الرياضيات والإحصاء

(الجزء النظري)

منشورات جامعة دمشق

كلية الهندسة الزراعية

الرياضيات والإحصاء

(الجزء النظري)

الدكتور

إحسان الموصللي

أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

الدكتور

أحمد عبد الله

المدرس في قسم الاقتصاد الزراعي

جامعة دمشق

1435 – 1436 هـ

2014 – 2015 م

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة:

يعتمد التقدم في المجال الزراعي على ازدهار بقيِّة العلوم ذات الصلة. وتُعد العلوم الأساسية اللبنة الأولى في صرح هذا التقدم؛ إذ تعطي الحلول والتفاسير للكثير من الظواهر الطبيعية، وتُنمي لدى الطالب القدرة على المحاكمة العقلية في تعليل كثير من أساليب التقانة الحديثة وفهمها.

يُعد كل من الرياضيات والإحصاء من العلوم الأساسية الضرورية للمهندسين؛ لما تقدمه من قوانين وتحليل ومعالجة للصعوبات التي تعترضهم في حياتهم العملية.

لقد وُضع هذا الكتاب لطلاب السنة الأولى في كلية الزراعة وفق المنهاج المقرر من قبل المجالس الجامعية المتخصصة، وعلى الرغم من أن مادة الكتاب نظرية، إلا أننا راعينا في وضعه المستوى العلمي لطلاب كلية الزراعة، فقد اعتمدنا البساطة والسهولة في التقديم وفي الشرح وابتعدنا عن البراهين الرياضية المعقدة التي لا يمكن أن تكون ذات فائدة كبيرة لطلاب كلية علمية تطبيقية، وحاولنا قدر الإمكان وضع الكثير من التمارين الرياضية والإحصائية؛ لتوضيح الأفكار المطروحة ولإكساب الطالب المهارة الكافية؛ ليحل بنفسه تمارين مشابهة وليتفهم المقرر ويستوعبه.

نعالج في هذا الكتاب من خلال تسعة فصول:

1- المصفوفات وأنواعها، مقلوب مصفوفة، رتبة مصفوفة، التحويلات الأولية على المصفوفات، المعينات ذات المراتب المختلفة وحل جملة معادلات خطية.

2- الأعداد العقدية وأهم العمليات التي تتم عليها.

3- العمليات على كثيرات الحدود والطرق العددية.

4- منحنيات الدرجة الثانية وتصنيفها.

5- تبويب البيانات الإحصائية.

6- مقاييس النزعة المركزية والتشتت.

7- الارتباط والانحدار.

8- المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية.

9- الأرقام القياسية والسلاسل الزمنية.

قام كل من السيدين: الدكتور إحسان الموصللي والدكتور أحمد عبد الله بإعداد هذا الكتاب مناصفة، ونأمل أن نكون قد وُفقنا في عرض موضوعاته عرضاً شيقاً عسى أن يستفيد الطالب منه الفائدة المرجوة.

والله ولي التوفيق

المؤلفان

د. إحسان الموصللي   د. أحمد عبد الله

الفصل الأول

المصفوفات matrices

تعرف الطالب خلال المرحلة الثانوية على بعض أسس المصفوفات والمحددات وشيئا عن بعض التعاريف والعمليات الجبرية عليها.

سوف نتناول في هذا الكتاب بشيء من التفصيل أنواع المصفوفات في حقل الأعداد الحقيقية (real)، وكيفية التعامل معها جبريا في ضوء كثير من المبرهنات والنتائج المساعدة. كذلك سوف نتناول الطرق المختلفة في حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.

ومن المفيد قبل أن ندخل في العمليات الجبرية وحل المعادلات أن نذكِّر الطالب ببعض الأسس والتعاريف حتى يستطيع متابعة الموضوع.

1-1 المصفوفة matrix:

مجموعة من العناصر a_{ij} المنتمية إلى حقل ما وليكن حقل الأعداد الحقيقية R، والمرتبة على عدد من الأسطر m وعدد من الأعمدة n، ويحدها من الجانبين قوسين كبيرين [ ] أو متوسطين ( ) أو مزدوجين (( ))، ويعبر عن المصفوفة رمزياً بأحرف لاتينية كبيرة A أوB أو ..... أو بالشكل (a_{ij})، ونلاحظ أن لكل عنصر a في المصفوفة دليلان i و j يحددان موقع ذلك العنصر من المصفوفة من حيث رقم السطر i ورقم العمود j الذي يتوضع فيه ذلك العنصر.

سوف نعتمد في هذا الكتاب الرمز [ ] ونرمز للمصفوفة بأحرف لاتينية كبيرة A أو B أو .....

مثال 1:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -20 \\ 3 & 19 & 13 \\ -6 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} -7 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A تعبر عن الشكل العام لمصفوفة تحوي على m من الأسطر و n من الأعمدة، ونلاحظ الدليلين المرادفين لكل عنصر من عناصر المصفوفة اللذين يحددان موقع ذلك العنصر.

المصفوفة B تحوي على أربعة أسطر وثلاثة أعمدة، فمثلاً العدد 7 واقع على السطر الثالث والعمود الثاني، والعدد 1 واقع على السطر الرابع والعمود الأول، والعدد 5 واقع على السطر الرابع، والعمود الثالث والعدد 6 واقع على السطر الثالث، والعمود الأول وهكذا...

المصفوفة C تحوي سطرين وأربعة أعمدة.

1-2 مرتبة المصفوفة

إن مرتبة المصفوفة (Order) هي عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n، ونعبر عنها على شكل جداء ثنائي (m×n) دون إجرائه أو (m ، n) مباشرة خوفاً من الالتباس، وغالباً ما نكتب مرتبة المصفوفة أسفلها جهة اليمين من قوسي المصفوفة أو أسفل يمين رمزها اللاتيني، ففي المثال السابق نستطيع أن نكتب:

$A_{(m,n)}$ أي أن مرتبة المصفوفة A هي m سطراً و n عموداً.

$B_{(4,3)}$ أي أن مرتبة المصفوفة B هي أربعة أسطر وثلاثة أعمدة.

$C_{(2,4)}$ أي أن مرتبة المصفوفة C هي سطران وأربعة أعمدة.

1-3 أنواع المصفوفات:

تصنف المصفوفات إلى نوعين رئيسيين وذلك حسب تساوي أو عدم تساوي الأسطر مع الأعمدة.

أولاً: المصفوفة المستطيلة:

هي مصفوفة من المرتبة (m و n) بحيث $m \neq n$

مثال 2:

لتكن المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&1\\6&0&3\\2&3&2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&2\\2&-3\\3&5\\2&6\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}2&3&4&5\\1&-6&2&3\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&4&7\end{bmatrix}$$

المصفوفة A مصفوفة مستطيلة من المرتبة (4,3)

المصفوفة B مصفوفة مستطيلة من المرتبة (4 , 2)

المصفوفة C مصفوفة مستطيلة من المرتبة (2 , 4)

المصفوفة D مصفوفة مستطيلة من المرتبة (1 , 3)

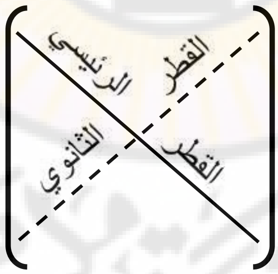
ثانياً- المصفوفة المربعة:

هي مصفوفة من المرتبة (m,n) بحيث m = n لذلك نقول أن المصفوفة المربعة هي مصفوفة من المرتبة (n , n) ونقول اختصاراً من المرتبة n.

وأهم ما يميز المصفوفة المربعة وجود قطر رئيسي يمر وهميا من العناصر a_{11}, a_{22}, a_{33} … a_{nn} كذلك وجود قطر ثانوي يمر وهميا من العناصر $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2} \dots a_{n1}$.

مثال 3:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&-2\\-3&11&8\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من المرتبة 3، وعناصر قطرها الرئيسي هي على التوالي 2 و4 و 8، بينما عناصر قطرها الثانوي هي على التوالي 5 و 4 و 3-

وحسب ميزة القطر الرئيسي فإن للمصفوفة المربعة عدة أنواع ... أهمها:

1- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ من المرتبة n، وجميع عناصرها أعلى وأسفل قطرها الرئيسي أصفار $(a_{ij} = 0 \;:\; I \neq j)$.

2- **المصفوفة السلمية:**هي مصفوفة مربعة قطرية، وعناصر قطرها الرئيسي قيم عددية متساوية.

3- **المصفوفة الواحدية In:**

هي مصفوفة سلمية، وقيمة كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد ويرمز له I_n.

$$I_n = (a_{ij}) \quad : \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 \;;\; i \neq j \\ 1 \;;\; i = j \end{cases}$$

4- **المصفوفة المثلثية:** هي مصفوفة مربعة من المرتبة n جميع عناصرها الواقعة أعلى وأسفل قطرها الرئيسي أصفار؛ فهي مصفوفة قطرية.

5- **المصفوفة المثلثية الدنيا:** هي مصفوفة مربعة من المرتبة n، وجميع عناصرها الواقعة فوق قطرها الرئيسي أصفار $(a_{ij} = 0 \;;\; i < j)$.

6- **المصفوفة المثلثية العليا:** هي مصفوفة مربعة من المرتبة n، وجميع عناصرها الواقعة تحت قطرها الرئيسي أصفار $(a_{ij} = 0 \;;\; i > j)$.

7- **المصفوفة التناظرية:** هي مصفوفة مربعة من المرتبة n، وعناصر سطرها الأول تماثل عناصر عمودها الأول قيمة وإشارة، وعناصر سطرها الثاني تماثل عناصر عمودها الثاني .... وهكذا

$$(a_{ij} = a_{ji})$$
$$i = 1, 2, 3, \dots n \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots n$$

8- **المصفوفة التخالفية:**

هي مصفوفة مربعة من المرتبة n، وعناصر سطرها الأول تساوي عناصر عمودها الأول بالقيمة العددية وتختلف معهم بالإشارة، وعناصر سطرها الثاني تساوي عناصر عمودها

الثاني بالقيمة العددية وتختلف معهم بالإشارة ....وهكذا، وهذا يستلزم أن تكون عناصر القطر الرئيسي كلها أصفاراً.

$$i = 1, 2, \dots n \quad ; \quad j = 1, 2, \dots n \;:\; (a_{ij} = -a_{ji})$$

9- وهناك ما يسمى بالمصفوفة الصفرية؛ هي مصفوفة من المرتبة n وm، وجميع عناصرها أصفار $(a_{ij} = 0 \ \forall\, i, j)$.

مثال 4: لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & -2 \\ -5 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & -8 \\ -6 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من المرتبة الخامسة، وهي مصفوفة قطرية ومثلثية.

المصفوفة B مصفوفة مربعة من المرتبة الرابعة، وهي مصفوفة قطرية وسلمية في آن واحد.

المصفوفة C مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة، وهي مصفوفة مثلثية عليا.

المصفوفة D مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة، وهي مصفوفة مثلثية دنيا.

المصفوفة E مصفوفة مربعة من المرتبة الخامسة، وهي مصفوفة تناظرية.

المصفوفة F مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة، وهي مصفوفة تخالفية.

المصفوفة G مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة، وهي مصفوفة صفرية.

المصفوفة H مصفوفة مستطيلة من المرتبة (1 و 3)، وهي مصفوفة صفرية.

4-1 العمليات الجبرية على المصفوفات:

1- تساوي مصفوفتين:

نقول عن مصفوفتين $A = (a_{ij})_{m,n}$ و $B = (b_{ij})_{p,q}$ أنهما متساويتين إذا تحقق الشرطين الآتيين:

1- المصفوفتان من نفس المرتبة $(p = m, q = n)$

2- عناصرهما المتناظرة متساوية ($a_{ij} = b_{ij}$ من أجل جميع قيم j, i)

مثال: 5 لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \neq B \;,\; B \neq C \;,\; C \neq D \;,\; A = C \;,\; B \neq D$$

2- جمع المصفوفات:

إن عملية جمع مصفوفتين أو أكثر يتطلب أن يكون جميعهم من نفس المرتبة، وتتم عملية الجمع جبريا للعناصر المتناظرة؛ فهي عملية تبديلية.

$$A + B = C \;:\; C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \;;\; i = 1, 2, 3 \ldots m \;,\; j = 1, 2, 3 \ldots n$$

مثال: 6 لتكن المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد الآتي:

1- $A + B \,,\, B + C \,,\, C + D \,,\, B + A \,,\, A + (B + D) \,,\, (A+B)+D$

2- أيٌّ من المصفوفات السابقة متساوية مع الأخرى، وعلل ذلك؟

الحل:

-1

$$A+B=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 2 & 12 & -6 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

غير ممكن لعدم تساوي مرتبة المصفوفة B مع مرتبة المصفوفة C   B + C

غير ممكن لعدم تساوي مرتبة المصفوفة C مع مرتبة المصفوفة D   C + D

-2

لتساوي مرتبة المصفوفتين وتساوي العناصر المتناظرة في كليهما   A = D

لعدم تساوي العناصر المتناظرة في كليهما $A \neq B$

لعدم تساوي العناصر المتناظرة في كليهما $B \neq D$

ونترك للطالب أن يستنتج:

A + B = B + A

A + (B + D) = (A +B) + D

3- جداء مصفوفة بعدد حقيقي:

إن جداء مصفوفة $A = (a_{ij})_{m,n}$ بعدد حقيقي R هو عبارة عن مصفوفة ناتجة عن جداء كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالعدد R؛ أي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A.R = R.A \begin{bmatrix} Ra_{11} & Ra_{12} & Ra_{13} & \dots & Ra_{1n} \\ Ra_{21} & Ra_{22} & Ra_{23} & \dots & Ra_{2n} \\ Ra_{31} & Ra_{32} & Ra_{33} & \dots & Ra_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & Ra_{m2} & Ra_{m3} & \dots & Ra_{mn} \end{bmatrix}$$

نستنتج من تعريف جداء مصفوفة بعدد أن عملية طرح مصفوفتين A– B هو عملية جمع لهما بعد ضرب المصفوفة B بالعدد (1−) بشرط أن تكون المصفوفتين لهما نفس المرتبة؛

أي: $A - B = A + (-1) . B$

كذلك من الممكن إخراج عدد (عامل مشترك) من مصفوفة ما، وكأن عناصر تلك المصفوفة قد قسمت على ذلك العدد.

4- جداء المصفوفات:

يتم جداء مصفوفتين A . B بشرط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى A يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية B.

إن عملية جداء مصفوفتين $A = (a_{ij})_{mn}$ و $B = (b_{ij})_{p,q}$ أي $(A_{mn} . B_{pq})$ بشرط $n = p$ هو مصفوفة $C = (c_{ij})_{mq}$ حيث عدد أسطرها يساوي عدد أسطر الأولى وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة الثانية، وعناصر الجداء معرفة بالشكل:

$$\mathrm{C_{ij}} = \mathrm{a_{i1}}.b_{1\mathrm{j}} + \mathrm{a_{i1}}.\mathrm{b_{2j}} + \mathrm{a_{i3}}.\mathrm{b_{3j}} + \cdots + \mathrm{a_{in}}.\mathrm{b_{nj}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{a_{i1}}.\mathrm{b_{ij}}$$

وينتج من التعريف أن الجداء B . A غير ممكن دائماً، إلا إذا كانتا المصفوفتان مربعتين ومن نفس المرتبة.

مثال 6: لتكن المصفوفتان A و B

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد A . B ، B . A

الحل:

$$A.B = \begin{bmatrix} 3\times1+2\times5+(-1)\times6 & 3\times0+2\times3+(-1)\times4 & 3\times2+2\times1+(-1)\times2 \\ 0\times1+4\times5+6\times6 & 0\times0+4\times3+6\times4 & 0\times2+4\times1+6\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{bmatrix}$$

نجد أن B . A غير ممكن؛ لعدم تحقق شرط الجداء.

مثال 7: لتكن المصفوفتان C و D

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 2\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\\ -2 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$$

أوجد C. D

$$C.\,D=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\\ -2 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 35\\ 1 & 19\\ 13 & 14\end{bmatrix}$$

5- منقول مصفوفة:

لتكن المصفوفة $A=(a_{ij})_{m,n}$، إذا بادلنا أسطر المصفوفة بأعمدتها محافظين على الترتيب، حصلنا على مصفوفة ندعوها منقول المصفوفة A، ونرمز لها بالرمز A^T، وإن منقول المصفوفة $A=(a_{ij})_{m,n}$ هو المصفوفة $A^T=(a_{ij})_{nm}$

أي:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

من خلال مضمون منقول مصفوفة نستطيع أن نستنتج:

1- إن منقول المنقول لمصفوفة A يساوي نفس المصفوفة A.

$(A^T)^T = A$

2- إن منقول مجموع مصفوفتين A و B يساوي مجموع منقوليهما.

$(A + B)^T = A^T + B^T$

3- إن منقول جداء مصفوفتين A و B يساوي جداء منقوليهما بترتيب معاكس.

$(A . B)^T = A^T . B^T$

4- إن منقول جداء مصفوفة A بعنصر w يساوي جداء ذلك العنصر بمنقول المصفوفة، بحيث w عدد لاصفري.

$$(w.A)^T = w.A^T$$

مثال 8: لتكن المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&3\\1&2&3\\1&2&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&6&5\\0&1&2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&5\\1&2\\3&3\\2&4\end{bmatrix}$$

المطلوب أوجد:

$$C\,.\,D\,,\,(C\,.\,D)^T\,,\,(A+B)^T\,,\,(A^T)^T\,,\,A^T$$

الحل:

$$A^T=\begin{bmatrix}2&1&1\\4&2&2\\3&3&1\end{bmatrix}\ ,\quad (A^T)^T=\begin{bmatrix}2&4&3\\1&2&3\\1&2&1\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T=\begin{bmatrix}2&1&1\\4&2&2\\3&3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&1&0\\2&6&1\\3&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&1\\6&8&3\\6&8&2\end{bmatrix}$$

غير ممكن؛ لعدم تحقق شرط الجداء بين منقولي المصفوفتين $(C.D)^T=D^T.C^T$

غير ممكن؛ لعدم تحقق شرط الجداء بين مصفوفتين $C\,.\,D$

5-1 العمليات الأولية على المصفوفات:

تجري على المصفوفة سلسلة من العمليات المنظمة تنتقل خلالها المصفوفة إلى أشكال متكافئة أو متدرجة تسمى تلك العمليات بالعمليات الأولية.

تقسم العمليات الأولية إلى عمليات على أسطر المصفوفة وتسمى بالعمليات الأولية السطرية، وعمليات على أعمدة المصفوفة وتسمى بالعمليات الأولية على الأعمدة، وذلك حسب الهدف من إجراء تلك العمليات وتتضمن:

1- مبادلة سطرين (أو عمودين) في المصفوفة.

2- ضرب عناصر سطر (أو عمود) بعدد غير صفري.

3- إضافة جداء عناصر سطر (أو عمود) بعدد غير صفري إلى عناصر سطر آخر (أو عمود آخر).

في هذا الكتاب سوف نعتمد الرموز الآتية:

أ- نرمز إلى كلمة تكافئ بالرمز $\sim$

ب- نرمز إلى كلمة سطر (row) بالرمز R

ج- نرمز إلى كلمة عمود (Column) بالرمز C

د- نرمز إلى كلمة نبدل بين السطرين (أو العمودين) بالرمز $\rightleftarrows$

هـ - نرمز إلى كلمة نقسم بالرمز /

1-6 الشكل المدرج المختزل للمصفوفة:

إذا أجرينا على مصفوفة سلسلة متتالية من العمليات الأولية، وحصلنا على مصفوفة مكافئة من الشكل الواحدي ما أمكن فإننا ندعو تلك المصفوفة بالشكل المدرج النهائي، ويجب أن تتمتع تلك المصفوفة بالصفات الآتية:

1- العناصر a_{ij} : i=j جميعها تساوي الواحد ما أمكن، وندعو كلاً منهم بالعنصر القائد في سطره، وندعو عموده بعمود القيادة.

2- إن ظهر نتيجة لتلك العمليات الأولية سطر جميع عناصره أصفار، فإننا نقوم بعملية تبديل أسطر، بحيث يكون السطر الصفري هو السطر الأخير في المصفوفة.

من خلال صفات الشكل المدرج المختزل للمصفوفة فإننا نستنتج (كل مصفوفة تملك شكلاً مدرجاً مختزلاً وحيداً نصل إليه بإجراء سلسلة من العمليات الأولية).

مثال 9:

أوجد الشكل المدرج المختزل للمصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{2R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_2/4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2+R_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \overset{-2R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \overset{-3R_1+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -27 \end{bmatrix} \overset{-R_2+R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \overset{-3R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-2R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{-11/2R_3+R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{7/2R_3+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7–1 رتبة مصفوفة:

إن رتبة مصفوفة ولتكن $A = (a_{ij})_{m,n}$ هو عدد طبيعي يعبر عنه بعدد الأسطر غير الصفرية في شكلها المدرج المختزل النهائي، ويرمز له بالرمز Rank A أي: $\text{Rank } A \leq m$

بما أن عدد الأسطر غير الصفرية في الشكل المدرج المختزل النهائي يساوي عدد أعمدة القيادة فإن: $\text{Rank } A \leq n$

نستنتج من ذلك أن:

1. $n \geq \text{Rank } A \leq m$
2. رتبة المصفوفة المربعة من المرتبة n أصغر أو تساوي n
3. رتبة المصفوفة المستطيلة العمودية $(n < m)$ أصغر أو تساوي n

4. رتبة المصفوفة المستطيلة الأفقية ($m < n$) أصغر أو تساوي m

5. $\text{Rank } A \le \min(m,n)$

مثال 10:

أوجد رتبة المصفوفة C
$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & -3 & -1\\ 3 & 4 & 10\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & -3 & -1\\ 3 & 4 & 10\end{bmatrix}\underset{\sim}{R_1 \rightleftarrows R_2}\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 10\end{bmatrix}\underset{-3R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 7 & 7\\ 3 & 13 & 13\end{bmatrix}\overset{R_2/7}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 13 & 13\end{bmatrix}$$

$$\overset{-3R_2+R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 13 & 13\end{bmatrix}\overset{-13R_2+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Longrightarrow \text{Rank } C = 2$$

ونلاحظ في المثال السابق أن Rank A=2 وأن Rank B=3

8-1 نظير مصفوفة (أو مقلوب مصفوفة)

لتكن A و b مصفوفتين مربعتين عكوستين من المرتبة n، وكان حاصل جداءهما تبديلي ويساوي مصفوفة واحدية، فإننا ندعو المصفوفة B نظير المصفوفة A (أو مقلوب المصفوفة A) ونرمز له بالرمز A^{-1} والعكس صحيح.

$$A \,.\, B = B \,.\, A = I_n$$
$$A^{-1} = B \quad , \quad B^{-1} = A$$

من خلال التعريف نستنتج أن المصفوفة اللاعكوسة (الشاذة) ليس لها نظير.

سوف نناقش في هذا الكتاب طريقتين للحصول على نظير مصفوفة مربعة عكوسة:

1- حالة مصفوفة مربعة عكوسة من المرتبة الثانية:

لتكن A مصفوفة مربعة عكوسة من المرتبة الثانية، نتبع الخطوات الآتية لحساب نظيرها

أ- نحسب قيمة محددها ΔA.

ب- نأتي بالمصفوفة المساعدة (هي المصفوفة A بعد تبديل عنصريها الواقعين على قطرها الرئيسي وتغيير إشارتي عنصريها الواقعين على قطرها الثانوي ونرمز لها A').

ج- نظير المصفوفة A هو المصفوفة المساعدة A' مقسوما على ΔA.

(شريطة أن $\Delta A \neq 0$) $A^{-1} = A' / \Delta A$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta A = ab - bc \qquad A' = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

إن نظير مصفوفة عكوسة هو مصفوفة من نفس المرتبة وعلى الطالب أن يبرهن ذلك.

2- حالة مصفوفة مربعة عكوسة (الطريقة العملية):

رأينا في البند السابق أن نظير مصفوفة مربعة عكوسة A من المرتبة الثانية تعطى بالعلاقة:

(حيث A' المصفوفة المساعدة) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} A'$

ولكن يصبح تطبيق هذه العلاقة صعباً إذا كانت المصفوفة من مرتبة عليا، ولذلك نلجأ إلى طريقة عملية لحساب نظير مصفوفة مهما كانت مرتبتها.

بما أن $A = I_n.A$ واعتماداً على المبرهنة فإن تطبيق سلسلة من العمليات الأولية على أسطر المصفوفة الواحدية I_n يؤدي إلى تطبيق نفس تلك العمليات على أسطر المصفوفة A الموجودة في الطرف الأيسر من العلاقة $A = I_n.A$، ونتيجة لذلك فإن العلاقة تصبح $I_n = B.A$ حيث إن المصفوفة B تعبر عن A^{-1}.

إن إجراءات إيجاد نظير مصفوفة A مربعة عكوسة من المرتبة n تتلخص كالآتي:

أ- نكتب المصفوفة A وإلى جانبها من الجهة اليمنى نكتب مصفوفة واحدية من نفس المرتبة لتصبح لدينا مصفوفة من الشكل [A : I]

ب- نجري سلسلة من العمليات الأولية على أسطر تلك المصفوفة حتى نصل إلى الشكل [I : B]

ج− إن نظير المصفوفة A المطلوب إيجاده هو المصفوفة B الواقعة إلى يمين المصفوفة الواحدية.

مثال 11:

أوجد نظير المصفوفة الآتية **(بالطريقة العملية):**

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة:

$$[A \,\vdots\, I]=\left[\begin{array}{cc:cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3/5 & 1/5 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -16/5 & -2/5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 11 & 1/8 & -5/16 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1/8 & 3/16 \\ 0 & 1 & 1/8 & -5/16 \end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/8 & 3/16 \\ 1/8 & -5/16 \end{bmatrix} = \frac{-1}{16}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال 12: أوجد (بالطريقة العملية) نظير المصفوفة:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة [B:I] فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$

أي

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9-1 حل جملة معادلات خطية:

تعرف الطالب خلال السنوات السابقة على طرق التعويض والحذف و... في حل جملة معادلات خطية. وقد حاول غاوس وآخرون تطويع أسس المصفوفات والمحددات لإيجاد طرق حل مختلفة لجمل المعادلات المختلفة.

إن الشكل العام للمعادلة الخطية ax = b

حيث إن:

a تعبر عن أمثال المجهول × و b الثابت العددي.

ونميز هنا حالتين:

1. b = 0 معادلة خطية متجانسة.
2. b ≠ 0 معادلة خطية غير متجانسة.

إن الشكل العام لجملة المعادلات الخطية:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots a_{mn} x_n = b_m$$

إن إرجاع الشكل الخطي لجملة المعادلات إلى شكل مصفوفي يأتي من خلال اعتبار كل معادلة تمثل سطراً من أسطر المصفوفة ونعرف هنا:

مصفوفة الأمثال:

هي مصفوفة $A = (a_{ij})_{m,n}$ حيث m عدد معادلات الجملة و n عدد مجاهليها وa تعبر عن أمثال المجاهيل.

المصفوفة الموسعة:

هي مصفوفة $A' = (a_{ij})_{m,n}$ وهي نفسها مصفوفة الأمثال مضافاً لها عموداً يحوي الثوابت العددية b_s.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

1- حل جملة معادلات خطية بطريقة غاوس:

تتلخص طريقة غاوس في حل جملة معادلات خطية وفق الخطوات الآتية:

1- نكتب المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات.

2- نقوم بإجراء عمليات أولية سطرية على المصفوفة الموسعة للوصول إلى الشكل المدرج المختزل (المصفوفة الموسعة المكافئة الأخيرة).

3- العنصر القائد في السطر الأول في الموقع i=j=1 من المصفوفة الموسعة المكافئة الأخيرة يمثل $1x_1$ وهو يساوي القيمة المقابلة له في عمود الـــ b_s.

4- العنصر القائد في السطر الثاني في الموقع $i=j=2$ يمثل $1x_2$ وهو يساوي القيمة المقابلة له في عمود الـــ b_s.

5- وبنفس الأسلوب بالنسبة لبقية المتغيرات وحسب عدد المعادلات (عدد أسطر المصفوفة) في الجملة.

مثال 13:

حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس

$$
\begin{aligned}
X_1 \qquad + X_3 &= 1 \\
2X_1 + X_2 + X_3 &= 0 \\
X_1 + X_2 + 2X_3 &= 1
\end{aligned}
$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة للجملة

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\sim}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\overset{-R_2+R_3}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\overset{R_3/2}{\sim}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\underset{R_3+R_2}{\overset{-R_3+R_1}{\sim}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{aligned}
1X_1 \qquad &= 0 \\
1X_2 \quad &= -1 \\
1X_3 &= 1
\end{aligned}
$$

مجموعة الحلول:

$$
\left.\begin{aligned} X_1 &= 0 \\ X_2 &= -1 \\ X_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S = \{(0, -1, 1)\}
$$

مثال 14:

حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 2z &= 5 \\
2x - y + z &= 3 \\
3x + y - z &= 8
\end{aligned}
$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة للجملة ونأتي بالمكافئة الأخيرة لها ونناقشها:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 5\\ 0 & -5 & 5 & -7\\ 0 & -5 & 5 & -7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 5\\ 0 & -5 & 5 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 11/5\\ 0 & 1 & -1 & 7/5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= 11/5\\ y-z &= 7/5\\ 0z &= 0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

للجملة عدد لا نهائي من الحلول مع مجهول اختباري Z

$$\{S = (11/5\ ,\ z+7/5\ ,\ z) : Z \in R\}$$

مثال 15:

أوجد مجموعة الحلول لجملة المعادلات بطريقة غاوس

$$50x_1 - 30x_2 + 20x_3 = 70$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$
$$20x_1 - 10x_2 + 10x_3 = 50$$

$$\begin{bmatrix}50 & -30 & 20 & 70\\ 3 & -2 & 1 & 4\\ 20 & -10 & 10 & 50\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}5 & -3 & 2 & 7\\ 3 & -2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}5 & -3 & 2 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 11\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

من السطر الأخير $\Longleftarrow$ $0x_3 = 2$ وهذا مستحيل

إذاً الجملة مستحيلة الحل $\Longleftarrow$ $S = \varnothing$

2- حل جملة معادلات خطية بالطريقة المصفوفية

تعتمد هذه الطريقة في حل جملة معادلات خطية على نظير مصفوفة الأمثال لجملة المعادلات، وهذا يعني وجوب تحقيق شرطين أساسيين لتطبيق هذه الطريقة:

1- أن تكون مصفوفة الأمثال A لجملة المعادلات مصفوفة عكوسة (لها نظير بمعنى$\Delta A \neq 0$).

2- أن تكون عدد المعادلات للجملة تساوي عدد المجاهيل.

إن الشكل العام لجملة معادلات خطية (n معادلة ذات n مجهولاً).

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & & & \dots & & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x & + & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

وإن الشكل المصفوفي لهذه الجملة هو على الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow A.X = B$$

حيث إن:

A مصفوفة الأمثال لجملة المعادلات، ونلاحظ أنها مصفوفة مربعة من المرتبة n

X مصفوفة المجاهيل

B مصفوفة الثوابت العددية

واعتماداً على المبادئ الأساسية لنظير مصفوفة فإن:

$$A \,.\, X = B \quad \Longrightarrow$$

$$A^{-1}A \,.\, X = A^{-1}\, B \;\Longrightarrow\; I_n \,.\, X = A^{-1} \,.\, B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}\, B$$

هذا يعني أن مصفوفة المجاهيل X تساوي حاصل جداء نظير مصفوفة الأمثال A^{-1} بمصفوفة الثوابت B.

مثال 16:

حل – بالطريقة المصفوفية – جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة $[A \,\vdots\, I]$– حيث A هي مصفوفة الأمثال – فنجد:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

إذن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

وبما أن: $X = A^{-1} . B$

فإن:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} X_1 = 3 \\ X_2 = -1 \\ X_3 = 2 \end{matrix}$$

ومجموعة الحل هي: $S = \{(3 , -1, 2)\}$

مثال 17: حل **(**بالطريقة المصفوفية**)** جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$-5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4$$

$$8x_1 - x_2 - 5x_3 = 26$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 19$$

الحل: نكتب الجملة بالشكل المصفوفي $Ax = B$ فنجد:

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 26 \\ 19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = A^{-1} . \begin{bmatrix} 4 \\ 26 \\ 19 \end{bmatrix}$$

نكتب المصفوفة الموسعة [A ⁞ I] لإيجاد A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 27 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 9 & -8 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -27 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 3/9 & 2/9 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & 1/9 & -3/9 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

وبالآتي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 26 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ومجموعة الحل هي: $S = \{(2, 5, -3)\}$

مثال 18: حل (بالطريقة المصفوفية) جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ 4x + 5y - 3z &= 2 \\ 3x_1 + 8y - 5z &= 9 \end{aligned}$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة [A ⁞ I] (حيث A هي مصفوفة الأمثال) فنجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & -11 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -11 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & -11 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذا يدل على أن A مصفوفة شاذة وليس لها نظير (لأنه لا يمكن الوصول إلى الشكل $[B \vdots I]$).

إذن لا تصلح الطريقة المصفوفية لحل هذه الجملة.

1‒10 المحددات:

إن مفهوم المحددات يرتبط بالمصفوفات المربعة حصراً، فإن لكل مصفوفة مربعة معين أو محدد، وهو مقدار عددي يعبر عن القيمة العددية للمصفوفة، لنبدأ في تعريف محدد مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية، ثم الثالثة ...، ثم محدد المصفوفات المربعة من مراتب عليا.

1‒11 المحدد من المرتبة الثانية:

إن محدد المصفوفة المربعة من المرتبة الثانية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

هو بالتعريف العدد المساوي لـــ $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$ والذي نرمز له بالرمز: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

أي:

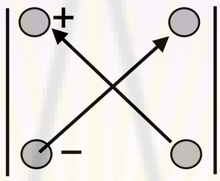
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

تسمى الأعداد $a_{22}, a_{21}, a_{12}, a_{11}$ عناصر محدد المصفوفة المربعة من المرتبة الثانية، وكل عنصر يرمز له بحرف لاتيني صغير a مع دليلين، الدليل الأول يدل على رقم السطر، والدليل الثاني يدل على رقم العمود، اللذان يعبران عن موقع العنصر في المحدد (فمثلاً العنصر a_{21} يقع على السطر الثاني والعمود الأول في المعين).

يطلق أيضاً على محدد مصفوفة التعبير (معين المصفوفة). ويعبر عادة عن محدد مصفوفة بأحد الرموز الآتية:

$$|A| \quad , \det A \quad , \quad \det(a_{ij}) \qquad \Delta$$

ملاحظة: نسمي العدد الناتج بقيمة المحدد من المرتبة الثانية، وينتج عن جداء عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه جداء عناصر القطر الثانوي للمصفوفة المربعة، ويمكن الإشارة إلى ذلك بالرسم التخطيطي الآتي:



مثال 19: احسب محدد كل من المصفوفة A والمصفوفة B.

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta_A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(1\times 4)-(3\times 2)=-2$$

$$B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta_B=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=(-2\times 3)-(-3\times 4)=(-6)-(-12)=-6+12=6$$

12-1 المحدد من المرتبة الثالثة:

بشكل مماثل تماماً للفقرة السابقة يمكننا أن نعرّف محدد المصفوفة المربعة من المرتبة الثالثة بأسلوب ساروس وذلك وفق ثلاث طرق.

1- الطريقة الإشارية:

حيث يتم وضع إشارة (+) فوق العنصر الواقع في السطر الأول والعمود الأول، ثم تتغير الإشارة تتالياً سطراً وعموداً حيث تصبح الإشارات الفوقية كالآتي:

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$$

ويتم الحساب والنشر وفق أي سطر أو عمود ولكن يفضل النشر وفق السطر أو العمود الذي يحوي أصفاراً أو لا يحوي أعداداً سالبة وذلك بأخذ العنصر بإشارته المحمولة وإشارته الفوقية ثم يُحذف سطره وعموده ويُحسب المحدد الثنائي مضروباً بذلك العنصر، وهكذا للعنصر الثاني والثالث.

مثال 20: احسب محدد المصفوفة A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل: ننشر وفق السطر الأول.

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}-0+3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(9+6)+3(-3-3)=15-18=-3$$

2- الطريقة المثلثية:

تُرسم مثلثات وهمية من العناصر المتناظرة للقطر الرئيسي والثانوي وتحسب القيمة وفق المخطط الآتي:

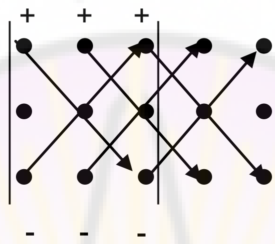
مثال 21: احسب بالطريقة المثلثية محدد المصفوفة A الواردة في المثال السابق.

الحل:

$$\Delta_A=[(1\times3\times3)+(0\times(-2)\times1+(-1\times3\times3)]-[(3\times3\times1)+(-2\times3\times1)+(0\times(-1)\times3]$$
$$=[9+0-9]-[9-6+0]=0-3=-3$$

3- الطريقة الموسعة:

تعتمد هذه الطريقة على إضافة العمود الأول والثاني إلى يمين المحدد، ثم نوصل بين العناصر بأسهم هابطة بدءاً من عناصر القطر الرئيسي وبأسهم صاعدة بدءاً من عناصر القطر الثانوي كما في الرسم التخطيطي الآتي:



نحصل على قيمة المحدد بأخذ مجموع جداءات العناصر في الأسهم الهابطة مطروحاً منها مجموع جداءات عناصر الأسهم الصاعدة.

مثال 22: احسب محدد المصفوفة A الواردة في المثال السابق.

الحل:

$$\Delta_A = \left|\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ - & - & - & & \end{array}\right. = \left[(1\times3\times3)+(0\times(-2)\times1)+(3\times(-1)\times3)\right]-$$

$$\left[(3\times3\times1)+(1\times(-2)\times3)+0\times(-1)\times3)\right]$$

$$=\left[9+0-9\right]-\left[9-6+0\right]=0-3=-3$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

ملاحظات:

1- تطبق طرق ساروس الثلاثة السابقة عند حساب قيمة محددات المرتبة الثالثة فقط.

2- يجب أن نميز دائماً بين المصفوفة والمحدد حيث إن المصفوفة عبارة عن جدول مرتب من الأعداد بينما المحدد هو قيمة سلمية ترتبط فقط بالمصفوفات المربعة.

13-1 المحدد من المرتبة n:

سنورد الآن بعض خواص المحددات التي تفيدنا في حساب قيمة محدد من أية مرتبة، وسنحتاج إلى التعريفين الآتيين في ذكر هذه الخواص.

تعريف (1): صغير عنصر ما a_{ij} في مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]_n$، هو بالتعريف المحدد الناتج عن حذف السطر "i" والعمود "j" والمتعلقين بهذا العنصر. ويرمز له بالرمز Δ_{ij}.

تعريف (2): المتمم الجبري للعنصر a_{ij} في محدد ما، والذي نرمز له بالرمز A_{ij} يعرف بالعلاقة الآتية:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, \Delta_{ij}$$

مثال 23: احسب صغير العنصر b_3 والمتمم الجبري له وذلك من المحدد الآتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

الحل: إن صغير العنصر b_3 هو:

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

والمتمم الجبري لـــ b_3 هو:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} . \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

14-1 بعض خواص المحددات:

هناك بعض الخواص التي تساعد بشكل مباشر على تعيين قيمة المحدد مهما كانت مرتبته، وسوف نذكر هذه الخواص دون برهان.

1- إذا بادلنا بين موقعي سطرين (عمودين) في محدد ما، فإن قيمة هذا المحدد تبقى نفسها ولكن بإشارة معاكسة؛ أي: تتغير فقط إشارة المحدد.

2- إذا كانت جميع عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) في محدد ما أصفاراً، فإن قيمة هذا المحدد تساوي الصفر.

فمثلاً إن قيمة المحدد الآتي تساوي الصفر.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

وذلك لأن جميع عناصر السطر الثاني فيه أصفاراً.

3- إن قيمة محدد المصفوفة المربعة المثلثية (عليا أو دنيا) تساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي.

فمثلاً إذا كانت لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

فإن قيمة محدد هذه المصفوفة تساوي:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=1\times(-1)\times 3=-3$$

وذلك لأنها مصفوفة مثلثية عليا.

نتيجة:

إن قيمة محدد المصفوفة المربعة القطرية يساوي أيضاً جداء عناصر قطرها الرئيسي؛ وذلك لأنها مثلثية عليا ودنيا في الوقت نفسه.

4- إن قيمة محدد مصفوفة مربعة تحوي سطرين (عمودين) متناسبين تساوي الصفر.

فمثلاً إذا كانت لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

فإن قيمة محدد هذه المصفوفة تساوي الصفر؛ وذلك لأنها احتوت على سطرين متناسبين هما السطر الأول والثاني.

من هذه الخاصة نستنتج أنه إذا حوت المصفوفة المربعة على سطرين (عمودين) متماثلين فإن قيمة محددها أيضاً تساوي الصفر.

5- إذا ضربنا أحد أسطر (أعمدة) مصفوفة مربعة بعدد ثابت c. فإن قيمة محدد المصفوفة الناتجة يساوي هذا الثابت مضروباً بقيمة محدد المصفوفة الأصلية. خلاف جوهري مع المصفوفة؛ إذ عندما نضرب ثابت بمصفوفة لابد أن نضرب جميع أسطر المصفوفة بهذا الثابت.

من هذه الخاصة نستنتج أنه يمكننا إخراج العامل المشترك من أحد الأسطر (الأعمدة) دون أن يؤثر ذلك على حساب قيمة محدد هذه المصفوفة، مع مراعاة ضرب هذا العامل بقيمة محدد المصفوفة الناتجة.

فمثلاً إذا كانت لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فلحساب قيمة محدد هذه المصفوفة يمكننا إخراج العدد 2 كعامل مشترك للسطر الثاني عندئذٍ يكون:

$$|A|=2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\,.\,(3-4)=-2$$

6- إذا أضفنا عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) في مصفوفة مربعة إلى العناصر المقابلة لها في سطر (عمود) آخر بعد ضربها بعدد ثابت c. فإن قيمة محدد هذه المصفوفة لا تتغير.

7- إن قيمة محدد ما، تساوي مجموع جداءات عناصر أحد أسطره (أعمدته) بالمتممات الجبرية لها.

فعلى سبيل المثال فإن قيمة محدد المصفوفة من المرتبة الثالثة A بطريقة ساروس الإشارية تساوي:

$$\det A = a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13}$$

أي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

إن العلاقة السابقة تسمى بنشر المحدد من المرتبة الثالثة وفق عناصر السطر الأول. بشكل مماثل للعلاقة السابقة يمكن أن ندخل مفهوم المحدد من المرتبة الرابعة بأن نأخذ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{4}(-1)^{1+j}\ a_{1j}\ \Delta_{1j} = \sum_{j=1}^{4} a_{1j}\ .\ A_{1j}$$

الذي يسمى **بنشر المحدد من المرتبة الرابعة وفق السطر الأول.** وبشكل مماثل بالنسبة للمحدد من المرتبة الخامسة والسادسة، وبصورة عامة نجد أن **محدد من المرتبة n** يمكن أن تحسب **قيمته بنشره وفق أحد أسطره i** (أعمدته j) بالشكل:

$$|A|_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & a_{42} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\ a_{ij}\ \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ .\ A_{ij}$$

ونسمي العلاقة السابقة بنشر المحدد من المرتبة n وفق السطر i، أما إذا أردنا نشره وفق العمود j فإننا نحصل على قيمة المحدد بالشكل:

$$|A|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & a_{42} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\ a_{ij}\ \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ .\ A_{ij}$$

نتيجة: إن العلاقتين السابقتين تعطيانا طريقة عامة في إيجاد قيمة محدد من المرتبة n ‎(n≥2)‎ وذلك بنشره وفق سطر ما في هذا المحدد.

فمثلاً لحساب قيمة المحدد Δ الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

نجد بتطبيق العلاقة السابقة (لدينا $i = 1$, $n = 4$) نجد أن:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \,.\, A_{ij}$$

وبالآتي بحساب المتممات الجبرية لعناصر السطر الأول نجد:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \,.\, \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 27$$

وبالطريقة نفسها نجد:

$$A_{12} = -50 \;,\; A_{13} = -5 \;,\; A_{14} = 12$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\Delta = a_{11} \,.\, A_{11} + a_{12} \,.\, A_{12} + a_{13} \,.\, A_{13} + a_{14} \,.\, A_{14}$$
$$\Delta = 1\times 27 + 1\times(-50) + 1\times(-5) + 1\times 12 = -16$$

ملاحظة:

عند حساب قيمة محدد بنشره وفق سطر (عمود) ما، فإننا نختار السطر (العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار، أو الأرقام الواحدية أو قليل من الأرقام السالبة (أي السطر أو العمود الأضعف)، وهذا ما يسهل عملية حساب قيمة المحدد.

8– محدد منقول مصفوفة مربعة A من المرتبة n يساوي محدد هذه المصفوفة أي:

$$\left|A^T\right| = |A|$$

15-1 حل جملة معادلات خطية (طريقة كرومر):

ليكن لدينا جملة المعادلات

$$a_{11} X_1 + ... + a_{1n} \ X_n = b_1$$

.

.

.

$$a_{m1} X_1 + ... + a_{mn} \ X_n = b_m$$

يمكن تطبيق طريقة كرامر إذا تحقق الشرطان:

أ- عدد المعادلات (m) يساوي عدد المجاهيل (n).

ب- محدد الأمثال (det A) لا يساوي الصفر.

(وهي الشروط نفسها التي رأيناها في حالة الطريقة المصفوفية).

فإذا كان $\Delta \neq 0$ (Δ محدد المثال) وكان Δ_i $(i = 1,\dots, n)$ المحدد الناتج عن Δ بعد حذف عموده i وكتابة العمود $[b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T$ عوضاً عنه فإن:

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad i = 1,2, \dots n$$

ويكون الحل وحيداً.

مثال 24: استخدم طريقة كرامر في حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 \qquad &= 5 \\ -2X_1 + 3X_2 + X_3 &= 1 \\ X_2 + X_3 &= -2 \end{aligned}$$

الحل: نحسب محدد الأمثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

فللجملة حل وحيد. نحسب المحددات:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{x2}=\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=18$$

$$\Delta_{x3}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-29$$

إذن فالحل هو:

$$X1=\frac{\Delta_{X1}}{\Delta}=\frac{1}{8}$$

$$X2=\frac{\Delta_{X2}}{\Delta}=\frac{13}{8}$$

$$X3=\frac{\Delta_{X3}}{\Delta}=\frac{29}{8}$$

ونذكر هنا مبرهنة أخيرة تساعد على التمييز بين المصفوفة العكوسة والمصفوفة الشاذة.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لتكون المصفوفة المربعة A مصفوفة منتظمة هو ألا يكون محددها صفراً؛ أي: A مصفوفة شاذة إذا وفقط إذا كان $\det A = 0$

مثال 25: حل الجملة الآتية:

$$5x - 3y = 11$$
$$3x + 2y = -1$$

الحل: نحسب محدد الأمثال

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=10+9=19$$

بما أن $\Delta \neq 0$ فللجملة حل وحيد. نحسب

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}11 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}22-3=19$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 11\\ 3 & -1\end{vmatrix}-38$$

إذن:

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-2 \quad , \quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1$$

مجموعة الحل: $S = \left\{(1\ ,\ -2)\right\}$

مثال 26: حل الجملة بطريقة كرومر:

$$\begin{aligned} x \qquad - \ z &= 1 \\ 2x + \ y - \ z &= 1 \\ x + 2y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

الحل: نحسب أولاً محدد الأمثال:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=(1)(5+2)+0+(-1)(4-1) = 4 \neq 0$$

فللجملة حل وحيد. نحسب بقية المحددات:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5+2)+(-1)(2-2)=7$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5+2)+(1)(10+1)+(-1)(4-1)=7-11-3=7-14=-7$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2-2)+0+(1)(4-2)=3$$

إذن فالحل هو:

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{3}{4} \quad , \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-7}{4} \quad , \quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{7}{4}$$

ومجموعة الحل هي:

$$S=\left\{(\frac{7}{4}\ ,\ \frac{-7}{4}\ ,\ \frac{3}{4})\right\}$$

تمارين

1) أوجد مجموعة الحل لكل من الجمل الخطية الآتية (باستخدام طريقة غاوس):

آ) $3x - 5y = 7$, $2x + 3y = -8$

ب) $x + 2y = 0$, $2x - 5y = 9$

ج) $5x + 2y = 11$, $x - 5y = 13$

د) $3x + 2y = 0$, $2x - 3y = 13$

2) أوجد مجموعة الحل لكل من الجمل الخطية الآتية (باستخدام طريقة غاوس):

آ)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ج)
$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x + y + z &= -3 \end{aligned}$$

د)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3) أوجد مجموعة الحل لكل من الجمل الخطية المتجانسة الآتية (باستخدام طريقة غاوس):

آ)
$$\begin{aligned} x - 3y \quad &= 0 \\ 5x + y - z &= 0 \\ 3x - 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x + 5y + z &= 0 \\ -x - 2y \quad &= 0 \end{aligned}$$

ج)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -4x + y + z &= 0 \\ 3x + 6y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

د)
$$\begin{aligned} 2x \quad + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

4) أوجد رتبة كل من المصفوفات الآتية:

آ) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ط) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

5) لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

احسب كلاً مما يلي:

(آ) D + E (ب) 3E - 5F (جـ) 2F + 2E - 5D (د) BA

(هـ) BC (و) FA + A (ز) EF (ح) EC

(ط) $C.C^T + DE$ (ي) $(EC)^T$ (ك) $(EC)^T C$ (ل) $FE^T D$

6) لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد نظير كل من المصفوفات الآتية:

(آ) A (ب) B (جـ) C (د) AB (هـ) BA

(و) C^T (ز) BC (ح) ABC (ط) CAB

(ك) AC (ل) BCA (م) $(BC)^T$ (ن) $(AC)^T$

7) أوجد مجموعة الحل لكل من الجمل الخطية الآتية (بالطريقة المصفوفية):

(آ) $2x + y = 1$، $x + y = 2$

(ب) $x - y = 1$، $y - x = -2$

(جـ) $3x - 5y = 7$، $2x + 3y = -8$

(د) $3x - y = 5$، $7x + 3y = 1$

(هـ) $x + 2y = 5$، $2x + 4y = 3$

(و) $5x - 2y = 2$، $3x + 2y = 5$

8) أوجد – بالطريقة العملية – نظير كل من المصفوفات الآتية – إن وجد – :

آ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -8 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -7 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

9) حل – بالطريقة المصفوفية – كل من الجمل الخطية الآتية:

آ)
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 3x + 5y + 2z &= 2 \\ 4x - y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -7 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ج)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 16 \end{aligned}$$

د)
$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x - y - 4z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

10) احسب قيمة كل من المحددات الآتية:

آ) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ج) $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ط) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

ي) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 3 & 15 \\ 7 & -2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ ك) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ ل) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -6 & 2 \\ 8 & 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

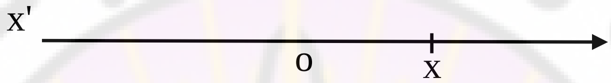
11) حل بطريقة كرومر الجمل الخطية الواردة في السؤال 7).

12) حل بطريقة كرومر الجمل الخطية الواردة في السؤال 9).

الفصل الثاني

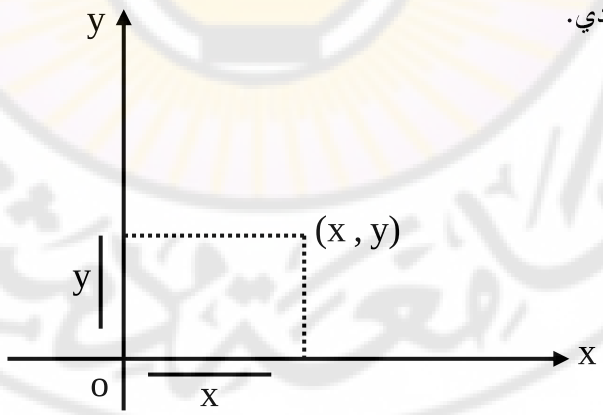
الأعداد العقدية (المركبة)

عند الحديث عن مجموعة الأعداد الحقيقية R يتبادر إلى أذهاننا مجموعة نقاط المحور الموجه x'ox، حيث إن أي عدد حقيقي $x \in R$ يمثل بنقطة على المحور.



حيث إن هذه المجموعة مغلقة بالنسبة لكل من عمليات الجمع والطرح والجداء والقسمة ولكن هذه المجموعة لا تتضمن الجذور التربيعية للأعداد السالبة أو لغاريتماتها ولذلك لا يمكن حل الكثير من المسائل الرياضية في نطاق هذه المجموعة وكان لابد من البحث عن مجموعة أكبر تسمح بحل هذه المشكلة نطلق على هذه المجموعة اسم مجموعة الأعداد المركبة أو الأعداد العقدية Complex numbers وذلك بافتراض وجود محور آخر متعامد مع المحور الحقيقي يطلق عليه اسم المحور التخيلي.

وبذلك تكون مجموعة الأعداد المركبة هي مجموعة نقاط المستوي الذي يطلق عليه اسم المستوي العقدي.



وبالتالي فإن أي عدد مركب يمثل بثنائية (x , y) في المستوي العقدي، يسمى فصل هذه النقطة x بالقسم الحقيقي، بينما يسمى ترتيبها y بالقسم التخيلي ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز C.

تسمى النقاط الواقعة على المحور الحقيقي x'ox باسم الأعداد الحقيقية الصرفة وهي من الشكل (x , 0)، بينما تسمى النقاط الواقعة على المحور التخيلي y'oy باسم الأعداد التخيلية الصرفة وهي من الشكل (0 , y).

يلاحظ أن المحور الحقيق x'ox يقسم المستوي العقدي إلى نصفين، بحيث إن لكل عدد مركب (x , y) نظير بالنسبة لهذا المحور هو العدد المركب (x , -y)، يطلق عليه اسم مرافق العدد المركب (x , y) يرمز لمرافق العدد المركب z بالرمز $\bar{z}$ أي:

$$z = (x, y) \Rightarrow \bar{z} = (x, -y)$$

كما ويرمز للعدد التخيلي الصرف (0,1) بالرمز i أي: i = (0,1)

1-2 العمليات الحسابية على الأعداد المركبة

1- الجمع والطرح:

يعرف حاصل جمع (طرح) عددين مركبين بأنه عدد مركب، قسمه الحقيقي ينتج عن جمع (طرح) القسمين الحقيقيين لهذين العددين، وقسمه التخيلي ينتج عن جمع (طرح) القسمين التخيليين لهذين العددين.

أي: إذا كان $(x_1 , y_1) \in C$, $(x_2, y_2) \in C$

فإن:

$$(x_1 , y_1) \pm (x_2 , y_2) = (x_1 \pm x_2 , y_1 \pm y_2)$$

مثال 1:

(3 , 5) + (1 , 2) = (4 , 7)

(8 , 4) – (3 , 6) = (5 , -2)

نتيجة:

حاصل جمع عددي مركبين مترافقين عدد حقيقي صرف.

فإذا كان $z = (x\ ,y)$ فإن مرافقه $\bar{z} = (x\ ,-y)$ وبالآتي:

$$z + \bar{z} = (x, y) + (x, -y) = (2x, 0) \in R$$

2- الجداء:

يعرف جداء عددين مركبين بأنه عدد مركب جديد، قسمه الحقيقي فرق جدائي المركبتين المتماثلتين لهذين العددين على الترتيب، وقسمه التخيلي مجموع جدائي المركبتين المختلفتين لهذين العددين.

أي إذا كان $(x_2, y_2) \in C\ ,\ (x_1, y_1) \in C$

فإن:

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2\ , x_1y_2 + y_1x_2$$

مثال 2:

$$(3,2).(5,4) = (15 - 8\ , 12 + 10) = (7,22)$$

نتيجة:

جداء عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي.

إذا كان $z = (x, y)$ فإن مرافقه $\bar{z} = (x, -y)$ وبالآتي:

$$z.\bar{z} = (x, y)(x, -y) = (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2 \in R$$

مثال 3: احسب $z\ .\ \bar{z}$

إذا كان $z = (3,4)$ فإن مرافقه $\bar{z} = (3, -4)$ وبالآتي:

$$z.\bar{z} = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$

نتيجة: إذا حسبنا الجداء i . i نجد:

$$i.i = i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$$

وبجذر الطرفين نحصل على $\pm i = \sqrt{-1}$ وبالآتي يمكن تحديد الجذور التربيعية للأعداد الحقيقية السالبة باستبدال (1−) بـــ i^2.

مثال 4: احسب $\sqrt{-25}$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)25} = \sqrt[2]{25i^2} = \pm 5i$$

3- جداء عدد حقيقي بعدد مركب:

إذا كان $a \in R$ فإن هذا العدد واقع على المحور x'ox، وبالتالي يمكن تمثيله بثنائية من الشكل $(a,0) \in C$ أي:

$$a \in R \Rightarrow a = (a,0) \in C$$

وبالتالي فإنه إذا كان $(x,y) \in C$ فإن:

$$a(x,y) = (a,0)(x,y) = (ax-0, ay+0) \Rightarrow a(x,y) = (ax,ay)$$

أي: لضرب عدد مركب بعدد حقيقي يكفي ضرب مركبتي هذا العدد بالعدد الحقيقي.

مثال 5: احسب $3(2,4) = (6,12)$

2-2 الشكل الجبري للعدد المركب:

إذا كان $(x,y) \in C$ فإن:

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + y(0,1)$$

وبالتالي:

$$(x,y) = x + yi$$

يسمى هذا الشكل بالشكل الجبري للعدد المركب (x , y).

2-3 العمليات الحسابية على الشكل الجبري:

يتيح الشكل الجبري كتابة العدد المركب (x , y) كمجموع لعددين أحدهما حقيقي x والآخر تخيلي yi، وبالتالي لإتمام العمليات الحسابية على الشكل الجبري يكفي فك الأقواس ثم جمع الحدود المتشابهة كما يلي:

1- الجمع والطرح:

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1 \in C$ $\quad z_2 = x_2 + iy_2 \in C$ فإن:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= x_1 + iy_1 + x_2 + i(x, -y_1 y_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

أي:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

وبنفس الشكل نجد: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

2- الجداء:

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1 \in C$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in C$

فإن:

$$\begin{aligned} z_1 \,.\, z_2 &= (x_1 + iy_1)\,.\,(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

أي:

$$z_1 \,.\, z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

3- القسمة:

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1 \in C$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in C$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

أي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

وبالتالي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} - \frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_2^2+y_2^2}\,i$$

مثال 6:

ليكن لدينا العددان العقديان $z_2=1+i$, $z_1=3+4i$. أوجد كل من:

$$z_1 + z_2 \quad , \quad z_1.z_2 \quad , \quad \frac{z_1}{z_2}$$

الحل:

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (1 + i) = 4 + 5i$$
$$z_1.z_2 = (3 + 4i)(1 + i) = 3 + 3i + 4i + 4i^2$$

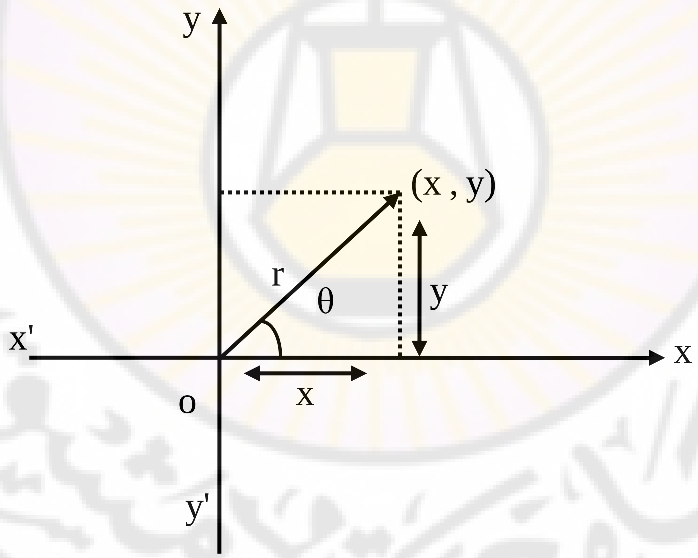
$$= 3 + 7i - 4 = -1 + 7i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{1+i} = \frac{(3+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{3-3i+4i-4i^2}{1+1} = \frac{7+i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$$

4-2 الشكل المثلثي للعدد المركب:

وجدنا أن أي عدد مركب z = x + iy يقابل بنقطة وحيدة (x , y) من المستوي العقدي، وبالتالي فإن أي عدد مركب z = x + yi يقابل بشعاع وحيد بدايته مبدأ إحداثيات المستوي العقدي ونهايته النقطة (x , y)، يسمى هذا الشعاع باسم الشعاع الممثل للعدد المركب z. كما هو مبين في الشكل الآتي:



يصنع الشعاع الممثل للعدد المركب z زاوية محددة θ مع المحور x'ox تسمى زاوية العدد المركب، ويسمى طول هذا الشعاع باسم طويلة العدد المركب z ويرمز له بالرمز r أو $|z|$.

ويمكن تحديد r من العلاقة:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

أما الزاوية θ فيمكن تحديدها من الحل المشترك لجملة المعادلتين الآتيتين:

$$cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$sin\theta = \frac{y}{r}$$

بحساب قيمة x , y من المعادلتين السابقتين (1,2) ، (1,3) نجد أن:

$$x = r\ cos\theta$$
$$y = r\ sin\theta$$

وبالتعويض في الشكل الجبري نجد أنه إذا كان z = x + yi فإن:

$$z = r\ cos\theta + ir\ \ sin\theta$$

وبالآتي:

$$z = r\,[cos\ \theta + i\ sin\ \theta]$$

ولكن إضافة $2\pi k$ إلى الزاوية θ لا يغير نسبها المثلثية وبالآتي:

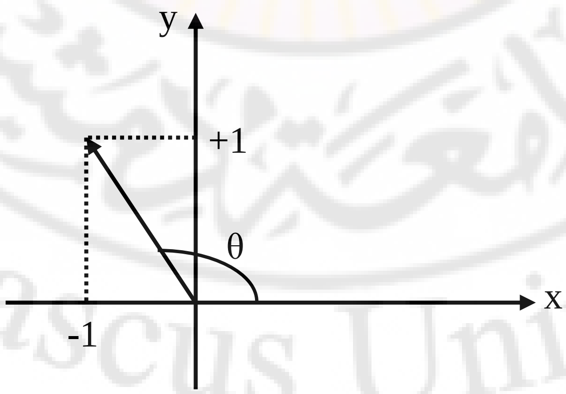
$$z = r\,[\cos\ (\theta + 2\pi k) + i \sin\ (\theta + 2\pi k)]$$

تعطي هذه العلاقة الشكل المثلثي العام للعدد المركب z = x + iy.

مثال 7: أوجد الشكل المثلثي للعدد المركب z = -1 + i

الحل: لدينا x = -1 و y = +1 وبالآتي:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



$$\left.\begin{aligned}\cos\ \theta = \frac{x}{\mathrm{r}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \sin\ \theta = \frac{y}{\mathrm{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = \mathrm{r}\,[\cos\ \theta + i \sin\ \theta]$$

$$z = \sqrt{2}\ \left[\cos\ \frac{3\pi}{4} + i \sin\ \frac{3\pi}{4}\right]$$

أو بشكل عام:

$$z = \sqrt{2}\ \left[\cos\ \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) + i \sin\ \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$$

5-2 العمليات الحسابية على الشكل المثلثي:

1- الجداء:

إذا كان:

$z_1 = \mathrm{r}_1[cos\theta_1 + i\ sin\theta_1]$ و $z_2 = \mathrm{r}_2[cos\theta_2 + i\ sin\theta_2]$

فإن:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= \mathrm{r}_1.\mathrm{r}_2[cos\theta_1 + i\ sin\theta_1][cos\theta_2 + i\ sin\theta_2]\\ &= \mathrm{r}_1.\mathrm{r}_2\ [cos\theta_1\ cos\theta_2 + i\ cos\theta_1\ sin\theta_2 + i\ sin\theta_1 cos\theta_2 +\\ &\qquad i^2.sin\theta_1\ sin\theta_2]\\ &= \mathrm{r}_1.\mathrm{r}_2\ [(cos\theta_1\ cos\theta_2 - sin\theta_1\ sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 +\\ &\qquad cos\theta_1\ sin\theta_2)]\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$z_1.z_2 = \mathrm{r}_1.\mathrm{r}_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

تعميم (نظرية دي موافر):

إذا كانت لدينا الأعداد المركبة $z_1 . z_2 . \ldots . z_n$ التي أطولها $r_1 . r_2 . \ldots r_n$ على الترتيب وزواياها $\theta_1 . \theta_2 . \ldots . \theta_n$ على الترتيب فإن:

$$z_1.\ z_2.\ \ldots.\ z_n = r_1.\ r_2.\ \ldots\ r_n\ [\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots\theta_n)+i\ \sin(\theta_1+\theta_2+\ldots\theta_n)]$$

نتيجة (1): إذا كان $z = x + yi$ عدد مركب طويلته r وزاويته θ فإن:

$$z^n = \underbrace{z.z\ \ldots\ .z}_{n\ \text{مرة}} = \underbrace{r.r\ \ldots\ .r}_{n\ \text{مرة}}\ [\cos\ (\underbrace{\theta+\theta+\ldots\theta}_{n\ \text{مرة}}) + i\ \sin\ (\underbrace{\theta+\theta+\ldots\theta}_{n\ \text{مرة}})]$$

وبالتالي:

$$z^n = r^n [\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)]$$

أي ناتج رفع عدد مركب إلى أس معين n هو عدد مركب جديد طويلته هي طويلة العدد المركب مرفوعة لهذا الأس، وزاويته نفس زاوية العدد المركب بعد ضربها بهذا الأس.

نتيجة: لإيجاد الجذر النوني للعدد المركب z الذي زاويته θ وطويلته r يمكن الاستفادة من الخاصة $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ فإذا كان:

$$z = r [\cos (\theta + 2\pi k) + i \sin (\theta + 2\pi k)]$$

فإن:

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \left[cos \frac{\theta+2\pi k}{n} + i\ sin \frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

بما أن الجذور من المرتبة n عددها n جذر، فإنه يمكن الحصول على هذه الجذور بتعويض n قيمة مختلفة للعدد k هي: $k = 0 , 1 , 2 , \dots , n-1$

مثال 8:

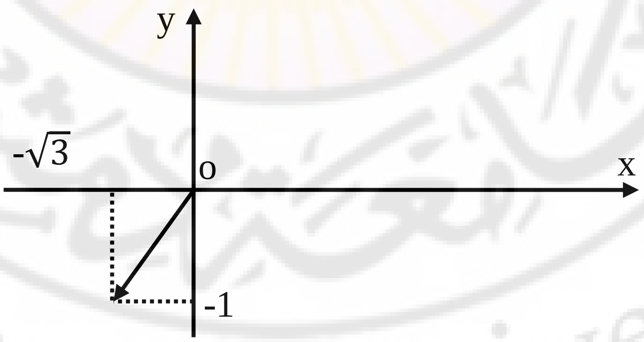
إذا كان $z = -\sqrt{3} - i$ أوجد كل من $\sqrt[4]{z}$ و z^3.

الحل:

$$r = \sqrt{x^2 + y_2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \theta &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\ \theta &= \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$z = r [\cos\ \theta + i \sin\ \theta]$$



وبالتالي الشكل المثلثي:

$$z = 2\left[\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right]$$

$$z^n = r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

$$z^3 = 8\left[cos\frac{21\pi}{6} + i\ sin\frac{21\pi}{6}\right]$$

ولإيجاد الجذور كافة من المرتبة الرابعة يجب أن نكتب العدد المركب بالشكل المثلثي العام:

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right) + i\sin(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k)\right] \Rightarrow$$

$$\sqrt[4]{z} = 2^{\frac{1}{4}}\left[cos\frac{\frac{7\pi}{6}+2\pi k}{4} + i\ sin\frac{\frac{7\pi}{6}+2\pi k}{4}\right]$$

بتعويض $k = 0 , 1 , 2 , 3$ نجد:

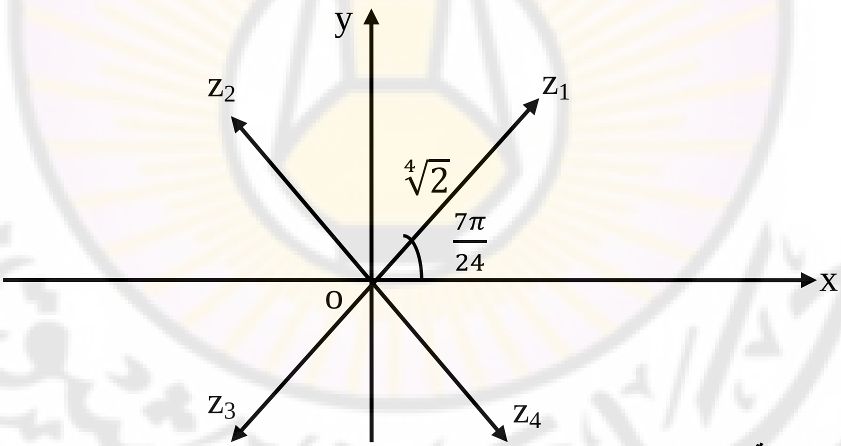
$$k = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{7\pi}{24} + i\sin\frac{7\pi}{24}\right]$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{19\pi}{24} + i\sin\frac{19\pi}{24}\right]$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{31\pi}{24} + i\sin\frac{31\pi}{24}\right]$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{43\pi}{24} + i\sin\frac{43\pi}{24}\right]$$

يمكن تمثيل هذه الجذور في المستوي كما هو مبين على الشكل الآتي:



2- القسمة: إذا كان:

$$z_1 = r_1[cos\theta_1 + i\ sin\theta_1] \text{ و } z_2 = r_2[cos\theta_2 + i\ sin\theta_2]$$

فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{cos\theta_1 + i\ sin\theta_1}{cos\theta_2 + i\ sin\theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\ [(cos\theta_1\ cos\theta_2 + sin\theta_1\ sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 - cos\theta_1\ sin\theta_2)] \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ [cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

مثال 9:

إذا كان $z_2 = 2\left[cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}\right]$ و $z_1 = 4\left[cos\frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3}\right]$

فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})\right]$$
$$= \left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

2-6 الشكل الأسي للعدد المركب:

نظرية أولر:

يقبل بدون برهان أن: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

نتيجة:

إذا كان $z=r[\cos\theta + i\sin\theta]$ فإن هذا العدد يمكن كتابته بالشكل: $z = r\,e^{i\theta}$

الذي يسمى بالشكل الأسي للعدد المركب.

كما أن العدد المركب يمكن كتابته بالشكل العام:

$$z = r\left[\cos\ (\theta + 2\pi k) + i\sin\ (\theta + 2\pi k)\right]$$

وبالآتي كتابته بالشكل الأسي العام: $z = r\,e^{i(\theta+2\pi k)}$

2-7 لغاريتمات الأعداد المركبة:

لإيجاد لغاريتم العدد المركب z للأساس a يمكن كتابة هذا العدد بالشكل الأسي العام: $z = r\,e^{i(\theta+2\pi k)}$

فيكون:

$$\log_a z = \log_a\left[r\,e^{i(\theta+2\pi k)}\right]$$
$$\log_a z = \log_a r + i(\theta + 2\pi k)\log_a e$$

فإذا كان $a = 10$ فإن:

$$\log_{10} z = \log_{10} r + i(\theta + 2\pi k)\log_{10} e$$

أما إذا كان $a = e$ فإن:

$$\log z = \log r + i(\theta + 2\pi k)\log e$$

أي:

$$\log z = \log \mathrm{r} + i(\theta + 2\pi k)$$

مثال 10:

أوجد اللغاريتم الطبيعي للعدد $z = 1 + \sqrt{3}i$

الحل:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \theta &= \frac{x}{\mathrm{r}} = \frac{1}{2} \\ \sin\ \theta &= \frac{y}{\mathrm{r}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}$$

$$\log z = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$$

تمارين

1- أوجد ناتج ما يلي:

$(2+5i)+3(2-i)-(1+i)\quad , \quad (1+i)(2-i)$

$\frac{5-i}{1+i}-\frac{5}{1+2i}\quad , \quad \frac{3+2i}{2-i}+\frac{4-i}{1-3i}$

2- أوجد مرافق وطويلة كل من الأعداد المركبة الآتية:

$z=3-4i\ ,\ z=(2-i)(5+i)\ ,\ z=3(2+3i)$

$z=\frac{5-i}{1+i}\ ,\ z=\frac{1}{i}$

3- مثل شعاعياً كل من الأعداد المركبة التالية، ثم حول كل منها إلى الشكل المثلثي العام والشكل الأسي العام:

$z=1-\sqrt{3}i\quad , \quad z=1+\sqrt{3}i$

$z=-1+\sqrt{3}i\quad , \quad z=1+i$

$z=2\ ,\ z=5i\ ,\ z=-5\ ,\ z=-2i$

4- أوجد $\sqrt[4]{z}$ علماً أن: $z=8+8\sqrt{3}i$

ثم مثل الجذور في المستوي العقدي.

5- أوجد جميع حلول كل من المعادلات الآتية:

$z^3+1-i=0\qquad z^5+i=0$

$z^4-i=0\qquad z^3-1=0$

6- أوجد $\log z$ و $\log_{10} z$ في كل من الحالات الآتية:

$z=\sqrt{3}+i\quad , \quad z=\sqrt{3}-i\quad , \quad z=-1-i$

الفصل الثالث

العمليات على كثيرات الحدود والطرق العددية

3-1 تعريف كثير الحدود:

إن مفهوم كثير الحدود مرتبط مع المعادلة الجبرية. لذلك سنبدأ بتعريف المعادلة الجبرية ومنها نعرف كثير الحدود.

إن الشكل العام للمعادلة الجبرية من المرتبة n بالمتحول x (n عدد صحيح موجب) يعطى بالشكل:

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \; ; \; a_o \neq 0$$

حيث إن أمثال هذه المعادلة a_o , a_1 , ... , a_n أعداد حقيقية أو مركبة.

يسمى الطرف الأيسر للمعادلة بكثير الحدود من الدرجة n للمتحول x، ويرمز له اختصاراً بأحد الرموز الآتية:

$$f(x) , g(r) , \varphi(x) , \ldots$$

وبالآتي الشكل العام لكثير الحدود من الدرجة (n) للمتحول x هو:

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \; ; \; a_o \neq 0$$

وتسمى الأعداد a_o , a_1 , ... , a_n أمثال أو معاملات كثير الحدود.

ليكن لدينا كثيرا حدود اختياريان $f(x)$; $g(x)$ معرفان بالشكل:

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \; ; \; a_o \neq 0$$
$$g(x) = b_o x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 \ldots + b_{n-1} x + b_n \; ; \; b_o \neq 0$$

نقول بالتعريف: إن كثيري الحدود $f(x)$; $g(x)$ (من الدرجة نفسها) متساويان أو متطابقان إذا تساوت أمثالهما من أجل قوى x المتماثلة أي:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_k = b_k \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

مثال 1: إذا كان لدينا كثيرا الحدود:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; , \; g(x) = 2x^2 - 3$$

فإن $f(x) = g(x)$ يؤدي إلى أن: $a = 2 , b = 0 , c = -3$

من تعريف تساوي كثيرات الحدود ينتج أن كل كثير حدود يمكن أن يكتب بالشكل:

$$f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \;;\; a_n \neq 0$$

أي حسب القوى التصاعدية للمتحول x.

2-3 جمع وطرح كثيرات الحدود:

ليكن لدينا كثيرا الحدود:

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \;;\; a_n \neq$$
$$g(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m \;;\; b_m \neq 0$$

1. **نعرف حاصل جمع** كثيري الحدود f(x) , g(x) بأنه كثير حدود c(x) من الدرجة k (حيث أن k أكبر العددين n , m) يعطى بالشكل:

$$f(x) + g(x) = c(x) = c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_kx^k$$

وأمثاله c_i تحسب من العلاقة:

$$c_i = a_i + b_i \;;\; i = 0, 1, 2, \ldots, k$$

مثال 2:

لنوجد مجموع كثيري الحدود:

$$f(x) = x^4 + 4\,x^3 - 2x^2 + 3\,x - 10$$
$$g(x) = 2\,x^3 - 7\,x^2 + 7$$

الحل: لجمع كثيري الحدود f(x) , g(x) يكفي أن نضيف حدود g(x) إلى حدود f(x) ثم نجمع الحدود المتشابهة أي:

$$f(x) + g(x) = x^4 + 4\,x^3 - 2x^2 + 3\,x - 10 + 2\,x^3 - 7\,x^2 + 7$$
$$= x^4 + 6\,x^3 - 9\,x^2 + 3\,x - 3$$

2. **نعرف حاصل طرح** كثير الحدود g(x) من كثير الحدود f(x) بحاصل جمع حدود g(x) بعد ضربها بـــ (1−) إلى حدود f(x).

مثال 3:

لنحسب f(x) - g(x) من المثال السابق نجد:

$$f(x) - g(x) = x^4 + 4\,x^3 - 2x^2 + 3\,x - 10 - 2\,x^3 + 7\,x^2 - 7$$
$$= x^4 + 2\,x^3 \pm 5\,x^2 + 3\,x - 17$$

وبالآتي نلاحــظ أن عملية طرح كثيري حدود مشابهة تماماً لعملية الجمع، ولكن بأخذ جميع حدود كثير الحدود المطروح بإشارات معــاكسة (مع العلم أن الدرجة ليست بالضرورة أكبر العددين n , m).

3-3 جداء كثيرات الحدود:

ليكن لدينا كثيرا الحدود $g(x) , f(x)$

نعرف جداء كثيري الحدود $g(x) , f(x)$ بأنه كثير حدود $d(x)$ من الدرجة $n+m$ أمثاله d_k تحسب من العلاقة:

$$d_k = \sum a_i\, b_{k-i} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n+m$$

أي: $d_0 = a_0\, b_0 \qquad d_1 = a_0\, b_1 + a_1\, b_0\, , \dots$

وبالتالي فإن:

$$f(x) \,.\, g(x) = d(x) = d_0 + d_1\, x + d_2\, x^2 + \dots + d_{n+m}\, x^{n+m}$$

مثال 4:

أوجد جداء كثيري الحدود:

$$f(x) = x^4 - 6\, x^2 + 2$$
$$g(x) = x^3 - 2\, x^2 + 12\, x + 3$$

الحل: لإيجاد الجداء $f(x) \,.\, g(x)$ يكفي أن نأخذ جداء كل عنصر من $f(x)$ بكل عنصر من $g(x)$ ثم نجمع الحدود المتشابهة أي:

$$\begin{aligned} f(x) \,.\, g(x) &= (x^4 - 6\, x^2 + 2) \,.\, (x^3 - 2\, x^2 + 12\, x + 3) \\ &= x^7 - 2\, x^6 + 12\, x^5 + 3\, x^4 - 6\, x^5 + 12\, x^4 - 72\, x^3 - 18 \\ &\quad x^2 + 2\, x^3 - 4\, x^2 + 24\, x + 6 \\ &= x^7 - 2\, x^6 + 6\, x^5 + 15\, x^4 - 70\, x^3 - 22\, x^2 + 24\, x + 6 \end{aligned}$$

نظرية (1):

إن عمليتي ضرب وجمع كثيرات الحدود تتمتعان بالخوص الآتية:

1- الخاصة التبديلية:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$
$$f(x) \,.\, g(x) = g(x) \,.\, f(x)$$

وذلك مهما تكن $g(x) , f(x)$.

2- **الخاصة التجميعية:**

$$f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$$
$$f(x) . [g(x) . h(x)] = [f(x) . g(x)] . h(x)$$

وذلك مهما تكن كثيرات الحدود $h(x) , g(x) , f(x)$.

3- **خاصة توزيع الضرب بالنسبة للجمع:**

$$[f(x) + g(x)] . h(x) = f(x) . h(x) + g(x) . h(x)$$

وذلك مهما تكن كثيرات الحدود $h(x) , g(x) , f(x)$.

3-4 قسمة كثيرات الحدود:

يبرهن أنه من أجل كثيري حدود $f(x)$ و $g(x)$ يوجد كثيرا حدود $r(x) , q(x)$ بحيث:

$$f(x) = g(x) . q(x) + r(x)$$

يسمى $q(x)$ حاصل قسمة كثير الحدود $f(x)$ على كثير الحدود $g(x)$ ويسمى $r(x)$ بباقي القسمة.

إن درجة $r(x)$ أقل من درجة $g(x)$ أو $r(x)=0$ وكل من $r(x) , q(x)$ يتعينان بشكل وحيد.

إن العلاقة السابقة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad ; \quad g(x) \neq 0$$

وعملية إيجاد كل من $r(x) , q(x)$ تتم وفق طريقة التقسيم الإقليدي (الزاوية).

مثال 5:

ليكن لدينا كثيرا الحدود:

$$f(x) = 2x^5 + x^4 - 5 x^3 + 12 x^2 + 10 x -2$$
$$g(x) = x^3 - 2 x + 7$$

احسب حاصل القسمة: $\frac{f(x)}{g(x)}$

الحل: باستخدام طريقة الزاوية نجد:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2 & x^3 - 2x + 7 \\
\pm 2x^5 \quad \pm 4x^3 \pm 14x2 & \\
\hline
x^4 - x^3 - 2x^2 + 10x - 2 & 2x^2 + x - 1 \\
\pm x^4 \quad \pm 2x^2 \pm 7x & \\
\hline
-x^3 \quad + 3x - 2 & \\
\pm x^3 \quad \pm 2x \pm 7 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$x + 5$$

وبالتالي فإن $q(x) = 2x^2 + x - 1$ و $r(x) = x + 5$ وكثير الحدود $f(x)$ يكتب بالشكل:

$$f(x) = (x^3 - 2x + 7)(2x^2 + x - 1) + (x + 5)$$

إذا كان $r(x) = 0$ فإننا نقول: إن كثير الحدود $g(x)$ **قاسماً** لكثير الحدود $f(x)$ بدون باقي.

إن ظهور الآلات الحاسبة، والحواسب كبيرها وصغيرها، ساعد كثيراً وبشكل ملفت للنظر على حل المشكلات التي تتطلب حسابات طويلة ومعقدة، وصار إنجازها يتم بسرعة وبشكل أقرب ما يكون إلى الدقة المتناهية. ولكن الحاسوب، والآلة الحاسبة، تعملان حسب توجيهات المبرمج،وهذا ما سندرسه– إن شاء الله– في العام القادم. ولكننا الآن، سنتعرف على بعض الطرائق المتبعة لحل بعض المشكلات الرياضية، والتي يمكن حلها بالحسابات اليدوية، أو بمساعدة الآلات الحاسبة الصغيرة، إن لزم الأمر، وهذا أفضل.

3-5- مخطط هورنر:

لتكن لدينا الحدودية $p(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$، فإذا أردنا إيجاد قيمة هذه الحدودية من أجل $x = a$، فما علينا إلا أن نبدل بـــ x قيمتها فنحصل على $p(a)$. ولكن هذا يكافئ حساب باقي قسمة $p(x)$ على $(x - a)$ لأن:

$$P(x) = (x - a)\, Q(x) + R$$

حيث $Q(x)$ ناتج القسمة، و R باقي القسمة (وهو هنا عدد، لأن باقي القسمة دوماً من درجة أقل من درجة المقسوم عليه). ونجد بالتعويض أن:

$$P(a) = R$$

لكن، رُبَّ قائل يقول: إن عملية القسمة أمر معقد نسبياً. لذلك وجد هورنز طريقة مبسطة لإيجاد قيمة الحدودية أو ناتج القسمة وباقيها، دون اللجوء لعملية التقسيم.

فإذا كانت:

$$Q(x) = c_0\, x^{n-1} + \dots + c_{n-2}\, x + c_{n-1}$$

فإن:

$$\begin{aligned} c_0 &= b_0 \\ c_1 &= b_1 + b_0\, a \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= b_{n-1} + b_{n-2} \,.\, a \\ R &= b_n + b_{n-1} \,.\, a \end{aligned}$$

وهذه العلاقات التي توصلنا إليها، تسمح دون إجراء عملية التقسيم بمعرفة أمثال $Q(x)$ [التي هي $c_0 , c_1 , \dots c_{n-1}$] وباقي القسمة R [الذي هو قيمة الحدودية $p(x)$ عندما $x = a$]، ويمكن الوصول إلى هذه الأمثال بإتباع مخطط هورنز الآتي:

$$\begin{array}{cccccc|l} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n & \\ & c_0a & c_1a & \dots & c_{n-2}a & c_{n-1}a & a \\ \hline c_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1} & R & \end{array}$$

حيث كتبنا أمثال الحدودية $p(x)$ ابتداءً من أمثال x^n (وهو b_0) إلى الحد الثابت (b_0). وعلى اليمين كتبنا العدد a الذي نريد من أجله حساب $p(a)$ [أو نريد إيجاد ناتج قسمة $p(x)$ على (x a)]، ثم تركنا سطراً فارغاً تحت سطر الأمثال ووضعنا خطاً، ثم تحت b_0 كتبنا $c_0 = b_0$، ضربناهما بـــ a ووضعنا الناتج تحت b_1، جمعناهما فحصلنا على c_1، ضربناها بـــ a، ووضعنا الناتج تحت b_2 وبالجمع حصلنا على c_2 .. وهكذا حتى النهاية.

مثال 6: احسب قيمة الحدودية

$$P(x) = 5\, x^4 - 3\, x^3 + 4\, x^2 + 2\, x - 5 \qquad \text{من أجل } x = 3$$

الحل: ننشئ مخطط هورنز، فنجد

5	-3	4	2	-5	3
	15	36	120	366	
5	12	40	122	361	

إذن $P(3) = 861$ [ويمكنك التحقق من صحة ذلك بالتعويض في $P(x)$]

مثال:7 أوجد ناتج قسمة الحدودية

$P(x) = 7x^5 - 2x^3 + x^2 - 5x + 8$ على $(x - 2)$

الحل: نكتب مخطط هورنز من أجل:

$$X - 2 = 0 \Longrightarrow X = 2$$

7	0	-2	1	-5	8	2
	142	8	52	106	202	
7	14	26	53	101	210	

إذن:

$$p(x) = (x - 2)(7x^4 + 14x^3 + 26x^2 + 53x + 101) + 210$$

فناتج القسمة $Q(x) = 7x^4 + 14x^3 + 26x^2 + 53x + 101$

وباقي القسمة $R=210$

مثال8: أثبت أن الحدودية $p(x) = 5x^6 + 2x^3 - 4x^2 + 3x + 4$

يقبل القسمة على $(x + 1)$ وأوجد ناتج القسمة.

الحل: نكتب مخطط هورنز، من أجل: $X + 1 = 0 \Longrightarrow X = -1$

5	0	0	2	-4	3	4	-1
	-5	5	-5	3	1	-4	
5	-5	5	-3	-1	4	0	

إن باقي $R = 0$ القسمة وبالآتي $p(x)$ تقبل القسمة على $(x + 1)$ والحدودية:

$$p(x) = (x + 1)(5x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 - x + 4)$$

مثال 9: هل تقبل الحدودية $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 18x + 45$ القسمة $(x+3)$؟

وما هو ناتج القسمة؟

الحل: نكتب مخطط هورنز، من أجل:

$$X + 3 = 0 \Longrightarrow X = -3$$

2	-5	-18	45	-3
	-6	33	-45	
2	-11	15	0	

إن $p(x)$ تقبل القسمة على $(x + 3)$ لأن باقي القسمة هو الصفر. وبالآتي:

$$p(x) = (x + 3)(2x^2 - 11x + 15)$$

ملاحظة: إذا أردنا قسمة الحدودية $p(x)$ على $(\lambda x - \mu)$، [أو إيجاد قيمة $p(x)$ من أجل $x = \frac{\mu}{\lambda}$ فإننا نتبع مخطط هورنز، مع فرض $x = \frac{\mu}{\lambda}$]

مثال 10: أوجد ناتج قسمة الحدودية.

$p(x) = 9x^5 - 15x^3 + 8x^2 - 29$ على $(3x + 2)$

الحل: نكتب مخطط هورنز، من أجل:

$$3X + 2 = 0 \Longrightarrow X = -\frac{2}{3}$$

9	0	-15	8	0	-29	$-\frac{2}{3}$
	-6	4	$\frac{22}{3}$	$-\frac{92}{9}$	$\frac{184}{27}$	
9	-6	-11	$\frac{46}{3}$	$-\frac{92}{9}$	$\frac{-599}{27}$	

إذن

$$p(x) = (3x + 2)(9x^4 - 6x^3 - 11x^2 + \frac{46}{3}x - \frac{92}{9}) - \frac{599}{27}$$

مثال 11: هل تقبل الحدودية $p(x) = 24x^5 - 16x^4 + x^2 - 3x + \frac{135}{128}$ القسمة على $(4x - 3)$؟ وما هو ناتج القسمة.

الحل: نكتب مخطط هورنز من أجل:

$4X - 3 = 0 \Rightarrow X = \frac{3}{4}$

24	-16	0	1	-3	$\frac{135}{128}$	
	18	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{51}{32}$	$-\frac{135}{128}$	$\frac{3}{4}$
24	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{-35}{32}$	0	

إن $p(x)$ تقبل القسمة على $(4x - 3)$ وتكتب بالشكل:

$$p(x) = (4x - 3)(24x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - \frac{35}{32})$$

6-3 تعميم مخطط هورنز:

كثيراً ما يتطلب الأمر كتابة حدودية $p(x) = b_0 x^a + \dots + b_{n-1}x + b_n$ بدلالة قوى y (حيث $y = x - a$). يمكن تعميم مخطط هورنز لإيجاد الأمثال للحدودية:

$$P(y+a) = c_0 y^n + \dots + c_{n-1} y + c_0$$

بعد تبديل المتحول $y + a$ بـــ x. إن هذا يتطلب إجراء التقسيم n مرة متتالية؛ لإيجاد الباقي في كل مرة. لذا نعيد كتابة المخطط n مرة متتالية، كما يوضح المثال الآتي.

مثال 12: أكتب الحدودية $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 4$ بدلالة قوى $(x - 2)$

الحل: نتبع مخطط هورنز المعمم من أجل:

$X - 2 = 0 \Longrightarrow X = 2$

2	0	-3	5	-4	2
	4	8	10	30	
2	4	5	15	26	
	4	16	42		
2	8	21	57		
	4	24			
2	12	45			
	4				
2	16				

إن: $p(x) = 2(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 45(x-2)^2 + 57(x-2) + 26$

مثال 13: اكتب الحدودية $p(x) = - 5x^4 + 3x^2 - 6x + 7$ بدلالة قوى $(x + 3)$.

الحل: نتبع مخطط هورنر المعمم من أجل:

$X + 3 = 0 \Rightarrow X = -3$

-5	3	0	-6	+7	-3
	15	-54	162	-468	
-5	18	-54	156	-461	
	15	-99	459		
-5	33	-153	615		
	15	-144			
-5	48	-297			
	15				
-5	63				

إذن:

$p(x) = -5(x + 3)^4 + 63(x + 3)^3 - 297(x + 3)^2 + 615(x + 3) - 461$

مثال 14: اكتب الحدودية $P(x) = 2x^4 - 1$ بدلالة قوى $(3x - 6)$

الحل: نتبع مخطط هورنز المعمم من أجل:

$$3X - 6 = 0 \Longrightarrow X = 2$$

2	0	0	0	-1	2
	4	8	16	32	
2	4	8	16	$\underline{\underline{31}}$	
	4	16	48		
2	8	24	$\underline{\underline{64}}$		
	4	24			
2	12	$\underline{\underline{48}}$			
	4				
$\underline{\underline{2}}$	$\underline{\underline{16}}$				

إذن:

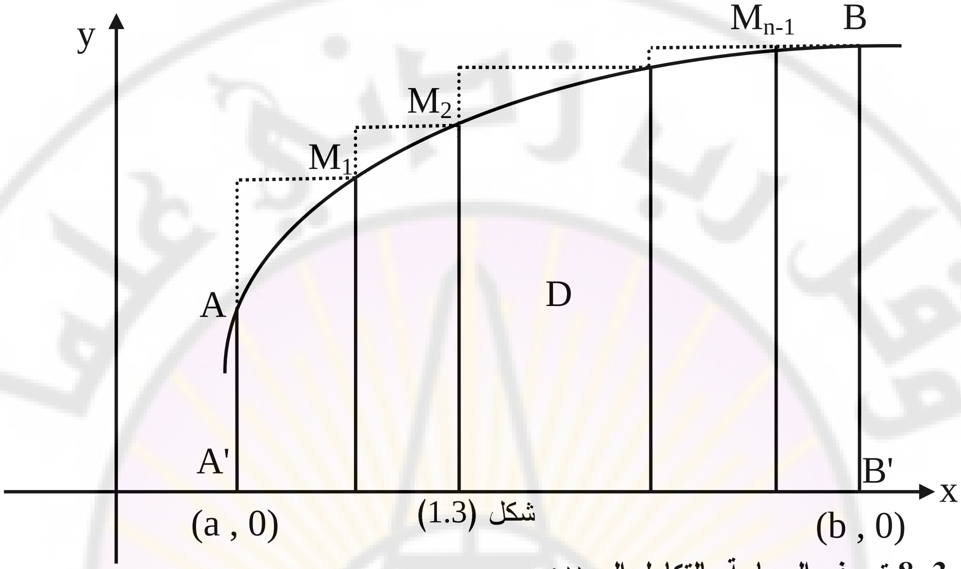
$$P(x) = 2(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 48(x-2)^2 + 64(x-2) + 31$$

$$P(x) = \frac{2}{3^4}(3x-6)^4 + \frac{16}{3^3}(3x-6)^3 + \frac{64}{3^2}(3x-6)^2 + \frac{64}{3}(3x-6) + 31$$

$$P(x) = \frac{2}{81}(3x-6)^4 + \frac{16}{27}(3x-6)^3 + \frac{64}{9}(3x-6)^2 + \frac{64}{3}(3x-6) + 31$$

3–7 التكامل المحدود:

لقد استخرجت في الهندسة الإقليدية صيغ للمساحة لعدة أشكال مستوية، كالمربع، والمستطيل، ومتوازي الأضلاع، ... إلخ. لكن الطرق المتبعة في الهندسة الإقليدية لا تنفع عندما تكون المنطقة المطلوب حساب مساحتها محاطة بمنحن، أو منطقة غير منتظمة لذلك سنحاول في هذه الفقرة إعطاء تعريف جديد للمساحة بالاعتماد على مفهوم التكامل، ولكن سنقتصر على بعض مناطق خاصة وهي تلك المحدودة بالمحور الأفقي، وبالخطين الشاقوليين المارين بالنقطتين $(a , 0)$ و $(b , 0)$، وبالخط البياني للتابع $f(x)$، حيث $f(x) \geq 0$ من أجل جميع قيم x ضمن المجال $[a , b]$. سنرمز للمنطقة المذكورة بـــ D ولمساحتها بـــ S. (شكل 1 . 3).



شكل (1.3)

3–8 تعريف المساحة بالتكامل المحدد:

لنأخذ التابع $y = f(x)$ الذي نفرضه مستمراً وموجباً ضمن المجال $[a , b]$، ولنفرض أن التابع ممثل في المجال المذكور بالمنحني $\overset{\frown}{AB}$ (انظر شكل 1.3). ولنحاول حساب مساحة المنطقة D (أي ABB'A') المحدودة بالمنحني المذكور ومحور السينات والموازين $x = b$, $x = a$ لمحور العينات.

لنفتش عن قيمة مقربة بالنقص وأخرى بالزيادة للمنطقة D التي نرمز لمساحتها بـــ S. لنختر ضمن المجال $[a , b]$ عدداً من القيم لـــ x نرمز لها بـــ

$b = x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} , x_n$

وبحيث تمثل فصول النقاط $M_n , M_{n-1} , \ldots , M_2 , M_1$ على الترتيب.

إن المستطيلات الداخلية المرسومة في الشكل 3.1 مساحة نرمز لها بـــ 'S وهي قيمة مقربة بالنقص لـــ S. ونلاحظ أن المستطيلات الداخلية كافة واقعة برمتها ضمن المنطقة D ومن الشكل 1.3 نجد:

$$S' = (x_1 - a)\, f(a) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

وبالطريقة نفسها نرى أن المستطيلات الخارجية تحوي المنطقة D داخلها.

3-9 مفهوم التكامل المحدود:

يمكننا إيراد مجموع عدد غير منته من المقادير اللامتناهية في الصغر بطريقة جبرية مجردة عن كل اعتبار هندسي وذلك كما يلي:

لنأخذ التابع $y = f(x)$، ولنأخذ المجال $[a , b]$ ولنقسمه إلى عددٍ من الأقسام بوساطة الأعداد $b = x_1 , x_2 , \dots , x_{n-1} , x_n$ ولتكن الأعداد $\propto_1, \propto_2, \dots, \propto_n$ التي نختارها بشكل عشوائي وعلى الترتيب من المجالات $[a , x_1]$ ، $[x_1 , x_2]$، $[x_{n-1} , b]$.

الآن لنشكل المجموع

$$S' = (x_1 - \propto) f(\propto_1) + (x_2 - x_1) f(\propto_2) + \dots + (b - x_{n-1}) f(\propto_n)$$

بحيث تكون $\propto_1$ من المجال الجزئي $[a , x_1]$، ... ، $\propto_n$ من المجال الجزئي $[x_{n-1} , b]$.

إذا كان لهذا المجموع نهاية معينة، وذلك عندما يزداد عدد الأعداد $x_{n-1} , \dots$ x_2 , x_1 , إلى مالانهاية، بشرط أن ينتهي الفرق بين كل عددين متتالين من هذه الأعداد إلى الصفر، فإننا نسمي هذه النهاية بتكامل محدود، ونرمز لهذا بـــ

$$\lim S = \int_a^b f(x)dx$$

نقرأ هذا الرمز: "التكامل من a إلى b لـــ f(x) dx"

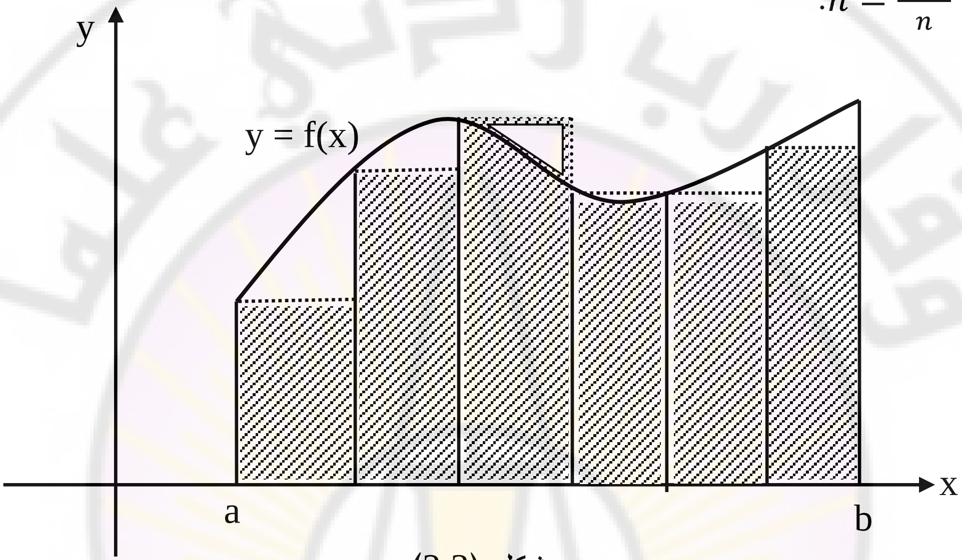
نسمي المجال $[a , b]$ بمجال التكامل المحدود، كما نسمي a , b بحدي التكامل.

نذكر أخيراً أننا نشترط دوماً أن يكون للمجموع S نهاية لا تتعلق باختيار الأعداد $x_{n-1} , \dots ,$ x_2 , x_1 ولا بالأعداد $\propto_1 , \propto_2 , \dots , \propto_n$. ويبرهن أن هذا محقق إذا كان $f(x)$ مستمراً، ضمن المجال (a , b).

3-10 حساب التكامل العددي بطريقة المستطيلات:

نذكر من المرحلة الثانوية، أنه إذا كان $y = f(x)$ مستمراً وموجباً على المجال $[a , b]$ فإن التكامل العددي $I = \int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحني $y = f(x)$ وفوق المحور ox وبين المستقيمين $x = b , x = a$.

ولحساب قيمة هذا التكامل العددي بصورة تقريبية (إذ إن من المتعذر أحياناً حساب هذا التكامل بصورة دقيقة)، نلجأ إلى تقسيم المجال [a , b] إلى n جزءاً، طول الجزء الواحد $h = \frac{b-a}{n}$.



شكل (2.3)

ونحسب مجموع مساحات المستطيلات التي عرضها h وأطولها

$$f(x_{n-1}) , f(x_2) , f(x_1) , f(x_0)$$

حيث $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, … , $x_{n-1} = a + (n-1)h$ فنحصل على القيمة التقريبية للمساحة. أي:

$$I \approx h\,[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

مثال 15: احسب القيمة التقريبية للتكامل $I = \int_0^a x \sin x \, dx$ وذلك بتجزئة المجال إلى عشرة مجالات جزئية متساوية.

الحل: إن $h = \frac{\pi-0}{10} = \frac{\pi}{10}$. نلخص نتائج حسابات $x_0, x_1, \dots, x_a$ وقيم $f(x)= x \sin x$ عند كل منها بالجدول الآتي:

x	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{10}$	$\frac{6\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{8\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{10}$
f(x)	0	0.097	0.369	0.762	1.195	1.571	1.793	1.779	1.477	0.874

$$I = h[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_9)]$$

$$= \frac{\pi}{10}(9.917) = 3.116$$

11-3 حساب التكامل العددي بطريقة أشباه المنحرفات:

يمكن إيجاد القيمة التقريبية للتكامل العددي $I = \int_a^b f(x)\,dx$ (حيث f(x) مستمر وموجب على المجال [a , b]) بوصل نقاط التقسيم المتتالية على المنحني، فنحصل على أشباه منحرفات مجموع مساحاتها هي القيمة التقريبية للتكامل:

$$I \approx h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

أو

$$I \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

مثال 16: أوجد القيمة التقريبية للتكامل بطريقة أشباه المنحرف

$$I = \int_4^{10} x\ 1n\ x\ dx$$

إذا أخذنا n = 8 (عدد المجالات).

الحل: نكتب الجدول لقيم f(x) = x 1n x علماً بأن:

$$h = \frac{10-4}{8} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad , \qquad x_0 = 4$$

x	4	4.75	5.5	6.25	7	7.75	8.5	9.25	10
f(x)	5.545	7.401	9.376	11.454	13.621	15.87	18.191	20.578	23.026

$$I = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_7) + \frac{1}{2}f(x_8)\right]$$

I = 0.75 [110.7765] = 83.082

مثال 17: يمثل الجدول الآتي قيم التابع f(x):

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
f(x)	1.1002	1.9873	1.9094	1.8667	1.8594	1.8874	1.9506

احسب القيمة التقريبية للتكامل العددي $I = \int_{0.2}^{1.4} f(x)dx$ بطريقتي المستطيلات وأشباه المنحرفات.

الحل: (آ) بطريقة المستطيلات:

$$I \approx h[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_5)]$$

حيث h = 0.4 – 0.2 = 0.2 وبالآتي: $n = \frac{1.4-0.2}{0.2} = 6$

I ≈ (0.2) [2.1002 + 1.9873 + 1.9094 + 1.8667 + 1.8594 + 1.8874]

= (0.2) (11.6104)

= 2.3221

(ب) بطريقة أشباه المنحرفات

$I \approx h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_5) + \frac{1}{2}f(x_6)\right]$

I ≈ (0.2) [1.0501 + 1.9873 + 1.9094 + 1.8667 + 1.8874 + 0.9753]

= (0.2) (10.4855) = 2.0971

3-12 حساب التكامل العددي بطريقة سيمبون:

في هذه الطريقة يجب أن تكون n (عدد المجالات) زوجية، (أي n = 2r). والتكامل $I = \int_a^b f(x)dx$، تعطي قيمته التقريبية بالعلاقة:

$$I \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{2\Gamma-2}) + 4f(x_{2\Gamma-1}) + f(x_{2\Gamma})\ ]$$

مثال 18: احسب القيمة التقريبية للتكامل العددي

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$ حيث n = 6

الحل: إن $h = \frac{\pi/2-0}{6} = \frac{\pi}{12}$. نرتب نتائج حساب قيم f(x) بالجدول:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$2\frac{\pi}{12}$	$3\frac{\pi}{12}$	$4\frac{\pi}{12}$	$5\frac{\pi}{12}$	$6\frac{\pi}{12}$
f(x)	0	0.2618	0.5236	0.7253	1.047	1.3087	1.5702

I ≈ $\frac{\pi}{36}$ [4(.2618)+2(0.5236)+4(0.7853)+2(1.047)+4(1.3087)+1.5702]

= $\frac{\pi}{36}$ (14.1346)

= 1.2335

تمارين

1- احسب قيمة كل من الحدوديات الآتية المقابلة لقيمة x المعطاة:

"آ" $p(x)= 3x^5 - 7x^4 - 5x^3 +6x^2 +2x - 10 \quad ; \quad x = 5$

"ب" $p(x)= x^5 - x^4 - 20x^3 - 44x^2 - 21x - 45 \quad ; \quad x = 3$

"ج" $p(x)= x^4 - 14x^3 - 126x^2 + 2070x - 6075 \quad ; \quad x = 5$

"د" $p(x)= x^{10} - 7x^6 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1 \quad ; \quad x = 2$

2- أوجد ناتج قسمة:

"أ" $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ على $x + 2$

"ب" $P(x) = - x^4 - 7x^3 - 5x^2$ على $x + 3$

"ج" $P(x) = 5x^3 - 3x + 2$ على $x + 1$

"د" $P(x) = 2x^5 - 5x^2 + 11$ على $x - 2$

"هـ" $P(x) = 10x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ على $2x - 3$

"و" $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ على $3x + 6$

"ز" $P(x) = 5x^6 - 7x^3 + x^2 - 5x + 2$ على $x - 3$

3- اكتب كلاً من الحدوديات الآتية:

"أ" $P(x) = x^4 - 5x^2 + 2x - 1$ بدلالة قوى $(x - 2)$

"ب" $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 2$ بدلالة قوى $(x + 2)$

"ج" $P(x) = 3x^4 - x^3 + 5$ بدلالة قوى $(x + 1)$

"د" $P(x) = 2x^5 - 7x^2 + 3x - 5$ بدلالة قوى $(x - 1)$

"هـ" $P(x) = 4x^4 - 4$ بدلالة قوى $(4x - 4)$

4- لدينا الدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول:

x	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2
f(x)	1.7	1.9	2.1	2.4	2.7	3	3.3	3.6

أوجد القيمة التقريبية للتكامل العددي $I=\int_{0.8}^{2.2} f(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}$ بكل من طريقتي المستطيلات وأشباه المنحرفات. هل يمكن استخدام طريقة سيمبسون؟

5- احسب القيمة التقريبية للتكامل العددي $I=\int_{2}^{5} \ln \mathrm{x}\, \mathrm{dx}$، (حيث $\mathrm{n}=10$)، وذلك بالطرائق الثلاث التي درستها (المستطيلات وأشباه المنحرفات وسيمبسون).

6- احسب القيمة التقريبية للتكامل العددي $I=\int_{1}^{3} \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \sin x\ \mathrm{dx}$ (حيث $\mathrm{n}=6$)، وذلك بالطرائق الثلاث التي درستها.(x مقدرة بالراديان).

7- احسب القيمة التقريبية للتكامل العددي $I=\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{x}}{\sin \mathrm{x}}\ \mathrm{dx}$ (حيث $\mathrm{n}=8$) وذلك بالطرائق الثلاث التي درستها (x مقدرة بالراديان).

الفصل الرابع

منحنيات الدرجة الثانية وتصنيفها

كما نعلم أن وضع نقطة في مستوى يتعين بمعرفة إحداثياتها بالنسبة لجملة إحداثيات مقارنة، ولهذا فإن معرفة وضع نقطة ما في مستو متعلق بجملة المقارنة، وسنحاول في هذا الفصل معرفة وضع نقطة ما في مستو بالنسبة لجملة مقارنة أولى، ثم نحاول تغيير جملة المقارنة هذه. ومعرفة العلاقة بين إحداثيات هذه النقطة بالنسبة للجملتين القديمة والجديدة .

لنفرض أنه لدينا جملة إحداثيات O X Y ولتكن M (x , y) نقطة ما في المستوي O X Y ، وإذا افترضنا أننا قمنا بسحب مركز الإحداثيات O (0 , 0) إلى النقطة O_0 (a_0 , b_0) ودورنا المحاور Ox , Oy بزاوية ϴ بالاتجاه الموجب وحصلنا على المحاور الجديدة Oy , Ox فإنه بالسهولة يمكن تطبيق دساتير نقل المحاور بالانسحاب $\overline{OO_0}$ والدوران (0 , ϴ) .

إن المعادلة $x^2 + y^2 = R^2$ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R.

كما أن المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ تمثل قطعاً ناقصاً مركزه o (المبدأ) ونصفا طولي محوريه الكبير والصغير (b , a). كما أن $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هي معادلة قطع زائد مركزه المبدأ ونصفا طولي محوريه القاطع وغير القاطع (b , a) كما أن المعادلة:

$$(ax + by + c)\,(a'x + b'y + c') = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية وتمثل مستقيمين (متقاطعين أو متوازيين أو منطبقين).

إن معادلة الدائرة (أو القطع الناقص أو القطع الزائد) تتغير لو نسبنا المنحني لمحورين يوازيان محوريه الأصليين. فتصبح من الشكل:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$
$$b^2 (x - x_0)^2 + a^2 (y - y_0)^2 = a^2b^2$$
$$b^2 (x - x_0)^2 + a^2 (y - y_0)^2 = a^2b^2$$

حيث (x_0 , y_0) هي إحداثيات المبدأ الجديد، ونلاحظ ظهور حدود من الدرجة الأولى في هذه المعادلات . كما نذكر أن معادلة القطع المكافئ هي من الشكل:

$$(x - x_0)^2 = 2p\,(y - y_0) \qquad \text{or} \qquad (y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0)$$

منسوباً لمحورين يوازيان محوره ودليله، حيث (x_0 , y_0) هي ذروة هذا القطع و p وسيطه. ولكن إذا دورنا المحاور حول المبدأ فإن المعادلة سيتغير شكلها ولكن لن تتغير درجتها، بل ستبقى من الدرجة الثانية حتماً. فمعادلة القطع الزائد متساوي الساقين منسوباً لمحوريه المقاربين هي $x\ y = \lambda$ تحوي الجداء $x\ y$. وهكذا فهذه المنحنيات كلها تمثل معادلة من الدرجة الثانية.

وبصورة عامة إن مجموع نقاط المستوي الإحداثي $x\ 0\ y$ المعرفة بما يلي:

$$M = \{ (x , y) \varepsilon R^2 : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \}$$

(حيث F, D, C, B, A ثوابت معينة) تمثل بيانياً بمنحني ندعوه منحني الدرجة الثانية (شريطة ألا تنعدم C, B, A معاً).

وهدفنا في هذا الفصل دراسة معادلة الدرجة الثانية بصورتها العامة.

4 – 1 المنحنيات المركزية:

إن المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية هي:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(شريطة ألا تنعدم C, B, A معاً).

تعريف:

إذا كان للمعادلتين:

$$Ax + By + D = 0$$
$$Bx + Cy + E = 0$$

حل مشترك، سمي المنحني منحنياً مركزياً وإلا فهو غير مركزي.

من الواضح أن جملة المعادلتين لها حل مشترك وحيد إذا وفقط إذا كان معين أمثالهما لا يساوي الصفر.

$$\omega = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

معين الأمثال يدعى مميز معادلة من الدرجة الثانية .

مبرهنة:

يكون منحني الدرجة الثانية مركزياً إذا وفقط كان مميز معادلته $\omega \neq 0$.

بفرض $\omega \neq 0$ عندها يكون للجملة حل وحيد مشترك هو مركز تناظر المنحني. وإحداثياته هي الحل المشترك:

$$X_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\omega} = \frac{BE-CD}{\omega} \qquad , \qquad Y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\omega} = \frac{DB-AE}{\omega}$$

مثال 1:

أي المنحنيات الآتية مركزي وعين مركز تناظره – إن وجد :

آ) $9x^2 + 6xy + 4y^2 - 10x - 8y + 4 = 0$

ب) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 6x - 8 = 0$

ج) $3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$

الحل:

آ) لدينا $F=4 , 2E = -8 , 2D = -10 , C = 4 , 2B = 6 , A = 9$

فالمميز $\omega = AC - B^2 = (9)(4) - (3)^2 = 27 \neq 0$

فالمنحني الأول مركزي، وإحداثيات مركز تناظره هي:

$$X_0 = \frac{BE-CD}{\omega} = \frac{(3)(-4)-4(-5)}{27} = \frac{8}{27}$$
$$Y_0 = \frac{DB-AE}{\omega} = \frac{(-5)(3)-9(-4)}{27} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

ب) لدينا $F= -8 , 2E = 0 , 2D = 6 , C = 9 , 2B = -12 , A = 4$

فالمميز $\omega = AC - B^2 = (4)(9) - (-6)^2 = 0$

فالمنحني غير مركزي.

ج) لدينا $F= 1 , 2E = -6 , 2D = 2 , C = -7 , 2B = 5 , A = 3$

فالمميز $\omega = AC - B^2 = (3)(-7) - (2.5)^2 = -27.25 \neq 0$

والمنحني الثالث مركزي. وإحداثيات مركز تناظره هي:

$$X_0 = \frac{BE-CD}{\omega} = \frac{(2.5)(-3)-(-7)(1)}{-27.25} = \frac{2}{109}$$
$$Y_0 = \frac{DB-AE}{\omega} = \frac{(2.5)-(-9)}{-27.25} = \frac{-46}{109}$$

4-2 تبسيط معادلة المنحني المركزي:

علمنا أن للمنحني المركزي مركز تناظر $G(x_0, y_0)$ حيث:

$$X_0 = \frac{BE-CD}{\omega} \quad , \quad Y_0 = \frac{DB-AE}{\omega}$$

فإذا فرضنا:

$X = x_1 + x_0$
$Y = y_1 + y_o$

أي إذا سحبنا المحاور إلى مركز التناظر $G(x_0, y_0)$ فإن معادلة الدرجة الثانية تصبح

$Ax_1{}^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1{}^2 + F' = 0$

أي عملية الانسحاب تخلصنا من حدود الدرجة الأولى .

إن C, B, A بقيت ثابتة (أمثال y^2, xy, x^2 نفسها) بينما تبدل الحد الثابت F بقيمة جديدة F' هي:

$$F' = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{W}{\omega}$$

حيث:

$$W = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \qquad \omega = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

مثال 2:

أوجد المعادلة الجديدة للمنحني:

$4x^2 + 5xy + y^2 + 4x + 1 = 0$

بعد سحب المحاور إلى مركز التناظر .

الحل:

لدينا $A = 4$, $2B = 5$, $C = 1$, $2D = 4$, $2E = 0$, $F = 1$

إن المميز $\omega = AC - B^2 = (4)(1) - (2.5)^2 = -2.25 \neq 0$

فالمنحني مركزي وإحداثيات مركز تناظره:

$$x_0 = \frac{BE-CD}{\omega} = -\frac{2}{-2.25} = \frac{8}{9}$$

$$y_0 = \frac{BD-AE}{\omega} = -\frac{5}{-2.25} = \frac{20}{9}$$

إذن

$$F' = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9}$$

والمعادلة المبسطة للمنحني (بعد سحب المحاور) هي:

$$4x_1^2 + 5x_1y_1 + y_1^2 + \frac{25}{9} = 0$$

مثال 3:

أوجد المعادلة المبسطة للمنحني

$$6\,xy + 8\,y^2 - 12\,x - 26\,y + 11 = 0$$

بعد سحب المحاور إلى مركز التناظر.

الحل:

لدينا $F = 11\ ,\ 2E = -26\ ,\ 2D = -12\ ,\ C = 8\ ,\ 2B = 6\ ,\ A = 0$

إن المميز:

$$\omega = AC - B^2 = -9 \neq 0$$

فالمنحني مركزي نحسب:

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81$$

فالمعادلة المبسطة بعد سحب المحاور تصبح:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F' = 0$$

حيث:

$$F' = \frac{W}{\omega} = \frac{81}{-9} = -9$$

فالمعادلة المبسطة هي :

$$6\,x_1y_1 + 8\,y_1^2 - 9 = 0$$

ملاحظة: لاحظ في المثال السابق أننا حسبنا 'F بقيمتها $F' = \frac{W}{\omega}$ ذلك لأننا لم نحسب إحداثيات مركز المنحني، بينما لو كانت إحداثيات المركز محسوبة:

$$x_0 = \frac{BE-CD}{\omega} = -\frac{-39+48}{-9} = -1$$

$$\boldsymbol{y_0} = \frac{BD-AE}{\omega} = -\frac{-18}{-9} = 2$$

لحسبنا 'F من العلاقة $F' = D x_0 + E y_0 + F = 6 - 26 + 11 = -9$

وهي القيمة نفسها التي حصلنا عليها سابقاً.

4-3 المعادلة المختزلة للمنحني:

لاحظنا أن سحب المحاور يخلصنا من حدود الدرجة الأولى، في المنحنيات المركزية. لكن هناك منحنيات لامركزية فلا يوجد انسحاب. وللتخلص من الحد الثاني (2 Bxy) في معادلة منحنيات الدرجة الثانية، يجب علينا تدوير المحاور الإحداثية، زاوية حادة Θ حول المبدأ تعطى بالعلاقة:

1) $tg\ 2\theta = \frac{2B}{A-C}$ عندما $A \neq C$

أي من المعادلة $B\ tg^2\ \Theta + (A - C)\ tg\ \Theta - B = 0$

2) $\theta = \frac{\pi}{4}$ عندما $A = C$

وهكذا يمكن أن نلخص خطوات العمل للوصول إلى المعادلة المختزلة بما يلي:

1)) $\omega \neq 0$ إن معادلة الدرجة الثانية يمكن تبسيطها بسحب المحاور (لأن المنحني مركزي) وتدوير هذه المحاور فنصل إلى المعادلة المختزلة:

$$A' x^2 + C' y^2 + F' = 0$$

حيث

$A' = A + B.\ tg\ \Theta$

$C' = C - B\ .\ tg\ \Theta$

$$F' = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{W}{\omega}$$

بينما تحسب $tg\ \Theta$ من المعادلة :

$$B\ tg^2\Theta + (A - C)\ tg\ \Theta - B = 0$$

مع اختيار الجذر الموجب لأن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فرضاً.

2)) $\omega = 0$ إن معادلة الدرجة الثانية يمكن تبسيطها بتدوير المحاور فقط زاوية حادة Θ، (لأن المنحني غير مركزي)، فنحصل على المعادلة:

$$A' x^2 + C' y^2 + 2D' x + 2E' y + F = 0$$

حيث

$$A' = A + B.\, tg\, \Theta$$
$$C' = C - B.\, tg\, \Theta$$
$$2D' = 2D \cos\Theta + 2E \sin\Theta$$
$$2E' = 2E \cos\Theta - 2D \sin\Theta$$

بينما تحسب tgΘ من المعادلة:

$$B\, tg^2\Theta + (A - C)\, tg\, \Theta - B = 0$$

مع اختيار الجذر الموجب لأن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فرضاً.

مثال 4:

عيّن نوع المنحني بعد كتابة معادلته المختزلة:

$$6\, xy + 8\, y^2 - 12\, x - 26\, y + 11 = 0$$

الحل:

لدينا $A = 0$, $2B = 6$, $C = 8$, $2D = -12$, $2E = -26$, $F = 11$

فالمميز :

$$\omega = AC - B^2 = -9 \neq 0$$

فالمنحني مركزي. نعين مركزه G حيث إحداثياته هي:

$$x_0 = \frac{BE - CD}{\omega} = -1$$
$$y_0 = \frac{BD - AE}{\omega} = 2$$

مركزه $G(-1, 2)$ نحسب $tg\, \Theta$ من المعادلة:

$$B\, tg^2\, \Theta + (A - C)\, tg\, \Theta - B = 0$$
$$3\, tg^2\, \Theta - 8\, tg\, \Theta - 3 = 0$$

$tg\, \Theta = 3$ أو $tg^2\theta = -\frac{1}{3}$ مرفوض لأن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فرضاً .

نحسب الأمثال:

$A' = A + B.\, tg\, \Theta$

$A' = 0 + 3\,(3) = 9$

$C' = C - B.\, tg\, \Theta$

$C' = 8 - 3\,(3) = -1$

$F' = D\, x_0 + Ey_0 + F = -9$

فمعادلة المنحني المختزلة هي:

$A'\, x^2 + C'\, y^2 + F' = 0$

$9\, x^2 - y^2 - 9 = 0$

أي $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$

وهي معادلة قطع زائد.

مثال 5: عيّن نوع المنحني، واكتب معادلته المختزلة:

$x^2 + 4\, y^2 - 5xy + x + 2y - 2 = 0$

الحل:

نرتب المعادلة فتصبح:

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

لدينا $F = -2\,,\ 2E = 2\,.\ 2D = 1\,,\ C = 4\,,\ 2B = -5\ ,\ A = 1$

فالمميز $\omega = AC - B^2 = (1)(4) - (-2.5)^2 = -\frac{9}{4} \neq 0$

فالمحني مركزي. نعين إحداثيات المركز:

$$x_0 = \frac{BE-CD}{\omega} = \frac{-2.5-2}{-2.25} = 2$$

$$y_0 = \frac{BD-AE}{\omega} = \frac{-1.25-1}{-2.25} = 1$$

نحسب $tg\, \Theta$ من المعادلة:

$$B\, tg^2\, \Theta + (A - C)\, tg\, \Theta - B = 0$$

$$-\frac{5}{2} tg^2\theta - 3tg\theta + \frac{5}{2} = 0$$

$$tg\theta = \frac{3+\sqrt{34}}{-5} \quad \text{أو} \quad tg\theta = \frac{3-\sqrt{34}}{-5}$$

الجذر الثاني مرفوض لأنه سالب $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

إذن:

$$A' = A + B\ tg\theta = \frac{5-\sqrt{34}}{2}$$
$$C' = C - B\ tg\theta = \frac{5+\sqrt{34}}{2}$$
$$F' = Dx_0 + Ey_0 + F = 0$$

فالمعادلة المختزلة هي:

$$A'\, x^2 + C'\, y^2 + F' = 0$$

أي:

$$\frac{5-\sqrt{34}}{2}X^2 + \frac{5+\sqrt{34}}{2}Y^2 = 0$$
$$Y^2 = -\frac{5-\sqrt{34}}{5+\sqrt{34}}X^2$$
$$Y^2 = \frac{9}{\left(5+\sqrt{34}\right)^2}X^2$$
$$Y = \pm\frac{3}{5+\sqrt{34}}X$$

فهي تمثل مستقيمين متلاقيين في النقطة (1 , 2) مركز التناظر.

مثال 6: اكتب المعادلة المختزلة للمنحني

$$9\, x^2 + 24\, xy + 16\, y^2 - 40\, x + 30\, y = 0$$

الحل:

لدينا $F = 0\ ,\ 2E = 30\ ,\ 2D = -40\ ,\ C = 16\ ,\ 2B = 24\ ,\ A = 9$

فالمميز :

$$\omega = AC - B^2 = 9\,(16) - (12)^2 = 0$$

فالمنحني غير مركزي.

نحسب $tg\ \Theta$ من المعادلة:

$$B\ tg^2\,\Theta + (A - C)\ tg\,\Theta - B = 0$$

$$12\ tg^2\theta - 7\ tg\theta - 12 = 0$$

$$tg\theta = -\frac{3}{4} \quad \text{أو} \quad tg\theta = \frac{7+25}{24} = \frac{4}{3}$$

الثاني مرفوض لأنه سالب.

وبالآتي

$$A' = A + B\ tg\theta = 25$$
$$C' = C - B\ tg\theta = 0$$
$$2D' = 2D\cos\theta + 2E\sin\theta$$
$$2D' = (-40)\left(\frac{3}{5}\right) + (30)\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$
$$2E' = 2E\cos\theta - 2D\sin\theta = (30)\left(\frac{3}{5}\right) - (-40)\left(\frac{4}{5}\right) = 50$$

فالمعادلة المختزلة :

$$A'x^2 + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F = 0$$

هي

$$25x^2 + 50y = 0$$

فالمنحني قطع مكافئ معادلته بالنسبة للمحاور الجديدة $X^2 = -2Y$ محوره يميل على المحور ox بزاوية حادة Θ حيث $tg\theta = \frac{4}{3}$ وذروته (0 , 0).

مثال: 7 اكتب المعادلة المختزلة للمنحني

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$$

الحل:

لدينا $A = 2$, $2B = 4$, $C = 5$, $2D = -6$, $2E = -8$, $F = -1$

فالمميز:

$$\omega = AC - B^2 = 6 \neq 0$$

فالمنحني مركزي .

نحسب $tg\ \Theta$ من المعادلة:

$$B\ tg^2\,\Theta + (A - C)\ tg\,\Theta - B = 0$$
$$2\ tg^2\,\Theta - 3\ tg\,\Theta - 2 = 0$$

$tg\theta = -\frac{1}{2}$ أو $tg\theta = \frac{3+5}{4} = 2$

الثاني مرفوض لأنه سالب.

ونحسب:

$$W = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -35$$

$$A' = A + B\,tg\theta = 6$$
$$C' = C - B\,tg\theta = 1$$

فالمعادلة المختزلة:

$$A'x^2 + C'y^2 + \frac{W}{\omega} = 0$$
$$6x^2 + y^2 - \frac{35}{6} = 0$$

أي

$$\frac{x^2}{35/6} + \frac{y^2}{35/6} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه مركز تناظر $\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{6}\right)$ ومحوره الصغير يميل على المحور ox زاوية Θ ظلها $tg\Theta = 2$ ($63^0\ 26'\ 6''$= راديان 1.107=Θ).

طولا نصفي محوريه:

$$b = \sqrt{\frac{35}{36}}$$
$$a = \sqrt{\frac{35}{6}}$$

4-4 نوع المنحني:

لاحظنا أن منحني الدرجة الثانية يتصف بإحدى صفتين:

1. مركزي $\omega \neq 0$
2. غير مركزي $\omega = 0$

والآن نبين نوع هذا المنحني، هل هو دائري أم قطع ناقص أم قطع زائد أم قطع مكافئ أم مستقيمان أم نقطة.

نلخص الدراسة بالجدول الآتي: بعد التذكير بأن:

$M = \{ (x , y) \varepsilon R^2 : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \}$

حيث A , B , C لا تنعدم معاً أي $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

<table>
<tr><th>قيمة ω</th><th>إشارة ω</th><th colspan="2">قيمة وإشارة w</th><th>المجموعة M</th></tr>
<tr><td rowspan="5">$\omega \neq 0$
المنحني مركزي</td><td rowspan="3">ω> 0</td><td colspan="2">$W = 0$</td><td>نقطة وحيدة</td></tr>
<tr><td colspan="2">$AW > 0$</td><td>مجموعة خالية</td></tr>
<tr><td colspan="2">$AW < 0$</td><td>قطع ناقص، دائرة عندما
B = 0 A = C</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ω< 0</td><td colspan="2">$W = 0$</td><td>مستقيمان متقاطعان</td></tr>
<tr><td colspan="2">$W \neq 0$</td><td>قطع زائد</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\omega = 0$
المنحني غير مركزي</td><td rowspan="4"></td><td colspan="2">$W \neq 0$</td><td>قطع متكافئ</td></tr>
<tr><td rowspan="3">W=0</td><td>$CF-E^2=0$</td><td>مستقيمان منطبقان</td></tr>
<tr><td>$CF-E^2>0$</td><td>مجموعة خالية</td></tr>
<tr><td>$CF-E^2<0$</td><td>مستقيمان متوازيان</td></tr>
</table>

مثال 8: عيّن نوع كل من المنحنيات الآتية، دون إيجاد معادلتها المختزلة:

آ) $5x^2 + 4xy + 3y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

ب) $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$

ج) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

د) $2x^2 + 2y^2 + 2x - y - 6 = 0$

هـ) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$

و) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y - 11 = 0$

ز) $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$

الحل:

آ) $F = 80 , 2E = -56 , 2D = -32 , C = 8 , 2B = 4 , A = 5$

المميز

$$\omega = AC - B^2 = 36 > 0$$

$$W = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -1296$$

بما أن $\omega > 0$, $AW < 0$ فالمنحني قطع ناقص.

ب) $A = 8$, $2B = 12$, $C = 17$, $2D = 16$, $2E = -12$, $F = 3$

المميز

$$\omega = AC - B^2 = 100 > 0$$

$$W = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 8 \\ -6 & 17 & -6 \\ 8 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -1296$$

بما أن $\omega > 0$, $AW < 0$ فالمنحني قطع ناقص.

ج) $A = 1$, $2B = -5$, $C = 4$, $2D = 1$, $2E = 2$, $F = -2$

المميز

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -2.5 & 0.5 \\ -25 & 4 & 1 \\ 0.5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن $\omega < 0$, $AW = 0$ فالمعادلة تمثل مستقيمين متقاطعين.

د) $A = 2$, $2B = 0$, $C = 2$, $2D = 2$, $2E = -1$, $F = -5$

المميز

$$\omega = AC - B^2 = 4 > 0$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & -6 \end{vmatrix} = -26.5$$

بما أن $\omega > 0$, $AW < 0$ فالمنحني قطع ناقص لكن $A = C$ و $B = 0$ فهو دائرة.

هـ) $A = 1$, $2B = -2$, $C = 1$, $2D = 6$, $2E = -14$, $F = 29$

المميز

$$\omega = AC - B^2 = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 29 \end{vmatrix} = -16$$

بما أن $\omega = 0$, $W \neq 0$ فالمنحني قطع مكافئ .

و) $A = 4$, $2B = -12$, $C = 9$, $2D = 20$, $2E = -30$, $F = -11$

المميز

$$\omega = AC - B^2 = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 6 & -15 \\ 10 & -15 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن $\omega = 0$, $W = 0$ و $CF - E^2 = -324 < 0$ فالمعادلة تمثل مستقيمين متوازيين.

ز) $A = 7$, $2B = -24$, $C = 0$, $2D = -38$, $2E = 24$, $F = 175$

المميز

$$\omega = AC - B^2 = -144 < 0$$

$$W = \begin{vmatrix} 7 & -12 & -19 \\ -12 & 0 & 12 \\ -19 & 12 & 175 \end{vmatrix} = -2078$$

بما أن $\omega < 0$, $W \neq 0$ فالمنحني قطع زائد.

4-5 الأقطار الرئيسة:

القطر الرئيس للمنحني هو محور تناظر هذا المنحني. فالمنحني المركزي له قطران رئيسان متعامدان، بينما المنحني غير المركزي فله محور تناظر وحيد (أي له قطر رئيس وحيد).

يتعين ميل الأقطار الرئيسة m من المعادلة:

$$Bm^2 + (A - C)m - B = 0$$

(واضح أن القطرين الرئيسين متعامدان – في حال وجودهما – لأن جداء ميليهما هو $\frac{-B}{B} = -1$).

إن معادلة القطر الرئيس هي:

$$(Ax + By + D) + m(Bx + Cy + E) = 0$$

مثال 9: أوجد الأقطار الرئيسة للمنحني

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

الحل:

$F = 80$, $2E = -56$, $2D = -32$, $C = 8$, $2B = 4$, $A = 5$

معادلة الميل:

$Bm^2 + (A - C)m - B = 0$

$2m^2 - 3m - 2 = 0$

$m_1 = 2$

$m_2 = -\frac{1}{2}$

معادلة القطر الرئيس الأول :

$$(5x + 2y - 16) + 2(2x + 8y - 28) = 0$$

ومعادلة القطر الرئيس الثاني

$$(5x + 2y - 16) - \frac{1}{2}(2x + 8y - 28) = 0$$

أي المعادلتان هما :

$9x + 18y - 72 = 0$ ، $4x - 2y - 2 = 0$

أي

$2x - y = 1$ ، $x + 2y = 8$

مثال 10: عيّن الأقطار الرئيسة للمنحني

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 1 = 0$$

الحل:

$F = 1$, $2E = 0$, $2D = 4$, $C = 1$, $2B = 4$, $A = 4$

معادلة الميل هي :

$$Bm^2 + (A - C) m - B = 0$$
$$2 m^2 - 3 m -2 = 0$$
$$m_1 = \frac{1}{2}$$
$$m_2 = -2$$

معادلة القطر الرئيس الأول:

$$(4 x + 2 y +2) + \frac{1}{2} (2x + y) = 0$$

ومعادلة القطر الرئيس الثاني:

$$(4 x + 2 y +2) - 2 (2x + y) = 0$$

الأولى تعطي $5x + \frac{5}{2}y + 2 = 0$

أي:

$$10 x + 5 y + 4 = 0$$

والثانية تعطي $0 = 2$ وهذه مستحيلة .

فللمنحني قطر رئيس واحد (فهو منحن غير مركزي وبالحساب نجد $\omega = 0$).

مثال 11: عيّن الأقطار الرئيسة للمنحني

$$4 x^2 + 4 y^2 - 20 x + 12 y + 25 = 0$$

الحل :

$F = 25$, $2E = 12$, $2D = -20$, $C = 4$, $2B = 0$, $A = 4$

معادلة الميل هي :

$$Bm^2 + (A - C) m - B = 0$$
$$0 = 0$$

فهي محققة مهما تكن m، فللمنحني لا نهاية من الأقطار الرئيسة.

واضح أن المنحني هو دائرة لذا فكل قطر من أقطارها هو محور تناظر لها وبالآتي فهو قطر رئيس لها.

مثال 12: عيّن نوع المنحني الآتي، وأوجد أقطاره الرئيسة، وعين مركزه، ومعادلته المختزلة:

$x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$

الحل:

$F = 5 , 2E = -2 , 2D = -2 , C = 1 , 2B = -6 , A = 1$

المميز

$$\omega = AC - B^2 = 1 - 9 = -8 < 0$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -48$$

بما أن $\omega < 0$, $W \neq 0$ فالمنحني قطع زائد.

نحسب $tg\,\Theta$ من المعادلة:

$B\,tg^2\,\Theta + (A - C)\,tg\,\Theta - B = 0$
$-3tg^2\theta + 3 = 0$
$tg\theta = 1$
$tg\theta = -1$

نحسب الأمثال :

$A' = A + B\,tg\,\Theta = -2$
$C' = C - B\,tg\,\Theta = 4$

فالمعادلة المختزلة هي:

$$A'x^2 + C'y^2 + \frac{W}{\omega} = 0$$
$$-2x^2 + 4y^2 + \frac{-48}{-8} = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - 6 = 0$$

$Bm^2 + (A - C)m - B = 0$

$m_2 = -1$ $\qquad$ $m_1 = 1$

معادلة القطر الرئيس الأول هي:

$$(x - 3y - 1) + (-3x + y - 1) = 0$$

أي

$$x + y + 1 = 0$$

معادلة القطر الرئيس الثاني هي :

$$(x - 3 y - 1) - (- 3 x + y - 1) = 0$$

أي:

$$x - y = 0$$

مركز التناظر هو نقطة تقاطع القطرين الرئيسين فإحداثياته: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

تمارين

أولاً– عيّن نوع كل من المنحنيات الآتية:

1- $x^2 + 4xy + 5y^2 -6x-8y-1=0$

2- $5 x^2 + 4 xy + 8 y^2 -32 x – 56 y + 80 =0$

3- $6 xy - 8 y^2 + 12 x – 26 y - 11 =0$

4- $5 x^2 + 12 xy -22 x – 12 y -19 =0$

5- $9 x^2 + 24 xy + 16 y^2 -40 x + 30 y =0$

6- $x^2 – 5 xy + 4 y^2 + x + 2 y - 2 =0$

7- $x^2 + y^2 + 2 xy + 1 =0$

8- $x^2 + y^2 + xy - 1 =0$

9- $x^2 + 4 xy + 4 y^2 + 6 x – 12 y + 8 =0$

10- $5x^2 + 4 xy + 8 y^2 - 22 x – 46 y + 80 =0$

11- $9x^2 + 6 xy + 4 y^2 - 10 x – 8 y + 4 =0$

12- $7x^2 + 42 xy - 14 y^2 + 22 =0$

13- $4x^2 + 3 xy + 2 y^2 -3 x + 2 y + 5 =0$

14- $x^2 + 2 xy + 3 y^2 + 2 x – 4 y -1 =0$

15- $x^2 + 4 xy + 4 y^2 + 2 x + 4 y + 1 =0$

16- $xy + 2 y^2 + x + 4 y + 2 =0$

17- $x^2 + 6 xy + 3 y^2 - 2 x + 2 y - 1 =0$

ثانياً– أوجد معادلتي القطرين الرئيسين لكل من منحنيات السؤال الأول.

ثالثاً– أوجد إحداثيات مركز المنحني – إن وجد – للمنحنيات المذكورة في السؤال الأول.

رابعاً– أوجد المعادلة المختزلة لكل من منحنيات السؤال الأول.

خامساً– عيّن ذروات كل من منحنيات السؤال الأول.

(إرشاد الذروة هي نقطة تقاطع القطر الرئيس مع المنحني).

الفصل الخامس

البيانات الإحصائية – Data

1. تعريف الإحصاء.
2. أنواع البيانات الإحصائية.
3. جمع البيانات
4. أنواع العينات.
5. تبويب البيانات الإحصائية.

1-5 تعريف علم الإحصاء:

هو العلم الذي يبحث في طرق وقواعد جمع البيانات، وأنواع البيانات، وعرض هذه البيانات، ثم تلخيصها في صورة مؤشرات رقمية وتحليلها وتفسيرها وإجراء المقارنات واستنتاج العلاقات؛ بهدف استخدامها في اتخاذ القرارات المناسبة.

ومن التعريف السابق نستطيع القول: إن المراحل الأساسية للعملية الإحصائية هي:

- جمع البيانات.
- تنظيم و تبويب وعرض البيانات.
- تلخيص البيانات (بيانياً أو جدولياً).
- تحليل البيانات واتخاذ القرارات.

أقسام علم الإحصاء:

يقسم علم الإحصاء إلى قسمين رئيسين وهما:

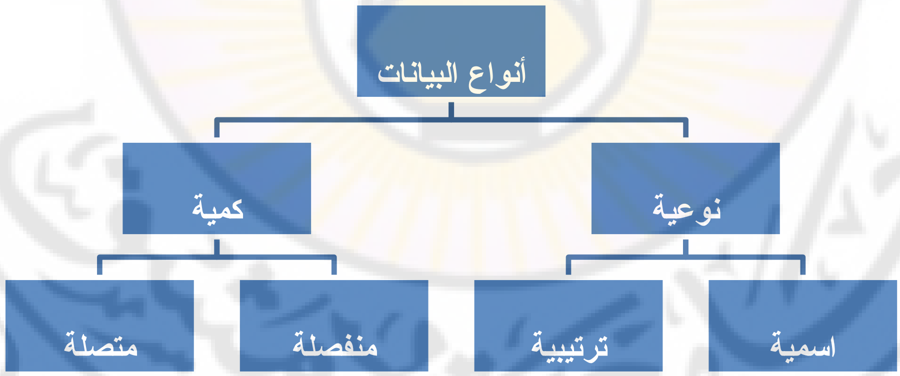
- الإحصاء الوصفي: وهو يختص بطرق جمع البيانات وعرضها (جدولياً أو بيانياً) وإعطاء الوصف المناسب لها وتلخيصها مع إجراء بعض التحاليل الوصفية عليها.
- الإحصاء الاستدلالي: وهو يختص بتحليل المعطيات واستخلاص النتائج وتفسيرها ومن ثم اتخاذ القرارات.

مصطلحات إحصائية:

- المجتمع: وهو يمثل جميع مفردات الدراسة سواء أفراد أم أشياء، والتي نرغب بدراستها وتحليل خصائصها، وهناك نوعان من المجتمعات:
  - مجتمع محدود أو نهائي (على سبيل المثال طلاب جامعة دمشق).
  - مجتمع غير محدود أو لا نهائي (عدد الحشرات الموجودة على أشجار التفاح).
- العينة: هي أي مجموعة جزئية من المجتمع محل الدراسة، يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح.

2-5 أنواع البيانات الإحصائية:

البيانات وهي عبارة عن مجموعة من القيم أو القياسات للمتغير، ولها أنواع تختلف في طريقة قياسها، ومن الأمثلة على ذلك بيانات نوع الجنس (ذكوراً أو إناثاً) وبيانات عن درجة الحرارة لحفظ الدجاج في المجمدات لفترة زمنية معينة أو بيان عن تقدير الطالب في المرحلة الجامعية، وبالتالي لها عدت أنواع ويمكن تلخيصها بـــ:



- **البيانات النوعية أو الوصفية (Qualitative Data):**

وهي بيانات غير رقمية أو رقمية، ولكن مرتبة على شكل مستويات أو فئات وهي على شكلين:

- البيانات الاسمية: وهي بيانات اسمية أو وصفية لأي عنصر أو مفردة بالمجتمع مع عدم إمكانية ترتيبها، على سبيل المثال تصنيف المواليد ذكر أو أنثى فصيلة الدم.
- البيانات الترتيبية: وهي أيضاً اسمية أو وصفية و لكن يعبر عن الترتيب أو التفضيل، على سبيل المثال: ممتاز – جيد – وسط – ضعيف أي الممتاز في المركز الأول ثم جيد وهكذا.

- **البيانات الكمية (Quantitative Data):**

- البيانات المنفصلة (متقطعة): عبارة عن قيم تدل على صفة ما يمكن عدها، وهذه القيم لا تأخذ إلا قيم صحيحة، على سبيل المثال: عدد أفراد الأسرة: فأسرة عدد أفرداها 4 وأسرة أخرى عدد أفرادها 8 وممكن أن تكون أسر أخرى بين 4 و 8 وبالآتي هي بيانات منفصلة (متقطعة).
- بيانات متصلة: عبارة عن بيانات تدل على صفة ما يمكن قياسها، وبالتالي تأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية، على سبيل المثال: ارتفاع نبات الشعير من الإنبات حتى النضج في مناطق مختلفة من الجمهورية العربية السورية.

والبيانات الكمية يعبر عنها بأرقام، ويمكن ترتيبها تصاعدياً وتنازلياً ،وكذلك يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها...

5-3 جمع البيانات:

وهي إحدى أهم الخطوات للباحث، حيث إن دقة جمع البيانات يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة للتعميم، ولأهمية هذه الخطوة فقد وضع العلماء نقطتين أساسيتين يجب الإلمام بها وهي:

- مصادر البيانات
- أسلوب جمع البيانات

مصادر جمع البيانات:

هنالك مصدران أساسيان للبيانات وهي:

- **مصادر أولية:** ونحصل بطريقها على البيانات بشكل مباشر، حيث يكون الباحث هو العنصر الوحيد المسؤول بجمع بياناته، وتكون إما بالمقابلة المباشرة وإما بطريقة

إجراء التجارب، وجمع النتائج بنفسه، ويتميز هذا النوع بالدقة العالية والثقة بتلك البيانات، ويعاب على هذه الطريقة الوقت التي تتطلبه والجهد الكبير والتكلفة الباهظة للبحث.

- **مصادر ثانوية:** ويتم الحصول على البيانات بشكل غير مباشر بمعنى آخر بواسطة أشخاص آخرين أو أجهزة وهيئات رسمية متخصصة، على سبيل المثال النشرات الإحصائية وإحصائيات وزارة الزراعة ومنشورات المنظمات العربية والدولية كالفاو وايكاردا وأكساد.

ومن مزاياها توفير الوقت والجهد والكلفة، ومن عيوبها انخفاض درجة الثقة لدى الباحث لهذه البيانات.

أساليب جمع البيانات:

يتحدد الأسلوب بحسب الهدف الرئيسي للبحث، وتأخذ بأسلوبين أساسين: المصادر الرسمية المسجلة و المصادر الميدانية للبيانات.

المصدر الأول/ المصادر الرسمية المسجلة:

وتشمل الإحصاءات العامة والنشرات الإحصائية التي تصدرها المؤسسات الحكومية والخاصة والأهلية، لتبين أوجه التغير والتطور في المجال الذي تختص به هذه المؤسسات. وهذه البيانات هي من مسؤولية هذه الشركة أو المؤسسة.

ميزاته:

1. قد تكون سنوية أو نصف سنوية أو شهرية أو يومية أو غير ذلك.
2. الجهة التي نشرت البيانات هي المسؤولة عنها وليس الباحث.
3. تقع المسؤولية على الباحث فقط في تحليل البيانات واستخلاص النتائج.
4. أوفر في الوقت والجهد والتكاليف بالنسبة للباحثين.

وعيوبها:

1. عدم توفر جميع البيانات.
2. عدم تحديث البيانات بشكل دوري.

3. عدم الموثوقية بهذه البيانات، وعدم الدقة في الكثير من الأحيان، لأن بعض هذه المعطيات تكون معلومات دعائية فقط وليست موثقة.
4. لا تغطي جميع جوانب الدراسة

المصدر الثاني/المصادر الميدانية للبيانات:

يقوم الباحث بجمع البيانات، وهنالك عدد من الطرق في جمع هذه البيانات إما عن طريق التجارب على سبيل المثال إجراء تصميم وتحليل تجارب كما في التجارب الزراعية، وإما عن طريق الاستبيانات الخاصة بذلك يحصل منهم على البيانات مباشرة، ونتيجة التطور أصبح من الممكن استخدام الإنترنت أو الهاتف لإجراء الاستبيان وملء الاستمارة.

المصادر الميدانية للبيانات تكون إما أن يقوم الباحث بنفسه بالمقابلات وملء الاستمارة وإما يقوم بتوزيع الاستمارات على بعض الأشخاص ليقوموا بتعبئتها وإعادتها له وهي أقل دقة من الطريقة الأولى.

والمصادر الميدانية للبيانات لها أسلوبان هما:

1. الحصر الشامل.
2. العينات.

المجتمع الإحصائي (الحصر الشامل):

وهو جميع المفردات التي يجمعها إطار معين، أو مجموعة من الخصائص المشتركة العامة. (مثل طلاب السنة الأولى – كلية الزراعة)

يلاحظ عليه:

1. الشمول: جميع المفردات تدخل في البحث أو الدراسة .
2. التنوع: المفردات قد تكون من البشر أو من الحيوانات أو من النباتات أو أي شيء آخر.
3. المجتمع الإحصائي قد يكون محدود، وبالتالي يمكن معرفة حجمه وعدد مفرداته (طلاب السنة الأولى في كلية الزراعة) أو غير محدود لا يمكن معرفة حجمه أو عدد مفرداته عدد الحشرات المتواجدة في حقل معين.

4. جميع أفراد المجتمع يجمعهم إطار معين وخصائص معينة.

مزايا المصدر الشامل:

1. يوفر المعلومات الدقيقة عن جميع الأفراد.
2. تعميم النتائج على المجتمع.

عيوبه:

1. طول الوقت في حصر جميع أفراد المجتمع.
2. جهود كبيرة لأنه من الممكن أن يكون المجتمع موزع في مناطق مختلفة ومتباعدة حتى في بعض الأحيان صعوبة الوصل إلى جميع عناصر المجتمع.
3. تكاليف كبيرة.

الأسلوب الثاني للبحث الميداني/ العينات:

تعرف العينة بأنها المجموعة الجزئية من مجتمع الدراسة يتم اختيارها بطريقة معينة وإجراء الدراسة عليها، ومن ثم استخدام تلك النتائج وتعميمها على كامل المجتمع الأصلي.

أسباب اللجوء إلى العينات:

1. ارتفاع التكلفة والوقت والجهد: عندما يكون المجتمع كبير ومتباعد جغرافياً فذلك يتطلب وقتاً وجهداً كبيراً وتكلفة عالية.
2. ضعف الرقابة والإشراف: عندما يكون المجتمع كبيراً فذلك يتطلب استعانة الباحث بأشخاص لمساعدته على جمع البيانات وتحليلها.
3. التجانس التام في خصائص مجتمع الدراسة الأصلي.
4. عدم إمكانية إجراء الدراسة على كامل عناصر المجتمع الأصلي.
5. عدم إمكانية حصر كامل عناصر المجتمع الأصلي.

عيوبه

1. عدم دقة النتائج. (قد يكون لديك 3 آلاف طالب، وأنت تعمل البحث على 100 طالب، فالمعلومات هنا قد لا تكون دقيقة).
2. في بعض الأحيان لا يمكن التعميم على المجتمع إذا أخذت العينة بشكل غير دقيق.

5-4 أنواع العينات العشوائية:

تقسم العينات العشوائية إلى أربعة أنواع :

1. العينة العشوائية البسيطة: Simple Random Sampling (SRS)
2. العينة المنتظمة: Systematic Sampling
3. العينة الطبقية: Stratified Sampling.
4. العينة العنقودية: Cluster Sampling

5-5 تبويب البيانات الإحصائية Classified Statistical Data

5-5-1 التوزيعات التكرارية: هي عبارة عن جداول تلخص فيها بيانات العينة في فئات، ولكل فئة تكرار تتحدد قيمته حسب البيانات. تسمى البيانات بعد تلخيصها في جداول تكرارية بالبيانات المبوبة، ونلجأ لهذا الأسلوب إذا كان لدينا عدد كبير من البيانات.

الجداول التكرارية:

يتم عرض البيانات في صورة جدول تكراري، ويختلف شكل الجدول طبقًا لنوع البيانات (نوعية أو كمية) وحسب عدد المتغيرات، وفيما يلي عرض بعض أنواع الجداول التكرارية التي توضح ذلك.

عرض بيانات المتغير النوعي (وصفي) في شكل جدول تكراري بسيط

عند دراسة ظاهرة ما تحتوي على متغير نوعي واحد، فإنه يمكن عرض بياناته في جدول تكراري بسيط، وهو جدول يتكون من عمودين، أحدهما به نوع المتغير أو تسمية المتغير أو مستوى المتحول، والثاني به التكرارات، أي: عدد المفردات في هذا المستوى .

والمثال الآتي يبين لنا كيف يمكن تبويب البيانات النوعية الخام في شكل جدول تكراري.

مثال 1:

فيما يلي بيانات عينة من 50 طالباً من كلية الزراعة جامعة دمشق موزعين حسب سنة الدراسة.

أولى ثانية ثالثة ثالثة رابعة ثالثة ثانية خامسة رابعة أولى

ثالثة ثالثة خامسة ثانية ثانية ثالثة ثالثة أولى خامسة خامسة

ثانية رابعة رابعة ثالثة ثالثة خامسة خامسة خامسة رابعة رابعة

ثالثة أولى ثانية ثانية أولى أولى أولى ثانية رابعة ثانية

خامسة أولى ثانية رابعة رابعة ثالثة ثالثة ثانية خامسة رابعة

والمطلوب:

1- ما نوع المتغير؟ وما المعيار المستخدم في قياس البيانات؟.

2- اعرض البيانات في شكل جدول تكراري.

3- كوّن التوزيع التكراري النسبي.

الحل:

1- نوع المتغير: سنة الدراسة (أولى – ثانية – ثالثة – رابعة – خامسة) وهو متغير اسمي.

2- لعرض البيانات في شكل جدول تكراري نتبع الآتي:

تفريغ البيانات في جدول ويحتوي هذا الجدول على علامة تعبر عن تكرار وعلى حزم كل حزمة تحوي على خمس تكرارات وموضحة بالجدول الآتي:

جدول تفريغ البيانات

سنة الدراسة	العلامات الإحصائية	التكرار
أولى		8
ثانية		11
ثالثة		12
رابعة		10
خامسة		9
المجموع	50	50

تكوين الجدول التكراري: وهو نفس الجدول السابق باستثناء العمود الثاني:

التوزيع التكراري لعينة قدرها 50 طالباً من كلية الزراعة حسب سنة الدراسة

سنة الدراسة	التكرار	التوزيع التكراري النسبي
أولى	8	0.16
ثانية	11	0.22
ثالثة	12	0.24
رابعة	10	0.2
خامسة	9	0.18
المجموع	50	1.00

3- يحسب التكرار النسبي بقسمة تكرار المجموعة على مجموع التكرارات أي: يعطى بالعلاقة :

التكرار النسبي = $\frac{f}{\sum f}$

التكرار النسبي للسنة الأولى =8/50 = 0.16

التكرار النسبي للسنة الثانية = 11 /50 = 0.22

التكرار النسبي للسنة الثالثة = 12 / 50 = 0.24

التكرار النسبي للسنة الرابعة = 50 / 10 = 0.2

التكرار النسبي للسنة الخامسة = 50 / 9 = 0.18

دائماً مجموع التوزيع التكراري النسبي يساوي الواحد.

والعمود الثالث في الجدول السابق يعرض التوزيع التكراري النسبي للطلاب حسب السنوات.

عرض بيانات المتغير الكمي في شكل جدول تكراري بسيط

يمكننا عرض بيانات المتغير الكمي بنفس الأسلوب السابق، ولكن يختلف فقط بشكل الفئات وبتوزيعها، ونلخص العمليات بالخطوات الآتية:

- نحسب المدى والذي يساوي الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة
- نحدد عدد الفئات K وفق القانون:

$$K = 1 + 3.322\, Log\, N \qquad N \geq 1000$$

$$K = 2.5 \cdot \sqrt[4]{N} \qquad N < 1000$$

نرمز لعدد أفراد المجموعة المدروسة بـ N

وأيضاً يستخدم حديثا القانون $2^K \geq N$ و يتم اختيار اصغر قيمة لعدد الفئات التي تحقق المتراجحة السابقة.

- يقرب عدد الفئات إلى أقرب عدد صحيح، ولكن يفضل أن يقرب إلى العدد الأعلى مهما يكن العدد بعد الفاصلة.
- نحدد طول الفئة I وذلك بقسمة المدى على عدد الفئات.
- تحديد بداية الفئة الأولى وهي القيمة الأدنى في البيانات.
- الحد الأعلى للفئة لا يدخل ضمن الفئة؛ أي: المجال مغلق من البداية ومفتوح من النهاية.

ونورد المثال الآتي للتوضيح:

مثال 2:

فيما يلي بيانات لدرجة 80 طالباً في المعهد الزراعي في مادة الإحصاء وتصميم التجارب:

95	90	85	70	80	40	60	60	50	30
30	50	40	60	98	98	78	75	65	50
75	85	46	41	42	58	57	56	45	33
86	95	58	56	54	50	78	77	76	76
85	56	55	97	78	77	76	75	34	33
76	75	72	71	66	67	64	68	65	63
85	53	78	66	60	85	83	34	50	30
74	76	76	75	52	90	91	95	33	55

والمطلوب:

1- كون التوزيع التكراري لدرجات الطلاب.

2- كون التوزيع التكراري النسبي.

3- ما نسبة الطلاب الحاصلين على درجة ما بين 57 إلى أقل من 75

4- ما نسبة الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 57 درجة؟

5- ما نسبة الطلاب الحاصلين على درجة 57 أو أكثر ؟

الحل:

لتكوين التوزيع التكراري نلاحظ أن المتغير (درجة الطالب) هو متغير كمي وحتى يتم التبويب في جدول تكراري نطبق الخطوات السابقة

1- حساب المدى : الحد الأعلى – الحد الأدنى

$$98-30=68$$

2- نحدد عدد الفئات K وفق القانون:

$$K=2.5\times\sqrt[4]{80}=7.48\approx 8 \qquad N=80<1000$$

3- نحدد طول الفئة I و ذلك بقسمة المدى على عدد الفئات

$$I=68/8=8.5\approx 9$$

4- تحديد بداية الفئة الأولى وهي القيمة الأدنى في البيانات (30).

5- تحديد الحد الأعلى للفئة ويساوي بداية الفئة مضاف إليها طول الفئة ويساوي

$$30 + 9 = 39$$

وبنفس الطريقة يتم تكوين الفئات الأخرى.

عدد الطلاب (التكرار)	العلامات الإحصائية	الدرجة	
		فئات	فئاة
8		-30	39-30
6		-39	48-39
13		-48	57-48
11		-57	66-57
8		-66	75-66
19		-75	84-75
9		-84	93-84
6		102-93	102-93
80			المجموع

تكوين الجدول التكراري:

فئات الدرجة	التكرار	التكرار النسبي
39-30	8	0.1
48-39	6	0.075
57-48	13	0.1625
66-57	11	0.1375
75-66	8	0.1
84-75	19	0.2375
93-84	9	0.1125
102-93	6	0.075

المجموع	80	1

2- العمود الثالث في الجدول التكراري يعطي التكرار النسبي

3- نسبة الطلاب الحاصلين على درجة ما بين 57 إلى أقل من 75 يساوي

$$0.2375 = 0.1 + 0.1375$$

4- نسبة الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 57 يساوي

$$0.3375 = 0.1625+0.075+0.1$$

5- نسبة الطلاب الحاصلين على درجة أكبر أو تساوي 57 يساوي

$$0.6625 = 0.0.3375-1$$

5-5-2 العرض البياني للبيانات الكمية:

إحدى أهم الطرق المستخدمة في عرض البيانات هي العرض البياني، حيث إن العرض البياني هو الطريقة الأسهل والأسرع للبيانات المبوبة؛ لإظهار شكل توزع البيانات ومدى تمركزها، وهنالك طرق عرض متعددة سنتناول بعضها .

المدرج التكراري:

وهو تمثيل بياني للجدول التكراري البسيط وهو عبارة عن أعمدة متلاصقة، حيث تمثل التكرارات على المحور الرأسي، بينما تمثل حدود الفئات على المحور الأفقي، ويتم تمثيل كل فئة بعمود ارتفاعه هو تكرار الفئة، وطول قاعدته هو طول الفئة.

مثال 3:

فيما يلي التوزيع التكراري لأوزان عينة من الدواجن بالغرام، حجمها 100 اختيرت من أحد المزارع بعد 45 يوم.

الوزن	600- 620	620- 640	640- 660	660- 680	680- 700	700- 720	المجموع
عدد الدجاج	10	15	20	25	20	10	100

والمطلوب:

1- ما طول الفئة؟

2- ارسم المدرج التكراري.

3- ارسم المدرج التكراري النسبي، ثم علّق على الرسم.

الحل:

1- طول الفئة: ويحس طول الفئة من القانون :

طول الفئة = الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى للفئة

I=620-600=640-620=………=720-700=20

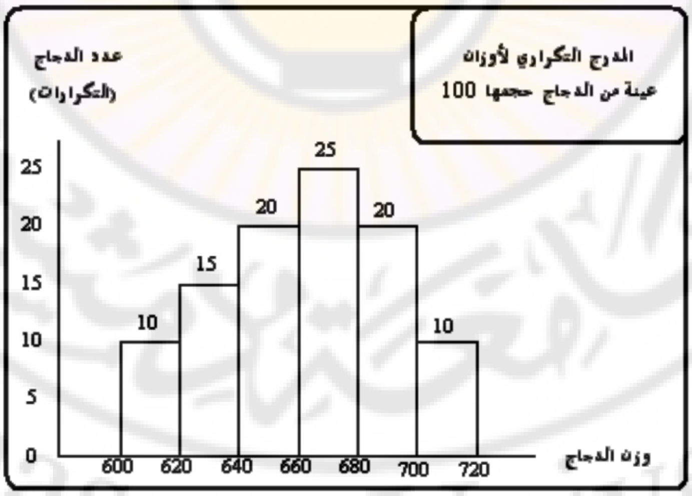
إذن طول الفئة = 20

2- رسم المدرج التكراري.

لرسم المدرج التكراري يتم إتباع الخطوات الآتية:

- ارسم محورين متعامدين، الرأسي يمثل التكرارات، والأفقي يمثل الأوزان.
- كل فئة تمثل بعمود ارتفاعه هو تكرار الفئة، وطول قاعدته هو طول الفئة.
- كل عمود يبدأ من حيث انتهى به عمود الفئة السابقة.

والشكل الآتي يبين المدرج التكراري لأوزان الدجاج



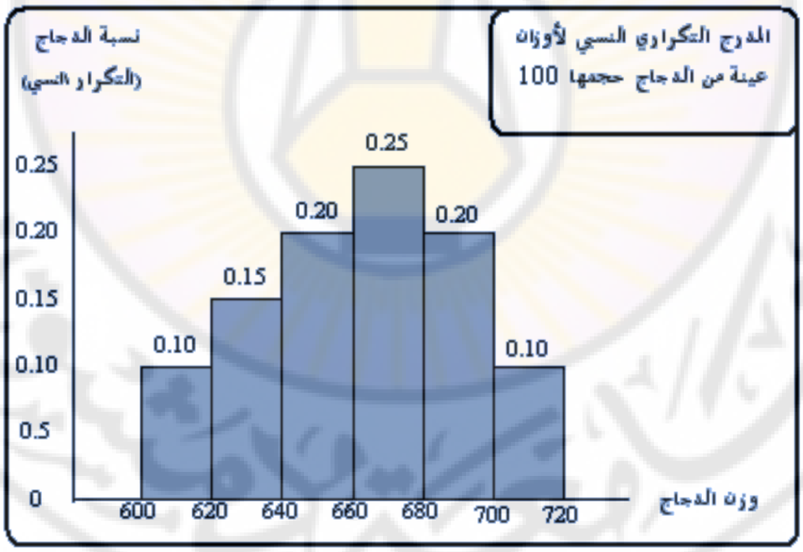
شكل 5-1 يبين المدرج التكراري لأوزان عينة من الدجاج حجمها 100 دجاجة

3- رسم المدرج التكراري النسبي: لرسم المدرج التكراري النسبي يتم إجراء الآتي:

- **حساب التكرارات النسبية.**

فئات الوزن	التكرار	التكرار النسبي
620-600	10	0.1
640-620	15	0.15
660-640	20	0.2
680-660	25	0.25
700-680	20	0.2
720-700	10	0.1
المجموع	100	1

نتبع نفس الخطوات السابقة المتبعة في المدرج التكراري ونرسم المدرج التكراري النسبي والذي هو موضح بالشكل 2-2.



شكل 5-2 يبين المدرج التكراري النسبي لأوزان عينة من الدجاج حجمها 100 دجاجة

ومن الشكل أعلاه يلاحظ الآتي:

- أن 25 % من الدجاج يتراوح وزنه بين 680 ، 660 جرام وهي أكبر نسبة.

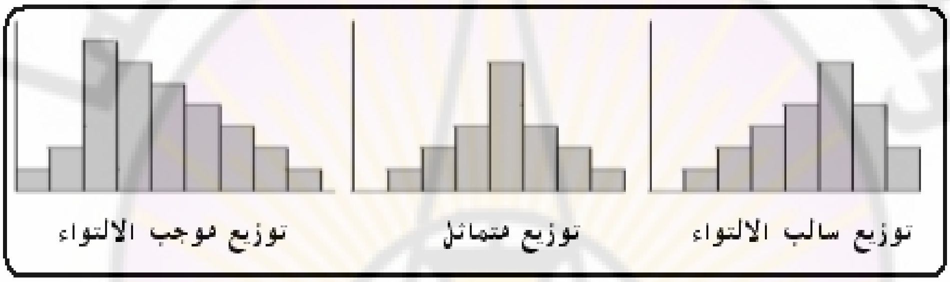
- أن الشكل ملتوي جهة اليسار، مما يدل على أن توزيع أوزان الدجاج سالب الالتواء.

ملاحظات على شكل المدرج التكراري

أ - أن المساحة أسفل المدرج التكراري تساوي مجموع التكرارات.

ب - أما المساحة أسفل المدرج التكراري النسبي، فهي تعبر عن مجموع التكرارات النسبية، وهي تساوي الواحد الصحيح.

ث -يمكن معرفة شكل توزيع البيانات، كما هو مبين بالأشكال الثلاث الآتية



شكل 5-3 أنواع الالتواء

المضلع التكراري:

هو نوع من الأشكال البيانية لجدول التوزيع التكراري، حيث المحور الرأسي يمثل التكرارات، أما المحور الأفقي فيمثل مراكز الفئات، ويتم التوصيل بين الإحداثيات بخطوط منكسرة، وبعد ذلك يتم توصيل طرفي المضلع بالمحور الأفقي.

ومركز الفئة هي القيمة التي تقع في منتصف الفئة، وتحسب بتطبيق المعادلة الآتية:

مركز الفئة = (الحد الأدنى للفئة +الحد الأعلى للفئة) ÷ 2

ملاحظة: الحد الأعلى للفئة الأولى هو الحد الأدنى للفئة الثانية .

المنحني التكراري:

وهو نفس المضلع التكراري، ولكن بدل أن يكون التوصيل عبارة عن خطوط منكسرة يكون التوصيل بخط منحني بحيث يمر بأكبر عدد من النقاط.

مثال 4:

فيما يلي التوزيع التكراري لأوزان عينة من الدواجن بالغرام، حجمها 100 اختيرت من أحد المزارع بعد 45 يوم.

الوزن	600- 620	620- 640	640- 660	660- 680	680- 700	700- 720	المجموع
عدد الدجاج	10	15	20	25	20	10	100

والمطلوب:

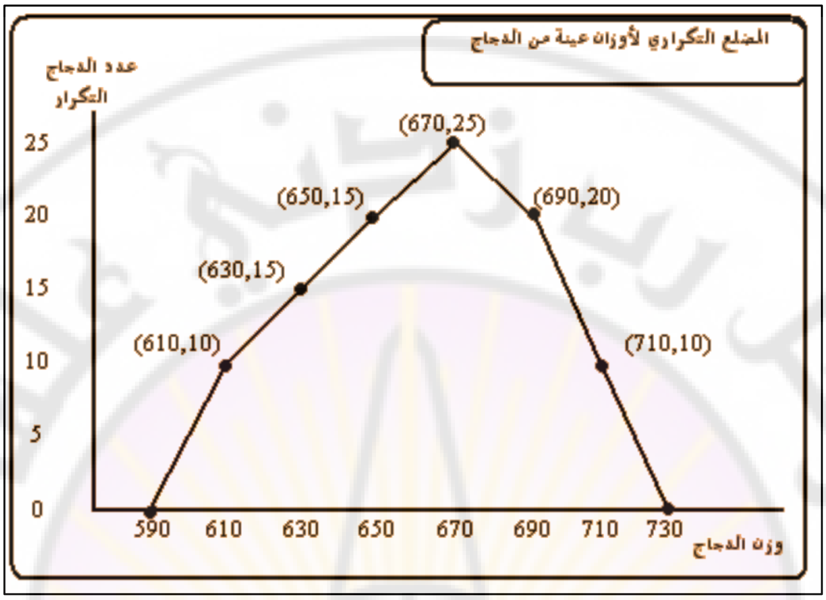
1- رسم المضلع التكراري

2- رسم المنحني التكراري

الحل:

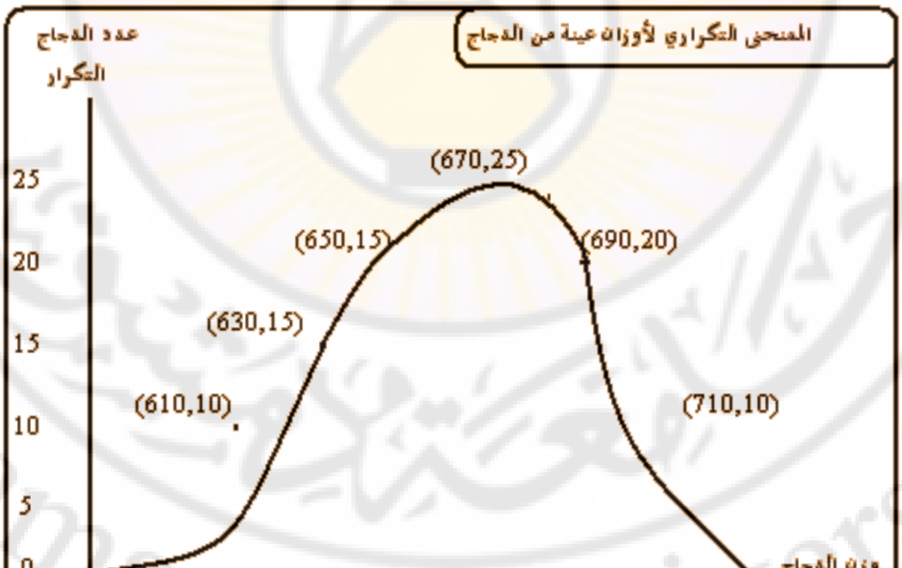
فئات الوزن	التكرار	مراكز الفئات
600-580	0	590
620-600	10	610
640-620	15	630
660-640	20	650
680-660	25	670
700-680	20	690
720-700	10	710
740-720	0	730

1- المضلع التكراري



شكل 5-4 المضلع التكراري لأوزان عينة من الدجاج حجمها 100 دجاجة

2- المنحني التكراري



شكل 5-5 المنحني التكراري لأوزان عينة من الدجاج حجمها 100 دجاجة

3-5-5 التوزيعات التكرارية التجميعية:

يلجأ الباحث إلى التكرار التجميعي الصاعد أو الهابط من أجل معرفة عدد المشاهدات التي تقل عن قيمة معينة أو تزيد عن قيمة معينة، وفيما يلي بيان كيفية تكوين كل نوع من هذين النوعين على حدة:

التكرار التجميعي الصاعد:

لتكوين جدول التكراري التجميعي الصاعد، يتم حساب مجموع التكرارات (عدد القيم) التي تقل عن كل حد من حدود الفئات.

التكرار التجميعي الهابط

لتكوين جدول التكراري التجميعي الهابط، يتم حساب مجموع التكرارات (عدد القيم) التي تساوي أو عن كل حد من حدود الفئات و بشكل عكسي.

التكرار التجميعي الصاعد النسبي والتكرار التجميعي الهابط النسبي

يحسب التكرار التجميعي الصاعد النسبي والهابط النسبي بقسمة التكرار التجميعي على مجموع التكرارات

مثال 5:

فيما يلي التوزيع التكراري لأوزان عينة من الدواجن بالغرام، حجمها 100 اختيرت من أحد المزارع بعد 45 يوم.

الوزن	600-620	620-640	640-660	660-680	680-700	700-720	المجموع
عدد الدجاج	10	15	20	25	20	10	100

والمطلوب:

1- كوّن جدول التكرار التجميعي الصاعد.

2- كوّن جدول التكرار التجميعي الصاعد النسبي.

3- ارسم المنحنى التكراري الصاعد النسبي.

4- كوّن جدول التكرار التجميعي الهابط.

5-كوّن جدول التكرار التجميعي الهابط النسبي.

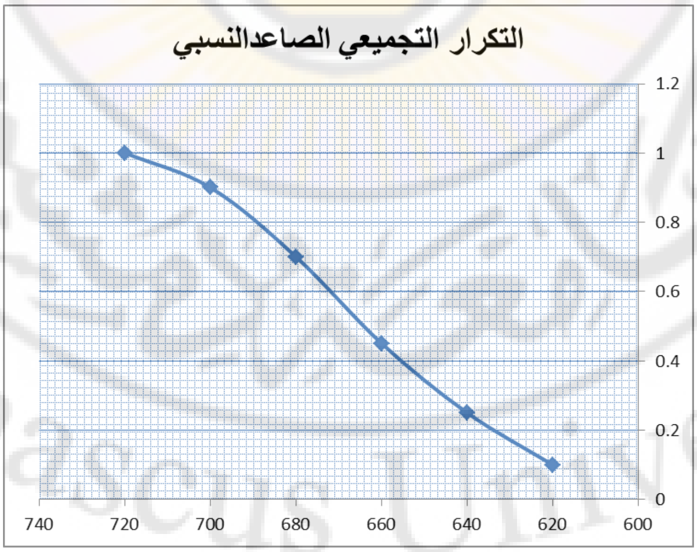
6- ارسم المنحني التكراري الهابط النسبي.

الحل:

1- و 2

فئات الوزن	التكرار	التكرار التجميعي الصاعد	التكرار التجميعي الصاعد النسبي
620-600	10	10	0.1
640-620	15	25	0.25
660-640	20	45	0.45
680-660	25	70	0.7
700-680	20	90	0.9
720-700	10	100	1
المجموع	100	100	1

-3

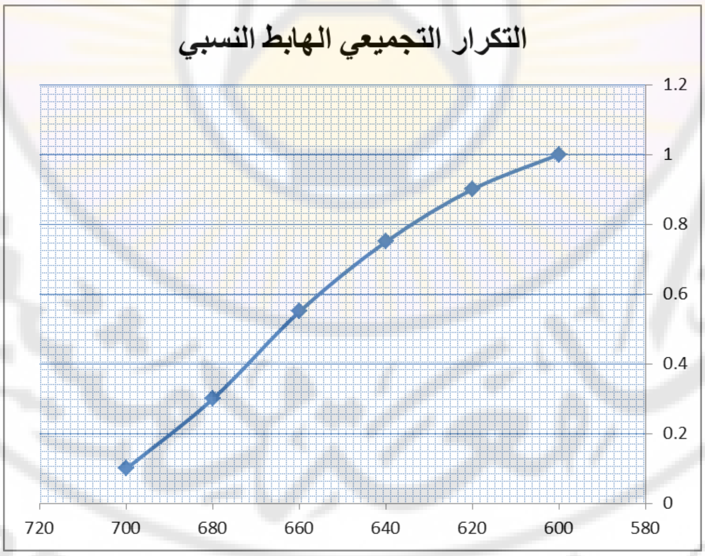


شكل 5-6 المنحني التكراري التجميعي الصاعد لأوزان عينة من الدجاج حجمها 100 دجاجة

5 -3

فئات الوزن	التكرار	التكرار التجمعي الهابط	التكرار التجميعي الهابط النسبي
620-600	10	100	1
640-620	15	90	0.9
660-640	20	75	0.75
680-660	25	55	0.55
700-680	20	30	0.3
720-700	10	10	0.1
المجموع	100	100	1

-6



شكل 5-7 المنحني التكراري التجميعي الهابط لأوزان عينة من الدجاج حجمها 100 دجاجة

5-5-4 العرض البياني للبيانات الوصفية

يتم عرض البيانات الوصفية بعدد من الطرق، نذكر من بينها شكل الدائرة البيانية أو الأعمدة البيانية، والتي يمكن من خلالها وصف و مقارنة مستويات المتغير.

الدائرة البيانية

يتم توزيع الـــ 360 درجة حسب التكرار النسبي لمستويات المتغير، حيث تحدد مقدار الزاوية الخاصة بالمجموعة

التكرار النسبي * 360 درجة = مقدار الزاوية

مثال 6:

الجدول التكراري الآتي يبين توزيع عينة حجمها 500 أسرة حسب المنطقة التي تنتمي إليها.

المنطقة	الغاب	صوران	دوما	حرستا	المجموع
عدد الأسر	150	130	50	170	500

والمطلوب :

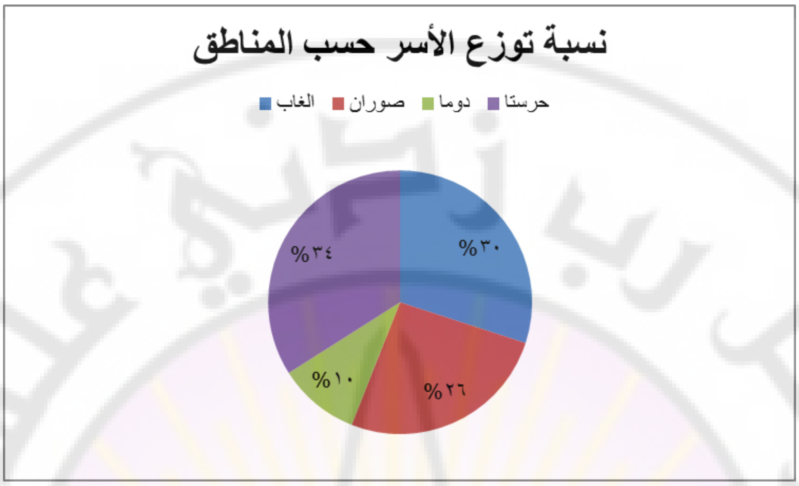
1- مثّل البيانات السابقة بشكل دائرة بيانية

2- مثّل البيانات السابقة بشكل أعمدة بيانية

الحل:

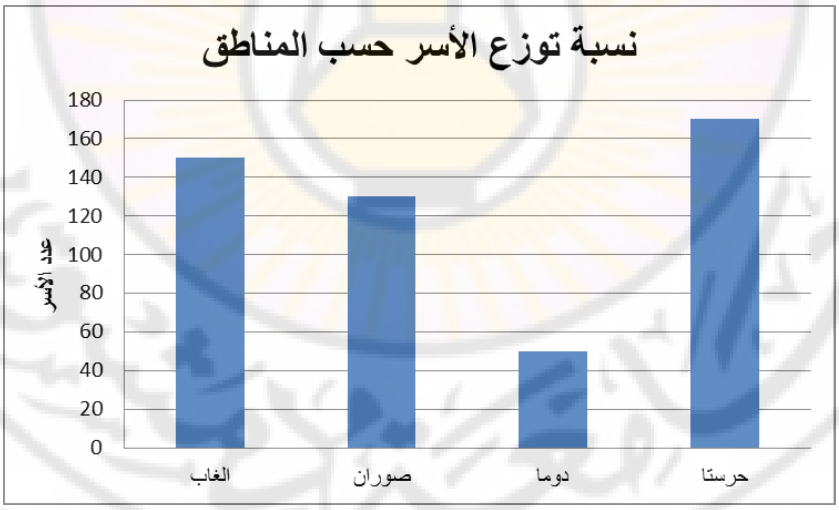
1- نحدد التكرار النسبي :

المنطقة	عدد الأسر	التكرار النسبي	الزاوية المقدرة
الغاب	150	0.3	=360*0.3=108
صوران	130	0.26	=360*0.26=93.6
دوما	50	0.1	=360*0.1=36
حرستا	170	0.34	=360*0.34=122.4
المجموع	500	1	=360



شكل 5-8 الدائرة البيانية لعينة حجمها 500 أسرة موزعة حسب المنطقة

2-



شكل 5-9 توزع الأسر حسب المناطق بطريقة الأعمدة

الفصل السادس

مقاييس النزعة المركزية والتشتت

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

Measures of Central Tendency (Averages)

تميل البيانات إلى التركيز حول قيمة معينة، وفي هذه الحالة يمكن استخدام هذه القيمة "القيمة المركزية" لتمثيل هذه المجموعة من البيانات والمقاييس المستخدمة. في التعريف على هذه القيمة المركزية تسمى "مقاييس النزعة المركزية". يلجأ الباحث بعد عملية جمع البيانات وتبويبها ووصفها إلى عملية تحليلها؛ لأن الهدف من جمع البيانات وتبويبها ووصفها يبقى مقترنا بمرحلة التحليل النهائي لها، هو الحصول على مقاييس ومؤشرات رقمية مبسطة تعبر عن نتائج الدراسة والبحث، وتساعد في اتخاذ القرار.

أهم طرائق التحليل الوصفي هي مقاييس النزعة المركزية، ومن بين هذه المقاييس الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

والمتوسطات كثيرة الاستعمال حتى في الحياة اليومية، فالطالب يهمه في نهاية تحصيله السنوي أو الجامعي معرفة معدله، والفلاح متوسط غلته من هذا المحصول أو ذاك، ومديرو المصانع يهتمون بمقدار الإنتاج اليومي والشهري.. لمعرفة تكلفة السلعة المنتجة. والمخططون الاقتصاديون وغيرهم يهتمون بالمتوسطات لمعرفة معدل النمو السكاني وما يتطلبه ذلك من برامج اقتصادية وثقافية.

والهدف من حساب هذه المقاييس أو المؤشرات هو وصف مجموعة البيانات المدروسة برقم واحد، يمثلها ويعبر عنها، ويفيد في إجراء المقارنات السابقة أو الحالية أو المماثلة بين مجموعة متماثلة أو مجموعات أو مجتمعات، كما يفيد في المقارنات التاريخية، لمعرفة مدى تطور هذه الظاهرة عبر الزمن.

ويمكن تعريف المتوسطات بأنها المقاييس أو المؤشرات المنشورة والمعبرة عن المقدار الكمي للظاهرة المدروسة.

6- 1 الوسط الحسابي Mean:

تعريفه: يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه مجموع قيم مفردات الظاهرة مقسوماً على عددها ويرمز له بالرمز ($\overline{X}$) للعينة و μ للمجتمع

وفيما يلي نتناول الحالات المختلفة التي يمكن أن تكون عليه البيانات وكيفية حساب الوسط الحسابي لكل حالة.

حساب الوسط الحسابي في حالة البيانات غير المبوبة.

ملاحظة: المقصود بالبيانات غير المبوبة (غير مجدولة بجداول تكرارية). وتكون مسرودة سرداً غير مرتب.

مثال 7:

إذا كانت عينة من أعمار 5 عمال وهي:

22 , 23 , 36 , 24 , 20

فإن الوسط الحسابي لأعمار العمال يحسب كما يلي:

نطبق القانون الآتي وهو الوسط الحسابي = مجموع القيم ÷عددها :

$$\overline{X} = \frac{22+23+36+24+20}{5} = 25$$

الوسط الحسابي لأعمار العمال الخمسة هو 25 سنة.

مثال 8:

البيانات الآتية تمثل عينة لدرجات 10 طلاب في أحد الامتحانات، والمطلوب حساب الوسط الحسابي لهذه الدرجات:

75 , 82 , 65 , 91 , 70 , 78 , 60 , 64 , 70 , 65

الحل:

نطبق القانون الآتي:

الوسط الحسابي = مجموع القيم مقسومة على عددها

$$\overline{X} = \frac{75+82+65+91+70+78+60+64+70+65}{10} = 72$$

أي: الوسط الحسابي لدرجات الطلاب هو 72 درجة.

حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة بدون فئات (على شكل قيم وتكرارات).

لتوضيح هذا النوع من الوسط الحسابي نأخذ المثال الآتي:

مثال 9:

احسب الوسط الحسابي لأعمار عمال المزرعة الموضحة بالجدول الآتي مع العلم أنه أخذ كامل المجتمع:

العمر	عدد العمال
19	7
22	5
25	5
28	10
المجموع	27

لحساب الوسط الحسابي لأعمار العمال يجب أولاً معرفة مجموع الأعمار، ثم قسمة هذا المجموع على عدد العمال والبالغ عددهم (27) عاملاً.

العمر	عدد العمال	العمر X عدد العمال
19	7	133
22	5	110
25	5	125
28	10	280
المجموع	$\sum f = 27$	$\sum f.x = 648$

وبالتالي فإن الوسط الحساب لأعمار هو:

$$\mu = \frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{648}{27} = 24$$

بالآتي الوسط الحسابي لمتوسط أعمار عمال المزرعة هو 24 سنة.

حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة بفئات.

يلجأ الباحثون في كثير من الأحيان لتبويب البيانات الإحصائية في جداول تكرارية، وضمن فئات. ويكون طول الفئات متساوي أو غير متساوي.

ففي المثال السابق من الصعب حصر جميع الأعمار، وخاصة عندما يكون لدينا عدد كبير من العمال، فلذلك يلجأ الباحث إلى تبويبها بفئات، والمثال التالي يوضح طريقة حساب الوسط الحسابي.

مثال 10:

احسب الوسط الحساب لأعمار عمال المزرعة المبوبة حسب الجدول الآتي:

فئات العمر	عدد العمال
25-15	7
35-25	6
45-35	4
55-45	6
65-55	8
المجموع	31

الحل:

يمكن تلخيص الحل بالخطوات :

1. نضيف للجدول عمود يمثل مركز الفئة ونرمز له بالرمز X ولحساب مركز الفئات نتبع الخطوات الآتية :
   - نحسب مركز الفئة الأولى =(الحد الأدنى للفئة الأولى + الحد الأدنى للفئة الثانية) ÷ 2
   - نحسب مركز الفئة الثانية = مركز الفئة الأولى + طول الفئة (I)
   - نحسب مركز الفئة الثالثة = مركز الفئة الثانية + طول الفئة (I) و هكذا حتى ننتهي من جميع الفئات
2. نكون عمود آخر يحوي على حاصل ضرب عمود التكرارات (عدد العمال) في عمود مركز الفئة.
3. نستخدم القانون الآتي:

$$\mu = \frac{\sum f.x}{\sum f}$$

حيث:

$\sum f.x$: هو حاصل ضرب عمود التكرارات بعمود مركز الفئة

$\sum f$: هو مجموع التكرارات (عدد العمال)

بالتطبيق على المثال :

فئات العمر	عدد العمال	مركز الفئات	مركز الفئات x عدد العمال
25-15	7	20	140
35-25	6	30	180
45-35	4	40	160
55-45	6	50	300
65-55	8	60	480
المجموع	31		1260

$$\mu = \frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{1260}{31} = 40.64$$

وبالآتي وسطي عمر العمال في المزرعة هو 40.64 عام.

مزايا وعيوب الوسط الحسابي:

يتميز الوسط الحسابي بعدد من الخواص والصفات التي لا يحملها غيره، وله بعض العيوب.

ملاحظات مهمة على الوسط الحسابي وأهم عيوبه.

1. يعرف فقط للبيانات الكمية، بمعنى لا يعرف للبيانات الوصفية .
2. الوسط الحسابي دقيق ويعطي قيمة وحيدة لمجموعة القيم.
3. يسهل التعامل جبرياً معه حيث يتم التعبير عنه رياضياً بشكل بسيط.

4. جميع القيم تدخل في حسابه فهو يمثل جميع القيم. ويترتب على هذه أحد عيوبه (تأثره بالقيم الشاذة أو المتطرفة). فإذا كانت بعض القيم صغيره جداً أو كبيرة جداً بالنسبة لباقي القيم فإنها سوف تؤثر في قيمة الوسط الحسابي. وبالتالي تكون قيمة الوسط الحسابي مضلله.
5. ومن عيوبه أيضا أنه لا يمكن حسابه في حالة وجود فئات مفتوحة في الجدول وبذلك لا يمكن حساب مركز الفئة المفتوحة.
6. لا يمكن إيجاده بيانياً.

6-2 الوسيط Median:

الوسيط كلمة لاتينية، وتعني منتصف الشيء وإحصائياً تعني القيمة التي تقع في منتصف البيانات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً.

الوسيط للبيانات البسيطة:

لحساب الوسيط للبيانات البسيطة نجري ما يلي:

- نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً. - تحديد موقع الوسيط وهذا يتحدد وفق بيانات الظاهرة:

إذا كان العدد فردي فإن موقع الوسيط = $\frac{N+1}{2}$

أما إذا كان عدد البيانات زوجياً، فعندها الوسيط هو متوسط القيمتين التي ترتيبها :

$$\frac{N}{2} \quad \& \quad \frac{N}{2}+1$$

مثال 11:

لدينا البيانات الآتية: 12-15-10-25-20-40-28-17-13 .

والمطلوب حساب الوسيط لها.

نرتب البيانات تصاعدياً : 10 – 12 – 13 – 15 – 17 – 20 – 25 – 28 – 40

نحدد موقع الوسيط = (9 + 1) ÷ 2 = 5

والقيمة المقابلة لرقم /5/ هي /17/، أي: قيمة الوسيط = /17/ .

مثال 12:

إذا كان عدد البيانات زوجي ولنفرض /10/ وكانت القيمة الأخيرة هي /23/. وبعد ترتيب البيانات:

$$40 - 28 - 25 - 23 - 20 - 17 - 15 - 13 - 12 - 10$$

ولتحديد موقع الوسيط، فعلينا إيجاد قيمتين وفق ما يلي:

القيمة المقابلة لترتيب /5/ = 17. والقيمة المقالة لترتيب 6 = 20 .

وعليه تكون قيمة الوسيط

$$Med = (17 + 20) / 2 = 18.5$$

الوسيط للبيانات المبوبة:

إن حساب قيمة الوسيط للبيانات المبوبة في الجداول التكرارية فيتم وفق ما يلي:

- تحديد موقع الوسيط وهو = N / 2
- تحديد بداية فئة الوسيط بعد تحديد موقعه.
- تحديد مجموع عدد أفراد الفئات (التكرارات) التي تسبق فئة الوسيط.

عندها تحسب قيمة الوسيط (وفق التكرار التجميعي الصاعد) حسب المعادلة الآتية:

$$Me = L_{me} + \frac{\frac{N}{2} - S_{me}}{F_{me}} \times I$$

Me قيمة الوسيط.

L_{me} بداية فئة الوسيط.

S_{me} التكرار التجميعي الصاعد للفئة السابقة لفئة الوسيط.

F_{me} عدد أفراد فئة الوسيط.

I طول الفئة.

وإذا كانت البيانات مبوبة وفق التكرار التجميعي الهابط فإن معادلة حساب قيمة الوسيط يمكن أن تأخذ الشكل الآتي:

$$Me = L_{\overline{me}} - \frac{\frac{N}{2} - S_{\overline{me}}}{F_{me}} \times I$$

$L_{\overline{me}}$ الحد الأعلى لفئة الوسيط .

$S_{\overline{me}}$ التكرار التجميعي الهابط للفئة الآتية لفئة الوسيط.

مثال 13:

احسب الوسيط لأعمار عمال المزرعة المبوبة حسب الجدول الآتي:

فئات العمر	عدد العمال
25−15	7
35−25	6
45−35	4
55−45	6
65−55	8
المجموع	31

الحل:

نرتب خطوات العمل حسب الآتي :

- نحسب التكرار التجميعي الصاعد أو الهابط
- نوجد ترتيب الوسيط وهو

$$\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$$

- نوجد ترتيب الوسيط ونطبق القانون .

فئات العمر	عدد العمال	تكرار تجميعي صاعد	تكرار تجميعي هابط
25−15	7	7	31
35−25	6	13	24
45−35	4	17	18

14	23	6	55−45
8	31	8	65−55

نلاحظ أن ترتيب الوسيط يقع بين التكرارين 13 و 17 وبالآتي الفئة الوسطية هي الفئة 35 − 45

نطبق القانون وفق التكرار التجميعي الصاعد :

$$Me = L_{me} + \frac{\frac{N}{2} - S_{me}}{F_{me}} \times I = 35 + \frac{15.5 - 13}{4} \times 10$$
$$Me = 41.25$$

أو وفق التكرار التجميعي الهابط :

$$Me = L_{\overline{me}} - \frac{\frac{N}{2} - S_{\overline{me}}}{F_{me}} \times I = 45 - \frac{15.5 - 14}{4} \times 10$$
$$Me = 45 - 3.75 = 41.25$$

ملاحظة مهمة: إذا كان ترتيب الوسيط هو أحد التكرارات المتجمعة الصاعدة، فإن قيمة الوسيط تكون هي القيمة المقابلة له مباشرة في خانة الحدود العليا للفئات والتي تقابل ترتيب الوسيط.

خواص الوسيط:

- يستخدم للتعبير عن متوسط التراتيب، لأنه من غير المنطقي استخدام مقياس آخر في هذا المجال.
- الوسيط مقياس موضعي، يقع في منتصف مفردات الظاهرة بعد ترتيبها. ولحساب قيمته، يكفي معرفة عدد أفراد الظاهرة، وليس القيم الحقيقية لها. لذلك فهو لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
- يمكن حسابه في حالة الفئات المفتوحة.
- تقع قيمة الوسيط بين بداية ونهاية فئته.

- يمكن حساب قيمة الوسيط بالرسوم البيانية.
- قيمته محددة بـــ 50% من أفراد الظاهرة أعلى منها و 50% أدنى منها.

وله عيوب:

- لا يعبر عن قيم الظاهرة تعبيراً صحيحاً.
- أقل استعمالاً من الوسط الحسابي، ويستعمل في حدود ضيقة .
- لابد من ترتيب البيانات تصاعدياً، أو تنازلياً لإتمام عملية حسابه.

6 – 3 المنوال . Mode:

المنوال لمجموعة من القيم هي القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً في التوزيع لمجموعة من البيانات.

البيانات الخام أو البسيطة قد لا يكون لها منوالاً.

فإذا كانت لدينا القيم 3 ، 11، 9،14 ،5، 8، 17.

فهذه القيم لا توجد قيمة لها أكثر من تكرار واحد.

وفي أحيان أخرى قد يكون لها منوال:

فإذا كانت لدينا القيم: 3،11، 8، 7، 14، 9، 8، 7، 15، 9، 8.

فإن قيمة المنوال هنا /8/ لأنها تكررت ثلاث مرات وهو أكبر تكرار.

وقد يكون للبيانات البسيطة أو المبوبة أكثر من منوال .

فإذا كانت لدينا القيم : 3 ، 11 ، 8 ، 7 ، 14 ، 4 ، 9 ، 8 ، 7 ، 15، 9 ففي هذه الحالة يوجد لدينا /3/ منوالات هي 7 و 8 و 9 .

المنوال في البيانات المبوبة:

وتعتمد هذه الطريقة على التكرار السابق لفئة المنوال، والتكرار الآتي لفئة المنوال، على اعتبار أنهما قوتان تعملان على جذب المنوال إلى الحد الأدنى للفئة المنوالية وإلى الحد الأعلى لها على الترتيب و لحسابه نطبق القانون :

$$Mo = L_{mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot I$$

حيث :

Mo قيمة المنوال

L_{mo} بداية فئة المنوال

d_1: الفرق بين تكرار فئة المنوال و الفئة السابقة له

d_2: الفرق بين تكرار فئة المنوال و الفئة الآتية له

I: طول الفئة.

ملاحظات على المنوال

1. إذا كانت الفئة المنوالية هي الفئة الأولى (أو الأخيرة) في الجدول فالمنوال يساوي مركز الفئة المنوالية.
2. إذا كان التكرار السابق يساوي التكرار اللاحق فإن المنوال يكون مساوياً لمركز الفئة المنوالية.
3. إذا كان للجدول التكراري أكثر من فئة منوالية يكون هناك أكثر من منوال.
4. المنوال يعتبر أبسط المتوسطات.
5. المنوال هو المتوسط الوحيد الذي يمكن إيجاده للبيانات الوصفية سواء الاسمية أم الترتيبية.

مثال 14:

احسب المنوال لأعمار عمال المزرعة المبوبة حسب الجدول الآتي:

فئات العمر	عدد العمال
25-15	7
35-25	6
45-35	4
55-45	6
65-55	8
المجموع	31

الحل:

حسب القانون إن المنوال يقع في الفئة الأخيرة فالمنوال هو مركز الفئة وقيمته 60

مثال 15:

فيما يلي جدول توزيع تكراري لإنتاج 70 شجرة ليمون و المطلوب حساب المنوال

فئات (تمثل الإنتاج)	التكرار (عدد الشجرات)
20−10	8
30−20	5
40−30	17
50−40	25
60−50	5
70−60	7
80−70	3

الحل:

نحدد فئة المنوال وهي :50 −40 لأنها الفئة الأكثر تكراراً

نطبق القانون:

$$Mo = Lmo + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I = 40 + \frac{25-17}{(25-17)+(25-5)} \times 10$$

$$Mo = 40 + \frac{8}{28} \times 10 = 42.85$$

المنوال هو : 42.85

مقاييس التشتت

Measures of Variation

عرضنا في الفصل السابق مقاييس النزعة المركزية وطرائق حسابها. إلا أن هذه المتوسطات لا تكفي وحدها لتحقيق المقارنات بين الظواهر المدروسة، حيث تختلف قيم بيانات كل ظاهرة عن الظواهر الأخرى؛ أي: المتوسطات تعطي فكرة أولية عن التوزيع التكراري للظاهرة، وتساعد في الوصول إلى نتائج أفضل باستخدام مقاييس التشتت لهذه المتوسطات. ولتوضيح ذلك نفترض لدينا أربع مجموعات من أشجار التفاح، وكل مجموعة عددها /7/ أشجار. وبعد تسجيل البيانات الخاصة بإنتاج هذه المجموعات حصلنا على ما يلي:

المجموعة الأولى: 35 – 35 – 35 – 35 – 35 – 35 – 35 – 35

المجموعة الثانية : 33 – 38 – 35 – 32 – 37 – 34 – 36 – 35

المجموعة الثالثة : 26 – 29 – 32 – 34 – 36 – 38 – 41 – 44

المجموعة الرابعة: 18 – 23 – 28 – 33 – 37 – 42 – 47 – 52

لمقارنة المجموعات الأربع نجد أن الوسط الحسابي لها واحد وهو /35/. لكن يلاحظ وجود ما يلي:

المجموعة الأولى: قيمها متساوية، أي أنها متجانسة تماماً.

المجموعة الثانية: يوجد تشتت بين البيانات أقصاه /6/.

المجموعة الثالثة: يوجد تشتت أكبر من المجموعة الثانية وصل إلى 18.

المجموعة الرابعة: وصل التشتت إلى /34/.

لهذا يمكن تعريف مقاييس التشتت أو التباين بما يلي:

دراسة مدى تقارب أو تباعد البيانات عن بعضها بعضاً؛ أي عن وسطها الحسابي، فكلما كانت البيانات قريبة من بعضها بعضاً؛ أي قريبة من وسطها الحسابي، تكون البيانات متجانسة وكلما كانت البيانات بعيدة من بعضها بعضاً؛ أي بعيدة عن وسطها الحسابي، كانت البيانات متباعدة أو متشتته. ومنه مقياس التشتت هو مقياس لمقدار التجانس الذي يعتبر صفة هامة يجب معرفتها في كل ظاهرة ندرسها.

ولقياس مقدار التشتت تستخدم مقاييس خاصة منها: المدى – الانحراف الربيعي – التباين – الانحراف المعياري – معامل الاختلاف– والخطأ المعياري.

6-4 المدى The Range:

تعريف المدى: للبيانات البسيطة عبارة عن الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة. وفي البيانات المبوبة في الجداول التكرارية عبارة عن الفرق بين نهاية الفئة الأعلى وبداية الفئة الأدنى .

مثال 16:

بالعودة إلى مثال إنتاج أشجار الليمون (70) شجرة. نجد أن:

المدى = 80 − 10 = 70 كغ

يمتاز المدى بسهولة حسابه ووضوح فكرته، يستخدم كثيراً في مراقبة جودة الإنتاج ووصف الأحوال الجوية مثل الفروق بين درجات الحرارة والرطوبة وهطول الأمطار. ويعتبر من أهم المقاييس المستخدمة في العينات الصغيرة، عندما يتعلق الأمر بمراقبة الجودة.

لكن يعتبر المدى مقياس مضلل لدرجة تشتت الظاهرة. لأن قيمته تتوقف على أعلى وأدنى قيمتين من قيم الظاهرة، وهو يتأثر بهما فقط واللتان يمكن أن تكونتا شاذتين. ويصعب حسابه عندما تكون الجداول التكرارية مفتوحة.

6-5 الانحراف الربيعي Quartiles:

في كثير من الأحيان لا يكون معلوماً لدينا بداية الفئة الأولى ونهاية الفئة الأخيرة، وبالتالي فإن المدى يعتبر مقياس غير مناسب في هذه الحالة ولتلافي هذا الشيء نستخدم مقياس الانحراف الربيعي الذي يتجاهل القيم المتطرفة ويعتمد فقط على القيم الوسطى.

مثل معرفة القيمة المقابلة ربع (1/4) عدد المفردات ويسمى بالربيع الأدنى، إذا كانت البيانات تصاعدياً أو ثلاثة أرباع (3/4) عدد المفردات وتسمى الربيع الأعلى، أما القيمة المقابلة (2/4) من عدد المفردات فهي قيمة الوسيط.

يعطى الانحراف الربيعي بقسمة المدى الربيع على اثنان

المدى الربيعي هو الربيع الثالث مطروح منه الربيع الأول

الربيع الثالث Third quartile:

ويحسب بعد تحديد فئة الربيع الثالث، والتي هي قيمة المفردة ذات الرقم (3N/4) وبعد ذلك من القانون:

$$Q_3 = Lq_3 + \frac{\frac{3N}{4} - Sq_3}{Fq_3} \times I$$

حيث:

Q_3 : قيمة الربيع الثالث

Lq_3 : الحد الأدنى لفئة الربيع الثالث

Sq_3 : التكرار التجميعي الصاعد الذي يسبق فئة الربيع الثالث.

Fq_3 : تكرارات فئة الربيع الثالث

الربيع الأول First quartile:

ويحسب بعد تحديد فئة الربيع الأول، والتي هي قيمة المفردة ذات الرقم (N/4) وبعد ذلك من القانون:

$$Q_1 = Lq_1 + \frac{\frac{N}{4} - Sq_1}{Fq_1} \times I$$

حيث:

Q_1 : قيمة الربيع الأول

Lq_1 : الحد الأدنى لفئة الربيع الأول

Sq_1 : التكرار التجميعي الصاعد الذي يسبق فئة الربيع الأول.

Fq_1 : تكرارات فئة الربيع الأول

- **المدى الربيعي** = $Q_3 - Q_1$
- **الانحراف الربيعي** = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

مثال 17:

فيما يلي جدول توزيع تكراري لإنتاج 70 شجرة ليمون، والمطلوب حساب الانحراف الربيعي.

فئات (تمثل الإنتاج)	التكرار (عدد الشجرات)
20−10	8
30−20	5
40−30	17
50−40	25
60−50	5
70−60	7
80−70	3

الحل:

نقوم أولاً بإنشاء جدول مع التكرار التجميعي الصاعد:

فئات (تمثل الإنتاج)	التكرار (عدد الشجرات)	تكرار تجميعي صاعد
20−10	8	8
30−20	5	13
40−30	17	30
50−40	25	55
60−50	5	60
70−60	7	67
80−70	3	70

نقوم بحساب الربيع الأول والثالث

- الربيع الثالث:

تحديد فئة الربيع $\frac{3N}{4}=\frac{3\times 70}{4}=52.5$ الفئة 40−50 هي فئة الربيع الثالث بتطبيق القانون:

$$Q_3 = Lq_3 + \frac{\frac{3N}{4} - Sq_3}{Fq_3} \times I$$

$$= 40 + \frac{52.5 - 30}{25} \times 10$$

$$= 49$$

- الربيع الأول :

تحديد فئة الربيع $17.5 = \frac{70}{4} = \frac{N}{4}$ الفئة 30−40 هي فئة الربيع الأول بتطبيق القانون:

$$Q_1 = Lq_1 + \frac{\frac{N}{4} - Sq_1}{Fq_1} \times I$$

$$= 30 + \frac{17.5 - 13}{17} \times 10$$

$$= 32.6$$

- المدى الربيعي:

49- 32.6=16.4

- الانحراف الربيعي:

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{16.4}{2} = 8.2$$

6−6 التباين Variance:

بالتعريف: متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي. ويعتبر التباين من أهم مقاييس التشتت، حيث منه يحسب الانحراف المعياري وهو يعبر عن مدى التغير في حالة العينة، ويكون التباين إما مفسر وإما غير مفسر. ويستخدم الرمز (σ^2) اليوناني للتعبير عن تباين المجتمع و (S^2) للعينة ويحسب بالعلاقة :

للبيانات الخام البسيطة والتي عددها أقل من 30 (عينة)

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}}{n-1}$$

أما للبيانات المبوبة أو الخام (مجتمع) فإن معادلته هي :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(x-\mu)^2}{\sum f} = \frac{\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{N}}{\sum f}$$

مثال 18:

حساب التباين لعدد عمال المزرعة في فئات عمر مختلفة

فئات العمر	عدد العمال
25-15	7
35-25	6
45-35	4
55-45	6
65-55	7
المجموع	30

الحل:

يتطلب حساب الوسط الحسابي أولاً :

فئات	f	X	f.x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$f(x-\mu)^2$
25-15	7	20	140	-20	400	2800
35-25	6	30	180	-10	100	600
45-35	4	40	160	0	0	0
55-45	6	50	300	10	100	600
65-55	7	60	420	20	400	2800
المجموع	30	200	1200	0	1000	6800

$$\mu = \frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{1200}{30} = 40$$

بتطبيق القانون:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(x-\mu)^2}{\sum f} = \frac{6800}{30} = 226.67$$

6-7 الانحراف المعياري Standard Deviation

بالتعريف: هو الجذر التربيعي الموجب للتباين (الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابي) ويرمز له بالرمز S للعينة و σ للمجتمع.

بالعودة للمثال السابق :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{226.67} = 15.06$$

6-8 معامل الاختلاف (التباين) Coefficient of Variation

هو مقياس مطلق للتشتت، يستخدم لمقارنة تشتت التوزيعات، خاصة عندما يكون الاختلاف بين المتوسطات كبير، أو عند مقارنة خاصيتين مختلفتين، مثل الطول والوزن .

معامل الاختلاف هو عبارة عن نسبة مئوية يرمز له بالرمز (CV) ويحسب بالقانون:

بالنسبة للعينة

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100$$

أما المجتمع فيعطى بالعلاقة

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$$

بالعودة للمثال السابق :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{15.06}{40} \times 100 = 37.6\%$$

9-6 الخطأ المعياري Standard Error

بالتعريف: عبارة عن تقدير للانحراف المعياري للمتوسطات الحسابية. المهم من حساب الانحراف المعياري هو الخطأ المعياري الذي يستخدم في الحسابات الأخرى خاصة في بحوث العينات . ويحسب الخطأ المعياري (SE) من المعادلة الآتية:

بالنسبة للعينة :

$$SE = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

أما المجتمع فيعطى بالعلاقة :

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

بالعودة للمثال السابق:

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{15.06}{\sqrt{30}} = \frac{15.06}{5.47} = 2.75$$

الفصل السابع

الارتباط والانحدار Correlation & Regression

7-1 الانحدار الخطي Linear Regression:

تهدف الدراسات والأبحاث العلمية إلى تتبع وقياس العلاقة بين الظواهر التي تتأثر ببعضها بعضاً، ومن ثم تحديد نوع هذه العلاقة .

درسنا في الفصول السابقة كل ما يتعلق بالظاهرة المدروسة كمعلومات كمية في صورة بيانات عددية، ثم حسبنا المتوسطات لها وتباين هذه المتوسطات، من غير أن نتطرق أو نبحث بعلاقة هذه الظاهرة بالظواهر الأخرى المحيطة بها أو التي تؤثر عليها، أو التي تتأثر بها. لذلك من خلال دراستنا لكل من الانحدار والارتباط سنتطرق إلى العلاقة الإحصائية والرياضية والتغيرات التي تطرأ عليها عند وجود ظاهرتين أو أكثر. بعد جمع البيانات الخاصة بهاتين الظاهرتين أو الظواهر الأخرى، ومن ثم قياس العلاقة الإحصائية التابعية ومعرفة خصائصها. يقصد بالعلاقة التابعية الآتي: عندما تتغير قيم العامل المستقل أو العوامل المستقلة تتغير قيم العامل التابع لها زيادة أو نقصانا. والأمثلة كثيرة حول ذلك.

قد يرغب الباحث بمعرفة العلاقة بين كمية السماد المعطاة للمحصول وكمية الإنتاج من وحدة المساحة. أو قد يرغب الباحث بمعرفة العلاقة بين المساحة المزروعة وزيادة الإنتاج أو الإنتاجية. أو يرغب بمعرفة العلاقة بين إنتاج الحليب وعدد الأبقار أو الأغنام والماعز، أو بين كمية الحليب الناتجة وكمية العلف المعطاة للقطيع. وهذا يعني أن التغير في العامل المستقل يتبعه تغير في العامل التابع لوجود علاقة بينهما.

ولرأي الباحث واهتمامه بالظاهرة المدروسة أهمية كبيرة من خلال معرفة هذه العلاقة، التي قد تكون إحصائية بحتة، أو رياضية إحصائية. وهذا يتحدد وفق رأي الباحث وشروط البحث المعد للدراسة.

إذا كان اهتمام الباحث موجه لمعرفة العلاقة بين العوامل، هل هي تامة أو شبه تامة، قوية أو ضعيفة، موجبة أو سالبة أو عدم وجود علاقة بين هذه العوامل، عندها يعبر عن العلاقة بما يسمى بالارتباط من خلال دراسة معامل الارتباط.

أما إذا كان اهتمام الباحث موجه لمعرفة وجود علاقة سببية بين المتغيرات، ومن ثم تحديد شكل هذه العلاقة. فإن الأمر يتطلب دراسة الظاهرة تحت تسمية معامل الانحدار، الذي يحدد بقياس فعالية المتغيرات المستقلة المؤثرة على أو في العامل التابع.

إن العلاقة بين المتغيرات تظهر على شكل معادلة، وهذه المعادلة هي عبارة عن علاقة بين متغير واحد y مع متغير مستق واحد أو أكثر $x_1, x_2, \ \ldots \ , x_n$ وتعطى العلاقة بالشكل:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_nx_n$$

حيث: $a_0, a_1, a_2 \ \ldots . \ a_n$ تدعى معاملات الانحدار. و تحدد هذه المعاملات عن طريق البيانات المعطاة.

المعادلة التي تملك متغير مستقل واحد فقط تدعى معادلة انحدار خطي بسيط، أما المعادلة التي تملك أكثر من عامل مستقل تدعى معادلة انحدار خطي متعدد، وفي فصلنا هذا سوف نقوم بدراسة الانحدار الخطي البسيط.

الانحدار الخطي البسيط:

تستعمل العلاقات الخطية البسيطة في معظم المجالات العلمية، كما أنه يحتل الحيز الأكبر في مجال تحليل التنبؤ المستقبلي للمعطيات. تعطى معادلة الانحدار الخطي البسيط بالمعادلة :

$$y = ax + b$$

دراسة المعادلة :

- نوجد قيم معاملات الانحدار a,b

إن انحدار (انزلاق) الخط العام للانحدار الممثل للعلاقة بين x , y يعرف بالميل و منه نحدد نوع العلاقة طردية أو عكسية و يعطى بالعلاقة :

$$\hat{a} = SXY / SXX$$

أما الثابت فيعطى بالعلاقة :

$$\hat{b} = \bar{y} - a\bar{x}$$

حيث إن:

SXX هي مربع المجاميع المصححة لــ x_i (هي قيمة x عند النقطة i) وتحسب قيمته بالعلاقة:

$$SXX = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n$$

SXY هي مربع المجاميع المصححة للتقاطع x_i مع y_i وتحسب قيمته بالعلاقة :

$$SXY = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i) / n$$

SYY هي مربع المجاميع المصححة لــ y_i وتحسب قيمته بالعلاقة :

$$SYY = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 / n$$

- نوجد قيم $\hat{y}_i$ وهي القيمة المقدرة عند النقطة i بعد تعويض x_i بالمعادلة:

$$\hat{y}_i = \hat{a}x_i + \hat{b}$$

- نوجد قيمة البواقي التي تعطى بالعلاقة :

$$\hat{E}_i = y_i - \hat{y}_i$$

- نوجد مجموع مربعات البواقي والذي نرمز له بالرمز RSS ويعطى بالعلاقة:

$$RSS = \sum \hat{E}_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum \left[y_i - \left(\hat{a}x_i + \hat{b} \right) \right]^2$$

- نوجد مجموع مربعات الانحدار العام والذي نرمز له بالرمز SS_{reg} و يعطى بالعلاقة:

$$SS_{reg} = SYY - RSS$$

- نقوم بتحديد درجات الحرية و هي :

درجة الحرية للانحدار= عدد المتحولات −1 =2−1=1

درجة الحرية للبواقي = N مطروح منها عدد المتحولات وتعطى بالعلاقة:

$$d.f. = n\text{-}2$$

إجمالي درجات الحرية = N-1

- نوجد متوسطات مجموع المربعات، وهي على التتالي:

$$MS_{reg} = SS_{reg} / 1$$

$$MSE = RSS / N - 2$$

- نوجد قيمة F المحسوبة من العلاقة:

$$MS_{reg} / MSE$$

ويتم تلخيص النتائج في جدول يسمى جدول تحليل التباين (ANOVA)

جدول تحليل التباين للانحدار الخطي البسيط بـــ N قراءة

المصدر	درجة الحرية (d.f.)	مجموع المربعات (SS)	متوسط (MS)	F
الانحدار	1	SS_{reg}	MS_{reg}	
البواقي	N-2	RSS	MSE	MS_{reg} / MSE
الإجمالي	N-1	SYY		

نقارن بين قيمة F المحسوبة مع F الجدولية وفق درجات الحرية المبينة بالجدول.

إذا كانت قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية، هذا يعني أن المعادلة ممثلة بشكل جيد للمعطيات، ويمكننا استخدامها في التنبؤ، أما إذا كانت قيمة F المحسوبة أصغر من قيمة F الجدولية، فهذا يعني أن المعادلة لا تمثل العلاقة بين المتحولين.

- حساب معنوية معامل الانحدار a

بعد معرفة معنوية المعادلة يجب دراسة معنوية معامل الانحدار a ويحسب من العلاقة :

$$t = \frac{a}{SE_a}$$

حيث SE_a : الخطأ القياسي (المعياري) لمعامل الانحدار ويحسب من العلاقة:

$$SE_a = \sqrt{\frac{MSE}{SXX}}$$

نقارن بين t المحسوبة و t الجدولية بدرجة حرية $n-2$ ومستوى معنوية 5%. إذا كانت قيمة t المحسوبة أكبر من t الجدولية، فهذا يعني أن معامل الانحدار a معنوي داخل المعادلة.

- نوجد معامل التحديد R^2 الذي يحدد مدى تأثير التابع y بالعامل المستقل x و قيمته دائماً محصورة بين الصفر والواحد، وكلما كانت قيمته قريبة من الواحد فهذا يعني أن x يملك تأثير كبير في تغيرات التابع y. يعطى معامل التحديد بالعلاقة:

$$R^2 = r_{xy}^2 = \frac{SS_{reg}}{SYY}$$

كما سنقوم بدراسة معنوية معامل الارتباط في وقت لاحق لتحديد معنوية تأثير x على التابع y.

مثال 19:

وجد نتيجة للتجربة أن الكمية المنتجة من محصول القمح ازدادت بزيادة كمية الأسمدة المضافة إلى وحدة المساحة وذلك وفق الجدول الآتي:

كمية الأسمدة	8	10	12	14	15	20	22	24	25	30
كمية المحصول	7	10	11	13	14	16	16	18	20	25

والمطلوب

أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط وادرس هذه المعادلة.

الحل:

بداية نقوم بإنشاء الجدول 7-1 المساعد في الحسابات و ذلك عن طريق:

المتوسطات:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{180}{10} = 18$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{150}{10} = 15$$

من الجدول نجد:

$$SXX = \sum (x_i - \bar{x})^2 = 474$$
$$SXY = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 334$$
$$SYY = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 246$$

نوجد الميل والثابت:

$$\hat{a} = SXY / SXX = 334/474 = 0.7046$$
$$\hat{b} = \bar{y} - a\bar{x} = 15 - 0.7046(18) = 2.3165$$

وبالآتي يمكننا كتابة المعادلة بالشكل:

$$y = ax + b = 0.7046x + 2.3165$$

وهذا يعني أن زيادة واحد كغ من السماد سوف تولد زيادة قدرها *0.7046* بالإنتاج من محصول القمح.

اعتماداً على المعادلة السابقة نوجد القيمة التقديرية لكمية المحصول اعتماداً على كمية السماد المعطى (جدول المساعد $\hat{y}$).

نوجد قيمة البواقي التي تعطى بالعلاقة : $\hat{E}_i = y_i - \hat{y}_i$ (جدول المساعد)

نوجد مجموع مربعات البواقي و الذي نرمز له بالرمز RSS ويعطى بالعلاقة:

$$RSS = \sum \hat{E}_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 10.65$$

نوجد مجموع مربعات الانحدار العام والذي نرمز له بالرمز SS_{reg} والذي يعطى بالعلاقة :

$$SS_{reg} = SYY - RSS = 246 - 10.67 = 235.35$$

نلخص النتائج في جدول تحليل التباين (ANOVA):

المصدر	درجة الحرية (d.f.)	مجموع المربعات (SS)	متوسط (MS)	F
الانحدار	*1*	*235.35*	*235.35*	*176.94*
البواقي	*8*	*10.65*	*1.33*	

الإجمالي	*9*	*246*

نوجد قيمة F الجدولية من أجل 1% و 5% وهي على التتالي: (11.3 و 5.32) .

جدول7–1 حسابات مساعدة من أجل إيجاد معادلة الانحدار الخطب البسيط

م	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$\hat{y}$	E_i	RSS
1	8	7	-10	-8	100	64	80	7.95	-0.95	0.9
2	10	10	-8	-5	64	25	40	9.36	0.64	0.41
3	12	11	-6	-4	36	16	24	10.77	0.23	0.05
4	14	13	-4	-2	16	4	8	12.18	0.82	0.67
5	15	14	-3	-1	9	1	3	12.89	1.11	1.23
6	20	16	2	1	4	1	2	16.41	-0.41	0.17
7	22	16	4	1	16	1	4	17.82	-1.82	3.31
8	24	18	6	3	36	9	18	19.23	-1.23	1.51
9	25	20	7	5	49	25	35	19.93	0.07	0
10	30	25	12	10	144	100	120	23.45	1.55	2.4
	180	150	0	0	474	246	334	149.99	0.01	10.65

بمقارنة F المحسوبة مع F الجدولية نجد أن قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية على كلا المستويين وهذا يعني أن المعادلة الممثلة للعلاقة بين المحصول والسماد هي علاقة معنوية والمعادلة يمكن استخدامها للتنبؤ المستقبلي للمحصول.

معنوية معامل الانحدار :

$$SE_a = \sqrt{\frac{MSE}{SXX}} = \sqrt{\frac{1.33}{474}} = 0.053$$

$$t = \frac{a}{SE_a} = \frac{0.7046}{0.053} = 13.3$$

نوجد قيمة t الجدولية من جدول ستودينت بدرجة حرية 8 و مستوى معنوية 5% نجد قيمتها 2.306. بمقارنة t المحسوبة مع t الجدولية نلاحظ أن t المحسوبة أكبر من t الجدولية وهذا يعني أن معامل الانحدار معنوي داخل المعادلة.

معامل التحديد:

$$R^2 = r_{xy}^2 = \frac{SS_{reg}}{SYY} = \frac{235.35}{246} = 0.96$$

وهذا يعني أن 96% من تغيرات الغلة كانت متأثرة بالأسمدة المضافة بينما 4% من تغيرات الغلة كانت تعود لأسباب أخرى يجب معرفتها ودراستها.

2-7 الارتباط Correlation:

تهدف دراسة العلاقة الارتباطية بين عامل تابع وعامل مستقل أو أكثر إلى معرفة نوع العلاقة التوافقية أو الاقترانية أو الارتباطية وقياسها، وقوتها واتجاهها نتيجة تأثير العامل المستقل أو العوامل المستقلة على العامل التابع . حيث تتراوح هذه القيمة بين (+ 1 و −1). ومن ثم تحديد النوع والاتجاه والقوة وفق ما يلي:

– إذا كانت القيمة المحسوبة = (+ 1 أو – 1) ، فهذا يدل على وجود اقتران أو توافق أو ارتباط قوي طردي أو عكسي حسب المؤشر المحسوب بين العامل المستقل أو العوامل المستقلة والعامل التابع .

– إذا كانت قيمة المؤشر المحسوب تتراوح بين (+ 0.5 حتى + 1 أو بين – 0.5 حتى – 1)، دل ذلك على وجود اقتران أو توافق أو ارتباط جيد طردي أو عكسي بين العامل التابع والعامل المستقل أو العوامل المستقلة.

– إذا كانت قيمة المؤشر المحسوب تتراوح بين (الصفر حتى + 0.5 أو بين – 0.5 حتى الصفر) دل ذلك على وجود اقتران أو توافق أو ارتباط ضعيف طردي أو عكسي بين العامل التابع والعامل المستقل أو العوامل المستقلة.

– أما إذا كانت قيمة المؤشر المحسوب = الصفر، فهذا يدل على عدم وجود أي اقتران أو توافق أو ارتباط بين العوامل التي سبق ذكرها .

وتعد المؤشرات المحسوبة للظواهر المدروسة من المؤشرات الهامة للتعرف على الصدق والثبات والموضوعية للعوامل المؤثرة في الظاهرة التابعة، للتأكد من سلامة جمع البيانات عن تلك الظواهر وتبويبها وتحليلها، ومن ثم إجراء الاختبارات اللازمة لها، ومن ثم اتخاذ القرارات بشأنها.

وسندرس تحت تسمية الارتباط العلاقات الثلاث الآتية: الاقتران – التوافق – الارتباط الخطي البسيط.

1–2–7 الاقتران Association:

تدرس العلاقة الارتباطية الموجودة بين القيم النوعية أو الوصفية بين ظاهرتين كل منها يتكون من قسمين . مثل النجاح والرسوب بين الطلاب والطالبات، أو إنتاجية الحليب اليومية بين نوعين من الأبقار، أكثر من / 20 / كغ وأقل من / 20 / كغ.

وتأخذ معادلة علاقة الاقتران الشكل الآتي :

$$R = \frac{a \times d - b \times c}{a \times d + b \times c}$$

حيث:

(a) تمثل عدد الطلاب الناجحين .

(b) تمثل عدد الطالبات الناجحات

(c) تمثل عدد الطلاب الراسبين

(d) تمثل عدد الطالبات الراسبات

مثال 20:

أخذت بيانات عن 100 طالباً في كلية الزراعة. عدد الطلاب /60/ طالباً، وعدد الطالبات /40/ طالبة. نجح من الطلاب /42/ طالب ومن الطالبات /32/ طالبة. احسب معامل الاقتران.

لحساب معامل الاقتران ننشى الجدول الآتي:

جدول يبين تصنيف الطلاب والطالبات وفق معيار النجاح والرسوب .

الطلاب الناجحون	الطلاب	الطالبات	المجموع		
ناجح	a / 42	b/ 32	74	a × d	336
راسب	c/ 18	d / 8	26	b × c	576
المجموع	60	40	100		

المصدر فرضي .

معامل الاقتران

$$= \frac{336 - 576}{576 + 336} = -0.263$$

أي: معامل الاقتران ضعيف وذو اتجاه سالب.

7-2-2 التوافق Contingency:

يعرف التوافق بأنه عبارة عن العلاقة بين قيم نوعية ترتيبية وقيم اسمية. مثلاً: عدد الطلاب أو الطالبات / معروف، ومرتبة التخرج معروفة، لكن لا يوضع معدل التخرج. وفي الكثير من الأحيان تكون الفئات الأفقية أو الرأسية غير قابلة للترتيب. لذلك يدرس في مثل هذه الحالات معامل التوافق الذي يحسب معامل التوافق من المعادلة الآتية:

$$R = \sqrt{\frac{Y - N}{Y}}$$

حيث Y الحيز الذي تشغله كل خلية، Nعدد أفراد الظاهرة المدروسة .

مثال 21:

لنفرض الآتي: أخذت بيانات عن /200/ خريج. تبين عدد الخريجين /148/، وعدد الخريجات /52/. وزع الخريجون حسب المراتب العلمية وفق الآتي:

جدول يبين توزيع الخريجين وفق المراتب العلمية .

الدرجة / الجنس	امتياز	جيد جداً	جيد	مقبول	المجموع
ذكر	1	18	81	48	148
أنثى	3	16	19	14	52
المجموع	4	34	100	62	200

المصدر فرضي.

المطلوب حساب معامل التوافق لهذه الظاهرة.

الحل:

بداية نسمي كل فئة من الفئات (امتياز – ذكر) و (امتياز – أنثى) بالخلية، وهكذا.

- نحسب الاحتمال النظري لكل خلية من الخلايا، حيث يمكن تسميته بالتكرار المتوقع. يتم ذلك من خلال ضرب مجموع كل صف خلايا أفقي بمجموع كل صف خلايا عمودي مقسوماً على عدد الخريجين. ويمكن أن نجري ذلك، ونسجلها في الجدول الآتي:

جدول الاحتمال النظري

الدرجة / الجنس	امتياز	جيد جدا	جيد	مقبول
ذكور	×4 200÷148 = 2.96	×34 200÷148 = 25.16	× 100 200÷148 = 74	× 62 200÷148 = 45.88
إناث	200÷52 ×4 = 1.04	200 ÷ 52× 34 = 8.84	200÷52 × 100 = 26	200÷52× 62 = 16.12

- نحسب مجموع قوة كل خلية مع احتمالها النظري ونرمز له ب (Y) .

حيث Y = مجموع (مربع عدد أفراد كل خلية) مقسوماً على احتمالها النظري وهو ما يسمى بحيز الخلية. ولهذا ننشى الجدول الآتي :

جدول قوة كل خلية مع احتمالها النظري

البيان	امتياز	جيد جداً	جيد	مقبول
ذكور	2.96 ÷1×1 = 0.34	25.16÷18×18 = 12.88	74 ÷81×81 = 88.66	45.88÷48×48 = 50.22
إناث	1.04 ÷3×3 = 8.65	8.84÷16×16 = 28.96	26÷19×19 = 13.88	16.12 ÷14×14 = 12.16

وعليه مجموع Y = 215.75

- حساب معامل التوافق :

$$R=\sqrt{\frac{Y-N}{Y}}=\sqrt{\frac{(215.75-200)}{215.75}}=0.27$$

وهو موجب وضعيف.

7-2-3 الارتباط الخطي البسيط :

وهو أبسط أنواع الارتباط. وهو مقياس للعلاقة بين عامل مستقل وعامل تابع. يسميه البعض بمعامل ارتباط بيرسون نسبة للعالم الذي أوجده. ويرمز له بالرمز (r).

يحسب معامل الارتباط البسيط من المعادلة:

$$r=\frac{SXY}{\sqrt{SYY\times SXX}}=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2\sum(x-\bar{x})^2}}$$

معنوية معامل الارتباط :

تدرس معنوية معامل الارتباط وفق القانون :

$$t=|r|\sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}}$$

إذا كانت t المحسوبة أكبر من t الجدولية بدرجة حرية n-1 فهذا يعني أن معامل الارتباط معنوي.

مثال 22:

وجد نتيجة للتجربة أن الكمية المنتجة من محصول القمح ازدادت بزيادة كمية الأسمدة المضافة إلى وحدة المساحة وذلك وفق الجدول الآتي:

كمية الأسمدة	8	10	12	14	15	20	22	24	25	30
كمية المحصول	7	10	11	13	14	16	16	18	20	25

والمطلوب أوجد معامل الارتباط الخطي البسيط و ادرس معنويته.

الحل:

بالعودة للمثال السابق نجد :

SXX=474

SYY=246

SXY=334

بتطبيق القانون نجد:

$$r=\frac{SXY}{\sqrt{SYY\times SXX}}=\frac{334}{\sqrt{474(246)}}=0.978$$

وهو جذر معامل التحديد، أي معامل التحديد هو مربع معامل الارتباط.

معنوية معامل الارتباط:

$$t=|r|\sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}}=|0.978|\sqrt{\frac{10-2}{1-0.96}}=13.85$$

بمقارنة t المحسوبة مع t الجدولية نلاحظ أن t المحسوبة أكبر من t الجدولية على المستويين 1% و 5% وبالآتي فإن معامل الارتباط معنوي؛ أي: العلاقة الارتباطية معنوية بين المتحولين.

7-2-4 معامل ارتباط الرتب أو(معامل سبيرمان) Rank Correlation:

نلجأ إلى معامل ارتباط الرتب في حالات يتعذر فيها قياس المفردات عددياً، إنما يمكن قياسها بالترتيب. حيث تعطى كل مفردة من الظاهرة المدروسة ترتيبين لكل من (y , x)، وعندها يكون المطلوب قياس العلاقة الارتباطية بين الترتيبين. مثال ذلك: تقديم عدد من الطلبة لامتحانين، ومن ثم نرتب الطلبة حسب درجتهم في كل مقرر، أو أن يقوم حكمان بترتيب المتقدمين لشغل عمل ما، حسب أفضلية كل منهم لشغل هذا العمل، ومن ثم قياس مدى الاتفاق بين الحكمين. يحسب معامل الارتباط في هذه الحالة وفق المعادلة الآتية التي تنسب إلى العالم سبيرمان.

$$R = 1 - \frac{6 \times \sum (Y - X)^2}{N(N^2 - 1)}$$

ملاحظة: إذا كان طالبان نالا الدرجة ذاتها يعطيا الترتيب نفسه.

والمثال الآتي يبين كيفية حساب معامل ارتباط الرتب.

مثال 23:

أخذت علامات (12) طالباً في مقررين، وسجلت في الجدول الآتي:

جدول يبين علامات بعض الطلبة في مقررين.

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المقرر(1) y	63	48	78	65	59	33	82	54	64	28	67	73
المقرر (2) x	52	72	56	56	67	68	62	37	75	69	51	28

المصدر فرضي

لحساب معامل ارتباط الرتب ننشئ الجدول 7−2 .

ملاحظة: أعطي الطالبان رقم (3 و 4) الترتيب نفسه لتساوي علامتهما في المقررين.

نبدل رموز المعادلة بقيمها فيكون:

$$R = 1 - \frac{6 \times \sum (Y - X)^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(414.5)}{12(144 - 1)} = -0.45$$

وهو ارتباط ضعيف سالب لأنه أقل من 0.5 وسالب .

ملاحظة: تكون قيمة معامل ارتباط الرتب = (+ ١) إذا كان ترتيب الطلاب متساوي في المقررين، كما يساوي (−1) إذا كان ترتيب الطالب الأول في المقرر الأول هو الأخير في المقرر الثاني، والطالب الثاني في المقرر الأول هو الثاني قبل الأخير في المقرر الثاني وهكذا ...

جدول 7−2 مساعد لحساب معامل ارتباط الرتب .

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	مج
المقرر(1) y	63	48	78	65	59	33	82	54	64	28	67	73	
المقرر(2) x	52	72	56	56	67	68	62	37	75	69	51	28	
ترتيب y	7	10	2	5	8	11	1	9	6	12	4	3	78
ترتيب x	9	2	7.5	7.5	5	4	6	11	1	3	10	12	78
فرق الترتيب	2−	8	− 5.5	− 2.5	3	7	5−	2−	5	9	6−	9−	0
مربع الفرق	4	64	30.25	6.25	9	49	25	4	25	81	36	81	414.5

الفصل الثامن

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions

مقدمة

يهتم هذا الفصل بدراسة المتغيرات العشوائية، من حيث تعريفها، وأنواعها، والتوزيعات الاحتمالية لها وأماكن تطبيقها في المجال الزراعي، وخصائص هذه التوزيعات.

المتغير العشوائي Random Variable:

يعرف المتغير العشوائي بأنه مجموعة من القيم الحقيقية التي يأخذها المتغير وتعبر عن نتائج فراغ العينة.

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة Discrete Random Variables

2- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة) Continuous Random Variables

8-1 المتغيرات العشوائية المنفصلة

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ مجموعة محدودة من القيم، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام أحرف كبيرة على سبيل المثال ....X, Y, Z أما القيم التي يأخذها المتغير فترمز بحروف صغيرة على سبيل المثال... x, y, z. من أمثلة هذه المتغيرات :

- عدد الأولاد الذكور في الأسرة.
- عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.
- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200 وحدة كل موسم.
- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

8-1-1 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

إن احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير تدعى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وأفضل مثال على ذلك هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

ليكن X متغير عشوائي يأخذ القيم $X:\{x=x_1, x_2, ..., x_n\}$ وكان لدينا:

$$P(X=x_i)=f(x_i)$$

وهو الاحتمال عندما المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i . تسمى الدالة $f(x_i)$ بالدالة الاحتمالية ومن خصائصها :

$$0\leq f(x_i)\leq 1$$
$$\sum f(x_i)=1$$

ومنه يمكننا إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X و المكون من القيم الممكنة للمغير العشوائي و من القيم الاحتمالية لهذا المتغير؛ أي:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

x_i	$P(X=x_i)=f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
--	--
x_n	$f(x_n)$
$\sum$	**1**

مثال 24:

إذا كانت نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح صنف كولدين 0.70، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.30، اشترى أحد العملاء عبوتين، والمطلوب:

1- كون فراغ العينة.

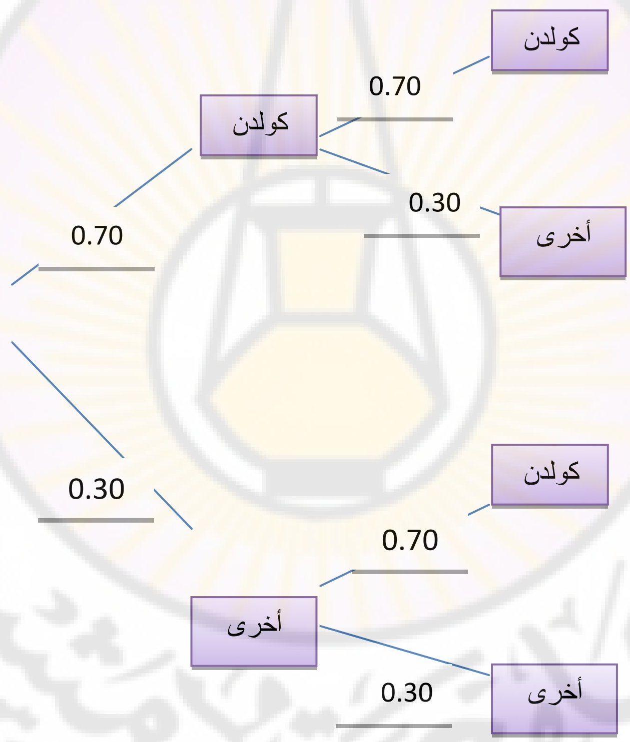
2- إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد العبوات المشتراة من التفاح نوع كولدن فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X
- كوّن التوزيع الاحتمالي التجميعي
- ما احتمال $P(X \le 1.5)$, $P(X = 1.5)$, $P(X \le 1)$, $P(X = 1)$

الحل:

تكوين فراغ العينة:

1–التجربة هنا شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج مبينة بالشكل



2–التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X حيث X يمثل عدد العبوات المشتراة من التفاح نوع كولدن. من المعلوم أن العميل اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح نوع كولدن ،لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

- $X=0$ إذا كانت العبوتان من النوع الآخر؛ أي: إذا كانت نتيجة التجربة (أخرى، أخرى).

- $X=1$ إذا كانت إحدى العبوتان من النوع كولدن؛ أي: إذا كانت نتيجة التجربة (أخرى، كولدن) أو (كولدن، أخرى).
- $X=2$ إذا كانت العبوتان من النوع كولدن؛ أي: إذا كانت نتيجة التجربة (كولدن، كولدن).

حيث المتغير يأخذ القيم $X:\{x=0,1,2\}$ ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة كما هو مبين بالشكل السابق، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح نوع كولدن

x_i	$P(X=x_i)=f(x_i)$
0	0.09
1	0.42
2	0.49
$\sum$	1

- تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي:

التوزيع التجميعي عبارة عن القيمة الناتجة من الاحتمال $P(X \le x)$ ويرمز له بالرمز $F(x_i)$ أي يمكننا كتابتها بالصيغة :

$$F(x)=P(X \le x)$$

ومما تقدم يمكننا تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد العبوات المشترات من التفاح نوع كولدن كما يلي:

جدول التوزيع الاحتمالي، و التوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراة من التفاح نوع كولدن

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.09	$F(0)=P(X \le 0)=0.09$
1	0.42	$F(1)=P(X \le 1)=0.09+0.42=0.51$
2	0.49	$F(2)=P(X \le 2)=0.09+0.42+0.49=1$

$\sum$	1	----

- حساب الاحتمالات $P(X=1)$, $P(X\le 1)$, $P(X=1.5)$, $P(X\le 1.5)$

$$P(X=1)=f(1)=0.42$$
$$P(X\le 1)=F(1)=0.51$$
$$P(X=1.5)=f(1.5)=0$$
$$P(X\le 1.5)=F(1.5)=F(1)=0.51$$

الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي بـــ μ ويحسب بالعلاقة:

$$\mu=\sum x_i f(x_i)$$

أما التباين فيرمز له بالرمز σ^2 و يحسب من المعادلة الآتية:

$$\sigma^2=\sum (x_i-\mu)^2 f(x_i)$$
$$\sigma^2=\sum x_i^2 f(x_i)-\mu^2$$

مثال 25:

في المثال السابق احسب ما يلي:

1- الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع كولدن.

2- احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع كولدن.

3- أوجد معامل الاختلاف النسبي.

الحل

1- الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع كولدن:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري نقوم بتكوين الجدول يشمل جميع المجاميع اللازمة للحساب وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.09	0	0
1	0.42	0.42	0.42

2	0.49	0.98	1.96
$\sum$	1	1.40	2.38

إذا الوسط الحسابي هو:

$$\mu = \sum x_i f(x_i) = 1.40$$

2- الانحراف المعياري:

لحساب الانحراف المعياري نقوم أولاً بحساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 2.38 - (1.4)^2 = 0.42$$

ومنه يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.42} = 0.65$$

3- معامل الاختلاف النسبي هو:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{0.65}{1.4} \times 100 = 46.43\%$$

8-1-2 التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الخاصة

من أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا المقرر توزيع ثنائي الحدين، والتوزيع البواسوني.

التوزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في حال المعطيات الاسمية فقط التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان ومن أمثلة ذلك:

عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة لها نتيجتان، الوحدة إما أن تكون سليمة، وإما تكون غير سليمة.

عند إلقاء قطعة عملة لها نتيجتان، ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة

نتيجة الطالب في الاختبار نجاح، رسوب.

تبني المزارع لبرنامج معين في الزراعة تبني – عدم تبني

شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين

عند تكرار التجربة n مرة و كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما :

- النتيجة محل الاهتمام "حالة النجاح" وتتم باحتمال ثابت قدره P
- النتيجة الأخرى "حالة الفشل" وتتم باحتمال ثابت قدره $q=1-P$

وبفرض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وأن المتحول العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح، فـــــــإن الاحتمال

$$P(X=x)=f(x)$$

يعطى بتطبيق المعادلة الآتية:

$$f(x)=\binom{n}{x}\ p^{x}\ q^{n-x} \quad , x=0,1,2,3,....n$$

حيث إن:

$$\binom{n}{x}=\frac{n(n-1)(n-2)......(n-x+1)}{x(x-1)(x-2).......3\times2\times1}$$

$$\binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

$$\binom{6}{0}=\binom{6}{6}=1$$

مثال 25:

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من الإصابة لأشجار التفاح عند استخدام مبيد معين *0.60* فإذا قمنا برش هذا المبيد على *5* أشجار مصابة وعرفنا المغير العشوائي X بأنه عدد الأشجار المستجيبة للمبيد (حالات الشفاء) والمطلوب:

1- ما نوع المتغير؟

2- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

3- احسب الاحتمالات الآتية:

- ما احتمال استجابة 3 أشجار لهذا المبيد؟
- ما احتمال استجابة شجرة واحدة على الأقل؟
- ما احتمال استجابة شجرتين على الأكثر؟

4- احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

الحل:

1- نوع المتغير هو متغير كمي منفصل و مدى هذا المتغير هو:

$$X:\{\ x=0,1,2,3,4,5\}$$

2- شكل دالة الاحتمال :لدينا

$$n=5,\quad p=0.6,\quad q=1-p=1-0.6=0.4$$

$$f(x)=\binom{n}{x}\ p^x\ q^{n-x}\qquad ,\ x=0,1,2,3,4,5$$

$$=\binom{5}{x}\ (0.6)^x\ (0.4)^{5-x}$$

3- حساب الاحتمالات:

- احتمال استجابة 3 أشجار لهذا المبيد: $P(x=3)=f(x)$

$$f(3)=\binom{5}{3}\ (0.6)^3\ (0.4)^{5-3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times0.216\times0.16=10\times0.03456$$

$$f(3)=0.3456$$

- حساب احتمال استجابة شجرة واحدة على الأقل $P(x\geq1)$

$$P(x\geq1)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=1-f(0)$$

$$=1-\left[\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5\right]=1-1\times1\times0.01024=0.98976$$

- احتمال استجابة شجرتين على الأكثر $P(x\leq2)$

$$P(x\leq2)=f(0)+f(1)+f(2)$$

$$=\left[\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5\right]+\left[\binom{5}{1}(0.6)^1(0.4)^4\right]+\left[\binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3\right]$$

$$=0.2304+0.0768+0.01024$$

$$=0.31744$$

4- حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع الثنائي يعطى الوسط الحسابي بالعلاقة:

$$\mu = \sum xf(x) = np$$
$$\mu = 5(0.6) = 3$$

- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ويعطى التباين في التوزيع الثنائي بالعلاقة:

$$\sigma^2 = npq$$
$$\sigma^2 = 5(0.6)(0.4) = 1.2$$

وبالتالي يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1.2} = 1.095$$

- معامل الاختلاف النسبي يعطى بالعلاقة :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.095}{3} \times 100 = 36.5\%$$

التوزيع البواسوني Poisson Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقاً لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.
- عدد مرات ري نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم.
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع.

شكل التوزيع الاحتمالي البواسوني

إذا كان μ هو متوسط عدد مرات وقوع حادث ما وفقاً لمعدل زمني معين و X هو متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقاً لنفس المعدل الزمني، بالتالي إن مدى المتغير العشوائي X عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، ويأخذ الشكل: $X : \{x=0,1,2,...\}$ وبالتالي فإن الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x مرة، وبالتالي يعطى التوزيع الاحتمالي بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \quad , \quad x=0,1,2,........$$

حيث e يمثل العدد النبري وقيمته هي :2.718

أما $X!$ فتسمى مضاريب العدد وتساوي: $X!=X(X-1)(X-2).......3\times2\times1$

مثال 26:

تستهلك أسرة وسطياً 4 وحدات سلعية خلال شهر وتخضع لتوزيع بواسون، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

1- ما نوع المتغير العشوائي؟

2- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

3- احسب الاحتمالات الآتية:

- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك 4 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

4- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، ومعامل الاختلاف النسبي لعدد الوحدات المستهلكة.

الحل:

1- إن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة $X:\{x=0,1,2,...\}$

2- شكل دالة الاحتمال:

إن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو $\mu=4$ وبالآتي تعطى دالة الاحتمال بالشكل:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$f(x)=\frac{e^{-4}4^{x}}{x!},\qquad x=0,1,2,....$$

3- حساب الاحتمالات:

- حساب أن تستهلك الأسرة وحدتين خلال شهر :

$$f(2)=\frac{e^{-4}4^{2}}{2!}=\frac{0.018519\times 16}{2}=0.148149$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر:

$$p(X\geq 1)=f(1)+f(2)+....$$

$$=1-f(0)=1-\frac{e^{-4}4^{0}}{0!}=0.981481$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 4 وحدات على الأكثر خلال الشهر:

$$p(X\leq 4)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$$

4- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، ومعامل الاختلاف لعدد الوحدات المستهلكة:

الوسط الحسابي μ في حال التوزيع البواسوني هو معلمة معطاة هي: $\mu=4$

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي: $\sigma^{2}=\mu=4$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو: $\sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{4}=2$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة:

$$CV=\frac{\sigma}{\mu}\times 100=\frac{2}{4}\times 100=50\%$$

2-8 المتغيرات العشوائية المستمرة Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المستمر هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لا نهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله. ليكن X متغير عشوائي مستمر ويقع في المدى (a,b) وبالآتي $\{X=x : a<x$

$<b\}$ وبالآتي يمكن للمتغير العشوائي الحصول على عدد لا نهائي من القيم المحصورة ضمن المجال السابق، ومن الأمثلة على المتغيرات العشوائية المستمرة:

كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر $\{40 > x> 10: x= X\}$.

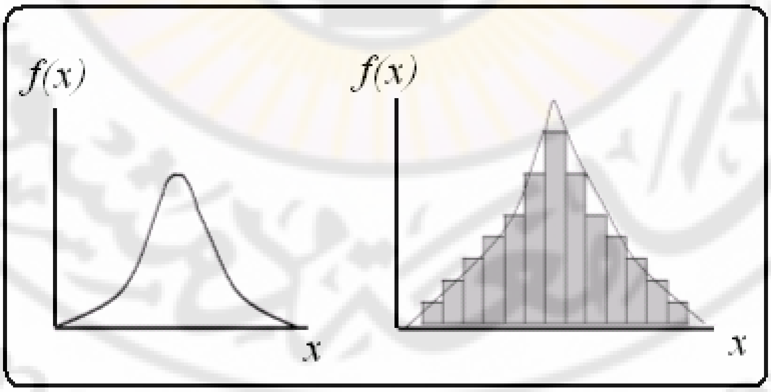
فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام $\{5 > x> 1: x= X\}$.

وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة جداً.

8-2-1 التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر Continuous Probability

يعد شكل المدرج التكراري النسبي التمثيل الأمثل والأقرب لبيانات المتغير الكمي المستمر، وكلما كانت مدى الفئات صغير؛ أي: إن مراكز الفئات متقاربة كلما أمكننا الحصول على رسم دقيق للمنحني الخاص بدالة الاحتمال للمتغير المستمر، حيث إن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل الآتي:

شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

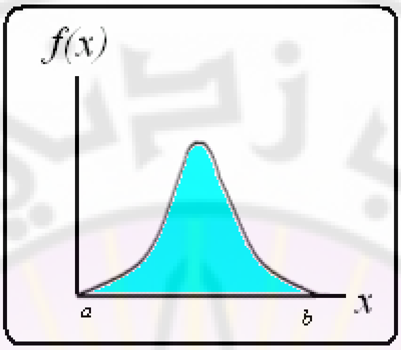


والمساحة أسفل المنحنى مساوية للواحد وهي تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية.

وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة الكثافة الاحتمالية .

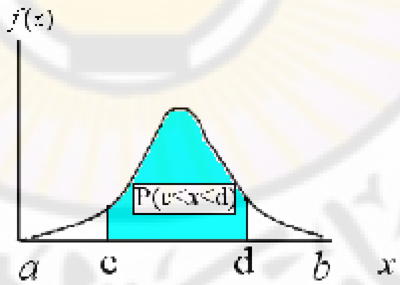
بفرض أنه لدينا المتغير العشوائي X وهذا المتغير يقع ضمن المجال:

$X = \{x: a < x < b\}$ بالآتي فإن المنحني التكراري يأخذ الشكل:



من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

- أن قيمة الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى
- $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = 1$
- لحساب احتمال وقوع المتغير العشوائي المستمر ضمن المدى (c,d) يجب حساب المساحة أسفل المنحني الواقع بين ***c* و *d*** و يرمز له بالـرمـــز $P(c < x < d)$ وتأخذ الشكل:



ويتم حساب المساحة بالتكامل:

$$P(c < x < d) = \int_{x=c}^{x=d} f(x)dx = [g(x)]_c^d = g(d) - g(c)$$

- احتمال القيمة الثابتة تساوي الصفر أي $P(x = value) = 0$

مثال 27:

إذا كانت كمية الإنفاق الشهري للأسرة بآلاف الليرات على الخضار له دالة كثافة احتمال تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} c(30x - 3x^2) & 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حساب قيمة الثابت

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (3 و 5) آلاف ليرة خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا 400 أسرة فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر؟

الحل:

1- لحساب قيمة الثابت

نقوم باستخدام الخاصية الثانية من خواص دالة الكثافة وهي:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = 1$$

إذاً :

$$\int_{x=0}^{x=10} c(30x - 3x^2)dx = c\int_{x=0}^{x=10}(30x - 3x^2)dx = 1$$

$$= c\left[15x^2 - x^3\right]_0^{10} = c\left[(15\times 100 - 1000) - 0\right] = 1$$

$$= 500c = 1$$

$$c = 1/500 = 0.002$$

2- حساب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (3 و 5) آلاف ليرة خلال الشهر هو

$$P(3 < x < 5) = \int_{x=3}^{x=5} 0.002(30x - 3x^2)dx$$
$$= 0.002\left[15x^2 - x^3\right]_3^5$$
$$= 0.002\left[(15\times 25 - 125) - (15\times 9 - 27)\right]$$
$$= 0.002(250 - 108) = 0.002(142)$$
$$= 0.284$$

3- إذا كان لدينا 400 أسرة فعدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 4 آلاف خلال الشهر هو:

$$Number \;\; of \;\; Family = 400P(x < 3)$$
$$= 400\int_{x=0}^{x=3} 0.002(30x - 3x^2)dx = 0.002\left[15x^2 - x^3\right]_0^3$$
$$= 400\times 0.002\left[(15\times 9 - 27) - 0\right] = 400\times 0.002(108)$$
$$= 400\times 0.284$$
$$= 86.4 \approx 87$$

حوالي 87 أسرة.

المتوسط والتباين في التوزيع الاحتمالي المستمر

ليكن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X حيث $a < x < b$ *فإن الوسط* الحسابي (التوقع الرياضي) والتباين يعطى بالعلاقة :

$$\mu = E(x) = \int_a^b xf(x)dx$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2, \qquad E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx$$

مثال 28 :

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري للمثال السابق.

الحل

1- المتوسط الحسابي:

$$\mu = E(x) = \int_0^{10} xf(x)dx = 0.002\int_0^{10}(30x^2 - 3x^3)dx$$

$$\mu = 0.002\left[10x^3 - \frac{3x^4}{3}\right]_0^{10} = 0.002\left[10\times 1000 - \frac{3\times 10000}{4} - 0\right]$$

$$\mu = 0.002(2500)$$

$$\mu = 5$$

2- التباين

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = \int_0^{10} x^2 f(x)dx = 0.002\int_0^{10}(30x^3 - 3x^4)dx$$

$$E(x^2) = 0.002\left[\frac{30x^4}{4} - \frac{3x^5}{5}\right]_0^{10} = 0.002\left[\frac{300000}{4} - \frac{300000}{5}\right]$$

$$E(x^2) = 0.002(15000) = 30$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$\sigma^2 = 30 - 25 = 5$$

3- الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5} = 2.236$$

4- معامل الاختلاف النسبي :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}\times 100 = \frac{2.236}{5}\times 100 = 44.72\%$$

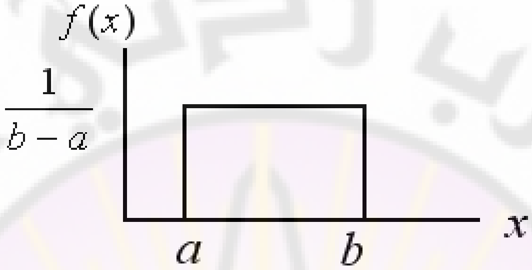
سنقوم في هذا الفصل بعرض بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة

التوزيع المنتظم Uniform distribution

يستخدم هذا النوع من التوزيع في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم. إذا كان لدينا المتغير العشوائي X و مداه $a < x < b$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية تعطى بالعلاقة :

$$f(x)=\frac{1}{b-a}, \qquad a<x<b$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



يعطى الوسط الحسابي للتوزيع المنتظم بالعلاقة:

$$\mu=E(x)=\frac{a+b}{2}$$

كما يعطى التباين بالعلاقة :

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

كما يعطى الاحتمال :

$$P(X\le x)=\int_a^x f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^x dx$$

$$=\frac{x-a}{b-a}$$

مثال 29:

قام أحد التجار باسترداد 2000 طن من البطاطا ووضعها في مخزن، ثم قام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة، إذا علمت أن الفترة الزمنية للبيع تتبع التوزيع المنتظم أوجد الآتي:

- دالة الكثافة الاحتمالية المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع

- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع ما الكمية المتبقية بالمخزن؟

الحل:

- دالة الكثافة الاحتمالية المعبرة عن الفترة الزمنية :

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12}, \qquad 0 < x < 12$$

- حساب الكمية الموجود بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من البيع :

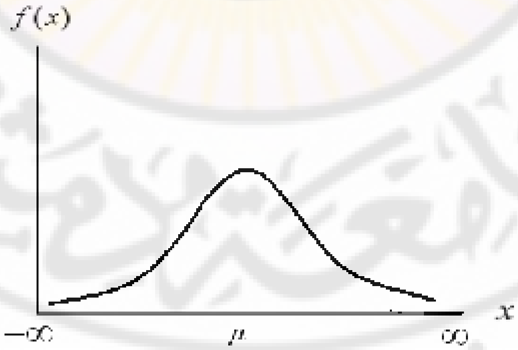
$$= Q \times P(X > 7) = Q \times (1 - P(X \le 7)) = 2000(1 - \frac{7-0}{12-0})$$
$$= 833.33\ Ton$$

التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

يعد هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية شيوعاً واستخداماً في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع . تعطى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \pi = 22/7$$

ويأخذ الشكل :



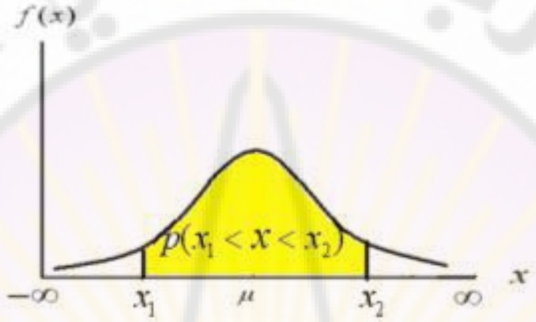
و هو متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ

الوسط الحسابي : $E(x) = \mu$

التباين : σ^2

ويعبر عنه بالشكل: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ وهذا يعني أن المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره μ و تباين قدره σ^2

يحسب الاحتمال: $P(x_1 < x < x_2)$ والمبين بالمساحة الموصوفة بالشكل الآتي:



بالتكامل التالي:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

ولكن هذا التكامل من الصعب جداً حسابه، لذلك لجأ الإحصائيون إلى إجراء تحويلة رياضية وتحويل هذا التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري The Standard Normal Distribution

وهذه التحويله هي:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

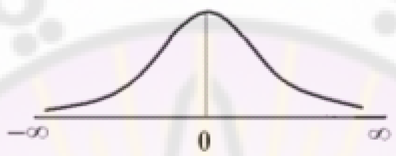
وعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي، وبالتالي تعطى دالة الكثافة الاحتمالية له بالشكل :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \qquad -\infty < z < +\infty$$

حيث:

المتوسط الحسابي =0 والتباين =1 و يعبر عنه بالشكل: $X \sim N(0,1)$

ويأخذ شكل الناقوس كما مبين بالشكل الآتي:

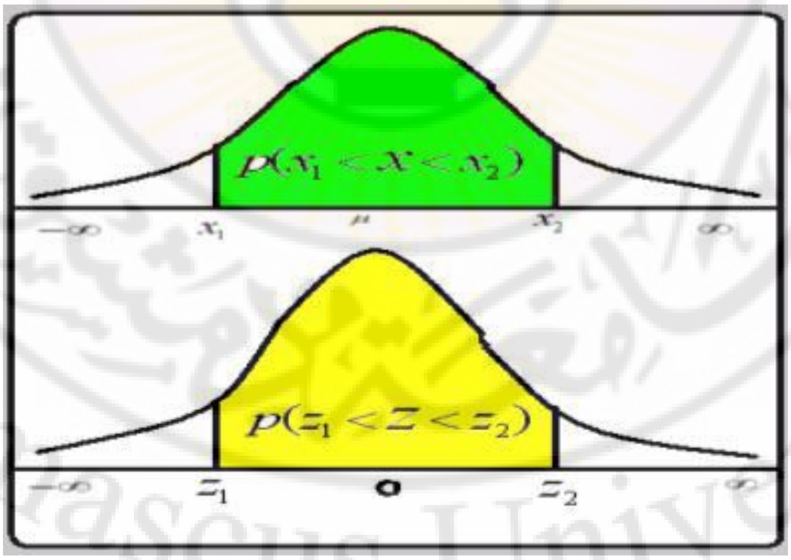


وبالعودة لحساب الاحتمال السابق $P(x_1 < x < x_2)$ نقوم باستخدام التحويلة $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ وفق الخطوات الآتية:

1- نقوم بتحويل القيم الطبيعية (x_1, x_2) إلى طبيعية معيارية (قياسية)

$$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma},\ \ z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$$

2- عندئذٍ $P(x_1 < x < x_2) = P(z_1 < z < z_2)$ كما هو مبين بالشكل:



3- نقوم باستخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) في حساب المساحات الخاصة بالاحتمال، حيث يتم استخدام الجدول كما هو مبين بالشكل:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

مثال 30:

إذا كان متوسط إنتاج الشجرة من الكرز 80 كغ، والانحراف المعياري لإنتاج الشجرة 30 المطلوب :

1- كتابة شكل دالة الكثافة الاحتمالية

2- ما نسبة الأشجار التي إنتاجها أقل من 60 كغ

3- ما نسبة الأشجار التي إنتاجها أكبر من 95 كغ

4- ما نسبة الأشجار التي إنتاجها بين 60 و 95 كغ

5- ما نسبة الأشجار التي إنتاجها أكبر من 75 كغ

6- ما عدد الأشجار الذي أقل منه 0.975 من الإنتاج؟

الحل:

1- شكل دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x)=\frac{1}{30\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2} \quad , \quad -\infty<x<+\infty$$

2- نسبة الأشجار التي إنتاجها أقل من 60 كغ

$$P(x<60)=P\left(z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)$$

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.5-0.2486$$

$$P(x<60)=0.2514$$

3- نسبة الأشجار التي إنتاجها أكبر من 95 كغ

$$P(x>95)=P\left(z>\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\left|P\left(z>\frac{95-80}{30}\right)\right.$$

$$P(x>60)=P(z>0.5)=0.5-0.1915$$

$$P(x>60)=0.3085$$

4- نسبة الأشجار التي إنتاجها بين 60 و 95 كغ

$$P(60<x<95)=P\left(z>\frac{60-80}{30}\right)+P\left(z<\frac{95-80}{30}\right)$$

$$P(60<x<95)=P(z>-0.67)+P(z<0.5)$$

$$P(60<x<95)=0.2486+0.1915$$

$$P(60<x<95)=0.4401$$

5- نسبة الأشجار التي إنتاجها أكبر من 75 كغ

$$P(x>75)=P\left(z>\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\left|P\left(z>\frac{75-80}{30}\right)\right.$$

$$P(x>75)=P(z>-0.5)=0.5+0.1915$$

$$P(x>60)=0.6915$$

6- عدد الأشجار الذي أقل منه 0.975 من الإنتاج: في هذه الحالة نقوم بالبحث عن المتحول x الذي أقل منه 0.975، بفرض أن هذا المتغير هو x_1 فإن:

$$P(x<x_1)=P\left(z<\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)=\left|P\left(z<\frac{x_1-80}{30}\right)=0.975\right.$$

وبالكشف بصورة عكسية حيث نبحث عن المساحة 0.975 نجدها عند تقاطع الصف 1.9 مع العمود 0.06 أي أن قيمة z=1.96 بالتعويض:

$$1.96=\frac{x_1-80}{30}$$

$$x_1=30(1.96)+80=138.8$$

إذن الإنتاج هو 138.8 كغ سنوياً.

الفصل التاسع

الأرقام القياسية والسلاسل الزمنية

Index Number and Time series

9-1 الأرقام القياسية للأسعار:

الرقم القياسي للأسعار عبارة عن رقم نسبي يقيس مدى التغير الذي يطرأ على الأسعار عادة من سنة (تسمى سنة الأساس) لأخرى (تسمى سنة المقارنة).

الرموز المستخدمة في هذا الفصل هي:

P_0 الأسعار في فترة الأساس P_1 الأسعار في فترة المقارنة.

Q_0 الكميات في فترة الأساس Q_1 الكميات في فترة المقارنة.

وسنرمز للرقم القياسي للأسعار بالرمز I:

1- الرقم القياسي البسيط والذي يحسب من العلاقة:

$$I_S = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

2- الرقم القياسي المرجح بكميات الأساس لاسبير(Laspeyres) يعطى بالعلاقة :

$$I_L = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

3- الرقم القياسي المرجح بكميات المقارنة باش(Paasche) يعطى بالعلاقة :

$$I_p = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100$$

4- الرقم القياسي الأمثل فيشر(Fisher's) يحسب من العلاقة :

$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P} = \sqrt{\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}} \times 100$$

دلالة الرقم القياسي:

- إذا كان الرقم القياسي أصغر من 100 فذلك دلالة على نقصان في الأسعار ويحسب مقدار النقصان بالعلاقة :

$$(100 - I) = \%$$

- إذا كان الرقم القياسي أكبر من 100 فذلك دلالة على زيادة في الأسعار ويحسب مقدار الزيادة بالعلاقة :

$$(I - 100) = \%$$

مثال 31:

الجدول الآتي يوضح أسعار ثلاث مواد والكميات المستهلكة خلال عامي 1990 و 2010 :

السنة	1990		2010	
السلعة	السعر	الكمية	السعر	الكمية
A	5	10	7	20
B	4	8	8	20
C	6	15	10	30
المجموع	15	33	25	70

باعتبار أن عام 1990 هو عام الأساس والمطلوب :

1- الرقم القياسي للأسعار البسيط

2- الرقم القياسي للأسعار المرجح بسنة الأساس (لاسبير).

3- الرقم القياسي للأسعار المرجح بسنة المقارنة (باش).

4- الرقم القياسي الأمثل (فيشر) مع توضيح دلالة الرقم القياسي (زيادة أو نقصان).

الحل: للمساعدة بالحل ننشئ الجدول الآتي:

السنة	1990		2010		P_0Q_0	P_0Q_1	P_1Q_0	P_1Q_1
السلعة	P_0	Q_0	P_1	Q_1				
A	5	10	7	20	50	100	70	140
B	4	8	8	20	32	80	64	160
C	6	15	10	30	90	180	150	300
المجموع	15	33	25	70	172	360	284	600

1- الرقم القياسي البسيط والذي يحسب من العلاقة:

$$I_S = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100 = \frac{25}{15} \times 100 = 166.67\%$$

2- الرقم القياسي المرجح بكميات الأساس (لاسبير) يعطى بالعلاقة :

$$I_L = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100 = \frac{284}{172} \times 100 = 165.12\%$$

3- الرقم القياسي المرجح بكميات المقارنة (باش) يعطى بالعلاقة :

$$I_p = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100 = \frac{600}{360} \times 100 = 166.67\%$$

4- الرقم القياسي الأمثل (فيشر) يحسب من العلاقة :

$$I_F = \sqrt{I_L \cdot I_P} = \sqrt{165.12 \cdot 166.67} = 165.89\%$$

دلالة الرقم القياسي:

- إن الرقم القياسي أكبر من 100 فذلك دلالة على زيادة في الأسعار و يحسب مقدار الزيادة بالعلاقة:

$$(I - 100) = 165.89 - 100 = 65.89\%$$

2-9 السلاسل الزمنية Time Series

السلسلة الزمنية هي عبارة عن قيم ظاهرة من الظواهر في سلسلة تواريخ متلاحقة، أيام أو اشهر أو سنوات، والهدف الرئيسي من دراسة السلاسل الزمنية هو دراسة التغيرات التي طرأت على الظاهرة التي تمثلها خلال فترة من الزمن، وتحليل أسبابها ونتائجها والتنبؤ المستقبلي اعتماداً على فكرة مد الحوادث من الماضي للمستقبل.

حتى تكون القراءات مشكلة لسلسلة زمنية يجب أن تكون الفترات الزمنية للظاهرة متساوية.

تحوي السلسلة الزمنية على متغيرين؛ أحدهما الزمن وهو المتغير المستقل والثاني هو قيمة الظاهرة وهو المتغير التابع.

يمكننا القول بشكل عام: إن التغيرات التي تطرأ على ظاهرة ما خلال فترة زمنية هي محصلة عدد من العوامل ولا يمكن عزوها إلى عامل واحد وهذه العوامل هي:

- الاتجاه العام Secular Trend:

وهي التغيرات طويلة الأمد ويعكس تأثير القوى المختلفة التي تؤدي إلى زيادة أو نقصان قيمة الظاهرة على مدى طويل من الزمن.

- التغيرات الموسمية Seasonal Variation:

وهي التغيرات التي تطرأ على الظاهرة هبوطاً أو صعوداً في الاتجاه العام في مدة أقصاها سنة واحدة .

- التغيرات الدورية Cyclical Variation:

وهي التغيرات التي تطرأ على الظاهرة صعوداً أو هبوطاً في الاتجاه العام لقيم السلسلة الزمنية كل بضع سنوات، وتقاس عادة بين انكماشين متتالين أو رخاءين متتالين.

- التغيرات الطارئة (غير المنتظمة) Irregular Variation:

وهي التغيرات التي تطرأ على الاتجاه العام، والتي لا يمكن اعتبارها موسمية أو دورية مثل التغيرات الناتجة عن الحروب و الكوارث الطبيعية أو غيرها.

في هذا الفصل سوف ندرس فقط تغيرات الاتجاه العام.

تعيين خط الاتجاه العام:

سنكتفي بالسلاسل ذات الاتجاه العام الخطي، حيث يتم تعيين خط الاتجاه العام الخطي بأسلوب الانحدار الخطي البسيط السالف ذكره في فصل سابق، باعتبار الزمن (السنوات، الشهور،....الخ) متغير مستقل (X) والمتغير التابع (Y) هو الظاهرة محل الدراسة و تقدر معادلة الاتجاه العام الخطي بالعلاقة :

$$y = ax + b$$

نحدد نوع العلاقة طردية أو عكسية و يعطى بالعلاقة:

$$\hat{a} = SXY / SXX$$

أما الثابت فيعطى بالعلاقة :

$$\hat{b} = \bar{y} - a\bar{x}$$

مثال 32:

فيما يلي قيم الإنتاج لسلعة ما خلال الفترة 2000–2004 (بآلاف الطن)

قيمة المتغير	السنة
3	2000
3	2001
5	2002
6	2003
8	2004

والمطلوب:

1. قدر معادلة الاتجاه العام الخطي وما توقعاتك للإنتاج في عام 2010
2. أوجد القيمة الاتجاهية للإنتاج في عام 2001

الحل:

معادلة الاتجاه العام:

نأخذ الجدول المساعد:

X^2	XY	Y	X	السنة
4	6-	3	2-	2000
1	3-	3	1-	2001
0	0	5	0	2002
1	6	6	1	2003
4	16	8	2	2004
10	13	25	0	المجموع

SXX هي مربع المجاميع المصححة لـــ x_i (هي قيمة x عند النقطة i) وتحسب قيمته بالعلاقة:

$$SXX = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n = 10$$

SXY هي مربع المجاميع المصححة للتقاطع x_i مع y_i وتحسب قيمته بالعلاقة :

$$SXY = \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i) / n \ = 13$$

و منه:

$$\hat{a} = SXY / SXX = 13/10 = 1.3$$

$$\hat{b} = \bar{y} - a\bar{x} = 5 - 0 = 5$$

ومنه يمكننا كتابة المعادلة:

$$y = 1.3x + 5$$

مع العلم أن سنة الأساس هي 2002

توقعات الإنتاج عام 2010:

$$y = 1.3(8) + 5 = 12.4 + 5 = 17.4$$

القيمة الاتجاهية للإنتاج في عام 2001

$$y = 1.3(-1) + 5 = -1.3 + 5 = 3.7$$

دليل المصطلحات العلمية

عربي – إنكليزي

A	
Abelian group	زمرة تبديلية
Adjoint of a matrix	المصفوفة الملحقة
Algebra	جبر
- of matrices	جبر المصفوفات
Associative	تجميعي
- operation	عملية تجميعية
Average	معدل ، متوسط
B	
Basis	قاعدة
Binary	ثنائي
- operation	عملية ثنائية (قانون تشكيل داخلي)
Bayes' rule	دستور بايز
Binmial	ثنائي الحد
- distribution	توزيع ثنائي
- experiment	تجربة ثنائية
- random variable	متحول عشوائي ثنائي
C	
Certain event	حادث أكيد
Column	عمود
Combinations	توافيق
Commutative	تبديلي
− group	زمرة تبديلية
− law	قانون تبديلي

Complement	متمم
- event	حادث متمم
Conditional	شرطي
- probability	احتمال شرطي
Conjugate	مرافق
- of a matrix	مرافق مصفوفة
Continuous	مستمر
- distribution	توزيع مستمر
- random variable	متحول عشوائي مستمر
- sample space	فضاء عينة مستمر
Countable	عدود (قابل للعد)
Critical point	نقطة حرجة
Curve	منحني
D	
Density	كثافة
Density function	دالة كثافة
Determinant	محدد (معين)
- of a matrix	محدد مصفوفة
Deviation	انحراف
Difference	فرق
- of two means	فرق متوسطين
- of two matrices	فرق مصفوفتين
Dimension	بُعد
Discrete	منفصل
- probability distribution	توزيع احتمالي منفصل
- random variable	متحول عشوائي منفصل
- sample space	فضاء عينة منفصل

Disjoint sets	مجموعات منفصلة
Distribution	توزيع
E	
Echelon form	الشكل المدرج
Element	عنصر
Elemenatry event	حادث ابتدائي
Elemenatry operation	عملية أولية
Empty set	مجموعة خالية
Equality	مساواة
- of two matrices	مساواة مصفوفتين
- of two sets	مساواة مجموعتين
Equation	معادلة
Error	خطأ
Estimate	تقدير (تخمين)
Event	حادث (حدث)
Expectation	توقع
Experiment	تجربة
External	خارجي
F	
Field	حقل
Finite	منتهي (محدود)
Frequency	تواتر ، تردد
- curve	المنحني التكراري
- polygon	المضلع التكراري
Function	دالة
G	
General	عام

- solution set	مجموعة الحل العام
H	
Homogeneous	متجانس
- linear system	جملة خطية متجانسة
I	
Identity	محايد (حيادي)
- matrix	مصفوفة محايدة (حيادية)
Impossible event	حادث مستحيل
Independence	استقلال
Independent	مستقل
- events	حوادث مستقلة
Interval	مجال
Intersection	تقاطع
Introduction	مقدمة
Inverse	نظير
- of a matrix	نظير مصفوفة
L	
Linear	خطي
- dependence	ارتباط خطي
- independence	استقلال خطي
M	
Mathematical	رياضي
- expectation	التوقع الرياضي
Matrix	مصفوفة
Mean	متوسط
Median	وسط
Mode	منوال

Mutually	باتفاق الطرفين
- exclusive events	حوادث متنافية مثنى مثنى
N	
Negative	سلبي
Normal	نظامي
- curve	منحني نظامي
- distribution	توزيع نظامي
- random variable	متحول عشوائي نظامي
Null	عدم
O	
Observation	مشاهدة
Order	مرتبة
- of a matrix	مرتبة مصفوفة
P	
Parameter	وسيط
Permutation	تبادل
Poisson distribution	توزيع بواسون
Population	مجتمع
Probability	احتمال
- distribution	توزيع احتمالي
R	
Rank	رتبة
- of a matrix	رتبة مصفوفة
Random	عشوائي
- sample	عينة عشوائية
- variable	متحول عشوائي
Relative	نسبي

- frequency	تكرار نسبي
Row	سطر
- of a matrix	سطر مصفوفة
S	
Sample	عينة
- space	فضاء عينة
Sampling	عيني
- distribution	توزيع عيني
Scalar	عددي
Simple event	حادث ابتدائي
Singular matrix	مصفوفة شاذة
Standard deviation	انحراف معياري
Standard	معياري
- normal distribution	توزيع نظامي معياري
Statistic	إحصاء (إحصائية)
Subset	مجموعة جزئية
Sum	مجموع
- of matrices	مجموع مصفوفات
T	
Test	اختبار
Triangle	مثلث
Triangular	مثلثي
- Matrix	مصفوفة مثلثية
V	
Variance	تشتت
Vector	متجه (شعاع)
- space	فضاء متجهي

بعض الرموز والمصطلحات الرياضية

الرمز	اسم الرمز أو لفظه	مثال رياضي أو لفظي على استخدام الرمز
%	النسبة المئوية	خمسة في المائة % 5
$\neq$	عدم التساوي	$2 \neq 3$
$\approx$	التقارب	$2.9 \approx 3$
$>$	أكبر	$3 > 2$
$<$	أصغر	$4 < 6$
$\geq$	أكبر أو يساوي	$x \geq a$
$\leq$	أصغر أو يساوي	$x \leq b$
»	أكبر بكثير من	1000 » 3
«	أصغر بكثير من	3 « 1000
$\vert\ \vert$	القيمة المطلقة	$\vert -3\vert = 3$
$\sqrt[n]{\ }$	الجذر النوني	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\Rightarrow$	الاقتضاء	$a < b < c \Rightarrow a < c$
$\Leftrightarrow$	التكافؤ (الاقتضاء المزدوج)	$a < b \Leftrightarrow b > a$
$\in$	الانتماء	$3 \in$ مجموعة الأعداد
$\notin$	عدم الانتماء	$3 \notin$ المجموعة الخالية
Ø	المجموعة الخالية	مجموعة طلاب في قاعة فارغة
Ω	المجموعة الكلية (أوميغا)	مجموعة الأشياء في الكون
$\exists$	توجد حالة واحدة على الأقل	يوجد طالب في الكلية
$\forall$	مهما يكن	مهما يكن x من B . $\forall x \in B$
$\prod$	جداء حدود	$\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1 . x_2 . x_3$
$\sum$	مجموع حدود (سيكما)	$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$
!	عاملي	4 ! = 4 . 3 . 2 . 1
!!	العاملي الفردي أو الزوجي	5 !! = 5 . 3 . 1.6!! = 6 . 4 . 2

π	نسبة محيط الدائرة على قطرها	$\pi \approx 3.14$
e	العدد النيبري	$e \approx 2.728$
log	اللوغاريتم الطبيعي (بالنسبة لـــ e)	$\log e = 1$
$\log_b$	اللوغاريتم بالنسبة للأساس b	$\log_b b = 1$ $\log_{10} 10 = 1$
lim	نهاية مقدار ما	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
ct	المقدار الثابت	
sin	جيب	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
cos	تجيب	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
tg	ظل	$tg\frac{\pi}{4} = 1$
sec	قاطع	$\sec = \frac{1}{\cos}$
csc	قاطع تمام	$\csc = \frac{1}{\sin}$
ctg	تظل	$ctg = \frac{1}{tg}$
arc sin	الزاوية التي تقابل الجيب	$arc\ \sin\frac{1}{2} = 30°$
arc cos	الزاوية التي تقابل التجيب	$arc\ \cos\frac{1}{2} = 60°$
arc tg	الزاوية التي تقابل الظل	$arc\ tg\,(1) = \frac{\pi}{4}$

المراجع العلمية

المراجع العربية:

1- أبو صالح، محمد صبحي، الطرق الإحصائية، عمان، الأردن، 2000.

2- أحمد علوظي، التفاضل، منشورات كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة حلب 2004.

3- أحمد علوظي، التكامل، منشورات كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة حلب 2002.

4- الصالح أحمد يوسف، المدخل إلى تصميم التجارب، جامعة حلب، 1979.

5- الصالح أحمد يوسف، مبادئ الإحصاء الحيوي، جامعة البعث، 1987.

6- الصالح أحمد يوسف، خياط سهيل، مبادئ في الإحصاء وتصميم التجارب، جامعة البعث، 2000.

7- الطاهر عثمان، السلامة عبد العزيز، الحسن جعفر، الموجز في الإحصاء الحيوي وتصميم التجارب، دار النهضة العربية، بيروت، 1998.

8- حامد عباس، الرياضيات العامة (2)، جامعة البعث، العام الدراسي 2007-2008، 456 صفحة.

9- حلاق عمر، عبيدة أميرة، المدخل إلى الإحصاء الحيوي، جامعة حلب، 1992.

10- عصام ديبان، رياضيات للزارعين،منشورات كلية الزراعة، جامعة البعث 2008.

11- علي محمد مقوص، الرياضيات (3) منشورات كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة تشرين، 1992-1993، 483 صفحة.

12- قاسم عبده، السقّا هنا، خياط سهيل، جامعة دمشق، 1984.

13- قاسم عبده، الإحصاء الزراعي، الطبعة الثانية، جامعة دمشق، 1981.

14- كثرة مخول، المعادلات التفاضلية (1)، منشورات كلية العلوم، جامعة البعث، العام الدراسي 2004-2005، 484 صفحة.

15- كنجو أنيس، الإحصاء الزراعي وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي، الجزء الأول، مؤسسة الرسالة، بيروت 2004.

16- منجد محمود الحمود، الرياضيات (1) منشورات كلية الهندسة الكيميائية والبترولية، جامعة البعث، العام الدراسي 2004-2005، 549 صفحة.

17- هيثم كامل ناصر، التحليل (4)، منشورات كلية العلوم، جامعة البعث، العام الدراسي 2007-2008، 456 صفحة.

18- هويل. ج، بول، أستاذ الرياضيات في جامعة كاليفورنيا، كتاب مترجم، المبادئ الأولية في الإحصاء 1998.

المراجع الأجنبية:

1- Anderson, R. L. Missing – Polt techniques, Biom. Bull. 2:41-47, 1946.
2- Bancroft, T. A. & Anderson, R. L. Statistical Theory in Research, McGraw-Hill Book Co., Inc. New York, 1952.
3- Cochran, W. G. & Cox, G. M. Experimental Designs, and Ed., John Wiley & Sons. Inc., New York, 1957.
4- Eisenhart, C. The assumptions underlying the analysis of variance, Biometrics 3:1, 1947.
5- Elandt. R. 1964, Statysyka Matematycszn W Zastosowniu do doswiadczalnictwa rolnicgo, Warsrawa, 595P.
6- Ed., Oliver & Boyd, Statistical Methods for Research Workers. 11th. London, 1950.
7- Federer, W. T. Experimental Design. McMillan Co., New York, 1955.
8- Fisher, R. A. On the mathematical foundation of theoretical statistics. Philosiphical Transations of the Royal Soc. Of London A 222:309-368, 1921.
9- Oliver & Boyd, Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, London, 1953.
10- Yates, F. The Design of Experiments. Hanfer Publishing Co. New York, 1947.

فهرس المحتويات

ملحق الجداول الإحصائية

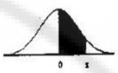


TABLE 1 **Normal Curve Areas**

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.10	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.20	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.30	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.40	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.50	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.60	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.70	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.80	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.90	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.00	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.10	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.20	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.30	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.40	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.50	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.60	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.70	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.80	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.90	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.00	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.10	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.20	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.30	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.40	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.50	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.60	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.70	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.80	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.90	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.00	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

z	Area
3.50	.49976737
4.00	.49996833
4.50	.49999660
5.00	.49999971

Source: Computed by P. J. Hildebrand.

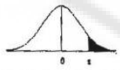


TABLE 2 Upper-tail Areas for the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.10	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.20	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.30	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.40	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.50	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.60	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.70	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.80	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.90	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.00	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.10	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.20	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.30	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.40	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.50	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.60	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.70	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.80	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.90	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.00	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.10	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.20	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.30	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.40	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.50	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.60	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.70	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.80	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.90	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.00	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010

z	Area
3.500	.00023263
4.000	.00003167
4.500	.00000340
5.000	.00000029

Source: Computed by J. W. Stegeman using SAS.

TABLE 3 Critical Values of T_L and T_U for the Wilcoxon Rank Sum Test: Independent Samples
(test statistic is rank sum associated with smaller sample (if equal sample sizes, either rank sum can be used))

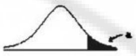
a. α = .025 one-tailed; α = .05 two-tailed

n_2 \ n_1	3		4		5		6		7		8		9		10	
	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U
3	5	16	6	18	6	21	7	23	7	26	8	28	8	31	9	33
4	6	18	11	25	12	28	12	32	13	35	14	38	15	41	16	44
5	6	21	12	28	18	37	19	41	20	45	21	49	22	53	24	56
6	7	23	12	32	19	41	26	52	28	56	29	61	31	65	32	70
7	7	26	13	35	20	45	28	56	37	68	39	73	41	78	43	83
8	8	28	14	38	21	49	29	61	39	73	49	87	51	93	54	98
9	8	31	15	41	22	53	31	65	41	78	51	93	63	108	66	114
10	9	33	16	44	24	56	32	70	43	83	54	98	66	114	79	131

b. α = .05 one-tailed; α = .10 two-tailed

n_2 \ n_1	3		4		5		6		7		8		9		10	
	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U
3	6	15	7	17	7	20	8	22	9	24	9	27	10	29	11	31
4	7	17	12	24	13	27	14	30	15	33	16	36	17	39	18	42
5	7	20	13	27	19	36	20	40	22	43	24	46	25	50	26	54
6	8	22	14	30	20	40	28	50	30	54	32	58	33	63	35	67
7	9	24	15	33	22	43	30	54	39	66	41	71	43	76	46	80
8	9	27	16	36	24	46	32	58	41	71	52	84	54	90	57	95
9	10	29	17	39	25	50	33	63	43	76	54	90	66	105	69	111
10	11	31	18	42	26	54	35	67	46	80	57	95	69	111	83	127

Source: From F. Wilcoxon and R. A. Wilcox, *Some Rapid Approximate Statistical Procedures* (Pearl River, N.Y. Lederle Laboratories, 1964), pp. 20–23. Reproduced with the permission of American Cyanamid Company.



t_a

TABLE 4 **Percentage Points of the *t* Distribution**

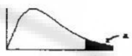
df	a = .1	a = .05	a = .025	a = .01	a = .005	a = .001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596	3.125
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Source: Computed by P. J. Hildebrand.

χ^2_a

TABLE 5 Percentage Points of the Chi-square Distribution

df	a = .999	a = .995	a = .99	a = .975	a = .95	a = .9
1	.000002	.000039	.000157	.000982	.003932	.01579
2	.002001	.01003	.02010	.05064	.1026	.2107
3	.02430	.07172	.1148	.2158	.3518	.5844
4	.09080	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064
5	.2102	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610
6	.3811	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204
7	.5985	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833
8	.8571	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44
21	6.447	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24
22	6.983	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04
23	7.529	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85
24	8.085	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66
25	8.649	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47
26	9.222	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29
27	9.803	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11
28	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94
29	10.99	13.12	14.26	16.06	17.71	19.77
30	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60
40	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05
50	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69
60	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46
70	39.04	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33
80	46.52	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28
90	54.16	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29
100	61.92	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36
120	77.76	83.85	86.92	91.57	95.70	100.62
240	177.95	187.32	191.99	198.98	205.14	212.39



χ^2_a

TABLE 5 *(continued)*

a = .1	a = .05	a = .025	a = .01	a = .005	a = .001	df
2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83	1
4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82	2
6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27	3
7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47	4
9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	5
10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	6
12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	7
13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	8
14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	9
15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	10
17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.27	11
18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	12
19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	13
21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	14
22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	15
23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	16
24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	17
25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	18
27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	19
28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	20
29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	21
30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	22
32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	23
33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	24
34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	25
35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	26
36.74	40.11	43.19	46.96	49.65	55.48	27
37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	28
39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	29
40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	30
51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	40
63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	50
74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	60
85.53	90.53	95.02	100.43	104.21	112.32	70
96.58	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84	80
107.57	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21	90
118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	100
140.23	146.57	152.21	158.95	163.65	173.62	120
268.47	277.14	284.80	293.89	300.18	313.44	240

Source: Computed by P. J. Hildebrand.

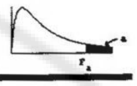


TABLE 6 **Percentage Points of the *F* Distribution (df_2 Between 1 and 6)**

		df_1									
df_2	*a*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.25	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32
	.10	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
	.05	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
	.025	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6
	.01	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056
2	.25	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38
	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
	.05	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
	.01	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
	.005	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4
	.001	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4
3	.25	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44
	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
	.05	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
	.01	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23
	.005	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69
	.001	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2
4	.25	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
	.01	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
	.005	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97
	.001	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05
5	.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
	.01	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
	.005	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62
	.001	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24	26.92
6	.25	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77
	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
	.01	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
	.005	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25
	.001	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41

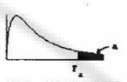


TABLE 6 *(continued)*

df₁											
12	15	20	24	30	40	60	120	240	inf.	a	df_2
9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.83	9.85	.25	1
60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.19	63.33	.10	
243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	253.8	254.3	.05	
976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1016	1018	.025	
6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6353	6366	.01	
3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47	3.48	.25	2
9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49	9.49	.10	
19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	.05	
39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.49	39.50	.025	
99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50	99.50	.01	
199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	.005	
999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	.001	
2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.25	3
5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.14	5.13	.10	
8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.54	8.53	.05	
14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.92	13.90	.025	
27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.17	26.13	.01	
43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.91	41.83	.005	
128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0	123.7	123.5	.001	
2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.25	4
3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.77	3.76	.10	
5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.64	5.63	.05	
8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.28	8.26	.025	
14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.51	13.46	.01	
20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.40	19.32	.005	
47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.23	44.05	.001	
1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87	.25	5
3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11	3.10	.10	
4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.38	4.36	.05	
6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.04	6.02	.025	
9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.07	9.02	.01	
13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.21	12.14	.005	
26.42	25.91	25.39	25.13	24.87	24.60	24.33	24.06	23.92	23.79	.001	
1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	.25	6
2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.73	2.72	.10	
4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.69	3.67	.05	
5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.88	4.85	.025	
7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.92	6.88	.01	
10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.94	8.88	.005	
17.99	17.56	17.12	16.90	16.67	16.44	16.21	15.98	15.86	15.75	.001	

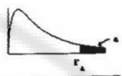


TABLE 6 **Percentage Points of the *F* Distribution (df_2 Between 7 and 12)** ***(continued)***

		df_1									
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	.25	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69
	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
	.01	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
	.005	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38
	.001	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08
8	.25	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63
	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
	.01	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
	.005	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21
	.001	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77	11.54
9	.25	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59
	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
	.01	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
	.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42
	.001	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89
10	.25	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55
	.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
	.01	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
	.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85
	.001	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96	8.75
11	.25	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52
	.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
	.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
	.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
	.005	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42
	.001	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92
12	.25	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50
	.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
	.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
	.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
	.005	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09
	.001	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29

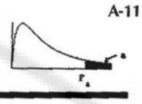


TABLE 6 *(continued)*

				df$_1$							
12	15	20	24	30	40	60	120	240	inf.	a	df$_2$
1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	.25	7
2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.48	2.47	.10	
3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.25	3.23	.05	
4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.17	4.14	.025	
6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.69	5.65	.01	
8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.42	7.31	7.19	7.13	7.08	.005	
13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.80	11.70	.001	
1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	.25	8
2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.30	2.29	.10	
3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.95	2.93	.05	
4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.70	3.67	.025	
5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.90	4.86	.01	
7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	6.01	5.95	.005	
11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53	9.43	9.33	.001	
1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.64	1.53	1.53	1.53	.25	9
2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.17	2.16	.10	
3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.73	2.71	.05	
3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.36	3.33	.025	
5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.35	4.31	.01	
6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.24	5.19	.005	
9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.91	7.81	.001	
1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	.25	10
2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.07	2.06	.10	
2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.56	2.54	.05	
3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.11	3.08	.025	
4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.95	3.91	.01	
5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.69	4.64	.005	
8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.85	6.76	.001	
1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45	1.45	.25	11
2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.99	1.97	.10	
2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.43	2.40	.05	
3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.91	2.88	.025	
4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.65	3.60	.01	
5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.45	4.34	4.28	4.23	.005	
7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.18	6.09	6.00	.001	
1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	.25	12
2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.92	1.90	.10	
2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.32	2.30	.05	
3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.76	2.72	.025	
4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.41	3.36	.01	
4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.96	3.90	.005	
7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.51	5.42	.001	

TABLE 6 Percentage Points of the *F* Distribution (df_2 Between 13 and 18) *(continued)*

		df_1									
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	.25	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	[illegible]
	.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	[illegible]
	.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	[illegible]
	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	[illegible]
	.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	[illegible]
	.005	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	[illegible]
	.001	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	[illegible]
14	.25	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	[illegible]
	.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	[illegible]
	.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	[illegible]
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	[illegible]
	.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	[illegible]
	.005	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	[illegible]
	.001	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58	[illegible]
15	.25	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	[illegible]
	.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	[illegible]
	.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	[illegible]
	.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	[illegible]
	.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	[illegible]
	.005	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	[illegible]
	.001	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	[illegible]
16	.25	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	[illegible]
	.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	[illegible]
	.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	[illegible]
	.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	[illegible]
	.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	[illegible]
	.005	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	[illegible]
	.001	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98	[illegible]
17	.25	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	[illegible]
	.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	[illegible]
	.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	[illegible]
	.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	[illegible]
	.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
	.005	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14
	.001	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	[illegible]
18	.25	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	[illegible]
	.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	[illegible]
	.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	[illegible]
	.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	[illegible]
	.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
	.005	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03
	.001	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39

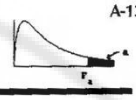


TABLE 6 *(continued)*

				df_1							
12	15	20	24	30	40	60	120	240	inf.	a	df_2
1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40	1.40	.25	13
2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.86	1.85	.10	
2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.23	2.21	.05	
3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.63	2.60	.025	
3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.21	3.17	.01	
4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.70	3.65	.005	
6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	5.05	4.97	.001	
1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	.25	14
2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.81	1.80	.10	
2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.15	2.13	.05	
3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.52	2.49	.025	
3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.05	3.00	.01	
4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.49	3.44	.005	
6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.69	4.60	.001	
1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.36	.25	15
2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.77	1.76	.10	
2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.09	2.07	.05	
2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.43	2.40	.025	
3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.91	2.87	.01	
4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.32	3.26	.005	
5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.39	4.31	.001	
1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	.25	16
1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.73	1.72	.10	
2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.03	2.01	.05	
2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.35	2.32	.025	
3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.80	2.75	.01	
4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.17	3.11	.005	
5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.14	4.06	.001	
1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	.25	17
1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.70	1.69	.10	
2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.99	1.96	.05	
2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.28	2.25	.025	
3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.70	2.65	.01	
3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	3.04	2.98	.005	
5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02	3.93	3.85	.001	
1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.32	.25	18
1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.66	.10	
2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.94	1.92	.05	
2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.22	2.19	.025	
3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.61	2.57	.01	
3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.93	2.87	.005	
5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.75	3.67	.001	

TABLE 6 **Percentage Points of the *F* Distribution (df_2 Between 19 and 24)** *(continued)*

		df_1									
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	.25	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41
	.10	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
	.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
	.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
	.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
	.005	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93
	.001	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22
20	.25	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40
	.10	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
	.05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
	.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
	.005	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85
	.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08
21	.25	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39
	.10	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
	.05	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
	.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
	.01	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
	.005	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77
	.001	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95
22	.25	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39
	.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
	.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
	.005	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70
	.001	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83
23	.25	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38
	.10	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
	.05	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
	.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
	.01	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
	.005	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64
	.001	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73
24	.25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38
	.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
	.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
	.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
	.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
	.005	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59
	.001	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64

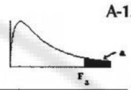


TABLE 6 *(continued)*

df₁											
12	15	20	24	30	40	60	120	240	inf.	a	df_2
1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	.25	19
1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.63	.10	
2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.90	1.88	.05	
2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.17	2.13	.025	
3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.54	2.49	.01	
3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.83	2.78	.005	
4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.60	3.51	.001	
1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	.25	20
1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.63	1.61	.10	
2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.87	1.84	.05	
2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.12	2.09	.025	
3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.47	2.42	.01	
3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.75	2.69	.005	
4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.46	3.38	.001	
1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	.25	21
1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.60	1.59	.10	
2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.81	.05	
2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.08	2.04	.025	
3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.41	2.36	.01	
3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.67	2.61	.005	
4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.34	3.26	.001	
1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.28	.25	22
1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.59	1.57	.10	
2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.81	1.78	.05	
2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.04	2.00	.025	
3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.35	2.31	.01	
3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.60	2.55	.005	
4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.23	3.15	.001	
1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.28	1.27	.25	23
1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.57	1.55	.10	
2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	.05	
2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	2.01	1.97	.025	
3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.31	2.26	.01	
3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.54	2.48	.005	
4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.14	3.05	.001	
1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	.25	24
1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.53	.10	
2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.73	.05	
2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.97	1.94	.025	
3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.26	2.21	.01	
3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.49	2.43	.005	
4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	3.05	2.97	.001	

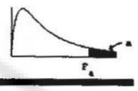


TABLE 6 **Percentage Points of the F Distribution (df_2 Between 25 and 30) *(continued)***

		df_1									
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	.25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37
	.10	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
	.05	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
	.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
	.01	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
	.005	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54
	.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56
26	.25	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37
	.10	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
	.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
	.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
	.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
	.005	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49
	.001	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48
27	.25	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
	.10	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
	.05	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
	.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
	.01	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
	.005	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45
	.001	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41
28	.25	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
	.10	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
	.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
	.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
	.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
	.005	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41
	.001	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35
29	.25	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35
	.10	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
	.05	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
	.025	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
	.01	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
	.005	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38
	.001	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29
30	.25	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35
	.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
	.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
	.005	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34
	.001	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24

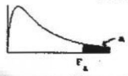


TABLE 6 *(continued)*

df₁ → 12	15	20	24	30	40	60	120	240	inf.	a	df_2
1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25	.25	25
1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.54	1.52	.10	
2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	.05	
2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.94	1.91	.025	
2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.22	2.17	.01	
3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.44	2.38	.005	
4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06	2.98	2.89	.001	
1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.26	1.25	.25	26
1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.52	1.50	.10	
2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.72	1.69	.05	
2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.92	1.88	.025	
2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.18	2.13	.01	
3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.39	2.33	.005	
4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.90	2.82	.001	
1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27	1.26	1.25	1.24	.25	27
1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.51	1.49	.10	
2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.70	1.67	.05	
2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.89	1.85	.025	
2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.15	2.10	.01	
3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.35	2.29	.005	
4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.84	2.75	.001	
1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24	.25	28
1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.50	1.48	.10	
2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.68	1.65	.05	
2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.87	1.83	.025	
2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.12	2.06	.01	
3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.31	2.25	.005	
4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.78	2.69	.001	
1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.24	1.23	.25	29
1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.49	1.47	.10	
2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.67	1.64	.05	
2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.85	1.81	.025	
2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.09	2.03	.01	
3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.27	2.21	.005	
4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2.81	2.73	2.64	.001	
1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23	1.23	.25	30
1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.48	1.46	.10	
2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.65	1.62	.05	
2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.83	1.79	.025	
2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.06	2.01	.01	
3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.24	2.18	.005	
4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76	2.68	2.59	.001	

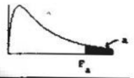
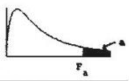


TABLE 6 **Percentage Points of the *F* Distribution (df_2 at Least 40)** ***(continued)***

		df_1									
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	.25	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
	.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
	.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
	.005	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12
	.001	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87
60	.25	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30
	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
	.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
	.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
	.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
	.005	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90
	.001	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69	3.54
90	.25	1.34	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29
	.10	2.76	2.36	2.15	2.01	1.91	1.84	1.78	1.74	1.70	1.67
	.05	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94
	.025	5.20	3.84	3.26	2.93	2.71	2.55	2.43	2.34	2.26	2.19
	.01	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52
	.005	8.28	5.62	4.57	3.99	3.62	3.35	3.15	3.00	2.87	2.77
	.001	11.57	7.47	5.91	5.06	4.53	4.15	3.87	3.65	3.48	3.34
120	.25	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28
	.10	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65
	.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91
	.025	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
	.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47
	.005	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71
	.001	11.38	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24
240	.25	1.33	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32	1.30	1.29	1.27	1.27
	.10	2.73	2.32	2.10	1.97	1.87	1.80	1.74	1.70	1.65	1.63
	.05	3.88	3.03	2.64	2.41	2.25	2.14	2.04	1.98	1.92	1.87
	.025	5.09	3.75	3.17	2.84	2.62	2.46	2.34	2.25	2.17	2.10
	.01	6.74	4.69	3.86	3.40	3.09	2.88	2.71	2.59	2.48	2.40
	.005	8.03	5.42	4.38	3.82	3.45	3.19	2.99	2.84	2.71	2.61
	.001	11.10	7.11	5.60	4.78	4.25	3.89	3.62	3.41	3.24	3.09
inf.	.25	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
	.10	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60
	.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83
	.025	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05
	.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32
	.005	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52
	.001	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96

TABLE 6 *(continued)*



					df_1						
12	15	20	24	30	40	60	120	240	inf.	a	df_2
1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.20	1.19	.25	40
1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.40	1.38	.10	
2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.54	1.51	.05	
2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.68	1.64	.025	
2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.86	1.80	.01	
2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	2.00	1.93	.005	
3.64	3.40	3.14	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41	2.32	2.23	.001	
1.29	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19	1.17	1.16	1.15	.25	60
1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.32	1.29	.10	
1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.43	1.39	.05	
2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.53	1.48	.025	
2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.67	1.60	.01	
2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.76	1.69	.005	
3.32	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08	1.99	1.89	.001	
1.27	1.25	1.23	1.22	1.20	1.19	1.17	1.15	1.13	1.12	.25	90
1.62	1.56	1.50	1.47	1.43	1.39	1.35	1.29	1.26	1.23	.10	
1.86	1.78	1.69	1.64	1.59	1.53	1.46	1.39	1.35	1.30	.05	
2.09	1.98	1.86	1.80	1.73	1.66	1.58	1.48	1.43	1.37	.025	
2.39	2.24	2.09	2.00	1.92	1.82	1.72	1.60	1.53	1.46	.01	
2.61	2.44	2.25	2.15	2.05	1.94	1.82	1.68	1.61	1.52	.005	
3.11	2.88	2.63	2.50	2.36	2.21	2.05	1.87	1.77	1.66	.001	
1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.16	1.13	1.12	1.10	.25	120
1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.23	1.19	.10	
1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.31	1.25	.05	
2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.38	1.31	.025	
2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.46	1.38	.01	
2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.52	1.43	.005	
3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.77	1.66	1.54	.001	
1.25	1.23	1.21	1.19	1.18	1.16	1.14	1.11	1.09	1.07	.25	240
1.57	1.52	1.45	1.42	1.38	1.33	1.28	1.22	1.18	1.13	.10	
1.79	1.71	1.61	1.56	1.51	1.44	1.37	1.29	1.24	1.17	.05	
2.00	1.89	1.77	1.70	1.63	1.55	1.46	1.35	1.29	1.21	.025	
2.26	2.11	1.96	1.87	1.78	1.68	1.57	1.43	1.35	1.25	.01	
2.45	2.28	2.09	1.99	1.89	1.77	1.64	1.49	1.40	1.28	.005	
2.88	2.65	2.40	2.26	2.12	1.97	1.80	1.61	1.49	1.35	.001	
1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12	1.08	1.06	1.00	.25	inf.
1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.12	1.00	.10	
1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.15	1.00	.05	
1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.19	1.00	.025	
2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.22	1.00	.01	
2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.25	1.00	.005	
2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45	1.31	1.00	.001	

Source: Computed by P. J. Hildebrand.

TABLE 7 **Poisson Probabilities (μ Between .1 and 4.0)**

y	μ .1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005

y	μ 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009

y	μ 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002

y	μ 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1733	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042

TABLE 7 Poisson Probabilities (μ Between 3.1 and 10.0) *(continued)*

y	μ 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002

y	μ 4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0281	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

y	μ 5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0	.0041	.0025	.0015	.0009	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000
1	.0225	.0149	.0098	.0064	.0041	.0027	.0017	.0011	.0007	.0005
2	.0618	.0446	.0318	.0223	.0156	.0107	.0074	.0050	.0034	.0023
3	.1133	.0892	.0688	.0521	.0389	.0286	.0208	.0150	.0107	.0076
4	.1558	.1339	.1118	.0912	.0729	.0573	.0443	.0337	.0254	.0189
5	.1714	.1606	.1454	.1277	.1094	.0916	.0752	.0607	.0483	.0378
6	.1571	.1606	.1575	.1490	.1367	.1221	.1066	.0911	.0764	.0631
7	.1234	.1377	.1462	.1490	.1465	.1396	.1294	.1171	.1037	.0901
8	.0849	.1033	.1188	.1304	.1373	.1396	.1375	.1318	.1232	.1126
9	.0519	.0688	.0858	.1014	.1144	.1241	.1299	.1318	.1300	.1251
10	.0285	.0413	.0558	.0710	.0858	.0993	.1104	.1186	.1235	.1251
11	.0143	.0225	.0330	.0452	.0585	.0722	.0853	.0970	.1067	.1137
12	.0065	.0113	.0179	.0263	.0366	.0481	.0604	.0728	.0844	.0948
13	.0028	.0052	.0089	.0142	.0211	.0296	.0395	.0504	.0617	.0729
14	.0011	.0022	.0041	.0071	.0113	.0169	.0240	.0324	.0419	.0521
15	.0004	.0009	.0018	.0033	.0057	.0090	.0136	.0194	.0265	.0347

TABLE 7 **Poisson Probabilities (μ Between 5.5 and 20.0) *(continued)***

					μ					
y	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
16	.0001	.0003	.0007	.0014	.0026	.0045	.0072	.0109	.0157	.0217
17	.0000	.0001	.0003	.0006	.0012	.0021	.0036	.0058	.0088	.0128
18	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0009	.0017	.0029	.0046	.0071
19	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0008	.0014	.0023	.0037
20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0006	.0011	.0019
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0005	.0009
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0004
23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002

					μ					
y	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0019	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0255	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020

Source: Computed by D. K. Hildebrand.

TABLE 8 **Random Numbers**

Line/ Col.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207	20969	99570	91291	90700
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	27982	53402	93965	34095	52666	19174	39615	99505
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081	30680	19655	63348	58629
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004	00849	74917	97758	16379
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672	14110	06927	01263	54613
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498	18602	70659	90655	15053	21916	81825	44394	42880
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016	71194	18738	44013	48840	63213	21069	10634	12952
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922	94595	56869	69014	60045	18425	84903	42508	32307
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103	57740	84378	25331	12566	58678	44947	05585	56941
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533	38867	62300	08158	17983	16439	11458	18593	64952
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595	01547	85590	91610	78188
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847	12234	90511	33703	90322
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488	36320	17617	30015	08272	84115	27156	30613	74952
14	10365	61129	87529	85689	48237	52267	67689	93394	01511	26358	85104	20285	29975	89868
15	07119	97336	71048	08178	77233	13916	47564	81056	97735	85977	29372	74461	28551	90707
16	51085	12765	51821	51259	77452	16308	60756	92144	49442	53900	70960	63990	75601	40719
17	02368	21382	52404	60268	89368	19885	55322	44819	01188	65255	64835	44919	05944	55157
18	01011	54092	33362	94904	31273	04146	18594	29852	71585	85030	51132	01915	92747	64951
19	52162	53916	46369	58586	23216	14513	83149	98736	23495	64350	94738	17752	35156	35749
20	07056	97628	33787	09998	42698	06691	76988	13602	51851	46104	88916	19509	25625	58104
21	48663	91245	85828	14346	09172	30168	90229	04734	59193	22178	30421	61666	99904	32812
22	54164	58492	22421	74103	47070	25306	76468	26384	58151	06646	21524	15227	96909	44592
23	32639	32363	05597	24200	13363	38005	94342	28728	35806	06912	17012	64161	18296	22851
24	29334	27001	87637	87308	58731	00256	45834	15398	46557	41135	10367	07684	36188	18510
25	02488	33062	28834	07351	19731	92420	60952	61280	50001	67658	32586	86679	50720	94953

Abridged from William H. Beyer, ed., *Handbook of Tables for Probability and Statistics*, 2nd ed. © The Chemical Rubber Co., 1968. Used by permission of CRC Press, Inc.

اللجنة العلمية:

أ. د.

أ. د.

أ. د.

المدقق اللغوي:

د.