الفصل الأول

المدخل الى نظرية الاحتمالات

Introduction To Probability Theory

تعتبر نظرية الاحتمال علماً قائماً بذاته من بين العلوم المعاصرة ، وله تطبيقات واسعة في شتى مختلف العلوم مثل نظريات المورثات والصبغيات في الكائنات الحية ونظرية الأخطاء ونظرية الحروب وتطبيقات الألعاب الإلكترونية والإحصاء السكاني و الارصاد الجوية وغيرها.

ولعل من أهم من اسس لهذا العلم العالم باسكال (Blaise Pascal 1623-1662) والعالم فيرما (Pierre de Fermat 1601-1665) و برنوللي (Pernoulli 1652-1705) حيث كان الاهتمام على الغالب بألعاب الحظ ومشاكل القمار ليتبعها مسائل التأمين (Insurance) ومنها بدأ بناء المفاهيم والطرائق لعلم الاحتمالات وأخذ يتطور حتى عصرنا الحاضر.

مفاهيم اساسية في نظرية الاحتمالات (Essential Concepts of Probability)

تعاريف :

التجربة : هي كل عملية نحصل منها على مشاهدة (ملاحظة) أو قياس . ونقول عنها إنها تجربة عشوائية، اذا كنا غير قادرين على التنبؤ بنتيجتها بدقة ، مثل :

- قياس كمية الامطار التي تهطل اسبوعياً .
- قياس كمية المياه المستهلكة شهرياً في حي معين.
- قياس مقاومة عينات بيتونية بعد ترطيبها لفترة زمنية معينة.

واذا قمنا بالتجربة لمرة واحدة ، فنقول اننا امام محاولة (Trial) . نقبل عادة أنه لكل تجربة مجموعة من النتائج الممكنة التي تحددها طبيعة الدراسة التي تستهدفها التجربة.

- **الحدث الابتدائي** (Primary Event: (الأولي) : هو كل مجموعة وحيدة العنصر، وعنصرها هذا هو احدى نتائج التجربة.
- **فضاء الاحداث الابتدائية** (أو فضاء العينة Sample Space) : هو مجموعة النتائج الممكنة جميعها لتجربة معينة ونرمز لها بـ Ω. وكل مجموعة جزئية من هذا الفضاء تسمى **حدث**.

اذاً : كل حدث ابتدائي هو حدث عشوائي

Ω الحدث الأكيد هو حدث عشوائي

ϕ الحدث المستحيل هو حدث عشوائي

العمليات على الاحداث :

- **اتحاد حدثين** A و B ونرمز له بـ $A \cup B$ هو الحدث الذي يقع إذا وقع أحدهما، أو كلاهما.
- **تقاطع حدثين** A و B ونرمز له بـ $A \cap B$ هو الحدث الذي يقع إذا وقع الحدثان معاً.

- **الفرق بين حدثين** A و B ونرمز له بـ $A \setminus B$ (أو $A-B$) هو الحدث الذي يقع إذا وقع الحدث A ولم يقع B .

- **الحدثان المتنافيان** : نقول عن الحدثين A و B انهما متنافيان ، اذا كان من المستحيل أن يقعا في آن معاً ، أي : $A \cap B = \phi$ ، ما يعني أن وقوع احدهما ينفي امكانية وقوع الآخر .

- **متمم الحدث** A هو الحدث الذي يحوي جميع أحداث Ω التي لا تنتمي الى A. ونرمز له بـ $\overline{A}$ ومن الواضح عندئذ أن $A \cap \overline{A} = \phi$ و $A \cup \overline{A} = \Omega$.

التعريف التقليدي للاحتمال :

إذا كان فضاء العينة Ω لتجربة ما يتألف من عدد منته من الأحداث الابتدائية (النتائج) ، وكان للأحداث الابتدائية فرصاً متساوية في الوقوع ، فإن احتمال وقوع حدث A (متعلق بهذه التجربة) هو نسبة عدد النتائج المواتية (الموافقة) m لهذا الحدث إلى العدد الكلي n للنتائج الممكنة جميعها أي : $P(A) = \dfrac{m}{n}$

مثال : في تجربة القاء حجري النرد بشكل عشوائي يكون لدينا فضاء العينة :

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),.... \ , \ (2,1),(2,2),... \ , \ .... \ (6,1),(6,2),...(6,6)\}$$

وليكن A الحدث الدال على أن مجموع الوجهين 4 أي : $A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

وليكن B الحدث الدال على أن مجموع الوجهين 6 أي: $B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (5,1), (4,2)\}$

وليكن C الحدث الدال على أن مجموع الوجهين 7 أي: $C = \{(1,6),(6,1), (2,5),(5,2),(3,4), (4,3)\}$

ويكون احتمال وقوع الحدث A هو $P(A) = \dfrac{3}{36}$

ويكون احتمال وقوع الحدث B هو $P(B) = \dfrac{5}{36}$

ويكون احتمال وقوع الحدث C هو $P(C) = \dfrac{6}{36}$

يعرف **التردد النسبي** لحدث بأنه حاصل قسمة عدد مرات وقوع الحدث على عدد المرات التي كررت فيها التجربة (عدد المحاولات) ،

ان استخدام التعريف التقليدي للاحتمال يشترط أن يكون فضاء الأحداث الابتدائية مجموعة منتهية ، وأن يكون لنتائج التجربة الفرص نفسها في الوقوع، ولذلك فإن هذا التعريف يعجز عن دراسة التجارب عندما لا يتحقق أحد هذين الشرطين على الأقل.

التعريف المعاصر للأحتمال

تعريف (الجبر التام) :

إذا كانت $\mathcal{L}$ أسرة مجموعات جزئية من فضاء Ω ، فنقول عن $\mathcal{L}$ انها **جبر** على Ω اذا تحققت الشروط التالية:

أ) $\phi \in \mathcal{L}$ و $\Omega \in \mathcal{L}$

ب) إذا كان $A \in \mathcal{L}$ ، فإن $\bar{A} \in \mathcal{L}$

جـ) إذا كان $A \,,\, B \in \mathcal{L}$ ، فإن $A \cap B \in \mathcal{L}$ و $A \cup B \in \mathcal{L}$.

ويكون $\mathcal{L}$ **جبراً تاماً** إذا تحقق ايضاً الشرط :

$$A_n \in \mathcal{L} \quad , \quad (n = 1, 2, ..., k, \ ...) \ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \ , \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$$

موضوعات الاحتمال

ليكن Ω فضاء الاحداث الابتدائية لتجربة عشوائية ، و $\mathcal{L}$ جبراً تاماً على Ω وليكن P تابعاً حقيقياً معرفاً على $\mathcal{L}$. نسمي P تابع احتمال و $P(A)$ احتمال وقوع الحدث A اذا تحققت الموضوعات الآتية :

1) $P(A) \geq 0$ وذلك أياً كان الحدث A من $\mathcal{L}$.

2) $P(\Omega) = 1$ حيث Ω الحدث الأكيد .

3) أياً كانت المتتالية المنتهية أو غير المنتهية من الحوادث المتنافية $A_1, A_2, ..., A_k, ..$ من $\mathcal{L}$ ، فإن :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup ..) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) + ...$$

وعندئذ نقول عن الثلاثية $(\Omega \,,\, \mathcal{L} \,,\, P)$ إنها فضاء احتمالي .

ينتج من الموضوعات السابقة الخواص الآتية :

1) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

البرهان : في الحقيقة لدينا $A \cap (B \setminus A) = \phi$ و $B = A \cup (B \setminus A)$ فبحسب الموضوعة 3 يكون :

$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ ومنه ينتج $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

2) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$.

3) $0 \leq P(A) \leq 1$ وذلك أياً كان الحدث A .

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

5) $P(\phi) = 0$ و $P(\Omega) = 1$ [لأن $P(\phi) = 1 - P(\Omega)$]

6) أياً كان الحدثان $A \,,\, B$ فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

[لأن : $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$]

وفي حال كان $A\ ,\ B$ متنافيان ، يكون $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$ وهي حالة خاصة من الموضوعة 3

الاحتمال الشرطي والحوادث المستقلة

تعريف : ليكن $(\Omega\ ,\mathscr{L},P)$ فضاءً احتمالياً و $A\ ,\ B$ ، حدثين ، ولنفترض أن $P(B)>0$.

يعرف الاحتمال الشرطي لوقوع حدث A علماً أن B قد وقع بـ **:**

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}$$

وبشكل مشابه يعرف الاحتمال الشرطي لـ B علماً أن A قد وقع بـ **:**

$$P(B|A)=\frac{P(B\bigcap A)}{P(A)}$$

ويكون لدينا عندئذ :

$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B|A)=P(B).P(A|B)$$

تعريف :

نقول عن حدثين $A\ ,\ B$ انهما **مستقلان** اذا كان : $P(A\bigcap B)=P(A)\ .P(B)$ ويمكن أن نستنتج بسهولة أنه إذا كان $A\ ,\ B$ مستقلين فإن $\overline{A}\ ,\ \overline{B}$ مستقلان أيضاً.

وعندئذ وبفرض : $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$ فإن :

$$P(A|B)=P(A) \quad \text{و} \quad P(B|A)=P(B)$$

مثال :

يحوي صندوق على 20 كرة ، 7 منها حمراء و 8 بيضاء و5 منها صفراء . نسحب منه على التوالي ثلاث كرات .

ما احتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة صفراء؟ في كل من الحالتين:

1 – السحب مع الإعادة .

2 – السحب بدون اعادة .

الحل :

1 – الاحداث في هذه الحالة مستقلة ، فإذا رمزنا بـ :

A للحدث الدال على أن الكرة المسحوبة حمراء.

B للحدث الدال على أن الكرة المسحوبة بيضاء.

C للحدث الدال على أن الكرة المسحوبة صفراء.

فإن :

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)=\frac{7}{20}.\frac{8}{20}.\frac{5}{20}=0.035$$

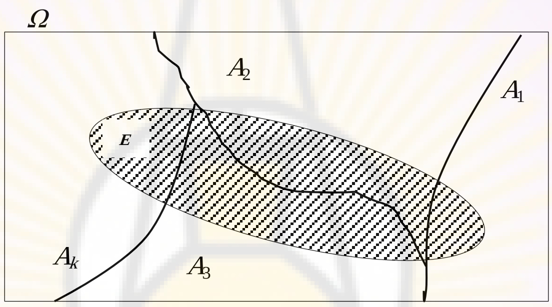
2 – الحوادث هنا مرتبطة والاحتمال المطلوب في هذه الحالة :

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B|A).P(C|AB)=\frac{7}{20}.\frac{8}{19}.\frac{5}{18}=0.04$$

الاحتمال الكلي ودستور بايز

مبرهنة (الاحتمال الكلي) :

ليكن E حدثاً من Ω و $A_1 , A_2 ,..., A_n$ حوادث متنافية تشكل تجزئة لـ Ω - انظر الشكل – عندئذ :



$$E=(E\cap A_1)\cup(E\cap A_2)\cup....\cup(E\cap A_n)$$

بالتالي، وبتطبيق تابع الاحتمال P على الطرفين والاستفادة من دستور الاحتمال الشرطي نجد :

$$P(E)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\,.\,P(E\,|\,A_k)$$

والتي تدعى **صيغة الاحتمال الكلي** .

مثال:

معمل لإنتاج الجدران مسبقة الصنع يحتوي على ثلاث خطوط انتاج I_1 , I_2 , I_3 مساهمة كل منها في الانتاج الكلي هي :

I_1 تنتج 50% من الجدران حيث 3% من انتاجها جدران معيبة .

I_2 تنتج 30% من الجدران حيث 4% من انتاجها جدران معيبة .

I_3 تنتج 20% من الجدران حيث 5% من انتاجها جدران معيبة .

الآن اخترنا وبشكل عشوائي جداراً من انتاج هذا المعمل ، فما احتمال أن يكون معيباً ؟

الحل :

نرمز بـ H_k للحدث الدال على أن الجدار من انتاج الخط I_k ($k=1,2,3$) وبـ D للحدث الدال على أن الجدار المختار معيب . لدينا : $D=(D\cap H_1)\cup(D\cap H_2)\cup(D\cap H_3)$ وباستخدام صيغة الاحتمال الكلي :

$$P(D)=P[(D\cap H_1)\cup(D\cap H_2)\cup(D\cap H_3)]$$

وبما أن الأحداث : $(D\cap H_1)\,,\,(D\cap H_2)\,,\,(D\cap H_3)$ متنافية مثنى مثنى اذاً :

$$P(D)=P(D\cap H_1)+P(D\cap H_2)+P(D\cap H_3)$$

$$P(D)=P(H_1).P(D\,|\,H_1)+P(H_2).P(D\,|\,H_2)+P(H_3).P(D\,|\,H_3)$$

$$P(D)=(0.50)(0.03)+(0.30)(0.04)+(0.20)(0.05)=0.037$$

مبرهنة (صيغة بايز Bayes Formula)

اذا شكلت الأحداث $A_1\,,A_2\,,...,A_n$ تجزئة للفضاء الاحتمالي Ω وكان E حدثاً من Ω ، فعندئذ :

$$P(A_k\cap E)=.\;P(A_k)\;.\;P(E\,|\,A_k)$$

ومنه :

$$P(A_k\,|\,E)=\frac{P(A_k\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A_k).P(E\,|\,A_k)}{P(E)}$$

وبالتالي :

$$P(A_k\,|\,E)=\frac{P(A_k).P(E\,|\,A_k)}{\sum_{\ell=1}^{n}P(A_\ell).P(E\,|\,A_k)}$$

مثال : في المثال السابق اخترنا جداراً ، فوجدناه معيباً أوجد احتمال أن يكون من انتناج الخط الثاني .

الحل :

$$P(H_2\,|\,D)=\frac{P(H_2).P(D\,|\,H_2)}{\sum_{\ell=1}^{n}P(H_\ell).P(D\,|\,H_\ell)}$$

$$P(H_2\,|\,D)=\frac{(0.30).(0.04)}{(0.50).(0.03)+(0.30).(0.04)+(0.20).(0.05)}=\frac{13}{37}=0.325$$

التحليل التوافقي

القاعدة الاساسية للعد :

إذا أمكن اجراء عملية بـ n_1 طريقة مختلفة ، وتلتها (أو واكبتها) عملية ثانية يمكن اجراؤها بـ n_2 طريقة مختلفة ، ......، ...... ، وتلت العمليات السابقة (أو واكبتها) عملية يمكن اجراؤها بـ n_r طريقة

مختلفة ، فإن عدد الطرائق الممكنة لاجراء هذه العمليات بهذا الترتيب هو حاصل الجداء $n_1.n_2.n_3.....n_r$ طريقة مختلفة.

مثال :

واجهة شقة لها نافذة وباب رئيسي ومهيأة للتلبيس بالحجر ، فإذا كنا أمام اربعة نماذج للنافذة وثلاثة للباب وخيارين للحجر . كم عدد التصاميم الممكنة المختلفة للواجهة .

الحل : $4\times3\times2=24$. طريقة مختلفة

تعاريف :

لتكن E مجموعة ما عدد عناصرها n وليكن r عدداً طبيعياً غير معدوم $r\le n$.

- نسمي كل عنصر $(b_1, b_2, ..., b_r)$ من الجداء الديكارتي E^r عينة مرتبة ذات r عنصر من E . إن عدد هذه العناصر المرتبة هو n^r .

- نسمي كل عينة مرتبة ذات r عنصراً مختلفاً من E **ترتيباً** لـ r عنصراً من E . إذا رمزنا الى عدد هذه التراتيب بـ $P(n,r)$ أو A_n^r فلدينا :

$$P(n,r)=A_n^r=n(n-1)(n-2)....(n-r+1)$$

وفي الحالة الخاصة من أجل $n=r$ فإننا نسمي كل ترتيب بـ n عنصراً ، **تبديلاً** للمجموعة E . إذا رمزنا لعدد هذه التباديل بـ P_n يكون لدينا :

$$P_n=P(n,n)=A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times......2\times1=n!$$

وهكذا نجد أن : $A_n^r=P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$.

نسمي كل مجموعة جزئية من E ذات r عنصراً **توفيقاً** بـ r عنصراً من E. فإذا رمزنا لعدد التوافيق بـ $C(n,r)$ أو C_n^r فلدينا : $A_n^r=C_n^r.r!$ ، ومنه :

$$C(n,r)=C_n^r=\frac{n!}{r!.(n-r)!}$$

مثال :

يحوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء . سحبنا عشوائياً كرتين من هذا الصندوق واحدة بعد الأخرى . أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض في كلا الحالتين :

a - اذا كان السحب بدون اعادة .

b - اذا كان السحب مع الاعادة.

الحل :

لنعرف الحوادث الآتية :

$A=\{$الكرة الأولى لونها أبيض$\}$

$B=\{$الكرة الثانية لونها أبيض$\}$

$A\cap B=\{$الكرتان لونهما أبيض$\}$

ان المطلوب هو إيجاد $P(A\cap B)$. وسوف نوجد هذا الاحتمال بطريقتين مختلفتين :

أ – طريقة قاعدة الضرب

a – السحب بدون اعادة :

$$P(B\,|\,A)=\frac{19}{29} \qquad \text{و} \qquad P(A)=\frac{20}{30}$$

وبالتالي يكون:

$$P(A\cap B)=P(A)\ P(B\,|\,A)=\frac{20}{30}\times\frac{19}{29}=0.4368$$

b – السحب مع الاعادة :

$$P(B\,|\,A)=\frac{20}{30} \qquad \text{و} \qquad P(A)=\frac{20}{30}$$

وبالتالي فإن:

$$P(A\cap B)=P(A)\ P(B\,|\,A)=\frac{20}{30}\times\frac{20}{30}=0.4444$$

ب – طريقة التباديل

عدد الطرق لسحب كرتين من 30 = $n(S)$

عدد الطرق لسحب كرتين بيضاوين من 20 = $n(A\cap B)$

ويكون الاحتمال المطلوب : $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$

a – السحب بدون اعادة :

$$n(S)=P(30,2)=30\times 29$$

$$n(A\cap B)=P(20,2)=20\times 19$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{20\times 19}{30\times 29}=0.4368$$

b - السحب مع الاعادة :

$$n(S) = 30 \times 30$$

$$n(A \cap B) = 20 \times 20$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20 \times 20}{30 \times 30} = 0.4444$$

مثال:

يحتوي صندوق على 10 كرات حمراء و20 كرة بيضاء . اخترنا وبشكل عشوائي 4 كرات من هذا الصندوق دون مراعاة الترتيب . أوجد احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء وواحدة بيضاء.

الحل :

لنعرف الحدث A على أنه الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء

عدد الطرق لاختيار 4 كرات من 30 كرة $= \quad n(S)$

عدد الطرق لاختيار 3 كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء $n(A)$

ويكون الاحتمال المطلوب : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

حيث : $n(S) = C_{30}^{4}$ و $n(A) = C_{10}^{3} . C_{20}^{1}$

ويكون الاحتمال المطلوب :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_{10}^{3} . C_{20}^{1}}{C_{30}^{4}} = 0.088$$

مثال :

نسحب خمس أوراق من ورق اللعب (عدد الأوراق 52) والمطلوب حساب الاحتمالات التالية:

a – أن تكون الأوراق الخمس من نوع واحد.(الحدث A)

b – أن تكون ثلاث منها صور واثنتان تحمل كل منهما الرقم 8 .(الحدث B)

c – اثنتان من نوع واثنتان من نوع آخر والخامسة من نوع ثالث.(الحدث C)

d – ورقة واحدة على الأقل تحمل الرقم 6 (الحدث D)

الحل :

إن عدد الحالات الممكنة (الكلية) التي يمكن أن نسحب بها خمس أوراق من أصل 52 ورقة هي :

$$C_{52}^{5} = 2598960$$

a – إن عدد الحالات المواتية (الموافقة) هي:

$$4.C_{13}^{5} = 5148$$

وعليه فإن الاحتمال الموافق :

$$P(A) = \frac{4.C_{13}^{5}}{C_{52}^{5}} = 0.00198$$

b - إن عدد الحالات المواتية (الموافقة) هي:

$$C_{12}^{3}.C_{4}^{2}$$

وعليه فإن الاحتمال الموافق :

$$P(B) = \frac{C_{12}^{3}.C_{4}^{2}}{C_{52}^{5}} = 0.0005$$

c - إن عدد الحالات المواتية (الموافقة) هي:

$C_{4}^{3}.C_{13}^{2}.C_{13}^{2}.C_{13}^{1}$ (حيث C_{4}^{3} عدد الطرق لاختيار ثلاثة أواع من اربعة)

وعليه فإن الاحتمال الموافق :

$$P(C) = \frac{C_{4}^{3}.C_{13}^{2}.C_{13}^{2}.C_{13}^{1}}{C_{52}^{5}} = 0.1217$$

d - لحساب احتمال وقوع الحدث D سننطلق من حساب $P(\overline{D})$ حيث $\overline{D}$ هو الحدث الدال على سحب خمسة أوراق لا يحمل أي منها الرقم 6 . فيكون :

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{C_{48}^{5}}{C_{52}^{5}} = 0.341$$

تمارين المحاضرة الأولى

1 - تقذف خمس قطع من النقود بوقت واحد .

أوجد احتمال وقوع الحدث A :"ظهور شعار واحد على الأقل". (الجواب : $\frac{31}{32}$)

2 - في تجربة ‘لقاء حجر النرد ماهو احتمال ظهور : "رقم فردي أو رقم أقل من 4" ؟ (الجواب : $\frac{2}{3}$)

3 - يحوي صندوق عشر كرات ثلاث منها حمراء والباقي بيضاء . سحبنا من هذا الصندوق كرتين بشكل عشوائي . أوجد احتمال أن تكون كل من هاتين الكرتين المسحوبتين بيضاء.

ملاحظة : أنظر في الحالتين :

a - السحب مع الاعادة (أي نعيد الكرة الأولى الى الصندوق قبل سجب الثانية) (الجواب : 0.49)

b - السحب بدون اعادة (أي سحب الكرة الثانية بدون أن نعيد الأولى) (الجواب : 0.47)

4 - فريق من سبعة لاعبين اختير من أصل 12 لاعباً. لاعب من السبعة لاعبين سينتخب كابتن للفريق وآخر نائباً للكابتن. بكم طريقة يمكن انجاز ذلك ؟ . (الجواب : 33264)

5 – **اذا كان** A و B حدثين مستقلين يرتبطان بتجربة ما, فأثبت أن الحدثين $\bar{B}$, $\bar{A}$ مستقلان أيضاً.

6 - ليكن A و B حدثين مستقلين يرتبطان بنفس التجربة . احتمال وقوع A و B معاً هو 0.16 بينما احتمال عدم وقوع أي منهما هو 0.36 أوجد $P(A)$ و $P(B)$. (الجواب: $P(A)=P(B)=0.4$)

7 – اذا كان احتمال أن يصيب الرامي الأول الهدف 0.8 واحتمال ان يصيب الرامي الثاني الهدف 0.7 ، يطلق كل منهما طلقة واحدة فما هو احتمال أن يصاب الهدف بطلقة واحدة فقط ؟ (الجواب : 0.38)

8 – في طريق بين مدينتين إذا كان احتمال تعرض سيارة مسرعة لحادث هو 0.15 بينما احتمال تعرض سيارة غير مسرعة لحادث في نفس الطريق هو 0.03 واحتمال أن يقود مازن سيارته بسرعة هو 0.20 والمطلوب :

a - إذا قاد مازن سيارته في ذلك الطريق فما احتمال أن يتعرض لحادث؟ (الجواب : 0.054)

b - بفرض أنه قد وقع حادث فما احتمال أن يكون الحادث وقع نتيجة السرعة ؟ (الجواب : 0.556)

9 - لنفرض أن لدينا صندوقين متماثلين . يحوي الصندوق الأول على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء ، بينما يحوي الصندوق الثاني على 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء. اخترنا وبشكل عشوائي صندوق من هذين الصندوقين ثم سحبنا منه كرة واحدة بشكل عشوائي .

a - احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء (الجواب: 0.55)

b - بفرض الكرة المسحوبة سوداء ، فما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟ (الجواب: 0.455)

الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables & Probability Distributions

المتغيرات العشوائية

تعريف : اذا كان $(\Omega , \mathcal{L} , P)$ فضاءً احتمالياً ، فالمتغير العشوائي على هذا الفضاء هو تابع عددي (حقيقي) معرف على فضاء الأحداث الابتدائية (فضاء العينة) :

$$X : \Omega \rightarrow \Re \ , \ \omega \rightarrow X(\omega)$$

بحيث تكون الصورة العكسية لأي مجال I من R حدثاً من Ω ، أي أن $X^{-1}(I) \in \mathcal{L}$.

يرمز عادة للمتغير العشوائي بـ X ، Y ، Z ولقيمه بـ x ، y ، z ويعرف مجموع وجداء متغيرين عشوائيين وجداء متغير عشوائي بعدد كما تعرف على التوابع.

ملاحظة :

نستخدم الرمز $P(X = \alpha)$ لـ :

$$P(X = \alpha) = P\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = \alpha\}$$

وبشكل مشابه :

$$P(a < X \leq b) = P\{\omega \in \Omega : \ a < X(\omega) \leq b\}$$

وهكذا ....

مثال :

في تجربة القاء حجري نرد ومراقبة الوجهين الذين ظهرا يكون فضاء العينة:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),.... , (2,1),(2,2),... , ... (6,1),(6,2),...(6,6)\}$$

وهي مجموعة ثنائيات عددها 36.

نعرف على Ω المتغيرين العشوائيين :

$$X[(a , b)] = \max(a , b) \quad \text{و} \quad Y[(a , b)] = a + b$$

فنجد - على سبيل المثال - :

$$X[(2 , 5)] = Max(5 , 2) = 5 \quad \text{و} \quad Y[(2 , 3)] = Y[(1 , 4)] = 5$$

$$Y^{-1}[2 , 3] = \{(1,1) , (1,2) , (2,1)\} \in \mathcal{L}$$

تابع التوزيع التراكمي (*Cumulative Distribution Function*)

تعريف : إذا كان X متغيراً عشوائياً على الفضاء Ω ، فنقول عن التابع الحقيقي F المعرف بـِ :

$F(x) = P(X \le x)$ على المجال $]-\infty , \infty[$ إنه تابع التوزيع (التراكمي) للمتغير العشوائي X. من الواضح أن قيمة F عند x هي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي العدد x .

ليكن لدينا الآن x_1 , x_2 يحققان العلاقة : $x_1 < x_2$ عندئذ :

$$\{ \omega: X(\omega) \le x_2 \} = \{ \omega: X(\omega) \le x_1 \} \cup \{ \omega: x_1 < X(\omega) \le x_2 \}$$

ومنه :

$$P(X \le x_2) = P(X \le x_1) + P(x_1 < X \le x_2)$$

وبالتالي :

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

خواص تابع التوزيع :

1) $0 \le F(x) \le 1$ وذلك أياً كان x من $]-\infty , \infty[$.

2) اذا كان $x_1 \le x_2$ فإن : $F(x_1) \le F(x_2)$

أي أن F تابع غير متناقص

3) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

4) $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

حيث $F(x_i - 0)$ هي النهاية من اليسار للتابع $F(x)$ في النقطة x_i $(i = 1,2)$.

إذا كان $F(x)$ مستمراً فإن :

$F(x_i - 0) = F(x_i)$ و $P(X = x_i) = P(x_i \le X \le x_i) = F(x_i) - F(x_i) = 0$

المتغيرات العشوائية المتقطعة: (*Discrete Random Variable*)

تعريف :

المتغير العشوائي المتقطع هو متغير عشوائي تكون قيمه إما منتهية أو غير منتهية ولكنها قابلة للعد. إذا كانت قيم المتغير العشوائي X الممكنة المختلفة هي : $x_1, x_2, ..., x_n , ...$

وكان :

$$(*) \qquad P(X = x_k) = p_k \ , \qquad k = 1,2,..., \qquad (\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1)$$

فإننا نسمي الجدول التالي:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X ، كما نقول عن (*) إنه قانون التوزيع الاحتمالي لـ X ، ونقول ان لدينا **توزيعاً احتمالياً متقطعاً** .

يعطى التوزيع المتقطع عادة بدلالة تابع الاحتمال لـ X المعرف بـ :

$$f(x)=\begin{cases} p_k \ , & x=x_k \qquad (k=1,2,\dots) \\ 0 \ , & x\neq x_k \qquad (k=1,2,\dots) \end{cases}$$

حيث : $0\le p_k \le 1$ و $\sum_{all\ k} p_k = 1$

إن تابع التوزيع $F(x)$ لمتغير عشوائي متقطع يعطى بـ : $F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_k\le x} p_k$

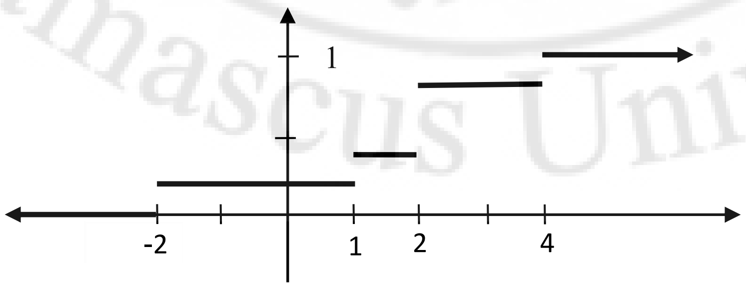
وهو تابع دَرَجي . كما هو موضح في المثال التالي :

مثال (2) : ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعا له جدول التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-2	1	2	4
$P(X=x)$	$1/4$	$1/8$	$1/2$	$1/8$

إن تابع التوزيع التراكمي $F(x)$ لـ X هو :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-2 \\ 1/4 & , \quad -2\le x<1 \\ 3/8 & , \quad 1\le x<2 \\ 7/8 & , \quad 2\le x<4 \\ 1 & , \quad 4\le x \end{cases}$$



المتغيرات العشوائية المستمرة

(*Continuous Random Variables*)

تعريف:

نقول عن المتغير العشوائي X انه مستمر ، إذا وجد تابع حقيقي غير سالب $f(x)$ بحيث يمكن التعبير عن تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X بالصيغة التكاملية الآتية :

$$(*') \qquad F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad , \qquad x \in]-\infty\ ,\ \infty[$$

وعندئذ نقول عن f انه تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X ، كما نقول إنه قد تعرف لدينا توزيع احتمالي مستمر.

نتيجة :

إذا كان $F(x)$ تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X فإننا باستخدام المبرهنة الأساسية في الحساب التكاملي نستطيع أن نحصل على تابع الكثافة الاحتمالية بالعلاقة :

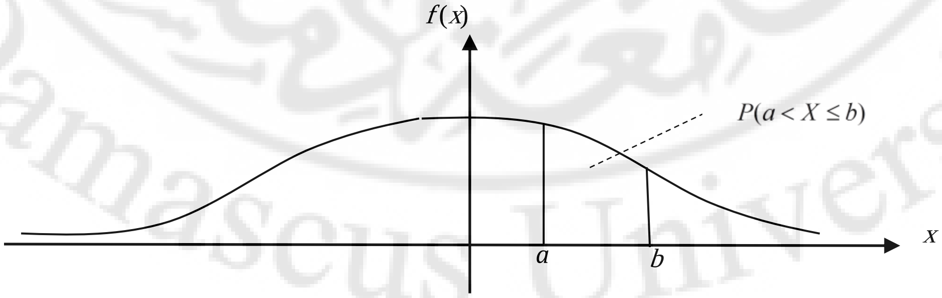
$$f(x) = F'(x)$$

ملاحظة :

نستنتج بسهولة من $(*')$ أن :

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

2) $$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\, dt$$



مثال (3) :

إذا كان : $$f(x) = \begin{cases} kx^2 & , \quad x \in [0,1] \\ 0 & , \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$ والمطلوب :

a) أوجد قيمة k لكي يكون f تابع كثافة احتمالية. b) أوجد قيمة c إذا علمت أن : $P(X \le c) = 0.9$

الحل :

a) لكي يكون f تابع كثافة احتمالية يجب أن يتحقق : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ولما كان :

$$]-\infty , \infty[\; = \;]-\infty , 0[\cup [0 , 1] \cup]1 , \infty[$$

فيصبح التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$0 + k\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad k\frac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

b) لدينا : $P(X \le c) = \int_{-\infty}^{c} f(t)\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{c} f(t)\, dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{c} 3t^2\, dt = c^3 = 0.9$$

ومنه : $c = \sqrt[3]{0.9} = 0.965$

متوسط وتباين توزيع احتمالي

المتوسط :

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ القيم : $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ وكانت $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ الاحتمالات المقابلة على الترتيب [أي أن : $P(X = x_j) = p_j \;, \; j = 1,2,...,$] ، فإن متوسط X (أو قيمة X المتوسطة) يعرف بـ :

$$E(X) = \mu = \sum_{all\, k} x_k\, p_k$$

(المتسلسلة متقاربة)

أما إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً ، وكان $f(x)$ تابع كثافته ، فإن متوسط X يعرف بـ :

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f(x)\, dx$$

(التكامل متقارب)

ملاحظة :

نقول عن توزيع احتمالي إنه متناظر بالنسبة إلى القيمة $x=c$ إذا حقق تابع الكثافة $f(x)$ العلاقة:

$$f(c+x)=f(c-x) \quad , \quad \forall x \in]-\infty,\infty[$$

التباين :

يعرف تباين متغير عشوائي X الذي نرمز له بـ : $Var(X)=D(X)$ بأنه متوسط مربع انحراف X عن متوسطه :

$$Var(X)=D(X)=E[(X-\mu)^2]$$

وبالتالي:

i. إذا كان X متقطعاً فإن :

$$Var(X)=D(X)=\sum_{all\ k}(x_k-\mu)^2.p_k$$

ii. إذا كان X مستمراً فإن :

$$Var(X)=D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2.f(x)\,dx$$

الانحراف المعياري :

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X هو الجذر التربيعي الموجب لتباين X ويرمز له بـ σ

$$\sigma=\sqrt{Var(X)}$$

ملاحظة هامة :

يمكن أن نثبت بسهولة صحة العلاقة :

$$Var(X)=E(X^2)-\mu^2$$

حيث :

$$E(X^2)=\sum_{all\ k}x_k^2 p_k$$ إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2.f(x)\,dx$$ إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً

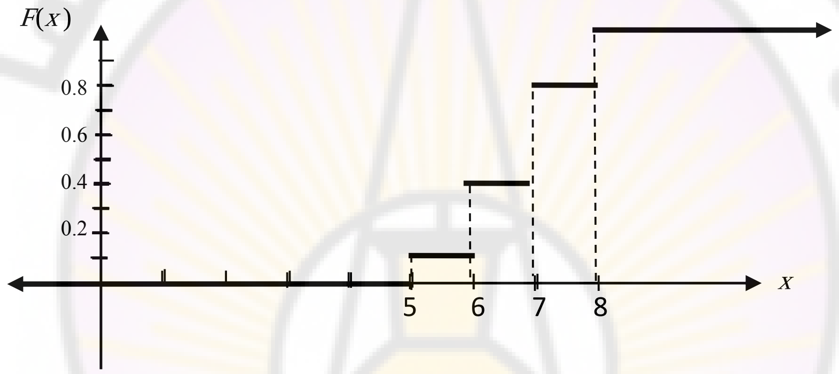
مثال (4) :

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً جدول توزيعه :

X	$x_1 = 5$	$x_2 = 6$	$x_3 = 7$	$x_4 = 8$
$P(X = x)$	$p_1 = 0.1$	$p_2 = 0.3$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$

أوجد $F(x)$ وارسم خطه البياني . أوجد μ , σ^2 .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 5 \\ 0.1 & , \quad 5 \le x < 6 \\ 0.4 & , \quad 6 \le x < 7 \\ 0.8 & , \quad 7 \le x < 8 \\ 1 & , \quad 8 \le x \end{cases}$$



$$\mu = \sum_{all\ k} x_k p_k = 5.\frac{1}{10} + 6.\frac{3}{10} + 7.\frac{4}{10} + 8.\frac{2}{10} = 6.7$$

$$\sigma^2 = \sum (x_k - \mu)^2 p_k = \sum x_k^2 p_k - \mu^2$$

$$= 5^2.\frac{1}{10} + 6^2.\frac{3}{10} + 7^2.\frac{4}{10} + 8^2.\frac{2}{10} - (6.7)^2 = 0.81$$

مثال :

ليكن التابع :
$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x < 1 \\ -x + 2 & , \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

(a) تحقق من أن التابع $f(x)$ تابع كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X ثم ارسم الخط البياني للتابع $f(x)$.

(b) أوجد تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

(c) احسب $P(\frac{1}{2} < X \leq 2)$

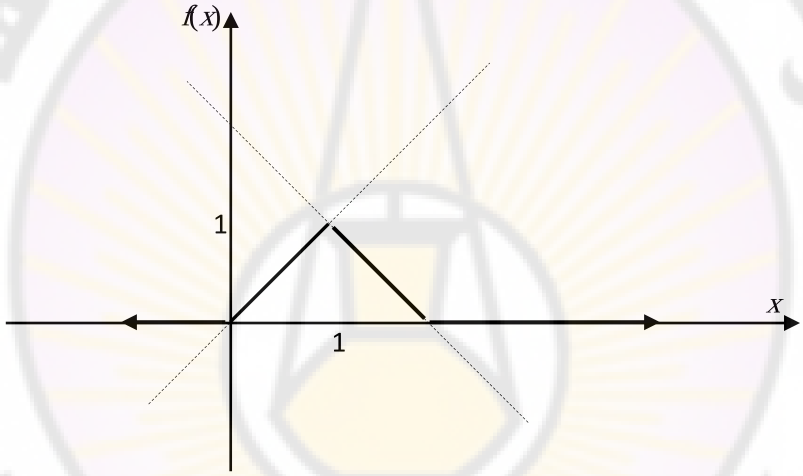
الحل :

(a) لدينا :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 + 0 = 1$$

إذاً f تابع كثافة احتمالية.



(b) من أجل $x < 0$ يكون لدينا : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

من أجل $0 \leq x < 1$ يكون لدينا :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{x} t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

من أجل $1 \leq x \leq 2$ يكون لدينا :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{x} (-t+2)\,dt = \frac{1}{2} + \left.(-\frac{t^2}{2} + 2t)\right|_1^x = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

من أجل $2 < x$ يكون لدينا :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt\ +\int_{0}^{1} f(t)\ dt\ +\int_{1}^{2} f(t)\ dt\ +\int_{2}^{x} f(t)\ dt$$

$$=0+\int_{0}^{1} t\ dt\ +\int_{1}^{2}(-t+2)\ dt\ +0=\frac{1}{2}+(-\frac{t^2}{2}+2t)\Big|_{1}^{2}=1$$

ويصبح تابع التوزيع وبشكل مبسط :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & , \quad 0\le x<1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & , \quad 1\le x\le 2 \\ 1 & , \quad 2<x \end{cases}$$

(c)
$$P(\frac{1}{2}<X\le 2)=F(2)-F(-\frac{1}{2})=1-\frac{(1/2)^2}{2}=\frac{7}{8}$$

توابع المتغيرات العشوائية

ليكن X متغيراً عشوائياً على Ω ولنفرض أن $Y=f(X)$ حيث g تابع ما . عندئذ يكون Y متغيراً عشوائياً على Ω يعطى توقعه وتبانه بـ :

(أ) إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً :

$$\mu_Y\ =E[g(X)]=\sum_{all\ k} g(x_k)\,p_k$$

$$\sigma_Y^2\ =Var(Y)=Var(g(X))=\sum_{all\ k}(g(x_k))^2\,p_k-\mu_Y^2$$

(ب) إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً:

$$\mu_Y\ =E[Y]=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x).\,f(x)\,dx-\mu_Y^2$$

$$\sigma_Y^2\ =Var(Y)=Var(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)]^2.\,f(x)\,dx-\mu_Y^2$$

وبفرض أن c ثابت عددي ، فلدينا الخاص الآتية:

$$E[c] = c \qquad (i) \qquad\qquad E[c.g(x)] = cE[g(x)] \qquad (ii)$$

$$E[g_1(x) + g_2(x)] = E[g_1(x)] + E[g_2(x)] \qquad (iii)$$

وخصوصاً عندما يكون : $g(x) = aX + b$ فلدينا :

$$E[aX+b] = a\,E[X] + b \quad \text{و} \quad Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$$

المتغير العشوائي المعياري :

اذا كان X متغيراً عشوائياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ، فيعرف المتغير العشوائي المعياري Z (وهو تابع لـ X) بـ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

وعندئذ

$$\mu_Z = 0 \quad \text{و} \quad \sigma_Z = Var(Z) = 1$$

مثال :

نال أحد الطلاب السنة الاولى العلامة 82 في مقرر الرياضيات حيث كان المتوسط $\mu = 70$ والانحراف المعياري $\sigma = 10$ ، كما نال العلامة 86 في مقرر الفيزياء حيث كان المتوسط $\mu = 80$ والانحراف المعياري $\sigma = 14$. فإذا كانت العلامة في المقررين تخضع للتوزيع الطبيعي، ففي أي من المقررين يكون موقع الطالب أفضل :

الحل :

ان العلامة المعيارية لعلامة الرياضيات : $Z_1 = \dfrac{82-70}{10} = 1.2$

و العلامة المعيارية لعلامة الفيزياء : $Z_1 = \dfrac{86-80}{14} = 0.43$

نلاحظ أن العلامة المعيارية في الرياضيات اكبر من العلامة المعيارية في الفيزياء وبالتالي فإن موقع الطالب بين زملائه في الرياضيات أفضل من موقعه في الفيزياء

تمارين

1 – ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً جدول توزيعه :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.216	0.432	0.288	0.064

a) أوجد تابع التوزيع الاحتمالي $F(x)$ وارسم خطه البياني .

b) أوجد المتوسط والتباين μ , σ^2 لهذا المتغير العشوائي.

2 – ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{a}(1-\frac{x}{a}) & , \quad if \quad x\in[0,a]\\ 0 & , \quad if \quad x\notin[0,a]\end{cases}$$

a) تحقق من أن التابع $f(x)$ تابع كثافة احتمالية لمتغير عشوائي للمتغير العشوائي X ثم ارسم الخط البياني للتابع $f(x)$.

b) أوجد تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

c) احسب احتمال وقوع المتغير العشوائي X في المجال $[\frac{a}{2}, a]$ (الجواب: ¼)

3 - ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad if \quad x\le 10\\ \frac{10}{x^2} & , \quad if \quad x>10\end{cases}$$

a) أوجد تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

b) احسب الاحتمال $P(x>20)$

الجواب:

a)
$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad if \quad x\le 10\\ 1-\frac{10}{x} & , \quad if \quad x>10\end{cases}$$

$$P(x>20)=\frac{1}{2}$$ (b

4 – ليكن التابع :

$$f(x)=\begin{cases}1+x & , \quad -1\le x<0\\ 1-x & , \quad 0\le x\le 1\\ 0 & , \quad x\notin[-1,1]\end{cases}$$

a) تحقق من أن التابع $f(x)$ تابع كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X ثم ارسم الخط البياني للتابع $f(x)$

b) أوجد تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

c) احسب $P(-\frac{1}{2}<X\le 1)$

الجواب : a)

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<-1\\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & , \quad -1\le x\le 0\\ -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & , \quad 0\le x\le 1\\ 1 & , \quad x>1\end{cases}$$ (b

$$P(-\frac{1}{2}<X\le 1)=\frac{7}{8}$$ (c

5 - ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x & , \quad if \quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ 0 & , \quad f \quad x\notin[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

a) أوجد تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X وارسم خطه البياني.

b) احسب الاحتمال $P(x>\frac{\pi}{6})$.

الجواب : (a

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x+1) & , \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \quad x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(b

$$P(x>\frac{\pi}{6})=0.25$$

6 - ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي:

$$f(x)=\begin{cases} 12xe^{-6x^2} & , \quad if \quad x\ge 0 \\ 0 & , \quad if \quad x<0 \end{cases}$$

احسب المتوسط والتباين μ ,σ^2 لهذا المتغير العشوائي

الجواب : $\mu=0.362$, $\sigma^2=\text{var}(X)=3.07$

7 - ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معطى بتابع التوزيع الاحتمالي الآتي :

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{arctg}\,\frac{x}{2} \quad ; \qquad -\infty<x<\infty$$

والمطلوب :

a) أوجد احتمال أن يأخذ X بنتيجة التجربة قيمة تقع في المجال $[0,2\sqrt{3}]$

b) أوجد القيمة الممكنة x_1 ، التي تحقق الشرط: $P(X>x_1)=\frac{1}{4}$

c) أوجد $f(x)$ تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X

الأجوبة : (a $P(0\le X\le 2\sqrt{3})=\frac{1}{3}$

(b $x_1=2$

(c $f(x)=\frac{2}{\pi}.\frac{1}{4-x^2}$

8 - ليكن التابع :

$$f(x)=\begin{cases} k(2x-x^2) & , \quad 0\le x\le 2 \\ 0 & , \quad x\notin[0\,,\,2] \end{cases}$$

a) أحسب قيمة k ليكون $f(x)$ تابع كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X . ثم ارسم الخط البياني للتابع $f(x)$.

b) احسب كلا من التوقع الرياضي (المتوسط) والانحراف المعياري للمتغير عشوائي X .

c) أوجد تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

d) احسب $P(0 < X \le 1)$.

الأجوبة :

a) قيمة k الموافقة $k = \frac{3}{4}$ b) المتوسط : $\mu = 1$ والانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{\frac{3}{5}}$

c) تابع التوزيع :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{3}{4}(x^2 - \frac{1}{3}x^3) & , \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

d) $P(0 < X \le 1) = \frac{1}{2}$.

الفصل الثالث

التوزيعات الاحتمالية متعددة المتغيرات العشوائية

اذا كنا نراقب كميتين X و Y في تجربة معينة ، فإن كل نتيجة ممكنة للتجربة ستكون ثنائية $(X \ , \ Y) = (x, y)$ (مثلاً كمية الفحم وقيمة اجهاد الخضوع للحديد) وتمثل هذه الثنائية بنقطة في المستوي.

لقد رأينا أن التوزيع الاحتمالي لمتغير X يتعين بتابع التوزيع:

$$F(x) = P(X \le x)$$

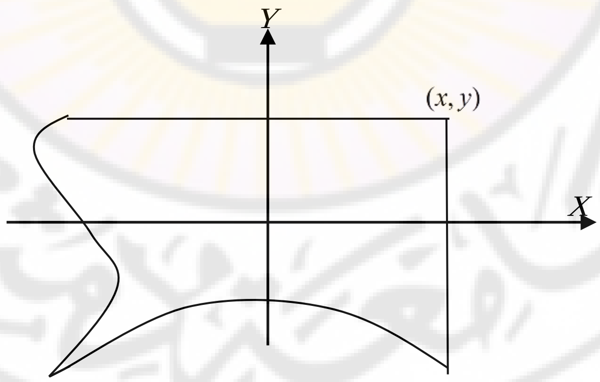
الذي يحقق العلاقة:

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

وبشكل مشابه فإن التوزيع الاحتمالي لمتغيرين عشوائيين X و Y [أو لمتغير عشوائي ثنائي البعد $(X \ , \ Y)$] يتعين بتابع التوزيع:

$$F(x, y) = P(X \le x \ , Y \le y)$$

الذي تكون قيمته عند (x, y) هي احتمال أن تقع الثنائية $(X \ , \ Y)$ في المنطقة المخططة (الممتدة الى $-\infty$ من اليسار والأسفل) :



ولدينا الصيغة الآتية التي يمكن إثباتها بسهولة :

$$P(a_1 < X \le b_1 \ , \ a_2 < Y \le b_2) =$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

التوزيعات الاحتمالية ثنائية البعد المتقطعة:

نقول عن المتغير العشوائي $(X \ , \ Y)$ وعن توزيعه إنهما متقطعان إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها قابلة للعد

سواء كانت منتهية أو غير منتهية ، أي من الشكل : (x_i , y_i) بحيث يكون لكل ثنائية (x_i , y_i) احتمال موجب .
فإذا كان :

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

فإننا نعرف تابع الاحتمال $f(x,y)$ لِـ (X , Y) بِـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} p_{ij} & , \quad x = x_i \ , \ , \ y = x_j \\ 0 & , \quad Otherwise \end{cases}$$

وعندئذ يعطى تابع التوزيع بـ :

$$F(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j)$$

ولدينا :

$$0 \le f(x_i, y_j) \le 1 \qquad , \qquad \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$$

مثال :

إذا ألقينا في الوقت نفسه حجر نرد وقطعة نقود واعتبرنا :

X : متغير عشوائي يدل على الرقم الذي يظهر اعلى حجر النرد.

Y : متغير عشوائي يأخذ القيمة 0 اذا ظهر الشعار والقيمة 1 اذا ظهرت الكتابة.

إن تابع الاحتمال [للمتغير ثنائي البعد (X , Y)] يعطى بالجدول :

Y \ X	1	2	3	4	5	6
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

أما تابع التوزيع $F(x,y)$ فيأخذ مثلاً القيم :

$$F(3,1) = \sum_{x \le 3} \sum_{y \le 1} f(x , y) =$$

$$= f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + f(1,1) + f(2,1) + f(3,1)$$

$$= \frac{6}{12} = 0.5$$

$$F(3,0) = F(1,0) + F(2,0) + F(3,0) = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$F(2,1) = F(1,0) + F(2,0) + F(1,1) + F(2,1) + F(3,0) = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$F(2,0) = \frac{1}{6}$$

لدينا ايضاً :

$$P(2 < X \le 3\ ,\ 0 < Y \le 1) =$$

$$= F(3,1) - F(2,1) - F(3,0) + F(2,0)$$

$$= \frac{6}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$$

التوزيع الهامشي لتوزيع متقطع ثنائي البعد

اذا كان $(X\ ,\ Y)$ متغيراً عشوائياً ثنائي البعد ، تابعه الاحتمالي $f(x,y)$ ، فإن احتمال أن يأخذ X القيمة x في الوقت الذي يأخذ فيه Y أي قيمة ، والذي يعطى بـ : $P(X = x\ , \forall Y)$ هو تابع لـ x ونرمز اليه بـ $f_X(x)$ ولدينا الصيغة :

$$f_X(x) = P(X = x\ ,\ \forall Y) = \sum_y f(x,y)$$

من الواضح أن $f_X(x)$ هو تابع احتمالي لتوزيع ذي متغير عشوائي واحد X نسميه التوزيع الاحتمالي الهامشي لـ X بالنسبة الى التوزيع الثنائي المعطى. إن تابع التوزيع المقابل يعطى بـ :

$$F_X(x) = P(X \le x\ ,\ \forall Y) = \sum_{x^* \le x} f_X(x^*)$$

وبشكل مشابه نعرف تابع الاحتمال الهامشي لـ Y بـ :

$$f_Y(y) = P(\forall X\ ,\ Y = y) = \sum_x f(x,y)$$

عندئذ فإن تابع التوزيع الهامشي المقابل يعطى بـ :

$$F_Y(y) = P(\forall X\ ,\ Y \le y) = \sum_{y^* \le y} f_Y(y^*)$$

مثال :

أوجد التوزيعين الهامشيين لـ X و Y للتوزيع في المثال السابق

الحل :

للحصول على $f_X(x)$ فإننا نجمع الاحتمالات في كل عمود في جدول التوزيع ثنائي البعد فنجد :

x	0	1
$f_X(x)$	$1/2$	$1/2$

التوزيعات الاحتمالية ثنائية البعد المستمرة :

تعريف :

نقول عن المتغير العشوائي ثنائي البعد $(X\ ,\ Y)$، وعن توزيعه الاحتمالي إنهما مستمران ، إذا أمكن كتابة تابع التوزيع بدلالة تكامل ثنائي :

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

حيث أن $f(x,y)$ تابع الكثافة الاحتمالية لـ $(X\ ,\ Y)$.

في هذه الحالة يكون احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي $(X\ ,\ Y)$ أي قيمة في المستطيل :

$$a_1 < X \le b_1 \quad , \quad a_2 < Y \le b_2$$ هو :

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = \int_{x=a_1}^{b_1}\int_{y=a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx$$

لدينا ايضاً :

$$f(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$P\big((X\ ,\ Y) \in D\big) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

إن تابع الكثافة الاحتمالي الهامشي $f_X(x)$ لـ X بالنسبة الى التوزيع العشوائي المستمر ثنائي البعد $(X\ ,\ Y)$ يعطى بالعلاقة :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

أما تابع التوزيع الهامشي لـ X فيعطى بـ :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x^*)\,dx^*$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*,y)\,dy\Big)\,dx^*$$

وبشكل مشابه يعطى فإن تابع الكثافة الاحتمالي الهامشي $f_Y(y)$ لـ Y بالنسبة الى التوزيع العشوائي المستمر ثنائي البعد $(X\ ,\ Y)$ يعطى بالعلاقة :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

وتابع التوزيع الهامشي لـ Y يعطى بـ :

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(y^*)\ dy^*$$

$$=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y^*)dx\ \right)dy^*$$

مثال :

إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير ثنائي البعد $(X\ ,\ Y)$ معطى بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases}10e^{-(5x+2y)} & , \quad x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & , \quad otherwise\end{cases}$$

فأوجد : (أ) $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ (ب) أوجد الاحتمال $P(X>Y)$

الحل :

(أ) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy=\int_{-\infty}^{0} f(x,y)\ dy+\int_{0}^{\infty} f(x,y)\ dy$$

$$f_X(x)=0+\int_{0}^{\infty}10e^{-(5x+2y)}\ dy=\frac{10}{-2}e^{-(5x+2y)}\Big|_0^{\infty}=0+5e^{-5x}$$

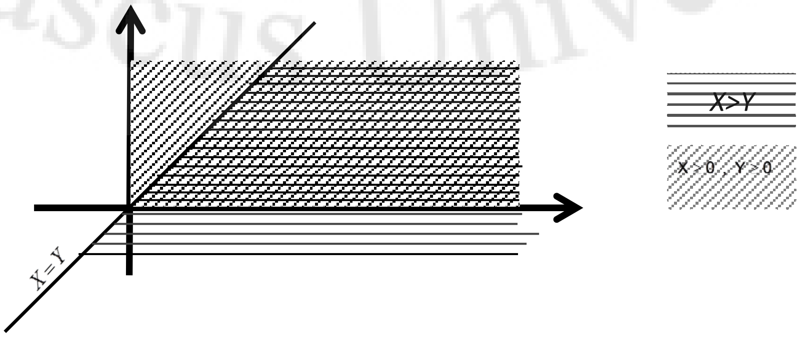
أي أن:

$$f_X(x)=\begin{cases}5e^{-5x} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , x<0\end{cases}$$

وبطريقة مشابهة :

$$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & , \quad y\ge 0\\ 0 & , \quad y<0\end{cases}$$

(ب) $$P(X>Y)\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x} e^{-(5x+2y)}dy\ dx=\frac{1}{15}$$



تعريف :

نقول عن المتحولين العشوائيين X و Y لتوزيع ثنائي البعد $(X\ ,Y)$ تابع توزيعه $F(x,y)$ انهما مستقلان إذا مستقلان إذا كان :

$$F(x,y) = F_x(x) \cdot F_Y(y)$$

و هذا يتحقق اذا وفقط إذا

$$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_Y(y)$$

وذلك أياً كانت الثنائية (x,y) .

فمثلاً X و Y مستقلان في التوزيع المتقطع ثنائي البعد في المثال (7) ، كذلك X و Y في التوزيع ثنائي المستمر البعد هما مستقلان في المثال (9) .

التغاير والارتباط (*The Covariance and Correlation*)

ليكن $(X\ ,Y)$ متغيراً عشوائياً ثنائي البعد $f(x,y)$ تابع كثافته الاحتمالية و $F(x,y)$ تابع التوزيع لـ $(X\ ,Y)$.

إذا كان $g(x,y)$ تابعاً مستمراً معرفاً على الثنائيات (x,y) جميعها ، فإن $Z = g(X,Y)$ هو متغير عشوائي أيضاً.

وعندئذ يعطى تابع الكثافة وتابع التوزيع لـ Z بـ :

أ) في حال $(X\ ,Y)$ متقطع :

$$f(z) = P(Z = z) = \sum\sum_{g(x,y)=z} f(x,y)$$

$$F(z) = P(Z \le z) = \sum\sum_{g(x,y)\le z} f(x,y)$$

ب) في حال $(X\ ,Y)$ مستمر :

$$F(z) = P(Z \le z) = \iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

نسمي العدد $E[g(X,Y)]$ **التوقع الرياضي** لـ $g(X\ ,Y)$ (أو اختصاراً التوقع ، أو المتوسط) ويحسب من العلاقة :

أ) في حال $(X\ ,Y)$ متقطع :

$$E[g(X,Y)] = \sum\sum_{all(x,y)} g(x,y)\,f(x,y)$$

ب) في حال $(X\ ,\ Y)$ مستمر :
$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

فمثلاً إذا وضعنا $g(X\ ,Y)=X$ ، فإننا نجد توقع (متوسط) التوزيع الهامشي :

$$E[Z=X]=\mu_X$$

مبرهنة :

يمكن البرهان بسهولة أن :

(أ)
$$E[X+Y]=E[X\ ]+E[Y]$$

(ب) و إذا كان $X\ ,Y$ مستقلان فعندئذ :
$$E[X\ .\ Y]=E[X\ ]\ .\ E[Y]$$

تعريف : **التغاير**

إذا كان :

$$g(X\ ,Y)=(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$$

فإننا نسمي العدد :

$$Cov(X\ ,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$=E[X\,Y]-\mu_X.\mu_Y$$

تغاير المتغيرين العشوائيين X و Y .

نلاحظ ، استناداً إلى المبرهنة الأخيرة ، أن التغاير لمتغيرين مستقلين يساوي الصفر ، علماً أن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

تعريف : **معامل الارتباط**

نقول عن الكمية :
$$\rho=Corr(X\ ,Y)=\frac{Cov(X\ ,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

إنها معامل ارتباط المتغيرين العشوائيين X و Y . ولدينا :

$$-1\le\rho\le+1\quad,\quad Corr(X\ ,X)=1\quad,\quad Corr(X\ ,-X)=-1$$

مثال : لنفترض أن لدينا التوزيع المتقطع المشترك الآتي :

Y \ X	1	2	3
1	0.15	0.20	0.10
2	0.35	0.05	0.15

(أ) أوجد التوزيع الهامشي لكل من X و Y .

(ب) أوجد متوسط التوزيع الهامشي لكل من X و Y .

(جـ) أوجد التباين لكل من X و Y .

(د) أوجد $Cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$.

الحل :

(أ) جدول التوزيع الهامشي لـ X :

x	1	2	3
$f_X(x)$	0.50	0.25	0.25

جدول التوزيع الهامشي لـ Y:

y	1	2
$f_Y(y)$	0.45	0.55

(ب) المتوسط الهامشي لـ X :

$$\mu_X = 1\times 0.50 + 2\times 0.25 + 3\times 0.25 = 1.75$$

المتوسط الهامشي لـ Y:

$$\mu_Y = 1\times 0.45 + 2\times 0.55 = 1.55$$

(جـ) $$Var(X) = \sigma_X^2 = (1^2\times 0.50 + 2^2\times 0.25 + 3^2\times 0.25) - (1.75)^2 = 0.688$$

$$Var(Y) = \sigma_Y^2 = E[Y^2] - \mu_Y^2 = (1^2\times 0.45 + 2^2\times 0.55) - (1.55)^2 = 0.248$$

(د) يعطى التغاير بـ : $$Cov(X,Y) = E[X\,Y] - \mu_X.\mu_Y$$

$$E[X\,Y] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i.y_j\, f(x_i, y_j)$$

$$= (1)(1)(0.15) + (1)(2)(0.35) + (2)(1)(0.20) +$$

$$(2)(2)(0.05) + (3)(1)(0.10) + (3)(2)(0.15) = 2.65$$

وبالتالي : $$Cov(X,Y) = 2.65 - (1.75)(1.55) = -0.0625$$

يعطى معامل الارتباط بـ : $$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$$\rho = \frac{-0.0625}{\sqrt{(0.688)(0.248)}} = -0.151$$

مثال :اذا كان تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ثنائي البعد $(X \ , \ Y)$ معطى بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{y^2} & , \quad 0 \le x, \le \dfrac{\pi}{2} \quad 1 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad (x,y) \notin [0 \ , \dfrac{\pi}{2}] \times [1,2] \end{cases}$$

فأوجد :

أ) $f_X(x)$ و $f_Y(y)$

ب) $E[X]$ و $E[Y]$ و $Var(Y)$

جـ) احسب الاحتمال $P(X \le \dfrac{\pi}{6} \ , \ Y \ge \dfrac{3}{2})$

الحل :

(أ) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{1} f(x,y)\ dy + \int_{1}^{2} \frac{2\sin x}{y^2}\ dy + \int_{0}^{\infty} f(x,y)\ dy$$

$$= 0 + \int_{1}^{2} \frac{2\sin x}{y^2}\ dy + 0 = 2\sin x \int_{1}^{2} \frac{dy}{y^2} = 2\sin x [-\frac{1}{y}]_1^2 = 2\sin x(-\frac{1}{2}+1) = \sin x$$

أي أن : $$f_X(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad x \notin [0 \ , \dfrac{\pi}{2}] \end{cases}$$

وكذلك فإن : $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x,y)\ dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{y^2}\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f(x,y)\ dx$$

$$= 0 + \frac{1}{y^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\, dx + 0 = \frac{1}{y^2}\ [-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{y^2}$$

أي أن :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{y^2} & , \quad 1 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad x \notin [1,2] \end{cases}$$

(ب)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, f_X(x)\ dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x . \sin x\, dx + 0 =$$

وبالمكاملة بطريقة التجزئة نجد :

$$E[X] = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

وبشكل مشابه :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \,.\, f_Y(y)\ dy = \int_1^2 y \frac{2dy}{y^2} = 2\ln y\Big|_0^2 = 2\ln 2 = 1.386$$

$$Var(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \,.\, f_Y(y)\ dy - (E[Y])^2$$

$$= \int_1^2 y^2 \frac{2dy}{y^2} - (1.39)^2 = 2y\Big|_1^2 - (1.386)^2 = 0.078$$

جـ)

$$P(X \le \frac{\pi}{6}\ ,\ \ Y \ge \frac{3}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{2\sin x}{y^2}\ dy\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin x\ dx \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dy}{y^2} = [-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} \times [-\frac{1}{y}]_{\frac{3}{2}}^{2} = (1)(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$$

تمارين للحل

1- ليكن لدينا التوزيع الثنائي البعد $(X\ ,\ Y)$ (متقطع) معطى بالجدول :

X \ Y	-3	2	4
1	0.1	0.2	0.2
3	0.3	0.1	0.1

(أ) أوجد التوزيع الهامشي لكل من X و Y .

(ب) أوجد متوسط التوزيع الهامشي لكل من X و Y .

(جـ) أوجد تباين كل من X و Y .

(د) أوجد $Cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$.

2- لدينا قطعة نقود معدنية متجانسة كتب على أحد وجهيها الرقم 1 والوجه الآخر الرقم 2 ورباعي وجوه منتظم (هرم ثلاثي) كتبت على وجوهه الأرقام 1-2-3-4 .

نلقي القطعتين معاً وبشكل عشوائي، وليكن X متغيرا عشوائياً يدل على مجموع رقمي الوجهين الذين لا يظهرا (الوجه السفلي) ، وليكن Y متغيراً عشوائياً يدل على الفرق بين رقمي الوجهين السفليين (الذين لا يظهرا) والمطلوب :

(أ) اكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

(ب) ارسم جدول التوزيع المشترك لـ X و Y.

(جـ) أوجد جدول التوزيع الهامشي لكل من X و Y .

(د) أوجد المتوسط الهامشي لكل من X و Y .

(هـ) أوجد التباين الهامشي لكل من X و Y .

(و) أوجد $Cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$.

(ز) أوجد الاحتمال $P(X \le 2, Y \le 2)$.

3- اذا كان تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ثنائي البعد $(X\ ,\ Y)$ معطى بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases} 2xe^{-y} & , \quad 0 \le x, \le 1 \quad , \quad y \ge 0 \\ 0 & , \quad (x,y) \notin [0\ ,1] \times [0,+\infty) \end{cases}$$

والمطلوب :

(أ) أوجد كلاً من $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ ، هل X و Y مستقلان؟.

(ب) أوجد $E[X]$ و $E[Y]$ و $Var(Y)$ و $Cov(X,Y)$

(جـ) احسب الاحتمال: $P(X \le 0.2 \ , \ Y \ge 1.5)$

4- اذا كان تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ثنائي البعد $(X \ , \ Y)$ معطى بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & , \quad 0 \le x, \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \quad (x,y) \notin [0\ ,1] \times [0,1] \end{cases}$$

والمطلوب :

(أ) أوجد $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ ، هل X و Y مستقلان؟.

(ب) أوجد μ_X و μ_Y و σ_X^2 و σ_Y^2 .

(جـ) احسب الاحتمال: $P(0.1 \le X \le 0.2 \ , \ 0.5 \le Y \le 1)$.

(د) أوجد $Cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$.

الفصل الرابع

بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

توزيعات متقطعة

التوزيع الثنائي : (*Binomial Distribution*)

هو توزيع متقطع نحصل عليه عندما نكون أمام تجربة تم تكرارها عدد محدد من المرات وكل مرة هناك احتمال للنجاح أو الفشل.

فإذا افترضنا أن التجربة تكررت n مرة ، وكان احتمال النجاح في كل مرة يساوي p (وبالتالي فإن احتمال الفشل هو احتمال وقوع الحدث المتمم $q = 1 - p$) ، فإننا نأخذ المتغير العشوائي X الذي يدل على عدد مرات النجاح .

إن X يمكن أن يأخذ القيم : $0,1,2,\cdots,n$ ، ونريد أن نجد الاحتمالات المقابلة لكل من هذه القيم . إذا كانت x إحدى هذه القيم (أي $X = x$) معنى ذلك أنه من اصل n محاولة نجحنا بـ x محاولة وبالتالي يكون عدد مرات الفشل $n-x$ مرة . وإذا رمزنا بـ A للحدث "نجاح" وبـ B للحدث "فشل" يمكن أن نعبر عن ذلك بالنسق : $\underbrace{A,A,A,\cdots A}_{(x)\ times} , \underbrace{B,B,,\cdots B}_{(n-x)\ times}$ وبالتالي فإنه يبرهن أن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يعطى بالصيغة الرياضية :

$$f(x) = P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad (x = 0,1,2,3\cdots,n) \qquad (*)$$

نسمي التوزيع الذي يكون تابع احتماله من الشكل السابق التوزيع الثنائي ، كما نقول عن p إنه احتمال النجاح في المحاولة الواحدة.

إن متوسط التوزيع الثنائي وتباينه هما :

$$\mu = np \qquad , \qquad \sigma^2 = npq$$

مثال :

في تجربة القاء حجر النرد اربع مرات ما هو احتمال الحصول على الوجه 6 مرتين على الأقل؟

الحل :

نلاحظ اننا أمام تجربة كررناها أربع مرات ($n = 4$) وفي كل تكرار لدينا احدى الحالتين ، إما الحصول على الوجه 6 (نجاح) أو عدم الحصول على الوجه 6 (فشل) .

وكما رأينا سابقاً فإن احتمال النجاح $p = \frac{1}{6}$ واحتمال الفشل $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ وعليه فإننا أمام التوزيع الثنائي بالوسيطين $p = \frac{1}{6}$, $n = 4$ فإذا رمزنا بـ X للمتغير العشوائي الدال على عدد مرات النجاح فيكون المطلوب $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$ وباستخدام قانون التوزيع الاحتمالي الثنائي (*) :

$$P(X \geq 2) = C_4^2 (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{4-2} + C_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} + C_4^4 (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^{4-4}$$

$$P(X \geq 2) = \frac{4!}{2!\,.\,(4-2)!} (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{4-2} + \frac{4!}{3!\,.\,(4-3)!} (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} + \frac{4!}{4!\,.\,(4-4)!} (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^{4-4}$$

$$P(X \geq 2) = 6(\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{4-2} + 4(\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} + 1(\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^{4-4} = 0.132$$

طريقة أسرع : يمكن الوصول إلى النتيجة ذاتها بحساب احتمال الحدث المعاكس للحدث $X \geq 2$ أي نوجد $P(X < 2)$ على الشكل :

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= C_4^0 (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^4 + C_4^1 (\frac{1}{6})^1 (\frac{5}{6})^3 = (\frac{5}{6})^4 + 4(\frac{1}{6})^1 (\frac{5}{6})^3 = 0.868$$

ومنه نجد :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.868 = 0.132$$

ملاحظة : يمكن أن تستفيد من خواص التوافيق لإنجاز الحسابات بشكل اسرع $C_n^0 = 1$ و $C_n^1 = n$.

توزيع بواسون : (*Poisson Distribution*)

توزيع بواسون هو توزيع متقطع وغالبا ما يستخدم لوصف الحالات التي يكون فيها عدد من الاحداث خلال فترة زمنية أو منطقة محددة أي عندما نكون أمام معدل - متوسط - نسبة - .... مثلاً عدد السيارات العابرة خلال فترة زمنية – عدد المكالمات الواردة الى مقسم كل عشر دقائق - ....

يعطى التابع الاحتمالي لهذا التوزيع بـ :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (x = 0,1,2,3 \cdots\cdots) \qquad (**)$$

حيث يمثل المتغير العشوائي X عدد الأحداث في تلك الفترة بينما يمثل λ معدل وقوع تلك الأحداث في تلك الفترة.

إن متوسط و تباين توزيع بواسون هما :

$$\mu = \lambda \qquad , \qquad \sigma^2 = \lambda$$

مثال :

عند عمل آلة فإنه تظهر أعطال من وقت لآخر . فإذا كان متوسط (معدل) الأعطال في اليوم الواحد يساوي 1.5 فالمطلوب ايجاد:

(a) احتمال عدم ظهور أي عطل في فترة يومين.

(b) احتمال ظهور عطل واحد على الأقل في يوم واحد .

(c) احتمال ظهور ثلاثة أعطال فأكثر خلال اسبوع واحد .

الحل :

(a) إن معدل ظهور عطل في فترة يومين $\lambda = 1.5 \times 2 = 3$ وعدم ظهور أي عطل يعني $x = 0$ وباستخدام توزيع بواسون :

$$P(X=0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} \quad = 0.0502$$

(b) احتمال ظهور عطل واحد على الأقل في يوم واحد ($\lambda = 1.5$) . أي $x = 1, 2, \cdots$ وبالتالي لا يمكننا حساب عدد لانهائي من الحدود المقابلة لكل قيمة لـ x لذلك نلجأ الى حساب احتمال الحادث المعاكس (نفي $X \geq 1$) أي $X < 1$ وبالتالي :

$$P(X<1) = P(X=0) = \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} \quad = 0.223$$

وعليه يكون : $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.223 = 0.777$

(c) من أجل حساب احتمال ظهور ثلاثة أعطال فأكثر خلال اسبوع واحد فإن المعدل خلال اسبوع $\lambda = 1.5 \times 7 = 10.5$ وبالتالي :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$

$$= 1 - [\frac{10.5^0}{0!} e^{-10.5} + \frac{10.5^1}{1!} e^{-10.5} + \frac{10.5^2}{2!} e^{-10.5}] = 0.9996$$

ملاحظة :

في حالة خاصة يمكن الباس التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون عندما يكون $n > 20$ و $p < 0.05$ أو عندما يكون : $n > 100$ و $np < 10$

مثال :

خزان مياه يزود أحد الأحياء بمياه تتجدد يومياً . احتمال أن يون الماء عكراً في يوم ما هو 0.01 ، ماهو احتمال أن تكون المياه عكرة أكثر من يومين في خلال مائة يوم؟

الحل :

نلاحظ وكأننا أمام تجربة تكررت 100 مرة وفي كل مرة يمكن أن نحصل على نجاح باحتمال $p = 0.01$ أو فشل باحتمال $q = 0.99$. فالتفكير أول ما يتجه الى استخدام التوزيع الثنائي ولكن المطلوب حساب $P(X \geq 3)$ ولكن مع ملاحظة أن $p < 0.05$ وأن $n > 20$ وأن المتوسط $\mu = np = 1 = \lambda$ فيمكن الباس هذا التوزيع بتوزيع بواسون بالوسيط $\lambda = 1$ وبالتالي يكون وبفرض X هوالمتغي العشوائي الدال على عدد أيام حصول نجد:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$

$$=1-[\frac{1^0}{0!}e^{-1}+\frac{1^1}{1!}e^{-1}+\frac{1^2}{2!}e^{-1}]=1-0.92=0.08$$

التوزيع الهندسي : (*Geometric Distribution*)

وهو توزيع متقطع نحصل عليه عندما نوجه اهتمامنا إلى عدد الاخفاقات $X=k$ $(k=1,2,\cdots)$ التي تسبق الوصول إلى أول نجاح وذلك عندما نقوم بمحاولات متتالية للتجربة نفسها.

اذا كان $f(x)=P(X=x)$ تابع التوزيع الاحتمالي الهندسي للمتغير العشوائي X ، فعندئذ لدينا :

نجاح في المحاولة الأولى : $f(0)=P(X=0)=p$

نجاح في المحاولة الثانية (إخفاق واحد): $f(1)=P(X=1)=p(1-p)$

نجاح في المحاولة الثالثة (إخفاق مرتين): $f(2)=P(X=2)=p(1-p)^2$

وهكذا .. :

$$f(x)=P(X=x)=p(1-p)^x\quad,\qquad(x=0,1,2,3\cdots\cdots)$$

مثال :

يسدد أحد لاعبي كرة السلة باتجاه السلة ، فإذا كان احتمال التسجيل $p=0.85$.

(أ) أوجد احتمال أن يخفق في التسجيل أول مرة وينجح في الثانية .

(ب) أوجد احتمال أن يخفق في التسجيل في المرة الأولى والثانية وينجح في الثالثة .

التوزيع المنتظم المتقطع

اذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ القيم : $1,2,\cdots,n$ وكانت النتائج المقابلة لهذه القيم متساوية الفرص في الوقوع ، فإن تابع الاحتمال لـ X يعطى بـ :

$$f(x)=\frac{1}{n}\quad,\qquad n=1,2,3,\dots,n$$

نقول عن التوزيع المعرف بهذه الطريقة إنه التوزيع المنتظم المتقطع ، و نقبل بدون برهان أن المتوسط والتباين يعطيان بـ :

$$\mu=\frac{n+1}{2}\qquad و\qquad \sigma^2=\frac{n^2-1}{12}$$

أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة

التوزيع الطبيعي : (*Natural Distribution*)

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المستمرة وأكثرها استخداماً وقد أدخل من قبل العالم "غاوس" وتابع الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع هو :

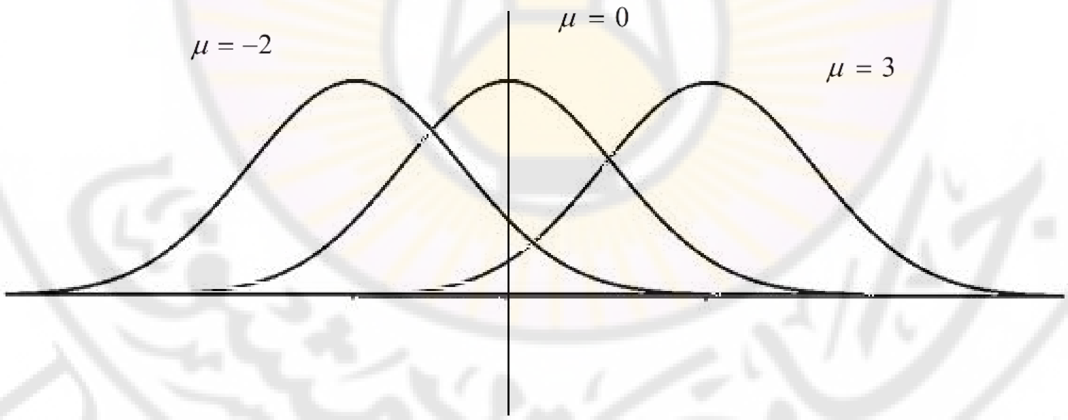
$$(***) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad , \qquad -\infty < \mu < \infty$$

حيث μ و $\sigma > 0$ هما وسيطان والتابع $f(x)$ يتعين بشكل كامل بواسطة قيم هذين الوسيطين.

وهكذا فإننا نقول : إن للمتغير العشوائي المستمر X التوزيع الطبيعي (أو إنه يخضع للتوزيع الطبيعي) بوسيطين μ و σ إذا كان لـ X تابع الكثافة الاحتمالية $(***)$ ونرمز لذلك اختصاراً بـ :

$$X \sim N(\mu , \sigma)$$

إن منحني التابع $y = f(x)$ متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \mu$ والشكل يبين المنحني من أجل بعض القيم المختلفة لـ μ .



إن تابع التوزيع $F(x)$ للتوزيع الطبيعي يعطى بـ :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt$$

وبالتالي فإن احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي الطبيعي X أي قيمة في المجال $a < x \leq b$ هو :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

إن حساب هذا التكامل غير ممكن بالطرق المعروفة في الحساب التكاملي ، ولكن يوجد جداول تعطي قيمته من أجل بعض القيم المختلفة لـ x و μ (المتوسط) و σ (الانحراف المعياري) وقد اقتصرت هذه الجداول

على حالات خاصة وهي $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ والتي من أجلها تم اعداد تلك الجداول والتي من أجلها تم ترميز تابع التوزيع (بـعد فرض $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$) :

$$F(x) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

حيث : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ وهو متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 0$ وانحراف معياري $\sigma = 1$ ولدينا العلاقة :

$$F(x) = \Phi(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \Phi(Z)$$

والصيغة :

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

ملاحظة:

يمكن الاستغناء عن الجداول الموجودة في نهاية كتاب الرياضيات المتقدمة للمهندسين (4) واستخدام الآلة الحاسبة العلمية . فمثلاً لإيجاد $\Phi(0.82)$ باستخدام الآلة CASIO 991ES أو ما يندرج ضمن هذه السلسلة وفق الخطوات التالية :

a) MODE ثم الخيار رقم 3 (STAT) ثم AC

b) SHIFT ثم 1 ، ثم الخيار رقم 7 (DISTR) .

c) من القائمة الناتجة نأخذ الخيار 1 [P( ]

d) ندخل القيمة 0.82 ونضغط = (ENTER) فنحصل على القيمة 0.79389 .

ملاحظة هامة :

إن الحساب المعاكس غير ممكن بواسطة الآلات الحاسبة أي لحساب Z في التركيب $\Phi(z) = 0.79389$ وهذا لا يتم الا بالدخول الى داخل الجدول واستخراج القيمة 0.82 من الهامش اليساري والعلوي للجدول .

ملاحظة اهم :

يمكن لمن يتقنون العمل على برنامج MICROSOFT EXCEL الاستغناء عن الجداول والآلات الحاسبة لحساب $\Phi(0.82)$ من التابع NORMSDIST(Z) وهو اختصار للعبارة NORMAL STANDARD (DISTRIBUTION) أي التوزيع الطبيعي المعياري ، كما أنه بالإمكان حساب قيمة Z في العبارة $\Phi(z) = 0.79389$ من التابع NORMSINV(PROBABILITY) وهو اختصار للعبارة NORMAL (STANDARD INVERT) ويقصد به التوزيع الطبيعي المعياري المعاكس.

ملاحظة اهم وأهم وأهم :

بإمكان مستخدمي برنامج MICROSOFT EXCEL استخراج الاحتمالات و الحساب المعاكس بدون اللجوء الى التوزيع الطبيعي المعياري أي حساب $F(x)=?$ من الدالة NORMDIST أو الحساب المعاكس $F(?)=a$ من الدالة NORMINV .

مثال :

إذا كان X متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه $\mu=80$ و تباينه $\sigma^2=9$ ، فأوجد : $P(X\le 80)$ و $P(X>83)$ ثم $P(78<X\le 82)$.

الحل :

$$P(X\le 80)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{80-80}{3})=P(Z\le 0)=\Phi(0)=0.5$$

$$P(X>83)=1-P(X\le 83)=1-F(83)$$

$$=1-\Phi(\frac{83-80}{3})=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587$$

$$P(78<X\le 82)=P(\frac{78-80}{3}<\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{82-80}{3})=P(-\frac{2}{3}<Z\le\frac{2}{3})=$$

$$=\Phi(\frac{2}{3})-\Phi(-\frac{2}{3})=0.7475-0.2525=0.495$$

ملاحظة :

إذا كانت $X_1,X_2,.......,X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة وكانت $\alpha_1,\alpha_2,........,\alpha_n$ ثوابت عددية ، فإن للمتغير العشوائي :

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$$

المتوسط والتباين :

$$\mu_Y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_i \quad \text{و} \quad \sigma_Y^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i^2$$

حيث μ_i و σ_i^2 متوسط وتباين المتغير العشوائي X_i .

وإذا كانت X_i جميعها تخضع للتوزيع الطبيعي فإن Y أيضاً يخضع للتوزيع الطبيعي.

التوزيع المنتظم : (*Regular Distribution*)

ويعتبر شبيهاً مستمراً للتوزيع المنتظم المتقطع. نقول أن للمتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمه على المجال $[a,b]$ توزيعاً منتظماً ، إذا كان لـ X تابع الكثافة :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & , \quad x\in[a\ ,\ b]\\ 0 & , \quad x\notin[a\ ,\ b]\end{cases}$$

ويمكن حساب المتوسط والتباين لهذا التوزيع بسهولة لنجد أن :

$$\mu=\frac{b+a}{2} \qquad \text{و} \qquad \sigma=\frac{(b-a)^2}{12}$$

كما أن تابع التوزيع له :

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<a\\ \dfrac{1}{b-a}(x-a) & , \quad x\in[a\ ,\ b]\\ 1 & , \quad x>b\end{cases}$$

توزيع كاي مربع χ^2 : $(Chi\ Square\ -\ Distribution\ )$

نقول أن للمتغير العشوائي X توزيع χ^2 بـ n درجة الحرية ، ونرمز له بـ χ_n^2 ، إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية لـ X معطى بـ :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}\,.\,e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,.\Gamma(\frac{n}{2})} & , x>0\\ 0 & , x\le 0\end{cases}$$

حيث أن التابع غاما يعطى بالعلاقة :

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\ dt$$

ويحقق الخواص :

$$i\ )\ \ \Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha) \quad , \quad ii\ )\ \ \Gamma(n+1)=n! \quad , \quad iii\ )\ \ \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

ويمكن البرهان باستخدام خواص التابع غاما أنه إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع كاي مربع فإن متوسط وتباين X :

$$E[\chi_n^2]=n \quad ، \quad Var(\chi_n^2)=2n$$

ملاحظة : إذا كانت X_i حيث $(i=1,2,\cdots,n)$ متغيرات عشوائية متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها التوزيع الطبيعي : $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i)$ فعندئذ يكون للمتحول العشوائي $\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i})^2$ توزيع كاي مربع بـ n درجة حرية.

نتيجة :

إذا كان Z متغيراً عشوائياً له توزيع طبيعي معياري، فإن لـ Z توزيع كاي مربع بدرجة حرية واحدة، أي أن $Z^2 = X_1^2$ ، وبالتالي فإن متوسط Z^2 وتباينه هما :

$$E[Z^2]=1 \qquad , \qquad Var(Z^2)=2$$

مثال :

لدينا المتغيرات العشوائية الطبيعية المستقلة الثلاثة الآتية :

$$X_1 \sim N(68,9) \ , \qquad X_2 \sim N(83,12) \qquad , \qquad X_3 \sim N(63,17)$$

أوجد متوسط وتباين المتغير :

$$Y=(\frac{X_1-68}{9})^2+(\frac{X_2-83}{12})^2+(\frac{X_3-63}{17})^2$$

الحل : إن لـ Y توزيع كاي مربع بـ 3 درجات حرية ، وبالتالي :

$$E[Y]=n=3 \qquad , \qquad Var(Y)=2n=6$$

توزيع ستودنت (التوزيع *t*) :

نقول إن للمتغير العشوائي المستمر T_n توزيع ستودنت بـ n درجة حرية ، إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية لـ T_n معطى بـ :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

حيث $n>0$ عدد صحيح $-\infty<x<+\infty$.

ويمكن التحقق من أن :

$$E[T_n]=0 \qquad , \qquad Var(T_n)=\frac{n}{n-2} \qquad , \qquad (n>2)$$

إن توزيع ستودنت متناظر بالنسبة إلى المتوسط $\mu=0$ ، ويقارن عادة بالتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ ، وعندما يصبح n كبيراً $(n\geq 30)$ فإن التوزيع T يقارب التوزيع الطبيعي $N(0,1)$.

التوزيع الأسي :

نقول إن للمتغير العشوائي المستمر X التوزيع الأسي إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية لـ X من الشكل :

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\, e^{-\lambda x} & ,0\le x<\infty\\ 0 & ,\quad x<0\end{cases}$$

حيث $\lambda>0$. ونستطيع أن نجد بسهولة متوسط وتباين التوزيع الأسي :

$$\mu=E[X]=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^\infty x\, d(e^{-\lambda x})=$$

$$=-[xe^{-\lambda x}\,|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{e^{\lambda x}}+\frac{0}{e^0}+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\,|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2=Var(X)=E[X^2]-\mu^2$$

$$=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

مثال :

إذا كان لـ X التوزيع الأسي فأوجد : $P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)$.

الحل :

وجدنا أن $\mu=\frac{1}{\lambda}$ و $\sigma=\frac{1}{\lambda}$ ، عندئذ :

$$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=P(-\frac{1}{\lambda}<X\le\frac{3}{\lambda})$$

$$=\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{\frac{3}{\lambda}}f(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{0}f(x)\,dx+\int_0^{\frac{3}{\lambda}}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{0}0\,dx+\int_0^{\frac{3}{\lambda}}\lambda\, e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= 0 - e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\frac{3}{\lambda}} = -e^{-3} + 1 = 0.95$$

توزيع غاما :

نقول إن للمتغير العشوائي المستمر X توزيع غاما، إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية لـ X من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} & , \ x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

يمكن حساب المتوسط من :

$$E(X) = \mu = \int_0^{\infty} x \, . \, \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1} \, . \, e^{-\lambda x} = \frac{r}{\lambda}$$

والتباين من :

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, . \, \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1} \, . \, e^{-\lambda x} \ dx - (\frac{r}{\lambda})^2 = \frac{r}{\lambda^2}$$

تمارين

1 – اذا كان احتمال أن يصيب رامٍ الهدف هو 0.7 ، فإذا أطلق هذا الرامي 6 طلقات نحو الهدف فما هو احتمال أن :

أ . يصيب الهدف بثلاث طلقات (الجواب: 0.185)

ب . يصيب الهدف بطلقة واحدة على الأقل (الجواب: 0.999)

2 – إذا كررنا رمي حجري النرد 4 مرات متتالية وراقبنا في كل مرة مجموع نقاط الوجهين اللذين ظهرا فما هو احتمال أن نحصل على المجموع 5 :

أ . مرة واحدة فقط (الجواب: 0.312)

ب . مرة واحدة على الأكثر (الجواب: 0.936)

جـ . مرتين على الأقل (الجواب: 0.064)

3 – إذا كان معدل عدد المكالمات التي يتلقاها مقسم الهاتف في الفترة ما بين الساعة التاسعة والساعة العاشرة هو 1.8 مكالمة في الدقيقة والمطلوب حساب الاحتمالات الآتية خلال دقيقة واحدة من تلك الفترة:

أ . احتمال عدم تلقي المقسم لأي مكالمة (الجواب: 0.16529)

ب . احتمال تلقي المقسم مكالمة واحدة (الجواب: 0.29752)

جـ . احتمال تلقي المقسم مكالمتين (الجواب: 0.26776)

د . احتمال تلقي المقسم ثلاث مكالمات على الأقل (الجواب: 0.27123)

4 – يتلقى مقسم الهاتف 30 مكالمة وسطياً في الساعة الواحدة . أوجد احتمال أن يتلقى هذا المقسم أكثر من مكالمة واحدة في الدقيقة . (الجواب : 0.0903)

5 – كتاب مؤلف من 200 صفحة ويحتوي على 220 خطأ مطبعياً موزعة بشكل عشوائي . نفتح هذا الكتاب على صفحة ما وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على عدد الأخطاء الموجودة في هذه الصفحة ، والمطلوب :

أ . اوجد الاحتمالات الآتية :

$$P(X=0) \qquad ,P(X=1) \qquad ,P(X=2) \qquad ,P(X\geq 2)$$

الأجوبة : 0.333 , 0.366 , 0.201 , 0.301

ب . أوجد $\mu = E[X]$ و $\sigma^2 = Var(X)$

6 - إذا كان معدل عدد السيارات الداخلة إلى ساحة مخصصة لوقوف السيارات هو 2 سيارة في الدقيقة، مااحتمال أن تدخل هذه الساحة خلال دقيقة معينة 4 سيارات على الأقل ؟ (الجواب: 0.14)

7 – احتمال ظهور حادث A (احتمال النجاح) في تجربة عشوائية يساوي $p=0.4$ كررت هذه التجربة ثلاث مرات ($n=3$) وليكن X متغيراً عشوائياً يمثل عدد مرات ظهور الحادث A في هذه التكرارات الثلاثة والمطلوب:

أ) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

ب) أوجد تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X وارسم خطه البياني .

جـ) احسب الاحتمال $P(0 \le x < 2)$ (الجواب: 0.648)

د) احسب المتوسط μ والتباين σ^2 لهذا المتغير العشوائي. (الجواب: $\mu = 1.2$, $\sigma^2 = 3.6$)

تمارين ومسائل محلولة .

1– المتغير العشوائي المستمر X معيَّن بتابع التوزيع الآتي :

$$F(x)=\begin{cases}0 & if \quad x<2\\ 0.5x-1 & if \quad 2\le x\le 4\\ 1 & if \quad x>4\end{cases}$$

أوجد احتمال أن تكون قيمة X بنتيجة التجربة :

a) أصغر من 0.2 ، b) أصغر من 3

c) لا أقل من 3 ، d) لا أقل من 5

الحل :

a) بما أن $F(x)=0$ من أجل $x\le 2$ ، فإن $F(0.2)=0$ وبالتالي نجد :

$$P(X<0.2)=F(0.2)=0$$

b) $$P(X<3)=F(3)=[0.5x-1]_{x=3}=$$

$$=1.5-1=0.5$$

c) $$P(X\ge 3)+(P(X<3)=1$$

ومنه :

$$P(X\ge 3)=1-0.5=0.5$$

d) $$P(X\ge 5)+(P(X<5)=1$$

$$\Rightarrow \quad P(X\ge 5)=1-P(X<5)=1-F(5)=$$

$$=1-F(5)=1-1=0$$

2– ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معطى بتابع التوزيع الاحتمالي الآتي :

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} \quad ; \qquad -\infty<x<\infty$$

والمطلوب :

a) أوجد احتمال أن يأخذ X بنتيجة التجربة قيمة تقع في المجال $[0,2\sqrt{3}]$

أي احسب الاحتمال :

$$P(0\le X\le 2\sqrt{3})$$

b) أوجد القيمة الممكنة x_1 ، التي تحقق الشرط الآتي :

باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$ ، فإن المتغير العشوائي X بنتيجة التجربة يأخذ قيمة أكبر من x_1 ، بعبارة أخرى عين القيمة x_1 ، بحيث تتحقق المساواة :

$$P(X > x_1) = \frac{1}{4}$$

الحل :

a)
$$P(0 \le X \le 2\sqrt{3}) = F(2\sqrt{3}) - F(0) =$$
$$= [\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{2}]_{x=2\sqrt{3}} - [\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{2}]_{x=0} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

لدينا أولاً :

$$P(X \le x_1) + P(X > x_1) = 1$$

إذاً :

$$P(X \le x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

b) من جهة أخرى بحسب تعريف تابع التوزيع ، فإن :

$$P(X \le x_1) = F(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{2}$$

إذاً :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{2} = \frac{3}{4}$$

أو :

$$\operatorname{arctg} \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

ومنه نجد :

$$\frac{x_1}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2$$

3 – المتغير العشوائي المستمر X معيَّن بتابع التوزيع الآتي :

$$F(x)=\begin{cases}0 & if \quad x<0\\ \sin x & if \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1 & if \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

أوجد تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لـ X .

الحل :

لدينا :
$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}0 & if \quad x<0\\ \cos x & if \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0 & if \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

4 – إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x)=\begin{cases}0 & if \quad x<0\\ \cos x & if \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0 & if \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

فأوجد تابع التوزيع $F(x)$ لـ X .

الحل :

نستخدم العلاقة :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

فإذا كان $x<0$ ، فإن $f(x)=0$ ، وبالتالي نجد :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\ dt=0$$

وإذا كان $0\le x\le \pi/2$ ، فإن :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\ dt+\int_{0}^{x}\cos t\ dt=\sin x$$

وإذا كان $x>\pi/2$ ، فإن :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\ dt+\int_{0}^{\pi/2}\cos t\ dt+\int_{\pi/2}^{x}0\ dt=1$$

وهكذا ، فإن تابع التوزيع المطلوب $F(x)$ يمتلك الصيغة الآتية :

$$F(x)=\begin{cases}0 & if \quad x<0\\ \sin x & if \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1 & if \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

5– ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً يمتلك تابع الكثافة الاحتمالية الآتي على كامل المستقيم الحقيقي :

$$f(x)=\frac{4c}{e^{x}+e^{-x}}$$

عين الثابت c .

الحل : إن تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ينبغي أن يحقق الشرط :

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$$

فإذاً يجب أن تتحقق المساواة :

$$4c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=1$$

من هذا نستنتج :

$$(*)\qquad c=\frac{1}{4\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}}$$

لنوجد أولاً التكامل غير المحدد ،

$$\int\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\int\frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}=$$

$$=\int\frac{d(e^{x})}{1+(e^{x})^{2}}=\operatorname{arctg}e^{x}$$

فتكون قيمة التكامل المحدد :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=[\operatorname{arctg}e^{x}]_{-\infty}^{\infty}=$$

$$\operatorname{arctg}\infty-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

بعد التعويض في العلاقة (*) نجد :

$$c = \frac{1}{2\pi}$$

6 – إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$(c > 0) \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} & if \quad x \in (-c, c) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فأوجد التوقع الرياضي (القيمة المتوسطة) لـ X .

الحل : باستخدام العلاقة :

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

نجد :

$$\mu_X = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^{c} \frac{x\, dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

إذا لاحظنا في هذا التكامل ، أن التابع المستكمل فردي ، وأن حدَّي التكامل متناظران بالنسبة لـ لمبدأ الإحداثيات ، فإننا نستنتج أن التكامل يساوي الصفر . إذاً :

$$\mu_X = 0$$

كما أنه يمكننا الوصول إلى هذه النتيجة مباشرة إذا لاحظنا أن منحني تابع الكثافة الاحتمالية لـ X متناظر بالنسبة للمستقيم $x = 0$ (محور التراتيب) فإذاً $\mu_X = 0$.

ونشير أخيراً إلى حصولنا على هذه النتيجة بدون صعوبة بالحساب المباشر للتكامل .

7 – المتغير العشوائي المستمر X معيَّن بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos 2x & if \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 & if \quad x \notin [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

أوجد نقطة الوسط x_m لـ X .

الحل :

بحسب تعريف نقطة الوسط x_m لمتغير عشوائي مستمر ، فإن :

$$\int_{-\infty}^{x_m} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

ومنه بعد التعويض نجد :

$$\int_0^{x_m} 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}$$

من هذا نستنتج أن :

$$\sin 2x_m = \frac{1}{2}$$

ومنه :

$$2x_m = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

إذاً نقطة الوسط المطلوبة : $x_m = \dfrac{\pi}{12}$

$$(\,The\ Median\ of\ X = \frac{\pi}{12}\,)$$

8- إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X معطى بـ :

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6 \qquad x \in (2,4)$$

و $f(x) = 0$ خارج هذا المجال ،

فأوجد المنوال و الوسط والمتوسط لـ X .

الحل :

يمكن كتابة التابع $f(x)$ بالشكل الآتي :

$$f(x) = \frac{3}{4}(x-3)^2 + \frac{3}{4}$$

يتضح من هذه الصيغة لـ $f(x)$ أن تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X يبلغ قيمة عظمى عند $x = 3$ إذاً :

المنوال لـ X $= 3$

من جهة أخرى فإن منحني تابع الكثافة الاحتمالية لـ X متناظر بالنسبة للمستقيم $x = 3$ إذاً :

$\mu_X = 3$ (المتوسط لـ X)

$x_m = 3$ (نقطة الوسط لـ X)

9- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$(c>0) \qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}} & if \quad x\in(-c,c) \\ 0 & \quad\quad x\notin(-c,c) \end{cases}$$

أوجد تباين X .

الحل :

بحسب تعريف التباين لمتغير عشوائي مستمر ، فإن تباين X يساوي :

$$\operatorname{var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

وبما أن منحني تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لـ X متناظر بالنسبة للمستقيم $x=0$ ، فإن $\mu_X=0$ (تحقق أيضاً من ذلك بالحساب المباشر للمتوسط) ، وبالتالي نجد بعد التعويض :

$$\operatorname{var}(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$$

لحساب هذا التكامل نضع $x=c\sin t$ ، فنجد :

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X)&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{c^2\sin^2 t\cdot\cos t\,dt}{\sqrt{c^2-c^2\sin^2 t}}\\ &=\frac{2c^2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\ dt=\frac{c^2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)\ dt\\ &=\frac{c^2}{\pi}[t-\frac{1}{2}s\sin 2t]_{0}^{\pi/2}=\frac{c^2}{\pi}(\frac{\pi}{2})=\frac{c^2}{2}\end{aligned}$$

10- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x & if \quad x\in[0,\pi] \\ 0 & if \quad x\notin[0,\pi]\end{cases}$$

أوجد التباين لـ X .

الحل : لدينا :

$$\operatorname{var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-\mu_X^2$$

وبما أن منحني تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لـ X متناظر بالنسبة للمستقيم $x=\pi/2$ ، فإذاً $\mu_X=\pi/2$ وبالتالي نجد بعد التعويض :

$$\operatorname{var}(X)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x^2\sin x\,dx-(\frac{\pi}{2})^2$$

إذا استخدمنا دستور المكاملة بالتجزئة مرتين ، نجد :

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4$$

أخيراً بعد التعويض نحصل على قيمة تباين X :

$$\operatorname{var}(X) = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

11- ليكن X متغيراً عشوائياً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x \qquad if \qquad x \in [0, \pi]$$

$$f(x) = 0 \qquad if \qquad x \notin [0, \pi]$$

أوجد التوقع الرياضي للتابع $Y = \varphi(X) = X^2$.

الحل :

باستخدام العلاقة المعروفة من أجل حساب التوقع الرياضي لمتغير عشوائي X :

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, f(x) \, dx$$

نجد بعد التعويض :

$$E[X^2] = \int_0^{\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \frac{\pi^2 - 4}{2}$$

12- في التمرين السابق رقم 11 أوجد تباين التابع :

$$Y = \varphi(X) = X^2$$

الحل :

نستخدم العلاقة :

$$\operatorname{var}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \, f(x) \, dx - [E(\varphi(x))]^2$$

ونعوض : $\varphi(x) = x^2$

و : $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$

و : $E[\varphi(X)] = E[X^2] = \frac{\pi^2 - 4}{2}$

فنجد :

$$\text{var}(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x^4 \sin x\, dx - (\frac{\pi^2-4}{2})^2$$

وبعد المكاملة بالتجزئة نجد :

$$\int_0^{\pi} x^4 \sin x\, dx = \pi^4 - 12\pi^2 + 48$$

أخيراً بعد التعويض نحصل على التباين المطلوب :

$$\text{var}(X^2) = \frac{\pi^4 - 16\pi^3 + 80}{4}$$

13– ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!} \qquad if \qquad x \geq 0$$

$$f(x) = 0 \qquad if \qquad x < 0$$

أوجد التوقع الرياضي والتباين لـ X .

الحل :

$$\mu_X = E[X] = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x\, x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x}\, dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+2-1} e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\, n!}{n!} = n+1$$

لحساب التباين نستخدم العلاقة :

$$\text{var}(X) = \int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu_X^2 =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^2 x^n e^{-x}\, dx - (n+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+3-1} e^{-x}\, dx - (n+1)^2 =$$

$$= \frac{\Gamma(n+3)}{n!} - (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+2)!}{n!} - (n+1)^2 = n+1$$

إذاً : $\text{var}(x) = n+1$

14– يقاس القطر x لقرص دائري بشكل تقريبي بحيث $a \leq x \leq b$. فإذا نظرنا إلى

القطر كمتغير عشوائي يتوزع بانتظام على المجال $[a,b]$ ، أوجد التوقع الرياضي والتباين لمساحة القرص .

الحل :

لنوجد التوقع الرياضي لمساحة القرص :

$$Y = \varphi(X) = \frac{\pi X^2}{4}$$

وذلك باستخدام العلاقة :

$$E[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

فإذا عوضنا في هذه العلاقة :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad ، \qquad \varphi(x) = \frac{\pi x^2}{4}$$

وقمنا بحساب التكامل لوجدنا :

$$E[\frac{\pi X^2}{4}] = \frac{\pi(b^2+ab+a^2)}{12}$$

أما تباين مساحة القرص فيحسب باستخدام العلاقة :

$$\text{var}[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi^2(x)\, f(x)\, dx - \left[E[\varphi(X)]\right]^2$$

فنجد بعد التعويض وحساب التكامل :

$$\text{var}[\frac{\pi X^2}{4}] = \frac{\pi^2}{720}(b-a)^2(4b^2+7ab+4a^2)$$

15– إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين يتوزعان بانتظام :

X في المجال $[a,b]$ و Y في المجال $[c,d]$ ، فأوجد التوقع الرياضي والتباين للجداء XY .

الحل : لنحسب أولاً التوقع الرياضي :

$$E[XY] = E[X]\cdot E[Y] = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$$

من جهة ثانية ، فإن تباين XY يساوي :

$$\begin{aligned}\text{var}[XY] &= E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 \\ &= E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 \\ &= E(X^2)\cdot E(Y^2) - [E(X)\cdot E(Y)]^2\end{aligned}$$

لكن :

$$E[X^2]=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a}$$
$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

بطريقة مماثلة نجد :

$$E[Y^2]=\frac{c^2+cd+d^2}{3}$$

وبعد التعويض نحصل على تباين XY :

$$\operatorname{var}(XY)=\frac{(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)}{9}-\frac{(a+b)^2(c+d)^2}{4}$$

التوزيعات المشتركة :

16- إن التوزيع الاحتمالي للمتجه العشوائي المتقطع ثنائي البعد (X,Y) معطى بالجدول المبين جانباً .

X \ Y	4	5
3	0.17	0.10
10	0.13	0.30
12	0.25	0.05

أوجد التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Y .

الحل : من جدول التوزيع الاحتمالي المشترك أعلاه نحصل على :

a) التوزيع الاحتمالي الهامشي لـ X :

X	3	10	12
$P(X=x)$	0.27	0.43	0.30

$control\ :\ 0.27+0.43+0.30=1$

b) التوزيع الاحتمالي الهامشي لـ Y :

Y	4	5
$P(Y=y)$	0.55	0.45

$control\ :\ 0.55+0.45=1$

17- إن تابع التوزيع $F(x,y)$ للمتغير العشوائي ثنائي البعد (X,Y) معطى على الشكل التالي :

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y & if \;\; 0\le x\le\dfrac{\pi}{2} \quad , \quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

أوجد احتمال وقوع النقطة العشوائية (X,Y) في المستطيل المحدد بالمستقيمات :

$$x=0 \quad , \quad x=\frac{\pi}{4} \quad , \quad y=\frac{\pi}{6} \quad , \quad y=\frac{\pi}{3}$$

الحل :

إن الاحتمال المطلوب يساوي :

$$P(0\le X\le\frac{\pi}{4} \; and \; \frac{\pi}{6}\le Y\le\frac{\pi}{3})=$$
$$=F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})+F(0,\frac{\pi}{6})-F(0,\frac{\pi}{3})-F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6})$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}+\sin 0\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+0-0-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0.26$$

18– إذا كان تابع التوزيع $F(x,y)$ للمتجه العشوائي ثنائي البعد (X,Y) معطى بـ :

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y} & if \;\; x\ge 0 \quad , \quad y\ge 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

أوجد تابع الكثافة الاحتمالية المشترك $f(x,y)$ للمتغيرين العشوائيين X و Y .

الحل : باستخدام العلاقة :

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

نجد :

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(3^{-x}-3^{-x-y})\ln 3$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=3^{-x-y}\cdot\ln^2 3$$

إذاً التابع المطلوب $f(x,y)$ يعطى بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases}3^{-x-y}\cdot\ln^2 3 & if \;\; x\ge 0 \, , \, y\ge 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

ومن أجل التحقق من صحة العمل فإننا نوجه القارئ إلى إثبات صحة المساواة :

$$\ln^2 3\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} 3^{-x-y}\,dx\,dy = 1$$

19– إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y معطى بالعلاقة :

$f(x,y) = C(R-\sqrt{x^2+y^2})$ على القرص الدائري D : $x^2+y^2 \le R^2$

$f(x,y) = 0$ خارج هذا القرص

فالمطلوب :

$a)$ عين الثابت C .

$b)$ ما هو احتمال وقوع النقطة العشوائية (X,Y) على القرص الدائري :

D_1 : $x^2+y^2 \le 1$ إذا كان $R=2$.

الحل : $a)$ لتعيين الثابت C نكتب :

$$\iint_D C(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = 1$$

لحساب هذا التكامل ننتقل إلى الإحداثيات القطبية ، فنجد :

$$C = \frac{1}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R-r)r\,dr} = \frac{3}{\pi R^3}$$

$b)$ بما أن $R=2$ ، فإذاً : $C = \dfrac{3}{8\pi}$ ويصبح لدينا :

$$f(x,y) = \frac{3}{8\pi}(2-\sqrt{x^2+y^2})$$

على القرص الدائري : D : $x^2+y^2 \le 4$.

إن احتمال وقوع النقطة العشوائية (X,Y) على القرص الدائري :

D_1 : $x^2+y^2 \le 1$ يساوي :

$$P[(X,Y)\subset D_1] = \frac{3}{8\pi}\iint_{D_1}(2-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية نحصل على الاحتمال المطلوب :

$$P = \frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-r)r\,dr = \frac{1}{2}$$

تمرينات الفصل الثاني

1− إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X معطى بجدول التوزيع الاحتمالي الآتي :

X	3	4	7	10
$P(X=x)$	0.2	0.1	0.4	0.03

فأوجد تابع التوزيع $F(x)$ لهذا المتغير العشوائي ثم ارسم الخط البياني للتابع $F(x)$.

الجواب :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x<3 \\ 0.2 & if \quad 3\le x<4 \\ 0.3 & if \quad 4\le x<7 \\ 0.7 & if \quad 7\le x<10 \\ 1 & if \quad x\ge 10 \end{cases}$$

2− ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معطى تابع توزيعه $F(x)$ بـ :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x\le -2 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2} & if \quad -2<x\le 2 \\ 1 & if \quad x>2 \end{cases}$$

أوجد احتمال أن يأخذ X بنتيجة التجربة قيمة تنتمي إلى المجال $(-1,1)$.

الجواب : $P(-1<X<1)=\dfrac{1}{3}$

3− إذا كان تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المستمر معطى بـ :

$$F(x)=1-e^{-\frac{x}{T}} \qquad (x\ge 0)$$

احسب الاحتمال : $P(X\ge T)$ الجواب : $1/e$

4− ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً على كامل المستقيم الحقيقي بتابع التوزيع الاحتمالي الآتي :

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

أوجد القيمة الممكنة x_1 ، التي تحقق الشرط الآتي :

باحتمال مقداره $\dfrac{1}{4}$ ، فإن المتغير العشوائي X بنتيجة التجربة يأخذ قيمة أكبر من x_1 .

(أي : $P(X > x_1) = \frac{1}{4}$).

الجواب : $x_1 = 2\sqrt{3}$

5 – المتغير العشوائي المستمر X معيَّن بتابع التوزيع الآتي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ \sin 2x & if \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 1 & if \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

أوجد تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لـ X .

الجواب :
$$f(x) = \begin{cases} 2\cos 2x & if \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 & if \quad x \notin [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

6 – ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & if \quad x \in [0, \infty) \\ 0 & if \quad x \notin [0, \infty) \end{cases} \qquad (\alpha > 0)$$

ما هو احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة تنتمي إلى المجال $(1,2)$.

الجواب : $(e^{\alpha} - 1)/e^{2\alpha}$

7 – إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ \sin x & if \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & if \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

فأوجد تابع التوزيع $F(x)$ لـ X .

8 – إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X معطى بـ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < \frac{\pi}{6} \\ 3\sin 3x & if \quad \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3} \\ 0 & if \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

فأوجد تابع التوزيع $F(x)$ لـ X .

الجواب :
$$F(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x<\frac{\pi}{6} \\ -\cos 3x & if \quad \frac{\pi}{6}\le x\le \frac{\pi}{3} \\ 1 & f \quad x>\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

9- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً يمتلك تابع الكثافة الاحتمالية الآتي على كامل المستقيم الحقيقي :

$$f(x)=\frac{2c}{1+x^2}$$

عين الثابت c . الجواب : $c=\frac{1}{2\pi}$

10- إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً معيناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x)=\begin{cases} c\ \mathrm{arctg}\, x & if \quad x\in(0,1) \\ 0 & if \quad x\notin(0,1) \end{cases}$$

فأوجد قيمة الثابت c .

(الجواب : $c=(\pi-\ln 4)/4$)

11- المتغير العشوائي المستمر X معيَّن بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي :

$$f(x)=\begin{cases} c(x^2+2x) & if \quad x\in[0,1] \\ 0 & if \quad x\notin[0,1] \end{cases}$$

عين قيمة الثابت c ثم احسب التوقع الرياضي (المتوسط) لـ X .

الجواب : $c=3/4$, $\mu_X=11/16$

12- المتغير العشوائي المستمر X معيَّن بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{4}{3}x^2+5x-\frac{45}{4} & if \quad x\in(3,5) \\ 0 & if \quad x\notin(3,5) \end{cases}$$

أوجد المنوال و الوسط والمتوسط لـ X .

الجواب : المتوسط = الوسط = المنوال = 4

13- المتغير العشوائي المستمر X معيَّن بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & if \quad x\in(-1,1) \\ 0 & if \quad x\notin(-1,1) \end{cases}$$

أوجد نقطة الوسط x_m لـ X .

(توجيه للحل : لاحظ أن منحني تابع الكثافة الاحتمالية متناظر بالنسبة للمستقيم $x=0$)

14- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيَّناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}} & if \quad x\in(-3,3)\\ 0 & if \quad x\notin(-3,3)\end{cases}$$

a) أوجد تباين X .

b) أيهما بنتيجة التجربة يكون أكثر احتمالاً : $X<1$ أو $X>1$ ؟.

الأجوبة : $\operatorname{var}(X)=4.5$

$$P(X<1)=0.5+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}$$

$$P(X>1)=0.5-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}$$

15- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيَّناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & if \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 0 & if \quad x\notin[0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

أوجد التوقع الرياضي للتابع $Y=\varphi(X)=X^2$

الجواب : $E[X^2]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx=\dfrac{\pi^2-8}{4}$

16- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معيَّناً بتابع الكثافة الاحتمالية :

$$f(x)=\begin{cases}x+0.5 & if \quad x\in[0,1]\\ 0 & if \quad x\notin[0,1]\end{cases}$$

أوجد التوقع الرياضي للتابع $Y=\varphi(X)=X^3$

الجواب : $E[X^3]=13/40$

17- إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً معيَّناً بتابع الكثافة الاحتمالية الآتي :

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & if \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 0 & if \quad x\notin[0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

أوجد التباين للتابع $Y = \varphi(X) = X^2$

الجواب : $\text{var}\,(X^2) = 20 - 2\pi^2$

18- التوزيع الاحتمالي للمتجه العشوائي المتقطع ثنائي البعد (X, Y) معطى بالجدول الآتي :

X \ Y	2.3	2.7
26	0.05	0.09
30	0.12	0.30
41	0.08	0.11
50	0.04	0.21

أوجد التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Y .

الجواب :

X	26	30	41	50
P	0.14	0.42	0.19	0.25

Y	2.3	2.7
P	0.29	0.71

19- أوجد احتمال وقوع النقطة العشوائية (X, Y) في المستطيل المحدد بالمستقيمات :

$x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 3$ ، $y = 5$

علماً أن تابع التوزيع $F(X, Y)$ للمتجه العشوائي المستمر ثنائي البعد (X, Y) معطى ، كالآتي :

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y} & \text{if} \quad x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الجواب : $P = 3/128$

20- إذا كان تابع التوزيع $F(x, y)$ للمتجه العشوائي ثنائي البعد (X, Y) معطى كالآتي :

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}) & \text{if} \quad x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

فأوجد تابع الكثافة الاحتمالية المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y .

هل X و Y مستقلان ؟ .

الجواب : $f(x,y) = 8e^{-4x-2y} \quad if \quad x \geq 0 \;,\; y \geq 0$

$f(x,y) = 0 \qquad otherwise$

21 – إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية المشترك $f(x,y)$ للمتغيرين العشوائيين X و Y معطى في جميع نقاط المستوي xy بـ :

$$f(x,y) = \frac{1}{(16+x^2)(25+y^2)}$$

فأوجد تابع التوزيع $F(x,y)$ للمتجه العشوائي المستمر ثنائي البعد (X,Y) .

الجواب : $F(x,y) = (\frac{1}{4\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{8})(\frac{1}{5\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{10})$

22 – إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية المشترك $f(x,y)$ للمتغيرين العشوائيين X و Y معطى بالعلاقة :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$$

في المربع : $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

و $f(x,y)=0$ خارج هذا المربع ، فأوجد تابع التوزيع $F(x,y)$ للمتجه العشوائي ثنائي البعد (X,Y) .

الجواب : $F(x,y) = \frac{1}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x+y)]$ في المربع المفروض و

$F(x,y)=0$ خارج المربع المفروض

23 – لنفترض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما جدول التوزيع الاحتمالي المشترك الآتي :

X \ Y	-3	2	4
1	0.1	0.2	0.02
3	0.3	0.1	0.1

المطلوب :

a) أوجد التوزيع الهامشي لكل من X و Y .

b) أوجد متوسط التوزيع الهامشي لكل من X و Y .

c) أوجد $\operatorname{cov}(X,Y)$ (أي التغاير بين X و Y) .

d) أوجد تباين كل من X و Y .

e) أوجد $\rho(X,Y)$.

الأجوبة :

$$\mu_X = 2 \quad , \quad \mu_Y = 0.6 \quad , \quad \operatorname{cov}(X,Y) = -1.2$$

$$\operatorname{var}(X) = 1 \quad , \quad \operatorname{var}(Y) = 9.24 \quad , \quad \rho(X,Y) = -0.4$$

24 – إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y معطى بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(3x+2y)} & if \quad x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) أوجد تابع الكثافة الاحتمالية الهامشي لكل من X و Y .

b) هل X و Y مستقلان ؟ .

c) احسب $\operatorname{cov}(X,Y)$.

الأجوبة :

$$f_X(x) = 3e^{-3x} \qquad if \quad x \ge 0$$

$f_X(x) = 0$ خلاف ذلك

$$f_Y(y) = 2e^{-2x} \qquad if \quad y \ge 0$$

$f_Y(y) = 0$ خلاف ذلك

25 – إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y معرّفاً كالآتي :

$$f(x,y) = k(2x+y) \qquad if \quad 0 \le x \le 2 \ ; \ 2 \le y \le 3$$

$f(x,y) = 0$ خلاف ذلك

فالمطلوب :

a) احسب k .

b) أوجد تابع الكثافة الاحتمالية الهامشي لكل من X و Y .

c) هل X و Y مستقلان ؟ .

d) احسب $\operatorname{cov}(X,Y)$.

الأجوبة :

$$f_X(x) = \frac{1}{9}(2x + \frac{5}{2}) \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{9}(4 + 2y) \quad , \quad k = \frac{1}{9}$$

26 – ليكن لدينا التابع الآتي :

$$f(x,y) = \frac{2}{\pi} e^{-0.5(x^2+y^2)} \qquad if \quad x, y \geq 0$$

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

والمطلوب :

a) تأكد من أن $f(x,y)$ هو تابع كثافة احتمالية لمتغير عشوائي مستمر ذي بعدين مثل (X, Y) .

b) أوجد تابع الكثافة الاحتمالية الهامشي لكل من X و Y .

c) هل X و Y مستقلان ؟ .

d) احسب $\text{cov}(X,Y)$.

الأجوبة :

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{0.5}}{\sqrt{\pi}} e^{-0.5x^2} \qquad , \qquad f_Y(y) = \frac{2\sqrt{0.5}}{\sqrt{\pi}} e^{-0.5y^2}$$

27 – استنتج تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي :

$$Y = Z^2$$

حيث $Z \sim N(0,1)$.

ما هو المتوسط والانحراف المعياري لـ Y ؟.

الجواب : $\mu_Y = 1 \quad , \quad \sigma_Y = \sqrt{2}$

28 – لتكن $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$

متغيرات عشوائية مستقلة ، ولتكن :

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

وليكن : $Y = \sum_{i=1}^{5} Z_i^2$

ما هو توزيع Y ؟ احسب : $\mu_Y \quad , \quad \sigma_Y$.

29 – من نقطة ما A على محيط دائرة نصف قطرها R نرسم وبشكل عشوائي وتراً AB بحيث أن جميع الاتجاهات في رسم هذا الوتر لها الاحتمال نفسه . أوجد المتوسط (القيمة المتوسطة) لطول هذا الوتر .

الجواب : إذا افترضنا أن X هو متغير عشوائي يمثل طول الوتر المرسوم فعندئذ $\mu_X = 1.27R$. (من أجل حل هذه المسألة استخدم التوزيع المنتظم)

30 – لنفترض أن الأوزان لـ 800 طالب جامعي تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 63kg$ وانحراف معياري $\sigma = 5kg$ والمطلوب :

a) أوجد عدد الطلاب N_1 الذين تتراوح أوزانهم بين $62kg$ و $67kg$.

b) أوجد عدد الطلاب N_1 الذين تزيد أوزانهم عن $69kg$.

الجواب : $N_1 = 294$ طالب ، $N_2 = 92$ طالب

31 – ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً ، وليكن :

$$(*) \qquad P(X=k) = \frac{L}{k!} \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\ldots\;)$$

عين L كي يكون $(*)$ هو قانون توزيع احتمالي لـ X .

الجواب : $L = \dfrac{1}{e}$