب الكمية

الأساليب الكمية في صنع القرارات

علم أمريكي ويدرس في الدراسات العليا وتطور في جميع المجالات الهندسية وتكنولوجيا المعلومات والحاسوب والإحصاء والإدارة والرياضيات والكليات العسكرية

مفهوم وأهمية بحوث العمليات :

تتعدد أساليب اتخاذ القرارات من الأسهل إلى الأصعب من حيث الجهد، الوقت والتكلفة، حيث يأتي في مقدمة هذه الأساليب من حيث قلة الجهد، والسرعة في الوقت، وقلة التكلفة؛ أسلوب الحدس والتخمين والرأي الشخصي لحل مشكلة معينة.

بعدها تتدرج مجموعة من الأساليب من حيث الصعوبة لتصل إلى استخدام الطرق العلمية والرياضية، ويتوقف استخدام هذه الأساليب دون الأخرى على طبيعة المشكلة ، أي أن الموقف هو الذي يملي نوع الأسلوب الذي يمكن تطبيقه، حيث يمكن تقسيم أساليب اتخاذ القرار إلى قسمين:

أساليب نظرية تقليدية:

قائمة على أساس البديهة والحكم الشخصي إلى جانب الخبرة.

أساليب علمية كمية :

والتي تزداد أهميتها مع تعقد البيئة التنظيمية وطبيعة المشكلات التي يمكن أن يواجهها متخذ القرار ، ومن بين الأساليب العلمية (الكمية) نجد بحوث العمليات .

يعتبر علم بحوث العمليات من العلوم التطبيقية التي أحرزت انتشارا واسعا خاصة بعد الحرب العالمية الثانية وذلك في مجال العلوم الإدارية، حيث يعتبر هذا العلم من الوسائل العلمية المساعدة في اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة وبعيد عن العشوائية الناتجة عن تطبيق أسلوب المحاولة والخطأ، لاعتماده على المعلومات الملائمة في اختيار البديل الأمثل لحل المشاكل التي يمكن أن تواجه متخذ القرار.

وتتضح أهمية بحوث العمليات والأساليب الكمية لدراسة الأمور الكمية في إدارة الأعمال من خلال :

1. المساهمة في تقريب المشكلة الإدارية إلى الواقع .
2. صياغة نماذج رياضية معينة تعكس مكونات المشكلة.
3. عرض النموذج في مجموعة من العلاقات الرياضية وإعطاء فرص مختلفة (بدائل) لعملية اتخاذ القرارات وبما يساهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها .
4. تطبيق هذه النماذج الرياضية في المستقبل عندما تواجهنا مشكلة مماثلة ولهذا يوفر هذا العلم فوائد كبيرة لصانعي ومتخذي القرارات ومن بين هذه الفوائد نجد:

5. طرح البدائل لحل مشكلة معينة لاتخاذ القرار المناسب، اعتمادا على العوامل والظروف المتوفرة.
6. إعطاء صورة تأثير العالم الخارجي على الاستراتيجيات التي تتخذها الإدارة، فمثلا تغير العرض والطلب من الظروف الخارجية التي تؤثر على إنتاج السلعة وتحقيق الأرباح من خلال إنتاجها .
7. صياغة الأهداف والنتائج ومدى تأثر هذه الأهداف بكافة العوامل والمتغيرات رياضيا للوصول إلى كميات رقمية يسهل تحليلها(arabic-military.com) .

خصائص بحوث العمليات:

وعلى الرغم من التباين في تعريف بحوث العمليات فإنها كمنهج علمي للبحث في العمليات وإيجاد الحلول للمشكلات التي تواجهها تتسم بخمس خصائص أساسية هي:

1. استخدام الطريقة العلمية للبحث: وتعتمد الطريقة العليمة على الملاحظة العلمية للمشاهدات، والقياس وتحديد المتغيرات، وبناء النموذج الذي يمثل الظاهرة التي تجري دراستها، بالإضافة إلى تكوين الفرضيات واختبارها والوصول إلى حلول.
2. استخدام المدخل الشمولي أو النظمي: وهو دراسة الظاهرة من جميع جوانبها وتحليلها إلى عناصرها المختلفة.

ما هو النظام؟

هو مجموعة من العناصر المترابطة معاً لأداء وظيفة معينة.

3. استخدام خبرات وتخصصات متنوعة: كما أسلفنا أن المدخل الشمولي يتطلب دراسة الظاهرة من جميع جوانبها وتحليلها إلى عنا صرها المختلفة. وهذا لا يمكن أن يتأتى إلا من خلال استخدام فريق للبحث تتنوع فيه تخصصات الأعضاء وتتكامل بشكل منسق يساعد على معالجة الظاهرة قيد البحث من جميع جوانبها. (أي من وجهة نظر جميع العلوم ذات

العلاقة بالظاهرة). فمثلاً: أي مشكلة إدارية لها بالإضافة إلى البعد الإداري أبعاد أخرى (قانونية، تقنية ، صناعة، زراعة، بنوك، نفسية، اجتماعية، صحية) لذا لا بد من استخدام خبرات وتخصصات متنوعة عند حل المشكلات.

4. استخدام النماذج الرياضية: يقوم تطبيق بحوث العمليات على بناء نماذج رياضية بهدف استخدامها في تحليل المشكلات ودراستها وإيجاد الحلول المناسبة لها، وذلك لأنها تعبر عن مشاكل واقعية حقيقية لا تقبل التأويل لأن معلوماتها مؤكدة بنسبة 100%

مجالات تطبيق بحوث العمليات:

1- **الصناعة والتجارة والزراعة:** تخطيط النتاج، توزيع الإنتاج، استخدام امثل للموارد، مراقبة المخزون

2- **النقل والمواصلات:** تنظيم المواصلات البرية، الرحلات الجوية، حركة المرور ، استخدام الهاتف

3- **التخطيط:** تنظيم استخدام القوى العاملة، تخطيط المشروعات، تخطيط اقتصادي، جدولة الأعمال، تخطيط المدن

4- **التسويق والمبيعات:** رسم سياسات تسعيرية وتسويقية، بحوث تسويق، الدعاية والإعلان، دراسة السوق، تحديد سياسات التوزيع

5- **المجال العسكري:** رسم السياسات العسكرية، إيجاد خطط لزراعة الألغام، إيجاد الخطط لعمليات الهجوم والدفاع والانسحاب، استخدام امثل للمعدات والذخائر العسكرية، إيجاد خطط لبرامج التسليح، تنظيم العمليات الحربية، تنظيم التعاون بين الفروع المختلفة للقوات المسلحة.

6- **البنوك، المستشفيات، المكتبات، الفنادق، التعيين والتوظيف**

7- **المجالات الإدارية:** حيث يوفر هذا العلم المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب .

8- **مجال الإنتاج والتصنيع** والبيع وبأقل تكلفة ممكنة وأقل فاقد ممكن وأعلى ربح.

9- **مجالات التعيين وذلك** باختيار الشخص المناسب للوظيفة الملائمة.

10- **مجالات التخطيط من** خلال متابعة المشاريع وإعداد الخطط الزمنية لتنفيذ المشاريع المختلفة.

وظائف بحوث العمليات:

1. تسهيل عملية اتخاذ القرارات ومساعدة المدراء ولكن ليس إحلال الحلول محلهم
2. توفير حلول لمختلف المشاكل الإدارية
3. تعتبر أداه فعالة في مجال البحث العلمي في ميادين إدارة الأعمال
4. تساعد في تخصيص الموارد بشكل فاعل على الاحتياجات الكثيرة
5. المساعدة في اختيار الاستراتيجيات المختلفة في الإنتاج والتسويق والتمويل
6. المساعدة في تخفيض التكاليف في كثير من القرارات الإدارية
7. يوفر أداه مهمة لدراسة ردود الفعل وتحليل الحساسية للكثير من القرارات المتخذة

أنواع نماذج بحوث العمليات:

1. البرمجة الخطية Linear programming
2. الطريقة البيانية Graphic method
3. الطريقة المبسطة Simplex Method
4. النقل Transportation
5. التعيين Assignment
6. التحليل الشبكي Network analysis
7. نظرية صفوف الانتظار Queuing theory
8. نظرية وشجرة القرارات Decision & tree Theory

تعريف النموذج:

هو عبارة عن تصوير معين للظاهرة قيد الدراسة على شكل مجموعة من العلاقات الرياضية (النموذج الرياضي أو الإحصائي) أو بشكل جداول قرارات أو بشكل بياني أو مادي.

وهو محاكاة **Simulation** (تقليد) أو تقريب الواقع من خلال علاقات مفترضة وملحوظة.

ويبنى النموذج لتحديد العلاقة بين المتغيرات والمعالم الموجودة في الظاهرة التي تجري دراستها.

ويستخدم النموذج لاختبار الفرضيات والحلول المختلفة ومعرفة تأثيراتها المحتملة.

أنواع النماذج التي تستخدمها بحوث العمليات:

- **النماذج الرياضية المحددة:** هي النماذج التي تتألف من عوامل ومتغيرات معروفة لدى متخذ القرار، أي أنها بمنأى عن المؤثرات الاحتمالية (داخلية كانت أم خارجية)، منها على سبيل المثال (نماذج البرمجة الخطية، النموذج المقابل، ونماذج النقل والتخصيص).

- **النماذج الرياضية الاحتمالية:** هي النماذج التي تتألف من عوامل ومتغيرات احتمالية غير واضحة لدى متخذ القرار، ويكون هذا النوع من النماذج عرضة للمؤثرات الداخلية والخارجية، منها على سبيل المثال (نماذج السيطرة على المخزون، نموذج صفوف الانتظار)

- **النماذج الرياضية الاستراتيجية:** هي النماذج التي يتم صياغتها من قبل متخذ القرار بناء على موقف معين، مُتخذ من قبل متخذ قرار آخر يعمل في نفس البيئة، ويطلق على الموقف المذكور (بالاستراتيجية) ويتسم هذا النوع من النماذج بالبساطة كون المنافسة بموجبه تتم بين اثنين فقط من متخذي القرار، ومنها على سبيل المثال (نظرية المباريات)

- **النماذج الرياضية الإحصائية والمحاسبية:** لهذا النوع من النماذج الرياضية استخدامات ثابتة معروفة، وتتسم بالبساطة والصفة الخطية، منها على سبيل المثال
  في حالة النماذج الإحصائية (مؤشر الوسط الحسابي، الانحراف المعياري، الارتباط والانحدار).
  في حالة النماذج المحاسبية والمالية (مؤشر الفائدة البسيطة والمركبة، أقساط الاندثار، حساب الخسائر والمتاجرة)

ما هي معايير التصنيف للنماذج؟

1. النموذج الوظيفي: وصفي، تنبؤي، معياري
2. طبيعة النموذج: مجسم، مناظر، رمزي
3. أبعاد النموذج: ذو بعدين، ذو أبعاد متعددة
4. حركية النموذج: ساكن، ديناميكي
5. درجة التأكد في النموذج: تأكد تام، مخاطرة، عدم تأكد، نزاع
6. درجة العمومية: عام، متخصص
7. العلاقة مع البيئة المحيطة: مفتوح، مغلق
8. إمكانية القياس الكمي:

كمي: إحصائي، أمثلية: تحليلية، إجرائية، اجتهادية، محاكاة

كيفي: عقلاني، لفظي

تعريف النموذج الرياضي:

عرض الهدف والمتغيرات من خلال ربط الهدف بمجموعة من المتغيرات ويتم عرض الهدف على شكل دالة اقتران دالة لمجموعة من المتغيرات

ماذا يلزم لبناء نموذج رياضي؟

1- تحديد أهم عناصر المشكلة

2- التعبير عنها بشكل وصفي كمي

مكونات النموذج الرياضي:

1- **دالة الهدف Objective Function**: تعتمد على مجموعة من المتغيرات

2- **القيود Constraints**: مجموعة من القيم يتم فرضها على المتغيرات او بعض المتغيرات وذلك باستخدام العلاقات الرياضية

صياغة النموذج الرياضي:

تعتمد عملية صياغة النموذج الرياضي على الخطوات التالية:

1. **تهيئة البيانات الضرورية للنموذج:** هو عملية تلخيص البيانات وعرضها بما ينسجم مع طبيعة المشكلة المدروسة، ويتم ذلك من خلال تصميم الجداول والأشكال البيانية. (جداول البيانات الإحصائية)
2. **تحديد الهدف المطلوب تحقيقه:** ينطوي الهدف المطلوب تحقيقه من قبل متخذ القرار في منظمات الأعمال، على ما يلي:
   - تحقيق أكبر قدر ممكن من الأرباح أو العوائد الكلية.
   - تحقيق أقل قدر ممكن من الخسائر أو التكاليف الكلية.

3. **تحديد المتغيرات القرارية:** يستند النموذج الرياضي على تحديد المتغيرات وتعريفها، كأن تكون متغيرات أساسية، أو متغيرات غير أساسية، والتي تسمى أحياناً بالمتغيرات القرارية، وتكون هذه المتغيرات على ثلاثة أنواع هي: متغيرات قراريه X_1 X_2 X_3.

4. **تحديد القيود وعلاماتها الرياضية:** وهي تلك المتغيرات التي بإمكانها الحد من تحقيق الهدف وهي عدة أنواع منها:

- قيود الموارد المادية: مثل محدودية المواد الخام اللازمة للإنتاج.
- القيود الزمنية: مثل القيود الزمنية المتعلقة باستخدام المكائن والآلات، أو تلك المتعلقة باستخدام الموارد البشرية.
- القيود المالية: وهي تلك المتعلقة بالأموال المخصصة للعمليات المختلفة.
- قيود الكميات المطلوبة: وهي تلك المتعلقة بتعاقدات منظمات الأعمال والتزاماتها.
- قيود منطقية: وهي تلك المتعلقة بطبيعة المتغيرات القرارية، التي ينبغي أن تكون بمواصفات معينة، وهي نوعين:

أولا: قيود عدم السلبية: وتكون جميع قيم المتغيرات القرارية X_j موجبة، بموجب هذا النوع من القيود، أي أن ($X_j \geq 0$)، وإن ($j = 1,2,\dots, n$)، مثال ذلك كميات الإنتاج.

ثانيا: قيود الأعداد الصحيحة: تكون جميع قيم المتغيرات القرارية X_j ذات أعداد صحيحة ولا تأخذ الأعداد الكسرية، مثال ذلك (عدد الجامعات، عدد الطائرات).

وفي ضوء ذلك، ينبغي أن يكون لهذه القيود (علامات رياضية) واضحة ترتبط بنوع المشكلة المدروسة، وتكون هذه العلامات على أشكال عدة، هي:

- **علامة أقل من أو يساوي** (≤): تستخدم هذه العلامة عندما تكون القيود متعلقة باستخدام (الموارد المادية، الموارد الزمنية، الموارد المالية) وينبغي على متخذ القرار في هذه الحالة استخدام أقل ما يمكن من هذه الموارد.
- **علامة أكبر من أو يساوي** (≥): تستخدم هذه العلامة عندما تكون القيود متعلقة (بإغراق السوق بالمنتجات، أو الإيفاء بمتطلبات السوق التنافسية) حيث ينبغي على متخذ القرار في هذه الحالة الاستحواذ على أكبر حصة سوقية ممكنة.
- **علامة المساواة** (=): تستخدم علامة المساواة عندما تكون القيود في هيئة (عقود، التزامات مع جهات خارجية) ينبغي على منظمات الأعمال طرح كميات محددة من الإنتاج دون زيادة ولا نقصان للإيفاء بالتزاماتها

خطوات تطبيق الأساليب الكمية

1. **تحديد المشكلة وتعريفها**: هو التشخيص الدقيق للمشكلة ومحاولة تصنيفها ضمن إحدى المشكلات المعروفة كأن تكون مشكلة إنتاج، أو تسويق، أو تخزين.... الخ. مثال: انخفاض الأرباح ليس هو المشكلة بحد ذاته بل هو نتيجة لوجود مشكلة معينة قد تكون بالإنتاج ومواصفات المنتج، أو تسويق المنتج أو غيره.
2. **صياغة (بناء) النموذج**: هو تمثيل لمكونات المشكلة المدروسة، وتحديد العوامل المؤثرة فيها والظروف المحيطة بها وأسلوب الربط بينهما.
3. **حل النموذج**: هو إيجاد مجموعة قيم متغيرات القرار التي من خلالها يتم التوصل إلى الحل الممكن للمشكلة المدروسة.
4. **تجربة حل النموذج**: الهدف من تجربة حل النموذج هو التحقق من دقة النتائج المحصلة عليها من تطبيق النموذج وثبوت صلاحيته، إذ يتم ذلك من خلال استمرار الثبات والاستقرار وعدم التغير لقيم المتغيرات غير المسيطر عليها.
5. **تنفيذ حل النموذج**: هو وضع الحل المقترح للنموذج موضع التطبيق ومتابعة تطبيقه، للتأكد من صلاحية النموذج من عدمه، وهذا يعني تحويل النموذج المفاهيم إلى النموذج العملي في العالم الحقيقي والواقعي.
6. **تحسين النموذج**: هو إدخال التعديلات الضرورية في حال ثبوت حاجة النموذج للتعديل في مرحلة التنفيذ، بهدف تحقيق النتائج المطلوبة من تطبيقه بما ينسجم وحالة الواقع.

عناصر مشكلة اتخاذ القرارات:

1- الهدف: Objective

وهي النتيجة النهائية التي يجب الوصول إليها إما تعظيم الربح أو تقليل التكاليف.

2- المتغيرات:Variables

العناصر التي تفرض قيودا معينة على الحل مثل:

المواد الأولية الداخلية في إنتاج المادة المعينة، الأسعار، الكميات المتوفرة، ساعات التشغيل، الموارد المتاحة.

استخدام تقنية المعلومات:

يتطلب تطبيق بحوث العمليات تجميع كميات كبيرة جداً من البيانات وتنظيمها وتحليلها وإجراء عمليات رياضية كثيرة ومعقدة عليها.

وهذا يستدعي استخدام برامج محسوبة لمعالجة مثل هذه العمليات

أنواع التطبيقات الحاسوبية على استخدام بحوث العمليات:

من البرامج الحاسوبية التطبيقية باللغة الانجليزية:

- QM WIN
- TORA
- ARENA

الحل الأمثل: Optimum

يقصد بالحل الأمثل أفضل قيمة يجب أن تأخذها قيمة دالة الهدف اعتمادا على القيود المفروضة على المتغيرات إضافة إلى عوامل المتغيرات في دالة الهدف.

وتكون في الحالتين:

التعظيمMaximization

إيجاد أعلى قيمة دالة الهدف (تحديد ربح إنتاج مادة معينة)

التقليل Minimization

إيجاد اقل قيمة لدالة الهدف (تحديد اقل تكلفة لنقل مادة معينة)

الشروط الهامة لاستخدام التحليل الكمي لاتخاذ القرارات:

1- المشكلة معقدة Complex
2- المشكلة مهمة Important
3- المشكلة جديدة New
4- المشكلة متكررة Repetitive

ما المقصود بحل المشكلة؟

تشخيص الفرق بين الحالة الواقعة الحقيقية أو الأداء الفعلي وبين ما تم تخطيطه ومن ثم القيام بإجراء لحل هذا الاختلاف أو إزالة هذا الفرق.

مفهوم القرار الإداري:

هو المفاضلة بشكل واعي ومدرك بين مجموعة من البدائل والحلول المتاحة لمتخذ القرار لاختيار واحد منها باعتباره انسب وسيلة لتحقيق الهدف أو الأهداف التي يرغبها متخذ القرار

وحتى يكون القرار جيدا يجب أن تتوفر هذه المعلومات على جملة من الخصائص وهي:

1. الشمول: يجب أن تتصف المعلومات بالكمال الذي يفيد متخذ القرار .
2. الدقة: توفير المعلومات حسب طلب المستخدم والموضوع محل البحث.
3. التوقيت: ورود المعلومات في الوقت المناسب لاستخدامها في اتخاذ القرارات.
4. الوضوح: الدرجة التي تكون فيها المعلومات خالية من الغموض ومفهومة بشكل كبير لمستخدمها.
5. المرونة: مدى قابلية المعلومات للتكيف بحيث يمكن استخدامها أكثر من مرة.
6. الموضوعية: أي أنها خالية من قصد التحريف أو التغيير لغرض التأثير على مستخدم

ما هي مراحل اتخاذ القرار؟

1- فترة التعرف على المشكلة = مرحلة الذكاء Intelligence Phase

2- فترة تصميم الحلول = إيجاد حل مناسب Design Phase

3- اختيار الحل الأمثل = التخمين والاختيار Choice Phase

4- تنفيذ الحل = تطبيقه في الحياة العملية مباشرة Implementation Phase

ما هي أنواع القرارات؟

1- مبرمجة لمشكلة واضحة مؤكدة محددة روتينية مثل مشاكل الطلب والعرض

2- شبه مبرمجة لمشكلة ليست معلومة مثل توظيف شخص غير معروف لوظيفة محددة

3- غير مبرمجة لمشكلة غير واضحة عدم التأكد مثل التنبؤ في المبيعات

ما هي تصنيفات القرارات؟

1- تشغيلية من الإدارة الدنيا مثل الأنشطة اليومية الروتينية

2- تكتيكية من الإدارة الوسطى مثل أنشطة الأداء التنفيذي

3- إستراتيجية من الإدارة العليا مثل الأهداف والاستراتيجيات والخطط الطويلة

أمثلة لبعض المشكلات الإدارية:

مثال (1):

تصور أنك مسئول عن مشروع لبناء منزل كبير أو مدرسة أو غيرها من المشروعات.

ما هي المكونات الأساسية للأنشطة المختلفة لبناء هذا المشروع؟

حفر أساسات – تسوية الأرض – تهيئة الهياكل الحديدية – إعداد البنى الخشبية – تأمين الرمل والحجارة والاسمنت – وغيرها

فإذا علمت أن الوقت والموارد المالية لديك محدودة فما هي أفضل ا لطرق لتحقيق هدفك بإنجاز المشروع؟

هو استخدام الأسلوب العلمي في البناء من خلال الربط بين العناصر والمكونات لهذا المشروع، حيث يمكن استخدام ما يعرف بأساليب التخطيط الشبكي (شبكات الأعمال) وهي أحد أساليب بحوث العمليات.

مثال (2):

افترض أنك تملك مزرعة خاصة بك، وتفكر أن تستفيد من هذه المساحة خلال الموسم الزراعي القادم بحيث تحقق أكبر ربح ممكن، وأمامك عدد كبير من الخيارات (البدائل) لزراعة الأنواع المختلفة من الخضروات. ولنفترض أنك من خلال السنوات السابقة واثق من أن زراعة نوع معين (الفراولة مثلاً) سيحقق أكبر ربح ممكن نظراً لارتفاع أسعار بيعه. فهل ستزرع المساحة كلها بهذا الصنف؟ **مع افتراض أن حجم الطلب كبير على هذا الصنف ولن يتأثر بحجم إنتاجك منه؟ لا شك أنك ستفعل ولكن من المعروف أن زراعة الفراولة تتطلب كميات كبيرة من المياه وعدداً كبيراً من الأيدي العاملة وعلى افتراض أن هذين الموردين محدودين لديك. فماذا ستفعل** ؟؟ بالعودة إلى تعريف بحوث العمليات نجد أن هناك اختلاف في تعريف بحوث العمليات بالنسبة للمهنيين والمختصين في القطاعات المختلفة.

نجد أن أفضل حل لها باستخدام البرمجة الخطية.

صياغه البرمجة الخطية Linear Programming Formulation

معنى كلمة برمجة:Programming

استخدام أسلوب منطقي وعلمي في تحليل المشكلة وعلاجها

معنى كلمة خطية:Linear

وجود علاقة ثابتة بين متغيرات أساسية داخلة في تركيب هدف دالة الهدف والقيود وتمثل بخط مستقيم

تعريف البرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية من إحدى الأساليب الرياضية المهمة المستخدمة في ترشيد الموارد المتوفرة في عملية اتخاذ القرارات، وتبحث البرمجة الخطية في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والمحددات المفروضة لتحقق الأهداف المرجوة إما تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف.

وتعرف على أنها تعابير رياضية خطية(من الدرجة الأولى) تمثل بخط مستقيم ، يتم استخدامها لحل نموذج رياضي تشير إلى دالة الهدف، بمتغيرات أساسية، بقيود ومحددات معينة، وبشرط عدم سلبية المتغيرات.

مكونات البرمجة الخطية

1- وجود دالة الهدف محددة: Objective Function

(Maximization تعظيم الربح أو Minimization تقليل التكاليف)

2- وجود عدد معين من المتغيرات الأساسية: Basic Variables

وتشترط متغيرين فقط لكي يتم التعبير عنها بالمتغيرات الأساسية (x_1,x_2)

3- وجود قيود أو محددات: Constraints

يتم التعبير عنها بصورة متباينات بينها علاقة اقل من أو يساوي $\leq$

أو اكبر من ويساوي $\geq$

4- شرط عدم السلبية Non Negativity

وهذا عام وأساسي لجميع أنواع البرمجة الخطية $x_1,x_2 \geq$ zero

أهداف نماذج البرمجة الخطية:

1. تعظيم الربح اكبر قيمة في الحل بعد اختبارها في دالة الهدف
2. تقليل التكاليف اقل قيمة في الحل بعد اختبارها في دالة الهدف

أشكال القيود

ويعبر عن القيود في شكل معادلات خطية ، وهي كما يلي:

1. متساوية : (=) Equality
2. متباينة : أقل من (≤) Less Than Or Equal To
3. متباينة : أكبر من (≥) More Than Or Equal To

كيفية صياغة النموذج الرياضي

1. إما أن تكون على هيئة مشكلة يتم دراستها كدراسة حالة Case Study
2. أو بيانات محدده في جدول
3. أو على شكل نموذج رياضي محدد به دالة الهدف والقيود

صياغة المشكلة

المشكلات التمثيلة غالبا ما تأتي في صورة كلامية، وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ومن ثم يحل هذا النموذج بالأساليب المختلفة.

ويمكن إتباع الخطوات التالية في بناء النموذج الرياضي.

1. حدد الكميات التي تحتاج إلى قيم مثلى. وعرفها كمتغيرات لتأخذ الرموز x1, x2.
2. عرف هدف المشكلة وعبر عنه رياضياً باستخدام المتغيرات .
3. حدد ومثل القيود في صورة متباينات وذلك باستخدام المتغيرات.
4. أضف إلى النموذج الرياضي شرط عدم السلبية (إن جميع المتغيرات يجب أن تكون اكبر من أو تساوي الصفر).

ما هي الخطوات الأساسية المتبعة عند صياغة مشكلة برمجية؟

1. عند ذكر كلمه مركبات أساسية هي المتغيرات الأساسية X1,X2
2. عند ذكر أقسام العمل مراحل الإنتاج خطوات العمل تعتبر عدد القيود كل منها قيد على حده
3. عند ذكر كلمة أرباح تعتبر دالة هدف ربح MAX
4. عند ذكر كلمة تكلفة تعتبر دالة هدف تكلفة MIN
5. عند ذكر كمية تحديد الإنتاج أو ساعات العمل هي الكميات في القيد التي توضع بعد إشارة المتباينة وتكتب باللغة الانجليزية
6. عند التأكد من عدد المتغيرات الأساسية إن كانا متغيرين أساسين فقط تحل بالطريقة البيانية أما إن كانا أكثر من متغيرين أساسين تحل بطريقة السمبلكس
7. دوما تكون إشارة المتباينات في حالة MAX تكون اقل من أو يساوي $\leq$ دائما
   أما في حالة MIN تكون اكبر من أو يساوي $\geq$ دائما
8. عند ذكر كلمة على الأكثر تكون إشارة المتباينة في القيد اقل من أو يساوي $\leq$
9. عند ذكر كلمة على الأقل تكون إشارة المتباينة في القيد اكبر من أو يساوي $\geq$
10. عند ذكر كلمة بالضبط، تماما، تحتوي فقط تكون إشارة القيد يساوي =

صياغة المشكلة البرمجية العملية في حالة تعظيم الأرباح

مثال تطبيقي (1):

مصنع الاسي لصناعة الأخشاب في مدينة غزة يصنع نوعين من الأخشاب:

الأول خشب زان بقشرة ميبل، والثاني سويد مطعم.

بحيث يستهلك الأول 8 ساعات في قسم التصنيع والصنفرة، و يستهلك 6 ساعات في قسم الدهان والورنيش

ويستهلك الثاني 7 ساعات في قسم التصنيع والصنفرة، و يستهلك 3 ساعات في قسم الدهان والورنيش.

ويعمل في المصنع عمال بواقع 10 ساعات يوميا في قسم التصنيع والصنفرة، و 8 ساعات في قسم الدهان والورنيش.

ويحقق النوع الأول ربحا بمقدار 200 دينار في المتر المكعب ويحقق الثاني 400 دينار في المتر المكعب

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي أعلى الأرباح؟

$$\text{MAX } Z = 200X_1 + 400X_2$$

$$\text{Subject to:} \quad 8X_1 + 7X_2 \leq 10$$

$$6X_1 + 3X_2 \leq 8$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

مثال تطبيقي(2)

تقوم شركة متخصصة في فن الديكور وأعمال الجبس بتشطيب برج سكني في مدينة غزة، وكان الالتزام المفروض على الشركة كالتالي:

إعداد تركيبين أساسين في الدهان و الجبس بحيث:

يحتاج التركيب الأول 4 ساعات من المادة الأولى، و 2 ساعة من المادة الثانية

ويحتاج التركيب الثاني إلى 3 ساعات من المادة الأولى و ساعة من المادة الثانية

بحيث يستهلك من الماد الأولى 500 جم، ومن المادة الثانية 600 وحدة

ويحقق التركيب الأول ربحا بمقدار 7000 دينار ويحقق التركيب الثاني 5000 دينار

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي أكبر ربح ممكن؟

$$\text{MAX } Z = 7000X_1 + 5000X_2$$

$$\begin{aligned} \textbf{Subject to:} \quad & 4X_1 + 3X_2 \le 500 \\ & 2X_1 + X_2 \le 600 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

مثال تطبيقي (4)

ينتج مصنع العودة نوعين من السلع: الأول بسكويت، والثاني شوكولاته. بحيث:

يحتاج الأول 4 ساعات في قسم التصنيع، و 2ساعة في قسم التغليف

ويحتاج لثاني 5 ساعات في قسم التصنيع ، و 3 ساعات في قسم التغليف.

ويعمل في المصنع عمال بواقع 8 ساعات يوميا في قسم التصنيع ، و 3 ساعات في قسم التغليف

ويحقق النوع الأول ربحا بمقدار 10 دينار للوحدة الواحدة ويحقق الثاني 30 دينار للوحدة الواحدة

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي أعلى الأرباح؟

$$\text{MAX } Z = 10X_1 + 30X_2$$

$$\text{Subject to:} \quad 4X_1 + 5X_2 \le 8$$

$$2X_1 + 3X_2 \le 3$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

مثال تطبيقي(8)

شركة بانياس لصناعة العصائر المعلبة تستخدم في إنتاج العصائر ثلاثة مركبات أساسية ويمر العصير بأربع مراحل تصنيع:

المنتج	الأول	الثاني	الثالث	المورد
المرحلة 1	3	2	1	50
المرحلة 2	1	1	1	20
المرحلة 3	4	3	3	30
المرحلة 4	6	5	1	40
الأرباح	1	3	2	-------

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي أعلى الأرباح؟

$$MAX\ Z = X_1 + 3X_2 + 2X_3$$

Subject to:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 50$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 20$$
$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 30$$
$$6X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 40$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

صياغة المشكلة في حالة تقليل التكاليف Min

مثال تطبيقي(14)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج أنواع مختلفة من الأسمدة الزراعية فإذا وردت إلى الشركة طلبيه للحصول على 24000 كيلوغرام من أسمدة معينة.

ويتكون هذا النوع من الأسمدة من ثلاثة مركبات هي A، B، C، والمواصفات المطلوبة لذلك السماد كما وردت في الطلبية مبينة كما يلي:

1. يجب أن يحتوي السماد على الأقل 6000 كيلو غرام من المركب B.
2. يجب أن لا يحتوي السماد على الأكثر من 8000 كيلو غرام من المركب A.
3. يجب أن يحتوي السماد على الأقل 4000 كيلو غرام من المركب C.

وإذا علمت أن كلفة الكيلو غرام من المركب A تساوي 4 دينار، وكلفة الكيلو غرام من المركب B تساوي 6 دينار، وكلفة الكيلو غرام من المركب C تساوي 8 دينار.

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي اقل التكاليف؟

$$\text{MIN } Z = 4A + 6B + 8C$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to:} \quad & A + B + C = 24000 \\ & B \geq 6000 \\ & A \leq 8000 \\ & C \geq 4000 \\ & A, B, C \geq 0 \end{aligned}$$

مثال تطبيقي(18)

سماد نباتي مركب من ثلاثة أنواع أساسية يدخل في تركيبه أربعة مكونات:

النوع	المكون الأول	المكون الثاني	المكون الثالث	المكون الرابع	التكلفة
الأول	10	12	11	6	150
الثاني	7	5	10	4	130
الثالث	5	3	9	3	120
الموارد	50	40	60	30	--------

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي أقل تكلفة؟

$$MIN\ Z = 150X_1 + 130X_2 + 120X_3$$

Subject to:

$$10X_1 + 7X_2 + 5X_3 \geq 50$$
$$12X_1 + 5X_2 + 3X_3 \geq 40$$
$$11X_1 + 10X_2 + 9X_3 \geq 60$$
$$6X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 30$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال تطبيقي(19)

تقوم شركة الدهانات العربية بإنتاج أنواع مختلفة من الطلاء والدهانات فذا وردت للشركة طلبيه للحصول على يساوي 4000 كيلو من خليط يحتوي على ثلاث مركبات بمواصفات وشروط محددة وهي:

يجب ألا يحتوي الخليط على الأقل من 600 كيلو من المركب الأول

يجب ألا يحتوي الخليط على الأكثر 800 كيلو من المركب الثاني

يجب ألا يحتوي الخليط على الأقل 400 كيلو من المركب الثالث

فإذا علمت أن تكلفة الكيلو الواحد: من المركب الأول = 40 دينار ، والمركب الثاني = 60 دينار ، والمركب الثالث = 80 دينار

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي اقل التكاليف؟

$$\text{MIN } Z = 40A + 60B + 80C$$

$$\begin{aligned}
\text{Subject to:} \quad & A + B + C = 4000 \\
& A \geq 600 \\
& B \leq 800 \\
& C \geq 400 \\
& A, B, C \geq 0
\end{aligned}$$

مثال تطبيقي(23):

في مصنع لصناعة الأطعمة الخاصة بالحمية الغذائية طلبا للحصول على مركب غذائي صحي للبدائن يساوي 1400 كيلو كالوري من خليط يحتوي على ثلاث مركبات بمواصفات وشروط محددة وهي:

يجب ألا يحتوي الخليط الغذائي على الأكثر من 400 كيلو كالوري من المركب الأول فقط

يجب ألا يحتوي الخليط الغذائي على الأقل 200 كيلو كالوري من المركب الثاني فقط

يجب ألا يحتوي الخليط الغذائي على الأقل 150 كيلو كالوري من المركب الثالث فقط

فإذا علمت أن تكلفة الكيلو كالوري الواحد:

من المركب الأول = 2 دينار، والمركب الثاني = 3 دينار، والمركب الثالث = 4 دينار

النوع	الأول	الثاني	الثالث	الموارد
الخليط	1	1	1	1400
الخليط	1	0	0	400
الخليط	0	1	0	200
الخليط	0	0	1	150
التكلفة	2	3	4	---------

المطلوب: اكتب برمجة خطية للحالة الدراسية لتحقق اقل تكلفة ممكنة

الحل: نفرض أن النوع الأول X_1 النوع الثاني X_2 النوع الثالث $X3$

Objective function:

$$MIN\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

Subject to:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 400 \\ X_2 &\geq 200 \\ X_3 &\geq 150 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 1400 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

نماذج البرمجة الخطية Linear Programming Model

طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

1. طريقة الرسم البياني The Graphical Method
2. طريقة الجبرية Algebraic Method
3. طريقة الصف البسيط السمبلكس The Simplex Method

طريقة الرسم البياني (Graphic Method)

تعتبر طريقة الرسم البياني لمسائل البرمجة الخطية من متغيرين أساسين فقط من الدرجة الأولى تمثل علاقة بخط مستقيم، في ظل وجود قيود وشرط عدم السلبية و(اختبار الأمثلية) الوصول للحل الأمثل.

الطريقة البيانية لحل مشاكل البرمجة الخطية Graphic Solution Of LP Problems

تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية خاصة تلك المشاكل التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين فقط والتي تحتوي على عدد بسيط من القيود.

كما تفيد طريقة الرسم البياني كمقدمة لدراسة طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيدا في حل مشاكل البرمجة الخطية مثل السمبلكس

ملاحظات: علل لما يلي:

1. ما هو الهدف من الرسم البياني؟

   تحديد منطقة الحلول الممكنة، وتحديد نقاط تقاطع المستقيمات.(القيود)

2. ما هو الهدف من إيجاد نقط التقاطع؟

   نحل المعادلتين جبرياً بعد تحويل القيود المتباينات إلى معادلات. (لاستخدامها في الرسم)

3. ماذا نختار القيمة دالة الهدف؟

   إذا كانت تعظيم الربح تأخذ اكبر قيمة موجودة

   وإذا كانت تقليل التكاليف تأخذ اقل قيمة موجودة

   (وبذلك يتم حل المشكلة واتخاذ القرار الاداري)

وعند إتباع أسلوب الرسم البياني يجب إتباع الخطوات التالية:

1. رسم المحور السيني والصادي(الجزء الموجب من كل منهما) لتحقيق شرط عدم السلبية
2. تحديد نقطتين لكل مستقيم (معادلة) بفرض مرة X1= ZERO ومرةX2= ZERO
3. رسم المستقيمات المعبرة عن المعادلات (القيود فقط)
4. تحديد منطقة الإمكانيات المتاحة وهذا هو هدف الرسم البياني
5. تعيين النقطة ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة التي تعطي أفضل النتائج(أعلى عائد أو أقل تكلفة) وعادة تكون نقطة تقاطع مستقيمات وتكون في حالة تعظيم الأرباح أقرب ما يكون عن نقطة الأصل وتكون في حالة تقليل التكاليف أبعد ما يكون من نقطة الأصل

ماذا يفيد عن التوصل للحل الأمثل؟

بعد التعويض عنها في داله الهدف:

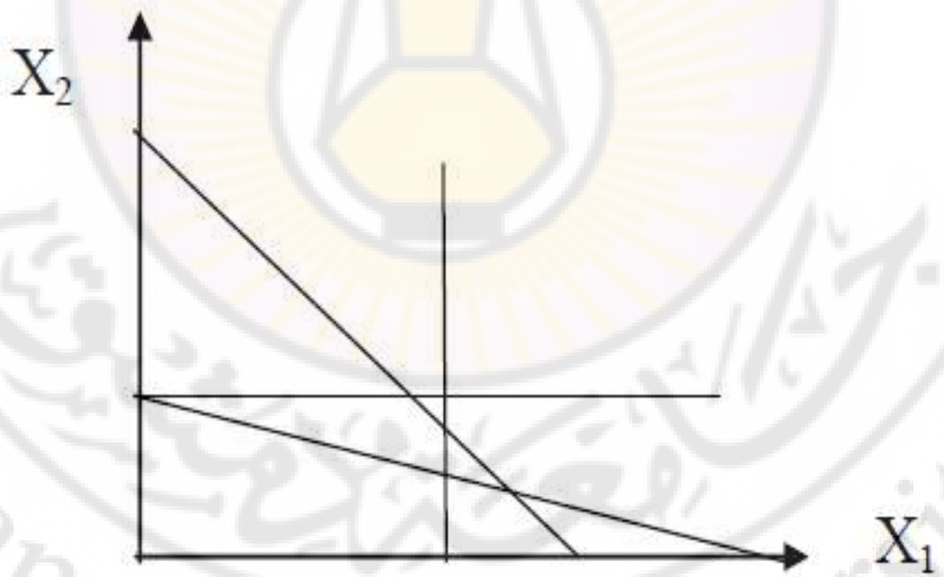
نجدها اكبر قيمة وفي دالة تعظيم الربح

واصغر قيمة في دالة تقليل التكاليف

نعوض عنها في معادلات القيود لكي نتأكد من الاستغلال الأمثل للموارد وبالتالي تحديد الفائض منها واتخاذ القرار الإداري السليم

اتجاه رسم المستقيم في التمثيل البياني:

1. إذا كان القيد اصغر من أو يساوي $\leq$ الأقرب إلى الصفر بالنسبة إلى X_1 إلى اليسار
2. إذا كان القيد اكبر من ويساوي $\geq$ الأبعد من الصفر بالنسبة إلى X_1 إلى اليمين
3. إذا كان القيد اصغر من أو يساوي$\leq$ الأقرب إلى الصفر بالنسبة إلى X2 إلى أسفل
4. إذا كان القيد اكبر من ويساوي $\geq$ الأبعد من الصفر بالنسبة إلى X2 إلى أعلى



كيفية إيجاد نقط التقاطع:

حل المعادلتين المتقاطعتين جبريا لإيجاد نقطة التقاطع. اما بطريقة الحذف او طريقة التعويض

طريقة الحذف هي ضرب المعادلة بالمعكوس الجمعي لمعامل المتغير نفسة من المعادلة الاخرى وجمعها مع المعادلة الأخرى وايجاد قيمة المتغير الثاني ويتم التعويض بقَيمة المتغير الثاني وايجاد قيمة المتغير الاول

طريقة التعويض: ايجاد قيمة المتغير بدلاله المعادلة كلها والتعويض عنها في المعادلة الاخرى ويتم التعويض بقيمة المتغير الثاني وايجاد قيمة المتغير الاول

مثال تطبيقي(1):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{MAX } Z = 7X_1 + 5X_2$$

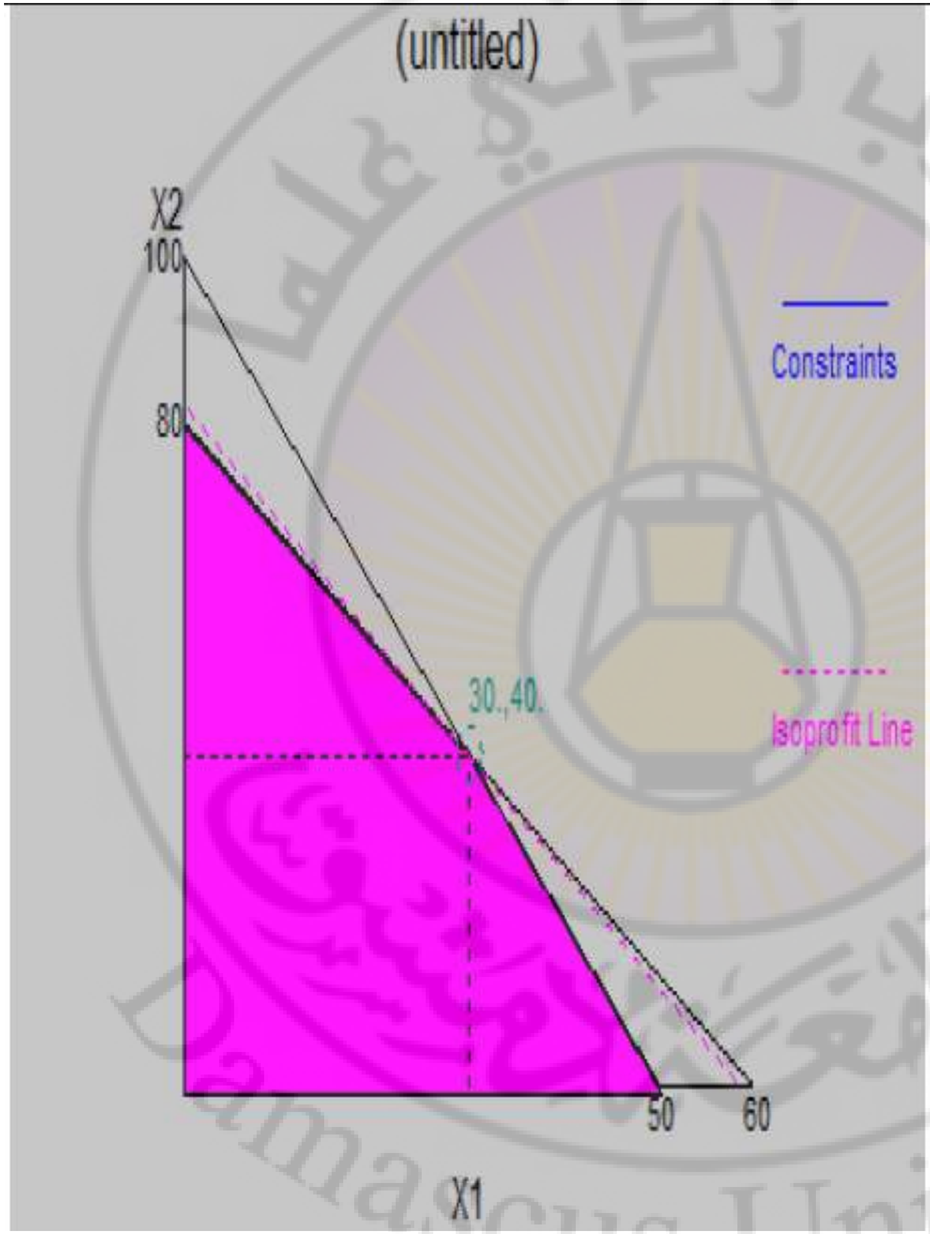
$$\text{SUBJECT TO: } 4X_1 + 3X_2 \leq 240$$

$$2X_1 + X_2 \leq 100$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

1. نحول المتباينات إلى معادلات	$4X_1 + 3X_2 = 240$ $2X_1 + X_2 = 100$
2. نوجد نقاط تقاطع المستقيمات بفرض كل مرة $X_1 =$ $0, X_2 = 0$ للقيد الأول	$4X_1 + 3X_2 = 240$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,80) (60,0)
3. بفرض كل مرة $X_1 = 0,$ $X_2 = 0$ القيد الثاني	$2X_1 + X_2 = 100$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,100) (50,0)

4. نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



5. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 1 ، 2 جبريا	$4X_1 + 3X_2 = 240$ $2X_1 + X_2 = 100$ نقطة التقاطع C (30,40)

6. اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	$Max\ Z = 7X_1 + 5X_2$	النتيجة
A	**0,0**	**7(0) + 5(0)**	**0**
B	**0,80**	**7(0) + 5(80)**	**400**
C	**30,40**	**7(30) + 5(40)**	**410**
D	**50,0**	**7(50) + 5(0)**	**350**

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة C تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أكبر ربح

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:

يجب إنتاج 30 وحدة من المنتج الأول	$X_1 = 30$
وإنتاج 40 وحدة من المنتج الثاني	$X_2 = 40$
لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 410 دينار	$Z = \mathbf{410}$

مثال تطبيقي

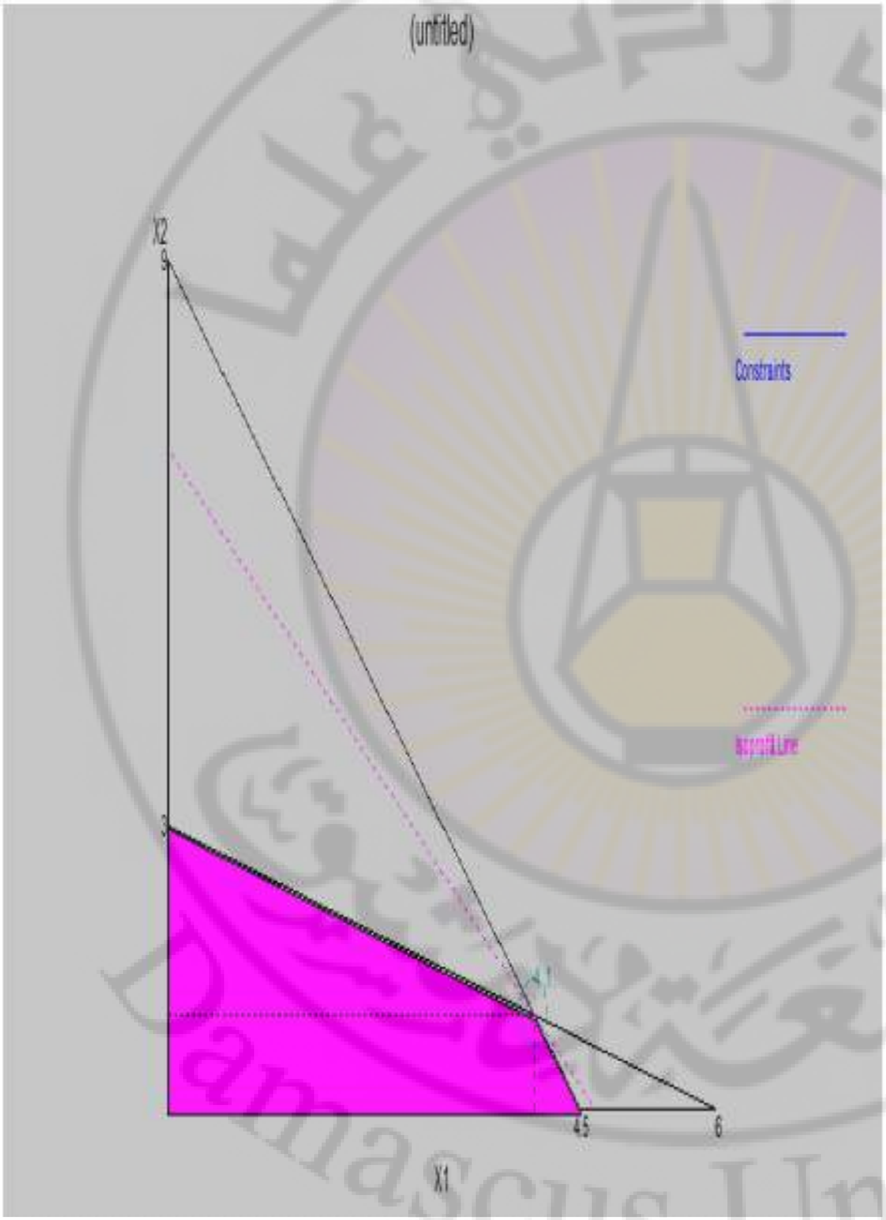
اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{MAX } Z = 3X1 + 2X2$$

$$\text{SUBJECT TO: } \begin{aligned} 2X1 + X2 &\le 9 \\ X1 + 2X2 &\le 6 \\ X1, X2 &\ge 0 \end{aligned}$$

1. نحول المتباينات إلى معادلات	$2X_1 + X_2 = 9$ $X_1 + 2X_2 = 6$
2. نوجد نقاط تقاطع المستقيمات بفرض كل مرة $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ للقيد الأول	$2X_1 + X_2 = 9$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,9) (4.5,0)
3. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ القيد الثاني	$X_1 + 2X_2 = 6$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,3) (6,0)

4. نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



5. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 1 ، 2جبريا	$2X_1 + X_2 = 9$ $X_1 + 2X_2 = 6$ نقطة التقاطع C (4,1)

6. اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$	النتيجة
A	**0,0**	**3(0) + 2(0)**	**0**
B	**0,3**	**3(0) + 2(3)**	**6**
C	**4,1**	**4(4) + 2(1)**	**14**
D	**4.5,0**	**3(4.5) + 2(0)**	**13.5**

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة C تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أكبر ربح

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:

يجب إنتاج 4 وحدات من المنتج الأول	$X_1 = 4$
وإنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني	$X_2 = 1$
لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 14 دينار	$Z = 14$

حالة وجود ثلاث قيود:

مثال تطبيقي (5):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

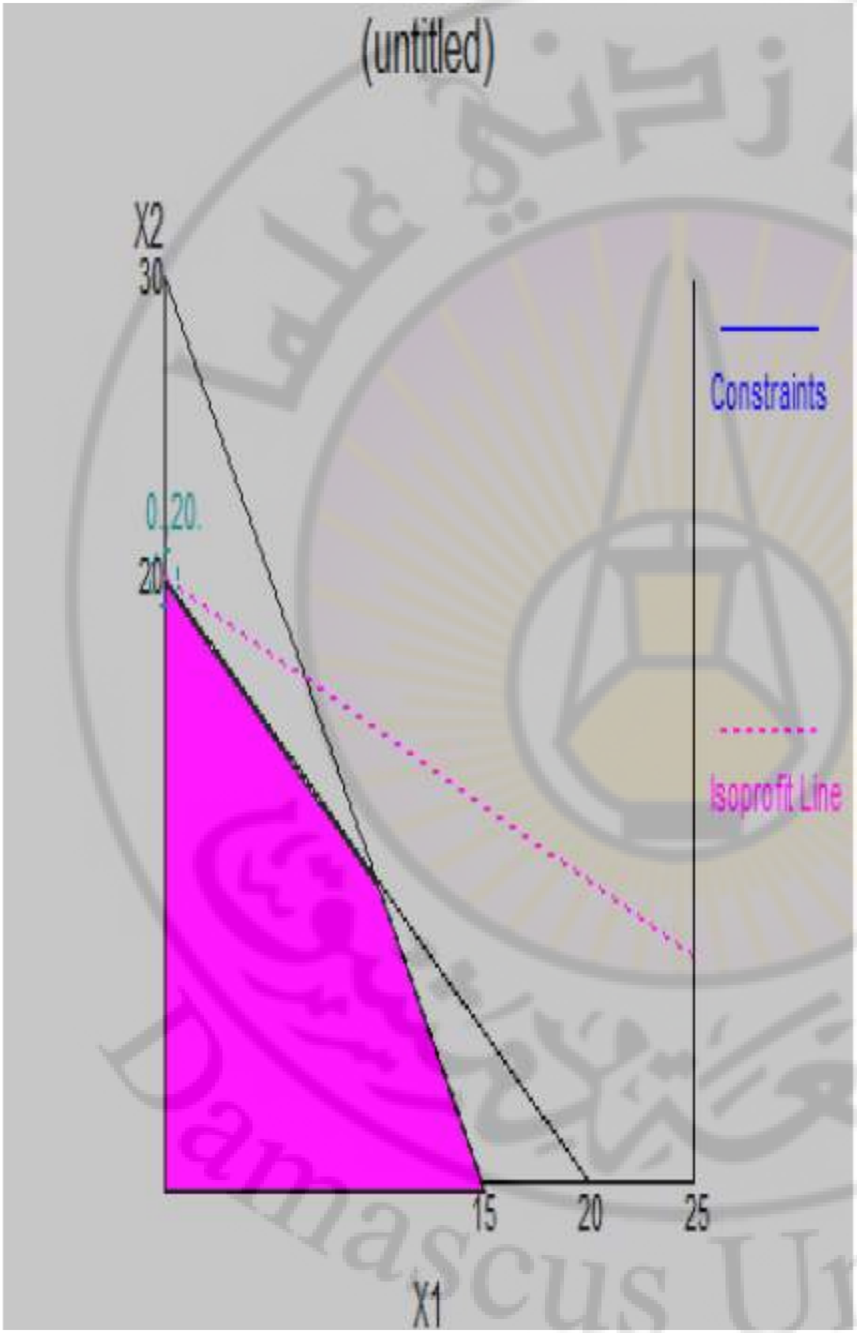
$$MAX\ Z = X_1 + 2X_2$$

$$\text{SUBJECT TO:}\quad X_1 + X_2 \leq 20$$
$$2X_1 + X_2 \leq 30$$
$$X_1 \leq 25$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

1. نحول المتباينات إلى معادلات	$X_1 + X_2 = 20$ $2X_1 + X_2 = 30$ $X_1 = 25$
2. نوجد نقاط تقاطع المستقيمات بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 =$ 0 للقيد الأول	$X_1 + X_2 = 20$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ $(0,20)\ (20,0)$

3. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ للقيد الثاني	$2X_1 + X_2 = 30$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,30) (15,0)
4. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ للقيد الثالث	$X_1 = 25$ $X_2 = 0$ (25,0)

5. نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



6. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 1 ، 2 جبريا

$$X_1 + X_2 = 20$$
$$2X_1 + X_2 = 30$$

نقطة التقاطع

C (10,10)

7. اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	$Max\ Z = X_1 + 2X_2$	النتيجة
A	0,0	1(0) + 2(0)	0
B	0,20	1(0) + 2(20)	40
C	10,10	1(10) + 2(10)	30
D	15,0	1(15) + 2(0)	15

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة B تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أكبر ربح

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:

عدم انتاج أي وحدة من المنتج الأول $X_1 = 0$

وإنتاج 20 وحدة من المنتج الثاني $X_2 = 20$

لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 40 دينار $Z = \mathbf{40}$

نموذج برمجة خطية في حال وجود أربع قيود: الشائع دوما

مثال تطبيقي(10):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

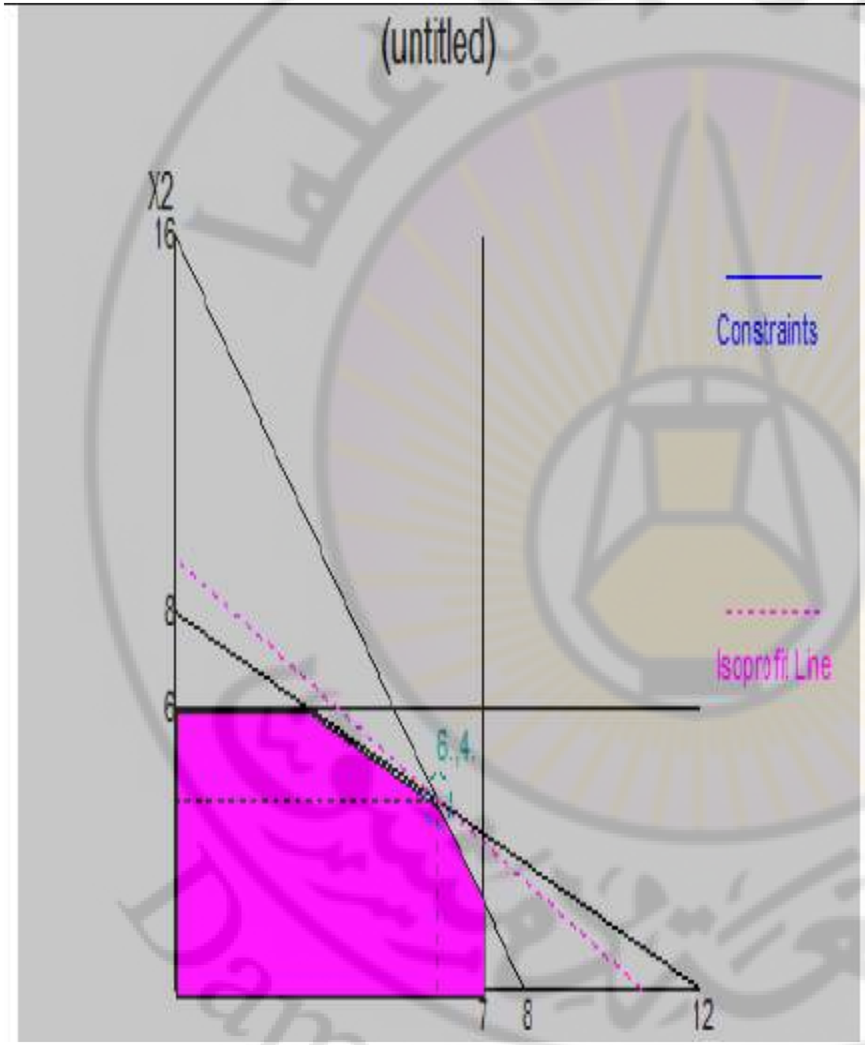
$$\text{MAX } Z = 12X_1 + 14X_2$$

$$\text{SUBJECT TO:} \quad \begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &\le 24 \\ 2X_1 + X_2 &\le 16 \\ X_1 &\le 7 \\ X_2 &\le 6 \\ X_1, X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

1. نحول المتباينات إلى معادلات	$2X_1 + 3X_2 = 24$ $2X_1 + X_2 = 16$ $X_1 = 7$ $X_2 = 6$
2. نوجد نقاط تقاطع المستقيمات بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ للقيد الأول	$2X_1 + 3X_2 = 24$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,8) (12,0)

3. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ للقيد الثاني	$2X_1 + X_2 = 16$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,16) (8,0)
4. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ للقيد الثالث	$X_1 = 7$ $X_2 = 0$ (7,0)
5. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ للقيد الرابع	$X_2 = 6$ $X_1 = 0$ (0,6)

6. نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



7. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 1 ، 4 جبريا	$2X_1 + 3X_2 = 24$ $X_2 = 6$ نقطة التقاطع C (3,6)
8. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 1، 2 جبريا	$2X_1 + 3X_2 = 24$ $2X_1 + X_2 = 16$ نقطة التقاطع D (6,4)
9. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 2، 3 جبريا	$2X_1 + X_2 = 16$ $X_1 = 7$ نقطة التقاطع E (7,2)

10. اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	$Max\ Z = 12X_1 + 14X_2$	النتيجة
A	0,0	12 (0) + 14 (0)	0
B	0,6	12 (0) + 14 (6)	84
C	3,6	12 (3) + 14 (6)	120
D	6,4	12 (6) + 14 (4)	128
E	7,2	12 (7) + 14 (2)	112
F	7,0	12 (7) + 14 (0)	84

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة D تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أكبر ربح

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:

يجب إنتاج 6 وحدات من المنتج الأول $X_1 = 6$

وإنتاج 4 وحدة من المنتج الثاني $X_2 = 4$

لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 128 دينار $Z = \mathbf{128}$

نموذج برمجة خطية باستخدام الطريقة البيانية في حالة تقليل التكاليف

حالة وجود قيدين

مثال تطبيقي(13):

اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي باستخدام الطريقة البيانية

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 6X_2$$

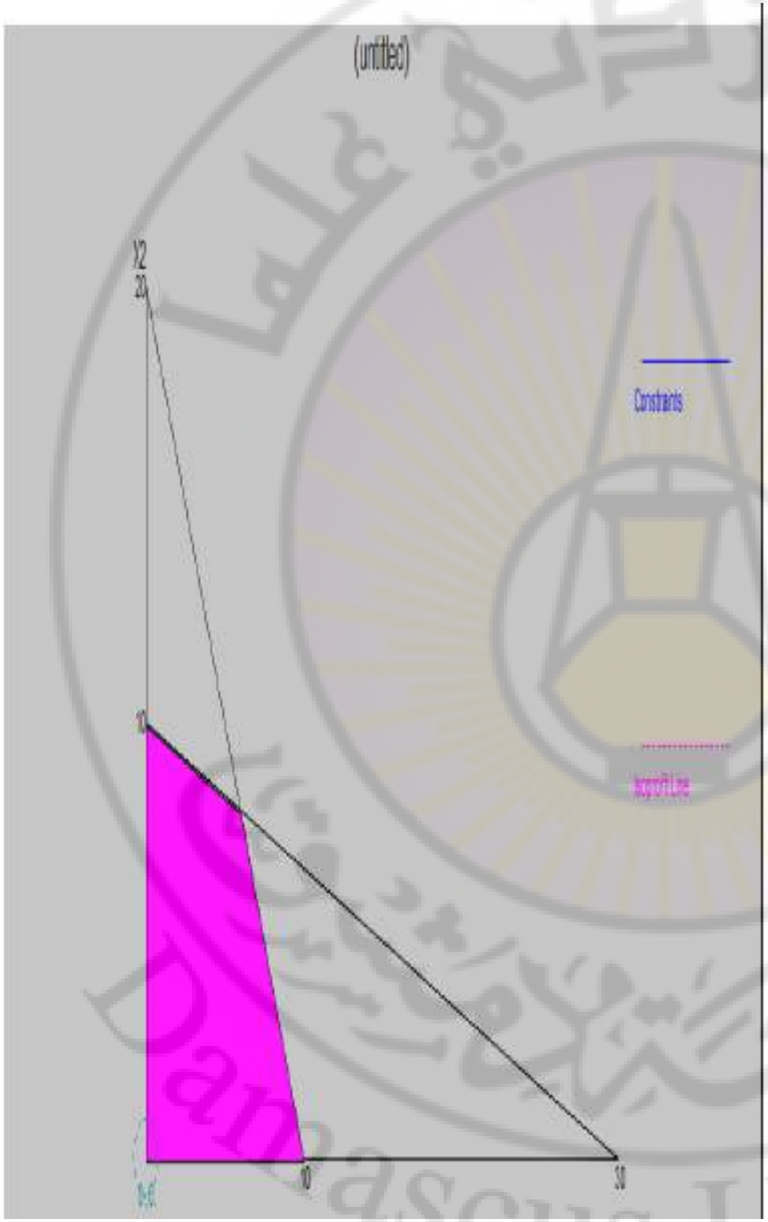
$$\text{SUBJECT TO: } 2X_1 + X_2 \le 20$$

$$X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

1. نحول المتباينات إلى معادلات	$2X_1 + X_2 = 20$ $X_1 + 3X_2 = 30$
2. نوجد نقاط تقاطع المستقيمات بفرض كل مرة $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ للقيد الأول	$2X_1 + X_2 = 20$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,20) (10,0)
3. بفرض كل مرة X_1 $= 0, X_2 = 0$ القيد الثاني	$X_1 + 3X_2 = 30$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,10) (30,0)

4. نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



5. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 1 ، 2جبريا

$$2X_1 + X_2 = 20$$
$$X_1 + 3X_2 = 30$$

نقطة التقاطع

C (6,8)

6. **اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:**

النتيجة	$Min\ Z = 5X_1 + 6X_2$	النقطة	
0	**5(0) + 6(0)**	**0,0**	**A**
60	**5(0) + 6(10)**	**0,10**	**B**
78	**5(6) + 6(8)**	**6,8**	**C**
50	**5(10) + 6(0)**	**10,0**	**D**

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة D تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أقل رقم تحقق أقل تكلفة

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

وتستثنى النقطة الأولى لأنه يتم إغلاق إنتاج المنتجين

مثال تطبيقي

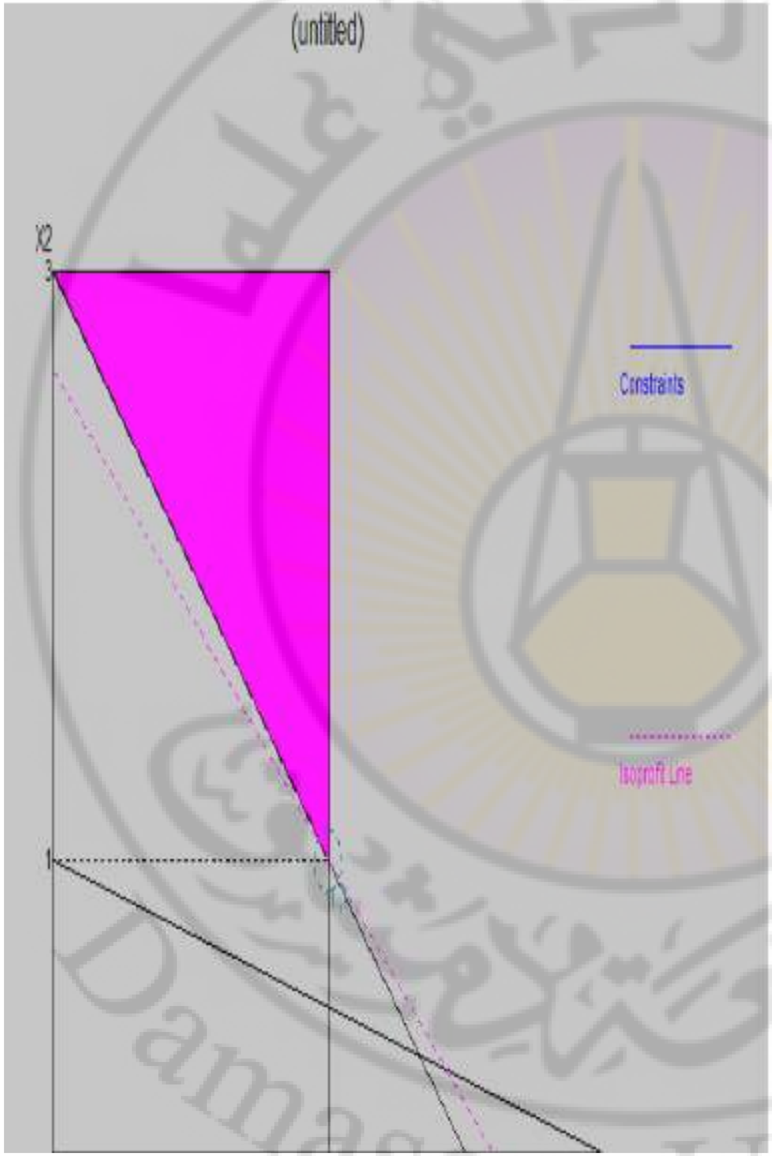
اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 3X_2$$
$$\text{Subject to:} \quad X_1 + 2X_2 \geq 2$$
$$2X_1 + X_2 \geq 3$$
$$X_1 \leq 1$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

1. نحول المتباينات إلى معادلات	$X_1 + 2X_2 = 2$ $2X_1 + X_2 = 3$ $X_1 = 1$
2. نوجد نقاط تقاطع المستقيمات بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ للقيد الأول	$X_1 + 2X_2 = 2$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,1) (2,0)

3. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ القيد الثاني	$2X_1 + X_2 = 3$ $X_1 = 0, X_2 = 0$ (0,3) (1.5,0)
4. بفرض كل مرة $X_1 = 0, X_2 = 0$ القيد الثالث	$X_1 = 1$ $X_2 = 0$ (1,0)

5. نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



$2X_1 + X_2 = 3$ $X1 \quad = 1$ نقطة التقاطع C (1,1)	6. نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين 2 ، 3جبريا

7. اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	**$Min\ Z = 5X_1 + 3X_2$**	**النتيجة**
A	**0,3**	**$5(0) + 3(3)$**	**9**
B	**1,1**	**$5(1) + 3(1)$**	**8**

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة B تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أقل رقم تحقق أقل تكلفة

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

ماذا يعاب على الرسم البياني في البرمجة الخطية؟

1. عدم دقة الرسم التي تسمح بإيجاد نقط التقاطع بيانيا
2. عند زيادة عدد القيود تجعل الرسم معقدا أكثر
3. تغير إشارة المتباينات في القيود تؤثر دوما في تحديد منطقة الحلول الممكنة
4. أي تغير في اشارة المتباينة في القيد فانه يتم تغير منطقة الحلول الممكنة وبالتالي تغير في القرار الاداري
5. ليس دوما تكون نقطة تقاطع القيود هي الحل الامثل انما التي تحقق شرط دالة الهدف المرجو اما تعظيم الربح او تقليل التكاليف

الحالات الخاصة من البرمجة الخطية في الطريقة البيانية:

1- التكرار أو التفسخ Redundant, Degeneracy

احد القيود لا يؤثر على الحل

2- وجود أكثر من حل بديل Alternative Solution

تكون قيمة دالة الهدف واحدة والمتغيرات أكثر من حالة

3- لا توجد منطقة حل Infeasible Solution

لا يوجد تقاطع الحالة متعاكسة

4- منطقة حل غير محصورة Unbounded Solution Space

تكون غير محددة ومفتوحة من احد الجنبين

حالات خاصة:

1- تعدد الحلول المثلى:

وهي احتمال وجود أكثر من حل أمثل للمشكلة وكما هو موضح في المثال الآتي:

مثال:

- ينتج مصنع سلعتين يدخل في إنتاجهما مادتين من المواد الخام، الكمية المتاحة من المواد الخام ونسب مكونات كل وحدة سلعة من المواد الخام وربح الوحدة موضحة في الجدول الآتي:

السلعة / المواد الخام	الأولى	الثانية	الكميات المتاحة بآلاف من المواد الخام
الأولى	1	2	40
الثانية	1	3	45
ربح الوحدة	5	10	

المطلوب تحديد الكميات التي تنتج من السلعتين بحيث تحقق أكبر ربح ممكن ولا تتجاوز الكميات المتاحة من المواد الخام وذلك باستخدام الطريقة البيانية.

نفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى.

وأن X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

المشكلة هي إيجاد قيم X_1 X_2 .

وعليه فإن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة يأخذ الشكل الآتي:

Maximize $Z = 5X_1 + 10X_2$

S.t

$X_1 + 2X_2 \leq 40$

$X_1 + 3X_2 \leq 45$

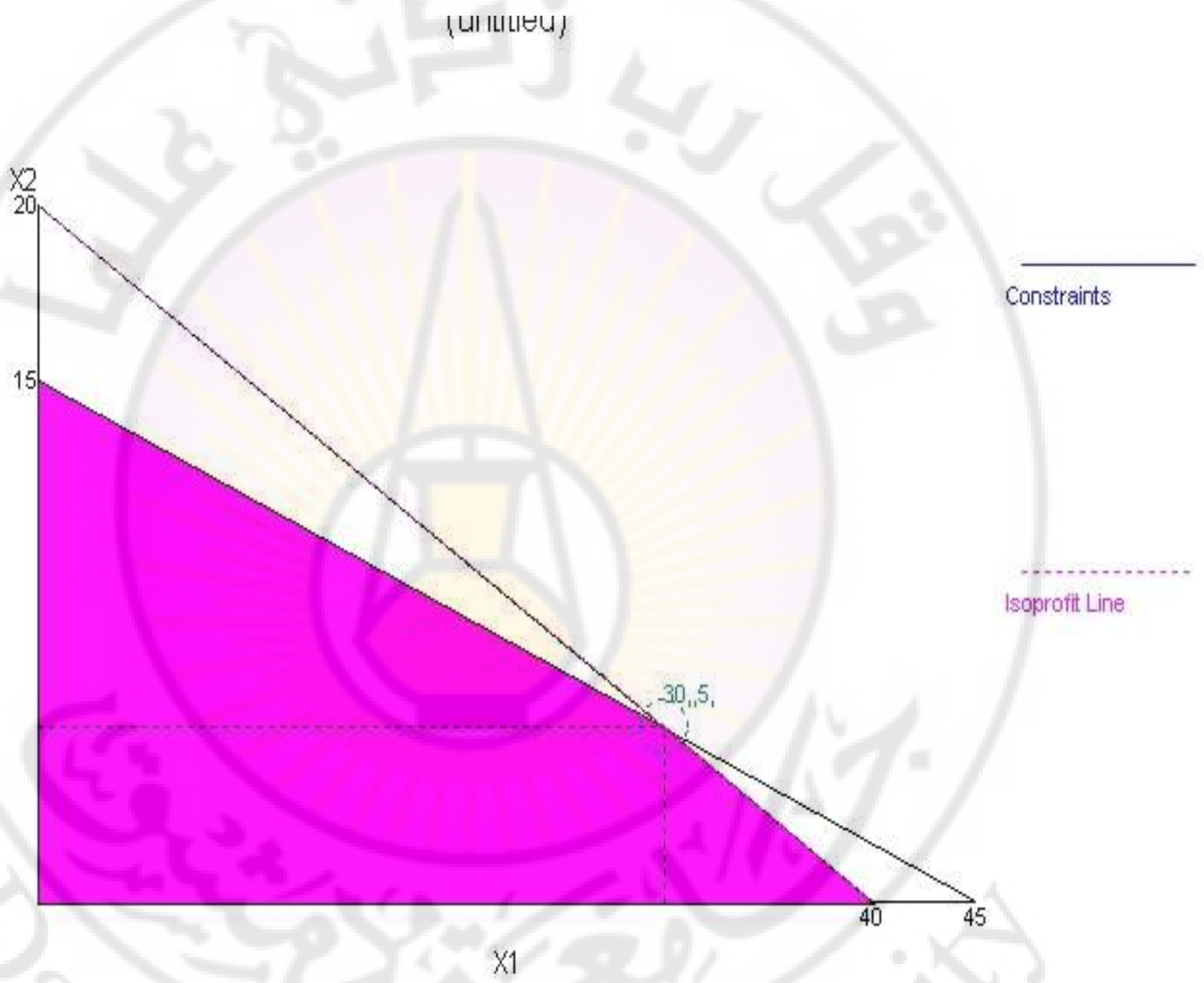
$X_1 , X_2 \geq 0$

ولتمثيل المشكلة بيانياً يتم تحويل القيود إلى معادلات وكالآتي:

$X_1 + 2X_2 = 40$........(1)

$X_1 + 3X_2 = 45$.........(2)

	X_1	X_2
المعادلة الأولى	0	20
	40	0
المعادلة الثانية	0	15
	45	0



(untitled)
X2
20
15
(30, 5)
40
45
X1
Constraints
Isoprofit Line

أن جميع النقاط داخل المنطقة المضللة تمثل منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق القيدين في آن واحد والنقاط A,B,C,D فهي الحلول الأساسية، أما نقطة التقاطع بين المستقيمين C(30.5) تم الحصول عليها بحل المستقيمين آنياً.

يتم تحديد الحل الأمثل وذلك بتعويض كل من الحلول الأربعة في دالة الهدف لتعظيم الربح وكالآتي:

المنطقة	X_1	X_2	$Max\ Z=5X_1+10X_2$
A	0	0	0
B	0	15	150
C	30	5	200
D	40	0	200

تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية D C من الجدول نجد أن النقطة إلى 200.

تحدد الكمية التي يجب إنتاجها من السلعة الأولى وهي Cأي أن النقطة مساوية إلى 30 وحدة ومن السلعة الثانية 5 وحدات ويكون الربح المتحقق

تحقق **مقدار** ربح مساوي إلى 200 في حالة Dهو 200، كما نقطة تخصيص الإنتاج للسلعة الأولى فقط وبمقدار 40 وحدة.

يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون متوازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى.

2- الحلول غير المحدودة : UNBOUNDED SOLUTION

في هذه الحالة تكون منطقة الحل مفتوحة وليست مغلقة ، لاحظ ذلك في المثال الآتـي:

مثال:

$$\text{MAX } Z = 10X_1 + 20X_2$$

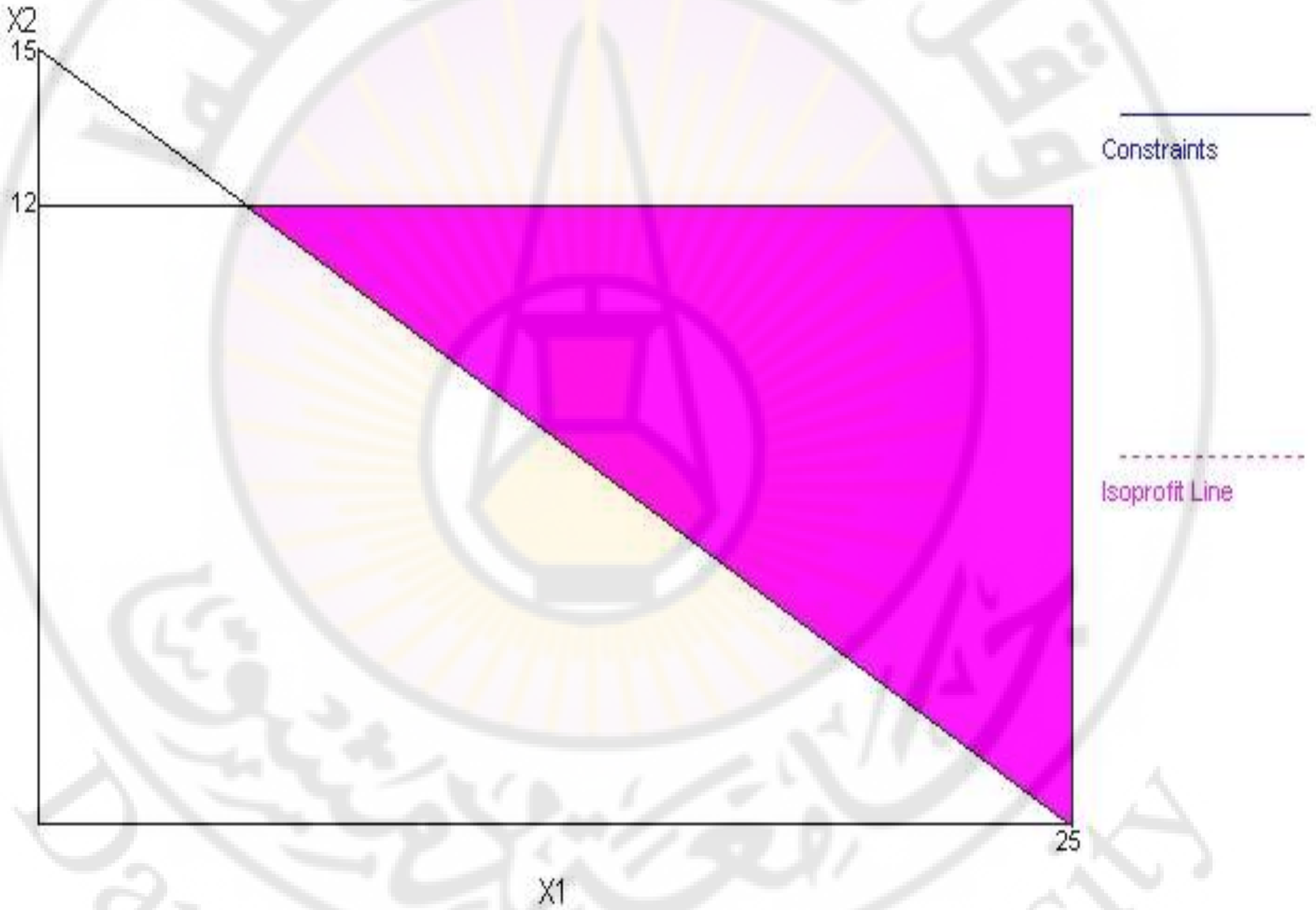
S.T

$$3X_1 + 5X_2 \geq 75$$

$$X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

يتم تطبيق الخطوات السابقة وبعد تحويل القيود إلى معادلات ثم إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات، يتم رسم الشكل وكما في أدناه:


X2
15
12
25
X1
Constraints
Isoprofit Line

من الشكل نلاحظ أن قيمة X_2 ثابتة وتساوي 12 ولجميع قيم X_1 فإذا كانت $X_1=25$ فإن قيمة دالة الهدف

$Z=(10)(25)+(20)(12)=490$ وبما أن دالة الهدف هي دالة تعظيم فكلما زادت قيمة X_1 تزداد قيمة دالة الهدف، فإذا زادت قيمة X_1 بمقدار 10 مثلاً زادت قيمة دالة الهدف بمقدار 250، وبناءاً على ذلك نجد أن الحل غير محدود.

3- عدم وجود حلول مقبولة

في هذه الحالة تكون منطقة الحل للقيود متعاكسة، أي أن القيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة، لاحظ ذلك في المثال الآتي:

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 15X_2$$

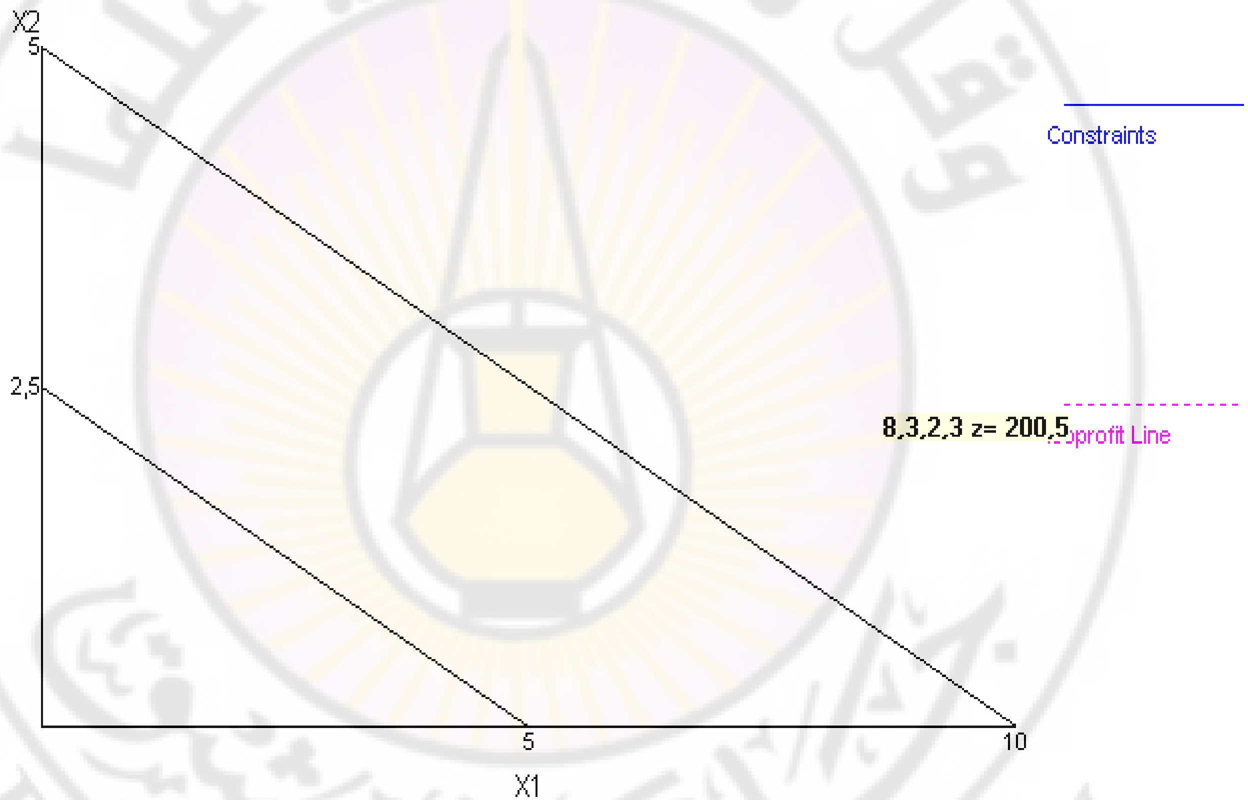
S.T

$$5X_1 + 10X_2 \leq 25$$

$$5X_1 + 10X_2 \geq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وبعد تحويل القيود إلى معادلات ثم إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات، يتم رسم الشكل وكما في أدناه.



X2
5
2,5
5
10
X1
Constraints
8,3,2,3 z= 200,5
Isoprofit Line

من الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

4- حالة الانحلال أو التفسخ

في هذه الحالة يظهر أحد القيود كقيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل ويتوضح ذلك في المثال الآتي:

$$Max\ Z = 12X_1 + 8X_2$$

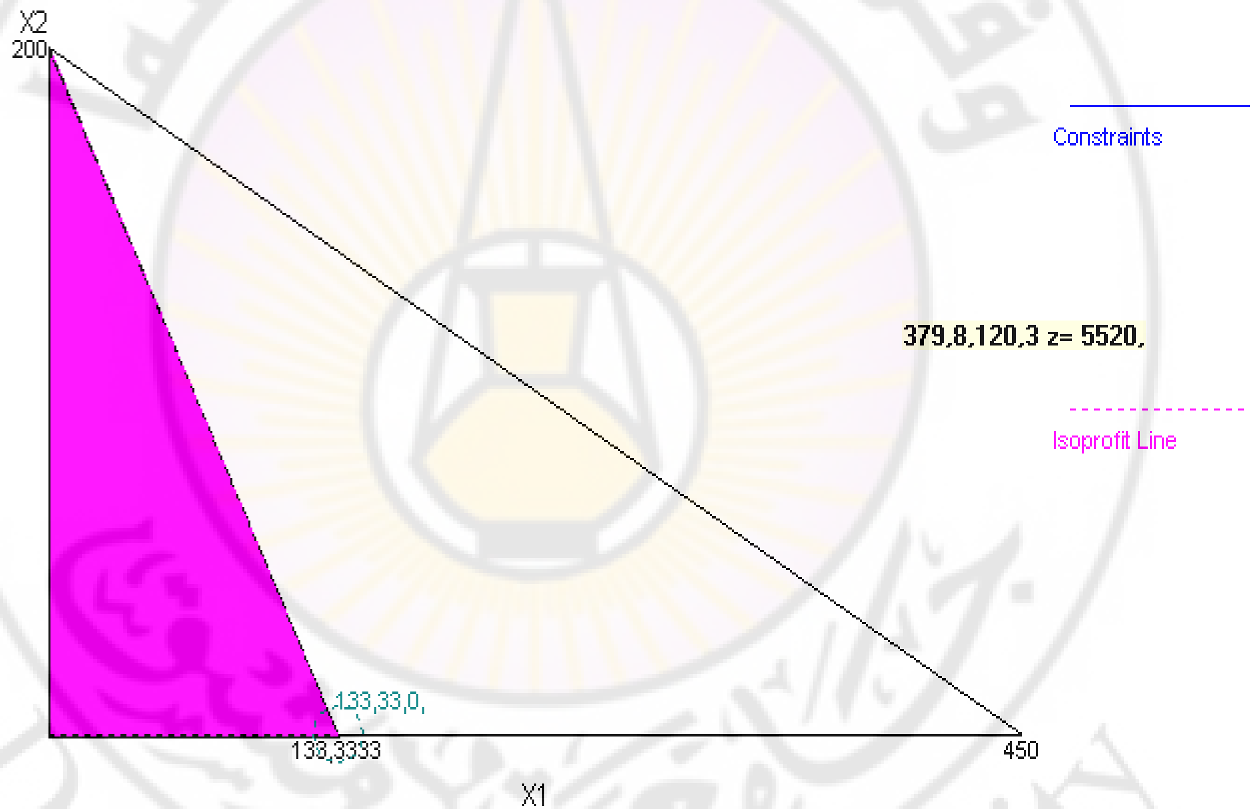
S.t

$$4X_1 + 9X_2 \leq 1800$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 400$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

وبعد تحويل القيود إلى معادلات ثم إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات، يتم رسم الشكل وكما في أدناه:



X2
200
Constraints
379,8,120,3 z= 5520,
Isoprofit Line
133,33,0,
138,3333
450
X1

نلاحظ من الشكل أن الحل الأمثل هو في النقطة B(0 , 200) وأن القيد الأول هو قيد فائض، ويسمى الحل في مثل هذه الحالة حلاً منحلاً.

طريقة السمبلكس
THE SIMPLEX METHOD

The Simplex Method
طريقة السمبلكس

تعد طريقة السمبلكس أسلوبًا متطورًا لحل مسائل البرمجة الخطية التي تتكون من أكثر من متغيرين، وهي من أفضل إنجازات القرن الماضي في مجال بحوث العمليات والبرمجة الخطية، وازدادت أهميتها مع تزايد إمكانيات وضع وتطوير برامج حاسوبية لتطبيق الطريق وإيجاد حلول بالسرعة المذهلة، وبالدقة العالية.

ومهما كان عدد المتغيرات (مئات، آلا ف...) فالحل يمكن أن يتوفر في خلال ثواني، ومن أهم هذه البرامج

LINDO،LP .

طريقة السمبلكس
The Simplex Method

مجموعة من القواعد :

A. المتراجحة من الشكل : $ax + by \leq c$

تصبح على شكل معادلة **بإضافة** قيمة ما و لتكن : s مثلاً

أي يصبح لدينا : $ax + by + s = c$

B. المتراجحة من الشكل : $ax + by \geq c$

تصبح على شكل معادلة **بطرح** قيمة ما و لتكن : s مثلاً

أي يصبح لدينا : $ax + by - s = c$

خطوات الحل

- تحويل متباينات القيود إلى معادلات وذلك بإدخال متغيرات إضافية مكملة نرمز لها بـ: $S_1,S_2,\ldots\ldots.$ معاملاتها في قيود الشروط الهيكلية (1+)، عندما تكون إشارة القيد أصغر أو تساوي، و(1-) عندما تكون إشارة القيد أكبر أو تساوي.
- رسم جدول السمبلكس

خطوات الحل

- أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام الطريقة المبسطة Simplex Method

$$MaxZ = X_1 + 3X_2$$

$$S.t.$$

$$X_1 \leq 5$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

1) تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى النموذج القياسي: يتم تحويل نموذج البرمجة الخطية أعلاه إلى النموذج القياسي Standard Form وذلك بإضافة المتغيرات الراكدة (المكملة) Slack Variable أي تحويل المتباينات إلى معادلات وكالآتي:

$$X_1+S_1=5$$
$$X_1+2X_2+S_2=10$$
$$X_2+S_3=4$$
$$X_1,X_2,S_1,S_2,S_3\geq 0$$

- كذلك تحويل دالة الهدف إلى الشكل التالي:

$$MaxZ-X_1-3X_2=0$$

2) تكوين الجدول الأساسي (الأولي): يتم تكوين الجدول الأساسي وترتب البيانات حيث تمثل المتغيرات المكملة متغيرات أساسية والمتغيرات القرارية متغيرات غير أساسية وكما في الجدول رقم (1) وكالآتي:

جدول رقم (1)

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
S_1	1	0	1	0	0	5
S_2	1	2	0	1	0	10
S_3	0	1	0	0	1	4
Z	-1	-3	0	0	0	0

3) تحديد المتغير الداخل: لغرض تحديد المتغير الداخل ومادامت المشكلة هي تعظيم فإننا نبحث عن أكبر قيمة بالسالب (في حالة كون دالة الهدف تصغير أو تقليل فإننا نبحث عن أكبر قيمة موجبة) في صف دالة الهدف ونلاحظ أن أكبر قيمة بالسالب هي (-3) والتي تمثل معاملات X_2، لذلك فإن X_2 سيكون المتغير الداخل وعمود X_2 يسمى بالعمود الداخل (العمود المحوري)

4) تحديد المتغير الخارج: يتم تحديد المتغير الخارج بعد قسمة عناصر عمود الثابت (B) على العناصر المناظرة له في العمود الداخل X_2 (مع إهمال المتغيرات ذات القيم السالبة والصفرية عدا دالة الهدف وكالآتي:

$$\frac{4}{1} = 4,\ ,\ \frac{10}{2} = 5,\ ,\ \frac{5}{0}$$

يهمل

إن أقل رقم هو 4 لذلك فإن الصف S_3 هو المتغير الخارج، والعنصر الناتج عن تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري يسمى بالعنصر المحوري وهنا قيمته (1)

5) إيجاد قيم الصف المحوري: لغرض إيجاد قيم الصف المحوري يتم تقسيم قيم الصف للمتغير الخارج على العنصر المحوري وذلك للحصول على الصف المحوري وفي مثالنا نقسم قيم الصف للمتغير الخارج S_3 على العنصر المحوري (1) وذلك للحصول على الصف المحوري X_2

0	1	0	0	1	4

6) إيجاد بقية صفوف الجدول: لإيجاد بقية قيم صفوف جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم – القيمة المقابلة في العمود المحوري × القيمة المقابلة في الصف المحوري / العنصر المحوري

جدول رقم (2)

B.V	X_1	S_3	S_1	S_2	S_3	B
S_1	1	0	1	0	0	5
S_2	1	0	0	1	2-	2
X_2	0	1	0	0	1	4
Z	-1	0	0	0	3	12

وبما أن قيم دالة الهدف لا تزال تحتوي على قيمة سالبة فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل وبذلك نستمر بالعمل بتكرار الخطوات السابقة حتى نصل إلى الحل الأمثل

وعليه ومن جدول رقم (2) نجد ان المتغير الداخل هو X_1. ولتحديد المتغير الخارج نقسم عناصر عمود الثابت (B) على العناصر المناظرة له في العمود الداخل X_1 وكالاتي:

يهمل 0/4، 1/2، 1/5

نجد ان اقل نسبة هي 2 لذلك فان المتغير S_2 هو المتغير الخارج، وان العنصر (1) هو العنصر المحوري.

نقسم قيم الصف للمتغير الخارج S_2 على العنصر المحوري (1) وذلك للحصول على الصف المحوري X_1، والصف المحوري في هذه الحالة هو:

1 0 0 1 -2 2

- نلاحظ أن قيم المتغير X_2 بقيت على حالها وكما هو واضح في الجدول رقم (3) وذلك لأن عنصر الصف الواقع في عمود المتغير الداخل مساويا إلى صفر. أما عناصر الصف للمتغير S_1 فيتم إيجادها بالصيغة السابقة وهي:
- العنصر الجديد = العنصر القديم ـ القيمة المقابلة في العمود المحوري × القيمة المقابلة في الصف المحوري / العنصر المحوري
- نلاحظ أن جميع قيم الصف z أصبحت موجبة وأصفار، وكما هو موضح في الجدول رقم (3) وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

جدول رقم (3)

B.V	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3	B
S_1	0	0	1	1-	2	3
X_1	1	0	0	1	2-	2
X_2	0	1	0	0	1	4
Z	0	0	0	1	1	14

الحل الأمثل هو:

$X_1 = 2$

$X_2 = 4$

$Z = 14$

$S_1 = 3$

S[illegible] $= 0$

نلاحظ ان جميع قيم الصف Z أصبحت موجبة و أصفار، أي $Z_j \geq 0$
وكما هو موضح في الجدول رقم (3). وبذلك نكون قد توصلنا الى الحل الأمثل.

جدول رقم (3)

B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
S_1	0	0	1	-1	2	3
X_1	1	0	0	1	-2	2
X_2	0	1	0	0	1	4
Z	0	0	0	1	1	14

الحل الأمثل هو:

$X_1 = 2$
$X_2 = 4$

$S_1 = 3$
$S_2 = 0$
$S_3 = 0$
$Z = 14$

الأساليب الكمية ـ المحاضرة 5

طريقة السمبلكس الشاملة

مثال عملي شامل:

ليكن لدينا تابع الهدف التالي: $Min\ Z = 5X_1 + 7X_2$

القيود:

$$X_1 + 2X_2 = 50$$

$$X_1 \geq 20$$

$$X_2 \leq 20$$

وشرط عدم السلبية $X_1 . X_2 \geq 0$

التحويل إلى الشكل القياسي:

ننقل التابع إلى طرف واحد (نعدم تابع الهدف) $Z - 5X_1 - 7X_2 = 0$

ثم نحوّل القيود:

القيد الأول قسمين

$X_1 + 2X_2 \leq 50$ .... نسميه y1

$$X_1 + 2X_2 \geq 50$$

نضربه بـ (-1) فيصبح:

$-X_1 - 2X_2 \leq -50$ .... نسميه y2

القيد الثاني نسميه y3 .... $-X_1 \leq -20$

القيد الثالث نسميه y4 $X_2 \leq 20$

وشرط عدم السلبية يبقى كما هو $X_1,X_2 \geq 0$

خطوات الحل:

1_ بعد تحويل النموذج إلى الشكل القياسي (جعل تابع الهدف على شكل معادلة وتحويل قيود النموذج لنوع واحد وهو أصغر أو يساوي)

2_ نرسم جدول السمبلكس (الحل الأولي) وهو عبارة عن أسطر وأعمدة, الأعمدة هي للمتغيرات الأساسية $(X_1, X_2 \dots X_n)$ وعمود خاص للحل (الطرف الأيمن من القيد), أما الأسطر هي قيود النموذج القياسي وسطر خاص لتابع الهدف.

3_ اختبار مسموحية الحل وذلك بالنظر إلى قيم عمود الحل, بحيث يجب أن تكون جميع القيم موجبة وإذا كان لدينا قيم سالبة فنختار القيمة الأشد سلبية ونسمي سطرها السطر المحوري (سطر الارتكاز)

ملاحظة: في حال وجود قيمتين سالبتين متساويتين في عمود الحل نختار إحداهما لا على التعيين.

ثم ننظر في السطر المحوري ونختار القيمة الأشد سلبية في هذا السطر ليكون عمودها هو العمود المحوري (عمود الارتكاز) وهنا أيضاً في حال وجود قيمتين سالبتين متساويتين في سطر الارتكاز نختار إحداهما.

تسمى نقطة التقاء أو تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري بالعنصر المحوري (عنصر الارتكاز), نقوم بتحديد المتغير الذي يتبع للسطر المحوري $(y_1, y_2 \dots .y_n)$ ليخرج من الحل, وتحديد المتغير الموجود في العمود المحوري $(X_1, X_2 \dots X_n)$ ليدخل في الحل مكان $(y_1, y_2 \dots y_n)$.

4_ نرسم جدول جديد ونبدل الـ x بالـ y ونملأه وفق مايلي: حيث **<u>يوجد أربعة قواعد لملء أي جدول جديد في حال مسموحية الحل أو مثالية الحل وأيضاً بحال Max or Min:</u>**

1. نضع مكان العنصر المحوري مقلوبه
2. نضع مكان السطر المحوري: القيمة الجديدة = القيمة القديمة \ العنصر المحوري القديم
3. نضع مكان العمود المحوري: القيمة الجديدة = القيمة القديمة \ العنصر المحوري القديم×1-
4. باقي خلايا الجدول: القيمة الجديدة = القيمة القديمة - {(القيمة المقابلة بالسطر المحوري× القيمة المقابلة بالعمود المحوري) \ العنصر المحوري القديم}

ملاحظة: جميع القيم للجدول الجديد نأخذها من الجدول السابق مباشرة, وبعد الانتهاء من ملء الجدول الجديد ننظر إلى عمود الحل ونعيد الخطوات السابقة.

الجدول الأول:

1	X_1	X_2	**الحل (الطرف الأيمن من القيد)**
Y_1	1	2	**50**
Y_2	-1	-2	**-50**
Y_3	-1	0	**-20**
Y_4	0	1	**20**
Z تابع الهدف	-5	-7	**0**

حسب ماذكرنا سابقاً, نجد أن السطر المحوري (سطر الارتكاز) هو سطر Y_2, والعمود المحوري (عمود الارتكاز) هو عمود X_2

والعنصر المحوري هو (2-).

اختبار مسموحية الحل:

نجد أن الحل غير مسموح لوجود قيم سالبة. وبالتالي نجعله مسموح باختيار أشد القيم سلبية (50-) ونكمل باقي الخطوات حسب ماذُكِر أعلاه.

نرسم الجدول الثاني:

الحل	Y_2	X_1	2
0	1	0	Y_1
25	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	X_2
-20	0	-1	Y_3
-5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	Y_4
175	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	Z

ما زال الحل غير مسموح لوجود قيم سالبة وبالتالي نقوم بنفس الخطوات السابقة ونأخذ القيمة الأشد سلبية ونسمي سطرها السطر المحوري وهكذا...

نرسم الجدول الثالث:

الحل	Y_2	Y_3	3
0	1	0	Y_1
15	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	X_2
20	0	-1	X_1
5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	Y_4

Z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	**205**

أصبح الحل مسموح حيث جميع القيم موجبة.

4-اختبار مثالية الحل: بعد التأكد من أن عمود الحل كله قيم موجبة (الحل مسموح) ننتقل إلى اختبار مثالية الحل وذلك بالنظر إلى سطر (Z) ويكون لدينا حالتين:

1. في حالة Min:

حتى يكون الحل مثالي يجب أن تكون قيم سطر (Z) سالبة _ماعدا قيمة Z عند عمود الحل فهي موجبة دائماً_ وفي حال وجود قيم موجبة في سطر (Z) نختار القيمة الأشد ايجابية ليكون عمودها هو العمود المحوري (عمود الارتكاز) وفي حال وجود قيمتين موجبتين متساويتين نأخذ أحدهما, ولاختيار السطر المحوري نقوم بتقسيم قيم عمود الحل على القيم المناظرة لها في العمود المحوري مع إهمال القسمة على صفر أو قيمة سالبة ثم نختار أصغر ناتج قسمة (حكماً قيمة موجبة) ليكون سطرها هو السطر المحوري (سطر الارتكاز) ونقطة التقاء السطر المحوري مع العمود المحوري هو العنصر المحوري, ثم نقوم بتبديل الـ X بالـ Y ونرسم جدول جديد ونملأه وفق القواعد الأربعة السابقة.

ملاحظات :

- **أولاً : قيمة Z في عمود الحل ممكن أن تكون سالبة حسب ما أكده لنا الدكتور جمال يوسف.**
- **ثانياً : عند اختيار السطر المحوري وإجراء عملية قسمة عناصر عمود الحل على عناصر عمود الارتكاز , نهمل القسمة على السالب وعلى الصفر , ولكن إذا كان لدينا صفر في عمود الحل نقسمها على نظيرها في عمود الارتكاز وبالتالي ينتج لدينا أصغر قيمة ونختار سطرها ليكون سطر الارتكاز.**

2. في حالة Max:

حتى يكون الحل مثالي يجب أن تكون قيم سطر (Z) قيم موجبة أو تساوي الصفر, وفي حال وجود قيم سالبة نختار القيمة الأشد سلبية ليكون عمودها هو العمود المحوري, ثم لتحديد السطر المحوري نقسم قيم عمود الحل على القيم المناظرة لها في العمود المحوري ونختار أصغر ناتج قسمة ليكون سطرها هو السطر المحوري, ثم نرسم جدول جديد ونعيد الخطوات السابقة.

الآن ننظر إلى الجدول الذي وصلنا إليه , الحل مسموح لعدم وجود قيم سالبة في عمود الحل , وبما أن تابع الهدف min وعناصر سطر z سالبة فالحل أمثل , وبذلك نكون قد وصلنا إلى نهاية حل هذه المسألة.

الحل النهائي:

ننظر إلى عمود المتغيرات (العمود الأول إلى اليمين) وكل متغير X في هذا العمود تكون قيمته المثلى هي القيمة المقابلة له في عمود الحل.

المتغيرات Y نهملها.

أما المتغيرات X التي تكون في السطر الأول فتكون قيمتها صفراً.

Z= 205

X_1= 20

$X_2=15$

آخر خطوة للتأكد من صحة الحل نقوم بالتعويض في تابع الهدف ويجب أن تكون قيمة Z الناتجة مساوية لقيمة Z في عمود الحل

$$z = 5x_1 + 7x_2$$

$$Z = (5 \times 20) + (7 \times 15) = 205$$

وهي مساوية لقيمة Z في عمود الحل, وبالتالي الحل صحيح

مع الملاحظة, لأنه في أي جدول خلال الحل لو قمنا بتعويض قيم المتغيرات في تابع الهدف يتحقق لدينا هذا الشرط , لنطبق ذلك على الجدول الذي يسبق الجدول الأخير :

لدينا في عمود المتغيرات $x_2 = 25$, ولدينا x_1 تقع في السطر الأول وبالتالي تأخذ القيمة صفر , وبالتعويض :

$Z = (5 \times 0) + (7 \times 25) = 175$ وهي نفس قيمة Z في عمود الحل

ملاحظات هامة:

1-أثناء الحل يُفضل ترك الكسور وعدم تحويلها إلى فواصل.

2-لا يمكن أن يكون سطر (Z) هو السطر المحوري, ولا يمكن أن يكون عمود الحل هو العمود المحوري

3-بعد الانتهاء من تطوير المسموحية أو من تطوير المثالية ننظر مباشرة إلى مسموحية الحل من جديد , لأنه قد نحتاج إلى تطوير المسموحية عدة مرات حتى يصبح الحل مسموح , وقد نصل إلى مرحلة يكون الحل مسموح ولكنه غير مثالية , ولكن بعد تطوير المثالية يصبح الحل غير مسموح وبالتالي نعود إلى تطوير المسموحية من جديد.

المحاضرة رقم 6

الأساليب الكمية فى الادارة

طريقة سمبلكس الشاملة ونأخذ مثال شامل ولكن بحالة Max

$$Max\ Z = 5X_1 + 7X_2 + 5X_3$$

القيود:

$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 \leq 10$$

$$6X_1 + X_2 - 2X_3 \geq 12$$

$$5X_1 + 3X_2 + X_3 = 18$$

شرط عدم السلبية $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

الآن نحول إلى الشكل القياسي:

ننقل تابع الهدف لطرف واحد $Z - 5X_1 - 7X_2 - 5X_3 = 0$

كل قيد من نوع أصغر أو يساوي يبقي كما هو, أما القيد من نوع أكبر أو يساوي يتم تحويله لأصغر أو يساوي عن طريق ضربه ب (1-)

نسميه $2X_1 - 3X_2 + 4X_3 \leq 10$ ....Y_1

نسميه $-6X_1 - X_2 + 2X_3 \leq -12$ ....Y_2

القيد من نوع "يساوي" : يقسم إلى قيدين : القيد الأول من نوع أصغر أو يساوي ويبقى كما هو .

والقيد الثاني من النوع أكبر أو يساوي ويتم ضرب طرفه ب (1-) ونقلب جهة المتراجحة.

نسميه $5X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 18$ .... Y_3

نسميه $-5X_1 - 3X_2 - X_3 \leq -18$.... Y_4

شرط عدم السلبية يبقى كما هو $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

أولاً نرسم جدول سمبلكس الأولي:

	X_1	X_2	X_3	الحل
Y_1	2	-3	4	10
Y_2	-6	-1	2	-12
Y_3	5	3	1	18
Y_4	-5	-3	-1	-18
Z	-5	-7	-5	0

ثانياً اختبار مسموحية الحل:

وذلك بالنظر إلى قيم عمود الحل, بحيث يجب أن تكون جميع القيم موجبة وإذا كان لدينا قيم سالبة فنختار القيمة الأشد سلبية ونسمي سطرها السطر المحوري (سطر الارتكاز)

ملاحظة: في حال وجود قيمتين سالبتين متساويتين في عمود الحل نختار إحداهما لا على التعيين.

ثم ننظر في السطر المحوري ونختار القيمة الأشد سلبية في هذا السطر ليكون عمودها هو العمود المحوري (عمود الارتكاز) وهنا أيضاً في حال وجود قيمتين سالبتين متساويتين في سطر الارتكاز نختار إحداهما.

تسمى نقطة التقاء أو تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري بالعنصر المحوري (عنصر الارتكاز), نقوم بتحديد المتغير الذي يتبع للسطر المحوري $(y_1, y_2 \dots . y_n)$ ليخرج من الحل, وتحديد المتغير الموجود في العمود المحوري $(X_1, X_2 \dots X_n)$ ليدخل في الحل مكان $(y_1, y_2 \dots y_n)$.

4_ نرسم جدول جديد ونبدل الـ x بالـ y ونملأه وفق مايلي: حيث يوجد أربعة قواعد لملء أي جدول جديد في حال مسموحية الحل أو مثالية الحل وأيضاً بحال Max or Min:

أ-نضع مكان العنصر المحوري مقلوبه

ب-نضع مكان السطر المحوري: $\text{القيمة الجديدة} = \dfrac{\text{القيمة القديمة}}{\text{العنصر المحوري القديم}}$

ج-نضع مكان العمود المحوري: $\text{القيمة الجديدة} = \dfrac{\text{القيمة القديمة}}{\text{العنصر المحوري القديم}} \times 1-$

د-باقي خلايا الجدول:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \left\{\dfrac{(\text{القيمة المقابلة بالسطر المحوري} \times \text{القيمة المقابلة بالعمود المحوري})}{\text{العنصر المحوري القديم}}\right\}$$

هنا السطر المحوري هو سطر Y_4 والعمود المحوري هو عمود X_1 والعنصر المحوري هو -5

نرسم الجدول الثاني:

2	Y_4	X_2	X_3	الحل
Y_1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{21}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{14}{5}$
Y_2	$-\frac{6}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{48}{5}$
Y_3	1	0	0	0
X_1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$
Z	-1	-4	-4	18

ننظر إلى عمود الحل نجد أن جميع القيم موجبة وبالتالي أصبح الحل مسموح,

فننتقل إلى اختبار مثالية الحل:

في حالة Max: حتى يكون الحل مثالي يجب أن تكون قيم سطر (Z) قيم موجبة أو تساوي الصفر, وفي حال وجود قيم سالبة نختار القيمة الأشد سلبية ليكون عمودها هو العمود المحوري, ثم لتحديد السطر المحوري نقسم قيم عمود الحل على القيم المناظرة لها في العمود المحوري(نهمل قسمة قيمة الحل بالسطر الثاني على القيمة السالبة بالعمود المحوري وأيضاً نهمل القسمة على صفر بالعمود المحوري) ونختار أصغر ناتج قسمة ليكون سطرها هو السطر المحوري, ثم نرسم جدول جديد ونعيد الخطوات السابقة.

العمود المحوري هو عمود X_2, السطر المحوري هو سطر Y_2 والعنصر المحوري هو $\frac{13}{5}$

الآن نرسم الجدول الثالث:

3	Y_4	Y_2	X_3	الحل
Y_1	$-\frac{20}{13}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{238}{13}$

X_2	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{16}{13}$	$\mathbf{\frac{48}{13}}$
Y_3	1	0	0	0
X_1	$\mathbf{\frac{1}{13}}$	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$\mathbf{\frac{18}{13}}$
Z	$-\frac{37}{13}$	$\frac{20}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\mathbf{\frac{426}{13}}$

الحل ليس مثالي لوجود قيمة سالبة في سطر (Z) وبالتالي نختار القيمة الأشد سلبية ليكون عمودها هو العمود المحوري, ثم لتحديد السطر المحوري نقسم قيم عمود الحل على القيم المناظرة لها في العمود المحوري(نهمل قسمة قيم الحل في السطر الأول والثاني والثالث على القيم المقابلة السالبة في عمود المحوري) ونختار أصغر ناتج قسمة ليكون سطرها هو السطر المحوري, ثم نرسم جدول جديد ونعيد الخطوات السابقة.

السطر المحوري هو سطر X_1 والعمود المحوري هو عمود Y_4

نرسم الجدول الرابع:

4	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{Y_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	الحل
Y_1	20	-3	-2	46
X_2	6	-1	-2	12
Y_3	$\mathbf{-13}$	3	7	$\mathbf{-18}$
Y_4	13	-3	-7	18
Z	37	-7	-19	84

أصبح الحل غير مسموح وبالتالي نختار القيمة السلبية نعين السطر المحوري والعمود المحوري.......

ونرسم الجدول الخامس:

5	$\boldsymbol{Y_3}$	$\boldsymbol{Y_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	**الحل**
Y_1	$\frac{20}{13}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{114}{13}$	$\mathbf{\frac{238}{13}}$

X_2	$\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{16}{13}$	$\mathbf{\frac{18}{13}}$
X_1	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$\mathbf{\frac{18}{13}}$
Y_4	1	0	0	**0**
Z	$\frac{37}{13}$	$\frac{20}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\mathbf{\frac{426}{13}}$

الآن ننظر إلى الجدول الذي وصلنا إليه , الحل مسموح لعدم وجود قيم سالبة في عمود الحل , وبما أن تابع الهدف min وعناصر سطر z سالبة فالحل أمثل , وبذلك نكون قد وصلنا إلى نهاية حل هذه المسألة حيث:

$$Y_1 = \frac{238}{13} X_2 = \frac{48}{13} X_1 = \frac{18}{13} Z = \frac{426}{13}$$

وللتأكد من الحل نعوض قيمة Z في تابع الهدف الأساسي.

ملاحظة: في اختبار مسموحية الحل نختار السطر المحوري ثم العمود المحوري, أما اختبار مثالية الحل نختار العمود المحوري ثم السطر المحوري.

أساليب كمية ـ المحاضرة 7

المشكلة المقابلة (الثنائية)
Dual Problem

أن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية (Primal Models). ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب اخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل (الثنائي) (Dual). إذ أن لكل نموذج يوجد نموذج اخر يقابله. من هذا يتبين لنا ان كل مشكلة تتوفر فيها شروط البرمجة الخطية ويمكن تمثيلها على شكل نموذج برمجة خطية يوجد لها نموذجان، الأول هو الذي يمثل المشكلة الأولية، أما النموذج الثاني هو النموذج المقابل (الثنائي) الذي يمثل الجانب الآخر من المشكلة.

أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل له ومشتق منه.فإذا كان النموذج الأولي يتعلق بتعظيم دالة الهدف فان النموذج المقابل له سيكون تقليل دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأولي والعكس بالعكس.وعليه فان كل صيغة من هذه الصيغ (صيغة النموذج الأولي وصيغة النموذج المقابل) تحمل تفسيرات معينة يمكن استخدامها لحل مسالة برمجة خطية واحدة بطرق مختلفة بالرغم من ان النتائج والمعلومات التي يتم الحصول عليها من حل مسائل البرمجة الخطية هي متشابهة في كلتا الحالتين، لذلك سيتم التطرق في هذا الفصل الى بعض القواعد الرياضية لتحويل النموذج الأولي الى النموذج المقابل وبالعكس. كذلك صياغة

وإيجاد الحل للمشكلة المقابلة والتي نلاحظ بان طريقة الحل لا تختلف كثيراً عن الحل بأسلوب الطريقة المبسطة للنموذج الاولي.

مميزات النموذج المقابل (الثنائي):

1. يساعد النموذج المقابل على التوصل الى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل. أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية اقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحياناً.
2. يمكن إيجاد الحل الأمثل في النموذج المقابل عند وجود متغير أساسي في النموذج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل النموذج الأولي اذا كان لاحد متغيرات النموذج الأولي قيمة سالبة.
3. يساعد النموذج المقابل الى اجراء تحليل ما بعد الامثلية والتوصل الى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمشكلة او اجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

تحويل النموذج الأولي الى النموذج المقابل (الثنائي) وبالعكس:

لغرض تحويل النموذج الأولي الى النموذج المقابل وبالعكس يمكن ذلك باتباع الخطوات الآتية:-

1. إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي من نوع تعظيم MAX فأنها تقلب الى نوع تصغير MIN في النموذج المقابل والعكس صحيح.
2. عدد المتغيرات في النموذج الاولي يكون مساوياً لعدد القيود في النموذج المقابل ،فمثلاً لو كان النموذج الأولي يحتوي على ثلاثة متغيرات فان النموذج المقابل سيحتوي على ثلاثة قيود.

3. عدد القيود في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد المتغيرات في النموذج المقابل، فمثلاً لو كان النموذج الأولي يحتوي على أربعة قيود فان النموذج المقابل سيحتوي على أربعة متغيرات.

4. إذا كانت القيود في النموذج الأولي على شكل اكبر او يساوي فأنها تتغير في النموذج المقابل الى اقل او يساوي والعكس صحيح أيضاً.

5. معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي هي قيم الجوانب اليمنى لقيود النموذج المقابل وقيم الجانب الايمن في النموذج المقابل تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل.

6. معاملات العمود j في النموذج الأولي هي عبارة عن معاملات الصف في النموذج المقابل.

صياغة المشكلة المقابلة (الثنائية):

افرض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Maximize } Z_X = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

S. t

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 \leq b_2$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

لغرض اجراء عملية القلب وللتمييز بين الصيغة الاولية والمقابلة نستخدم الرمز Y في الصيغة المقابلة بدلاً من X في الصيغة الاولية، وباستخدام خطوات تحويل النموذج الاولي الى النموذج المقابل فان المشكلة المقابلة ستكون بالشكل الآتي:

$$\text{Minimize } Z_Y = b_1 Y_1 + b_2 Y_2$$

S. t.

$$a_{11} Y_1 + a_{21} Y_2 \geq C_1$$

$$a_{12} Y_1 + a_{22} Y_2 \geq C_2$$

$$Y_1 , Y_2 \geq 0$$

الخطوات الأساسية لتحويل النموذج الأولي إلى نموذج مقابل:

النموذج المقابل	النموذج الأولي	
Min	Max	1
Max	Min	2
W	Z	3
Y	X	4
المعاملات	ثوابت	5
ثوابت	المعاملات	6
$\leq$	$\geq$	7
$\geq$	$\leq$	8
منقول مصفوفة المعاملات الصف يصبح عمود والعمود يصبح صف	مصفوفة المعاملات الصفوف الأعمدة	9
شرط عدم السلبية	شرط عدم السلبية	10

مثال

$$\text{Max } Z_X = 3X_1 + 4X_2 + X_3$$

S. t.

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 12$$

$$X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 40$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات في النموذج الأولي هي ثلاثة، لذلك فان عدد القيود في النموذج المقابل ستكون ثلاثة. كذلك فان عدد القيود في النموذج الأولي اثنان وعليه فان عدد المتغيرات في النموذج المقابل ستكون اثنان.

لو فرضنا ان المتغيرات في النموذج المقابل هي Y_1 للقيد الأول و Y_2 للقيد الثاني فان دالة الهدف للنموذج المقابل يمكن كتابتها بعد قلبها من تعظيم MAX الى تصغير MIN وكالآتي:

$$Min\ Z = 12\,Y_1 + 40\,Y_2$$

ان معاملات المتغيرات Y_1 , Y_2 هي الجانب الأيمن للقيد الأول والثاني، أما قيود النموذج المقابل ستكون كالآتي:

$$\begin{aligned} 2\,Y_1 + Y_2 &\geq 3 \\ Y_1 + 4\,Y_2 &\geq 4 \\ 3\,Y_1 + Y_2 &\geq 1 \\ Y_1\ ,\ Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ان معامل المتغير الأول في القيد الأول في النموذج المقابل هو معامل المتغير الأول في القيد الأول للنموذج الأولي، اما معامل المتغير الثاني في القيد الأول في النموذج المقابل هو معامل المتغير الأول للقيد الثاني في النموذج الأولي وهكذا بالنسبة لبقية القيود. ولو تم ترتيب المشكلة على شكل مصفوفة فان كل عمود من أعمدة مصفوفة المشكلة الأولية ستتحول الى صف في مصفوفة المشكلة المقابلة. اما الجانب الأيمن للقيود فهو معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمشكلة الأولية. ويمكن كتابة النموذج المقابل كالآتي:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z_Y &= 12\,Y_1 + 40\,Y_2 \\
\text{S. t.} & \\
2\,Y_1 + Y_2 &\geq 3 \\
Y_1 + 4\,Y_2 &\geq 4 \\
3\,Y_1 + Y_2 &\geq 1 \\
Y_1\,,\,Y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

في حالة دالة الهدف هي تعظيم ربح (MAX) وفي حالة الصيغة الاولية للمشكلة فان جميع المتباينات يجب ان تكون من نوع اصغر من او يساوي (≤) والعكس صحيح، وفي حالة وجود أحد القيود من نوع اكبر او يساوي (≥) يجب تحويله الى اصغر من او يساوي وذلك بضرب القيد في (-1).

مثال (2):

افرض ان النموذج الأولي لمشكلة البرمجة الخطية هي الآتي:

$$\text{Max } Z_X = 30\ X_1 + 40\ X_2$$

S. t.

$$2X_1 + X_2 \geq 20$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 15$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

نلاحظ ان دالة الهدف هي من نوع MAX وان القيد الأول هو من نوع اكبر ويساوي، وعليه يتم ضرب القيد الاول بالمقدار (1-) وكالآتي:

$$-2X_1 - X_2 \leq -20$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 15$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أما المشكلة المقابلة Dual تصبح كالآتي:

$$\text{Min } Z_Y = -20\,Y_1 + 15\,Y_2$$

S. t.

$$-2\,Y_1 + Y_2 \geq 30$$

$$-Y_1 + 3\,Y_2 \geq 40$$

$$Y_1\,,\,Y_2 \geq 0$$

أما إذا كان أحد القيود او جميعها عبارة عن مساواة فيتم تحويل القيد الذي يحمل علامة مساواة الى متباينتين مختلفتين في الاتجاه وكما هو موضح في المثال الآتي:

افرض ان مشكلة البرمجة الخطية الأولية هي كالأتي:

$$\text{Max } Z_X = 10\,X_1 + 8\,X_2 + 24\,X_3$$

S.t.

$$4\,X_1 + 6\,X_2 + 2\,X_3 = 4$$

$$2\,X_1 + 2\,X_2 + 4\,X_3 \leq 10$$

$$X_1\,,\,X_2\,,\,X_3 \geq 0$$

يتم تحويل القيد الأول الى متباينتين وكالآتي:

$$4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \le 4$$
$$4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \ge 4$$

ولغرض جعل القيود جميعها من نوع اقل ويساوي يتم ضرب المتباينة الثانية بالمقدار (-1) وتصبح كالآتي:

$$-4X_1 - 6X_2 - 2X_3 \le -4$$

أي ان مشكلة البرمجة الخطية الأولية ستكون كالآتي:

$$\text{Max } Z_X = 10X_1 + 8X_2 + 24X_3$$

S.t.

$$4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \le 4$$
$$-4X_1 - 6X_2 - 2X_3 \le -4$$
$$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 \le 10$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

أما الشكلة المقابلة ستكون كالآتي:

$$\text{Min } Z_Y = 4Y_1 - 4Y_2 + 10Y_3$$

$$4Y_1 - 4Y_2 + 2Y_3 \geq 10$$
$$6Y_1 - 6Y_2 + 2Y_3 \geq 8$$
$$2Y_1 - 2Y_2 + 4Y \geq 24$$
$$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$$

يمكن إعادة كتابة النموذج المقابل كالآتي:

$$\text{Min } Z_Y = 4(Y_1 - Y_2) + 10Y_3$$

S.t.

$$4(Y_1 - Y_2) + 2Y_3 \geq 10$$
$$6(Y_1 - Y_2) + 2Y_3 \geq 8$$
$$2(Y_1 - Y_2) + 4Y_3 \geq 24$$

الأمثلة التطبيقية(1):

حول النموذج الأولي إلى النموذج المقابل:

	النموذج الأولي	النموذج المقابل
1	$MAX\ Z = 3X1 + 2X2$ SUBJECT TO: $6X1 + 4X2 \leq 24$ $X1 \leq 3$ $X1, X2 \geq 0$	$MIN\ W = 24Y_1 + 3Y_2$ SUB.TO: $6Y_1 + Y_2 \geq 3$ $4Y_1 \geq 2$ $Y_1, Y_2 \geq 0$
2	$MAX\ Z = 50X1 + 120X2$ SUBJECT TO: $2X1 + 4X2 \leq 80$ $3X1 + X2 \leq 60$ $X1, X2 \geq 0$	$MIN\ W = 80Y_1 + 60Y_2$ SUB.TO: $2Y_1 + 3Y_2 \geq 50$ $4Y_1 + Y_2 \geq 120$ $Y_1, Y_2 \geq 0$
3	$MAX\ Z = 4X1 + 6X2$ SUBJECT TO: $X1 + 2X2 \leq 8$ $6X1 + 4X2 \leq 24$ $X1, X2 \geq 0$	$MIN\ W = 8Y_1 + 24Y_2$ SUB.TO: $Y_1 + 6Y_2 \geq 4$ $2Y_1 + 4Y_2 \geq 6$ $Y_1, Y_2 \geq 0$

قضايا النقل

قضايا خوارزمية النقل:

تهدف لوضع خطة نقل مُثلى تبين كيفية تنظيم نقل كمية ما من **نوع واحد** من السلع أو المنتجات من نقطة أو أكثر من نقاط المصدر, إلى نقطة أو أكثر من نقاط الطلب. وهذه الخوارزمية تطبق بنجاح لحل المسائل: إدارة الموارد, تنظيم استدراج المياه من والى الخزانات, إدارة الإنتاج وغيرها, ويمكن أن تعدل الخوارزمية لتصبح قادرة على حل مسائل نقل عدة أنواع ممن السلع.

> ✓ ملاحظة: لماذا المواد أو السلع يجب أن تكون من **نوع واحد**؟ لأنه لا يمكن نقل مجموعة من المواد معاً, حيث تختلف تكلفة كل مادة عن الأخرى, بالإضافة إلى اختلاف ظروف النقل.

يجب الإشارة إلى أن مسائل النقل تشكل حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية غير أن الظروف الخاصة لمسائل النقل تسمح بوضع خوارزمية أكثر فعالية وبساطة من خوارزمية السمبلكس لدرجة أنه يتبادر للذهن أن هذه الخوارزمية لا تمت بصلة لخوارزمية السمبلكس, لهذا يجب التأكيد أن خوارزمية النقل تعتمد على الخطوات المنهجية للسمبلكس كما أن مسائل النقل تشكل حالة خاصة من نماذج الشبكات.

-المصطلحات الخاصة بالخوارزمية:

1-نقاط المصدر أو نقاط العرض أو مراكز الإنتاج i : هي الأماكن التي تُتاح بها المواد اللازم نقلها.

2-نقاط الطلب أو نقاط الاستهلاك والتوزيع j : هي الأماكن أو المراكز التي تُطلب فيها المواد وتوزع وتُستهلك ويجب نقل المواد إليها.

3-الكمية المتاحة a_i : هي الكميات المتوافرة في نقطة المصدر i ويجب نقلها.

4-الكمية المطلوبة b_j : هي الكميات التي تطلب من قِبل نقاط الطلب j ويجب تلبيتها.

5-كلفة النقل c_{ij} : هي كلفة نقل كل وحدة تنقل من نقطة المصدر i إلى نقطة الطلب j

إن نقل المواد من أماكن إنتاجها إلى أماكن استهلاكها أو توزيعها أو طلبها بحيث تكون التكلفة الإجمالية للنقل أقل ما يمكن.

قضايا النقل مخصصة فقط في حالة Min, ولكن يوجد حالات لـ Max غير مذكورة بالكتاب ولن ندخل بتفاصيلها لأنها تعتبر Max بالنسبة للشركة الناقلة التي هدفها الحصول على أكبر ربح ممكن أما نحن كشركة نحاول تخفيض التكاليف, لذلك سنأخذها من وجهة نظر الشركة التي تسعى إلى تخفيض تكاليفها.

-نحن نركز بمسائل النقل إجمالا على التكلفة ولا نأخذ الوقت بعين الاعتبار حيث نعتبر أنه ليس له تكلفة وذلك من أجل سهولة الحل وصياغة النموذج الرياضي فنقوم باستبعاد بعض المؤثرات وأهمها وقت نقل المواد, ولكن هناك مسائل نقل معقدة تركز على التكلفة والوقت معاً.

ملاحظة: جميع المتغيرات سواء كانت كميات منتجة أو تكاليف تخضع لشرط عدم السلبية أي لا يمكن أن تكون التكاليف سالبة (رياضياً) لكن ممكن أن تكون سالبة محاسبياً فقط, وكذلك الكميات وخاصة كميات الطلب وكميات الإنتاج غير سالبة وتكون إما صفر أو موجبة.

-يجب تحقق شرط توازن مسألة النقل وهو: الكمية المطلوبة=الكمية المعروضة (الكميات وليس المراكز)

أي ليس عدد مراكز الإنتاج=عدد مراكز التوزيع أو التسويق

بمعنى ما يتم إنتاجه=ما يتم طلبه

الفرضيات الأساسية لخوارزمية النقل:

1-حالة التساوي بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة, أي $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ وهو شرط التوازن رياضياً, حيث أن: n هي نقاط الطلب, و m نقاط المصدر, إذا حققت المسألة هذا الشرط تسمى مسألة متوازنة, وفي الحالة المعاكسة (إذا لم تكن المسألة متوازنة) يمكن أن نحقق التوازن عن طريق إدخال نقطة مصدر أو طلب وهمية تمتص الفرق بين الكمية المتاحة والكمية المطلوبة.

2-كلفة النقل تزداد طرداً مع زيادة الكمية المنقولة.

3-الكميات المنقولة من نقطة المصدر i, إلى جميع النقاط j (X_{ij}) يجب أن تكون أقل أو تساوي الكمية المتاحة في النقطة i أي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le a_i \quad : i = 1,2,\dots,m$$

حيث X_{ij} هي الكمية المنقولة من i إلى j.

4-الكميات المنقولة إلى نقطة الطلب j, من جميع النقاط i, يجب أن تكون أكبر أو تساوي الكمية المطلوبة في النقطة j أي:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \geq b_j \quad : j = 1,2,\dots,n$$

حيث X_{ij} الكمية المنقولة من i إلى j

وتصاغ المسألة على النحو التالي:

$$Min\ Z = i\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_i$$

$$X_{ij} \geq 0$$

2-حالة عدم تساوي مقدار الكمية المطلوبة مع الكمية المتاحةالمعروضة : في الحياة العملية المقدار المتاح لا يساوي بالضرورة المقدار المطلوب من المواد المراد نقلها في هذه الحالات يتوجب موازنة المسائل, ونوضح فكرة تحقيق هذه الموازنة من خلال المثالين التاليين:

المثال الأول:شركة تصنع برادات من النوع w مصانعها موزعة في المدن حلب وحمص ودمشق (مراكز الإنتاج). أما مراكز توزيع هذه البرادات فموزعه في المدن حلب, حمص, دمشق, اللاذقية, دير الزور. إنتاج المصانع السنوي هو (1200,1500,1000) على الترتيب, أما الطلب السنوي في مراكز التوزيع فهو (400,600,1200,700,800) على الترتيب, كلفة نقل البراد من المصانع إلى الأسواق المعطاة في الجدول التالي:

حيث أن الأسطر لمراكز الإنتاج والأعمدة لمراكز التوزيع أو الاستهلاك

دير الزور	اللاذقية	دمشق	حمص	حلب	
15	12	20	10	0	حلب
18	14	12	0	10	حمص
22	25	0	12	20	دمشق

نرمز لعدد البرادات المنقولة من المصنع i إلى مركز التوزيع j بالرمز X_{ij}, بما أن مجموع البرادات المنقولة هو 3700 $(1000 + 1500 + 1200)$ يساوي عدد البرادات المطلوبة 3700 $(400 + 600 + 1200 + 700 + 800)$ أي يمكن القول أن مسألة النقل المدروسة متوازنة.

الطريقة المختصرة والأكثر وضوحاً وشيوعاً لحل مسائل النقل (طريقة الركن الشمالي الغربي) تعتمد جدولاً خاصاً يسمى جدول النقل, أسطره تمثل نقاط المصدر, وأعمدته تمثل نقاط الطلب, وكلفة النقل من النقطة **i** في السطر إلى نقطة **j** في العمود C_{ij} توضع في الزاوية الشمالية الشرقية من كل خانة **ij**, ومسألة تصنيع البرادات يمكن أن تصاغ على الشكل التالي:

العرض	دير الزور	اللاذقية	دمشق	حمص	حلب	
1000	15	12	20	10	0	حلب
1500	18	14	12	0	10	حمص
1200	22	25	0	12	20	دمشق
3700 / 3700	400	600	1200	700	800	الطلب

المثال الثاني: مثال عن حالة عدم تساوي العرض مع الطلب.

بفرض أن معطيات المثال السابق تغيرت, حيث أصبحت كمية الإنتاج في معمل حمص 1300 براد بدلاً من 1500. هذا يعني أن مسألة النقل أصبحت غير متوازنة, حيث أصبحت كمية الإنتاج 3500 براد بسبب انخفاض إنتاج معمل حمص إلى 1300 براد بدلاً عن 1500 وكمية الطلب بقيت 3700, بكلمة أخرى عدم التوازن يعني عدم إمكانية تلبية كامل الطلب في مراكز التوزيع, أي يجب تغيير شكل مسألة النقل بحيث يوزع الطلب غير الملبى على مركز التوزيع بشكل أمثل بما أن الطلب يزيد على حجم الإنتاج فان توازن مسألة النقل يتطلب إدخال نقطة مصدر (مصنع) وهمية بطاقة إنتاجية تساوي الفرق بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة, في مثالنا هذه الكمية هي 200 براد. في الحالة العادية فان المصنع يمكن أن يوجه إنتاجه إلى أي مركز من مراكز التوزيع بشرط أن تتوافق مع اتجاه تابع الهدف, أي أن عدد البرادات التي توجهها نقطة العرض الوهمية إلى مراكز التوزيع يمثل حجم الطلب غير الملبى في المراكز. يملي إتمام صياغة مسألة النقل بالضرورة تحديد تكلفة النقل من المصنع الوهمي إلى مراكز التوزيع, بما أن هذا المصنع وهمي وغير موجود فهذا يعني أن عملية الإنتاج لم تتم أصلاً وبالتالي لم تنقل أية برادات وهذا يعني أن تكلفة نقل البراد تساوي الصفر. لكن هذا يمكن النظر إليه ن وجهة نظر أخرى, بفرض أن كل وحدة غير ملباة في مراكز التوزيع تحمل الجهة المنتجة غرامة تأخير, في هذه الحالة تكلفة النقل للوحدة (البراد) تساوي غرامة التأخير المفروضة على كل وحدة غير ملباة في مركز التوزيع المعني, ويبين الجدول التالي كيف تم تحقيق التوازن في مسألة النقل بعد إدخال نقطة المصدر الوهمية (المصنع) بطاقة إنتاجية قدرها 200 براد وتكلفة نقله من هذا المصدر إلى جميع مراكز التوزيع اعتبرت صفراً:

العرض	دير الزور	اللاذقية	دمشق	حمص	حلب	
1000	15	12	20	10	0	حلب
1300	18	14	12	0	10	حمص
1200	22	25	0	12	20	دمشق
200	0	0	0	0	0	مصنع وهمي
3700 3700	400	600	1200	700	800	الطلب

وبالمقابل إذا كان حجم الإنتاج يزيد على حجم الطلب يمكن إدخال مركز توزيع وهمي يمتص البضائع الفائضة, بفرض أن معطيات المثال السابق تغيرت حيث انخفض الطلب في سوق دمشق 1000 براد بدلاً عن 1200, أي أقل من إجمالي العرض والجدول التالي يبين كيف تم تحقيق التوازن في المسألة عن طريق إدخال مركز توزيع وهمي يمتص الفرق بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة, فتشير إلى أن البرادات الواصلة إلى مركز التوزيع الوهمي من المصانع تمثل الفائض عن الطلب الحقيقي والتي تبقى في المصانع أما تكلفة نقل هذه البرادات فمعدومة لأنها لم تنقل أصلاً, لكن في بعض المسائل التي تتضمن نقل مواد ذات طبيعة خاصة, حيث تتطلب عملية تخزينها جهوداً خاصة وتكاليف معينة, ويمكن عدّ تكاليف تخزين البضائع المكدسة في مركز الإنتاج تكلفة النقل إلا إذا اختلفت هذه التكلفة من مركز لآخر:

العرض	مركز توزيع وهمي	دير الزور	اللاذقية	دمشق	حمص	حلب	
1000	0	15	12	20	10	0	حلب
1500	0	18	14	12	0	10	حمص
1200	0	22	25	0	12	20	دمشق
3900	200	400	600	1000	700	800	الطلب

ملاحظات:

1-لا يمكن إضافة سطر وهمي وعمود وهمي معاً

2-في حال وجود سطر أصفار أساساً بالمسألة نتعامل معها بشكل مختلف عن السطر الوهمي

المثال التالي بالصفحة 74 من الكتاب:

شركة صناعية لديها أربعة مصانع موزعة في ثلاث مناطق صناعية تنتج نوعاً وحيداً من السلع (ليكن برادات الطاقة الانتاجية للمصانع الأول, والثاني, الثالث هي : 350,350,300 براد شهرياً على الترتيب.

يغطي سوق الشركة خمس مناطق سكنية, الطلب الشهري في هذه المناطق: 150,250,150,300,150 براد للمنطقة 5,4,3,2,1 على الترتيب أما كلفة نقل البراد من المصانع الى الأسواق معطاة في الجدول التالي

والمطلوب: وضع خطة نقل توضح فيها الكمية المنقولة من كل مصنع الى كل سوق بحيث تكون التكلفة في حدودها الدنيا.

الصانع / الأسواق	1	2	3	4	5
1	5	4	3	11	**9**
2	8	6	10	5	**3**
3	12	2	8	4	**7**

سنصيغ المسألة بالشكل الموحد:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5	4	3	11	9	**350**
2	8	6	10	5	3	**350**
3	12	2	8	4	7	**300**
الطلب	150	250	150	300	150	**1000** / **1000**

بدايةً نتأكد أن المسألة متوازنة (كمية العرض=كمية الطلب) وهذا محقق حيث (1000=1000)

أولاً: طريقة الركن الشمالي الغربي:تعتمد هذه الطريقة على موقع الخلية وليس على تكلفتها, حيث نبدأ بالزاوية العليا واليسرى من جدول النقل(C_{11}) ونقوم بتخصيص هذه الخلية بالكمية المناسبة عن طريق المقارنة بين كمية العرض وكمية الطلب (المعروض 350 وحدة والمطلوب 150 وحدة) والأقل هو الطلب وبالتالي نضع الكمية الأقل في الخلية ثم نطرحها من كمية العرض لنضع الناتج الجديد مكان كمية العرض القديمة ($350 - 150 = 200$), بهذه الحالة مركز التوزيع الأول (العمود الأول) أخذ كامل كفايته أو طلبه وبالتالي نحذف هذا العمود (نظلله) ونعتبره غير موجود ويصبح الجدول على الشكل التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4	3	11	9	~~350~~ 200
2	8	6	10	5	3	350
3	12	2	8	4	7	300
الطلب	~~150~~ 0	250	150	300	150	1000 1000

ننتقل الى الزاوية العليا واليسرى الجديدة وهي (C_{12}) ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب فنجد أن الأقل هي كمية العرض(200) فنضعها في الخلية ثم نطرحها من كمية الطلب الأكبر منها (250) ونضع الفرق مكان كمية الطلب القديمة $(250 - 200 = 50)$ ثم نشطب السطر الأول ويصبح الجدول كما يلي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4 200	3	11	9	~~200~~ 0
2	8	6	10	5	3	350
3	12	2	8	4	7	300
الطلب	~~150~~	~~250~~ 50	150	300	150	1000 1000

ننتقل الى الزاوية العليا واليسرى التالية وهي (C_{22}) ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب فنجد أن الأقل هي كمية الطلب (50) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (350) ونضع الفرق مكان كمية العرض القديمة

$(350 - 50 = 300)$ ونشطب العمود الثاني ويصبح الجدول:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4 200	3	11	9	~~200~~
2	8	6 50	10	5	3	~~350~~ 300
3	12	2	8	4	7	300
الطلب	~~150~~	~~50~~ 0	150	300	150	1000 1000

ننتقل الى الزاوية العليا واليسرى التالية وهي (C_{23}) ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب فنجد أن الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (300) ونضع الفرق مكان كمية العرض القديمة

($300 - 150 = 150$) ونشطب العمود الثالث ويصبح الجدول:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4 200	3	11	9	~~200~~
2	8	6 50	10 150	5	3	~~300~~ 150
3	12	2	8	4	7	300
الطلب	~~150~~	~~50~~	~~150~~ 0	300	150	1000 1000

ننتقل الى الزاوية العليا واليسرى التالية وهي (C_{24}) ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب فنجد أن الأقل هي كمية العرض(150) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية الطلب الأكبر منها (300) ونضع الفرق مكان كمية الطلب القديمة

($300 - 150 = 150$) ونشطب السطر الثاني ويصبح الجدول:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4 200	3	11	9	~~200~~
2	8	6 50	10 150	5 150	3	~~150~~ 0
3	12	2	8	4	7	300
الطلب	~~150~~	~~50~~	~~150~~	~~300~~ 150	150	1000 1000

ننتقل الى الزاوية العليا واليسرى التالية وهي (C_{34})ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب فنجد أن الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (300) ونضع الفرق مكان كمية

الطلب القديمة
$(300 - 150 = 150)$ ونشطب العمود الرابع ويصبح الجدول:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4 200	3	11	9	~~200~~
2	8	6 50	10 150	5 150	3	~~150~~
3	12	2	8	4 150	7	~~300~~ 150
الطلب	~~150~~	~~50~~	~~150~~	~~150~~ 0	150	1000 1000

والآن آخر خلية بقيت في الجدول وهي (C_{35}) يجب أن تكون عندها الكميات متساوية أي (كمية العرض=كمية الطلب) وهذا محقق حيث $(150=150)$ فنشطب السطر الثالث والعمود الخامس معاً ويصبح الجدول النهائي كما يلي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4 200	3	11	9	~~200~~
2	8	6 50	10 150	5 150	3	~~150~~
3	12	2	8	4 150	7 150	~~150~~
الطلب	~~150~~	~~50~~	~~150~~	~~150~~	~~150~~	1000 1000

قمنا بتوزيع كامل كميات العرض والطلب داخل جدول النقل, وقبل أن نحسب التكلفة الكلية الإجمالية للنقل, نجري عملية بسيطة للتأكد من صحة الحل (توزيع الكميات) وهي أن نجمع الخلايا المليئة سطرياً وعمودياً حيث:

✓ الجمع سطرياً:

-السطر الأول $350 = 200 + 150$ ويساوي كمية العرض الأساسية
-السطر الثاني $350 = 50 + 150 + 150$ ويساوي كمية العرض الأساسية
-السطر الثالث $300 = 150 + 150$ويساوي كمية العرض الأساسية

✓ الجمع عمودياً:

-العمود الأول $150 = 150$ يساوي كمية الطلب الأساسية
-العمود الثاني $250 = 50 + 200$ يساوي كمية الطلب الأساسية
-العمود الثالث $150 = 150$ يساوي كمية الطلب الأساسية
-العمود الرابع $300 = 150 + 150$ يساوي كمية الطلب الأساسية
-العمود الخامس $150 = 150$يساوي كمية الطلب الأساسية

وبالنهاية الكميات متساوية والحل صحيح, الآن نقوم بحساب التكلفة الاجمالية للنقل وتساوي حاصل جمع (الكميات التي قمنا بتوزيعها× تكلفة كل خلية تم التوزيع فيها)

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$C = (150 \times 4) + (200 \times 4) + (50 \times 6) + (150 \times 10) + (150 \times 5) + (150 \times 4) + (150 \times 7) = 5690$$

وهذا يسمى حل أولي وليس نهائي ويحتاج الى تطوير حل سنأخذه لاحقاً.

ملاحظات هامة حول الحل بطريقة الركن الشمالي الغربي:

1. في حال تساوي كمية العرض مع كمية الطلب, نضع الكمية ونشطب السطر والعمود معاً
2. الأصفار (التكاليف) الموجودة في السطر او العمود الوهمي تؤخذ بعين الاعتبار بحسب موقعها من جدول النقل

ثانياً: طريقة أقل التكاليف: سنأخذ نفس المثال السابق

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5	4	3	11	9	350
2	8	6	10	5	3	350
3	12	2	8	4	7	300
الطلب	150	250	150	300	150	1000 / 1000

بدايةً نتأكد ان المسألة متوازنة (كمية العرض=كمية الطلب) وهذا محقق حيث (1000=1000) واذا كانت غير متوازنة نضيف سطر أو عمود وهمي نضع فيه التكاليف أصفار والكمية هي الفرق بين العرض والطلب.
في هذه الطريقة ستختلف عن طريقة الركن الشمالي الغربي حيث سنأخذ بعين الاعتبار التكاليف وليس موقع الخلية.

ننظر الى جدول النقل ونبحث عن أصغر تكلفة موجودة بكل الجدول وهي $C_{32} = 2$ وبالتالي لها الأولوية بأن نبدأ بتخصيص هذه الخلية, فنقارن كمية العرض مع كمية الطلب ونجد ان الأقل هي كمية الطلب (250) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (300) ونضع الفرق مكان كمية العرض القديمة $(300 - 250 = 50)$ ثم نشطب العمود الثاني ونعتبره غير موجود ويصبح الجدول كما يلي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5	4	3	11	9	350
2	8	6	10	5	3	350
3	12	2 250	8	4	7	~~300~~ 50
الطلب	150	~~250~~	150	300	150	1000 1000

ننتقل الى الخلية ذات التكلفة الأقل التي تليها وهي $C_{13} = 3$ ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد أن الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها مكان الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (350) لنضع الفرق مكان كمية العرض القديمة $(350 - 150 = 200)$ ثم نشطب العمود الثالث ويصبح الجدول بالشكل التالي:

ملاحظة: في حال وجود تكلفتين متساويتين في جدول النقل $(C_{13} = C_{25})$ نبدأ بالخلية ذات الطلب الأكبر, وفي حال تساوي التكاليف والطلب معاً نختار الخلية ذات العرض الاكبر, وفي حال تساوي التكاليف والطلب والعرض معاً نأخذ أي خلية لا على التعيين.

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5	4	3 150	11	9	~~350~~ 200
2	8	6	10	5	3	350
3	12	2 250	8	4	7	50
الطلب	150	~~250~~	~~150~~ 0	300	150	1000 1000

ننتقل الى الخلية ذات التكلفة الأقل التي تليها وهي $C_{25} = 3$ ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد أن الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها مكان الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (350) لنضع الفرق مكان كمية العرض القديمة $(350 - 150 = 200)$ ثم نشطب العمود الخامس ويصبح الجدول بالشكل التالي

مراكز التوزيع مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5	4	3 150	11	9	200
2	8	6	10	5	3 150	~~350~~ 200
3	12	2 250	8	4	7	50
الطلب	150	~~250~~	~~150~~	300	~~150~~ 0	1000 1000

ننتقل الى الخلية ذات التكلفة الأقل التي تليها وهي $C_{34} = 4$ ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد أن الأقل هي كمية العرض (50) نضعها مكان الخلية ونطرحها من كمية الطلب الأكبر منها (300) لنضع الفرق مكان كمية الطلب القديمة $(300 - 50 = 250)$ ثم نشطب السطر الثالث ويصبح الجدول بالشكل التالي:

مراكز التوزيع مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5	4	3 150	11	9	200
2	8	6	10	5	3 150	200
3	12	2 250	8	4 50	7	~~50~~ 0
الطلب	150	~~250~~	~~150~~	~~300~~ 250	~~150~~	1000 1000

ننتقل الى الخلية ذات التكلفة الأقل التي تليها وهي $C_{11} = 5$ ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد أن الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها مكان الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (200) لنضع الفرق مكان كمية العرض القديمة $200 - 150 = 50$ ثم نشطب العمود الأول ويصبح الجدول بالشكل التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4	3 150	11	9	~~200~~ 50
2	8	6	10	5	3 150	200
3	12	2 250	8	50 4	7	~~50~~
الطلب	~~150~~ 0	~~250~~	~~150~~	250	~~150~~	1000 1000

ننتقل الى الخلية ذات التكلفة الأقل التي تليها وهي $C_{24} = 5$ ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد أن الأقل هي كمية العرض (200) نضعها مكان الخلية ونطرحها من كمية الطلب الأكبر منها (250) لنضع الفرق مكان كمية الطلب القديمة $(250 - 200 = 50)$ ثم نشطب السطر الثاني ويصبح الجدول بالشكل التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4	3 150	11	9	50
2	8	6	10	5 200	3 150	~~200~~ 0
3	12	2 250	8	50 4	7	~~50~~
الطلب	~~150~~	~~250~~	~~150~~	~~250~~ 50	~~150~~	1000 1000

ننتقل الى الخلية ذات التكلفة الأقل التي تليها والأخيرة وهي $C_{14} = 11$ ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد أن كمية العرض=كمية الطلب (50=50)نضعها في الخلية وبالتالي نشطب السطر الأول والعمود الرابع معاً ويصبح الجدول كما يلي:

مراكز التوزيع \ مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5 150	4	3 150	11 50	9	~~50~~
2	8	6	10	5 200	3 150	~~200~~
3	12	2 250	8	4 50	7	~~50~~
الطلب	~~150~~	~~250~~	~~150~~	~~50~~	~~150~~	1000 1000

قبل حساب التكلفة الاجمالية نقوم بعملية بسيطة للتأكد من صحة الحل وهي الجمع سطرياص وعمودياً للخلايا المليئة:

الجمع سطرياً:

-السطر الأول $350 = 50 + 150 + 150$ ويساوي كمية العرض الأساسية

-السطر الثاني $350 = 150 + 200$ ويساوي كمية العرض الأساسية

-السطر الثالث $300 = 50 + 250$ويساوي كمية العرض الأساسية

الجمع عمودياً:

-العمود الأول $150 = 150$ يساوي كمية الطلب الأساسية

-العمود الثاني $250 = 250$ يساوي كمية الطلب الأساسية

-العمود الثالث $150 = 150$ يساوي كمية الطلب الأساسية

-العمود الرابع $300 = 50 + 200 + 50$ يساوي كمية الطلب الأساسية

-العمود الخامس $150 = 150$يساوي كمية الطلب الأساسية

الحل صحيح وبالتالي نحسب التكلفة الاجمالية للنقل مع الملاحظة بأن طريقة التوزيع اختلفت والكميات أيضاً اختلفت:

$$C = (150 \times 5) + (150 \times 3) + (50 \times 11) + (200 \times 5) + (150 \times 3) + (250 \times 2) + (50 \times 4) = 3900$$

وهي أقل من التكلفة بطريقة الركن الشمالي الغربي.

ملاحظة هامة عن الحل بطريقة أقل التكاليف: ان الأصفار الموجودة في السطر أو العمود الوهمي لا تؤخذ بعين الاعتبار ولا تُعتبر كأقل تكلفة في الجدول الا اذا كان الصفر موجود في أساس المسألة (التكلفة الأساسية).

ثالثاً: طريقة فوجيل التقريبية (الفروق العظمى): الحل بهذه الطريقة هو الأمثل ولكن طويل أيضاً نفس المثال السابق

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض
1	5	4	3	11	9	350
2	8	6	10	5	3	350
3	12	2	8	4	7	300
الطلب	150	250	150	300	150	1000 / 1000

بدايةً نتأكد ان المسألة متوازنة (كمية العرض=كمية الطلب) وهذا محقق

تعتمد هذه الطريقة على أن نحسب فروقات التكاليف للأسطر والأعمدة:

1-نحسب $\Delta 1$ للأسطر والأعمدة, حيث نأخذ أصغر تكلفتين بالسطر الأول ونحسب الفرق بينهما$(4-3=1)$

ونضع الناتج في عمود $\Delta 1$,

وكذلك بالنسبة للسطر الثاني$(5-3=2)$ والسطر الثالث$(4-2=2)$

وبالنسبة للأعمدة نحسب أيضاً $\Delta 1$, حيث نأخذ أصغر تكلفتين في العمود الأول ونحسب الفرق بينهما $(8-5=3)$ ونضع الناتج في السطر $\Delta 1$.

وكذلك بالنسبة للعمود الثاني $(4-2=2)$, والعمود الثالث$(8-3=5)$,

والعمود الرابع $(5-4=1)$, والعمود الخامس $(7-3=4)$,

الآن نبحث عن أكبر فرق في عمود وسطر $\Delta 1$ نجد أنه (5)

ثم نبحث في سطر أو عمود (5) عن أدنى تكلفة موجودة وهي $C_{13}=3$

وبالتالي سنقوم بتخصيص هذه الخلية ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد أن الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (350) ونضع الفرق مكان كمية العرض القديمة $(350 - 150 = 200)$ ونشطب العمود الثالث, ونوضح هذه العملية بالجدول التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض	$\Delta 1$
1	5	4	3 150	11	9	~~350~~ 200	1
2	8	6	10	5	3	350	2
3	12	2	8	4	7	300	2
الطلب	150	250	~~150~~ 0	300	150	1000 / 1000	
$\Delta 1$	3	2	5 الأكبر	1	4		

نحسب $\Delta 2$ للأسطر والأعمدة, حيث نأخذ أصغر تكلفتين بالسطر الأول ونحسب الفرق بينهما$(5 - 4 = 1)$ ونضع الناتج في عمود $\Delta 2$,

وكذلك بالنسبة للسطر الثاني$(5 - 3 = 2)$ والسطر الثالث$(4 - 2 = 2)$

وبالنسبة للأعمدة نحسب أيضاً $\Delta 2$, حيث نأخذ أصغر تكلفتين في العمود الأول ونحسب الفرق بينهما $(8 - 5 = 3)$ ونضع الناتج في السطر$\Delta 2$

وكذلك بالنسبة للعمود الثاني $(4 - 2 = 2)$, والعمود الرابع $(5 - 4 = 1)$,

والعمود الخامس $(7 - 3 = 4)$,

الآن نبحث عن أكبر فرق في عمود وسطر $\Delta 2$ نجد أنه (4) ثم نبحث في سطر أو عمود (4) عن أدنى تكلفة موجودة وهي $C_{25} = 3$

وبالتالي سنقوم بتخصيص هذه الخلية ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد ان الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (350) ونضع الفرق مكان كمية العرض القديمة $(350 - 150 = 200)$ ونشطب العمود الخامس, ونوضح هذه العملية بالجدول التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض	$\Delta 1$	$\Delta 2$
1	5	4	3 150	11	9	200	1	1
2	8	6	10	5	3 150	~~350~~ 200	2	2
3	12	2	8	4	7	300	2	2
الطلب	150	250	~~150~~	300	~~150~~ 0	1000 1000		
$\Delta 1$	3	2	5	1	4			
$\Delta 2$	3	2		1	4 الأكبر			

نحسب $\Delta 3$ للأسطر والأعمدة, حيث نأخذ أصغر تكلفتين بالسطر الأول ونحسب الفرق بينهما$(5-4=1)$ ونضع الناتج في عمود $\Delta 3$,

وكذلك بالنسبة للسطر الثاني$(6-5=1)$ والسطر الثالث$(4-2=2)$

وبالنسبة للأعمدة نحسب أيضاً $\Delta 3$, حيث نأخذ أصغر تكلفتين في العمود الأول ونحسب الفرق بينهما $(8-5=3)$ ونضع الناتج في السطر $\Delta 1$

وكذلك بالنسبة للعمود الثاني $(4-2=2)$, والعمود الرابع $(5-4=1)$,

الآن نبحث عن أكبر فرق في عمود وسطر $\Delta 3$ نجد أنه (3) ثم نبحث في سطر أو عمود (3) عن أدنى تكلفة موجودة وهي $C_{11}=5$

وبالتالي سنقوم بتخصيص هذه الخلية ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد ان الأقل هي كمية الطلب (150) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (200) ونضع الفرق مكان كمية العرض القديمة $(200-150=50)$ ونشطب العمود الأول, ونوضح هذه العملية بالجدول التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض	$\Delta1$	$\Delta2$	$\Delta3$
1	5 150	4	3 150	11	9	~~200~~ 50	1	1	1
2	8	6	10	5	3 150	200	2	2	1
3	12	2	8	4	7	300	2	2	2
الطلب	~~150~~ 0	250	~~150~~	300	~~150~~	1000 1000			
$\Delta1$	3	2	5	1	4				
$\Delta2$	3	2		1	4				
$\Delta3$	3 الأكبر	2		1					

نحسب $\Delta4$ للأسطر والأعمدة, حيث نأخذ أصغر تكلفتين بالسطر الأول ونحسب الفرق بينهما($11-4=7$)
ونضع الناتج في عمود $\Delta4$,
وكذلك بالنسبة للسطر الثاني($6-5=1$)والسطر الثالث($4-2=2$)
وبالنسبة للأعمدة نحسب أيضاً $\Delta4$, حيث نأخذ أصغر تكلفتين في العمود الثاني ونحسب الفرق بينهما
($4-2=2$) ونضع الناتج في السطر $\Delta4$
وكذلك بالنسبة للعمود الرابع ($5-4=1$),
الآن نبحث عن أكبر فرق في عمود وسطر $\Delta4$ نجد أنه (7) ثم نبحث في سطر أو عمود (7) عن أدنى تكلفة
موجودة وهي $C_{12}=4$
وبالتالي سنقوم بتخصيص هذه الخلية ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد ان الأقل هي كمية العرض
(50) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية الطلب الأكبر منها (250) ونضع الفرق مكان كمية الطلب القديمة
($250-50=200$) ونشطب السطر الأول, ونوضح هذه العملية بالجدول التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض	$\Delta1$	$\Delta2$	$\Delta3$	$\Delta4$
1	5 150	4 50	3 150	11	9	~~50~~ 0	1	1	1	7 الأكبر
2	8	6	10	5	3 150	200	2	2	1	1
3	12	2	8	4	7	300	2	2	2	2
الطلب	~~150~~	~~250~~ 200	~~150~~	300	~~150~~	1000 1000				
$\Delta1$	3	2	5	1	4					
$\Delta2$	3	2		1	4					
$\Delta3$	3	2		1						
$\Delta4$		2		1						

نحسب $\Delta5$ للأسطر والأعمدة, حيث نأخذ أصغر تكلفتين بالسطر الثاني ونحسب الفرق بينهما($6-5=1$) ونضع الناتج في عمود $\Delta5$, وكذلك بالنسبة للسطر الثالث($4-2=2$)
وبالنسبة للأعمدة نحسب أيضاً $\Delta5$, حيث نأخذ أصغر تكلفتين في العمود الثاني ونحسب الفرق بينهما ($6-2=4$) ونضع الناتج في السطر $\Delta5$
وكذلك بالنسبة للعمود الرابع ($5-4=1$), الآن نبحث عن أكبر فرق في عمود وسطر $\Delta5$ نجد أنه (4) ثم نبحث في سطر أو عمود (4) عن أدنى تكلفة موجودة وهي $C_{32}=2$
وبالتالي سنقوم بتخصيص هذه الخلية ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد ان الأقل هي كمية الطلب (200) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية العرض الأكبر منها (300) ونضع الفرق مكان كمية العرض القديمة ($300-200=100$) ونشطب العمود الثاني, ونوضح هذه العملية بالجدول التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
1	5 150	4 50	3 150	11	9	~~50~~	1	1	1	7	
2	8	6	10	5	3 150	200	2	2	1	1	1
3	12	2 200	8	4	7	~~300~~ 100	2	2	2	2	2
الطلب	~~150~~	~~200~~ 0	~~150~~	300	~~150~~	1000 1000					
$\Delta 1$	3	2	5	1	4						
$\Delta 2$	3	2		1	4						
$\Delta 3$	3	2		1							
$\Delta 4$		2		1							
$\Delta 5$		4 الأكبر		1							

نحسب $\Delta 6$ للأسطر والأعمدة, حيث نأخذ أصغر تكلفتين السطر الثاني ونحسب الفرق بينهما ونلاحظ انه لا يوجد سوى تكلفة وحيدة(5)ونضعها في عمود $\Delta 6$, وكذلك السطر الثالث لم يبقى سوى تكلفة وحيدة وهي (4)

وبالنسبة للأعمدة نحسب أيضاً $\Delta 6$, حيث نأخذ الفرق بين أصغر تكلفتين في العمود الرابع ($5-4=1$), الآن نبحث عن أكبر فرق في عمود وسطر $\Delta 6$ نجد أنه (5) ثم نبحث في سطر أو عمود (5) عن أدنى تكلفة موجودة وهي $C_{24}=5$ وبالتالي سنقوم بتخصيص هذه الخلية ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد ان الأقل هي كمية العرض (200) نضعها في الخلية ونطرحها من كمية الطلب الأكبر منها (300) ونضع الفرق مكان كمية الطلب القديمة ($300-200=100$) ونشطب السطر الثاني, ونوضح هذه العملية بالجدول التالي:

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض	$\Delta1$	$\Delta2$	$\Delta3$	$\Delta4$	$\Delta5$	$\Delta6$
1	5 150	4 50	3 150	11	9	~~50~~	1	1	1	7		
2	8	6	10	5 200	3 150	~~200~~ 0	2	2	1	1	1	5 الأكبر
3	12	2 200	8	4	7	100	2	2	2	2	2	4
الطلب	~~150~~	~~200~~	~~150~~	~~300~~ 100	~~150~~	1000 1000						
$\Delta1$	3	2	5	1	4							
$\Delta2$	3	2		1	4							
$\Delta3$	3	2		1								
$\Delta4$		2		1								
$\Delta5$		4		1								
$\Delta6$				1								

نحسب $\Delta7$ للأسطر والأعمدة, حيث نأخذ أصغر تكلفتين السطر الثالث ونحسب الفرق بينهما ونلاحظ انه لا يوجد سوى تكلفة وحيدة(4)ونضعها في عمود$\Delta7$
وبالنسبة للأعمدة نحسب أيضاً $\Delta7$, حيث نأخذ الفرق بين أصغر تكلفتين في العمود الرابع ونلاحظ أنه لا يوجد سوى تكلفة وحيدة وهي (4) وبالتالي نضعها في السطر $\Delta7$, الآن نبحث عن أكبر فرق في عمود وسطر $\Delta7$ نجد أنه (4) ثم نبحث في سطر أو عمود (4) عن أدنى تكلفة موجودة وهي$C_{34} = 4$
وبالتالي سنقوم بتخصيص هذه الخلية ونقارن كمية العرض مع كمية الطلب لنجد انهما متساويين $(100 = 100)$ وبالتالي نقوم بشطب السطر الثالث والعمود الرابع معاً
ونوضح هذه العملية بالجدول التالي:

مراكز التوزيع مراكز الانتاج	1	2	3	4	5	العرض	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Δ7
1	5 150	4 50	3 150	11	9	~~50~~	1	1	1	7			
2	8	6	10	5 200	3 150	~~200~~	2	2	1	1	1	5	
3	12	2 200	8	4 100	7	~~100~~	2	2	2	2	2	4	4
الطلب	~~150~~	~~200~~	~~150~~	~~100~~	~~150~~	1000 1000							
Δ1	3	2	5	1	4								
Δ2	3	2		1	4								
Δ3	3	2		1									
Δ4		2		1									
Δ5		4		1									
Δ6				1									
Δ7				4									

نلاحظ اختلاف توزيع الخلايا بين طريقة وأخرى وأيضاً اختلاف التكاليف ولكن أفضل طريقة توصلنا للحل الأمثل هي فوجيل وتأتي طريقة أقل التكاليف في المرتبة الثانية.

الآن نحسب التكلفة الاجمالية للنقل:

$$C = (150 \times 5) + (50 \times 4) + (150 \times 3) + (200 \times 5) + (150 \times 3) + (200 \times 2) + (100 \times 4) = 3650$$

ملاحظة على طريقة حل فوجيل: ان الأصفار الموجودة في السطر او العمود الوهمي لا تؤخذ بعين الاعتبار.

إيجاد الحل الأمثل(تحسين الحل):

بعد الحصول على الحل الأساسي الأولي، يتم استخدام أساليب أخرى لاختبار مثالية الحل من أجل الحصول على حل أفضل يعطي تكاليف نقل كلية أقل وذلك باستخدام الطريقتين الآتيتين:

1 ـ طريقة المسار المتعرج Stepping – Stone Method.

2 ـ طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method

1 ـ طريقة المسار المتعرج – Stepping Stone Method

تتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأولي لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا نقلت وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة فإذا وجدنا أن ملء خلية معينة غير مشغولة ستؤدي إلى تقليل التكاليف، يتم تعديل الحل الراهن وتستمر عملية تقييم كل جدول إلى أن نتوصل إلى أن أشغال أي خلية غير مشغولة لا يؤدي إلى تقليل في تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.

كما يجب ملاحظة أن أية مشكلة للنقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أية إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط الآتي وهو أن عدد الخلايا المشغولة يجب أن تساوي دائماً مجموع عدد الصفوف وعدد الأعمدة ناقصاً واحد أي أن:

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة ـ 1

عدد الخلايا المشغولة = $(m + n -1)$

ولتطبيق هذه الطرقة يتم إتباع الخطوات الآتية:

1 ـ يتم رسم مسار مغلق Closed Path لكل خلية غير مشغولة ويتكون المسار من مجموعة من قطع من المستقيمات المتعاقبة الأفقية والعمودية يبدأ من الخلية الغير المشغولة المراد اختيارها إلى خلية مليئة أخرى حتى يتم الوصول إلى الخلية الغير المشغولة نفسها حيث يمكن تجاوز خلايا غير مشغولة أو ممتلئة بحيث نصل إلى خلية ممتلئة.

2 ـ يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها تعقبها علامة سالبة (-) للخلية التي تليها في المسار ثم علامة موجبة للخلية التي تليها وهكذا لجميع الخلايا التي يتشكل منها المسار.

3 ـ نحسب الكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) وذلك بجمع الكلفة للخلايا الواقعة على المسار، فإذا كانت هذه القيمة سالبة معنى ذلك أن أشغال هذه الخلية سيساهم في تخفيض التكاليف.

4 ـ تكرر الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة فإذا كانت الكلف غير المباشرة موجبة أو صفر فإن الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون الكلفة الغير المباشرة لها سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتخفيض التكاليف وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للكلفة الغير المباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل.

5 ـ يتم أشغال الخلية الغير المشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

6 ـ تكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا واختبار الخلايا الغير المشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الحصول على الحل الأمثل.

7 ـ في حالة عدم تحقق شرط عدد الخلايا المشغولة = (1 ـ m + n) في هذه الحالة نضيف إلى أحد الخلايا الغير المشغولة والتي تحتوي على أقل كلفة قيمة صفر بحيث لا يؤثر على الحل وتساعدنا في اختبار الخلايا الغير المشغولة.

مثال (4):

من جدول الحل الأولي الآتي للمثال السابق والذي تم الحصول عليه بطرقة الركن الشمالي الغربي، أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج:

مراكز تسويقية / مراكز إنتاجية	1	2	3	العرض
1	7 18	3 4	10	22
2	4	6 18	0 6	22
3	5	8	9 14	14
الطلب	18	22	20	60

الحل:

1 ـ يتم التأكد من أن الحل الأولي قابل للحل الأمثل ونلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة تساوي 5 وأن الشرط (عدد الخلاياالمشغولة = 5 + 5 ـ 1) متحقق.

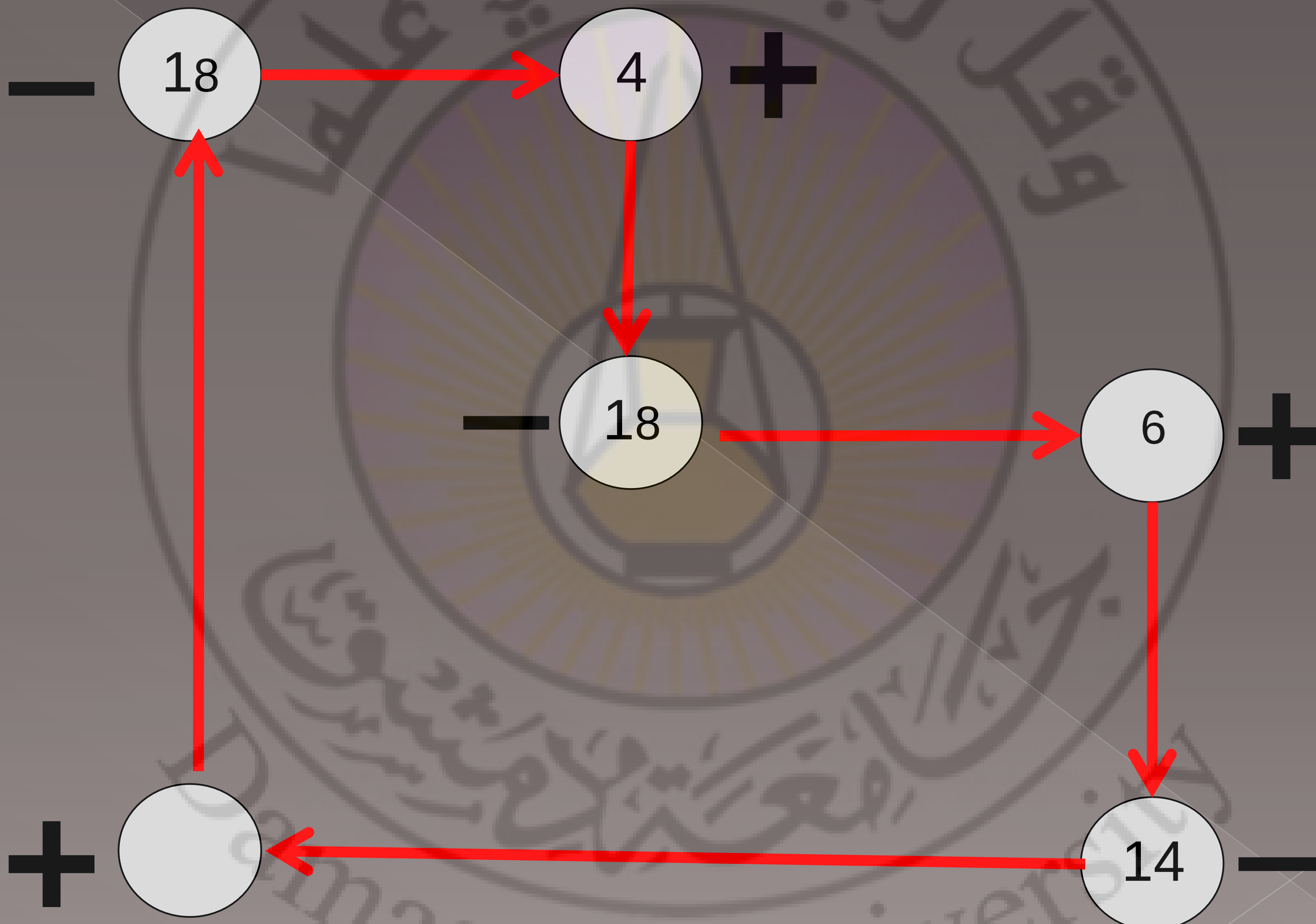
2 ـ يتم رسم مسار مغلق للخلايا الغير المشغولة.

3 ـ يتم حساب الكلف الغير المباشرة للمسارات المغلقة للخلايا الغير المشغولة وكالآتي:

الخلية الغير المشغولة	السمار المغلق	الكلفة الغير المباشرة
X(1,3)	X(1,3) ⇨ X(2,3) ⇨X(2,2) ⇨ X(1,2)	+10-0+6-3=13
X(2,1)	X(2,1) ⇨ X(1,1) ⇨X(1,2) ⇨ X(2,2)	+4-7+3-6=-6
X(3,1)	X(3,1) ⇨ X(1,1) ⇨X(1,3) ⇨X(2,2) ⇨ X(2,3) ⇨ X(3,3)	+5-7+3-6+0- 9=-14
X(3,2)	X(3,2) ⇨ X(2,2) ⇨X(2,3) ⇨ X(3,3)	+8-6+0-9=-7

4 ـ من التكاليف الغير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X (3,1) لها أكبر قيمة سالبة ولذلك يتم اختيارها لأنه تؤدي إلى تخفيض التكاليف.

ويتم أشغالها بنقل كميات إليها حيث تتحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلايا المسار المغلق على أساس مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة، ويمكن تمثيل مسار الخلية X(3,1) كالآتي:


−
18
4
+
−
18
6
+
+
14
−

- ان عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X(3,1) تتحدد من المسار المغلق أعلاه، أن أقل عدد من الوحدات في هاذ المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة (14) وحدة يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالآتي:

$X(3,1) = 14$

$X(1,1)\ 18 - 14 = 4$

$X(1,3) = 4 + 14 = 18$

$X(2,2) = 18 - 14 = 4$

$X(2,3) = 6 + 14 = 20$

$X(3,3) = 14 - 14 = 0$

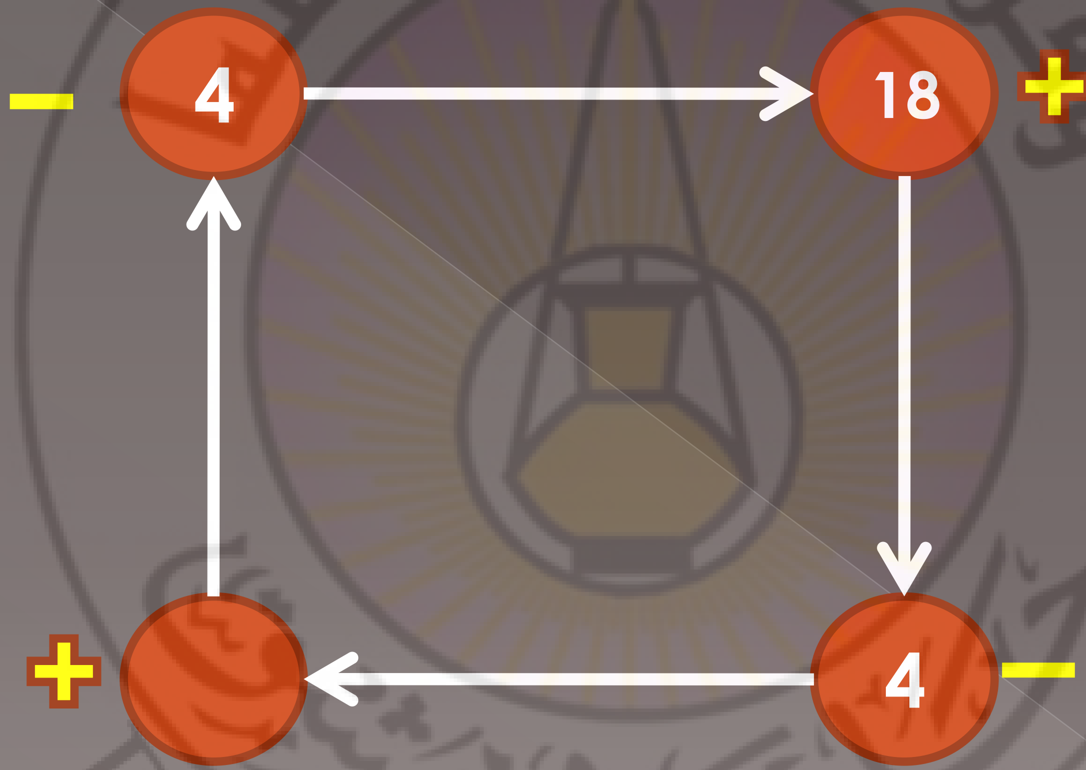
مراكز تسويقية مراكز إنتاجية	1	2	3	العرض
1	7 4	3 18	10	22
2	4	6 4	0 20	24
3	5 14	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

- أما التكاليف الكلية تحسب كالآتي:
- 176 = (0) (9) + (14) (5) + (20) (0) + (4) (6) + (18) (3) + (4) (7)
- كانت الكلفة الكلية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي 372 في حين بلغت الكلفة الكلية بعد أن تم تعديل الجدول 176 أي أن هناك تخفيض في التكاليف بمقدار 196.
- أن الحل المتحقق في الجدول أعلاه ربما يكون حلاً أمثلاً أو لا يكون كذلك.

- أي هل هناك إمكانية في الحصول على نتائج أفضل من النتيجة السابقة يتطلب ذلك اختبار أمثلية الجدول الذي تم التوصل إليه طبقاً لنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دراسة أثر أشغال الخلايا الغير المشغولة على الكلفة الكلية وكالآتي:

الخلية الغير المشغولة	السمار المغلق	الكلفة الغير المباشرة
X(1,3)	X(1,3) ⇨ X(2,3) ⇨X(2,2) ⇨ X(1,2)	+10-0+6-3=13
X(2,1)	X(2,1) ⇨ X(1,1) ⇨X(1,2) ⇨ X(2,2)	+4-7+3-6=-6
X(3,2)	X(3,2) ⇨ X(3,1) ⇨X(1,1) ⇨X(1,2)	+8-5+7-3=7
X(3,3)	X(3,3) ⇨ X(3,1) ⇨X(1,1) ⇨ X(1,2) ⇨X(2,2)⇨X(2,3)	+9-5+7-3+6-0 =14

من التكاليف الغير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(2,1) لها قيمة سالبة ولذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف ويتم أشغالها بنقل كميات إليها حيث تتحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلايا المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة، ويمكن تمثيل مسار الخلية X(2,1) كالآتي


4
18
4
−
+
+
−

أن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X(2,1) تتحدد من المسار المغلق أعلاه وهي عبارة عن أصغر عدد من الوحدات في الخلايا التي تأخذ الإشارة السالبة في المسار. أن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة (4) وحدات، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالآتي:

$$X(1,1) = 4 - 4 = 0$$

$$X(1,2) = 18 + 4 = 22$$

$$X(2,1) = 4$$

$$X(2,2) = 4-4 = 0$$

مراكز تسويقية / مراكز إنتاجية	1	2	3	العرض
1	7	3 22	10	22
2	4 4	6	0 20	24
3	5 14	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكاليف الكلية تحسب كالآتي:

(22) (3) + (4) (4) + (20)(0) + (14) (5) = 152

كانت الكلفة الكلية 176 في التعديل الأول للجدول في حين بلغت الكلفة الكلية بعد أن تم تعديل الجدول للمرة الثانية 152 أي أن هناك تخفيض في التكاليف بمقدار 24.

أن الحل المتحقق في الجدول قد يكون هو الحل الأمثل إلا أن ذلك يتطلب اختبار أمثلية الجدول الأخير الذي تم التوصل إليه طبقاً لنفس القواعد السابقة. نلاحظ أن الجدول لا يحقق الشرط في كون عدد الخلايا المشغولة = $(m + n - 1)$ إذ أن عدد الخلايا المشغولة أصبحت 4، لذلك يتم إضافة صفر إلى أحد خلايا الجدول الغير المشغولة والتي لها أقل كلفة وهي الخلية $X(2,2)$ لمساعدتنا في اختبار الخلايا الغير المشغولة والتي له أقل كلفة وهي الخلية $X(2,2)$ لمساعدتنا في اختبار الخلايا الغير المشغولة، وعليه يتم إضافة صفر للخلية $X(2,2)$ وكما في الجدول أدناه:

مراكز تسويقية / مراكز إنتاجية	1	2	3	العرض
1	7	3 (22)	10	22
2	4 (4)	6 (0)	0 (20)	24
3	5 (14)	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

يتم اختبار أمثلية الجدول الأخير بنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دراسة أثر أشغال الخلايا الغير المشغولة على الكلفة الكلية وكالآتي:

الخلية الغير المشغولة	السمار المغلق	الكلفة الغير المباشرة
X(1,1)	X(1,1) ⇨ X(1,2) ⇨X(2,2) ⇨ X(2,1)	+7-3+6-4=6
X(1,3)	X(1,3) ⇨ X(2,3) ⇨X(2,2) ⇨ X(1,2)	+ 10 – 0 + 6– 3 =13
X(3,2)	X(3,2) ⇨ X(3,1) ⇨X(2,1) ⇨X(2,2)	+8 – 5 + 4– 6 = 1
X(3,3)	X(3,3) ⇨ X(3,1) ⇨X(2,1) ⇨ X(2,3)	+9 – 5 + 4 – 0 = 8

إن الكلفة الغير المباشرة للخلايا الغير المشغولة هي أرقام موجبة، لذلك فإن أشغال أي من هذه الخلايا سوف لن يخفض من التكاليف وبذلك يكون الحل للجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن التكاليف هي 152.

من ملاحظة الجدول الأخير الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة المسار الحرج هو نفس الجدول الذي تم الحصول عليه عند استخدامنا طريقة أقل الكلف وطريقة فوجل ما يدل على أن هاتين الطريقتين تعطي في أغلب الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل.

اساليب كمية – المحاضرة 10

2 ـ طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method

تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع من طريقة المسار المتعرج، إذ لا تتطلب رسم جميع المسارات المتعرجة مما يقلل من الجهد والوقت، كذلك تعتبر هذه الطريقة أكفأ ولها تطبيقات واسعة في حال استخدام الحاسبة الإلكترونية.

يمكن إتباع الخطوات الآتية لاستخدام هذه الطريقة:

1 ـ التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة تساوي $m + n – 1$.

2 ـ يتم تكوين معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي على أساس المعادلة الآتية:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

حيث:

U_i = المتغير الخاص بالصف i والذي تقع فيه الخلية المعنية.

V_j = المتغير الخاص بالعمود j والذي تقع فيه الخلية المعنية.

C_{ij} = كلفة الخلية التي تقع في الصف i والعمود j.

3 ـ إيجاد الحل للمعادلات المشغولة وحسب الصيغة التي تم ذكرها في الخطوة رقم 2.

4 ـ حساب الكلفة الغير المباشرة للخلايا الغير المشغولة وفقاً للمعادلة الآتية:

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

الكلفة الغير المباشرة للخلية

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون الكلفة الغير المباشرة لها سالبة، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتخفيض التكاليف، وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة ويستكمل الحل كما هو متبع في طريقة المسار المتعرج.

مثال (5):

مراكز تسويقية مراكز إنتاجية	1	2	3	العرض
1	7 18	3 4	10	22
2	4	6 18	0 6	24
3	5	8	9 14	14
الطلب	18	22	20	60

من جدول الحل الأولي والذي تم الحصول عليه بطريقة الركن الشمالي الغربي، أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

من الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة هي 5 وبذلك يتم تكوين خمسة معادلات وكالآتي:

$C_{11} = U_1 + V_1 = 7$ ..... (1)

$C_{12} = U_1 + V_2 = 3$ ... (2)

$C_{22} = U2 + V_2 = 6$ .... (3)

$C_{23} = U_2 + V_3 = 0$ ... (4)

$C_{33} + U_3 + V_3 = 9$ .... (5)

ولما كان عدد المتغيرات يزيد على عدد المعادلات ولغرض تسهيل عملية الحل، نفرض أن أحد المتغيرات يساوي صفر حتى نتمكن من إيجاد قيم المتغيرات الأخرى، ولنفرض أن U1 يساوي صفر ومن المعادلات سوف نحصل على النتائج الآتية:

$U_1 = 0$ $\quad\quad$ $V_1 = 7$

$U_2 = 3$ $\quad\quad$ $V_2 = 3$

$U_3 = 12$ $\quad\quad$ $V_3 = -3$

ويتم تقييم الخلايا الغير المشغولة وذلك بحساب الكلفة الغير المباشرة لكل خلية غير مشغولة وحسب العلاقة:

الكلفة الغير المباشرة

$$\overline{Cij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

الخلية الغير المشغولة	الكلفة الغير المبا $\overline{C_{ij}} = C_{ij} -(U_i + V_j)$
X(1,3)	$10 -(0 + (-3))= + 13$
X(2,1)	$4 -(3 + 7)= - 6$
X(3,1)	$5 -(12 + 7)= - 14$
X(3,2)	$8 -(12 + 3)= -7$

وبمقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع النتائج التي حصلنا عليها باستخدام طريقة المسار المتعرج نلاحظ تطابق هذه النتائج في الطريقتين.

من التكاليف الغير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(3,1) لها أكبر قيمة سالبة، لذلك يتم أشغالها بنقل كميات إليها وطبقاً لما تم شرحه في طريقة المسار المتعرج حيث يتم رسم مسار مغلق لتحديد عدد الوحدات الواجب نقلها، وهكذا يتم اختبار أمثلية الحل لكل جدول وبنفس الخطوات السابقة ولحين الحصول على الحل الأمثل حيث تكون التكاليف الكلية مساوية إلى 152.

مثال

أوجد الحل الأمثل لخطة النقل الأولية الآتية باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

أسواق / المعامل	1	2	3	العرض
1	8 150	6	5	150
2	6 50	6 100	6	150
3	10	8 100	4 50	150
4	8	6	4 150	150
الطلب	200	200	200	600

الحل:

نستخرج التكاليف الكلية لجدول الحل الأولي كالآتي:

$(150)\ (4) + (50)\ (4) + (100)\ (8) + (100)\ (6) + (50)\ (5) + (150)\ (8) = 3700$

من الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة هي 6 وبذلك يتم تكوين ستة معادلات وكالآتي:

$C_{11}= U_1 + V_1 = 8$ ..... (1)

$C_{21} = U_2 + V_1 = 6$ ... (2)

$C_{22} = U2 + V_2 = 6$ .... (3)

$C_{32} = U_3 + V_3 = 8$ ... (4)

$C_{33}+U_3 + V_3 = 4$ .... (5)

$C_{43}+U_4 + V_3 = 4$ .... (6)

ولنفرض أن U1 يساوي صفر، من المعادلات سوف نحصل على النتائج الآتية:

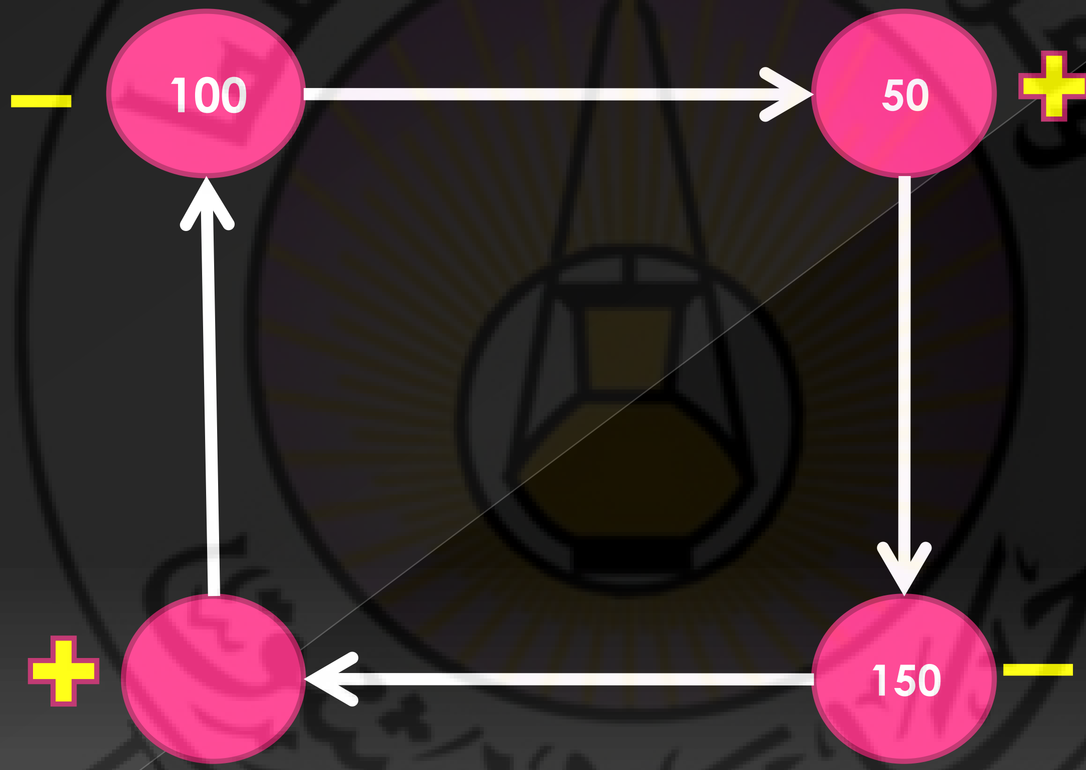
$V_1 = 8$	$U_1 = 0$
$V_2 = 8$	$U_2 = 2$
$V_3 = 4$	$U_3 = 0$
	$U_4 = 0$

ويتم تقييم الخلايا الغير المشغولة وذلك بحساب الكلفة الغير المباشرة لكل غير مشغولة وحسب العلاقة:

الكلفة الغير المباشرة $\overline{Cij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

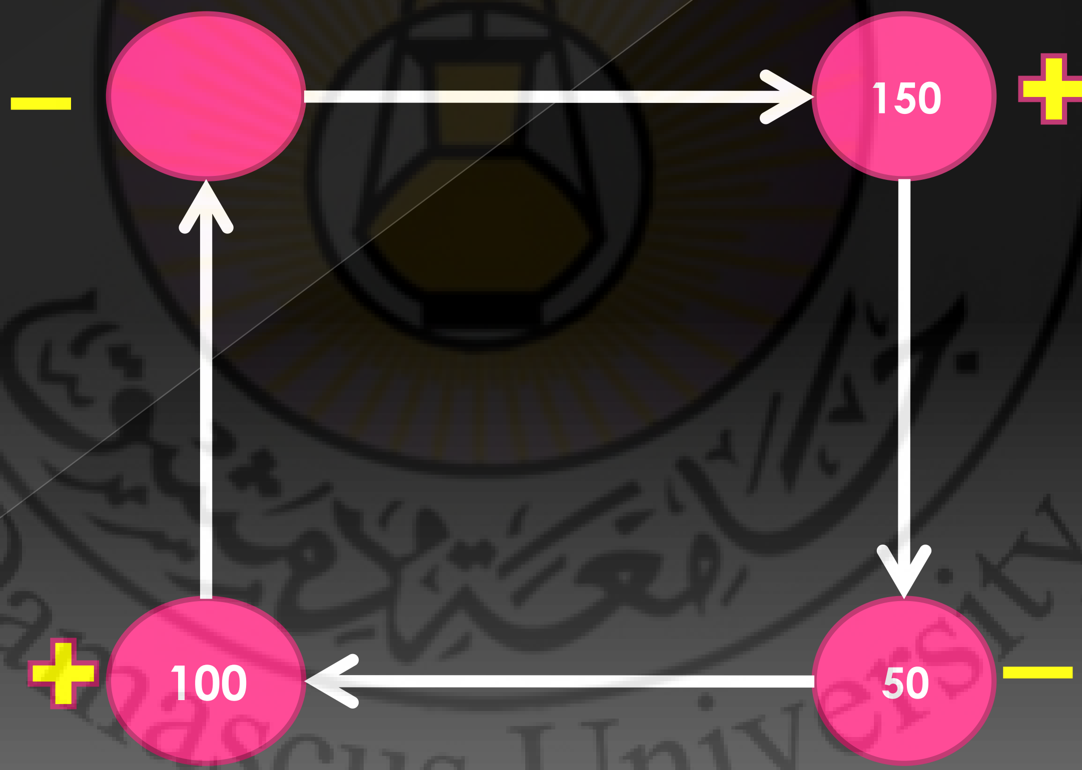
الكلفة الغير المباشرة $= C_{ij} - (U_i + V_j)$	الخلية الغير المشغولة
$6 - 0 - 8 = -2$	X(1,2)
$5 - 0 - 4 = 1$	X(1,3)
$6 - (-2) + 4 = 12$	X(2,3)
$10 - 0 - 8 = 2$	X(3,1)
$8 - 0 - 8 = 0$	X(4,1)
$6 - 0 - 8 = - 2$	X(4,2)

من التكاليف الغير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(1,2) والخلية X(4,2) لها قيم سالبة مقدارها (-2) لذلك يتم اختيارها أحدها عشوائياً ولتكن X(4,2) ويتم أشغالها بنقل كميات إليها حيث تتحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلال المسار المغلق على أساس أقل مقدار الخلية التي تحمل الإشارة السالبة، ويمكن تمثيل مسار الخلية X(4,2) كالآتي:



100
50
150

ان أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة (100) وحدة، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالآتي:



$$X(3,2) = 100 - 100 = 0$$
$$X(3,3) = 50 + 100 = 150$$
$$X(4,1) = 150 - 100 = 50$$

وكما يتضح في الجدول الآتي:

أسواق / المعامل	1	2	3	العرض
1	8 150	6	5	150
2	6 50	6 100	6	150
3	10	8	4 150	150
4	8	6 100	4 50	150
الطلب	200	200	200	600

نستخرج التكاليف الكلية للجدول كالآتي:

$(50)(4) + (100)(6) + (150)(4) + (100)(6) + (50)(6) + (150)(8) = 3500$

لقد تم تخفيض التكاليف الكلية بعد أن تم تعديل الجدول وأصبح 3500 أي هناك تخفيض في التكاليف بمقدار 200.

أن الحل المتحقق في الجدول قد يكون هو الحل الأمثل إلا أن ذلك يتطلب اختبار أمثلية الجدول الذي تم التوصل إليه طبقاً لنفس القواعد السابقة من الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة هي 6 وبذلك يتم تكوين ستة معادلات وكالآتي:

$C_{11} = U_1 + V_1 = 8$ ..... (1)

$C_{21} = U_2 + V_1 = 6$ ... (2)

$C_{22} = U2 + V_2 = 6$ .... (3)

$C_{33} = U_3 + V_3 = 4$ ... (4)

$C_{42} = U_4 + V_3 = 6$ .... (5)

$C_{43} = U_4 + V_3 = 4$ .... (6)

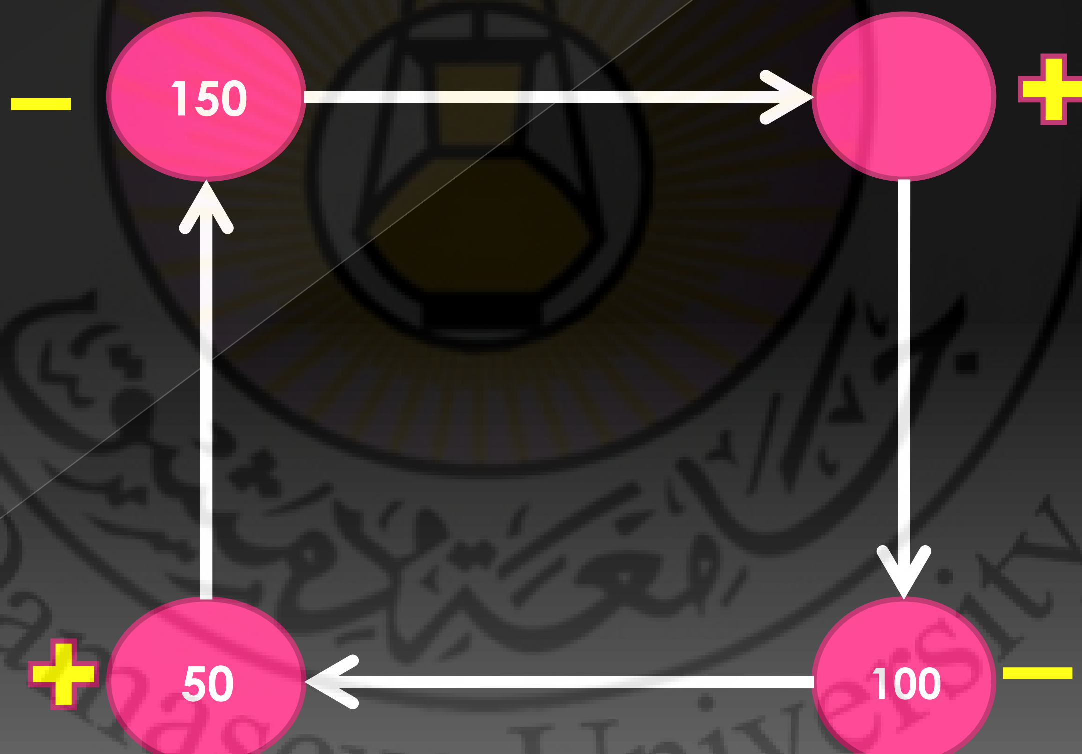
ولنفرض أن u1 يساوي صفر، من المعادلات سوف نحصل على النتائج الآتية:

$V_1 = 8$	$U_1 = 0$
$V_2 = 8$	$U_2 = -2$
$V_3 = 6$	$U_3 = -2$
	$U_4 = -2$

ويتم تقييم الخلايا الغير المشغولة وذلك بحساب الكلفة الغير المباشرة لكل غير مشغولة

الخلية الغير المشغولة	الكلفة الغير المباشرة $= C_{ij} - (U_i + V_j)$
X(1,2)	6 – 0 – 8 = -2
X(1,3)	5 - 0 – 6 = 1
X(2,3)	6 - (2-) – 6 = 2
X(3,1)	10 – (-2) – 8 = 2
X(3,2)	8 – (2-) – 8 = 2
X(4,1)	8 – (2-) – 8 = 2

من التكاليف الغير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(1,2) لها أكبر قيمة سالبة لذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف ويتم أشغالها بنقل كميات إليها حيث تتحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلال المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة، ويمكن تمثيل مسار الخلية X(1,2) كالآتي:



–
150
+
+
50
100
–

ان أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة (100) وحدة يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالآتي:

$X(1,1) = 150 – 100 = 50$

$X(1,2) = 100$

$X(2,1) = 50 + 100 = 150$

$X(2,2) = 100 – 100 = 0$

المعامل / أسواق	1	2	3	العرض
1	8 50	6 100	5	150
2	6 150	6	6	150
3	10	8	4 150	150
4	8	6 100	4 50	150
الطلب	200	200	200	600

نستخرج التكاليف الكلية للجدول كالآتي:

$$(50)(4) + (100)(6) + (150)(4) + (150)(6) + (100)(6) + (50)(8) = 3300$$

لقد تم تخفيض التكاليف الكلية بعد أن تم تعديل الجدول وأصبح 3300 أي هناك تخفيض في التكاليف بمقدار 200.

أن الحل المتحقق في الجدول قد يكون هو الحل الأمثل لاختبار أمثلية الجدول الذي تم التوصل إليه نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة هي 6 وبذلك يتم تكوين ستة معادلات وكالآتي:

$C_{11} = U_1 + V_1 = 8$ ..... (1)

$C_{12} = U_1 + V_2 = 6$ ... (2)

$C_{21} = U2 + V_1 = 6$ .... (3)

$C_{33} = U_3 + V_3 = 4$ ... (4)

$C_{42} = U_4 + V_3 = 6$ .... (5)

$C_{43} = U_4 + V_3 = 4$ .... (6)

ولنفرض أن U1 يساوي صفر، من المعادلات سوف نحصل على النتائج الآتية:

$V_1 = 8$ $\quad$ $U_1 = 0$

$V_2 = 6$ $\quad$ $U_2 = -2$

$V_3 = 4$ $\quad$ $U_3 = 0$

$U_4 = 0$

ويتم تقييم الخلايا الغير المشغولة وذلك بحساب الكلفة الغير المباشرة لكل خلية غير مشغولة

الخلية الغير المشغولة	الكلفة الغير المباشرة $= C_{ij} - (U_i + V_j)$
X(1,3)	5 – 0 – 4 = 1
X(2,2)	6- (-2) – 6 = 2
X(2,3)	6 – (-2) – 4 = 4
X(3,1)	10 – 0 – 9 = 2
X(3,2)	8 – 0 – 6 = 2
X(4,1)	8- 0 – 8 = 0

أن الكلفة الغير المباشرة للخلايا الغير المشغولة هي أرقام موجبة، لذلك فإن أشغال أي من هذه الخلايا سوف لن ينخفض من التكاليف وبذلك يكون الحل للجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن التكاليف هي 3300.

أساليب كمية – المحاضرة 11

حالات خاصة لمسائل النقل

1- حالة عدم توازن مسألة النقل :

و هنا نصادف إحدى الحالتين التاليتين :

أ- <u>الكميات المعروضة أكبر من الكميات المطلوبة :</u>

و في هذه الحالة نضيف عمود وهمي (مركز طلب وهمي) تكون الكمية المطلوبة فيه تساوي الفرق بين الكميات المعروضة والكميات المطلوبة ,و أما تكاليف النقل في خلايا العمود الوهمي المضاف فهي أصفار .

مثال

لدينا جدول (مصفوفة) النقل التالي :

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	العرض
1	5	1	3	500
2	2	4	1	300
3	3	5	2	200
الطلب	300	300	200	1000 / 800

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	4	العرض
1	5	1	3	0	500
2	2	4	1	0	300
3	3	5	2	0	200
الطلب	300	300	200	300	1000 / 1000

- **<u>الكميات المطلوبة أكبر من الكميات المعروضة :</u>**

و في هذه الحالة نضيف صف وهمي (مركز عرض وهمي) تكون الكمية المعروضة فيه تساوي الفرق بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة ,و أما تكاليف النقل في خلايا الصف الوهمي المضاف فهي أصفار .

مثال

م. توزيع / م. انتاج	1	2	3	4	العرض
1	12	13	4	6	500
2	6	4	10	11	700
3	10	9	12	4	800
الطلب	400	900	200	600	2000 / 2100

م. توزيع / م. انتاج	1	2	3	4	العرض
1	12	13	4	6	500
2	6	4	10	11	700
3	10	9	12	4	800
4	0	0	0	0	100
الطلب	400	900	200	600	2100 / 2100

م. توزيع / م. انتاج	1	2	3	4	العرض
1	12 400	13 100	4	6	500
2	6	4 700	10	11	700
3	10	9 100	12 200	4 500	800
4	0	0	0	0 100	100
الطلب	400	900	200	600	2100 / 2100

تكلفة النقل الإجمالية بعد التوزيع وفق طريقة الركن الشمالي غربي = 14200

و نطور الحل كالعادة وفق طريقة المسار المتعرج فنجد

أن الخلية x13أشد سلبية = 12- و الكميات المنقولة = 100

م. توزيع / م. انتاج	1	2	3	4	العرض
1	12 400	13	4 100	6	500
2	6	4 700	10	11	700
3	10	9 200	12 100	4 500	800
4	0	0	0	0 100	100
الطلب	400	900	200	600	2100 / 2100

تكلفة النقل الإجمالية بعد تطوير الحل = 13000

و نختبر الحل من جديد و نأخذ الخلية X31

م. توزيع / م. انتاج	1	2	3	4	العرض
1	12 300	13	4 200	6	500
2	6	4 700	10	11	700
3	10 100	9 200	12	4 500	800
4	0	0	0	0 100	100
الطلب	400	900	200	600	2100 / 2100

تكلفة النقل الإجمالية بعد تطوير الحل =12000

و نختبر الحل من جديد و نأخذ الخلية X41

م. توزيع / م. انتاج	1	2	3	4	العرض
1	12 300	13	4 200	6	500
2	6	4 700	10	11	700
3	10	9 200	12	4 600	800
4	0 100	0	0	0	100
الطلب	400	900	200	600	2100 / 2100

- التكلفة الاجمالية = 11400

2- حالة عدم تحقق الشرط :
عدد الخلايا المشغولة=m+n-1

يحدث ذلك في الحالات التالية:

- عندما تكون الكميات المطلوبة مساوية للكميات المعروضة في خلية

أي شطب سطر و عمود معا

- عندما تكون الكميات التي تقع عند الزوايا السالبة للمسارالمختبر هي كميات متساوية

عندما تكون الكميات المطلوبة مساوية للكميات المعروضة في خلية

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	العرض
1	1	2	6	120
2	4	3	2	50
3	5	1	2	70
الطلب	100	20	120	240 / 240

المطلوب ايجاد الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الغربي

و تطوير هذا الحل

الحل

- العرض = الطلب

مراكز التوزيع / مراكز الانتاج	1	2	3	العرض
1	1 100	2 20	6	120
2	4	3	2 50	50
3	5	1	2 70	70
الطلب	100	20	120	240 240

نجد أن التكلفة الاجمالية = 380

هل هي أقل تكلفة؟

لذلك يجب اختبار الحل و تطويره

الشرط بأن عدد الخلايا المشغولة = m+n-1

نجد 5≠4 و الشرط غير محقق و من أجل تجاوز هذا الخلل

نضيف قيمة صفرية في خلية(بذلك تصبح خلية مشغولة) مجاورة لخلية الخلل اما في صفها أو عمودها

أما خلية الخلل فهي :

التي يتساوى عندها العرض مع الطلب حيث تم تلبية الطلب بالعرض المتاح و شطب السطر و العمود معا

و في مثالنا ان خلية الخلل هي X12 حيث يوجد لدينا خليتين مجاورتين لخلية الخلل هذه لذلك يجب ملء احداها بصفر بشرط أن تحقق الشرطين السابقين

و هذان الشرطان ينطبقان على الخلية الفارغة X22 أكثر من انطباقهما على الخلية الفارغة X13

و نضع صفر و نكمل الحل باختبار الخلايا الباقية الفارغة فنجدها أنها موجبة و الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل

2- عندما تكون الكميات التي تقع عند الزوايا السالبة للمسار المختبر هي كميات متساوية

يمكن أن يكون الشرط في بداية اختبار الحل محقق و لكن يحدث أنه في أثناء تطوير الحل و رسم مسار لإحدى الخلايا الفارغة المختبرة

تكون الكميات المتواجدة عند الزوايا السالبة للمسار متساوية و الخلل سيحصل بأن عدد الخلايا المشغولة سوف ينقص عن الشرط و بالتالي نصبح في حالة عدم تحقق الشرط و يعالج هذا الخلل كما في الحالة السابقة

أساليب كمية – المحاضرة 12

مشاكل التخصيص

ASSIGNMENT PROBLEMS

تعتبر مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية التي تتعلق بتحديد أفضل توزيع كتوزيع المدراء على المشاريع أو الباعة على المناطق الجغرافية المحلية أو العقود على المتعهدين أو الأعمال على الآلات أو تخصيص المحامين على الزبائن وغيرها، وغالباً ما يكون هدف التخصيص هو تخفيض التكاليف الكلية أو الزمن الكلي لإنجاز مهام معينة، كما يمكن اعتبار مشكلة التخصيص حالة خاصة من حالات مشكلة النقل، إلا أنها تختلف عنها بأن عملية التخصيص تتم على أساس تخصيص عامل واحد لعمل واحد، بائع واحد لمنطقة جغرافية واحدة ومدير واحد لمشروع واحد.

وتستند طرق حل مشكلة التخصيص على أربعة فروض أساسية، أولها أن عدد الوسائل يساوي عدد المهام أي أن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة، أما الفرض الثاني فهو تخصيص كل وسيلة لمهمة واحدة فقط، أي لا يمكن تكليف شخص واحد للقيام بأكثر من مهمة فضلاً عن الفرضيتين الثالثة والرابعة اللتان تشيران إلى أن تكون التكاليف محددة مسبقاً وتوفر شرط عدم السلبية Non – negative.

طرق حل مشاكل التخصيص

1- طريقة العد الكامل Complete Enumeration
2- الطريقة الهنكارية .Hungaretion Method
3- طريقة البرمجة الخطية Linear Programming Method
4- طريقة النقل Transportation Method

1- طريقة العد الكامل

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على تعداد جميع بدائل التخصيص المحتملة ثم نختار التخصيص الذي يعطي أقل تكاليف خدمة ممكنة.

إن عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي مضروب Factorial (!) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة فإذا كان عدد الصفوف يساوي 3 مثلاً فإن $6 = 1 \times 2 \times 3 = !3$ أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص، ويمكن توضيح هذه الطريقة بالاستعانة بالمثال الآتي:

مثال (1)

- إذا توفر لدينا ثلاثة أجهزة لإنجاز ثلاثة وظائف مختلفة وأعطيت لنا المعلومات الواردة في الجدول الآتي عن تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة المطلوب استخدام طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تخصيص لتقليل التكاليف.

		الوظائف		
		1	2	3
	A	19	11	17
الأجهزة	B	13	7	11
	C	11	5	13

الحل:

تجري عملية التخصيص وفق طريقة التوافيق المختلفة وذلك بتسجيل جميع البدائل الممكنة مع التكاليف المقابلة لكل بديل، فإذا تم تخصيص A لإنجاز الوظيفة الأولى وB لإنجاز الوظيفة الثانية وC لإنجاز الوظيفة الثالثة فإن إجمالي التكاليف تكون 19 + 13 + 11 + 45 والجدول أدناه يوضح جميع البدائل الممكنة لعملية التخصيص.

حلول التخصيص	الأجهزة			التكاليف الإجمالية
	A	B	C	
1	1	2	3	19+7+13=39
2	1	3	2	19+5+11=35
3	2	1	3	11+13+13=37
4	2	3	1	11+11+11=33
5	3	1	2	17+13+5=35
6	3	2	1	17+7+11=35

أقل كلفة إجمالية

إن الحل الأمثل هو التخصيص رقم (4) حيث خصص الجهاز A لإنجاز الوظيفة الثانية والجهاز B للوظيفة الثالثة والجهاز C للوظيفة الأولى وبكلفة إجمالية للخدمة المقدمة قدرها 33 وحدة نقدية .

تعتبر طريقة العد الكامل المذكورة أعلاه سهلة الاستعمال في المشاكل البسيطة ولكنها ليست عملية في حل مشاكل التخصيص الكبيرة، فلو كانت مشكلة تخصيص تحتوي على 6 صفوف مثلاً فعلينا في هذه الحالة اعتبار

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

حلاً بديلاً.

ومن الواضح عدم إمكانية تعداد جميع الحلول المحتملة بالطريقة اليدوية، وحتى في حال استخدام الحاسبات الالكترونية فإن عملية المقارنة لاختيار البديل الأفضل تأخذ الكثير من الجهد والوقت.

2 ـ الطريقة الهنغارية

- إن الصعوبات الحسابية للطريقة السابقة أدى إلى تطوير أسلوب يعد أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل لمشاكل التخصيص يعرف بالطريقة الهنكارية دون الحاجة إلى مقارنة البدائل المتاحة.
- تعتمد الطريقة الهنكارية على أسلوب تنقيص المصفوفة Matrix Reduction والذي يعني إذا طرحنا (أو أضفنا) قيمة ثابتة من جميع عناصر صف أو عمود لمصفوفة التخصيص فإن الكلفة الإجمالية لكل تخصيص (بديل) محتمل من n! من التخصيصات المحتملة ستنقص (أو تزداد) بمقدار القيمة الثابتة المطروحة (أو المضافة).

الخطوات المتبعة في تطبيق الطريقة الهنغارية

1 ـ طرح الصفوف: تأخذ أقل قيمة في كل صف ونطرحها من قيم ذلك الصف ولجميع الصفوف.

2 ـ طرح الأعمدة: نأخذ أقل قيمة في كل عمود ونطرحها من قيم ذلك العمود ولجميع الأعمدة.

3 ـ تغطية العناصر الصفرية، نغطي الأصفار في المصفوفة الناتجة من عملية طرح الصفوف وعملية طرح الأعمدة وذلك بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو العمودية.

4 - إذا كان عدد الخطوط التي تغطي الأصفار سواء كانت أفقية أو عمودية مساوياً لعدد الصفوف أو الأعمدة فأننا نقوم بعملية التخصيص وتتم هذه العملية بأن نأخذ الأصفار التي تقع على تقاطع الصفوف والأعمدة (نقاط الالتقاء) وذلك لأن هذه الأصفار تمثل أقل التكاليف، وثم نقوم بعملية التخصيص على أساس واحد لواحد أي وظيفة واحدة لجهاز واحد مثلاً.

5 - إذا كان عدد الخطوط التي تغطي الأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة فأننا لا نستطيع في هذه الحالة القيام بإجراء جميع التخصيصات اللازمة، وحتى نقوم بهذه التخصيصات

فأننا نقوم باختيار أقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من باقي القيم غير المغطاة حيث تصبح هي من نقاط التقاطع (الالتقاء) للخطوط المأخوذة في تغطية الأصفار، ونضيفها إلى نقاط تقاطع الخطوط.

6 ـ الاستمرار في الخطوات (3 ـ 5) حتى إنهاء عملية التخصيص.

وسيتم توضيح هذه الخطوات على مصفوفة مشكلة التخصيص في المثال السابق.

		الوظائف		
		1	2	3
	A	19	11	17
جهزة	B	13	7	11
	C	11	5	13

1 ـ طرح الصفوف:

أجهزة \ وظائف	1	2	3
A	8	0	6
B	6	0	4
C	6	0	8

2 - طرح الأعمدة

وظائف / أجهزة	1	2	3
A	2	0	2
B	0	0	0
C	0	0	4

3 ـ تغطية الأصفار

وظائف / أجهزة	1	2	3
A	2	0	2
B	0	0	0
C	0	0	4

4 ـ اختبار الحل: عدد الخطوط يساوي عدد الصفوف لذلك نقوم بعملية التخصيص

1 ـ نقوم بتخصيص الوظيفة (2) إلى الجهاز A لأنه الصفر الوحيد في الصف الأول ثم نقوم بحذف العمود الثاني لأنه لا يمكن إنجاز وظيفة واحدة بأكثر من جهاز.

2 ـ نقوم بتخصيص الوظيفة (1) إلى الجهاز C لأنه الصفر الوحيد المتبقي في الصف الثالث بعد ذلك نحذف العمود الأول.

3 ـ نقوم بتخصيص الوظيفة (3) إلى الجهاز B لأنه الصفر المتبقي.

الكلفة الكلية لهذا الحل يمكن الحصول عليها من المصفوفة الأصلية للكلفة وكما يلي:

$$11 + 11 + 11 = 33$$

مثال (2)

المشاريع / المدراء	1	2	3	4
A	3	5	7	1
B	9	8	12	10
C	13	8	14	2
D	5	7	10	6

بعد إجراء خطوتي طرح الصفوف وطرح الأعمدة تكون مصفوفة التكاليف كما يلي:

المشاريع / المدراء	1	2	3	4
A	2	4	2	0
B	1	0	0	2
C	11	6	8	0
D	0	2	1	1

بعد إجراء خطوتي طرح الصفوف وطرح الأعمدة تكون مصفوفة التكاليف كما يلي:

المشاريع / المدراء	1	2	3	4
A	2	4	2	0
B	1	0	0	2
C	11	6	8	0
D	0	2	1	1

العناصر الصفرية في هذه المصفوفة يمكن تغطيتها بثلاثة خطوط وهذا يعني بأن عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف أي أننا لم نصل إلى الحل الأمثل لذلك نذهب إلى الخطوة (5) نختار أقل قيمة من القيم الغير مغطاة ونطرحها من القيم غير المغطاة ونضيفها إلى نقاط تقاطع الخطوط، ثم نعود إلى الخطوط (3).

إن أصغر قيمة غير مغطاة في هذه المصفوفة هي (1) وبتطبيق الخطوة (5) نحصل على مصفوفة التكاليف التالية:

المدراء \ المشاريع	1	2	3	4
A	2	3	1	0
B	2	0	0	3
C	11	5	7	0
D	0	1	0	1

وعند تغطية القيم الصفرية نجد أن عدد الخطوط لا يساوي عدد الصفوف لذلك نعيد تطبيق الخطوة (5).

أن أصغر قيمة غير مغطاة في هذه المصفوفة هي (1) وبتطبيق الخطوة (5) تحصل على مصفوفة التكاليف التالية:

المشاريع / المدراء	1	2	3	4
A	1	2	0	0
B	2	0	0	4
C	10	4	6	0
D	0	1	0	2

المشاريع / المدراء	1	2	3	4
A	**1**	**2**	**0**	**0**
B	**2**	**0**	**0**	**4**
C	**10**	**4**	**6**	**0**
D	**0**	**1**	**0**	**2**

وعند تغطي القيم الصفرية نجد أن عدد الخطوط يساوي عدد الصفوف أي أن الحل الأمثل يمكن الوصول إليه بتطبيق عملية التخصيص، ويكون الحل الأمثل هو بتخصيص المدراء (D, C, B, A) للأشراف على المشاريع (1, 4، 2، 3) على التوالي عند اختبار التخصيصات البديلة الأخرى نجد أن هذا التخصيص هو الوحيد الأمثل.

الكلفة الكلية لهذا الحل الأمثل يمكن الحصول عليها من المصفوفة الأصلية للكلفة.

$$5 + 8 + 7 + 2 = 22$$

الحالات الخاصة لمشاكل التخصيص

1. الحالات غير المتزنة

يشترط في استخدام الطريق الهنغارية أن يكون عدد الصفوف m يساوي عدد الأعمدة n و في حالة عدم مساواة الصفوف مع الأعمدة أي $m \neq n$ فيتم معالجة المشكلة كالتالي:

- إذا كانت $(m < n)$ يتم إضافة بعض الصفوف الوهمية بكلف أو إيرادات صفرية. فإذا كانت مصفوفة تكاليف نختار أصغر قيمة في كل صف بحيث نحصل على صفر واحد في الصف نفسه.
- إذا كانت $(m > n)$ يتم إضافة بعض الأعمدة الوهمية بكلف أو إيرادات صفرية. فإذا كانت مصفوفة تكاليف فنختار أصغر قيمة في كل عمود بحيث نحصل على صفر واحد في العمود نفسه .

ثم نتم الحل بالطريقة الاعتيادية.

مثال:

جد أفضل تخصيص للفنيين ، بحيث تكون التكاليف المتحققة أقصى ما يمكن، مستخدما الطريقة الهنغارية.

المكائن / الفنيين	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50

الحل:

1- بما إن (m<n) يضاف صف (4) وهمي لتصبح المصفوفة مربعة كالتالي:

W \ M	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50
4	0	0	0	0

2- نختار أصغر قيمة في كل صف و نطرحهما من بقية القيم في الصف لنحصل على:

W \ M	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

3- نغطي الأعمدة والصفوف التي تضم أصفار بخطوط :

W \ M	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

3- بما أن عدد الخطوط يساوي 4 وهو يساوي عدد الأعمدة و الصفوف يكون التخصيص الأمثل كالتالي:

الفنيين	المشروع	التكاليف
1	B	40
2	D	50
3	C	50
4	A	0

140=مجموع التكاليف =40+ 50 +50 +0

الحالات الخاصة لمشاكل التخصيص

2. إذا كان الهدف من التخصيص تعظيم الأرباح أو كفاءة الأداء نقوم بالآتي:

- يتم تحويل الحالة إلى حالة تقليل عن طريقة إيجاد الكلف النسبية. حيث يتم إيجاد الكلف النسبية من خلال طرح كل قيم المصفوفة من اكبر قيمة فيها ثم نتابع الحل بالطريقة الاعتيادية.

مثال4:

جد أفضل تخصيص للفنيين ، بحيث تكون الأرباح المتحققة أقصى ما يمكن ، مستخدما الطريقة الهنغارية.

الفنيين \ المكائن	A	B	C
1	1	4	7
2	8	3	1
3	5	6	2
4	4	1	7

الحل:

1- بما إن (m>n) يضاف ماكينة (D) واحدة وهمية لتصبح المصفوفة مربعة كالتالي:

W \ M	A	B	C	D
1	1	4	7	0
2	8	3	1	0
3	5	6	2	0
4	4	1	7	0

2- نجد مصفوفة الكلف النسبية بطرح كل القيم من اكبر قيمة في المصفوفة و البالغة (8) ثم نحصل على الجدول التالي:

W \ M	A	B	C	D
1	7	4	1	8
2	0	5	7	8
3	3	2	6	8
4	4	7	1	8

3- نختار اصغر قيمة في كل صف ثم نطرحها من كل القيم في ذلك الصف:

W \ M	A	B	C	D
1	6	3	0	7
2	0	5	7	8
3	1	0	4	6
4	3	6	0	7

4- نطرح اقل رقم من العمود (D) من بقية الأرقام للحصول على أصفار في هذا العمود كالتالي:

W \ M	A	B	C	D
1	6	3	0	1
2	0	5	7	2
3	1	0	4	0
4	3	6	0	1

5- بعد تغطية الأصفار نلاحظ أن عدد المستقيمات لا يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة لذلك نقوم بتحديد اصغر رقم غير مغطى (1) وطرحه من الأرقام غير المغطاة (1,2,3,5,1,6) وإضافته إلى الأرقام الواقعة على نقاط التقاطع (1,4) و نحصل :

W \ M	A	B	C	D
1	6	2	0	0
2	0	4	7	1
3	2	0	5	0
4	3	5	0	0

6- لما كان عدد المستقيمات = عدد الصفوف أصبح بالإمكان إجراء عملية التخصيص والتي تبدأ في الصف الذي يكون فيه الصفر وحده ثم نتبع الأصفار الأخرى.

الفني	الماكينة
2	A
1	C
3	B
4	D

مجموع العوائد =8+7+6+0=21

أساليب كمية – المحاضرة 13

قضية البحار (التاجر) المسافر (مندوب المبيعات)

-تقوم فكرة البحار المسافر على أن هناك فرداً ما يريد زيارة عدد من النقاط (n) انطلاقاً من نقطة ما بشرط أن يزور جميع النقاط قبل العودة الى نقطة الانطلاق المختارة, بهدف ان تكون تكلفة الرحلة أقل ما يمكن (قد يكون زمن الرحلة أيضاً أقل ما يمكن).

-ليس بالضرورة أن تكون تكلفة الانتقال من النقطة (i) الى النقطة (j) أي C_{ij} تساوي تكلفة الانتقال من النقطة (j) الى النقطة (i) أي C_{ji}.

-تصاغ مسألة البحار المسافر على شكل جدول يشبه مسألة التخصيص والتعيين وبدلاً من أن نضع فيه تكلفة تنفيذ المهمة (الوظيفة) نضع هنا تكلفة الانتقال بين النقاط.

-في الجدول نشطب عناصر القطر الرئيسي حيث أنه لا يمكن أن ننطلق من نقطة ما لنعود الى نفس النقطة.

-القاعدة في حل هذه المسائل هو اتباع خوارزمية أقرب جار (أصغر وصلة) مع الأخذ بعين الاعتبار ألا يتم اغلاق خط الرحلة قبل المرور على جميع النقاط والوصول الى نقطة الانطلاق الأولى.

خطوات الحل:

خطوات الحل هي وفق خوارزمية أقرب جار.

1. يتم صياغة المسألة بالشكل القياسي , أي تصاغ على شكل جدول أسطره وأعمدته تمثل نقاط الانطلاق والوصول , أما الأرقام التي في الجدول فتمثل كلفة الانتقال من النقطة i إلى j

2-نختار أدنى تكلفة في الجدول ونقوم بتأشيرها وتعد هذه النقطة هي نقطة بداية الرحلة ثم نشطب سطرها وعمودها والتكلفة المناظرة لها وذلك لضمان عدم العودة الى نقطة البداية قبل المرور بجميع النقاط

3-نختار أصغر تكلفة غير مؤشرة سابقاً (التكلفة التي تليها) ونتأكد من أنها لا تغلق خط الرحلة, فاذا كانت تغلق خط الرحلة نقوم بشطبها وننتقل للتكلفة التي تليها

4-نكرر الخطوة رقم (3) حتى يمر المسافر ععلى باقي النقاط ويعود الى نقطة الانطلاق الأولى

5-نقوم بحساب تكلفة الرحلة من خلال جمع التكاليف المؤشرة سابقاً

✓ مثال:

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4
1	——	30	26	50
2	25	——	50	60
3	33	20	——	28
4	65	45	27	——

قمنا بشطب عناصر القطر الرئيسي

1-أدنى تكلفة في الجدول هي $C_{32} = 20$ وتعتبر نقطة الانطلاق الأولى, نقوم بشطب السطر الثالث والعمود الثاني ونحذف التكلفة المناظرة لها وهي $C_{23} = 50$ وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 3 الى نقطة الوصول 2 $(3 \rightarrow 2)$ ويصبح

الجدول:

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4
1	——	30	26	50
2	25	——	~~50~~	60
3	33	20	——	28
4	65	45	27	——

2-أدنى تكلفة في الجدول تليها هي $C_{21} = 25$, نقوم بشطب السطر الثاني والعمود الأول ونحذف التكلفة المناظرة لها وهي $C_{12} = 30$ وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 2 الى نقطة الوصول 1 $(2 \to 1)$ ويصبح الجدول:

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4
1	——	~~30~~	26	50
2	25	——	~~50~~	60
3	33	20	——	28
4	65	45	27	——

3-أدنى تكلفة في الجدول تليها هي $C_{13} = 26$, نقوم بشطب السطر الأول والعمود الثالث ونحذف التكلفة المناظرة لها وهي $C_{31} = 33$ وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 1 الى نقطة الوصول 3 $(1 \to 3)$ ويصبح الجدول:

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4
1	——	~~30~~	26	50
2	25	——	~~50~~	60
3	~~33~~	20	——	28
4	65	45	27	——

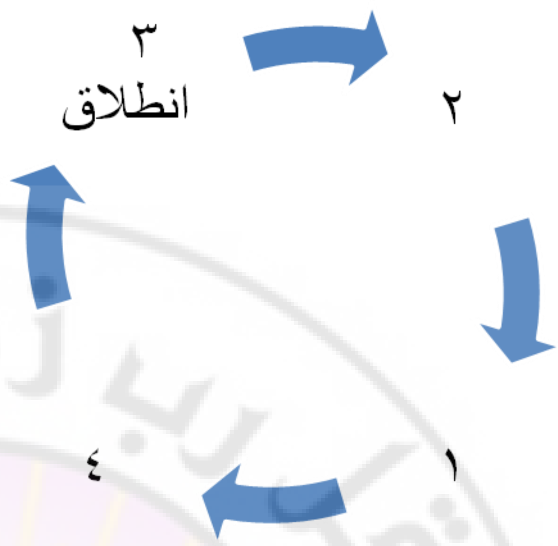
4-لكن نلاحظ أن المسار 26 أغلق الرحلة ولم نمر على النقطة 4 وبالتالي نحذف التكلفة 26 لأنها أغلقت مسار الرحلة (أي نتجاهل الخطوة الثالثة السابقة) ونأخذ التكلفة التي تليها وهي $C_{43} = 27$ حيث نقوم بشطب السطر الرابع والعمود الثالث ونحذف التكلفة المناظرة لها $C_{34} = 28$ وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 4 الى نقطة الوصول 3 $(4 \to 3)$ ويصبح الجدول:

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4
1	——	~~30~~	~~26~~	50
2	25	——	~~50~~	60
3	33	20	——	~~28~~
4	65	45	27	——

5-أدنى تكلفة في الجدول تليها هي $C_{14} = 50$, نقوم بشطب السطر الأول والعمود الرابع ونحذف التكلفة المناظرة لها وهي $C_{41} = 65$ وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 1 الى نقطة الوصول 4 $(1 \to 4)$ ويصبح الجدول:

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4
1	——	~~30~~	~~26~~	50
2	25	——	~~50~~	60
3	33	20	——	~~28~~
4	~~65~~	45	27	——

الآن نرسم مسار الرحلة: حيث انطلقنا من النقطة 3 ثم الى النقطة 2 ثم من النقطة 2 الى النقطة 1, ثم من النقطة 4 الى النقطة 3, ثم من النقطة 1 الى النقطة 4 :



أغلقنا مسار الرحلة ومررنا بجميع النقاط (وننوه أنها سلسلة غير متصلة أثناء الحل وانما يجب أن تكون متصلة بالنهاية)

نحسب التكلفة الاجمالية وتساوي مجموع أصغر التكاليف

$$C = C_{32} + C_{21} + C_{43} + C_{14} = 20 + 25 + 27 + 50 = 122$$

مثال آخر بسيط: مسافر يرغب بتحديد مسار رحلته لزيارة أربعة موانئ سياحية وكلفة الانتقال معطاة بالجدول التالي:

نقاط وصول / نقاط انطلاق	1	2	3	4
1	—	30	40	80
2	25	—	50	60
3	33	20	—	28
4	65	45	27	—

المطلوب: تحديد مسار الرحلة وحساب تكلفتها.

-أدنى تكلفة في الجدول هي $C_{32} = 20$ وتعتبر نقطة الانطلاق الأولى, نقوم بشطب السطر الثالث والعمود الثاني ونحذف التكلفة المناظرة لها وهي $C_{23} = 50$ وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 3 الى نقطة الوصول 2 $(3 \to 2)$ ويصبح الجدول:

نقاط وصول / نقاط انطلاق	1	2	3	4
1	—	30	40	80
2	25	—	~~50~~	60
3	33	20	—	28
4	65	45	27	—

-أدنى تكلفة في الجدول تليها هي $C_{21} = 25$, نقوم بشطب السطر الثاني والعمود الأول ونحذف التكلفة المناظرة لها وهي $C_{12} = 30$ (محذوفة أساساً) وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 2 الى نقطة الوصول1 $(2 \to 1)$ ويصبح الجدول:

نقاط وصول	1	2	3	4

نقاط انطلاق				
1	——	~~30~~	40	80
2	25	——	~~50~~	60
3	33	20	——	28
4	65	45	27	——

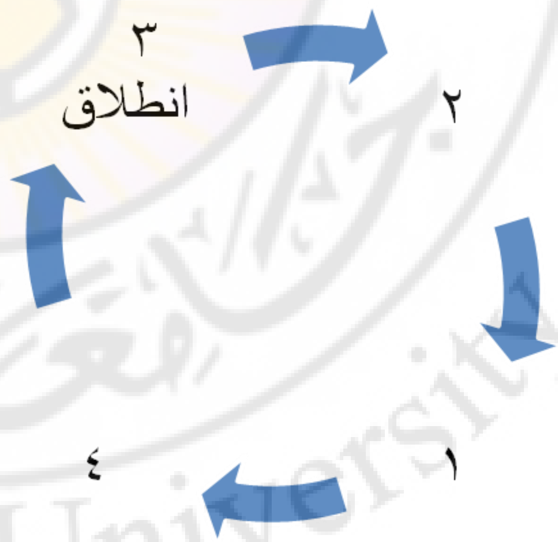
-ونأخذ التكلفة التي تليها وهي $C_{43} = 27$ حيث نقوم بشطب السطر الرابع والعمود الثالث ونحذف التكلفة المناظرة لها $C_{34} = 28$ (محذوفة أساساً) وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 4 الى نقطة الوصول 3 $(4 \to 3)$ ويصبح الجدول:

نقاط وصول / نقاط انطلاق	1	2	3	4
1	——	~~30~~	40	80
2	25	——	~~50~~	60
3	33	20	——	~~28~~
4	65	45	27	——

-أدنى تكلفة في الجدول تليها هي $C_{14} = 80$, نقوم بشطب السطر الأول والعمود الرابع ونحذف التكلفة المناظرة لها وهي $C_{41} = 65$ (محذوفة أساساً) وبالتالي نحن انطلقنا من نقطة الانطلاق 1 الى نقطة الوصول 4 $(1 \to 4)$ ويصبح الجدول:

نقاط وصول / نقاط انطلاق	1	2	3	4
1	——	~~30~~	40	80
2	25	——	~~50~~	60
3	33	20	——	~~28~~
4	~~65~~	45	27	——

الآن نرسم مسار الرحلة: حيث انطلقنا من النقطة 3 ثم الى النقطة 2 ثم من النقطة 2 الى النقطة 1, ثم من النقطة 4 الى النقطة 3, ثم من النقطة 1 الى النقطة 4 :



نحسب التكلفة الاجمالية وتساوي مجموع أصغر التكاليف

$$C = C_{32} + C_{21} + C_{43} + C_{14} = 20 + 25 + 27 + 80 = 152$$

بحث الشبكات

سوف ندرس في الشبكات الخوارزميات الأربعة وهي:

1-خوارزمية أقصر شبكة (الشبكة المثلى)

2-خوارزمية أقصر مسار على الشبكات التي لا تسمح بالدوران

3-خوارزمية أقصر مسار على الشبكات التي تسمح بالدوران

4-خوارزمية التدفق الأعظمي

في الشبكات:

-كل نقطة من النقاط يرمز لها بدائرة ويسجل في هذه الدائرة اسم النقطة.

-يصل بين النقاط خطوط مستقيمة وهذه الخطوط تبين امكانية الوصل بين النقطتين وليس المسافة بين النقطتين, بينما المسافة بين النقطتين تُسجل على هذه الخطوط.

أولاً: خوارزمية أقصر شبكة (الشبكة المثلى): تهدف الى ايجاد مجموعة الأقواس (المسارات) التي تربط جميع نقاط الشبكة بحيث يكون أطوال هذه الأقواس أقل ما يمكن min وهي تشبه قضية البحّار المسافر الا أننا لا نريد تشكيل حلقة أثناء الحل (ممكن أن تبقى الشبكة مفتوحة).

وبذلك يقول البعض أن الشبكة المثلى (ويطلق عليها أيضاً بـ **النطاق الأدنى**) بأنها تشبه الشجرة العارية , حيث أن الشجرة العارية يوجد لها فروع وأغصان , وتكون نهايات هذه الأغصان طليقة وحرة وليست موصولة بجذور الشجرة من جديد.

طريقة الحل:

كما ذكرنا أن الهدف الأساسي هنا هو فقط ربط جميع النقاط ببعضها وذلك بأقل ما يمكن من التكلفة أو المسافة أو الزمن...

وبالتالي فإنا اختيار أي نقطة لتكون نقطة الانطلاق لا يؤثر على الحل الأمثل , أي سنصل إلى الحل الأمثل ذاته , وتقوم الشبكة المثلى على مبدأ أقرب جار , بحيث أن كل نقطة من النقاط نصلها بالشبكة من أقرب نقطة من النقاط المتصلة بالشبكة.

نشكل مجموعتين من النقاط :

- **المجموعة الأولى** وهي مجموعة النقاط المتصلة ويطلق عليها C , وفي البداية تكون هذه المجموعة خالية :

$$C = \{\emptyset\}$$

- **المجموعة الثانية** وهي مجموعة النقاط غير المتصلة ونطلق عليها $\bar{C}$, وفي البداية تضم هذه المجموعة جميع النقاط التي تكون الشبكة :

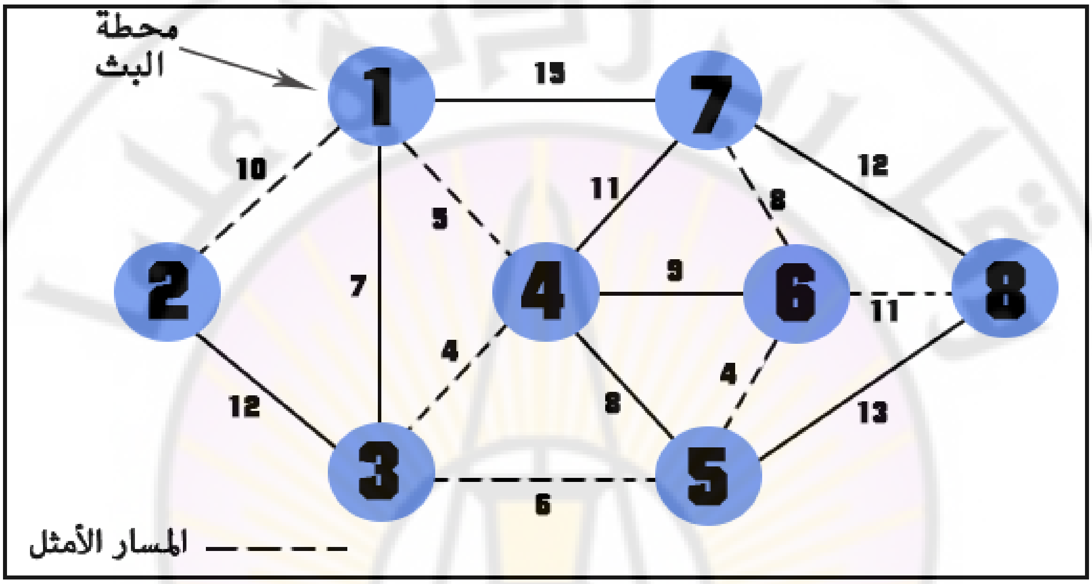
$$\bar{C} = \{1,2,3, \dots \dots , n\}$$

حيث أن n هي عدد النقاط في الشبكة.

- نختار أي نقطة نريدها وبشكل عشوائي ونضعها في مجموعة النقاط المتصلة ونحذفها من مجموعة النقاط الغير متصلة.
- ثم ننظر إلى أقرب نقطة في مجموعة النقاط الغير متصلة إلى هذه النقطة ونحذفها من مجموعة النقاط غير المتصلة ونضمها إلى مجموعة النقاط المتصلة.

- ثم ننظر إلى أقرب نقطة في مجموعة النقاط الغير متصلة إلى أية نقطة من مجموعة النقاط الغير متصلة , ونحذفها من مجموعة النقاط الغير متصلة ونضيفها إلى مجموعة النقاط المتصلة.
- نكرر العملية السابقة إلى أن تصبح جميع النقاط في مجموعة النقاط المتصلة (أي أن تصبح مجموعة النقاط الغير متصلة فارغة).
- نحدد المسار الذي قمنا بالربط من خلاله , ثم نحدد التكلفة عند هذا المسار والتي هي أقل تكلفة.

مثال خارجي: شركة بث تلفزيوني تخطط لربط سبعة تجمعات سكنية بشبكة بث سلكية (ممكن شبكة هاتف أو مياه), حيث ان الأرقام على الأضلع (المسارات) تمثل طول السلك (وقد يكون تكلفته) اللازم للربط بين النقطتين المعنيتين وان عدم وجود ضلع يربط بين أي نقطتين يعني اما تكاليف الربط عالية أو لا يوجد امكان للربط, والمطلوب: تحديد أقصر شبكة تربط بين هذه النقاط.



الحل:

1-بداية نفرض مجموعتين المجموعة المتصلة $C=\{\emptyset\}$ وهي مجموعة خالية والمجموعة الغير متصلة

$\bar{C}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ وهي كل النقاط

2-نختار أي نقطة عشوائياً ونعتبرها نقطة موصولة ولتكن النقطة (6) نضمها إلى المجموعة المتصلة $C=\{6\}$ وتصبح المجموعة الغير متصلة $\bar{C}=\{1,2,3,4,5,7,8\}$

3-نبحث في النقاط الغير متصلة عن أقرب نقطة إلى النقطة المتصلة (6) ونجد أنها النقطة (5) التي تبعد عنها مسافة تساوي 4 وبالتالي نصلها مع النقطة (6) لتصبح كتلة واحدة ونضمها للمجموعة المتصلة لتصبح $C=\{6,5\}$ والمجموعة الغير متصلة $\bar{C}=\{1,2,3,4,7,8\}$

4-ننظر إلى المجموعة المتصلة C نبحث عن أقرب نقطة إليها (لأي عنصر من عناصرها) 5 أو 6 في المجموعة الغير متصلة ونلاحظ أن المسافات هي على التوالي (6,13,8,9,8,11) وأقصر مسافة هي 6 وهي النقطة (3) الأقرب للنقطة (5) وبالتالي نضم النقطة (3) للمجموعة المتصلة وتصبح $C=\{6,5,3\}$ وتصبح المجموعة الغير متصلة $\bar{C}=\{1,2,4,7,8\}$ ثم نصل النقطة (5) مع النقطة (3).

5- ونبحث عن أقرب نقطة للمجموعة المتصلة الجديدة في المجموعة الغير متصلة لنجد أنها النقطة (4) والتي تبعد عن النقطة (3) مسافة تساوي 4 وبالتالي نضم النقطة (4) إلى المجموعة المتصلة لتصبح $C=\{6,5,3,4\}$ والمجموعة الغير متصلة تصبح $\bar{C}=\{1,2,7,8\}$ ثم نصل النقطة (3) مع النقطة (4).

6-ونبحث عن أقرب نقطة للمجموعة المتصلة الجديدة في المجموعة الغير متصلة لنجد أنها النقطة (1) التي تبعد عن النقطة (4) مسافة تساوي 5 ونضم النقطة (1) إلى المجموعة المتصلة لتصبح $C=\{6,5,3,4,1\}$ والمجموعة الغير متصلة

$\bar{C}=\{2,7,8\}$ ثم نصل النقطة (1) مع النقطة (4).

7-ونبحث عن أقرب نقطة للمجموعة المتصلة الجديدة في المجموعة الغير متصلة لنجد أنها النقطة (7) التي تبعد عن النقطة (6) مسافة تساوي 8 ونضم النقطة (7) إلى المجموعة المتصلة لتصبح $C=\{6,5,3,4,1,7\}$ والمجموعة الغير متصلة

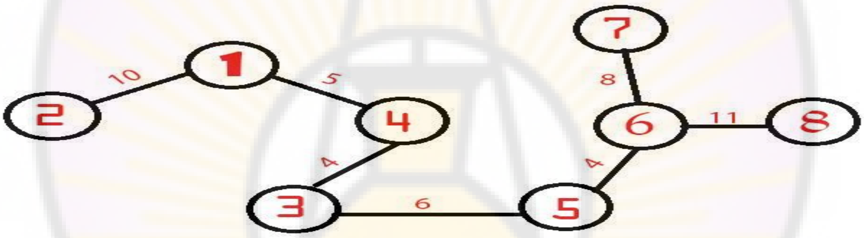
$\bar{C}=\{2,8\}$ ثم نصل النقطة (7) مع النقطة (6).

8-ونبحث عن أقرب نقطة للمجموعة المتصلة الجديدة في المجموعة الغير متصلة لنجد أنها النقطة (2) التي تبعد عن النقطة (1) مسافة تساوي10 ونضم النقطة (2) إلى المجموعة المتصلة لتصبح $C=\{6,5,3,4,1,7,2\}$ والمجموعة الغير متصلة

$\bar{C}=\{8\}$ ثم نصل النقطة (2) مع النقطة (1).

بالنهاية أصبحت جميع النقط متصلة $C=\{6,5,3,4,1,7,2,8\}$ وتصبح المجموعة الغير متصلة خالية $\bar{C}=\{\emptyset\}$

والآن نحدد المسار الذي قمنا بالربط من خلاله :



نلاحظ أن الشبكة السابقة جميع أطرافها حرة, فمثلاً لم نعد ربط النقطة 7 (والتي هي طرف الشبكة أو نهايتها) بالنقطة 1 من جديد لأن ذلك سيجعل الشبكة مغلقة , وهذا غير مسموح به.

طول الشبكة هو مجموع أطوال المسارات في الشكل السابق $10+5+4+6+4+8+11=48$

ملاحظات:

1-إن ترتيب العناصر وكتابتها داخل المجموعة المتصلة (c) ليس له علاقة بالوصلات بين عناصرها (المهم هو أنك تضم نقطة للمجموعة المتصلة ولا يهم مكانها)

2-أثناء البحث عن أصغر وصلة (أقصر مسار) إلى أحد عناصر المجموعة المتصلة (c) يستغنى عن المسار (الوصلة) التي تشكل حلقة, وفي النهاية يجب ألا يكون لدينا أي حلقة.

-تنويه:يوجد طريقة ثانية للحل وهي الشبكات (حيث نضطر لرسم 8 أو 9 شبكات, أي كل خطوة بشبكة جديدة) وهي طريقة طويلة لذلك سنعتمد على طريقة المجموعات (الوصلات) السابقة فهي أفضل وأسرع.

ثانياً: خوارزمية أقصر مسار على الشبكات التي لا تسمح بالدوران:

تهدف إلى إيجاد مجموعة نقاط الانتقال المتصلة فيما بينها والتي تشكل مجموعة أطوالها أقصر مسار يصل نقطة البداية (الانطلاق) مع نقطة النهاية (الوصول).

المقصود بالدوران: إمكانية الحركة باتجاهين بين نقطتين موصولتين أما بلا دوران اتجاه واحد (ذهاب دون إياب)

ملاحظة: الشبكة التي لا تسمح بالدوران لا يمكننا العودة إلى النقطة السابقة ولا تتصل أي نقطة مع نفسها ومعنى المسار الأمثل هو أقصر مسار بين نقطة الانطلاق ونقطة الوصول.

✓ مجموعة مصطلحات سنستخدمهم بكثرة:

u_i: هي بعد نقطة الانطلاق عن نقطة البداية

v_j: هي بعد نقطة الوصول عن نقطة البداية

d_{ij}: بعد النقطة (i) عن النقطة (j) أي المسافة

u_1: هي بعد نقطة الانطلاق عن نفسها وهي دوماً تساوي الصفر $(u_1 = 0)$

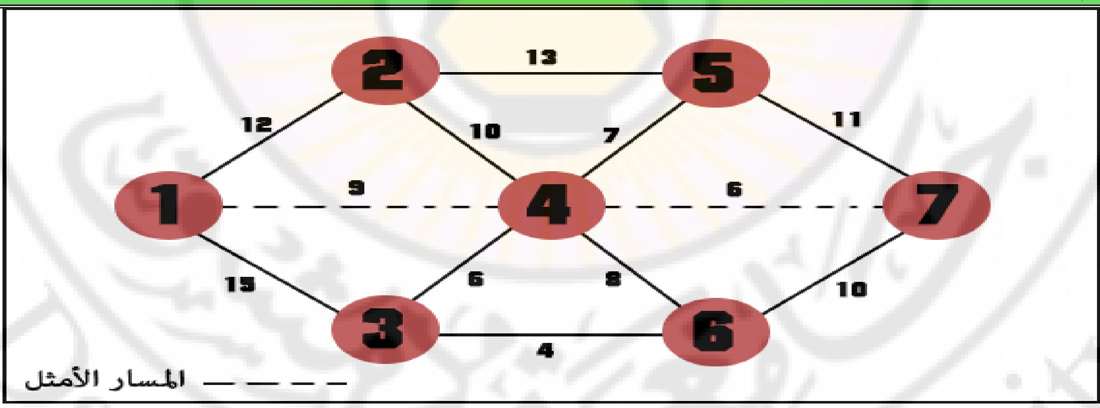
لدينا شرط أساسي وهو $i < j$ أي ان النقطة i تسبق النقطة j

يتم حساب أقصر مسار (المسار الأمثل) عن طريق العلاقة:

$$v_j = Min\left[u_i + d_{ij}\right]$$

بمعنى يجب حساب أقصر مسافة إلى النقطة (j) من النقطة السابقة لها والتي ترتبط بمسار معها وذلك بعد تحديد أقصر مسافة إلى النقطة السابقة.

مثال خارجي:



بداية لدينا نقطة الانطلاق هي النقطة (1) ونقطة الوصول هي النقطة (7)

ولدينا $u_1 = 0$ لأنها نقطة البداية ولا يوجد نقطة قبلها.

ثم نطبق القانون: $v_j = Min\left[u_i + d_{ij}\right]$

قبل أن نبدأ يجب أن ننوه أنه دائما $u_i = v_j$

نبدأ من النقطة 1 والتي هي نقطة الانطلاق , المسافة هي كما ذكرنا هي الصفر $(u_1 = 0)$ لأنها البداية.

نأتي إلى النقطة 2 :

يمكننا **الوصول** إلى **النقطة 2** حصراً من النقطة 1 , نجد أن النقطة 2 موصولة بالنقطة 1 و 4 و 5 , ولكن نحن اشترطنا الشرط الأساسي أنه يجب أن يكون $i < j$, أي أن نقطة الانطلاق تسبق نقطة الوصول , وبما أنه لدينا النقطة 2 هي نقطة وصول وبالتالي لا يتحقق الشرط إلا إذا انطلقنا من النقطة 1

أي أنه i= 1 و $u_1 = 0$ و d_{12} هي المسافة من النقطة (1) الى النقطة (2)

$$v_2 = \min[u_1 + d_{12}] = 0 + 12 = 12$$

حيث للوصول **إلى النقطة (3)** يوجد مسار وحيد من النقطة (1) (لا يمكننا الانتقال من النقطة 2 إلى النقطة 3 على الرغم من أنها تسبقها والسبب عدم وجود وصلة تصل بينهما) وبالتالي لدينا i= 1 و $u_1 = 0$ و d_{13} هي المسافة من النقطة (1) الى النقطة (3).

$$v_3 = \min[u_1 + d_{13}] = 0 + 15 = 15$$

للوصول إلى **النقطة 4** يمكننا ذلك إما من النقطة 1 أو 2 أو 3 , نطبق العلاقة :

$$v_4 = \min[u_1 + d_{14}, u_3 + d_{34}, u_2 + d_{24}] = min(0 + 9, 6 + 15, 10 + 12) = \min(9,21,22) = 9$$

هنا لدينا أكثر من احتمال للوصول إلى النقطة (4) :

إما من النقطة (1) مباشرة إلى 4 والمسافة هي (0+9)=9

أو من النقطة (2) والمسافة هي (10+12) =22 حيث أننا وصلنا إلى النقطة 2 بمسافة 12 , ولدينا المسافة من 2 إلى 4 هي 10 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 2 إلى 4) هو 22

أو من النقطة (3) والمسافة هي (6+15) =21 حيث أننا وصلنا إلى النقطة 3 بمسافة 15 , ولدينا المسافة من 3 إلى 4 هي 6 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 3 إلى 4) هو 21

وبالتالي نختار الانطلاق من 1 إلى 4 لأنه يحقق أقل مسافة.

للوصول إلى **النقطة 5** يمكننا ذلك إما من النقطة 2 أو 4 , نطبق العلاقة :

$$v_5 = \min[u_2 + d_{25}, u_4 + d_{45}] = (12 + 13, 9 + 7) = 16$$

هنا لدينا أكثر من احتمال للوصول إلى النقطة (5)

اما من النقطة (2) والمسافة هي (12+13) =25 حيث أننا وصلنا إلى النقطة 2 بمسافة 12 , ولدينا المسافة من 2 إلى 5 هي 13 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 2 إلى 5) هو 25

أو من النقطة (4) والمسافة هي (6+7) =16 حيث أننا وصلنا إلى النقطة4 بمسافة 6 , ولدينا المسافة من 4 إلى5 هي 7 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 4 إلى 5) هو16

وبالتالي نختار الانطلاق من 2 إلى 5 لأنه يحقق أقل مسافة.

للوصول إلى النقطة 6 يمكننا ذلك إما من النقطة 3 أو 4 , نطبق العلاقة :

$$v_6 = \min[u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}] = (15 + 4, 9 + 8) = 17$$

هنا لدينا أكثر من احتمال للوصول إلى النقطة (6)

اما من النقطة (3) والمسافة هي (15+4) =19 حيث أننا وصلنا إلى النقطة 3 بمسافة 15 , ولدينا المسافة من 3 إلى 6 هي 4 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 3 إلى 6) هو 19

أو من النقطة (4) والمسافة هي (6+8) =17 حيث أننا وصلنا إلى النقطة4 بمسافة 6 , ولدينا المسافة من 4 إلى6 هي 8 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 4 إلى 6) هي 17

وبالتالي نختار الانطلاق من 4 إلى 6 لأنه يحقق أقل مسافة.

للوصول إلى النقطة 7 يمكننا ذلك إما من النقطة 4 أو 5 أو 6 , نطبق العلاقة :

$$v_7 = \min[u_4 + d_{47}, u_5 + d_{57}, u_6 + d_{67}] = (9 + 6, 25 + 11, 17 + 10) = 15$$

هنا لدينا أكثر من احتمال للوصول إلى**النقطة (7)**

إما من النقطة (4)) والمسافة هي (9+6) =15 حيث أننا وصلنا إلى النقطة 4 بمسافة 9 , ولدينا المسافة من 4 إلى 7 هي 6 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 4 إلى 7) هو 15

أو من النقطة (6) والمسافة هي (4+10) =14 حيث أننا وصلنا إلى النقطة 6 بمسافة 4 , ولدينا المسافة من 6 إلى 7 هي 10 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 6 إلى 7) هو 14

أو من النقطة (5) والمسافة هي (13+11) =24 حيث أننا وصلنا إلى النقطة 5 بمسافة 13 , ولدينا المسافة من 5 إلى 7 هي 11 , ويصبح مجموع المسافة (من 1 إلى 5 إلى 7) هو 24

وبالتالي نختار الانطلاق من 6 إلى 7 لأنه يحقق أقل مسافة.

الآن نحدد المسار الأمثل ننظر إلى الشبكة لدينا النقطة (7) وصلنا إليها من النقطة (4), نعود إلى النقطة (4) وننظر إليها لنجد أننا وصلنا إلى النقطة (4) من النقطة (1) والنقطة (1) هي نقطة البداية وبالتالي أصبح المسار الأمثل كما هو موضح بالشكل السابق:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 7$$

وطول هذا المسار الأمثل هو 15

أساليب كمية – المحاضرة 14

ثانياً: خوارزمية أقصر شبكة على الشبكات التي لا تسمح بالدوران:

تهدف الى إيجاد مجموعة نقاط متصلة للانتقال فيما بينها بحيث يكون أطوال مساراتها أقصر ما يمكن، من نقطة البداية (الانطلاق) الى نقطة النهاية (الوصول).

المقصود بالدوران: إمكانية الحركة باتجاهين بين نقطتين موصولتين، وبدون دوران أي الانتقال باتجاه واحد ذهاب دون إياب.

مصطلحات الخوارزمية:

ui : بعد نقطة الإنطلاق i عن نقطة البداية.

vj : بعد نقطة الوصول j عن نقطة البداية.

dij: المسافة بينالنقطة i والنقطة j.

$u1$: بعد نقطة الإنطلاق (1) عن نقطة البداية (1) لذلك دوماً يساوي الصفر.

شرط أساسي: $i < j$ أي النقطة i تسبق النقطة j.

ونلاحظ في هذه المسائل دوماً $ui = vj$.

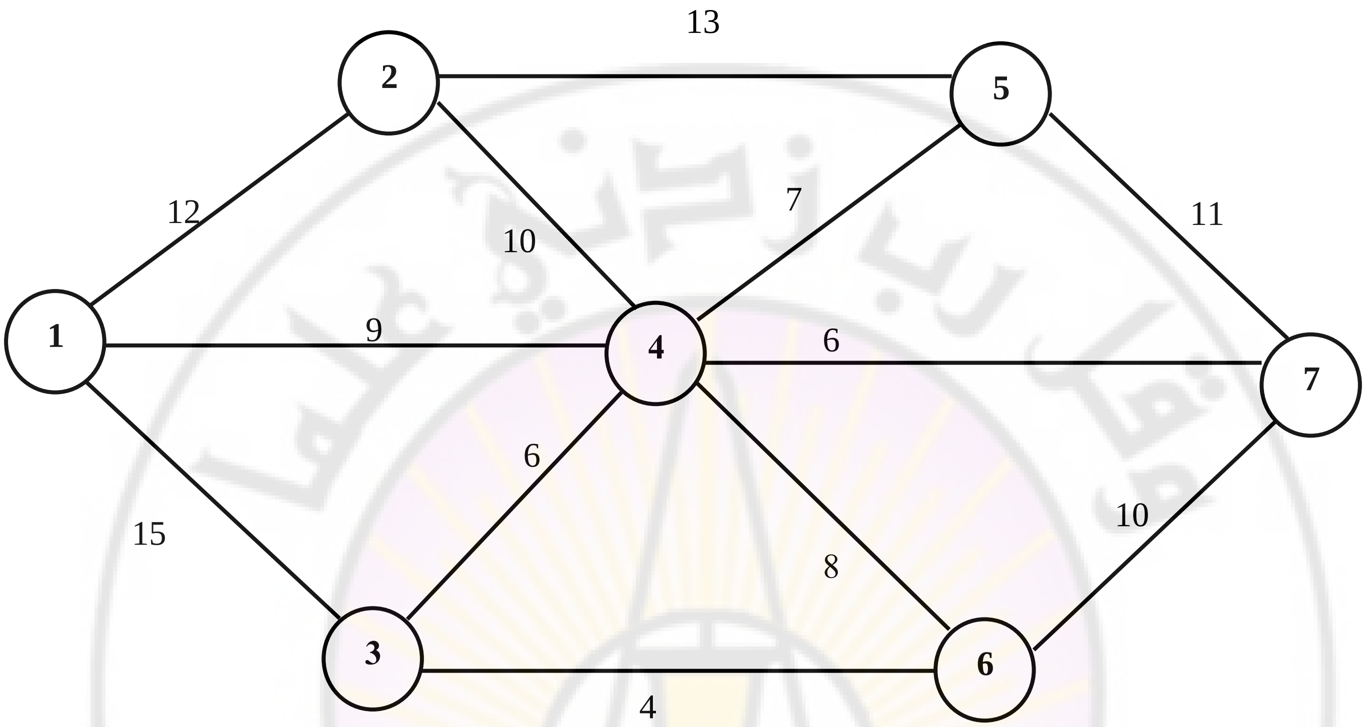
ويتم حساب أقصر مسار (المسار الأمثل) عن طريق العلاقة:

$$vj = Min\{ui + dij\}$$

أي حساب أقصر مسافة الى النقطة jمن النقاط السابقة لها والتي ترتبط معها أي تحديد أقصر وصلة ومسافة الى النقطة السابقة.

مثال:

لتكن لديك الشبكة التالية: أوجد المسار الأمثل.



الحل:

لدينا دوماً :

$u1 = 0$

وبما أن $ui = vj$ بالتالي يكون $u1 = v1 = 0$.

– للوصول إلى النقطة (2) لا يوجد سوى طريق واحد عبر النقطة (1) بالتالي:

$$v2 = \ Min\{u1 + d12\}$$

حيث:

$v2$: بعد نقطة الوصول التي هي (2) عن نقطة البداية التي هي (1).

$u1$: بعد نقطة الانطلاق التي هي (1) عن نقطة البداية التي هي (1).

$d12$: بعد النقطة (1) عن النقطة (2).

نعوض:

$$v2 = \ Min\{u1 + d12\} = Min\{0 + 12\} = 12$$

بالتالي: $u2 = v2 = 12$

أي وصلنا للنقطة (2) عبر النقطة (1).

– للوصول إلى النقطة (3) لا يوجد سوى طريق واحد عبر النقطة (1) بالتالي:

$$v3 = Min\{u1 + d13\}$$

حيث:

$v3$: بعد نقطة الوصول التي هي (3) عن نقطة البداية التي هي (1).

$u1$: بعد نقطة الانطلاق التي هي (1) عن نقطة البداية التي هي (1).

$d13$: بعد النقطة (1) عن النقطة (3).

نعوض:

$$v3 = Min\{u1 + d13\} = Min\{0 + 15\} = 15$$

بالتالي: $u3 = v3 = 15$

أي وصلنا للنقطة (3) عبر النقطة (1).

– للوصول إلى النقطة (4) يوجد ثلاثة طرق:

الطريق الأول عبر النقطة (1) بالتالي:

$$v4 = Min\{u1 + d14\} = Min\{0 + 9\} = 9$$

الطريق الثاني عبر النقطة (2) بالتالي:

$$v4 = Min\{u2 + d24\} = Min\{12 + 10\} = 22$$

الطريق الثالث عبر النقطة (3) بالتالي:

$$v4 = Min\{u3 + d34\} = Min\{15 + 6\} = 21$$

ويمكن جمعهم في قانون واحد كالتالي:

$$v4 = Min\{\ u1 + d14\ \ ,u2 + d24\ \ ,u3 + d34\ \} =$$

$$v4 = Min\{0 + 9\ \ ,12 + 10\ \ ,15 + 6\} = Min\{9\ \ ,22\ \ 21\} = 9$$

بالتالي: $u4 = v4 = 9$

أي وصلنا للنقطة (4) عبر النقطة (1) لأن القيمة التي أخذناها وهي (9) هي ناتج جمع القيمة (9) و القيمة (0) والتي هي عبر النقطة (1).

– للوصول إلى النقطة (5) يوجد طريقان:

عبر النقطة (2) و النقطة (4) بالتالي:

$$v5 = Min\{ u2 + d25 \ , u4 + d45\} = Min\{12 + 13, 9 + 7\}$$

$$v5 = Min\{25 \ , 16\} = 16$$

بالتالي: $u5 = v5 = 16$

أي وصلنا للنقطة (5) عبر النقطة (4)لأن القيمة التي أخذناها وهي (16) هي ناتج جمع القيمة (9) و القيمة (7) والتي هي عبر النقطة (4).

– للوصول إلى النقطة (6) يوجد طريقان:

عبر النقطة (3) و النقطة (4) بالتالي:

$$v6 = Min\{ u3 + d36 \ , u4 + d46\} = Min\{15 + 4, 9 + 8\}$$

$$v6 = Min\{19 \ , 17\} = 17$$

بالتالي: $u6 = v6 = 17$

أي وصلنا للنقطة (6) عبر النقطة (4)لأن القيمة التي أخذناها وهي (17) هي ناتج جمع القيمة (8) و القيمة (9) والتي هي عبر النقطة (4).

– للوصول إلى النقطة (7) يوجد ثلاثة طرق:

من النقاط (4) و (5) و (6) بالتالي:

$$v7 = Min\{ u4 + d47 \ , u5 + d57 \ , u6 + d67 \} =$$

$$v7 = Min\{9 + 6 \ , 16 + 11 \ , 17 + 10\} = Min\{15 \ , 27 \ 27\} = 15$$

بالتالي: $u7 = v7 = 15$

أي وصلنا للنقطة (7) عبر النقطة (4)لأن القيمة التي أخذناها وهي (15) هي ناتج جمع القيمة (9) و القيمة (6) والتي هي عبر النقطة (4).

– تحديد المسار:

عند النقطة (7) كانت $u7 = v7 = 15$ ووصلنا الى (7) عبر (4).

نذهب للنقطة (4) نجد أن $u4 = v4 = 9$ ووصلنا الى (4) عبر (1).

بالتالي المسار:

$$1 \xrightarrow{9} 4 \xrightarrow{6} 7$$

و طول المسار يبلغ: 9 + 6 = 15.

ملاحظة: يمكن حل المثال السابق بطريقة الجدول.

سنحل المثال السابق بالاعتماد على طريقة الجدول: نرسم جدول أسطره تمثل نقاط الانطلاق و أعمدته تمثل نقاط الوصول، وسنلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي و ماتحته من خانات ستكون فارغة لا تحوي قيم لأن الشبكة لا تسمح بالدوران، نرسم الجدول ونملأ خاناته من الشبكة المعطاة في نص السؤال السابق:

	1	2	3	4	5	6	7
1	_	**12**	**15**	**9**	_	_	_
2	_	_	_	**10**	**13**	_	_
3	_	_	_	**6**	_	**4**	_
4	_	_	_	_	**7**	**8**	**6**
5	_	_	_	_	_	_	**11**
6	_	_	_	_	_	_	**10**
7	_	_	_	_	_	_	_

- **كيفية ملء الجدول:**

1- عناصر القطر الرئيسي و ماتحته من خانات ستكون فارغة (-) لا تحوي قيم لأن الشبكة لا تسمح بالدوران.

2- مثلا الخلية $x12 = 12$ وذلك لأن طول المسار الواصل بين النقطة (1) و النقطة (2) يساوي (12).

3- نضيف عامود vj وسطر ui على الجدول السابق ولا ننسا أن دوماً $u1 = v1 = 0$ وأن دوماً $ui = vj$ بالتالي:

	1	2	3	4	5	6	7	ui
1	_	12	15	9	_	_	_	0
2	_	_	_	10	13	_	_	
3	_	_	_	6	_	4	_	
4	_	_	_	_	7	8	6	
5	_	_	_	_	_	_	11	
6	_	_	_	_	_	_	10	
7	_	_	_	_	_	_	_	
Vj	0							

- للوصول الى النقطة (2) ننظر للعامود رقم (2) فنجد قيمة واحد فقط في هذا العامود عند السطر (1)، أي نصل الى النقطة (2) من (1) وبالتالي $u2 = v2 = 12$.

– للوصول الى النقطة (3) ننظر للعامود رقم (3) فنجد قيمة واحد فقط في هذا العامود عند السطر (1)، أي نصل الى النقطة (3) من (1) وبالتالي $u3 = v3 = 15$.

بالتالي يصبح الجدول:

	1	2	3	4	5	6	7	***ui***	
1	_	**12**	**15**	**9**	_	_	_	0	البدء
2	_	_	_	**10**	**13**	_	_	12	من 1
3	_	_	_	**6**	_	**4**	_	15	من 1
4	_	_	_	_	**7**	**8**	**6**		
5	_	_	_	_	_	_	**11**		
6	_	_	_	_	_	_	**10**		
7	_	_	_	_	_	_	_		
vj	0	12	15						

– للوصول الى النقطة (4) ننظر للعامود رقم (4) فنجد فيه ثلاثة قيم، واحدة عند السطر (1) وهي (9) والثانية عند السطر (2) وهي (10) و الثالثة عند السطر (3) وهي (6).

فنقوم بجمع كل قيمة من هذه القيم مع ما يقابلها في عامود $\boldsymbol{vj}$أي كالتالي:

القيمة (9) في السطر الأول يقابلها في عامود $\boldsymbol{vj}$القيمة (0)، أي: 9 + 0 = 9

القيمة (10) في السطر الثاني يقابلها في عامود $\boldsymbol{vj}$القيمة (12)، أي: 10 + 12 = 22

القيمة (6) في السطر الثالث يقابلها في عامود $\boldsymbol{vj}$القيمة (15)، أي: 6 + 15 = 21

فنأخذ الأقل أي القيمة (9) وهي من النقطة (1) وبالتالي: $u4 = v4 = 9$.

	1	2	3	4	5	6	7	***ui***	
1	_	**12**	**15**	**9**	_	_	_	0	البدء
2	_	_	_	**10**	**13**	_	_	12	من 1
3	_	_	_	**6**	_	**4**	_	15	من 1
4	_	_	_	_	**7**	**8**	**6**	9	من 1
5	_	_	_	_	_	_	**11**		
6	_	_	_	_	_	_	**10**		
7	_	_	_	_	_	_	_		
vj	0	12	15	9					

– للوصول الى النقطة (5) ننظر للعامود رقم (5) فنجد فيه قيمتان، واحدة عند السطر (2) وهي (13) والثانية عند السطر (4) وهي (7).

فنقوم بجمع كل قيمة من هذه القيم مع ما يقابلها في عامود $\boldsymbol{vj}$أي كالتالي:

القيمة (13) في السطر الثاني يقابلها في عامود vj القيمة (12)، أي: 13 + 12 = 25

القيمة (7) في السطر الرابع يقابلها في عامود vj القيمة (9)، أي: 7 + 9 = 16

فنأخذ الأقل أي القيمة (16) وهي من النقطة (4) وبالتالي: $u5 = v5 = 16$.

	1	2	3	4	5	6	7	ui	
1	_	12	15	9	_	_	_	0	البدء
2	_	_	_	10	13	_	_	12	من 1
3	_	_	_	6	_	4	_	15	من 1
4	_	_	_	_	7	8	6	9	من 1
5	_	_	_	_	_	_	11	16	من 4
6	_	_	_	_	_	_	10		
7	_	_	_	_	_	_	_		
vj	0	12	15	9	16				

– للوصول الى النقطة (6) ننظر للعامود رقم (6) فنجد فيه قيمتان، واحدة عند السطر (3) وهي (4) والثانية عند السطر (4) وهي (8).

فنقوم بجمع كل قيمة من هذه القيم مع ما يقابلها في عامود vj أي كالتالي:

القيمة (4) في السطر الثالث يقابلها في عامود vj القيمة (15)، أي: 4 + 15 = 19

القيمة (8) في السطر الرابع يقابلها في عامود vj القيمة (9)، أي: 8 + 9 = 17

فنأخذ الأقل أي القيمة (17) وهي من النقطة (4) وبالتالي: $u6 = v6 = 17$.

	1	2	3	4	5	6	7	ui	
1	_	12	15	9	_	_	_	0	البدء
2	_	_	_	10	13	_	_	12	من 1
3	_	_	_	6	_	4	_	15	من 1
4	_	_	_	_	7	8	6	9	من 1
5	_	_	_	_	_	_	11	16	من 4
6	_	_	_	_	_	_	10	17	من 4
7	_	_	_	_	_	_	_		
vj	0	12	15	9	16	17			

– للوصول الى النقطة (7) ننظر للعامود رقم (7) فنجد فيه ثلاثة قيم، واحدة عند السطر (4) وهي (6) والثانية عند السطر (5) وهي (11) و الثالثة عند السطر (6) وهي (10).

فنقوم بجمع كل قيمة من هذه القيم مع ما يقابلها في عامود vj أي كالتالي:

القيمة (6) في السطر الرابع يقابلها في عامود vj القيمة (9)، أي: 6 + 9 = 15

القيمة (11) في السطر الخامس يقابلها في عامود vj القيمة (16)، أي: 11 + 16 = 27

القيمة (10) في السطر السادس يقابلها في عامود vj القيمة (17)، أي: 10 + 17 = 27

فنأخذ الأقل أي القيمة (15) وهي من النقطة (4) وبالتالي: $u7 = v7 = 15$.

	1	2	3	4	5	6	7	ui	
1	_	12	15	9	_	_	_	0	البدء
2	_	_	_	10	13	_	_	12	من 1
3	_	_	_	6	_	4	_	15	من 1
4	_	_	_	_	7	8	6	9	من 1
5	_	_	_	_	_	_	11	16	من 4
6	_	_	_	_	_	_	10	17	من 4
7	_	_	_	_	_	_	_	15	من 4
vj	0	12	15	9	16	17	15	_	_

تحديد المسار:

ننظر في الجدول الى النقطة (7) فنجد أننا وصلنا إليها من (4)، نذهب للنقطة (4) فنجد أننا وصلنا إليها من النقطة (1) فيكون المسار:

و طول المسار يبلغ: 9 + 6 = 15.

أساليب كمية – المحاضرة 15

ثالثاً: خوارزمية أقصر شبكة على الشبكات التي تسمح بالدوران:

في هذا النوع من الشبكات يمكننا الانتقال بين أي نقطتين موصولتين وبالاتجاهين وهي لا تختلف عن الشبكات التي لا تسمح بالدوران إلا أن ذلك يحتم خطوات إضافية على الحل تلي الخطوات المتبعة في الشبكات التي لا تسمح بالدوران.

خطوات الحل:

1- إيجاد أقصر مسار أولي (بنفس الطريقة المتبعة في الشبكات التي لا تسمح بالدوران).

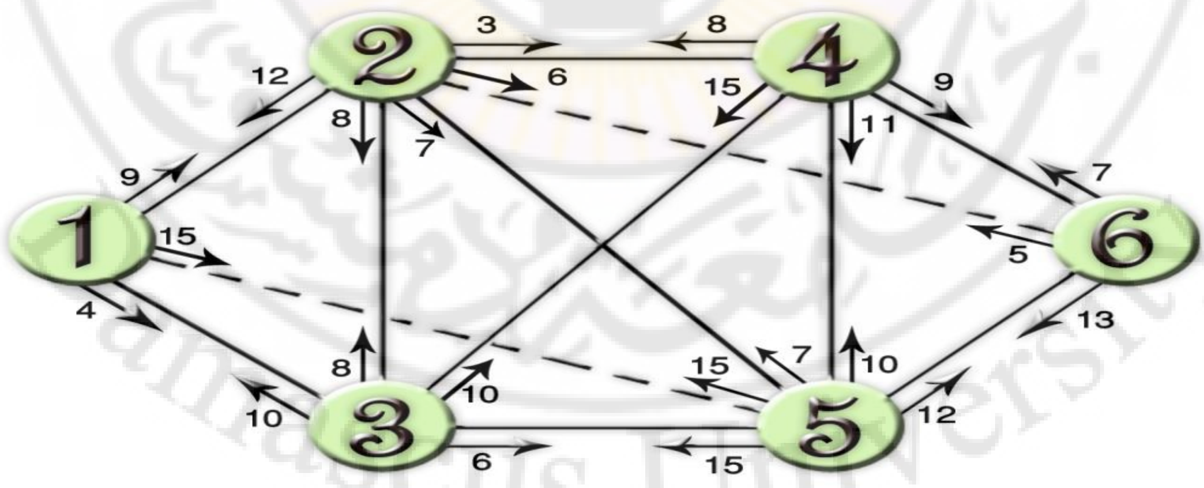
2- اختبار مثالية الحل.

3- تعديل المسار إذا دعت الحاجة.

4- تحديد المسار الأمثل.

نظراً لصعوبة الحسابات على الشبكة يتم وضع جدول مربع الشكل, أعمدته وأسطره هي نقاط الشبكة بحيث يكون لكل نقطة من الشبكة عمود وحيد وسطر وحيد في الجدول, حيث كل نقطة انطلاق i وكل نقطة وصول j $(i = j)$ والانتقال على كل ضلع من أضلع الشبكة ممكن بالاتجاهين, ويجب الاشارة الى ان العنصر d_{ij} يمثل طول الضلع بين i و j وليس بالضرورة أن يتساوى d_{ij} مع d_{ji}.

مثال الكتاب صفحة 113: أوجد أقصر مسار يصل النقطة (1) مع النقطة (6)



كيفية تفريغ الجدول:نخصص سطر لكل نقطة انطلاق وعمود لكل نقطة وصول وبالتالي يكون لدينا جدول مربع عدد أعمدته يساوي عدد أسطره ويساوي عدد النقاط التي في الشبكة وذلك لأن أية نقطة على الشبكة يمكن أن تكون نقطة وصول كما يمكن أن تكون نقطة انطلاق, وان بعد أي نقطة عن نفسها يساوي الصفر ولكن هنا في الشبكة الدوران في نفس النقطة غير مسموح, أي أنه لا يمكن أن تكون النقطة نفسها هي نقطة انطلاق ونقطة وصول في وقت واحد وبالتالي

فاننا نشطب هذه الخلايا, وأيضاً نقوم بشطب الخلية التي يكون فيها النقل غير مسموح أي لا يوجد ضلع يربط بين النقطتين.

بعد تفريغ بيانات الشبكة على الجدول نضيف سطر جديد الى الأسفل وهو سطر بُعد الوصول ويرمز له بالرمز v_j ونضيف عمود جديد الى اليسار وهو عمود الانطلاق ويرمز له بالرمز u_i

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4	5	6	u_i
1	-	9	4	-	15	-	0
2	12	-	8	3	7	6	9
3	10	2	-	10	6	-	4
4	-	8	15	-	11	9	12
5	15	7	15	10	-	12	10
6	-	5	-	7	13	-	15
v_j	0	9	4	12	10	15	

القيم تحت عناصر القطر الرئيسي (خط العودة), وبدايةً نفرض أن $u_1 = v_1 = 0$ هي نقطة الانطلاق والآن نقوم بايجاد قيم v_j والتي تعطى بالعلاقة: $v_j = \min[u_i + d_{ij}]$ وذلك بشرط أن يكون $i < j$ (أي نقطة الانطلاق تسبق نقطة الوصول) وذلك فقط في الحل الأولي, وأن يكون هناك ضلع يربط بين النقطتين.

الخطوة الأولى:

1-نريد الوصول إلى **النقطة (2)**,ننظر إلى الجدول لدينا مسار واحد يبدأ من نقطة الانطلاق (1) , والمسافة هي (9) وبالتالي أصبح لدينا $u_2 = v_2 = 9$

2-نريد الوصول إلى **النقطة (3)**,ننظر إلى الجدول لدينا مسار واحد يبدأ من نقطة الانطلاق (1) , والمسافة هي (4) وبالتالي أصبح لدينا $u_3 = v_3 = 4$

3-نريد الوصول إلى **النقطة (4)**, ننظر إلى الجدول ونلاحظ لدينا مسارين:

إما من النقطة (2) والمسافة هي (3) ويصبح لدينا $v_4 = u_2 + d_{24} = 9 + 3 = 12$

أو من النقطة (3) والمسافة هي (10) ويصبح لدينا $v_4 = u_3 + d_{34} = 4 + 10 = 14$

نختار الأقصر وهي النقطة (2) وبالتالي أصبح لدينا $u_4 = v_4 = 12$

4-نريد الوصول إلى **النقطة (5)**, ننظر إلى الجدول ونلاحظ لدينا 4 مسارات:

إما من النقطة (1) والمسافة هي (15) ويصبح لدينا $v_5 = u_1 + d_{15} = 0 + 15 = 15$

أو من النقطة (2) والمسافة هي (7) ويصبح لدينا $v_5 = u_2 + d_{25} = 9 + 7 = 16$

أو من النقطة (3) والمسافة هي (6) ويصبح لدينا $v_5 = u_3 + d_{35} = 4 + 6 = 10$

أو من النقطة (4) والمسافة هي (11) ويصبح لدينا $v_5 = u_4 + d_{45} = 12 + 11 = 23$

نختار الأقصر وهي النقطة (3) وبالتالي أصبح لدينا $u_5 = v_5 = 10$

5-نريد الوصول إلى **النقطة (6)**, ننظر إلى الجدول ونلاحظ لدينا 3 مسارات:

إما من النقطة (2) والمسافة هي (6) ويصبح لدينا $v_6 = u_2 + d_{26} = 9 + 6 = 15$

أو من النقطة (4) والمسافة هي (9) ويصبح لدينا $v_6 = u_4 + d_{46} = 12 + 9 = 21$

أو من النقطة (5) والمسافة هي (12) ويصبح لدينا $v_6 = u_5 + d_{56} = 10 + 12 = 22$

نختار الأقصر وهي النقطة (2) وبالتالي أصبح لدينا $u_6 = v_6 = 15$

الآن نحدد المسار الأمثل ننظر إلى الحل السابق لدينا النقطة (6) وصلنا إليها من النقطة (2), نعود إلى النقطة (2) وننظر إليها لنجد أننا وصلنا إلى النقطة (2) من النقطة (1) والنقطة (1) هي نقطة البداية وبالتالي أصبح المسار الأمثل:

$$1 \to 2 \to 6$$

وطول المسار يساوي (15).

طريقة ثانية: يمكننا حساب قيم بطريقة مباشرة وسهلة من خلال الجدول:

دائماً لدينا $u_1 = 0 , v_1 = 0$ وبالتالي:

-لحساب v_2 ننظر إلى الجدول إلى العمود الثاني ونجمع كل قيمة في عمود u_i مع القيمة المقابلة لها في العمود الثاني ونأخذ أصغر ناتج ليكون هو قيمة v_2, في عمود u_i ليس لدينا سوى $u_1 = 0$ نجمعها مع القيمة المناظرة لها في العمود الثاني $(0 + 9 = 9)$ ويصبح لدينا $u_2 = v_2 = 9$

-لحساب v_3 ننظر الى الجدول إلى العمود الثالث ونجمع كل قيمة في عمود u_i مع القيمة المقابلة لها في العمود الثالث ونأخذ أصغر ناتج ليكون هو قيمة v_3, في عمود u_i لدينا $u_2 = 9, u_1 = 0$ نجمعها مع القيمة المناظرة لها في العمود الثالث $(0 + 4 = 4)$ أو $(8 + 9 = 17)$ نختار الأصغر ويصبح لدينا $u_3 = v_3 = 4$

-لحساب v_4 ننظر إلى الجدول إلى العمود الرابع ونجمع كل قيمة في عمود u_i مع القيمة المقابلة لها في العمود الرابع ونأخذ أصغر ناتج ليكون هو قيمة v_4, في عمود u_i لدينا $u_3 = 4, u_2 = 9$ نجمعها مع القيمة المناظرة لها في العمود الرابع$(3 + 9 = 12)$ أو $(10 + 4 = 14)$ نختار الأصغر ويصبح لدينا $u_4 = v_4 = 12$

-لحساب v_5 ننظر إلى الجدول إلى العمود الخامس ونجمع كل قيمة في عمود u_i مع القيمة المقابلة لها في العمود الخامس ونأخذ أصغر ناتج ليكون هو قيمة v_5, في عمود u_i لدينا $u_4 = 12, u_3 = 4, u_2 = 9 , u_1 = 0$ نجمعها مع القيمة المناظرة لها في العمود الرابع$(0 + 15 = 15)$ أو $(9 + 7 = 16)$ أو $(4 + 6 = 10)$ أو $(11 + 12 = 22)$ نختار الأصغر ويصبح لدينا $u_5 = v_5 = 10$

-لحساب v_6 ننظر إلى الجدول إلى العمود السادس ونجمع كل قيمة في عمود u_i مع القيمة المقابلة لها في العمود السادس ونأخذ أصغر ناتج ليكون هو قيمة v_6, في عمود u_i لدينا $u_5 = 10, u_4 = 12, u_2 = 9$ نجمعها مع القيمة المناظرة لها في العمود السادس $(9 + 6 = 15)$ أو $(12 + 9 = 21)$ أو $(10 + 12 = 22)$ نختار الأصغر ويصبح لدينا

$$u_6 = v_6 = 15$$

الآن نلاحظ أننا وصلنا إلى نفس القيم لـ u_i و v_j وبالتالي فقط تختلف الطريقة ولكن النتائج واحدة

الخطوة الثانية: اختبار مثلوية الحل

$$v_j = \min[u_i + d_{ij}]$$

بشرط $i < j$ حيث i نقطة الانطلاق, و j نقطة الوصول

حتى يكون الحل مثالي يجب أن يتحقق الشرط التالي: $v_j - u_i \leq d$

أما لو كان $v_j - u_i > d_{ij}$ فان الحل غير مثالي وبحاجة الى تطوير, أي نحسب الفرق بين أطوال المسارات $\overline{d_{ij}}$لجميع النقاط u_i وبين طوله لكل نقطة v_j ونضع النتائج في جدول جديد:

بينما نقوم بحساب الفروق نقارن كل فرق نحسبه مع القيمة المقابلة له في الجدول الأساسي, فإذا كان الفرق المحسوب أصغر أو يساوي القيمة المقابلة له في الجدول الأساسي نكمل في حساب الفرق الذي يليه وهكذا إلىأن ننتهي من حساب جميع الفروق, فإذا لم يظهر لدينا أي فرق أكبر من القيمة المناظرة له في الجدول الأساسي يكون الحل أمثل, ولكن بمجرد أن يظهر لدينا فرق أكبر من القيمة المقابلة له في الجدول الأساسي نوقف إيجاد الفروق وبالتالي فالحل لدينا لم يكن امثل ونبدأ بالخطوة التالية وهي تطوير الحل

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4	5	6	u_i
1 $v_j - u_1$	-	9	4	-	10	-	0
2 $v_j - u_2$	-9	-	-5	3	1	6	9
3 $v_j - u_3$	-4	5	-	8	6	-	4
4 $v_j - u_4$	-	-3	-8	-	-2	3	12
5 $v_j - u_5$	-10	-1	-6	2	-	5	10
6 $v_j - u_6$	-	-6	-	-3	-5	-	15
v_j	0	9	4	12	10	15	

في هذا الجدول بدأنا بإيجاد الفروق وبنفس الوقت مقارنة الفروق التي نحسبها مع القيم المناظرة لها في الجدول الأساسي, وعندما وصلنا إلى الفرق $\overline{d_{32}}$نجد أن الشرط غير محقق وأن الفرق الذي قيمته (5) أكبر من القيمة المناظرة له في الجدول الأساسي وهي (2).

الآن ننظر إلى الفرق (5) الذي يقع في العمود الثاني ونقطة الوصول (2) ويقابله $v_2 = 9$ أي أن بعد الوصول 9 هو غير أمثل ويمكن الوصول إلى النقطة (2) بطريق أقصر ب 3 وحدات وهي عبارة عن الفرق بين الفرق المحسوب (5) والقيمة المقابلة له في الجدول الأساسي (2), وأي رقم لدينا لا يحقق الشرط نحسب له $\acute{v_j}$ حيث أن:

$$v_j' = u_i + d_{ij}$$

حيث i رقم السطر الذي لا يتحقق الشرط عنده أي $i = 3$

J رقم العمود الذي لا يتحقق الشرط عنده أي $j = 2$

d_{ij} المسافة بين النقطتين i و j

يجب التنويه إلىأن الشرط $i < j$ هو فقط في الحل الأساسي, أما في تطوير الحل يمكن ان يكون $i > j$

$$v_2' = u_3 + d_{32} = 4 + 2 = 6$$

الآن نبدل v_2 بـ $\acute{v_2}$ ونقوم بحساب قيم v_j و u_i من جديد بنفس الطريقة السابقة:

$$v_1 = 0 \rightarrow u_1 = v_1 = 0$$
$$v_2 = 6 \rightarrow u_2 = v_2 = 6$$

حيث للوصول إلى النقطة (3) يوجد مسارين إما من النقطة (1) وبالتالي لدينا i= 1 و $u_1 = 0$ و d_{13} هي المسافة من النقطة (1) الى النقطة (3) أو من النقطة (2) وبالتالي لدينا i= 2 و $u_2 = 6$ و d_{23} هي المسافة من النقطة (2) إلى النقطة (3), ونختار الأقصر وهي النقطة (1)

$$v_3 = min[0 + 4, 6 + 8] \rightarrow v_3 = 4 \rightarrow u_3 = v_3 = 4$$

و للوصول إلى النقطة (4) يوجد مسارين إما من النقطة (2) وبالتالي لدينا i= 2 و $u_2 = 6$ و d_{24} هي المسافة من النقطة (2) إلى النقطة (4) أو من النقطة (3) وبالتالي لدينا i= 3 و $u_3 = 4$ و d_{34} هي المسافة من النقطة (3) إلى النقطة (4), ونختار الأقصر وهي النقطة (2).

$$v_4 = min[6 + 3, 4 + 10] \rightarrow v_4 = 9 \rightarrow u_4 = v_4 = 9$$

ثم للوصول إلى النقطة (5) يوجد 4 مسارات إما من النقطة (1) وبالتالي لدينا i= 1 و $u_1 = 0$ و d_{15} هي المسافة من النقطة (1) إلى النقطة (5) أو من النقطة (2) وبالتالي لدينا i= 2 و $u_2 = 6$ و d_{25} هي المسافة من النقطة (2) الى النقطة (5), أو من النقطة (3) وبالتالي لدينا i= 3 و $u_3 = 4$ و d_{35} هي المسافة من النقطة (3) الى النقطة (5), أو من النقطة (4) وبالتالي لدينا i= 4 و $u_4 = 9$ و d_{45} هي المسافة من النقطة (4) الى النقطة (5), ونختار الأقصر وهي النقطة (3)

$$v_5 = min[0 + 15, 6 + 7, 4 + 6, 9 + 11] \rightarrow v_5 = 10 \rightarrow u_5 = v_5 = 10$$

ثم للوصول إلى النقطة (6) يوجد 3 مسارات إما من النقطة (2) وبالتالي لدينا i= 2 و $u_2 = 6$ و d_{26} هي المسافة من النقطة (2) إلى النقطة (6) أو من النقطة (4) وبالتالي لدينا i= 4 و $u_4 = 9$ و d_{46} هي المسافة من النقطة (4) إلى النقطة (6), أو من النقطة (5) وبالتالي لدينا i= 5 و $u_5 = 10$ و d_{56} هي المسافة من النقطة (5) إلى النقطة (6), ونختار الأقصر وهي النقطة (2)

$$v_6 = min[6+6, 9+9, 10+12] \rightarrow v_6 = 12 \rightarrow u_6 = v_6 = 12$$

ويصبح الجدول لدينا:

نقاط الوصول / نقاط الانطلاق	1	2	3	4	5	6	u_i
1	**-**	**9**	**4**	**-**	**15**	**-**	0
2	**12**	**-**	**8**	**3**	**7**	**6**	~~9~~ 6
3	**10**	**2**	**-**	**10**	**6**	**-**	4
4	**-**	**8**	**15**	**-**	**11**	**9**	~~12~~ 9
5	**15**	**7**	**15**	**10**	**-**	**12**	10
6	**-**	**5**	**-**	**7**	**13**	**-**	~~15~~ 12
v_j	0	~~9~~ 6	4	~~12~~ 9	10	~~15~~ 12	

الآن نحدد المسار الأمثل ننظر إلى الحل السابق لدينا النقطة (6) وصلنا إليها من النقطة (2), نعود إلى النقطة (2) وننظر إليها لنجد أننا وصلنا إلى النقطة (2) من النقطة (3), نعود إلى النقطة (3) وننظر إليها لنجد أننا وصلنا إلى النقطة (3) من النقطة (1) وهي نقطة البداية وبالتالي أصبح المسار الأمثل بالشكل التالي:

$6 \to 2 \to 3 \to 1$ وطول المسار يساوي (12).

-ذكرنا أنه ممكن عن طريق الجدول مباشرةً أن نحسب المسار: نقطة النهاية هي النقطة (6), وأصغر قيمة في العمود السادس هي القيمة (6) وهذه القيمة موجودة في السطر الثاني, اذاً ننظر في السطر الثاني ونأخذ أصغر قيمة وهي (2) والقيمة (2) موجودة في السطر الثالث, وننظرإلى السطر الثالث ونأخذ أصغر قيمة موجودة به وهي (4) والقيمة (4) موجودة في السطر الأول, وبذلك نكون وصلنا إلى نقطة البداية وهي النقطة (1).

تحديد المسار:

1- نقطة النهاية هي النقطة (6), نقوم طرح قيم العمود السادس من $V_6 = 12$ ونضع الفرق في عمود سادس جديد (معدل) ثم نضع قيم ال u المقابلة لكل قيمة من قيم العمود السادس ثم نبحث عن مساواة بين قيمة من قيم العمود السادس وقيمة ال u المقابلة لها فنجدها في السطر الثاني $(6 = 6)$ وهي تقابل النقطة (2) أي جئنا الى النقطة (6) عن طريق النقطة (2) $6 \to 2$ونرسم العمود السادس الجديد:

قيم u المقابلة	6
-	-
6	6
-	-
9	$12 - 9 = 3$
10	$12 - 12 = 0$
-	-

2-وصلنا إلى النقطة (2) وبالتالي نقوم بطرح قيم العمود الثاني من $V_2 = 6$ ونضع الفرق في عمود ثاني جديد (معدل) ثم نضع قيم ال u المقابلة لكل قيمة من قيم العمود الثاني ثم نبحث عن مساواة بين قيمة من قيم العمود الثاني وقيمة ال u

المقابلة لها فنجدها في السطر الثالث $(4=4)$ وهي تقابل النقطة (3) أي جئنا إلى النقطة (2) عن طريق النقطة (3) $2 \to 3$ونرسم العمود الثاني الجديد:

2	قيم u المقابلة
-3	0
-	-
4	4
-2	9
-1	10
1	12

3-وصلنا إلى النقطة (3) وبالتالي نقوم بطرح قيم العمود الثالث من $V_3=4$ ونضع الفرق في عمود ثالث جديد (معدل) ثم نضع قيم ال u المقابلة لكل قيمة من قيم العمود الثالث ثم نبحث عن مساواة بين قيمة من قيم العمود الثالث وقيمة ال u المقابلة لها فنجدها في السطر الأول $(0=0)$ وهي تقابل النقطة (1) أي جئنا إلى النقطة (3) عن طريق النقطة (1) وهي نقطة البداية $3 \to 1$ونرسم العمود الثالث الجديد:

3	قيم u المقابلة
0	0
-4	6
-	-
-11	9
-11	10
0	12

وفي النهاية أصبح المسار كالتالي: $1 \to 3 \to 2 \to 6$

ملاحظات:

-هناك فقط طريق واحد للمسار وهو الأقصر

-أحياناً الحل يتطلب مرحلتين للتطوير وبالتالي ستعدل قيم ال u وال v مرة ثانية ونختبر المثالية من جديد

ملاحظة هامة جدا: فصل خوارزمية التدفق الأعظمي مطلوب نظري فقط من الكتاب الجامعي

فصل البرمجة الديناميكية مطلوب نظري فقط من الكتاب الجامعي

~ بالتوفيق ~

الفصل السابع

تحليل الحساسية
SENSITIVITY ANALYSIS

1.7 مفهوم وضرورة تحليل الحساسية :

لقد افترضنا سابقا عند حل نماذج البرمجة الخطية وصولا الى الحل الامثل مجموعة من الفروض منها المعرفة التامة بالامكانيات المتاحة، وكذلك الربح المتحقق من بيع الوحدة الواحدة اضافة الى المعرفة التامة بجوانب المشكلة كافة وكذلك افترضنا ثبات المعطيات الخاصة بالمشكلة جميعها خلال فترة الدراسة وبالاتي يبقى الحل امثل ما دامت المعطيات ثابتة ،واي تغير في المعطيات يمكن ان يؤدي الى تغير الحل ، بمعنى كل تغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف أو في الامكانيات يمكن ان يؤدي الى تغير الحل الامثل ، وهذا التغير ناتج عن تغير في الظروف المحيطة بالمشروع والذي ينجم عن جملة من الاسباب اهمها :

1- **التطور التقني:** ان التطور التقني وخاصة في مجال الانتاج يقدم الجديد باستمرار وهذا يؤدي الى تغير في نوعية المواد المستخدمة واساليب العمل ونوعية الانتاج وبالاتي استخدام افضل للامكانيات المتاحة وتقليل الهدر وبلاتي زيادة الايرادات
2- **التحسن في المواد الاولية :** ان تطور التقنية ينتج عنه تطور الانتاج من سلع او مواد اولية كما ان استخدام تقنيات جديدة يؤدي الى اختلاف الطلب على مواد اولية ذات مواصفات معينة
3- **حالة الاقتصاد العام (رواج – كساد) :** ان الوضع الاقتصادي السائد ينعكس بصورة مباشرة على وضع المشاريع من زيادة الربحية او الخسارة
4- **دورة اليد العاملة :** ان دوران اليد العاملة المدربة من مشروع لاخر ينعكس على نجاح المشروع او فشله

ان الوسيلة المستخدمة لتغطية هذا الموضوع تسمى تحليل الحساسية Sensitivity analysis او تحليل ما بعد المثالية Post Optimality Analysis وهذا التحليل يساعد الادارة على اجابة عن الاسئلة المتعلقة بما قد يحدث لو اجرينا بعض التغيرات او واجهتنا بعض الظروف المتوقعة. او كان هناك خطأ بالتقديرات البيانية لمجموعة العوامل مثل الموارد المتاحة ، والاستخدامات وخبرات الادارة في تخمين التقديرات المستقبلية المتوقعة التي يمكن ان تؤثر في اداء المشروع

اذا تحليل الحساسية يبين لنا : مقدار تاثر الحل الامثل فيما لو حصلت بعض هذه التغيرات

والسؤال الذي يطرح نفسه : ماهو اثر هذه التغيرات في الحل الامثل للمسالة في المجالات الاتية

i. معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف
ii. معاملات المتغيرات غير الاساسية
iii. المصادر المتاحة

هناك الكثير من الطرق لايجاد مدى التغير في المجالات السابقة وسوف نقتصر على الطريقة المبسطة ، والتي تدعى طريقة مابعد الحل الامثل ، اذ تستخدم هذه الطريقة الجدول الاخير او ما يسمى بجدول الحل الامثل ، وسوف ندرس ذلك في الحالات الاتية:

- حالة تعظيم المنفعة
- حالة خفض النفقة (الحالة العامة)

2.7تحليل الحساسية في حالة تعظيم المنفعة:

مثال (1): ليكن لدينا نموذج في البرمجة الخطية الاتي :

دالة الهدف :

$$\max Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3$$

القيود:

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 80$$

$$X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 70$$

$$5X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 96$$

شروط عدم السلبية :

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بحل هذا النموذج وفق طريقة السمبلكس المباشرة حصلنا على جدول الحل الامثل الاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
S_1	0	0	$\frac{8}{21}$	1	$\frac{2}{21}$	$\frac{13}{21}-$	$\frac{572}{21}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{21}$	0	$\frac{5}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{254}{21}$
X_1	1	0	$\frac{26}{21}$	0	$-\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{200}{21}$
Z	0	0	$\frac{53}{21}$	0	$\frac{8}{21}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{1616}{21}$

من الجدول السابق يمكن قراءة الحل الامثل كما ياتي :

متغيرات القاعدة (المشاركة في الحل) هي :

متغيرات اساسية

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 = \frac{254}{21} \\ X_1 = \frac{200}{21} \end{array} \right\}$$

$$S_1 = \frac{572}{21}$$

اما المتغيرات خارج القاعدة (لم تشارك في الحل)(من سطر دالة الهدف) فهي :

$$X_3 = \frac{53}{21} \quad , \quad S_2 = \frac{8}{21} \quad , \quad S_3 = \frac{11}{21}$$

1- تحليل الحساسية لمعاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف :

كثيرا ما تحصل تغيرات في الارباح بالزيادة او بالنقصان والسؤال ماهو تاثير ذلك في الحل الامثل ؟ هل نحتاج الى اجراء تحليل الحساسية عند كل تغير ام لا ؟؟

ان اجراء تحليل الحساسية للمتغيرات الاساسية يمكن القيام به باكثر من طريقة وسوف نقتصر على طريقة واحدة تدعى الطريقة المختصرة التي يمكن تلخيص خطواتها كما يأتي :

1- نحدد المتغير الذي نقوم باجراء تحليل الحساسية له
2- نقوم بقسمة سطر دالة الهدف(z) على صف المتغير الاساسي الداخل في الحل (x)
3- نحدد اصغر ناتج قسمة موجب (القيمة الموجبة الاقرب الى الصفر)ونطرحها من معامل المتغير في دالة الهدف لتمثل **الحد الادني** لمدى تغير هذا المتغير

الحد الادنى= امثال(x) في تابع الهدف - اصغر ناتج قسمة موجب

4- نحدد اصغر ناتج قسمة سالب (القيمة السالبة الاقرب الى الصفر) ثم نضيفها بالقيمة المطلقة الى معامل المتغير في دالة الهدف لتمثل **الحد الاعلى** لمدى تغير هذا المتغير

الحد الاعلى = امثال (x) في تابع الهدف + |اصغر ناتج قسمة سالب|

واعتمادا على الجدول السابق الذي يمثل الحل الامثل نقوم الان بتطبيق الخطوات السابقة لاجراء تحليل الحساسية للمتغيرات الاساسية المشاركة في الحل وذلك كما يلي :

اعتمادا على خطوات الحل السابقة نحدد اولا المتغير الاساس الذي نجري الحساسية له وهو X_1

$\frac{Z}{x_1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{53/21}{26/21}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{8/21}{-4/21}$	$\frac{11/21}{5/21}$
الناتج	تهمل	تهمل	$\frac{53}{26}$ اصغر قيمة موجبة	تهمل	-2 اصغر قيمة سالبة	$\frac{11}{5}$

ناخذ الان اصغر قيمة موجبة ونطرحها من معامل x_1 في دالة الهدف اي ان :

الحد الادنى= امثال(x) في تابع الهدف - اصغر ناتج قسمة موجب

الحد الادنى= $3-\frac{53}{26}=\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{26}}$

ناخذ الان اصغر قيمة سالبة ونضيفها بالقيمة المطلقة الى معامل x_1 في دالة الهدف اي ان :

الحد الاعلى = امثال (x) في تابع الهدف + |اصغر ناتج قسمة سالب|

الحد الاعلى = 3 + | 2- | = 5

اذا

الحد الادنى $\leftarrow$ $\underbrace{\frac{25}{26} \le x_1 \le 5}_{\text{مدى التغير لمعامل } x_1}$ $\rightarrow$ الحد الاعلى

كنتيجة: يبقى الحل مثاليا اذا بقي معامل x_1 ضمن هذين الحدين اما اذا اصبح اكبرمن الحد الاعلى او اقل من الحد الادنى فان الحل سوف يتغير ولا بد من اعادة الحل من الجديد .

وهكذا بالنسبة الىx_2 بالطريقة نفسها فنجد ان مدى التغير يقع ضمن حد اعلى 15 وحد ادنى $\frac{12}{5}$

$$\frac{12}{5} \le x_1 \le 15$$

فالحل لا يتغير اذا بقي الربح من المنتج الثاني ضمن هذين الحدين

اما بالنسبة للمتغير x_3 :

لو عدنا الى جدول الحل الامثل لوجدنا ان x_3 ليس ضمن خطة الانتاج بمعنى ان الانتاج من المنتج الثالث (C) يساوي الصفر والسبب في ذلك ان الربح من المنتج الاول (A) والمنتج الثاني (B) هو اكبر من الربح المتحقق من الوحدة الواحدة من (C) لذلك (C) لم يشارك في الحل .

والسؤال متى يمكن ان يشارك (C) في الحل ؟؟

بما ان معامل x_3 في الجدول الاخير يساوي $\frac{53}{21}$ هذا المقدار من الربح لايؤهله للمشاركة في الحل اما متى يمكن ان يشارك ؟ يمكن ان يشارك بالحل عندما يصبح الربح المتحقق من الوحدة الواحد قيمته اكبر او يساوي امثاله في تابع الهدف+ قيمته في سطر z المثالي اي :

$$\frac{53}{21} + 1 = \frac{74}{21}$$

قيمة x_3 في سطر Z

معامل x_3 في دالة الهدف

اذا لو زادت ارباح المنتج (C) واصبحت اكبر من$\frac{74}{21}$ عندئذ يمكن ان يشارك بالحل اذ سيكون معامله في دالة الهدف في الجدول الاخير يساوي

$$\frac{53}{21} - \frac{74}{21} = -1$$

ولهذا سيكون الجدول المبسط الاخير غير امثل لوجود قيمة سالبة في دالة الهدف

2- تحليل الحساسية للجهة اليمنى:

من الجدول السابق نلاحظ ان الكميات المتاحة في القيد الثاني والثالث قد استغلت بالكامل وبالتالي فان زيادة الامكانيات في هذين القيدين سوف يؤدي الى زيادة الارباح فعلى سبيل المثال نلاحظ انه لو زدنا الامكانات في القيد الثاني بمقدار واحد واحدة فان الانتاج من النوع الثاني (B) سوف يزيد بمقدار $\frac{5}{21}$ وينخفض في الوقت نفسه من النوع الاول(A) بمقدار $\frac{-4}{21}$ وتزداد الارباح بقدار $\frac{8}{21}$

وكذلك الحال بالنسبة للامكانيات في القيد الثالث فان الانتاج من (A) سوف يزيد بمقدار $\frac{5}{21}$ وينخفض (B) بمقدار $\frac{-1}{21}$ ويتحقق ارباح بقدار $\frac{11}{21}$

اما بالنسبة للقيد الاول فنلاحظ وجود فائض من الامكانيات في هذا القيد بمقدار $\frac{572}{21}$ وبالتالي لا تاثير له على زيادة الانتاج ولا على الحل الامثل.

لتحديد مدى تغير بالنسبة الى الجهة اليمنى ويبقى الحل أمثلا نتبع ما يلي:

1- نحدد العمود (الذي يمثل القيد)
2- نقوم بقسمة عمود الثوابت (عمود الحل) على عمود المتغير
3- ناخذ اصغر ناتج قسمة موجب(القيمة الموجبة الاقرب الى الصفر) ونطرحها من قيمة الثابت في الجهة اليمنى لتمثل **الحد الادنى** لمدى تغير

الحد الادنى= قيمة الثابت في الجهة اليمنى - اصغر ناتج قسمة موجب

4- نحدد اصغر ناتج قسمة سالب (القيمة السالبة الاقرب الى الصفر) ثم نضيفها بالقيمة المطلقة الى قيمة الثابت في الجهة اليمنى لتمثل **الحد الاعلى** لمدى تغير هذا المتغير

الحد الاعلى = قيمة الثابت في الجهة اليمنى+ |اصغر ناتج قسمة سالب|

ونعود الان الى جدول الحل الامثل السابق ونحدد عامود الثالث الخاص بالقيد الثالث ونقوم بقسمة عمود الحل عليه فنجد:

- نحدد العمود S_3 الذي يمثل القيد الثالث
- نقوم بقسمة القيم في عمود الحل على قيم في عمود S_3 الذي يمثل القيد الثالث فنجد

$$\frac{200/21}{5/21} = 40 \qquad \frac{572/21}{-13/21} = -44$$

الحد الاعلى = 96 + |44| = 140 الحد الادنى = 96 – 40 = 56

اذا مدى التغير للقيد الثالث :

$$\mathbf{56} \leq S_3 \leq \mathbf{140}$$

اذا يبقى الحل مثاليا اذا بقيت قيمة المدى الثابت (الامكانيات) في القيد الثالث ضمن الحدين السابقين

بالطريقة نفسها نوجد مدى التغير بالنسبة للجهة اليمنى (للامكانيات) في القيد الثاني :

- نحدد العمود S_2 الذي يمثل القيد الثاني
- نقوم بقسمة القيم في عمود الحل على قيم في عمود S_2 الذي يمثل القيد الثاني فنجد

$$\frac{200/21}{-4/21} = -50 \qquad \frac{254/21}{5/21} = 50.8 \qquad \frac{572/21}{2/21} = 286$$

الحد الاعلى =70 + |-50| = 120

الحد الادنى = 70 – 50.8 = 19.2

اذا مدى التغير للقيد الثالث :

$$\mathbf{19.2} \leq \ S_2 \ \leq \mathbf{120}$$

اذا يبقى الحل مثاليا اذا بقيت قيمة المدى الثابت (الامكانيات) في القيد الثاني ضمن الحدين السابقين اما اذا كان التغير اكبر من الحد الاعلى او اقل من الحد الادنى فان الحل الامثل سوف يتغير ولا بد من اعادة الحل من جديد

ويمكن تلخيص النتائج السابقة كما يلي :

1- مدى التغير بالنسبة للمتغيرات الاساسية :

المتغير	حد اعلى	حد ادنى
x_1	5	0.9615
x_2	15	2.4

2- بالنسبة للجهة اليمنى :

المتغير	حد اعلى	حد ادنى
S_1	120	19.2
S_2	140	56

مثـــــال (2):

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الاتي :

دالة الهدف : $\max Z = 5X_1 + 3X_2$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$

القيود: $5X_1 + 2X_2 \leq 10$

شروط عدم السلبية : $X_1, X_2 \geq 0$

بحل النموذج السابق حصلنا على جدول الحل الامثل الاتي :

	X_1	X_2	Y_1	Y_2	B
Z	0	0	$\frac{5}{19}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{239}{19}$
X_1	1	0	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
X_2	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{45}{19}$

من الجدول السابق يمكن القول ان الحل الامثل هو:

$$X_1 = \frac{20}{19} \quad , \quad X_2 = \frac{45}{19} \quad , \quad Z = \frac{235}{19}$$

ايجاد مدى التغير لمعاملات المتغيرات الاساسية(القاعدية):

- نحدد المتغير الاساسي وليكن X_1
- نقوم بقسمة سطر دالة الهدف(z) على صف المتغير الاساسي الداخل في الحل (x)

$\frac{Z}{x_1}$	$\frac{5/19}{2/19}$	$\frac{16/19}{5/19}$
الناتج	$\frac{-5}{2}$	$\frac{16}{5}$

الحد الاعلى = 5 + 2.5 = 7.5

الحد الادنى = 5 − $\left|\frac{16}{5}\right|$ = 1.8

اذا مدى التغير بالنسبة لx_1 :

$$1.8 \leq x_1 \leq 7.5$$

وبنفس الطريقة نجد مدى التغير لx_2: $\quad 2 \leq x_2 \leq 8.333$

✌ **<u>ايجاد مدى التغير بالنسبة للجهة اليمنى:</u>**

بالنسبة للقيد الاول :

- نحدد العمود (الذي يمثل القيد) وهو عمود Y_1
- نقوم بقسمة عمود الثوابت (عمود الحل) على عمود Y_1 نفجد :

20\19 ÷ -2\19 = -10

45\19 ÷ 5\19 = 9

نوجد الان الحد الاعلى والحد الادنى لمدى التغيير

الحد الاعلى = 15+|10|= 25

الحد الادنى = 15 – 9 = 6

مدى التغير الامكانيات في القيد الاول : $\quad 6 \leq Y_1 \leq 25$

تحليل الحساسية للامكانيات في القيد Y_2 فنجد:

الحد الاعلى = 10+|15|= 25

الحد الادنى = 10 – 4 = 6

مدى التغير الامكانيات في القيد الثاني :

$$6 \leq Y_2 \leq 25$$

اذا يبقى الحل مثاليا اذا بقيت الامكانيات في القيد الثاني ضمن المدى السابق.

<u>3.7 السعر الظل:</u>

سعر الظل : يعبر عن السعر الذي يمكن ان تدفعه المنشأة لقاء الحصول على وحدة واحدة من الامكانيات المتاحة . فقد وجدنا ان اضافة وحدة الى القيد الاول يحقق ربحا مقداره 5\19 وهو سعر الظل لهذه الواحدة من القيد الاول.

وهذا يعني انه لو زدنا الكمية من المواد الموجودة في القيد الاول بمقدار وحدة واحدة فسوف يزداد الانتاج من X_2 بمقدار 5\19 وينخفض الانتاج من X_1 بمقدار 19\2- اي ان :

$-\frac{10}{19} = -\frac{2}{19} \times 5$ اما بالنسبة ل X_1 فالزيادة هي $\frac{15}{19} = \frac{5}{19} \times 3$ نجمع القيمتين فنجد : $\frac{5}{19} = \frac{10}{19} - \frac{15}{19}$

$\frac{5}{19}$ هو مقدار الربح من المتحقق من اضافة وحدة واحدة الى القيد الاول .

<u>وعند حساب المدى للقيد الاول وجدنا ان :</u>

20\19 ÷ -2\19 = -10

45\19 ÷ 5\19 = 9

- ❖ ان الرقم (-10) يدل على عدد الوحدات التي يمكن اضافتها دون تغير في تغير في الحل الامثل
- ❖ اما الرقم (9) يدل على عدد الوحدات التي يمكن انتاجها دون تغير في تغير في الحل الامثل.

كذلك الحال في القيد الثاني :

20\19 ÷ 5\19 = 4

45\19 ÷ - 3\19 = -15

- ❖ الرقم (4) يدل على عدد الوحدات التي يمكن انتاجها دون تغير في تغير في الحل الامثل
- ❖ اما الرقم (-15) يدل على عدد الوحدات التي يمكن اضافتها دون تغير في تغير في الحل الامثل.

اذا سعر الظل للامكانيات في القيد الثاني هو $\frac{16}{19}$ وهو السعر الذي تدفعه المنشأة للحصول على وحدة واحدة من المواد في القيد الثاني . وبالتالي فان زيادة وحدة واحدة الى هذا القيد سوف تؤدي الى انخفاض الانتاج من X_2 بمقدار $\frac{-3}{19}$ وزيادة الانتاج من X_1 بمقدار $\frac{5}{19}$ ويتحقق ربح بمقدار $\frac{16}{19}$ ونحصل عليه كما يلي :

5 X 5\19 = 25\19

3 X - 3\19 = - 9\19

أي ان :

$$\frac{-9}{19}+\frac{25}{19}=\frac{16}{19}$$

مقدار الربح من الوحدة الواحدة في القيد الثاني .

4.7 تحليل الحساسية حالة خفض الارباح (الحالة العامة) :

مثال (3):

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الاتي :

$$\min Z = 19X_1 + 13X_2 + 15X_3 + 18X_4$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_4 \geq 7$$

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 5$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

والمطلوب :

1- اوجد مدى التغير بالنسبة الى المتغيرات الاساسية

2- اوجد مدى التغير بالنسبة الى الجهة اليمنى
3- بفرض ان الامكانات في القيد الاول اصبحت 15 هل يتغير الحل الامثل
4- اوجد مدى التغير بالنسبة الى المتغيرات غير الاساسية غير المشاركة في الحل .

بحل هذا النموذج وفق طريقة M حصلنا على الجدول الحل الامثل الاتي:

	X_3	X_4	S_1	S_2	B
X_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$
X_2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}}$
Z	-6	-3	-5	-3	50

<u>الطلب الاول : مدى التغير بالنسبة الى المتغيرات الاساسية:</u>

<u>بالنسبة ل</u> X_1 : نقوم بقسمة سطر Z على سطر X_1:

$\frac{Z}{x_1}$	$\frac{-6}{3/2}$	$\frac{-5}{1/4}$	$\frac{-3}{-1/2}$	$\frac{-3}{-3/4}$
الناتج	4- اصغر قيمة سالبة	20-	6	4 اصغر قيمة موجبة

الحد الاعلى = 19 + | 4- | = 23

الحد الادنى = 19 – 4 = 15

اذا مدى التغير : $\mathbf{15} \leq x_1 \leq \mathbf{23}$

اذا بقي مدى التغير بالنسبة الى المعامل ضمن المدى السابق فالحل لا يتغير

<u>بالنسبة ل</u> X_2 نتبع الخطوات السابقة نفسها ونحصل على مدى التغير

$$\mathbf{9} \leq x_2 \leq \mathbf{14.33}$$

الطلب الثاني : مدى التغير بالنسبة الى الجهة اليمنى:

- لايجاد مدى التغير بالنسبة للجهة اليمنى نقوم بقسمة العمود B على العمود المتغير (غير اساسي) الذي سيخرج من الحل
- ناخذ اصغر حاصل قسمة موجبة ونضيفها الى الامكانات في الجهة اليمنى للقيد ونحصل على **الحد الاعلى لمدى التغير**
- ناخذ اصغر حاصل قسمة سالبة بالقيمة المطلقة ونطرحه من الامكانات في الجهة اليمنى للقيد ونحصل على **الحد الادنى لمدى التغير**

من الجدول الذي يمثل الحل الامثل نجد:

نقوم بقسمة القيم في عمود الحل على قيم في عمود S_1 فنجد :

$\frac{B}{S_1}$	$\frac{11/4}{-3/4}$	$\frac{3/4}{1/4}$
الناتج	$\frac{-11}{3}$ اصغر قيمة سالبة	3 اصغر قيمة موجبة

الحد الاعلى = المورد المتاح + اصغر ناتج قسمة موجب

الحد الاعلى = 7 + 3 = 10

الحد الادنى = المورد المتاح - |اصغر ناتج قسمة سالب|

الحد الادنى = 7 – | -3.66| = 3.34

اذا مدى التغير بالنسبة لامكانات القيد الاول: $\mathbf{3.33 \leq S_1 \leq 10}$

بالنسبة للقيد الثاني S_2 : بنفس الخطوات السابقة نجد مدى التغير :

$$\mathbf{3.5 \leq S_2 \leq 10.5}$$

الطلب الثالث: بفرض ان الامكانات في القيد الاول اصبحت 15:

في حال اصبحت الامكانيات في القيد الاول 15 بدلا من 7 نلاحظ ان (15) لا تقع ضمن مدى التغير بالنسبة S_1 وبالاتي فان هذا التغير سوف يؤدي الى تغير في الحل الامثل .

الطلب الرابع : مدى التغير بالنسبة الى المتغيرات غير الاساسية غير المشاركة في الحل:

بالنسبة الى المتغيرات X_3, X_4 فهي غير مشاركة بالحل نلاحظ انه يترتب عليها تكاليف مرتفعة والسؤال متى يمكن ان تشارك في الحل ؟؟ يمكن ان تشارك اذا اصبحت التكاليف لكل منها كما ياتي :

بالنسبة X_3 : معامله في سطر z في الجدول وفي النموذج هو (15) اذا يمكن ان يشارك في الحل اذا اصبح معاملها اقل من 9 = |6-| – 15

بالنسبة X_4 : يمكن ان يشارك في الحل اذا اصبح معاملها اقل من 15= |3-| – 18

مثال (4):

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الاتي :

$$\min Z = 5X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 5$$

$$2X_1 + X_2 \geq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب :

1) حل النموذج السابق
2) ايجاد مدى التغير لمعاملات الى المتغيرات الاساسية
3) ايجاد مدى التغير الى الجهة اليمنى

الحل :

بحل هذا النموذج وفق احد البرامج المستخدمة لحل النماذج البرمجة الخطية حصلنا على الاجابات الاتية من جدول الحل الامثل :

-1 عدد التكرار = 4 قيمة دالة الهدف = 20

المتغيرات المشاركة في الحل :

المـــتغـــــــــــير	القـــــــــــيمة
X_1	0
X_2	10

المتغيرات غير مشاركة بالحل و سعر الظل :

القيد	المـــتغـــــــــير	القــــــــــيمة	سعر الظل
1	S_1	15	0
2	S_2	0	-2
3	S_3	23	0

مدى تغير لمعاملات المتغيرات الاساسية في دلة الهدف :

المـــتغـــــــــير	القــــــــــيمة	الحد الادنى	الحد الاعلى
X_1	5	-0.6667	0
X_2	2	0	2.5

مدى تغير الجهة اليمنى للقيود :

القـــــــــيد	الحـــد الادنـــى	الحـــد الاعـــلى
1	**0**	**20**
2	**2.5**	**∞**
3	**0**	**30**

مثال (5):

$$\max Z = 120X_1 + 30X_2$$

$$10X_1 + 2X_2 \leq 100$$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 75$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 80$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب :

a) ايجاد مدى التغير لمعاملات الى المتغيرات الاساسية
b) ايجاد مدى التغير الى الجهة اليمنى (الامكانيات المتاحة)
c) بفرض ان ربح من X_1 قد اصبح 126 هل يتغير الحل الامثل
d) بفرض وصول الطلبية من المواد الاولية واصبحت الامكانات من المواد في القيد الاول 160 بدلا من 100 والسؤال هل يتغير الحل الامثل ؟

الحل: بحل هذا النموذج وفق طريقة السمبلكس المباشرة نحصل على الحل الامثل الاتي :

	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	B
Z	0	0	$10\frac{1}{2}$	3	0	1275
X_1	1	0	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{10}$	0	7.5
X_2	0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	12.5
Y_3	0	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{-9}{5}$	1	15

اذا الحل الامثل ن ننتج من :

$X_1 = 7.5$ $\qquad$ $X_2 = 12.5$

الربح $\quad Z = 1275$

فائض $\quad Y_3 = 15$

<u>اولا :مدى التغير للمتغيرات الاساسية</u> :

X_1 الحد الاعلى 120+ 30 = 150

الحد الادنى 120 – 70 = 50

مدى **التغير**: $\mathbf{50 \le X_1 \le 150}$

مدى **التغير**: $\mathbf{24 \le X_2 \le 72}$

اذا يبقى الحل امثلا اذا بقي كلا من X_1 و X_2 ضمن الحدود العليا والدنيا واذا اصبح خارج احدهما فسوف يتغير الحل الامثل ولابد من اعادة الحل

<u>ثانيا : مدى التغير بالنسبة للجهة اليمنى :</u>

بالنسبة للقيد الاول : : $\mathbf{78.6 \le B_1 \le 150}$

بالنسبة للقيد الثاني : $50 \leq B_2 \leq 83.33$:

ثالثا: اذا اصبح ربح من X_1 يساوي 126 نجد من خلال النظر الى مدى التغير ان مقدار الربح الجديد يقع ضمن المدى وبالتالي لا يؤثر هذا التغير في الحل الامثل

رابعا: بما ان الامكانيات المتاحة اصبحت في القيد الاول 160 ومن خلال العودة الى مدى التغير بالنسبة للقيد الاول نجد ان هذه الكمية تقع خارج حدود المدى بالتالي يتاثر الحل الامثل ولا بد من اعادة الحل من جديد .

مســـــــائل عـــــامـــــــة

لديك النموذج الخطي التالي :

$$\max Z = 2X_1 + 4X_2 + 3X_3$$

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 60$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 40$$

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 80$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب :1- حل النموذج السابقايجاد مدى التغير الى المتغيرات الاساسية

2- ايجاد مدى التغير الى الامكانيات المتاحة

3- لو زدنا الامكانات في القيد الثالث واصبحت 100 بدلا من 80 هل يتاثر الحل الامثل ؟ لماذا؟

4- بفرض ان الربح من X_1 اصبح 7 بدلا من 2 هل يتاثر الحل الامثل ؟

لديك النموذج الخطي التالي :

$$\min Z = 4X_1 + X_2$$

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب :

1- حل النموذج السابق

2- ايجاد مدى التغير الى المتغيرات الاساسية

3- ايجاد مدى التغير للجهة اليمنى

تحليل الحساسية في حالة *max*

معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف

X مشاركة في الحل

1- نقسم سطر Z على سطر X المشارك
2- الحد الاعلى =
امثال X+|اصغر ناتج قسمة سالب|
3- الحد الادنى =
امثالX – اصغر ناتج قسمة موجب
نستنتج مدى التغير المسموح به ضمن المجال
ولا يؤثر على الحل الامثل وتغير باتجاهين

X غير مشاركة في الحل

أي X = 0
لا تحليل حساسية له
ويمكن ان يشارك في الحل ويؤثر اذا اصبحت
ارباحه ≤ اكبر من :
امثاله في دالة الهدف +قيمته في سطر Z المثالي
وتتغير باتجاه واحد فقط

الموارد المتاحة (الجهة اليمنى) للقيد

مستغل S غير مشارك

1- نقسم عامود الحل على المورد S
2- الحد الاعلى =
المتاح +|اصغر ناتج قسمة سالب|
3- الحد الادنى =
المتاح – اصغر ناتج قسمة موجب
نجد مدى التغير المسموح به ضمن المجال
حد اعلى ≤ S ≤ حد ادنى

غير مستغل S مشارك

لا تحليل حساسية له
لانه لا يؤثر على الحل الامثل (فائض) واي زيادة فيه خسارة .
واي انخفاض فهو مسموح الى حد القيمة المقابلة له في عمود الحل

سعر الظل : هو السعر الذي يمكن ان تدفعه المنشأة لقاء الحصول على وحدة واحدة من الامكانيات المتاحة او هو مقدار الربح الناتج عند زيادة وحدة واحدة من هذا المورد

اي اضافة وحدة واحدة الى المورد المستقل (غير مشارك) سيؤدي الى زيادة X او نقصانه حسب قيمة الواردة في عمود S المقابل لـX ⟸ زيادة الربح عند Z

$\square + \square = \bigcirc$
$\square + \square = \bigcirc$
z $\square + \square = \bigcirc$

نعوض في تابع الهدف للتاكد

تحليل الحساسية في
حالة *min*

معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف

x مشاركة في الحل

1- نقسم سطر Z على سطر X المشارك

2- الحد الاعلى =

امثال X+|اصغر ناتج قسمة سالب|

3- الحد الادنى =

امثالX – اصغر ناتج قسمة موجب

<u>التغيير باتجاهين</u>

x غير مشاركة في الحل

أي X = 0

لا تحليل حساسية له

ويمكن ان يشارك في الحل ويؤثر اذا اصبحت ارباحه ≥ اصغر من :

امثاله في دالة الهدف – |قيمته في سطر Z المثالي|

<u>وتتغير باتجاه واحد فقط</u>

الجهة اليمنى للقيد

مستغل s غير

1. نقسم عامود الحل على عامود المتغير
2. الحد الاعلى = المتاح +اصغر ناتج قسمة موجب
3. الحد الادنى = المتاح – |اصغر ناتج قسمة سالب|

حد اعلى ≤ S ≤ حد ادنى

s غير مستغل مشارك

لا تحليل حساسية له

لانه لا يؤثر على الحل الامثل