منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة المدنية

التطبيقات الهندسية لعلم السكون ومبادئ علم التحريك الميكانيك الهندسي (٢)

الدكتور وليد مصطفى خرطبيل
أستاذ في
قسم الإدارة الهندسية والإنشاء

الدكتور مروان البشير
أستاذ مساعد في
قسم الهندسة الإنشائية

الدكتور مازن الحلبي
مدرس في
قسم الهندسة الإنشائية

جامعة دمشق

١٤٢٥-١٤٢٦هـ
٢٠٠٤ ـ ٢٠٠٥م

الفهرس

القسم الأول - التطبيقات الهندسية لعلم السكون

الفصل الأول : المقادير ووحدات القياس وجملها

الصفحة

الفصل الثاني : الجوائز الشبكية

الفصل الثالث : الإطارات الهندسية

القسم الثاني - مبادئ علم التحريك

الفصل الرابع : الحركة المستقيمة والمنحنية للجزئية

أولاً – الحركة المستقيمة للجزيئة

ثانياً – الحركة المنحنية للجزيئة

الفصل الخامس : الدراسة التحريكية للانسحاب المستقيم والمنحني

أولاً – المعادلات التفاضلية لتحريك الجزيئة

بعض الحالات الخاصة في دراسة الحركة المستقيمة من النوع الثاني

ثانياً – مبدأ دالامبير أو التوازن التحريكي

الفصل السادس : النظريات العامة لتحريك الجزيئة

المقدمة

يعد الميكانيك الهندسي من المقررات الهندسية الرئيسة والهامة التي تدرس في كلية الهندسة بمختلف فروعها ، فهو حجر الأساس المتين التي ترتكز عليه مقررات هندسية أخرى ، مثل مقاومة المواد والميكانيك الإنشائي والمنشآت المعدنية وغيرها.

يدرس هذا المقرر في كلية الهندسة المدنية على مدى ثلاثة فصول دراسية ، ولكل فصل كتابه الخاص به .

يتألف مقرر الميكانيك الهندسي (٢) من الأقسام الرئيسة التالية :

هندسة الأشكال – التطبيقات الهندسية لعلم السكون – مبادئ علم التحريك .

وكانت هذه الأقسام مرتبة في كتاب واحد يدرس بمعدل أربع ساعات نظرية وساعتين عمليتين .

ولقد ارتأى أساتذة المقرر تقسيم الكتاب السابق إلى قسمين ، ولكل منهما كتاب خاص به ، فالقسم الأول (هندسة الأشكال) ويخصص له ساعتان نظريتان ، والقسم الثاني (التطبيقات الهندسية لعلم السكون ومبادئ علم التحريك) ويخصص له ساعتان نظريتان وساعتان عمليتان .

ولقد قمنا بتأليف كتاب القسم الثاني، وتمت كتابته بلغة عربية سليمة مبسطة ، مع الأخذ في الحسبان استخدام المصطلحات العلمية المعربة ، كما كتبت أغلب عناوين الفقرات والمصطلحات الفنية باللغتين العربية والإنكليزية، وزود الكتاب بجداول هندسية ورياضية مفيدة للطالب والمهندس في حياته العملية .

يتضمن الكتاب تطبيقات هندسية ومسائل محلولة كثيرة ومتنوعة ، وكذلك مسائل غير محلولة مع أجوبة لأغلبها ، كل ذلك ليساعد الطالب على تفهم واستيعاب المقرر .

ونشير هنا إلى أن هذا الكتاب قد تمت كتابته وتنضيده وتحضير رسوماته على الحاسوب من قبل مهندس مختص يتمتع بخبرة عالية في هذا المجال ، فنصوصه ومعادلاته الرياضية واضحة جلية ، ورسوماته متقنة ودقيقة تم رسمها بوساطة برنامج الأوتوكاد المعروف.

نرجو أن نكون بعملنا هذا قد قمنا بجزء يسير من الواجب المترتب علينا تجاه الوطن الغالي وتجاه طلابنا الأعزاء .

المؤلفون

القسم الأول

التطبيقات الهندسية لعلم السكون

الفصل الأول
المقادير ووحدات القياس وجملها
Quantities , Units and Systems

١-١ . المقادير الأساسية في الميكانيك :

تستخدم في الميكانيك المقادير الأساسية التالية :

١- الزمن Time :

وهــو مدرك يستعمل للتعبير عن تعاقب الحوادث، وتُعتمد حادثة تتكرر دورياً وبانتظام لقياس الــزمن وذلــك مثل تعاقب الليل والنهار، أي يمكن استخدام الفترة الزمنية لليوم كوحدة قياس نظامية للزمن. وكما هو معروف فإن لليوم مضاعفات وأجزاء مثل السنة، والساعة، والدقيقة، والثانية.

٢- الطول Length :

وهو مقدار الفراغ الكائن بين نقطتين مقيساً على الخط المستقيم الواصل بينهما.

٣- القوة Force :

هــي التأثير المتبادل بين الأجسام والذي يسعى لتغيير حالة الجسم التي هو عليها سواءً أكانت سكوناً أم حركة.

يمكــن أن تكــون القــوة ثابتة أو متغيرة بالمقدار والاتجاه بحيث تكون تابعة للزمن مثل قوة التشــغيل التدريجــي للآلية، أو تابعة للسرعة مثل قوة مقاومة الوسط (ماء، هواء)، أو تابعة للانتقال مثل قوة مرونة النابض، وغير ذلك.

٤- الكتلة Mass :

هي المقياس الكمي للعطالة، أو هي مقياس المادة الموجودة في جسم ما، والكتلة كمية موجبة لكل جسم معين.

يضع قانون التحريك الأساسي العلاقة ما بين القوة $\vec{F}$ والكتلة m ، أي أن :

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

حيث إن ($\vec{a}$) التسارع المكتسب بفعل القوة ($\vec{F}$) .

والعطالـــة هـــي خاصـــية الأجســـام، وتكمـــن في مقاومتها لتغيير حركتها تحت تأثير القوى الخارجـية، وتعـتمد على ما يحويه الجسم من المادة، فمثلاً إذا كان التغيير في السرعة لأحد جسمين أكثر بطءاً مما للجسم الآخر تحت تأثير قوتين متكافئتين ، فإن عطالة الأول أكبر من عطالة الثاني.

١-٢ . تعريف وحدات القياس Units :

يـــتألف المقـــدار الفيزيائي من قيمة عددية ومن وحدة قياس. فهناك وحدات للطول، ووحدات للمساحة، وأخرى للحجم، ووحدات للكتلة، ووحدات للقوة،.... الخ.

<u>مثال:</u> مساحة سطح $A=65\ m^2$

حجم كرة $V=25\ cm^2$

وتقسم وحدات القياس إلى النوعين التاليين:

١- وحدات أساسية

٢- وحدات مشتقة من الأساسية.

١-٣. مجموعات وحدات القياس:

تنتمي وحدات القياس إلى إحدى المجموعتين التاليتين:

I- مجموعة (LTM) II- مجموعة (LTF)

<u>I- مجموعة (LTM)</u>

<u>الوحدات الأساسية</u>

١- وحدة الطول – L

٢- وحدة الزمن – T

٣- وحدة الكتلة – M

<u>الوحدات المشتقة</u>

وحدة القوة – [F]

وهي مشتقة من الوحدات الثلاث المذكورة:

من قانون التحريك الأساسي:

$$F = m \cdot a \Rightarrow [F] = [m] \cdot [a]$$

II- مجموعة (LTF)

الوحدات الأساسية

١- وحدة الطول – L

٢- وحدة الزمن – T

٣- وحدة القوة – F

الوحدات المشتقة

وحدة الكتلة – [m]

وهي مشتقة من الوحدات الثلاث المذكورة:

$$[m]=\frac{[F]}{[a]}$$

١-٤. جمل وحدات القياس Systems :

تنتمي الجملتان التاليتان لمجموعة (LTM):

١- الجملة الفيزيائية:

الوحدات الأساسية

١- وحدة الطول – cm سنتيمتر

٢- وحدة الزمن – sec ثانية

٣- وحدة الكتلة – g غرام كتلي

الوحدات المشتقة

وحدة القوة

$$[F]=[m]\cdot[a]$$

$$[F]=g\cdot\frac{cm}{sec^2}=1dyne$$

الدينة: وحدة مشـتقة لقياس القوة ، وهي مقدار القوة التي إذا طبقت على جزيئة كتلتها (1g) أكسبتها تسارعاً مقداره $1\ cm/sec^2$.

٢- الجملة الدولية: International System ويرمز لها بـ (SI)

الوحدات الأساسية

١- وحدة الطول m المتر

٢- وحدة الزمن – sec الثانية

٣- وحدة الكتلة – kg كيلوغرام كتلي

الوحدات المشتقة

وحدة القوة:

$$[F]=[m]\cdot[a]$$

$$[F]=kg\cdot\frac{m}{sec^2}=1N$$ نيوتن

النيوتن: وحدة مشـتقة لقياس القوة ، وهو مقدار القوة التي إذا طبقت على جزيئة كتلتها (1kg) أكسبته تسارعاً مقداره $1\ m/sec^2$.

ينتج مما تقدم أن: $1N=10^5 dyne$

وتنتمي لمجموعة (LTF) الجملة التقنية أو الهندسية التالية:

الجملة التقنية

الوحدات الأساسية

١- وحدة الطول – m المتر

٢- وحدة الزمن – sec الثانية

٣- وحدة القوة – kgf كيلوغرام قوة

الوحدات المشتقة

وحدة الكتلة:

$$[m]=\frac{[F]}{[a]} \Rightarrow [m]=\frac{kgf \cdot sec^2}{m}$$

هذا المقدار عبارة عن كتلة جسم يكتسب تسارعاً مقداره ($1\frac{m}{sec^2}$) إذا طبقت عليه قوة مقدارها 1 kgf

لنضع النتائج السابقة في الجدول التالي:

المقدار ووحدته الأساسية	الجملة		
	الفيزيائية LTM	الدولية SI LTM	التقنية LTF
الطول L	cm سنتيمتر	m متر	m متر
الزمن T	sec ثانية	sec ثانية	sec ثانية
الكتلة M	g غرام كتلي	kg كغ كتلي	$\frac{kgf \cdot sec^2}{m}$
القوةF	dyne دينة	N نيوتن	kgf كغ ثقلي

١-٥. قانون تجانس الصيغ الرياضية وخواصه :

ينص هذا القانون على ما يلي:

لا يمكــن أن يكون طرفا الصيغة الرياضية متساويين ما لم يكن لهما وحدة القياس نفسها.

فإذا كان: $A = B + C + D$ فيجب أن يكون $[A]=[B+C+D]$

وينتج عن هذا التعريف الخاصتان التاليتان:

١-لا يجوز جمع مقدارين، أو طرح مقدارين ما لم تكن لهما وحدة القياس نفسها.

أي إذا كان $(B+C)$ أو $(B-C)$ فيجب أن يكون: $[B]=[C]$.

٢-يجب أن يكون لحدود الصيغة الرياضية جميعها وحدة القياس نفسها.

أي إذا كان ($A=B+C+D$) فيجب أن يكون: $[D]=[C]=[B]=[A]$.

١-٦. العوامل الثابتة (الثوابت) :

تحتوي بعض الصيغ الرياضية على ثوابت (عوامل ثابتة) تعمل على توازن طرفي الصيغة كمياً أو قياسياً. وبالتالي يمكن ان تكون هذه العوامل قياسية أو لاقياسية.

١-<u>العوامل اللاقياسية:</u> تقتصر مهمة الثابت اللاقياسي على موازنة طرفي الصيغة كمياً وذلك مثل عامل الاحتكاك (μ) ، حيث إن العلاقة بين قوة الاحتكاك (F) ورد الفعل الناظمي (N) هي:

$$\boxed{F=\mu\cdot N}$$

وبما أن: $[N]=[F] \Leftarrow 1=[\mu]$ أي أنه عامل لاقياسي

٢-<u>العوامل القياسية:</u> ولها معنى فيزيائي.

<u>مثال:</u> قانون الانتقال الحراري داخل قاعة إلى الوسط الخارجي هو:

$$Q=K\cdot A\cdot \Delta t \quad \left[\frac{Kcal}{h}\right]$$

حيث إن:

A- مساحة الحاجز الذي تجتازه الحرارة $[m^2]$.

Δt - الفرق بين درجتي الحرارة الداخلية والخارجية $[°C]$.

Q- كمية الحرارة التي تجتاز الحاجز $\left[\frac{Kcal}{h}\right]$.

K - عامل الانتقال الحراري ووحدته:

$$[K]=\frac{[Q]}{[A]\cdot[\Delta t]}=\frac{Kcal}{h\cdot m^2\cdot °C}$$

أي أن العامل (K) قياسي.

١-٧. تطبيقات على وحدات القياس وجملها:

تطبيق ١ : أوجد وحدة قياس العمل في جمل القياس جميعها.

الصيغة الرياضية	نص القانون
$U = F \times L$	العمل = القوة × الانتقال

الحل:

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI	الجملة الفيزيائية
$[U] = kgf \cdot m$	$[U] = kg \cdot \frac{m}{sec^2} \cdot m$ $= 1N \cdot m = 1J$ (جول)	$[U] = g \cdot \frac{cm}{sec^2} \cdot cm$ $= dyne.cm$

تطبيق ٢ : أوجد وحدة قياس كمية الحركة في جمل القياس جميعها.

الصيغة الرياضية	نص القانون
$K = m \times v$	كمية الحركة = الكتلة × السرعة

الحل:

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI	الجملة الفيزيائية
$[K] = \frac{kgf \cdot sec^2}{m} \cdot \frac{m}{sec}$ $[K] = kgf \cdot sec$	$[K] = kg \cdot \frac{m}{sec} \cdot \frac{sec}{sec}$ $= N \cdot sec$	$[K] = g \cdot \frac{cm}{sec}$

تطبيق ٣ : أوجد وحدة قياس الطاقة الحركية في الجملتين الدولية، والهندسية.

الصيغة الرياضية	نص القانون
$T = \frac{1}{2} m \times v^2$	الطاقة الحركية = $\frac{1}{2}$ الكتلة × مربع السرعة

الحــل:

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI
$[T]=\frac{kgf\cdot sec^2}{m}\cdot\frac{m^2}{sec^2}$ $=kgf\cdot m$	$[T]=kg\cdot\frac{m^2}{sec^2}$ $=kg\frac{m}{sec^2}\cdot m$ $=N\cdot m=J$ جول

<u>تطبيــق ٤ :</u> أوجـد وحدة قياس عزم عطالة جسم بالنسبة لمحوره في الجملتين الدولية، والهندسية.

الصيغة الرياضية	نص القانون
$(I)=m\times i^2$	عزم عطالة الجسم = كتلة الجسم × مربع نصف قطر عطالته

الحــل:

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI
$[(I)]=\frac{kgf\cdot sec^2}{m}\cdot m^2$ $=kgf\cdot m\cdot sec^2$	$[(I)]=kg\cdot m^2$

<u>تطبيق ٥ :</u> أوجد وحدة قياس الضغط (P) في الجملتين الدولية، والهندسية.

الصيغة الرياضية	نص القانون
$P=\frac{F}{A}$	الضغط = القوة / المساحة

الحــل:

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI
$[P]=\frac{kgf}{m^2}$	$[P]=\frac{kg\frac{m}{sec^2}}{m^2}=\frac{kg}{m\cdot sec^2}=\frac{N}{m^2}=Pa$ (باسكال)

تطبيق ٦ : أوجد وحدة قياس الاستطاعة في الجملتين الدولية والهندسية.

الصيغة الرياضية	نص القانون
$N = \frac{U}{t}$	الاستطاعة=العمل / الزمن

الحــل:

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI
$[N] = \frac{kgf \cdot m}{sec}$	$[N] = \frac{N \cdot m}{sec} = \frac{J}{sec} = W$ (واط)

ملاحظة: للاستطاعة قانون ثان وهو التالي:

الصيغة الرياضية	نص القانون
$N = F \cdot v$	الاستطاعة = القوة × السرعة

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI
$[N] = kgf \cdot \frac{m}{sec}$	$[N] = \frac{kg \cdot m}{sec^2} \cdot \frac{m}{sec} = \frac{N \cdot m}{sec} = \frac{J}{sec} = W$ (واط)

تطبيــق ٧ : أوجــد وحــدة قــياس غزارة جريان سائل في أنبوب في الجملتين الدولية، والهندسية.

الصيغة الرياضية	نص القانون
$Q = A \cdot v$	غزارة جريان سائل في أنبوب = مساحة مقطع الأنبوب × سرعة جريان السائل ضمن الأنبوب

الحــل:

الجملة الهندسية	الجملة الدولية SI
$[Q] = m^2 \cdot \frac{m}{sec} = \frac{m^3}{sec}$	$[Q] = m^2 \cdot \frac{m}{sec} = \frac{m^3}{sec}$

١-٨. الوزن والكتلة، الوزن النوعي، والكتلة النوعية :

الوزن (W): $\left.\begin{matrix} W = m\cdot g \\ W = \gamma \cdot V \end{matrix}\right\}$ **الكتلة (m):** $m = \rho \cdot V$

الوزن النوعي (γ): $\gamma = \rho \cdot g$

$$[\gamma] = \frac{kgf}{m^3} \quad , \quad [\gamma] = \frac{N}{m^3}$$

الوزن النوعي للماء: $\gamma = 1000\frac{kgf}{m^3}$

الكتلة النوعية ρ: $\rho = \frac{\gamma}{g}$

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

الكتلة النوعية للماء : $\rho = 1000\frac{kg}{m^3}$

العلاقة بين (kgf) و (N) :

$$W = m \cdot g$$

$$1kgf = 1kg \cdot 9.81\frac{m}{sec^2} = 9.81N$$

وفيما يلي جدول وحدات القياس لبعض المقادير الهامة :

المقدار	الوحدة
القوة	$1kgf = 9.81N$ $1N = 0.102kgf$
العمل	$1J = 1N \cdot m = 0.102kgf \cdot m$ $1kgf \cdot m = 9.81J$

$1W = 1N \cdot \frac{m}{sec} = 1\frac{J}{sec}$ $1kgf \cdot \frac{m}{sec} = 9.81W$ $1h \cdot p = 75\frac{kgf \cdot m}{sec} = 736W$ $1kW = 102\frac{kgf \cdot m}{sec} = 1.36h \cdot p$ حصان بخاري $1h \cdot p = 0.736kW$	الاستطاعة
$1Pa = 1\frac{N}{m^2}$ $1bar = 1at = 1.02\frac{kgf}{cm^2}$ $1\frac{kgf}{cm^2} = 98100\frac{N}{m^2}$	الضغط
$1m^3 = 1000\ \ell it$	السعة

١–٩. مسائل محلولة على وحدات القياس :

مسألة ١ : يبلغ الضغط الجوي النظامي $P = 1{,}033\frac{kgf}{cm^2}$ ، ماهي قيمة هذا الضغط بوحدات الجملة الدولية SI ؟

الحل:

$$P = 1{,}033\frac{kgf}{cm^2} = 1{,}033 \cdot 10^4\frac{kgf}{m^2}$$

$$= 1{,}033 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4 = 1{,}0123 \cdot 10^5\frac{N}{m^2}$$

مسألة ٢ : عندما يتحرك جسم صلب في سائل ما فإنه يتعرض لقوة مقاومة ($\bar{F}$) تتعين بالعلاقة التالية :

$$F = \frac{1}{2}c \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$$

حيث إن :

c – عامل الكبح للجسم.

ρ– الكتلة النوعية للسائل.

v– سرعة الجسم بالنسبة للسائل.

A – مساحة سطح مسقط الجسم على مستوٍ عمودي على اتجاه الحركة.

عيّن وحدة قياس عامل الكبح (c) في الجملة الدولية .

الحـــل:

$$[F]=N=kg\frac{m}{sec^2}$$

$$[\rho]=\frac{kg}{m^3} \quad , \quad v=\frac{m}{sec} \quad , \quad A=m^2$$

التعويض في العلاقة:

$$kg\frac{m}{sec^2}=[c]\cdot\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m^2}{sec^2}\cdot m^2$$

$$\Rightarrow \quad [c]=1 \text{ أي أنه لا قياسي}$$

مسألة ٣ : أعد المسألة السابقة في الجملة الهندسية .

الحـــل:

$$[F]=kgf \quad , \quad [\rho]=\frac{[\gamma]}{[g]}=\frac{\frac{kgf}{m^3}}{\frac{m}{sec}}=\frac{kgf\cdot sec^2}{m^4}$$

التعويض في العلاقة:

$$kgf=[c]\cdot\frac{kgf\cdot sec^2}{m^4}\cdot\frac{m^2}{sec^2}\cdot m^2$$

$$\Rightarrow \quad [c]=1 \text{ أي أنه لا قياسي}$$

مســـألة ٤ : معلــوم من قوانين مقاومة المواد أنه إذا تعرض جائز لعزم انعطاف ($\vec{M}$) وقوة قص ($\vec{F}$) ، فإنه يتشوه بفعل مرونته، ويكتسب نتيجة لذلك طاقة كامنة تتعين بالمعادلة التالية :

$$V=\frac{M^2\cdot\ell}{K_1\cdot I}+\frac{F^2\cdot\ell}{K_2\cdot A}$$

حيث إن :

ℓ – طول الجائز و A – مساحة سطح مقطعه و I – عزم عطالة مقطعه.

K_1, K_2 – عاملان ثابتان.

والمطلوب تعيين قياس كلٍ من الثابتين في الجملة الهندسية.

الحــل:

حسب الخاصة الثانية لقانون تجانس الصيغ نكتب:

$$[V] = [\frac{M^2 \cdot \ell}{K_1 \cdot I}] = [\frac{F^2 \cdot \ell}{K_2 \cdot A}]$$

في الجملة الهندسية:

$$[V] = kgf \cdot m \quad , \quad [M] = kgf \cdot m \quad , \quad [\ell] = m \quad , \quad [I] = m^4$$

التعويض وتعيين وحدة الثابت (K_1) :

$$kgf \cdot m = \frac{kgf^2 \cdot m^2 \cdot m}{[K_1] \cdot m^4} \quad \Rightarrow \quad [K_1] = kgf/m^2$$

التعويض وتعيين وحدة الثابت (K_2) :

$$kgf \cdot m = \frac{kgf^2 \cdot m}{[K_2] \cdot m^2} \quad \Rightarrow \quad [K_2] = kgf/m^2$$

أي أن للعاملين (K_1, K_2) وحدة القياس نفسها وهي وحدة قوة موزعة على سطح (وحدة قياس الضغط).

١-١٠. مسائل غير محلولة على وحدات القياس :

مسألة ١ : أوجد وحدة قياس عامل المرونة (E) لجائز في الجملتين الدولية والهندسية علماً أنه يساوي مقدار القوة مقسوماً على مساحة المقطع .

الجواب : في الجملة الدولية : $[E] = Pa$ ، في الجملة الهندسية : $[E] = kgf/m^2$.

مسألة ٢ : عيّن وحدة قياس عامل التناسب (K) في قانون الجاذبية العام التالي :

$$F = K \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

وذلك في الجملة الدولية، حيث إن :

F – قوة التجاذب و m_1, m_2 – كتلتا الجسمين و r – المسافة بين مركزيهما .

الجواب : $[K] = \frac{m^3}{kg \cdot sec^2}$

مسألة ٣ : أعد المسألة رقم (٢) في الجملة الهندسية .

الجواب : $[K]=\dfrac{m^4}{kgf \cdot sec^4}$

مسـألة ٤ : تتعـين الطاقة الحركية (T) لجسم ينسحب على أحد المحاور بسرعة (v)، ويدور حول محور آخر متعامد مع الأول بسرعة زاوية (ω) بالعلاقة التالية :

$$T=K_1 \cdot \frac{W}{g} \cdot v^2 + K_2 \cdot (I) \cdot \omega^2$$

حيث إن :

W – وزن الجسم و (I) – عزم عطالته بالنسبة لمحور الدوران .

أوجد وحدة قياس كل من الثابتين $(K_1),(K_2)$ في الجملة الدولية .

الجواب : $(K_1),(K_2)$ لا قياسي .

مسألة ٥ : أعد المسألة (٤) في الجملة الهندسية .

الجواب : $(K_1),(K_2)$ لا قياسي .

مسألة ٦ : يتعين الضغط الكلي (P) اللازم للتغلب على المقاومات الهيدروليكية (الطولية والمحلية) لأنبوب ما بالعلاقة التالية :

$$P=\lambda \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \gamma}{2g} + \zeta \cdot \frac{v^2 \cdot \gamma}{2g}$$

حـيث إن : (ℓ) – طـول الأنـبوب و (d) – قطره و (v) – سرعة جريان السائل داخله و (γ) – الوزن النوعي للسائل و g – تسارع الجاذبية الأرضية .

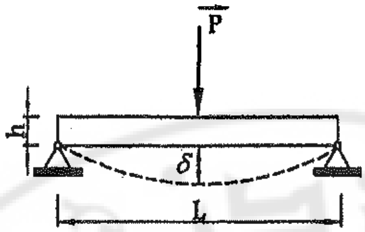
والمطلوب تعيين وحدة قياس كل من الثابتين (λ,ζ) في الجملة الدولية.

الجواب : (λ) لا قياسي ، (ζ) لا قياسي .

مسألة ٧ : يطلب إعادة حل المسألة المحلولة رقم (٤) في الجملة الدولية .

مسألة ٨ : من مقاومة المواد أنه إذا تعرض جائز موشوري لقوة $(\bar{P})$ مركزة في منتصفه كما في الشكل (١-١) ، فإنه يتخذ شكلاً منحنياً يتعين سهمه الأعظم (δ) بالعلاقة التالية :

$$\delta = \frac{P \cdot \ell^3}{K_1 \cdot EI} \cdot \left[1 + K_2 \cdot \frac{h^2}{\ell^2} + 0,84 \left(\frac{h}{K_3} \right)^3 \right]$$



الشكل (١-١)

حيث إن :

(ℓ) - طول الجائز و (h) - ارتفاعه و (E) - عامل مرونته و (I) - عزم عطالة مقطعه.

أوجد وحدة قياس الثوابت (K_1, K_2, K_3) في الجملة الدولية .

الجواب : $[K_1] = [K_2] = [K_3] = 1$

مسألة ٩ : أعد المسألة رقم (٨) في الجملة الهندسية .

الجواب : $[K_1] = [K_2] = [K_3] = 1$

مسـألة ١٠ : تتعـين الضياعات الهيدروليكية المحلية وبالاحتكاك أثناء جريان السائل في أنبوب بالقانون التالي :

$$h = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \lambda \cdot \frac{\ell}{d^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} + K \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4}$$

حيث إن :

$\Delta P = P_1 - P_2$ فرق الضغط بين طرفي الأنبوب و (γ) الوزن النوعي للسائل .

(ℓ) طول الأنبوب و (d) قطره .

$Q = A \cdot v$ غزارة السائل ، (A) مساحة مقطع الأنبوب ، (v) سرعة جريان السائل .

(g) تسارع الجاذبية الأرضية .

أوجد وحدة قياس (λ, K) في الجملة الهندسية .

الجواب : $[\lambda] = [K] = 1$.

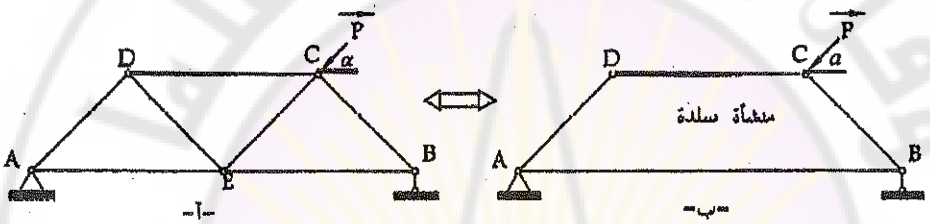
☆ ☆ ☆

الفصل الثاني

الجوائز الشبكية (Trusses)

٢-١ . تعريف الجوائز الشبكية :

الجائـــز الشـــبكي هو مجموعة قضبان تتصل نهاياتها مع بعضها البعض بوساطة المفاصل مكونةً جسماً صلداً (منشأة هندسية صلدة غير قابلة للتقوض) كما في الشكل (٢ – ١) .



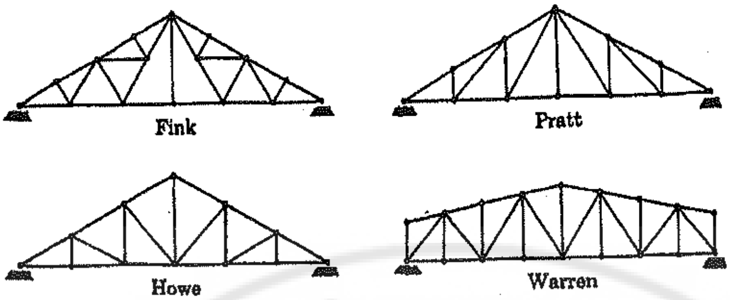
الشكل (٢ – ١)

يمكن أن تتصل نهايات القضبان مع بعضها بوساطة اللحام، أو مسامير البرشمة، أو البراغي، ولكـــن يفترض في جميع الحالات أنها تتصل بالمفاصل لتسهيل عمليات حساب الجائز ، وفي هـــذه الحالـــة يكون الخطأ صغيراً ، ويمكن إهماله . يسمى مكان اتصال القضبان مع بعضها العقدة (Joint) .

والقضـــبان ذات مقاطـــع عرضية مختلفة، فقد يكون هذا المقطع على شكل (I) أو(L) أو(T) أوغيرها.

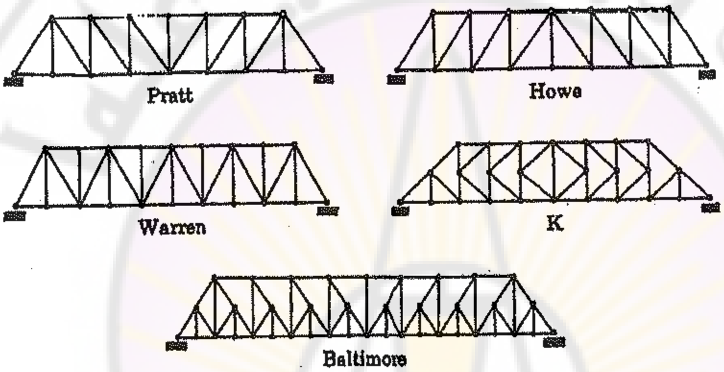
تثـبت الجوائـــز الشـــبكية على الأرضيات أو في الأسقف أو على الجدران بوساطة المساند الهندسية المعروفة، بذلك نحصل على منشأة صلدة داخلياً وخارجياً.

الجوائـــز الشـــبكية كثيرة الانتشار في الحياة العملية، فهي تشاهد في أســـقف القاعات الكبيرة كالمعامل، والصالات الرياضية (الشكل ٢ – ٢)، وفي الجسور (الشكل ٢ – ٣)، وفي الروافع البرجية الكبيرة (الشـــكل ٢ – ٤)، وفي الأبراج الحاملة لخطوط الطاقة الكهربائية ذات التوتر العالي (الشكل ٢ – ٥) وفي غيرها.



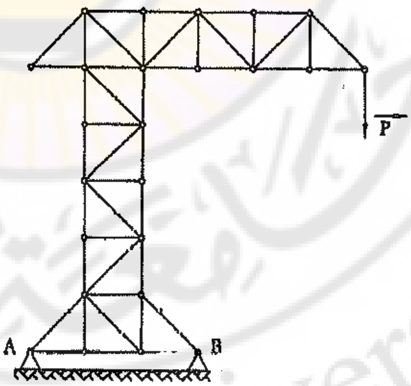
Commonly Used Roof Trusses

الشكل (٢ - ٢)

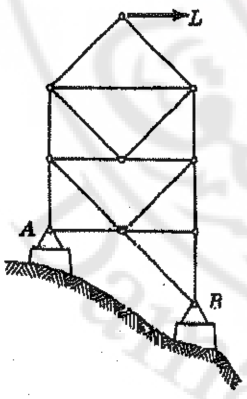


Commonly Used Bridge Trusses

الشكل (٢ - ٣)

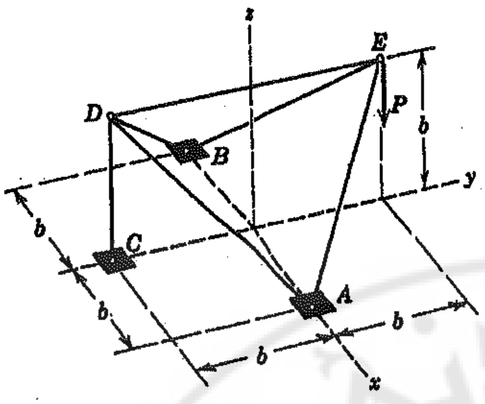


الشكل (٢ - ٤)



الشكل (٢ - ٥)

قد تكون الجوائز الشبكية مستوية (Plane Trusses) وذلك عندما تقع محاور القضبان والقوى المطبقة على الجائز في مستوٍ واحد (الشكل ٢- ٦آ)، وقد تكون فراغية(Space Trusses) وذلك عندما لا تقع محاور القضبان والقوى المطبقة على الجائز في مستوٍ واحد (الشكل ٢ – ٦).



الشكل (٢ – ٦)

٢-٢ . التسهيلات الافتراضية في دراسة الجوائز الشبكية:

لدراسة الجوائز الشبكية يفترض ما يلي:

١- الجائز الشبكي منشأة صلدة (مستقرة) لا تتقوض، ولا تتشوه (لا تغير شكلها) تحت تأثير القوى الخارجية .

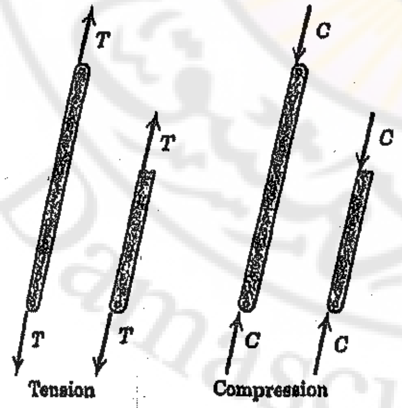
٢- تتصل نهايات القضبان مع بعضها البعض بوساطة مفاصل مهملة الاحتكاك.

٣- تهمل أبعاد المفاصل نظراً لصغرها بالنسبة لأبعاد الجائز ، وتعد القوى المطبقة على العقدة الواحدة متلاقية في نقطة.

٤- تطبق القوى الخارجية على العقد فقط.

٥- القضبان مهملة الوزن (نظراً لصغر وزنها بالنسبة للحمولات الخارجية المطبقة على الجائز).

نتيجةً لهذه التسهيلات تنشأ في القضبان قوى محورية فقط، ويكون كل قضيب متوازن تحت تأثير قوتين محوريتين وهو بحالة شد (Tension) أو ضغط (Compression) كما في الشكل (٢-٧).



الشكل (٢-٧)

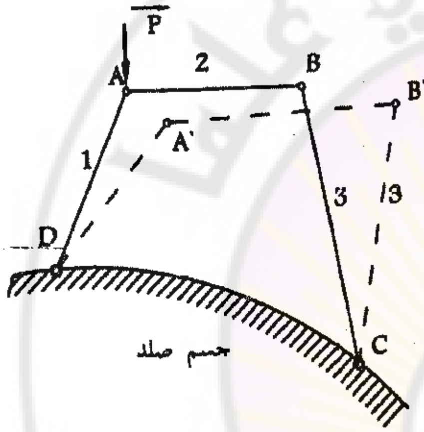
أولاً – الجوائز الشبكية المستوية: (Plane Trusses)

٢–٣ . تشكيل الجائز الشبكي المستوي الأساس (Basic truss):

لتشكيل هذا الجائز يجب أن يتحقق ما يلي :

١– أن تكــون القضبان نفسها صلدة وغير قابلة للتقوض تحت تأثير القوى الخارجية، وهذا محقق في الميكانيك الهندسي حيث يعد الجسم صلداً مطلقاً .

٢– أن يكــون الجائز نفسه صلداً ، وهذا يتحقق إذا كانت العلاقة بين عدد قضبان الجائــز (m) وعدد عقده (n) صحيحاً، ووضــعية قضبانه صحيحة، فمثــلاً إذا أخــذنــا الجائــز(ABCD) المبــين بالشـــكل (٢–٨) وثبتنا النهايتين (C) و(D) على جسم صلد، وأثرنا عليه في الـنقطة (A) بقوة مناسبة ($\vec{P}$)، فنجد أنه يغير شكله (يتشوه أو يتقوض).

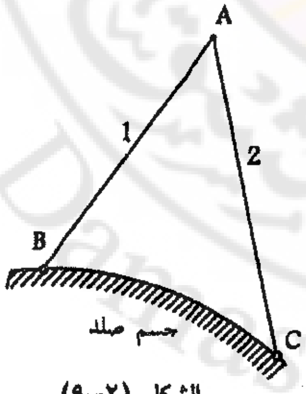


الشكل (٢–٨)

للحصول على جائز أساس صلد نستخدم إحدى الطريقتين التاليتين :

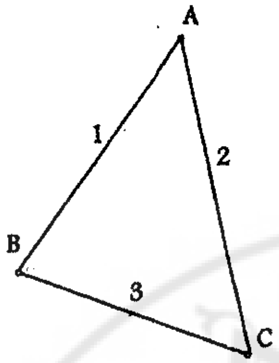
__الطـريقة الأولى :__ نأخذ ثنائية متمفصلة (A) ونثـبت نهايتيها مفصلياً على جسم صـلد فنحصل على جائز أساس صلد (الشكل ٢–٩) .

__قاعدة :__ إذا ثبتنا نهايتي ثنائية متمفصلة على جسم صلد بوساطة المفاصل ، فإننا نحصل على جسم صلد (جائز صلد) .



الشكل (٢–٩)

الطريقة الثانية : بما أن القضيب هو جسم صلد، فيمكن استبدال الجسم الصلد المبين بالشكل (٢-٩) بقضيب (٣) فنحصل على جائز أساس صلد كما في الشكل (٢-١٠)،أي أن المثلث (ABC) الذي رؤوسه متمفصلة مثنى مثنى هو جائز مستوٍ أساس يتمتع بالصلادة.

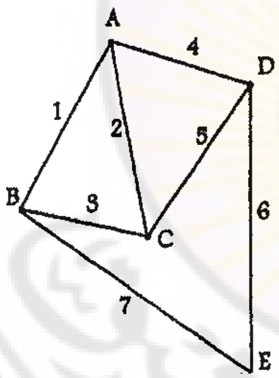


الشكل (٢-١٠)

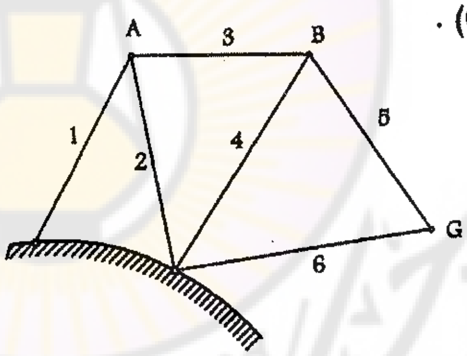
٢-٤ . تشكيل الجائز الشبكي البسيط داخلياً:

يتشكل الجائز الشبكي البسيط وفق إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى: يتألف الجائز البسيط من جائز أساس مشكل وفق الطريقة الأولى، ثم أضيفت إليه ثنائية متمفصلة أو أكثر وبشكل متتالٍ ، على أن تثبت نهايتا كل ثنائية مفصلياً في نقاط صلدة (الشكل٢ – ١١) ، فالجائز (A) هو الأساس ثم أضيف إليه الثنائية (B) فالثنائية (C) .



الشكل (٢ – ١٢)



الشكل (٢ – ١١)

الطريقة الثانية : يتألف الجائز البسيط من جائز أساس مشكل وفق الطريقة الثانية، ثم أضيفت إليه ثنائية متمفصلة أو أكثر ، على أن تثبت نهاية كل قضيب في مفصل كما في الشكل (٢ – ١٢) حيث أن (ABC) هو الأساس ثم أضيفت إليه الثنائية (D) فالثنائية (E) .

إن الجائز الشبكي البسيط المشكل وفق إحدى هاتين الطريقتين يتمتع بالصفات التالية :

١- الجائز صلد (مستقر) ، أي لا يتقوض، ولا يغير شكله .

٢- قضبانه تامة (غير فائضة وغير ناقصة) .

٣- مقيد تقييداً تاماً (ليس له درجات حرية أو درجات عدم تقرير) .

٤- مقرر أي يمكن تعيين القوى المحورية في قضبانه جميعاً .

يلاحظ أن هذه الصفات ناتجة بشكل متتالٍ من الصفة الأساسية الأولى (الصلادة) .

تتحقق بين عدد قضبان الجائز (m)، وعدد عقده (n) العلاقة التالية :

للجائز الأول :

$$\boxed{m = 2n} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث إن (n) عدد العقد الداخلية (A , B , C).

للجائز الثاني :

$$\boxed{m = 2n - 3} \quad \ldots\ldots (2)$$

بالنسبة للجائز الأول : نجد أن $2n = 6$ ، وفي الواقع $m = 6$.

وللجائز الثاني : $2n\text{-}3 = 7$ ، وفي الواقع $m = 7$.

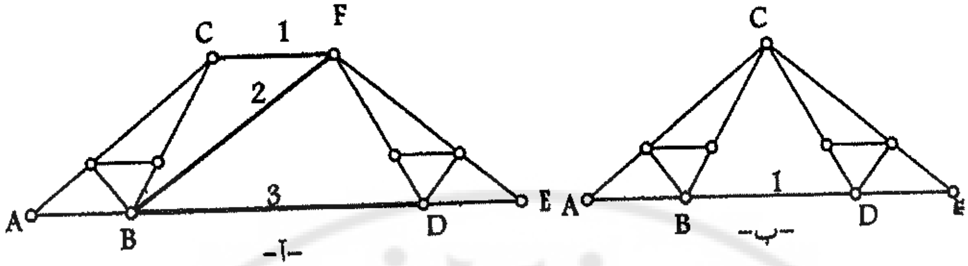
إن تحقيق كل من هاتين العلاقتين هو شرط لازم وغير كافٍ ، لأنه يمكن أن تكون العلاقة محققة، ولكن قاعدة تشكيل الجائز غير محققة .

- إذا كان $m > 2n$ (في طريقة التشكيل الأولى) أو $m > 2n - 3$ (في طريقة التشكيل الثانية) فالقضبان فائضة والجائز غير مقرر .

- إذا كان $m < 2n$ (في طريقة التشكيل الأولى) أو $m < 2n - 3$ (في طريقة التشكيل الثانية) فالقضبان ناقصة والجائز غير صلد .

٢ - ٥ . تشكيل الجائز الشبكي المستوي المركب داخلياً :

يتشكل هذا الجائز من جائزين بسيطين، كل منهما مشكل وفق الطريقة الثانية ومن أربطة هي عبارة عن ثلاثة قضبان غير متوازية فيما بينها، وغير متلاقية في نقطة واحدة (الشكل ٢-١٣آ) ، أو ما ينتج عن ذلك ، أي مفصل وقضيب لا يمر من المفصل (الشكل ٢-١٣ب) . الجائز المشكل وفق هذه الطريقة هو صلد (مستقر)، ويتمتع بالصفات الأربع سالفة الذكر، وتتحقق بين عدد قضبانه وعدد عقده العلاقة (2) .

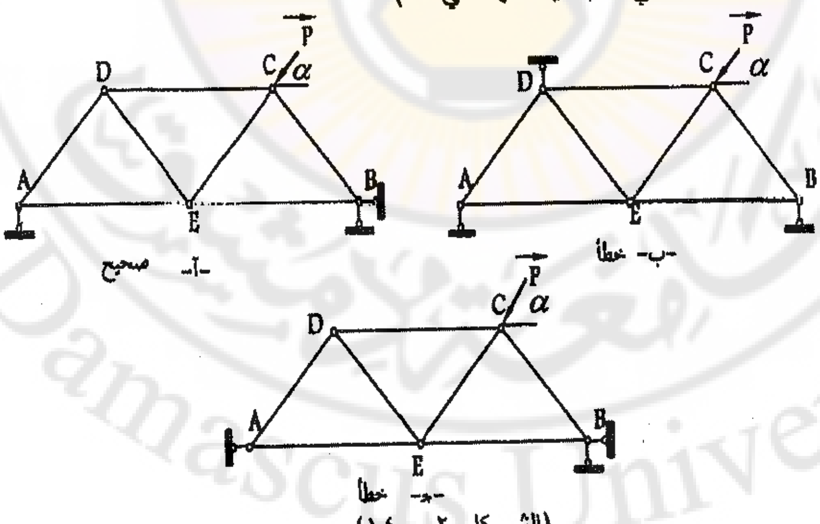


الشكل (٢ – ١٣)

٢-٦ . تقييد الجائز الشبكي المستوي خارجياً :

الجائز الشبكي المستوي المشكل وفق الطريقة الأولى (الشكل ٢ – ١١) هو مقيد بشكل تام، وصحيح داخلياً وخارجياً ، وأما الجائز الشبكي المشكل وفق الطريقة الثانية كما في الشكلين (٢ – ١٢) و (٢ – ١٣) فهو غير مقيد خارجياً، ويتم تقييده خارجياً بوساطة القيود الهندسية المعروفة ، بحيث لا يزيد عدد المجاهيل فيها عن ثلاثة، أي يتقيد بثلاثة قضبان غير متوازية فيما بينها، وغير متلاقية في نقطة واحدة ، أو ما ينتج عن ذلك،أي بمفصل وقضيب لايمر من المفصل (الشكل ٢-١٤آ).

(سنتكلم عن ذلك بالتفصيل في الميكانيك الهندسي ٣) .



(الشكل ٢ – ١٤)

٢-٧ . تحليل أو دراسة الجوائز الشبكية المستوية :

(Analysis of Trusses)

عــندما تؤثر جملة قوى خارجية على جائز ما تنشأ في قيوده ردود فعل، وفي قضبانه قوى محورية (الشكل ٢-٧) .

إن دراسة الجوائز الشــبكية يمكن أن تكون كاملة (تامة) أو جزئية.

فالدراسة الكاملة تتضمن ما يلي:

١- <u>دراســـة خارجية :</u> وتجرى لتعيين ردود الفعل في القيود الخارجية وتتم برســم مخطــط الجســم الطليق للجائز بأكمله ثم كتابة معادلات التوازن المناسبة وتعيين ردود الفعل .

٢- <u>دراســـة داخلــية :</u> وتجــرى لتعيين القوى المحورية في جميع قضبان الجائز. تتعين القوى المحورية باستخدام إحدى الطرائق التالية:

١- طريقة العقد (Method of Joints) .

٢- طريقة المقاطع (Method of Sections) .

٣- مخطط ماكسويل – كريمونا (Maxwell – Cremona Diagram) .

وسندرس في هذا الفصل طريقتي العقد والمقاطع .

وأما الدراسة الجزئية فتتضمن تعيين القوى المحورية في بعض قضبان الجائز، وفي هذه الحالــة يمكــن تعيين ردود الفعل في مساند الجائز أو عدم تعيينها أو تعيين بعضها وذلك حسب الحاجة إليها.

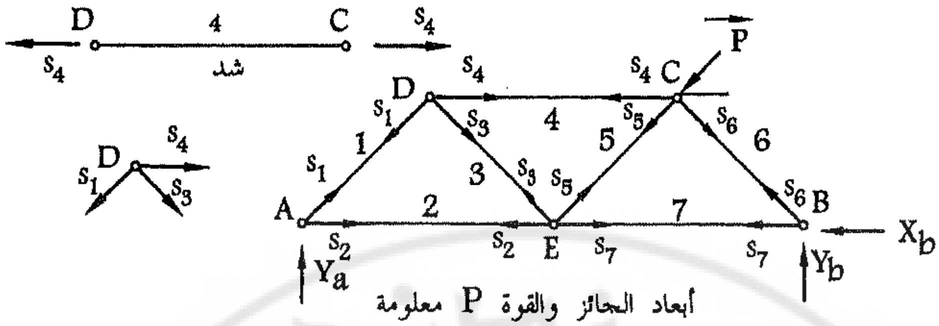
٢-٨ . الدراسة الكاملة للجوائز الشبكية المستوية بطريقة العقد :

(Analysis of Trusses by the Method of joints)

تتم الدراسة الكاملة للجائز الشبكي المبين بالشكل (٢ – ١٤آ) حسب هذه الطريقة كما يلي :

<u>١ – الدراسة الخارجية :</u> لتعيين ردود الفعل في القيود الخارجية .

- نرســم مخطط الجســم الطليق للجائز بأكمله (الشــكل ٢ – ١٥آ) ونفرق القوة $\vec{P}$ إلى مركبتين أفقية ($P \cdot \cos\alpha$) وشاقولية ($P \cdot \sin\alpha$).



– ب –　　　　　　– آ –

(الشكل ٢ – ١٥)

- الجائز يقع تحت تأثير جملة قوى مستوية عامة ومعادلات التوازن المفيدة ثلاث، نكتب معادلات التوازن المناسبة، ونعين ردود الفعل التي تصبح كأنها قوى خارجية.

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow Y_b$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_a \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_b$$

<u>٢ – الدراسة الداخلية :</u> لتعيين القوى المحورية في القضبان جميعها وحالة كل قضيب (شد أو ضغط) ، نقوم بالعمليات التالية:

- نرقم القضبان .
- نمثل ردود فعل القضبان على المفاصل وبحيث يكون التوجيه من المفاصل (الشكل ٢–١٥آ)، أي أننا نفترض أن القضبان بحالة شد ، فإذا حصلنا نتيجة الحل على إشارة موجبة فتوجيه ردود الفعل صحيح، والقضيب بحالة شد ، وإذا حصلنا على إشارة سالبه فالتوجيه غير صحيح والقضيب بحالة ضغط.

<u>توضيح:</u> مثلنا على الرسم (الشكل ٢–١٥آ) ردود فعل القضبان على المفاصل ، وأما ردود فعل المفاصل على القضبان فهي في الجهة المعاكسة كما في الشكل (٢–١٥ب) حيث مثلنا المفصل (D) والقضيب (DC).

- كـــل عقدة أصبحت بحالة توازن تحت تأثير جملة قوى مســـتوية ومتلاقية في نقطة ، ومعادلات التوازن المفيدة اثنتان .
- نـــدرس توازن كل عقدة على انفراد ، ونعين القوى المحورية المجهولة ، ويفضل البدء بدراسة العقدة التي لا يزيد عدد المجاهيل فيها عن اثنين.
- نضع نتائج الحل في جدول كالمبين بالشكل (٢-١٦) .

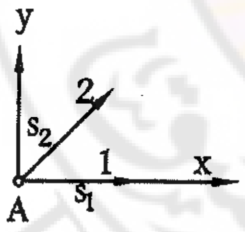
رقم القضيب	1	2	3	4	5
S_i [kgf]	-	+	-	0	+
حالة القضيب	ضغط	شد	ضغط	غير محمل	شد

الشكل (٢-١٦)

٢-٩ . قواعد مفيدة في دراسة الجوائز الشبكية المستوية :

عند تعيين القوى المحورية في قضبان جائز شبكي ما يمكن الاستفادة من القاعدتين التاليتين :

القاعـــدة الأولـــى: يبين الشكل (٢ – ١٧) العقدة غير المحملة (A) ، أي غير مطبق عليها قوى خارجية وفيها يتلاقى قضيبان فقط (١) و (٢) ، لنكتب معادلتي توازن هذه العقدة:



الشكل (٢ – ١٧)

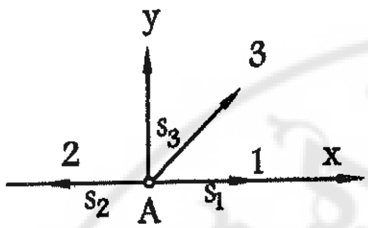
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_1 = 0$$

ينتج من ذلك القاعدة الأولى التالية :

قاعدة ١ : إذا تلاقى في عقدة غير محملة قضيبان فقط غير واقعين على اســـتقامة واحدة ، فالقوتان المحوريتان فيهما معدومتان .

القاعدة الثانية : يبين الشكل (٢-١٨) العقدة غير المحملة (A) وفيها ثلاثة قضبان (١، ٢ ، ٣) اثنان منها (١، ٢) على استقامة واحدة، لنكتب معادلة التوازن بالنسبة للمحور (y) : $S_3 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$



الشكل (٢ – ١٨)

ومنه تنتج القاعدة الثانية :

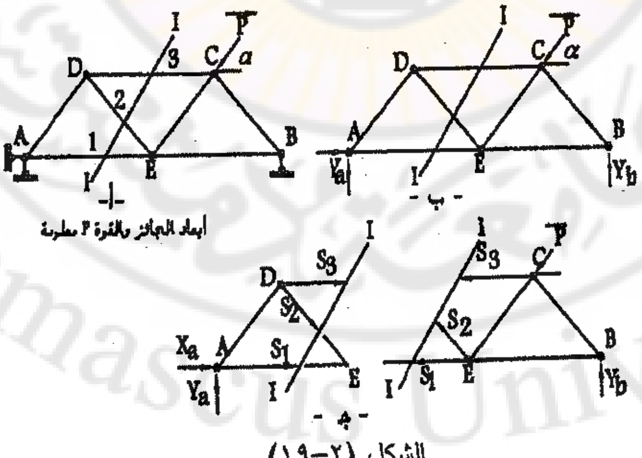
قاعدة ٢ : إذا تلاقى في عقدة واحدة غير محملة ثلاثة قضبان ، اثنان منها على استقامة واحدة ، فالقوة المحورية في القضيب الثالث معدومة .

٢-١٠ . الدراسة الجزئية للجوائز الشبكية المستوية بطريقة المقاطع:

(Analysis of Trusses by the method of sections)

تستخدم الدراسة الجزئية لتعيين القوى المحورية في بعض قضبان الجائز، وفي هذه الحالة يفضل استخدام طريقة المقاطع نظراً لسهولة الحل وسرعته. إن استخدام هذه الطريقة لتعيين القوى المحورية في قضبان الجائز جميعها قد يعقد المسألة، وعند استخدام هذه الطريقة قد نحتاج إلى تعيين بعض ردود الفعل في القيود، أو لا نحتاج، وذلك حسب طبيعة الجائز ونوع المسألة .

لنطبق هذه الطريقة لتعيين القوى المحورية في القضبان (1.2.3) للجائز المبين بالشكل (٢-١٩آ) .



الشكل (٢-١٩)

١ – نقطع الجائز بمقطع وهمي (I-I) يمر بالقضبان المراد تعيين القوى المحورية فيها ، فينشطر الجائز إلى شطرين كما في الشكل (٢-١٩ آ).

٢ – نرسم مخطط الجسم الطليق للجائز بأكمله، ونعيّن ردود الفعل في مساند الجائز اللازمة للحل (الشكل ٢ – ١٩ ب) والتي تصبح كأنها خارجية .

٣ – نباعد جزئي الجائز عن بعضهما كما في الشكل (٢ – ١٩ ج) ونمثل القوى المحورية على القضبان المقطوعة فقط ، فتصبح هذه القوى أيضاً كأنها خارجية ، ويصبح كل شطر من جزئي الجائز بحالة توازن تحت تأثير جملة قوى مستوية عامة ، ومعادلات التوازن المفيدة ثلاث.

٤ – نختار أحد الجزئين، وندرس توازنه ، فإذا اخترنا الجزء الأيسر للدراسة فيجب أن يكون (X_a , Y_a) معلومين ، وإذا اخترنا الجزء الأيمن فيجب أن يكون (Y_b) معلوماً . لندرس توازن الجزء الأيسر :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow S_3$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_1$$

<u>ملاحظات :</u>

١ – إن دراسة توازن أي جزء من جزئي الجائز تؤدي إلى النتيجة نفسها ، لذا نختار للدراسة الجزء الأسهل .

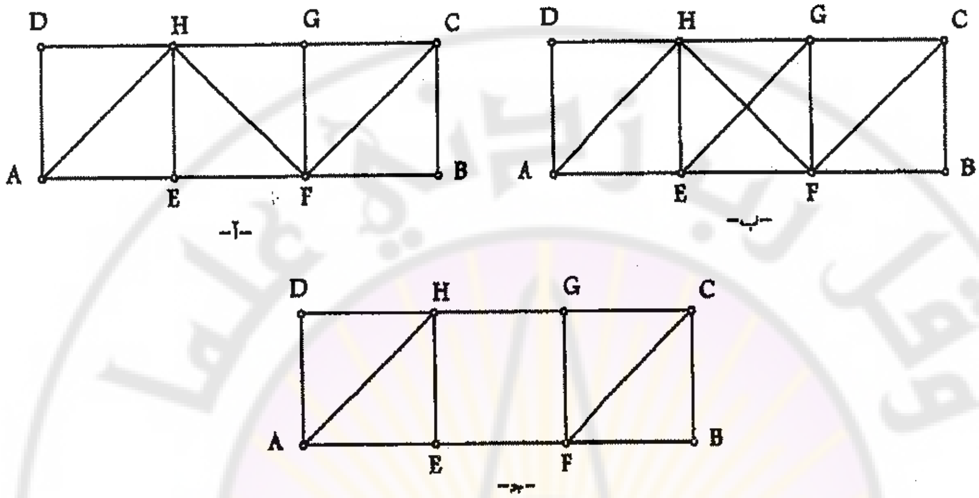
٢ – إن نجاح هذه الطريقة يعتمد على الاختيار الجيد للمقطع ، لذا يجب اختيار المقطع بعناية ودقة .

٣ – إذا كان عدد القضبان التي يطلب تعيين القوى المحورية فيها أكثر من ثلاثة، فيجب اختيار مقطع آخر على أن يحتوي هذا المقطع على بعض القضبان المقطوعة بالمقطع الأول.

٤ – يفضل أن يحتوي المقطع الواحد على ثلاثة قضبان فقط حتى تكون المسألة مقررة .

٢-١١ . مسائل محلولة على الجوائز الشبكية المستوية :

مسألة ١: ادرس داخلياً تشكيل كل من الجوائز الشبكية المستوية المبينة بالشكل (٢ – ٢٠). ضع النتائج في جدول .

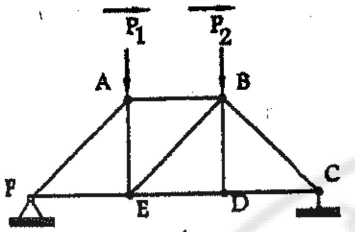


الشكل (٢ – ٢٠)

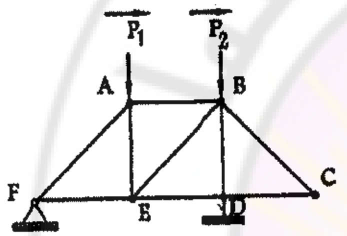
الحل : نضع النتائج في الجدول التالي :

رقم الجائز	الجائز الأساس	اضافة الثنائيات	العلاقة $m=2n-3$	الصفات الداخلية			
				الصلادة	القضبان	نوع التقييد	التقرير
أ	ADH	G-F-E C ثم B	$2n-3=13$ وفي الواقع $m=13$	صلد	تامة	تام	مقرر
ب	ADH	F-E G فقط	$2n=13$ وفي الواقع $m=14$	أكثر من الصلد	فائضة ١ قضيب	أكثر من تام	غير مقرر من الدرجة الأولى
جـ	ADH	E فقط	$2n-3=13$ وفي الواقع $m=12$	غير صلد	ناقصة ١ قضيب	غير تام	مقرر

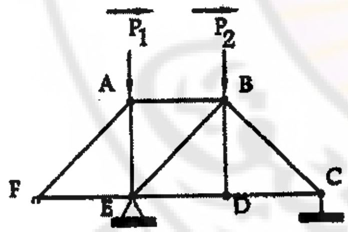
مسألة ٢ : هل يمكن استخدام القاعدتين المستخدمتين في دراسة الجوائز الشبكية المستوية على الجوائز الشبكية المبينة بالشكل (٢-٢١) ؟ وضّح ذلك .



-أ-



- ب -



- جـ -

الشكل (٢-٢١)

الحل :

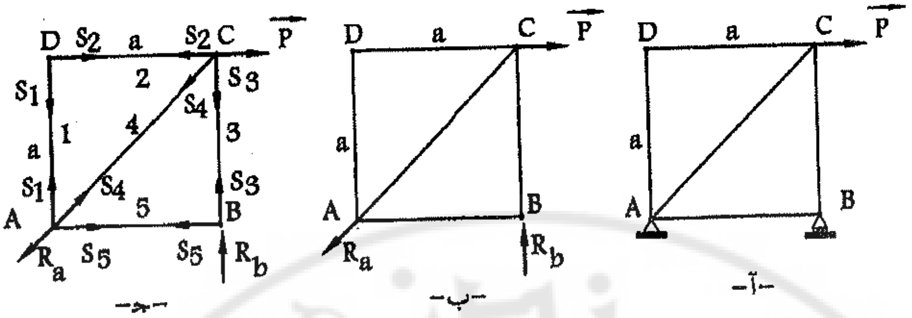
<u>**الجائز (أ):**</u> يمكن تطبيق القاعدة الثانية على العقدة (D)، وينتج أن القوة المحورية في القضيب (BD) تساوي الصفر.

<u>**الجائز (ب):**</u> يمكن تطبيق القاعدة الأولى على العقدة (C) ، وينتج أن القوتين المحوريتين في القضيبين (BC) و (CD) معدومتان.

وبعد ذلك يمكن تطبيق القاعدة الثانية على العقدة (D) ، وينتج أن القوة المحورية في القضيب (ED) معدومة.

<u>**الجائز (جـ):**</u> يمكن تطبيق القاعدة الثانية على العقدةُ (D) ، وينتج أن القوة المحورية في القضيب (BD) معدومة.ثم نطبق القاعدة الأولى على العقدة (F) فينتج أن القوتين المحوريتين في القضيبين (AF) و (FE) معدومتان. وأخيراً نطبق القاعدة الثانية على العقدة (A) حيث نجد أن القوة المحورية في القضيب (AB) معدومة.

مسألة ٣ : عيّن القوى المحورية التي تنشأ في قضبان الجائز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢ – ٢٢أ) بفرض أن(ABCD) مربع طول ضلعه (a) وأن $P = 2tf$.



الشكل (٢-٢٢)

الحل :

١ - <u>الدراسة الخارجية :</u> نرسم مخطط الجسم الطليق للجائز الشبكي كما في الشكل (٢-٢٢ب)، ونعين ردّي الفعل في المسندين (A , B) :

الجائز بحالة توازن تحت فعل القوى المستوية الثلاث $(\vec{P}, \vec{R}_a, \vec{R}_b)$ التي تتلاقى في النقطة (C)، لنكتب معادلات التوازن التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow P \cdot a = R_b \cdot a$$

$$\Rightarrow R_b = P = 2tf$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow P \cdot a = R_a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow R_a = P\sqrt{2} = 2\sqrt{2}tf$$

٢ - <u>الدراسة الداخلية :</u> نعين القوى المحورية في قضبان الجائز :

آ - نرقم القضبان، ونمثل ردود فعل القضبان على المفاصل (الشكل ٢-٢٢ج)

ب - ندرس توازن كل عقدة على انفراد، ونضع النتائج في الجدول المبين بالشكل (٢-٢٣)، ونبين فيه حالة كل قضيب :

<u>العقدة D :</u>

حسب القاعدة الأولى $\Leftarrow$ $\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \end{cases}$

العقدة C :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow P = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_4 = P\sqrt{2} = 2\sqrt{2}tf$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_3 = -S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_3 = -2tf$$

العقدة B :

حسب القاعدة الثانية $\Leftarrow$ $S_5 = 0$

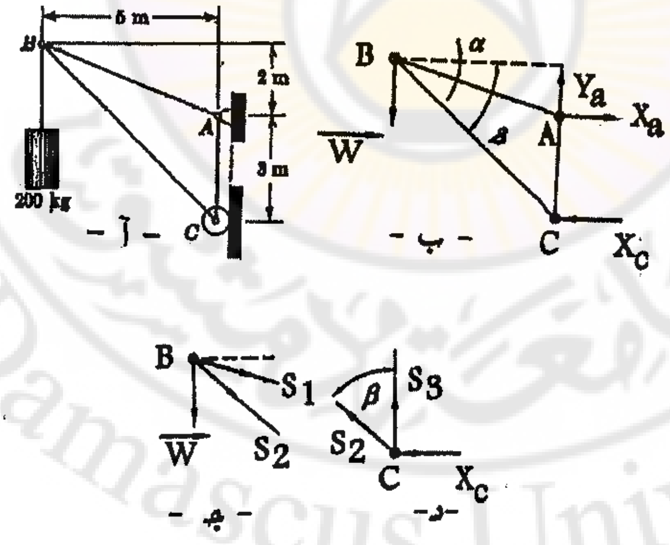
ملاحظة : يمكن أن ندرس توازن العقدة (A)، ونتحقق من صحة الحل .

نضع النتائج في الجدول التالي :

رقم القضيب	1	2	3	4	5
S_i [tf]	0	0	-2	$2\sqrt{2}$	0
حالة القضيب	غير محمل	غير محمل	ضغط	شد	غير محمل

الشكل (٢-٢٣)

مسألة ٤: ادرس الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢-٢٤آ) دراسة كاملة.



الشكل (٢-٢٤)

تعيين الزاويتين (α) و (β):

$$\tan\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = 21{,}8^\circ \quad , \quad \sin\alpha = 0{,}371 \quad , \quad \cos\alpha = 0{,}928$$

$$\tan\beta = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ \quad , \quad \sin\beta = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

وزن الثقل :

$$W = m \cdot g = 200 \cdot 9{,}81 = 1962N = 1{,}962kN$$

– الدراسة الخارجية: نرسم مخطط الجسم الطليق للجائز (الشكل ٢–٢٤ ب)، ونكتب معادلات التوازن:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} - 0 \Rightarrow W \cdot 5 = X_a \cdot 3$$

$$1{,}962 \cdot 5 = X_a \cdot 3$$

$$\Rightarrow X_a = 3{,}27kN$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \quad X_c = X_a = 3{,}27kN$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \quad Y_a = W = 1{,}962kN$$

– الدراسة الداخلية:

العقدة (B): (الشكل ٢–٢٤ جـ)

$$S_1 \cdot \cos\alpha = -S_2 \cdot \cos\beta$$

$$S_1 \cdot 0{,}928 = -S_2 \cdot 0{,}707$$

$$\Rightarrow S_1 = -0{,}762 \cdot S_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \quad S_1 \cdot \sin\alpha + S_2 \cdot \sin\beta = -W$$

$$(-0{,}762 \cdot S_2) \cdot 0{,}371 + S_2 \cdot 0{,}707 = -W$$

$$-0{,}283 \cdot S_2 + 0{,}707 \cdot S_2 = -1{,}962$$

$$0{,}424 \cdot S_2 = -1{,}962$$

$$\Rightarrow S_2 = -4{,}63kN$$

والقضيب (2) بحالة ضغط.

$$S_1 = -0,762 \cdot (-4,63) \quad \Rightarrow S_1 = 3,53\text{kN}$$

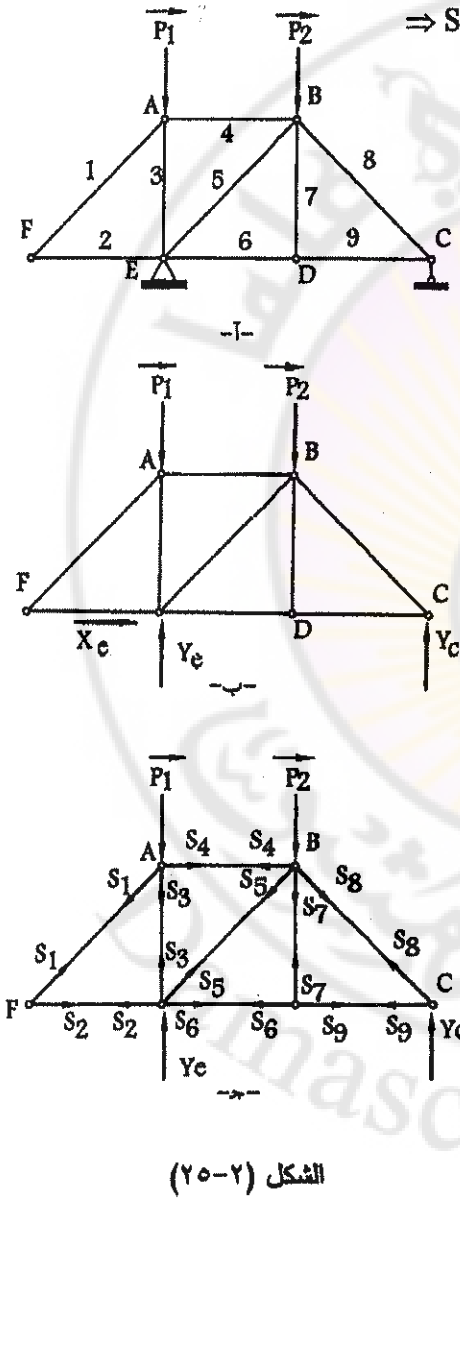
والقضيب (1) بحالة شد.

العقدة (C): (الشكل ٢-٢٤ د)

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \quad S_3 = -S_2 \cdot 0,707 = -(-4,63) \cdot (0,707)$$

$$\Rightarrow S_3 = +3,27\text{kN}$$

والقضيب (3) بحالة شد.



مسألة ٥ : ادرس الجائــز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢-٢٥آ) دراسة تامة مع العلم أن جمـــيع المثلثات قائمة الزاوية، ومتساوية الساقين، وطول الضلع القائم (a) وأن :

$$P_1 = 10\text{kN}, \quad P_2 = 20\text{kN}$$

الحل :

<u>الدراسة الخارجية:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iE} = 0 \Rightarrow \quad Y_c \cdot 2a = P_2 \cdot a$$

$$\Rightarrow Y_c = \frac{P_2}{2} = 10\text{kN}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \quad Y_e = P_1 + P_2 - Y_c$$

$$\Rightarrow Y_e = 20\text{kN}$$

<u>ملاحظة:</u> يتضح من الرسم أن ($X_e = 0$) لعدم وجود قوى أفقية.

<u>الدراسة الداخلية:</u>

- نمثل ردود فعل القضبان على المفاصل.
- وجدنا في المســألة (٢) والشــكل (٢-٢١جـ) أن: $S_1 = S_2 = S_4 = S_7 = 0$

الشكل (٢-٢٥)

العقدة A:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_3 = -P_1$$

$$\Rightarrow S_3 = -10kN$$

العقدة E:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_3 = -S_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - Y_e$$

$$-10 = -S_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 20$$

$$\Rightarrow S_5 = -10\sqrt{2}kN$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_6 = -S_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = +10kN$$

العقدة D:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_9 = S_6 = 10kN$$

العقدة C:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Yc = -S_8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$$

$$\Rightarrow S_8 = -10\sqrt{2}kN$$

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_i [kN]	0	0	-10	0	$-10\sqrt{2}$	10	0	$-10\sqrt{2}$	10
حالة القضيب	غير محمل	غير محمل	ضغط	غير محمل	ضغط	شد	غير محمل	ضغط	شد

مسـألة ٦ : عيّن القوى المحورية في القضبان (1,2,3) وحالة كل قضيب من الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢-٢٦آ) مع العلم أن القوة ($\bar{P}$) تنطبق على محور القضيب (DE)، وأن المثلثات متساوية الأضلاع وطول كل ضلع (a).

الحل :

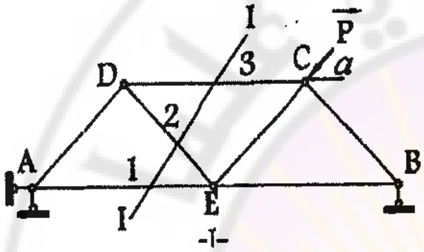
١ – نرسم مخطط الجسم الطليق للجائز الشبكي، ونعيّن رد الفعل في المسند (A) (الشكل ٢ –٢٦ب) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow Y_a \cdot 2a = P \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow Y_a = P\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow$$

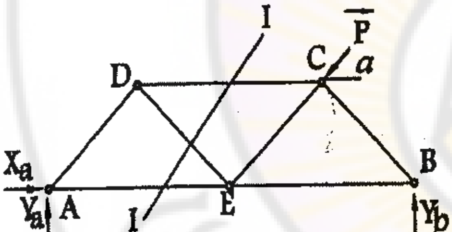
$$X_a = P \cdot \cos 60 = P \cdot \frac{1}{2}$$



-آ-

أبعاد الجائز والقوة P معلومة

٢ – نقطع الجائز بالمقطع (I) الذي يمر بالقضبان المفروضة (الشكل ٢-٢٦آ)، وندرس توازن القسم الأيسر بعد تطبيق القوى المحورية على القضبان المقطوعة (الشكل٢-٢٦ج):



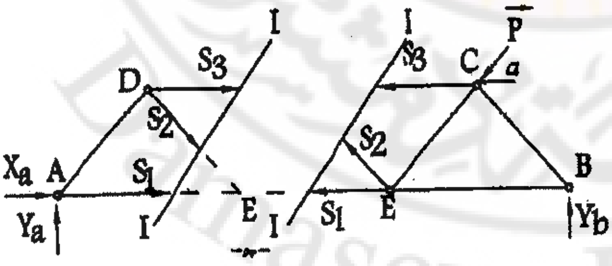
-ب-

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iE} = 0 \Rightarrow$$

$$S_3 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -Y_a \cdot a = -P \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$\Rightarrow \boxed{S_3 = -\frac{P}{2}}$$

وهي قوة ضغط والقضيب (3) بحالة ضغط .



-ج-

(الشكل٢-٢٦)

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow$$

$$Y_a = S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = P \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = \frac{P}{2}}$$

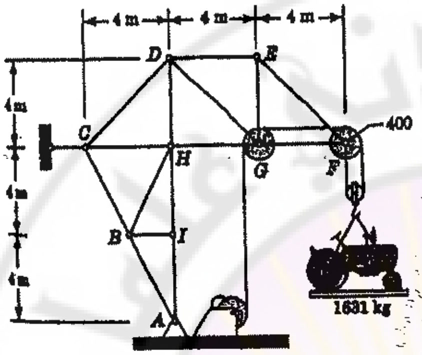
وهي قوة شد والقضيب (2) بحالة شد .

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_1 = -X_a - S_3 - S_2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{P}{2} + \frac{P}{2} - \frac{P}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 = -\frac{P}{4}}$$

وهي قوة ضغط والقضيب (1) بحالة ضغط .

مسألة ٧ : يبين الشكل (٢-٢٧آ) رافعة شبكية وهي تقوم برفع آلية كتلتها m=1631kg ، أوجد القوى المحورية في القضبان(3 , 2 , 1) وحالة كل قضيب .



الشكل (٢-٢٧آ)

الحل :

<u>الطريقة الأولى :</u> قطع كابلات البكرة كما في الشكل (٢-٢٦ ب) :

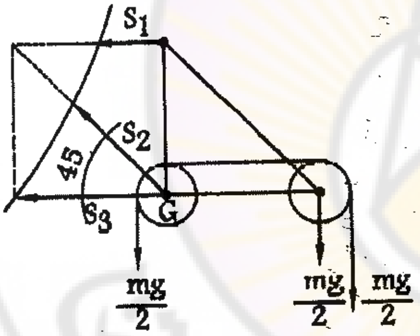
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{m \cdot g}{2} + \frac{m \cdot g}{2} + \frac{m \cdot g}{2} = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 3m \cdot g = S_2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 1631 \cdot 9{,}81 = S_2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_2 = 33941N = 33.94kN$$ شد



الشكل (٢-٢٧ب)

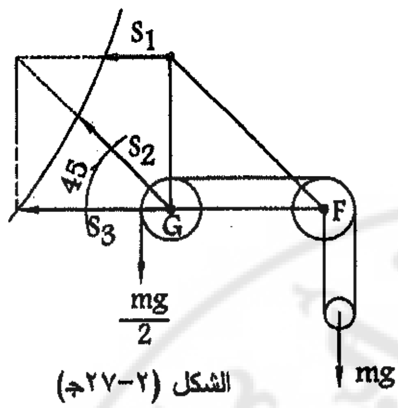
$$\sum_{i=1}^{n} M_{i0} = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 \cdot 4 + \frac{m \cdot g}{2} \cdot 0{,}4 = \frac{m \cdot g}{2} \cdot 4 + \frac{m \cdot g}{2} \cdot 4{,}4$$

$$S_1 \cdot 4 = \frac{m \cdot g}{2} \cdot (4 + 4{,}4 - 0{,}4)$$

$$S_1 \cdot 4 = (1631 \cdot 9{,}81) \cdot 4$$

$$\Rightarrow S_1 = 16000N = 16kN$$ شد



الشكل (٢-٢٧جـ)

<u>الطريقة الثانية :</u> عدم قطع كبل البكرة الرئيسة كما في الشكل (٢-٢٧جـ) :

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow$$

$$m \cdot g + \frac{m \cdot g}{2} = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

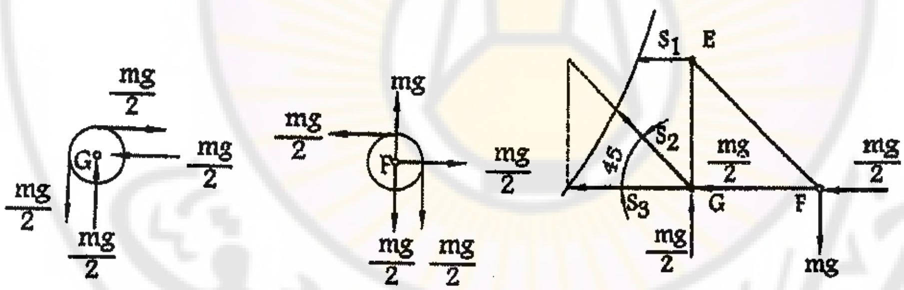
$$\Rightarrow S_2 = 33941N = 33.94kN$$ شد

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iG} = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 \cdot 4 + m \cdot g \cdot 4{,}2 - \frac{m \cdot g}{2} \cdot 0{,}4$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = m \cdot g + 1631 \cdot 9{,}81 = 16000N = 16kN$$ شد

<u>الطريقة الثالثة :</u> تفكيك البكرات كما في الشكل (٢-٢٧د) :



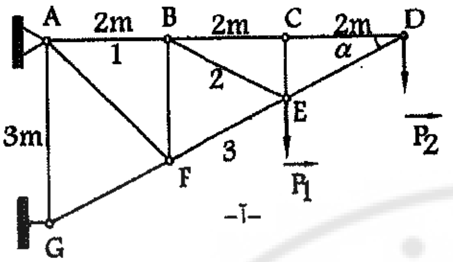
الشكل (٢-٢٧د)

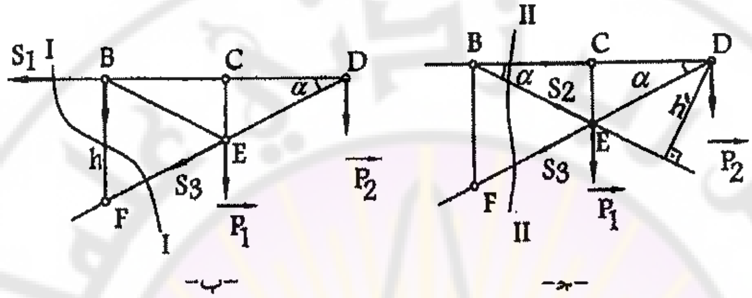
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \frac{m \cdot g}{2} + m \cdot g = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_2 = 33941N = 33.94kN$$ شد

مسألة ٨ : عيّن القوى التي تنشأ في القضبان (1, 2, 3) من الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢-٢٨آ)، وكذلك حالة كل قضيب باستخدام طريقة المقاطع .

يعطى : $P_2 = 200kgf$ ، $P_1 = 400kgf$





الشكل (٢-٢٨)

الحل :

نقطع الجائز بالمقطع الوهمي (I) كما في الشكل (٢-٢٨ب) ، وندرس توازن القسم الأيمن بعد تطبيق القوى المحورية على القضبان المقطوعة فقط :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iF} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot h = P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 4$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}565^\circ$$

$$\sin\alpha = 0{,}447 \; ; \; \cos\alpha = 0{,}894$$

$$h = BD \cdot \tan\alpha = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2m$$

$$\Rightarrow \; S_1 = \frac{400 \cdot 2 + 200 \cdot 4}{2} = 800kgf \text{ شد}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_1 = -S_3 \cdot \cos\alpha$$

$$800 = -S_3 \cdot 0{,}894$$

$$\Rightarrow S_3 = -894{,}85kgf \text{ ضغط}$$

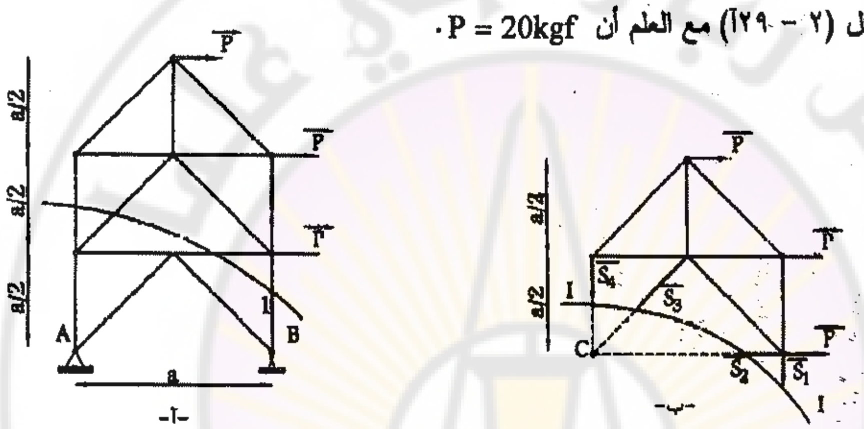
نختار المقطع II كما في الشكل (٢-٢٧ ج) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iD} = 0 \Rightarrow S_2 \cdot h' = P_1 \cdot 2$$

$$h' = BD \cdot \sin\alpha = 4 \cdot 0,447 = 1,788m$$

$$\Rightarrow\ S_2 = \frac{400 \cdot 2}{1,788} = 447,43kgf$$ شد

مسألة ٩ : عيّن القوة المحورية التي تنشأ في القضيب (1) من الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢ - ٢٩آ) مع العلم أن $P = 20kgf$.



الشكل (٢-٢٩)

الحل :

نقطع الجائز بالمقطع الوهمي (I) الذي يمر بالقضيب (1) ، وندرس توازن القسم العلوي بعد أن نطبق القوى المحورية على القضبان المقطوعة (الشكل ٢-٢٩ب) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \rightarrow S_1 \cdot a = -P \cdot \frac{a}{2} - P \cdot a$$

$$\Rightarrow S_1 = -\frac{3}{2}P = -30kgf$$

مسألة ١٠ : المطلوب للجائز المستوي المبين بالشكل (٢-٣٠آ) تعيين ما يلي :

١- رد الفعل في المسند A ، مع العلم أن $P = 1,5kN$.

٢- القوى المحورية في القضبان (1 , 2 , 3) بطريقة المقاطع .

الحل :

الطريقة الأولى :

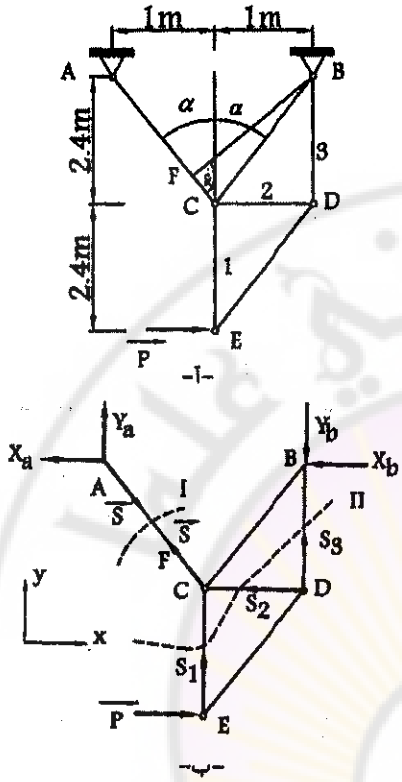
نرسم مخطط الجسم الطليق للجائز بأكمله :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_a + X_b = P = kN \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_a = Y_b$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow Y_b \cdot 2 = P \cdot 4{,}8$$

$$\Rightarrow Y_b = 1{,}5 \cdot 2{,}4 = 3{,}6kN$$



الشكل (٢-٣٠)

$$\tan\alpha = \frac{1}{2{,}4} = 0{,}4167$$

$$\alpha = 22{,}62° \;;\; \cos\alpha = 0{,}923$$

$$\varphi = 67{,}38° \;;\; \cos\varphi = 0{,}3846$$

$$AC = BC = \sqrt{2{,}4^2 + 1^2} = 2{,}6m$$

$$BF = BC \cdot \sin 2\alpha = 2{,}6 \cdot \sin 45{,}24°$$
$$= 1{,}846m$$

توازن العقدة A :

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_a = S \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow S = 3{,}9kN$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_a = S \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow X_a = 1{,}5kN$$

ويتضح من (*) أن: $X_b = 0$

الطريقة الثانية :

نقطع القضيب AC، وندرس توازن الجائز :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow P \cdot 4{,}8 = S.AF$$

$$\Rightarrow\ S = 3{,}9kN$$

نأخذ المقطع (II) وندرس توازن الجزء الأسفل من الجائز :

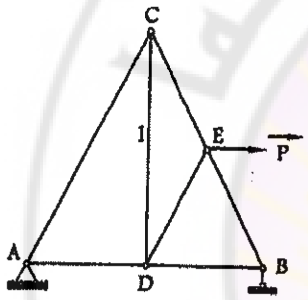
$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \Rightarrow S_3 \cdot 1 = -P \cdot 2{,}4 = 1{,}5 \cdot 2{,}4$$

$$\Rightarrow\ S_3 = -3{,}6kN \text{ ضغط}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_2 = P = 1{,}5kN \text{ شد}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_1 = -S_3 = 3{,}6kN \text{ شد}$$

مسألة ١١ : لدينا الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢ – ٣١آ) ، والمطلوب تعيين القوة المحورية التي تنشأ في القضيب (١) بطريقتي القطع والعقد مع العلم أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع، وطول ضلعه (١٠) cm، والقوة ($\vec{P}$) توازي (AB) ومطبقة في منتصف (BC) وتساوي 100kgf .



الشكل (٢ – ٣١آ)

الحل :

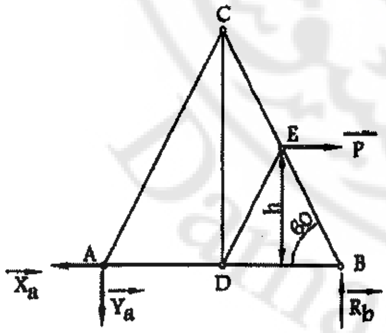
١- نرسم مخطط الجسم الطليق للجائز الشبكي، ونعيّن ردود الفعل في مسانده (الشكل ٢ – ٣١ب):

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow R_b \cdot 10 = P \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow R_b = 25\sqrt{3}kgf$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_a = P = 100kgf$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_a = R_b = 25\sqrt{3}kgf$$



الشكل (٢ – ٣١ب)

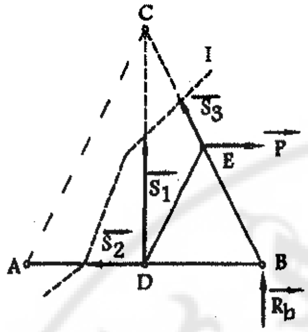
طريقة القطع :

نقطـــع الجائز بالمقطع الوهمي (I) الذي يمر بالقضـــيب (١)، وندرس توازن القسم الأيمن بعـــد أن نطبق القوى المحورية على القضبان المقطوعة (الشكل٢ – ٣١ ج) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot 5 = -P \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_1 = -50\sqrt{3}\text{kgf}$$

وهي قوة ضغط والقضيب (1) بحالة ضغط .



(الشكل٢ – ٣١ ج)

– **طريقة العقد** : ندرس توازن العقدتين (A , C) (الشكل ٢ – ٣١ د) :

<u>العقدة A :</u>

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_4 \cdot \sin 60 = Y_a = 25\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_4 = 50\text{kgf}$$

<u>العقدة C :</u>

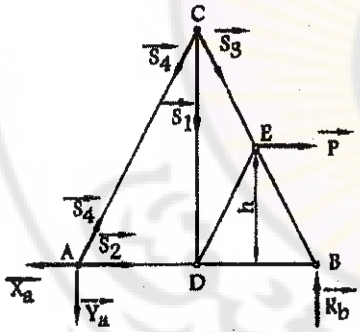
$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_3 \cdot \sin 30 = S_4 \cdot \sin 30$$

$$\Rightarrow S_3 = S_4 = 50\text{kgf}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 = -2S_3 \cdot \cos 30 = -50\sqrt{3}\text{kgf}$$

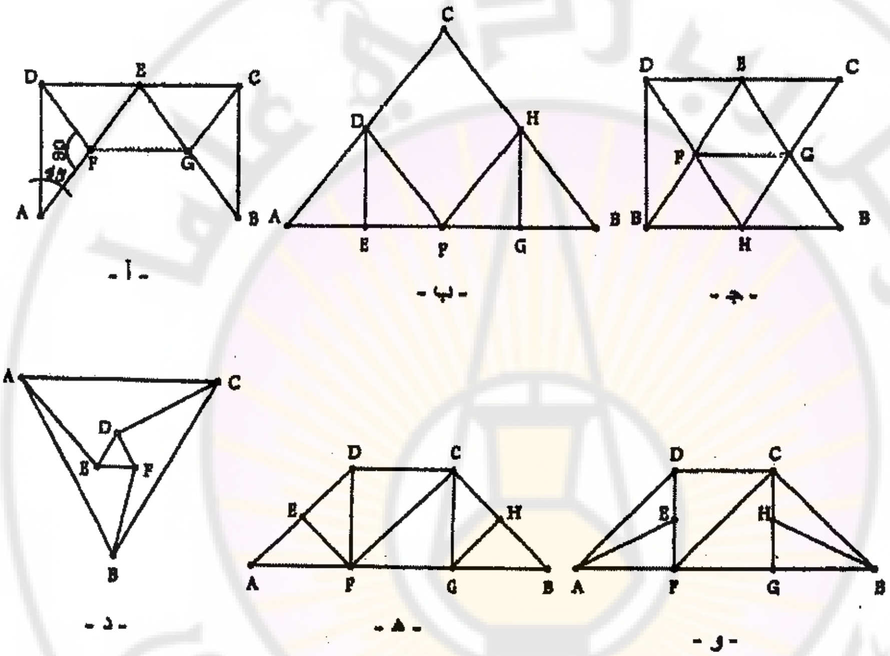
وهي قوة ضغط والقضيب (1) بحالة ضغط .



(الشكل٢ – ٣١ د)

٢ – ١٢ . مسائل غير محلولة على الجوائز الشبكية المستوية :

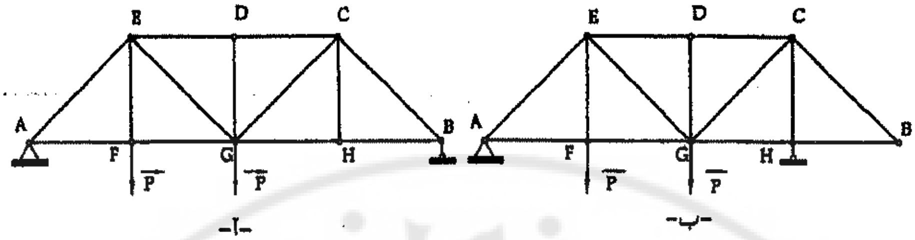
مسألة ١ : ادرس داخلياً تشكيل كل من الجوائز الشبكية المبينة بالشكل (٢-٣٢)، ضع النتائج في جدول .



الشكل (٢ – ٣٢)

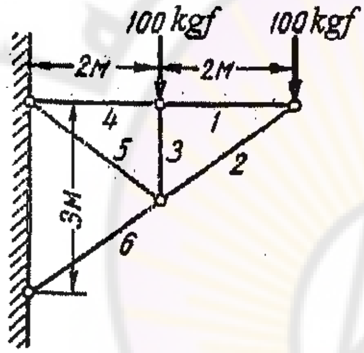
مسألة ٢ : هل يمكن أن يكون الجائز المبين بالشكل (٢-٣٢آ) بسيطاً وفي الوقت نفسه مركباً ؟ وضّح ذلك. ثم أعد السؤال نفسه للجائز المبين بالشكل (٢-٣٢و) .

مسألة ٣ : هل يمكن تطبيق القاعدتين المستخدمتين في دراسة الجوائز الشبكية المستوية على كلٍ من الجائزين المبينين في الشكل (٢-٣٣) ؟ وضّح ذلك .

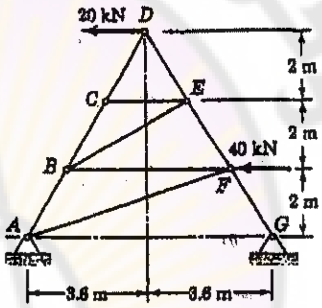


الشكل (٢ - ٣٣)

مسألة ٤ : ادرس الحائز المبين بالشكل (٢ - ٣٤) دراسةً تامة .



الشكل (٢ - ٣٥)



الشكل (٢ - ٣٤)

مسألة ٥ : لدينا الجائز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢-٣٥) ، والمطلوب:

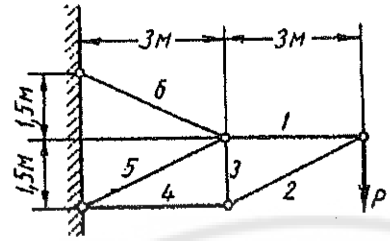
١- ادرس تشكيله داخلياً ، ثم بيّن كيفية تقييده خارجياً .

٢- عيّن القوى المحورية التي تنشأ في قضبانه جميعها وحالة كل قضيب .

الجواب :

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6
S_i [kgf]	+133	-167	-100	+133	+83	-250
حالة القضيب	شد	ضغط	ضغط	شد	شد	ضغط

مسألة ٦ : أعد المسألة السابقة من أجل الجائز المستوي المبين بالشكل (٢-٣٦) .

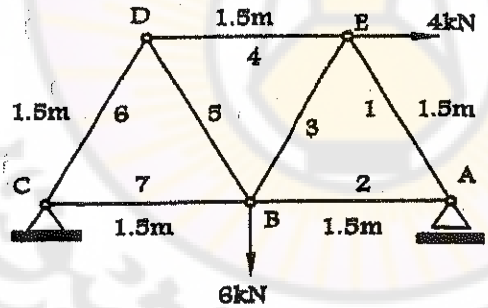


الشكل (٢ - ٣٦)

الجواب :

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6
Si	+P	+0,707P	−0,707P	0	−0,707P	−0,707P
حالة القضيب	شد	شد	ضغط	غير محمل	ضغط	ضغط

مسألة ٧ : المطلوب حساب القوى المحورية في قضبان الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢ - ٣٧) مع العلم أن المثلثات متساوية الأضلاع، وطول كل ضلع (1,5m).

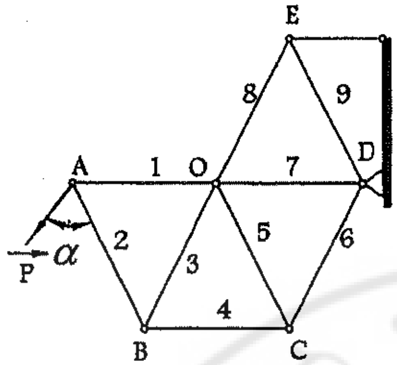


الشكل (٢ - ٣٧)

الجواب :

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7
Si [tf]	−5,46	2,73	5,46	−1,46	1,46	−1,46	4,73
حالة القضيب	ضغط	شد	شد	ضغط	شد	ضغط	شد

مســـألة ٨ : احســـب القوى المحورية التـــي تنشأ في قضبان الجائز الشـــبكي جمـــيعها المبين بالشـــكل (٢ - ٣٨) مع العلـــم أن المضلع (ABCDE) هو جزء مـــن مســـدس منتظم طول ضلعه (a) ، وأن: $P = 40kgf$ ، $\alpha = 60°$.

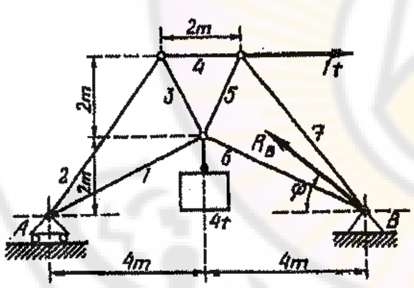


الشكل (٢ - ٣٨)

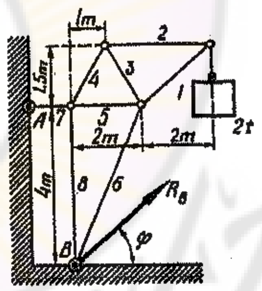
الجواب :

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Si [tf]	40	-40	40	40	40	-40	0	80	-80
حالة القضيب	شد	ضغط	شد	شد	شد	ضغط	غير محمل	شد	ضغط

مســـألة ٩ : عيّن ردود الفعل للجائز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢ - ٣٩)، والقوى المحورية التي تنشأ في قضبانه، وحالة كل قضيب .



الشكل (٢ - ٤٠)



الشكل (٢ - ٣٩)

الجواب : $R_A = 2tf$; $R_B = 2,83tf$; $\varphi = 45°$

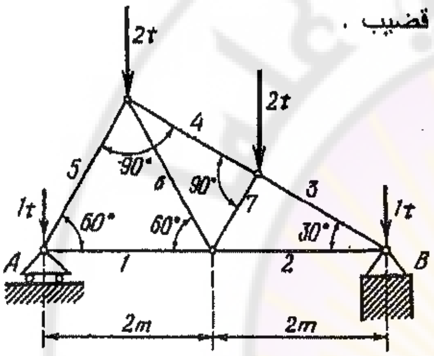
رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7	8
Si [tf]	-3,33	+2,67	-2,4	+2,4	+0,67	-4.47	+2	+2
حالة القضيب	ضغط	شد	ضغط	شد	شد	ضغط	شد	شد

مسألة ١٠ : أعد المسألة السابقة من أجل الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢ - ٤٠) .

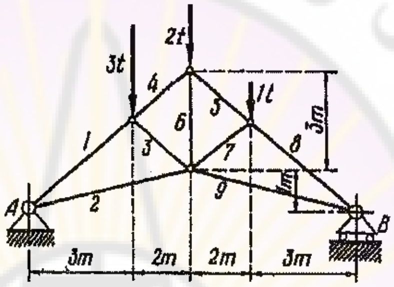
الجواب : $R_A = 1{,}5tf$; $R_B = 2{,}7tf$; $\Phi = 68°$

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7
Si [tf]	+2	−3	+2,7	−3	+3,6	+1,57	−4
حالة القضيب	شد	ضغط	شد	ضغط	شد	شد	ضغط

مسألة ١١ : عيّن ردود الفعل للجائز الشبكي المبين بالشكل (٢-٤١)، وكذلك القوى المحورية التي تنشأ في جميع قضبانه، وحالة كل قضيب .



الشكل (٢ - ٤٢)



الشكل (٢ - ٤١)

الجواب : $R_A = 3{,}4tf$; $R_B = 2{,}6tf$

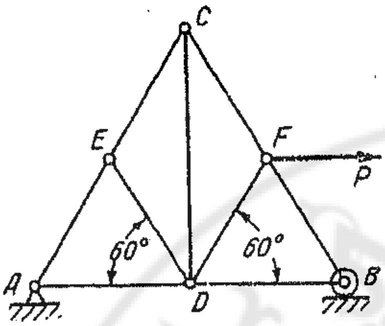
رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Si [tf]	-7,3	+5,8	-2,44	-4,7	-4,7	+3,9	-0,81	-5,5	+4,4
حالة القضيب	ضغط	شد	ضغط	ضغط	ضغط	شد	ضغط	ضغط	شد

مسألة ١٢ : أعد المسألة السابقة من أجل الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢-٤٢) .

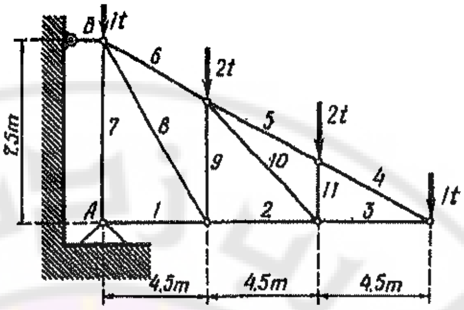
الجواب : $R_A = 3{,}25tf$; $R_B = 2{,}75tf$

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7
Si [tf]	+1,3	+3,03	-3,[illegible]	[illegible],5	-2,6	+1,73	+1,73
حالة القضيب	شد	شد	ضغط	ضغط	ضغط	شد	ضغط

مسألة ١٣ : احسب ردّي الفعل في مساند الجائز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢-٤٣)، وكذلك القوى المحورية التي تنشأ في قضبانه جميعها .



الشكل (٢-٤٤)



الشكل (٢-٤٣)

الجواب : $X_a = 5,4tf$; $Y_a = 6tf$; $X_b = -5,4tf$

رقم القضيب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Si [tf]	-5,4	-3,6	-1,8	2,06	2,06	+4,1	-6,0	+3,5	-3,0	+2,7	-2,0
حالة القضيب	ضغط	ضغط	ضغط	شد	شد	شد	ضغط	شد	ضغط	شد	ضغط

مسـألة ١٤ : أوجد القوة المحورية التي تنشأ في القضيب (CD) للجائز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢-٤٤)، وحالة هذا القضيب مع العلم أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع.

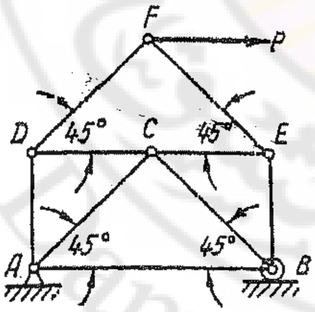
الجواب : ضغط $S = -0,866P$.

مسـألة ١٥ : لدينا الجائز الشبكي المبين بالشكل (٢-٤٥) والمطلوب:

١- ادرس تشكيله داخلياً، وتقييده خارجياً .

٢- عيّن القوة المحورية التي تنشأ في القضيب (AB) وما هي حالته؟

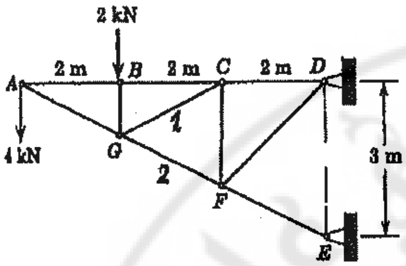
الجواب : شد $S = 0,5P$.



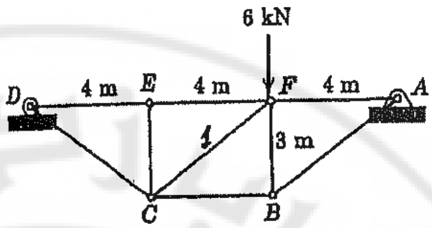
الشكل (٢-٤٥)

مسـألة ١٦ : عـيّن القوة المحورية في القضيب (1) من الجائز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢-٤٦) .

الجواب : ضغط $S_1 = -3,33kN$.



الشكل (٢ – ٤٧)

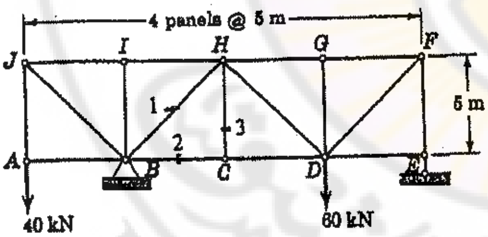


الشكل (٢ – ٤٦)

مسـألة ١٧ : عيّن القوتين المحوريتين في القضيبين (1,2) من الجائز الشبكي المستوي المبين بالشكل (٢-٤٧) .

الجواب : ضغط $S_2 = -1kN$ ، شد $S_1 = +2,24kN$.

مسـألة ١٨ : أوجـد القـوى المحـورية في القضبان (1,2,3) من الجائز الشبكي المبين بالشـكل (٢-٤٨) .



الشكل (٢-٤٨)

الجواب :

$S_1 = -47,1kN$ (ضغط)

$S_2 = -6,7kN$ (ضغط)

$S_3 = 0$ (غير محمل)

مسألة ١٩ : لدينا الجائز الشبكي المستوي (ABCD) المبين في الشكل (٢-٤٩) حيث أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع، والمثلث (ACD) قائم الزاوية في C والمطلوب :

١- دراسة تشكيل هذا الجائز داخلياً وكيفية تقييده خارجياً .

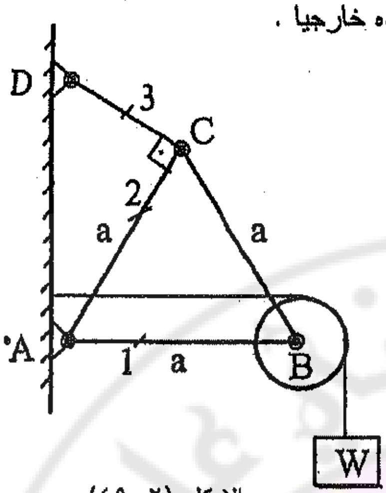
١- دراسة تشكيل هذا الجائز داخلياً وكيفية تقييده خارجياً .

٢- تعيين مركبتي قوة القص في المفصل (B) حيث إن:

. W = 1500N

٣- تعيين مركبتي ردي الفعل في كل من المسندين (A , D) .

٤- تعيين القوى المحورية في كل من القضبان (1,2,3) وحالة كل قضيب.



الشكل (٢-٤٩)

الجواب :

$$X_a = 2800\ N, X_d = 1300\ N$$

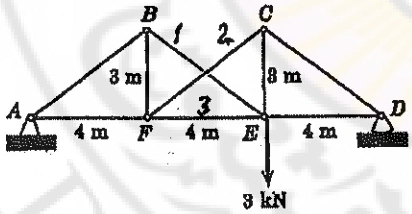
$$Y_a = Y_d = 750N, X_b = Y_b = W$$

$S_1 = -2367N$ (ضغط) ، $S_2 = -866N$ (ضغط) ، $S_3 = 1500N$ (شد)

مسألة ٢٠: يطلب للجائز الشبكي المستوي المبين في الشكل (٢-٥٠) ما يلي :

أ ــ تشكيله داخلياً وتقييده خارجياً .

ب ــ تعيين القوى المحورية التي تنشأ في القضبان (1,2,3) .



الشكل (٢-٥٠)

الجواب :

$S_1 = -1{,}67kN$ (ضغط)

$S_2 = -3{,}33kN$ (ضغط)

$S_3 = +4kN$ (شد)

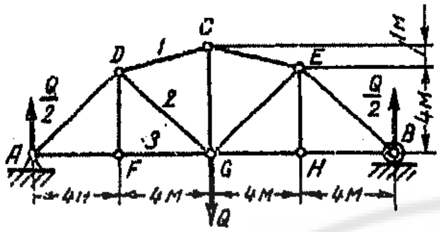
مسألة ٢١: عين القوى المحورية في القضبان (1,2,3) من الجائز الشبكي المبين في الشكل (٢-٥١) .

الجواب :

$S_1 = -8,25Q$ (ضغط)

$S_2 = +0,424Q$ (شد)

. $S_3 = 0,5Q$ (شد)



الشكل (٢-٥١)

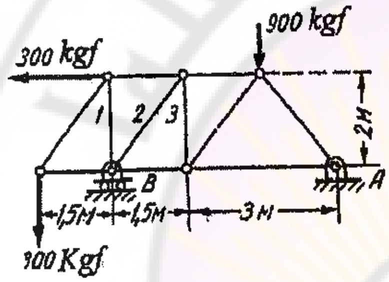
مسألة ٢٢: أعد المسألة السابقة من أجل الجائز الشبكي المبين في الشكل (٢-٥٢).

الجواب :

$S_1 = -300kgf$ (ضغط)

$S_2 = -666kgf$ (ضغط)

$S_3 = +533\,kgf$ (شد)



الشكل (٢-٥٢)

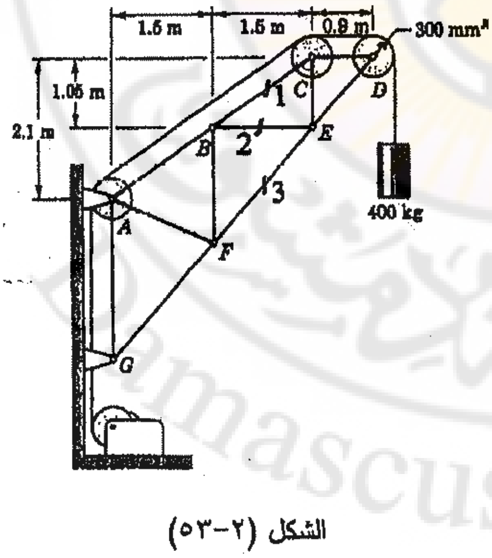
مسألة ٢٣: للجائز الشبكي المستوي المبين في الشكل (٢-٥٣) يطلب تعيين القوى المحورية في القضبان (1,2,3) بطريقة المقاطع علماً بأن كتلة الثقل تساوي 400kg.

الجواب :

$S_1 = +182N$ (شد)

$S_2 = 2019N$ (شد)

$S_3 = -8268,9N$ (ضغط)

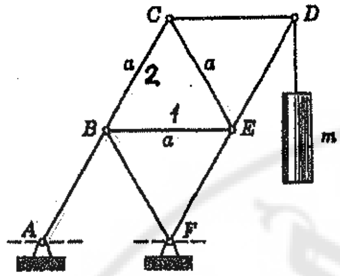


الشكل (٢-٥٣)

مســألة ٢٤: لدينا الجائز الشبكي المستوي المبين في الشكل (٢-٥٤) ، والمطلوب :

١- ادرس تشــكيله داخليا ، وبين كيف قيد خارجياً .

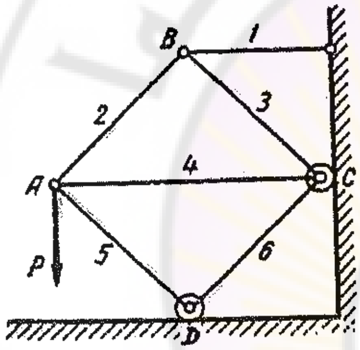
٢- عين القوتين المحوريتين في كل من القضــيبين (1) و (2) ، بطريقة العقــد علماً بأن كتلة الثقل المربوط في العقدة (D) هي(m) .



الشكل (٢-٥٤)

الجواب : $S_1 = S_2 = \dfrac{m \cdot g}{\sqrt{3}}$

مســألة ٢٥: المطلوب حساب الجائز الشبكي المبين في الشكل (٢-٥٥) علماً بأن (ABCD) مربع طول (a) وقطره (AC) أفقــي ، والقوة (P) شاقولية وهي معلومة المقدار .



الشكل (٢-٥٥)

الجواب : $X_c = S_1 = P$ ، $Y_d = P$ ، $X_c = +P$

رقم القضيب	2	3	4	5	6
S_i	+0,707P	-0,707P	0	-0,707P	-0,707P
حالة القضيب	شد	ضغط	غير محمل	ضغط	ضغط

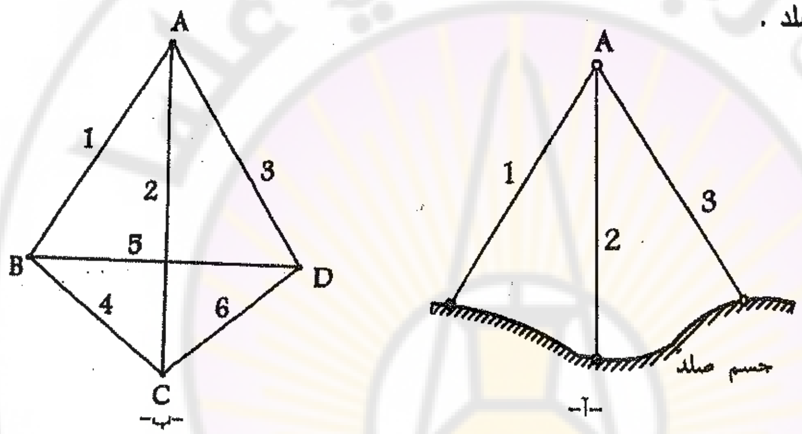
ثانياً – الجوائز الشبكية الفراغية:(Space Trusses)

٢ – ١٣ . تشكيل الجائز الشبكي الفراغي الأساس :

يمكن الحصول على جائز أساس صلد باستخدام احدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : الجائز الشبكي الفراغي الأساس هو عبارة عن ثلاثية فراغية متمفصلة تثبت نهاياتها مفصلياً على جسم صلد (الشكل ٢ – ٥٦آ) .

<u>قاعـدة :</u> إذا ثبتت نهايات ثلاثية فراغية متمفصلة مفصلياً على جسم صلد فإننا نحصل على جسم صلد .



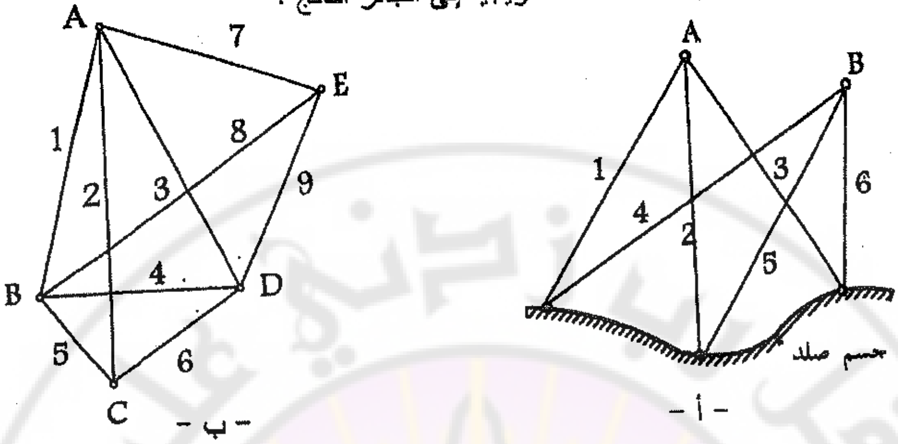
الشكل (٢ – ٥٦)

الطـريقة الثانية : بما أن المثلث المؤلف من ثلاثة قضبان رؤوسه متمفصلة هو جسم صلد، فيمكن استبدال الجسم الصلد في الحالة السابقة بمثلث، ثم نضيف إليه ثلاثية فراغية متمفصلة (الشكل ٢ – ٥٦ب) فنحصل على الجائز الأساس (ABCD)، وهو عبارة عن رباعي وجوه (Tetrahedron) .

٢ – ١٤ . تشكيل الجائز الشبكي الفراغي البسيط :

بما أن الجائز الأساس المشكل وفق الطريقة الأولى أو الثانية هو صلد ، فيمكن إضافة إلى كل منهما ثلاثية فراغية متمفصلة على أن تثبت نهايات هذه الثلاثية مفصلياً على الجائز الأساس

فنحصـــل على الجائز الشبكي الفراغي البسيط كما في الشكل (٢ – ٥٧) . وهكذا يمكن دائماً إضافة عدد من الثلاثيات المتمفصلة تدريجياً إلى الجائز الناتج .



الشكل (٢ – ٥٧)

الجائــز المشـــكل وفق هذه الطريقة هو صلد، ويتمتع بالصفات الداخلية الأربعة المذكورة في الفقرة (٢ – ٤) ، ويتحقق بين عدد قضبانه (m) وعدد عقده (n) العلاقة التالية:

للجائز الأول :

$$\boxed{m = 3n} \quad \dots\dots\dots (1)$$

للجائز الثاني :

$$\boxed{m = 3n - 6} \quad \dots\dots (2)$$

إن تحقــيق كل من هاتين العلاقتين هو شرط لازم وغير كافٍ ، لأنه يمكن أن تكون العلاقة محققة، ولكن قاعدة تشكيل الجائز غير محققة .

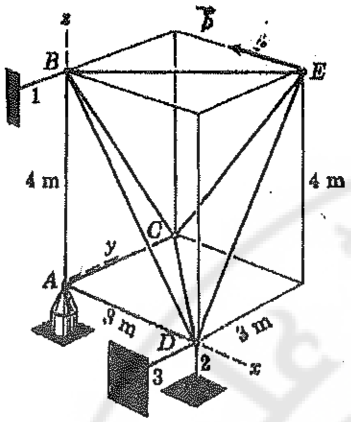
– إذا كـــان $m > 3n$ (في طريقة التشكيل الأولى) أو $3n - 6 > m$ (في طريقة التشكيل الثانية) فالقضبان فائضة، والجائز غير مقرر .

– إذا كـــان $m < 3n$ (في طريقة التشكيل الأولى) أو $3n - 6 < m$ (في طريقة التشكيل الثانية) فالقضبان ناقصة، والجائز غير صلد .

٢ – ١٥ . تقييد الجائز الشبكي الفراغي البسيط خارجياً :

إن الجائـــز الشـــبكي البســـيط المشكل وفق الطريقة الأولى (الشكل ٢–٥٧أ) هو مقيد بشكل صحيح وتام داخلياً وخارجياً ، أما الجائز المشكل وفق الطريقة الثانية (الشكل ٢–٥٧ب) فهو

مشـــكل داخلـيا بشـكل صحيح وتام ، ويتقيد خارجـيا بسـتة قضبان ، حيث تشـكل ردود فعـل القضبان مع القوى الخارجية المطبقة على الجائز جملة قوى فراغية عامة،وعدد المجاهيل فيها سـتة ، وهذه القضبان يجب أن تكون غير قاطعـة لمستقيم وغير موازية لمســتوٍ واحد، أو مـا يعادل ذلك ، أي بمفصل كروي (يعادل ثلاثة قضبان فراغية) وثلاثة قضبان (الشـــكل ٢ – ٥٨) ، أو بمفصل كروي ومفصل مستوي ثابت (يعادل قضيبين) وقضيب .



الشكل (٢ – ٥٨)

٢ – ١٦ . دراسة (تحليل) الجوائز الشبكية الفراغية :

إن دراســة الجوائز الشبكية الفراغية مماثلة تماماً لدراسة الجوائز الشبكية المستوية ، والفرق بيـنهما أن القـوى المطبقة على الأولى هي فراغية ، وعلى الثانية مستوية ، وتتعيّن القوى المحورية في قضبان الجائز بطريقة العقد أو طريقة المقاطع .

طريقة العقد (Joints Method) :

نرسـم مخطط الجسم الطليق للجائز ، ونمثل ردود فعل القضبان على المفاصل فنحصل على جملة قوى فراغية متلاقية في نقطة ، وعدد معادلات التوازن المفيدة ثلاثة ، لذا يجب أن نبدأ بدراسة توازن العقدة التي لا يزيد عدد المجاهيل فيها عن ثلاثة .

طريقة المقاطع (Sections Method) :

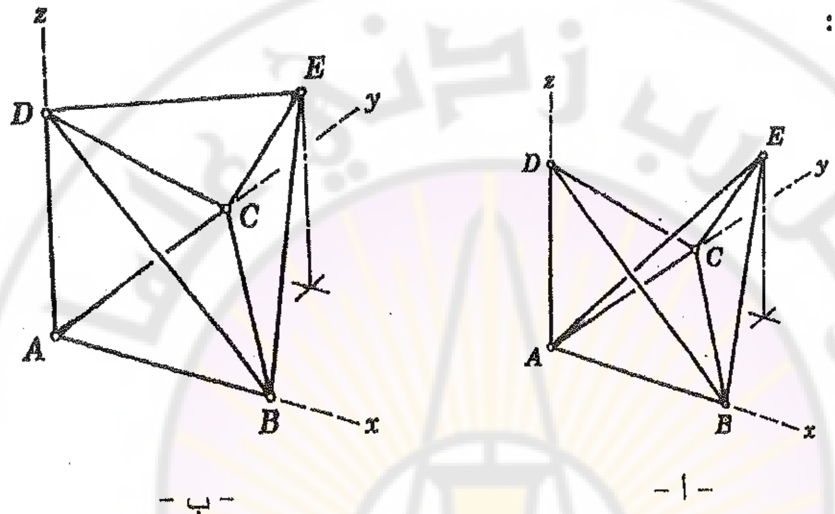
وتتلخص بقطع الجائز بمقطع وهمي مناسب يمر بالقضبان المراد تعيين القوى المحورية فيها، فينشـطر الجائـز إلـى شطرين ، فنطبق على القضبان المقطوعة فقط القوى المحورية التي تصـبح في هذه الحالة خارجية بعد أن كانت داخلية ونعدّها بحالة شد ، نختار أحد الشطرين، ونـدرس تـوازنه باعتبار أن القوى المطبقة عليه هي فراغية عامة، وعدد معادلات التوازن المفيدة ستة .

ملاحظة : تمتاز الطريقة الأولى عن الثانية بالسهولة .

٢ - ١٧ . مسائل محلولة على الجوائز الشبكية الفراغية :

مســألة ١: ادرس تشكيل الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢-٥٩أ) واذكر الصفات التـي يتمـتع بها . هل يمكن استبدال الضلع (AE) بضلع آخر على أن يبقى الجائز متمتعاً بالصفات نفسها ؟

الحل :



الشكل (٢-٥٩)

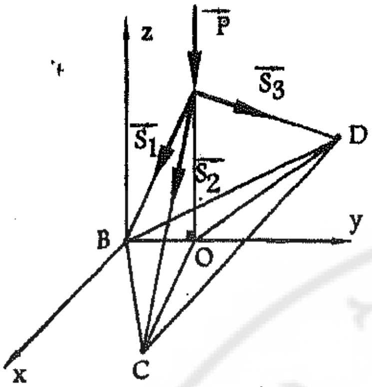
الجائز مشكل داخلياً وفق الطريقة الثانية بشكل صحيح وتام ، فالجائز (ABCD) هو أساس، ثـم أضيفت إليه الثلاثية الفراغية المتمفصلة (E) ، ويلاحظ من الرسم أن نهايات قضبان هذه الثلاثية ثبتت مفصلياً في نقاط صلدة (A,B,C) .

يتمتع الجائز المفروض بالصفات الأربع التالية :

١- الجائز صلد (مستقر) ، أي لا يتقوض، ولا يغير شكله .
٢- قضبانه تامة (غير فائضة وغير ناقصة).
٣- مقيد تقييداً تاماً (ليس له درجات حرية أو درجات عدم تقرير) .
٤- مقرر، أي يمكن تعيين القوى المحورية في جميع قضبانه .

يمكن اســتبدال القضيب (AE) بقضيب آخر هو (ED) كما في الشكل (٢-٥٩ ب) ، ويبقى الجائز بأكمله متمتعاً بالصفات المذكورة .

مسألة ٢: لدينا الجائز الشبكي الفراغي (ABCD)، يقع الوجه (BCD) في المستوي الأفقي، وقد طبقت على العقدة (A) القوة الشاقولية $\vec{P}$ (الشكل ٢-٦٠). والمطلوب حساب القوى التي تنشأ في القضبان (1,2,3) وحالة هذه القضبان. بفرض ما يلي: $AB = AC = AD = \ell$ ، والمثلث (BCD) متساوي الأضلاع، وطول ضلعه $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ ، $P = 3\sqrt{3}tf$.



الشكل (٢ - ٦٠)

الحل :

ندرس توازن العقدة (A) بعد تطبيق عليها القوة الخارجية ($\vec{P}$) وردود فعل القضبان . بسبب التناظر بالنسبة للمحور (AO) ينتج أن ($S_1 = S_2 = S_3 = S$) :

يقع مسقط العقدة (A) على النقطة (O) وهي ملتقى ارتفاعات المثلث (BCD) .

$$BO = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \Rightarrow 3S\cdot\cos 30 = -P$$

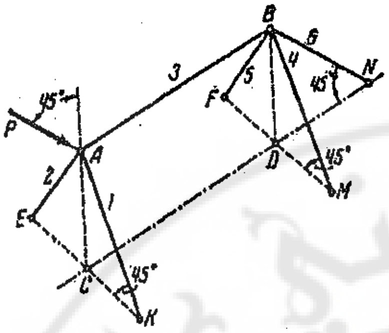
$$\Rightarrow S = -P\frac{2}{3\sqrt{3}} = -2tf$$

أي أن القضبان المفروضة بحالة ضغط .

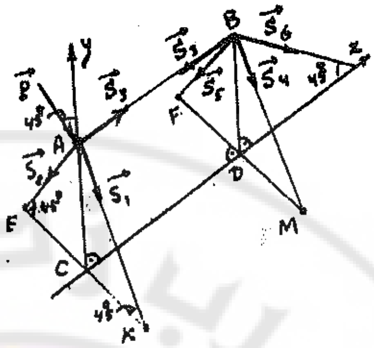
مسألة ٣ : لدينا منشأة فراغية صلدة مؤلفة من ستة قضبان (6-1) وهي متمفصلة مع بعضها البعض كما في الشكل (٢ - ٦١ آ) ، وقد طبقت على المفصل (A) القوة $\vec{P}$ التي تقع في مستوي المستطيل (ABCD) ، وثبتت النهايات (E , F , K , M , N) على مستو أفقي . عيّن القوى المحورية التي تنشأ في قضبان المنشأة، وحالة كل قضيب بفرض أن :

$$P = 1tf \quad ، \quad EA = FB = \ell \quad ، \quad E\hat{A}K = F\hat{B}M = \frac{\pi}{2}$$

الحل :



- أ -



- ب -

الشكل (٢ - ٦١)

نرسم مخطط الجسم الطليق للمنشأة (الشكل ٢ - ٦١ ب) ، وندرس توازن العقدتين التاليتين :

العقدة A :

بسبب التناظر $\Leftarrow \quad S_1 = S_2$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow 2S_1\frac{\sqrt{2}}{2} = -P\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_1 = S_2 = -\frac{1}{2}\,\text{tf}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_3 = -P\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{tf}$$

والقضبان الثلاثة (3 , 2 , 1) بحالة ضغط .

العقدة B :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_3 = S_6\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_6 = -1\text{tf}$$

بسبب التناظر $\Leftarrow \quad S_4 = S_5$

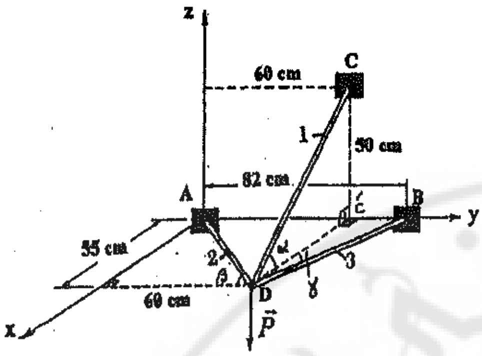
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow 2S_4\frac{\sqrt{2}}{2} = -S_6\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_4 = S_5 = \frac{1}{2}\,\text{tf}$$

أي أن القضيبين (5 , 4) بحالة شد والقضيب (6) بحالة ضغط .

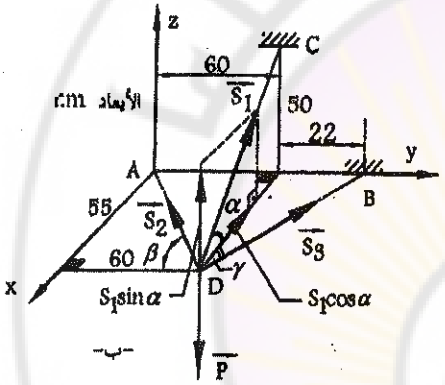
مســألة ٤ : يبين الشكل (٢-٦٢آ) جائزاً فراغياً ، محمل بالقوة P = 950N والمطلوب:

١- حساب القوة المحورية في القضيب (1).

٢- تعيين القوتين المحورتين في القضيبين (2) و (3).



- آ -



-ب-

الشكل (٢-٦٢)

الحل :

حساب الزوايا γ, β, α الشكل (٢-٦٢ب):

$$\tan\alpha = \frac{50}{55} = 0{,}909 \quad \alpha = 42{,}27 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = 0{,}68 \\ \cos\alpha = 0{,}74 \end{array} \right.$$

$$\tan\beta = \frac{55}{60} = 0{,}917 \quad \beta = 42{,}51 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\beta = 0{,}676 \\ \cos\beta = 0{,}737 \end{array} \right.$$

$$\tan\gamma = \frac{22}{55} = 0{,}4 \quad \gamma = 21{,}8 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\gamma = 0{,}371 \\ \cos\gamma = 0{,}928 \end{array} \right.$$

معادلات التوازن (معادلات مساقط) :

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \Rightarrow P = S_1 \sin\alpha$$

$$950 = S_1 \cdot 0{,}673 \Rightarrow S_1 = 1411{,}6N$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow -S_2 \cdot \sin\beta - S_1 \cos\alpha - S_3 \cos\gamma = 0$$

$$\Rightarrow S_2 \cdot 0{,}676 + 1412 \cdot 0{,}74 + S_3 0{,}928 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 0{,}676 + S_3 \cdot 0{,}928 = -1045} \ldots\ldots(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow -S_2 \cos\beta + S_3 \sin\gamma = 0$$

$$S_2 \cdot 0{,}737 = S_3 \cdot 0{,}371$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = S_3 \cdot 0{,}503} .....(2)$$

التعويض في (1) :

$$S_3 \cdot 0{,}503 \cdot 0{,}676 + S_3 \cdot 0{,}928 = -1045$$

$$S_3 \cdot 0{,}34 + S_3 0{,}928 = -1045$$

$$\Rightarrow \boxed{S_3 = -824N}$$

التعويض في (2) :

$$S_2 = S_3 \cdot 0{,}503$$

$$S_2 = -824 \cdot 0{,}503$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = -414{,}5N}$$

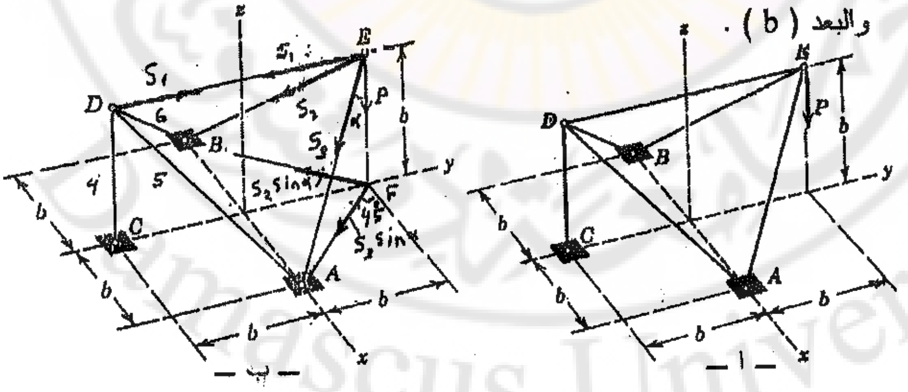
ملاحظة :

يطلب حل هذه المسألة باستخدام معادلات عزوم .

مسألة ٥ : (ABCDE) جائز شبكي فراغي ، وقد ثبتت النهايات (A , B , C) على المستوي الصلد (xy) كما في الشكل (٢-٦٣ آ) القضيب (DE) أفقي ويوازي y والمطلوب :

١- ادرس تشكيل الجائز المفروض داخلياً وخارجياً .

٢- عين القوى المحورية في جميع قضبانه وحالة كل قضيب وذلك بدلالة القوة (P) والبعد (b) .



الشكل (٢-٦٣)

الحل :

١- يتشكل الجائز من الجائز الأساس وهو عبارة عن الثلاثية الفراغية المتمفصلة (D) التي ثبتت نهايتها (A,B,C) مفصلياً على المستوي الصلد (xy) ثم أضيفت إليه الثلاثية الفراغية المتمفصلة (E) ، أي أن هذا الجائز مشكل وفق الطريقة الأولى، وهو يتمتع بالصفات الأربع المعروفة ، وتتحقق بين عدد قضبانه m وعدد عقده n العلاقة $m = 3n$ حيث إن $3n = 6$ وفي الواقع $m = 6$.

يتضح من الرسم أن الهرم ABEF يساوي الهرم ABDC ،

وأن $AE = AD$ ، $AF = AC$.

$$AF = b\sqrt{2}$$

$$\overline{AE}^2 = b^2 + 2b^2 = 3b^2$$

$$\left.\begin{array}{l} AE = b\sqrt{3} \\ AF = b\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{b\sqrt{2}}{b\sqrt{3}} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{b\sqrt{3}} \end{array}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

<u>دراسة توازن العقدة (E) :</u>

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow S_3 \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = S_2 \sin\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_2 = S_3 = S$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \Rightarrow P + 2S\cos\alpha = 0$$

$$2S\cos\alpha = 2S \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -P$$

$$S = -\frac{\sqrt{3}}{2}P$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = S_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}P} \text{ ضغط}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S_1 = -2S \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_1 = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}P\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 = P} \text{ شد}$$

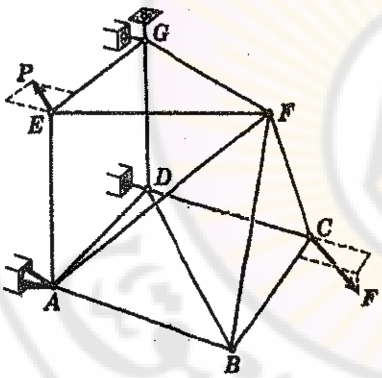
بصورة مماثلة ندرس توازن العقدة (D) فنحصل على ما يلي :

$$S_5 = S_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}P \ \text{(ضغط)}$$

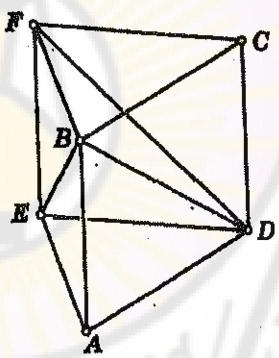
$$\boxed{S_4 = P} \ \text{(شد)}$$

٢ – ١٨ . مسائل غير محلولة على الجوائز الشبكية الفراغية :

مسـألة ١ : ادرس تشكيل الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢–٦٤) وماهي الصفات التي يتمتع بها ؟



الشكل (٢–٦٥)



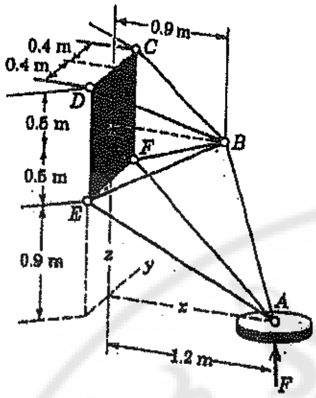
الشكل (٢–٦٤)

مسألة ٢ : يبـين الشكل (٢–٦٥) جائزاً شبكياً فراغياً وهو مقيد خارجياً بشكل صحيح وتام بالمفصـل الكـروي (A) وبالقضيبين (G) وبالقضيب (D) ، أما داخلياً فهو مقيد بشكل غير تام. ما هو عدد القضبان الناقصة ، وكيف يمكن وضعها على هذا الجائز ؟

مسألة ٣ : احسب القوة المحورية في القضيب (BE) من الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢-٦٦) مع العلم أن:

F=2,2kN وأن الجائز متناظر حول المستوي xy .

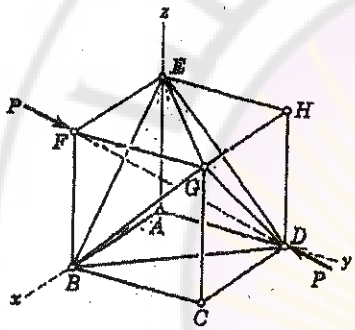
الجواب : شد $S = 1,27\ kN$



الشكل (٢-٦٦)

مسألة ٤ : إذا طبقنا على الجائز المبين بالشكل (٢-٦٧) القوتين ($\bar{P}$) في كل من النقطتين (D,F) وعلى امتداد القطر (DF) كما في الرسم، فالمطلوب تعيين القوتين المحوريتين في القضيبين (1,2).

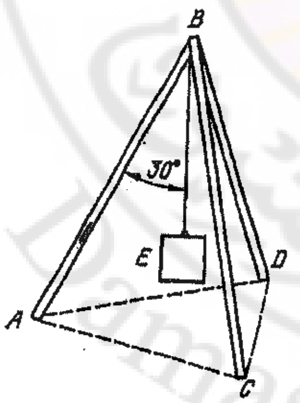
الجواب : $S_1 = -P/\sqrt{3}\ ,\ S_2 = P/\sqrt{6}$



الشكل (٢-٦٧)

مسألة ٥ : عُلق الثقل (E) الذي وزنه 10(kgf) برأس جائز شبكي فراغي أساس (ثلاثية فراغية متمفصلة) كما في الشكل (٢-٦٨)، وقد ثبتت نهايات القضبان على أرض أفقية ، وتصنع هذه القضبان فيما بينها زوايا متساوية، وكل منها يصنع مع الشاقول (BE) زاوية مقدارها (30°) . عيّن القوى المحورية التي تنشأ في قضبان هذا الجائز .

الجواب : $S = 3,85kgf$



الشكل (٢-٦٨)

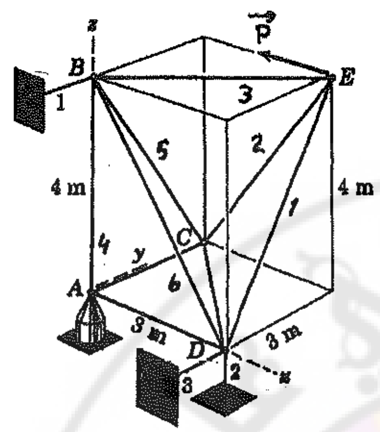
مسـألة ٦ : لديـنا الجائز الشبكي الفراغي (ABCDE) المبيـن بالشكل (٢-٦٩) ، وقد قيّد بالمفصل الكروي (A) وبالقضبان الثلاثة (١ ، ٢ ، ٣) . والمطلوب :

١- دراسـة تشـكيل هذا الجائز داخلياً، وتقييده خارجياً .

٢- حساب القوى المحورية في القضبان الثلاثة المتلاقية في العقدة (E) وذلك بدلالة القوة المعلومة ($\vec{P}$) .

٣- ردود الفعل في مساند الجائز .

القوى المحورية في القضبان (4,5,6) .



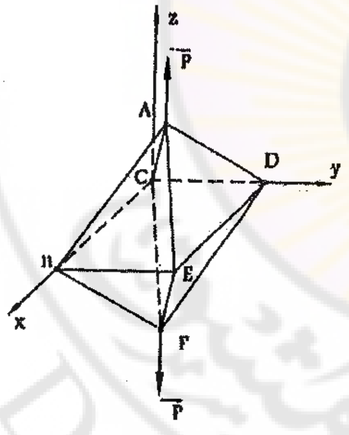
الشكل (٢-٦٩)

الجواب : $S_3 = -P/\sqrt{2}$, $S_2 = -5P/6$, $S_1 = 5P/6$

$$Z_a = Z_d = 4P/3 \;, X_b = 0 \;, \; X_a = X_d = Y_a = P$$

$$S_6 = P/2 \;, \; S_5 = 5P/6 \;, \; S_4 = -P$$

مسـألة ٧ : لديـنا الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢ - ٧٠) وقد وصلت قضبانه علـى شكل ثماني وجوه منتظم، وطبقت على رأسـيه (A,F) قـوتان شـاقوليتان ($\vec{P}$) . والمطلوب تعيين القوى المحورية في قضبان هذا الجائز جميعها .



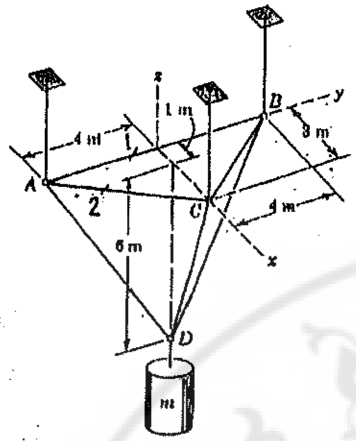
الشكل (٢-٧٠)

الجواب :

$S = +\dfrac{P}{2\sqrt{2}}$ في القضبان المائلة ،

$S' = -\dfrac{P}{2\sqrt{2}}$ في القضبان الأفقية .

مسألة ٨ : يبين الشكل (٢-٧١) جائزاً شبكياً فراغياً ، المثلث (ABC) متساوي الساقين ، ويقع في المستوي (x y) ، ويُعلق في الرأس (D) ثقلاً كتلته (m) .المطلوب تعيين القوتين المحوريتين في القضيبين (2 , 1) .

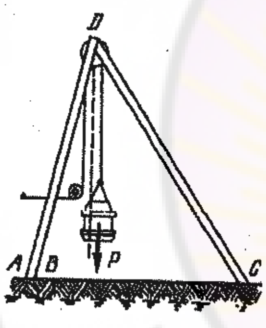


الشكل (٢-٧١)

الجواب :

$$S_1 = -4\,mg/27$$
$$S_2 = -5\,mg/54$$

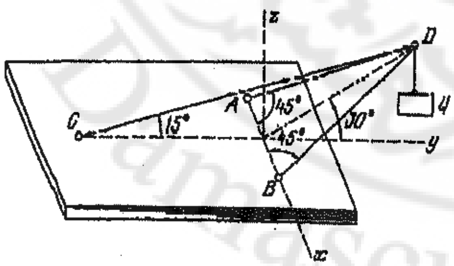
مسألة ٩ : يُرفع الثقل (P) الذي وزنه (3tf) شاقولياً بانتظام بوساطة بكرة (D) مثبتة في رأس جائز شبكي فراغي، وهو عبارة عن ثلاثية متمفصلة (الشكل ٢-٧٢)، ويميل كل من قضبانها (AD,BD,CD) على المستوي الأفقي بزاوية مقدارها (60°) ، والمطلوب تعيين القوى المحورية التي تنشأ في هذه القضبان مع العلم أن : AB=BC=AC .



الشكل (٢-٧٢)

الجواب : $S = 2{,}3tf$

مسألة ١٠ : لدينا منشأة فراغية صلدة ، وقد ثبتت نهايات القضبان بوساطة المفاصل (A,B,C) على مستوٍ أفقي صلد (الشكل ٢-٧٣) ، والمطلوب تعيين ردود الفعل في المساند (A,B,C) مع العلم أن $Q = 1tf$.



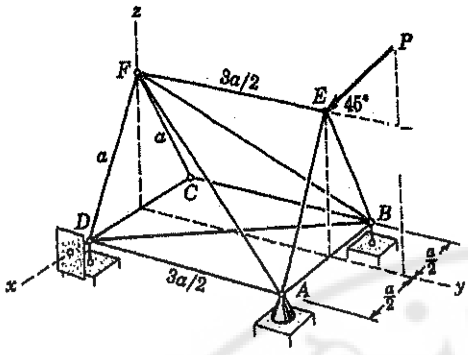
الشكل (٢-٧٣)

الجواب :

$$R_c = 3{,}35tf \quad , \quad R_a = R_b = 2{,}64tf$$

مسألة ١١ : يبين الشكل (٢-٧٤) جائزاً شبكياً فراغياً ، والمطلوب دراسته داخلياً وخارجياً، ثم تعيين القوة التي تنشأ في القضيب (AF) ورد الفعل في المفصل (D).

الجواب : $S = +\frac{P\sqrt{13}}{3\sqrt{2}}$, $X_d = \frac{P}{3\sqrt{2}}$



الشكل (٢-٧٤)

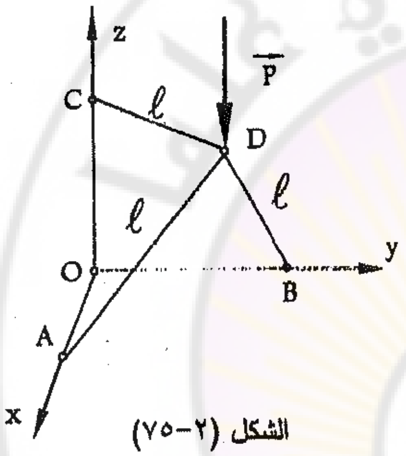
مسألة ١٢ : (DA,DB,DC) ثلاثة قضبان متساوية الطول ومتمفصلة في (D)كما في الشكل (٢-٧٥) ، ونهاياتها متمفصلة في (A,B,C) بحيث أن :

$OA = OB = OC = a$.

عيّن القوة المحورية التي تنشأ في القضيب (DC) وحالة هذا القضيب بفرض أن :

$a = 4m$ و $\ell = 5m$.

الجواب : $S = 0{,}579P$

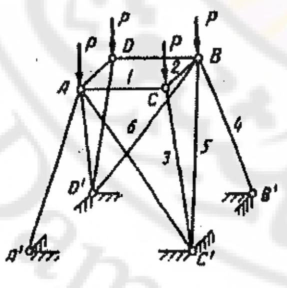


الشكل (٢-٧٥)

مسألة ١٣ : المطلوب حساب القوى المحورية التي تنشأ في القضبان (1-6) من الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢-٧٦)، بفرض أن (A C B D , A′C′B′D′) جذع هرم منتظم ، قاعدته الكبرى مربع طول ضلعه (2a) ، وطول ضلع القاعدة الصغرى (a) وارتفاعه (2a) .

الجواب : $S_1 = S_2 + -0{,}25P$

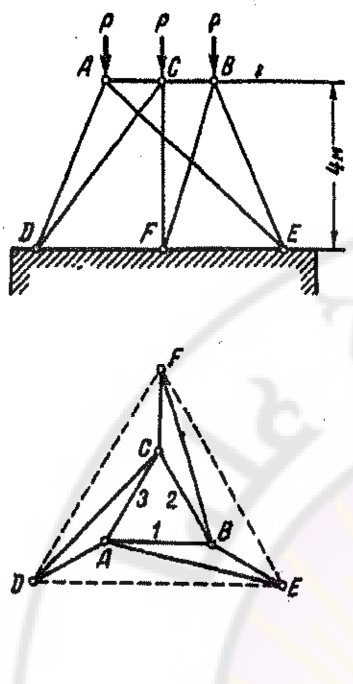
$S_3 = S_4 = -1{,}06P$; $S_5 = S_6 = 0$



الشكل (٢-٧٦)

مسألة ١٤: أوجد القوى المحورية التي تنشأ في القضبان (3 , 2 , 1) من الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢-٧٧) مع العلم أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع طول ضلعه (3m) ، وكذلك المثلث (DEF) متساوي الأضلاع ، وطول ضلعه (6m) وأن $P = 1000kgf$.

الجواب : $S_1 = S_2 = S_3 = -P/4$



الشكل (٢-٧٧)

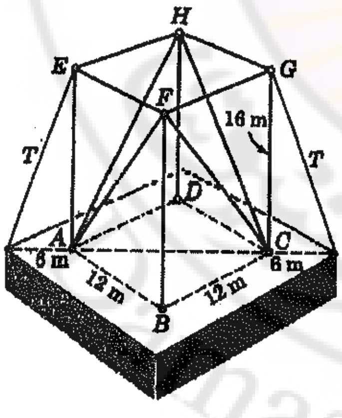
مسألة ١٥: أثبت أن القوى المحورية في القضبان القطرية (DC,EA,FB) من الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢-٧٧) معدومة .

مسألة ١٦: أعد المسألة (١٤) بفرض أننا حذفنا القوتين $\vec{P}$ المطبقتين في النقطتين (B , C) وبقيت القوة $(\vec{P})$ المطبقة في النقطة A .

الجواب : $S_1 = S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = -P/4$

مسألة ١٧: لدينا الجائز الشبكي الفراغي المبين بالشكل (٢-٧٨) ، وقد رُبط الرأسان (E , G) بسلكين كما في الرسم وبحيث أن قوة الشد في كل منهما $T = 9kN$. احسب القوى المحورية التي تنشأ في كل من القضبان القطرية.

الجواب : $S = -3,72kN$



الشكل (٢-٧٨)

☆ ☆ ☆

الفصل الثالث

الإطارات الهندسية

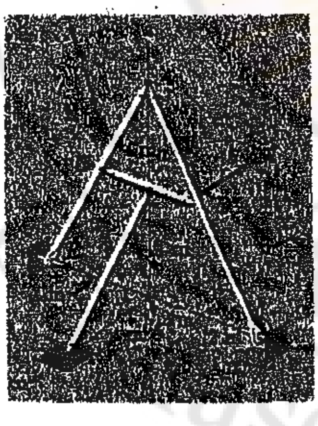
(Engineering Frames)

٣-١ . تعريف الإطار الهندسي :

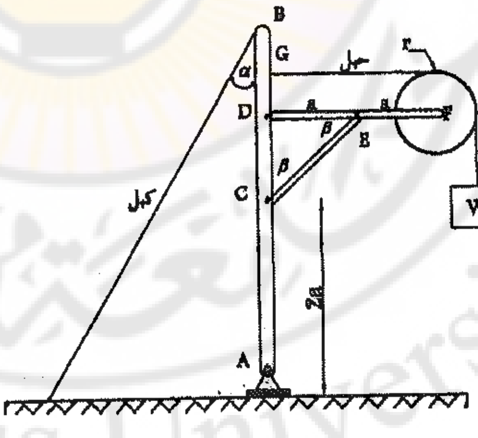
الإطـــار هـــو منشـــأة هندسية صلدة تتألف من عدة أعضاء كالقضبان، والبكرات، والكابلات وغيـــرها، وتتصل القضبان بعضها مع بعض ومع البكرات بوساطة المفاصل (الشكل ٣-١)، ويثـــبت الإطـــار الناتج على الأرضية أو على الجدار أو في السقف بوساطة القيود الهندسية المعروفة، بذلك نحصل على منشأة هندســـية صلدة خارجياً وداخلياً .

تطـــبق القوى الخارجية على الإطار في أية نقطة من العضو كما في الشكل (٣-١)، ونتيجة لـــذلك تتعـــرض مســـامير المفاصـــل لقوى القص، وقد تتعرض بعض قضبان الإطار لقوى محورية.

والإطارات كما هو الحال في الجوائز الشبكية، يمكن أن تكون مستوية كما في الشكل (٣-١) أو فراغية (الشكل ٣-٢).



الشكل (٣-٢)

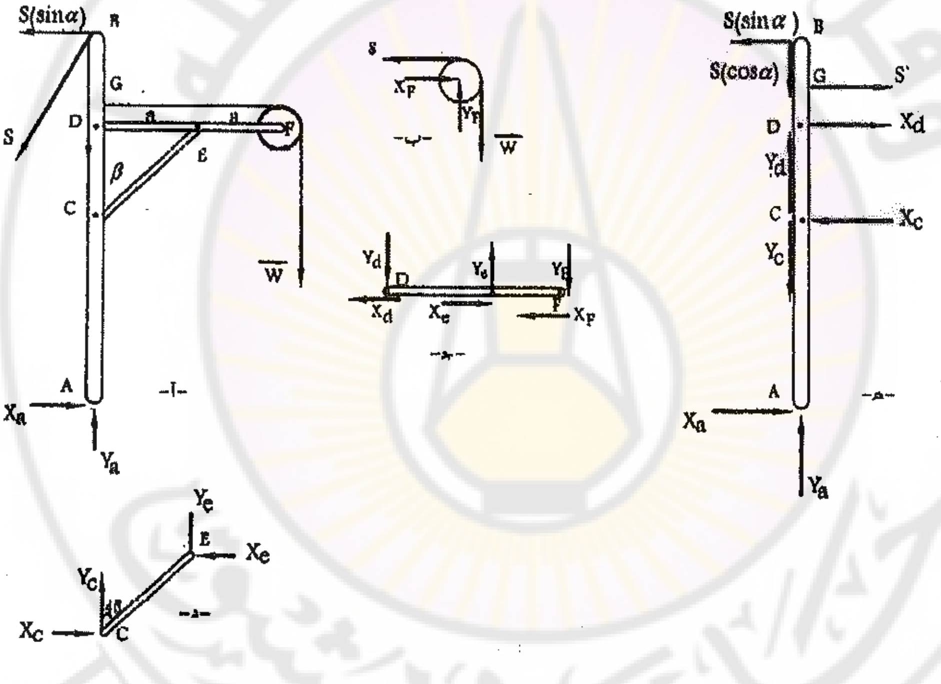


الشكل (٣-١)

٣-٢ . دراسة الإطارات المستوية المقررة خارجياً :

عــندما تؤثــر فــي الإطار قوى خارجية تنشأ في قيوده الخارجية ردود فعل، وتتعرض مســامير المفاصل لقوى قص، وبعض القضبان لقوى محورية، فدراسة الإطار تقسم إلى: خارجــية- لتعيــين ردود الفعل في المساند الخارجية ، وداخلية - لتعيين قوى القص في مسامير المفاصل والقوى المحورية في بعض القضبان في حال وجودها .

١- <u>الدراســة الخارجــية :</u> الغايــة منها تعيين ردود الفعل في المساند . تتم دراسة الإطار المبين بالشكل (٣-١) كما يلي :



(الشكل ٣-٣)

- نرســم مخطط الجسم الطليق للإطار بأكمله (الشكل ٣-٣آ)، إن جملة القوى المطبقة علــى الإطــار هي مستوية عامة، وعدد معادلات التوازن المفيدة ثلاثة ، يلاحظ أن عدد المجاهيل الخارجية هو أيضاً ثلاثة، فالمسألة مقررة خارجياً .

• نكتب معادلات التوازن المناسبة، ونعين ردود الفعل :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow \quad S\cdot(\sin\alpha)\cdot 4a = W\cdot(2a+\frac{a}{2})$$

$$\Rightarrow S\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 = W\cdot 2{,}5 \Rightarrow \quad S = 1{,}25W$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow$$

$$Y_a = W + S\cdot\cos\alpha = W + 1{,}25W\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Y_a = W\cdot(1+1{,}08)$$

$$\Rightarrow Y_a = 2{,}08W$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad X_a = S\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow X_a = 1{,}25W\cdot\frac{1}{2} = 0{,}625W$$

١- <u>الدراســة الداخلــية :</u> وتتضــمن تعيين قوى القص في مسامير المفاصل والقوى المحورية في بعض قضبان الإطار في حال وجودها .

تــتم الدراســة الداخلــية للإطار المبين بالشكل (٣-١) بتفكيك القضبان ، أي نزع المفاصل والاستعاضة عنها بردود الفعل فيصبح كل عضو بحالة توازن تحت تأثير جملة قوى مستوية عامة، وعدد معادلات التوازن المفيدة ثلاثة ، لذا نختار للدراسة العضو الذي يحتوي على أقل عــدد ممكن من المجاهيل . وبما أن رد فعل المفصل مجهول بالمقدار والاتجاه ، لذا لتسهيل الدراسة نفرقه إلى مركبتين قائمتين أفقية (X) وشاقولية (Y) .

<u>دراسة توازن البكرة :</u> (الشكل ٣-٣ب)

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iF} = 0 \quad \Rightarrow \quad S' = W$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad X_f = S' = W$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_f = W$$

يتضح من الرسم أن البكرة بحالة توازن تحت تأثير العزمين (X_f, S') ، (Y_f, W) المتساويين بالمقدار والمتعاكسين بالاتجاه .

دراسة توازن العضو (DF) : (الشكل ٣-٣ج)

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iD} = 0 \;\Rightarrow\; Y_f \cdot 2a = Y_e \cdot a$$

$$\Rightarrow\; Y_e = 2Y_f = 2W$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \;\Rightarrow\; Y_d = Y_e - Y_f = 2W - W$$

$$\Rightarrow\; Y_d = W$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \;\Rightarrow\; X_d = X_e - X_f = X_e - W \quad (*)$$

دراسة توازن العضو (EC) : (الشكل ٣-٣د)

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \Rightarrow\; X_e \cdot a = Y_e \cdot a$$

$$\Rightarrow\; X_e = Y_e = 2W$$

بالتعويض في (*) نجد :

$$\Rightarrow\; X_d = 2W - W = W$$

من الرسم يتضح أن القضيب (CE) بجالة توازن تحت تأثير قوتين محوريتين (S_e, S_C) ، حيث إن : $X_c = X_e\,,\;\; Y_c = Y_e$.

بذلك نكون قد عينا قوى القص المؤثرة في المفاصل (C,E,D,F) .

يمكن رسم مخطط الجسم الطليق للقضيب (AB) كما في الشكل (٣-٣ه)، والتأكد من صحة الحل :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \;\Rightarrow\; S \cdot \sin\alpha + X_c = X_a + X_d + S'$$

$$1{,}25W/2 + 2W = 0{,}625W + W + W$$

$$\Rightarrow 2{,}625W = 2{,}625W$$

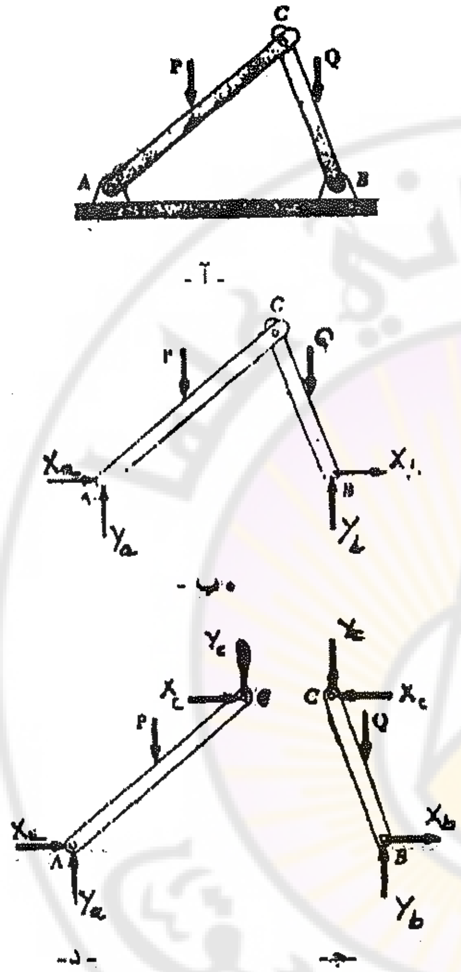
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \;\Rightarrow\; S\frac{\sqrt{3}}{2} + Y_e = Y_d + Y_a$$

$$1{,}25W\frac{\sqrt{3}}{2} + 2W = W + 2{,}08W$$

$$\Rightarrow 3{,}08W = 3{,}08W$$

٣ – ٣ . دراسة الإطارات غير المقررة خارجياً :

يبين الشكل (٣-٤آ) إطاراً مستوياً مقيداً خارجياً بمفصلين ، عدد المجاهيل في كل منهما اثنان ، فإذا رسمنا مخطط الجسم الطليق للإطار بأكمله (الشكل ٣-٤ب) نجد أنه معرض خارجياً لجملة قـوى مستوية عامة ، وعدد معادلات التوازن المفـيدة ثلاث بينما عدد المجاهيل أربعة ، أي أن الإطـار غير مقرر خارجياً ، ولكن الإطار بأكمله (داخلياً وخارجياً) مقرر، وينتج ذلك من الدراسة الخارجية ثم الداخلية :



الشكل (٣-٤)

<u>١ – الدراسة الخارجية :</u>

بعـد رسم مخطط الجسم الطليق للإطار بأكمله (الشـكل ٣-٤ب) نكـتب معـادلات التوازن المناسبة :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow Y_b$$ (نعين Y_b)

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_a$$ (نعين Y_a)

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_a , X_b$$ (*) (معادلة بمجهولين)

أي أن الإطار غير مقرر خارجياً .

<u>٢ – الدراسة الداخلية :</u>

ننزع المفصل (C) ونستعيض عنه برد الفعل على كل من القضيبين (AC) و (BC) كما في الشـكلين (٣- ٤ جـ ، د) ، فيصبح كل قضيب من هذين القضيبين بحالة توازن تحت تأثير جملـة قوى مستوية عامة ، فنرى أن عدد المجاهيل في كل منهما ثلاثة . لندرس توازن أحد هذين القضيبين ، وليكن (AC) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \Rightarrow X_a \quad (\text{نعين } X_a)$$

نعوض قيمة (X_a) في (*) فنحصل على قيمة (X_b) .

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_c \quad (\text{نعين } X_c)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_c \quad (\text{نعين } Y_c)$$

بـذلك نكون قد عيّنا ردّي الفعل في المسندين (A) و (B) ، وقوة القص في المفصل (C) ، أي أن الإطار بأكمله مقرر.

٣ – ٤ . مسائل محلولة على الإطارات المستوية :

مسألة ١ : احسب ردّي الفعل في المسندين(A,B) للإطار المستوي المبين بالشكل (٣-٥آ)، وكذلك قوة القص في المفصل (C) . يعطى :

$$\alpha_1 = 30°, \alpha_2 = 45°, P = 100kgf$$

الحل :

<u>١ – الدراسة الخارجية :</u>

نرسـم مخطط الجسم الطليق للإطار بأكمله (الشكل ٣-٥ ب)، وندرس توازنه :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow$$

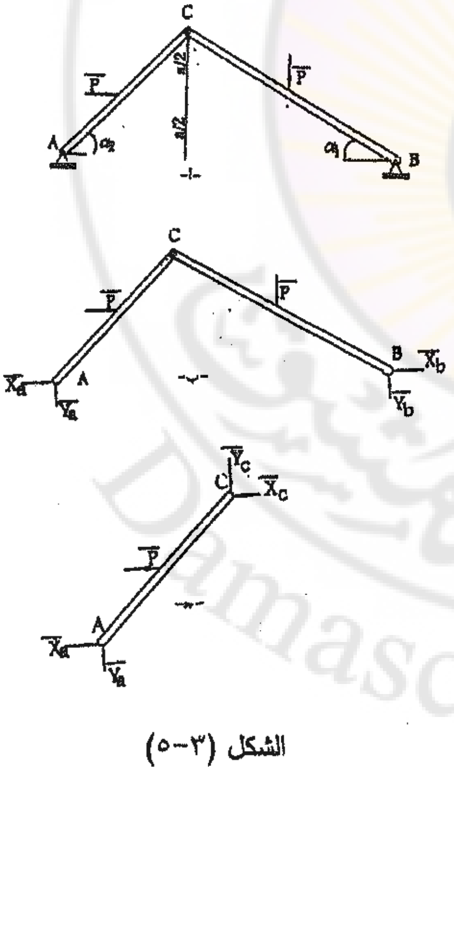
$$Y_b \cdot (2a\frac{\sqrt{3}}{2} + a) = P \cdot (a\frac{\sqrt{3}}{2} + a) + P \cdot (a\frac{\sqrt{3}}{2} + a)$$

$$\Rightarrow Y_b \cdot (1 + \sqrt{3}) = 100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow Y_b = 86{,}6kgf$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow$$

$$Y_a = P - Y_b = 100 - 86{,}6 = 13{,}4kgf$$



الشكل (٣-٥)

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_a + X_b = P \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

٢ – الدراسة الداخلية :

- نفك المفصل (C) ، ونرسم مخطط الجسم الطليق للقضيب (AC) كما في الشكل (٣-٥ جـ)، وندرس توازنه :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \;\Rightarrow\; X_a \cdot a + Y_a \cdot a = P \cdot \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \; X_a = 50 - 13,4 = 36,6\text{kgf}$$

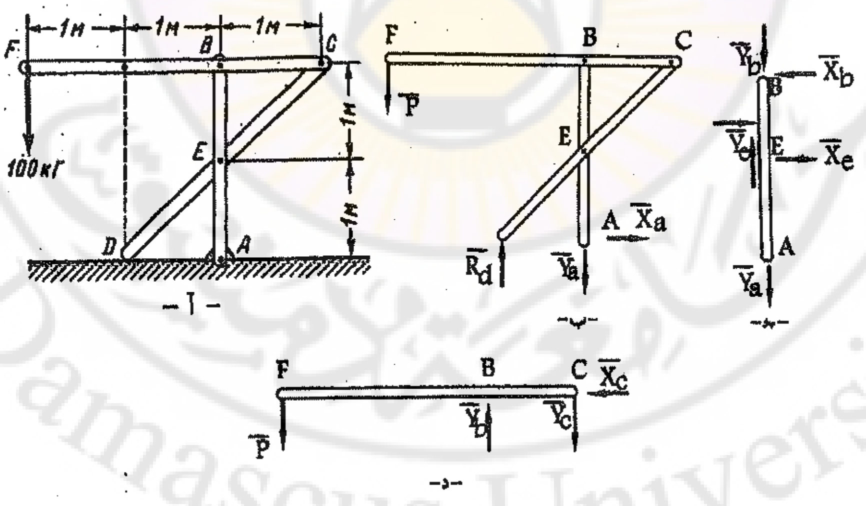
نعوض في (*) $\Leftarrow$ $X_b = P - X_a = 100 - 36,6 = 63,4\text{kgf}$

- ندرس توازن القضيب (AC) ، (الشكل ٣-٥ جـ) :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_c = P - X_a = 100 - 36,6 = 63,4\text{kgf}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_c = Y_a = 13,4\text{kgf}$$

مسألة ٢ :عيّن قوى القص في المفاصل (A,B,C,E) للإطار المبين بالشكل (٣-٦ آ) مع العلم أن الاستناد في (D) حر، والاحتكاك فيه مهمل ، وأن $P = 100$ kgf .



الشكل (٣-٦)

الحل :

١- <u>الدراسة الخارجية :</u>

نرسم مخطط الجسم الطليق للإطار بأكمله (الشكل ٣-٦ ب)، ونعيّن رد الفعل في المسند A):

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iD} = 0 \Rightarrow Y_a \cdot 1 = P \cdot 1$$

$$\Rightarrow Y_a = 100\text{kgf}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_a = 0$$

٢- <u>الدراسة الداخلية :</u>

- ندرس توازن القضيب (AB) ، (الشكل ٣-٥ جـ) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iE} = 0 \Rightarrow X_b = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i - 0 \Rightarrow X_e = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_e = Y_a + Y_b$$

$$\Rightarrow \quad Y_e = 100 + Y_b \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

- ندرس توازن القضيب (FC) ، (الشكل ٣-٥ د) :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_c = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow Y_c \cdot 1 = P \cdot 2$$

$$\Rightarrow Y_c = 200\text{kgf}$$

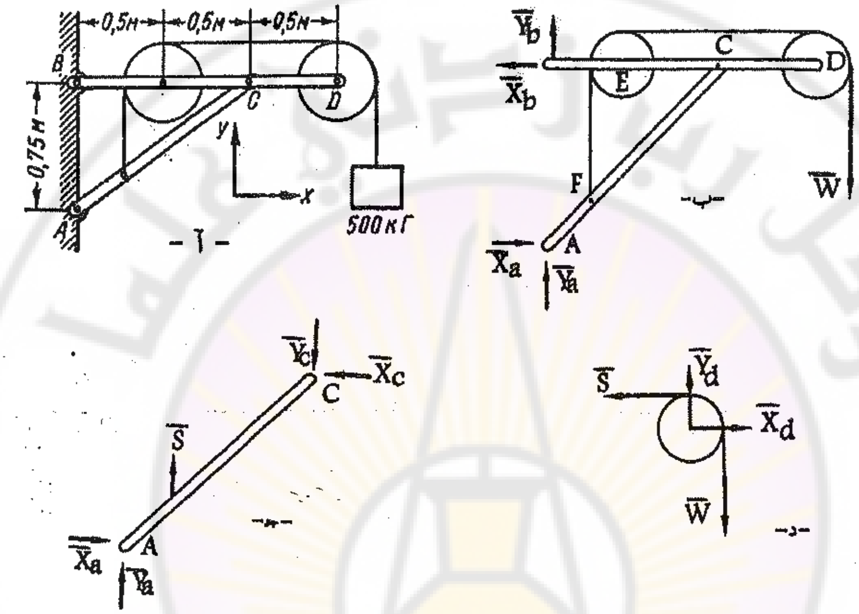
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_b = P + Y_c$$

$$\Rightarrow Y_b = 300\text{kgf}$$

- نعوض في (*) فنحصل على :

$$Y_e = 100 + 300 = 400\text{kgf}$$

مسألة ٣ : يتألف إطار من القضيبين (AC , BD) وهو محمل كما في الشــكل (٣-٧ آ)، والمطلوب تعيين القوى التي تنشأ في المفاصل (A, B, C, D) بفرض أن W = 500 kgf والاحتكاك في البكرتين مهمل، وأن نصف قطر كل منهما يساوي 0,25 m .



الشــكل (٣-٧)

الحل :

١- <u>الدراسة الخارجية :</u>

نرسم مخطط الجسم الطليق للإطار، ونعيّن ردود الفعل في مسانده (الشكل ٣-٧ ب):

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow X_b \cdot 0,75 = W \cdot 1,75 = 500 \cdot 1,75$$

$$\Rightarrow X_b = 1167 \text{kgf}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_a = X_b = 1167 \text{kgf}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_a + Y_b = W = 500 \;\ldots\ldots\ldots\; (*)$$

٢- **الدراسة الداخلية :**

- ندرس توازن القضيب (AC) ، الشكل (٣-٧ جـ) :

بما أن الاحتكاك في البكرة مهمل $\Leftarrow \quad S = W = 500kgf$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \Rightarrow Y_a \cdot 1 + S \cdot 0{,}75 = X_a \cdot 0{,}75$$

$$\Rightarrow Y_a = 1167 \cdot 0{,}75 - 500 \cdot 0{,}75 = 500kgf$$

من المعادلة (*) $\Leftarrow \quad Y_b = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_c = X_a = 1167kgf$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_c = Y_a + S = 500 + 500 = 1000kgf$$

- ندرس توازن البكرة الشكل (٣-٧ د):

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_d = S = 500kgf$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_d = W = 500kgf$$

ملاحظـــة : يطلـــب دراسة توازن القضيب(BD) مع البكرتين، والتأكد من صحة النتائج . ثم دراسة توازن كلٍ من القضيبين (AC , BD) .

مسألة ٤ : احسب مركبات ردي الفعل في المسندين (A,C) للإطار المستوي المبين بالشكل (٣-٨ آ)، مع العلم أن نصف قطر البكرة (r =0,1 m) .

الحل :

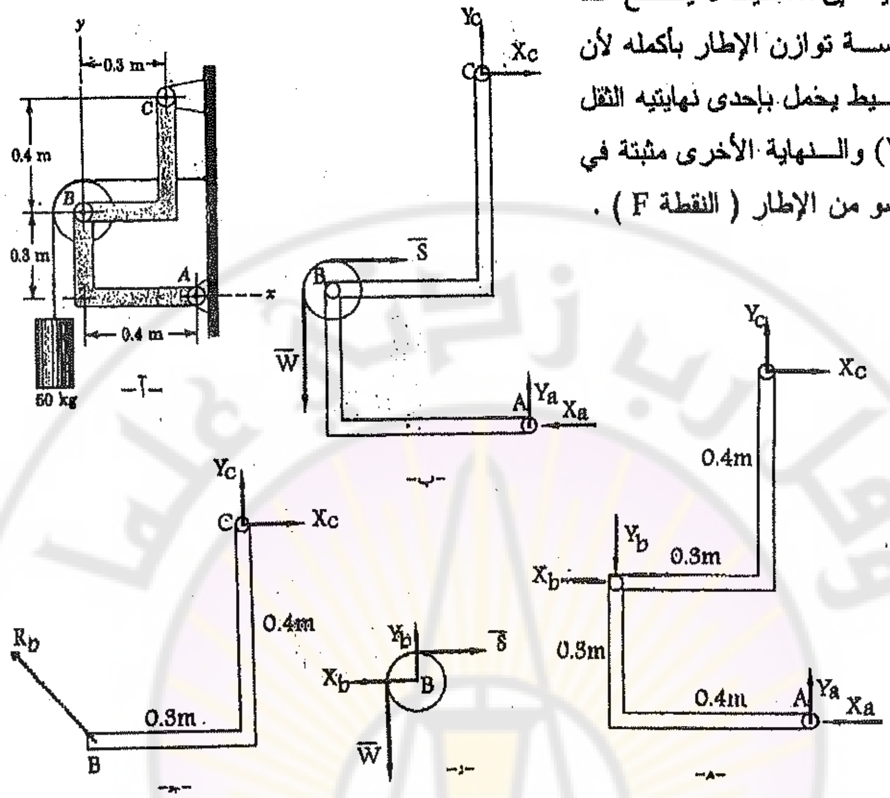
الحالة الأولى : نصف قطر البكرة معلوم :

- توازن الإطار بأكمله :

$$W = m \cdot g = 50 \cdot 9{,}81 = 490{,}5N$$

يلاحـــظ مـــن الرسم أن الخيط الذي يمر على محيط البكرة يحمل بإحدى نهايتيه (الثقل W) ونهايـــته الثانية مثبتة على الجدار في النقطة (D) ، ولدراسة توازن الإطار بأكمله يجب قطع الخـــيط كما في الشكل (٣-٨ ب) ، وهذه الحالة تختلف عن الإطار المبين بالشكل (٣-٧ آ)

حـــيث إن الخـــيط لا يقطـــع عند دراســـة توازن الإطار بأكمله لأن الخـــيط يحمل بإحدى نهايتيه الثقل (W) والـــنهاية الأخرى مثبتة في عضو من الإطار (النقطة F) .



الشكل (٣-٨)

<u>معادلات التوازن :</u>

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow W \cdot 0{,}5 = S \cdot 0{,}4 + X_c \cdot 0{,}7 + Y_c \cdot 0{,}1$$

$$\Rightarrow 490{,}5 \cdot 0{,}1 = X_c \cdot 0{,}7 + Y_c \cdot 0{,}1$$

$$\Rightarrow 49{,}05 = X_c \cdot 0{,}7 + Y_c \cdot 0{,}1 \;\ldots\ldots\ldots\; (*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \quad S = X_a - X_c \;\ldots\ldots\ldots\; (*')$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \quad W = Y_a + Y_c \;\ldots\ldots\ldots\; (**)$$

- توازن الزاوية BC :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow \quad X_c \cdot 0,4 = Y_c \cdot 0,3$$

$$\Rightarrow X_c = \frac{3}{4} Y_c \;\; \ldots\ldots\ldots \; (* * *)$$

التعويض في (*) ⇐

$$49,05 = \frac{3}{4} Y_c \cdot 0,7 + Y_c \cdot 0,1$$

$$\Rightarrow Y_c = 78,48N$$

التعويض في (* * *) ⇐

$$X_c = \frac{3}{4} \cdot 78,48$$

$$\Rightarrow X_c = 58,86N$$

التعويض في (\`*) ⇐

$$490,5 = X_a - 58,86$$

$$\Rightarrow X_a = 549,36N$$

التعويض في (* *) ⇐

$$490,5 = Y_a + 78,48$$

$$\Rightarrow Y_a = 412,02N$$

الحالة الثانية : نصف قطر البكرة غير معلوم :

- توازن البكرة : (الشكل ٣-٨ د) :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \quad X_b = S = W$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \quad Y_a = W$$

- توازن الإطار بأكمله بعد نزع البكرة: (الشكل ٣-٨ هـ) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow \quad Y_b \cdot 0,4 = X_b \cdot 0,3 + Y_c \cdot 0,1 + X_c \cdot 0,7$$

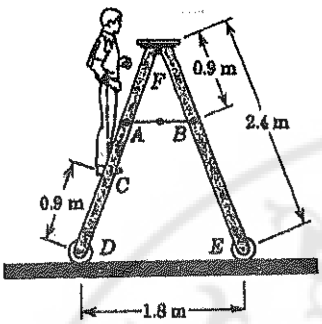
$$\Rightarrow W \cdot 0,1 = Y_c \cdot 0,1 + X_c \cdot 0,7$$

وهي المعادلة (*) السابقة نفسها، ونتابع الحل كما في الحالة الأولى .

٣-٥ . مسائل غير محلولة على الإطارات المستوية :

مســـألة ١ : يتألف سلّم من القسمين المتمفصلين والمتناظــرين (DF,EF) وهما متصلان بالســلك الأفقــي (AB) كما في الشكل (٣-٩)، وهو يستند علـــى مســتوٍ أفقي أملس ، ويقف عليه في النقطة (C) شـــخص كتلته (90 kg) . عيّن قوة الشد في السلك إذا كانت كتلة السلّم (20 kgf) .

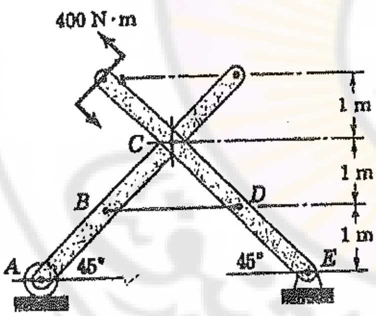
الجواب: T = 231 N .



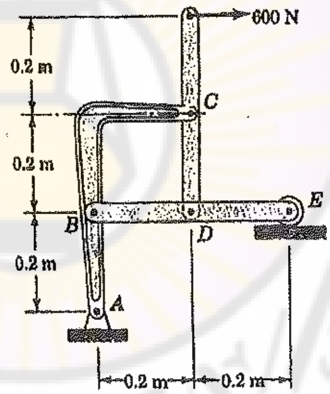
الشكل (٣-٩)

مســـألة ٢ : عـــيّن القـــوة التي تؤثر في المفصل (C) من الإطار المبين بالشكل (٣-١٠) بفرض أن : (P = 600 N) .

الجواب : $(S_c = 2160\ N)$.



الشكل (٣-١١)



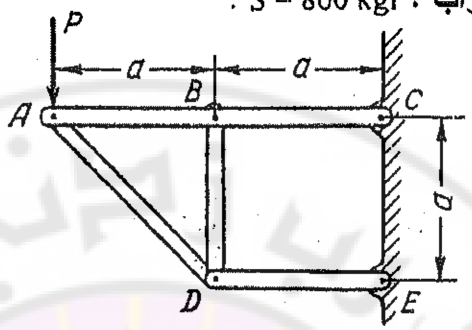
الشكل (٣-١٠)

مسألة ٣ : عيّن قوة القص التي تؤثر في المفصل (C) من المنشأ الإطاري المبين بالشــكل (٣-١١) علماً بأن : (M = 400 N.m) .

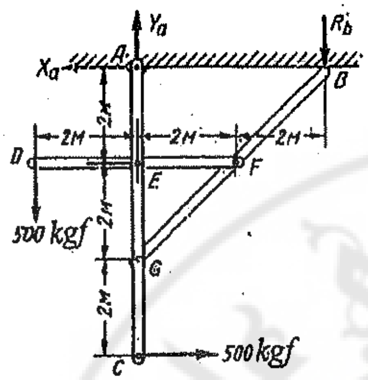
الجواب : $(S_c = 224\ N)$.

مســـــألة ٤ : عـيّن القــوة المحورية التي تنشـــأ في القضيب (BD) من الإطار المبين بالشــكل (٣-١٢) مع العلم أن (P=400kgf) .

الجواب : S = 800 kgf .



الشكل (٣-١٢)



الشكل (٣-١٣)

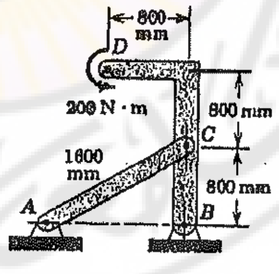
مســـألة ٥ : أوجــد ردود الفعـــل التـــي تنشـــأ في المفاصل (G,E,F) من الإطار المبين بالشــكل (٣-١٣) بفرض أن (P=500kgf) .

الجواب : $X_e = X_f = X_g = 1500$ kgf

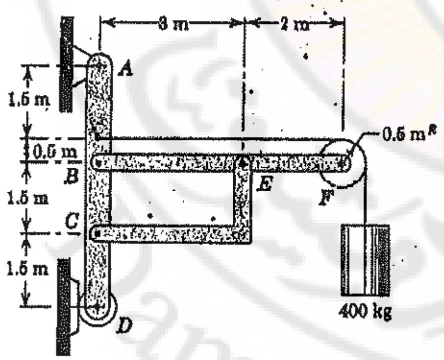
$Y_e = 1000$ kgf , $Y_f = Y_g = 500$ kgf

مســـــألة ٦ : عيّن رد الفعل في المسند (B) من الإطار المستوي المبين بالشكل (٣-١٤) علماً بأن العزم المطبق على الإطار يساوي M = 200 N.m .

الجواب : $R_b = 289$N



الشكل (٣-١٤)



الشكل (٣-١٥)

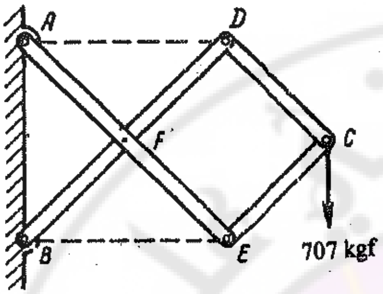
مســـــألة ٧ : ادرس الإطار المبين بالشـــكل (٣-١٥) دراســـة كاملة بفرض أن كتلة الثقل . (m = 400 kg)

الجواب : $X_a = X_d = 4,32kN$

$Y_a = X_f = Y_f = 3,92kN$

$Y_b = 2,62kN \ X_b = 9,15kN$

$X_c = X_e = 2Y_c = 2Y_e = 13,08kN$

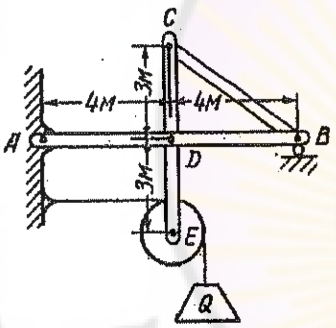


الشكل (٣-١٦)

مسألة ٨ : احسب ردّي الفعل في المسندين (A,B) ، والقوة التي تنشأ في المفصل (F) من المنشأ الإطاري المبين بالشكل (٣-١٦) مع العلم أن كل قضيب يميل على الخط الأفقي بزاوية تساوي (45°) .

الجواب :

$R_a = R_b = 1118 \text{ kgf} \ , \ R_f = 1414 \text{ kgf}$

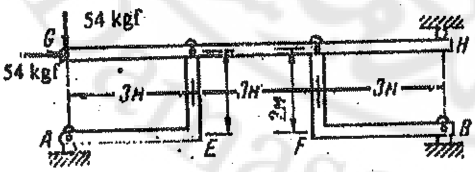


الشكل (٣-١٧)

مسألة ٩ : لدينا المنشأة الهندسية المبينة بالشكل (٣-١٧) ، والمطلوب تعيين حالة القضيب (BC) ، والقوى المطبقة عليه، وكذلك قوة القص المطبقة على المفصل (D) بفرض أن نصف قطر البكرة يساوي 1 m، والاحتكاك فيها مهمل ، وأن (Q = 1000 kgf) .

الجواب :

$R_d - 2016 \text{ kgf} \ , \ S = 1250 \text{ kgf}$ (ضغط)



الشكل (٣-١٨)

مسألة ١٠ : أوجد مركبات ردّي الفعل في المسندين (A,B) للإطار المبين بالشكل (٣-١٨).

الجواب : $X_a = 63 \text{ kgf} \ , \ Y_a = 42 \text{ kgf}$

$X_b = 117 \text{ kgf} \ , \ Y_b = 78 \text{ kgf}$

مسألة ١١ : لدينا الإطار المستوي المبين بالشكل (٣-١٩)، فإذا كان ($Q = 35$ kgf)،
فالمطلوب تعيين مايلي :

١- $\vec{R}_a, \vec{R}_b, \vec{R}_f$.

٢- قوة القص في مسمار المفصل (D) .

٣- قوة الشد $\vec{S}$ في السلك اللين (CE) .

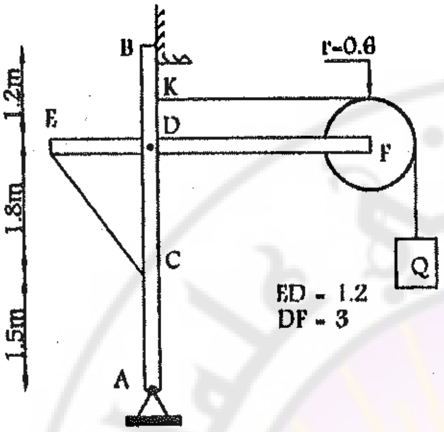
الجواب :

$X_a = R_b = 28$ kgf , $Y_a = 35$ kgf

$X_f = Y_f = 35$ kgf

$X_d = 23$ kgf , $Y_d = 122{,}5$ kgf

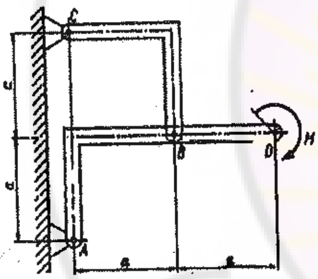
$S = 105{,}4$ kgf



الشكل (٣-١٩)

مسألة ١٢ : للإطار المستوي المبين بالشكل (٣-٢٠) المطلوب إيجاد مركبات ردّي الفعل في المسندين (A,C) بدلالة العزم ($\vec{M}$) والطول (a) .

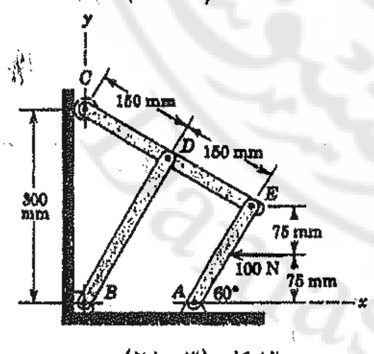
الجواب: $X_a = Y_a = X_c = Y_c = \dfrac{M}{2a}$



الشكل (٣-٢٠)

مسألة ١٣ : احسب المركبتين (X_e, Y_e) لقوة القص المؤثرة في مسمار المفصل (E) من الإطار المستوي المبين بالشكل (٣-٢١) .

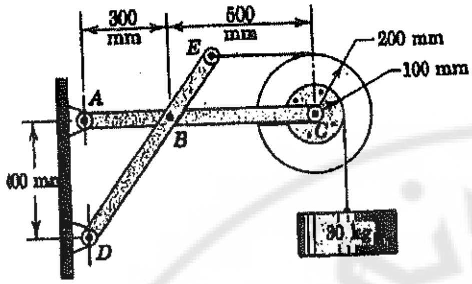
الجواب: $X_e = 25$ N, $Y_e = 25\sqrt{3}$ N



الشكل (٣-٢١)

مسألة ١٤ : يبين الشكل (٣-٢٢) إطاراً هندسياً مستوياً حيث تشكل البكرتان جسماً واحداً صلداً ، وقد لُفّ على محيط الأولى الخيط (1) ورُبطت نهايته الثانية بطرف القضيب (DE) ، ولُفّ على محيط البكرة الثانية الخيط (2) حيث رُبط بنهايته الثانية ثقل كتلته (30kg) . والمطلوب تعيين مركبتي قوة القص للمفصل (B) .

الجواب : $X_b = 809\ \text{N}\ ,\ Y_b = 785\ \text{N}$



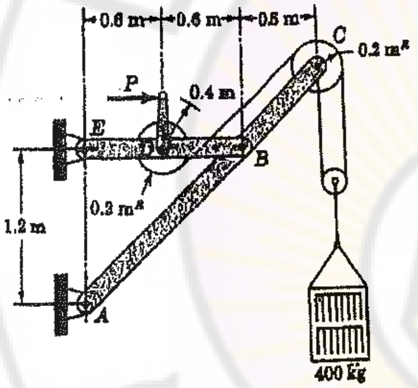
الشكل (٣-٢٢)

مسألة ١٥: يبين الشكل (٣-٢٣) إطاراً مستوياً ، وهو يحمل كتلة مقدارها (m = 400 kg) ، وتطبق القوة ($\bar{P}$) على الذراع(DF) الملحوم مع محور البكرة(D)، والمطلوب :

١- أوجد قيمة القوة P .

٢- أوجد قيمة رد الفعل في المسند الثابت (A) .

الجواب : $P = 981\ \text{N}\ ,\ R_a = 7983\ \text{N}$

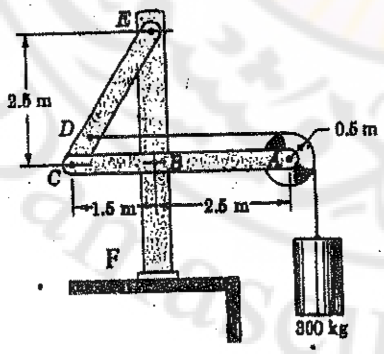


الشكل (٣-٢٣)

مسألة ١٦ : لدينا الإطار المستوي والموثوق المبين بالشكل (٣-٢٤)، والمطلوب إيجاد مركبات رد الفعل في الوثاقة (F) ، وقوة القص في المسمار (B).

الجواب : $X_f = 0\ ,\ Y_f = 2943\ \text{N}$

$m_f = 8829\ \text{N}\cdot\text{m}\ ,\ S = 8606\ \text{N}$

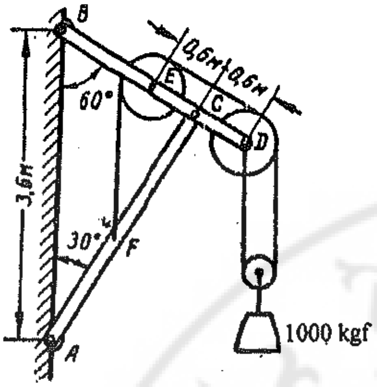


الشكل (٣-٢٤)

مسألة ١٧ : عيّن ردّي الفعل في المسندين (A,B) للإطار المستوي المبين بالشكل (٣-٢٥) مع العلم أن قطر كل من البكرتين يساوي (80cm) ، تهمل أوزان القضبان والبكرتين.

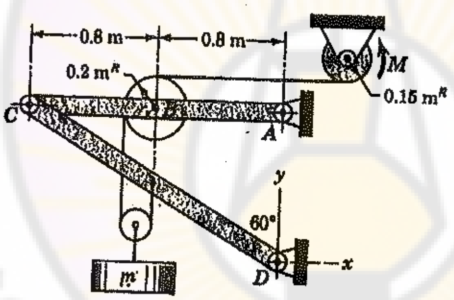
الجواب :

$X_a = 633$ kgf , $Y_a = 802$ kgf ,
$X_b = 633$ kgf , $Y_b = 198$ kgf



الشكل (٣-٢٥)

مسألة ١٨ : للإطار المستوي المبين بالشكل (٣-٢٦) يطلب تعيين مركبات القوى في المفاصل (A,B,C,D) بفرض أن العزم M الواجب تطبيقه لموازنة الكتلة m يساوي M=300 N.m .



الشكل (٣-٢٦)

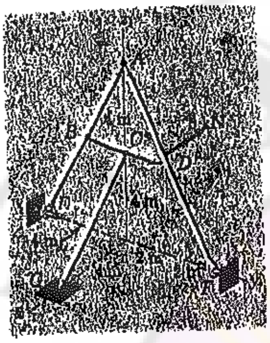
الجواب :

مركبة القوة	النقطة			
	A	B	C	D
X [N]	1463	2000	3463	3463
Y [N]	1000	2000	1000	3000

٣-٦ . الإطارات الهندسية الفراغية :

وهـــي تماثل الإطارات المستوية ، والفرق بينهما أن قضبان الإطار المستوي والقوى المطبقة علـــيها تقع في مستوٍ واحد ، أما في الإطار الفراغي فإنها لا تقع في مستوٍ واحد وإنما تشكل جملـــة فراغية (كما في الشكل ٣-٢٧) ، كما أن القضبان تتصل مع بعضها بوساطة مفاصل كروية ، وعدد المجاهيل في كل منها يساوي ثلاثة .

كمـــا أن بعض المساند يمكن أن تمنع الحركة في اتجاهين فقط وذلك مثل المسندين (F) و(E) من الجائـــز المذكـــور فهمـــا يمنعان الحركة باتجاه المحـــور (y) ، بذلك تتشكل منشأة هندسية صلدة ومقـــررة خارجياً، ويمكن تعيين القوى في جميع المفاصـــل . وكمـــثال لـــندرس الإطار الفراغي المبين بالشكل (٣-٢٧) دراسة تامة .



الشكل (٣-٢٧)

٣-٧ . تطبيق على الإطارات الهندسية الفراغية :

يبـــين الشـــكل (٣-٢٧) إطـــاراً فراغياً بسيطاً على شكل حرف A ، يمنع هذا الإطار من الحركة باتجاه المحور (y) بوساطة المسندين (F) و (E) ، وتعد المفاصل (A,B,C,D,G) كروية ، والقضيب (GC) يتعرض لقوة محورية .

ادرس هذا الإطار دراسة تامة بفرض أن القضبان مهملة الوزن .

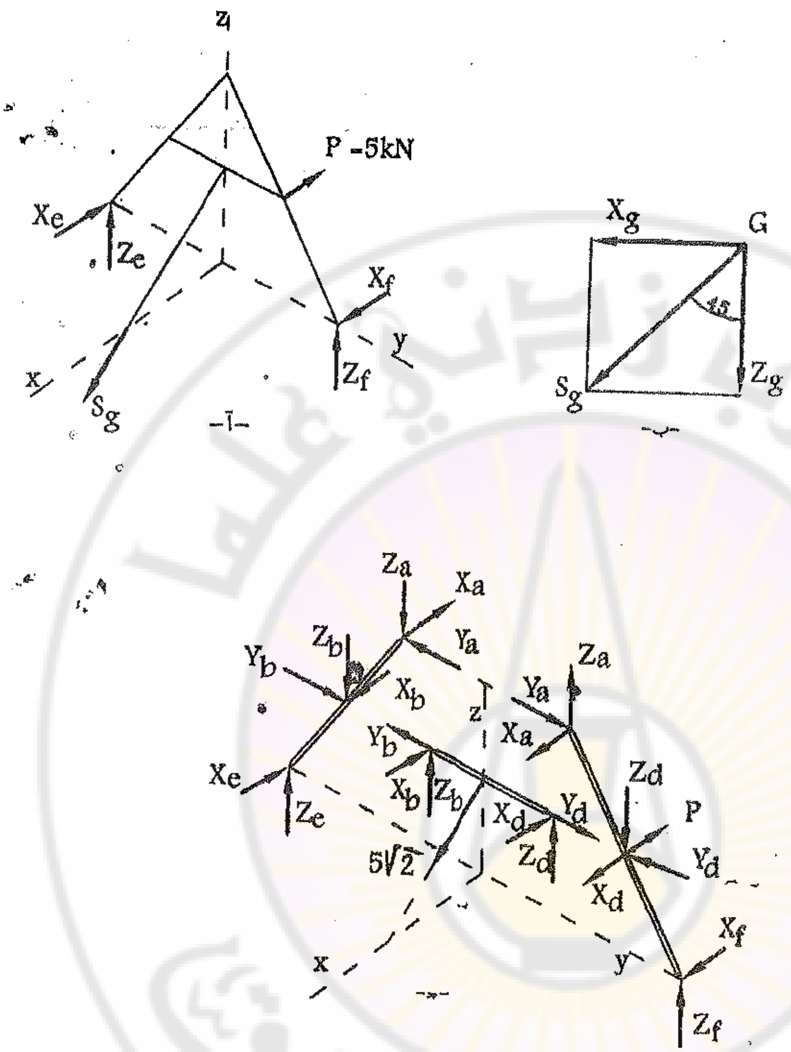
١- الدراسة الخارجية :

نرسم مخطط الجسم الطليق للإطار بأكمله (الشكل ٣-٢٨ آ) :

- نحلـــل القوة S_g إلى مركبتين (X_g) و (Z_g) كما في الشكل (٣-٢٨ ب)، ونعين مقدار كل منهما : $X_g = Z_g = S_g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 \Rightarrow Z_g \cdot 4 = P \cdot 4$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_g = X_g = 5kN} \Rightarrow \boxed{S_g = 5\sqrt{2}}\,kN$$



(الشكل ٣-٢٨)

- تعيين ردود الفعل في المسندين (F) و(E) :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \Rightarrow Z_e \cdot 4 = Z_f \cdot 4$$

$$\Rightarrow Z_e = Z_f$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \Rightarrow Z_e + Z_f = Z_g = 5$$

$$\Rightarrow \ 2Z_e = 5 \Rightarrow \boxed{Z_e = Z_f = 2,5 \text{ kN}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow P + X_e = X_f + X_g \Rightarrow X_e = X_f$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \Rightarrow P \cdot 2 = X_e \cdot 4 + X_f \cdot 4$$

$$\Rightarrow P = 2X_e + 2X_f = 4X_e = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{X_e = X_f = 1.25 \text{ kN}}$$

٢- <u>الدراسة الداخلية :</u>

ننزع المفاصل ونستعيض بردود الفعل (الشكل ٣-٢٨ جـ) :

- توازن العضو **(BD)** :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_b + X_d = X_g = 5$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \Rightarrow X_d \cdot 2 = X_b \cdot 2$$

$$\Rightarrow \boxed{X_b = X_d = 2,5 \text{ kN}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow \boxed{Y_b = Y_d} \ldots\ldots *$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \Rightarrow Z_b + Z_d = Z_g = 5$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \Rightarrow Z_b \cdot 2 = Z_d \cdot 2 \Rightarrow Z_b = Z_d$$

٣- <u>التعويض :</u> $2Z_b = 5 \Rightarrow \boxed{Z_b = Z_d = 2,5}$

- توازن العضو **(ADF)** :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow X_f + X_d + X_a = P$$

$$1,25 + 2,5 + X_a = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{X_a = 1,25 \text{ kN}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \Rightarrow Z_a + Z_f = Z_d$$

$$\Rightarrow Z_a + 2{,}5 = 2{,}5 \Rightarrow Z_a = 0$$

$$(D \text{ يمر من } x)\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \Rightarrow Y_f \cdot 2 = Y_a \cdot 4 + Z_a \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2{,}5 \cdot 2 = Y_a \cdot 4 + 0$$

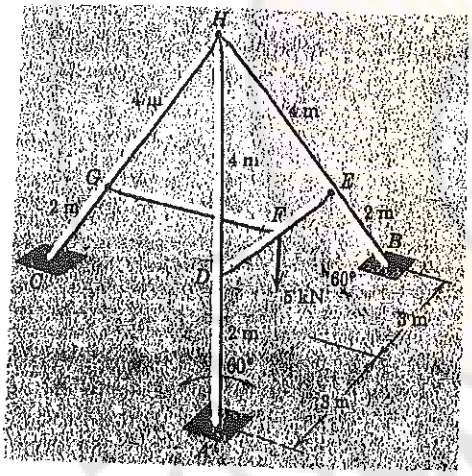
$$\Rightarrow \boxed{Y_a = 1{,}25\ kN}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow Y_d = Y_a \Rightarrow \boxed{Y_d = 1{,}25\ kN}$$

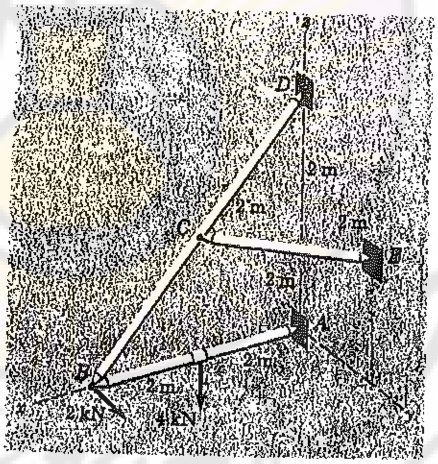
٣-٨ . مسائل غير محلولة على الإطارات الفراغية :

مسألة ١ : عيّن القوة المؤثرة في المفصل (D) للإطار الفراغي البسيط المبين بالشكل (٣-٢٩) .

الجواب : $R_d = 4{,}9\ kN$



الشكل(٣-٣٠)

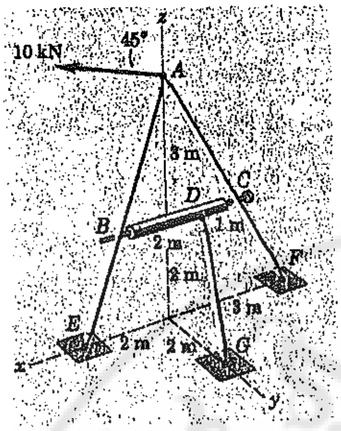


الشكل(٣-٢٩)

مسألة ٢ : يبين الشكل (٣-٣٠) إطاراً فراغياً بسيطاً والمطلوب تعيين القوة المؤثرة في المفصل (D) .

الجواب : $R_d = 2{,}57\ kN$

مسألة ٣ : للإطار الفراغي البسيط المبين بالشكل (٣-٣١) يطلب تعيين القوة المؤثرة في العضو (DG) وكذلك مركبات القوة المؤثرة في المفصل (E) .



الشكل (٣-٣١)

الجواب :

$Z = 17,68\ kN$, $Ye = -3,54\ kN$

$Xe = -5,66\ kN$, $Rdg = 26\ kN$

☆ ☆ ☆

القسم الثاني

مبادئ علم التحريك

الفصل الرابع

الحركة المستقيمة والمنحنية للجزئية

Rectilinear and curvilinear motion of Particle

٤-١. مقدمة :

علم التحريك أو الديناميك (dynamics) هو أحد فروع الميكانيك الهندسي الذي يبحث في حركة الأجسام والقوى المطبقة عليها، وينقسم إلى القسمين التاليين:

١- علم الحركة أو الكينماتيك kinematics :

يدرس هذا العلم الخواص الهندسية لحركة الأجسام، وقوانين هذه الحركة دون التعرض للقوى التــي تسببها ، وهو من ناحية أخرى يعدّ مقدمة في علم التحريك (Dynamics)، وتعرف الحركة بأنها تغير موضع الجسم في الفراغ بالنسبة للأجسام الأخرى مع تغير الزمن .

٢- علم التحريك أو الكيناتيك Kinetics :

يبحث هذا العلم في وقت واحد في فعل القوى المطبقة على الأجسام، وفي الحركة الناتجة عن هــذا الفعل ، أي يدرس حركة الأجسام مع مسبباتها ، وبالعكس يمكن دراسة الأفعال الناتجة عن الحركة لهذه الأجسام .

يعــدّ علم التحريك من العلوم الحديثة بالنسبة لعلم السكون ، إن بداية الفهم المنطقي له ترجع إلى غاليله (Galileo 1564-1642) الذي يعدّ مؤسساً لهذا العلم ، فقد قام هذا العالم بدراسة متقــنة للســقوط الحر للأجسام ولحركة الأجسام على المستوي المائل الأملس وغيرها ، وهو الذي رفض الفكرة الخاطئة التي كانت سائدة في تلك الأيام بأن سرعة السقوط الحر للأجسام الثقيلة أكبر من سرعة سقوط الأجسام الخفيفة، وبرهن على أن حركة الجسم الواقع تحت فعل قوة ثابتة هي حركة متسارعة بانتظام، وليست حركة منتظمة كما كان معروفاً قبله، إن العقبة الرئيسية التي اعترضته تمثلت في عدم وجود تجهيزات وأدوات قياس دقيقة .

إن الـتطورات الهامــة في علم التحريك بدأت تظهر بعد اختراع الساعة ذات النواس ، فقد استطاع العالم الكبير نيوتن (Newton 1642-1727) وضع القوانين الدقيقة لعلم التحريك مسترشداً بأعمال غاليله .

وجــاء مــن بعدهم علماء كثيرون شاركوا في تطوير علم التحريك ودفع عجلته إلى الأمام ، ومن أشهرهم أويلر ــ دالامبير ــ لاغرانج ــ كوريوليس ــ أنشتاين ، وغيرهم .

تنقســم الدراسة في علم التحريك إلى دراسة الجزيئة، وإلى دراسة الجسم الصلد ، كما يمكن تطبــيق نــتائج الدراسة الحركية المستقيمة والمنحنية للجزيئة على الحركة الانسحابية للجسم الصــلد لأن جميع جزيئاته تقوم بالحركة نفسها، ويمكن عدّه جزيئة متمركزة في مركز ثقله ، وللسبب نفسه يمكن تطبيق نتائج الدراسة التحريكية للحركة المستقيمة والمنحنية للجزيئة على الدراســة التحــريكية للانسحاب المستقيم والمنحني للجسم الصلد . وسندرس في هذا الفصل الحــركة المســتقيمة والمنحنية للجزيئة (الانسحاب المستقيم والمنحني للجسم الصلد) ، وفي الفصــل الخــامس سنبحث في الدراسة التحريكية للانسحاب المستقيم والمنحني وفي الفصل الســادس سنبحث في النظريات العامة لتحريك جزيئة (الدفع ــ الاندفاع أو كمية الحركة ــ العمــل والطاقة) ، وفي الفصل السابع عزم كمية الحركة والميكانيك الفضائي ، أما الفصل الثامن فهو لبحث تصادم الأجسام .

٤-٢. تعاريف :

١- الجزيئة Particle :

هي عبارة عن جسم أهملت أبعاده نظراً لصغرها ، ولكنها تتمتع بخواص المادة ، أي لها كتلة ومثال ذلك قذيفة تطلق في مسار كبير ، وحركة الأرض في مدارها حول الشمس .

٢- المادة Matter :

وهي كل ما يحتل حيزاً من الفراغ .

٣- الجسم Body :

هو مادة محددة بسطح مغلق . ويعدّ الجسم في الميكانيك الهندسي صلداً ، أي غير قابل للتشوه (لتغيــر شكله وأبعاده) مهما تعرض لمؤثرات خارجية ، وفي الواقع يمكن أن يكون الجسم

مــرناً (Elastic) أي قابلاً لتغيير شكله وأبعاده عندما يتعرض لمؤثرات خارجية، أو يعود إلى شكله الأصلي بعد زوال هذه المؤثرات .

كمـا يمكـن أن يكـون الجسـم لدنا (Plastic) ، أي قابلاً لتغيير شكله وأبعاده عند تعرضه لمؤثرات خارجية ، ولكنه غير قابل للعودة إلى شكله الأصلي بعد زوال هذه المؤثرات .

٤- العطالة Inertia :

هو خاصة المادة في إظهار مقاومة لتغيير الحركة .

٥- الكتلة Mass :

هـي مقـياس لما يحتويه الجسم من المادة ، أو هي المقياس الكمي للعطالة . حيث إن الكتل الكبيرة تبدي ممانعة لتغيير الحركة أكثر من الكتل الصغيرة .

٦- الوزن Weight :

هو قوة جذب الكرة الأرضية للجسم المفروض ، ويرمز له بالحرف W ، ويساوي جداء كتلة الجسم m في تسارع الجاذبية الأرضية g ، أي أن :

$$\boxed{W = m \cdot g}$$

٧- المسار Path :

إذا تحـركت جـزيئة فـي الفراغ فإنها ترسم خطاً يسمى بالمسار ، وقد يكون المسار خطاً مستقيماً أو منحنياً (مستوياً أو فراغياً) .

٨- أنواع حركة الجزيئة Motion of Particle :

تقسم حركة الجزيئة حسب مسارها إلى القسمين التاليين :

أ) حركة مستقيمة (Rectilinear Motion) :

ومسارها خط مستقيم .

ب) حركة منحنية (Curvilinear Motion) :

ومســارها خــط منحنــي أو قد تكون حركة منحنية مستوية (Plane Motion) إذا كان مســارها منحنــياً مســتوياً أو حركة منحنية فراغية (Space Motion) إذا كان مسارها منحنياً فراغياً .

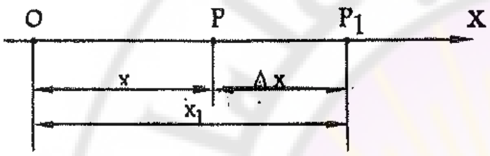
أولاً – الحركة المستقيمة للجزيئة

Rectilinear Motion of Particle

هي حركة مسارها خط مستقيم ، وقد تكون منتظمة أو متغيرة بانتظام أو غير منتظمة ، وفيما يلي قوانين هذه الحركة .

٤-٣ . الانتقال Displacement :

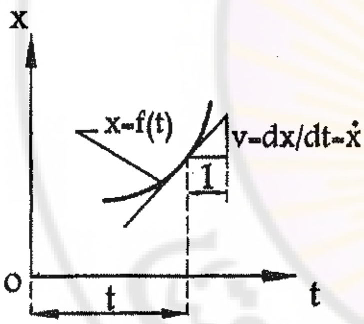
وهـو المسافة التي تقطعها الجزيئة خلال فترة زمنية معينة ، ووحدة قياسها هي وحدة قياس الأطوال . إذا أخذنا المحور x منطبق على مسار الجزيئة P (الشكل ٤-١) ، فإن الانتقال يتعين بالفاصلة، ويمكن أن يكون هذا الانتقال موجباً أو سالباً حسب موضع الجزيئة P بالنسبة للمبدأ O ، ويتبع الانتقال x للزمن t وتكون معادلته هي :



الشكل (٤-١)

$$\boxed{x = f(t)}$$

وقد يكون من المفيد أحياناً استخدام الطريقة البيانية لتمثيل العلاقة بين الانتقال x والزمن t في الحالات التي تكون فيها العلاقات التحليلية معقدة جداً ، أو عندما يعطى قانون الحركة المدروسة بصورة بيانية مباشرة (منحنيات ناتجة عن التجارب العملية) كما في الشكل (٤-٢) . حيث تم تعيين الانتقال للجزيئة في أي لحظة زمنية t .



الشكل (٤-٢)

تأخذ معادلة الانتقال السابقة أشكالاً مختلفة ، وفيما يلي بعض من هذه الأشكال :

١- معادلة حركة جزيئة تتحرك حركة مستقيمة منتظمة :

$$\boxed{x = a + b \cdot t}$$

حيث إن a,b ثابتان .

٢- معادلة حركة جزيئة تسقط سقوطاً حراً :

$$\boxed{x = \frac{1}{2} g \cdot t^2}$$

٣- معادلة حركة جزيئة في وسط ذي لزوجة عالية :

$$\boxed{x = r \cdot e^{-kt}}$$

حيث : $(r,k) = \text{const}$

e : أساس اللوغاريتم الطبيعي .

٤-٤ . السرعة Velocity :

هـــي الانتقال الحاصل خلال الفترة الزمنية Δt ويرمز لها بـ $\vec{v}$ ، ووحدة قياسها هي (وحدة طول / وحدة زمن). عندما يتغير الانتقال بمقادير متساوية Δx خلال فترات زمنية متساوية Δt ، فـــإن الحركة تكون منتظمة (Uniform Motion) ، وعندما يتغير الانتقال بمقادير غيـــر متساوية $\Delta x_1 - \Delta x_2 - \Delta x_3 - \cdots$ خلال فترات زمنية متساوية Δt فالحركة غير منتظمة . وفي هذه الحالة ينتج مفهوم السرعة الوسطى $\vec{v}_a$ (Average Velocity) وهي تساوي :

$$\boxed{v_a = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

وتسمى السرعة $\vec{v}$ في أي لحظة زمنية t بالسرعة اللحظية أو الآنية (Instantaneous Velocity) وتساوي :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}}$$

أي أن :

سرعة الجزيئة في لحظة زمنية ما t هي المشتق الأول للانتقال بالنسبة للزمن t .

وينتج أن سرعة الجزيئة هي ميل المماس لمنحني الانتقال في اللحظة الزمنية t (الشكل٤-٢).

يمكن تمثيل تغير السرعة $\vec{v}$ بالنســبة للزمن بيانياً كما في الشكل (٤-٣) حيث بوساطة هذا المخطط نستطيع تعيين السرعة $\vec{v}$ في أي لحظة زمنية t.

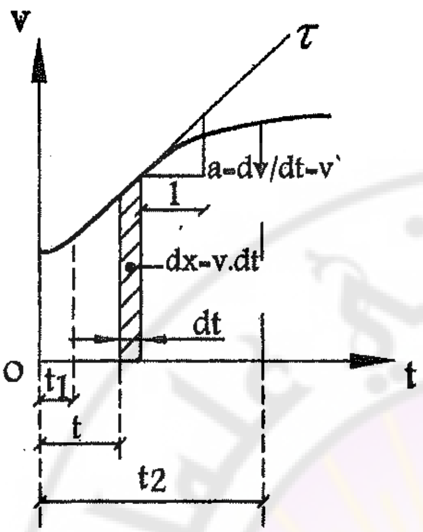
كمـــا يمكـــن استخدام هذا المخطط لتعيين الانـــتقال المقطـــوع خـــلال فتـــرة زمنية ($\Delta t = t_2 - t_1$) كما يلي :

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\Rightarrow x = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$$

حـيث:dx هو الانتقال الجزئي خلال الفترة الـزمنية dt ويمـثل بمساحة القسم المظلل على الرسم.

x هو الانتقال خلال الفترة الزمنية ($\Delta t = t_2 - t_1$) .



الشكل (٤-٣)

٤-٥. التسارع Acceleration :

هو مقدار تغير السرعة $\vec{v}$ خلال الفترة الزمنية Δt ويرمز له بـ $\vec{a}$ ووحدة قياسه هي : [وحدة الطول / (وحدة الزمن)^2] .

عـندما تتغير السرعة بمقادير متساوية Δv خلال فترات زمنية متساوية Δt فالحركة تكون متغيرة بانتظام ، وعندما تتغير السرعة بمقادير غير متساوية $\Delta v_1, \Delta v_2 \cdots$ خلال فترات زمنـية متسـاوية Δt فالحركة غير منتظمة . وفي هذه الحالة ينتج مفهوم التسارع الوسطي $\vec{a}_a$ (Average Acceleration) وهو يساوي :

$$\boxed{a_a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

ويسمى التسارع $\vec{a}$ في أي لحظة زمنية t بالتسارع اللحظي أو الآني (Instantaneous acceleration) ويساوي :

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt} = \ddot{x} = \dot{v}}$$

أي أن:

تسـارع الجزيئة في اللحظة الزمنية t هو المشتق الأول للسرعة بالنسبة للزمن أو المشتق الثاني للانتقال بالنسبة للزمن .

و بتعبيـر أخـر إن تسـارع الجزيئة هو ميل المماس لمنحني السرعة في اللحظة الزمنية t (الشكل ٤-٣) .

يمكن أن نميز الحالات التالية :

١- السرعة ثابتة، وهذا يعني أن ($v = const \Rightarrow a = 0$) والحركة منتظمة .

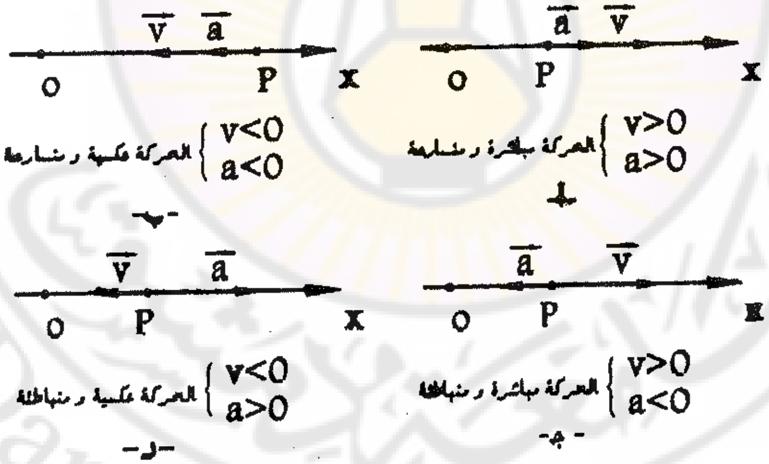
٢- السرعة تتغير بمقدار ثابت Δv مع الزمن t أي أن :

$$\left(a = \frac{dv}{dt} = const\right)$$

والحركة متغيرة بانتظام (متسارعة أو متباطئة) .

٣- السـرعة تتغير بمقادير غير متساوية ... , $\Delta v_1 - \Delta v_2$ خلال فترات زمنية متساوية Δt ، فالتسارع غير ثابت والحركة غير منتظمة أو متغيرة .

التسارع هو قيمة شعاعية تمثل بشعاع $\vec{a}$ ينطبق على المحور x وقد يكون موجباً أو سالباً أو يساوي الصفر كما في الشكل (٤-٤) .



الشكل (٤-٤)

يمكن استنتاج القانون الجديد التالي للتسارع وذلك من القوانين السابقة :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = v\frac{dv}{dx}}$$

سندرس في الفقرات التالية الأنواع الشهيرة للحركة المستقيمة للجزيئة .

٤-٦ . الحركة المستقيمة المنتظمة: Uniform rectilinear Motion

في هذه الحركة يكون التسارع معدوماً وعليه فإن :

$$a = \dot{v} = 0 \Rightarrow v = \dot{x} = const$$
$$\Rightarrow x = x_0 + v \cdot t$$

حيث إن x_0 هو الانتقال الأولي للجزيئة (في اللحظة $t = 0$) وعليه فإن علاقة الانتقال السابقة تمثل الفاصلة التي تحدد موضع الجزيئة P على المحور x ، أما الانتقال الحاصل خلال الفترة الزمنية t فهو .

$$x - x_0 = v \cdot t$$

٤-٧. الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام :

Uniformly Variable Motion

تسارع هذه الحركة ثابت أي أن ($a = \dot{v} = const$) .

أما السرعة فتتعين بالعلاقة التالية :

$$\boxed{v = \dot{x} = v_0 + a \cdot t}$$

ويتعين الانتقال بالعلاقة التالية :

$$\boxed{x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}$$

حيث إن v_0 هي السرعة الأولية و x_0 الانتقال الأولي للجزيئة (في اللحظة $t = 0$) ، وقد وجدنا أن($a = v\frac{dv}{dx}$) . يمكن استناداً إلى هذه العلاقة استنتاج العلاقة التالية بفرض أن $a = const$:

$$a = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow v\cdot dv = adx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\cdot dv = a\int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow$$

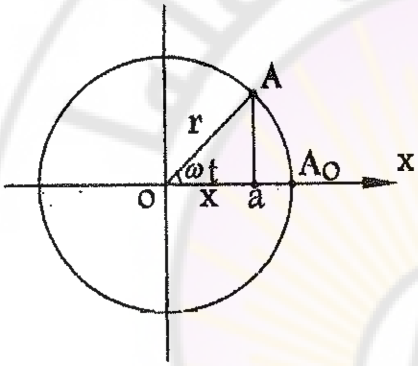
$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

وهذه العلاقة تربط بين السرعة والتسارع والانتقال في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام .

٤-٨. الحركة الترددية البسيطة (الهرمونية) :

Simple harmonic Motion

لنفرض أن الجزيئة A تدور بسرعة دورانية ثابتة $\vec{v}$ على الدائرة التي نصف قطرها r كما في الشكل (٤-٥) . إن مسقط هذه الجزيئة هو a ، ويتحرك على المحور x حركة مستقيمة ترددية تسمى بالحركة التوافقية البسيطة أو الهرمونية. وفيما يلي قوانين هذه الحركة :



الشكل (٤-٥)

١- السرعة الزاوية (ω) Angular Velocity :

هي الزاوية التي يدورها نصف القطر OA في وحدة الزمن وتقدر بـ $\left[\frac{1}{sec}\right]$

$$v = const \Rightarrow \omega = const$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}\left[\frac{1}{sec}\right] \Rightarrow \omega = \frac{\pi n}{30}\left[\frac{1}{sec}\right]$$

حيث إن n هي عدد دورات الجزيئة A في الدقيقة $\left[\frac{R}{min}\right]$ ، وتتحقق بين السرعة الدورانية (المحيطية) v والسرعة الزاوية ω العلاقة التالية :

$$\boxed{v = \omega\cdot r = \frac{d}{2}\cdot\frac{\pi n}{30}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{\pi d n}{60}}\ [m/sec]$$

حيث إن d قطر الدائرة بالمتر .

٢- الدور (τ) Period :

يسمى الزمن اللازم الذي تستغرقه الجزيئة A لإتمام دورة واحدة (نوسة واحدة) بالدور τ وعليه فإن :

$$\omega \cdot \tau = 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega}}\ [sec]$$

٣- التواتر أو التردد (f) Frequency :

وهو عدد النوسات في وحدة الزمن :

$$\boxed{f = \frac{1}{\tau}}\ \left[\frac{1}{sec}\right]$$

٤- السعة Amplitude :

وهي نصف قطر الدائرة r ، أو هي المطال الأعظمي الذي تبلغه الجزيئة على المحور x .

٥- الطور Phase :

وهو الزاوية θ حيث :

$$\boxed{\theta = \omega \cdot t}$$

٦- الانتقال x لمسقط الجزيئة A على المحور x :

$$\boxed{x = r \cdot \cos \omega t}$$

٧- السرعة v :

$$\boxed{v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot r \cdot \sin \omega t}$$

٨- التسارع a :

$$\boxed{a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos \omega t = -\omega^2 \cdot x}$$

إن التسارع في العلاقة يتناسب مع الانتقال x وقيمته العظمى تساوي :

$$\boxed{a_{max} = -\omega^2 \cdot r}$$

وعندما $x = 0$ فإن $a = 0$ وإن اتجاه التسارع هو دوماً نحو المبدأ O، وتكون الحركة متسارعة عندما تقترب النقطة A من المبدأ O ومتباطئة عندما تبتعد عنه،انظر الشكل (٤-٤).

٤-٩. مسائل محلولة على الحركة المستقيمة للجزيئة :

مسألة ١ : تتحرك جزيئة حركة مستقيمة بانتظام حسب المعادلة التالية :

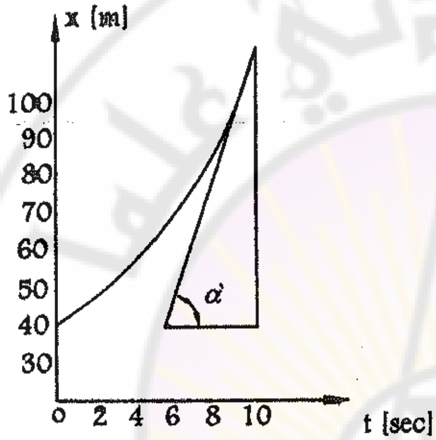
$$x = 40 + 2t + 0,5t^2$$

حيث إن الانتقال بالمتر والزمن بالثانية ، والمطلوب تعيين الانتقال والسرعة والتسارع في اللحظة $t = 10sec$ ، ثم ارسم مخططات الحركة والسرعة والتسارع في المجال : $t = 0$ إلى $t = 10sec$.

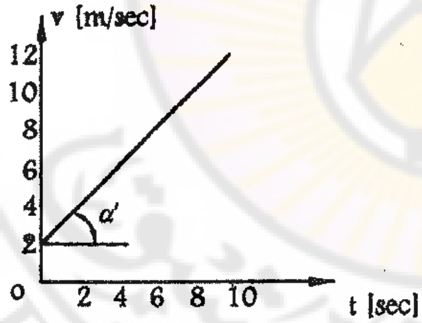
الحل :

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 + t$$

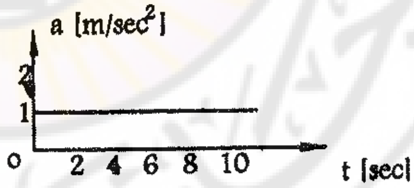
$$a = \frac{dv}{dt} = 1 \ [m/sec^2]$$



-أ-



-ب-



-جـ-

الشكل (٤-٦)

الانتقال والسرعة في اللحظة $t = 10sec$:

$$x = 40 + 20 + 50 = 110m$$

$$v = 2 + t = 12m/sec$$

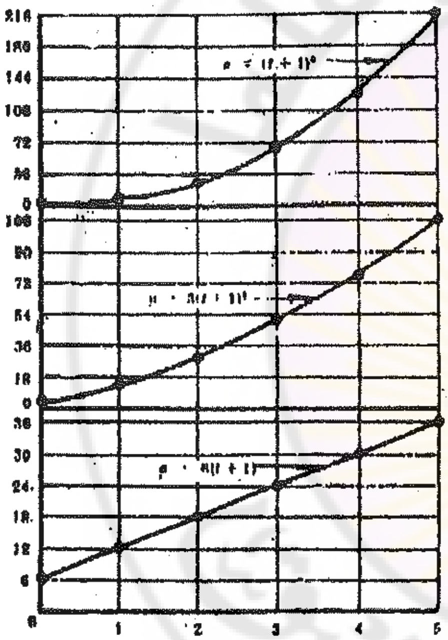
يبين الشكل (٤-٦) مخططات الانتقال والسرعة والتسارع في المجال المطلوب .

يمكن تعيين السرعة والتسارع في اللحظة $t = 10sec$ من مخطط الانتقال (الشكل آ) ومخطط السرعة (الشكل ب) .

$$v = \tan\alpha = \frac{70}{5,8} = 12\ m/sec$$

$$a = \tan\alpha' = \frac{10}{10} = 1\ m/sec^2$$

مسألة ٢ : تتحرك جزيئة على مستقيم أفقي بتسارع $a = 6\sqrt[3]{x}$ ، وفي اللحظة $t = 2sec$ كان انتقالها يساوي $27m$ وسرعتها $27\left[\frac{m}{sec}\right]$.



الشكل (٤-٧)

والمطلــوب : تعيــين معادلات انتقالها، وسرعتها، وتسارعها، ورسم مخططاتها.

الحل :

$$a = v\frac{dv}{dx} \Longrightarrow adx = vdv$$

وبالتعويض ينتج :

$$6x^{1/3}dx = vdv$$

$$6\int x^{1/3}dx = \int vdv$$

$$6\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} = \frac{v^2}{2} + C_1 = \frac{9}{2}x^{4/3}$$

$$\frac{9}{2}\cdot 27^{4/3} = \frac{27^3}{2} + C_1 \Rightarrow 0$$

وتأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$v^2 = 9x^{4/3} \Rightarrow v = 3x^{2/3}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \Rightarrow \frac{dx}{x^{2/3}} = 3dt$$

$$3x^{1/3} = 3t + C_2$$

$$3\cdot 27^{1/3} = 6 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

نعوض قيمة C_2 في المعادلة الأخيرة :

$$\sqrt[3]{x} = t+1$$

أو :

$$x = (t+1)^3$$

نعوض في معادلة السرعة الناتجة أعلاه :

$$v = 3x^{2/3} = 3(t+1)^2$$

وأما معادلة التسارع فهي :

$$a = 6(t+1)$$

ويبين الشكل (٤-٧) السابق مخططات الانتقال والسرعة والتسارع .

مسألة ٣ : تتحرك جزيئة على المحور x ، وفي الاتجاه الموجب بسرعة ابتدائية 12m/sec، وتخضع هذه الجزيئة إلى قوة مقاومة تعطيها تسارعاً سالباً ، فإذا كان هذا التسارع يتغير بشكل خطي مع الزمن من الصفر إلى $3m/sec^2$ وذلك خلال الـ 5sec التالية والمطلوب :

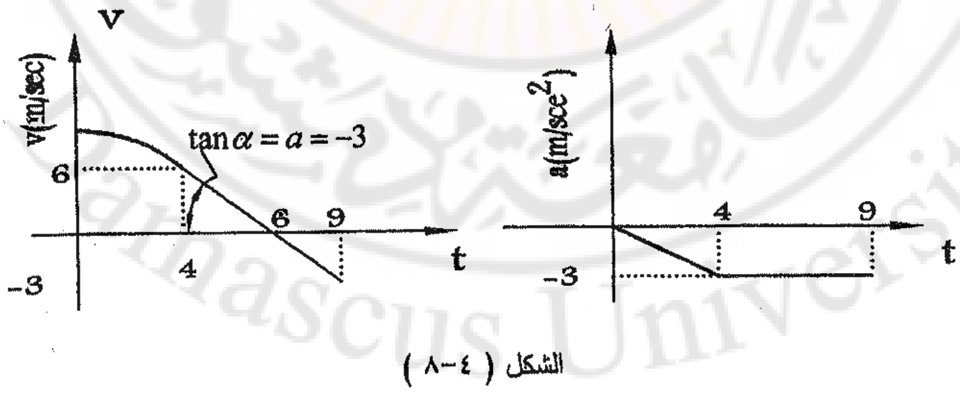
١- حساب سرعة الجزيئة في اللحظة $t = 4sec$.

٢- حساب المسافة المقطوعة في اللحظة $t = 0$ إلى اللحظة التي تغير فيها الجزيئة اتجاه حركتها .

٣- سرعة الجزيئة وموضعها عندما $t = 9sec$.

الحل :

نرسم أولاً مخطط التسارع والزمن (a-t) ،ثم اعتماداً على هذا المخطط نرسم مخطط السرعة والزمن (t-v) كما في الشكل (٤-٨) .



الشكل (٤-٨)

ـ المجال الأول : ($0 \le t \le 4$)

نعلم أن :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

$$a = \frac{-3}{4}t \Rightarrow$$

$$dv = \frac{-3}{4}t \cdot dt \Rightarrow \int_{12}^{v} dv = \int_{0}^{t} -\frac{3}{4}t \cdot dt \Rightarrow$$

$$v = 12\frac{(-3)}{8}t^2 m/sec .....0 \le t \le 4$$

$$t = 4 \Rightarrow v = 6m/sec$$

ومن أجل المجال الثاني : ($4 \le t \le 9$)

$$\int_{6}^{v} dv = \int_{4}^{t} adt : a = const = -3 \Rightarrow$$

$$v = 6 - 3(t - 4)$$

حيث باستخدام هذه العلاقات نقوم برسم مخطط السرعة والزمن.

ـ اعتماداً على المخططات والعلاقات السابقة نجد :

$$t = 4 \Rightarrow v = 6m/sec$$

٢- تغير السرعة اتجاهها في اللحظة التي تصبح فيها السرعة صفراً، ومن المخطط واضح أن هذه اللحظة هي $t = 6sec$.

نحسب المسافة المقطوعة ضمن المجال الأول فنجد أن :

$$dx = v \cdot dv \Rightarrow \int_{0}^{x} dx = \int\left(12 - 3\frac{t^2}{8}\right)dt \Rightarrow x = 40m$$

والمسافة المقطوعة من اللحظة $t = 4$ إلى اللحظة $t = 6$ وهي لحظة انعدام السرعة هي :

$$x = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6m$$

وتكون المسافة الكلية هي x_{max}:

$$x_{max} = 40 + 6 = 46m$$

٣- وبالطريقة نفسها يمكن حسب موضع الجزيئة عندما $t = 9sec$

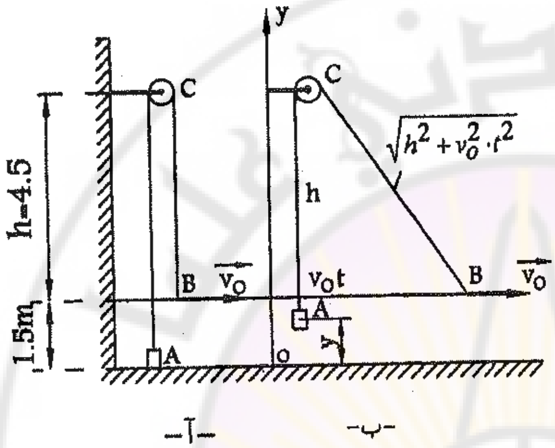
$$t = 9 \Rightarrow x = 40 + 6 + -\frac{1}{2}3 \cdot 9 = 32{,}5m$$

أما سرعتها فهي : $\quad t = 9 \Rightarrow v = -9m/sec$

مسألة ٤ : ربطت الكتلة A بنهاية الخيط ACB الذي يمر على البكرة C كما في الشكل (٤-٩) ويقوم شخص بشد النهاية B للخيط بسرعة منتظمة v_o فإذا علمت أن أبعاد الكتلة والبكرة مهملة ، وأن $v_o = 3m/sec \quad , \quad h = 4{,}5m$ ، فالمطلوب :

١- تعيين معادلتي الانتقال والسرعة للكتلة A .

٢- حساب الزمن اللازم حتى تصل الكتلة A إلى مكان البكرة C.



الشكل (٤-٩)

الحل :

طول الحبل في الشكل (آ) :

$$l = 2h + 1{,}5$$

طول الحبل في الشكل (ب) :

$$l = (1{,}5 - y) + h + \sqrt{h^2 + v_o^2 t^2}$$

بذلك نحصل على ما يلي :

$$2h + 1{,}5 = 1{,}5 - y + h + \sqrt{h^2 + v_o^2 t^2}$$

أو :

$$y = -h + \sqrt{h^2 + v_o^2 t^2}$$

وهي معادلة انتقال الكتلة A :

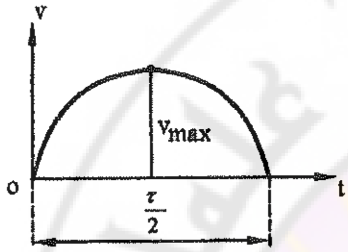
$$v = \frac{2v_o^2 t}{2\sqrt{h^2 + v_o^2 t^2}} = \frac{v_o^2 t}{\sqrt{h^2 + v_o^2 t^2}}$$

وهذه معادلة سرعة الكتلة A.

عندما تصل الكتلة A إلى المكان C فإن y يساوي $(1,5+h)$ وبالتعويض في معادلة الانتقال ينتج :

$$1,5+h=-h=\sqrt{h^2+{v_0}^2t^2}$$
$$10,5=\sqrt{20,25+9t^2}\Rightarrow 90=9t^2$$
$$\Rightarrow t=3,16\,\text{sec}$$

مسألة ٥ : يبين الشكل (٤-١٠) مخطط السرعة والزمن لجزيئة تقوم بحركة مستقيمة، وهو عبارة عن نصف موجة لمنحنٍ جيبي. أوجد المسافة التي تقطعها الجزيئة خلال الفترة الزمنية $\frac{\tau}{2}$.



الشكل (٤-١٠)

الحل:

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=v\cdot dt$$

أو:

$$x=\int_0^{\tau/2} v\cdot dt=\int_0^{\tau/2}(\omega\cdot r\cdot\sin\omega t)dt$$
$$\Rightarrow x=\left[-r\cdot\cos\omega t\right]_0^{\frac{\tau}{2}}$$
$$\left.\begin{cases} v_{max}=\omega\cdot r\\ \omega=\dfrac{2\pi}{\tau}\end{cases}\right\}\Rightarrow r=\frac{\tau\cdot v_{max}}{2\pi}$$
$$x=\left[-\frac{\tau\cdot v_{max}}{2\pi}\cdot\cos\frac{2\pi}{\tau}\cdot t\right]_0^{\frac{\tau}{2}}$$
$$x=\frac{\tau\cdot v_{max}}{2\pi}+\frac{\tau\cdot v_{max}}{2\pi}=\frac{\tau\cdot v_{max}}{\pi}$$

ثانياً – الحركة المنحنية للجزيئة
Curvilinear Motion Of a Particle

٤–١٠. تعيين الانتقال في الحركة المنحنية :

يمكن تعيين انتقال الحركة المنحنية بعدة طرق منها :

١. طريقة الإحداثيات Coordinate Method :

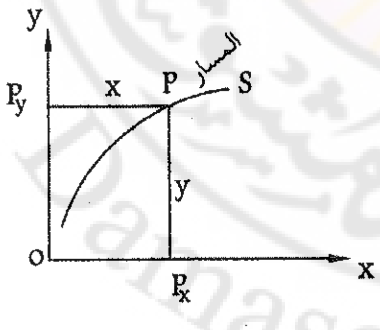
تستخدم هذه الطريقة إذا كان مسار الحركة غير معروف في البدء، كمسار قذيفة . يتعين موضع الجزيئة P على مسارها الفراغي S في اللحظة t بالإحداثيات x,y,z (الشكل ٤–١١) وكل منها تابع للزمن، وتكون معادلات موضع الجزيئة P هي :

$x = f_1(t)$	$y = f_2(t)$	$z = f_3(t)$

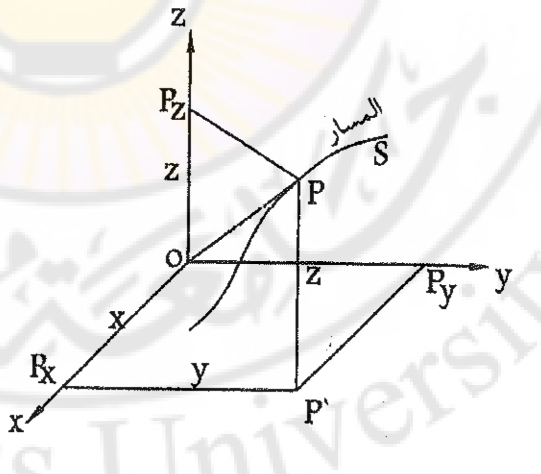
حيث تمثل هذه المعادلات حركة مسقط الجزيئة P على المحاور الإحداثية .

- إذا كانت الحركة المنحنية للجزيئة P تقع في أحد المستويات الإحداثية، وليكن المستوي xy (الشكل ٤–١٢) سميت الحركة مستوية، ويتعين موضع هذه الجزيئة بالمعادلتين التاليتين:

$x = f_1(t)$	$y = f_2(t)$

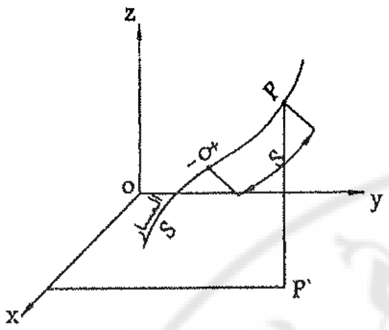


الشكل (٤–١٢)



الشكل (٤–١١)

٢. الطريقة الطبيعية Natural Method :

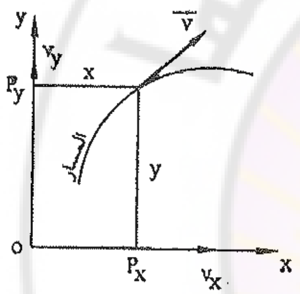


الشكل (٤-١٣)

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون مسار الحركة S معلوماً كمسار آلية (الشكل٤-١٣) في هذه الحالة نأخذ على المسار S نقطة ما مثل O نعدّها مبدأ للإحداثيات ، ونعين عليه الجهتين الموجبة والسالبة وفي هذه الحالة فإن موضع الجزيئة P على هذا المسار يتعين بمعادلة الموضع بالنسبة للزمن وهي : $S=f(t)$

ويمكن تعيين المسار من تقاطع سطحين ومعادلتاهما :

$$\boxed{f_1(x,y,z)=0} \quad \boxed{f_2(x,y,z)=0}$$



الشكل (٤-١٤)

أما إذا كانت الجزيئة تتحرك في أحد المستويات الإحداثية، وليكن المستوي xy (الشكل٤-١٤) فإن حركة الجزيئة تتعين بالمعادلتين التاليتين :

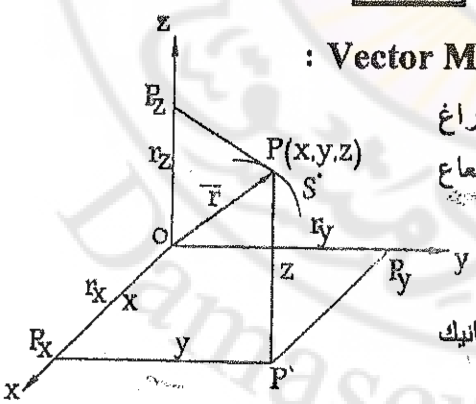
١- معادلة المسار S :

$$f(x,y)=0 \text{ أو: } \boxed{y=f(x)}$$

٢- معادلة الموضع على المسار بالنسبة للزمن t :

$$\boxed{S=f(t)}$$

٣. الطريقة الشعاعية Vector Method :



الشكل (٤-١٥)

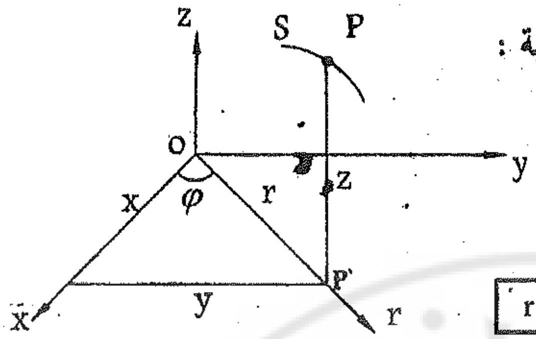
يتعين شعاع موضع الجزيئة P في الفراغ على المسار في أي لحظة زمنية t بشعاع الموضع $\vec{r}$ (الشكل ٤-١٥) ، أي أن:

$$\vec{r}=r_x\cdot\vec{i}+r_y\cdot\vec{j}+r_z\cdot\vec{k}$$

وهذه الطريقة كثيرة الانتشار في الميكانيك نظراً لسهولتها .

٤. طريقة الإحداثيات الأسطوانية :

Cylindrical Method



الشكل (٤-١٦)

يتعين موضع الجزيئة P على المسار بالإحداثيات r,φ,z (الشكل ٤-١٦)

ومعادلات الموضع هي :

$r = f_1(t)$	$\varphi = f_2(t)$	$z = f_3(t)$

٤-١١ . التحول من طريقة إلى طريقة أخرى :

للانـــتقال مـــن طريقة الإحداثيات إلى الطريقة الطبيعية يجب تعيين معادلة المسار، ويتم ذلك بحـــذف الزمن من المعادلات المفروضة، ثم تعيين قانون الحركة على المسار $S = f(t)$ كما يلي :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \dot{x}dt$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = \dot{y}dt$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} \Rightarrow dz = \dot{z}dt$$

بعد ذلك يتم حساب الانتقال الجزئي dS من العلاقة :

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

أو :

$$dS = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt$$

أو :

$$\int_{s_1}^{s_2} dS = \int_{t_1}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt$$

وللتحول من الطريقة الشعاعية إلى طريقة الإحداثيات ، وجدنا أن إحداثيات الجزيئة P هي (x,y,z)، ومساقط شعاع الموضع هي r_x, r_y, r_z ومن الشكل (٤-١٥) يتضح أن :

$$x = r_x \,,\; y = r_y \,,\; z = r_z$$

ويمكن التحول من الإحداثيات الأسطوانية إلى الإحداثيات الديكارتية بوساطة العلاقات التالية:

$x = r\cos\varphi$	$y = r\sin\varphi$	$z = z$

٤-١٢. تطبيقات على الانتقال في الحركة المنحنية :

مسألة ١ : تتحرك جزيئة وفق معادلتي الانتقال التاليتين :

$$x = r\cos \omega t \ , \ y = r\sin\omega t$$

والمطلوب تعيين معادلة المسار وقانون الحركة .

الحل :

بالتربيع والجمع والاختصار ينتج :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

وهذه هي معادلة المسار وهو عبارة عن دائرة .

مركبتا السرعة :

$$v_x = \dot{x} = -\omega \cdot r \cdot \sin\omega t$$
$$v_y = \dot{y} = \omega \cdot r \cdot \cos\omega t$$

ـ قانون الحركة :

$$dS = \sqrt{\omega^2 r^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 r^2 \cos^2 \omega t}\, dt$$
$$dS = \omega \cdot r \cdot dt \Rightarrow S = \omega \cdot r \cdot t$$

مسألة ٢ : تتحرك جزيئة وفق معادلتي الانتقال التاليتين :

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 4t$$

اكتب معادلة شعاع الموضع لحركة هذه الجزيئة .

الحل :

$$\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

بالتعويض نحصل على :

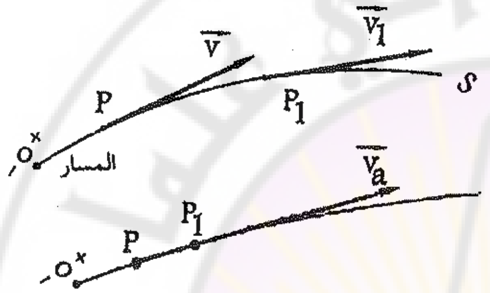
$$\vec{r} = (3 + 2t) \cdot \vec{i} + (4t) \cdot \vec{j}$$

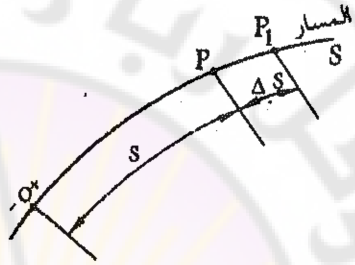
٤-١٣. سرعة الجزيئة في الحركة المنحنية :

١- تعيين السرعة بالطريقة الطبيعية :

تتعين السـرعة الوسطية للجزيئة في الحركة المنحنية بالعلاقة $v_a = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ كما في الشـكل (٤-١٧) . أما السرعة الآنية أو اللحظية فهي :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$





الشكل (٤-١٨)

الشكل (٤-١٧)

وهـذا يعني أن القيمة العددية للسـرعة اللحظية يسـاوي المشـتق الأول للانتقال S بالنسبة للزمن t .

ينطبق شعاع السرعة الوسطى $\bar{v}_a$ على الوتر PP_1 وأما شعاع السرعة اللحظية $\bar{v}$ فينطبق على المماس للمسار S في النقطة P (الشكل ٤-١٨) .

٢- تعيين السرعة بطريقة الإحداثيات :

بمـا أن حـركة الجزيئة P (الشكل ٤-١٨) تتركب من الحركات المستقيمة لمركباتها x,y,z على المحاور الإحداثية فإن سرعتها $\bar{v}$ تتركب أيضاً من سرعة هذه المركبات وينتج أن :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \;;\; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \;;\; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

ويتعين مقدار السرعة $\bar{v}$ بالعلاقة :

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

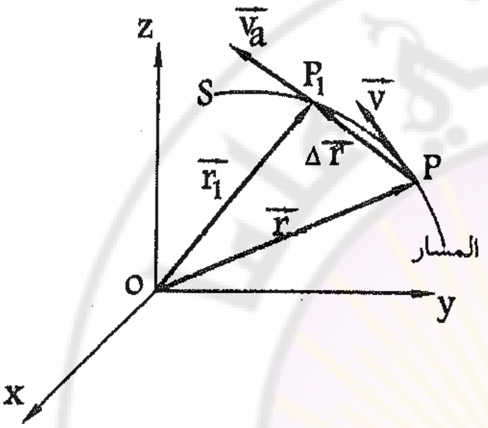
ومنحاها بالزوايا الموجهة (α, β, γ) :

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \;\; ; \;\; \cos\beta = \frac{v_y}{v} \;\; ; \;\; \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

أما إذا كانت حركة الجزيئة P مستوية فإن السرعة $\vec{v}$ تتعين مقداراً واتجاهاً بواسطة مركبات السرعة $(\dot{x},\dot{y})$.

٣- تعيين السرعة بالطريقة الشعاعية :

يبين الشكل (٤-١٩) موضع الجزيئة على المسار S في اللحظة t وهو P ، وشعاع الموضع في هذه اللحظة هو $\vec{r}$ ، وفي اللحظة t_1 أصبح موضعها P_1 وشعاع موضعها $\vec{v}_1$ حيث إن $t_1 = t + \Delta t$ ، وهكذا فإن تغير شعاع الموضع خلال الفترة الزمنية Δt هو $\Delta\vec{r}$ ، والسرعة الوسطى للجزيئة $\vec{v}_a$ خلال هذه الفترة تنطبق على $\Delta\vec{r}$ وتساوي :



الشكل (٤-١٩)

$$\vec{v}_a = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

وأما السرعة الآنية أو اللحظية $\vec{v}$ للجزيئة P في اللحظة t فتساوي :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

أي أن:

شعاع سرعة الجزيئة في اللحظة t يساوي المشتق الأول لشعاع الموضع $\vec{r}$ بالنسبة للزمن، وهو يمس مسار الحركة، ويتجه باتجاهها، ومبدؤه هو النقطة P (موضع الجزيئة في اللحظة t).

٤-١٤. تسارع الجزيئة في الحركة المنحنية :

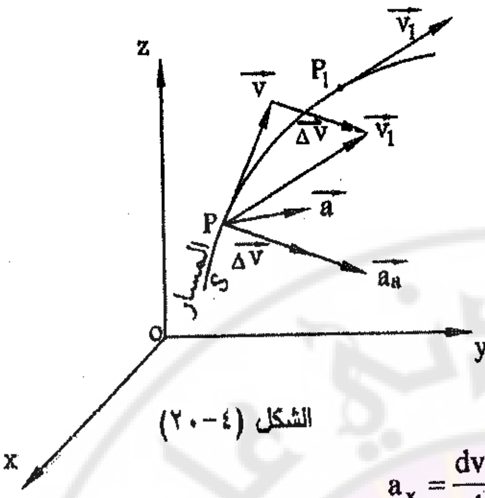
١- تعيين التسارع بطريقة الإحداثيات :

إن التسارع هو مقدار تغير السرعة في وحدة الزمن . إن التسارع الوسطي للجزيئة P خلال الفترة Δt (الشكل ٤-٢٠) يساوي :

$$\vec{a}_a = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

وهذا التسارع هو كمية شعاعية وينطبق على $\Delta\vec{v}$. وأما التسارع الآني أو اللحظي في اللحظة t فيساوي : $\vec{a}_a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

وهكذا فإن مركبات التسارع اللحظي $\vec{a}$ هي (a_x, a_y, a_z):



الشكل (٤-٢٠)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

حيث إن : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}$	$\cos\beta = \frac{a_y}{a}$	$\cos\gamma = \frac{a_z}{a}$

٢- تعيين التسارع بالطريقة الشعاعية :

وجدنا أن : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ و $a = \frac{d\vec{v}}{dt}$

وهكذا فإننا نجد أن :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}}$$

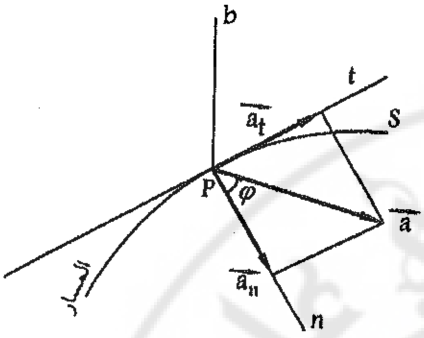
وبما أن : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k}$

فينتج أن :

$$\boxed{a = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k}}$$

٣-تعيين التسارع بالطريقة الطبيعية :

في هذه الحالة نختار المحاور المتعامدة t، n، b التي تسمى بالمحاور الطبيعية أو المتحركة للجزيئة (الشكل٤-٢١) .



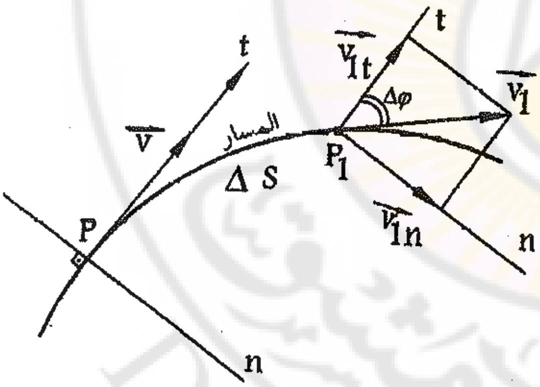
الشكل(٤-٢١)

المحور t هو المماس للمسار، والمحور n هو الناظم الرئيسي، والمحور b هو الناظم الثانوي . المستوي tn يسمى المستوي الملاصق للمسار في النقطة P ، وفيه يقع قسم المنحني المجاور لهذه النقطة، ويقع فيه أيضاً التسارع $\bar{a}$.

ومن المناسب أحياناً تفريق التسارع $\bar{a}$ إلى المركبتين القائمتين $\bar{a}_n$ و $\bar{a}_t$ (المركبة الثالثة $\bar{a}_b$ تساوي الصفر) .المركبة $\bar{a}_t$ تسمى التسارع المماسي (Tangential acceleration)، والمركبة $\bar{a}_n$ تسمى بالتسارع الناظمي (Normal acceleration) ومنه ينتج أن :

$$\boxed{a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}}$$

$$\tan\varphi=\frac{a_t}{a_n}$$



الشكل (٤-٢٢)

لنحسب قيمة كل من هذين التسارعين:

يبين الشكل (٤-٢٢) موضع الجزيئة في اللحظة t وهو P ، وكذلك موضعها في اللحظة t_1 وهو P_1 أي أنها قطعت على مسارها S خلال الفترة Δt القوس ΔS .

لنرسم في النقطة P المماس t والناظم n للمسار ، ومن النقطة P_1 نرسم موازيين لهما على الترتيب ، ونفرق كلاً من $\vec{v}$ و $\vec{v}_1$ إلى مركبتين قائمتين على المماس t والناظم n ، أي أن :

$$\vec{v}(v_t, v_n)\ ,\ \vec{v}_1(v_{1t}, v_{1n})$$

$$v_t = v \ , \ v_{1t} = v_1 \cos\Delta\varphi$$
$$v_n = 0 \ , \ v_{1n} = v_1 \sin\Delta\varphi$$

ويتعين التسارع $\vec{a}$ بالعلاقة التالية :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}$$

ويتعين التسارعان المماسي والناظمي بالعلاقتين التاليتين :

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1t} - v_t}{\Delta t}$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}$$

بالتعويض ينتج :

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cos\Delta\varphi - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \sin\Delta\varphi}{\Delta t} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

عندما ($\Delta t \to 0$) نحصل على ما يلي :

١- تنطبق النقطة P_1 على P $\Leftarrow$ $v_1 = v, \Delta\varphi = 0, \Delta S = 0$

٢- $\lim \dfrac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1$.

٣- $\lim \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \dfrac{1}{\rho}$ ، حيث ρ نصف قطر التقوس (الانحناء) للمسار في النقطة P ويتعين التابع $y = f(x)$ بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{|\ddot{y}|}{\sqrt{\left(1 + \dot{y}^2\right)^3}}}$$

٤- $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{dS}{dt} = v$

ويأخذ التسارع الناظمي الشكل التالي :

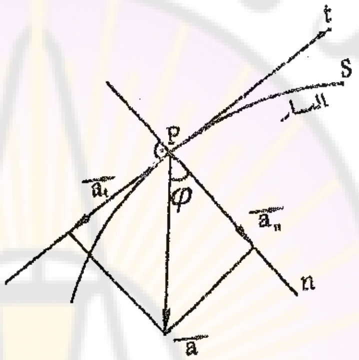
$$a_n = v \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho}$$

أي أن :

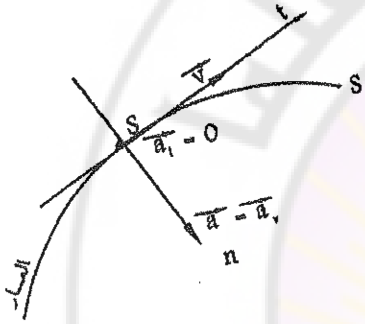
$a_t = \frac{dv}{dt}$	$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

إن التســـارع الناظمـــي $\vec{a}_n$ يتجه دائماً نحو مركز المسار، وهو موجب في جميع الحالات، وينـــتج عن تغير منحى السرعة ، فإذا كان مسار الحركة مستقيماً فإن السرعة تنطبق عليه، ويصبح $\rho = \infty$ بالتالي $a_n = 0$.

وأما التسارع المماسي $\vec{a}_t$ فيمكن أن يكون موجباً (الشكل ٤-٢١)، أو سالباً (الشكل ٤-٢٣) أو يساوي الصفر. وهو ينتج عن تغير مقدار السرعة ، فإذا كانت السرعة ثابتة $(v = const)$ فإنه ينعدم، والحركة تصبح منتظمة الشكل (٤-٢٤) .

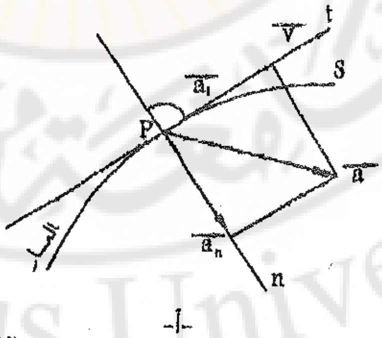


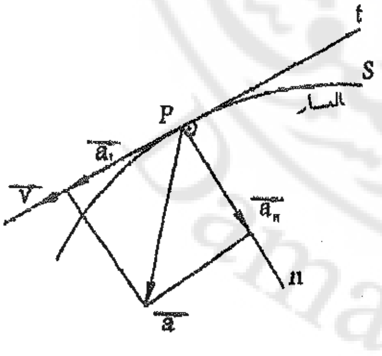
الشكل (٤-٢٣)



الشكل (٤-٢٤)

عندما تكون للسرعة $\vec{v}$ والتسارع المماسي $\vec{a}_t$ إشارة واحدة (+ ، +) أو (- ، -) فإن الحركة متسارعة ، أي أن سرعتها تزداد بالقيمة المطلقة كما في الشكل (٤-٢٥) . وفي هذه الحالة يتحقق الجداء السلمي التالي : $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$

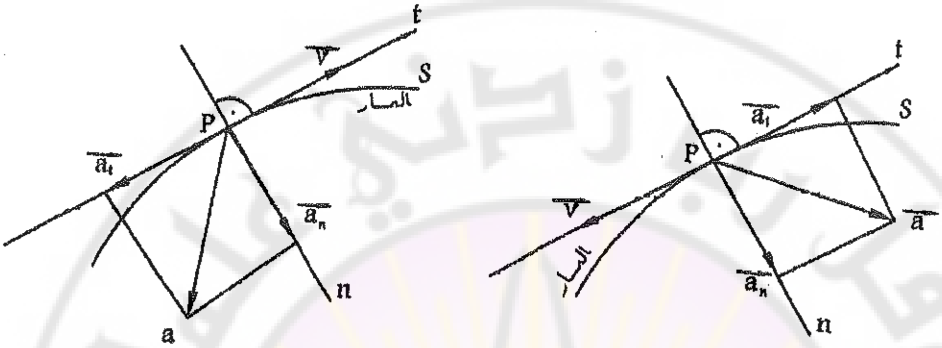




الشكل (٤-٢٥)

وعندما يكون التسارع المماسي $\vec{a}_t$ والسرعة $\vec{v}$ في جهتين متعاكستين الشكل (٤-٢٦) فإن الحركة متباطئة، والسرعة تتناقص بالمقدار . وفي هذه الحالة يتحقق الجداء التالي :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0 \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{2}$$



الشكل (٤-٢٦)

٤-١٥. بعض الحالات الخاصة للحركة :

Some special cases of motion

١- الحركة المستقيمة : Rectilinear motion

في الحركة المستقيمة $\rho = \infty$, $a = a_t = \dfrac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow a_n = 0$$

وإذا كان أيضاً $\vec{a}_t = 0$ ، فإن الحركة تصبح مستقيمة منتظمة .

٢- الحركة المنحنية المنتظمة :

Uniform curvilinear motion

في هذه الحركة تكون السرعة ثابتة بالمقدار، وينتج أن $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$، وتسارع الحركة هو:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

وينطبق على الناظم n (الشكل ٤-٢٦) .

وأما معادلة هذه الحركة فهي :

$$S = S_0 + v \cdot t$$

٣- الحركة المنحنية المتغيرة بانتظام :

Uniformly variable curvilinear motion

في هذه الحركة تتحقق العلاقة التالية :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = const$$

والسرعة تساوي :

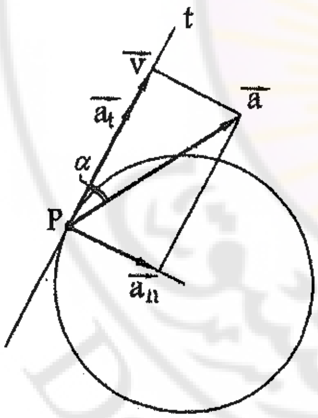
$$v = v_0 + a_t t$$

والانتقال يتعين بالمعادلة :

$$\boxed{S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2}$$

٤-١٦. مسائل محلولة على الحركة المنحنية للجزيئة :

مسألة ١ : تتحرك الجزيئة P على دائرة نصف قطرها 4m حسب المعادلة $S = 4.5t^3$ (S بالمتر و t بالثانية) ، والمطلوب حساب تسارع هذه الجزيئة، والزاوية بين شعاعي السرعة والتسارع في اللحظة التي تكون فيها السرعة مساوية 6m/sec (الشكل ٤-٢٧) .



الشكل (٤-٢٧)

الحل :

$$v = \frac{dS}{dt} = 13.5t^2 = 6 \Rightarrow t\sqrt{\frac{6}{13.5}} = \frac{2}{3} sec$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 27t = 27\frac{2}{3} = 18m/sec^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{36}{4} = 9m/sec$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5}m/sec^2$$

الزاوية بين شعاعي السرعة والتسارع :

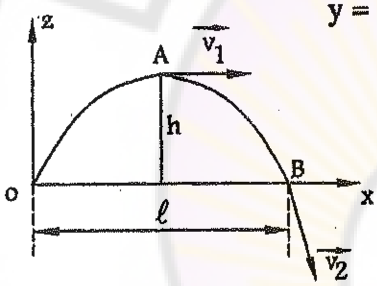
$$\cos\alpha = \frac{a_t}{a} = \frac{18}{9\sqrt{5}} = 0,89445 \Rightarrow \alpha = (26,56)^o$$

مسألة ٢ : تتعين حركة قذيفة بالمعادلتين التاليتين :

$$x = 400\sqrt{2}t$$

$$y = -5t^2 + 400\sqrt{2}t$$

حيث x,y بالمتر و t بالثانية . والمطلوب تعيين معادلة مسار هذه القذيفة، ومداها وأقصى ارتفاع لها، وكذلك سرعتها في أعلى نقطة من مسارها وعند اصطدامها بالأرض .



الشكل (٤-٢٨)

الحل :

من المعادلة الأولى $\Leftarrow$ $t = \frac{x}{400\sqrt{2}}$

نعوض في المعادلة الثانية :

$$y = -5\frac{x^2}{320000} + x = x - \frac{x^2}{64000}$$

وهي معادلة المسار (الشكل ٤-٢٨) .

تعيين نقاط تقاطع المسار مع المحور x .

$$0 = x - \frac{x^2}{64000} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 64000m \end{cases}$$

أي أن مدى القذيفة هو $L = 64Km$

تعيين الارتفاع الأعظمي h :

عندما $x = \frac{L}{2} = 32000 \Leftarrow y = h$

$$h = 32000 - \frac{(32000)^2}{64000} = 16000m = 16Km$$

تعيين السرعة :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 400\sqrt{2} \ \ m/sec$$

$$v_y - \frac{dy}{dt} = -10t + 400\sqrt{2} \ m/sec$$

السرعة $\vec{v}_1$ في أعلى نقطة من المسار (النقطة A) هي أفقية ، والمركبة الشاقولية v_y معدومة ، وبالتالي :

$$v_1 = v_x = 400\sqrt{2} \ \ m/sec$$

لتعيـــين v_2 (في النقطة B) نوجد الزمن اللازم لكي تصل القذيفة إلى هذه النقطة، لهذه الغاية نستخدم المعادلة الأولى .

$$x = 400\sqrt{2}t = 64000$$

$$t = 80\sqrt{2} \ scc$$

إذاً مركبتا السرعة v_2 هما :

$$v_x = 400\sqrt{2} \ m/sec$$

$$v_y = -10.89\sqrt{2} + 400\sqrt{2} = -400\sqrt{2} \ m/sec$$

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 800 \ m/sec$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{400\sqrt{2}}{800} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^o$$

$$\cos\beta = \frac{v_y}{v} = \frac{-400\sqrt{2}}{800} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135^o$$

مسألة ٣ : تتحرك جزيئة في الفراغ حسب المعادلات التالية :

$$x = 2\cos 4t \ ; \ y = 2\sin 4t \ ; \ z = 2t$$

حيث x,y,z بالمتر و t بالثانية . والمطلوب حساب السرعة والتسارع ونصف قطر الانحناء .

الحل :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -8\sin 4t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 8\cos 4t$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 2$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{64\sin^2 4t + 64\cos^2 4t + 4}$$

$$v = 2\sqrt{17} m/sec = const \Rightarrow a_t = 0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -32\cos 4t;$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -32\sin 4t$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-32\cos 4t)^2 + (-32\sin 4t)^2}$$

$$a = 32\ m/sec^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0 + a_n^2} \Rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a} = \frac{4.17}{32} = \frac{17}{8} m$$

مسألة ٤ : يتحرك قطار على طريق دائرية نصف قطرها 500m حركة متغيرة بانتظام، فتصل سرعته إلى 54 km/h في اللحظة t = 3 min . والمطلوب تعيين تسارعه في اللحظة t = 2min مع العلم أنه انطلق من حالة السكون ومن المبدأ .

الحل :

تعيين التسارع المماسي :

$$v = 54\frac{km}{h} = \frac{54000}{3600} = 15\ [m/sec]$$

$$v = a_t \cdot t = a_t = \frac{v}{t} = \frac{15}{180}$$

$$a_t = \frac{1}{12} m/sec^2 = const$$

التسارع الناظمي a_n في اللحظة $t = 120$ sec :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v = a_t \cdot t = \frac{1}{12} \cdot 120 = 10[m/sec]$$

$$a_n = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}[m/sec^2]$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = 0{,}217\ [m/sec^2]$$

مسألة ٥ : تعين الحركة المنحنية لجزيئة بمعادلتي الانتقال التاليتين :

$$x = v_o t\ ,\ y = \frac{1}{2} g t^2$$

حيث إن g و v_o ثابتتان ، والمطلوب تعيين ما يلي :

١- معادلة المسار .

٢- سرعة وتسارع الجزيئة .

٣- التسارع المماسي والناظمي .

٤- نصف قطر الانحناء .

الحل :

<u>معادلة المسار :</u>

$$t = \frac{x}{v_o} \Rightarrow y = \frac{g}{2v_o^2} x^2$$

<u>السرعة :</u>

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_o ; v_y = \frac{dy}{dt} = gt$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + g^2 t^2}$$

التسارع :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0; a_y = \frac{dv_y}{dt} = g$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g = const$$

التسارع المماسي :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_o^2 + g^2 t}} = \frac{g^2 t}{v}$$

التسارع الناظمي :

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 = a_n^2 = g = g^2 - \left(\frac{g^2 t}{v}\right)^2$$

$$a_n^2 = \frac{g^2}{v^2}\left(v^2 - g^2 t^2\right)$$

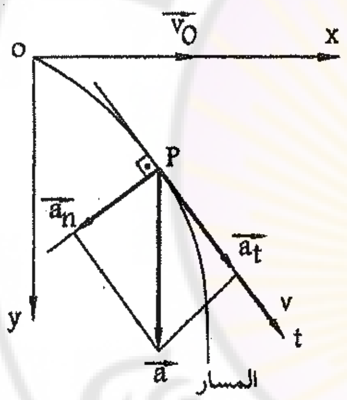
من معادلة السرعة نجد :

$$v^2 - g^2 t^2 = v_o^2$$

$$a_n^2 = \frac{g^2 v_o^2}{v^2} \Rightarrow a_n = \frac{g v_o}{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{g v_o}{v} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{v^3}{v_o g}$$



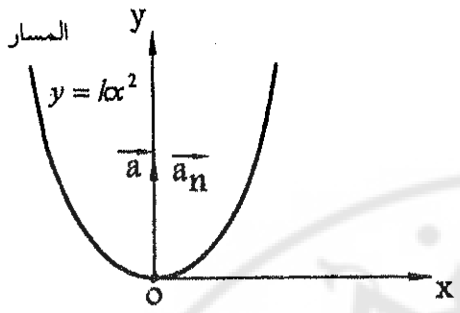
الشكل (٤-٢٩)

في لحظة البدء ($t = 0$) السرعة هي v_o ، ونصف قطر الانحناء الشكل (٤-٢٩) يساوي:

$$\rho = \frac{v_o^3}{v_o g} = \frac{v_o^2}{g}$$

مسألة ٦ : تتحرك جزيئة بسرعة عددية ثابتة (v) على مسار بشكل قطع مكافئ معادلته $y = k \cdot x^2$ (k ثابت) ، عين التسارع الأعظم لهذه الجزيئة .

الحل :



الشكل (٤-٣٠)

بمـــا أن : $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0 \Leftarrow v = const$

وينتج : $a = a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

ويكـون التسارع أعظمياً عندما يكون نصف قطر الانحناء ρ أصغرياً أي أن :

$$a_{max} = \frac{v^2}{\rho_{min}}$$

حساب ρ_{min}:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\ddot{y}|}{\sqrt{\left(1+\dot{y}^2\right)^3}}$$

$$\dot{y} = 2 \cdot k \cdot x \;;\; \ddot{y} = 2 \cdot k$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2 \cdot k}{\sqrt{\left[1+(2 \cdot k \cdot x)^2\right]^3}}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{\left[1+(2 \cdot k \cdot x)^2\right]^3}}{2 \cdot k}$$

من هذه العلاقة يتضح أنه إذا كان $x = 0$ بالتالي : ρ_{min} الشكل (٤-٣٠) وينتج :

$$\frac{1}{\rho_{min}} = 2 \cdot k$$

بالتعويض نحصل على :

$$a_{max} = 2 \cdot k \cdot v^2$$

٤-١٧. مسائل غير محلولة على الحركة المستقيمة والمنحنية للجزيئة :

مسألة ١ : أوجد معادلة الانتقال لجزيئة تقوم بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام تسارعها $-2m/sec^2$ ، ثم ادرس هذه الحركة مع العلم أن:

$$x_o = 6m \;\;;\;\; v_o = 4m/sec$$

مسألة ٢ : تقوم جزيئة بحركة مستقيمة حسب المعادلة التالية :

$$x = \frac{b}{k^2}\left(k \cdot t + e^{-k \cdot t}\right)$$

حيث إن b , k ثابتتان . عين السرعة في اللحظة $t = 0$. ثم احسب التسارع بدلالة السرعة .

الجواب : $v_o = 0 \;;\; a = b = -k \cdot v$

مسألة ٣ : يسقط حجر في بئر سقوطاً حراً ، فيسمع صوت اصطدامه بالماء بعد مضي 4sec من بدء سقوطه . احسب عمق البئر مع العلم أن سرعة الصوت 340 m/sec .

مسألة ٤ : تنطلق جزيئة من حالة السكون ، وتتحرك حركة مستقيمة متغيرة بانتظام بسرعة 40 m/sec ، فأصبحت سرعتها 60 m/sec بعد أن قطعت مسافة 250m . احسب الزمن الذي استغرقته في قطع هذه المسافة، وتسارعه في هذا الزمن .

مسألة ٥ : يتحرك قطار على سكة مستقيمة، ثم يحاول الوقوف ، فتتناقص سرعته بانتظام من 45 mi/h إلى 15 mi/h ، ويقطع خلال هذه الفترة مسافة 440 ft . احسب المسافة التي يقطعها بعد ذلك حتى توقفه .

مسألة ٦ : قذف جسم شاقولياً إلى أعلى بسرعة 96 ft/sec . أوجد الارتفاع الأعظمي الذي يصل إليه هذا الجسم، وزمن عودته إلى مكان القذف .

مسألة ٧ : تتحرك جزيئة على المحور x بتسارع معادلته :

$$a - 2 - 6t\,m/sec^2$$

أوجد معادلة حركة هذه الجزيئة إذا علمت أن : $v_o = -1m/sec;\; x_o = 1m$

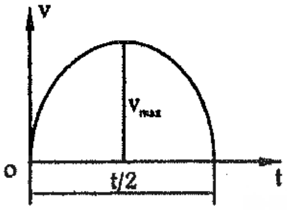
مسألة ٨ : تتحرك جزيئة على المحور x حسب المعادلة :

$$x = 4\cos 2t$$

حيث x بالمتر و t بالثانية .

أوجد معادلتي السرعة والتسارع ومقدار كل منهما في اللحظة $t = \frac{\pi}{4}$.

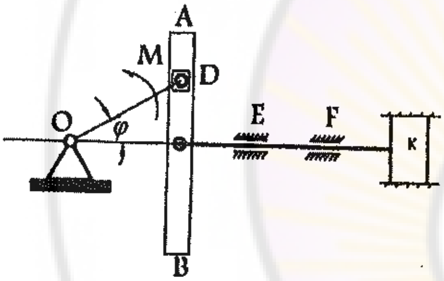
مســـألة ٩ : يمـــثل المنحنـــي المبـــين بالشـــكل (٤-٣١) مخطط السرعة والزمن لحـــركة مســـتقيمة لجـــزيئة، فإذا كان هذا المنحنـــي قطعـــاً مكافئاً ، فالمطلوب تعيين معادلته، ثم حســـاب المســـافة التي تقطعها الجزيئة خلال الفترة الزمنية $\frac{t}{2}$.



الشكل (٤-٣١)

الجواب : $x = \frac{v_{max}\tau}{3}$ $v = -\frac{16 v_{max} \cdot t^2}{\tau^2} + \frac{r v_{max} \cdot t}{\tau}$

مســـألة ١٠ : يتصل الإطار AB مع القضيب EF اتصالاً صلداً ، ويتحرك القضيب EF في المسندين E,F كما في الشكل (٤-٣٢) . وفي الإطار AB مجرى تنزلق فيه الزلاقة D` ، وهذه الزلاقة تتصل مفصلياً مع المرفق CD الذي يدور بانتظام حول النقطة C ، والزاوية φ تتغير وفق المعادلة $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، والمطلوب تعيين معادلة حركة الإطار AB مع العلم أن طول المرفق CD يساوي 250 mm .



الشكل (٤-٣٢)

الجواب : $S = 250\cos\frac{\pi}{6}t$

مسألة ١١: بفـــرض في الشكل (٤-٣٢) أن طول المرفق CD يساوي 10cm وأنه يدور بســـرعة زاويـــة مقدارها $\omega = 4\pi[1/sec]$ ، والمطلوب حساب السرعة العظمى والتسارع الأعظم للمكبس K المتصل بشكل صلد بالقضيب EF .

الجواب :

$$\left|\dot{x}_{max}\right| = 40\pi \ \frac{cm}{sec}$$

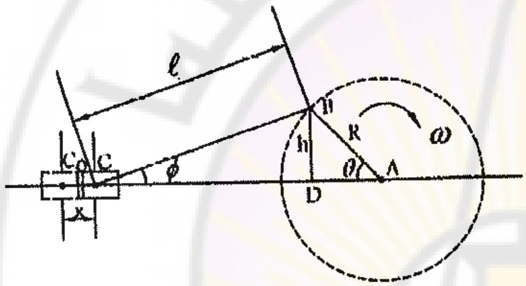
$$\left|\ddot{x}_{max}\right| = 160\pi^2 \ \frac{cm}{sec^2}$$

مسألة ١٢ : تتحرك جزيئة على خط شاقولي بتسارع $a = 2\sqrt{v}$ وفي اللحظة $t = 2\ sec$ كـــان انتقالها $S = \frac{64}{3} m$ وسرعتها $v = 16\ m/sec$. أوجد معادلات انتقال هذه الجزيئة وسرعتها وتسارعها.

الجواب : $S = \frac{1}{3}(t+2)^3,\ v = (t+2)^2\ ,\ a = 2(t+2)$

مسألة ١٣ : تتحرك جزيئة بتسارع $(a = 12t - 20)$ ، وفي اللحظة $t = 0$ كان انتقالها $10m$ ، وفي اللحظة $t = 5sec$ أصبح $-10m$. أوجد معادلة هذه الحركة .

الجواب : $S = 2t^3 - 10t^2 - 4t + 10$



الشكل (٤-٣٣)

مســـألة ١٤ : لديـــنا الآلية المبينة في الشكل (٤-٣٣) والمطلوب :

إيجـــاد معـــادلات الانـــتقال والســـرعة والتسارع للمكبس C مع العلم أن المرفق AB يدور بسرعة زاوية ثابتة (ω) .

الجواب :

$$x = R(1 - \cos\theta) + \left(\frac{R^2}{2l}\right)\sin^2\theta$$

مسألة ١٥ : تتحرك جزيئة حركة نوسية بسيطة دورها $8\ sec$، وسعتها $4\ m$ ، والمطلوب حســـاب القيمة العظمى للسرعة والزمن الموافق لها ، وما هي سرعتها عندما تكون على بعد $2\ m$ من مركز النوسان .

مســـألة ١٦ : يتدحـــرج قرص اسطواني الشكل نصف قطره r دون انزلاق على المحور الأفقي x بسرعة ثابتة v_0 ، أوجد معادلة النقطة P من محيطه مع العلم أنها كانت في اللحظة $t = 0$ في المبدأ O .

الجواب : $x = v_0 \cdot t - r\sin\frac{v_0 \cdot t}{r}\ ,\ y = r - r\cos\frac{v_0 \cdot t}{r}$

مسألة ١٧ : تتحرك جزيئة حسب المعادلتين التاليتين :

$$x = 2t \quad ; \quad y = 3t^2 - 5t$$

والمطلوب إيجاد معادلة المسار، ثم تعيين السرعة والتسارع .

مسألة ١٨ : أعد المسألة السابقة من أجل المعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{2b}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{2ct}{1+t^2}$$

حيث b,c ثابتتان .

مسألة ١٩ : تتحرك جزيئة وفق المعادلتين التاليتين :

$$x = 8t - 4t^2 \quad ; \quad y = 6t - 3t^2$$

حيث x,y بالمتر و t بالثانية . عين معادلة المسار والسرعة والتسارع .

الجواب :

$$y = \frac{3}{4}x \ , \ v = 10 - 10t \ , \ a = 10 \text{ m/sec}$$

مسألة ٢٠ : تتعين حركة جزيئة بالمعادلتين التاليتين:

$$x = 2t^2 + 2 \quad ; \quad y = 1{,}5t^2 + 1$$

حيث إن x , y بالسنتيمتر والزمن بالثانية . عين مسار الحركة، وسرعة الجزيئة وتسارعها وانتقالها.

الجواب :

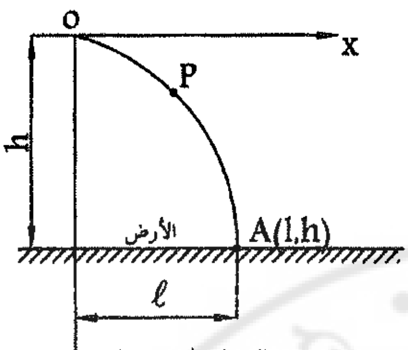
$$3x - 4y = 2 \ , \ v = 5t$$
$$a = 5\text{m/sec}^2 \ , \ S = 2{,}5t^2$$

مسألة ٢١ : تعيين سرعة جزيئة بالمعادلتين التاليتين :

$$v_x = 20t + 5 \quad ; \quad v_y = t^2 - 20$$

عين انتقال هذه الجزيئة وسرعتها وتسارعها في اللحظة t = 2sec مع العلم أن :

$$x_o = 5\text{m} \quad ; \quad y_o = -15\text{m}$$



الشكل (٤-٣٤)

مسألة ٢٢ : تتعين حركة جسم قذف من طائرة من ارتفاع $h = 320m$ (الشكل ٤-٣٤) بالمعادلتين التاليتين :

$$x = 60t \quad ; \quad y = 5t^2$$

حيث إن x,y بالمتر و t الزمن بالثانية . أوجد مسار الجزيئة ومداها ℓ وزمن السقوط t .

الجواب :

$$y = \frac{1}{720}x^2, \quad t = 8\sec, \quad \ell = 480m$$

مسألة ٢٣ : أوجد حسب شروط المسألة السابقة سرعة الجسم وتسارعه في لحظة السقوط، وكذلك نصف قطر انحناء المسار في نقطة السقوط .

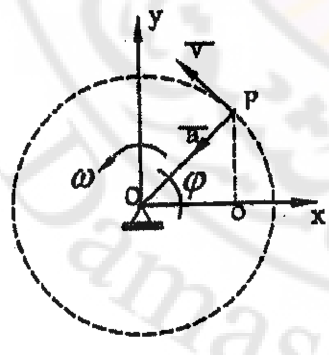
الجواب :

$$v = 100 \ m/sec$$
$$a_x = 0 \ , \ a_y = 10 \ m/sec^2$$
$$a = 10m/sec^2, a_n = \frac{60}{\sqrt{36 + t^2}}$$
$$\rho = 1667m$$

مسألة ٢٤ : تدور الجزيئة P بانتظام حول المركز O (الشكل ٤-٣٥) ، اكتب معادلتي الانتقال x,y لهذه الجزيئة، ثم عين سرعتها وتسارعها إذا علمت أن OP = r ، وأن زاوية الدوران : $\varphi = \omega \cdot t$.

الجواب :

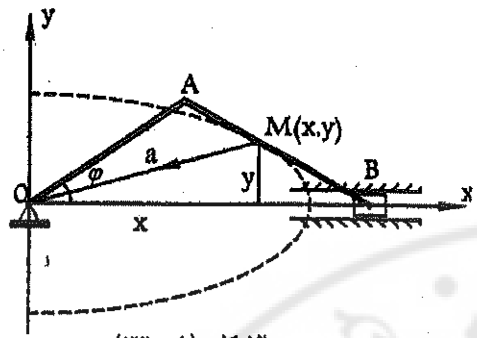
$$x = r\cos\omega t \, , y = r\sin\omega t$$
$$v = \omega r, \ a = r\omega^2$$



الشكل (٤-٣٥)

مسألة ٢٥ : لدينا الآلية المبينة في الشكل (٤-٣٦) والمطلوب تعيين معادلات المسار والسرعة والتسارع للنقطة M (منتصف AB) مع العلم أن:

$$OA = AB = 2r\,,\ \varphi = \omega t$$



الشكل (٤-٣٦)

الجواب :

$$v = \omega r\sqrt{9\sin^2 \omega t + \cos \omega t}$$

$$\frac{x^2}{9r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$a = \omega^2 r$$

مسألة ٢٦ : أوجد معادلة المسار لجزيئة تتحرك حسب المعادلة الشعاعية التالية :

$$\vec{r} = (\cos 2t)\vec{i} + (\sin t)\vec{k}$$

الجواب :

$$x = 1 - 2z^2\,;\ \ y = 0\ \ ;\ \ -1 \le x \le 1$$

مسألة ٢٧ : أعد المسألة السابقة من أجل المعادلة :

$$\vec{r} = (2+3t)\vec{i} + (1-2t)\vec{j} + (2+t)\vec{k}$$

الجواب :

$$2 \le x \le \infty\ ;\ \ \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$$

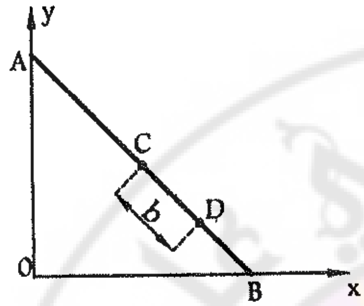
مسألة ٢٨ : تتحرك جزيئة حسب المعادلة الشعاعية التالية :

$$\vec{r} = (20t)\vec{i} + \left(12t - 5t^2\right)\vec{j}$$

حيث إن r بالمتر ، و t بالثانية . أوجد معادلة المسار والسرعة والتسارع في اللحظة t = 0.

مسألة ٢٩ : في اللحظة $t = 0$ يبدأ قطار بالتحرك على قوس دائرية حركة متسارعة بانتظام، فتبلغ سرعته $15\ mi/h$ في اللحظة $t = 60\ sec$. احسب التسارع المماسي والناظمي في اللحظة $t = 30\ sec$.

مسألة ٣٠ : AB قضيب تتحرك نهايته A على المحور y ونهايته B على المحور x (الشكل ٤-٣٧) . برهن أن منتصفه C يرسم دائرة مركزها O ونصف قطرها r حيث إن $AB = 2\ell$



الشكل (٤-٣٧)

مسألة ٣١ : برهن حسب شروط المسألة السابقة أن أية نقطة متوسطة من القضيب AB مثل D ترسم قطعاً ناقصاً قطره الكبير $(\ell + b)$ والصغير $(\ell - b)$.

مسألة ٣٢ : AB قضيب طوله $10\ ft$ (الشكل ٤-٣٧) ، تتحرك نهايته A على جدار شاقولي oy بسرعة ثابتة مقدارها $5\ ft/sec$ نحو الجدار . أوجد سرعة هذا القضيب وتسارعه عندما يميل على الجدار بزاوية 30^o .

مسألة ٣٣ : تتعين حركة جزيئة بالمعادلتين التاليتين :

$$x = v_o t \ ; \ y = h \cos \frac{2\pi v_o t}{l}$$

أوجد معادلة المسار ثم احسب التسارع الناظمي الأعظم لهذه الجزيئة . يعطى :

$$v_o = 1ft/sec \ ; \ l = 10ft \ ; \ h - 1ft$$

الجواب : $(a_{max}) = 4\pi^2\ ft/sec^2$

مسألة ٣٤ : تتعين حركة جزيئة بالمعادلات التالية :

$$x = b\sin\omega t \ ; \ y = b\cos\omega t \ ; \ z = ct$$

حيث b,c,ω ثوابت ، و x,y,z بالمتر و t بالثانية .

عيّن مسار هذه الجزيئة وسرعتها وتسارعها، ثم احسب نصف قطر انحناء المسار .

مسألة ٣٥ : تتعين حركة جزيئة بالمعادلات التالية :

$$x = e^t \cos t \quad ; \quad y = e^t \sin t \quad ; \quad z = e^t$$

أوجد نصف قطر انحناء المسار .

الجواب : $\rho = \frac{3}{2}\sqrt{2}e^t$

مسألة ٣٦ : تتعين حركة جزيئة بالمعادلات التالية :

$$x = r\cos t^2 \quad ; \quad y = r\sin t^2 \quad ; \quad z = bt^2$$

حيث إن r,b ثابتتان . عين سرعة هذه الجزيئة وتسارعها.

الجواب :

$$v = 2t\sqrt{r^2 + b^2} \quad ; \quad a = 2\sqrt{r^2\left(4t^4 + 1\right) + b^2}$$

مسألة ٣٧ : احسب التسارع المماسي والناظمي، وكذلك نصف قطر انحناء المسار للجزيئة حسب شروط المسألة السابقة .

الجواب :

$$a_t = 2\sqrt{r^2 + b^2} \; ; \; a_n = 4rt^2$$

$$\rho = r + \frac{b^2}{r}$$

مسألة ٣٨ : تتعين حركة جزيئة بالمعادلات التالية :

$$x = \frac{1}{3}t^3 \quad ; \quad y = -2t^2 \quad ; \quad z = 6$$

عيّن تسارع هذه الجزيئة في اللحظة التي تساوي فيها السرعة 15 m/sec.

☆ ☆ ☆

الفصل الخامس

الدراسة التحريكية للانسحاب المستقيم والمنحني

٥-١. مبادئ علم التحريك (قوانين نيوتن) :

يبحث علم التحريك في العلاقة بين القوة المطبقة على الجسم والحركة التي تسببها هذه القوة ، أي في العلاقة بين القوة والتسارع الذي تسببه . ويعتمد هذا البحث على القوانين التي وضعها غاليليو ونيوتن والتي تسمى مبادئ علم التحريك أو قوانين نيوتن . وكما ذكرنا سابقاً يمكن تطبيق نتائج دراسة تحريك الجزيئة على الحركة الانسحابية للجسم الصلد ، لأن جميع جزيئاته تقوم بنفس الحركة ويمكن اعتباره جزيئة متمركزة في مركز ثقله . وفيما يلي شرح موجز لهذه القوانين .

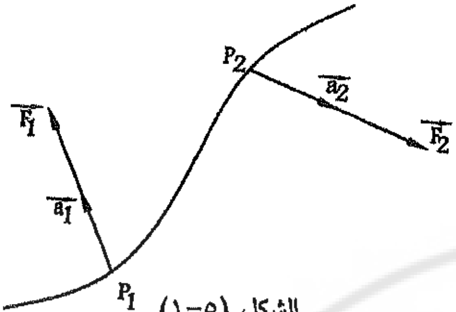
القانون الأول ـ مبدأ العطالة :

وينص هذا القانون على أن كل جسم يبقى في حالته التي هو عليها سواء كان ساكناً أم متحركاً حركة منتظمة ما لم تطبق عليه قوة تغير من حالته هذه. أي أن ظهور التسارع ينشأ عن تطبيق قوة على الجسم .

إذا تحرك جسم ما على مستوٍ أفقي ، فإن سرعته تتناقص تدريجياً حتى يقف ، وقد أدرك غاليليو أن التغير في السرعة ينتج عن تأثير قوى الاحتكاك ومقاومة الهواء ، وكلما كانت هذه القوى صغيرة كلما اقتربت حركة الجسم من الحركة المنتظمة ، وعند زوال هذه العوائق فإن الجسم يتحرك بسرعة ثابتة على خط مستقيم .

القانون الثاني ـ العلاقة بين القوة والتسارع (القانون الأساسي في التحريك):

إذا طبقت قوة على جزيئة في لحظة زمنية معينة ، فإن هذه الجزيئة تكتسب تسارعاً له نفس حامل وجهة القوة ومقداره يتناسب مع مقدارها .



الشكل (٥-١)

يمثل الشكل (٥-١) الأوضاع المختلفة للجزيئة في اللحظات الزمنية $(P_1, P_2, ...)$ على الترتيب ، وكذلك التسارع $(t_1, t_2, ...)$ المكتسب في كل لحظة من هذه اللحظات بوساطة القوة المتغيرة $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...)$. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...)$

لقد أجرى غاليليو تجاربه على الأجسام التي تسقط سقوطاً حراً ، واستخدم المستوي المائل الصقيل لإنقاص سرعة الجسم الساقط ولقياس الفترات الزمنية القصيرة ، وتبين له أن التسارع للأجسام التي تسقط سقوطاً حراً مستقل عن طبيعة مادة الجسم عندما نهمل المقاومات المختلفة ، فجميع الأجسام التي تسقط بفعل الثقالة تتسارع بنفس التسارع g الذي يساوي وسطياً $9{,}8\,m/sec^2$ ، ووجد أن العلاقة بين التسارع $\vec{a}$ للجسم الذي يتحرك على مستوٍ مائل أملس وبين التسارع الأرضي $\vec{g}$ هي:

$$a = g \cdot \sin\alpha$$

حيث إن α هي زاوية المستوي المائل (الشكل ٥-٢) . من هذه العلاقة يتضح أنه :

١- إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftarrow a = g$ ، والجسم يسقط سقوطاً حراً .

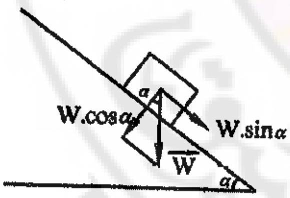
٢- إذا كانت $\alpha = 0 \Leftarrow a = 0$ ، والجسم يتحرك حركة منتظمة .

عندما يتحرك الجسم على المستوي المائل (الشكل ٥-٢) ، فإن القوة التي تسبب الحركة هي المركبة $W^{`}$ التي تساوي :

$$W^{`} = W \cdot \sin\alpha$$

من هذه العلاقة والعلاقة السابقة ينتج :

$$\sin\alpha = \frac{a}{g} = \frac{W^{`}}{W}$$



الشكل (٥-٢)

بما أن $W = const$ و $g = const$ فإن التسارع $\vec{a}$ يتناسب مع القوة $\vec{W}^{`}$ التي تسبب الحركة ، أي إذا كانت الجزيئة خاضعة لقوة الثقالة $\vec{W}$ فقط ، فيتولد فيها التسارع $\vec{g}$ ، وإذا كانت خاضعة للقوة $\vec{F}$ فيتولد فيها التسارع $\vec{a}$ الذي له نفس حامل وجهة القوة ، وتتحقق العلاقة التالية :

$$\frac{a}{g}=\frac{F}{W}$$

إذا رمزنا لكتلة الجزيئة بـ m ، فيمكن أن نكتب :

$$\boxed{\vec{F}=\frac{W}{g}\cdot\vec{a}=m\cdot\vec{a}}$$

ويسمى هذا القانون بقانون التحريك الأساسي .

نتائج :

١- إذا كانت القوى المطبقة على الجزيئة في الفترات الزمنية $(t_1, t_2, ...)$ هي على الترتيب $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...)$ فإن التسارعات المكتسبة على التوالي هي $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...)$ وتتحقق حسب قانون التحريك الأساسي العلاقة التالية :

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=....=\frac{F_n}{a_n}=\frac{W}{g}=m=const$$

٢- إذا طبقت على الجزيئة في لحظة معينة t جملة القوى $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ المتلاقية في النقطة P ، وكانت هذه الجملة تكسب الجزيئة التسارعات $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ فيما لو طُبقت عليها كل قوة على انفراد ، فإن حاصلة جملة القوى المفروضة $\vec{R}$ تكسب الجزيئة التسارع $\vec{a}$ الذي يساوي المجموع الهندسي للتسارعات المذكورة ، ويكون لهذا التسارع حامل الحاصلة $\vec{R}$ وجهتها نفسها ، ومقداره يتناسب مع مقدارها. ويأخذ قانون التحريك الشكل التالي :

$$\boxed{\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=m\cdot\vec{a}=m\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i}$$

٣- إذا انعدمت الحاصلة $\vec{R}$ فإن الجزيئة تبقى ساكنة إذا كانت في الأصل ساكنة ، أو تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بسرعة تساوي السرعة في لحظة انعدام الحاصلة .

٤- يبتع نوع مسار حركة الجزيئة، وسرعتها إلى القوى المطبقة عليها وشروط بدء الحركة (الموضع الأولي والسرعة الأولية) .

القانون الثالث ـ الفعل ورد الفعل :

لكل فعل رد فعل يساويه بالمقدار، ويعاكسه بالاتجاه .

يعـدّ قانــون التحريك الأساسي من القوانين الهامة جداً في علم الديناميك ، ويطبق عادةً باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : طريقة المعادلات التفاضلية .

الطريقة الأولى : طريقة التوازن الديناميكي (مبدأ دالامبير) .

أولاً – المعادلات التفاضلية لتحريك الجزيئة

٥-٢. تركيب المعادلات التفاضلية لتحريك الجزيئة :

بفـرض أن $\vec{R}(x,y,z)$ تمثل حاصلة القوى المطبقة على الجزيئة وأن $\vec{a}(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$ هو تسارع الجزيئة الناتج عن هذه الحاصلة فإن :

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a} \;,\; \vec{R} - m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

فـإذا أسـقطنا قانون التحريك على المحاور الإحداثية فإننا نحصل على جملة المعادلات التالية التي تسمى بالمعادلات التفاضلية للحركة المنحنية للجزيئة في الفراغ :

$X = m \cdot \ddot{x} = \frac{W}{g}\frac{d^2\dot{x}}{dt^2}$
$Y = m \cdot \ddot{y} = \frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$
$Z = m \cdot \ddot{z} = \frac{W}{g}\frac{d^2z}{dt^2}$

وعندما تكون حركة الجزيئة تقع في أحد المستويات الإحداثية وليكن المستوي xy, ، فإن الحركة تسمى مستوية، وتكون المعادلات التفاضلية التي تصف هذه الحركة هي :

$X = m \cdot \ddot{x} = \frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}$	$Y = m \cdot \ddot{y} = \frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$

وإذا كانت حركة الجزيئة مستقيمة، وتتم مثلاً على المحور x فإن المعادلة التفاضلية التي تصف هذه الحركة هي :

$$\boxed{X = m \cdot \ddot{x} = \frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

يمكـــن أن نكـــتب المعادلات التفاضلية لحركة الجزيئة بالنسبة لأية جملة محاور إحداثية مناسبة كما يمكن استخدام جملة المحورين المتعامدين المماس والناظم (t,n) ، ومسقطا التسارع $\vec{a}$ عليهما :

التسارع المماسي : $\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$ ، التسارع الناظمي : $\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$

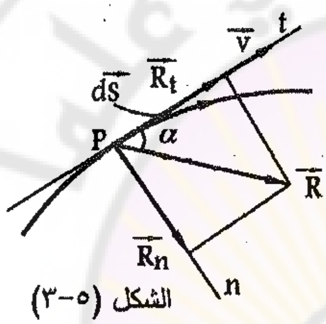
ومسقط الحاصلة $\vec{R}$ عليهما هما R_t , R_n . الشكل (٥-٣) وبإسقاط قانون التحريك الأساسي عليهما نحصل على :

$R_n = m \cdot a_n$	$R_t = m \cdot a_t$

حيث :

R_t : المركبة المماسية للقوة الحاصلة .

R_n : المركبة الناظمية للقوة الحاصلة .



الشكل (٥-٣)

٥-٣. استخدام المعادلات التفاضلية لتحريك الجزيئة :

تستخدم المعادلات التفاضلية لتحريك الجزيئة في حل النوعين التاليين من المسائل :

- **النوع الأول :**

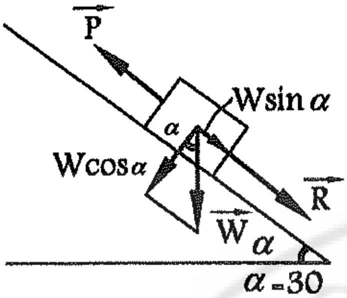
كـــتلة الجزيئة وحركتها (انتقالها، أو سرعتها، أو تسارعها) معلومتان، ويطلب تعيين القوة الحاصلة التي تسبب الحركة .

- **النوع الثاني :**

كـــتلة الجـــزيئة والقـــوة الحاصـــلة التـــي تسبب الحركة معلومتان، وكذلك الشروط الأولية (v_0 , x_0) معلومة ويطلب تعيين قانون الحركة (الانتقال أو السرعة أو التسارع).

وســـندرس فـــي الفقرات المقبلة بعض الحالات الخاصة للحركة المستقيمة كالحالة التي تكون فـــيها القـــوة ثابتة (بالمقدار والاتجاه) والحالة التي تكون فيها القوة تابعة للزمن أو لانتقال الجزيئة أو لسرعتها .

٥-٤. مسائل محلولة على النوع الأول :



الشكل (٥-٤)

مسألة ١ : تصعد آلية وزنها 5tf على مستو مائل بحركة منتظمة (الشكل ٥-٤)، فإذا كانت القوة المقاومة للهواء وللاحتكاك $R = 10\dfrac{kgf}{tf}$ فأوجد القوة المحركة للآلية .

الحل :

القوة المحركة :

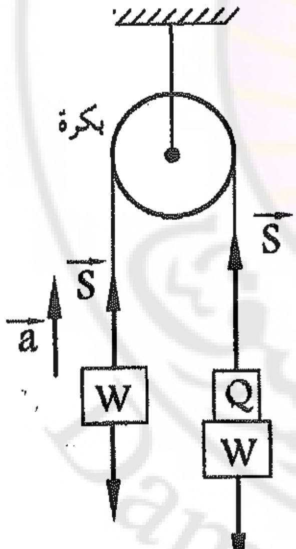
$$P = R + W\sin\alpha$$

$$R = 10\cdot 5 = 50kgf$$

$$P = 50 + 5000\cdot\frac{1}{2} = 2550kgf$$

مسألة ٢ : لدينا جملة الأثقال المبينة في الشكل (٥-٥) وقد تحركت بتسارع ثابت $\vec{a}$ كما هو مبين في الرسم .

احسب مقدار الثقل Q علماً أن W معلوم ، وأن الاحتكاك في البكرة مهمل .



الشكل (٥-٥)

الحل :

المعادلة التفاضلية : $Y = \dfrac{W}{g}\ddot{y}$

للقسم الأيسر : $S - W = \dfrac{W}{g}a$

للقسم الأيمن : $W + Q - S = \dfrac{W+Q}{g}a$

بالجمع والاختصار ينتج :

$$Q = 2\frac{W}{g}a + \frac{Q}{g}a \Rightarrow Q = \frac{2Wa}{g-a}$$

مســألة ٣ : طبقت على جسم ساكن كتلته $m=1kg$ قوة ثابتة فأحدثت فيه سرعة مقدارها $5\ m/sec$ بعد مضي $20\ sec$، احسب مقدار القوة هذه

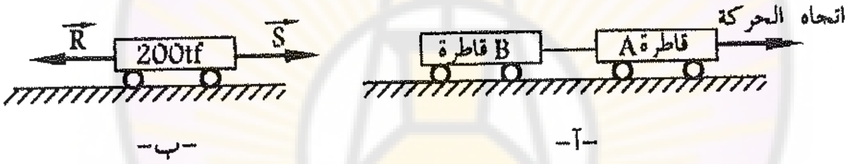
الحل :

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$5 = a \cdot 20 \Rightarrow a = \frac{1}{4} m/sec^2$$

$$F = m \cdot a = 1 \cdot 0{,}25 = \frac{1}{4} N = \frac{1}{4} \cdot 0{,}102 = 0{,}0255kgf$$

مسألة ٤ : تسير آلية مؤلفة من قاطرة ومقطورة على أرض مستقيمة أفقية الشكل (٥-٦-أ) حركة متغيرة بانتظام ، فتبلغ سرعتها $54\ km/h$ في اللحظة $t = 60sec$. احسب التوتر في سلك الربط AB إذا كان وزن المقطورة 200tf ، ومقاومة الهواء والاحتكاك تساوي 1/200 من وزن المقطورة .



الشكل (٥-٦)

الحل :

$$v = 54km/h = \frac{54000}{3600} = 15m/sec$$

$$v = a \cdot t = 15 = a \cdot 60 \Rightarrow a = 0{,}25m/sec^2$$

القوة المقاومة من الشكل (٥-٦- ب) :

$$R = \frac{1}{200} \cdot 200 = 1tf$$

المعادلة التفاضلية :

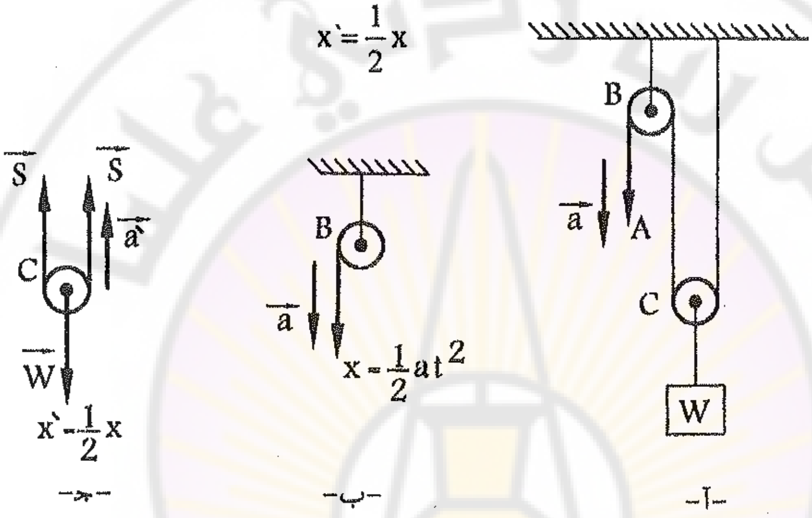
$$X = \frac{W}{g} \ddot{x}$$

مسألة ٥ : يعلق الثقل W في مستوٍ شاقولي بخيط وبكرتين كما في الشكل (٥-٧-أ)، وتسحب نهايته A نحو الأسفل بتسارع ثابت $\vec{a}$. احسب التوتر في الخيط بفرض أن الاحتكاك مهمل ، يعطى :

$$W = 1000kgf \ , \ a = 6m/sec^2$$

الحل :

من الشكلين (٥-٧-ب-ج) يتضح أن :



الشكل (٥-٧)

وبما أن الحركتين متغيرتان بانتظام (a = const) فينتج .

$$\frac{1}{2}a't^2 = \frac{1}{4}at^2 \Rightarrow a' = \frac{1}{2}a = 3m/sec^2$$

المعادلة التفاضلية للبكرة C :

$$Y = \frac{W}{g}\ddot{y} \Rightarrow 2S - W = \frac{W}{g}a$$

$$2S - 1000 = \frac{1000}{9,8} \cdot 3$$

$$\Rightarrow S = 653kgf$$

مسألة ٦ : تتحرك جزيئة كتلتها 3 kg على مسار منحنٍ حسب القانون $S = 8\sin\frac{t}{2}$ (S بالمتر و t بالثانية) .عيّن القوة المطبقة عليها في اللحظة التي تصبح فيها سرعتها 2m/sec علماً بأن نصف قطر الانحناء في هذه اللحظة يساوي 2m .

الحل :

$$v = \frac{dS}{dt} = 4\cos\frac{t}{2} = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3}\pi$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -2\sin\frac{t}{2} = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}\left[\frac{m}{sec^2}\right]$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{2} = 2\left[m/sec^2\right]$$

$$R_n = m \cdot a_n = 3 \cdot 2 = 6[N]$$

$$R_t = m \cdot a_t = 3\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3}[N]$$

$$F = \sqrt{R_t^2 + R_n^2} = \sqrt{27+36} = 7,94[N]$$

مسألة ٧: ترسم كرة النواس المخروطي المبين بالشكل (٥-٨) دائرة أفقية معينة بالمعادلتين التاليتين :

$$x = r\cos\omega t$$
$$y = r\sin\omega t$$

حيث إن ω مقدار ثابت .

عين التوتر في الخيط .

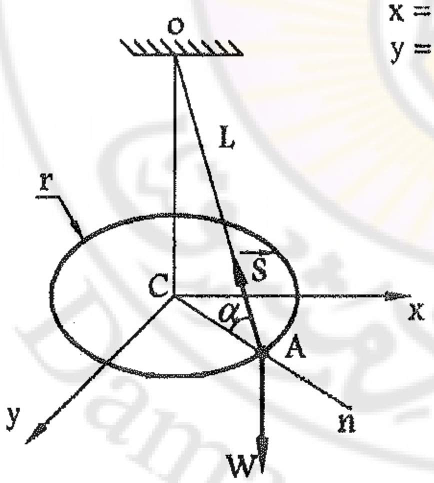
الحل :

$$v_x = \dot{x} = -\omega r\sin\omega t$$

$$v_y = \dot{y} = \omega r\cos\omega t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$



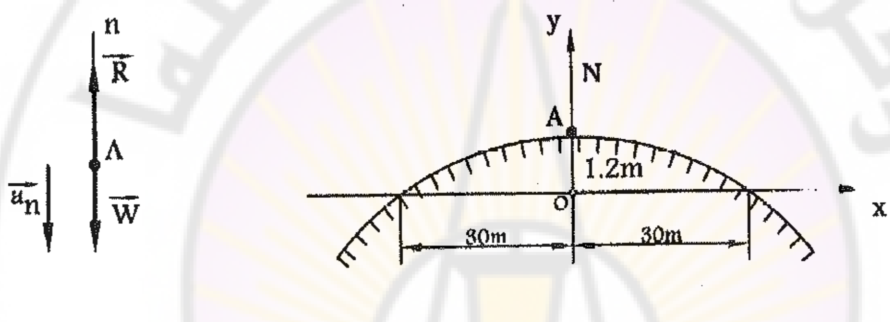
الشكل (٥-٨)

المعادلة التفاضلية بالنسبة للناظم n :

$$R_n = \frac{W}{g} a_n \Rightarrow S\cos\alpha = \frac{W}{g}\cdot\omega^2 r = S\frac{r}{\ell}$$

$$S = \frac{W}{g}\omega^2 \ell$$

مسألة ٨ : تتحرك الآلية A على قطع مكافئ يقع في مستوي الرسم الشكل (٥-٩-أ) بسرعة عددية ثابتة v . احسب الضغط الكلي R الذي تحدثه الآلية على الطريق عند مرورها بذروة القطع مع العلم أن سرعتها $96.5\frac{km}{h}$ ووزنها W .



ب -آ- الشكل(٥-٩)

الحل :

نعيّن معادلة القطع :

$$y = -ax^2 + bx + C$$

$$x = 0\ ,\ \ y = 1{,}2\ \Rightarrow C = 1{,}2$$

$$x = 30\ \ ,\ y = 0\ \Rightarrow 0 = -900a + 30b + 1{,}2$$

$$x = -30\ ,\ y = 0\ \Rightarrow 0 = -900a - 30b + 1{,}2$$

بالجمع ينتج : $1800a = 2{,}4$

$$a = \frac{1}{750}\ ,\ b = 0$$

$$y = -\frac{x^2}{750} + 1{,}2$$

$$v = 96,5\frac{1000}{3600} = 26,8\,m/sec$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}$$

$$y' = -x\frac{x}{375} \ , \ y'' = \frac{-1}{375}$$

عندما تمر الآلية من الذروة يصبح $x = 0 \ , \ y' = 0$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{375} \ , \ a_n = \frac{26,8^2}{375} = 1,915\,m/sec^2$$

المعادلة التفاضلية بالنسبة للناظم n :

$$R_n = \frac{W}{g}a_n = W - R = \frac{W}{g}\cdot 1,915 = \frac{W}{0,8}\cdot 1,915$$

$$R = W - 0,195W = 0,8W$$

٥-٥. مسائل غير محلولة على النوع الأول :

مسألة ١ : تنحدر آلية وزنها 4tf بحركة منتظمة على مستو مائل زاويته 30^o ، احسب قوة مكبح هذه الآلية المستخدم لإبقاء الحركة منتظمة مع العلم أن المحرك متوقف عن العمل وأن مجموع مقاومتي الهواء والاحتكاك يساوي 120kgf .

مسألة ٢ : طبقت على جسم كتلته 196kg قوة ثابتة فأحدثت فيه تسارعاً مقداره $1m/sec^2$، احسب مقدار هذه القوة .

مسألة ٣ : تسير سيارة كتلتها 3000kg بسرعة 25m/sec ، ما هي قوة مكبحها حتى نتمكن من إيقافها بعد مضي 12sec مع العلم أن بقية المقاومات مهملة .

مسألة ٤ : يتحرك جسم كتلته 10kg على مستو أفقي أملس تحت فعل قوة أفقية $\vec{P}$ حسب المعادلة التالية : $S = 4t + 2t^2$

حيث إن S بالمتر و t بالثانية . عين مقدار هذه القوة بالنيوتن وبالكيلو غرام ثقلي .

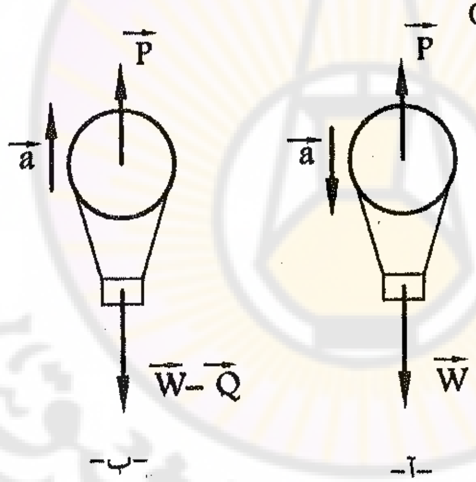
مسألة ٥ : تتحرك جزيئة كتلتها 0.8kg على خط مستقيم حسب المعادلة التالية :

$$x = 16\sin\frac{t}{2}$$

حيث إن x بالسنتمتر و t بالثانية . أوجد القوة المطبقة على هذه الجزيئة .

مسألة ٦ : يهبط منطاد وزنه الكلي W هبوطاً شاقولياً بتسارع ثابت $\vec{a}$ (الشكل ٥-١٠-أ). عيّن الثقل الموازن Q الذي يجب إلقاؤه من المنطاد حتى يتحرك إلى أعلى بتسارع $\vec{a}$ (الشكل ٥-١٠-ب) . تهمل مقاومة الهواء .

الجواب : $Q = \frac{2W \cdot a}{a+g}$



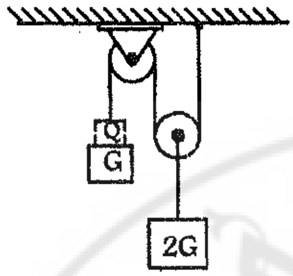
الشكل (٥-١٠)

مسألة ٧ : يبدأ مصعد وزنه 600kgf بالصعود بتسارع ثابت ، فيكتسب سرعة مقدارها 1,8m/sec بعد أن يقطع مسافة 1,8m احسب قوة الشد في الحبل الذي يحمل المصعد خلال هذه الحركة المتسارعة . يهمل الاحتكاك .

الجواب : $S = 655,1kgf$

مسألة ٨ : يُحمل الثقلان G , $2G$ في مستوٍ جبهي بخيط وبكرتين كما في الشكل (٥-١١) . احسب مقدار الثقل Q الذي يجب تطبيقه على الثقل G ليكتسب هذا الثقل تسارعاً a نحو الأسفل مساوياً $0,1g$ ، يهمل الاحتكاك وعطالة البكرتين .

الجواب : $Q = \frac{G}{6}$



الشكل (٥-١١)

مسألة ٩ : يهبط مصعد وزنه $280kgf$ ، ويقطع بعد مضي $10sec$ مسافة $35m$. احسب قوة الشد في الحبل الذي يحمل المصعد .

مسألة ١٠: يتحرك جسم وزنه $10kgf$ حسب المعادلتين التاليتين :

$$x = 4t \quad , \quad y = 2 + 3t - 5t^2$$

حيث إن x,y بالسنتمتر و t بالثانية . عيّن القوة التي تسبب هذه الحركة مقدرة بالكيلو غرام ثقلي .

مسألة ١١: يتحرك جسم وزنه $20kgf$ حسب المعادلتين التاليتين :

$$x = 5\cos 2t \quad , \quad y = 5\sin 2t$$

حيث x,y بالمتر و t بالثانية .عيّن القوة المطبقة على هذا الجسم بفرض أن $g = 10m/sec^2$.

مسألة ١٢ : يتحرك جسم كتلته $10\frac{kgf \cdot sec^2}{m}$ وفق المعادلتين التاليتين :

$$x = v_0 t \quad , \quad y = h - \frac{gt^2}{2}$$

حيث إن x,y بالمتر و t بالثانية . عيّن القوة المطبقة على هذا الجسم .

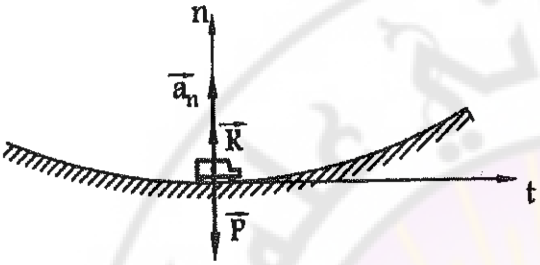
الجواب : $R = 98kgf$

مسألة ١٣ : تربط جزيئة وزنها W بخيط طوله ℓ وهي تدور على مسار دائري أفقي بسرعة عددية ثابتة v . احسب قوة الشد في الخيط .

الجواب : $T = \frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{\ell}$

مسألة ١٤ : تتحرك آلية وزنها 12000N على طريق منحنية كما في الشكل (٥-١٢) بسرعة عددية ثابتة تساوي 36km/h.

عيّن ضغط الآلية على الطريق في النقطة الأكثر انخفاضاً مع العلم أن $\rho = 50m$ ، تهمل القوة المقاومة للحركة .



الشكل (٥-١٢)

الجواب : $R = 14446N$

مسألة ١٥ : عين قوة الشد في خيط نواس رياضي وزنه W ، وطوله ℓ مع العلم أن اهتزازاته تتم حسب المعادلة التالية :

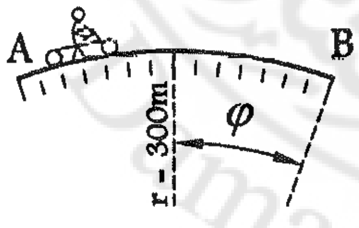
$$\varphi = \varphi_o \sin kt$$

حيث إن φ زاوية ميل خيط النواس عن الشاقول و k ، φ_o ثابتتان .

مسألة ١٦ : أعد المسألة السابقة من أجل W= 10N و $\ell = 2m$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \sin 2\pi t$$

مسألة ١٧ : تزن دراجة نارية 200kgf ، وهي تتحرك على منحنٍ دائري يقع في مستوٍ جبهي كما في الشكل (٥-١٣)، وبسرعة عددية ثابتة تساوي 72km/h .احسب رد فعل الطريق على هذه الدراجة عندما تمر من ذروة المنحني C مع العلم أن نصف قطره 300m .



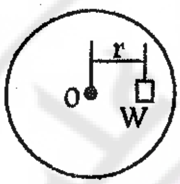
الشكل (٥-١٣)

الجواب : $R_c = 172,8kgf$

مسألة ١٨ : عين النقطة B على المنحني المفروض في المسألة السابقة التي يصبح فيها رد فعل الطريق معدوماً وذلك بدلالة الزاوية φ .

الجواب : $\varphi = 82°$

مسألة ١٩ : تستند كتلة صغيرة وزنها W على قرص دائري أفقي يقوم بحركة دورانية الشكل (٥-١٤) ، وهي تبعد عن مركز دورانه بمقدار r .فإذا كان عامل الاحتكاك بين الكتلة وسطح القرص هو μ ، فاحسب السرعة العددية العظمى التي يمكن أن تبلغها الكتلة من جراء دوران القرص دون أن تنزلق عنه .

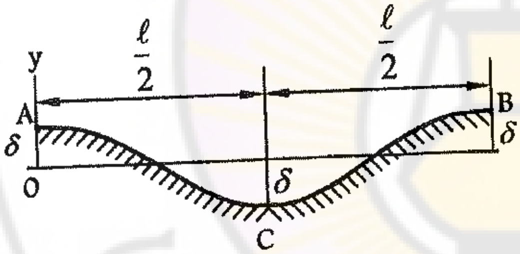


الشكل (٥-١٤)

الجواب : $v_{max} = \sqrt{\mu g r}$

مسألة ٢٠ : تتحرك جزيئة وزنها W بسرعة عددية ثابتة على المنحني الجيبي ACB الواقع في مستوٍ جبهي الشكل (٥-١٥) وتتعين هذه الحركة بالمعادلة :

$$y = \delta \cdot \cos \frac{2\pi x}{\ell}$$



الشكل (٥-١٥)

احسب الضغط الذي تحدثه الجزيئة على المسار عندما تمر من نقطة الحضيض C .

الجواب : $R = W(1 + 4\pi^2 \frac{\delta v^2}{g\ell^2})$

مسألة ٢١ : تزن كرة نواس مخروطي 1N الشكل (٥-٨) .عيّن سرعة هذه الكرة وقوة الشد في الخيط مع العلم أن $\alpha = 30°, \ell = 30\text{cm}$

الجواب : $v = 210\,\text{cm/sec},\ S = 2N$

مســألة ٢٢ : تتحــرك آلية وزنها 1000kgf على طريق منحنية كما في الشكل (٥-٩) وبسرعة 10m/sec . عيّن ضغط هذه الآلية على الطريق في النقطة A إذا علمت أن نصف قطر الانحناء في هذه النقطة $\rho = 50m$.

الجواب : $N = 796kgf$

بعض الحالات الخاصة في دراسة الحركة المستقيمة من النوع الثاني:

٥-٦. تحريك جزيئة بفعل قوة ثابتة $(X = const)$:

إن المعادلة التفاضلية لهذه الحركة هي :

$$X = \frac{W}{g}\ddot{x} = m \cdot \ddot{x} = const$$

وبما أن :

$$\left.\begin{array}{l} X = const \\ m = const \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x} = const \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = const$$

بما أن التسارع ثابت فإن الحركة متغيرة بانتظام وبمكاملة المعادلة التفاضلية يمكن الحصول على معادلات الحركة التالية :

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \ : \ a = \ddot{x} = const$$

٥-٧. مسائل محلولة على تحريك جزيئة بفعل قوة ثابتة :

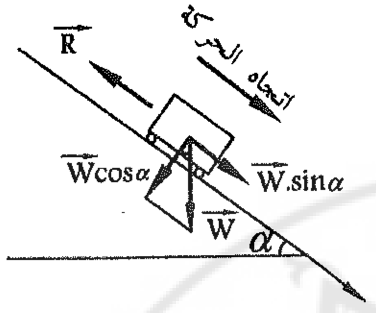
مســألة ١ : ينحدر قطــار وزنــه W علــى مســتوٍ مائل ميله 0,008 وبسرعة أولية $v_0 = 30mi/h$ ، ويطــبق السائق في اللحظة t المكابح فتتولد مقاومة كلية تساوي $\frac{W}{10}$.

احسب المسافة التي يقطعها القطار خلال فترة الكبح .

الحل :

$$\sin\alpha = \tan\alpha = 0{,}008$$

الزاوية α صغيرة .



الشكل (٥-١٦)

نختار المحور x كما في الشكل (٥-١٦) :

$$X = W\sin\alpha - \frac{W}{10} = W(\sin\alpha - 0{,}1)$$

$$X = W(0{,}08 - 0{,}1) = -0{,}092\,W$$

المعادلة التفاضلية :

$$X = \frac{W}{g}\ddot{x} = -0.092\,W \Rightarrow \ddot{x} = -2{,}96\frac{ft}{sec^2}$$

في لحظة بدء الكبح :

$$v_0 = 30\frac{5280}{3600} = 44ft/sec$$

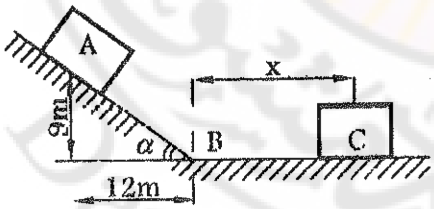
في لحظة الوقوف يصبح $v = 0$:

$$v^2 - v_0^2 = 2\cdot a\cdot x$$

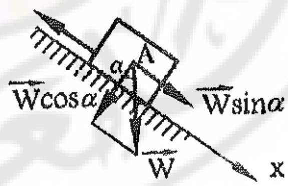
$$-(44)^2 = -2\cdot 2{,}96x$$

$$x = 327ft$$

مسـألة ٢ : تنطلق جزيئة وزنها W من حالة السكون في النقطة A ، وتنزلق على مستوٍ مائـل خشـن AB الشـكل (٥-١٧ آ) ، ما هي المسافة x التي تقطعها هذه الجزيئة على المستوي الأفقي BC حتى لحظة وقوفها مع العلم أن عامل الاحتكاك الحركي $\mu = 0{,}3$



الشكل (٥-١٧ آ)



(الشكل ٥-١٧ ب)

الحل :

ـ نعين سرعة الجزيئة عند وصولها إلى النقطة B (الشكل ٥-١٧ ب) :

من الرسم يتضح أن :

$$N = W\cos\alpha \;,\; \cos\alpha = \frac{4}{5} \;,\; \sin\alpha = \frac{3}{5} \;,\; AB = 15m$$

$$X = W\sin\alpha - \mu N = W\sin\alpha - \mu W\cos\alpha$$

$$X = W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

المعادلة التفاضلية :

$$X = \frac{W}{g}\ddot{x} = W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\ddot{x} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g = \left(\frac{3}{5} - 0{,}3\frac{4}{5}\right)$$

$$\ddot{x} = 3{,}53\,m/sec^2$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

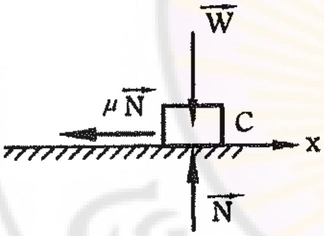
$$x = 15 = \frac{1}{2}3{,}53\,t^2 \Rightarrow t = 2{,}92\ sec$$

$$v_B = v_o + at = 0 + 3{,}53 \cdot 2{,}62 = 10{,}3\,\frac{m}{sec}$$

ندرس الآن حركة الجزيئة على المستوي الأفقي BC (الشكل ٥-١٧ جـ) :

$$X = -\mu N = -\mu W$$

$$X = \frac{W}{g}\ddot{x} = -\mu W$$



(الشكل ٥-١٧ جـ)

$$\ddot{x} = -\mu g = -0{,}3 \cdot 9{,}81 = -2{,}94\,m/sec^2$$

$$v_c = v_B + at = 0$$

$$0 - 10{,}3 - 2{,}94 \cdot t \Rightarrow t = 3{,}5\,sec$$

$$BC = v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

$$10{,}3 \cdot 3{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}94 \cdot (3{,}5)^2 = 18m$$

٥-٨. تحريك جزيئة بفعل قوة تابعة للزمن $X = f(t)$:

نستخدم الطريقة التحليلية (العامة) أو الطريقة التخطيطية (الخاصة) :

الطريقة التحليلية (العامة) :

$$X = m \cdot \ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt} = f(t)$$

$$d\dot{x} = \frac{1}{m} f(t)dt$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \frac{1}{m}\int_0^t f(t)dt$$

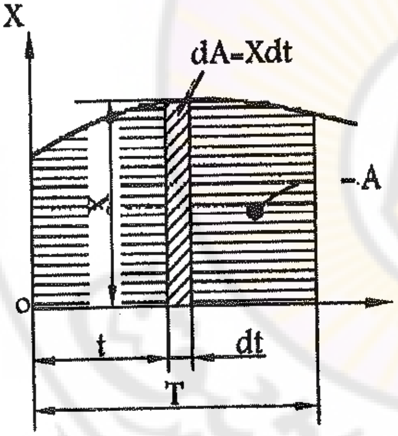
$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{m}\int_0^t f(t)dt$$

نعين من هذه العلاقة السرعة $\dot{x}$ ، ثم نعين الانتقال حيث إن :

$$dx = \dot{x}dt$$

الطريقة التخطيطية (الخاصة) :

يبين الشكل (٥-١٨) مخطط القوة X التابعة للزمن t .



الشكل (٥-١٨)

$$X = m \cdot \ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$d\dot{x} = \frac{1}{m}Xdt = \frac{1}{m}dA$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \frac{1}{m}\int_0^T Xdt = \frac{1}{m}\int_0^T dA$$

حيث إن $\dot{x}$ السرعة في اللحظة $t = T$ ، و $\dot{x}_0$ السرعة الأولية في اللحظة $t = 0$ ، بذلك نحصل على قانون السرعة التالي :

$$\boxed{\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{m}[A]_0^T}$$

من هذه العلاقة يتضح أن $\frac{1}{m}[A]_0^T$ هي السرعة الإضافية التي تكتسبها الجزيئة من القوة X،
و $[A]_0^T$ هي مساحة السطح المحصور بين منحني القوة والزمن والمحور x في المجال :
$t = 0$ و $t = T$.

بما أن تغير السرعة هو :

$$d\dot{x} = \frac{1}{m}Xdt = \frac{1}{m}dA$$

فإن الانتقال خلال الفترة الزمنية (T-t) يساوي :

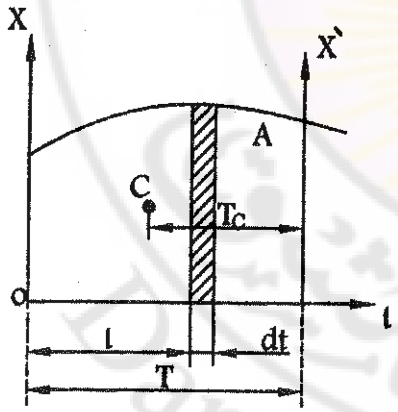
$$\frac{1}{m}dA(T-t)$$

وأما الانتقال في المجال $t = 0$ و $t = T$ فيساوي :

$$\frac{1}{m}\int_0^T dA(T-t)$$

وإذا أخـذنا بالاعتبار الانتقال الأولي x_0 والسرعة الأولية $\dot{x}_0$ ، فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$x = x_0 + \dot{x}_0 T + \frac{1}{m}\int_0^T dA(T-t)$$



الشكل (٥-١٩)

من الشكل (٥-١٩) يتضح أن :

$$S_{x'} = \int_0^T dA(T-t) = [A]_0^T\, Tc$$

حـيث إن $S_{x'}$ العـزم السكوني للسطح $[A]_0^T$ و C مركـز ثقـل هذا السطح ،
وتأخذ معادلة الانتقال الشكل التالي :

$$\boxed{x = x_0 + \dot{x}_0 T + \frac{1}{m}[A]_0^T \cdot Tc}$$

٥-٩. مسائل محلولة على تحريك جزيئة بفعل قوة تابعة للزمن :

مسألة ١ : طبقت على جزيئة ساكنة كتلتها m قوة تابعة للزمن t ($F = k\,t$) فتحركت على خط مستقيم ، أوجد قانون حركة هذه الجزيئة بفرض أن $x_0 = 0$ و k عامل التناسب .

الحل :

$$X = m\frac{d\dot{x}}{dt} = kt$$

$$d\dot{x} = \frac{k}{m}tdt$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \frac{k}{m}\int_0^t tdt$$

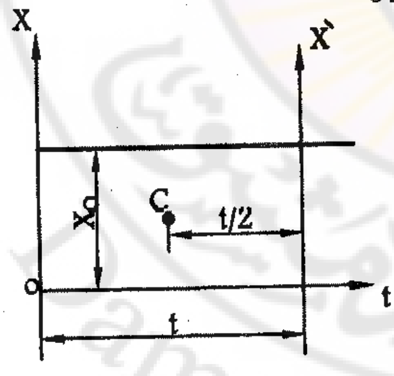
$$\dot{x} = \frac{k}{2m}t^2$$

$$dx = \dot{x}dt = \frac{k}{2m}t^2dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \frac{k}{2m}\int t^2dt$$

$$x = \frac{k}{6m}t^3$$

مسألة ٢ : يتحرك جسم وزنه W حركة مستقيمة تحت فعل القوة الثابتة X_0 (الشكل ٥-٢٠) ، أوجد معادلتي السرعة والانتقال حسب الطريقة التخطيطية مع العلم أن : $\dot{x}_0 = 0$, $x_0 = 0$



الشكل (٥-٢٠)

الحل :

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{m}[A]_0^t$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m}X_0 t \;,\;\; X_0 = m\ddot{x}$$

$$\dot{x} = \ddot{x}t$$

$$v = at$$

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{m}[A]_0^t \cdot t_c$$

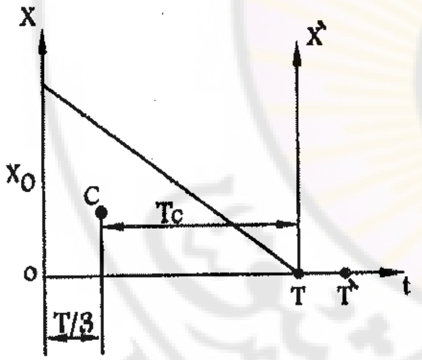
$$x = \frac{1}{m}\cdot X_0 t \cdot \frac{t}{2} = \ddot{x}\frac{t^2}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

مسـألة ٣ : طبقت على جسم كتلته m قوة متناقصة بانتظام ، وهي تساوي X_0 في لحظة البدء و 0 في اللحظة T (الشكل ٥-٢١) . أوجد السرعة والانتقال في اللحظة `T . يعطى :

$$x_0 = 0 \;,\;\; \dot{x}_0 = 0,\;\; T' > T$$

الحل :



الشكل (٥-٢١)

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{m}[A]_0^T$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\cdot\frac{X_0 T}{2} = \frac{1}{2m}X_0 T$$

هذه هي السرعة في اللحظة T ومن المفـروض [illegible] ثابتة بعد زوال تأثيـر القـوة ، أي تصبح الحركة منتظمة بعد اللحظة T .

يتألف الانتقال x من اللحظة t = 0 إلى اللحظة t = T' من الانتقالين التاليين:

١- الأول من اللحظة t = 0 إلى اللحظة t = T ويساوي :

$$x_1 = \frac{1}{m}[A]_0^T \cdot T_c = \frac{1}{m}\frac{X_0 T}{2}\cdot\frac{2}{3}T$$

٢- والثاني من اللحظة $t = T$ إلى اللحظة $t = T`$ ويساوي :

$$x_2 = v \cdot t = \frac{1}{2m} X_0 T \cdot (T`-T)$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 = \frac{X_0 T}{2m}\left(\frac{2}{3}T - T + T`\right) = \frac{X_0 T}{2m}\left(T` - \frac{T}{3}\right)$$

مسألة ٤ : احسب سرعة الجزيئة المفروضة وانتقالها في المسألة السابقة في اللحظة T حسب الطريقة التحليلية .

الحل :

بما أن القوة X متناقصة بانتظام فهي تتعين بالعلاقة :

$$X = X_0 - k \cdot t$$

حيث إن k عامل ثابت ، ونعينه كما يلي :

في اللحظة $t = T \Leftarrow X = 0 \Leftarrow k = \frac{X_0}{T}$

$$X = X_o - \frac{X_o}{T} = X_o\left(1 - \frac{t}{T}\right) = m\frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$d\dot{x} = \frac{X_o}{m}\left(1 - \frac{t}{T}\right)dt$$

$$\int_{x_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \frac{X_0}{m}\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)dt$$

$$\dot{x} = \frac{X_0}{m}\left[\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)\right]_0^T = \frac{X_0 T}{2m}$$

$$dx = \dot{x}dt = \frac{X_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)dt$$

$$x = \frac{X_0}{m}\int_0^T \left(t - \frac{t^2}{2T}\right)dt = \frac{X_0}{m}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right]_0^T$$

$$x = \frac{X_0}{m}\frac{T^2}{3}$$

مسألة ٥ : طبقت على جسم القوة X المتناقصة بانتظام مع الزمن حسب المعادلة التالية :

$$X = X_0 - kt$$

فينطلق هذا الجسم من حالة السكون ومن المبدأ ، ويتحرك على المحور x .

في أية لحظة t يعود هذا الجسم إلى المبدأ . يعطى :

$$X_0 = 12\ \ell b\ ,\ \ K = 2\ \ell b/sec$$

الحل :

في المسألة رقم (٤) وجدنا أن :

$$x = \frac{X_0}{m}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right)\ ,\ T = \frac{X_0}{K} = \frac{12}{2} = 6\,sec$$

في حال العودة إلى المبدأ :

$$x = \frac{X_0 t^2}{2m}\left(1 - \frac{t}{3T}\right) = 0$$

$$x = \frac{12t^2}{2m}\left(1 - \frac{t}{18}\right) = 0$$

بالتالي ، إما $t = 0$ أو $0 = 1 - \frac{t}{18} \Leftarrow t = 18\,sec$

مسألة ٦ : تتحرك جزيئة كتلتها m على المحور x بقوة تابعة للزمن حسب المعادلة:

$$X = P\sin\omega t$$

أوجد معادلتي السرعة والانتقال مع العلم أن $\dot{x}_0 , x_0$ معلومان .

الحل :

$$X = m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt} = P\sin\omega t$$

$$d\dot{x} = \frac{P}{m}\sin\omega t \cdot dt$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \frac{P}{m}\int_0^t \sin\omega t \cdot dt = \frac{-P}{\omega \cdot m}\left[\cos\omega t\right]_0^t$$

$$\dot{x}-\dot{x}_0=\frac{-P}{\omega\cdot m}\cos\omega t+\frac{P}{\omega\cdot m}$$

$$\dot{x}=\dot{x}_0+\frac{P}{\omega\cdot m}(1-\cos\omega t)=\frac{dx}{dt}$$

$$dx=\dot{x}_0dt+\frac{P}{\omega\cdot m}dt-\frac{P}{\omega\cdot m}\cos\omega t\cdot dt$$

$$x-x_0=\dot{x}_0t+\frac{P}{\omega\cdot m}t-\frac{P}{\omega^2m}\sin\omega t$$

$$x=x_0+\left(\dot{x}_0+\frac{P}{\omega\cdot m}\right)t+\frac{P}{\omega^2m}\sin\omega t$$

٥-١٠. تحريك جزيئة بفعل قوة تابعة للانتقال $X=f(x)$:

المعادلة التفاضلية :

$$X=m\frac{d\dot{x}}{dt}=m\frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

أو :

$$X=m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=f(x)$$

$$m\dot{x}d\dot{x}=f(x)dx$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}\dot{x}d\dot{x}=\frac{1}{m}\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

نعيّن من هذه العلاقة السرعة $\dot{x}$ ، ثم نعين الانتقال من العلاقة :

$$dx=\dot{x}dt$$

تطبيق :

تتحـــرك جـــزيئة كتلـــتها m على المحور x بفعل القوة $\vec{P}$ المطبقة على هذا المحور والتي تساوي 4mx ، أوجد معادلة حركة هذه الجزيئة إذا كان : $\dot{x}_0=0,x_0=0$

الحل :

نعوض في القانون :

$$\int_{\dot{x}_0}^{x} \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} 4mxdx$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \left[2x^2\right]_{x_0}^{x} = 2\left(x^2 - 4\right)$$

$$\dot{x} = 2\sqrt{x^2 - 4} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = 2dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = 2t = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 4}\right]_{x_0}^{x}$$

أو :

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right) - \ln(2) = 2t$$

$$\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} = 2t \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 4} = 2e^{2t}$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = 2e^{2t} - x$$

$$x^2 - 4 = 4e^{4t} + x^2 - 4xe^{2t}$$

$$1 = e^{4t} + xe^{2t}$$

$$x = e^{2t} + e^{-2t}$$

٥-١١. تحريك جزيئة بفعل قوة تابعة للسرعة $X = f(\dot{x})$:

نحصل على هذه الحالة عندما تتحرك الجزيئة في وسط مقاوم .

المعادلة التفاضلية :
$$X = m\frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x})$$

$$\frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \frac{dt}{m} \Rightarrow \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \frac{1}{m}\int_{0}^{t} dt = \frac{1}{m}$$

ويمكن كتابة المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$X = m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = f(\dot{x})$$

أو :

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \frac{1}{m}dx$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}\frac{\dot{x}d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \frac{1}{m}(x - x_0)$$

تطبيق :

تسقط كرة وزنها W وكتلتها m دون سرعة أولية من النقطة O (الشكل ٥-٢٢) . فإذا كانت مقاومة الهواء متناسبة مع السرعة، وتساوي $\vec{F} = -\mu \cdot \vec{v}$ حيث إن μ عامل التناسب ، فأوجد معادلة حركة هذه الكرة .

الحل :

الشكل (٥-٢٢)

نعدّ النقطة O مبدأ الإحداثيات :

$$m\frac{d\dot{y}}{dt} = W - F = mg - \mu \cdot v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\mu}{m}v = g - kv$$

حيث إن : $k = \frac{\mu}{m}$

$$\frac{dv}{g - kv} = dt$$

$$-\frac{1}{k}\left[\ln(g - kv)\right]_{v_0}^{v} = t$$

$$\ln\frac{g - kv}{g} = -kt$$

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$dy = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)dt$$

$$y = \frac{g}{k}\int_0^t dt - \frac{g}{k}\int_0^t e^{-kt}dt$$

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

٥-١٢. مسائل غير محلولة على المعادلة التفاضلية لتحريك الجزيئة :

مسألة ١ : تتحرك جزيئة كتلتها 400 g على المحور x حسب المعادلة :

$$x = 20\sin\frac{\pi}{2}t$$

حيث إن x بـ cm و t بـ sec .

أوجد القوة المطبقة على هذه الجزيئة كتابع للانتقال x .

الجواب : $X = -100\pi^2 x$ [dyne]

مسألة ٢ : تتحرك جزيئة كتلتها $0,5\frac{kgf \cdot sec^2}{m}$ حسب المعادلات التالية :

$$x = 2t^2 ,\ y = t^2 + 1 ,\ z = t^2 - 1$$

حيث إن الإحداثيات بالمتر والزمن بالثانية . عيّن مقدار القوة التي تفعل في هذه الجزيئة في اللحظة $t = 1$ sec .

الجواب : $F = 3,74kgf$

مسألة ٣ : تتحرك جزيئة كتلتها $2\frac{kgf \cdot sec^2}{m}$ على مسار منحن حسب المعادلة التالية :

$$S = 12\sin\frac{t}{2}$$

حيث إن S بالمتر و t بالثانية .

عيّن القوة المطبقة على هذه الجزيئة في اللحظة التي تصبح فيها السرعة $v = 3m/sec$ مع العلم أن نصف قطر الانحناء في هذه النقطة 6m .

الجواب : $R = 6kgf$

مسألة ٤ : يسير قطار على مسار منحن نصف قطره 200 m بسرعة 72 km/h ، ويعلق في سقفه نابض يحمل في نهايته ثقلاً قدره 5 kgf . احسب قوة شد النابض .

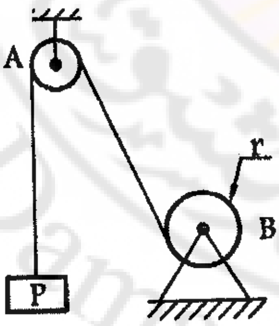
الجواب : $T = 5{,}1kgf$

مسألة ٥ : تطير طائرة على خط مستقيم يميل على الأفق بزاوية β وبتسارع ثابت $\vec{a}$ ، ويعلق في سقف هذه الطائرة نواس كتلته m ، ويميل خيطه على الشاقول أثناء عملية الطيران المفروضة بالزاوية α ، عيّن مقدار التسارع وقوة الشد في خيط النواس .

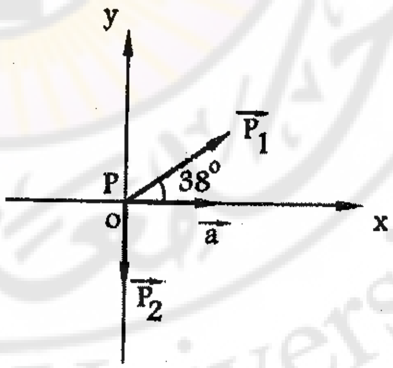
الجواب : $a = \dfrac{g \cdot \sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} \, , \, T = \dfrac{W \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

مسألة ٦ : تتحرك الجزيئة P التي كتلتها 5kg على المحور x (الشكل ٥-٢٣) بتسارع $\vec{a}$ مقداره $2\,m/sec^2$. عيّن مقداري القوتين $\vec{P}_1 , \vec{P}_2$ المطبقتين على الجزيئة والواقعتين في المستوي xy .

الجواب : $P_1 = 12{,}7N \;,\; P_2 = 7{,}82N$



الشكل (٥-٢٤)



الشكل (٥-٢٣)

مسألة ٧ : يتم رفع الثقل P الذي كتلته $m = 50kg$ بوساطة حبل وبكرة A مهملة الأبعاد وملفـــاف B نصف قطره $r = 0,3m$ ، ويدور بسرعة زاوية $\omega = f(t)$ (الشكل ٥-٢٤) .

بفرض أن الدوران متسارع بانتظام وأن $\varepsilon = 0,5 \frac{1}{sec^2}$ ، فالمطلوب :

١- عيّن قوة الشد في الحبل .

٢- احسب عدد الدورات في الدقيقة عندما $t = 60\,sec$ ، مع العلم أن الدوران يبدأ من السكون .

الجواب : $S = 497,5N \;,\; n = 86,6\,[\frac{R}{min}]$

مسألة ٨ : تتعيّن حركة جزيئة كتلتها m ، وتقوم بحركة على المحور x بالقانون التالي :

$$x = k \cdot \ln\left(1 + \frac{v_0}{k} t\right)$$

حيث إن k و v_0 عددان ثابتان ، عيّن القوة المطبقة على هذه الجزيئة كتابع للسرعة .

الجواب : $X = \frac{-m \cdot v^2}{k}$

مسألة ٩ : تتعيّن حركة جزيئة كتلتها m بالمعادلات التالية :

$$x = a\cos\omega t \;,\; y = a\sin\omega t \;,\; z = bt$$

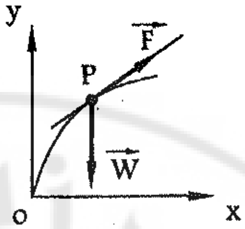
حيث إن (a, b, ω) ثوابت ، عيّن القوة المطبقة على هذه الجزيئة .

مسألة ١٠ : يتحرك مصعد وزنه 400kgf إلى أعلى بسرعة منتظمة مقدارها 3,6 m/sec عــيّن المسافة y التي يقطعها المصعد حتى لحظة توقفه بعد قطع الطاقة عنه مع العلم أن قوة الاحتكاك المعاكسة للحركة تساوي 8kgf .

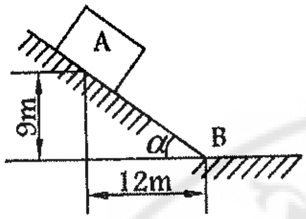
الجواب : $y = 0,65m$

مســألة ١١ : تتحرك جزيئة P كتلتها 1kg حركة منتظمة بسرعة تساوي 1m/sec على مــنحنٍ خشن معادلته $y = \frac{1}{2}x^2$ ، وفي الجهة الموجبة للمحور x (الشكل ٥-٢٥) ، وذلك

بفعل القوة $\vec{F}$ التي تبقى دائماً مماسة للمسار . عيّن رد الفعل الناظمي N ومقدار القوة F في اللحظة التي يكون فيها $x = 1$ مع العلم أن عامل الاحتكاك $\mu = 0,5$.



الشكل (٥-٢٥)



الشكل (٥-٢٦)

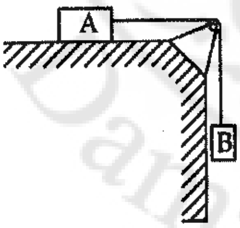
مسألة ١٢ : توضع جزيئة وزنها W على مستو مائل كما في الشكل (٥-٢٦)، وتطلق من حالـــة السكون من النقطة A تحت تأثير وزنها . ما هي السرعة التي تبلغها هذه الجزيئة عند وصولها إلى النقطة B والزمن الذي تستغرقه لقطع المسافة AB مع العلم أن عامل الاحتكاك الحركي 0,3.

الجواب : $t = 2{,}92\,\text{sec}$, $\dot{x} = 10{,}31\ \text{m/sec}$

مسألة ١٣ : تتحرك آلية على طريق مستقيمة أفقية بسرعة ثابتة مقدارها 45km/h ، وفي لحظـــة ما تزداد قوة السحب بمقدار 20% ، ما هي المسافة x التي تقطعها هذه الآلية عندما تصبح سرعتها 72km/h إذا علمت أن القوة المقاومة للحركة ثابتة وتساوي $\frac{1}{200}$ من وزن الآلية .

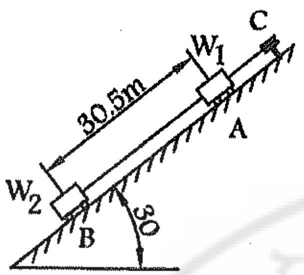
مســألة ١٤ : تـــزن الكتلة A 20kgf وهي تستند على مستوٍ أفقي خشن، وتتصل مع الكتلة B كمـــا هو مبين في الشكل (٥-٢٧) فإذا علمت أن الكتلة B تزن 10kgf وأن $\mu = \frac{1}{3}$ فعيّن تسارع الكتلة B .

الجواب : $a = \frac{3}{11}g$



الشكل (٥-٢٧)

مسألة ١٥ : تتصل عربتان صغيرتان وزنهما $W_2 = 40kgf$ و $W_1 = 80kgf$ بحبل لين غير قابل للتمدد، ويمر على البكرة C كما في الشكل (٥-٢٨) . وتبدأ هاتان العربتان بالانزلاق على المستوي المائل في اللحظة نفسها من الوضع المبين في الرسم .



الشكل (٥-٢٨)

احسب الزمن اللازم لكي تحل كل منهما مكان الأخرى .

تهمل مقاومة التدحرج والاحتكاك في البكرة .

الجواب : $t = 6,1 sec$

مسألة ١٦ : تتحرك جزيئة كتلتها m على المحور x بقوة تابعة للزمن حسب المعادلة التالية : $X = P \cos \omega t$.

أوجد معادلتي السرعة والانتقال مع العلم أن $\dot{x}_0 = 0, \; x_0 = 0$.

الجواب : $\dot{x} = \frac{g \cdot P}{\omega \cdot W} \sin \omega t \; , \; x = \frac{g \cdot P}{\omega^2 \cdot W}$

مسألة ١٧ : طبقت على جسم كتلته m قوة متناقصة بانتظام ، وهي تساوي X_0 في لحظة البدء ، و 0 في اللحظة T ، ويتحرك هذا الجسم على المحور x ، أوجد سرعة هذا الجسم وانتقاله في اللحظة T إذا كان :

$$x_0 = 0 \; , \; \dot{x}_0 = 0 \; , \; a_0 = 5m/sec^2$$

مسألة ١٨ : لدينا جزيئة P كتلتها 2g وقد طبقت عليها القوة $\vec{F}$ الموازية دائماً للمحور y، وهي تساوي $(200 \cos 5t)$ [dyne] ، كما أن هذه الجزيئة معرضة لسرعة أولية مقدارها 10cm/sec ومطبقة على المحور x ، وفي لحظة البدء كانت الجزيئة واقعة على مبدأ الإحداثيات . عيّن معادلة مسار هذه الجزيئة .

الجواب : $y = 4(1 - \cos \frac{\dot{x}}{2})$

مسألة ١٩ : تتحرك جزيئة كتلتها 2g على المحور x بفعل قوة مقدارها 100dyne ومطبقة على نفس المحور ، ما هي السرعة التي تكتسبها الجزيئة بعد مضي 10sec من بدء تطبيق القوة عليها مع العلم أنها بدأت من حالة السكون .

مسألة ٢٠ : تتحرك جزيئة كتلتها 1kg بفعل القوة $\vec{F}$ التي معادلتها :

$$\vec{F} = (6t - 8)\vec{i} - 60t^3\vec{j}$$

حيث إن t الزمن بالثانية ، وموضعها الأولي هو : $\vec{r}_0 = 2\vec{i}$ وسرعتها الأولية هي : $\vec{v}_0 = 5\vec{i} + 4\vec{j}$ ، أوجد موضع الجزيئة في اللحظة $t = 2sec$.

مسألة ٢١ : تتحرك جزيئة كتلتها 1kgf في الفراغ بفعل القوة $\vec{F}$ التي معادلتها :

$$\vec{F} = \dot{x}\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6t\vec{k}\ \ [N]$$

أوجـد معادلات الحركة مع العلم أنها كانت في لحظة البدء في النقطة P (1,0,0) وسرعتها الأولية : $\vec{v}_0 = \vec{i}\ \ m/sec$ ، الأبعاد بالمتر والزمن بالثانية .

مسألة ٢٢ : أوجد قانون تغير سرعة آلية وزنها 3tf ، وتتحرك على خط مستقيم علماً بأن القوة المقاومة للحركة تساوي 2% من الوزن ، وتتغير قوة الجر من لحظة بدء عمل المحرك كما يلي:

$$P = 3t\ \ kgf\ \ ,\ \ 0 \le t \le 30$$
$$P = 90kgf\ ,\ \ 30 \le t \le 150\,sec$$
$$P = [90 - 3(t - 150)]\ \ kgf\ \ ,\ 150 \le t \le 160\,sec$$
$$P = 60kgf\ ,\ \ 160 \le t$$

مسألة ٢٣ : طُـبقت على جزيئة كتلتها m القوة $\vec{F} = f(t)$ ، وفي لحظة البدء كانت هذه الجزيئة بحالة السكون وفي مبدأ الإحداثيات . عيّن قانون حركة هذه الجزيئة على المحور x إذا علمت أن :

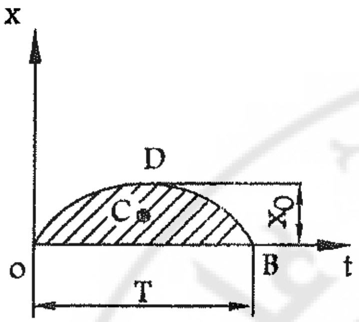
$$X = 0\ ,\ t < 0$$
$$X = k\ ,\ 0 \le t < T$$
$$X = 0\ ,\ t \ge T$$

مسألة ٢٤ : طُبقت على جزيئة وزنها 3,14kgf القوة $X = X_0 \sin \omega t$ ، وبعد دورة كاملة للقوة أصبح انتقال الجزيئة 10m ، احسب القيمة العظمى للقوة (X_0) . يعطى :

$$\omega = 8[1/sec] \ , \ \dot{x}_0 = 0 \ , \ x_0 = 0$$

الجواب : $X_0 = 32,6 \text{ kgf}$

مسألة ٢٥ : تتحرك جزيئة كتلتها m على المحور x بفعل القوة $X = f(t)$ كما في الشكل (٥-٢٩) فإذا كان المنحني قطعاً مكافئاً فاحسب الانتقال في اللحظة T .



الشكل (٥-٢٩)

الجواب : $x = \dfrac{X_0 \cdot T^2}{3m}$

مسألة ٢٦ : طبقت على جزيئة كتلتها m قوة يزداد مقدارها ازدياداً منتظماً مع الزمن ،فهو يساوي الصفر في اللحظة $t = 0$ ، و W في اللحظة $t = 1sec$. احسب سرعة هذه الجزيئة وانتقالها في اللحظة $t = 6sec$. يعطى :

$$x_0 = 0 \ , \ \dot{x}_0 = 1m/sec$$

الجواب : $x = 359,2m \ , \ \dot{x} = 177,6m/sec$

مسألة ٢٧ : طبقت على جسم قوة ثابتة مقدارها 4kgf مدة 5sec ، وبعد ذلك مباشرة طبقت عليه قوة أخرى ثابتة مقدارها 1,2kgf وبعكس جهة الأولى .

عيّن الزمن t_1 الذي تفعل خلاله القوة الثانية ليصبح الجسم بحالة السكون ، ثم عيّن الزمن t_2 الذي تفعل خلاله القوة الثانية أيضاً حتى يعود الجسم إلى نقطة انطلاقه بفرض $x_0 = 0$.

الجواب : $t_1 = 16,7 sec \ , \ t_2 = 35,7 sec$

مسألة ٢٨ : يتحرك جسم كتلته m على المحور x بفعل القوة $F = k^2 mx$ المطبقة على المحور x ، وفي لحظة البدء كان الجسم بحالة سكون ، ويبعد عن المبدأ بمقدار b . عيّن قانون حركة هذا الجسم حيث إن k عامل التناسب .

الجواب : $x = \dfrac{b}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$

مسألة ٢٩ : ســقط حجر كتلته m شاقولياً في نهر بسرعة أولية v_0 فوصل قاع النهر في اللحظــة T . عــيّن ارتفــاع النهــر مع العلم أن الحجر سقط من سطح الماء ومقاومة الماء $F = -kmv$ ، حيث إن k عامل التناسب .

مسألة ٣٠ : يتحرك جسم وزنه $10N$ بفعل قوة تابعة للزمن حسب القانون :

$$F = 10(1-t) \ [N]$$

حــيث الــزمن بالثانــية .عيّن الزمن t كي يقف هذا الجسم والانتقال الذي يقطعه حتى لحظة وقوفه مع العلم أن القوة تنطبق على سرعة الجسم ، وأن $v_0 = 20cm/sec$.

مسألة ٣١ : تتحرك جزيئة كتلتها $1kg$ على المحور x بفعل القوة : $\vec{F} = (4t + 2\dot{x})\vec{i}$ ، حيث إن t بالثانية والانتقال بالمتر والقوة بالنيوتن .

عيّن معادلة الحركة علماً أن $\vec{v}_0 = \quad \vec{i} \ m/sec$.

الجواب : $x = -(t^2 + t)$

☆ ☆ ☆

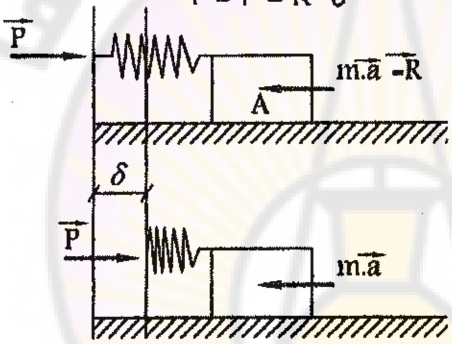
ثانياً : مبدأ دالامبير أو التوازن التحريكي

(Dalembert,s Principle or Dynamic equilibrium)

٥-١٣. تعريف مبدأ دالامبير:

إذا طبقنا على الجسم A الذي كتلته m والمستند إلى سطح أفقي صقيل (الاحتكاك معدوم) (الشكل ٥-٣٠) قوة أفقية مقدارها P بحيث تنتقل هذه القوة إلى الجسم A عبر النابض S والذي ثابته k فإن هذا النابض سوف ينضغط بمقدار δ وحسب القانون الثالث من قوانين علم التحريك والذي ينص على أنه لكل فعل رد فعل يساويه ، ويعاكسه فإن انضغاط النابض يعني وجود قوة معاكسة للقوة P ، ومساوية لها بالمقدار ولتكن $\vec{F}$ فإن:

$$F = P = K \cdot \delta$$



الشكل (٥-٣٠)

ولما كانت القوى الخارجية المطبقة على الجسم A هي فقط $\vec{P}$ فإن القوة التي أدت إلى موازنة هذه القوة والتي هي $\vec{F}$ ما هي إلا قوة العطالة الناتجة عن تغير حركة الجسم بفعل القوة $\vec{P}$ التي ستكون عكس جهة الحركة أي أن :

$$\boxed{\vec{F}_i = m \cdot \vec{a}}$$

ولما كانت القوى في الطبيعة بحالة توازن (القانون الثالث) فإننا نستطيع أن نكتب بإسقاط القوى على محور اتجاه الحركة بعد استبدال قوة العطالة بقوة وهمية، وعكس جهة الحركة مطبقة في مركز ثقل الجسم A ما يلي :

حسب قانون نيوتن :

$$\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{a}}$$

أو حسب مبدأ دالامبير :

$$\boxed{\vec{P} - m \cdot \vec{a} = 0}$$

ومـــن الشـــكلين الســـابقين لمعادلة التوازن نلاحظ أن مبدأ دالامبير لا يعطي قانوناً جديداً في التحريك بل هو طريقة جديدة للتعبير عن قانون التحريك الأساسي باستخدام مبدأ التوازن الذي يـنص علـى أن المجمـوع الهندسي للقوى الخارجية المطبقة على الجزيئة مع قوة العطالة يســاوي الصفر، أي أن الجزيئة بحالة توازن يسمى هذا التوازن تحريكياً لأن الجزيئة بحالة حركة ، لذا يسمى مبدأ دالامبير أيضاً مبدأ التوازن التحريكي، وينص على ما يلي :

تتوازن الجزيئة في أية لحظة زمنية إذا أضيفت إلى القوى الخارجية (الفعالة والردية) قوة العطالة ، والذي يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$\boxed{\vec{R} + \vec{F}_i = 0}$$

حيث :

$\vec{R}$: حاصلة القوى الخارجية المؤثرة .

$\vec{F}$: قوة العطالة .

تأخـذ معادلة التوازن التحريكي السابقة بالنسبة للمحاور الإحداثية x,y,z الشكل التالي وذلك بعد إسقاطها على هذه المحاور :

$$X - m\ddot{x} = 0$$
$$Y - m\ddot{y} = 0$$
$$Z - m\ddot{z} = 0$$

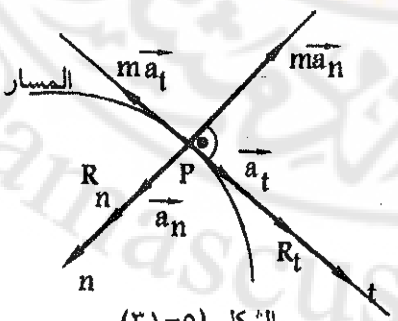
حـيث إن $(m\ddot{x}, m\ddot{y}, m\ddot{z})$ هي المركبات القائمة لقوة العطالة $m \cdot \vec{a}$ ، أما بالنسبة للمماس والناظم (t , n) (الشكل ٥-٣١) فإن معادلات التوازن التحريكي تأخذ الشكل التالي :

$$R_n - ma_n = 0$$
$$R_t - ma_t = 0$$

حيث إن $\vec{R}(R_t, R_n)$

$$\vec{a}(a_t, a_n)$$

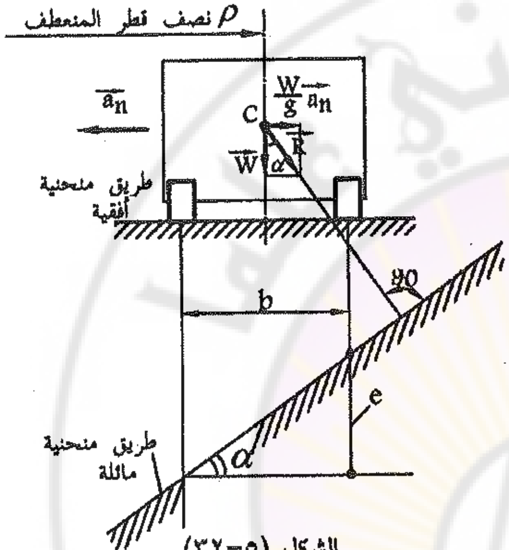
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$



الشكل (٥-٣١)

المـــركبة $m \cdot a_t$ تســمى المركبة المماسية لقوة العطالة والمركبة $m \cdot a_n$ المركبة الناظمية تســمى القوة النابذة أو القوة الطاردة المركزية (Centrifuge Force) ، وهي تمثل سعي الجزيئة لترك مسارها المنحني .

٥-١٤. إنشاء الميول في منعطفات الطرق :



الشكل (٥-٣٢)

عندما تتحرك آلية على طريق أفقية (الشكل ٥-٣٢)، فإنها تتعرض للقوة الـنابذة $\frac{W}{g}a_n$ التي تسعى لقلبها ، وتشكل هذه القوة مع قوة الثقالة $\vec{W}$ الحاصـلة $\vec{R}$ ، ولـتفادي خطـر انقـلاب الآلية يجب أن يكون سطح الطريق عمودياً على حامل الحاصلة $\vec{R}$ كمـا فـي الرسم ، ويتعيّن ميل الطريق كما يلي :

$$\tan\alpha = \frac{\frac{W}{g}a_n}{W} = \frac{a_n}{g}$$

وبما أن : $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

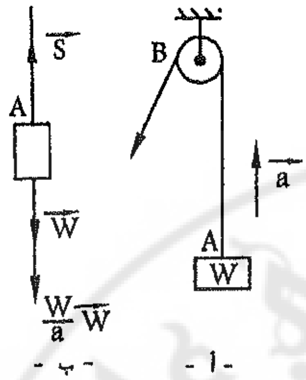
فنحصل على:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{a_n}{g} = \frac{v^2}{\rho \cdot g}}$$

أما ارتفاع الطريق e فيتعيّن بدلالة b و $\tan\alpha$ بالعلاقة التالية :

$$\boxed{e = b\tan\alpha}$$

٥-١٥. مسائل محلولة على مبدأ دالامبير:



الشكل (٥-٣٣)

مسألة ١ : يرفع الثقل W الذي وزنه 10kgf شاقولياً إلى أعلى بتسارع $5m/sec^2$ كما في الشكل (٥-٣٣-آ) . عيّن قوة الشد في الخيط ، وكيف تصبح هذه القوة في حالة السكون ؟ وكذلك عندما يكون التسارع متجهاً نحو الأسفل .

الحل :

نرسم مخطط الجسم الطليق، ونكتب معادلة التوازن التحريكي (الشكل ٥-٣٣-ب)

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow S = W + \frac{W}{g}a = W\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

بالتعويض ينتج :

$$S = 10\left(1 + \frac{5}{9,81}\right) = 15,1kgf$$

في حالة السكون يكون $a = 0$ أي أن :

$$S = W = 10kgf$$

وعندما يكون التسارع متجهاً نحو الأسفل ، فإن معادلة التوازن التحريكي تصبح :

$$S = W - \frac{W}{g}a = W\left(1 - \frac{a}{g}\right)$$

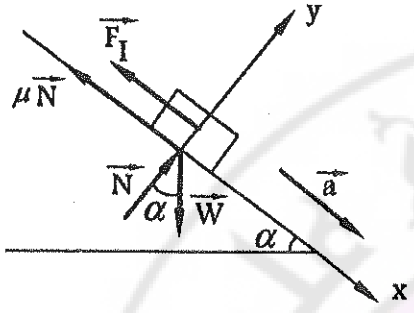
$$\Rightarrow S = 4,9kgf$$

مسألة ٢ : تتحرك جزيئة وزنها W على مستو مائل خشن زاويته α وذلك بفعل قوة الثقالة (الشكل ٥-٣٤) . أوجد تسارع هذه الجزيئة مع العلم أن عامل الاحتكاك بينها وبين المستوي المائل هو μ .

الحل :

نرسم مخطط الجسم الطليق ونكتب معادلة التوازن التحريكي :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow$$



الشكل (٥-٣٤)

$$W\sin\alpha = \mu N + \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow \mu W\cos\alpha + \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \mu\cos\alpha + \frac{a}{g}$$

$$\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

مسألة ٣ : أعد المسألة السابقة بفرض أن المستوي المائل أملس .

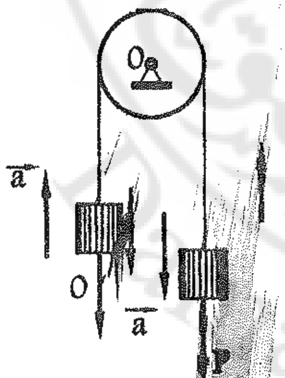
الحل :

معادلة التوازن التحريكي :

$$W\sin\alpha = \frac{W}{g}a$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g\sin\alpha$$

مسألة ٤ : يعلق في مكنة أتود الثقلان P, Q كما في الشكل (٥-٣٥) حيث إن $P > Q$ ، عيّن التسارع الذي يتحرك به هذان الثقلان، وقوة ضغط البكرة على المسند، وكذلك قوة الشد في الخيط مع العلم أن وزن البكرة مهمل .



الشكل (٥-٣٥)

الحل :

نرسم مخطط الجسم الطليق، ونكتب معادلات التوازن التحريكي التالية :

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{io} = 0 \Rightarrow \frac{P}{g}a + \frac{Q}{g}a + Q = P$$

$$\Rightarrow \frac{a}{g}(P+Q) = P - Q$$

$$\Rightarrow a = g\frac{P-Q}{P+Q} \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{P-Q}{P+Q}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow R = P + Q + \frac{Q}{g}a - \frac{P}{g}a = P + Q - \frac{a}{g}(P-Q)$$

$$\Rightarrow R = P + Q - \frac{P-Q}{P+Q}(P-Q)$$

$$\Rightarrow R = \frac{4PQ}{P+Q}$$

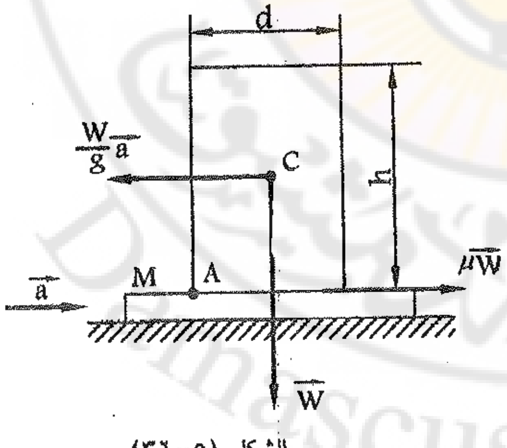
لتعيين قوة الشد في الخيط ندرس التوازن التحريكي للجسم P :

$$S = P - \frac{P}{g}a = P - P\frac{P-Q}{P+Q}$$

$$= \frac{P(P+Q) - P(P-Q)}{P+Q}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2PQ}{P+Q}$$

مسألة ٥ : تتحرك الصفيحة M على مستو أفقي بتسارع ثابت $\vec{a}$ ، ويوضع على هذه الصفيحة متوازي مستطيلات (الشكل ٥-٣٦) . احسب قيمة التسارع a التي يبدأ عندها متوازي المستطيلات بالانزلاق على الصفيحة مع العلم أن عامل الاحتكاك بين متوازي المستطيلات والصفيحة هو μ .



الشكل (٥-٣٦)

الحل :

شرط عدم الانزلاق :

قوة الاحتكاك > قوة العطالة

وفي لحظة بدء الانزلاق تتساوى هاتان القوتان ، أي أن :

$$\mu W = \frac{W}{g} a \Rightarrow a = \mu a$$

مسألة ٦ : بفرض أن الاحتكاك بين متوازي المستطيلات والصفيحة كاف لمنع الانزلاق (الشكل٥-٣٦) ، فما هو مقدار التسارع الذي يشرع عنده متوازي المستطيلات بالانقلاب .

الحل :

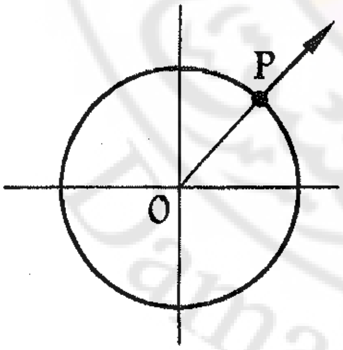
$$\left(\frac{W}{g} a\right) \cdot \frac{h}{2} = \text{عزم القلب}$$

$$W \frac{d}{2} = \text{عزم التثبيت}$$

في اللحظة الحرجة للانقلاب :

$$\frac{W}{g} a \cdot \frac{h}{2} = W \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow a = g \frac{d}{h}$$

مسألة ٧ : تتحرك جزيئة وزنها 200kgf حركة منتظمة على محيط دائرة قطرها 5m (الشكل ٥-٣٧) ، فتدور دورة واحدة خلال 3sec ، ما هو مقدار القوة التي تحفظ الجزيئة على الدائرة ؟



الشكل (٥-٣٧)

الحل :

بما أن الحركة منتظمة فإن $a_t = 0$ وينتج أن :

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\omega)^2}{\rho} = r\omega^2$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} rad/sec$$

حيث إن n ــ عدد الدورات في الدقيقة ويساوي $\frac{60}{3}$

$$\omega = \frac{\pi \cdot 20}{30} = \frac{2}{3}\pi \ rad/sec$$

والقــوة التـــي تحفــظ الجزيئة على الدائرة تساوي المركبة الناظمة لقوة العطالة، وتعاكسها بالاتجاه :

$$F = \frac{W}{g} a_n = \frac{200}{9,81} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{9} \pi^2 = 223,35kgf$$

مســـألة ٨ : تتحرك آلية على طريق دائرية نصف قطرها R= 200m بسرعة 72km/h (الشكل ٥-٣٢) . عيّن زاوية ميل الطريق α باتجاه العرض لتفادي خطر انقلاب الآلية .

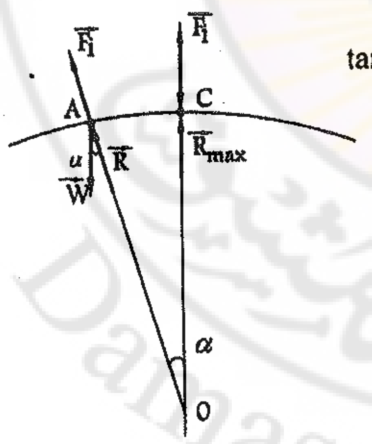
الحل :

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{\rho g}$$

$$v = 72 \cdot \frac{1000}{3600} = 20m/sec$$

$$\tan\alpha = \frac{20^2}{9,81 \cdot 200} = 0,204 \Rightarrow \alpha = (11,52)^o$$

مســـألة ٩ : تتحــرك آلـــية وزنهـــا 3000kgf علـــى طـــريق دائرية محدبة نصـــف قطـــرها 25m وبســـرعة ثابتة مقـــدارها 36Km/h (الشكل ٥-٣٨) . عيّن الضغط الأعظم للآلية على الطريق.



الشكل (٥-٣٨)

الحل :

تتعــرض الآلية في الموضع A لقوة الثقالة $\vec{W}$ ولقوة العطالة $\vec{F_i}$ ولرد الفعل $\vec{R}$ ، معادلة التوازن التحريكي في هذا الموضع هي :

$$R = W\cos\alpha - \frac{W}{g}\frac{v^2}{\rho}$$

ويتضح من هذه المعادلة أن الضغط R يصبح أعظمياً عندما تكون $\alpha = 0$ ، أي عندما تكون الآلية في الذروة C ، وتأخذ معادلة التوازن التحريكي الشكل التالي :

$$R_{max} = W - \frac{W}{g}\cdot\frac{v^2}{\rho} = W\left(1 - \frac{v^2}{\rho g}\right)$$

$$R_{max} = 3000\left(1 - \frac{10^2}{25\cdot 9{,}81}\right) = 1776\text{kgf}$$

٥- ١٦. مسائل غير محلولة على مبدأ دالامبير :

مسألة ١ : تتحرك جزيئة وزنها 45kgf ومربوطة بخيط لين ، شاقولياً نحو الأسفل بتسارع ثابت، وتقطع خلال 2sec مسافة 5m . عيّن قوة الشد في الخيط .

الجواب : $S = 33{,}5\text{kgf}$

مسألة ٢ : أعد المسألة السابقة عندما تتحرك الجزيئة شاقولياً نحو الأعلى .

الجواب : $S = 56{,}5\text{kgf}$

مسألة ٣ : يسحب جسم وزنه 200kgf على مستوى مائل خشن زاويته $15°$ ونحو الأعلى بقوة توازي هذا المستوى ومقدارها 65 kgf . فإذا كان عامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى المائــل 0,05 فالمطلــوب تعيين الزمن اللازم لقطع مسافة 4m من بدء الحركة مع العلم أن شروط الحركة الأولية معدومة.

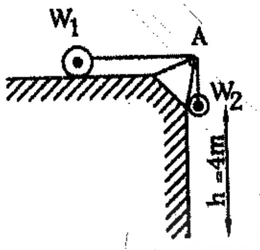
الجواب : $t = 6{,}7\text{ sec}$

مسألة ٤ : لدينا جملة الكرتين W_1, W_2 (الشكل ٥-٣٩) وعندما تهبط الكرة W_2 إلى أسفل تزلق الكرة W_1 على المستوى الأملس، عـيّن سـرعة تحرك الكرتين بعد أن تقطع الكرة W_2 مسافة 4m وكذلك الزمن اللازم لقطع المسافة ، يعطى :

$W_1 = 9\ kgf \quad , \quad W_2 = 2\ kgf$

طول الخيط الواصل بين الكرتين $L = 5\ m$.

الجواب : $v = 3.6\ m/sec \quad , \quad t = 2\ sec$

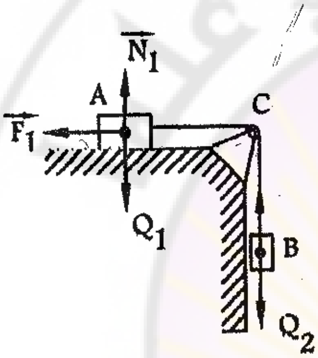


الشكل (٥-٣٩)

مسألة ٥ : لدينا جملة الثقلين A,B والبكرة C المهملة الوزن (الشكل ٥-٤٠) .عيّن قوة الشـد فـي الخيط اللين الواصل بين الثقلين، وتسـارع الحركة بفرض أن الاحتكاك مهمل وأن:

$Q_1 = 20\ kgf \quad , \quad Q_2 = 8\ kgf$

الجواب : $a = \dfrac{2}{7} g \quad , \quad S = \dfrac{40}{7}\ kgf$



الشكل (٥-٤٠)

مسألة ٦ : أعد المسألة السابقة بفرض أن المستوي الأفقي خشن، وأن عامل الاحتكاك بينه وبين الثقل A يساوي $\frac{1}{3}$ وأن :

$Q_1 = 4{,}8\ kgf \qquad Q_2 = 2{,}4\ kgf$

الجواب : $a = 1{,}09\ m/sec^2 \quad ; \quad S = 2{,}13\ kgf$

مسألة ٧ : احسب المسافة الصغرى x التي يمكن فيها للصفيحة M أن تقف عندما تتباطأ بتسارع ثابت دون زعزعة متوازي المستطيلات (الشكل ٥-٣٦) . يعطى :

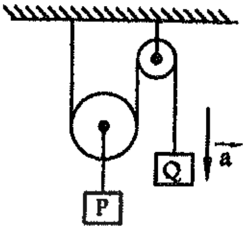
$v = 6 m/sec \ , \ d = 120 cm \ , \ h = 180 cm \ , \ \mu = 0.5$

الجواب : $x = 3.7 m$

مسألة ٨ : لدينا الجملة المبينة بالشكل (٥-٤١) ، احسب تسارع الثقل Q ، يهمل الاحتكاك وعطالة البكرة . يعطى:

$$P = 16\ kgf \quad , \quad Q = 12\ kgf$$

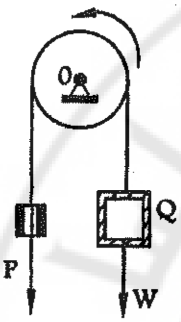
الجواب : $a = 2,45 m/sec^2$



الشكل (٥-٤١)

مسألة ٩ : يُرفع الصندوق Q إلى أعلى بوساطة البكرة المهملة الوزن O والثقل P، ويوجد في هذا الصندوق الثقل W (الشكل ٥-٤٢).عيّن ضغط الثقل W على أرضية الصندوق .

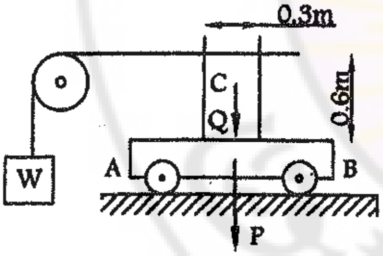
الجواب : $R = W + \frac{W}{g}a = \frac{2PW}{P + Q + W}$



الشكل (٥-٤٢)

مسألة ١٠ : يستند جسم مستطيل الشكل وزنه 80 kgf على عربة وزنها 40 kgf ، وتستطيع هذه العربة التدحرج على المستوي الأفقي AB دون احتكاك .

تحصل العربة مع الجسم على تسارع من الجسم W المبين بالرسم – الشكل (٥-٤٣) ، فإذا كان الاحتكاك بين الجسم والعربة كافياً لمنع الانزلاق ، فعيّن القيمة العظمى للثقل W الذي يمكن استخدامه لتسريع العربة، وما مقدار هذا التسارع ؟



الشكل (٥-٤٣)

الجواب : $W_{max} = 40\ kgf \quad , \quad a_{max} = 2,45\ m/sec^2$

مسألة ١١ : تنزلق كرة وزنها W ونصف قطرها r على مستوٍ أفقي خشن ودون تدحرج وذلك بوساطة قوة أفقية $\vec{P}$ يبعد حاملها عن المستوى بمقدار h ، احسب هذا الارتفاع مع العلم أن عامل الاحتكاك بين الكرة والمستوي هو μ .

الجواب : $h = r\left(1 - \frac{\mu \cdot W}{P}\right)$

مسـألة ١٢ : لديـنا كرة صغيرة متجانسة كتلتها 0,5kg مربوطة بخيط طوله 0,7 m . يـدور هـذا الخيط مع الكرة بشكل منتظم في مستوٍ جبهي حول النهاية الثانية ، فيدور دورة واحدة خلال 1sec . عيّن قوة الشد في الخيط عندما تكون الكرة في الذروة ثم في الحضيض.

الجواب : $S_{max} = 18,7\ N$, $S_{min} = 8,9\ N$

مسـألة ١٣ : لدينا نواس مخروطي ذو محور شاقولي ، كتلة كرته 2 kg ، وطول خيطه 60cm ، ويصنع محوره زاوية 30° ، تدور هذه الكرة دوراناً منتظماً في مستوٍ أفقي . عيّن سرعة الكرة وقوة الشد في الخيط .

الجواب : $V = 1,3\ m/sec$, $S = 22,7\ N$

مسألة ١٤ : عيّن الارتفاع e لطريق آليات تقع على منحنٍ دائري نصف قطره 600 m مع العلم أن عرض الطريق 3,5 m وسرعة الآلية 80 km / h .

الجواب : $e = 0,295\ m$

مسـألة ١٥ : يستطيع جسم وزنه 0,80 kgf أن يقطع خيطاً عندما يدور في مستوٍ أفقي بسـرعة 2,5 m/sec و مـا هـي السرعة التي تسبب انقطاع الخيط نفسه عندما يكون وزن الجسم 1,6 kgf .

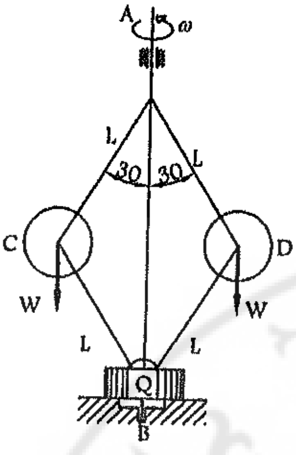
الجواب : $v = 1,8\ m/sec$

مسألة ١٦ : عيّن ارتفاع نواس مخروطي طوله 1,5 m، ويدور بسرعة زاوية مقدارها $3\frac{1}{sec}$.

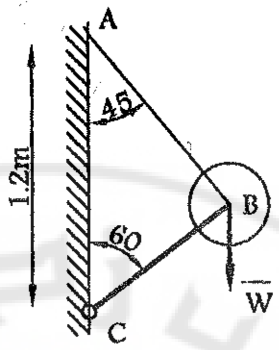
الجواب : $h = 1,09\ m$

مسـألة ١٧ : تثـبت كرة وزنها W على نهاية القضيب BC كما في الشكل (٥-٤٤) ، أوجـد قوة الضغط في هذا القضيب في اللحظة التي تسبق انقطاع الخيط AB ثم في اللحظة التي تلي انقطاع الخيط .
يهمل وزن القضيب .

الجواب : $S_b = 0,5\ W$, $S_a = 0,732\ W$



الشكل (٥-٤٥)



الشكل (٥-٤٤)

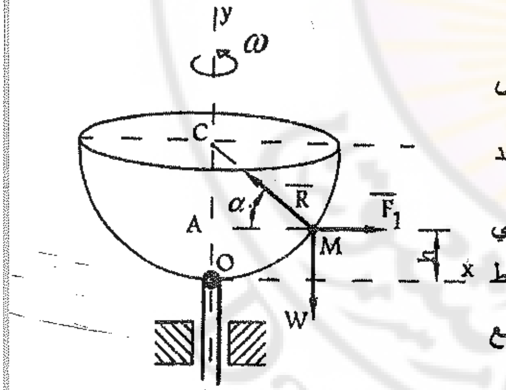
مسألة ١٨ : لدينا جهاز تنظيم لآلة بخارية يعمل بالقوة الطاردة المركزية (الشكل ٥-٤٥) عيّن سرعة الدوران المنتظمة التي تبدأ عندها الكرتان D, C رفع الثقل Q الذي يستطيع الانزلاق بحرية على المحور AB . يهمل الاحتكاك وكذلك أوزان القضبان الأربعة المتمفصلة ، يعطى :

$W = 4{,}5 kgf$, $Q = 9$ kgf , $L = 25$ cm

الجواب : $n = 111{,}4\ [\frac{R}{min}]$

مسألة ١٩ : تدور نصف كرة جوفاء حول محورها الشاقولي بانتظام بمعدل $30\ [\frac{R}{min}]$ وتوجد داخلها كرة صغيرة M وزنها 0,2 kgf كما في الشكل (٥-٤٦) . عيّن الارتفاع h وقوة ضغط نصف الكرة على الكرة M في حالة التوازن مع العلم أن قطر نصف الكرة يساوي 4 m .

الجواب: $h = 1$ m , $R = 0{,}4$ kgf:



الشكل (٥-٤٦)

☆ ☆ ☆

الفصل السادس

النظريات العامة لتحريك الجزيئة

General Theorems of Particle Dynamics

٦-١. مقدمة :

كثيراً ما نستخدم في حل مسائل التحريك نتائج النظريات العامة بدلاً من المعادلات التفاضلية، وهـذه النظريات تنتج من قانون التحريك الأساسي أو من المعادلات التفاضلية ، وهي تضع علاقات واضحة بين الصفات الديناميكية الأساسية لتحريك الجزيئة ، وبذلك تفتح أفاقاً واسعة للبحث في الحركات الميكانيكية للجزيئة ذات الاستخدام الواسع في المجالات الهندسية . وهذه النظـريات تخلـص المسائل من المعادلات التفاضلية التي يتم حلها مرة واحدة عند استنتاج النظريات ، وهذا مما يسهل المسائل .

٦-٢. دفع القوة (Impulse of a force) :

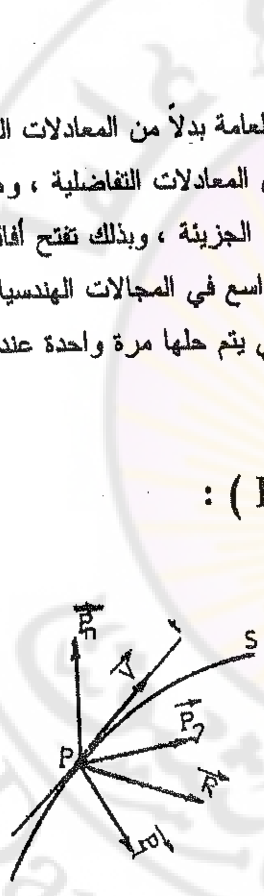
إذا طـبقت على الجزيئة P (الشكل ٦-١) جملة القوة $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots \vec{P}_n\right)$ التي حاصلتها $\vec{R}$ تساوي :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$$

فـإن الدفـع العنصري (الجزئي) للحاصلة $\vec{R}$ خـلال الفترة الزمنية غير المتناهية في الصغر dt هو الشعاع $d\vec{I}_{mp}$ الذي ينطبق على حامل $\vec{R}$ ويساوي :

$$d\vec{I}_{mp} = \vec{R}dt$$

ووحدة قياسه هي $[kgf \cdot sec]$.



الشكل (٦-١)

وأمـا دفـع الحاصـلة $\vec{R}$ خلال الفترة الزمنية $(t_2 - t_1)$ فهو الشعاع $\vec{I}_{mp}$ الذي يتعين بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\vec{I}_{mp} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

ومن جهة ثانية يمكن أن نكتب :

$$\vec{R} \cdot dt = \left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_n\right) \cdot dt = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i dt$$

$$\Rightarrow\ \vec{I}_{mp} = \vec{I}_{mp_1} + \vec{I}_{mp_2} + \cdots\cdots + I_{mp_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_{mp_i}$$

$$\boxed{\vec{I}_{mp} = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_{mp_i}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

أي أن :

<u>دفع حاصلة جملة قوى متلاقية في نقطة يساوي المجموع الهندسي لدفع كل من مركباتها .</u>

يمكـن تعيين دفع القوة بوساطة مركباته $I_{mpx}, I_{mpy}, I_{mpz}$ على المحاور الإحداثية x,y,z ، فإذا كانت X,Y, Z هي المركبات القائمة للحاصلة $\vec{R}$ على هذه المحاور ، وبإسقاط العلاقة (1) عليها ، فإننا نحصل على :

$$\boxed{I_{mpx} = \int_{t_1}^{t_2} Xdt} \quad \boxed{I_{mpy} = \int_{t_1}^{t_2} Ydt} \quad \boxed{I_{mpz} = \int_{t_1}^{t_2} Zdt} \ \ldots\ldots\ (3)$$

أو :

$$\boxed{\vec{I}_{mp} = I_{mpx} \cdot \vec{i} + I_{mpy} \cdot \vec{j} + I_{mpz} \cdot \vec{k}} \ldots\ldots\ (4)$$

٦-٣. اندفاع الجزيئة (كمية الحركة) Momentum of particle :

اندفاع جزيئة هو مقدار شعاعي $\vec{K}$ يساوي جداء كتلة الجزيئة m في سرعتها $\vec{v}$ وهو ينطبق على شعاع السرعة (الشكل ٦-٢) ، أي أن :

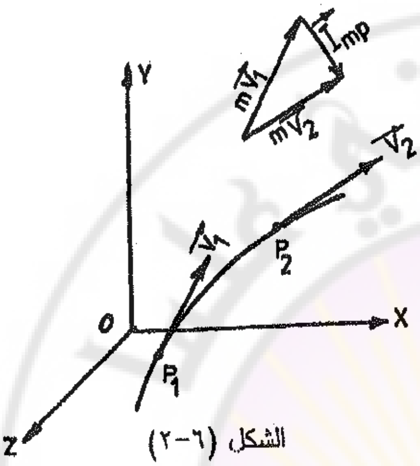
$$\boxed{\vec{K} = m \cdot \vec{v}} \ \ldots\ldots\ (5)$$

بإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية x, y, z نحصل على :

$$\boxed{K_x = m\cdot\dot{x}}\ \boxed{K_y = m\cdot\dot{y}}\ \boxed{K_z = m\cdot\dot{z}}\ \ldots\ldots (6)$$

حيث إن :

$$\boxed{\vec{K} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}}\ldots\ldots (7)$$



الشكل (٦-٢)

المعادلـــة التفاضـــلية لتحريك الجزيئة بالنسبة للمحور x هي :

$$X = m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$\Rightarrow Xdt = md\dot{x} = dI_{mpx}$$

$$I_{mpx} = m\int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} d\dot{x} = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1$$

بذلك نحصل على جملة المعادلات التالية :

$$\begin{array}{|l|}\hline I_{mpx} = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 \\ \hline I_{mpy} = m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 \\ \hline I_{mpz} = m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 \\ \hline \end{array}\ \ldots\ldots(8)$$

ويمكن كتابة هذه الجملة بشكل شعاعي كما يلي :

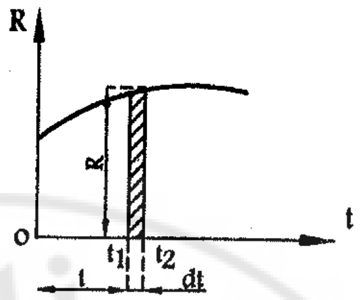
$$\vec{I}_{mp} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \ldots\ldots(9)$$

أي أن :

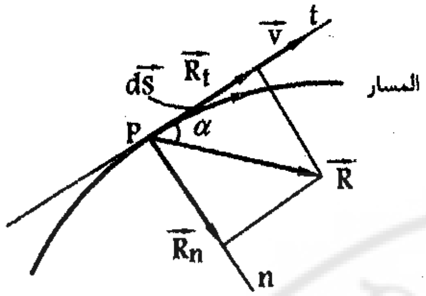
<u>التغيـــر الكلـــي في كمية الحركة للجزيئة خلال فترة زمنية معينة يساوي دفع القوة المطبقة على هذه الجزيئة خلال الفترة نفسها .</u>

يمثل الشكل (٦-٣) العلاقة الأخيرة تخطيطياً حيث إن :

$$\vec{I}_{mp} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{R}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$



الشكل (٦-٣)



الشكل (٦-٤)

٦-٤. عمل القوة (Work of Force) :

يصف عمل القوة تأثيرها على الجسم المطبقة عليه خلال فترة الانتقال الذي تقوم به .

عندما تتحرك الجزيئة P على المسار S بمقدار القوس غير المتناهية في الصغر $d\vec{S}$ (الشكل ٦-٤) ، فـإن القــوة $\vec{P}$ تقــوم بعمل dU ، ويتعين العمل العنصري (الجزئي) dU للقوة الحاصلة $\vec{R}$ بالعلاقة التالية :

$$\boxed{dU = \vec{R} \cdot d\vec{S}}$$

$$\Rightarrow dU = R \cdot ds \cdot \cos\alpha = R_t \cdot ds$$

وذلك بفرض أن $d\vec{S}$ ينطبق على المماس t و R_t هي المركبة المماسية للقوة $\vec{R}$.

إن وحــدة قــياس العمل هي $[kgf \cdot m]$ ، والعمل مقدار سلمي ، ويمكن أن يكون موجباً أو سالباً أو يساوي الصفر وذلك حسب مقدار الزاوية α ، ونميز الحالات التالية :

١- إذا كان $\alpha < \frac{\pi}{2} \Leftarrow dU > 0$ (العمل موجب)

٢- إذا كان $\alpha > \frac{\pi}{2} \Leftarrow dU < 0$ (العمل سالب)

٣- إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftarrow dU = 0$ (العمل معدوم)

٤- إذا كان $\alpha = 0 \Leftarrow dU = R \cdot dS$

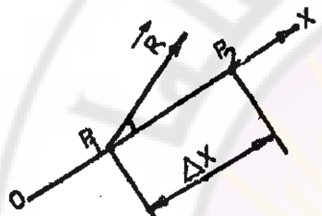
٥- إذا كان $\alpha = \pi \Leftarrow dU = -R \cdot dS$

<u>نتيجة :</u>

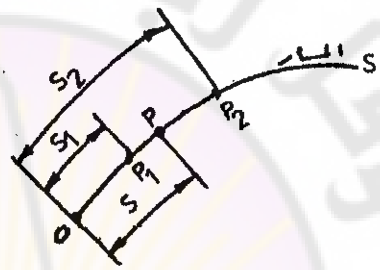
ينـــتج مما تقدم أن المركبة المماسية R_t للقوة الحاصلة هي التي تقوم بالعمل ، وأما المركبة الناظمية R_n فإنها لا تقوم بأي عمل .

إن العمـــل الكلي U الذي تقوم به القوة $\vec{R}$ عند انتقال الجزيئة من الموضع P_1 إلى الموضع P_2 (الشكل ٦-٥) يساوي :

$$\boxed{U_{1/2} = \int_{S_1}^{S_2} R_t \, ds} \;\ldots\ldots\ldots\; (10)$$



الشكل (٦-٦)



الشكل (٦-٥)

يمكن كتابة علاقة العمل على الشكل التالي :

$$dU = \vec{R}\cdot d\vec{S} = \left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_n\right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \; dU = dU_1 + dU_2 + \cdots + dU_n$$

$$\Rightarrow \; \boxed{U = \sum_{i=1}^{n} U_i} \;\ldots\ldots\ldots\; (11)$$

أي أن :

<u>عمل القوة الحاصلة $\vec{R}$ يساوي المجموع الجبري لعمل مركباتها . وكذلك ينتج أن عمل القوة الحاصلة يساوي المجموع الجبري لعمل مركباتها القائمة .</u>

بفرض أن $\vec{R}(X,Y,Z)$ ، $d\vec{S}(dx,dy,dz)$ ، ينتج من خواص الجداء السلمي :

$$dU = \vec{R}\cdot d\vec{S} = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \int_{x_1}^{x_2} X dx + \int_{y_1}^{y_2} Y dy + \int_{z_1}^{z_2} Z dz} \text{........ (12)}$$

حيث إن : $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ، $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

إذا كان مسار الجزيئة P مستقيماً (الشكل ٦-٦) ، فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$U = (R\cos\alpha)\cdot \Delta x$$

٦-٥. الاستطاعة (Power) :

وهي مقدار العمل المنجز خلال الفترة الزمنية dt ، أي أن :

$$N = \frac{dU}{dt} = \frac{R_t ds}{dt} = R_t \cdot v \left[kgf \cdot \frac{m}{sec} \right]$$

$$\boxed{N = R_t \cdot v} \text{.......... (13)}$$

أي أن :

الاستطاعة مقدار سلمي تساوي حاصل ضرب مقدار المركبة المماسية للقوة الحاصلة في سرعة الحركة .

عندما ينجز العمل بانتظام ، فإن الاستطاعة تساوي العمل المنجز في وحدة الزمن أي أن :

$$\boxed{N = \frac{U}{t}} \text{.......... (15)}$$

٦-٦. الطاقة (Energy) :

الطاقة مقدار سلمي يعبر عن قدرة الجزيئة على القيام بعمل في شروط معينة ، ولهذا فلها وحدة قياس العمل نفسها ، وهي تقسم إلى النوعين التاليين :

١- الطاقة الحركية (Kinetic Energy) .

٢- الطاقة الكامنة أو طاقة الموضع (Potentional Energy) .

٦-٦-١. الطاقة الحركية :

تنتج الطاقة الحركية T للجزيئة عن تحركها من الموضع P_1 إلى الموضع P_2 تحت فعل القوى المطبقة عليها ، وهي تساوي نصف جداء كتلة الجزيئة m في مربع سرعتها ، أي أن:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2} \text{..........} \quad (15)$$

ووحدة قياسها هي :

$$\frac{kgf}{m/sec^2} \cdot \frac{m^2}{sec^2} = [kgf \cdot m]$$

المعادلة التفاضلية لتحريك الجزيئة بالنسبة للمماس t :

$$R_t = ma_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$$

$$\Rightarrow R_t \cdot dS = m \cdot v \cdot dv = dU$$

بإجـــراء عملية التكامل لطرفي هذه المعادلة في المجال المحصور ما بين الموضع الأولي P_1 حيث أن الانتقال s_1 والسرعة $\vec{v}_1$ ، والموضع الأخير P_2 حيث الانتقال S_2 والسرعة $\vec{v}_2$ ، فإننا نحصل على :

$$\boxed{U_{1/2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}} \text{.........} \quad (16)$$

تمثل هذه العلاقة التغير في الطاقة الحركية للجزيئة عند تحركها من الموضع P_1 إلى الموضع P_2 ، ومقـــدار هـــذا التغير يساوي عمل القوى المطبقة على الجزيئة أثناء تحركها بين هذين الموضعين .

بإسقاط العلاقة الأخيرة على المحاور الإحداثية x, y ,z نحصل على جملة المعادلات التالية :

$$\begin{array}{|c|}\hline U_x = \dfrac{m\dot{x}_2^2}{2} - \dfrac{m\dot{x}_1^2}{2} \\ \hline U_y = \dfrac{m\dot{y}_2^2}{2} - \dfrac{m\dot{y}_1^2}{2} \\ \hline U_z = \dfrac{m\dot{z}_2^2}{2} - \dfrac{m\dot{z}_1^2}{2} \\ \hline \end{array} \text{......} (17)$$

٦-٦-٢. الطاقة الكامنة (طاقة الموضع) :

ويرمز لها بالحرف V ، وهي تتبع لموضع الجزيئة ، ولا تتبع لشكل المسار الذي تسلكه ، فالجزيئة وهي في الموضع A تملك طاقة كامنة V_A بالنسبة للأرض التي تسمى الموضع الأساس أو موضع المقارنة (الشكل ٦-٧) . والطاقة الكامنة للجزيئة وهي في موضع ما تساوي العمل الذي تقوم به القوى المطبقة عليها عندما تتحرك من هذا الموضع حتى تعود إلى الموضع الأساس (موضع مقارنة) ، أي أن الجزيئة في الموضع A تملك طاقة كامنة V_A تساوي :

$$V_A = U_{A/O} = \int_A^O dU$$

إن العمل الذي تقوم به قوة الثقالة $\vec{W}$ عند انتقالها على المحور y من الموضع الأساس O إلى الموضع A (الشكل ٦-٧) يساوي :

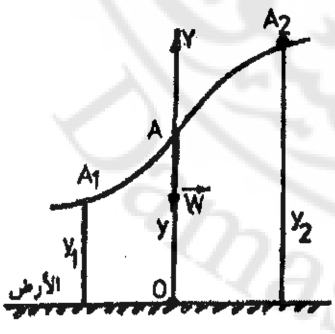
$$U_{O/A} = \int_O^A dU = \int_O^A -Wdy = -\int_O^h Wdy$$

و إن العمل الذي تقوم به القوة $\vec{W}$ عند انتقالها من A إلى O يساوي :

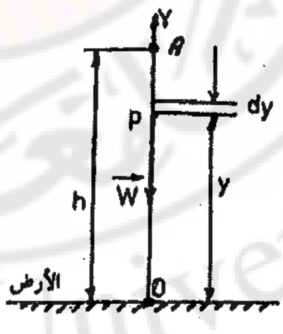
$$U_{A/O} = \int_A^O Wdy = \int_O^h Wdy$$

أو :

$$\boxed{V_A = \int_O^h Wdy = Wh} \text{.......... (18)}$$



الشكل:(٦-٨)



الشكل (٦-٧)

عندما تتحرك الجزيئة من الموضع A_1 إلى الموضع A_2 (الشكل ٦-٨) فإنها تملك في كل موضع من هذين الموضعين الطاقة الكامنة التالية :

$$V_1 = Wy_1\ ,\ \ V_2 = Wy_2$$

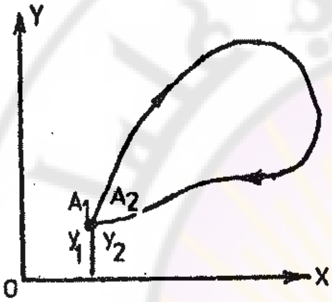
ويتضح أن $V_1 < V_2$ لأن $y_1 < y_2$ ، بمعنى أن الطاقة الكامنة للجزيئة تزداد عند انتقالها من الموضع A_1 إلى الموضع A_2 ، وأما العمل المنجز خلال فترة الانتقال بين هذين الموضعين فهو سالب ويساوي :

$$U_{1-2} = -W(y_2 - y_1) = W(y_1 - y_2)$$

وتتناقص الطاقة الكامنة مع تناقص الارتفاع y ويكون العمل موجباً ويساوي :

$$U_{2-1} = V_2 - V_1 = W(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow U_{1-2} = V_1 - V_2$$



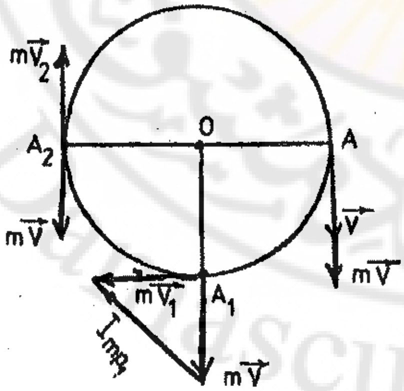
الشكل (٦-٩)

وإذا انطبقت النقطة (A_2) على النقطة (A_1) ، فإن الجزيئة ترسم مساراً مغلقاً كما في الشكل (٦-٩) ، ويصبح $y_1 = y_2 \Leftarrow V_1 = V_2$ والعمل معدوماً.

إن مفهوم الطاقة الكامنة يستخدم في الحالات التي لا يعتمد فيها العمل على شكل المسار الذي تسلكه الجزيئة في انتقالها ، وذلك مثل قوى الثقالة ، ومرونة النوابض والغازات المضغوطة وغيرها ، وتسمى هذه القوى القوى المحافظة (Conservative forces) .

٦-٧. مسائل محلولة على النظريات العامة لتحريك الجزيئة :

مسألة ١ : تتحرك جزيئة وزنها 10kgf على دائرة بسرعة ثابتة مقدارها 10m/sec . عين دفع قوة الثقالة عندما تتحرك الجزيئة من الموضع A إلى A_1 ثم عندما تتحرك من الموضع A إلى A_2 (الشكل ٦-١٠) .



الشكل (٦-١٠)

الحل :

$$v = v_1 = v_2 = 10m/sec$$

من الموضع A إلى A_1 :

$$\vec{I}_{mp_1} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}$$

$$I_{mp_1} = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv)^2} = mv\sqrt{2}$$

$$I_{mp_1} = \frac{10}{9,81}10\sqrt{2} = 14,4[kgf \cdot sec]$$

من الموضع A إلى A_2 :

$$\vec{I}_{mp_1} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}$$

$$I_{mp_2} = mv_2 + mv = 2mv$$

$$I_{mp_2} = 2\frac{10}{9,81}10 = 20,4[kgf \cdot sec]$$

مسـألة ٢ : ما هو مقدار العمل الذي تقوم به الجزيئة المفروضة في المسألة السابقة عندما تتحرك من الموضع A إلى A_1 .

الحل :

قانون العمل والطاقة :

$$U = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - v^2\right)$$

$$v = v_1 \Rightarrow U = 0$$

مسـألة ٣ :عيّن مقدار العمل الواجب بذله لتحريك جسم وزنه 980kgf على خط مستقيم مسـافة 10m مع العلم أنه يستند إلى مستوٍ أفقي خشن، وعامل الاحتكاك يساوي 0,5 (الشكل ٦-١١) .

الحل :

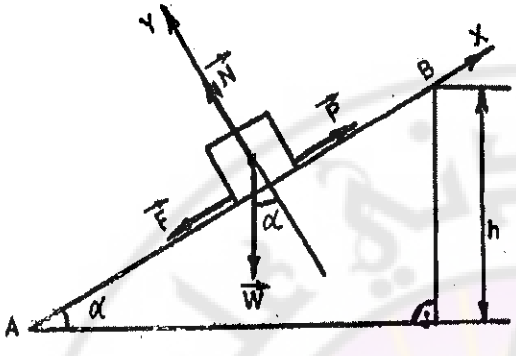
تعيين قوة الاحتكاك :

$$F = \mu \cdot N = \mu W = 0,5 \cdot 980 = 490kgf$$

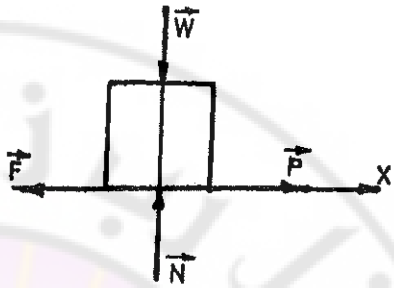
عندما يصبح الجسم على وشك الحركة فإن :

القوة المحركة P = قوة الاحتكاك F = 490kgf

$$U = P \cdot x = 490 \cdot 10 = 4900 kgf \cdot m$$



الشكل (٦-١٢)



الشكل (٦-١١)

مسألة ٤ : يتحرك جسم وزنه 50kgf على مستو مائل خشن نحو الأعلى بسرعة منتظمة ، ما هو مقدار القوة المحركة $\vec{P}$ ومقدار العمل الذي تقوم به عندما تقطع المسافة AB (الشكل ٦-١٢) حيث يعطى :

$$\alpha = 30^{o} , \; h = 5m \; , \; \mu = 0,4$$

الحل :

الجسم متوازن تحت فعل القوى $\vec{W}, \vec{F}, \vec{N}, \vec{P}$ حيث إن :

$$N = W \cos \alpha$$

$$F = \mu N = 0,4 \, W \cos \alpha$$

في اللحظة الحرجة للانزلاق :

$$X = \sum_{i-1}^{n} X_i \Rightarrow P = F + W \sin \alpha = 0.4 W \cos \alpha + W \sin \alpha$$

$$= 50(0,5 + 0,4\sqrt{3}/2) \Rightarrow P = 42.32 kgf$$

مقدار العمل :

$$U = P \cdot AB = 42,32 \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = 42,32 \cdot \frac{5}{0,5} = 432,2 kgf \cdot m$$

مسألة ٥ : إذا كانت القوة $\vec{R}$ هي حاصلة القوى $(\vec{W}, \vec{F}, \vec{N})$ المفروضة في المسألة السابقة، فأثبت أن عملها U' يساوي U − (عمل القوة الموازنة $\vec{P}$) .

الحل :

$$U' = U_1 + U_2 + U_3$$

عمل قوة الثقالة [$\vec{W}(W\sin\alpha, W\cos\alpha)$] :

المركبة $W\cos\alpha$ لا تقوم بعمل لأنها عمودية على الانتقال :

$$U_1 = (-W\sin\alpha)\cdot AB = -Wh$$

$$U_1 = -50\cdot 5 = -250 \text{kgf}\cdot\text{m}$$

عمل قوة الاحتكاك $\vec{F}$: $U_2 = (-0{,}4W\cos\alpha)\cdot AB$

$$= -0{,}4\cdot 50\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{0{,}5} = -173{,}2 \text{kgf}\cdot\text{m}$$

عمل القوة الناظمية $\vec{N}$: $U_3 = 0$ لأن القوة عمودية على الانتقال.

$$U' = -250 - 173{,}2 = -423{,}2 \text{kgf}\cdot\text{m}$$

أي أن : $U' = -U$ وهو المطلوب .

مسألة ٦ : برهن أن عمل قوة الثقالة $\vec{W}$ لجزيئة ما لا يتبع شكل المسار الذي تسير عليه، وإنما يتبع فقط الوضعين الأولي والنهائي اللذين تتحرك الجزيئة بينهما .

الحل :

ليكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ الوضع الأولي للجزيئة (الشكل ٦-١٣) ، و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ الوضع النهائي .

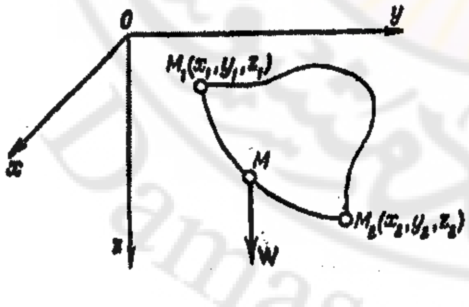
$$dU_{1-2} = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$X = 0\ ,\ Y = 0\ ,\ Z = W$$

بالتعويض ينتج :

$$dU = Zdz = Wdz$$

$$U_{1-2} = \int Wdz = W(z_2 - z_1)$$

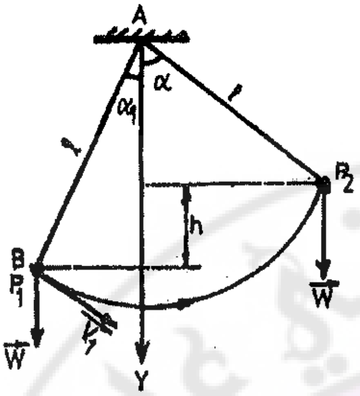


(الشكل ٦-١٣)

نفرض أن $h = (z_2 - z_2)$ فنحصل على :

$$U = W\cdot h$$

أي أن عمل قوة الثقالة مستقل عن شكل المسار وهو المطلوب .



(الشكل ٦-١٤)

مسألة ٧ : تربط كرة صغيرة وزنها W بنهاية خيط لين ، وتأخذ الوضع الأولي P_1 كما في الشكل (٦-١٤) ، ثم تطلق من هذا الوضع بسرعة أولية $\vec{v}_1$ مقدارها $3{,}13\,m/sec$. عيّن الزاوية العظمى α التي يصنعها الخيط مع الشاقول بفرض أن : $\cos\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\ell = 2m$.

الحل :

تغير الطاقة الحركية :

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U = -Wh$$

بالتعويض نحصل على :

$$0 - \frac{Wv_1^2}{2g} = -W\ell(\cos\alpha_1 - \cos\alpha)$$

وذلك لأن $v_2 = 0$

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 - \frac{v_1^2}{2g\ell} - \frac{3}{4} - \frac{(3{,}13)^2}{2\cdot 9{,}8\cdot 2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_{max} = 60^o$$

مسألة ٨ : تتحرك قاطرة وزنها 60tf بسرعة 16km/h نحو الخلف ، فتصطدم نهايتها بعربة للقطار وزنها 10tf وهي بحالة سكون ، وبعد التصادم تتحرك القاطرة مع العربة بسرعة $\vec{v}$. عيّن مقدار هذه السرعة بفرض أن الاحتكاك مهمل .

الحل :

اندفاع القاطرة (في البدء) :

$$\frac{W_1}{g}v_1=\frac{60}{g}\cdot 16$$

اندفاع القاطرة مع العربة (في النهاية) :

$$\left(\frac{W_1+W_2}{g}\right)v=\left(\frac{60+10}{g}\right)v=\frac{70v}{g}$$

قانون الدفع والاندفاع على المحور x :

$$\frac{70}{g}v-\frac{60\cdot 16}{g}=\int X dt$$

بما أن القوة الخارجية معدومة $\Leftarrow \int X dt=0$ فنحصل على :

$$70v=960\Rightarrow v=13{,}71 km/h$$

مسألة ٩ : يقف شخص وزنه $W_1=80kgf$ في المقدمة A لقارب وزنه $W_2=100kgf$ كما في الشكل (٦-١٥) ، ثم يسير نحو مؤخرة القارب B ، كم تصبح المسافة بين مقدمة القارب A والرصيف عندما يصل الشخص إلى مؤخرته B ؟

يعد الماء ساكناً وتهمل مقاومته .

الحل :

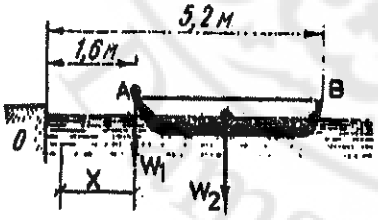
اندفاع الشخص (في البدء) :

$$\frac{W_1}{g}v_1=\frac{W_1}{g}\cdot\frac{x_1}{t}$$

$$=\frac{80}{g}\cdot\frac{3{,}6}{t}$$

اندفاع الشخص مع القارب :

$$\frac{W_1+W_2}{g}v=\frac{180}{g}\cdot\frac{x}{t}$$



الشكل (٦-١٥)

حيث إن t زمن الحركة و x_1 المســافة التي يقطعها الشخص داخل القارب (طول القارب) وx المسافة التي يقطعها القارب في أثناء سيره نحو الرصيف .

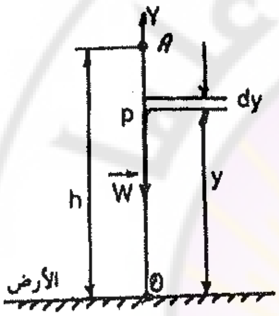
وحسب قانون الدفع والاندفاع مع ملاحظة أنه لا توجد قوى خارجية (انظر المسألة السابقة) ينتج :

$$\frac{180}{g}\cdot\frac{x}{t}-\frac{80}{g}\cdot\frac{3{,}6}{t}=0$$

$$x=\frac{80\cdot 3{,}6}{180}=1{,}6m$$

أي أن مقدمة القارب تصطدم بالرصيف .

مســـألة ١٠ : تســـقط جـــزيئة وزنهـــا $W=1{,}96kgf$ من الموضع A (الشكل ٦-١٦) علـــى الأرض دون ســـرعة أولية ، فتصل إليها بسرعة $14m/sec$ ، عين الطاقة الكامنة للجزيئة وهي في الموضع A بالنسبة للأرض .



الشكل (٦- ١٦)

الحل :

تعيين الارتفاع h :

$$v_O^2-v_A^2=2gh$$

$$14^2-0=2\cdot 9{,}8h\Rightarrow h=10m$$

$$V_A=\int_{A/O}dU=\int_{A/O}Wdy$$

$$V_A=W\int_O^h dy=Wh$$

$$V_A=1{,}96\cdot 10=19{,}6kgf\cdot m=19{,}6\cdot 9{,}8=192J$$

٦-٨. مسائل غير محلولة على النظريات العامة لتحريك الجزيئة :

مسألة ١ : طبقت على جزيئة كتلتها $2\dfrac{kgf \cdot sec^2}{m}$ القوة $\vec{R}(X,Y,Z)$. والمطلوب تعيين دفع هذه القوة في المجال الزمني $(t_2 - t_1)$ وكذلك السرعة $\vec{v}_2$ ، يعطى :

$$\dot{x}_1 = \sqrt{3} \ , \ \dot{y}_1 = 1 \ , \ \dot{z}_1 = 0 \ , \ t_1 = \frac{\pi}{2} \ , \ t_2 = \pi$$

$$X = 6\cos 2t \ , \ Y = 6\sin 2t \ , \ Z = -6\sin 2t$$

الجواب : $I_{mpx} = 0, \ I_{mpy} = -6 \ kgf \cdot sec = -I_{mpz}$

$$\dot{x}_2 = \sqrt{3} \ , \ \dot{y}_2 = -2 \ , \ \dot{z}_2 = 3 \ , \ v_2 = 4 \ m/sec$$

مسألة ٢ : أوجد الزمن اللازم لجسم رمي بزاوية α_0 مع الأفق وبسرعة أولية v_0 حتى يصل إلى الارتفاع الأعظم وذلك اعتماداً على نظرية كمية الحركة ، تهمل مقاومة الهواء .

الجواب : $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$

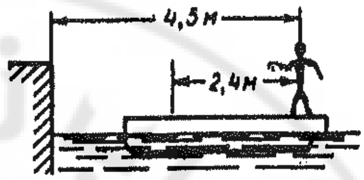
مسألة ٣ : يسير قارب بوساطة محرك احتراق داخلي وعندما تصل سرعته إلى v_0 يوقف المحرك عن العمل ، ويتعرض القارب لمقاومة الماء التي تتناسب مع سرعته $(R = cv)$ ، أوجد الزمن اللازم لكي تتناقص السرعة إلى النصف مع العلم أن كتلة القارب هي m .

الجواب : $t = \dfrac{m}{c}\ln 2$

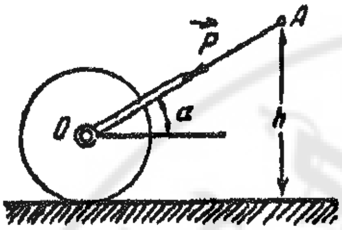
مسألة ٤ : يوجد في ماء ساكن قارب وزنه $150kgf$ وطوله $4m$ ، ويجلس على نهايته شخص وزنه $50kgf$ ، بعد ذلك يسير هذا الشخص إلى مقدمة القارب ، عيّن المسافة التي يقطعها القارب خلال فترة انتقال الشخص من النهاية إلى المقدمة مع العلم أن مقاومة الماء مهملة .

الجواب : $x = 1m$

مسألة ٥ : يوجد في ماء ساكن قارب وزنه 80kgf ويقف في نهايته شخص وزنه 64kgf (الشكل ٦-١٧) ، يتحرك هذا الشخص داخل القارب نحو الرصيف مسافة 2.4m ثم يقف ، ما هي المسافة بين الشخص والرصيف في نهاية هذا الزمن بفرض أن الاحتكاك بين القارب والماء مهمل .



الشكل (٦-١٧)



الشكل (٦-١٨)

مسألة ٦ : لدينا متدحرج اسطواني قطره 60cm ويحركه شخص حيث يضغط على الذراع AO بالقوة $\vec{P}$ (الشكل ٦-١٨) فإذا كان مقدار هذه القوة 12kgf ، فاحسب العمل المبذول عندما يتحرك المتدحرج على المستوي الأفقي مسافة 5m إذا كان :

. $AO = 1,5m$, $h = 1,2m$

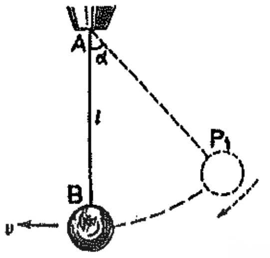
الجواب : $U = 48\ kgf \cdot m$

مسألة ٧ : يجلس شخص وزنه 60kgf في مقدمة قارب صغير وزنه 30kgf ، ثم يطلق هذا الشخص من بندقيته في خط أفقي طلقة وزنها 28gf . احسب السرعة التي يكتسبها القارب بعد خروج الطلقة مع العلم أن سرعة خروجها من البندقية تساوي 660m/sec ومقاومة الماء مهملة .

الجواب : $v = 0,21m/sec$

مسألة ٨ : يتحرك جسم وزنه 19,62kgf حركة مستقيمة على مستو أفقي صقيل بسرعة أولية $v_0 = 0,5\ m/sec$ ، وتطبق عليه بعد ذلك قوة ثابتة $\vec{P}$ شدتها 4kgf وتتجه بعكس اتجاه $\vec{v}_0$. احسب السرعة v_1 للجسم بعد مضي 3sec من تطبيق القوة $\vec{P}$ على الجسم .

الجواب : $v_1 = 5,5m/sec$ ولها نفس اتجاه $\vec{P}$



(الشكل ٦-١٩)

مسألة ٩ : يطلق نواس بسيط كتلته m وطوله ℓ من الموضع P_1 دون سرعة أولية (الشكل ٦-١٩) ، عيّن سرعته v_2 في الموضع B .

الجواب : $v_2 = 2\sqrt{g\ell}\sin\frac{\alpha}{2}$

مسألة ١٠ : تنحدر سيارة وزنها W على مستو مائل صقيل زاويته 10^0 بسرعة عددية تساوي $54km/h$ ، ثم تطبق عليها قوة الكبح $\vec{P}$ التي مقدارها $0{,}3W$ ، عيّن الزمن t اللازم حتى تقف السيارة وكذلك المسافة x التي تقطعها خلال هذا الزمن من لحظة بدء الكبح حتى وقوف الآلية .

الجواب : $x = 91m \;\; , \;\; t = 12sec$

مسألة ١١ : تطبق القوة المحورية $\vec{R}$ على مكبس آلة ، وهذه القوة تتعين بالقانون التالي :

$$R = 0{,}4W(1 - ct)$$

حيث إن W وزن المكبس و t الزمن بالثانية و c عامل يساوي $1{,}6\ [1/sec]$. عيّن سرعة المكبس في اللحظة $t_1 = 0{,}5sec$ مع العلم أن : $v_0 = 0{,}2m/sec$

الجواب : $v_1 = 1{,}4m/sec$

مسألة ١٢: تصعد آلية وزنها $10tf$ على مستوٍ مائل خشن زاويته 30^0 وذلك بتحركها حركة منتظمة فتقطع مسافة $100m$ بمدة $5min$. احسب استطاعة المحرك الصغرى مع العلم أن عامل الاحتكاك بين السيارة والمستوى المائل $0{,}5$ ومردود محرك السيارة 80% .

الجواب : $N_{min} = 51{,}8\ hp$

مسألة ١٣: تتساقط مياه شلال من ارتفاع $6m$ بمعدل $600m^3/min$ على توربين مردوده 80% ، احسب استطاعة هذا التوربين .

الجواب : $N = 471\ kW$

مسألة ١٤ : يسقط جسم وزنه 25kgf من ارتفاع 20m عن سطح الأرض ، وعند اصطدامه بها يدخل فيها بمقدار 0,4m ثم يقف ، المطلوب :

١- تعيين الطاقة الحركية للجسم عند وصوله إلى سطح الأرض .

٢- حساب مقاومة الأرض .

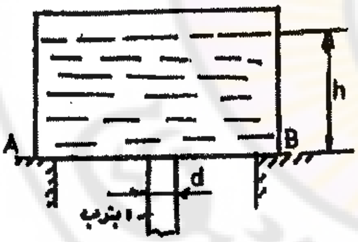
الجواب : $T = 500\ kgf \cdot m\ ,\ \ R = 1275\ kgf$

مسألة ١٥: يتحرك مكبس محرك احتراق داخلي بسرعة 2m/sec والقوة المطبقة عليه هي $q = 4\ [kgf / cm^2]$ ، واستطاعة هذا المحرك $67,5\ [hp]$ ومردوده 90% . احسب قطر هذا المكبس .

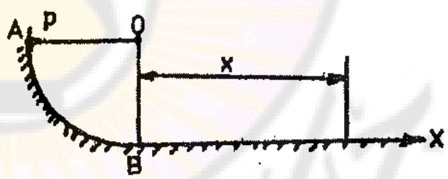
الجواب : $d = 30cm$

مسألة ١٦ : تنطلق جزيئة P من حالة السكون وتتحرك على قوس ربع دائرة صقيل AB نصف قطره 5m (الشكل ٦-٢٠) ، وبعد وصولها إلى النقطة B تتحرك على المستوي الأفقي الخشن x وتتوقف بعد ذلك نتيجة الاحتكاك بينها وبين المستوي الأفقي الذي عامله $\mu = 0,1$. عيّن المسافة x التي تقطعها الجزيئة حتى تتوقف .

الجواب : $x = 50m$



الشكل (٦-٢١)



الشكل (٦-٢٠)

مسألة ١٧ : خزان ماء وزنه 5tf وفيه ماء وزنه 10tf وارتفاعه $h = 1,5m$ (الشكل ٦-٢١) ويتصل بهذا الخزان من الأسفل أنبوب قطره $d = 20cm$ ومزود بسكر .عيّن قوة ضغط الخزان على المسندين A,B عندما يجري الماء في الأنبوب بسرعة $v = \sqrt{2gh}$ مع العلم أن المقاومات الهيدروليكية مهملة ، وأن $h = const.$.

الجواب : $R = 14906kgf$

مسألة ١٨ : تتحرك جزيئة كتلتها $m = 3kg$ على خط مستقيم أفقي نحو اليسار بسرعة 5m/sec ، ثم تطبق عليها قوة ثابتة متجهة نحو اليمين ولمدة 30sec حيث تصبح سرعة الجزيئة مساوية 45m /sec بعد هذا الزمن وهي تتجه نحو اليمين . احسب مقدار هذه القوة .

الجواب : $P = 5 \text{ kgm/sec}^2 = 5N$

مسألة ١٩ : عيّن قوة الشد في خيط النواس البسيط حسب شروط المسألة (٩) في الوضع (AB) .

الجواب : $S = W \cdot (3 - 2\cos\alpha)$

مسألة ٢٠ : طُبقت على جسم ثلاث قوى متعامدة مثنى مثنى ومقاديرها (72,80,96) ، فتحرك هذا الجسم مسافة 24m في اتجاه يصنع مع حامل الحاصلة $(32° 40')$.عيّن العمل الذي تقوم به هذه الجملة من القوى .

الجواب : $U = 2915 \text{kgf.m}$

مسألة ٢١ : تتساقط مياه شلال من ارتفاع 3m بمعدل $3,75 \text{ m}^3/\text{sec}$ على توربين ، عيّن استطاعة هذا التوربين .

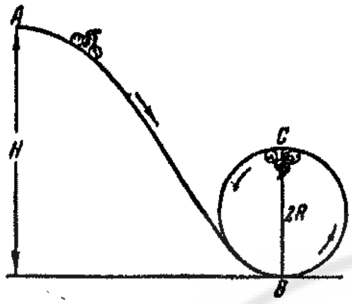
الجواب : $N = 150 \text{ hp}$

مسألة ٢٢ : تقوم قوة مخططة للتغلب على عطالة جسم يتحرك أفقياً ، بمعدل مقداره 960kgf.m ، وتزداد سرعته من 4m/scc إلى 6m /scc ، عيّن وزن هذا الجسم .

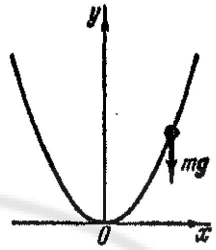
الجواب : $W = 941 \text{kgf}$

مسألة ٢٣ : تنطلق كرة صغيرة وزنها W من حالة السكون من النقطة $M_0(2,2)$ وتتدحرج على منحنٍ صقيل على شكل قطع مكافئ معادلته $y = \frac{x^2}{2}$، ويقع في مستوي الرسم، عيّن ضغط الكرة على الطريق في نقطة الحضيض (الشكل ٦-٢٢) .

الجواب : $R = W\left(1 + \frac{v^2}{g\rho}\right) = 5W$



الشكل (٦-٢٣)



الشكل (٦-٢٢)

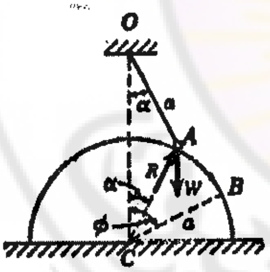
مسألة ٢٤ : ينطلق راكب دراجة مع دراجته من حالة السكون من النقطة A ، ويتدحرج دون احتكاك على سكة منحنية ABC (الشكل ٦-٢٣) .

ما هو مقدار الارتفاع H الذي يمكن راكب الدراجة من عدم مغادرة السكة عند النقطة C (عدم السقوط في هذه النقطة) مع العلم أن نصف قطر القسم الدائري هو R .

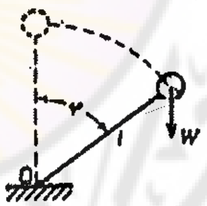
الجواب : $H=\frac{5}{2}R$

مسألة ٢٥ : يطلق النواس البسيط المبين بالشكل (٦-٢٤) من الوضع الشاقولي . احسب الزاوية φ التي تعين الوضع الذي تنقلب فيه القوة المحورية في القضيب من قوة ضغط إلى قوة شد .

الجواب : $\varphi=(48,2)^0$



الشكل (٦-٢٥)

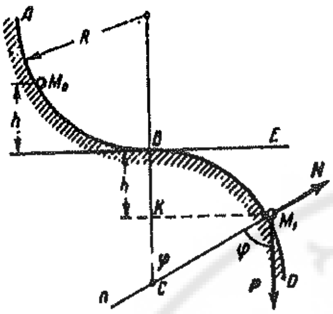


الشكل (٦-٢٤)

مسألة ٢٦ : عيّن الزاوية φ التي تعين موضع النقطة B (الشكل ٦-٢٥) على السطح الأسطواني والتي تغادر منها الجزيئة A المربوطة بالخيط OA هذا السطح بعد قطع الخيط ، يهمل الاحتكاك .

الجواب : $\cos\varphi=\frac{2}{3}\cos\alpha$

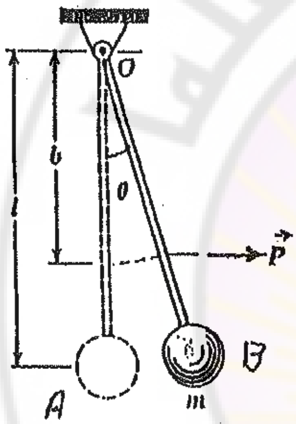
مسـألة ٢٧ : طـريق منحنية تتألف من نصفي قوسـين (الشكل ٦-٢٦) نصف قطر كل منهما R ، وهي تقع في مستوي الرسم ، المماس BE في نقطة تماس القوسين B هو أفقي . توضع في النقطة M_0 كـرة صغيرة وزنها W فتدحرج على الطريق إلى الـنقطة M_1 ثم تغادر الطريق في هذه النقطة .عيّن الارتفاع h بفرض أن الاحتكاك مهمل .



الشكل (٦-٢٦)

الجواب : $h = \frac{R}{5}$.

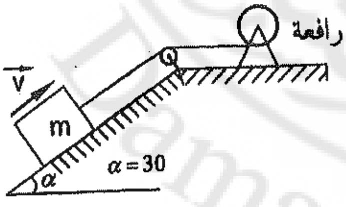
مسألة ٢٨ : ثبتت كرة صغيرة كتلتها $m = 2kg$ فـي نهايـة قضـيب صلد طوله $\ell = 0,8m$ مهمل الـوزن ومتمفصـل في O ، وطبقت عليه قوة أفقية ثابـتة $P = 20N$ تبعد عن O مسافة $b = 0,6m$ عندما كانت $\theta = 0$ (الشكل ٦-٢٧) . احسب سرعة الكـرة عـندما تكـون $\theta = 30$ علماً بأن الجزيئة انطلقت من حالة السكون .



الشكل (٦-٢٧)

الجواب : $v = 1,98m/sec$

مسـألة ٢٩ : تسـحب رافعـة كـتلة مقدارها $m = 360kg$ على مستوٍ مائل خشن كما في الشـكل (٦-٢٨) وبسرعة ثابتة $v = 1,2m/sec$. بفـرض أن اسـتطاعة الرافعة $N = 4kW$ احسب عامل الاحتكاك بين الكتلة والمستوي المائل .
إذا زادت اسـتطاعة الـرافعة فجـأةً إلى 6kW ، فاحسب تسارع الكتلة في هذه الحالة .



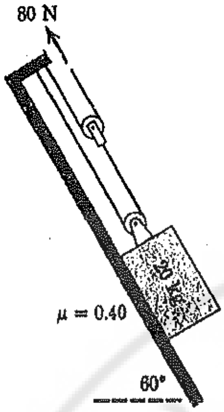
الشكل (٦-٢٨)

الجواب : $\mu = 0,51$ ، $a = 4,56m/sec^2$

مسألة ٣٠ : انطلقت الجملة المبينة بالشكل (٦-٢٩) من حالة السكون تحت تأثير القوة $P = 80N$ ، فإذا علمت أن عامل الاحتكاك بين الكتلة والمستوي المائل هو $\mu = 0,4$ ، فالمطلوب :

١ - حساب السرعة للكتلة بعد أن تقطع مسافة 4m باستخدام مبدأ الطاقة والعمل .

٢ - حساب التسارع للكتلة باستخدام مبدأ دالامبير .



الشكل (٦-٢٩)

الجواب : $N = 6,66m/sec$ ، $a = 5,55m/sec^2$

٦-٩. العمل والطاقة الحركية لجمل الجزيئات المثالية :

الجملة المثالية هي الجملة التي يهمل فيها الاحتكاك وعطالة البكرات ، وتعد الأربطة فيها قابلة للامتطاط كالجملة المبينة في الشكل (٦-٣٠) .

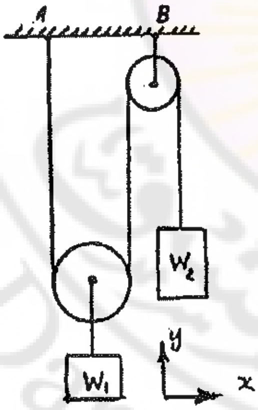
يمكن تعميم قانون العمل والطاقة الحركية لجزيئة ليطبق على جملة جزيئات مثالية .

فالطاقة الحركية لهذه الجملة هي مجموع الطاقات الحركية لجزيئات الجملة ، فإذا كانت كتلة الجزيئة i هي m_i وسرعتها v_i ، فإن الطاقة الحركية T للجملة تتعين بالعلاقة :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i v_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \dot{y}_i^2\right)$$

يتعين العمل الجزئي dU لجميع القوى المطبقة على الجملة خلال الانتقال dy_i التي يتم خلال الفترة الزمنية dt بالعلاقة التالية :

$$dU = \sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i$$



الشكل (٦-٣٠)

حيث إن Y_i هي مركبة القوة الحاصلة المطبقة على الجزيئة m_i .

وفي حال الجزيئة الواحدة وجدنا أن :

$$d\left(m\frac{\dot{y}^2}{2}\right) = Ydy$$

ولجميع جزيئات الجملة نحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{1}{2}m_i\dot{y}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i$$

$$\Rightarrow dT = dU$$

أي أن :

<u>التغير في الطاقة الحركية للجملة يساوي تغير عمل جميع القوى المطبقة على جزيئات الجملة خلال الفترة الزمنية dt .</u>

عندما تنتقل الجملة من الموضع A على الموضع B ، فإن المعادلة الأخيرة تصبح :

$$\boxed{\int_{T_A}^{T_B} dT = \int_{A}^{B} dU} \text{.........} \quad (19)$$

والجدير بالذكر أن القوى الداخلية في هذه العلاقة هي القوى الخارجية الفعالة المطبقة على الجملة فقط ، وأما القوى الردية فإنها لا تقوم بأي عمل لأن الجملة مثالية ، وتفني الداخلية بعضها بعضاً لأنها توجد دائماً على شكل أزواج وكل زوج عبارة عن قوتين متعاكستين مباشرة .

٦-١٠. الطاقة الكامنة لجملة الجزيئات المثالية :

إذا كانت جملة جزيئات أوزانها $(W_1, W_2, \ldots\ldots, W_n)$ وهي موجودة على ارتفاعات $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ على الترتيب عن مستوى المقارنة ، فإن الطاقة الكامنة V لهذه الجملة تساوي :

$$V = W_1y_1 + W_2y_2 + \ldots\ldots + W_ny_n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^{n} W_iy_i$$

ومن خواص مركز ثقل الجسم :

$$W \cdot y_c = \sum_{i=1}^{n} W_i y_i$$

حيث إن y_c ارتفاع مركز ثقل جملة الجزيئات و W وزنها الكلي ، ومنه ينتج :

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} W_i y_i = W y_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

٦-١١. مبدأ حفظ (مصونية) الطاقة (Conservation of Energy):

وجدنا في الفقرة (٦-٩) أنه عندما تنتقل جملة جزيئات من الموضع A إلى الموضع B ، فإن قانون العمل والطاقة هو :

$$T_B - T_A = \int_A^B dU = \int_O^B dU - \int_O^A dU$$

ولكن :

$$\int_O^B dU = -V_B , \int_O^A dU = -V_A$$

وبالتعويض نجد :

$$T_B - T_A = -V_B + V_A$$

$$\boxed{T_A + V_A = T_B + V_B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

$$\Rightarrow E_A = E_B$$

حيث إن :

$$E_A = T_A + V_A \; , \; E_B = T_B + V_B$$

وتسمى E الطاقة الميكانيكية الكلية لجملة الجزيئات Total mechanical Energy .

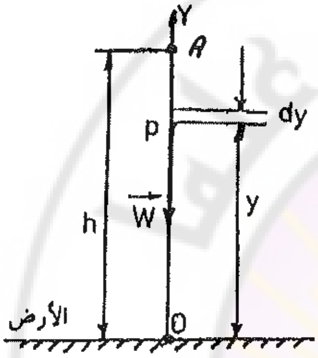
أي أنه :

عندما تنتقل جملة جزيئات مثالية تحت فعل جملة قوى من موضع لآخر ، فإن طاقتها الميكانيكية الكلية (الحركية + الكامنة) تبقى ثابتة ، وإن الجملة لا تكتسب أي مقدار من الطاقة ، ولا تخسر شيئاً منها ، وهذا ما يسمى مبدأ حفظ أو مصونية الطاقة لجملة الجزيئات المثالية .

وفي جمل الجزيئات غير المثالية تتغير الطاقة الميكانيكية ، وذلك كما في الحالة التي يصرف فيها جزء من الطاقة للتغلب على القوى المقاومة كقوة الاحتكاك ، وإن الطاقة الميكانيكية للجملة تتناقص ولكنها لا تضيع بل تتحول إلى حرارة ، ويبقى مجموع الطاقة الميكانيكية والحرارية للجملة ثابتاً .

٦-١٢. مسائل محلولة على الطاقة والعمل ومبدأ حفظ الطاقة :

مسألة ١ : تسقط جزيئة كتلتها 20kg من الموضع A على الأرض دون سرعة أولية فتصل إليها بسرعة 14m/sec . عين الطاقة الكامنة للجزيئة وهي في هذا الموضع بالنسبة للأرض (الشكل ٦-٣١) .



الشكل (٦-٣١)

الحل :

تعيين الارتفاع h الذي تسقط منه الجزيئة :

$$v_0^2 - v_A^2 = 2gh$$

$$14^2 - 0 = 2 \cdot 9{,}8 \cdot h \Rightarrow h = 10m$$

حسب مبدأ مصونية الطاقة نكتب :

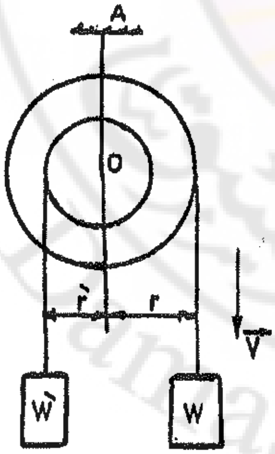
$$T_A - T_0 = -V_A + V_0$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -V_A + V_0$$

$$0 - \frac{1}{2}20 \cdot 14^2 = -V_A - 0 \Rightarrow V_A = 1960J$$

مسألة ٢ : تنطلق الجملة المثالية المبينة في الشكل (٦-٣٢) من الوضع المبين بالرسم من حالة السكون ، احسب سرعة الثقل W عندما يقطع مسافة y = 3m ، يعطى :

$$W = W` = 4kgf, r_1 = 15cm, r_2 = 10cm$$



الشكل (٦-٣٢)

الحل :

$$\frac{v'}{v} = \frac{y'}{y} = \frac{r'}{r} = \frac{10}{15} \Rightarrow \begin{cases} v' = \frac{2}{3} v \\ y' = \frac{2}{3} y \end{cases}$$

تساوي الطاقة الحركية للجملة في البدء الصفر لأنها بحالة سكون ، وأما في النهاية فتساوي :

$$T = \frac{W}{2g} v^2 + \frac{W'}{2g}\left(\frac{2}{3} v\right)^2 = \frac{2}{g}\left(v^2 + \frac{4}{9} v^2\right)$$

$$T = 0{,}295 v^2$$

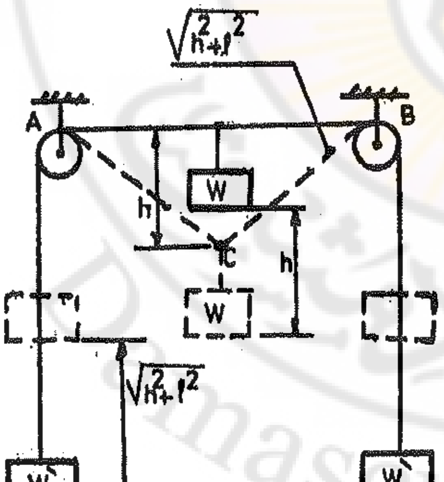
العمل الذي تقوم به الجملة :

$$U = Wy - W' \cdot \frac{2}{3} y = 4\left(y - \frac{2}{3} y\right) = 4 \mathrm{kgf} \cdot \mathrm{m}$$

قانون العمل والطاقة :

$$T = U = 0{,}295 v^2 = 4$$
$$\Rightarrow v = 3{,}68 \mathrm{m/sec}$$

مسألة ٣ : تطلق الجملة المثالية المبينة بالشكل (٦-٣٣) من الموضع المبين بالرسم (الخطوط المستمرة) من حالة السكون ، احسب المسافة العظمى h التي يقطعها الثقل W ، تهمل أبعاد البكرتين A, B .



الشكل (٦-٣٣)

الحل :

بما أن : $v_0 = 0 \Leftarrow$

فالطاقة الحركية في البدء معدومة .

أيضاً $v = 0 \Leftarrow$

فالطاقة الحركية في النهاية معدومة .

بالتالي $T - T_0 = U = 0$

$$U = W \cdot h - 2W'\left(\sqrt{h^2 + \ell^2} - \ell\right) = 0$$

$$\frac{Wh}{2W'} + \ell = \sqrt{h^2 + \ell^2}$$

$$\frac{W^2h^2}{4W'^2}+\ell+\frac{Wh\ell}{W'}=h^2+\ell^2$$

$$h\left(\frac{W^2}{4W'^2}-1\right)=-\frac{W\ell}{W'}$$

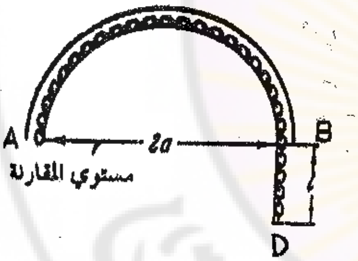
$$h\left(W^2-4W'^2\right)=-4WW'\ell$$

$$\Rightarrow\ h=\frac{4WW'\ell}{4W'^2-W^2}$$

مسألة ٤ : يوضع أنبوب أملس نصف دائري في مستوي الرسم كما في الشكل (٦-٣٤) ، وتوضع داخله سلسلة لينة وصقيلة ويتدلى طرفاها من فتحتي الأنبوب بمسافة ℓ وتكون بهذا الوضع بحالة توازن ، ثم يقص طرفها الأيسر وتبدأ بالخروج من الفتحة اليمنى كما في الرسم، احسب سرعة السلسلة في لحظة خروجها نهائياً من الأنبوب مع العلم أن وزن وحدة الطول للسلسلة هو γ ونصف قطر الأنبوب a . تهمل أبعاد مقطع الأنبوب .

الحل :

في لحظة قص الطرف الأيسر :



الشكل (٦-٣٤)

الطاقة الكامنة : $-\gamma\ell\frac{\ell}{2}$ للطول ℓ

$\left(\gamma\pi r\frac{2r}{\pi}\right)$ لنصف الدائرة.

وذلك بفرض أن AB هو مستوى المقارنة.

والطاقة الحركية تساوي الصفر لأن السلسلة بحالة سكون .

في لحظة خروج السلسلة نهائياً من الأنبوب :

الطاقة الكامنة : $V=-\gamma\left(\frac{\pi r+\ell}{2}\right)$

الطاقة الحركية : $T=\frac{1}{2}\frac{\gamma(\pi r+\ell)}{g}v^2$

حسب قانون مصونية الطاقة نكتب :

$$0 + \gamma\pi r \frac{2r}{\pi} - \gamma\ell \frac{\ell}{2} = \frac{\gamma(\pi r + \ell)}{2g} v^2 - \frac{\gamma(\pi r + \ell)^2}{2}$$

$$4r^2 - \ell^2 = \frac{(\pi r + \ell)}{g} v^2 - (\pi r + \ell)^2$$

$$4r^2 - \ell^2 = \frac{(\pi r + \ell)}{g} v^2 - \left(\pi^2 v^2 + \ell^2 + 2\pi r\ell\right)$$

$$\frac{4r^2 + \pi^2 r^2 + 2\pi r\ell}{\pi r + \ell} g = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4a^2 + \pi^2 a^2 + 2\pi a\ell}{\pi a + \ell} g}$$

٦-١٣. مسائل غير محلولة على العمل والطاقة ومبدأ حفظ الطاقة :

مسألة ١ : سقط جسم وزنه 0,5kgf من الموضع A كما في الشكل (٦-٣١) بسرعة 6m/sec فوصل سطح الأرض بسرعة 60m/sec ، احسب العمل الناتج عن ذلك .

الجواب : $U = 91kgf$

مسألة ٢ : احسب الطاقة الكامنة للجسم وهو في الموضع A بالنسبة للأرض وذلك حسب شروط المسألة السابقة .

مسألة ٣ : ترفع مضخة الماء من عمق 10m بغزارة 55kgf/sec وبسرعة 30m/sec والمطلوب :

١- احسب الطاقة الحركية والكامنة للماء المدفوع .

٢- تعيين استطاعة المضخة .

مسألة ٤ : تسقط مطرقة كتلتها 245kg من ارتفاع 5m على وتد أساس كتلته 190kg فيدخل في الأرض بمقدار 7,5cm والمطلوب تعيين ما يلي :

١- سرعة المطرقة عند تصادمها بالوتد .

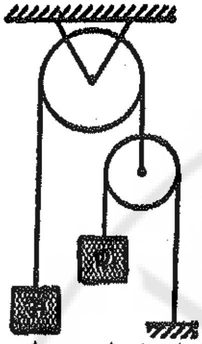
٢- الطاقة الحركية المفقودة بسبب التصادم .

٣- مقاومة الأرض للوتد .

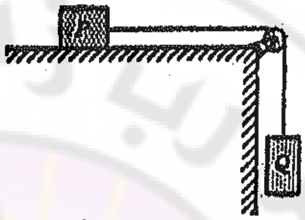
مسألة ٥ : انطلقت الجملة المبينة بالشكل (٦-٣٥) من حالة السكون ، احسب سرعة الجسم Q عندما يقطع مسافة 0,6m وذلك بفرض أن الخيط لين وغير قابل للامتطاط وأن الاحتكاك في البكرة مهمل ، وأما عامل الاحتكاك بين الجسم P والمستوي الأفقي فيساوي 0,25 .

يعطى : $P = 4\text{kgf}\ ,\ Q = 2\text{kgf}$

الجواب : $v = 1.4\text{m/sec}$



الشكل (٦-٣٦)



الشكل (٦-٣٥)

مسألة ٦ : تطلق الجملة المبينة بالشكل (٦-٣٦) من حالة السكون ، احسب السرعة التي يبلغها الجسم Q بعد أن يقطع مسافة 3m وذلك بفرض أن $P = Q = 4\text{kgf}$. يهمل الاحتكاك وعطالة البكرتين .

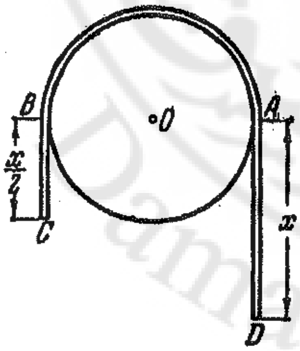
الجواب : $v = 4{,}85\text{m/sec}$

مسألة ٧ : المطلوب حل المسألة (٤) من الفقرة (٦-١٢) بفرض أن طول السلسلة هو πa وهي موضوعة بكاملها داخل الأنبوب وأن ارتجاجاً خفيفاً يجعل السلسلة تبدأ بالحركة .

الجواب : $v = \sqrt{2ga\left(\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

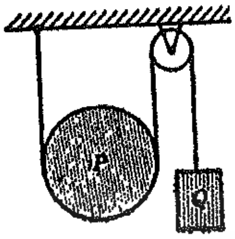
مسألة ٨ : وضعت سلسلة متجانسة طولها ℓ على سطح اسطوانة ملساء نصف قطرها r كما في الشكل (٦-٣٧) ، وفي لحظة البدء كان $AD = 2BC$ وبدأت السلسلة الحركة دون سرعة أولية . عين سرعة السلسلة في اللحظة التي تصبح فيها النهاية C في النقطة B .

الجواب : $v = \dfrac{2}{3}(\ell - \pi r)\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$



الشكل (٦-٣٧)

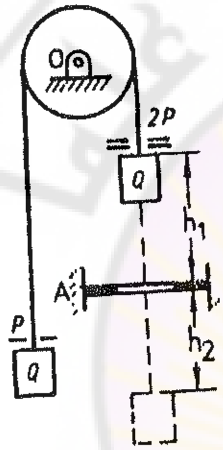
مسألة ٩ : يبين الشكل (٦- ٣٨) جملة مثالية، فإذا أطلقت هذه الجملة من حالة السكون ، فأوجد السرعة v للثقل Q كتابع للمسافة y التي يهبطها الثقل Q .



الشكل (٦-٣٨)

الجواب : $v = \sqrt{2gy\dfrac{Q-0,5P}{Q+0,5P}}$

مسألة ١٠ : لدينا الجملة المثالية المبينة بالشكل (٦-٣٩) ، وقد وضعت على الثقل الأيسر حلقة صغيرة وزنها P وعلى الثقل الأيمن حلقتان وزنهما 2P ، وأطلقت الجملة من الوضع المبين بالرسم (حالة السكون) ، يستطيع الثقل الأيمن Q عبور ثقب الحاجز الأفقي A بينما لا يستطيع عبوره الثقلان 2P، وبعد ذلك يسقط الثقل الأيمن Q مسافة h_2 ويصل إلى حالة السكون . أوجد النسبة $\dfrac{h_2}{h_1}$.



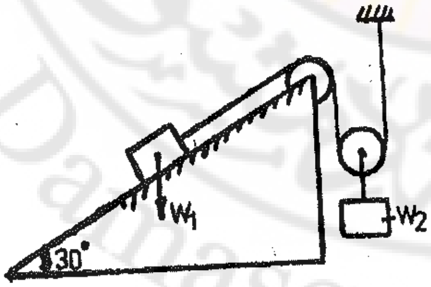
الشكل (٦-٣٩)

الجواب : $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{2Q+P}{2Q+3P}$

مسألة ١١: تطلق الجملة المثالية المبينة بالشكل (٦-٤٠) من حالة السكون فينزلق الجسم W_1 على المستوي المائل إلى أعلى ، ويهبط الجسم W_2 إلى أسفل . احسب المسافة التي يقطعها الجسم W_1 على المستوي المائل عندما تصل سرعته إلى $v = 3m/sec$

يعطى : $W_1 = 30kgf , W_2 = 45kgf$

الجواب : $x = 2,53m$ (نحو الأعلى) .



الشكل (٦-٤٠)

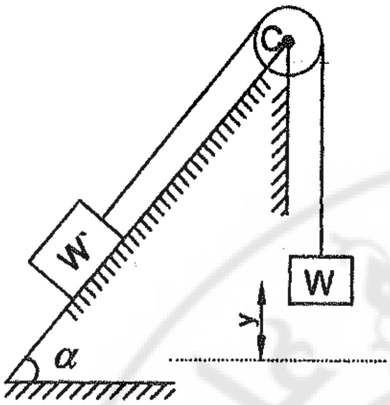
مسألة ١٢: يطلب حل المسألة رقم (٢٨) والشكل (٦-٢٧) حسب مبدأ حفظ الطاقة .

مسألة ١٣: تنطلق الجملة المثالية المبينة في الشكل (٦-٤١) من حالة السكون ، أوجد المسافة y التي يهبطها الثقل W عندما تصبح سرعته $v = 1{,}2m/sec$. يعطى :

$W = 150kgf$ ، $W' = 120kgf$ ، $\alpha = 50$

استخدم في الحل مبدأ حفظ الطاقة ثم مبدأ العمل والطاقة .

الجواب : $y = 0{,}34m$



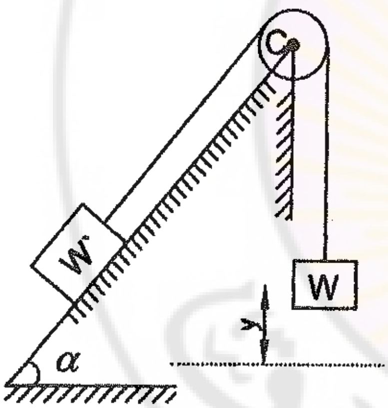
الشكل (٦-٤١)

مسألة ١٤: أطلقت الجملة الميكانيكية المبينة بالشكل (٦-٤٢) من حالة السكون ، أوجد المسافة y التي يهبطها الثقل W عندما تصبح سرعته $v = 1{,}4m/sec$ علماً بأن عامل الاحتكاك بين الثقل W' والمستوي المائل $\mu = 0{,}24$ وأن :

$W' = 110kgf$ ، $W = 150kgf$ ، $\alpha = 45$

طبق مبدأ العمل والطاقة دون تفكيك الجملة ، وهل يمكن تطبيق مبدأ حفظ الطاقة على الجملة المفروضة ؟ وضح ذلك .

الجواب : $y = 0{,}485m$



الشكل (٦-٤٢)

الفصل السابع

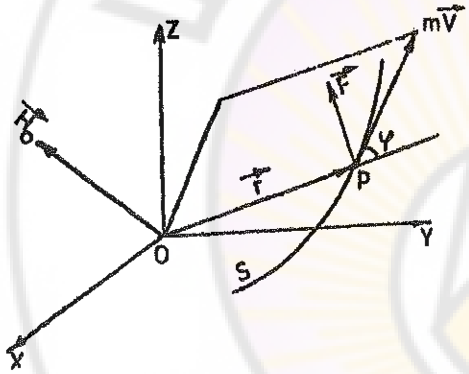
عزم كمية الحركة والميكانيك الفضائي

Moment of Momentum & Mechanics of Space

٧-١. عزم كمية الحركة (Moment of Momentum):

١- تعريفه :

عندما تتحرك الجزيئة P على المسار S (الشكل ٧-١)، فإن اندفاعها (كمية الحركة) في لحظة ما تتعين بالشعاع $m\vec{v}$ المماس للمسار في النقطة P ، حيث إن $\vec{v}$ هو شعاع سرعتها في اللحظة المذكورة و m كتلتها .



الشكل (٧-١)

يسمى عزم الشعاع $m\vec{v}$ بالنسبة لنقطة ما مثل O عزم كمية الحركة للجزيئة P بالنسبة لهذه النقطة في اللحظة المعينة ويرمز له بـ $\vec{H}_O$ وهو يساوي :

$$\boxed{\vec{H}_o = \vec{r} \Lambda m\vec{v}} \text{.........(1)}$$

وحسب خواص الجداء الشعاعي ينتج أن $\vec{H}_O$ عمودي على مستوي الشعاعين $(\vec{r}, m\vec{v})$ ومقداره يساوي :

$$\boxed{H_O = r \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi} \text{..........(2)}$$

حيث إن φ زاوية الشعاعين $(\vec{r}, m\vec{v})$. وتتعين جهة $\vec{H}_O$ حسب قاعدة اليد اليمنى ، فينطبق $\vec{r}$ على $m\vec{v}$ بدورانه بالاتجاه الموجب حول $\vec{H}_O$.

٢- تعيينه :

إذا كانـت إحداثـيات النقطة P هي x , y , z والمركبات القائمة للسرعة $\vec{v}$ هي $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ، فينتج أن :

$$\vec{H}_O = \vec{r} \Lambda m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

والمركبات القائمة للشعاع $\vec{H}_O$ على المحاور x , y , z تتعين بالمعادلات التالية :

$$\begin{Bmatrix} H_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ H_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ H_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{Bmatrix} \ldots\ldots\ldots(3)$$

حيث أن $\vec{H}_O = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}$

٣- مشتقه بالنسبة للزمن :

إذا أجرينا عملية اشتقاق على شعاع عزم كمية الحركة بالنسبة للزمن t فنحصل على ما يلي :

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Lambda m\vec{v} + \vec{r} \Lambda m \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$= \vec{v} \Lambda m\vec{v} + \vec{r} \Lambda m\vec{a}$$

وبما أن $\vec{v} \Lambda m\vec{v} = 0 \Leftarrow \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{r} \Lambda m\vec{a}$

وبما أن $\vec{F} = m\vec{a} \Leftarrow \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{r} \Lambda \vec{F}$

وأما عزم القوة الحاصلة $\vec{F}$ المطبقة على الجزيئة P (الشكل ٧-١) فيساوي :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \Lambda \vec{F}$$

وأخيراً نحصل على العلاقة التالية :

$$\boxed{\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O} \ldots\ldots\ldots (4)$$

أي أن :

معـدل التغير الزمني لعزم كمية الحركة (لعزم الاندفاع) لجزيئة بالنسبة لنقطة ما يساوي عزم الحاصلة المطبقة بالنسبة للنقطة نفسها .

بإسقاط طرفي المعادلة الأخيرة على المحاور الإحداثية نحصل على:

$$\boxed{\frac{dH_x}{dt} = M_x} \quad \boxed{\frac{dH_y}{dt} = M_y} \quad \boxed{\frac{dH_z}{dt} = M_z} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

٧-٢. الميكانيك الفضائي (Mechanics of Space):

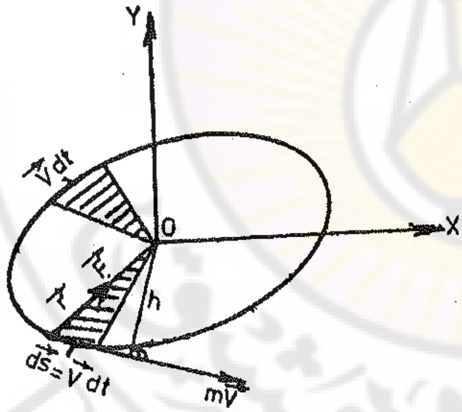
إذا كانت القوة $\vec{R}$ المطبقة على الجزيئة P (الشكل ٧-١) تمر من النقطة O ،فإن $\vec{M}_O = 0$ ويصبح :

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{H}_O = \text{const.}$$

تفيد هذه النتيجة في دراسة الحركة المستوية للجزيئة الواقعة تحت فعل جملة قوى مركزية (Central forces) ، والقوة المركزية هي تلك التي تتجه دائماً نحو نقطة ثابتة معينة كحركة الكواكب (Planetary Motion) ، ففي هذه الحالة يكون :

$$\vec{H}_O = \vec{r}\Lambda m\vec{v} = m(\vec{r}\Lambda\vec{v}) = \text{const.}$$

وذلك بفرض أن O هي الشمس ، و P الكوكب الذي يدور حولها وسرعته $\vec{v}$ وكتلته m (الشكل ٧-٢) .



الشكل (٧-٢)

الشعاع $\vec{H}_O$ ثابت بالمقدار والاتجاه ، وعمودي على المستوي $(\vec{r}, m\vec{v})$ ومقداره يساوي ضعف مساحة المثلث المنشأ على الشعاعين $\vec{r}, m\vec{v}$ أي أن :

$$H_O = mvh = mh\frac{ds}{dt} = \text{const}$$

ومن ناحية أخرى نرى أن مساحة المثلث الصغير dA المتشكل بشعاع الموضع $\vec{r}$ خلال الفترة الزمنية dt يساوي :

$$dA = \frac{ds \cdot h}{2} \Rightarrow ds = \frac{2dA}{h}$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة ينتج :

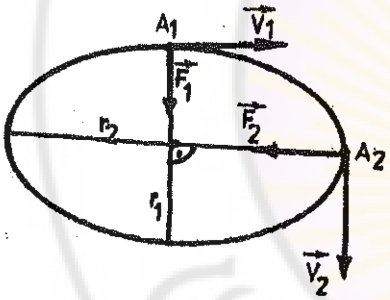
$$H_O = 2m\frac{dA}{dt} = const$$

يتضح من هذه العلاقة أن شعاع الموضع $\vec{r}$ للكوكب P يشكل في أثناء دورانه حول الشمس O مســاحات متســاوية خلال فترات زمنية متساوية ، وهذا ما يسمى قانون المساحات الذي اكتشفه العالم كبلر (Kepler) بالمشاهدة لحركة الكواكب .

ومنه ينتج أن شعاع الموضع $\vec{r}$ للكوكب وسرعة دورانه $\vec{v}$ يتغيران بحيث يبقى عزم اندفاعه (كمــية حــركته) حول الشمس O ثابتاً ، وأن السرعة تكون أعظم ما يمكن في نقاط المدار القــريبة من الشمس ، والعكس بالعكس . وقد كانت هذه النتيجة إحدى الحقائق التي ساعدت نيوتن على صياغة قوانينه .

٧-٣. مسائل محلولة على عزم كمية الحركة (الاندفاع) :

مســألة ١ : تتحرك جزيئة على قطع ناقص بفعل قوة مركزية ، فإذا كانت سرعتها في أقرب وضــع من المركز $v_1 = 30m/sec$ فأوجد سرعتها v_2 عندما تكون في أقصى وضع A_2 علماً بأن $r_2 = 5r_1$ (الشكل ٧- ٣) .



الشكل (٧-٣)

الحل :

بما أن القوة $\vec{F}$ المطبقة على الجزيئة مركزية فإن $H_O = const$ ، أي أن :

$$H_{1O} = H_{2O}$$

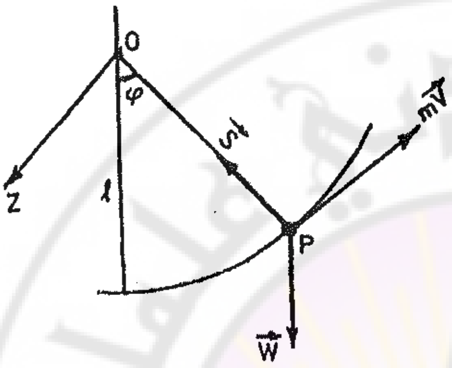
$$H_{1O} = m \cdot r_1 \cdot v_1 = 30mr_1$$

$$H_{2O} = m \cdot r_2 \cdot v_2 = 5mr_1v_2$$

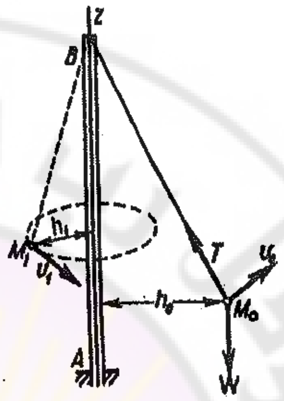
$$30mr_1 = 5mr_1v_2 \Rightarrow v_2 = 6m/sec$$

مسألة ٢ : تربط الجزيئة M في نهاية الخيط MBA غير القابل للامتطاط ، ويمر الجزء BA من الخيط داخل الأنبوب الشاقولي BA (الشكل ٧- ٤) . وفي لحظة البدء كانت الجزيئة

في الموضع M_0 الذي يبعد عن محور الأنبوب بمقدار h_0 وكانت سرعتها $\vec{v}$ عمودية على المستوي M_0BA كما في الرسم ، وبعد ذلك يشد الخيط ببطء داخل الأنبوب إلى أسفل ، فترتفع الجزيئة إلى أعلى أوجد مقدار السرعة $\vec{v}_1$ عندما تصبح الجزيئة في الموضع M_1 الذي يبعد عن محور الأنبوب بمقدار h_1 .



الشكل (٧-٥)



الشكل (٧-٤)

الحل :

$$\frac{dH_z}{dt} = M_z$$

تخضع الجزيئة في كل وضع من وضعيها لقوة الثقالة $\vec{W}$ وقوة شد الخيط $\vec{T}$ ، وإن عزم كل من هاتين القوتين بالنسبة للمحور z معدوم لوقوعها مع المحور z في مستو واحد ، أي أن $M_z = 0$ وبالتالي نحصل على :

$$\frac{dH_z}{dt} = 0 \Rightarrow H_z = \text{const}$$

$$H_{0z} = mv_0h_0, H_{1z} = mv_1h_1$$

$$mv_0h_0 = mv_1h_1 \Rightarrow v_1 = \frac{h_0}{h_1}v_0$$

مسألة ٣ : أوجد قانون اهتزاز نواس رياضي بسيط (الشكل ٧-٥) .

الحل :

$$\frac{dH_z}{dt} = M_z$$

لنفرض أن المحور z عمودي على مستوي الرسم :

$$H_z = mv\ell \quad , \quad M_z = -W\ell\sin\varphi$$

$$v = \frac{d\varphi}{dt}\ell$$

بالتعويض نحصل على :

$$H_z = m\ell^2\frac{d\varphi}{dt} = m\ell^2\dot{\varphi}$$

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -W\ell\sin\varphi = -mg\ell\sin\varphi$$

$$\ell\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$$

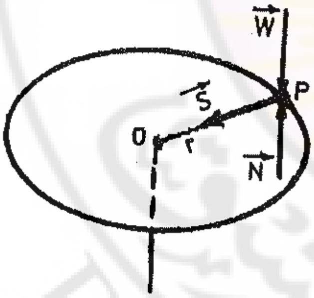
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$$

بما أن الاهتزازات صغيرة فإن $\sin\varphi = \varphi$ ، وبالتالي نحصل على:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

مسـألة ٤ : تربط كرة صغيرة وزنها W بنهاية خيط لين غير قابل للامتطاط وتستند إلى مستو أفقـي صقيل ، وتتحرك على دائرة نصف قطرها r وبسرعة ثابتة v_0 وتمر النهاية الثانية للخيط من ثقب من مركز الدائرة ، ويتدلى شاقولياً نحو الأسفل (الشكل ٧-٦) .

يشد الخيط من طرفه الحر ببطء حتى يصبح نصف قطر الدائرة مساوياً $\frac{r}{2}$. عين السرعة الجديـدة للكـرة ، وقـوة شد الخيط في هذا الموضع.



الشكل (٧-٦)

الحل:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

تخضـع الكـرة للقوى الثلاث $\vec{W},\vec{N},\vec{S}$ حيث أن $\vec{N}$ هي رد الفعل الناظمي و $\vec{S}$ قوة شد الخـيط وهـي قـوة مركـزية . إن عـزوم هذه القوى بالنسبة للمركز O معدومة، أي أن $M_O = 0$ و بالتالي: $H_O = \text{const}$.

في الوضع الأولي: $H'_O = mv_0 r$

وفي الوضع النهائي : $H''_O = mv\frac{r}{2}$

$$H'_O = H''_O \Rightarrow mv_0 r = mv\frac{r}{2} \Rightarrow v = 2v_0$$

لنطبق قانون التحريك الأساسي بالنسبة للناظم :

$$m\frac{v^2}{\rho} = S = \frac{W}{g}\cdot\frac{4v_0}{r/2} = \frac{8Wv_0}{gr}$$

٧-٤. مسائل غير محلولة على عزم كمية الحركة :

مسألة ١ : احسب عزم كمية الحركة لجزيئة كتلتها m بالنسبة لمبدأ الإحداثيات O مع العلم أنها تتحرك في المستوي xy وفق المعادلتين التاليتين :

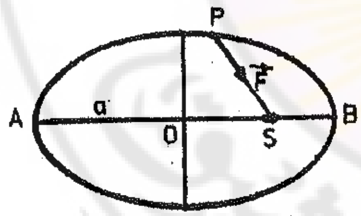
$$x = a\cos pt \ , \ y = b\sin pt$$

بفرض أن a,b,p أعداد ثابتة .

الجواب : $H_O = abpm$

مسألة ٢ : يدور الكوكب P حول الشمس S راسماً قطعاً ناقصاً (الشكل ٧-٧) تقع الشمس S في محرق القطع . فإذا كانت سرعة الكوكب وهو في النقطة B مساوية v_1 ، فاحسب سرعته في النقطة A ، بفرض أن نصف القطر الكبير للقطع a وأن $OS = a\cdot e$

الجواب : $v_2 = \frac{1-e}{1+e}v_1$



(الشكل ٧-٧)

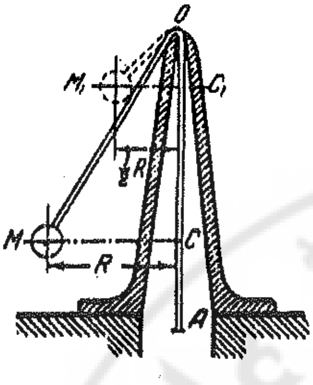
مسألة ٣ : أعد المسألة السابقة بفرض أن $v_1 = 8km/sec$ ، $SB = 6500km$
$SA = 6600km$

الجواب : $v_2 = 7,88km/sec$

مسألة ٤ : تربط الكرة M بنهاية خيط غير قابل للامتطاط يمر من ثقب حامل شاقولي (الشكل ٧-٨) ، وتدور هذه الكرة بسرعة 120 [r/min] وترسم دائرة نصف قطرها R ، ثم يسحب الخيط ببطء من نهايته A إلى أسفل حتى تأخذ الكرة الموضع M_1 ويصبح نصف قطر دائرة الدوران R/2 .

احسب عدد دورات الكرة في الوضع الأخير .

الجواب : $n_2 = 480\ [R/min]$



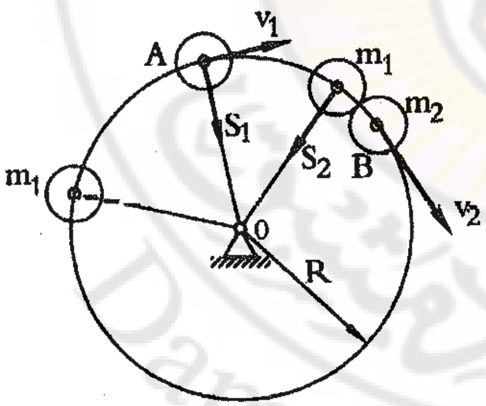
الشكل (٧-٨)

مسألة ٥ : يفرض أن الجزيئة M تدور حول المحور الشاقولي AB بسرعة ثابتة $\bar{v}$ على مسار دائري نصف قطره $h_o = 25cm$ و أن الطول $BM = 50cm$ (الشكل ٧-٤) ، ثم سحب الخيط ببطء نحو الأسفل حتى تضاعفت سرعة الجزيئة . ما هو الطول المسحوب من الخيط داخل الثقب في هذه الحالة .

الجواب : $\ell = 37,2cm$

مسألة ٦ : جزيئة A كتلتها m_1 مربوطة بخيط وتتحرك على مسار دائري نصف قطره R في المستوي الأفقي بسرعة v_1 ، وفي لحظة معينة تصطدم بجزيئة أخرى B كتلتها m_2 ، وبعد التصادم تتحرك الجزيئتان معاً بسرعة v_2 (الشكل ٧-٩) ، فإذا علمت أن الجزيئة B كانت ساكنة قبل التصادم ، وأن $m_2 = 2m_1$ ، فاحسب ما يلي :

١ – السرعة v_2 بعد التصادم بدلالة v_1 باستخدام عزم كمية الحركة .



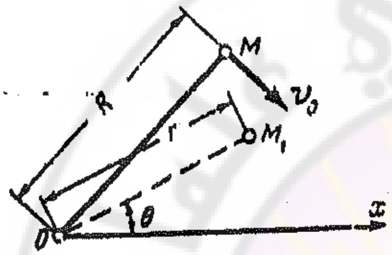
(الشكل ٧-٩)

٢ – النسبة $\frac{S_1}{S_2}$ باستخدام المعادلات التفاضلية ، حيث إن : S_1 قوة الشد في الخيط قبل التصادم ، و S_2 قوة الشد في الخيط بعد التصادم .

الجواب : $v_2 = \frac{v_1}{3}$ ، $S_2 = 3S_1$.

مسألة ٧ : تستند كرة صغيرة M وزنها W إلى مستو أفقي صقيل وتربط بخيط OM غير قابل للامتطاط ويتدلى من ثقب يقع على المركز O (الشكل ٧–١٠) ، ويسحب الخيط ببطء شاقولياً بسرعة ثابتة $\vec{v}$ ، وفي لحظة البدء طبقت على الكرة السرعة $\vec{v}_0$ العمودية على OM . عين قانون حركة الكرة .

الجواب : $\theta = \frac{v_0}{v}\left(\frac{R}{R - vt} - 1\right) = \frac{v_0 t}{R - vt}$



الشكل (٧–١٠)

☆ ☆ ☆

الفصل الثامن

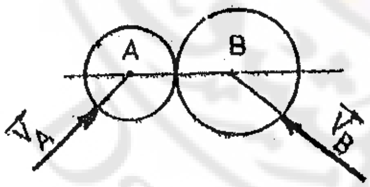
التصادم (Impact)

٨-١. تعريف التصادم :

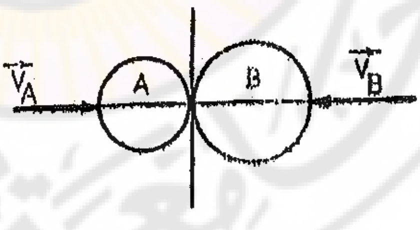
إذا اصطدم جسمان خلال فترة زمنية قصيرة جداً (أجزاء من ألف من الثانية) بحيث يؤثر خلالها كل جسم في الآخر بقوة كبيرة ، فإن هذه الحادثة تسمى التصادم . وتتعلق مقادير القوى ومدى التصادم بشكل الجسمين وسرعتيهما وبخاصة المرونة التي يتمتع بها كل من الجسمين ، تسمى هذه القوى قوى التصادم أو القوى اللحظية أو الآنية ، وإن القوى الأخرى المطبقة على كل من الجسمين كقوة الثقالة صغيرة ، لذا يمكن إهمالها خلال فترة التصادم.

يسمى المستقيم الناظمي على سطحي التماس والمار من نقطة التماس في أثناء التصادم محور التصادم (Line of Impact). إذا وقع مركزا الجسمين على هذا المحور، فالتصادم يسمى المركزي (Central Impact)، وإذا لم يقعا عليه،فالتصادم يسمى اللامركزي (Eccentric). وسنكتفي بدراسة التصادم المركزي .

إذا كانت سرعتا الجسمين منطبقتين على محور التصادم (الشكل ٨-١) ، فإن التصادم يسمى التصادم المركزي المباشر (Direct Central Impact) .



الشكل (٨-٢)



الشكل (٨-١)

وإذا تحرك أحد الجسمين أو كلاهما على محور غير محور التصادم (الشكل ٨-٢) . فالتصادم يسمى التصادم المركزي المائل (Direct Oblique Impact) .

٨-٢. أنواع التصادم :

يمكن تقسيم الأجسام حسب خاصة المرونة إلى الأنواع التالية :

١- أجسام تامة المرونة (Perfectly elastic) :

وهــي تتشــوه (يتغير شكلها وأبعادها) عندما تطبق عليها قوة خارجية مناسبة وتستعيد شكلها الأصلي بعد زوال هذه القوة وذلك مثل النابض الفولاذي .

٢- أجسام تامة اللدونة (Perfectly Plastic) :

وهــي تتشــوه عــندما تطــبق عليها قوة خارجية مناسبة ، ولكنها غير قابلة لاستعادة شكلها الأصلي بعد زوال فعل هذه القوة وذلك مثل قطعة الصابون .

٣- أجسام عادية :

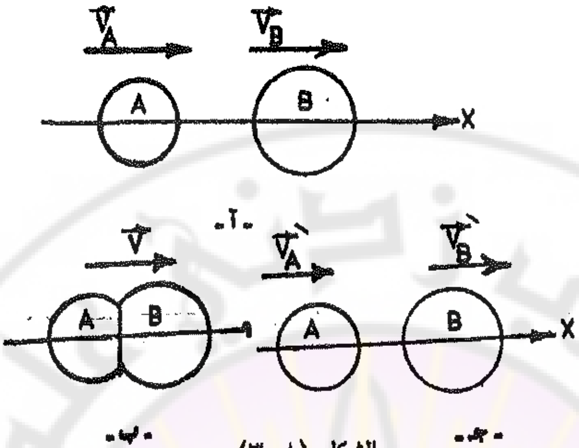
وهــي تتمــتع بخاصــتي المرونة واللدونة ، أي أنها تتشوه عندما تطبق عليها قوة خارجية مناســبة، وتســتطيع تغيير شكلها الجديد بعد زوال القوة الخارجية ولكنها لا تستعيد شــكلها الأصلي تماماً.

عــندما يتصــادم جســمان فإنهما يتشــوهان ، وإن اســتعادة شــكليهما الأصليين تتبع لعدة عــوامل مثل خاصة المرونة التي بها كل منهما ومقدار قوى التصادم . فإذا أمكن للجســمين أن يســتعيدا شــكليهما الأصليين تماماً ، فالتصادم يســمى التصادم المرن التام (Perfectly Elastic Impact) . وإذا كــان الجســمان لدنــين تماماً، فيبقيان مشوهين والتصادم يسمى التصادم اللدن التام (Perfectly Plastic Impact) أو اختصاراً التصادم اللدن (البلاستيكي). وفــي الظروف الواقعية لا يمكن للأجسام أن تكون تامة المرونة ، وفي أثناء التصادم يتشوه الجســمان ثــم يأخذان باستعادة شكليهما ويسمى هذا التصادم في هذه الحالة التصادم العادي المركزي المباشر أو التصادم المركزي المباشر ، وسندرس فيما يلي الأنواع الثلاثة للتصادم.

٨-٣. التصادم المركزي المباشر (Direct central Impact) :

يبين الشكل (٨-٣ آ) الجسمين A,B قبل التصادم والشكل (٨-٣ ب) في لحظة التصادم حين تصبح سرعة الجسمين واحدة $\vec{v}$. لنعين السرعتين $\vec{v}'_A , \vec{v}'_B$ بعد لحظة الإرجاع أو الارتداد (Restitution) كما هو مبين في الشكل (٨-٣ ج) .

من الرسم يتضح أن التصادم يمكن أن يتم إذا كان $\vec{v}_A > \vec{v}_B$ ، وفي أثناء التصادم تنشأ في جملة الجسمين قوى داخلية ، وبما أن كمية الحركة لهذه الجملة مصانة ، لذا يمكن أن نكتب :



الشكل (٨-٣)

$$\boxed{m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B} \quad .... (1)$$

وذلك بفرض أن m_A, m_B كتلتا الجسمين A,B .

أي أن مجموع كميتي الحركة للجسمين المتصادمين قبل التصادم تساوي مجموع كميتي الحركة للجسمين بعد التصادم .

إن هذه المعادلة غير كافية لتعيين السرعتين $\vec{v}'_A, \vec{v}'_B$ ، ولابد لتعيينهما من إيجاد معادلة أخرى تربط بينهما.

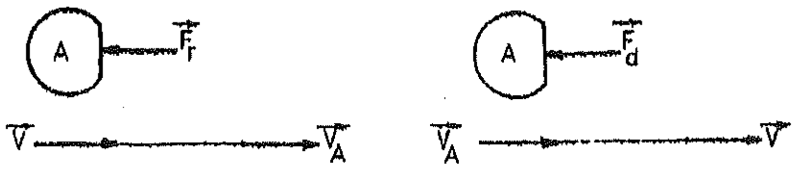
يبدأ التشوه (Deformation) عند نقطة التماس في لحظة بدء التصادم . فتتناقص سرعة الجسم الصادم A تدريجياً بسبب رد فعل الجسم B ، وفي الوقت نفسه تزداد سرعة الجسم B بسبب فعل الجسم A .

سندرس الآن حركة الجسم A خلال فترة التشوه (Period of Deformation) مستخدمين مبدأ الدفع وكمية الحركة . خلال هذه الفترة يفعل الجسم B في الجسم A (الشكل ٨-٤ آ) بالقوة الكبيرة $\vec{F}_d$ (تهمل بقية القوى نظراً لصغر مقاديرها):

$$m_A v - m_A v_A = -\int F_d dt : or$$

$$m_A v - m_A v_A = \int F_d dt = dI_{mp \cdot d}$$

حيث يمتد التكامل على كامل فترة التشوه .



ـ ب ـ ارتداد   ـ آ ـ تشوه

الشكل (٨-٤)

لندرس الآن حركة الجسم A خلال فترة الإرجاع أو الارتداد (Period Of Restitution) حيث يفعل الجسم B في الجسم A بالقوة $\vec{F}_r$ (الشكل ٨-٤ ب) :

$$m_A v'_A - m_A v = -\int F_r dt$$

$$m_A v - m_A v'_A = \int F_r dt = dI_{mp\cdot r}$$

وكذلك يمتد هذا التكامل على كامل فترة الإرجاع .

تختلف القوة $\vec{F}_r$ التي تفعل خلال فترة الإرجاع عن القوة $\vec{F}_d$ التي تفعل خلال فترة التشوه، وقيمة دفعها $\bar{I}_{mp.d}$ ، وقد اصطلح على تسمية النسبة : $\dfrac{\bar{I}_{mp\cdot r}}{\bar{I}_{mp\cdot d}}$ بعامل الإرجاع أو الارتداد (Coefficient of Restitution) ويرمز له بالحرف e أي أن :

$$e = \frac{\bar{I}_{mp\cdot r}}{\bar{I}_{mp\cdot d}} = \frac{m_A v - m_A v'_A}{m_A v_A - m_A v} \Rightarrow e = \frac{v - v'_A}{v_A - v}$$

تتوقف قيمة عامل الإرجاع (e) بشكل رئيسي على مادة الجسمين المتصادمين ثم على شكليهما وحجميهما وسرعتيهما ، وهي تتعين تجريبياً وتكون محصورة مابين الصفر والواحد، أي أن:

$$\boxed{1 \geq e \geq 0}$$

وبما أن قيمة العامل e واحدة في الحالتين فينتج :

$$e = \frac{v - v'_A}{v_A - v} = \frac{v'_B - v}{v - v_B} = \frac{v - v'_A + v'_B - v}{v_A - v + v - v_B}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}} \ldots\ldots\ldots (2)$$

يمثل المقدار $(v'_B - v'_A)$ السرعة النسبية للجسمين بعد التصادم والمقدار $(v_A - v_B)$ السرعة النسبية لهما قبل التصادم .

بذلك يمكن تعيين السرعتين v'_A , v'_B بوساطة المعادلتين (1) و (2) .

بما أنه في حال التصادم المركزي يكون $0 < e < 1$ ، فإن الطاقة الحركية غير مصانة ويضيع جزء منها قبل التصادم . ويمكن البرهان على عدم مصونية الطاقة الحركية لجملة الجسمين المتصادمين بسهولة بمقارنة الطاقة الحركية قبل التصادم وبعده . وفي الواقع يضيع جزء من الطاقة الحركية على التشوه الدائم الذي نشأ في الجسمين ، وكذلك على تولد حرارة.

٨-٤. التصادم تام اللدونة (Perfectly Plastic Impact) :

ويسمى اختصاراً كما ذكرنا أعلاه التصادم اللدن أو البلاستيكي ، ونحصل على التصادم اللدن عندما تكون مادة الجسمين لدنة تماماً وخالية من المرونة مثل قطعة الصابون أو الطين ، ويكون عامل الإرجاع معدوماً ($e = 0$) .

من المعادلة (2) ينتج :

$$v'_B - v'_A = 0 \Rightarrow v'_B = v'_A = v'$$

أي لا يوجد للتصادم اللدن فترة إرجاع ، ويبقى الجسمان ملتصقين معاً بعد عملية التصادم ، وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج:

$$m_A v_A + m_B v_B = v'(m_A + m_B)$$

$$\boxed{v' = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}} \qquad \text{........ (3)}$$

٨-٥. التصادم تام المرونة (Perfectly Elastic Impact) :

إذا كانت مادة الجسمين تامة المرونة كالفولاذ القاسي أو الزجاج ، فإن عامل الإرجاع يساوي الواحد ($e = 1$) ، ويستعيد الجسمان شكليهما الأصليين تماماً بعد التصادم وتأخذ المعادلة (2) الشكل التالي :

$$\boxed{v_A - v_B = v'_B - v'_A} \qquad \text{........ (4)}$$

تبين هذه العلاقة أن السرعة النسبية بعد التصادم تساوي بالمقدار السرعة النسبية قبل التصادم ولكنها تعاكسها بالجهة .

تأخذ معادلتا التصادم المرن التام الشكل التالي :

$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B)$ $v_A + v'_A = v_B + v'_B$	.... (5)

يمكـــن بوســـاطة جملـــة هاتـــين المعادلتين تعيين السرعتين v'_B, v'_A . وإذا ضربنا هاتين المعادلتين ، واختصرنا فإننا نحصل على المعادلة التالية :

$m_A \frac{v_A^2}{2} + m_B \frac{v_B^2}{2} = m_A \frac{v_A'^2}{2} + m_B \frac{v_B'^2}{2}$	.... (6)

أي أن : **الطاقة الحركية لجملة الجسمين في التصادم المرن مصونة ، ولا يحدث أي ضياع في الطاقة .**

٨-٦. حالات خاصة للتصادم تام المرونة :

نورد فيما يلي بعض الحالات الخاصة للتصادم تام المرونة :

١- إذا كان : $m_A = m_B \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} v_A - v'_A &= v'_B - v_B \\ v_A + v'_A &= v'_B + v_B \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow v_A = v'_B \ , \ v'_A = v_B$$

أي أنه :

إذا تصادم جسمان لهما الوزن نفسه ، فإنهما يتبادلان سرعتيهما .

٢- إذا تساوى وزنا الجسمين ، وكان الجسم B ساكناً $(v_B = 0)$ ، فإنه ينتج :

$$v'_A = v_B = 0$$

$$v_A = v'_B$$

في هذه الحالة : **يقف الجسم الصادم A بعد أن يعطي الجسم الثاني كامل سرعته .**

تشـــاهد هـــذه الظاهرة عندما تتصادم كرة البليارد المتحركة مع كرة أخرى ساكنة تصادماً مباشراً .

٣- إذا كانـــت كـــتلة الجســـم B غيـــر محـــدودة $(m_B = \infty)$ وكان هذا الجسم ساكناً $(v_B = 0)$، وذلك مثل كرة فولاذية تسقط على أرض إسمنتية ، ففي هذه الحالة نجد أن $v'_B = 0$ لأن الجسم لا يزال ساكناً ويصبح :

$$v_A + v'_A = 0 \Rightarrow v_A = -v'_A$$

أي أن : الجسم الصادم يرتد بالسرعة نفسها التي صدم بها الجسم الثابت .

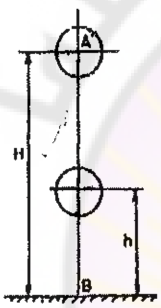
٨-٧. تعيين عامل الإرجاع بالتجربة :

يتعـين عامل الإرجاع e لمواد مختلفة تجريبياً ، وقد بينت التجارب أنه عندما تتغير السرعة في مجالات صغيرة ، فإن عامل الإرجاع يتبع لمادة الجسمين المتصادمين .

يتم تعيين (e) بالتجربة كما يلي :

تـؤخذ كـرة A كتلتها m_A وتترك لتسقط بشكل حر من ارتفاع معلوم H على بلاطة كبيرة كتلتها $m_B = \infty$ وسرعتها $v'_B = v_B = 0$ (الشكل ٨-٥) .

فعندما تصطدم الكرة بالبلاطة ترتد ، فإذا كان التصـادم مرنا تاماً $(e = 1)$ ، فالكرة ترجع إلـى موضـعها الأصلي . وإذا كان لدناً تاماً $(e = 0)$ ، فالكـرة لا ترتد أبداً وتبقى على البلاطة .



الشكل (٨-٥)

وفـي الحالـة العادية $(1 > e > 0)$ ترتد إلى ارتفاع h . وفي هذه الحالة يمكن تعيين عامل الإرجاع e من المعادلة (2) حيث إنه :

$$v_B = v'_B = 0$$

$$e = \frac{0 - v'_A}{v_A - 0} = \frac{-v'_A}{v_A}$$

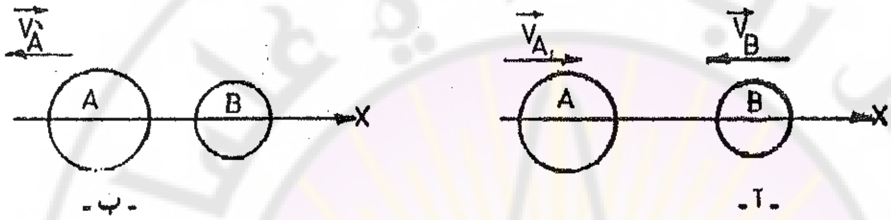
$$v_A = \sqrt{2gH} \quad , \quad v'_A = \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{h}{H}}} \text{.........} \quad (6)$$

فمـثلاً عـندما تكون السرعة بحدود 3m/sec فإن $e = \frac{1}{2}$ (خشب على خشب) و $e = \frac{5}{9}$ (فولاذ على فولاذ) و $e = \frac{15}{16}$ (زجاج على زجاج) .

٨-٨. مسائل محلولة على التصادم المركزي المباشر:

مسألة ١ : تتحرك الكرتان A,B على المحور x كما في الشكل (٨-٦ آ) ، فإذا علمت أن $v_A = \frac{5}{3} m/sec$ ، $m_B = 3kg$ ، $m_A = 5kg$ ، $v_B = -\frac{10}{3} m/sec$ ، وأن الكرة A ترتد بعد تصادمها مع الكرة B بسرعة $v'_A = -\frac{5}{3} m/sec$ ، فأوجد سرعة الكرة B بعد التصادم .



الشكل (٨-٦)

الحل :

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$5 \cdot \frac{5}{3} - 3 \cdot \frac{10}{3} = -5 \cdot \frac{5}{3} + 3v'_B$$

$$\frac{50}{3} - 10 = v'_B = \frac{20}{9} m/sec$$

فالكرة B تتحرك بعد التصادم في الجهة الموجبة للمحور x ، أي أنها ترتد بعد التصادم .

مسألة ٢ : تقف عربة وزنها 300kgf على سكة حديدية ، وتتحرك نحوها عربة أخرى وزنها 150kgf وسرعتها 1m/sec ، وبعد التصادم تتحرك العربتان معاً . أوجد سرعة العربتين التي تتحركان بها بعد التصادم .

الحل :

تتعين سرعة الجسمين v' بالمعادلة (3) :

$$v' = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{150 \cdot 1 + 0}{150 + 300} = \frac{1}{3} m/sec$$

ملاحظة : يتضح من القانون أنه يمكن أن نعوض بالوزن أو بالكتلة .

مسألة ٣ : عيّن حسب شروط المسألة السابقة سرعة كل من العربتين بعد التصادم بفرض أن التصادم تام المرونة .

الحل :

قوانين التصادم المرن التام :

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B)$$
$$v_A + v'_A = v_B + v'_B$$

بالتعويض ينتج :

$$150(1 - v'_A) = 300(v'_B - 0)$$
$$1 - v'_A = 2v'_B$$
$$1 + v'_A = 0 + v'_B$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين نحصل على :

$$2 = 3v'_B \Rightarrow v'_B = \frac{2}{3}\,m/sec$$

$$v'_A = 1 - 2v'_B = -\frac{1}{3}\,m/sec$$

أي أن العربة المتحركة A ترتد ، والعربة الساكنة B تتحرك باتجاه العربة المتحركة .

مسألة ٤ : يتحـرك جسم A وزنه 20kgf بسرعة 0,5 m/sec فيصطدم بجسم آخر ساكن B وزنـه 35kgf تصـادماً مركـزياً مباشـراً ، فيتحـرك الجسم B بعد التصادم بسرعة 0,3m/sec . أحسب عامل الإرجاع (e) .

الحل :

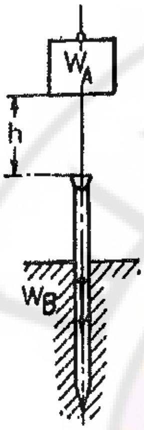
قوانين التصادم المركزي المباشر العادي :

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

$$\Rightarrow 20 \cdot 0,5 + 0 = 20v'_A + 35 \cdot 0,3$$
$$10 = 20v'_A + 10,5 \Rightarrow v'_A = -0,025 m/sec$$
$$e = \frac{0,3 + 0,025}{0,5 - 0} = 0,65$$

مسألة ٥ : يُغـــرز وتد وزنه 400kgf فـــي أســـاس بـــناء بوساطة مطرقة آلية وزنها 1500kgf بضربات متتالية . فإذا كانـــت المسافة بين المطرقة والوتد 2m وكان التصادم بين المطرقة والوتد لدناً ، فعـــيّن مـــردود المطـــرقة ، وكذلك قوة مقاومـــة التربة لدخول الوتد مع العلم أن الـــوتد يدخل في التربة بمقدار 4cm عند كل ضربة .



الشكل (٨-٧)

الحل :

تتألف الضربة الواحدة من المراحل التالية:

١- مـــرحلة ســـقوط المطـــرقة بالمسافة h (الشكل ٨-٧) ، حيث تكون الطاقة المبذولة $(W_A \cdot h)$ ، والسرعة في نهاية هذه المرحلة (بدء لحظة التصادم) هي :

$$v_A = \sqrt{2gh}$$

٢- مرحلة التصادم اللدن، وفيها يكون للمطرقة وللوتد سرعة واحدة تتعين بالقانون (3):

$$v' = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

بتعويض v_A بقيمتها مع ملاحظة أن $v_B = 0$ نحصل على:

$$v' = \frac{m_A \sqrt{2gh}}{m_A + m_B} = \frac{W_A \sqrt{2gh}}{W_A + W_B}$$

٣- مرحلة اختراق الوتد للتربة بحيث يفرض أن مقاومة التربة R منتظمة ، وأن مسافة اختـــراق الـــوتد للتـــربة خـــلال الضربة الواحدة هي δ . في هذه الحالة يتحرك الوتد

والمطرقة كجسم واحد ويتباطآن حتى يقفا بفعل القوة المقاومة R . وحسب قانون الطاقة والعمل (تغير الطاقة الحركية للجملة يساوي العمل الذي تقوم به القوى الفاعلة) يمكن أن نكتب :

$$\left(\frac{W_A + W_B}{2g}\right)v''^2 - \left(\frac{W_A + W_B}{2g}\right)v'^2 = -R\delta + (W_A + W_B)\delta$$

حيث إن : $\left(\frac{W_A + W_B}{2g}\right)v''^2$ هي الطاقة الحركية للجملة في نهاية مرحلة الاختراق وتساوي الصفر لأن $v'' = 0$.

منه ينتج :

$$-\frac{W_A + W_B}{2g} \cdot \frac{W_A^2 2gh}{(W_A + W_B)^2} = -R\delta + (W_A + W_B)\delta$$

$$R = \frac{h \cdot W_A^2}{\delta(W_A + W_B)} + (W_A + W_B)$$

$$R = \frac{2 \cdot 1500^2}{0{,}04 \cdot 1900} + 1900 = 61110\text{kgf}$$

بما أن المجموع $(W_A + W_B)$ صغير جداً بالنسبة لقوة المقاومة R .لذا يمكن إهماله، وتأخذ العلاقة الأخيرة الشكل التالي :

$$R = \frac{hW_A^2}{\delta(W_A + W_B)} \Rightarrow R \cdot \delta = W_A \cdot h \frac{W_A}{W_A + W_B}$$

وكما أوضحنا أعلاه ، فإن $W_A \cdot h$ هي الطاقة المبذولة ، وأما $R \cdot \delta$ فهو العمل في مرحلة الاختراق ، وواضح أن :

$$R \cdot \delta < W_A \cdot h$$

والنسبة بينهما تسمى مردود المطرقة η ، أي أن :

$$\eta = \frac{R \cdot \delta}{W_A \cdot h} = \frac{W_A}{W_A + W_B}$$

$$\eta = \frac{1500}{1900} = 79\%$$

مسألة ٦ : نفرض في حالة الشكل (٨-٧) المعطيات التالية :

$$W_A = 2000\ell bf \ , \ W_B = 1000\ell bf \ , \ h = 10ft$$

وأن التصادم عادي $(e = 0,25)$ ، ومقاومة الاختراق R منتظمة وتساوي $60000\ell bf$.

ما هو عدد ضربات المطرقة حتى يخترق الوتد التربة بمسافة 1ft .

الحل :

قانون العمل والطاقة للوتد في مرحلة الاختراق :

$$\frac{1}{2}\frac{W_B}{g}v_B''^2 - \frac{1}{2}\frac{W_B}{g}v_B'^2 = -R\delta - W_B\delta$$

حيث إن v_B'' سرعة الوتد في لحظة توقفه وهي تساوي الصفر و v_B' سرعته في لحظة بدء الاختراق ، لنحسب هذه السرعة :

$$v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 32,2\cdot 10} = 25,38ft/sec$$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

$$2000v_A + 0 = 2000v_A' + 1000v_B'$$

$$\left.\begin{aligned} v_A &= v_A' + \frac{1}{2}v_B' = 25,38 \\ e &= \frac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B} = \frac{v_B' - v_A'}{25,38} = 0,25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_B' = 21,15ft/sec$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1000}{32,2}(21,15)^2 = -60000\delta + 1000\delta \Rightarrow \delta = 0,117ft$$

عدد الضربات : $n = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{0,117} = 8,5$

٨-٩. مسائل غير محلولة على التصادم المركزي المباشر :

مسألة ١ : يتحرك جسم (A) كتلته 10kg بسرعة 4m/sec ويصطدم بجسم آخر (B) كتلته 12kg ، ويتحرك بسرعة 7m/sec- بحيث إن التصادم لدن . احسب سرعة الجسمين بعد التصادم .

الجواب : $v' = -2m/sec$

مسألة ٢ : يقف قطار وزنه 60tf على سكة حديدية ، ويتحرك نحوه قطار آخر وزنه 40tf وبسرعة 4m/sec ، وبعد فترة يتصادم القطاران ، ويسيران معاً .
أوجد سرعة القطارين بعد التصادم .
الجواب : $v' = 1,6 m/sec$

مسألة ٣ : عيّن حسب شروط المسألة السابقة سرعة كل من القطارين بعد التصادم بفرض أن التصادم تام المرونة .

مسألة ٤ : تتحرك كرتان A,B على المحور x ، ثم تصطدمان تصادماً تام المرونة .
احسب سرعتيهما بعد التصادم بفرض أن :

$$m_B = 2m_A \ , \ v_A = v \ , \ v_B = 0$$

الجواب : $v'_A = -\frac{v}{3} \ , \ v'_B = \frac{2}{3} v$

مسألة ٥ : أعد المسألة السابقة بفرض أن التصادم عادي ، وأن عامل الإرجاع $e = \frac{1}{2}$ وأن $m_B = 3m_A$.
الجواب : $v'_A = -\frac{v}{8} \ , \ v'_B = \frac{3}{8} v$

مسألة ٦ : يُغرز وتد وزنه 200kgf في أساس بناء بوساطة مطرقة آلية وزنها 1000kgf بضربات متتالية ، فيدخل الوتد في التربة بمقدار 2cm عند كل ضربة ، المسافة بين المطرقة والوتد 3m والتصادم بينهما لدن . عين مردود المطرقة ، وقوة مقاومة التربة لدخول الوتد .
الجواب : $\eta = 83\% \ , \ R = 126200 kgf$

مسألة ٧ : تسقط كرة من ارتفاع H على مستوٍ أفقي ثم ترتد عنه ، عيّن الارتفاع الذي تصل إليه الكرة بعد ارتدادها بفرض أن عامل الإرجاع $e = \frac{3}{4}$.
الجواب : $h = \frac{3}{16} H$

مسألة ٨ : تتحرك الكرتان A,B على المحور x ثم تصطدمان تصادماً عادياً . احسب سرعة كل من الكرتين بعد التصادم بفرض أن :

$$m_A = 25kg \;,\; v_A = 25\ m/sec \;,\; e = 0,75$$
$$m_B = 15kg \;,\; v_B = 20m/sec$$

مسألة ٩ : تصطدم كرة A كتلتها m_A وسرعتها v_A مع كرة ثانية ساكنة (B) وتفقد نصف سرعتها . أوجد سرعة الكرة الثانية (B) بعد التصادم و كتلتها بفرض أن عامل الإرجاع $e = \frac{1}{2}$.

الجواب : $v'_B = v_A \;,\; m_B = \frac{1}{2} m_A$

مسألة ١٠ : تتحرك كرتان A,B على خط واحد وفي جهة واحدة ثم تصطدمان ، أوجد سرعتي الكرتين بعد التصادم بفرض أن عامل الإرجاع $e = 0,8$.

يعطى : $v_A = 10m/sec \;,\; W_A = 12kgf$
$$W_B = 10kgf \;,\; v_B = 6m/sec$$

مسألة ١١ : يُغرز وتد وزنه 400kgf في أساس بناء بوساطة مطرقة آلية وزنها 800kgf بضربات متتالية ، فإذا كانت المسافة بين المطرقة والوتد 3m وكان التصادم بينهما مرناً عادياً ، وعامل الإرجاع $e = 0,25$ ومقاومة التربة لدخول الوتد $R = 24tf$. عيّن عدد ضربات المطرقة حتى يدخل الوتد في التربة بمقدار 31,5cm .

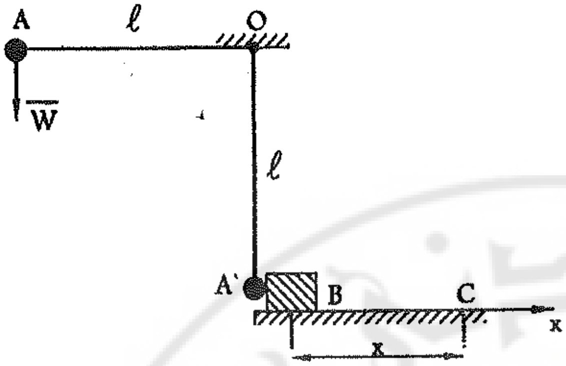
الجواب : تسع ضربات .

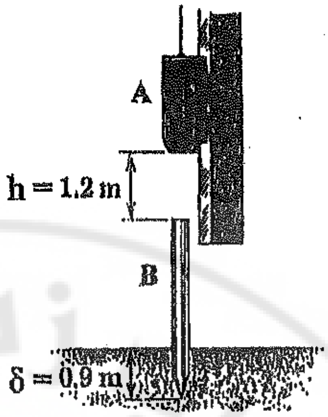
مسألة ١٢ : تهبط مطرقة آلية A كتلتها $m_a = 250kg$ من حالة السكون ومن ارتفاع $h = 1,2m$ على وتد كتلته $m_b = 400kg$ (الشكل ٨-٨) ، فيغرز الوتد في التربة بمقدار $\delta = 0,9m$ ، والمطلوب :

١- حساب عامل الإرجاع (e) علماً أن سرعة المطرقة بعد التصادم مباشرة تصبح مساوية للصفر .

٢- حساب مقاومة التربة لدخول الوتد .

الجواب : $R = 5964,2N$ ، $e = 0,625m$





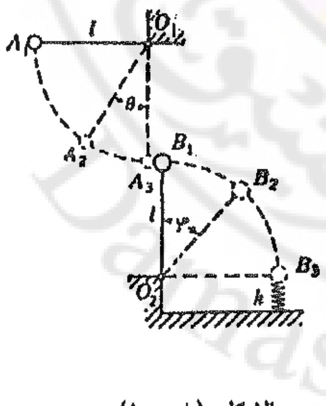
الشكل (٨-٩)

الشكل (٨-٨)

مسألة ١٣ : كرة صغيرة A وزنها $W = 1,2kgf$ وهي مربوطة بسلك OA طوله $\ell = 1m$ ومثبت في O (الشكل ٨-٩) تترك هذه الكرة لتهبط من الوضع الأفقي بدون سرعة أولية ، وعند وصولها إلى الوضع الشاقولي تصطدم مع الكتلة B التي وزنها أيضاً W ، وهذه الكتلة موضوعة على مستو أفقي خشن $\mu = 0,25$ ، فتتحرك الكتلة المسافة x التي تقطعها هذه الكتلة والزمن اللازم لذلك بفرض أن التصادم تام المرونة .

الجواب : $x = 4m$ ، $t = 1,81 sec$

مسألة ١٤ : يطلق النواس (A) المبين في الشكل (٨-١٠) من حالة السكون وهو في الوضع الأفقي O_1A_1، فيهبط نحو الأسفل حتى يصدم النواس (B) الذي يكون في الأصل ساكناً وهو في الوضع الشاقولي O_2B_1 . فإذا كان التصادم تام المرونة ، فالمطلوب : تعيين قيمة الزاوية φ التي تتغير عندها القوة المحورية في OB من قوة ضغط إلى قوة شد أثناء سقوط كرة النواس الأسفل على المسار $B_1B_2B_3$.

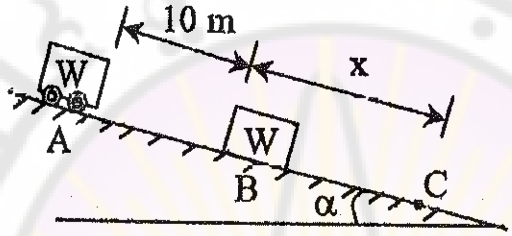


الشكل (٨-١٠)

الجواب : $\varphi = 15,54$

مسـألة ١٥ : تـنطلق عربة صغيرة وزنها W من حالة السكون وهي في الموضع A ، وتتدحـرج دون احتكاك على مستو مائل حتى تبلغ الموضع B فتصدم كتلة ساكنة وزنها W أيضـاً كمـا في الشكل (٨-١١) وبفرض أن التصادم تام اللدونة ، وأن عامل الاحتكاك بين الكتلة التي في الموضع B والمستوي المائل $\mu = 0{,}5$ ، احسب المسافة x إلى النقطة C التي يصل فيها الجسمان إلى حالة السكون ، وكذلك الزمن اللازم لقطع هذه المسافة .

الجواب : $t = 8{,}89\,\text{sec}$ ، $x = 14{,}2\,\text{m}$



الشكل (٨-١١)

☆ ☆ ☆

ملحق

Table 1. Units Used in Mechanics

الجملة المترية والإنكليزية U.S, and Metric Units	الجملة الدولية SI Unite	المقدار Quantity
1 m = 3,28ft , 1 in = 25,4 mm 1 ft = 0,3048 m ,1yd = 0,9144 m 1 ft = 12 in , 1yd = 3 ft 1 mi = 5280 ft 1mi ميل بري = 1.609km	[m] المتر Meter	الطول Length
1 kgf = 9,81N ، [kgf] كيلو غرام ثقلي $1\ N = 10^5\ dyn = 0{,}102\ kgf$ $1\ell bf = 4{,}448N$ ، [ℓb] الباوند 1 kip = 4,448 kN ،[kip] كيلو باوند 1 oz = 0,278N ، (oz) اونس $1\ oz = \frac{1}{16}\ell b$, $1\ ton = 2240\ell b$	Newton [N] نيوتن $1N = 1\left[\frac{kg \cdot m}{sec^2}\right]$ $1\,dyn = 1\left[\frac{g \cdot cm}{sec^2}\right]$ $1N = 10^5\ dyn$	القوة أو الوزن Force
$kgf \cdot sec^2/m$ $1kgf \cdot sec^2/m = 9{,}81kg$ $1\ kg = 0{,}102kgf \cdot sec^2/m$ 1 oz = 28,35g $1\ell b = 0{,}4536kg$ $1slug = \frac{1\ell b \cdot sec^2}{f} = 32{,}2\ell bm$ $= 14{,}59\ kg$	[kg] كيلو غرام كتلة Kilogram	الكتلة Mass
كيلو متر في الساعة $1\ km/h = \frac{1\ m}{3{,}6\ sec}$ 1 mi / h = 0,447 m/sec	متر في الثانية [m/sec]	السرعة Velocity

التسارع Acceleration	متر في مربع الثانية $[m/sec^2]$	ft/sec^2 قدم في مربع الثانية
تسارع الجاذبية الأرضية	$g = 9{,}81\left[\frac{m}{sec^2}\right]$	$g = 32{,}2[ft/sec^2]$
السرعة الزاوية Angular velocity	راديان في الثانية rad / sec	
التسارع الزاوي	راديان في مربع الثانية rad/sec^2	
التردد (التواتر) f frequency	هرتز [Hz]	$1Hz = \frac{1}{sec}$
الوزن النوعي γ	نيوتن لكل متر مكعب $[N/m^3]$	$1\frac{gf}{cm^3} = 9{,}81\cdot10^3\frac{N}{m^3}$
الكتلة النوعية ρ	كيلو غرام كتلة لكل متر مكعب $[kg/m^3]$	
الدفع Impulse	نيوتن . ثانية $[N\cdot sec]$	$\ell b\cdot sec = 4{,}448 N\cdot sec$
الاندفاع (كمية الحركة) Momentum	كيلو غرام كتلة .متر / ثانية $\frac{kg\cdot m}{sec} = N\cdot sec$	$1\ell b\cdot sec = 4{,}448\frac{kg\cdot m}{sec}$
الطاقة Enegy	جول [Joule] $1J = 1N\cdot m$	$J = \frac{kg\cdot m^2}{sec^2}, kgf\cdot m = 9{,}81J$ $1ft\cdot\ell b = 1{,}356J$
العمل Work	جول [J]	$1kW\cdot h = 3{,}6\cdot10^6 J$

$1\frac{kgf\cdot m}{sec}=9{,}81W$ $1h\cdot p=75\frac{kgf\cdot m}{sec}=736W$ $1kW=102\frac{kgf\cdot m}{sec}=1{,}36h\cdot p$	واط [Watt] $1W=\frac{1J}{sec}=0{,}102\frac{kgf\cdot m}{sec}$ $=N\cdot m/sec$	الاستطاعة Power
$1\ bar=1at=10^4\ mm(H_2O)$ $=10^5\ Pa$ $\frac{kgf}{cm^2}=9{,}81\cdot 10^4\ Pa$ $1\frac{kgf}{m^2}=10Pa$	باسكال 1[Pascal] $1Pa=1\frac{N}{m^2}$	الضغط Pressure
1 kg .m = 9,81 J 1 lb . ft =1,356 N.m	نيوتن . متر $[N\cdot m]$	عزم القوة Moment of a force
$[in^4]$	$[m^4]$	عزم العطالة السطح
$[kgf\cdot m\cdot sec^2]$ $\ell b\cdot ft\cdot sec^2$	كيلو غرام . متر مربع $kg\cdot m^2$	عزم العطالة للحجم

T	terra	$1000\ 000\ 000\ 000=10^{12}$
G	giga	$1000\ 000\ 000\ =10^9$
M	mega	$1000\ 000\ =10^6$
.k	kilo	$1000=10^3$
.h	hecto	$100=10^2$
.da	deka	$10=10$
.d	deci	$0{,}1=10^{-1}$
.c	centi	$0{,}01=10^{-2}$
m	milli	$0{,}001=10^{-3}$
μ	micro	$0{,}000\ 001=10^{-6}$
n	nano	$0{,}000\ 000\ 001=10^{-9}$
.p	pico	$0{,}000\ 000\ 000\ 001=10^{-12}$

Table 2 . Mathematical Relations

A. Series : **(expression in bracket following series indicates of convergence)**

$$(1\pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad [x^2 < 1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

where

$$\left.\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{+\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{+\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \end{cases}\right\}[\text{Fourier . exp ansionFor } -\ell < x < \ell]$$

B. Derivatives :

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad ، \quad \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sin\Delta x = \sin dx = \tan dx = dx$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x = \cos dx = 1$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \quad ، \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x \quad , \quad \frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x$$

$$\frac{d\tanh x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

C. Integrals :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2}{15b^2}(3bx-2a)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln(a+bx)]$$

$$\int \frac{xdx}{(a+bx)^n} = \frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2}\left(\frac{a+bx}{2-n}-\frac{a}{1-n}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a}$$

Or

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{-ab}}\tanh^{-1}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+\frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{2}{3}a^2\right)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\sqrt{a+bx+cx^2}+x\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$$

Or :

$$=\frac{-1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}\mp\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2\pm a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x$$

$$\int\sec x\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{\cos x}{3}\left(2+\sin^2 x\right)$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{\sin x}{3}\left(2+\cos^2 x\right)$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x$$

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x - \left(x^2 - 2\right)\cos x$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int e^{ax} \sin px dx = \frac{e^{ax}\left(a \sin px - p \cos px\right)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax} \cos px dx = \frac{e^{ax}\left(a \cos px + p \sin px\right)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax} \sin^2 x dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a \sin^2 x - \sin 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax} \cos^2 x dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a \cos^2 x + \sin 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax} \sin x \cos x dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(\frac{a}{2}\sin 2x - \cos 2x\right)$$

Radius of curvature

$$\rho_{xy} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\rho_{r\theta} = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

جدول المصطلحات العلمية

A	
Absolute	مطلق
Act (to)	يفعل
Action	فعل
Active	فعال، فاعل
Actual	فعلي
Add (to)	يجمع
Addition	جمع
Adjacent	مجاور ، متجاور
Adjust	يضبط
Altitude	ارتفاع
Amplitude	سعة
Analysis	تحليل
Angle	زاوية
Angular	زاوي
Application	تطبيق
Apply (to)	يطبق
Approach (to)	يقترب ، يسعى
Arbitrary	تحكمي، اختياري
Arc	قوس
Arch	قوس
Area	مساحة ، سطح
Arm	ذراع
Arrow	سهم
Assumption	افتراض
Asymptote	خط مقارب
Atmosphere	جو
Atmospheric	جوي
Attract (to)	يجذب
Attraction	جذب ، تجاذب
Average	وسطي
Axial	محوري
Axiom	بديهية
Axis	محور
Axle	محور

B	
Balance	اتزان، موازنة
Balance	ميزان
Balance (to)	وازن
Ballon	قضيب
Base	قاعدة
Basis	أساس
Beam	جائز
Bearings	حوامل ، مقاعد
Belt	سير
Bend (to)	يعطف ، ينعطف
Bending	انعطاف
Block	كتلة

Body	جسم	Chord	وتر
Boom	ذراع	Clockwise	اتجاه دوران عقارب الساعة
Bottom	قعر	Clutch	قابض، فاصل ، واصل
Bracket	كتيفة ، مشجب	Coefficient	أمثال ،عامل
Brake	مكبح	Coincide (to)	ينطبق
Brake (to)	يكبح	Coincidence	انطباق
Bridge	جسر	Collinear	متحد في الخط ، متحد في الحامل
C		Comparison	مقارنة
Cable	كبل ، سلك	Compare (to)	يقارن
Calculate (to)	يحسب	Component	مركبة
Calculation	حساب	Composition	تركيب
Calculus	حساب التفاضل	Compound	مركب
Calibrate (to)	يعاير	Compression	ضغط و انضغاط
Calibration	معايرة	Concentrate (to)	يركز
Cantilever	ظفر ، ظفري	Concentration	تركيز
Case	حالة	Conclude (to)	يستنتج
Catenary	سليسلة	Conclusion	نتيجة ، خاتمة
Center	مركز	Concrete	بيتون
Centimeter	سنتمتر	Concurrent	متلاق
Centroid	مركز (الحجم، السطح ، الطول)	Condition	شرط
Channel	قناة ، مجرى	Cone	مخروط

Configuration	هيئة
Connection Rod	قضيب واصل
Cube	مكعب
Curve	منحن
Circle	دائرة
Circular	دائري
Conservation	انحفاظ
Consider (to)	يعتبر ، يتأمل
Constant	ثابت
Constrain (to)	يقيد ، يلزم
Constraint	قيد
Contact	تماس
Contiguous	متلاصق
Continuous	مستمر
Coordinate	إحداثي
Coplanar	متحد في المستوي -واقع في مستو واحد
Cosine	تجيب ، جيب تمام
Counterclockwise	عكس اتجاه عقارب الساعة
Counterweight	وزن معدل
Couple	مزدوجة
Couple (to)	يزاوج ، يقرن
Crane	رافعة
Crank	يد
Crankpin	مسمار اليد
Crankshaft	العمود المرفقي
Cross Section	مقطع عرضاني
Cylinder	اسطوانة
Cylindrical	اسطواني
D	
Dam	سد
Data	معطيات
Decomposition	تفريق
Decrease (to)	ينقص ، ينقص
Define (to)	يعرف ، يعين
Definitions	تعريف ، تعيين
Definite	معرف، محدد
Deform (to)	يشوه
Deformation	تشويه
Degree	درجة
Denominator	مخرج
Density	كثافة
Depend (to)	يتعلق
Derive	يستنتج ، يشق
Derivation	اشتقاق

Derivative	مشتق
Design	تصميم
Design (to)	يصمم
Determine (to)	يعين
Determination	تعيين
Diagonal (n)	قطر
Diagonal (a)	قطري
Diagram	مخطط ، بيانة
Diameter	قطر
Difference	فرق ، فارق ، حاصل طرح
Differential	تفاضل ، تفاضلي
Differentiate (to)	يفاضل
Dimension	بعد
Direction	منحى ، اتجاه
Directly	مباشرة
Directly	طرداً
Discontinuous	غير مستمر
Discuss (to)	يناقش
Discussion	مناقشة
Disk (Disc)	قرص
Displacement	انتقال
Distance	مسافة
Distribute (to)	يوزع
Distribute	توزيع
Divide (to)	يقسم ، يقسم
Division	تقسيم ، قسمة
Dot	نقطة
Dynamometer	مقياس القوة
E	
Efficiency	مردود
Elastic	مرن
Elasticity	مرونة
Element	عنصر
Ellipse	قطع ناقص
Energy	طاقة
Engine	محرك
Engineering	هندسة
Equal	مساو
Equality	مساواة
Equation	معادلة
Equivalent	مكافئ
Equilibrant	موازنة
Equilibrium	توازن
Even	زوجي
Example	مثال ، مثل
Express (to)	يعبر
Expression	عبارة
External	خارجي

F	
Figure	شكل
Fictions	تخيلات
Finite	منته ، محدود
Flexible	لين
Flexibility	ليونة
Fluid	سائل
Force	قوة
Formula	صيغة
Foundation	أساس
Frame	إطار
Free	حر ، طليق
Friction	احتكاك
Fulcrum	نقطة استناد
Function	تابع
Fundamental	أساسي
Funicular	حبلي ، خيطي

G	
Gas	غاز
Gate	بوابة
Gear	مسنن
General	عام
Geometric	هندسي
Geometry	هندسة
Girder	جائز رئيسي
Graph	مخطط
Graphical	تخطيطي
Gravitation	ثقالة
Gravity	ثقالة
Gross	إجمالي
Guide	هاد، دليل ، محز
Guide (to)	يهدي ، يدل

H	
hammer	مطرقة
Hang (to)	يتدلى
Height	ارتفاع
Hinge	مفصل
Hinge (to)	يتمفصل
Homogeneity	تجانس
Homogeneous	متجانس
Hook	خطاف
Hoop	حلقة
Horizon	الأفق
Horizontal	أفقي
Hydrostatics	علم السكون المائي
Hypothesis	فرضية

I	
Identical	مطابق ، متطابق
Identity	مطابقة
Impend (to)	يوشك ، يشرع

Inch	أنش
Inclined	مائل
Increase	ازدياد
Increase(to)	يزداد ، يزيد
Increment	تزايد
Indefinite	غير محدد
Independent	مستقل
Index	دليل ، قرينة
Inequality	متراجحة
Infinitesimal	غير متناه في الصغر
Infinity	لا نهاية
Integer	عدد صحيح
Integral	تكامل
Integration	استكمال
Integrate (to)	يستكمل
Intensity	شدة
Interaction	تفاعلي
Internal	داخلي
Interpretation	تفسير
Intersect (to)	يقطع ، يتقاطع
Intersection	تقاطع
Introduction	مقدمة ، تقديم
Inverse	مقلوب
Inversely	عكساً

Isosceles	متساوي الساقين
J	
Joint	وصلة ، عقدة
K	
Kinetic	حركي
Kinematics	علم الحركة
L	
Law	قانون
Length	طول
Level (n)	سوية
Level (a)	سوي
Lever	رافعة
Limit	حد ، نهاية
Line	خط
Linear	خطي
Load	حمل
Loading	تحميل
Locomotive	قاطرة
Logarithm	لوغارتيم
Long	طويل
Longitudinal	طولاني
M	
Machine	آلة
Magnetic	مغناطيسي

Magnitude	مقدار
Major	رئيسي
Mass	كتلة
Mast	صاري
master	مسيطر
Material (a)	مادي
Materials	مواد
Matter	مادة
Maximum	أعظم ، أكبر
Mean	أوسط
Measure(to)	يقيس
Measurement	قياس
Mechanical	ميكانيكي
Mechanics	علم الميكانيك
Medium	وسط
Member	عضو
Meter	متر
Meter	مقاس
Method	طريقة
Middle	منتصف ، أوسط
Millimeter	مليمتر
Minimum	أصغر ، أدنى
Minor	ثانوي
inus	ناقص
ment	عزم
Motion	حركة
Move (to)	يحرك ، يتحرك
Multiplication	ضرب
Multiply(to)	يضرب
Mutual	متبادل
N	
Negative	سالب
Neglect (to)	يهمل
Negligible	مهمل
net	شبكة
Neutral	حيادي
Normal (n)	ناظم
Normal (a)	ناظمي
Notation	مجموعة رموز
Number	عدد
Numerator	صورة
Numerical	عددي
O	
Odd	فردي
opposite	معاكس ، مخالف
P	
Parabola	قطع مكافئ
Parabolic	بشكل قطع مكافئ
Parallel	مواز
Parallelepiped	متوازي سطوح

Parallelogram	متوازي أضلاع	Principal	رئيسي
Pendulum	نواس	Principle	مبدأ
perimeter	محيط	Prism	موشور
Perpendicular (n)	عمود	Problem	مسألة
Perpendicular (a)	عمودي	Product	جداء
Pin	مسمار	Project (to)	يسقط
Pin(to)	سمّر	Projection	مسقط
Piston	مكبس	Proportion	تناسب
Pitch	خطوة (اللولب)	Proportional	متناسب
Plane	مستو	Prove (to)	يبرهن
Planet	كوكب سيار	Proof	برهان
Plate	لوح ، صفيحة	Pull (to)	يشد
Plus	زائد	Pulley	بكرة
Point	نقطة	**Q**	
Pole	قطب	Quantity	كمية
Polygon	مضلع	**R**	
Position	موضوع ، وضع	Radius	نصف القطر
Positive (n)	موجب	Ratio	نسبة
Postulate (to)	يضع موضوعة	Ray	شعاع
Postulate (n)	موضوعة	Reaction	رد فعل
Potential (a)	كامن	Rectangle	مستطيل
Precision	دقة	Rectangular	مستطيل ، قائم
Press	مكبس	Reduce (to)	يختصر ، يرد
Pressure	ضغط	Reduction	اختصار ، رد

Redundant	فائض
Relation	علاقة
Relative	نسبي
Resolution	تفريق ، حل
Rest	سكون
Resultant (n)	حاصلة
Resultant (a)	حاصل
Rigidd	صلد
Ring	خاتم ، حلقة
Rivet	تبشيم
Rool (to)	يتدحرج
Roller	متدحرج
Root	جدر
Rope	حبل
Rotate (to)	يدور ، يدير
Rotation	دوران

S

Sag	تدلي ، سهم
Scale	مقياس
Sag (to)	يتدلى
Science	علم
Screw	برال ، لولب
Section	مقطع
Sector	قطاع
Sense	وجهة
Shade	ظل
Shaft	جذع
Shell	قشرة
Sign	إشارة
Similar	شبيه ، مشابه
Similarity	تشابه
Simple	بسيط
Sine	جيب
Size	مقياس ، قدر
Sketch	رسم مبسط
Slab	بلاطة
Slender	نحيل
Slide (to)	ينزلق
Slope	ميل
Slope	منحدر
Smooth	صقيل
Solid	صلب
Solution	حل
Space	فراغ ، فضاء
Span	مجاز
Symmetry	تناظر
System	جملة
Specifications	مواصفات
Sphere	كرة
Spin (to)	يلف

Square	مربع	Tangent	مماس
Stable	مستقر	Tangential	مماسي
Standard (n)	معيار ، عيار	Tensile	شدي ، توتري
Standard (a)	معياري ، عياري	Tension	توتر ، شد
State	حالة	Theorem	نظرية
Static	علم السكون	Theory	دراسة نظرية
Steam	بخار	Thick	ثخين
Steel	فولاذ	Thickness	ثخن
Straight	مستقيم	Thin	رقيق ، دقيق
Strength	مقاومة ، قوة	Tie Bar	قضيب ربط
Stress	اجهاد	Tire	عجلة
String	خيط	Top	ذروة ، أعلى
Structure	منشأ ، انشاء	Torque	عزم ، مزدوجة
Strut	عمود قصير	Torsion	فتل
Sum	مجموع	Torisional	فتلي
Sum (to)	يجمع	Total	كلي
Superposition	ضم	Traction	جر
Support	مسند ، اسناد	Transmit (to)	ينقل ، ينتقل
Surface	سطح	Transversal	عرضاني
Suspend (to)	يعلق	Trapezoid	شبه منحرف
Symbol	رمز	Transmissibility	الانزلاقية ،قابلية الانزلاق
Symmetrical	متناظر ، تناظري	Triangle	مثلث
T		Trigonometric	مثلثي
Tangency	تماس	Trigonometry	علم المثلثات

Trough	هوة ، آنية
Truss	جائز شبكي
Trusty	موثوق به

U

Unbalance	اختلال الاتزان
Uniform	منتظم
Unit	وحدة
Unstable	قلق ، غير مستقر

V

Variable	متحول ، متغير
Vector	شعاع ، حامل
Vectorial	شعاعي
Vertex	ذروة
Vertical	شاقولي
Virtual	وهمي ، افتراضي
Volume	حجم

W

Wave	موجة
Wedge	سفين
Weight	وزن
Wheel	دولاب
Width	عرض
Wide	عريض
Winch	ونش
Windmill	طاحونة هوائية
Wing wall	جدار جانبي
Wire	سلك
Wood	خشب
Wood framing	هيكل خشبي
Work	عمل
Wrench	مفتاح ربط

Z

Zero	صفر
Zone	منطقة

المراجع العلمية :

١. الميكانيك الهندسي (٢) ــ أ .د . وليد مصطفى خرطبيل .

- مطبوعات جامعة دمشق .

٢. الميكانيك الهندسي (٣)

ــ أ . د . وليد خرطبيل ــ د . مروان البشير ــ د . مازن الحلبي .

- مطبوعات جامعة دمشق .

٣. مسائل في الميكانيك الهندسي ــ ميشير سكي ــ إيفان فيسولفسكي .

- دار مير للطباعة والنشر ــ موسكو .

٤. الميكانيك الهندسي ــ ستاتيك ــ جوزيف ف . شيللي .

- دار ماكجرهيل للنشر .

٥. الميكانيك الهندسي ــ ديناميك ــ جوزيف ف . شيللي .

- دار ماكجرهيل للنشر .

٦. الميكانيك الهندسي ــ المجلد الأول ــ الاستاتيك ــ ج . ل . ميريام

- دار جون وايلي وابنائه للنشر .

٧. الميكانيك الهندسي ــ المجلد الثاني ــ الديناميك ــ ج . ل . ميريام

- دار جون وايلي وابنائه للنشر .

٨. الميكانيك الهندسي ــ س . تاج .

- دار مير للطباعة والنشر .

٩. الميكانيك الهندسي ــ علم السكون ــ س . تيموشنكو ــ د . يونغ .

- دار مطبوعات جامعة دمشق .

١٠. الميكانيك الهندسي ــ علم التحريك ــ س . تيموشنكو ــ د . يونغ .

- مطبوعات جامعة دمشق .

اللجنة العلمية :

أ.د. وليد خرطبيل

أ.د. محمود وردة

أ.د. فيصل الخليل

المدقق اللغوي:

عادل ديوب