الجمهوريّةُ العربيّةُ السّوريّة
جامعـةُ دمشـق- كليّـةُ الزّراعة

تصميمُ و تحليلُ التّجارب

(السنة الثالثة – الفصل الثاني)

د.خالد السلّطان

2022/2021

الفصلُ الأوّل

المتغيّراتُ العشوائيّةُ والتّوزيعاتُ الاحتماليّةُ

(Random Variables and Probability Distributions)

الفصلُ الأوّل

المتغيّراتُ العشوائيّةُ والتّوزيعاتُ الاحتماليّةُ

1-1- مقدّمة:

يتنـاولُ هـذا الفصـلُ بطريقـةٍ مُبسّـطةٍ بعضَ المفـاهيمِ الأساسيّةِ التّـي تسـاعدُ الطّـالبَ علـى فهـمِ المواضيعِ المتعلّقـةِ بالتّوزيعـاتِ والاختبـاراتِ الإحصـائيّةِ المختلفـةِ من حيثُ خصـائصـها وطرائـقِ تطبيقهـا والتّي سوفَ يَتِمُّ دراستها والاستفادةِ منها في أغلبِ تصاميمِ التّجاربِ المختلفةِ.

2-1- التّجربةُ العشوائيّةُ (Random Experiment):

هيَ تلكَ التّجربةُ التّي تكونُ جميعُ نتائجها معلومةً مسبقاً ولكن لا يمكنُ التّنبّؤُ بحدوثِ أيٍّ من هذهِ النّتائجِ بصفةٍ مؤكّدة.

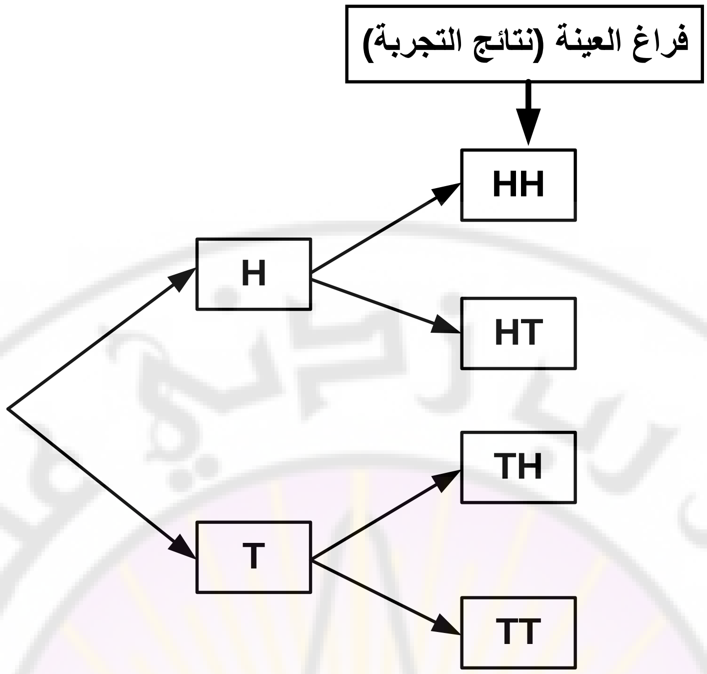
على سبيلِ المثالِ: رميُ حجرِ نردٍ، رميُ قطعةِ نقودٍ، المشاركةُ في سباقِ الخيلِ لحصانٍ معيّنٍ يُعدُّ تجربةً عشوائيّةً فهوَ إمّا أن يفوزَ أو يخسرَ أو يتعادلَ.

فراغُ العيّنةِ (Sample Space): هيَ جميعُ النّتائجِ الممكنةِ للتّجربةِ العشوائيّةِ ويُرمَزُ لهُ بالرّمزِ (Ω)، ويُطلَقُ على $n(\Omega)$ لعددِ عناصرِ فراغِ العيّنة.

تجربةُ إلقاءِ قطعةِ النّقودِ مرّةً واحدةً يكونُ فراغُ العيّنةِ $\Omega=\{H, T\}$، $n(\Omega)=2$

تجربةُ إلقاءِ قطعةِ النّقودِ مرّتينِ يكونُ فراغُ العيّنةِ $n(\Omega)=4$ ، $\Omega=\{HT, HT, HH, TT\}$

ويمكنُ من خلالِ استخدامِ الرّسمِ الشجريِّ معرفةُ فراغِ العيّنةِ (في تجربةِ رمي عملةٍ معدنيّةٍ مرّتينِ) كَمَا يبيّنهُ الشّكل (1-1).



شكل (1−1): الرّسمُ الشّجريُّ لتجربةِ إلقاءِ قطعةِ النّقودِ مرّتين.

تجربةُ إلقاءِ مكعّبِ النّردِ يكونُ فراغُ العيّنةِ $n(\Omega)=6$ $\Omega =\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

يوجدُ نوعينِ لفراغِ العيّنةِ هُما:

- **فراغُ عيّنةٍ منفصل (Discrete Sample Space)**: يمثّلُ مجموعةً منَ القيمِ القابلةِ للعدِّ مثل $\Omega=\{ H, T\}$ أو $\Omega=\{ 1,2,3,4,5,6\}$
- **فراغُ عيّنةٍ متّصل (Continuous Sample Space)**: يمثّلُ مجموعةً منَ القيمِ غيرِ القابلةِ للعدّ؛ أي يمثّلُ مجالاً منَ القيمِ مثلَ أطوالِ الطّلابِ المحصورِ بينَ (150−200) سم.

1−3− المتغيّراتُ العشوائيّةُ (Random Variables):

المتغيّرُ (Variable): المتغيّرُ بشكلٍ عامٍّ يعبّرُ عن شيءٍ يتغيّرُ؛ فهوَ أيُّ ظاهرةٍ تأخذُ قِيَماً مختلفةً بينَ مفرداتها مثلَ الجنسِ، والسّنِ، والطّولِ، والتّحصيلِ العلميِّ.

في كثيرٍ منَ الأحيانِ نرغبُ في التّعاملِ معَ قيمٍ عدديّةٍ مرتبطـةٍ بنقاطِ العيّنةِ للتّجربةِ العشوائيّةِ بدلاً منَ التّعاملِ معَ نقاطِ العيّنـةِ نفسها؛ إذ إنَّ نقاطَ العيّنـةِ أوِ النّتائجَ الممكنـةِ للتّجربـةِ العشوائيّةِ تكونُ في بعضِ الأحيانِ عبارةً عن صفاتٍ أو مسميّاتٍ (صورة / كتابة) يصعبُ التّعاملُ معها رياضيّاً، وفي هذهِ الحالةِ فإنّنا نقومُ بتحويلِ هذهِ القيمِ الوصفيّةِ إلى قيمٍ عدديّةٍ حقيقيّةٍ تُسمّى قيمُ المتغيّرِ العشوائيّ. إنّ الآلـةَ المستخدمةَ لتحويلِ عناصرِ فضاءِ العيّنةِ للتّجربةِ العشوائيّةِ إلى قيمٍ عدديّةٍ حقيقيّةٍ هيَ ما يُسمّى بالمتغيّرِ العشوائيّ.

إذاً، فالمتغيّراتُ العشوائيّةُ تُستخدمُ للتّعبيرِ عن نتائجِ التّجربةِ العشوائيّةِ وعنِ الحوادثِ بقيمٍ عدديّةٍ بدلاً من مسميّاتٍ أو صفات. فعلى سبيلِ المثالِ قد نكونُ مهتمّينَ فقط بعددِ الصّورِ عندَ رميِ قطعةِ النّقودِ مرّتينِ متتاليتين، إنَّ عددَ الصّورِ في هذهِ الحالةِ (2 ,1 ,0) عبارةٌ عن متغيّرٍ عشوائيٍّ تتغيّرُ قيمتهُ بتغيّرِ نتيجةِ التّجربةِ العشوائيّة.

كذلكَ نتيجةُ رمي حجرِ النّردِ؛ فنتيجةُ الرّميةِ تكونُ متغيّراً عشوائيّاً ونتائجها هيَ:{6 :5 :4 :3 :2 :1} لأنّها تتغيّرُ من محاولةٍ إلى أخرى (فهي ليست شيئاً ثابتاً)، وهذا التّغيّرُ يكونُ عشوائيّاً لأنّهُ يخضعُ في تغيّرِهِ لعواملِ العشوائيّةِ أو المصادفةِ البحتة؛ حيثُ لا يستطيعُ أحدٌ أن يحدّدَ نتيجةَ الرّميةِ مسبقاً.

كذلك دَخْلُ دولةٍ ما هوَ إلّا متغيّرٌ عشوائيّ؛ لأنّهُ يتغيّرُ من سنةٍ لأخرى طبقاً لعواملَ كثيرةٍ لا يمكنُ التّحكّمُ بها مثلَ الطّلبِ على الصّادراتِ، وقيمةِ العملةِ، وإمكانيّةِ وجودِ بدائلَ لصادراتها، وبالتّالي يمكنُ تعريفُ المتغيّرِ العشوائيّ.

المتغيّرُ العشوائيُّ (Random Variable): هوَ مقدارٌ متغيّرٌ يأخذُ قيماً (عدديّةً) مختلفةً تمثّلُ النّتائجَ العدديّةَ لظاهرةٍ معيّنةٍ أو لتجربةٍ عشوائيّة. ويجبُ أن يكونَ المتغيّرُ العشوائيُّ قابلاً للقياس، وهناكَ نوعانِ منَ المتغيّراتِ العشوائيّةِ وهيَ:

1) المتغيّراتُ العشوائيّةُ (المتقطّعةُ) المنفصلةُ (Discrete Random Variable)
2) المتغيّراتُ العشوائيّةُ المتّصلةُ (Continuous Random Variable)

1-4- المتغيّراتُ العشوائيّةُ المنفصلةُ (Discrete Random Variables):

يكونُ المتغيّرُ العشوائيُّ (X) متغيّراً عشوائيّاً منفصلاً إذا كانت مجموعةُ القيمِ التّي يأخذها مجموعةً منفصلةً (أو قابلةً للعدّ)، مثلَ عددِ أفرادِ الأسرة، وعددِ السّيارات، وكذلكَ في مثالِ (نتيجةِ حجرِ النّرد) نجدُ أنّ المتغيّرَ يأخذُ ستَّ قيمٍ فقط وهيَ: 6 , 5 , 4 , 3 , 2 ,1. وفي مثالِ قطعةِ النّقودِ نجدُ أنَّ المتغيّرَ يأخذُ ثلاثَ قيمٍ فقط هيَ 0 , 1 ,2. بمعنى أنّهُ يمكنُ حسابُ احتمالِ أن يأخذَ المتغيّرُ العشوائيُّ المتقطّعُ أيَّ قيمة.

التّوزيعُ الاحتماليُّ (Probability Distribution)

التّوزيعُ الاحتماليُّ: هوَ مجموعةُ كلِّ القيمِ الممكنةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ واحتمالاتها المناظرةُ لها.

أي هوَ الشّكلُ الذّي تأخذهُ مجموعةُ البياناتِ التّي يمثّلها المتغيّرُ العشوائيُّ واحتمالاتُ أن يأخذَ المتغيّرُ العشوائيُّ القيمَ المختلفةَ أو يقعَ في مجالاتٍ مختلفةٍ لهذهِ القيم.

ويرتبطُ التّوزيعُ الاحصائيُّ عادةً بنوعينِ منَ البياناتِ المتّصلةِ والمنفصلةِ؛ أي التّوزيعاتُ المنفصلةُ تناسبُ مقاييسَ البياناتِ الاسميّةِ والرّتبيّةِ، هناكَ بعضُ المقاييسِ المنفصلةِ الثّنائيةِ التي يوجدُ لها قيمتينِ فقط (نجاحٌ أو فشل)، وهذهِ لا تُسمّى توزيعاتٌ طبيعيُّة وإنّما تُسمّى توزيعاتٌ ثنائيّةٌ (توزيعُ ذو الحدَّين).

أمّا التّوزيعاتُ الإحصائيّةُ المتّصلةُ فهيَ ذاتُ أهميّةٍ كبيرةٍ في العلومِ الإحصائيّةِ وذلكَ لأنَّ أغلبَ الاختباراتِ الإحصائيّةِ تتعاملُ معَ هذا النّوعِ منَ البيانات.

قد يأخذُ التّوزيعُ الاحتماليُّ شكلَ جدولٍ أو دالّةٍ رياضيّةٍ أو معادلةٍ يبيّنُ كيفَ تتوزّعُ الاحتمالاتُ (والتي مجموعها الواحدُ الصّحيح) على قيمِ المتغيّرِ المختلفةِ؛ أي أنَّ التّوزيعَ الاحتماليَّ والذّي يُسمّى أيضاً دالّةَ الاحتمالِ (Probability Function) هوَ التّوزيعُ أو الدالّةُ التي تعطي احتمالاتِ أن يأخذَ المتغيّرُ العشوائيُّ القيمَ المختلفةَ له.

وهناكَ مجموعتانِ منَ التّوزيعاتِ الاحتماليّةِ:

- **الأولى: التّوزيعاتُ الاحتماليّةُ المنفصلةُ (Discrete Probability Distributions)**
- **الثّانية: التّوزيعاتُ الاحتماليّةُ المتّصلةُ (Continuous Probability Distributions)**

سوفَ يَتِمُّ دراسةُ كلِّ نوعٍ منَ المتغيّراتِ وفقاً للنّقاطِ التّاليةِ:

- مفهومُ المتغيّراتِ العشوائيّةِ المنفصلةِ.
- التّوزيعُ الاحتماليُّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ.
- شروطُ دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ.
- التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ.
- دالّةُ التّوزيعِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ (الدّالةُ التّراكميّة).
- الوسطُ الحسابيُّ والتّباينُ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ.

1-5- التّوزيعاتُ الاحتماليّةُ المنفصلةُ (Discrete Probability Distributions):

التّوزيعُ الاحتماليُّ المنفصلُ هوَ عبارةٌ عن دالّةٍ تبيّنُ احتمالاتِ حدوثِ القيمِ التي يمكنُ أن يأخذها المتغيّرُ العشوائيُّ المنفصل.

هذهِ الدّالةُ يُعبَّرُ عنها بجدول (جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل) يتكوّنُ من عمودين: الأوّلُ يبيّنُ القيمَ المختلفةَ للمتغيّر، والعمودُ الثّاني يبيّنُ احتمالاتِ أنَّ المتغيّرَ العشوائيَّ يأخذُ هذهِ القيم.

جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل:

إذا كانَ المتغيّرُ العشوائيُّ المنفصلُ (X) يأخذُ القيمَ، $X:\{x=x_1,x_2,x_3,\ldots x_n\}$، وكانَ $P(X=x_i)=f(x_i)$ هوَ احتمالُ أن يأخذَ المتغيّرُ العشوائيُّ القيمةَ (x_i)؛ فإنّه يمكنُ تكوينُ جدولِ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ (X)، وهوَ جدولٌ مكوّنٌ من عمودين، العمودُ الأوّلُ يضمُّ القيمَ المختلفةَ للمتغيّرِ $X:\{x=x_1,x_2,x_3,\ldots x_n\}$، والعمودُ الثّاني يضمُّ احتمالاتِ أن يأخذَ المتغيّرُ العشوائيُّ هذهِ القيمَ؛ أي القيمُ الاحتماليّةُ لهذا المتغيّرِ $P(X=x_i)=f(x_i)$ كَمَا هوَ موضّحٌ بالجدولِ (1−1).

Damascus University

جدول (1-1): جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل.

x_i	$P(X = x_i)=f(x_i)$
x_1	$f(x_i)$
x_2	$f(x_i)$
…	…..
x_n	$f(x_i)$
	$\sum f(x_i)=1$

يُسمّى هذا الجدولُ جدولَ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل (X)، وتُسمّى الدّالّةُ $f(x_i)$ بدالّةِ الاحتمالِ أو دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ (Probability Function) وهيَ الدّالةُ التي تعطي احتمالاتِ أن يأخذَ المتغيّرُ العشوائيُّ القيمَ المختلفةَ لهُ.

حيثُ يُرمزُ للمتغيّرِ العشوائيِّ بحرفٍ كبير، وللقيمِ التي يأخذها المتغيّر بحرفٍ صغير، كذلكَ يتمُّ التّعبيرُ عن احتمالِ أن يأخذَ المتغيّرُ العشوائيُّ قيمةً معيّنةً كَمَا يلي $P(X = x)$ وتُكتبُ أيضاً على الشّكلِ:

$P(X=x)=f(x)$، تُسمّى الدّالةُ $f(x)$ دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّة. مثلاً التّوزيعُ الاحتماليُّ لتجربةِ إلقاءِ حجرِ النّردِ يتمثّلُ بالجدولِ (1-2).

جدول (1-2): جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ لتجربةِ إلقاءِ حجرِ النّرد.

X	P(X = x)=f(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
	$\sum_{x=1}^{6} P(X=x)=1$

1-5-1- شروطُ دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ:

دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ يجبُ أن تحقّقَ شرطانِ اثنان:

1- جميعُ الاحتمالاتِ موجبةٌ (فأقلُّ قيمةٍ للاحتمالِ صفر وذلكَ عندما يكونُ الحدثُ مستحيلاً).

2− مجموعُ الاحتمالاتِ يساوي الواحدَ الصّحيح.

ويمكنُ صياغةُ الشّرطينِ السّابقين رياضيّاً كَمَا يلِي:

← $f(x) \geq 0$

← $\sum_x f(x) = 1$

مثال (1−1): في تجربةِ إلقاءِ حجرِ النّرد، إنَّ قيمةَ الوجهِ الذي يستقرُّ عليهِ المكعّبُ يتمثّلُ بمتغيرٍ عشوائيٍّ منفصلٍ (X) لأنّهُ يأخذُ قيماً معدودةً، حيثُ إنَّ القيمَ التي يمكنُ أن يأخذها المتغيّرُ (X) (1، 2، 3، 4، 5، 6) ولكلِّ قيمةٍ يأخذها احتمالُ تحققها وهوَ هُنا (1/6)، وتُكتبُ كَمَا يلِي:

$P(X = 1) = f(1) = 1/6,\ \ P(X = 2) = f(2) = 1/6$

ودالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّر (X) تحقّقُ الشّرطينِ السّابقين وهما:

← الشّرطُ الأوّلُ: كلُّ الاحتمالاتِ موجبةٌ $f(1) = f(2) = f(3) = \dots f(6) = 1/6 \geq 0$

← الشّرطُ الثّاني: مجموعُ الاحتمالاتِ يساوي (1) $\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6\ \ +\ \ + 1/6 = 6(1/6) = 1$

كَمَا هوَ موضّحٌ بالجدولِ (1−3).

جدول (1−3): جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ لتجربةِ إلقاءِ حجرِ النّرد.

نتائجُ التّجربة X	1	2	3	4	5	6
f(x)=P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

1−5−2− التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ:

المتغيّرُ العشوائيُّ المنفصلُ لا يتمثّلُ بوساطةِ منحنى ولكن من خلالِ أعمدةٍ متوازيةٍ على محورِ X.

مثال (1−2): ليكنِ المتغيّرُ العشوائيُّ المنفصلُ (X) يمثّلُ عددَ مرّاتِ الحصولِ على صورةٍ في تجربةِ إلقاءِ قطعةٍ نقديّةٍ مرّتين متتاليتين.

المطلوبُ:

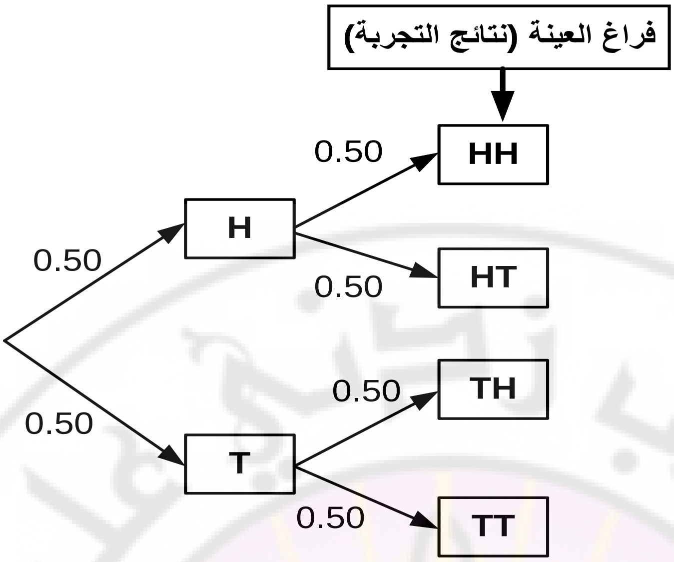
← مثّل فراغَ العيّنةِ وجدولَ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل (X).

← مثّل بيانيّاً دالّةَ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل (X).

الحلُّ:

في هذهِ الحالةِ إنَّ القيمَ الممكنةَ للمتغيّر (X) هيَ 0، 1، 2. وفضاءُ العيّنة S=(HH,HT,TH,TT)

كَمَا هوَ موضّحٌ بالشّكلِ (1−2). $P(2H) = \frac{1}{4}$ and $P(1H) = \frac{1}{2}$ $P(0H) = \frac{1}{4}$



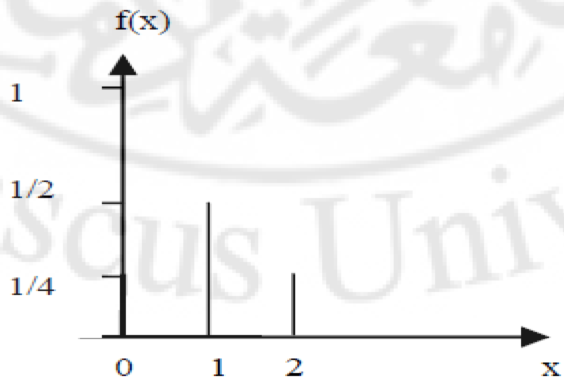
شكل (1−2): الرّسمُ الشّجريُّ وفراغُ العيّنةِ لتجربةِ إلقاءِ قطعةِ النّقودِ مرّتين.

وجدولُ التّوزيعِ الاحتماليّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ (X) يتمثّلُ بالجدولِ (1−4).

جدول (1−4): جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ لتجربةِ إلقاءِ قطعةٍ نقديةٍ مرّتين.

عددُ الصّورِ	X	الاحتمالُ P(X=x)=f(x)
TT	0	0.50×0.50=0.25
TH, HT	1	0.50×0.50+0.50×0.50=0.50
HH	2	0.50×0.50=0.25
		$\sum_{x=0}^{2} P(X=x)=1$

التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل (X) موضّحٌ بالشّكلِ (1−3).



شكل (1−3): التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصل

1-5-3- دالّةُ التّوزيعِ F(x) للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ (الدّالّةُ التّراكميّة):

تُعرّفُ دالّةُ التّوزيعِ أوِ "الدّالّةُ التّجميعيّةُ" كَمَا يلِي: $F(x) = P(X \le x)$

ويمكنُ استنتاجُ دالّةِ التّوزيعِ من دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ f(x) كَمَا يلِي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} f(u)$$

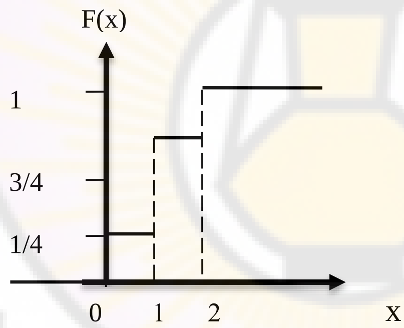
مثال (1-3): أوجدْ قيمَ دالّةِ التّوزيعِ F(x) أوِ الدّالّةِ التّراكميّةِ لمثالِ إلقاءِ قطعةِ النّقودِ مرّتينِ ومثّلها بيانيّاً.

الحلُّ: يعرضُ الجدولُ (1-5) القيمَ التي يأخذها المتغيّرُ العشوائيِّ (X) الذي يمثّلُ عددَ الصّورِ، و احتمالاتِ أنْ يأخذَ هذا المتغيّرُ تلكَ القيم، كذلكَ قيمَ الدّالّةِ التّراكميّة F(X).

جدول (1-5): جدولُ قيمِ الدّالّةِ التّراكميّةِ لتجربةِ إلقاءِ قطعةٍ نقديّةٍ مرّتين.

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
$F(x)=P(X\le x)$	1/4	3/4	1

أمّا التّمثيلُ البيانيُّ للدّالّةِ التّراكميّةِ لتجربةِ إلقاءِ قطعةٍ نقديّةٍ مرّتينِ موضّحةٌ بالشّكلِ (1-4).



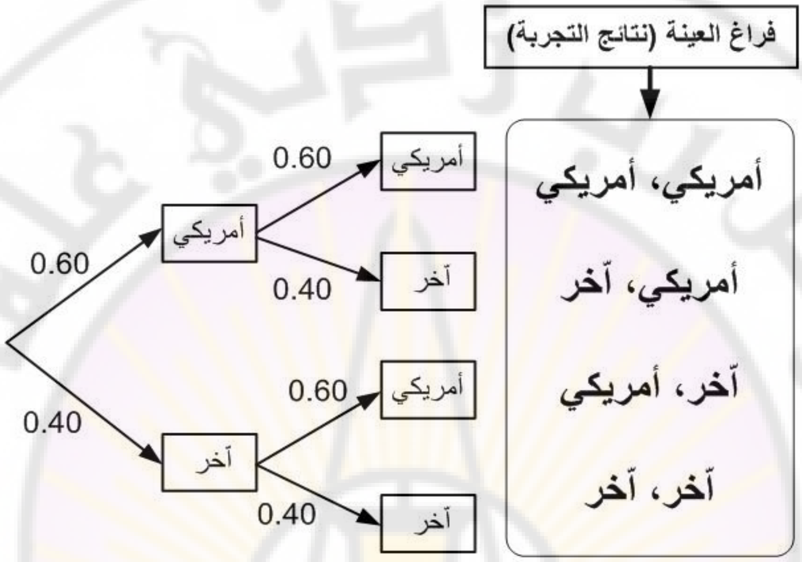
شكل (1-4): التمثيل البياني للدالة التراكمية لتجربة رمي عملة معدنية مرتين.

مثال (1-4): إذا كانتْ نسبةُ مبيعاتِ أحدِ المراكزِ التّجاريّةِ منَ التّفاحِ الأمريكيّ (0.60)، بينما نسبةُ مبيعاتِهِ منَ الأنواعِ الأخرى للتّفاحِ (0.40)، اشترى أحدُ العملاءِ عبوتين. إذا كانَ المتغيّرُ العشوائيُّ المنفصلُ (X) يمثّلُ عددَ العبواتِ المشتراةِ منَ التّفاحِ الأمريكيّ، فأوجدِ الآتي:

- كوّنْ فراغَ العيّنةِ.
- كوّنْ جدولَ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ (X).
- ارسمْ دالّةَ الاحتمالِ لهذا المتغيّرِ.

الحـلُّ:

لتكوينِ فراغِ العيّنة: التّجربةُ هنا هيَ شراءُ وحدتينِ من عبواتِ التّفاح، ومن ثمَّ فراغُ العيّنةِ يتكوّنُ من أربعِ نتائجَ كَمَا يوضّحهُ الشّكل (1−5).



شكل (1−5): فراغُ العيّنةِ لتجربةِ شراءِ وحدتينِ من عبواتِ التّفاح.

من أجلِ تكوينِ جدولِ التّوزيعِ الاحتماليِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ (X)، يتبيّنُ منَ المثال، أنَّ العميلَ اشترى عبوتين، وأنَّ المتغيّرَ العشوائيَّ المنفصلَ (X) يمثّلُ عددَ العبواتِ المشتراةِ منَ التّفاحِ الأمريكيّ؛ لِذا تكونُ القيمُ الممكنةُ للمتغيرِ العشوائيِّ ممثّلةً بالجدولِ (1−6):

جدول (1−6): جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ لتجربةِ شراءِ عبوتينِ تفاح.

$P(X=x_i)= f(x_i)$	عددُ عبواتِ الأمريكيِّ (x_i)
0.6×0.6 = 0.36	2
0.4×0.6= 0.24	1
0.4×0.6= 0.24	1
0.4×0.4=0.16	0
1	المجموعُ

x=0 : إذا كانتِ العبوتينِ منَ النّوعِ الآخر؛ أي إذا كانت نتيجةُ التّجربةِ (آخر، آخر).

x=1 : إذا كانت إحدى العبوتينِ منَ النّوعِ الأمريكيّ؛ أي كانتِ النّتيجةُ (آخر, أمريكيّ) أو(أمريكيّ, آخر)

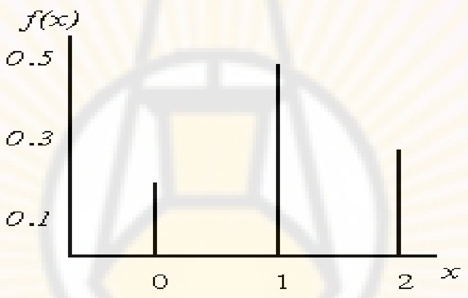
x=2 : إذا كانتِ العبوتينِ منَ النّوعِ الأمريكيّ؛ أي إذا كانت نتيجةُ التّجربةِ (أمريكيّ, أمريكيّ).

ومن ثمَّ يأخذُ المتغيّرُ القيمَ: $X:\{x=0,1,2\}$، وترتبطُ احتمالاتُ هذهِ القيمِ باحتمالاتِ نتائجِ التّجربةِ المناظرةِ لها كَمَا هوَ مبيّنٌ أعلاهُ، ومن ثمَّ يكونُ جدولُ التّوزيعِ الاحتماليِّ لعددِ العبواتِ المشتراةِ منَ التّفاحِ الأمريكيِّ موضّحٌ بالجدولِ (1−7).

جدول (1−7): جدولُ قيمِ دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ لتجربةِ شراءِ وحدتينِ من عبواتِ التّفاحِ.

عددُ عبواتِ الأمريكيّ (x_i)	$P(X=x_i)= f(x_i)$
0	0.4×0.4 = 0.16
1	0.4×0.6+0.6×0.4= 0.48
2	0.6×0.6=0.36
المجموعُ	1

التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ الاحتماليّة $f(x)$ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ (X) موضّحةٌ بالشّكلِ (1−6).



شكل (1−6): التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ لتجربةِ شراءِ وحدتينِ منَ عبواتِ التّفاحِ.

1−5−4− الوسطُ الحسابيُّ والتّباينُ للمتغيّرِ العشوائيِّ المنفصلِ:

يُرمَزُ للوسطِ الحسابيِّ للمتغيّرِ العشوائيِّ بالرّمزِ (μ)، ويُحسَبُ بتطبيقِ المعادلةِ التّاليةِ:

$$\mu = \sum x_i\, f(x_i)$$

وأمّا التّباينُ فيُرمَزُ لهُ بالرّمزِ (σ^2)، فيُحسَبُ بتطبيقِ المعادلةِ التّاليةِ:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2\, f(x_i) - \mu^2 = \sum (x_i - \mu)^2\, f(x_i)$$

مثال (1−5): في المثالِ السّابقِ رقم (1−4) احسبْ ما يلِي:

- الوسطُ الحسابيُّ لعددِ العبواتِ المشتراةِ منَ النّوعِ الأمريكيّ.
- احسبِ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ العبواتِ المشتراةِ منَ النّوعِ الأمريكيّ.

الحلُّ: الوسطُ الحسابيُّ لعددِ العبواتِ منَ النّوعِ الأمريكيّ:

لحسابِ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ يَتِمُّ باستخدامُ المعادلةِ الخاصّةِ بذلكَ وهذا يتطلّبُ تكوينَ جدولٍ يشملُ المجاميعَ التّالية: $\sum x_i\, f(x_i)$ و $\sum x_i^2\, f(x_i)$ كَمَا يبيّنهُ الجدول (1−8):

جدول (1−8): الوسطُ الحسابيُّ والانحرافُ المعياريُّ لتجربةِ شراءِ وحدتينِ من عبواتِ التّفاح.

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	**0.16**	**0**	**0**
1	**0.48**	**0.48**	**0.48**
2	**0.36**	**0.72**	**1.44**
المجموعُ	**1**	**1.20**	**1.92**

إذاً الوسطُ الحسابيُّ هوَ: $\mu = \sum x_i\, f(x_i) = 1.20$

والتّباينُ يُحسَّبُ كَمَا يلِي: $\sigma^2 = \sum x_i^2\, f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$

إذاً الانحرافُ المعياريُّ قيمتهُ هيَ: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$

أشهرُ وأهمُّ التّوزيعاتِ الاحتماليّةِ المتقطّعةِ هيَ:

1− **توزيعُ ذي الحدَّين (Binomial Distribution)**

2− **توزيعُ بواسون (Poisson Distribution)**

1−6− توزيعُ ذي الحدَّين (Binomial Distribution):

يُستخدَمُ هذا التّوزيعُ في الحالاتِ التي يكونُ للظّاهرةِ محلَّ الدّراسةِ نتيجتانِ متنافيتانِ فقط هُما:

الحالةُ الأولى: وهيَ المطلوبةُ والتي نبحثُ عنها وتُسمّى " نجاح Success ".

الحالةُ الثّانيةُ: وهيَ غيرُ مطلوبةٍ و تُسمّى" فشل Failure" حيثُ أنَّ كلَّ المحاولاتِ مستقلّةٌ، واحتمالُ "النجاح" و" الفشل" ثابتٌ في كلِّ محاولةٍ، ومن أمثلةِ الحالاتِ التي تخضعُ لتوزيعِ ذي الحدَّين هيَ:

- عندَ إعطاءِ مريضٍ نوعاً معيّناً منَ الأدويةِ، لها نتيجتان: (استجابةٌ للدّواء، أو عدم استجابة)
- عندَ فحصِ عبوةٍ بداخلها نوعٌ معيّنٌ منَ الفاكهةِ، لها نتيجتان (إمّا أن تكونَ سليمة، أو معيبة)
- عندَ إلقاءِ قطعةِ عملةٍ، لها نتيجتان (ظهورُ الوجهِ الذي يحملُ الصّورة، أو الوجهِ الذي يحملُ الكتابة)
- نتيجةُ الطّالبِ في الاختبارِ (نجاح، رسوب)

1-6-1- شروطُ تجربةِ توزيعِ ثنائي الحدَّينِ:

1- تجربةٌ عشوائيّةٌ تتكوّنُ من n مرّةٍ منَ المحاولات.

2- نتيجةُ كلِّ محاولةٍ مستقلّةٍ عنِ المحاولاتِ الأخرى، ولا تتأثّرُ بها.

3- جميعُ المحاولاتِ مستقلّةٌ عن بعضها.

4- احتمالُ ظهورِ النّتيجة (نجاحٌ أو فشل) ثابتٌ في كلِّ المحاولات.

1-6-2- خصائصُ التّوزيعِ ذو الحدَّينِ (Features of a Binomial Experiment):

- تتكوّنُ التّجربةُ من عدد n منَ المحاولاتِ المتكرّرة.
- كلُّ محاولةٍ لها نتيجتينِ إمّا نجاحٌ أو فشل، نعم أو لا، مريضٌ أو سليم، حيٌّ أو متوفًّى.
- احتمالُ النّجاحِ يُرمَزُ لهُ بـ (p) واحتمالُ الفشلِ يُرمَزُ لهُ بـ (q) حيثُ (q=1-p).
- نتيجةُ كلِّ محاولةٍ هيَ إمّا نجاحٌ أو فشل (p + q = 1).
- (r): يمثّلُ عددَ المحاولاتِ الناجحة منَ المحاولاتِ الكلّيّة (n)
- P, n هما المَعلَمتانِ اللّتانِ يعتمدُ عليهما توزيعُ ذي الحدَّين.

1-6-3- شكلُ التّوزيعِ الاحتماليِّ ثنائي الحدَّينِ:

إذا كُرّرَت محاولةٌ عددٌ منَ المرّات؛ بحيثُ أنَّ كلَّ محاولةٍ لها نتيجتانِ فقط متنافيتانِ هُما:

- النتيجةُ محلُّ الاهتمام " حالةُ نجاح " وتتمُّ باحتمالٍ ثابتٍ في كلِّ محاولةٍ هوَ (p)
- النتيجةُ الأخرى " حالةُ فشل " وتتمُّ باحتمالٍ ثابتٍ أيضاً هوَ (q=1-p)

وبافتراضِ أنَّ هذهِ المحاولاتُ مستقلّة؛ بمعنى أنَّ نتيجةَ كلِّ محاولةٍ ليسَ لها علاقةٌ بنتيجةِ المحاولةِ الأخرى، وإذا كانَ المتغيّرُ العشوائيُّ X يعبّرُ عن عددِ حالاتِ النّجاح "عددُ النّتائجِ محلِّ الاهتمام" من بينِ عددِ المحاولاتِ الكلّيّة (n).

إذا كانَ المتغيّرُ العشوائيّ (X) يعبّرُ عن عددِ حالاتِ النّجاحِ ويكونُ مداهُ : X: {r=0, 1, 2……n}

إذاً توزيعُ ذو الحدَّينِ هوَ أحدُ التّوزيعاتِ الاحتماليّةِ المنفصلة، ويُستخدمُ لإيجادِ احتمالِ وقوعِ حدثٍ معيّنٍ (نجاح) عدداً منَ المرّاتِ مقدارهُ (r) من بينِ (n) منَ المحاولاتِ الكلّيّةِ لنفسِ التّجربةِ ونرمزُ لهذا الاحتمالِ بالرّمزِ P(X) وذلكَ عندما تتحقّقُ الشّروطُ التّالية:

- هناكَ نتيجتانِ متنافيتانِ فقط لكلِّ محاولة.
- عددُ المحاولاتِ الكلّيّة (n) وهيَ مستقلّةٌ عن بعضها بعضاً.
- احتمالُ (النّجاح) في كلِّ محاولةٍ ثابت (يساوي p) ولا يتغيّرُ من محاولةٍ لأخرى.

1-6-4- دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ لمتغيّرِ ذو الحدَّينِ:

دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّة لمتغيّرِ ذي الحدَّينِ تُحسبُ بالمعادلةِ الآتية:

$$(X = r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}P^r q^{n-r}$$

ويمكنُ كتابةِ المعادلةِ السّابقةِ على الشّكلِ:

$$P(X = r) = \binom{n}{r}P^r q^{n-r} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$$

حيثُ $\binom{n}{r}$ تمثّلُ توافيق n و r؛ أي عددَ طرائقِ اختيارِ r عنصر من n عنصر، معَ إهمالِ التّرتيبِ وتُحسبُ كَمَا يأتي: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

معَ العلمِ: أنَّ:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times(4\times3\times2\times1)}$$

- (n): يمثّلُ عددَ مرّاتِ المحاولةِ في التّجربة (number of trials).
- (r): يمثّلُ عددَ مرّاتِ النّجاح (number of successes).
- (n−r): عددُ مرّاتِ الفشل (number of failures).
- (p): احتمالُ النّجاحِ (probability of success) في كلِّ مرّة.
- (q): يمثّلُ احتمالَ الفشلِ (probability of failure) ويساوي 1-p.

1-6-5- الوسطُ الحسابيُّ والتّباينُ لتوزيعِ ذي الحدَّينِ:

- **الوسطُ الحسابيُّ (التّوقُّع)**: الوسطُ الحسابيُّ لتوزيعِ ذي الحدَّينِ يُحسَبُ بالعلاقةِ: ($\mu=np$)
- **التّبايُنُ**: التّبايُنُ لتوزيعِ ذي الحدَّينِ يُحسَبُ بالعلاقةِ: ($\sigma^2 = npq=np\,(1-p)$)
- **الانحرافُ المعياريُّ**: يكونُ الانحرافُ المعياريُّ لتوزيعِ ذي الحدَّينِ: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

تحديدُ شكلِ التّوزيعِ:

يتحدّدُ شكلُ التّوزيعِ ثنائي الحدَّينِ وفقاً لقيمةِ احتمالِ النّجاحِ كَمَا يلِي:

- ☒ إذا كانَ ($p=0.5$) فإنَّ التّوزيعَ الاحتماليَّ ثنائي الحدَّينِ يكونُ متماثل.
- ☒ إذا كانَ ($p<0.5$) فإنَّ التّوزيعَ الاحتماليَّ ثنائي الحدَّينِ يكونُ موجبَ الالتواء.
- ☒ إذا كانَ ($p>0.5$) فإنَّ التّوزيعَ الاحتماليَّ ثنائي الحدَّينِ يكونُ سالبَ الالتواء.

مثال (1−6): إذا كانت عمليّةُ النّجاحِ والرّسوبِ في مقرّرٍ معيّنٍ تتوزّعُ وفقَ توزيعِ ذي الحدَّينِ، وعلى سبيلِ المثالِ كانت نسبةُ النّجاحِ في مقرّرِ تصميمِ التّجارب 80%، تمَّ اختيارُ 4 طلابٍ بشكلٍ عشوائيٍّ و المطلوبُ:

1) كوّن جدولَ توزيعِ ثنائي الحدَّينِ.
2) أوجدِ احتمالَ نجاحِ 3 طلابٍ.
3) أوجدِ احتمالَ رسوبِ 3 طلابٍ.
4) أوجدِ احتمالَ نجاحِ طالبينِ على الأقلِّ.
5) القيمةُ المتوقّعةُ (الوسطُ الحسابيّ).
6) الانحرافُ المعياريُّ.

الحلُّ:

(p=0.80)   (q=1-p=0.02)   (n=4)

$$P(X=r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}P^r q^{n-r}$$

1− جدولُ توزيعِ ثنائي الحدَّين: الجدولُ (1−9) يمثّل قيمَ الاحتمالاتِ لتوزيعِ ثنائي الحدَّينِ.

جدول (1−9): قيمُ احتمالاتِ عددِ الطّلابِ النّاجحينَ بتوزيعِ ذي الحدَّين.

عددُ الطّلابِ النّاجحين (r)	عددُ الطّلابِ الرّاسبين	الاحتمالُ	النّاتجُ
0	4	$= 4C0 \times (0.80)^0 \times (0.20)^4$	0.0016
1	3	$= 4C1 \times (0.80)^1 \times (0.20)^3$	0.0256
2	2	$= 4C2 \times (0.80)^2 \times (0.20)^2$	0.1536
3	1	$= 4C3 \times (0.80)^3 \times (0.20)^1$	0.4096
4	0	$= 4C4 \times (0.80)^4 \times (0.20)^0$	0.4096

1) أوجدِ احتمالَ نجاحِ 3 طلابٍ: P(3) = 0.4096
2) أوجدِ احتمالَ رسوبِ 3 طلابٍ: P(1) = 0.0256
3) أوجدِ احتمالَ نجاحِ طالبينِ على الأقلِّ: P(2)+P(3)+P(4) =0.9728
4) القيمةُ المتوقّعةُ (الوسطُ الحسابيُّ) = $\mu = n \times p = 4 \times 0.80 = 3.2$
5) الانحرافُ المعياريُّ $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{4 \times 0.8 \times 0.2} = 0.8}$

مثال (1−7): وُجِدَ في إنتاجِ أحدِ المصانعِ أنّهُ من بينِ 1000 وحدةِ إنتاجٍ يوجدُ 150 وحدةً معيبة. أُخذتْ عيّنةٌ بإرجاعٍ مكوّنةٌ من 5 وحدات، أوجدِ الاحتمالاتِ التّالية:

1− الوحداتُ المُختارَةُ كلّها سليمة.

2− على الأكثرِ تُوجَدُ واحدةٌ معيبة.

3− على الأقلِّ تُوجَدُ وحدتانِ معيبتان.

4− القيمةُ المتوقّعةُ والتّباينُ للوحداتِ المعيبة.

الحلُّ:

احتمالُ النّجاحِ (الحصولُ على وحدةٍ معيبة) $p = 150/1000 = 0.15$

احتمالُ الفشلِ (عدمُ الحصولِ على وحدةٍ معيبة) $q = 1\text{-}p= 1\text{-}0.15 =0.85$

عددُ المحاولاتِ (عيّنةٌ بإرجاعٍ مكوّنةٌ من 5 وحدات) $n = 5$

X متغيّرٌ عشوائيٌّ يمثّلُ عددَ الوحداتِ المعيبةِ يأخذُ القيمَ 0, 1, 2, 3, 4, 5

ويكونُ لهُ توزيعُ ذي الحدَّين:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} P^r q^{n-r} \qquad r = 0, 1, 2, \dots .5$$

1− الوحداتُ كلّها سليمةٌ يعني أنَّ $r = 0$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} (0.15)^0 (0.85)^5 = \frac{5!}{0!(5-0)!} (1) \times (0.85)^2 = 0.4437$$

2− على الأكثرِ توجدُ وحدةٌ معيبةٌ يعني أنَّ $r \leq 1$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} (0.15)^0 (0.85)^5 + \binom{5}{1} (0.15)^1 (0.85)^4$$

$$= 0.443 + \frac{5!}{1!(5-1)!} (0.15) \times (0.522) \quad = 0.8352$$

3− على الأقلِّ تُوجدُ وحدتانِ معيبتانِ يعني أنَّ $r \geq 2$

$$P(X \geq 2) = 1 - p(r < 2)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 0.8325 = 0.1648$$

4− القيمةُ المتوقّعةُ والتّباينُ للوحداتِ المعيبة.

القيمةُ المتوقّعةُ أوِ الوسطُ الحسابيُّ لتوزيعِ ذي الحدَّينِ يُحسَبُ بالعلاقةِ: $(\mu=np)$

$$(\mu=np=5\times0.15=0.75)$$

التّباينُ $(\sigma^2 = npq=5\times 0.15\times0.85)=0.6375$

1-7- ثانياً: توزيعُ بواسون (Poisson Distribution):

يُعَدُّ توزيعُ بواسون منَ التّوزيعاتِ المتقطّعةِ المهمّةِ الذي يُسمّى أحياناً " توزيعُ الحوادثِ النّادرة "؛ أي الذي يُستخدَمُ للحوادثِ النّادرة؛ وهيَ الحوادثُ التي يكونُ فيها عددُ المحاولاتِ كبيراً بينما يكونُ احتمالُ النّجاحِ صغيراً، مثلُ حوادثِ السّيارات، أو الأخطاءِ المطبعيّةِ في كتاب، أو الإصابةِ بمرضٍ رغمَ التّطعيمِ ضدّه، أو محاولاتِ الانقلاباتِ العسكريّةِ في الدّولِ المتقدّمةِ والتي عادةً ما تكونُ نادرة... إلخ.

في الحياةِ العمليّةِ أحياناً ما نقابلُ بعضَ الظّواهرِ التي ينطبقُ عليها شروطُ توزيعِ ذي الحدَّين ولكن هذهِ الحوادثُ تكونُ نادرةَ الوقوعِ، وهذا يعني أنَّ احتمالَ النّجاحِ (p) يكونُ صغيراً جدّاً يقتربُ منَ الصّفر و عليهِ يمكنُ القولُ أنَّ (λ=np)؛ حيثُ λ هيَ مقدارٌ ثابتٌ وبذلكَ يكونُ احتمالُ الفشلِ كبيراً؛ أي أنّهُ يقتربُ منَ الواحدِ. ولكي نراقبَ بعضَ حالاتِ النّجاحِ فأنّنا سنجدُ أنَّ (n) سوفَ تكونُ كبيرةً جدّاً، فمثلاً لو أردنا حسابَ احتمالِ خروجِ القطارِ من سكّتهِ فإنّنا سنقومُ بمراقبةِ القطاراتِ أو عددٍ كبيرٍ جدّاً منها و نحسبُ عددَ مرّاتِ خروجِ القطارِ من على الشّريطِ أي حالاتِ النّجاح (التي تحقّقت فيها الحادثةُ) حتّى نستطيعَ أن نحسبَ الاحتمال.

شروطُ توزيعِ بواسون:

1) أن يكونَ احتمالُ النّجاحِ (p) ثابتاً و كذلكَ احتمالُ الفشلِ (q) في كلِّ محاولةٍ.
2) أن يكونَ احتمالُ النّجاحِ (p) صغيراً و يقتربُ من الصّفر، واحتمالُ الفشلِ يقتربُ منَ الواحد.
3) أن يكونَ عددُ المحاولاتِ (n) كبيراً جدّاً حيثُ أنَّ (λ=np) يساوي مقداراً ثابتاً.

توزيعُ بواسون هوَ توزيعٌ احتماليٌّ منفصلٌ يصفُ متغيّراتٍ عشوائيّةً متقطّعةً لها الشّروطُ السّابقة، ويُستخدَمُ لتحديدِ احتمالِ وقوعِ عددٍ منَ الأحداثِ (النّجاحاتِ) في زمنٍ معيّنٍ أو مكانٍ معيّنٍ مثلَ:

- ← عددِ حوادثِ السّياراتِ في إشارةِ مرورٍ معيّنةٍ خلالَ شهر.
- ← عددِ الأخطاءِ المطبعيّةِ في صفحةٍ ما أو في صفحاتٍ مختلفةٍ للكتاب.
- ← عددِ القطعِ التّالفةِ في الإنتاجِ الكلّيِّ لسلعةٍ معيّنة.
- ← بعضِ الظّواهرِ النّادرةِ مثلَ الزّلزالِ، والحرائق.

ويمكنُ تمثيلُ توزيعُ بواسون بالجدولِ (1-10):

جدول (1−10): قيمُ احتمالاتِ توزيعِ بواسون.

معاملُ التّوزيعِ λ>0									
X	0	1	2	3	4	5	6	.....	المجموع
$f(x)=P(X=x)$	0.11	0.14	0.214	0.11	0.23	0.21	0.16	.....	1

توزيعُ بواسون يمثّلُ جدولاً يضمُّ متغيّراً عشوائيّاً منفصلاً (X) يمثّلُ عددَ النّجاحاتِ في منطقةٍ معيّنةٍ أو خلالَ زمنٍ معيّن، ودالةً احتماليّة f(x) تمثّلُ احتمال أنْ يأخذَ المتغيّرُ قيمَ النّجاحاتِ.

مثلاً: المتغيّرُ X يمثّلُ عددَ الزّبائنِ الذينَ يدخلونَ إلى سوبر ماركت خلالَ ساعةٍ واحدةٍ (قد لا يدخلُ أيُّ زبونٍ خلالَ السّاعة (X=0) أو قد يدخلُ خمسةُ زبائن (X=5).

أو قد يمثّلُ المتغيّرُ X عددَ الفئرانِ في دونمٍ منَ المزرعةِ (قد لا يوجد أيُّ فأرٍ (X=0) أو قد يوجدُ ثلاثُ فئران (X=3)).

معاملُ توزيعِ بواسون هوَ (λ>0).

1−7−1− دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ لتوزيعِ بواسون:

دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ لتوزيعِ بواسون تُحسَبُ بالمعادلةِ:

$$P(X=r)=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^{r}}{r!} \qquad r=0,1,2,....$$

r: العددُ المعيَّنُ منَ النّجاحات.

e : أساسُ نظامِ اللوغاريتماتِ الطّبيعيِّ وقيمتها (e=2.718) تقريباً.

λ: معاملُ التّوزيعِ وهوَ (λ>0) دائماً.

1−7−2− المتوسّطُ الحسابيُّ والتّباينُ لتوزيعِ بواسون:

- **المتوسّطُ الحسابيُّ أو التّوقّع:** $E(X)=\mu=\lambda=np$
- **التّبايُنُ:** $Var(X)=\sigma^2=\mu=\lambda=np$

يُشتَقُّ توزيعُ بواسون منْ توزيعِ ذي الحدَّينِ عندما يكونُ:

- عددُ المحاولاتِ n كبيراً جدّاً.
- بينما يكونُ احتمالُ النّجاحِ p صغيراً بحيثُ تبقى $(\mu=np)$ قيمةٌ ثابتةٌ معتدلة.

مثال (1-8): إذا كانَ منَ المعلومِ أنَّ عددَ الوحداتِ التي تستهلكها الأسرةُ من سلعةٍ معيّنةٍ خلالَ الشّهرِ تتبعُ توزيعَ بواسون بمتوسّطِ (3) وحداتٍ شهريّاً، إذا عُرِّفَ المتغيّرُ العشوائيّ (X) بأنّهُ عددُ الوحداتِ التي تستهلكها الأسرةُ خلالَ الشّهرِ من هذهِ السّلعة.

المطلوبُ:

- ما نوعُ المتغيّرِ العشوائيّ؟
- اكتب شكلَ دالّةِ الاحتمالِ لهذا المتغيّر.
- احسبِ الاحتمالاتِ التّالية:
  - احتمالُ أنَّ الأسرةَ تستهلكُ وحدتينِ خلالَ الشّهر؟
  - احتمالُ أنَّ أسرةً ما تستهلكُ 3 وحداتٍ على الأكثرِ خلالَ الشّهر؟
- احسبِ الوسطَ الحسابيّ، والانحرافَ المعياريَّ لعددِ الوحداتِ المستهلكة.

الحلُّ: بفرضِ أنَّ المتغيّرَ العشوائيَّ المنفصلَ (X) يمثّلُ عددَ الوحداتِ التي تستهلكها الأسرةُ خلالَ الشّهرِ ومدى هذا المتغيّرِ في هذهِ الحالةِ هوَ: ويكونُ مداهُ: $X: \{ r=0, 1, 2\ldots\ldots \}$

شكلُ دالّةِ الاحتمالِ:

بما أنَّ مُتوسّطَ عددِ الوحداتِ التي تستهلكها الأسرةُ خلالَ الشّهرِ هوَ: $(\mu = \lambda=3)$، إذاً دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ هيَ:

$$P(X = r) = \frac{e^{-\lambda}\times\lambda^{r}}{r!} = \frac{e^{-3}\times3^{r}}{r!} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

- حسابُ احتمالِ أنَّ أسرةً ما تستهلكُ وحدتينِ خلالَ الشّهرِ أي $P(2)$.

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3}\times3^{2}}{2!} = \frac{0.049\times9}{2!} = 0.224$$

- احتمالُ أنّ أسرةً ما تستهلكُ 3 وحداتٍ على الأكثرِ خلالَ الشّهرِ هوَ :

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$= \left[\frac{3^3}{3!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^{31}}{1!} + \frac{3^{30}}{0!}\right] \times \left[\frac{0.0498}{1}\right] = 0.647$$

حسابُ الوسطِ الحسابيّ، والانحرافِ المعياريِّ لعددِ حالاتِ الاستجابةِ:

← **الوسطُ الحسابيُّ (μ):** في حالةِ توزيعِ بواسون هوَ مَعلَمةُ التّوزيعِ المعطاةُ وهيَ: $\mu = \lambda=3$

← **التّبايُنُ (σ^2):** إنَّ التّباينَ لتوزيعِ بواسون يساوي الوسطَ الحسابيّ: أي أنَّ: $\sigma^2 = \mu = \lambda=3$

← **الانحرافُ المعياريُّ (σ):** يكونُ الانحرافُ المعياريُّ هوَ: $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.732$

مثال (1−9): إذا كانَ معلوماً أنَّ عددَ القطعِ المعيبةِ في خطِّ إنتاجٍ للمعلّباتِ الغذائيّةِ يتبعُ توزيعَ بواسون بنسبةٍ قدرها (0.3%) معيبةً منَ العددِ الكلّيّ. أُخذتْ عيّنةٌ عشوائيّةٌ منَ الإنتاجِ حجمها (350) قطعة.

إذا عُرّفَ المتغيّرُ العشوائيّ (X) بأنّهُ عددُ المعلّباتِ المعيبةِ منَ العيّنةِ المُختَارة، احسبِ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

- وجودُ قطعةٍ معيبةٍ
- وجودُ قطعتانِ معيبتانِ
- عدمُ وجودِ أيّةِ قطعٍ معيبةٍ
- وجودُ على الأكثرِ وحدتانِ معيبتانِ

الحلُّ:

عمليّةُ سحبِ العيّنةِ تمثّلُ سلسلةً عددها (n=350)، واحتمالُ أن تكونَ القطعةُ معيبةً (النّجاح) هوَ (p=0.003). منَ الواضحِ أنَّ n كبيرة، و p صغيرةٌ أي يكون $\lambda = np = 350(0.003) = 1.05$

$$P(X=r) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^r}{r!} = \frac{e^{-1.05} \times (1.05)^r}{r!} \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

بفرضِ أنَّ X يمثّلُ عددَ القطعِ المعيبةِ في العيّنةِ لهُ توزيعُ بواسون $r = 0, 1, 2,$

- احتمالُ وجودِ قطعةٍ معيبةٍ: $p(X=1) = \frac{e^{-1.05} \times 1.05^1}{1!} = (0.3499)(1.05) = 0.367$
- احتمالُ وجودِ قطعتانِ معيبتانِ:

$$p(X=2) = \frac{e^{-1.05} \times 1.05^2}{2!} = (0.3499)(0.55125) = 0.193$$

- احتمالُ عدمِ وجودِ أيّةِ قطعٍ معيبةٍ:

$$p(X=0) = \frac{e^{-1.05} \times 1.05^0}{0!} = 0.350$$

- احتمالُ وجودِ وحدتانِ معيبتانِ على الأكثر:

$$P(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0.350 + 0.367 + 0.193 = 0.91$$

1-8- التّوزيعـــاتُ الاحتماليّـــةُ المتّصـــلةُ (Continuous Probability Distributions):

- تعريفُ المتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ.
- التّوزيعُ الاحتماليُّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ.
- خصائصُ دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ.
- التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ.
- دالّةُ التّوزيعِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ.
- دالّةُ التّوزيعِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المتّصلِ (الدّالةُ التّراكميّة).
- الوسطُ الحسابيُّ والتّبايُنُ للمتغيّرِ العشوائيِّ المتّصلِ.

1-8-1- تعريفُ المتغيّرِ العشوائيِّ المتّصل (Continuous Random Variable):

هوَ متغيّرٌ يأخذُ قيماً عدديّةً متّصلةً ولهُ عددٌ لا نهائيٌّ (غير معدود) منَ القيمِ الممكنةِ داخلَ مجالِ تغيّرِهِ، فإذا كانَ (X) متغيّرٌ عشوائيٌّ مستمرٌّ ويقعُ في المجالِ (a, b) أي أنَّ $\{X = x : a < x < b\}$ فإنَّ للمتغيّرِ X عددٌ لا نهائيٌّ منَ القيمِ تقعُ في المجالِ (a, b). وتكونُ وحداتُ قياسِ هذا المتغيّرِ مستمرّةٌ مثلَ الزّمنِ، الوزنِ، المسافةِ، الحجمِ، ...

أمثلةٌ:

- أطوالُ الطّلابِ بالجامعةِ تتراوحُ بينَ 200 – 150 سنتيميتر $\{X = x : 150 < x < 200\}$
- دخلُ الفردِ السّنويِّ في دولةٍ ما بالدّولار $\{X = x : 2000 < x < 3500\}$
- كميّةُ الألبانِ التي تنتجها البقرةُ في اليومِ باللّتر $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- فترةُ صلاحيّةِ حفظِ الدّجاجِ المُبرَّدِ بالأيّام $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزنُ الجسمِ بالكيلو غرامِ للأعمارِ من 20-30 سنة $\{X = x : 55 < x < 80\}$

وفي المتغيّرِ المتّصلِ لا يمكنُ حسابُ احتمالِ أن يأخذَ المتغيّرُ قيمةً معيّنةً حيثُ إنَّ هذا الاحتمالَ دائماً **يساوي صفر**؛ لأنَّ هناكَ عددٌ لا نهائيٌّ منَ القيمِ فكيفَ يمكنُ حسابِ احتمالِ أن يأخذَ المتغيّرُ إحدى هذهِ القيمِ؟ بمعنى أنَّ احتمالَ أن يكونَ طولُ الطّالبِ 162.35 سم هوَ 0 لأنَّ متغيّرَ الطّولِ يأخذُ قيماً لانهائيةً ما بينَ الحدِّ الأدنى والأعلى في المجالِ (150 ,200).

والذي يمكنُ حسابهُ في المتغيّرِ المتّصلِ هوَ احتمالُ أن تتراوحَ قيمتهُ بينَ قيمتين، أو أن يكونَ أكبرَ من (أو أقلَّ من) قيمةٍ معيّنةٍ. فمثلاً يمكنُ أن نقولَ أنَّ احتمالَ أن يكونَ طولُ الطّالبِ أقلَّ من 180 سم أو يتراوحُ بينَ 170 و 190.

وتُحسَبُ الاحتمالاتُ للمتغيّرِ المتّصلِ باستخدامِ المساحاتِ تحتَ منحنى الدّالّةِ أو المتغيّرِ (مثل المنحنى الطبيعي) وهوَ ما سوفَ نبيّنهُ لاحقاً.

1-8-2- التّوزيعُ الاحتماليُّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ:

إنَّ التّوزيعاتِ الاحتماليّةِ المتّصلةِ لا يمكنُ أن تُوضَع في جدول؛ وذلك لأنَّ المتغيّرَ يأخذُ عدداً لا نهائيّاً منَ القيمِ وبالتّالي لا يمكنُ حصرهُ، وإنّما يُعبَّرُ عنها دائماً بدوالٍّ رياضيّةٍ أو برسمِ منحنياتِ هذهِ الدّوالِّ أوِ التّوزيعات.

ويُعبَّرُ عنِ الاحتمالاتِ بدلالةِ المساحاتِ تحتَ هذهِ المنحنياتِ. وقد تمَّ حسابُ الاحتمالاتِ المختلفةِ لأهمِّ التّوزيعاتِ المتّصلةِ وتمَّ وضعها في جداولَ إحصائيّةٍ ثابتةٍ يمكنُ استخدامها في أيِّ وقتٍ وفي أيِّ مكانٍ؛ حيثُ توفّرُ الجهدَ والوقتَ في حسابِ هذهِ الاحتمالاتِ، ويمكنُ الكشفُ في هذهِ الجداولِ في ثوانٍ معدودةٍ والحصولُ على الاحتمالِ المطلوبِ.

1-8-3- خصائصُ دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ:

دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ يجبُ أن تحقّقَ شرطانِ اثنان:

1- جميعُ الاحتمالاتِ موجبةٌ؛ أي أنَّ منحنى دالّةِ الكثافةِ لا يمكنُ أن ينزلَ أسفلَ المحورِ الأفقيّ.

2- المساحةُ الإجماليّةُ بينَ المنحنى والمحورِ الأفقيِّ تساوي الواحد، ويمكنُ صياغةُ الشّرطينِ السّابقينِ رياضيّاً كَمَا يلِي:

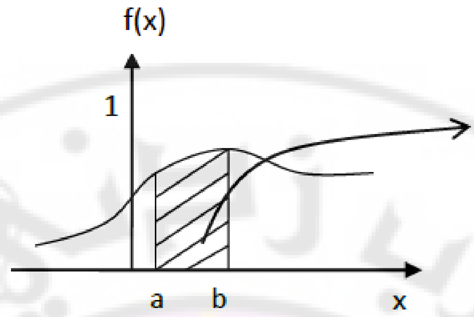
- $f\,(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

هذهِ الخصائصُ تفيدنا في حسابِ احتمالاتِ بعضِ المجالاتِ من خلالِ احتمالاتِ مجالاتٍ أخرى.

1-8-4- التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ:

بِما أنَّ (X) تأخذُ عدداً لا متناهياً منَ القيمِ داخلَ أيِّ مجالٍ؛ فإنَّ احتمالَ قيمةٍ بعينها هو احتمالٌ يُؤوَّلُ إلى الصفر ($P(X=x) \rightarrow 0$)؛ لذلكَ فإنَّ دالّةَ الكثافةِ تُستعمَلُ لحسابِ احتمالِ مجال، ويكونُ ذلكَ

بحساب المساحةِ تحتَ منحنى f(x) بينَ حدودِ المجالِ $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ كَمَا هوَ موضَّحٌ بالشّكلِ (1−7).



شكل (1−7): التّمثيلُ البيانيُّ لدالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ.

لاحظ أنَّ إشارةَ التّكاملِ هُنا تقابلُ إشارةَ المجموعِ في حالةِ المتغيّرِ العشوائيِّ المتقطّع.

1−8−5− دالّةُ التّوزيعِ F(x) للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ:

تُعرَّفُ دالّةُ التّوزيعِ أو الدّالّةُ التّراكميّةُ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ كَمَا يلِي:

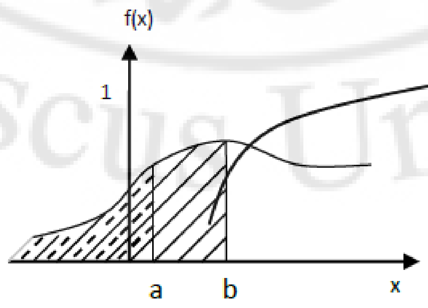
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

لدالّةِ التّوزيعِ أهميّةٌ أكبرُ بالنّسبةِ للمتغيّرِ المستمر؛ وذلكَ بسببِ أنّنا نهتمُّ في حالةِ المتغيّرِ المستمر، باحتمالِ مجالٍ وليسَ باحتمالِ نقطة، ولحسابِ احتمالِ مجالٍ فإنّهُ منَ الأيسرِ التّعويضُ في دالّةِ التّوزيعِ بدلاً من حسابِ التّكاملِ في كلِّ مرّة، لذلكَ يمكنُ الاعتمادُ على القاعدةِ الآتيةِ:

بفرضِ a, b نقطتانِ من مجالِ تعريفِ (X)، بحيثُ b > a. لحسابِ احتمالِ أن تكونَ (X) تنتمي إلى المجالِ]a, b]:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

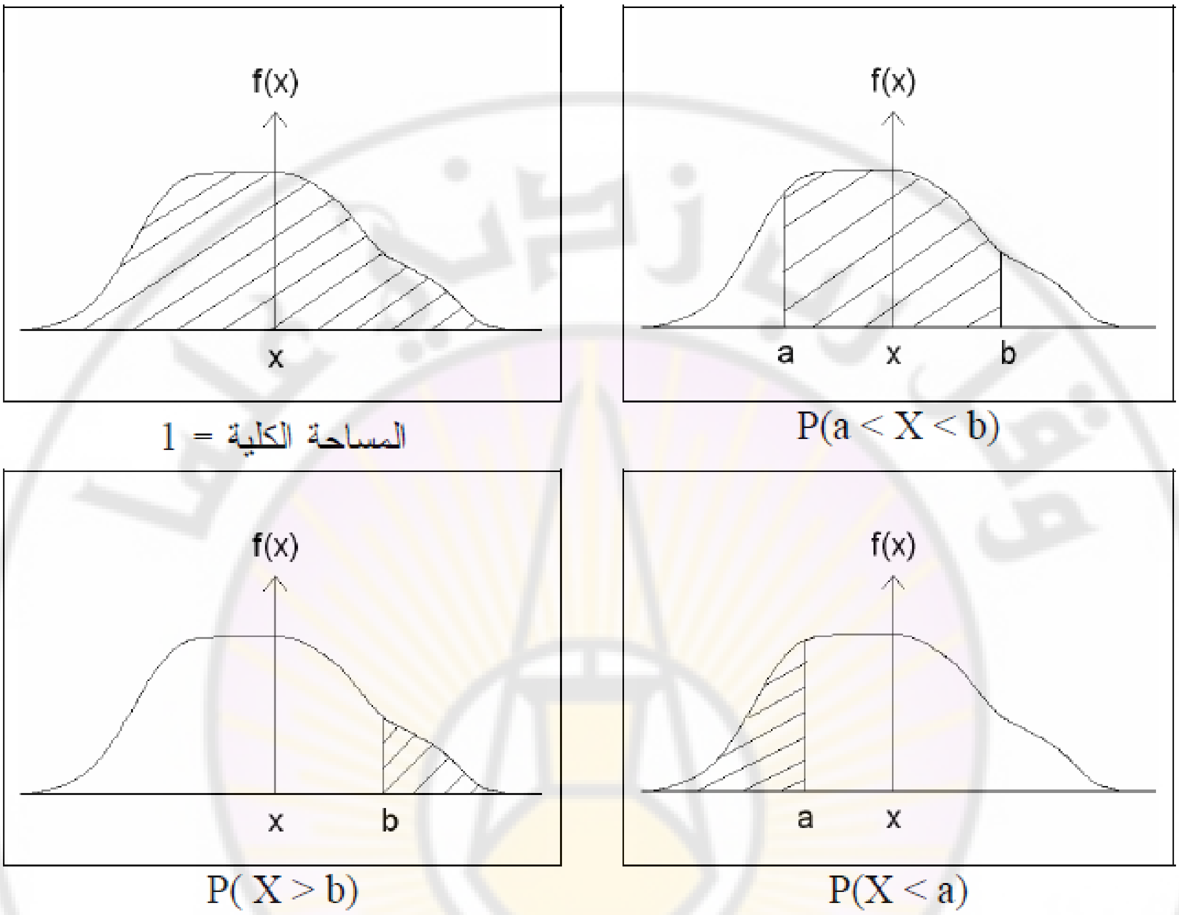
هذهِ العلاقةُ يوضّحها الشّكلُ (1−8).



حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

شكل (1–8): التّمثيلُ البيانيُّ لاحتمالِ أن يقعَ المتغيّرُ في مجال.

الشّكل (1–9) يبيّنُ طرائقَ حسابِ الاحتمالاتِ التي يأخذها المتغيّرُ العشوائيُّ المتّصل (X).



شكل (1–9): التّمثيلُ البيانيُّ لطرائقِ حسابِ الاحتمالاتِ التي يأخذها المتغيّرُ العشوائيّ.

1–8–6– الوسطُ الحسابيُّ والتّباينُ للمتغيّرِ العشوائيِّ المتّصل:

إذا كانت f(x) تمثّلُ دالّةَ الكثافةِ الاحتماليّةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ المتّصلِ (X) الذي يقعُ في المجالِ (a<x<b).

- **الوسطُ الحسابيُّ** لتوزيعِ المتغيّرِ العشوائيِّ المتّصلِ (X) يُحسَبُ بالمعادلةِ: $\mu = \int_a^b x f(x)dx$
- **التّباينُ** لتوزيعِ المتغيّرِ العشوائيِّ المتّصلِ X يُحسَبُ بالمعادلةِ:

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx - \mu^2$$

أهمُّ التّوزيعاتِ الاحتماليّةِ المتّصلةِ التي تُستخدَمُ فيها الجداولُ الإحصائيّةُ الجاهزةُ لحسابِ الاحتمالاتِ المختلفةِ هيَ:

التّوزيعُ الطّبيعيُّ (Normal Distribution)

التّوزيعُ الطّبيعيُّ المعياريُّ أوِ القياسيُّ أو توزيعُ Z (Standard Normal Distribution)

توزيعُ " ت " (t – Distribution)

توزيعُ " مربع كاي " (X^2 – Distribution)

توزيعُ فيشر " ف " (F – Distribution)

في هذا الفصلِ سوفَ يتمُّ دراسةُ التّوزيعُ الطّبيعيُّ والطّبيعيُّ المعياريُّ بشيءٍ منَ التّفصيلِ، أمّا توزيعُ t و F و X^2 فسوفَ تُدرسُ في الفصولِ اللّاحقة.

1-9- التّوزيعُ الطّبيعيُّ للمتغيّرِ العشوائيِّ المستمرِّ (Normal Distribution):

يُعدُّ التّوزيعُ الطّبيعيُّ للمتغيّراتِ العشوائيّةِ المستمرّةِ من أهمِّ التّوزيعاتِ الاحتماليّةِ في علمِ الإحصاءِ؛ لأنّهُ يصفُ كثيراً منَ الظّواهرِ التي تقابلنا في الحياةِ العمليّةِ مثلَ الأطوالِ والأوزانِ والأعمارِ ودرجاتِ الحرارةِ والدّخولِ الشّهريّة ... وغيرها منَ الظّواهرِ المتّصلة.

يُعدُّ هذا التّوزيعُ أحدَ الأعمدةِ الأساسيّةِ لعلمِ الإحصاءِ وذلكَ لعدّةِ أسبابٍ منها:

1- لهُ تطبيقاتٌ كثيرةٌ ومتنوّعةٌ كتوزيعٍ احتماليٍّ لكثيرٍ منَ الظّواهرِ الطّبيعيّةِ مثلَ الذّكاءِ، و أطوالِ الأشخاصِ وأوزانهم، والظّواهرِ الطّبيعيّة (أو غيرِ الطّبيعيّة) الأخرى.

2- يُعدُّ التّوزيعُ الطّبيعيُّ حجرَ الزّاويةِ في الاستدلالِ الإحصائيِّ ولاعتمادِ الكثيرِ منَ الاختباراتِ الإحصائيّةِ والاستدلالِ الإحصائيِّ بصفةٍ عامّةٍ عليهِ.

3- كثيرٌ منَ التّوزيعاتِ المهمّةِ – مثل توزيعاتِ t، X^2، F تُشتَقُّ منَ التّوزيعِ الطّبيعيّ.

1-9-1- معالمُ التّوزيعِ الطّبيعيّ:

يعتمدُ التّوزيعُ الطّبيعيُّ على مَعلَمتَينِ هُما:

1- **المُتوسّطُ (Mean= μ) :** يحدّدُ موضعَ التّوزيعِ (موضعَ تركُّزِ قيمِ التّوزيعِ على خطِّ الأعداد).

2- **التبايُنُ (Variance= σ^2):** وهوَ يقيسُ مدى تباعدِ أو تقاربِ (تشتُّت) قيمِ التّوزيعِ حولَ المُتوسّط؛ فكلّما كانت قيمةُ التّباينِ كبيرة، كانت قيمُ التّوزيعِ متباعدةً عنِ المُتوسّطِ، والعكسُ بالعكس.

1-9-2- دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ للتّوزيعِ الطّبيعيّ (Probability Density Function):

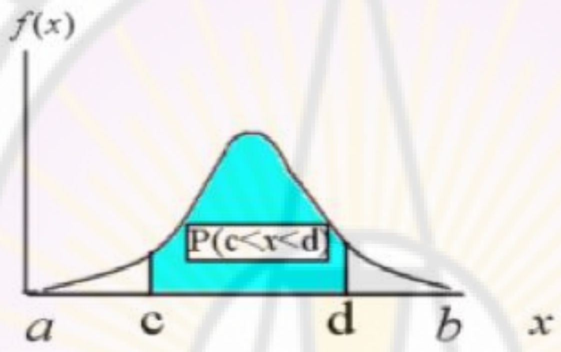
إذا كانَ X متغيّراً عشوائيّاً متّصلاً يتبعُ التّوزيعَ الطّبيعيَّ بمُتوسّط (μ) وانحرافٍ معياريٍّ (σ) فإنَّ دالّةَ كثافةِ الاحتمالِ للمتغيّرِ العشوائيّ (X) تُعطى بالعلاقةِ:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad -\infty \le x \le +\infty$$

عندئذٍ يُقالُ أنَّ المتغيّرَ (X) يتبعُ توزيعاً طبيعيّاً مُتوسّطهُ (μ) وتباينهُ (σ^2). وتُكتَبُ اختصاراً

$$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$$

من أجلِ حسابِ احتمالِ أنَّ المتغيّرَ العشوائيَّ (X) يقعُ في المجالِ (c, d) أي أنَّ حسابَ $P(c \le X \le d)$ هذا يتطلّبُ حسابَ المساحةِ أسفلَ المنحني من (x=c) حتّى (x=d) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالشّكلِ (1−10).



شكل (1−10): التّمثيلُ البيانيُّ لحسابِ احتمالِ المتغيّرِ يقع $c \le X \le d$.

$$p(c \le X \le d) = \int_{x-c}^{x=d} f(x)dx$$

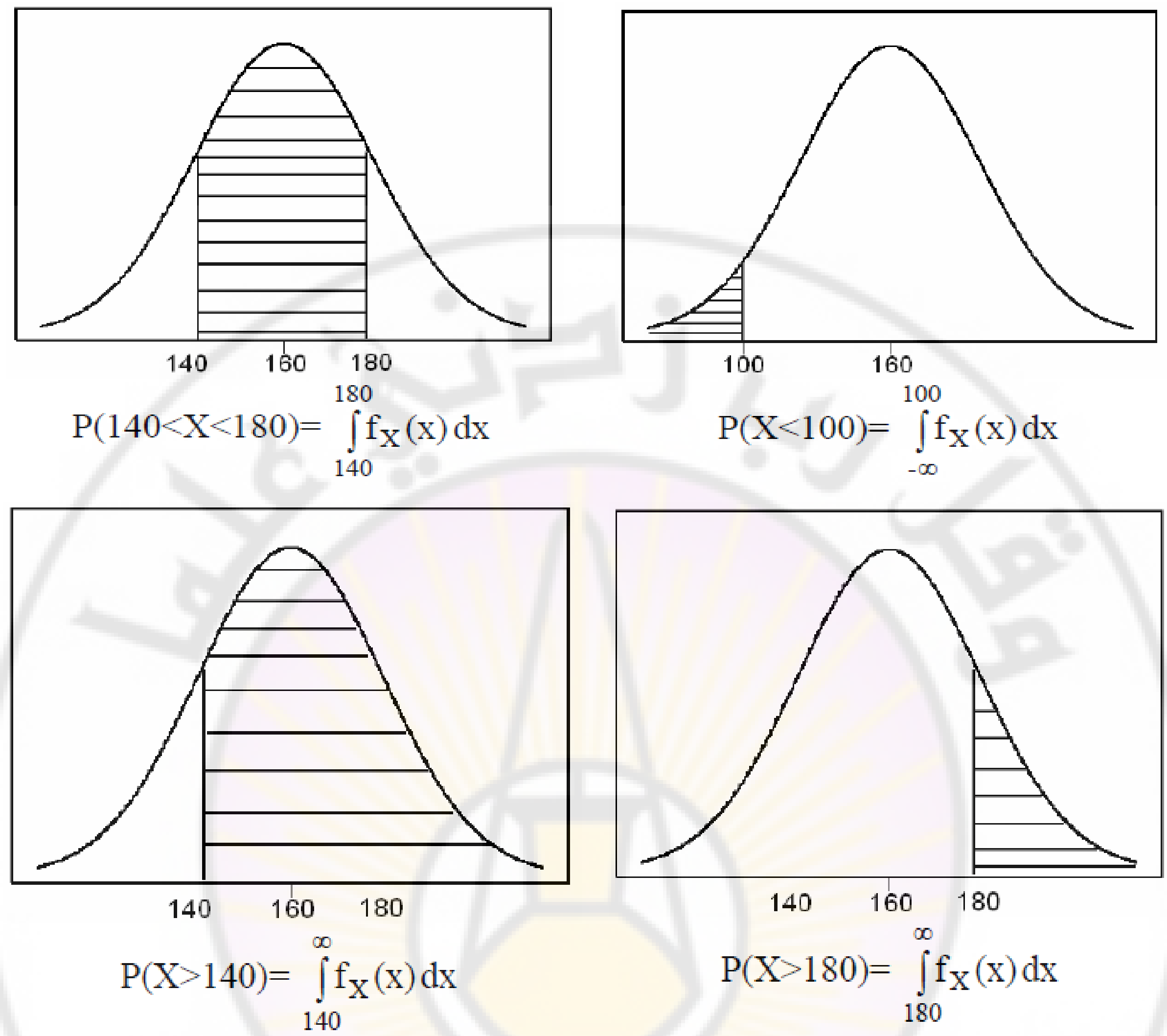
معَ العلمِ أنّهُ دائماً في المتغيّراتِ المستمرّةِ يكونُ الاحتمالُ $P(X = value) = 0$ مساوياً أو ينتهي إلى الصّفرِ دائماً.

مثال (1−10): إذا كانَ (X) متغيراً عشوائيّاً مستمرّاً يمثّلُ طولَ الشّخصِ في مجتمعٍ ما، ويتوزّعُ تقريباً وفقَ التّوزيعِ الطّبيعيِّ بمُتوسّط (μ=160) سم، وانحرافٍ معياريٍّ (σ=5) سم.

المطلوب: مثّلِ الاحتمالاتِ التّاليةِ بمساحاتٍ تحتَ منحني التّوزيعِ الطّبيعيّ:

$P(X<100)$, $P(140<X<180)$, $P(X>180)$, $P(X>140)$

الحلُّ: الشّكلُ (1−11) يمثّلُ الاحتمالاتِ السّابقةِ.



شكل (1-11): التّمثيلُ البيانيُّ لطرائقِ حسابِ الاحتمالاتِ التي يأخذها المتغيّرُ العشوائيُّ المستمر.

1-9-3- خصائصُ التّوزيعِ الطّبيعيّ:

يتميّزُ التّوزيعُ الطّبيعيُّ بالخصائصِ الآتيةِ:

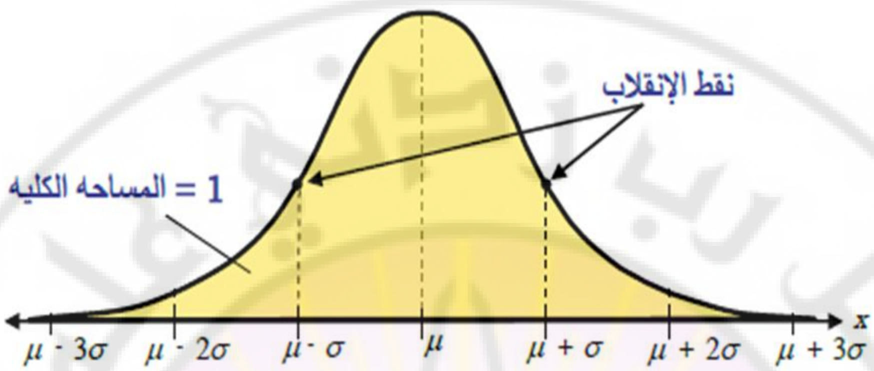
1- مقاييسُ النّزعةِ المركزيّةِ الثّلاثةِ (الوسطُ الحسابيُّ والوسيطُ والمنوالُ) متساويةٌ وتلتقي في نقطةٍ واحدةٍ (في منتصفِ التّوزيع μ).

2- المنحنى لهُ نقطتا انقلابٍ عندَ $X=\mu \pm \sigma$

3- منحنى التّوزيعِ الطّبيعيِّ منحنى ناقوسيُّ الشّكل، ومتماثلٌ حولَ المُتوسّط؛ أي حولَ العمودِ الذى يمرُّ بقمّتهِ أي عندَ ($X=\mu$) لذلكَ فإنَّ هذا العمودَ يجزّئُ المنحنى الطّبيعيَّ القياسيَّ إلى قسمينِ متماثلينِ في الشّكلِ والمساحة.

4- طرفا التّوزيعِ تمتدُّ من ($-\infty$) إلى ($+\infty$).

5- المساحةُ الكلّيّةُ تحتَ منحنى التّوزيعِ الطّبيعيِّ تساوى الواحدَ الصّحيح، وهذهِ المساحةُ تعبّرُ عن مجموعِ الاحتمالاتِ كَمَا هوَ موضّحٌ بالشّكلِ (1-12).



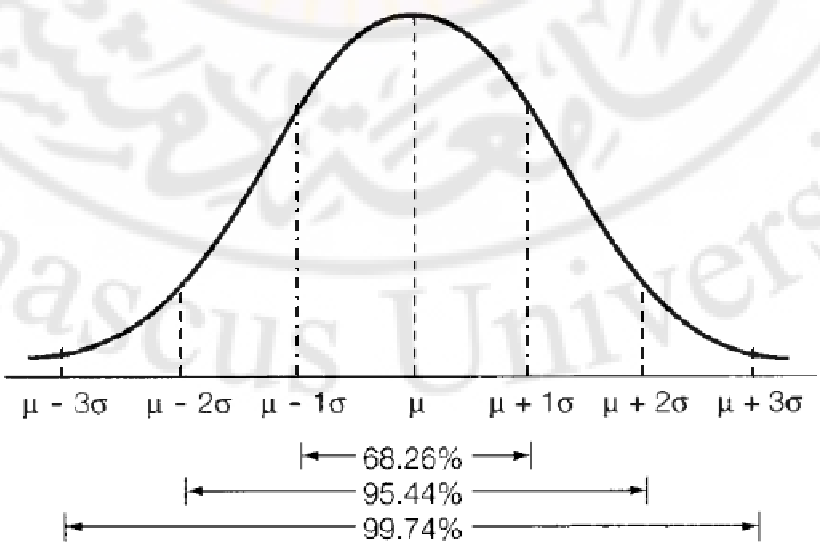
شكل (1-12): التّمثيلُ البيانيُّ للتّوزيعِ الطّبيعيّ.

1-9-4- المساحاتُ تحتَ المنحنى الطّبيعيّ:

بالنّسبةِ للتّوزيعاتِ المتّصلةِ فإنَّ المساحاتِ تحتَ منحنى التّوزيعِ أو الدّالّةِ تُستخدّمُ للحصولِ على الاحتمالاتِ المختلفة، وبالنّسبةِ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ فإنَّ المساحاتِ تحتَ المنحنى تكونُ كَمَا يلِي:

- % 68.26 من إجمالي المساحةِ تحتَ المنحنى تكونُ محصورةً بينَ $\mu -\sigma$, $\mu +\sigma$.
- % 95.44 من إجمالي المساحةِ تحتَ المنحنى تكونُ محصورةً بينَ $\mu -2\sigma$, $\mu +2\sigma$.
- % 99.72 من إجمالي المساحةِ تحتَ المنحنى تكونُ محصورةً بينَ $\mu -3\sigma$, $\mu +3\sigma$.

المساحةُ الكلّيّةُ تحتَ منحنى التّوزيع=1، والشّكل (1-13) يوضّحُ توزّعَ البياناتِ السّابقة.



شكل (1−12): شكل (1−13): التّمثيلُ البيانيُّ وتوزيعُ البياناتِ للتّوزيعِ الطّبيعي.

ويمكنُ التّعبيرُ عمّا سبقَ رمزيّاً كالآتي :

$$p\,(\mu - 1\sigma < x < \mu + 1\,\sigma) = 0.6826$$
$$p\,(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\,\sigma) = 0.9544$$
$$p\,(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\,\sigma) = 0.99.74$$

وبما أنَّ استخدامَ دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ السّابقةِ لحسابِ الاحتمالاتِ المختلفةِ تكتنفهُ صعوباتٌ رياضيّةٌ كثيرةٌ تعتمدُ على معرفةٍ تامّةٍ بعلمِ التّكاملِ، فإنّهُ لحُسْنِ الحظِّ يمكنُ تحويلُ أيِّ توزيعٍ طبيعيٍّ إلى توزيعٍ طبيعيٍّ معياريٍّ لهُ جداولُ خاصّةٌ تُعرّفُ باسمِ جداولِ المساحاتِ تحتَ منحنى التّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريِّ أوِ الجداولِ الإحصائيّة.

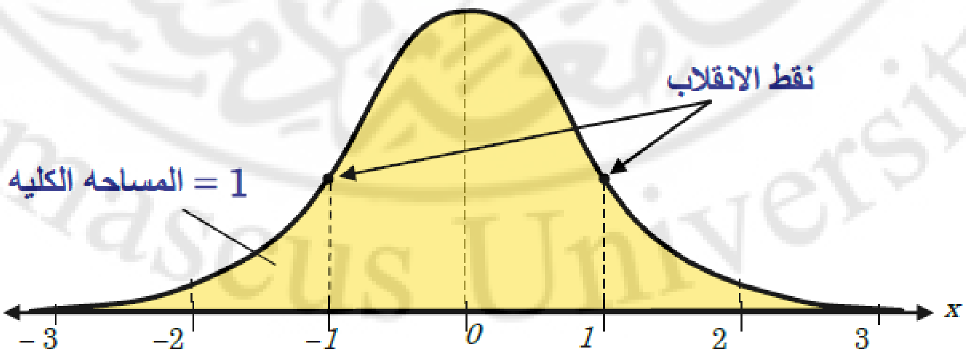
1−10− التّوزيعُ الطّبيعيُّ المعياريّ(Standard Normal Distribution):

- التّوزيعُ الطّبيعيُّ المعياريُّ هوَ توزيعٌ طبيعيٌّ مُتوسّطهُ ($\mu=0$) وتباينهُ ($\sigma^2=1$).
- يُرمَزُ للمتغيّرِ العشوائيِّ الذي يتوزّعُ طبيعيّاً معيارياً بالرّمز (Z)، ويُكتَبُ $Z \sim N(0,\ 1)$
- أيُّ قيمةٍ من قيم المتغيّرِ الطّبيعيِّ (X) يمكنُ تحويلها إلي المتغيّرِ Z الذي يتبعُ التّوزيعَ الطّبيعيَّ القياسيَّ باستخدامِ التّحويلة: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ويمكنُ رسمُ المنحنى الاحتماليَّ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ القياسيِّ باستخدامِ المعادلةِ:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \qquad -\infty \le z \le +\infty$$

1−10−1− المنحنى الاحتماليُّ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ القياسيّ:

الشّكلُ (1−14) يوضّحُ المنحنى الاحتماليَّ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ القياسيّ.



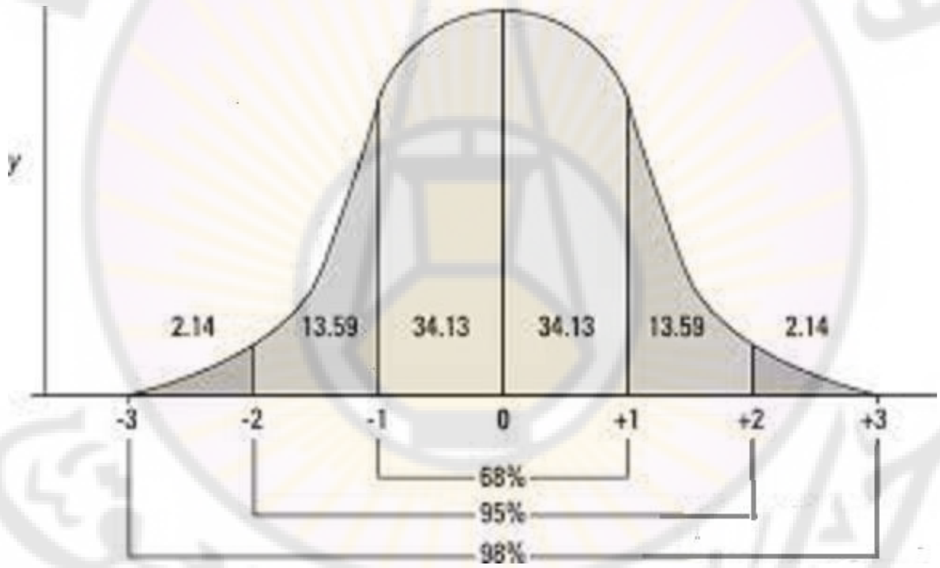
شكل (1−14): التّمثيلُ البيانيُّ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ.

وبالنّسبةِ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريِّ فإنَّ المساحاتِ تحتَ المنحنى تكونُ كَمَا يلِي:

- % 68.26 من إجمالي المساحةِ تحتَ المنحنى تكونُ محصورةٌ بينَ 1- ,1+
- % 95.44 من إجمالي المساحةِ تحتَ المنحنى تكونُ محصورةٌ بينَ 2- ,2+
- % 99.72 من إجمالي المساحةِ تحتَ المنحنى تكونُ محصورةٌ بينَ 3 - , 3 +

هذا ويمكنُ التّعبيرُ عمّا سبقَ بالشّكلِ (1−15) ويمكنُ التّعبيرُ عنهُ رمزيّاً كالآتي:

$$P(-1 < Z < 1) = 0.6826$$
$$P(-2 < Z < 2) = 0.9544$$
$$P((-3 < Z < 3) = 0.9974$$

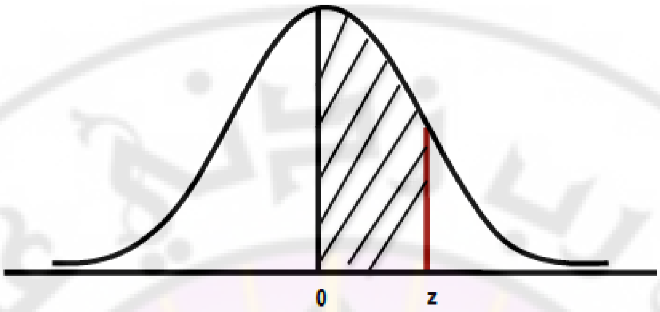


شكل (1−15): التّمثيلُ البيانيُّ وتوزيعُ البياناتِ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياري.

ويمكنُ حسابُ احتمالِ وقوعِ (Z) في أيِّ فترةٍ تريدها؛ وذلكَ بإيجادِ قيمةِ تكاملِ دالّةِ الكثافةِ الاحتماليّةِ في هذهِ الفترةِ؛ أي بإيجادِ المساحةِ المحصورةِ تحتَ منحنى هذهِ الدّالةِ داخلَ هذهِ الفترة.

ولأنَّ متوسّطَ التّوزيعِ الطّبيعيِّ القياسيِّ دائماً يساوي صفر، وتباينهُ يساوى واحد، فقد تمكّنَ الإحصائيّونَ من حسابِ المساحاتِ (أو الاحتمالاتِ) تحتَ المنحنى الطّبيعيِّ المعياريِّ والتي تقابلُ (Z) ووضعها في جدولٍ يعطي احتمالاتِ وقوعِ المتغيّرِ (Z) في فترةٍ معيّنةٍ. ونلاحظُ أنَّ الجدولَ يعطي قيمَ (Z) الموجبةِ حيثُ هيَ نفسها إذا كانت (Z) بالسّالبِ وذلك لتماثلِ المنحنى.

فمثلاً يمكنُ بواسطةِ الجدولِ حسابُ الاحتمالِ $P(1\leq Z \leq 2)$. والجدولُ يعطى احتمالَ وقوعِ (Z) بينَ الصّفر وأيِّ قيمةٍ موجبةٍ لـ Z؛ أي يعطي $P(0\leq Z \leq z)$ وهيَ المساحةُ المظلّلةُ في الشّكلِ (1−16):



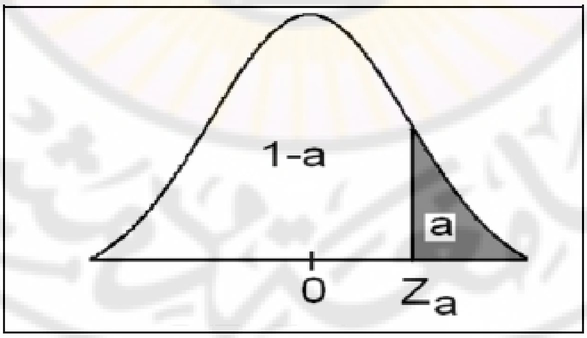
شكل (1−16): التّمثيلُ البيانيُّ لطريقةِ حسابِ احتمالٍ معيّنٍ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ.

ملاحظاتٌ:

- $P(-\infty \leq Z \leq +\infty) = 1$
- $P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0.5$

1−10−2− القيمُ الجدوليّةُ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ (Z - Tabulated Value):

نرمزُ لقيمةِ المتغيّرِ العشوائيِّ (Z) الذي يتوزّعُ وفقَ التّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريِّ والتي يليها (على يمينها) مساحةٌ مقدارها (a) ويسبقها (على يسارها) مساحةٌ مقدارها (1-a) بالرّمزِ (Z_a)، والشّكلِ (1−17) يوضّحُ هذا التّرميز.



شكل (1−17): التّمثيلُ البيانيُّ للقيمِ الجدوليّةِ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ.

بسببِ تماثلِ منحنى التّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريِّ حولَ الصّفر فإنَّ: $Z_a = -Z_{1-a}$

كيفيّةُ استخدامِ جدولِ توزيعِ الاحتمالاتِ المتجمّعةِ للمتغيّرِ العشوائيِّ Z

مثال (1−11): أوجدِ احتمالَ أنَّ Z أقلَّ من $(Z<1.64)$

الحلُّ: الجدولُ (1−11) جزءٌ منَ الجدولِ الإحصائيِّ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ.

جدول (1−11): كيفيّةُ استخراجِ القيمِ الجدوليّةِ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
1.6					0.9495	

إنَّ الاحتمالَ المتجمّعَ المناظرَ للقيمةِ (1.64) يوجدُ أمامَ الصّفِّ (1.6) وتحتَ العمودِ (0.04) (لاحظ أنَّ $1.6 + 0.04 = 1.64$) وهيَ قيمةُ Z المطلوبُ إيجادُ الاحتمالِ المتجمّعِ عندها، وهذا الاحتمالُ هوَ (0.9495)، أي $P(Z<1.64)=0.9495$ وهذا هوَ الاحتمالُ المتجمّعُ للمتغيّرِ Z من $(-\infty)$ إلى (1.64).

وتُوجَدُ جداولُ إحصائيّةٌ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريِّ لقيمِ (Z) الموجبةِ وجداولُ أخرى لحسابِ قيمِ (Z) السّالبةِ وتُنشَرُ هذهِ الجداولُ في كافّةِ المراجعِ الإحصائيّة.

الجدولُ (1−12) يعرضُ أهمَّ حالاتِ استخراجِ قيمِ (Z) الجدوليّةِ في حالاتٍ مختلفةٍ معَ أمثلة:

قواعدُ وأمثلةٌ لحسابِ قيمِ (Z) الجدوليّةِ في حالاتٍ مختلفةٍ:

جدول (1−12): قواعدُ وأمثلةٌ لحسابِ احتمالاتِ التّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ.

	القاعدةُ	مثال
1−	$P(-\infty \leq Z \leq +\infty)=1$	
2−	$P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) =0.5$	
3−	$P(Z < 0) = \Phi(0)=0.5$	$P(Z > 0) =1- \Phi(0)=1-0.5=0.5$
4−	$P(Z < a) = \Phi(a)$	$P(Z < 1.5) = \Phi(1.5)=0.9332$
5−	$P(Z < -a) = \Phi(-a)$	$P(Z < -1.2) = \Phi(-1.2)=0.1151$
6−	$P(a < Z < b) = \Phi(b)-\Phi(a)$	$P(1 < Z < 2.4) = \Phi(2.4)-\Phi(1)=0.9918-0.8413$
7−	$P(Z > a) =1- \Phi(a)$	$P(Z > 0.8) = 1- \Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$
8−	$P(Z > -a) =1- \Phi(-a)$	$P(Z > - 0.8) = 1- \Phi(-0.8)=1-0.2119=0.7881$

مثال (1-12): إذا كانَ Z متغيّرٌ عشوائيٌّ متّصلٌ يتبعُ التّوزيعَ الطّبيعيَّ القياسيَّ فأوجد ما يلِي:

- $P(Z \leq 1.54)$
- $P(-1.8 \leq Z \leq 0)$
- $P1 \leq Z \leq 2)$

الحلُّ:

- $P(Z \leq 1.54) = 0.9382$
- $P(-1.8 \leq Z \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-1.8) = 0.5 - 0.359 = 0.4641$
- $P(1 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$

1-10-3- حسابُ الاحتمالاتِ في حالةِ التّوزيعِ الطّبيعيِّ العاديّ:

إذا كانَ المتغيّرُ (X) يتبعُ توزيعاً طبيعيّاً مُتوسّطه (μ) وتباينهُ (σ^2) وأردنا حسابَ أيَّ احتمالٍ حولَ المتغيّرِ (X)؛ فإنّنا نحوّلهُ أوّلاً إلى متغيّرٍ يتبعُ التّوزيعَ الطّبيعيَّ القياسيَّ بوساطةِ التّحويلة $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ فيصبحُ توزيعاً طبيعيّاً معياريّاً $Z \sim N(0,\ 1)$

وهكذا يمكنُ حسابُ الاحتمالِ $P(a < X < b)$ بتحويلِهِ للتّوزيعِ المعياريِّ أوّلاً كَمَا يأتي:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

وهذا الاحتمالُ الأخيرُ يمكنُ الحصولُ عليهِ من جدولِ التّوزيعِ الطّبيعيِّ القياسيّ.

مثال (1-13): إذا كانت أطوالُ مجموعةٍ منَ النّباتاتِ تتبعُ توزيعاً طبيعيّاً مُتوسّطهُ 168 سم، و انحرافهُ المعياريّ 6 سم. أخذنا عشوائيّاً أحدَ النّباتات. ما هوَ احتمالُ أن يكونَ طولهُ:

1) أقلُّ من 159 سم؟
2) أكبرُ من 180 سم؟
3) واقعاً في الفترةِ (165، 174)؟

الحلُّ:

1) أقلُّ من 159 سم:

إذا جعلنا المتغيّرَ المتّصلَ (X) يرمزُ لأطوالِ النّباتات, فإنَّ (X) يكونُ متغيّراً عشوائيّاً يتبعُ توزيعاً طبيعيّاً مُتوسّطهُ 168 سم، وانحرافهُ المعياريُّ 6 سم.

$$P(X \leq 159) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{159-168}{6}\right) = P(Z \leq -1.5) = \Phi(-1.5) = 0.0668$$

2) أكبرُ من 180 سم

$$P(X \geq 180) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{180-168}{6}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

3) واقعاً في الفترةِ (174، 165):

$$P(165 \leq X \leq 174) = P\left(\frac{165-168}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{174-168}{\sigma}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) = 0.841 - 0.308 = 0.532$$

مثال: إذا كانَ معلوماً أنَّ عددَ القطعِ المعيبةِ في خطِّ إنتاجٍ للمعلّباتِ الغذائيّةِ يتبعُ توزيعَ بواسون بنسبةٍ قدرها (0.3%) معيبةٌ منَ العددِ الكلّيّ. أُخذت عيّنةٌ عشوائيّةٌ من الإنتاجِ حجمها (350) قطعة.

إذا عُرّفَ المتغيّرُ العشوائيُّ (X) بأنّهُ عددُ المعلّباتِ التّالفةِ منَ العيّنةِ المُختَارة، احسبِ الاحتمالاتِ الآتية:

- وجودُ قطعةٍ معيبةٍ
- وجودُ قطعتانِ معيبتانِ
- عدمُ وجودِ أيّةِ قطعٍ معيبةٍ
- وجودُ وحدتانِ معيبتانِ على الأكثرِ

الحلُّ:

عمليّةُ سحبِ العيّنةِ تمثّلُ سلسلةً عددها (n=350)، واحتمالُ أن تكونَ القطعةُ معيبةً (النّجاح) هوَ (p=0.003). منَ الواضحِ بأنَّ n كبيرة، و p صغيرة أي يكونُ $\lambda = np = 350(0.003) = 1.05$

$$P(X = r) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^r}{r!} = \frac{e^{-1.05} \times (1.05)^r}{r!} \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

بفرضِ أنَّ X يمثّلُ عددَ القطعِ المعيبةِ في العيّنةِ لهُ توزيعُ بواسون r = 0, 1, 2,

- احتمالُ وجودِ قطعةٍ معيبةٍ $p(X=1) = \frac{e^{-1.05} \times 1.05^1}{1!} = (0.3499)(1.05) = 0.367$
- احتمالُ وجودِ قطعتانِ معيبتانِ

$$p(X=2) = \frac{e^{-1.05} \times 1.05^2}{2!} = (0.3499)(0.55125) = 0.193$$

- احتمالُ عدمِ وجودِ أيّةِ قطعٍ معيبةٍ

$$p(X=0) = \frac{e^{-1.05} \times 1.05^0}{0!} = 0.350$$

- احتمالُ وجودِ وحدتانِ معيبتانِ على الأكثرِ

$$P(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = = 0.350 + 0.367 + 0.193 = 0.91$$

الفصلُ الثّاني

اختباراتُ الفروضِ الإحصائيّةِ

Testing Statistical Hypotheses

اختباراتُ الفروضِ الإحصائيّةِ

Testing Statistical Hypotheses

2-1- مقدّمة:

يُعدُّ موضوعُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ مِن أهمِّ المواضيعِ فِي مجالِ اتّخاذِ القراراتِ، وهوَ مِن أهمِّ التّطبيقاتِ التّي قدّمها علمُ الإحصاءِ كحلٍّ للمشاكلِ العلميّةِ المختلفةِ بشتّى فروعِ العلومِ، فمثلاً نحتاجُ كثيراً فِي الحياةِ العمليّةِ إلى التّحقُّقِ منْ صحّةِ فرضٍ أو ادّعاءٍ ما، وقد يكونُ هذا التّحقُّقُ سهلاً ومؤكّداً مثلَ ادّعاءِ شخصٍ ما أنَّ السّماءَ تمطرُ بالخارجِ وللتّحقُّقِ من صحّةِ هذا الادّعاءِ يكفي أن نذهبَ لخارجِ المبنى ونتأكّدَ هلِ السّماءُ تمطرُ أم لا؟ وأحياناً يكونُ التّحقُّقُ من صحّةِ الادّعاءِ صعباً مثلَ ادّعاءِ شخصٍ أنّهُ ذهبَ إلى أَحَدِ الأسواقِ التّجاريّةِ في مدينةِ دمشق. وأحياناً أخرى يكونُ التّحقُّقُ منَ الادّعاءِ مستحيلاً مثلَ ادّعاءِ شخصٍ أنّهُ قد أضمرَ شيئاً معيّناً في نفسه.

وفي علمِ الإحصاءِ نسمّي الادّعاءَ بـ (فَرَضِ العَدَمِ) ونسمّي التّحقُّقَ منهُ بـ (اختبارِ فرَضِ العَدَمِ) ونحتاجُ إلى عمليّةِ تطبيقِ اختباراتِ الفروضِ في كثيرٍ منَ الحالاتِ مثلَ اختبارِ الفَرَضِ بأنَّ متوسّطَ دخلِ الفردِ في دمشقَ هوَ 45000 ليرةٍ سوريّة، أوِ اختبارِ ادّعاءِ مديرِ مصنعِ الأقلامِ بأنَّ نسبةَ القِطَعِ التّالفةِ في مصنعهِ لا تتجاوزُ (3%)، أوِ ادّعاءِ أَحَدِ الأطبّاءِ أنَّ نسبةَ الشّفاءِ في عيادتهِ لا تقلُّ عن (90%) .... وهكذا.

وبالتالي فإنَّ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ هيَ وضعُ قواعدَ تمكّنُ منَ التّوصُّلِ إلى قرارٍ بقبولِ أو رفضِ فرضٍ عن معالمِ مجتمعٍ واحدٍ أو أكثرَ ومن خلالها يمكنُ لأيِّ شخصٍ أن يتّخذَ قراراً برفضِ أو قبولِ فَرَضٍ معيّنٍ متعلّقٍ بمشكلةٍ معيّنةٍ موجودةٍ في الحياةِ العامّة.

مثال (2-1): بفرضِ أنَّ إحدى شركاتِ إنتاجِ المعلّباتِ تكتبُ على المنتجِ أن وزنهُ الصّافي (120) جرام وللتّأكُّدِ من صحّةِ هذا الادّعاءِ تمَّ أخذُ عيّنةٍ حجمها (100) علبةٍ لاختبارها، ووجدَ أنَّ مُتوسّطَ أوزانِ هذهِ العيّنةِ هوَ (118.9) جرام، فهل يمكنُ الحُكمُ على هذهِ الشّركةِ بأنّها تقومُ بعمليّةِ غشٍّ أو كذبٍ على المستهلكِ بناءً على هذهِ العيّنةِ؟ وأنَّ جميعَ منتجاتِ هذهِ الشّركةِ من هذهِ المعلّباتِ أقلُّ من 120 جرام؟ الإجابةُ بالطبعِ لا؛ لا يمكنُ اتّخاذُ القرارِ إلا بعدَ إجرا اختبار إحصائيٍّ للتّحقُّقِ من صحّةِ ما كُتِبَ على المُنتَجِ، وهذا الإجراءُ هوَ ما يُسمّى باختبارِ الفروضِ الاحصائيّة (Test of Hypothesis) حولَ مُتوسّط المجتمع.

مثال (2-2): نفرضُ أنَّ باحثاً اجتماعيّاً ادّعى أنَّه لا يوجد فرق معنوي بين مُتوسّطَ أعمارِ الطلابِ و مُتوسّطِ أعمارِ الطّالبات في جامعة ما. للتّأكُّدِ من هذا الادّعاءِ تمَّ اختيارُ عيّنةٍ عشوائيّةٍ مِن الطّلابِ وعيّنةٍ عشوائيّةٍ مِن الطّالباتِ فإذا كانَ متوسّطُ عمرِ الطّالبِ هو(24) سنة وكانَ مُتوسّطُ عمرِ الطّالبات (22) سنة، فهل يعني ذلكَ أنَّ مُتوسّطَ عمرِ الطّالبِ أكبرُ مِن مُتوسّطِ عمرِ الطّالبةِ؟ هلِ الفرقُ راجعٌ لمجرّدِ الصّدفةِ؟ متى يكونُ الفرقُ نتيجةً للصّدفةِ؟ متى يكونُ الفرقُ دالاً على وجودِ اختلافٍ حقيقيٍّ أو جوهريٍّ بينَ مُتوسّطي المجتمعين الأصليّين.

وقبلَ تناولِ كيفيةِ إجراءِ الاختباراتِ الإحصائيّةِ نستعرضُ أوّلاً بعض المفاهيمِ والتّعريفاتِ الأساسيّةِ اللّازمةِ لهذا الموضوعِ حتّى تكون الصّورةُ أكثرَ وضوحاً.

2-2- تعريفُ بعضِ المفاهيمِ المهمّةِ:

هناكَ بعضُ المفاهيمِ المتعلّقةِ باختباراتِ الفروضِ لابدَّ مِن معرفتها:

- **المقياسُ الإحصائيّ:** هو قيمةٌ وحيدةٌ محسوبةٌ مِن بياناتِ العيّنةِ أو المجتمعِ تحتَ شروطٍ معيّنةٍ.
- **الفرضيّةُ (Hypothesis):** هِيَ ادّعاءٌ حولَ صحّةِ شيءٍ ما قد يكونُ صحيحاً أو خطأً.
- **الفرضيّةُ الإحصائيّةُ (Statistical Hypothesis):** هيَ عبارةٌ عن ادّعاءٍ أو تخمينٍ قد يكونُ صحيحاً أو خاطئاً حولَ معلمةٍ أو أكثرَ لمجتمعٍ أو لمجموعةٍ مِنَ المجتمعاتِ، ويكونُ المطلوبُ اختبارُ صحّةِ هذا الادّعاءِ أو التّخمينِ.
- **اختباراتُ الفروضِ الإحصائيّةِ (اختبارُ المعنويّةِ):** هيَ طريقةٌ معياريّةٌ لاختبارِ ادّعاءٍ (فرضٍ) حولَ معلمةٍ لمجتمعٍ أو أكثرَ معتمدةً في ذلكَ على بياناتِ عيّنةٍ مسحوبةٍ مِن ذلكَ المجتمعِ.

إنَّ الغرضَ مِنَ اختباراتِ الفروضِ هوَ وصولُ الباحثِ إلى قرارٍ بخصوصِ فرضٍ معيّنٍ حولَ معلمةِ المجتمعِ، معَ احتمالِ الوقوعِ في خطأٍ يحدّدهُ الباحثُ؛ وذلكَ بتحديدِ مناطقِ رفضِ وقبولِ فرضِ العدمِ أسفلَ منحنى التّوزيعِ.

تعتمدُ اختباراتُ الفروضِ على بياناتِ العيّنةِ وفرْضِ قيمةٍ معيّنةٍ لمعلمةٍ من معالمِ المجتمعِ حيثُ يكونُ الاختبار: هل هناكَ فرقٌ معنويٌّ بينَ قيمةِ معلمةِ المجتمعِ المفروضةِ والقيمةِ المقدَّرةِ لها مِن خلالِ بياناتِ العيّنةِ؟ فإذا كانَ هناكَ فرقٌ فهل يرجعُ هذا الفرقُ إلى خطأِ المعاينة؟ أم هوَ فرقٌ حقيقيٌّ معنويٌّ (Significant). فإذا كانَ الفرقُ معنويّاً فيكونُ القرارُ هوَ عدمُ قبولِ الفرضِ العدميِّ وعليهِ فإنّنا نقبلُ بالفرضِ البديلِ. أمّا إذا كانَ الفرقُ غيرُ معنويٍّ فإنّنا نقبلُ الفرضَ العدميّ.

2-3- مفهومُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ المعلميّةِ واللّامعلميّة:

تنقسمُ اختباراتُ الفروضِ الإحصائيّةِ إلى قسمينِ:

أولاً: اختباراتُ الفروضِ الإحصائيّةِ المعلميّةِ (Parametric Tests): في هذا القسمِ يكونُ معلومٌ لدينا التّوزيعُ الذّي تتبعهُ البياناتُ وما إذا كانَ توزيعاً متّصلاً أم منفصلاً (متقطّعاً) ويكونُ المطلوبُ هوَ اختبارُ فروضٍ حولَ معالمِ المجتمعِ مثلَ الفروضِ المتعلّقةِ بالوسطِ الحسابيّ، النّسبة، التّباين، معاملُ الارتباطِ، وهذا النوعُ مِنَ الفروضِ قد لا تتعلّقُ بمعالمِ المجتمعِ ولكن تتعلّقُ بأشياءٍ أخرى قد تكونُ وصفيّةً مثلَ العلاقةِ بينَ التّعليمِ والتّدخين.

ثانياً: اختباراتُ الفروضِ الإحصائيّةِ اللّامعلميّةِ (Non Parametric Test): في كثيرٍ مِنَ التّجاربِ والأبحاثِ يكونُ لدينا بياناتٌ واقعيّةٌ يصعبُ مِن خلالها التّعرُّفُ على التّوزيعِ الذّي تتبعهُ هذهِ البياناتِ، ومِن هنا نشأتِ الحاجةُ إلى ما يُعرَفُ باختباراتِ الفروضِ اللّامعلميّة؛ حيثُ لا تحتاجُ مثلُ هذهِ الاختباراتِ معرفةَ شكلِ التّوزيعِ الذّي تتبعهُ البياناتُ محلَّ الدّراسةِ, كَمَا يُفضَّلُ استخدامها عندما يكونُ حجمُ العيّنةِ المسحوبةِ مِنَ المجتمعِ صغيرًا نسبيّاً. و سوفَ نهتمُّ في هذا الفصلِ باختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ المعلميّةِ فقط.

البياناتُ المعلميّةُ:

تكونُ البياناتُ معلميّةً إذا كانت تحقّقَ الشّرطينِ التّاليين:

1- إذا كانت مقاييسُ البياناتِ كمّيّة (نسبيٌّ أو فئويّ).

2- تتبعُ التّوزيعَ الطّبيعيّ.

2-4- أنواعُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

تنقسمُ الفروضُ الاحصائيّةُ إلى قسمينِ هما:

الفرضُ العدميُّ (الصّفريُّ) (H_0) (Null Hypothesis): هوَ عبارةٌ عن جملةٍ لفظيّةٍ أو رياضيّةٍ تعبّرُ عن معلمةِ المجتمعِ (أو معلمتي مجتمعينِ أو أكثر) ويُرمَزُ للفرضِ العدميّ (H_0)، ويتضمّنُ الفرضُ العدميُّ علامةً مِنَ العلاماتِ التّالية: $(=, \leq, \geq)$

وصياغةُ الفرضِ العدمِ تختلفُ باختلافِ حالةِ الدّراسةِ؛ فمثلاً إذا كانَ الغرضُ مِنَ الدّراسةِ هيَ اختبارُ ادّعاءٍ حولَ مُتوسّطِ مجتمعٍ ما، يكونُ الفرضُ العدميُّ هوَ افتراضَ أنَّ الادّعاءَ صحيحٌ؛ أي أنَّ متوسّطَ المجتمعِ الحقيقيُّ هوَ فعلاً نفسُ المتوسّطِ المزعوم $(H_0: \mu = \mu_0)$

أمّا إذا كانَ الغرضُ هوَ اختبارُ تساوي معلمتي مجتمعينِ فِي مثالِ أعمارِ الطّلابِ وطالباتِ الجامعةِ فإنَّ فرضَ العدمِ هوَ: $(H_0: \mu_1= \mu_2)$ أي يُفترَضُ عدمُ وجودِ اختلافٍ بينَ مُتوسطي أعمارِ الطّلابِ والطّالبات.

الفرضُ البديلُ (H_1) (Alternative Hypothesis):

هوَ عبارةٌ عن جملةٍ لفظيّةٍ أو رياضيّةٍ تعبّرُ عن معلمةِ المجتمعِ (أو معلمتي مجتمعينِ أو أكثر) و هوَ الفرضُ الذّي يضعهُ الباحثُ كبديلٍ عن فرضِ العدمِ ويتمُّ قبولهُ في حالِ رفضِ الفرضِ الصّفريِّ ويُرمَزُ للفرضِ البديلِ (H_1)، ويتضمّنُ الفرضُ البديلُ علامةً مِنَ العلاماتِ التّاليةِ $(<, >, \neq)$.

فمثلاً فِي مثالِ أعمارِ الطّلابِ وطالباتِ الجامعةِ فإنَّ الفرضَ البديلَ هوَ $(H_1: \mu_1 \neq \mu_2)$ أي أنّهُ يوجدُ اختلافٌ حقيقيٌّ بينَ مُتوسّطِ أعمارِ الطّلابِ و مُتوسّطِ أعمارِ الطّالبات.

يهدفُ اختبارُ الفرضيّاتِ الإحصائيّةِ إلى اتّخاذِ قرارٍ حولَ ما إذا كانَ الفرضُ الصّفري (H_0) مقبولٌ أم مرفوضٌ ويتمُّ ذلكَ باستخدامِ دالّةِ اختبارٍ إحصائيّةٍ مناسبة.

إنَّ قبولَ الفرضِ الصّفريِّ لا يعني بالضّرورةِ أنّهُ صحيحٌ وإنّما لا يوجدُ أدلةٌ كافيةٌ مِن بياناتِ العيّنةِ لرفضه، كَمَا أنَّ رفضهُ لا يعني بالضّرورةِ أنّهُ خاطئٌ؛ بل يعني أنَّ الإحصائيّةَ المحسوبةَ مِنَ العيّنةِ كانت بعيدةً عنِ المعلمةِ المناظرةِ لها فِي المجتمعِ ممّا يدفعنا إلى رفضِ الفرضِ الصّفريّ.

اختيارُ مستوى المعنويّةِ α ودرجةِ الثّقةِ $(1 - \alpha)$:

إنَّ القرارَ الإحصائيَّ الذّي سيُتّخذُ بناءً على الاختبارِ الإحصائيِّ لا يمكنُ اعتبارهُ صحيح % 100 فهناكَ مقدارٌ مِنَ الخطأِ لأنَّ المعلوماتِ التّي اتُّخِذَ القرارُ بناءً عليها مأخوذةٌ مِن عيّنةٍ وليسَ مِنَ المجتمعِ الأصليّ.

فِي اختبارِ فرضٍ معيّن، فإنَّ مقدارَ ثقتنا فِي القرارِ الإحصائيِّ المُتَّخذِ بالقبولِ أو الرّفضِ يُسمّى بدرجةِ الثّقةِ ويُرمَزُ لهُ بالرّمزِ $(1 - \alpha)$ كَمَا أنَّ مقدارَ عدمِ الثّقةِ يُسمّى بمستوى المعنويّةِ (أو احتمالُ الخطأِ)، (Significance Level) ويُرمَزُ لهُ بالرّمزِ (α). أي أنّهُ إذا كانت درجةُ الثّقةِ 95% فإنَّ مستوى المعنويّةِ تساوي $(\alpha=0.05)$ وهيَ تمثّلُ مساحةَ منطقةِ الرّفضِ تحتَ منحنى التّوزيعِ وتكونُ إما على شكلِ ذيلٍ واحدٍ جهةَ اليمينِ أوِ اليسارِ أو ذيلينِ متساويينِ فِي المساحةِ واحدٌ جهةَ اليمينِ والثّاني جهةَ اليسارِ.

مستوى المعنويّة (احتمالُ الخطأِ): اعتادَ الباحثونَ على مستوى معنويّة $(\alpha=0.05)$ أو $(\alpha=0.01)$، حسبَ نوعِ التّجربةِ وهذهِ النّسبةُ مرتبطةٌ ومكمّلةٌ بمعاملِ الثّقة.

درجةُ (معاملُ) الثّقةِ: هي درجةُ الثّقةِ في النّتائجِ، اعتادَ الباحثونَ على درجة ثقة 95% وأغلبُ درجاتِ الثّقةِ المستخدمةِ هي (90% أو 95% أو 99%).

درجةُ الحرّيّةِ: عددُ مفرداتِ العيّنةِ –1 أي (n-1).

وعادةً يحدّدُ الباحثُ مستوى المعنويّةِ أو درجةَ الثّقةِ قبلَ البدءِ في عمليّةِ الاختبارِ. ومفهومُ مستوى المعنويّةِ مرتبطٌ بمفهومِ الخطأِ مِنَ النّوعِ الأوّلِ والخطأِ مِنَ النّوعِ الثّاني كَمَا يلِي:

2–4–1– أنواعُ الأخطاءِ:

الخطأُ مِنَ النّوعِ الأوّلِ (α) والخطأُ مِنَ النّوعِ الثّاني (β):

إنَّ أيَّ قرارٍ إحصائيٍّ يمكنُ أن ينتجَ عنهُ نوعانِ مِنَ الأخطاء وذلكَ وفقاً لقيمةِ مستوى المعنويّةِ (the level of significance) (α) المحدَّدةِ مسبقاً.

1– الخطأُ مِنَ النوعِ الأوّلِ (a type I error) :

يحدثُ هذا النّوعُ مِنَ الخطأِ عندَ رفضِ الفرضِ العدميِّ وهوَ في الحقيقةِ صحيحٌ باحتمالٍ مقدارهُ (α). والخطأُ مِنَ النّوعِ الأوّلِ يمكن التّحكمُ فيهِ، والذّي يحدّدهُ الباحثُ قبلَ الاختبارِ والذّي يمثّلُ مستوى المعنويّةِ.

2– الخطأُ مِنَ النّوعِ الثّاني (a type II error):

يحدثُ هذا النّوعُ منَ الخطأِ عندَ قبولِ الفرضِ العدميِّ وهوَ في الحقيقةِ خاطئٌ وذلكَ باحتمالٍ مقدارهُ (β).

الجدولُ (2–1) يوضحُ أنواعَ الأخطاءِ.

جدول (2–1): الخطأُ مِنَ النّوعِ الأوّلِ (α) والخطأُ مِنَ النّوعِ الثّاني (β).

القرارُ		في الواقعِ (الحقيقةُ) Population	
		الفرضُ الصّفريُّ صحيح (H_0 صحيح)	الفرضُ الصّفريُّ خاطئ (H_0 خطأ)
في العيّنةِ Sample	رفض H_0	خطأ منَ النّوعِ الأوّلِ=(α)	القرار صائب (power of test probability = 1- β)
	قبول H_0	القرار صائب (power of test probability = 1-α)	خطأ منَ النّوعِ الثّاني= (β)

هنا عندما نقولُ أنَّ الفرضَ الصّفريَّ بالحقيقةِ صحيح (H_0 صحيح) نقصدُ بها أنّهُ بناءً على بياناتِ المجتمعِ الحقيقيّةِ للظّاهرةِ كانَ صحيحاً، بينما القرارُ الإحصائيُّ بقبولِ أو رفضِ الفرضِ العدميِّ يَتِمُّ بناءً على المقاييسِ التّي تُحسَبُ مِن بياناتِ العيّنةِ المسحوبةِ مِن ذلكَ المجتمعِ، وبالتّالي يمكنُ لهذا القرارِ أن يكونَ صائباً أو خاطئاً بنسبٍ مختلفةٍ.

2-4-2- القراراتُ الإحصائيّةُ:

إنَّ القرارَ الإحصائيَّ بقبولِ أو رفضِ الفرضِ العدميِّ يتمُّ بناءً على المقاييسِ التّي تُحسّبُ مِن بياناتِ العيّنةِ المسحوبةِ مِن ذلكَ المجتمعِ، وبالتّالي يمكنُ لهذا القرارِ أن يكونَ صائباً أو خاطئاً بنسبٍ مختلفة.

عندَ اختبارِ فرضِ العدم (H_0) ضدَّ الفرضِ البديل (H_1) عندها يمكنُ تقسيمُ القراراتِ الإحصائيّةِ إلى أربعِ فئاتٍ كَمَا يلِي:

1- أن يكونَ القرارُ الإحصائيُّ هوَ قبولُ فرضِ العدمِ وهوَ فِي الحقيقةِ صحيح، وهذا قرارٌ صائب. ويكونُ احتمالُ قبولِ الفرضِ العدمِ وهوَ فِي الحقيقةِ صحيح.
$P(\text{accept Ho}|\ \text{Ho is correct}) = (1-\alpha)$

2- أن يكونَ القرارُ الإحصائيُّ هوَ رفضُ فرضِ العدمِ وهوَ في الحقيقةِ صحيح، وهذا قرارٌ خاطئ. (هذا الخطأُ منَ النوعِ الأوّل): فيكونُ احتمالُ رفضِ الفرضِ العدمِ وهوَ فِي الحقيقةِ صحيح (احتمالُ وقوعِ خطأٍ منَ النّوعِ الأوّل) $P(\text{reject Ho}|\ \text{Ho is correct}) = \alpha$

3- أن يكونَ القرارُ الإحصائيُّ رفضُ فرضِ العدمِ وهوَ فِي الحقيقةِ خطأ، وهذا قرارٌ صائبٌ. فيكونُ احتمالُ رفضِ الفرضِ العدمِ وهوَ فِي الحقيقةِ خاطئ.
$P(\text{reject Ho}\ |\text{Ho is uncorrected}) = (1-\beta\ )$

4- أن يكونَ القرارُ الإحصائيُّ هوَ قبولُ فرضِ العدمِ وهوَ فِي الحقيقةِ خطأ، وهذا قرارٌ خاطئ (الخطأُ منَ النّوعِ الثّاني: قبولُ (H_0) عندما يكون (H_0) خاطئٌ ويُرمَزُ لحجمِ هذا الخطأِ بالرّمز β).
(احتمالُ وقوعِ خطأٍ منَ النّوعِ الثّاني).$P(\text{accept Ho}|\ \text{Ho is uncorrected}) = \beta$

و الخطأُ منَ النّوعِ الأوّلِ ألفا (α) يمكنُ أن يُقلَّلَ بتقليلِ مستوى المعنوية (α). أمّا الخطأُ منَ النّوعِ الثّاني بيتا (B) يمكنُ أن يُقلَّلَ بزيادةِ حجمِ العيّنة، والخطأُ مِنَ النّوعِ الأوّلِ أكثرُ خطورةً مِنَ النّوعِ الثّاني، حيث إنَّ الخطأَ مِنَ النّوعِ الثّاني لا يحدّدهُ الباحثُ بل يتمُّ حسابهُ ويعتمدُ على خمسةِ عواملَ وهيَ:

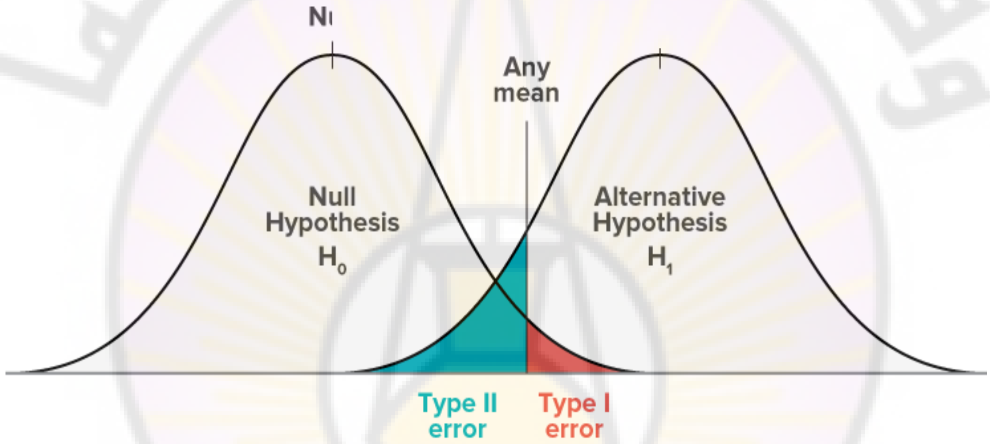
1) القيمةُ الحقيقيّةُ لمعلمةِ المجتمعِ.
2) قيمةُ (α) المختارةِ
3) نوعُ الاختبارِ (ذاتُ ذيلينِ أو ذيلٍ واحدٍ).
4) الانحرافُ المعياريُّ للعيّنةِ.
5) حجمُ العيّنةِ.

قوّةُ الاختبارِ Power of the Test:

- قوةُ الاختبارِ هيَ عبارةٌ عن قدرةِ الاختبارِ على رفضِ الفرضِ الصّفريِّ عندما يكونُ فِي الحقيقةِ خاطئٌ وتساوي: $(power\ of\ test = 1 - \beta)$(وهذهِ هيَ القوّةُ فِي الاختبارِ).
- وهناكَ علاقةُ ارتباطٍ عكسيّةٍ بينَ قوّةِ الاختبارِ والخطأِ مِنَ النّوعِ الثّاني (β)؛ أي إذا زادَ الأوّلُ ينقصُ الثّاني والعكسُ صحيحٌ؛ أي أن $(\beta = 1 - power\ of\ test)$

العلاقةُ بينَ الخطأ مِنَ النّوعِ الأوّلِ و الخطأ مِنَ النّوعِ الثّاني

العلاقةُ بينَ الخطأِ مِنَ النّوعِ الأوّلِ والخطأِ مِنَ النّوعِ الثّاني علاقةٌ عكسيّةٌ؛ أي كلّما زادَ الخطأُ مِنَ النّوعِ الأوّلِ ينقصُ الخطأُ مِنَ النّوعِ الثّاني (β) والعكسُ صحيحٌ كَمَا بالشّكلِ (2−1):



شكل (2−1): العلاقةُ بينَ الخطأِ مِنَ النّوعِ الأوّلِ والخطأِ مِنَ النّوعِ الثّاني.

2−5− خطواتُ إجراءِ اختبارِ الفروضِ الإحصائيّةِ:

الاختبارُ الإحصائيُّ قد يكونُ متعلّقاً بعيّنةٍ واحدةٍ أو عينتينِ أو أكثر؛ ولذلكَ يجبُ أن يمرَّ الاختبارُ بعدّةِ خطواتٍ يمكنُ إيجازها فِي التّالي:

1− صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ حولَ معالمِ مجتمعٍ أو أكثر وتحديدِ مستوى المعنويّةِ.

2− حسابُ قيمةِ إحصاءةِ الاختبارِ بالاعتمادِ على عيّنةٍ أو عينات مسحوبةٍ مِن مجتمعاتِ الدّراسةِ.

3− تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ اعتماداً على القيمةِ الجدوليّةِ لتوزيعِ بياناتِ المجتمعِ (Z أو t او F).

4− المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ بقبولِ أو رفضِ الفرضِ العدميِّ بناءً على موقعِ قيمةِ إحصاءةِ الاختبارِ بالنّسبةِ لمناطقِ الرّفضِ.

أوّلاً: صياغةُ الفرضيّاتِ الإحصائيّةِ:

الفكرةُ الأساسيّةُ فِي اختبارِ الفروضِ هيَ تقسيمُ المساحةِ تحتَ المنحنى إلى منطقتينِ: إحداهما تُسمَّى منطقةُ القبولِ؛ أي منطقةُ قبولِ الفرضِ العدميّ. والأخرى تُسمَّى منطقةُ الرّفضِ؛ أي منطقةُ رفضِ الفرضِ العدميِّ التّي تُسمَّى أحياناً بالمنطقةِ الحرجةِ (Critical region)، والنّقطةُ الجديرةُ بالملاحظةِ هنا هيَ أنَّ منطقةَ القبولِ تمثّلُ مساحةً قدرها يساوي درجةَ الثّقة $(1-\alpha)$، بينما تمثّلُ منطقةُ الرّفضِ مساحةً تساوي مستوى المعنويّةِ (α).

بفرضِ أنَّ (θ) معلمةَ المجتمعِ المجهولةِ وكانت (θ_0) تمثّلُ قيمةَ معلمةِ المجتمعِ المفترضةِ (المزعومةِ)؛ فإنّهُ يمكنُ صياغةُ الفرضيّاتِ على إحدى الحالاتِ الثّلاثِ الموضَّحةِ بالجدولِ (2−2):

جدول (2−2): حالاتُ صياغةِ الفروضِ.

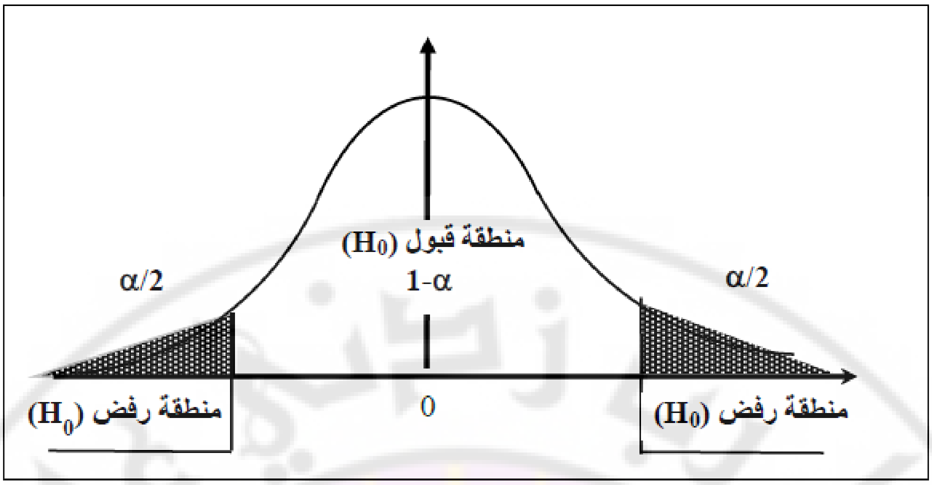
الحالةُ الأولى	الحالةُ الثّانية	الحالةُ الثّالثة
$\begin{Bmatrix} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{Bmatrix}$
اختبارُ الفرضيّاتِ ذو الطّرفين	اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ	اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسارِ

إذا كانَ الفرضُ البديلُ يأخذُ شكلَ "لا يساوي" فإنَّ منطقةَ الرّفضِ تكونُ موزّعةً على طرفيِّ المنحنى بالتّساوي، ويُسمّى الاختبارُ فِي هذهِ الحالةِ "اختبارُ الطّرفينِ"

الحالةُ الأولى: اختبارُ الفرضيّاتِ ذو الطّرفينِ (ذيلين):

تكونُ صياغةُ الفرضيّاتِ فِي هذهِ الحالةِ على الشّكلِ: $\begin{Bmatrix} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{Bmatrix}$

فِي هذهِ الحالةِ يأخذُ الفرضُ البديلُ شكلَ "لا يساوي"؛ أي أنَّ معلمةَ المجتمعِ لا تساوي القيمةَ المُدّعاة. وهنا تكونُ منطقةُ الرّفضِ موزّعةً على طرفيِّ المنحنى بالتّساوي ومساحةُ كلِّ طرفٍ $(\alpha/2)$؛أي أنَّ مساحة منطقةِ الرّفضِ (α)، بينما تكونُ منطقةُ القبولِ فِي المنتصفِ ومساحتها $(1-\alpha)$، ويُسمَى الاختبارُ فِي هذهِ الحالةِ "اختبارُ الطّرفينِ" كَمَا هوَ مبيَّنٌ بالشّكلِ (2−2):



شكل (2-2): التّمثيلُ البيانيُّ لاختبارِ الفرضيّاتِ **ذو طرفين**.

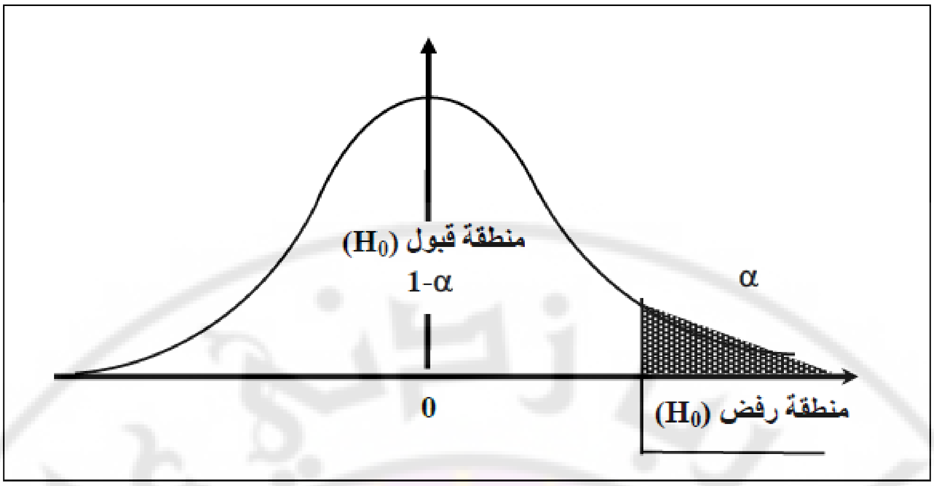
مثلاً إذا زعمَتْ شركةُ إنتاجِ المصابيحِ الكهربائيّةِ أنَّ متوسّطَ عمرِ المصباحِ هوَ (1000) ساعةِ عملٍ، ومِن أجلِ التّأكُّدِ مِن هذا الادّعاءِ تمَّ أخذُ عيّنةٍ مِن هذهِ المصابيحِ وتمَّ قياسُ عمرها الافتراضيِّ ومن ثمَّ يمكنُ صياغةُ الفرضيّاتِ حولَ علاقةِ متوسّطِ العيّنةِ بمتوسّطِ المجتمعِ (μ) كَمَا يلِي:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: μ= 1000) يعني أنَّ متوسّطَ عمرِ المصباحِ فعلاً يساوي 1000 ساعةَ عملٍ.
- الفرضُ البديلُ :(H_1: $\mu \neq$ 1000) يعني أنَّ متوسّطَ عمرِ المصباحِ لا يساوي 1000 ساعةَ عملٍ.

الحالةُ الثّانيةُ: اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ:

تكونُ صياغةُ الفرضيّاتِ فِي هذهِ الحالةِ على الشّكلِ: $\begin{Bmatrix} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{Bmatrix}$

فِي هذهِ الحالةِ الفرضُ البديلُ يأخذُ شكلَ "أكبر من"؛ أي أنَّ معلمةَ المجتمعِ أكبرُ مِنَ القيمةِ المدّعاةِ، هنا تكونُ منطقةُ الرّفضِ مركّزةٌ بالكاملِ فِي الطّرفِ الأيمنِ للمنحنى ومساحتها تساوي (α)، ويُسمَّى الاختبارُ فِي هذهِ الحالةِ اختبارٌ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ، والذّي يمثّلهُ الشّكل (2-3):



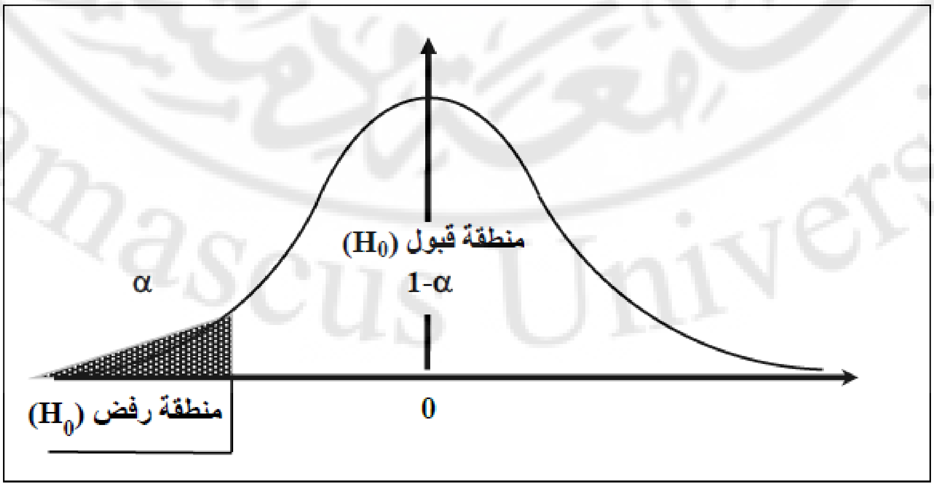
شكل (2-3): التّمثيلُ البيانيُّ لاختبارِ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمين.

وبالطّريقةِ نفسها لمثالِ المصابيحِ السّابقِ تُصاغُ الفروض؛ أي يكونُ الفرضُ العدميُّ نفسه، بينما الفرضُ البديلُ هو $(H_1: \mu > 1000)$ بمعنى أنَّ عمرَ المصباحِ أكبرُ من (1000) ساعةً. وبالتّالي فإنَّ مستوى المعنويةِ والذي يساوي $(\alpha=0.05)$ يكون موجود في الطّرفِ الأيمنِ منَ المنحنى.

الحالةُ الثّالثة: اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسار:

تكونُ صياغةُ الفرضيّاتِ في هذهِ الحالةِ على الشّكل: $\begin{Bmatrix} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{Bmatrix}$

في هذهِ الحالةِ الفرضُ البديلُ يأخذُ شكل "أصغر من"؛ أي أنَّ معلمةَ المجتمعِ أصغرُ منَ القيمةِ المدّعاة، هنا تكونُ منطقةُ الرّفضِ موجودة بالكاملِ في الطّرفِ الأيسرِ للمنحنى ومساحتها تساوي (α). ويُسمّى الاختبارُ في هذهِ الحالةِ اختبارٌ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسار، والذي يمثّلهُ الشّكل (2-4) :



شكل (2-4): التمثيل البياني لاختبار الفرضيات ذو طرف واحد نحو اليسار.

كذلكَ بالطّريقةِ نفسها لمثالِ المصابيحِ السّابقِ تُصاغُ الفروضُ؛ أي يكونُ الفرضُ العدميُّ نفسه، بينما الفرضُ البديلُ هوَ ($H_1: \mu < 1000$)؛ بمعنى أنَّ عمرَ المصباحِ أقلُّ مِن (1000) ساعةٍ. وبالتّالي فإنَّ مستوى المعنويّةِ والذّي يساوي مثلاً ($\alpha=0.05$) يكون موجود فِي الطّرفِ الأيسرِ مِنَ المنحنى.

ثانياً: حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

إحصاءةُ الاختبارِ (Test Statistic): هيَ القيمةُ المحسوبةُ مِن بياناتِ العيّنةِ باستخدامِ ما يُعرَفُ بدالّةِ الاختبارِ.

ويتوقّفُ شكلُ إحصائيّةِ الاختبارِ على العواملِ التّاليةِ:

- توزيعُ المجتمعِ، وهل هوَ طبيعيٌّ أم لا، وهل تباينهُ معروفٌ أم لا.
- حجمُ العيّنةِ، وهل هوَ كبيرٌ أم صغير.
- الفرضُ العدميُّ المرادُ اختبارهُ وهل هوَ عَنِ الوسطِ أو النّسبةِ أوِ التّباينِ أو الارتباطِ... الخ.

ثالثاً: تحدُيد منطقتي القبولِ والرّفضِ:

تتحدّدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ اعتماداً على قيمٍ جدوليّةٍ مِنَ الجداولِ الإحصائيّةِ والتّي تعتمدُ على:

أ- توزيعِ المعاينةِ (هل هوَ طبيعيٌّ أو t أو F...)

ب- نوعِ الاختبارِ (ذو طرفٍ واحدٍ One Tail Test أو ذو طرفين Two Tail Test)

ج- ومستوى المعنويّةِ (وهل هو 1% أو 5% أو غير ذلك).

حيثُ أنَّ مساحةَ منطقةِ القبولِ تساوي قيمةَ درجةِ الثّقة ($1-\alpha$) ، بينما مساحةُ منطقةِ الرّفضِ تساوي قيمةَ مستوى المعنويّة (α).

القيم الحرجةُ: هيَ النقاط (القيم) التي تفصلُ بينَ منطقتي القبولِ والرّفضِ، وهيَ تمثّلُ القيمَ الجدوليّةَ مِنَ الجداولِ الإحصائيّةِ التّي تُمثّلُ توزيعَ المجتمع أو العيّنةِ (توزيع t أو Z أو F ....الخ).

رابعاً: المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

عمليّةُ المقارنةِ تتمُّ بمقارنةِ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ المحسوبةِ بحدودِ منطقتي القبولِ والرّفضِ، فإذا وقعَتْ قيمةُ الإحصائيّةِ داخلَ منطقةِ القبولِ فإنَّ القرارَ الإحصائيَّ هوَ قبولُ الفرضِ الصّفريّ، أمّا إذا وقعَتْ قيمةُ الإحصائيّةِ فِي منطقةِ الرّفضِ فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ الصّفريِّ وقبولُ الفرضِ البديلِ. معَ ملاحظةِ أنَّ القرارَ مرتبطٌ بمستوى المعنويّةِ المُحدَّدِ؛ بمعنى أنَّ القرارَ الإحصائيَّ قد يتغيّرُ إذا تغيَّرَ مستوى المعنويّةِ المستخدمِ (وفِي بعضِ الحالاتِ قد لا يتغيّرُ القرارُ بتغيّرِ مستوى المعنويّةِ).

وعادةً تُوجَدُ طريقتين لاتّخاذِ القرارِ فِي الاختباراتِ الإحصائيّةِ وهيَ:

الطريقة الأولى: حسابُ إحصاءةِ الاختبارِ ومقارنتها بمنطقتي القبولِ والرّفضِ بناءً على نوعِ الاختبارِ ذو طرفٍ واحدٍ أو ذو طرفينِ ومِن ثمَّ اتّخاذُ القرارِ الإحصائيِّ بقبولِ أو رفضِ الفرضِ العدميّ.

الطريقة الثانية: حسابُ القيمةِ الاحتماليّةِ (P-value) ويُرمَزُ لها فِي بعضِ البرامجِ الإحصائيّةِ بالرّمزِ (Sig.) فإذا كانَ الاختبارُ ذو طرفٍ واحدٍ تُقارَنُ قيمةُ (Sig. one-tail) بالقيمةِ (α)، أمّا إذا كانَ الاختبارُ ذو طرفينِ تُقارن قيمةُ (Sig. 2-tailed) بالقيمةِ (α/2).

وفِي كلتا الحالتينِ إذا كانت قيمةُ (Sig.) أصغرَ مِن مستوى المعنويّةِ نرفضُ الفرضَ العدميّ، أمّا إذا كانت أكبرَ نقبلُ الفرضَ العدميّ.

2-6- تصنيفُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ:

يمكنُ تقسيمُ اختباراتِ الفروضِ وفقاً للمقاييسِ أو المعالمِ الاحصائيّةِ إلى ثلاثِ مجموعاتٍ مِنَ الاختباراتِ هيَ:

- اختباراتُ الفروضِ المتعلّقةِ بالأوساطِ الحسابيّةِ.
- اختباراتُ الفروضِ المتعلّقةِ بالنّسبِ.
- اختباراتُ الفروضِ المتعلّقةِ بالتّباينات.

ويمكنُ تصنيفها بشكلٍ أكثرَ تفصيلاً كَمَا يأتي:

اختباراتُ الفروضِ المتعلّقةِ بالأوساطِ الحسابيّةِ

أولاً: اختباراتُ الفروضِ لمتوسّطِ مجتمعٍ μ (عيّنةٌ واحدة)

- تباينُ المجتمعِ معلومٌ.
- تباينُ المجتمعِ مجهولٌ وحجمُ العيّنةِ كبيرٌ.
- تباينُ المجتمعِ مجهولٌ وحجمُ العيّنةِ صغيرٌ.

ثانياً: اختباراتُ الفروضِ للفرقِ بينَ متوسطي مجتمعَين

- اختبارُ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ متوسّطي مجتمعَينِ مستقلّين.
  - تباينُ المجتمعَينِ معلومٌ (العيّناتُ صغيرةٌ أو كبيرةٌ).
  - تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ وحجمُ العيّنتينِ كبيرٌ.
  - تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ ولكنّهما متساويينِ وحجمُ إحدى العيّنتينِ على الأقلِّ صغيرٌ.
  - تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ ولكنّهما غيرُ متساويينِ وحجمُ إحدى العيّنتينِ على الأقلِّ صغيرٌ.
- اختبارُ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ متوسّطَي مجتمعَينِ غيرِ مستقلّين (مرتبطين)

اختباراتُ الفروضِ المتعلّقةِ بالنّسبِ

أوّلاً: اختباراتُ الفروضِ لنسبةِ مجتمعٍ

ثانياً: اختباراتُ الفروضِ للفرقِ بينَ نسبتَي مجتمعَينِ:

2-7- اختباراتُ الفروضِ المتعلّقةِ بالأوساطِ الحسابيّةِ:

فِي هذا القسمِ سوفَ يتمُّ دراسةُ اختباراتِ الفروضِ المتعلّقةِ بالأوساطِ الحسابيّةِ للمجتمعاتِ الإحصائيّةِ طبقاً لمعلوميّةِ تباينِ هذهِ المجتمعاتِ وأحجامِ العيّناتِ المسحوبةِ منها. وفيما يلي نوردُ أهمَّ الحالاتِ التّي يمكنُ تطبيقُ اختباراتِ الفروضِ فيها وهنا يمكنُ التّميزُ بينَ حالتينِ هما:

أوّلاً: اختباراتُ الفروضِ لمتوسّطِ مجتمعٍ μ (عيّنةٌ واحدةٌ).

ثانياً: اختباراتُ الفروضِ للفرقِ بينَ متوسّطي مجتمعَينِ.

2-7-1 اختباراتُ الفروضِ لمتوسّطِ مجتمعٍ μ (عيّنةٌ واحدةٌ):

1- صياغةُ الفروضِ:

يمكنُ صياغةُ الفرضيّاتِ حولَ متوسّطِ مجتمعٍ على إحدى الحالاتِ الثّلاثةِ الموضَّحةِ بالجدولِ (2-3).

جدول (2-3): حالاتُ صياغةِ الفروضِ لمتوسّطِ مجتمعٍ.

الحالةُ الأولى	الحالةُ الثّانية	الحالةُ الثّالثة
$\begin{Bmatrix} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{Bmatrix}$
اختبارُ الفرضيّاتِ ذو الطّرفين	اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ	اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسارِ

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

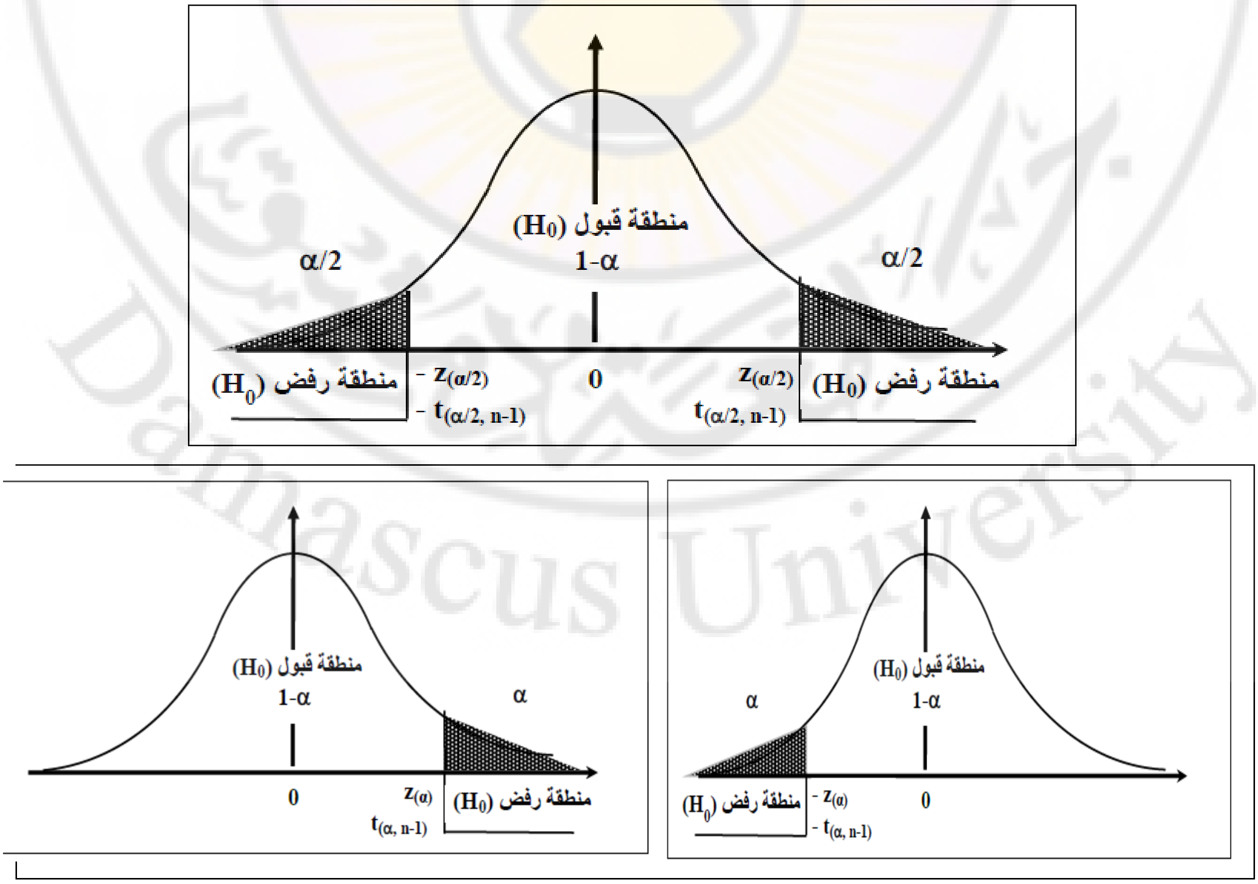
يَتمُّ حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ التّي تتحدّدُ وفقاً لحجمِ العيّنةِ ولمعلوميّةِ تباينِ المجتمعِ أو عدمِ معلوميّتِهِ باستخدامِ المتوسّطِ الحسابيِّ للعيّنةِ ($\bar{x}$) ومتوسّطِ المجتمعِ عندَ صحّةِ الفرضِ العدمِ (μ_0) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدولِ (2-4):

جدول (2-4): طرائقُ حسابِ إحصاءةِ الاختبارِ لمُتوسّطِ مجتمعٍ.

حجمُ العيّنةِ	إحصائيّةُ الاختبارِ (القيمة المحسوبة)	تباينُ المجتمعِ
لا يُشترطُ حجمُ العيّنة (غيرُ مهم)	$Z = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	معلوم
$n > 30$	$Z = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	غير معلوم
$n \leq 30$	$t = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	

3– تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بوساطةِ القيمِ الجدوليّةِ التّي تُستخرَجُ مِنَ الجداولِ الإحصائيّةِ بناءً على مستوى المعنويّةِ (α) وتوزيعِ المعاينةِ إمّا التّوزيعُ الطّبيعيُّ المعياريّ (Z) أو توزيعُ (t) بدرجاتِ حريّةٍ (n-1) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالشّكلِ (2–5):



شكل (2-5): التّمثيلُ البيانيُّ لحالاتِ اختباراتِ الفروضِ لمُتوسّطِ مجتمعٍ.

4- المقارنةُ و اتّخاذُ القرار:

إذا وقعَتْ قيمةُ إحصائيّةِ الاختبارِ (القيمةُ المحسوبة) فِي منطقةِ القبولِ نقبلُ الفرضَ العدم، أمّا إذا وقعَتْ فِي منطقةِ الرّفضِ نرفضُ الفرضَ العدمَ ونقبلُ الفرضَ البديلَ.

مثال (2-3): تدّعي هولندا أنّ متوسّطَ الدّخلِ الأسبوعيِّ لمواطنيها يساوي (72دولار) أي (μ_0=72) بانحرافٍ معياريٍّ مقدارهُ (σ=14) دولار.

مِن أجلِ اختبارِ هذا الفرضِ (الادّعاءِ) اختيرتْ عيّنةٌ عشوائيّةٌ حجمها (n=49) شخصاً، فتبيّنَ أنَّ متوسّطَ الدخل لأفرادِ العيّنةِ هوَ ($\bar{x} = 76$) دولاراً.

المطلوب: طبّقْ خطواتِ اختباراتِ الفروضِ للتّحقُّقِ مِن صحّةِ الفرضِ العدمِ بأنَّ متوسّطَ الدّخلِ الأسبوعيِّ لمواطني هولندا يساوي (72) دولاراً مقابلَ الفرضِ البديلِ أنّهُ لا يساوي (72) وذلكَ بمستوى معنويّةٍ (α=0.05).

الحلُّ:

1- صياغةُ الفروض:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: μ=72) يعني أنَّ متوسّطَ دخلِ الفردِ فِي هولندا هوَ فعلاً (72) دولاراً إسبوعيّاً. أي أنّهُ لا يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ متوسّطِ الدّخلِ الحقيقيِّ (μ) ومتوسّطِ الدّخلِ المزعومِ (المدّعاة) (μ_0) للمجتمعِ.
- الفرضُ البديلُ :(H_1: $\mu \neq 72$) يعني أنَّ متوسّطَ دخلِ الفردِ فِي هولندا لا يساوي (72) دولاراً إسبوعيّاً.

2- حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ: بما أنَّ تباينُ المجتمعِ معلومٌ فإنَّ إحصائيّةَ الأختبار تأخذُ الشّكلَ التّالي: $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

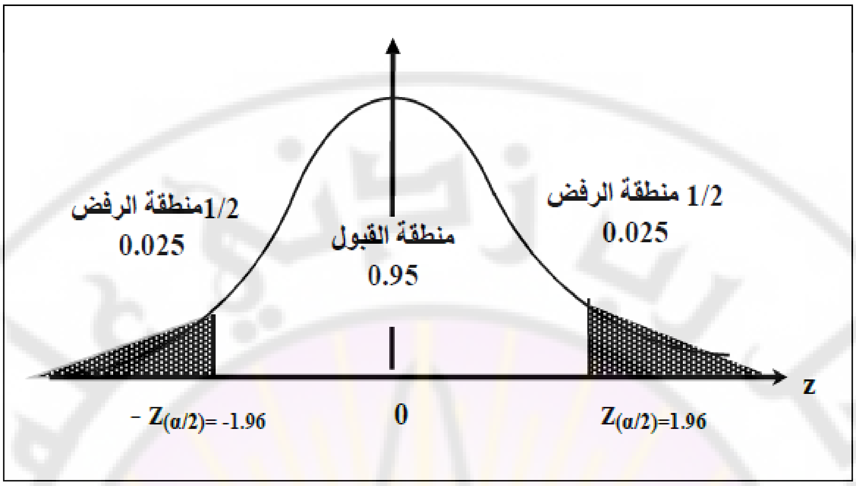
حيثُ: (n=49) (μ_0=72) ($\bar{x} = 75$) (σ=14)

وبالتّعويضِ نحصلُ على :

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{76-72}{\frac{14}{\sqrt{49}}} = \frac{4}{2} = 2$$

3- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفض: يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ مِنَ القيمِ الجدوليّةِ التّي يَتمُّ الحصولُ عليها مِنَ التّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريِّ عندَ مستوى معنويّةٍ (α=0.05) وبما أنَّ الفرضَ البديلَ هوَ "لا يساوي" أي هوَ اختبارٌ ذو طرفينِ؛ إذاً قيمُ Z الجدوليّةِ تكونُ كالتّالي:

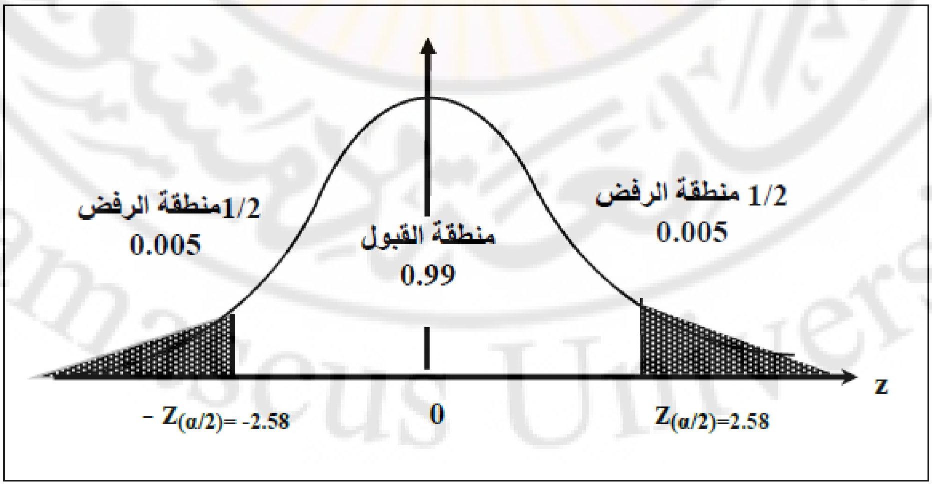
$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$ وتكونُ منطقةُ القبولِ ضمنَ المجالِ $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}, +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$ $(-1.96, \ \ +1.96)$ كَمَا فِي الشّكلِ (2−6).



شكل (2−6): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2−3).

4− المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بمقارنةِ قيمةِ الإحصائيةِ المحسوبةِ والتّي تساوي (2) بحدودِ منطقتي القبولِ والرّفضِ نجدُ أنّها تقعُ فِي منطقةِ الرفض لذلكَ فإنَّ القرارَ هوَ رفض الفرضِ العدميِّ بأنَّ متوسّطَ دخولِ الأفرادِ الأسبوعيّةِ فِي هذهِ الدّولةِ يساوي (72) دولاراً وقبول الفرض البديل بأن متوسط دخل الفرض لا يساوي (72) دولار وذلكَ بمستوى معنويّةٍ (α=0.05).

ملاحظةٌ: لوِ استخدمنا مستوى معنويّة 1% بدلاً مِن 5% فإنَّ حدودَ منطقتي القبولِ والرّفضِ تصبحُ كَمَا هيَ موضّحةٌ بالشّكلِ (2−7).



شكل (2−7): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2−3) بمعنويّة (0.01).

وبمقارنةِ قيمةِ الإحصائيّةِ (2) بحدودِ منطقتي القبولِ والرّفضِ نجدُ أنّها تقعُ فِي منطقةِ القبولِ أي أنَّ القرارَ هوَ قبولُ الفرضِ العدميِّ بأن متوسط دخل الفرد يساوي (72). وهذا يؤكد أن القرار الاحصائي يمكن أن يتغير بتغير مستوى معنويّة (α=0.01).

مثال (2-4): أشارات دراسة لوزارة الصحة أنه كانَ متوسّطُ استهلاكِ الفردِ سنويا من الدجاج في سوريا فِي عامِ 2000 هوَ (12) كيلوجرام بانحرافٍ معياريٍّ (σ=6) كيلوجرامات. أجرى أحدُ الباحثينَ دراسةً فِي عامِ 2022 على عيّنةٍ حجمها (n=49) فرداً فوجدَ أنَّ متوسّطَ الاستهلاكِ للفردِ هوَ ($\bar{x} = 14$)كيلوجرام.

المطلوبُ:

هل تشيرُ الدّراسةُ الحاليّةُ إلى أنَّ متوسّطَ الاستهلاكِ أرتفعَ عمّا كانَ عليهِ فِي عامِ 2000. أو بمعنى آخر هل يوجد فروق معنوية بين متوسّطُ الاستهلاكِ الحالي (2022) ومتوسط الاستهلاك فِي عامِ 2000

الحلُّ: مِن أجلِ حلِّ هذا التّمرينِ يجبُ أن نجيبَ على السّؤالِ التّالي:

هل يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ متوسّطِ الاستهلاكِ القديمِ (12) والاستهلاكِ الجديدِ (14)؟

(n=49) (μ_0=12) ($\bar{x} = 14$) (σ =6) (α=0.05)

1- صياغةُ الفروضِ:

- **الفرضُ العدمُ:** (H_0: μ=12) متوسّطُ الاستهلاكِ الحاليِّ نفسُ الاستهلاكِ القديمِ.
- **الفرضُ البديلُ:** (H_1: μ >12) متوسّطُ الاستهلاكِ الحاليِّ أكبرُ مِنَ الاستهلاكِ القديمِ.

وبالتّالي هنا اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ:

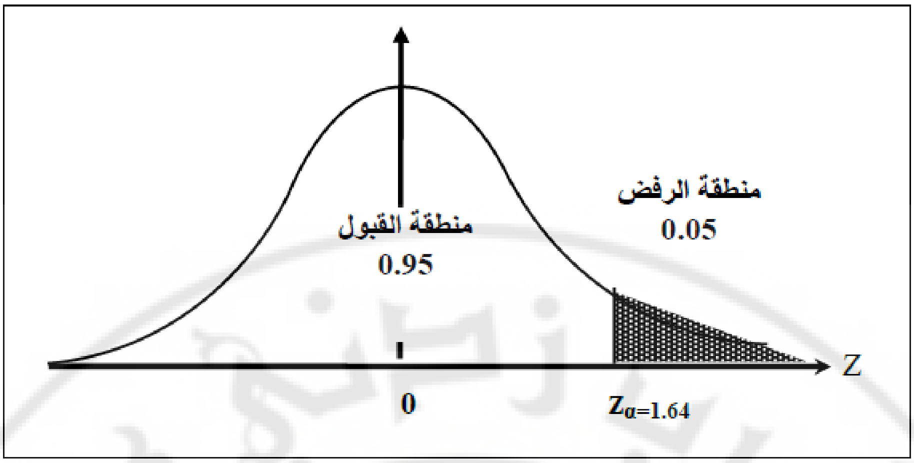
2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

بِما أنَّ تباينَ المجتمعِ معلومٌ وحجمَ العيّنةِ كبيرٌ تكونُ إحصائيّةُ الاختبارِ كَمَا يلِي:

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{14-12}{\frac{6}{\sqrt{49}}} = 2.33$$

3- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ مِنَ التّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريِّ عندَ مستوى معنويّةِ (α=0.05) وبِما أنَّ الفرضَ البديلَ هوَ "أكبر من" أي هوَ اختبارُ الفروضِ ذو الطّرفِ الأيمنِ؛ إذاً قيمُ (Z_α) الجدوليّةِ الّتي تقعُ على اليمينِ وتساوي (Z_α=1.645) كَمَا يُبيّنُ الشّكلُ (2-8).



شكل (2-8): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2-4).

4- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

بما أنَّ قيمةَ إحصاءةِ الاختبارِ المحسوبةِ (2.33) أكبرُ مِنَ القيمةِ الحرجةِ (1.645) كَمَا فِي الشّكلِ، فإنّها تقعُ فِي منطقةِ الرفضِ. وبذلكَ نرفضُ فرضَ العدمِ ونقبلُ الفرضَ البديل؛ أي أنَّ متوسّطَ استهلاكِ الفردِ مِن لحومِ الدّواجنِ فِي الوقتِ الحاليِّ قدِ ارتفعَ قياساً باستهلاكِ الفردِ عام 2000 وذلكَ عندَ مستوى دلالة (α=0.05).

مثال (2-5): إذا كانَ متوسّطُ ضغطِ الدّمِ للأشخاصِ الطّبيعيّين (75)، ادّعى أحدُ الأطّباءِ أنّهُ مِنَ الآثارِ الجانبيّةِ لاستخدامِ عقارٍ معيّنٍ هوَ انخفاضُ ضغطِ الدّمِ إلى أقلِّ مِنَ الطّبيعيِّ (75).

ومِن أجلِ التّحقّقِ مِن هذا الادّعاءِ تمَّ سحبُ عيّنةٍ عشوائيّةٍ حجمها (25) مريضاً ممّن تناولوا العقارَ وتمَّ قياسُ ضغطهم فوُجدَ أنَّ متوسّطَ ضغطِ الدّمِ للعيّنةِ ($\bar{x}$ = 65)وانحرافها المعياريَّ قدرهُ (S=5) عندَ مستوى معنويّةٍ (α=0.05).

المطلوبُ: قمْ بتطبيقِ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ مِن أجلِ تأكيدِ أو نفيِ ادّعاءِ الطّبيبِ بأنَّ العقارَ يؤدّي إلى خفضِ الضّغطِ.

الحلُّ: مِن أجلِ حلِّ هذا التّمرينِ يجبُ أن نجيبَ على السّؤالِ التّالي:

هل يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ متوسّطِ الضّغطِ قبلَ العقارِ (75) ومتوسّطَ الضّغطِ بعدَ العقارِ (65)؟

($\bar{x}$ = 65) (n=25) (μ_0=75) (S=5) (α=0.05)

1- صياغةُ الفروضِ:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: μ= 75) استخدامُ العقارِ لا يؤدّي إلى انخفاضِ ضغطِ الدّمِ.
- الفرضُ البديلُ: (H_1: μ < 75) استخدامُ العقارِ يؤدّي إلى انخفاضِ ضغطِ الدّمِ.

فِي هذهِ الحالةِ اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسارِ:

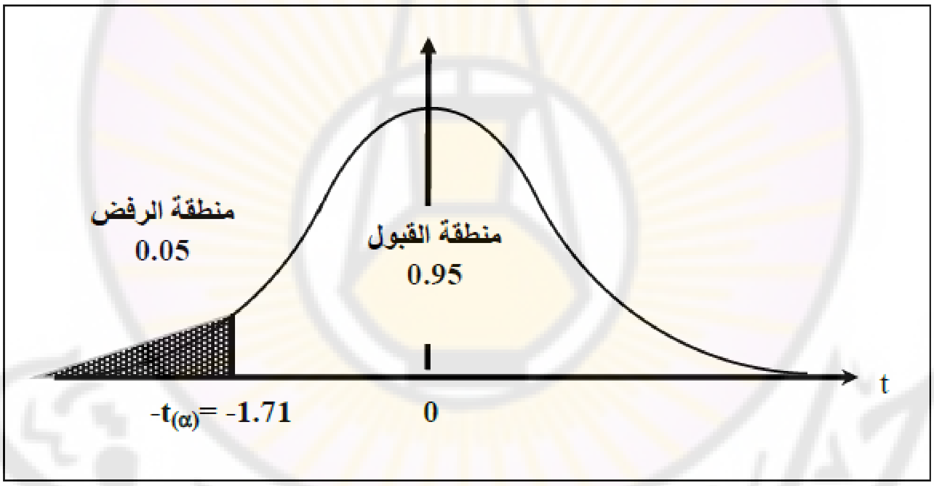
2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

بِما أنَّ تباينَ المجتمع (σ) مجهولٌ وحجمَ العيّنةِ صغيرٌ ($n < 30$)، فعلينا أنْ نستخدمَ توزيعَ t (بدرجةِ حرّيّةٍ $n - 1 = 24$) حيثُ تكونُ إحصائيّةُ الاختبارِ كَمَا يلِي:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{65-75}{\frac{5}{\sqrt{25}}} = -10$$

3- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ مِن توزيعِ (t) عندَ مستوى معنويّة (α=0.05) ودرجاتِ حرّيّة (n-1=24) وبِما أنَّ الفرضَ البديلَ هوَ "أصغر من" أي هوَ اختبارُ الفروضِ ذو الطّرفِ الأيسرِ؛ إذاً قيمةُ (t) الجدوليّةِ تساوي $t_{(\alpha, n-1)}= t_{(0.05, 24)}=1.71$ كَمَا بالشّكلِ (2-9).



شكل (2-9): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2-5).

4- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ القيمةَ المحسوبةَ (t= -10) أصغرُ مِنَ القيمةِ الجدوليّةِ (t= -1.71) وهيَ تقعُ فِي منطقةِ الرّفضِ، إذاً نرفضُ الفرضَ العدميَّ القائلَ بأنَّ استخدامَ العقارِ لا يؤدّي إلى انخفاضِ ضغطِ الدّمِ، ونقبلُ الفرضَ البديلَ بأنَّ استخدامَ العقارِ يؤدّي إلى انخفاضِ ضغطِ الدّمِ، وهذا يؤكّدُ ادّعاءَ الطّبيبِ.

2-7-2- اختباراتُ الفروضِ للفرقِ بينَ متوسّطيِّ مجتمعين.

قد يرغبُ الباحثُ فِي إجراءِ اختبارِ فيما إذا كانَ متوسّطُ الدّخلِ فِي سوريّةَ يساوي متوسّطَ الدّخلِ فِي لبنانَ، أو إجراءِ اختبارِ عمّا إذا كانَ متوسّطُ عمرِ الفردِ فِي سوريةَ يساوي متوسّطَ عمرِ الفردِ فِي مصرَ وهكذا... بمعنىً آخر قد يرغبُ الباحثُ فِي إجراءِ اختبارِ عمّا إذا كانَ متوسّطُ المجتمعِ الأوّلِ

يساوي متوسّطَ المجتمعِ الثّاني، ومِن أجلِ اختبارِ الفروضِ الإحصائيّةِ بينَ متوسّطيّ مجتمعين؛ يلجأُ الباحثُ إلى سحبِ عيّنتين مِنَ المجتمعين وعندها يكونُ هدفُ الباحثِ هوَ تطبيقُ اختباراتِ الفروضِ للفرقِ بينَ متوسّطي عيّنتين تمثّلانِ مجتمعين وهنا يمكنُ التّمييزُ بينَ نوعين مِنَ الاختباراتِ وفقاً لاستقلالِ أو ارتباطِ العيّناتِ:

- أوّلاً: اختبارُ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ مُتوسّطيِّ مجتمعين مستقلّين.
- ثانياً: اختبارُ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ مُتوسّطيِّ مجتمعين غير مستقلّين (مرتبطين).

أولاً: اختبارُ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ متوسطيِّ مجتمعين مستقلّين.

تُوجَدُ أربعُ حالاتٍ مختلفةٍ فِي حالةِ اختبارِ الفرضيّاتِ المتعلّقةِ بالفرقِ بينَ متوسّطيِّ مجتمعَين مستقلَّين هيَ:

الحالةُ الأولى: تباينُ المجتمعَينِ معلومٌ (العيّناتُ صغيرةٌ أو كبيرةٌ).

الحالةُ الثّانيةُ: تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ وحجمُ العيّنتينِ كبيرٌ.

الحالةُ الثّالثةُ: تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ ولكنّهما متساويينِ ($\sigma1= \sigma2$)، وحجمُ إحدى العيّنتينِ على الأقلِّ صغيرٌ.

الحالةُ الرّابعةُ: تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ ولكنّهما غيرُ متساويين ($\sigma1\neq \sigma2$)، وحجمُ إحدى العيّنتينِ على الأقلِّ صغيرٌ.

الحالةُ الأولى: تباينُ المجتمعَينِ معلومٌ (العيّناتُ صغيرةٌ أو كبيرةٌ)

بافتراضِ أنَّ كلَّ مجتمعٍ مِنَ المجتمعَينِ لهُ توزيعٌ طبيعيٌّ وتباينهُ معلومٌ، وخصائصُ كلٍّ منهما كَمَا يلِي:

خصائصُ المجتمعِ	المجتمعُ الأوّلُ	المجتمعُ الثّاني
المُتوسّطُ	μ_1	μ_2
التّباينُ	σ_1^2	σ_2^2
التّوزيعُ	$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$	$X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

1- صياغةُ الفروضِ :

فِي هذهِ الحالةِ تكونُ صياغةُ الفروضِ على الشّكلِ التّالي:

- الفرضُ العدميُّ: ($H_0: \mu_1= \mu_2$) متوسّطُ المجتمعِ الأوّلِ يساوي متوسّطَ المجتمعِ الثّاني.

- الفرضُ البديلُ: ($H_1: \mu_1 \neq \mu_2$) أنَّ المتوسّطينِ غيرُ متساويين:

ويمكنُ للباحثِ استخدامُ "أكبرِ مِن" أو "أقلّ من" بدلاً مِن "لا يساوي" إذا كانَ لديهِ معلوماتٌ تشيرُ إلى ضرورةِ ذلكَ.

$$or: H_1: \mu_1 < \mu_2$$
$$or: H_1: \mu_1 > \mu_2$$

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

إذا كانَ متوسّطُ العيّنةِ الأولى ($\bar{x}_1$) مسحوبةٌ مِنَ المجتمعِ الأوّلِ الذّي مُتوسّطهُ (μ_1) وتباينهُ (σ_1^2). ومتوسّطُ العيّنةِ الثّانيةِ ($\bar{x}_1$) مسحوبةٌ مِنَ المجتمعِ الثّاني الذّي مُتوسّطه (μ_2) وتباينهُ (σ_2^2) على التّرتيبِ، فإنَّ إحصائيّةَ الاختبارِ تُحسَبُ كَمَا يلِي:

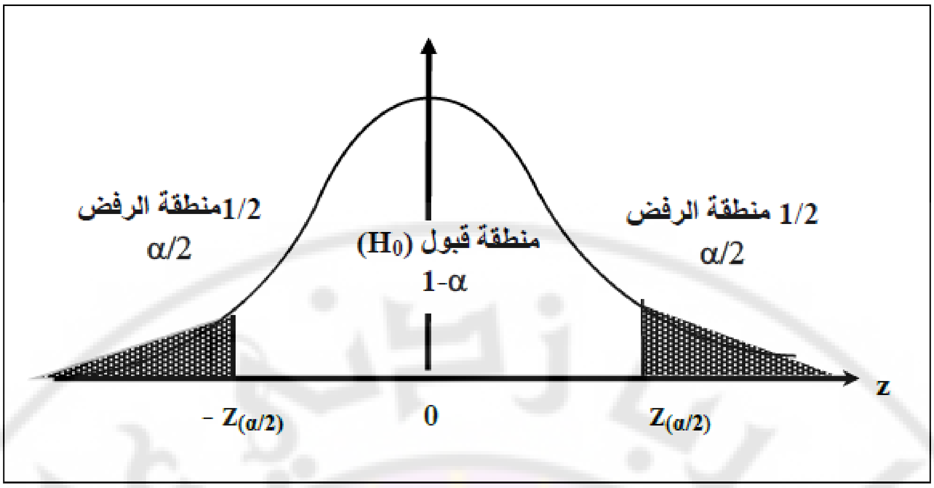
$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وبِما أنّنا نفترضُ أنَّ ($H_0: \mu_1 = \mu_2$) فِي الفرضِ العدمِ فتصبحُ معادلةُ حسابِ إحصاءةِ الاختبارِ كَمَا يلِي:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

3- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

بِما أنَّ إحصاءةَ الاختبارِ تتوزّعُ وفقاً للتّوزيعِ الطّبيعيِّ المعياريّ (Z) فإنّهُ يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بوساطةِ القيمِ الجدوليّةِ لتوزيعِ (Z) عندَ مستوى معنويّة (α) وكذلكَ حسبَ صياغةِ الفرضِ البديلِ هل هوَ اختبارٌ مِن طرفينِ أم مِن طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ أم مِن طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسارِ، مثلاً إذا كانَ الاختبارُ مِن طرفينِ تكونُ منطقتي القبولِ والرّفضِ موضّحةٌ بالشّكلِ (2-10).



شكل (2-10): التّمثيلُ البيانيُّ لاختبارِ الفروضِ للفرقِ بينَ متوسّطي مجتمعين تباينهما معلومٌ.

4- المقارنةُ و اتّخاذُ القرار:

نقارنُ قيمةَ الإحصائيّةِ بحدودِ منطقتي القبولِ والرّفضِ؛ فإذا وقعَتْ فِي منطقةِ القبولِ نقبلُ الفرضَ العدميّ، وإذا وقعت فِي منطقةِ الرّفضِ نرفضُ الفرضَ العدميّ، ونقبلُ الفرضَ البديل.

مثال (2-6): فِي دراسةٍ لإحدى المنظّماتِ ادّعَتْ أنَّ متوسّطَ دخلِ الفردِ فِي سورية يساوي مُتوسّطَ دخلِ الفردِ بالأردنِ معَ العلمِ أنَّ تباينَ الدّخلِ فِي سورية يساوي $(\sigma_1^2=60)$ ، وتباينَ الدّخلِ فِي الأردنِ يساوي $(\sigma_2^2=32)$. ومِن أجلِ التّأكُّدِ مِن صحّةِ هذا الادّعاءِ تمَّ سحبُ عيّنةٍ مِن سورية حجمها $(n_1=100)$ شخصٍ فكانَ متوسّطُ الدّخلِ فِي هذهِ العيّنةِ هوَ $(\bar{x}_1 = 35)$ دولار، كذلكَ تمَّ سحبُ عيّنةٍ مِنَ الأردنِ حجمها $(n_2=80)$ فكانَ متوسّطُ الدّخلِ فيها$(\bar{x}_2 = 33)$ دولاراً.

المطلوبُ: طبّقِ اختباراتِ الفروضِ لاختبارِ هل متوسّطُ الدّخلِ فِي سورية يساوي مُتوسّطَ الدّخلِ بالأردنِ بمستوى معنويّة 5% مقابلَ الفرضِ البديلِ أنّهما غيرُ متساويينِ.

الحلُّ:

$(\bar{x}_1 = 35)$ $(\bar{x}_2 = 33)$ $(n_1=100)$ $(n_2=80)$ $(\sigma_1^2=60)$ $(\sigma_2^2=32)$

1- صياغةُ الفروضِ :

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0: \mu_1= \mu_2)$ متوسّطُ الدّخلِ فِي سوريةَ يساوي متوسّطَ الدّخلِ بالأردن.
- الفرضُ البديلُ: $(H_1: \mu_1\neq \mu_2)$ متوسّطُ الدّخلِ فِي سوريةَ لا يساوي متوسّطَ الدّخلِ بالأردن.

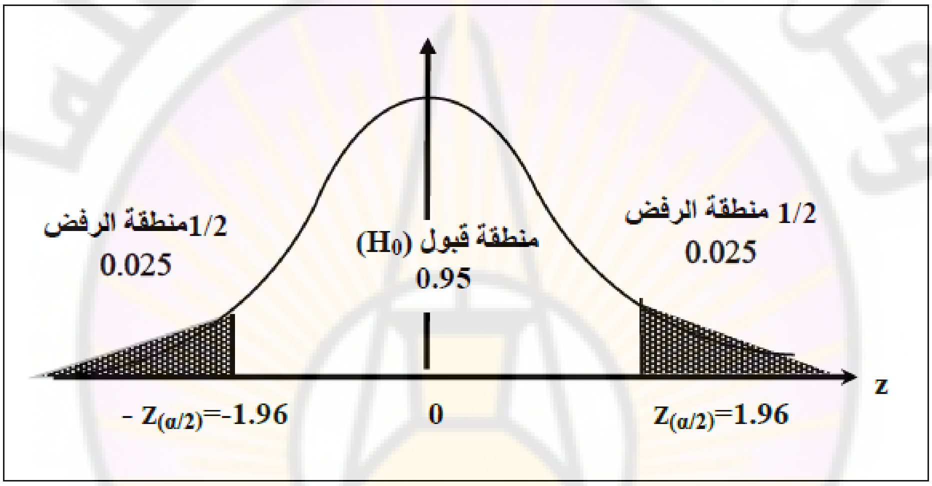
2-حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

بما أنَّ تباينَ المجتمعينِ معلومين، يَتِمُّ حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$Z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{35-33}{\sqrt{\frac{60}{100}+\frac{32}{80}}}=2$$

3- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بوساطةِ القيمِ الجدوليّةِ التّي نحصلُ عليها مِن جدولِ التّوزيعِ الطّبيعيّ Z لأنَّ العيّناتِ كبيرة، وبما أنَّ الفرضَ البديلَ هوَ "لا يساوي" أي هوَ اختبارٌ ذو طرفينِ؛ إذاً قيمُ Z الجدوليّةِ تكونُ كالتّالي: $Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=1.96$ عندَ مستوى معنويّة $(\alpha=0.05)$.
وتكونُ منطقةُ القبولِ ضمنَ المجالِ $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}},\ +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=(-1.96,\ +1.96)$ كَمَا فِي الشّكلِ (2−11).



شكل (2−11): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2−6).

أي أنَّ منطقةَ القبولِ تبدأُ مِن 1.96− إلى 1.96+ ومنطقةُ الرّفضِ هيَ القيمُ التّي تكونُ أصغرَ مِن (1.96−) وأكبرَ مِن (1.96+).

4− المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ (والتّي تساوي 2) تقعُ فِي منطقةِ الرّفضِ فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ العدميِّ وقبولِ الفرضِ البديلِ؛ أي أنّنا نرفضُ الفرضَ القائلَ بأنَّ متوسّطَ دخلِ الفردِ فِي سورية يساوي متوسّطَ دخلِ الفردِ فِي الأردنِ وذلكَ بمستوى معنويّة $(\alpha=0.05)$.

الحالةُ الثّانيةُ: تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ وحجمُ العينتينِ كبيرٌ

إذا كانَ تباينُ المجتمعَينِ $(\sigma^2_1,\ \sigma^2_2)$ مجهولينِ وحجمي العيّنتينِ كبيرينِ فإنَّ إحصاءةَ الاختبارِ تُحسَبُ بنفسِ الطّريقةِ فِي الحالةِ الأولى بعدَ التّعويضِ عن تباينِ المجتمعَينِ $(\sigma^2_1,\ \sigma^2_2)$ بتابينِ العيّنتينِ $(S^2_1,\ S^2_2)$ وتصبحُ الإحصاءةُ كَمَا يلِي:

$$Z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

وبما أنّنا نفترضُ أنَّ $(H_0: \mu_1= \mu_2)$ فتصبحُ معادلةُ حسابِ إحصاءةِ الاختبارِ كَمَا يلِي:

$$Z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

مثال (2-7): ادّعى باحثٌ اجتماعيٌّ أنَّ مُتوسّطَ أوزانِ طلابِ جامعةِ حلب أقلُّ مِن مُتوسّطَ أوزان طلابِ جامعةِ دمشقَ. مِن أجلِ اختبارِ صحّةِ هذا الفرضِ (الادّعاءِ)، اختيرَتْ عيّنةٌ عشوائيّةٌ مِن $(n_1=60)$ طالبٍ مِنَ جامعةِ حلب، فوُجِدَ أنَّ مُتوسّطَ أوزانهم $(\bar{x}_1=69)$ كغ بتباينٍ قدرهُ $(S_1^2=230)$، كذلكَ تمَّ اختيارُ عيّنةٍ عشوائيّةٍ أخرى مِن $(n_2=85)$ طالبٍ مِن جامعةِ دمشقَ فوُجِدَ أنَّ مُتوسّطَ أوزانهم $(\bar{x}_2=74)$ كغ بتباينٍ قدرهُ $(S_2^2=220)$.

المطلوبُ: طبّقْ طريقةَ اختباراتِ الفروضِ لاختبارِ الفرضِ القائلِ أنَّ مُتوسّطَ أوزانِ طلابِ جامعةِ حلب أقلُّ مِن مُتوسّطَ أوزانِ طلابِ جامعةِ دمشقَ وذلكَ بمستوى معنويّة $(\alpha=0.05)$.

الحلُّ:

المجتمعُ الأوّلُ: جامعةُ حلب: (μ_1) $(S_1^2=230)$ $(n_1=60)$ $(\bar{x}_1=69)$

المجتمعُ الثّاني:جامعةُ دمشق: (μ_2) $(S_2^2=220)$ $(n_2=85)$ $(\bar{x}_2=74)$

صياغةُ الفروضِ:

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0:\mu_1= \mu_2)$ مُتوسّطُ أوزانِ طلابِ جامعةِ حلب يساوي مُتوسّطَ أوزانِ جامعةِ دمشقَ.
- الفرضُ البديلُ:$(H_1: \mu_1< \mu_2)$ مُتوسّطُ أوزانِ طلابِ جامعةِ حلب **أقلُّ** من مُتوسّطَ أوزانِ جامعةِ دمشقَ.

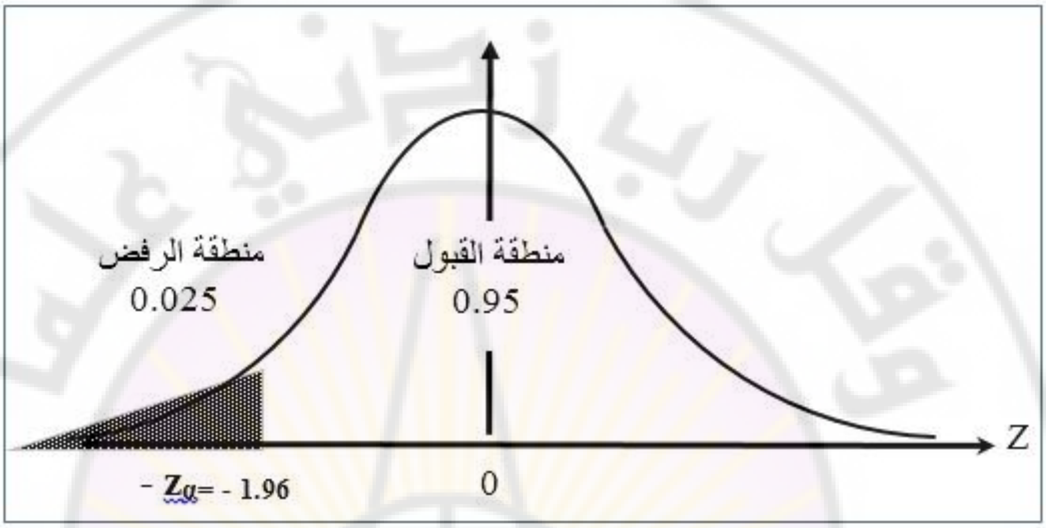
1- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

نحسبُ إحصاءةَ الاختبارِ مِنَ العلاقةِ:

$$Z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{69-74}{\sqrt{\frac{230}{60}+\frac{220}{85}}}=\frac{-5}{\sqrt{6.48}}=-2$$

2- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

هنا اختبارُ الفرضيّاتِ ذو طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسارِ، لذلكَ نحدّدُ القيمةَ الحرجةَ التّي تُحدّدُ منطقةَ القبولِ والرّفضِ وذلكَ بإيجادِ قيمةِ $(-Z_{\alpha})$ مِن جداولِ التّوزيعِ الطّبيعيِّ عندَ مستوى معنويّة $(\alpha=0.05)$؛ أي إيجادُ قيمةِ $(-Z_{\alpha}=-1.65)$ وبالتّالي الشّكل (2-12) يوضّحُ حدودَ منطقتي القبولِ والرّفضِ.



شكل (2-12): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2-7).

3- المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ قيمةَ Z المحسوبةِ $(Z=-2)$ أصغرُ مِن قيمةِ Z الجدوليّةِ $(-Z_{\alpha}=-1.65)$ أي أنَّ قيمةَ إحصاءةِ الاختبارِ تقعُ فِي منطقةِ الرّفضِ. وبذلكَ نرفضُ فرضَ العدمَ ونقبلُ الفرضَ البديلَ القائلَ أنَّ مُتوسّطَ أوزانِ طلابِ جامعةِ حلب أقلُّ مِن مُتوسّطِ أوزانِ طلابِ جامعةِ دمشقَ.

الحالةُ الثّالثةُ: تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ ولكنّهما متساويينِ $(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$ وحجمُ إحدى العيّنتينِ على الأقلِّ صغيرٌ.

بفرضِ أنَّ البياناتِ فِي المجتمعِ الأوّلِ والثّاني تخضعُ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ و أنَّ تباينَ المجتمعَينِ (σ_1^2, σ_2^2) غيرُ معلومٍ ولكنّهما متجانسينِ أي $(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$، وحجمُ العيّنتينِ صغيرٌ؛ فإنَّ إحصائيّةَ الاختبارِ تتبعُ توزيعَ (t) بدرجاتِ حرّيّةٍ تساوي (n_1+n_2-2).

ويمكنُ تطبيقُ اختبارِ الفروضِ مِن أجلِ الحكمِ على معنويّةِ الفرقِ بينَ مُتوسّطَي عيّنتينِ صغيرتينِ وفقاً للشّروطِ السّابقةِ باتّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

1- صياغةُ الفروضِ :

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0: \mu_1 = \mu_2)$ مُتوسّطُ المجتمعِ الأوّلِ يساوي مُتوسّطَ المجتمعِ الثّاني.
- الفرضُ البديلُ: $(H_1: \mu_1 \neq \mu_2)$ مُتوسّطَي المجتمعَينِ غيرُ متساويين.

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

إحصائيّةُ الاختبارِ تتبعُ توزيعَ (t) بدرجاتِ حرّيّةٍ تساوي $(n_1 + n_2 - 2)$ وبفرضِ أنَّ تباينَ المجتمعِ الأوّلِ يساوي تباينَ المجتمعِ الثّاني فإنَّ الإحصاءةَ تُحسَبُ مِنَ المعادلةِ الآتيةِ:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

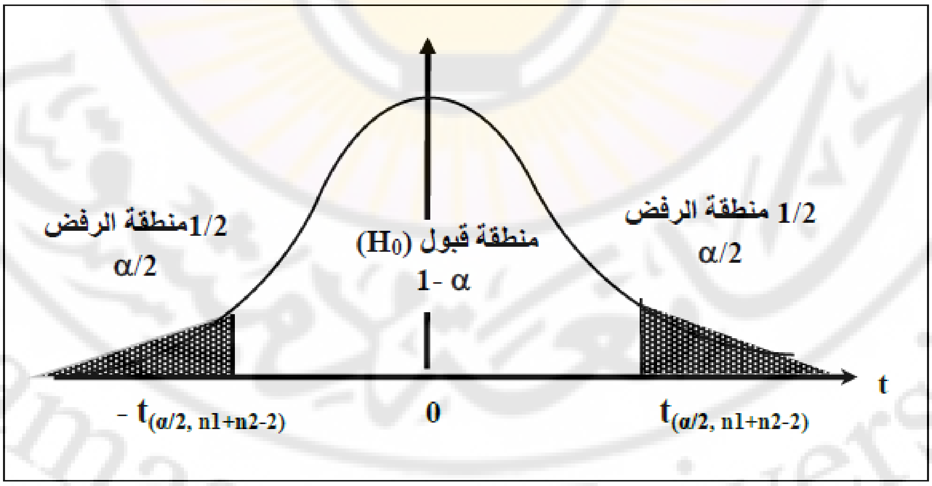
حيثُ (S_p^2) يمثّلُ التّباينُ المشتركُ (المرجح) للعيّنتينِ ويُحسَبُ بإحدى المعادلتين التاليتين:

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$S_P^2 = \frac{\sum(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum(x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

3- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بالقيمِ الحرجةِ التّي نستخرجها مِن جداولِ التّوزيعِ (t) عندَ درجاتِ حرّيّةٍ تساوي $(n_1 + n_2 - 2)$ وعندَ مستوى معنويّةٍ يساوي $(\alpha/2)$ فِي هذهِ الحالةِ لأنَّ الاختبارَ مِن طرفينِ كَمَا فِي الشّكلِ (2-13).



شكل (2-13): شكلُ اختبارِ الفروضِ للفرقِ بينَ متوسّطَي مجتمعَينِ تباينهما مجهولٌ ومتساويانِ والعيّنتانِ صغيرتانِ.

4- المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

نقارنُ قيمةَ الإحصائيّةِ المحسوبةِ بحدودِ منطقتَي القبولِ والرّفضِ، فإذا وقعَتْ فِي منطقةِ القبولِ نقبلُ الفرضَ العدميّ، وإذا وقعَتْ فِي منطقةِ الرّفضِ نرفضُ الفرضَ العدميّ، ونقبلُ الفرضَ البديلَ.

مثال (2–8): ادّعى باحثٌ زراعيٌّ أنَّ متوسّط إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ فِي محافظةِ حماة يساوي متوسّطَ إنتاجَ شجرةِ الزّيتونِ فِي محافظةِ حمص.

مِن أجلِ اختبارِ صحّةِ هذا الفرضِ (الادّعاءِ)، اختيرتْ عيّنةٌ مِن (n_1=16) شجرة زيتونٍ مِن حماة، فوُجِدَ أنَّ مُتوسّطَ إنتاجها ($\bar{x}_1 = 28$) كغ وتباينهُ (S_1^2=9)، كذلكَ تمَّ اختيارُ عيّنةٍ عشوائيّةٍ أخرى مِن (n_2=14) شجرة زيتونٍ مِن حمصَ فوُجِدَ أنَّ متوسّطَ إنتاجها ($\bar{x}_2 = 26$) كغ وتباينهُ (S_2^2=8).

المطلوبُ: طبّقْ طريقةَ اختباراتِ الفروضِ لاختبارِ الفرضِ القائلِ بأنَّ متوسّطَ إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ فِي محافظةِ حماةَ يساوي مُتوسّطَ إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ فِي محافظةِ حمصَ بمستوى معنويّة (α =0.05) معَ العلمِ أنَّ تبايني المجتمعَينِ متجانسينِ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2$).

الحلُّ:

المجتمعُ الأوّلُ: محافظةُ حماه: (μ_1) (S_1^2=9) (n_1=16) ($\bar{x}_1 = 28$)

المجتمعُ الثّاني: محافظةُ حمص (μ_2) (S_2^2=8) (n_2=14) ($\bar{x}_2 = 26$)

1– صياغةُ الفروضِ:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $\mu_1= \mu_2$) مُتوسّطُ إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ فِي حماة يساوي مُتوسّطَ إنتاجِ شجرةِ الزّيتون فِي حمص.
- الفرضُ البديل: (H_1: $\mu_1\neq \mu_2$) متوسّطُ إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ في حماة لا يساوي متوسّطَ إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ في حمص.

2– حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

بِما أنَّ العيّنتينِ صغيرتينِ وتباينَ المجتمعَينِ متجانسينِ، والمجتمعَينِ طبيعيّينِ، فِي هذهِ الحالةِ تتبعُ إحصائيّةُ الاختبارِ توزيعَ (t) بدرجاتِ حريّةٍ تساوي ($n_1 + n_2 - 2$) وتُحسَب كَمَا يلِي:

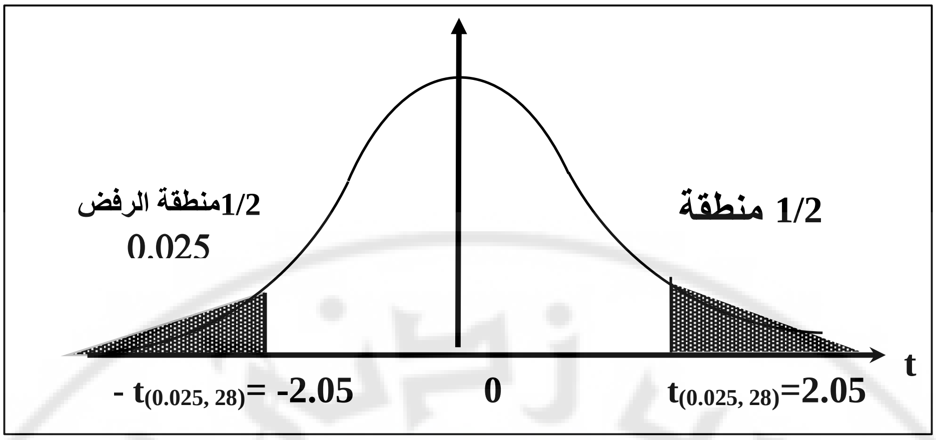
$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{15\times9+13\times8}{16+14-2} = \frac{740}{28} = 8.55$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{\sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(28-26)}{\sqrt{8.55\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{14}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = 1.869$$

3– تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ :

تتحدّدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ باستخراجِ قيمةِ (t) الجدوليّةِ مِن جدولِ (t)عندَ درجاتِ حرّيّةٍ تساوي (n_1+n_2-2) والتّي تساوي 18 أي$t_{(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} = t_{(0.025,\ 28)} = 2.048$

وتتمثّلُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ بالشّكلِ (2–14).



شكل (2−14): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2−8).

أي أنَّ منطقة القبولِ تبدأُ مِن (2.101−) وحتّى (2.101+).

4− المقارنةُ و اتّخاذُ القرار:

بِما أنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ تساوي (1.869) فإنّها تقعُ في منطقةِ القبولِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ قبولُ الفرضِ العدميِّ بأنَّ مُتوسّطَ إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ فِي حماة يساوي مُتوسّطَ إنتاجِ شجرةِ الزّيتونِ فِي حمصَ وذلكَ بمستوى معنويّة (α =0.05).

الحالةُ الرّابعةُ: تباينُ المجتمعينِ مجهولينِ ولكنّهما غير متساويينِ ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) وحجمُ إحدى العينتينِ على الأقلِّ صغيرٌ.

بفرضِ أنَّ البياناتِ فِي المجتمعِ الأوّلِ والثّاني تخضعُ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ وأنَّ تباينَ المجتمعَين (σ_1^2,σ_2^2) مجهولٌ (غيرُ معلومٍ) ولكنّهما غيرُ متجانسَين أي ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)، وحجمُ العيّنتَينِ صغيرٌ فإنَّ إحصائيّةَ الاختبارِ تتبعُ توزيعَ (t) وتُحسَب كَمَا يلِي:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

وبِما أنّنا نفترضُ أنَّ (H_0: $\mu_1 = \mu_2$) فتصبحُ معادلةُ حسابِ إحصاءةِ الاختبارِ كَمَا يلِي:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

حيثُ إنَّ إحصائيّةَ الاختبارِ تتبعُ توزيعَ (t) بدرجاتِ حرّيّةٍ تساوي

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

- إذا كانت قيمةُ درجاتِ الحرّيّة (df) المحسوبةِ بالمعادلةِ السّابقةِ تمثّلُ عدداً حقيقيّاً، فإنّه مِنَ الضّروريِّ التّقريبُ لأقربِ عددٍ صحيحٍ.
- وأخيراً يمكنُ تطبيقُ خطواتِ اختبارِ الفروضِ على هذهِ الحالةِ بالطّريقةِ نفسها التّي طُبّقتْ على الحالاتِ السّابقةِ.

مثال (2-9): إذا كنتَ مديراً لمصنعِ ملابسٍ، وادّعى مديرُ الإنتاجِ أنَّ الورديّةَ الليليّةَ تنتجُ أكثرَ مِنَ الورديّةِ النّهاريّةِ، ومِن أجلِ اختبارِ صحّةِ هذا الادّعاءِ قمتَ بأخذِ عيّناتٍ عشوائيّةٍ مستقلّةٍ مِن (20) يوماً إنتاجيّاً مفترِضاً أنَّ المعاينةَ أُخذَتْ مِن مجتمعَينِ طبيعيّينِ مستقلّينِ وتباينهما مجهولَينِ ولكنّهما غيرُ متساويينِ ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)، فكانت النّتائجُ عندَ مستوى معنويّة ($\alpha = 0.01$) كَمَا يلِي:

	الورديّةُ النّهاريةِ	الورديّةُ اللّيلة	مُتوسّط المجتمع
العينة (يوم عمل)	$n_1=20$	$n_2=20$	
الوسطُ الحسابيُّ (قطعة)	$(\bar{x}_2 = 245)$	$(\bar{x}_1 = 250)$	μ_1
الانحرافُ المعياريُّ (قطعة)	$S_2=10$	$S_1=15$	μ_2

المطلوب: طبّقْ طرائقَ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ لتثبتَ أو تنفي صحّةَ ادّعاءِ مديرِ الإنتاجِ بأنَّ إنتاجَ الورديّةِ اللّيليّةِ أكثرُ مِنَ النّهاريّةِ.

1- صياغةُ الفروضِ :

(μ_1): يمثّلُ مُتوسّطَ إنتاجِ الورديّةِ اللّيليّةِ.

(μ_2): يمثّلُ مُتوسّطَ إنتاجِ الورديّةِ النّهاريّةِ.

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $\mu_1=\mu_2$) مُتوسّطُ إنتاجِ الورديّةِ النّهاريّةِ يساوي مُتوسّطَ إنتاجِ الورديّةِ اللّيليّةِ.
- الفرضُ البديلُ: (H_1: $\mu_1>\mu_2$) مُتوسّطُ إنتاجِ الورديّةِ النّهاريّةِ أقلُّ مِن مُتوسّطِ إنتاجِ الورديّةِ اللّيليّةِ.

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

بِما أنَّ العيّناتِ صغيرةٌ، وتباينَ المجتمعَينِ غيرُ متجانسٍ $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$، والمجتمعَينِ طبيعيّين، فإنَّ إحصائيّةَ الاختبارِ تتبعُ توزيعَ (t) وتُحسَب كَمَا يلِي:

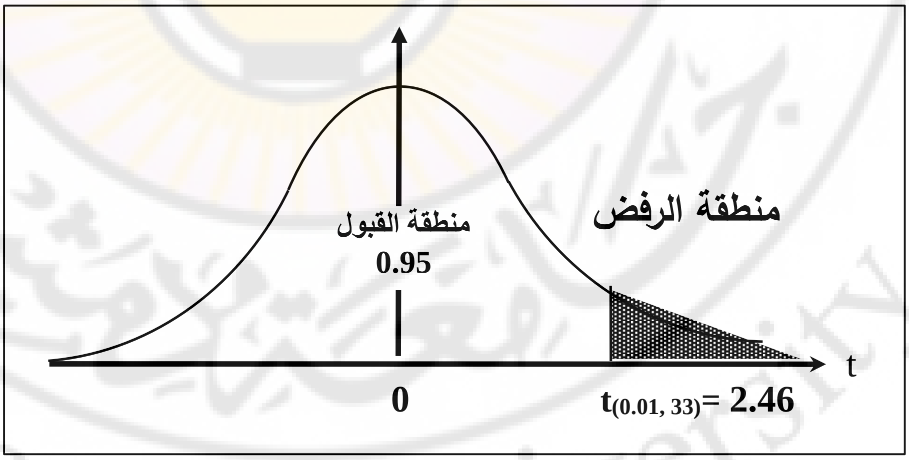
$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(250-245)}{\sqrt{\frac{15^2}{20}+\frac{10^2}{20}}} = \frac{5}{4.031} = 1.24$$

3- تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ :

لتحديدِ منطقتَي القبولِ والرّفضِ باستخراجِ قيمةِ (t) الجدوليّةِ مِن جدولِ t عندَ درجاتِ حرّيّةٍ تُحسَبُ مِنَ العلاقةِ:

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{15^2}{20}+\frac{10^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{15^2}{20}\right)^2}{19}+\frac{\left(\frac{10^2}{20}\right)^2}{19}} \approx 33.11$$

بِما أنَّ درجاتِ الحرّيّة (33.11) لذلكَ نقومُ بالتّقريبِ لأقلِّ عددٍ صحيحٍ، أي يصبحُ (df=33) وبِما أنَّ الفرضَ البديلَ أكبرُ مِن هذا؛ فإنَّ ذلكَ يعني أنّهُ مِن طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ؛ أي إنَّ القيمةَ الجدوليّةَ تكونُ $t_{(0.01,\ 33)} = 2.46$ وبالتّالي تتحدّدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ بالشّكلِ (2−15).



شكل (2−15): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتَي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2−9).

4- المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ تساوي (1.24) فإنّها تقعُ فِي منطقةِ القبولِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ قبولُ الفرضِ العدميِّ بأنَّ مُتوسّطَ إنتاجِ الورديّةِ النّهاريّةِ يساوي مُتوسّطَ إنتاجِ الورديّةِ اللّيليّة وهذا ينفي ادّعاءَ مديرِ الإنتاجِ بأنَّ إنتاجَ الورديّةِ اللّيليّة أكثرُ مِنَ الورديّةِ النّهاريّةِ.

ثانياً: اختبارُ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ متوسطَي مجتمعَينِ غيرِ مستقلّين (مرتبطين).

هذا الاختبارُ يُسمّى اختبارُ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ متوسطي عيّنتينِ غيرِ مستقلّتين (مرتبطتين) أو اختبارِ الفروضِ للفرقِ بينَ الأزواجِ المتقابلةِ (Testing Hypotheses for the Difference Between Matched Pairs)، حيثُ يُستخدَمُ هذا النّوعُ مِنَ الاختباراتِ للحُكمِ على دلالةِ الفروقِ بينَ متوسطَي عيّنتينِ مرتبطتينِ (Correlated Data)، مثلَ اختبارِ دلالةِ الفروقِ بينَ متوسّطِ أداءِ الموظّفينَ قبلَ التّدريبِ وبعدَ التّدريب. ولتوضيحِ هذا النّوعِ مِنَ الاختباراتِ نوردُ المثالَ التّالي:

يرغبُ باحثٌ فِي معرفةِ فيما إذا كانَ إعطاءُ دوراتٍ تدريبيّةٍ للموظّفينَ الذّينَ يعملونَ فِي قسمِ المبيعاتِ حولَ أساليبِ التّعاملِ معَ الزّبائنِ لهُ دورٌ فعّالٌ فِي زيادةِ عددِ الوَحداتِ المُباعَةِ مِن سلعةٍ معيّنةٍ. فِي هذهِ الحالةِ نأخذُ بياناتٍ حولَ عددِ الوَحداتِ المُباعَةِ مِن تلكَ السّلعةِ قبلَ اتّباعِ الدّورةِ التّدريبيّةِ وبعدَ اتّباعِ الدّورةِ، ثمَّ نقومُ بمقارنةِ متوسطَي عددِ الوَحداتِ المُباعَةِ قبلَ وبعدَ اتّباعِ الدّورةِ التّدريبيّةِ.

أيضاً على سبيلِ المثالِ يرغبُ باحثٌ فِي معرفةِ ما إذا كانَ نظامٌ غذائيٌّ معيّنٌ فِي تخفيفِ الوزنِ لمجموعةٍ مِنَ الأشخاصِ الذّينَ يعانونَ مِنَ السُّمنة، فِي هذهِ الحالةِ نأخذُ أوزانهم قبلَ وبعدَ اتّباعِ النّظامِ الغذائيّ.

كذلكَ مِنَ التّطبيقاتِ العمليّةِ لهذا الاختبارِ، الحالةُ الصّحيّةُ لمجموعةِ مرضى قبلَ وبعدَ تناولِ دواءٍ معيّنٍ.

يُطبَّقُ هذا الاختبارُ لمقارنةِ نتائجِ إجاباتٍ أو علاماتِ عيّنةٍ مِنَ الأشخاصِ قبلَ التّجربةِ وبعدها، لذلكَ تُسمّى القيمُ الأولى بالقيمِ أو الدّرجاتِ القبليّةِ (X)، وتُسمَّى القيمُ الثّانيةُ بالقيمِ البعديّةِ (Y)، ويمكنُ وضعُ النّتائجِ فِي جدولٍ خاصٍّ على شكلِ أزواجٍ متقابلةٍ، فنحصلُ على عيّنتينِ مرتبطتينِ مِنَ القيمِ (لأنَّ كلَّ زوجٍ يعودُ لشخصٍ واحدٍ) كَمَا هيَ مبيّنةٌ بالجدولِ (2–5).

جدول (2–5): البياناتُ القبليّةُ والبعديّةُ لاختبارِ الفرضيّاتِ للفرقِ بينَ متوسّطي مجتمعَينِ غيرِ مستقلّين.

رقمُ الشّخص	1	2	3	4	....	I	....	n	المُتوسّط	
الدّرجاتُ القبليّةُ (X)	x_1	x_2	x_3	x_4	....	x_i	....	x_n	$\bar{x}$	
الدّرجاتُ البعديّةُ (Y)	y_1	y_2	y_3	y_4	....	y_i	....	y_n	$\bar{y}$	
عيّنةُ الفروقاتِ d_i	d_1	d_2	d_3	d_4	....	d_i	....	d_n	$\bar{d}$	S_d

ثمَّ تُحسَبُ الفروقاتُ بينَ قيمتي كلِّ زوجٍ مِنَ العلاقةِ: $d_i=x_i-y_i$

$$(d_i = x_i - y_i)$$

ويُحسّبُ المتوسّطُ والتّباينُ والانحرافُ المعياريُّ لهذهِ الفروقاتِ مِنَ العلاقتينِ: $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum d_i$

$$S_d^2 = \frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n-1}$$

ولإجراءِ الاختبارِ حولَ الفرقِ بينَ العيّنتينِ يَتِمُّ وضعُ الفرضيّتينِ كَمَا يلِي:

1- صياغةُ الفروض :

- الفرضُ الصّفريُّ: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ أو $H_0: \bar{D}_0 = 0$ حيثُ $\bar{D}_0 = \mu_1 - \mu_2$
- الفرضُ البديلُ: $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ أو $\bar{D}_0 \neq 0$

يمكنُ للفرضِ البديلِ أن يأخذَ إحدى الحالتينِ التّاليتينِ أيضاً:

$$H_1: \mu_1 < \mu_2 \text{ أو } H_1: \bar{D}_0 < 0$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \text{ أو } H_1: \bar{D}_0 > 0$$

حيثُ:

$\bar{d}$: هيَ متوسّطُ الفرقِ بينَ أزواجِ المشاهداتِ.

S_d: هوَ الانحرافُ المعياريُّ للفرقِ بينَ أزواجِ المشاهداتِ.

n: تمثّلُ حجمَ العيّنةِ المسحوبةِ منَ المجتمعِ (عددُ أزواجِ المشاهداتِ).

$\bar{D}_0$: هوَ الفرقُ بينَ متوسطَي المجتمعَينِ الأوّلُ والثّاني.

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

إنَّ إحصاءةَ الاختبارِ تتوزّعُ وفقاً لتوزيعِ (t) بدرجاتِ حرّيّة (df=n−1) وتُحسَبُ بالعلاقةِ التّاليةِ:

$$t = \frac{\bar{d} - \bar{D}_0}{S_d/\sqrt{n}}$$

حيثُ: $\bar{D}_0$ هيَ قيمةُ مُتوسّطِ الفروقاتِ المفترضةِ في المجتمعِ، وتُؤخَذُ قيمتها الصّفريّةُ مِن فرضيّةِ العدمِ H_0 وهيَ $\bar{D}_0 = 0$ فتصبحُ معادلةُ حسابِ إحصاءةِ الاختبارِ على الشّكلِ الآتي:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}}$$

3- تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ :

تتحدّدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ باستخراجِ قيمةِ (t) الجدوليّةِ مِن جدولِ (t) عندَ درجاتِ حرّيّةٍ تساوي $(n-1)$ عندَ مستوى معنويّةٍ يساوي (α).

4- المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

تَتِمُّ مقارنةُ قيمةِ إحصاءةِ الاختبارِ المحسوبةِ بحدودِ منطقتَي القبولِ والرّفضِ، فإذا وقعَتْ فِي منطقةِ القبولِ يَتِمُّ قبولُ الفرضِ العدميِّ (H_0) ونقولُ بأنّهُ لا يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ الدّرجاتِ القبليّةِ والبعديّةِ، أمّا إذا كانت قيمةُ إحصائيّةِ الاختبارِ أكبرُ مِن (t) الجدوليّةِ أي تقعُ فِي منطقةِ الرّفضِ وبالتّالي نرفضُ الفرضَ العدميَّ ونقبلُ الفرضَ البديلَ القائلَ أنَّ هناكَ فرقاً معنوياً بينَ القيمِ القبليّةِ والبعديّةِ.

مثال (2−10): البياناتُ التّاليةُ تمثّلُ نتائجَ تجربةٍ أُجريَت على عشرةِ أشخاصٍ لاختبارِ مدى فعاليّةِ نظامٍ خاصٍّ مِنَ الغذاءِ لتخفيفِ الوزنِ، حيثُ تمَّ قياسُ أوزانِ الأشخاصِ قبلَ البدءِ فِي تطبيقِ النّظامِ الغذائيِّ وبعدَ تطبيقِهِ بثلاثةِ شهورٍ فكانت النّتائجُ موضّحةٌ بالجدولِ (2−6).

جدول (2−6): أوزانُ الأشخاصِ قبلَ وبعدَ تطبيقِ النّظامِ الغذائيّ.

رقمُ الشّخص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الأوزانُ قبلَ (X)	95	109	89	93	106	92	88	119	102	92
الأوزانُ بعدَ(Y)	90	96	85	87	104	85	76	103	95	84

المطلوبُ: اختبارُ ما إذا كانَ نظامُ الغذاءِ فعّالاً فِي تخفيفِ الوزنِ مستخدماً مستوى دلالة (α=0.05)

الحلُّ:

1− صياغةُ الفروضِ :

بفرضِ أنَّ $d_i=x_i-y_i$ تمثّلُ عيّنةَ الفرقِ بينَ أزواجِ البياناتِ للعيّنتينِ و $\overline{D}_0$ هوَ الفرقُ بينَ متوسّطَي المجتمعَينِ الأوّلُ والثّاني، ويمكنُ صياغةُ الفروضِ كَمَا يلِي:

- الفرضُ الصّفريُّ: $H_0: \mu_x = \mu_y$ أو $H_0: \overline{D}_0 = 0$ لا يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ القيمِ القبليّةِ والبعديّة.
- الفرضُ البديلُ: $H_1: \mu_x > \mu_y$ أي أنّهُ يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ الدّرجاتِ القبليّةِ والبعديّةِ.

2− حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

تُحسَبُ إحصاءةِ الاختبارِ مِنَ العلاقةِ $t = \frac{\bar{d}-\overline{D}_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$ وهذا يتطلّبُ حسابَ مُتوسّطِ الفروقِ ($\bar{d}$) والانحرافِ المعياريِّ (S_d) لأزواجِ المشاهداتِ كَمَا هيَ مبيّنةٌ بالجدولِ (2−7).

جدول (2−7): حسابُ الانحرافِ المعياريِّ لأوزانِ الأشخاصِ قبلَ وبعدَ تطبيقِ النّظامِ الغذائيّ.

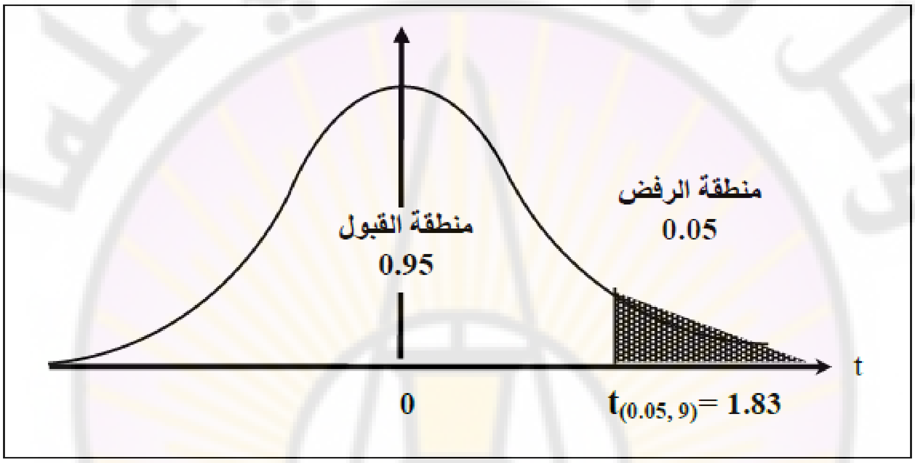
رقمُ الشّخص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموع
الأوزانُ قبلَ (X)	95	109	89	93	106	92	88	119	102	92	
الأوزانُ بعدَ(Y)	90	96	85	87	104	85	76	103	95	84	
الفروقُ (d=x-y)	5	13	4	6	2	7	12	16	7	8	80
$(d_i-\bar{d})$	-3	5	-4	-2	-6	-1	4	8	-1	0	0
$(d_i-\bar{d})^2$	9	25	16	4	36	1	16	64	1	0	172

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{172}{9}} = 4.37 \qquad \bar{d} = \frac{80}{10} = 8$$

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{8}{4.37/\sqrt{10}} = 5.79$$

3- تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ :

تتحدّدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ باستخراجِ قيمةِ (t) الجدوليّةِ مِن جدولِ (t) عندَ درجاتِ حرّيّةٍ تساوي (n−1=9)، عندَ مستوى معنويّةٍ يساوي (α=0.05)، أي أنَّ $t_{(0.05,9)} = 1.83$ ، وبِما أنَّ الفرضَ البديلَ "أكبر مِن" هذا يعني أنّهُ مِن طرفٍ واحدٍ نحوَ اليمينِ؛ أي القيمةُ الجدوليّةُ تكونُ $t_{(0.05,\ 9)} = 1.83$ ، وبالتّالي تتحدّدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ بالشّكلِ (2−61).



شكل (2−16): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتَي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2−10).

4- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ تساوي (5.79) فإنّها تقعُ فِي منطقةِ الرّفضِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ العدميِّ وقبولِ الفرضِ البديلِ بأنّهُ يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ أوزانِ الأشخاصِ قبلَ وبعدَ النّظامِ الغذائيّ، وهذا يقودنا إلى النّتيجةِ بأنَّ النّظامَ الغذائيَّ المتّبعَ فعّالٌ فِي إنقاصِ الوزنِ.

2-8- اختباراتُ الفروضِ المتعلّقةِ بالنِّسَبِ.

اختباراتُ الفروضِ حولَ النِّسبِ يمكنُ تصنيفها إلى نوعينِ هما:

- **اختباراتُ الفروضِ لنسبةِ مجتمعٍ.**
- **اختباراتُ الفروضِ للفرقِ بينَ نسبتَي مجتمعَينِ.**

2-8-1- اختباراتُ الفروضِ لنسبةِ مجتمعٍ.

إذا كانَ المجتمعُ الذّي نقومُ بدراستهِ يتبعُ التّوزيعَ الطّبيعيَّ، وإذا كانت نسبةُ ظاهرةٍ معيّنةٍ فِي المجتمعِ هيَ (p) وكانت (r) هيَ نسبةُ الظّاهرةِ فِي العيّنةِ العشوائيّةِ التّي تمَّ سحبها مِنَ المجتمعِ، فإنَّ المطلوبَ هوَ اختبارُ وجودِ فرقٍ معنويٍّ بينَ نسبةِ الظّاهرةِ فِي كُلٍّ مِنَ العيّنةِ والمجتمعِ.

1- صياغةُ الفروضِ :

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $P=P_0$) لا يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ النّسبةِ الحقيقيّةِ (p) والنّسبةِ المدّعاةِ (p_0) للمجتمعِ.
- الفرضُ البديلُ: (H_1: $P\neq P_0$) يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ النّسبةِ الحقيقيّةِ والنّسبةِ المدّعاةِ للمجتمعِ.

ويمكنُ للفرضِ البديلِ أن يأخذَ إحدى الحالاتِ الآتيةِ:

جدول (2-8): طرائقُ صياغةِ الفروضِ لنسبةِ مجتمعٍ.

اختبارٌ مِن طرفينِ	مِن طرفٍ واحدٍ أيمنِ	مِن طرفٍ واحدٍ أيسرِ
$H_1 : P \neq P_0$	$H_1 : P > P_0$	$H_1 : P < P_0$

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

تُحسَبُ إحصاءةُ الاختبارِ (Z_C المحسوبةِ) التّي تتبعُ التّوزيعَ الطّبيعيَّ القياسيَّ مِنَ العلاقةِ:

$$Z_c = \frac{r-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

حيثُ تُحسَبُ قيمةُ (r) مِن العلاقةِ:

$$r = \frac{\text{عدد الذين يمتلكون الصفة}}{\text{n حجم العينة الكلي}}$$

3- تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ باستخراجِ قيمِ (Z) الجدوليّةِ مِنَ الجداولِ الإحصائيّةِ للتّوزيعِ المعياريِّ وحسبَ مستوى المعنويّةِ (α)، وحسبَ الفرضِ البديلِ هل هوَ مِن طرفينِ أم مِن طرفٍ واحدٍ.

4- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

نقارنُ قيمةَ إحصاءةِ الاختبارِ (Z_C) المحسوبةِ بحدودِ منطقتي القبولِ والرّفضِ، فإذا وقعَتْ فِي منطقةِ القبولِ فإنّنا نقبلُ الفرضَ العدميّ، وإذا وقعَتْ فِي منطقةِ الرّفضِ فإنّنا نرفضُ الفرضَ العدميّ، ونقبلُ الفرضَ البديلَ.

مثال (2-11): فِي دراسةٍ إحصائيّةٍ ادّعت فِي تقريرِها أنّ 15% فقط مِن خريجي الجامعاتِ يجدونَ عملاً فِي مجالِ تخصّصهم الرّئيس. مِن أجلِ اختبارِ هذا الادّعاءِ (الفرضِ) اختيرتْ عيّنةٌ عشوائيّةٌ حجمها 400 خريجٍ فوُجِدَ مِن بينهم 100 فقط يعملونَ فِي مجالِ تخصّصهم .

المطلوبُ: هل تدلُّ نتائجُ العيّنةِ أنَّ النّسبةَ التّي ذُكرت فِي الدّراسةِ الإحصائيّةِ (الادّعاءِ) صحيحةٌ أم تختلفُ عنِ الواقعِ؟ استخدمُ مستوى المعنويّةِ ($\alpha=0.01$).

الحلُّ:

مِن أجلِ حلِّ هذا التّمرينِ يجبُ أنْ نجيبَ على السّؤال التّالي:

هل يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ النّسبةِ المدّعاةِ بالتّقريرِ $(p_0=0.15)$ ونسبةِ العيّنةِ (0.25)؟

1- صياغةُ الفروض :

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0: P= 0.15)$ نسبةُ المجتمعِ تساوي (0.15)
- الفرضُ البديلُ: $(H_1: P\neq 0.15)$ نسبةُ المجتمعِ لا تساوي (0.15).

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ Z_C المحسوبةِ:

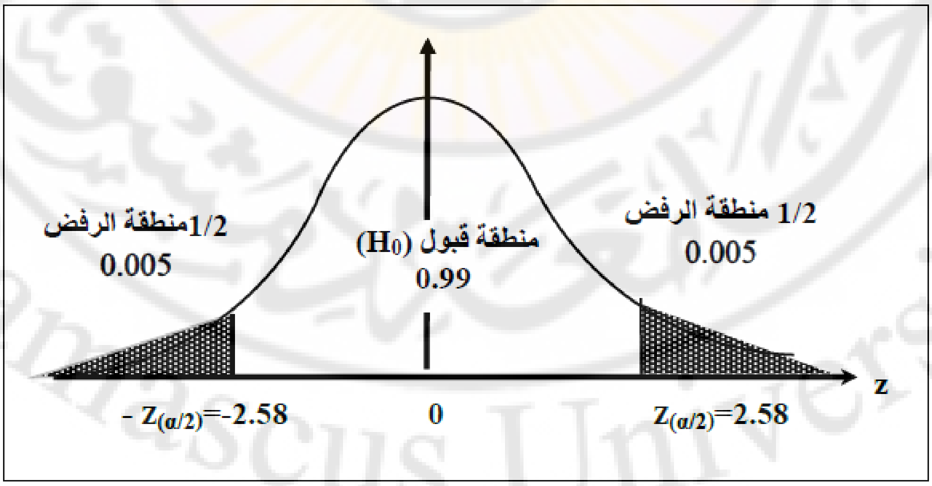
$$r=\frac{100}{400}=0.25$$

$$Z_c=\frac{r-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}=\frac{0.25-0.15}{\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{400}}}=\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.18}{400}}}=5.61$$

3- تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ:

لتحديدِ منطقتَي القبولِ والرّفضِ نستخرجُ قيمةَ $(Z_{\alpha/2})$ الجدوليّةِ مِن جدولِ التّوزيعِ (Z) وعندَ مستوى معنويّة $(\alpha=0.01)$ فتكونُ $\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}=\pm 2.58$

أي أنَّ منطقةَ القبولِ تبدأُ مِن 2.58- إلى 2.58+، ومنطقةُ الرّفضِ هيَ القيمُ التّي تكونُ أصغرَ مِن (2.58-) وأكبرَ مِن (2.58+) وهيَ موضّحةٌ بالشّكلِ (2-17).



شكل (2-17): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتَي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2-11).

المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ إحصاءةَ الاختبارِ ($Z_C=5.6$) وقعَتْ فِي منطقةِ الرّفضِ فإنّنا نرفضُ فرضَ العدمِ وبالتّالي نقبلُ البديلَ (H_1) أي أنَّ نسبةَ الخريجينَ الذّينَ لا يجدونَ عملاً فِي مجالِ تخصّصهم لا يساوي 15% وهذا يخالفُ ما ادّعاهُ التّقريرُ بدرجةِ ثقة 99% .

مثال (2−12): إذا كانت نسبةُ المدخنينَ فِي مدينةِ دمشقَ عام 2000 كانت (28.8%)، وفِي عامِ 2020 اختيرتْ عيّنةٌ عشوائيّةٌ مِن مدينةِ دمشقَ حجمها 1283 شخصاً فكانَ مِن بينهم 320 شخصاً مِنَ المدخنين.

هل تدلُّ هذهِ النّتائجُ على انخفاضِ نسبةِ المدخنينَ بينَ عامي 2000, 2020؟ عند مستوى معنوية ($\alpha=0.05$).

الحلُّ:

1− صياغةُ الفروض :

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $P= 0.288$) نسبةُ المدخنينَ فِي 2020 هيَ نفسها فِي عامِ 2000
- الفرضُ البديلُ: (H_1: $P< 0.288$) نسبةُ المدخنين فِي 2020 أقلُّ مِنَ النّسبةِ فِي عامِ 2000.

2− حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

حسابُ إحصاءةِ الاختبارِ Z_C المحسوبةِ:

حساب إحصاءةِ الاختبارِ Z_C المحسوبةِ :

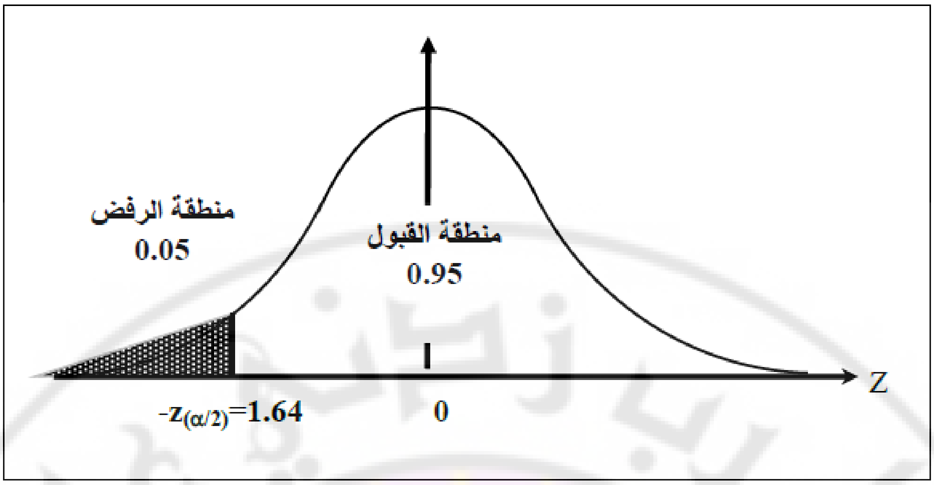
$$r=\frac{320}{1283}=0.249$$

$$Z_c=\frac{r-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}=\frac{0.249-0.288}{\sqrt{\frac{0.288(1-0.288)}{1283}}}=\frac{-0.039}{0.01}=-3.9$$

3− تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ:

لتحديدِ منطقتَي القبولِ والرّفضِ نستخرجُ قيمةَ (Z_α) الجدوليّة مِن جدولِ التّوزيعِ (Z) وعندَ مستوى معنويّة ($\alpha=0.05$) وبما أنَّ الفرضَ البديلَ "أصغر من" فيَتِمُّ استخراجُ قيمةِ (Z) الجدوليّةِ $-Z_\alpha=-1.64$

أي أنَّ منطقةَ القبولِ تبدأُ مِن (-1.64) إلى اللانهايةِ ومنطقةَ الرّفضِ هيَ القيمُ التّي تكونُ أصغرُ مِن (-1.64) والاختبارُ مِن طرفٍ واحدٍ نحوَ اليسارِ كَمَا هوَ مبيّنٌ بالشّكلِ (2−18).



شكل (2-18): التمثيلُ البيانيُّ لمنطقتَي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2-12).

4-المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ إحصاءةَ الاختبارِ $(Z_C=-3.9)$ وقعَتْ فِي منطقةِ الرّفضِ، فالقرارُ يكونُ برفضِ الفرضِ العدمِ وبالتّالي نقبلُ البديلَ (H_1) أي أنَّ نسبةَ المدخنينَ فِي العامِ 2020 أقلُّ مِن 28.8% بمعنى أنَّ نسبةَ المدخنينَ انخفضت بينَ العامينِ 2000 و2020 بدرجةِ ثقة 95% .

2-8-2- اختباراتُ الفروضِ للفرقِ بينَ نسبتَي مجتمعَين.

قد يرغبُ الباحثُ في اختبارِ ما إذا كانت نسبةُ المدخنينَ أو نسبةُ البطالةِ في مجتمعٍ معيّنٍ تساوي نسبةَ المدخنينَ أو نسبةَ البطالةِ في مجتمعٍ آخر، في مثلِ هذهِ الحالاتِ فإنَّ المطلوبَ هوَ اختبارُ ما إذا كانتِ النّسبةُ في المجتمعِ الأوّلِ تساوي النّسبةَ في المجتمعِ الثّاني أو لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ نسبتَي المجتمعَين.

1- صياغة الفروض :

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0: P_1= P_2)$ نسبةُ المجتمعِ الأوّلِ تساوي نسبةَ المجتمعِ الثّاني.
- الفرضُ البديلُ: $(H_1: P_1\neq P_2)$ نسبةُ المجتمعِ الأوّل لا تساوي نسبةَ المجتمعِ الثّاني.

ويمكنُ اختيارُ شكلٍ آخرَ للفرضِ البديلِ مثل: "أكبر من" أو "أقلّ من" إذا دعتِ الحاجةُ لذلكَ.

2- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

بافتراضِ أنَّ العينتينِ كبيرتينِ بدرجةٍ كافيةٍ تُحسَبُ إحصائيّةُ الاختبارِ كَمَا يلِي:

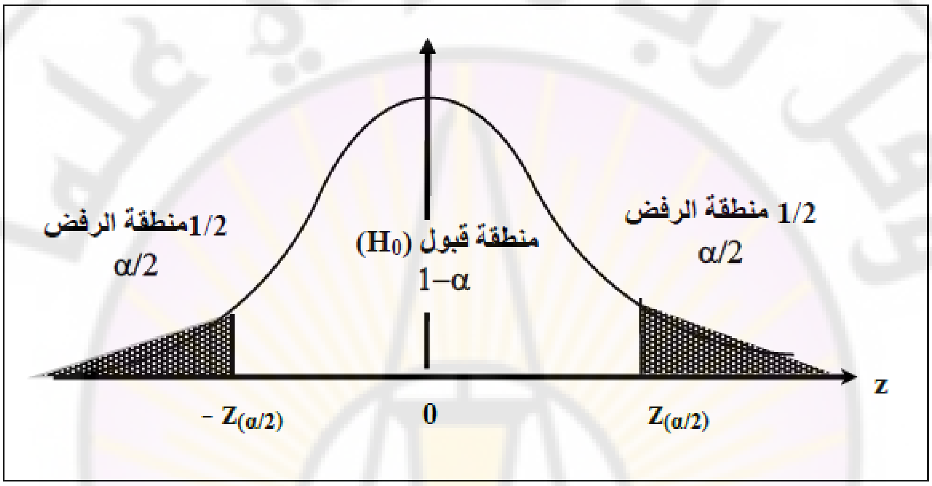
$$Z_{(P_1-P_2)}=\frac{r_1-r_2}{\sqrt{\bar{r}(1-\bar{r})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

حيثُ يَتِمُّ أوّلاً حسابُ $(\bar{r})$ (والتّي تمثّلُ المُتوسّطَ المرجّحَ مِن نسبتي العيّنتَينِ) قبلَ التّعويضِ في الإحصائيّةِ والتّي لها توزيعٌ طبيعيٌّ معياريّ.

$$\bar{r} = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_1 + n_2}$$

3- تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ:

تُحدّدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ بقيمِ ($Z_{\alpha/2}$) الجدوليّةِ، والاختبارُ هنا هوَ اختبارُ الطّرفينِ (لأنَّ الفرضَ البديلَ لا يساوي) وتُحدَّدُ المنطقتانِ بناءً على مستوى المعنويّةِ المطلوبِ، وذلكَ كَمَا فِي الشّكلِ (2-19).



شكل (2-19): التّمثيل البيانيُّ لاختبارِ الفروضِ للفرقِ بينَ نسبتَي مجتمعَين.

المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

نقارنُ قيمةَ إحصاءةِ الاختبارِ المحسوبةِ بحدودِ منطقتَي القبولِ والرّفض، فإذا وقعَتْ فِي منطقةِ القبولِ نقبلُ الفرضَ العدميّ، وإذا وقعَتْ فِي منطقةِ الرّفضِ نرفضُ الفرضَ العدميَّ، ونقبلُ الفرضَ البديلَ.

مثال (2-13): أشارَتْ دراسةٌ إحصائيّةٌ أنَّ نسبةَ المدخنينَ فِي مدينةِ دمشقَ تساوي نسبةَ المدخنينَ فِي مدينةِ حلب. ومِن أجلِ اختبارِ صحّةِ هذا الفرضِ (الادّعاءِ)، اختيرت عيّنةٌ مِن (n_1=100) شخصٍ مِن دمشقَ، فوُجِدَ أنَّ نسبةَ المدخنين (r_1=70)، كذلكَ تمَّ اختيارُ عيّنةٍ عشوائيّةٍ أخرى مِن (n_2=100) شخصٍ مِن حلبَ فوجدَ أنَّ نسبةَ المدخنين (r_2=50).

المطلوبُ: اختبرِ الفرضَ العدميَّ أنَّ النّسبَ فِي المدينتينِ متساويةٌ مقابلَ الفرضِ البديلِ أنّها غيرُ متساويةٍ وذلكَ بمستوى معنويّة (α =0.01).

الحلُّ:

المجتمعُ الأوّلُ: مدينةُ دمشقَ: (p_1) (r_1=70) (n_1=100)

المجتمعُ الثّاني: مدينةُ حلبَ: (p_2) (r_2=50) (n_2=100)

صياغةُ الفروضِ :

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $P_1= P_2$) نسبةُ المدخنينَ فِي دمشقَ تساوي نسبةَ المدخنينَ فِي حلبَ.
- الفرضُ البديلُ: (H_1: $P_1\neq P_2$) نسبةُ المدخنينَ فِي دمشقَ لا تساوي نسبةَ المدخنينَ فِي حلبَ.

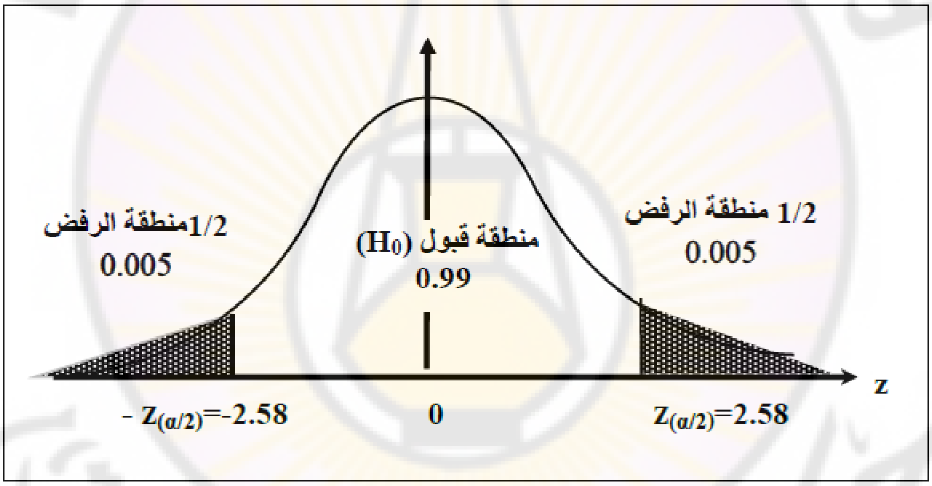
1- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

$$\bar{r}=\frac{n_1r_1+n_2r_2}{n_1+n_2}=\frac{100\times0.70+100\times0.5}{200}=0.6$$

$$Z_{(P_1-P_2)}=\frac{r_1-r_2}{\sqrt{\bar{r}(1-\bar{r})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{0.70-0.50}{\sqrt{0.6(1-0.6)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}}=\frac{0.2}{0.069}=2.89$$

3- تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ:

يتمُّ تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ من قيم (Z) الجدوليّةِ وفقاً لمستوى المعنويّة (α=0.01)، واختبارُ الطرفين ($Z_{\alpha/2}$= $Z_{0.005}$=2.58) كما هوَ مبيّنٌ بالشّكل (2-20).



شكل (2-20): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتَي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (2-13).

أي أنَّ منطقةَ القبولِ تبدأُ مِن (2.58-) وحتّى (+2.58).

4- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ تساوي (2.899) فهيَ تقعُ فِي منطقةِ الرّفضِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ العدميِّ القائلِ بأنَّ نسبةَ المدخنينَ فِي دمشقَ تساوي نسبةَ المدخنينَ فِي حلبَ ونلجأُ إلى الفرضِ البديلِ بأنَّ نسبةَ المدخنينَ فِي دمشقَ لا تساوي نسبةَ المدخنينَ فِي حلبَ وذلكَ بمستوى معنويّة (α=0.01).

و يمكنُ تلخيصُ الإحصاءاتِ المستخدمةِ فِي الاختباراتِ فِي الجدولِ (2-9).

جدول (2–9): تلخيصُ الإحصاءاتِ المستخدمةِ فِي اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ.

م	نوعُ الاختبارِ	تباينُ المجتمعِ	العيّناتُ	إحصاءُ الاختبارِ	توزيعُ الإحصاءِ
1-	اختبارُ الفروضِ لمُتوسّطِ مجتمعٍ	معلومٌ	لا يُشترَطُ حجمُ العيّنةِ	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	N(0,1)
		غيرُ معلومٍ	n>30	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	N(0,1)
			n≤ 30	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t_\upsilon = \mathrm{n} - 1$
2-	اختباراتُ الفروضِ حولَ الفرقِ بينَ مُتوسّطي مجتمعينِ	تباينُ المجتمعَينِ معلومٌ	صغيرةٌ أو كبيرةٌ	$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}}}$	**N(0,1)**
		تباينُ المجتمعَينِ غيرُ معلومٍ	العيّناتُ كبيرةٌ	$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n1} + \frac{S_2^2}{n2}}}$	**N(0,1)**
		تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ ولكنّهما متساويينِ	العيّناتُ صغيرةٌ مستقلّةٌ	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}\right)}}$ $S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$t_v = \mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2$
		تباينُ المجتمعَينِ مجهولٌ ولكنّهما غيرُ متساويينِ	العيّناتُ صغيرةٌ مستقلّةٌ	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n1} + \frac{S_2^2}{n2}}}$	$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$
		العيّناتُ مرتبطةٌ		$t = \frac{\bar{\bar{d}} - \bar{\bar{D}}_0}{S_d/\sqrt{n}}$	$t_v = \ n - 1$
-3	اختبارُ الفروضِ لنسبةٍ فِي مجتمعٍ			$\mathrm{Z_C} = \frac{\mathrm{r} - \mathrm{P}_0}{\sqrt{\frac{\mathrm{P}_0(1 - \mathrm{P}_0)}{\mathrm{n}}}},$	**N(0,1)**
-4	اختبارُ الفروضِ حولَ الفرقِ بينَ نسبتي مجتمعَينِ			$Z_{P_1 - P_2} = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{\bar{r}(1-\bar{r})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1)}{n_2}\right)}}$ $\bar{r} = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_1 + n_2}$	**N(0,1)**

الفصلُ الثّالث

تحليلُ التّبايُنِ (Analysis of Variance)

Damascus University

الفصلُ الثّالث

تحليلُ التّبايُنِ (Analysis of Variance)

3-1- مقدّمة:

ذكرنا عندَ الحديثِ عنِ اختبارِ الفروضِ الإحصائيّةِ حولَ الفرقِ بينَ وسطينِ حسابيّينِ لمجتمعين أنَّ الباحثَ قد يرغبُ فِي اختبارِ ما إذا كانَ مُتوسّطُ الدّخلِ فِي إحدى الدّولِ يساوي مُتوسّطَ الدّخلِ فِي دولةٍ أخرى. ولكن فِي كثيرٍ منَ الحالاتِ قد يرغبُ الباحثُ فِي إجراءِ اختبارٍ عن تساوي ثلاثةِ مُتوسّطاتٍ أو أكثر، فقد يرغبُ فِي اختبارِ ما إذا كانت مُتوسّطاتُ الدّخولِ فِي أربعِ دولٍ متساوية أم لا، فتكونُ صياغةُ الفرضيّاتِ بأنَّ الفرضَ العدميَّ يفترضُ أنَّ المُتوسّطاتِ جميعها متساوية و الفرضَ البديلَ الذّي يقتضي بعدمِ تساوي بعض هذهِ المُتوسّطاتِ (أو يوجدُ على الأقلِّ متوسطانِ غيرَ متساويانِ) كَمَا يلِي:

- **الفرضُ العدميُّ (H_0: $\mu_1= \mu_2=\mu_3.....= \mu_t$):** مُتوسّطاتُ المجتمعاتِ متساويةٌ.
- **الفرضُ البديلُ (H_1):** المُتوسّطاتُ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ متوسّطانِ على الأقلِّ غيرَ متساويينِ).

مثلاً إذا أراد باحثٌ زراعيٌّ مقارنةَ مُتوسّطاتِ كميّةِ محصولِ القمحِ النّاتجِ من تطبيقِ أربعةِ أصنافٍ منَ الأسمدةِ (A, B, C, D) ويرغبُ فِي معرفةِ هل هذهِ الأصنافُ الأربعةُ منَ السّمادِ تعطي نفسَ كميّةِ القمحِ أم أنَّ هناك فروقاً معنويّةً بينها، فِي هذهِ الحالةِ تكونُ صياغةُ فرضِ العدمِ والفرضِ البديلِ كَمَا يلِي:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$) مُتوسّطاتُ كميّةِ المحصولِ للأصنافِ الأربعةِ متساويةٌ.
- الفرضُ البديلُ: (H_1) مُتوسّطاتُ كميّةِ المحصولِ للأصنافِ الأربعةِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ متوسطانِ غيرَ متساويينِ).

هنا بالإمكانِ تطبيقُ اختبارِ تي (t-test) من أجلِ اختبارِ تساوي المُتوسّطاتِ الأربعةِ وذلكَ على مراحلَ بأن يُطبّقَ على كلِّ اثنينِ منَ المُتوسّطاتِ، أي أنَّه سوفَ يَتِمُّ تطبيقُ اختبارِ(t-test) ستَّ مرّاتٍ. هذا يعني أنَّ هذا التّحليلَ سوفَ يستغرقُ وقتاً أطولَ ومجهوداً أكبرَ، والأهمُّ من ذلكَ أنَّ احتمالَ أخذِ قرارٍ صحيحٍ سوفَ ينخفضُ، و بالتّالي سوفَ يزيدُ كثيراً احتمالُ الخطأِ أوِ احتمالُ اتّخاذِ قرارٍ غير سليم.

لذلكَ كانَ لابدَّ منَ التّفكيرِ فِي أسلوبٍ آخرَ بديلٍ يوفّرُ الوقتَ والمجهودَ هذا الأسلوبُ هوَ الذّي يُسمّى "تحليلَ التّبايُنِ - Analysis of Variance" و يُسمّى اختصاراً بـ "ANOVA" و هوَ اختبارٌ إحصائيٌّ يُستخدمُ لاختبارِ معنويّةِ الفرقِ بينَ مُتوسّطاتِ ثلاث عيّناتٍ أو أكثر بمقارنةٍ واحدةٍ دونَ أخذهم اثنينِ اثنين.

3-2- اختبارُ (F) وتحليلُ التّبايُنِ (F-Test and the Analysis of Variance):

اختبارُ (t) يُستخدمُ لاختبارِ معنويّةِ الفروقِ بينَ مُتوسّطيِّ عيّنيتينِ، أمّا عندَ دراسةِ أكثرَ من عيّنيتينِ أو مجتمعينِ فِي آنٍ واحدٍ كَمَا هيَ الحالُ فِي التّجاربِ الزّراعيّةِ فالباحثُ فِي هذهِ الحالةِ لا يستطيعُ الاعتمادَ على اختبارِ (t)، ولابدَّ لهُ منَ الاعتمادِ على اختبارٍ آخرَ أكثرَ شمولاً هوَ اختبارُ (F) والذّي يعتمدُ على النّسبةِ بينَ التّباينين.

3-2-1 توزيعُ (F):

يُعتبرُ توزيعُ (F) من أهمِّ التّوزيعاتِ المستخدمةِ فِي الإحصاءِ التّطبيقيِّ، وأوّلُ من وضعَ هذا التّوزيعِ هوَ العالمُ البريطانيُّ (R.A. Fisher1962-1890) وسمّاهُ توزيعَ (Z) ولا يقصدُ بهِ (التّوزيعَ الطّبيعيَّ المعياريَّ) ثمَّ بعدَ ذلكَ قامَ العالمُ (Snedecor) بتسميتِهِ توزيعَ (F) تكريماً لـ Fisher حيثُ قامَ بحسابِ جداولَ إحصائيّةٍ خاصّةٍ لتوزيعِ F وفيها درجات الحرّيّة التّي فِي أعلى الجدولِ تخصُّ البسطَ أمّا درجاتُ الحرّيّةِ على العمودِ الجانبيِّ فتخصُّ المقامَ.

و توزيعُ (F) هوَ توزيعُ معاينةٍ (Sampling Distribution) المشتقّ من نسبةِ تبايناتِ عيّناتٍ مسحوبةٍ من مجتمعينِ طبيعيينِ لهما نفس التّبايُن.

وكَمَا فِي توزيعِ (t) وتوزيعِ مُربّع كاي (Chi-Square Distribution) فإنَّ شكلَ توزيعِ (F) يعتمدُ على درجاتِ الحرّيّةِ (df).

3-2-2- طبيعةُ وخواصُّ التّوزيعِ (F):

يُعرّفُ توزيعُ (F) بأنّهُ النّسبةَ بينَ توزيعينِ مُستقلّينِ من توزيعاتِ مُربّعِ كاي بعدَ قسمةِ كلٍّ منهما على درجاتِ الحرّيّةِ، إذا كانت (f) هيَ قيمةٌ من قيمِ المتغيّرِ العشوائيِّ (F).

نظرية: إذا كانَ (S_1^2) هوَ تبايُنُ عيّنةٍ عشوائيّةٍ حجمها (n_1) مسحوبةٌ من مجتمعٍ طبيعيٍّ $N(\mu_1,\sigma_1^2)$

و كانَ (S_2^2) هوَ تبايُنُ عيّنةٍ عشوائيّةٍ حجمها (n_2) مسحوبةٌ من مجتمعٍ طبيعيٍّ $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

وكانتِ العيّنتانِ مستقلّتانِ فإنَّ المتغيّرَ (f): $f=\dfrac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim \mathrm{F}(n_1-1, n_2-2)$

أي إنَّ المتغيّرَ (f) يتوزّعُ وفقاً لتوزيعِ $F(n_1-1, n_2-1)$ بدرجتيّ حرّيّةٍ (n_1-1) للبسطِ وَ (n_2-1) للمقامِ.

ويمكنُ تعريفُ توزيعِ (F): بأنّهُ نسبةٌ بينَ توزيعينِ مستقلّينِ يتبعانِ توزيعَ كاي مُربّع وكلٌّ منهما لهُ درجاتُ حرّيّةٍ مختلفةٍ.

دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ لتوزيعِ (F):

دالّةُ الكثافةِ الاحتماليّةِ لتوزيعِ **(F) بدرجاتِ حرّيّة (v_1,v_2)** تُحسبُ بالمعادلةِ التّاليةِ:

$$f(F)=KF^{\left(\frac{v_2}{2}-1\right)}\left(1-\frac{v_1 F}{v_2}\right)^{-\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}$$

حيثُ إنَّ قيمةَ (F) دائماً أكبر منَ الصّفر(موجبة).

و توزيعَ (F) لهُ معلمتانِ هُما (v_1) و(v_2) وعندَ معرفتهما يتعيّنُ توزيعُ F.

حيثُ: $v_1=n_1-1,\quad v_2=n_2-1$

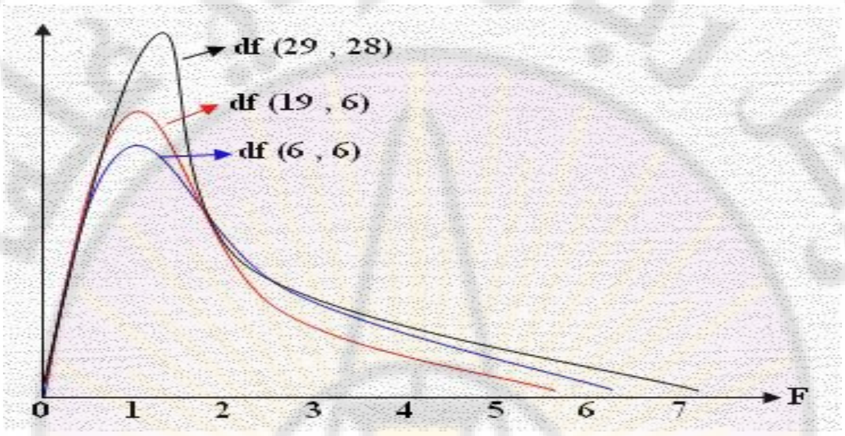
K: ثابتٌ يعتمدُ على (v_1, v_2).

المُتوسّطُ الحسابيُّ والتّبايُنُ لتوزيعِ (F):

- **المُتوسّطُ الحسابيُّ:** أوِ التّوقّعُ للمتغيّرِ العشوائيِّ (F) يساوي: $E(F)=\dfrac{v_1}{v_2-2}$ بشرطِ $(v_2>2)$
- **التّبايُنُ:** للمتغيّرِ العشوائيِّ (F) يساوي: $Var(F)=\dfrac{2v_2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}$

الشّكلُ البيانيُّ لتوزيعِ (F):

إنَّ توزيعَ (F) هوَ عبارةٌ عن مجموعةٍ منَ المنحنياتِ الملتويةِ نحوَ جهةِ اليمينِ كَمَا بالشّكلِ (3-1) يتميّزُ كلٌّ منها عنِ الآخرِ برقمينِ (معلمتينِ) تتمثّلانِ بدرجتيِّ حرّيّة (البسط و المقام) وهُما $(t - 1)$ للبسطِ، و $(N - t)$ للمقامِ، حيثُ (N) مجموعُ أحجامِ العيّناتِ و(t) هيَ عددُ المجموعاتِ (العيّناتِ) موضعَ الدّراسةِ.



شكل (3-1): الشّكلُ البيانيُّ لتوزيعِ (F).

خصائصُ توزيعِ (F):

- إنَّ توزيع (F) هوَ توزيعٌ احتماليٌّ متّصلٌ أي يمكنُ حسابُ الاحتمالاتِ بإيجادِ المساحاتِ تحتَ منحني التّوزيعِ.
- إنَّ منحني توزيع (F) يقعُ بالكاملِ بالنّصفِ الموجبِ لمحورِ (X) أي أنَّ قيمَ (F) موجبةٌ دائماً وهيَ تقعُ في $(0 \leq F < +\infty)$.
- إنَّ شكلَ منحني توزيع (F) يتحدّدُ بدرجاتِ الحرّيّةِ (v_1, v_2)، أي كلّما تغيّرت درجاتُ الحرّيّةِ يتغيّرُ شكلُ منحني التّوزيع.
- منحني توزيع (F) غيرُ متماثلٍ وملتوي نحوَ اليمينِ ولكن يقتربُ منَ التّماثلِ (حولَ قيمةٍ معيّنةٍ وليسَ حولَ الصّفرِ) كلّما ازدادت درجاتُ الحرّيّةِ (v_1, v_2).

- معاملاتُ توزيعِ (F) هُما درجاتُ الحرّيّةِ (v_1, v_2)، معَ العلمِ (v_1) هيَ درجاتُ الحرّيّةِ بينَ العيّناتِ $(v_1=t-1)$ ودرجةُ الحرّيّةِ (v_2) تُمثّلُ درجاتِ الحرّيّةِ داخلَ العيّناتِ $(v_2=N-t)$.
- فِي اختبارِ (F) دائماً منطقةُ الرّفضِ (α) تكونُ جهةُ اليمينِ ولا يَتِمُّ تقسيما إلى منطقتينِ كَمَا فِي اختبارِ (Z) واختبارِ (t) وذلكَ بسببِ أنَّ التّوزيعَ غيرُ متماثلٍ و يقعُ بالكاملِ فِي الجزءِ الموجبِ، لذلكَ ليسَ لهُ اختبارٌ من طرفينِ.

3-2-3- طريقةُ استخراجِ قيمةِ توزيعِ (F) من جداولِ التّوزيعِ الاحتماليِّ:

إنَّ قيمَ (F) الجدوليّةِ تمَّ إيجادها بعد حسابُ درجاتِ الحرّيّةِ (v_1, v_2) للتّوزيعِ (F) ثمَّ يَتِمُّ استخراجُ قيمِ (F) الجدوليّةِ منَ الجداولِ الإحصائيّةِ وفقاً للصّيغةِ $F_\alpha(v_1, v_2)$، حيثُ (v_1) درجاتُ حرّيّةِ البسطِ ويمثّلها القيم الأفقيّة (السّطرية) والـ (v_2) درجاتُ حرّيّةِ المقامِ ويمثّلها القيم العموديّة فِي الجداولِ الإحصائيّةِ لتوزيعِ (F).

مثال (3−1): إيجادُ القيمِ الجدوليّةِ لتوزيعِ (F) بدرجاتِ حرّيّةٍ $(v_1=1)$ للبسطِ وَ $(v_2=4)$ للمقامِ عندَ مستوى معنويّةٍ $(\alpha=0.05)$ وتُكتبُ على الشّكلِ: $F_{0.05}(1, 4)=7.71$

أهمُّ استخداماتِ اختبارِ (F) :

يُستخدمُ اختبارُ (F) فِي الحالاتِ الآتيةِ:

- تقديرُ فترةِ الثّقةِ لـ$(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$
- اختبارُ فرضيّاتٍ حولَ تساوي تباينيِّ مجتمعينِ أي : $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- اختبارُ فرضيّاتٍ حولَ تساوي أكثرَ من مُتوسّطينِ (تحليلِ التّبايُنِ).

3−3− اختبارُ تحليلِ التّبايُنِ(ANOVA):

تعريفُ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA): هوَ اختبارٌ احصائيٌّ يُستخدمُ لاختبارِ معنويّةِ الفرقِ بينَ مُتوسّطاتِ ثلاث عيّناتٍ أو أكثرَ بمقارنةٍ واحدةٍ.

يعتمدُ هذا الاختبارُ على تقسيمِ التّبايُناتِ الكلّيّةِ لمشاهداتِ العيّناتِ لعدّةِ أجزاءٍ للتّعرّفِ على مصادرِ الاختلافِ بينها، ثمَّ استخدامُ (توزيعِ F) كإحصاءةِ اختبارٍ والتّي تساوي ناتجَ قسمةِ التّبايُنِ بينَ العيّناتِ على التّبايُنِ داخلَ العيّناتِ، وذلكَ من أجلِ التّحقّقِ من وجودِ فروقٍ معنويّةٍ بينَ مُتوسّطاتِ العيّناتِ من عدمِهِ.

3-3-1- أنواعُ تحليلِ التّبايُن:

هناكَ عدّةُ أنواعٍ من تحليلِ التّبايُنِ تعتمدُ على المتغيّراتِ المستقلّةِ والتّابعةِ.

1- تحليلُ التّبايُنِ فِي اتّجاهٍ واحدٍ **(One-Way Analysis of Variance)**

هنا يكونُ الاهتمامُ بدراسةِ تأثيرِ متغيّرٍ مستقلٍّ واحدٍ على متغيّرٍ تابعٍ، والمتغيّرُ المستقلُّ هنا يمكنُ أن يكونَ لهُ عدّةُ مُستوياتٍ. مثلُ دراسةِ تأثيرِ 3 أصنافٍ (مُستوياتٍ) منَ السّمادِ (A, B, C) على إنتاجِ القمحِ.

2- تحليلُ التّبايُنِ فِي اتّجاهين**(Two-Way Analysis of Variance)**

(دراسةُ تأثيرِ متغيرينِ مستقلّينِ على متغيّرٍ تابعٍ)، وكذلكَ هُنا كلُّ متغيّرٍ مستقلٍّ يكونُ لهُ عدّةُ مُستوياتٍ. مثلُ دراسةِ تأثيرِ السّمادِ بثلاثةِ أصنافٍ (مُستوياتٍ) منَ السّمادِ (يوريا، نترات، فوسفات) وعمقِ الحراثةِ بثلاثةِ مُستوياتٍ (سطحي- مُتوسّط - عميق) على إنتاجِ القمحِ.

3- تحليلُ التّبايُنِ المتعدّدِ **(Multi- Analysis of Variance)**

فِي هذهِ الحالةِ يكونُ المطلوبُ دراسةَ تأثيرِ ثلاثةِ أو أربعةِ متغيّراتٍ مستقلّةٍ أو أكثرَ على متغيّرٍ تابعٍ، و كلُّ متغيّرٍ مستقلٍّ يكونُ لهُ عدّةُ مُستوياتٍ. مثلُ دراسةِ تأثيرِ السّمادِ بثلاثةِ أصنافٍ (مُستوياتٍ) منَ السّمادِ (يوريا، نترات، فوسفات) وعمقِ الحراثةِ بثلاثةِ مُستوياتٍ (سطحي، مُتوسّط، عميق) وطريقةِ الرّيِّ بمستويينِ (رزاز أو تنقيط)على إنتاجِ القمحِ.

3-4- تحليلُ التّبايُنِ الأحاديِّ (One Way ANOVA):

تحليلُ التّبايُنِ الأحاديِّ هوَ أن يكونَ عاملٌ مستقلٌّ واحدٌ لهُ عدّةُ مُستوياتٍ، ويكونُ تحليلُ التّبايُنِ هدفهُ تحليلُ بياناتِ متغيّرِ التّابعِ (الاستجابةِ) فِي التّحقّقِ من وجودِ اختلافٍ بينَ تأثيراتِ هذهِ المستوياتِ على المتغيّرِ التّابعِ (تحليلُ بياناتِ كميّاتِ القمحِ النّاتجةِ من تطبيقِ 3 أصنافٍ منَ السّمادِ لمعرفةِ هل مُتوسّطاتُ إنتاجِ الأصنافِ الثّلاثةِ متساويةٌ أم لا عندَ مستوى معنويّةٍ معيّنٍ).

شروطُ تطبيقِ اختبارِ تحليلِ التّبايُن:

قبلَ استخدامِ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ لابدَّ من تحقيقِ عدّةِ شروطٍ هيَ:

1- **مستوى القياسِ:** يُشترطُ لاستخدامِ هذا الاختبارِ أن تكونَ البياناتُ فتريّةٌ (فئويّةٌ) أو نسبيّةٌ.

2- **حجمُ العيّنةِ:** يقتضي هذا الافتراضُ أن يكونَ حجمُ العيّنةِ كبيراً.

3- **العشوائيّةُ:** أي يجبُ أن يَتِمَّ اختيارُ العيّناتِ منَ المجتمعاتِ بطريقةٍ عشوائيّةٍ.

4- **الاستقلاليّةُ:** أي يجبُ أن تكونَ العيّناتُ المختارةُ مستقلّة، أي يُفترضُ استقلالُ مشاهداتِ كلِّ عيّنةٍ عن مشاهداتِ العيّناتِ الأخرى.

5- أن تكونَ المجتمعاتُ التّي سُحبت منها العيّناتُ تتبعُ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ، ولكن يرى الإحصائيّونَ أنَّ اختبارَ (F) لا يتأثّرُ بعدمِ توفّرِ هذا الشّرطِ عندما يكونُ حجمُ العيّنةِ كبيراً والتّوزيعُ ليسَ طبيعيّاً.

6- **(تجانسُ تبايُنِ المجتمعاتِ):** أي تساوي تبايُنِ المجتمعاتِ التّي أُخذت منها العيّناتُ العشوائيّةُ المستقلّةُ.

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_2^2 = \cdots\cdots \sigma_n^2$$

بعضُ المفاهيمِ الأساسيّةِ في تحليلِ التّبايُنِ:

1- انحرافُ القيمِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ:

نعلمُ بأنَّ انحرافَ كلِّ قيمةٍ منَ القيمِ عن مُتوسّطها الحسابيِّ إمّا أن يكونَ سالباً أو موجباً وأنَّ مجموعَ الانحرافاتِ دائماً يساوي صفراً $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$، ومن أجلِ التّغلّبِ على المجموعِ الصّفريِّ لانحرافاتِ القيمِ، لجأَ الإحصائيونَ إلى التّعاملِ معَ مُربّعِ هذهِ الانحرافاتِ لغرضِ التّخلّصِ منَ الإشارةِ السّالبةِ ولهذا فإنَّ مجموعَ مُربّعاتِ انحرافاتِ القيمِ (Sum of Squares of deviation -SS) عن مُتوسّطها الحسابيِّ سيكونُ خالياً منَ الإشارةِ السّالبةِ. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

2- التّبايُنُ (Variance):

هوَ مقياسٌ إحصائيٌّ يقيسُ تشتّتَ قيمِ مشاهداتِ ظاهرةٍ معيّنةٍ عن مُتوسّطها، أو بتعريفٍ أكثرَ تفصيلاً يُعرّفُ على أنّهُ مُتوسّطُ مُربّعاتِ انحرافاتِ القيمِ عن وسطها الحسابيِّ. $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N}$

3- تحليلُ التّبايُنِ (ANalysis Of VAriance-ANOVA):

يعتمدُ اختبارُ تحليلِ التّبايُنِ على مبدأِ أنَّ التّبايُنَ الكلّيَّ لكلِّ مشاهداتِ العيّناتِ سببهُ مصدرينِ، أو بمعنى آخرَ هناكَ مصدرينِ لحدوثِ التّبايُنِ الكلّيِّ لقيمِ مشاهداتِ العيّناتِ.

وبالتّالي من أجلِ تحليلِ التّبايُنِ حسبَ مصادرهِ، يَتمُّ حسابُ التّبايُنِ الكلّيِّ لكلِّ مشاهداتِ العيّناتِ ثمَّ يقسمُ (يحلّلُ) هذا التّبايُنُ إلى قسمينِ هُما:

القسمُ الأوّلُ: الاختلافاتُ أوِ التّبايناتُ بينَ العيّناتِ والمسمّى (Between Groups).

القسمُ الثّاني: الاختلافاتُ أوِ التّبايناتُ التّي تحدثُ داخلَ العيّناتِ والمسمّى (Within Groups) والتّي تُعرفُ بالأخطاءِ التّجريبيّةِ (Experimental Error) أوِ التّبايناتِ بسببِ الأخطاءِ التّجريبيّةِ، ويمكنُ التّعبيرُ عنهُ رياضيّاً كَمَا يلِي:

$$(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) = (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) \qquad i = 1,2 \ldots .t, \quad j = 1,2 \ldots \ldots r$$

أي أنَّ اختبارَ تحليلِ التّبايُنِ يعتمدُ فِي صورتهِ النّهائيّةِ على قياسِ مدى اقترابِ أوِ ابتعادِ التّبايُنِ الدّاخليِّ منَ التّبايُنِ الخارجيِّ للعيّناتِ، وذلكَ عن طريقِ ما يسمى بالنسبة الفائية المبينة بالمعادلةِ التّاليةِ:

$$\text{النّسبة الفائيّةُ} = \frac{\text{التّبايُن الخارجيّ}}{\text{التّبايُنُ الدّاخليّ}}$$

3-5- خطواتُ تطبيقِ اختبارِ التّبايُنِ

يَتمُّ تطبيقُ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ وفقاً للخطواتِ التّاليةِ:

خطوة (1): حسابُ التّبايُنِ بينَ مُتوسّطاتِ العيّناتِ (MSB), والذّي يُسمّى التّبايُنَ الخارجيَّ، وذلكَ بحسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ العيّناتِ.

خطوة (2): حسابُ التّبايُنِ داخلَ العيّناتِ (MSE), والذّي يُسمّى التّبايُنَ الدّاخليَّ، وذلكَ بحسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ داخلَ العيّناتِ.

خطوة (3): حسابُ درجاتِ الحرّيّةِ لكلِّ مصدرٍ وذلكَ من أجلِ تحويلِ تلكَ المُربّعاتِ إلى التّبايناتِ المقابلةِ لها.

خطوة (4): حسابُ النّسبةِ الفائيّةِ أو (F_c) أو المحسوبةِ بالمعادلةِ التّاليةِ:

$$\boldsymbol{\frac{MSB}{MSE}} = \frac{\text{التّبايُن بينَ العيّناتِ}}{\text{التّبايُن داخلَ العيناتِ}} = \frac{\text{التّبايُنُ الخارجيُّ}}{\text{التّبايُن الدّاخليُّ}} = \text{النّسبةُ الفائيّة}$$

خطوة (5): الكشفُ عنِ الدّلالةِ الإحصائيّةِ للنّسبةِ الفائيّةِ أو (F_c) المحسوبةِ، وذلكَ بمقارنتها معَ (F_t) الجدوليّةِ عندَ مستوى معنويّةٍ ودرجاتِ حرّيّةٍ معيّنةٍ، فإذا كانت (F_c) المحسوبةِ أكبرَ من قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ يُرفضُ الفرضُ العدميُّ H0 عن تساوي مُتوسّطاتِ المجتمعاتِ، ويُقبلُ الفرضُ البديلُ H1 بأنَّ هناكَ مُتوسّطانِ مختلفانِ.

3-6- حالاتُ تحليلِ التّبايُنِ الأحاديِّ:

ينقسمُ تحليلُ التّبايُنِ الأحاديِّ إلى حالتينِ وفقاً لحجومِ العيّناتِ هُما:

الحالةُ الأولى: تحليلُ التّبايُنِ الأحاديِّ فِي حالةِ عدمِ تساوي حجومِ العيّناتِ.

الحالةُ الثّانيةُ: تحليلُ التّبايُنِ الأحاديِّ فِي حالةِ تساوي حجومِ العيّناتِ.

3-7- الحالةُ الأولى: تحليلُ التّبايُنِ الأحاديِّ فِي حالةِ عدمِ تساوي حجومِ العيّناتِ.

3-7-1- التّوصيفُ الرّياضيّ لتحليلِ التّبايُنِ:

يفرضُ أنَّ لدينا (t) منَ المجتمعاتِ المستقلّةِ والمتجانسةِ $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_2^2 = \cdots\cdots \sigma_t^2)$

والتّي تخضعُ للتّوزيعِ الطّبيعيِّ بمُتوسّطاتٍ تساوي$(\mu_t\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots\mu_1, \mu_2)$، ولنفرضَ أنّنا أخذنا من كلِّ مجتمعٍ عيّنةً عشوائيّةً مستقلّةً واحدةً حجمها (r_i)، ونرغبُ فِي اختبارِ الفرضيّاتِ التّاليةِ:

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0: \mu_1=\mu_2\ldots\ldots\mu_t)$ مُتوسّطاتُ العيّناتِ متساويةٌ.
- الفرضُ البديلُ :(H_1) مُتوسّطاتُ العيّناتِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويينِ).

من أجلِ سهولةِ حسابِ التّباينات أو مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ للعيّناتِ يَتِمُّ تنظيمُ البياناتِ بطريقةٍ منظّمةٍ لتسهيلِ عمليّاتِ الحسابِ كَمَا هوَ بالجدولِ (3−1).

جدول (3−1): تنظيمُ مشاهداتِ العيّناتِ.

العيّناتُ Samples	المشاهداتُ أو التّكراراتُ (Observations- y_{ij})				مجموعُ عناصرِ العيّنةِ $(y_{i\bullet})$	مُتوسّطاتُ العيّناتِ $(\bar{y}_{i\bullet})$
Sample 1	y_{11}	y_{12}	…..	y_{1r}	$y_{1\bullet}$	$\bar{y}_{1\bullet}$
Sample 2	y_{21}	y_{22}	…..	y_{2r}	$y_{2\bullet}$	$\bar{y}_{2\bullet}$
…	…..	…..	…..	…..		
Sample t	y_{t1}	y_{t2}	…..	y_{tr}	$y_{t\bullet}$	$\bar{y}_{t\bullet}$
	عدد المشاهداتِ الكلّيِّ $N=r_1+r_2+….r_t$				المجموعُ العامُّ $y_{\bullet\bullet}$	المُتوسّطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet}$

(y_{ij}): تُمثّلُ قيمة المشاهدة رقم(j) في العينة (المعالجة) رقم (i).

$(y_{i\bullet})$: تُمثّلُ مجموعَ عناصرِ العيّنةِ رقم (i).

$(\bar{y}_{i\bullet})$: تُمثّلُ مُتوسّطَ عناصرِ العيّنةِ رقم (i).

$(y_{\bullet\bullet})$: تُمثّلُ مجموعَ عناصرِ كلِّ العيّناتِ (المجموعُ الكلّيُّ العامُّ)

(t): عددُ العيّناتِ.

r_i: عددُ عناصرِ العيّنةِ (i)، أي أنَّ (r_1) عددُ مفرداتِ (تكراراتِ) العيّنةِ الأولى، و (r_2) عددُ مفرداتِ العيّنةِ الثّانيةِ ، و (r_t) عددُ مفرداتِ العيّنةِ (t).

(N) : يُمثّلُ العددُ الكلّيّ لعناصرِ العيّناتِ ويساوي $(N= r_1+ r_2+…. r_t)$، وعندما تكونُ العيّناتُ متساوية بالحجمِ يكونُ $(N=r\times t)$.

يُظهرُ الجدولُ السّابقُ ثلاثةَ أنواعٍ منَ الانحرافاتِ وهيَ:

- $(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})$: انحرافُ مشاهداتِ العيّناتِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ $(\bar{y}_{..})$.
- $(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet})$: انحرافُ مشاهداتِ كلِّ عيّنةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ لتلكَ العيّنةِ.
- $(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})$: انحرافُ الأوساطِ الحسابيّةِ للعيّناتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ العامِّ $(\bar{y}_{..})$.

ملاحظةٌ: بملاحظةِ الانحرافاتِ السّابقةِ نلاحظُ أنَّ انحرافَ مشاهداتِ العيّناتِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ يساوي انحرافَ الأوساطِ الحسابيّةِ للعيّناتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ العامِّ مضافاً إليهِ انحراف مشاهداتِ كلِّ عيّنةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ لتلكَ العيّنةِ ويمكنُ التّعبيرُ عنها رياضيّاً كَمَا يلِي:

$$(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) = (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) + (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})$$

وبتربيعِ طرفيِّ المساواةِ وإدخالِ إشارةِ المجموعِ نحصلُ على العلاقةِ التّاليةِ:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$$

حيثُ يُعرّفُ كلُّ مقدارٍ منَ المقاديرِ الثّلاثةِ الواردةِ فِي المساواةِ أعلاهُ على النّحوِ التّالي:

- $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$: يُمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ انحرافاتِ المشاهداتِ الكلّيّةِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ ، وهوَ يقيسُ تشتّتَ مشاهداتِ التّجربةِ عنِ الوسطِ الإجماليِّ لهذهِ التّجربةِ، ويُسمّى بمجموعِ المُربّعاتِ الكلّيِّ (Sum Squares of Total) ويُعبّرُ عنهُ بالاختصارِ (SSTO).
- $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$: يُمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ انحرافاتِ المشاهداتِ عن مُتوسّطاتها المرافقةِ لكلِّ عيّنةٍ، وهوَ يقيسُ تشتّتَ المشاهداتِ ضمنَ كلِّ عيّنةٍ حولَ مُتوسّطِ تلكَ العيّنةِ، ويُسمّى (Sum of Squares Within Groups) ويُعبّرُ عنهُ بالاختصارِ (SSE)، وهوَ يُمثّلُ التّغيّراتِ بينَ مشاهداتِ العيّنةِ الواحدةِ والتّي طُبّقت عليها معاملةً واحدةً، أي يُعبّرُ عنِ الخطأِ التّجريبيِّ.
- $\sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$: يُمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ انحرافاتِ مُتوسّطاتِ العيّناتِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ، أي يُمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ المجموعاتِ (Sum of Squares Between Groups) ويُعبّرُ عنهُ بالاختصارِ (SSB).

ويمكنُ التّعبيرُ رياضيّاً أنَّ مجموعَ مُربّعاتِ الانحرافاتِ الكليّةِ لمشاهداتِ العيّناتِ (SSTO) يساوي مجموعَ المُربّعاتِ بينَ العيّناتِ (SSB) مضافاً إليهِ مجموع المُربّعاتِ داخلَ العيّناتِ الذّي يُعزى إلى الأخطاءِ التّجريبيّةِ (SSE) كَمَا يلِي:

مجموعُ المُربّعاتِ داخلَ العيّناتِ + مجموعُ المُربّعاتِ بينَ العيّناتِ = مجموعُ المُربّعاتِ الكلّيِّ
Sum Squares of Total = Sum Squares Between Groups + Sum Squares of Error

SSTO =	SSB +	SSE
$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$ =	$\sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$ +	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet})^2$

يمكنُ حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ (SS) لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّبايُنِ إمّا باستخدامِ المُتوسّطاتِ(Means) أو باستخدامِ المجاميعِ (Summations) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدولِ (2−3).

جدول (2−3): طرقُ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ.

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ SS	
	باستخدامِ المجاميعِ (*Summations*)	باستخدامِ المُتوسّطاتِ (*Means*)
بينَ المجموعاتِ **(Between Groups)**	$SSB=\sum_{i=1}^{t}\frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i}-CF$	$SSB=\sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$
داخلَ المجموعاتِ **Within Groups** **(Error)**	$SSE=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2-\frac{\sum_1^t (y_{i\bullet})^2}{r_i}$ SSE=SSTO - SSB	$SSE=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet})^2$ SSE=SSTO- SSB
المجموعُ ***Total***	$SSTO=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2-CF$	$SSTO=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$

يتبيّنُ منَ الجدولِ (3−2) أنَّ حسابَ مُربّعاتِ المجاميعِ باستخدامِ المجاميعِ أكثرَ سهولةً من طريقةِ المُتوسّطاتِ، لذلكَ سوفَ يَتِمُّ الاعتمادُ عليها فِي كافةِ الأمثلةِ الواردةِ فِي هذا الكتابِ نظراً لأنَّها توفّرُ الكثيرَ منَ الوقتِ والجهدِ عندَ استخدامِ أسلوبِ تحليلِ التّبايُن.

3−7−2− مكوّناتُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table):

إنَّ جدولَ تحليلِ التّبايُنِ أنوفا (ANOVA) موضّحٌ بالجدولِ (3−3) و هوَ يحتوي على البياناتِ التّاليةِ:

1− **مصادرُ التّبايُنِ (Source s of Variance- SOV):** يُرمزُ لهُ اختصاراً بـ(S.O.V) وهوَ يُمثّلُ العمودَ الأوّلَ من جدولِ تحليلِ التّبايُنِ الذّي يحتوي على مُسبّباتِ التّبايُنِ أو مصادر التّبايُنِ، ثمَّ التّبايُن الكلّيّ.

2− **درجاتُ الحرّيّةِ (Degrees of Freedom-df):** ويُرمزُ لدرجاتِ الحرّيّةِ بـ (d.f.) ويُقصدُ بها عدد مرّاتِ إمكانيّةِ مقارنةِ كلِّ قيمةٍ معَ بقيّةِ القيمِ والتّي تساوي (عددُ القيمِ- 1) لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّبايُنِ. أي تقسمُ درجاتُ الحرّيّةِ الكلّيّةِ طبقاً لمصادرِ التّبايُن كَمَا يلي: (t − 1) للتّبايُنِ بينَ العيّناتِ و (N-t) للتّبايُنِ داخلَ العيّناتِ وتوضعُ قيمُ درجاتِ الحرّيّةِ فِي العمودِ الثّاني من جدولِ تحليلِ التّبايُن.

3− **مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ (Sum Squares of deviation-SS):** والذّي يعني مجموعَ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّبايُن.

4− **التّبايناتُ أو مُتوسّطُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ (Mean Squares of Deviations-MS):** يُحسبُ مُتوسّطُ المُربّعاتِ بقسمةِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّبايُنِ على درجاتِ الحرّيّةِ التّابعةِ لذلكَ المصدرِ (الموجودة فِي العمودِ الثّاني).

5− **حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ F_c (وتُسمّى F المحسوبة)** $F_c = \frac{MSB}{MSE}$ والتّي تُحسبُ بقسمةِ التّبايُنِ بينَ العيّناتِ على التّبايُنِ داخلَ العيّناتِ.

جدول (3−3): جدولُ تحليلِ التّبايُن (ANOVA).

مصادرُ التّبايُن	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ	درجاتُ الحرّيّةِ	مُتوسّطُ المَربّعاتِ (التّبايُن)	F (المحسوبة)

Source of Variance (S.O.V)	Sum of squares (SS)	df	Mean squares (MS)	Calculated
بينَ المجموعاتِ (Between Groups)	SSB	t – 1	$MSB = \frac{SSB}{t-1}$	$F_c = \frac{MSB}{MSE}$
داخلَ المجموعاتِ Within Groups (Error)	SSE	N – t	$MSE = \frac{SSE}{N-t}$	
المجموعُ *Total*	SSTO = SSB+ SSE	N – 1		

3-7-3- خطواتُ تنظيمِ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ:

تتلخّصُ عمليّاتُ تنظيمِ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ فِي الخطواتِ التّاليةِ:

1- الخطوةُ (1): حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor - CF): والذّي يساوي مُربّعَ مجموعِ القيمِ مقسوماً على عددها $CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{N}$

2- الخطوةُ (2): حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO) والذّي يساوي المجموعَ الكلّيّ لمُربّعاتِ انحرافاتِ كلِّ المفرداتِ فِي التّجربةِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ.

$$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF$$

3- الخطوةُ (3): حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ المجموعاتِ أوِ العيّناتِ

(Sum Squares Between Groups -SSB)

$$SSB = \sum_{i=1}^{t} \frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i} - CF$$

4- الخطوةُ (4): تقسيمُ المجموعِ الكلّيِّ (SSTO) إلى مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ المجموعاتِ (SSB) و إلى مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ داخلَ المجموعاتِ (SSE).

أي SSTO = SSB + SSE

5- الخطوةُ (5): حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ داخلَ المجموعاتِ أو مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (Sum Square of Error-SSE) منَ العلاقةِ SSE=SSTO-SSB

6- الخطوةُ (6): حسابُ التّبايُنِ بينَ المجموعاتِ (بينَ مُتوسّطاتِ العيّناتِ)

(Mean Square Between Groups -MSB)

$$MSB = \frac{SSB}{t-1}$$

7- الخطوةُ (7): حسابُ التّبايُنِ داخلَ المجموعاتِ (داخلَ العيّناتِ) (MSE):

(Mean Square of Error-MSE)

$$MSE = \frac{SSE}{N-t}$$

8- الخطوةُ (8): حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c) وهيَ ناتجُ قسمةِ التّبايُنِ بينَ المجموعاتِ على التّبايُنِ داخلَ المجموعاتِ. $F_c = \frac{MSB}{MSE}$

9- الخطوةُ (9): مقارنةُ قيمةِ (F_c) المحسوبةِ بالقيمةِ (F_t) الجدوليّةِ، فإذا كانت قيمةُ (F_c) المحسوبة أقلَّ من قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ ($F_C < F_T$) عندَ مستوى المعنويّةِ ودرجاتِ الحرّيّةِ المعيّنةِ نقبلُ الفرضَ العدميَّ بتساوي المُتوسّطاتِ والعكسُ صحيحٌ.

3-7-4- مراحلُ تطبيقِ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ:

إنَّ تطبيقَ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ يَتِمُّ وفقاً للخطواتِ الآتيةِ:

1) صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ.
2) تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE).
3) حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c).
4) استخراجُ قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ وتحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ.
5) المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ.

1- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $\mu_1=\mu_2......=\mu_t$) مُتوسّطاتُ المجتمعاتِ متساويةٌ.
- الفرضُ البديلُ :(H_1) المُتوسّطاتُ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ متوسطانِ غيرَ متساويينِ).

2- تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE)

يَتِمُّ تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE) كَمَا هوَ موضحٌ بالجدولِ (3−4).

جدول (3−4): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table).

مصادرُ التّبايُنِ **Source of Variance** **(S.O.V)**	**مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ** **Sum of squares (SS)**	**درجاتُ الحرّيّةِ** **df**	**مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُن)** **Mean squares (MS)**	**F (المحسوبة)** **Calculated**	**F (الجدوليّة)** **Tabulated**
بينَ المجموعاتِ **(Between Groups)**	**SSB**	**t – 1**	$MSB = \frac{SSB}{t-1}$		
داخلَ المجموعاتِ **Within Groups** **(Error)**	**SSE**	**N – t**	$MSE = \frac{SSE}{N-t}$	$F_c = \frac{MSB}{MSE}$	$F_t = F_\alpha(t-1, N-t)$
المجموعُ ***Total***	**SSTO = SSB + SSE**	**N – 1**			

و طريقةُ حسابِ المقاديرِ الثّلاثةِ التّاليةِ (SSB, SSE, SSTO) مبيّنةُ بالجدولِ (3−5).

جدول (3−5): طرائقُ حسابِ مجاميعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ.

مصادرُ التّبايُن **S.O.V**	**مجموع مربعات الانحرافات** ***S.S***	**درجات الحرية** ***d.f***	**متوسط الانحرافات** ***S.M***
بينَ المجموعاتِ **(Between Groups)**	$SSB = \sum_{i=1}^{t} \frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i} - CF$	t-1	$MSB = \frac{SSB}{t-1}$

داخلَ المجموعاتِ **Within Groups** **(Error)**	$SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^{2} - \frac{\sum_{1}^{t}(y_{i\bullet})^{2}}{r_i}$ SSE=SSTO- SSB	N-t	$MSE = \frac{SSE}{N-t}$
المجموعُ ***Total***	$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^{2} - CF$	N-1	

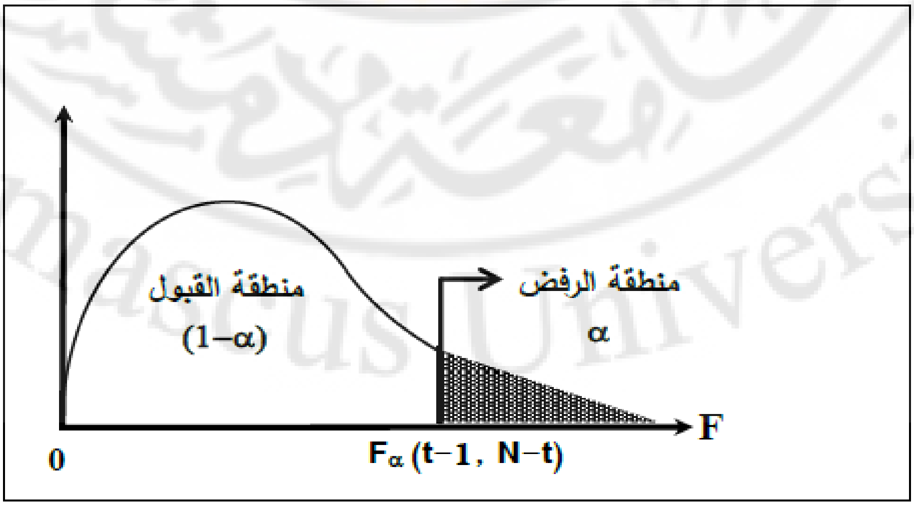
حيثُ إنَّ (N=t×r) في حالِ العيّناتِ المتساويةِ بالحجمِ.

و معاملُ التّصحيحِ يساوي: $CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^{2}}{N}$

3– حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c):

حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c المحسوبة) منَ العلاقةِ التّاليةِ: $F_c = \frac{MSB}{MSE}$

4– تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ: يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ من جدولِ توزيعِ (F) بدرجاتِ حرّيّة(t-1) للبسطِ و(N-t) للمقامِ وبمستوى معنويّةِ (α) أي استخراجُ قيمةِ $F_t = F_\alpha(t-1, N-t)$، وفي اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ يكونُ نوعُ الاختبارِ منَ الطّرفِ الأيمنِ دائماً، أي أنَّ منطقةَ الرّفضِ تقعُ بالكاملِ على الطّرفِ الأيمنِ، كَمَا هوَ موضّحٌ بالشّكلِ (3–2).



شكل (3–2): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ لاختبارِ تحليلِ التّبايُنِ.

5- **المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:** إذا كانت قيمةُ (F_C) المحسوبةِ من تحليلِ التّباينِ أقلَّ من قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ عندَ مستوى المعنويّةِ ودرجاتِ الحرّيّةِ المعيّنةِ نقبلُ الفرضَ العدميَّ بتساوي المُتوسّطاتِ والعكسُ صحيحٌ.

3-8- الحالةُ الثّانيةُ: تحليلُ التّباينِ الأحاديِّ فِي حالةِ تساوي حجومِ العيّناتِ.

فِي هذهِ الحالةِ يَتمُّ اتّباعُ نفسِ الأسلوبِ السّابقِ فِي حالةِ عدمِ تساوي حجومِ العيّناتِ معَ إجراءِ بعضِ التّعديلاتِ البسيطةِ. حيثُ يُفترضُ أنَّ حجومَ العيّناتِ متساويةٌ ويساوي (r) بدلاً من (r_i)، ويكونُ مجموعُ عناصرَ العيّناتِ الكلّيِّ يساوي $(N=t\times r)$ بدلاً من $(N= r_1+ r_2+.... r_t)$، كذلكَ يَتمُّ استبدالُ حجمِ العيّنةِ الثّابتِ (r) بالقيمةِ (r_i) التّي تُمثّلُ حجمَ العيّنةِ المتغيّرِ فِي المعادلاتِ والعلاقاتِ السّابقةِ لتُصبحَ كَمَا هيَ موضّحةٌ بالجدولِ (3-6).

جدول (3-6): حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ فِي حالةِ اختلافِ حجومِ العيّناتِ.

مصادرُ التّباينِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	
	حالةُ تساوي حجومِ العيّناتِ	حالةُعدمِ تساوي حجومِ العيّناتِ
بينَ المجموعاتِ (Between Groups)	$SSB = \frac{\sum_{i=1}^{t}(y_{i\bullet})^2}{r} - CF$ $SSB = r\sum_{i=1}^{t}(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$SSB = \sum_{i=1}^{t}\frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i} - CF$ $SSB = \sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$

مثال (3-2): يوجدُ ثلاثةُ مهندسين يُدرسّونَ ثلاثَ فئاتٍ للجزءِ العمليِّ لمقرّرِ تحليلِ وتصميمِ التّجاربِ، قرّرَ دكتورُ المقرّرِ دراسةَ تأثيرِ مدرّسِ الفئةِ على تحصيلِ الطّلابِ، لذلكَ قامَ باختيارِ ثلاثِ عيّناتٍ عشوائيّةٍ منَ الطّلابِ، عيّنةٌ من كلِّ فئةٍ، وقامَ برصدِ درجاتهم ودوّنها بالجدولِ (3-7).

جدول (3−7): درجاتُ الطّلابِ للفئاتِ الثّلاثةِ.

العيّناتُ	درجاتُ الطّلابِ							حجمُ العيّنةِ
Sample_1	58	72	84	86	60	44	50	7
Sample_2	75	80	55	64	46	.....	...	5
Sample_3	88	96	78	74	80	70		6

المطلوبُ: اختبر فيما إذا كانَ مُتوسّطاتُ درجاتِ الطّلابِ فِي الفئاتِ الثّلاثِ متساويةً أم مختلفة عندَ مستوى معنويّة $(\alpha = 0.05)$.

الحلُّ:

1− صياغةُ الفروضِ الإحصائيّة:

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0: \mu_1=\mu_2=\mu_3)$ مُتوسّطاتُ درجاتِ الفئاتِ الثّلاثِ متساويةٌ.
- الفرضُ البديلُ: (H_1): مُتوسّطاتُ درجاتِ الفئاتِ الثّلاثِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويين).

يَتمُّ تنظيمُ البياناتِ بالجدولِ (3−8).

جدول (3−8): تنظيمُ البياناتِ لعلاماتِ الفئاتِ الثّلاثِ.

العيّناتُ أو المعاملاتُ	المشاهداتُ (y_{ij})							مجاميعُ العيّناتِ $(y_{i\bullet})$	مُتوسّطُ العيّناتِ $(\bar{y}_{i\bullet})$
Y_1	**58**	**72**	**84**	**86**	**60**	**44**	**50**	$y_{1\bullet}$=454	$\bar{y}_{1\bullet}$=64.85
Y_2	**75**	**80**	**55**	**64**	**46**	.....	....	$y_{2\bullet}$=320	$\bar{y}_{2\bullet}$=64
Y_3	**88**	**96**	**78**	**74**	**80**	**70**	....	$y_{3\bullet}$=486	$\bar{y}_{3\bullet}$=81
عددُ المشاهداتِ الكلّيِّ $N = \sum r_i = r_1 + r_2 + r_3 = 18$								المجموعُ الكلّيُّ $(y_{\bullet\bullet} = 1260)$	المُتوسّطُ العامُّ $(\bar{y}_{\bullet\bullet} = 70)$

حيثُ $t=3$ $N = 18$

$(y_{1\bullet})$: مجموعُ عناصرِ العيّنةِ الأولى.

$(y_{2\bullet})$: مجموعُ عناصرِ العيّنةِ الثّانيةِ.

$(y_{3\bullet})$: مجموعُ عناصرِ العيّنةِ الثّالثةِ.

1- حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{N} = \frac{(1260)^2}{18} = 88200$$

2- حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكليّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij})^2 - CF = ((58)^2 + (72)^2 + \ldots\ldots (70)^2) - 88200 = 92118 - 88200$$
$$= 3918$$

3- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ المجموعاتِ

(Sum Square Between Groups -SSB):

$$SSB = \sum_{i=1}^{t}\frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i} - CF = \frac{(454)^2}{7} + \frac{(320)^2}{5} + \frac{(486)^2}{6} - 88200 = 1091.143$$

4- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ انحرافاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (Sum Square of Error-SSE)

$$SSE = SSTO - SSB = 3918 - 1091.143 = 2826.86$$

5- حسابُ التّبايُنِ بينَ المجموعاتِ (MSB) وداخلَ المجموعاتِ (MSE):

$$MSB = \frac{SSB}{t-1} = \frac{1091.143}{2} = 545.57$$

$$MSE = \frac{SSE}{N-t} = \frac{2826.86}{15} = 188.48$$

2- تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

بعدَ حسابِ القيمِ السّابقةِ يَتِمُّ تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ فِي الجدولِ (3-9).

جدول (3-9): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لعلاماتِ الفئاتِ الثّلاثِ.

مصادرُ التّبايُنِ Source of Variance (S.O.V)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ Sum of squares (SS)	درجاتُ الحرّيّةِ Df	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّباين) Mean squares (MS)	F (المحسوبة) Calculated	F (الجدوليّة) Tabulated
بينَ المجموعاتِ (Between Groups)	SSB = 1091.14	t – 1 = 2	$MSB = 545.57$	$F_c = \frac{MSB}{MSE} = 2.89$	$F_{0.05}(2,15) = 3.68$
داخلَ المجموعاتِ Within Groups (Error)	SSE = 2826.86	N – t = 18 – 3 = 15	$MSE = 188.48$		
المجموعُ Total	SSTO = 3918	N – 1 = 17			

3- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

فِي هذهِ الحالةِ قيمةُ الإحصائيّةِ (تُمثّلُ قيمةَ F المحسوبةِ منَ العلاقةِ)

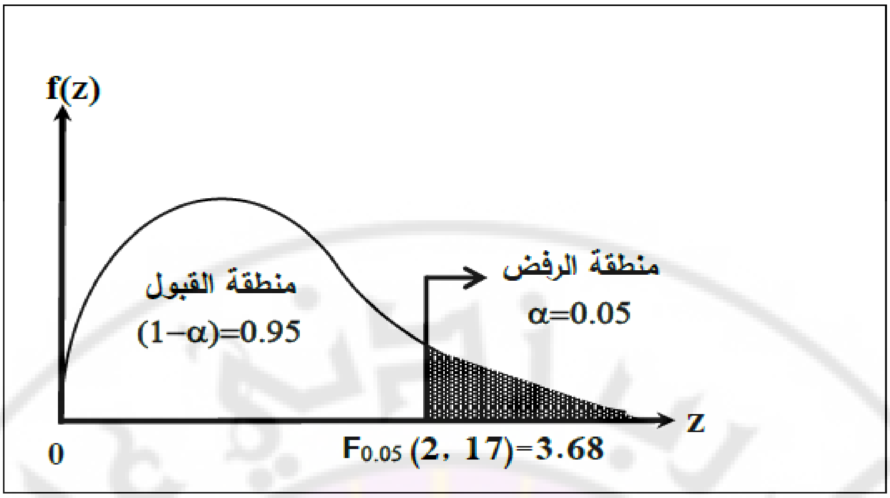
$$F_c = \frac{MSB}{MSE} = \frac{545.57}{188.48} = 2.89$$

4- تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ من قيم (F_t) الجدوليّةِ وعندَ مستوى معنويّة ($\alpha = 0.05$) وبدرجاتِ حرّيّة (t-1=3-1=2) للبسطِ، و (N-t=18-2=17) للمقامِ نجدُ أنَّ (F_t) الجدوليّة تساوي:

$F_t = F_\alpha(t-1, N-t) = F_{0.05}(2,17) = 3.68$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالرّسمِ كَمَا بالشّكلِ (3-3).

Damascus University



شكل (3−3): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ للمثالِ (3−3).

5− المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ:

بِما أنَّ قيمةَ (F_c= 2.89) المحسوبة أقلُّ من قيمةِ (F_t=3.68) الجدوليّةِ فإنّها تقعُ فِي منطقةِ القبولِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ قبولُ الفرضِ العدميِّ بعدمِ وجودِ اختلافٍ معنويٍّ بينَ مُتوسّطاتِ درجاتِ الفئاتِ الثّلاث، أي أنّهُ لا يوجدُ تأثيرٌ معنويٌّ على مُدرّسِ الفئاتِ على درجاتِ الطّلّابِ.

مثال (3−3): لدينا أربع مزارع من أجلِ اختبارِ الفروقِ المعنويّةِ بينَ مُتوسّطِ أعمارِ المزارعينَ فِي هذهِ المزارعِ، تمَّ سحبُ (4) عيّناتٍ عشوائيّةٍ (عيّنة من كلِّ مزرعةٍ) وتمَّ تنظيمُ البياناتِ بالجدولِ (3−10).

وبفرضِ أنَّ أعمارَ المزارعين لها توزيعاتٌ طبيعيّةٌ بمُتوسّطاتٍ: ($\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$) وتبايُنٍ مشتركٍ يساوي (σ^2).

جدول (3−10): بياناتُ أعمارِ المزارعينَ فِي أربعِ مزارع.

المزارعُ	أعمارُ المزارعينَ						المجموعُ
الأولى 1	20	21	25	28	30	26	150
الثانية 2	23	22	27	20	26	20	138
الثالثة 3	19	20	21	28	20	18	126
الرابعة 4	24	29	30	28	27	24	162

المطلوبُ: اختبر صحّةَ الفرضِ العدميِّ بأنَّ مُتوسّطاتِ أعمارِ المزارعينَ فِي المزارعِ الأربعِ متساويةٌ.

الحلُّ:

1- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$) مُتوسّطاتُ الأعمارِ للمزارعِ الأربعِ متساويةٌ.
- الفرضُ البديلُ :(H_1) مُتوسّطاتُ الأعمارِ للمزارعِ الأربعِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويين).

يَتِمُّ تنظيمُ البياناتِ بالجدولِ (3-11) لتسهيلِ العمليّاتِ الحسابيّةِ.

جدول (3-11): تنظيمُ بياناتِ أعمارِ المزارعينَ فِي أربعِ مزارعِ.

مُتوسّطُ العيّناتِ $(\bar{y}_{i\bullet})$	مجاميعُ العيّناتِ $(y_{i\bullet})$	المشاهداتُ (y_{ij})						العيّناتُ أوِ المعاملاتُ
$\bar{y}_{1\bullet}$=25	$y_{1\bullet} = 150$	26	30	28	25	21	20	Y_1
$\bar{y}_{2\bullet}$=23	$y_{2\bullet} = 138$	20	26	20	27	22	23	Y_2
$\bar{y}_{3\bullet}$=21	$y_{3\bullet} = 126$	18	20	28	21	20	19	Y_3
$\bar{y}_{4\bullet} = 27$	$y_{4\bullet} = 162$	24	27	28	30	29	24	Y_4
المُتوسّطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 24$	المجموعُ الكلّيُّ $y_{\bullet\bullet} = 576$	عددُ المشاهداتِ الكلّيِّ $N = \sum r_i = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 24$						

2- تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّباينُ (AVOVA TABLE):

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 6$, $t=4$ $N = tr = 24$

1- حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{N} = \frac{(576)^2}{24} = \frac{331776}{24} = 13824$$

2- حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij})^2 - CF = ((20)^2 + (21)^2 + \dots\dots(24)^2) - 13824 = 336$$

3- مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ العيّناتِ (Sum Square Between Groups -SSB)

$$SSB=\sum_{i=1}^{t}\frac{(y_{i\bullet})^2}{r}-CF=\frac{(150)^2+(138)^2+(126)^2+(162)^2}{6}-13824=120$$

4- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ انحرافاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (Sum Square of Error-SSE)

$$SSE=SSTO-SSB=336-120=216$$

5- حسابُ التّبايُنِ بينَ العيّناتِ (MSB) وداخلَ المجموعاتِ (MSE):

$$MSB=\frac{SSB}{t-1}=\frac{120}{3}=40$$

$$MSE=\frac{SSE}{N-t}=\frac{216}{20}=10.8$$

بعدَ حسابِ القيمِ السّابقةِ يَتِمُّ تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ في الجدولِ (3-12).

جدول (3-12): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأعمارِ المزارعين.

مصادرُ التّبايُنِ **Source of Variance** **(S.O.V)**	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ **Sum of squares (SS)**	درجاتُ الحرّيّة **df**	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُن) **Mean squares (MS)**	F (المحسوبة) **Calculated**	F (الجدوليّة) **Tabulated**
بينَ المجموعاتِ **(Between Groups)**	**SSB = 120**	**t – 1 = 4 – 1** **= 3**	$MSB=40$	$F_C=\frac{MSB}{MSE}=\frac{40}{10.8}=3.7$	**$F_{\alpha\,(3,\,20)}$=3.1**
داخلَ المجموعاتِ **Within Groups** **(Error)**	**SSE = 216**	**N – t = 24 – 4** **= 20**	$MSE=10.8$		
المجموعُ ***Total***	**SSTO = SSB+ SSE** **= 336**	**N – 1 = 24 – 1** **= 23**			

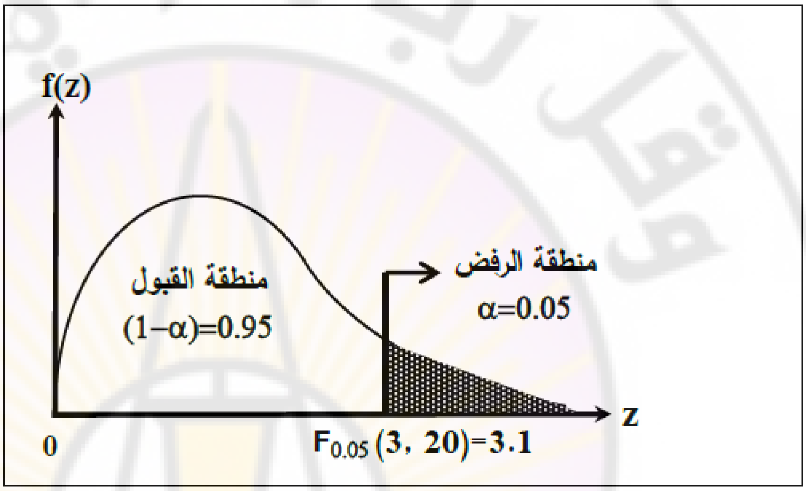
3- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

يَتِمُّ حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ منَ المعادلةِ: $F_C=\frac{MSB}{MSE}=\frac{40}{10.8}=3.7$

4- تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ من قيمِ (F_t) الجدوليّةِ وعندَ مستوى معنويّة ($\alpha = 0.05$) وبدرجاتِ حرّيّة ($t-1=4-1=3$) للبسطِ، و ($N-t=24-4=20$) للمقامِ نجدُ أنَّ F_t الجدوليّة تساوي:

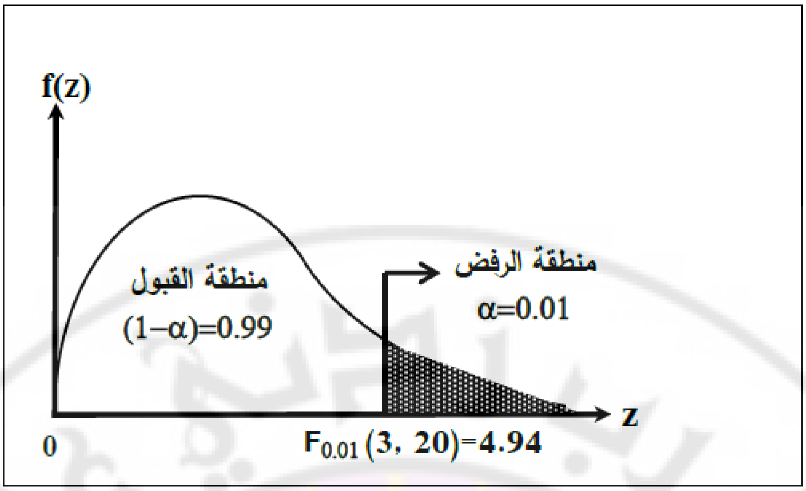
$F_t = F_\alpha(t-1, N-t) = F_{0.05}(3,20) = 3.10$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالرّسمِ كَمَا بالشّكلِ (3-3).



شكل (3-3): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ للمثالِ (3-3).

5- المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ: بِما أنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ المحسوبةِ والتّي تساوي ($F_c=3.7$) أكبرُ منَ القيمةِ الجدوليّةِ ($F_t=3.10$) فإنّها تقعُ فِي منطقةِ الرّفضِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ العدميِّ بتساوي مُتوسّطاتِ أعمارِ المزارعينَ في المزارعِ الأربعِ وذلكَ بمستوى معنويّة 5% .

أمّا إذا استخدمنا مستوى معنويّة 1% فإنَّ القيمةَ الجدوليّة تصبحُ ($F_t=4.94$) أي تصبحُ حدودُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ موضّحة بالشّكل (3-4).



شكل (3−4): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ للمثالِ (3−4) بمعنويّة 0.01.

في هذهِ الحالةِ فإنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ والتّي تساوي (F_c=3.7) تقعُ في منطقةِ القبولِ، وبالتّالي فإنَّ القرارَ يكونُ قبولُ الفرضِ العدميِّ أنَّه مُتوسّطاتُ أعمارِ المزارعينَ في المزارعِ الأربعِ متساويةٌ بمستوى معنويّة (α = 0.01).

مثال (3−4): للمقارنةِ بينَ أربعةِ أنواعٍ منَ القمحِ (A ، B ، C ، D) بغرضِ تعميمِ أفضلها في الزّراعةِ تمَّ زراعةُ كلِّ نوعٍ في (3) قطع أرض متماثلةٌ في المساحة والخصوبةِ ونوعِ التّربةِ وكميّةِ الأسمدةِ المستعملةِ وكمية المياهِ و تمَّ قياسُ إنتاجيّة كل قطعة وسُجّلت النّتائجُ في الجدولِ (3−13).

جدول (3−13): كميّاتُ الإنتاجِ لأربعةِ أنواعٍ منَ القمحِ.

A	1	3	5
B	6	5	7
C	7	8	6
D	2	6	4

والمطلوبُ: اختبارُ معنويّةِ الفروقِ بينَ الأنواعِ الأربعة منَ القمحِ بدرجةِ ثقة 95%.

الحلُّ : تكونُ خطواتُ الحلِّ كَمَا يلِي :

1− صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- الفرضُ العدميُّ: $(H_0: \mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4)$ مُتوسّطاتُ أصنافِ القمحِ الأربعة متساويةٌ.
- الفرضُ البديلُ: (H_1) مُتوسّطاتُ أصنافِ القمحِ الأربعةِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويين).

يَتِمُّ تنظيمُ البياناتِ لسهولةِ حسابِ المقاديرِ بالجدولِ (3−14).

جدول (3−14): تنظيمُ البياناتِ لإنتاجِ أنواعِ القمحِ الأربعةِ.

مُتوسّطُ العيّناتِ $(\bar{y}_{i\bullet})$	مجاميعُ العيّناتِ $(y_{i\bullet})$	العيّناتُ أو المعاملاتُ			
$\bar{y}_{1\bullet}=3$	$y_{1\bullet}=9$	5	3	1	**Y_1**
$\bar{y}_{2\bullet}=6$	$y_{2\bullet}=18$	7	5	6	**Y_2**
$\bar{y}_{3\bullet}=7$	$y_{3\bullet}=21$	6	8	7	**Y_3**
$\bar{y}_{4\bullet}=4$	$y_{4\bullet}=12$	4	6	2	**Y_4**
المتوسّطُ العام $\bar{y}_{\bullet\bullet}=5$	المجموعُ الكلّيُّ $y_{\bullet\bullet}=60$	عددُ المشاهداتِ الكلّيِّ $N=\sum r_i = r_1+r_2+r_3+r_4=12$			

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 3$, $t=4$ $N = 12$

1− حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{N} = \frac{(60)^2}{12} = \frac{3600}{12} = 300$$

2− حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij})^2 - CF = ((1)^2+(3)^2+\ldots\ldots(4)^2) - 300 = 50$$

3− مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ المجموعاتِ(Sum Square Between Groups -SSB):

$$SSB = \sum_{i=1}^{t}\frac{(y_{i\bullet})^2}{r} - CF = \frac{(9)^2+(18)^2+(21)^2+(12)^2}{3} - 300 = 30$$

4− حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ انحرافاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (Sum Square of Error-SSE)

$$SSE = SSTO - SSB = 50 - 30 = 20$$

5− حسابُ التّبايُنِ بينَ المجموعاتِ (MSt) وداخلَ المجموعاتِ (MSE):

$$MSB = \frac{SSB}{t-1} = \frac{30}{3} = 10$$

$$MSE = \frac{SSE}{N-t} = \frac{20}{8} = 2.5$$

2- تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

بعدَ حسابِ القيمِ السّابقةِ يَتِمُّ تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ في الجدولِ (3-15).

جدول (3-15): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأصنافِ القمحِ الأربعةِ.

مصادرُ التّبايُنِ Source of Variance (S.O.V)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ Sum of squares (SS)	درجاتُ الحرّيّة Df	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّباين) Mean squares (MS)	F (المحسوبة) Calculated	F (الجدوليّة) Tabulated
بينَ المجموعاتِ (Between Groups)	SSB = 30	t – 1 = 4 – 1 = 3	$MSB = 10$	$F_C = \frac{10}{2.5} = 4$	$F_{0.05\,(3,8)}$=4.07
داخلَ المجموعاتِ Within Groups (Error)	SSE = 20	N – t = 12 – 4 = 8	$MSE = 2.5$		
المجموعُ *Total*	SSTO = SSB+ SSE = 50	N – 1 = 12 – 1 = 11			

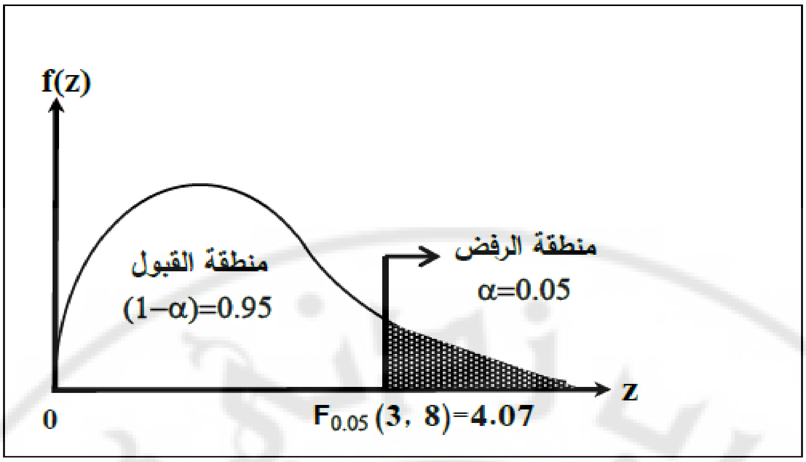
3- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

يَتِمُّ حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ منَ المعادلةِ: $F_C = \frac{MSB}{MSE} = \frac{10}{2.5} = 4$

4- تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ من قيمِ (F_t) الجدوليّةِ وعندَ مستوى معنويّة ($\alpha = 0.05$) وبدرجاتِ حرّيّة (t-1=4-1=3) للبسطِ، و (N-t=12 - 4=8) للمقامِ نجدُ أنَّ (F_t) الجدوليّة تساوي

$F_t = F_\alpha(t-1, N-t) = F_{0.05}(3,8) = 4.07$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالشّكلِ (3-5).



شكل (3−5): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيّ القبولِ والرّفضِ للمثالِ (3−4).

5− المقارنةُ و اتّخاذُ القرارِ: بما أنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ المحسوبةِ والتّي تساوي (F_c=4) أصغرُ منَ القيمةِ الجدوليّةِ (F_T=4.07) فإنّها تقعُ في منطقةِ القبولِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ قبولُ الفرضِ العدمِ بتساوي مُتوسّطاتِ العيّناتِ الأربع وذلكَ بمستوى معنويّة (0.05)، وبناءً على ذلكَ فلا توجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ أصنافِ القمحِ الأربعةِ.

مثـال (3−5): للمقارنةِ بينَ ثلاثةِ أنواعٍ منَ العلائقِ العلفيّةِ (A ، B ، C) بغرضِ تعميمِ أفضلها في حظائرِ تربيةِ العجولِ. قامَ الباحثُ باختيارِ ثلاثِ عيّناتٍ عشوائيّةٍ منَ العجولِ حجمُ كلِّ عيّنةٍ (6 عجول)، ووُزّعَت أنواعُ العلائقِ الثّلاثة بطريقةٍ عشوائيّةٍ على العيّناتِ، وبعدَ فترةٍ زمنيّةٍ من تطبيقِ هذا البرنامجِ الغذائيِّ قامُ بقياسِ الزّيادةِ بالوزنِ (بالكيلو غرام) فكانتِ النّتائجُ مسجّلةً بالجدولِ (3−16).

جدول (3−16): أوزانُ العجولِ لأصنافِ العلائقِ العلفيّةِ الثّلاثة.

العلائقُ العلفيّة	أوزانُ العجول					
A	14	15	16	14	16	15
B	20	22	21	27	23	19
C	9	14	21	8	7	19

المطلوبُ: اختبارُ فرضِ تساوي مُتوسّطاتِ الزّيادةِ بالوزنِ لأنواعِ العلائقِ الثّلاثة عندَ مستوى معنويّة

(α=0.05).

الحلُّ: تكونُ خطواتُ الحلِّ كَمَا يلِي :

1- صياغةُ الفروضِ:

- الفرضُ العدميُّ: (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3$) مُتوسّطاتُ العلائقِ الثّلاثةِ متساويةٌ.
- الفرضُ البديلُ (H_1): مُتوسّطاتُ العلائقِ الثّلاثةِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسطانِ غيرَ متساويينِ).

ننشأُ الجدولَ (3-17) التّالي لتسهيلِ العمليّاتِ الحسابيّةِ اللّازمةِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ.

جدول (3-17): تنظيمُ البياناتِ لأوزانِ العجولِ وفقاً لأنواعِ العلائقِ.

مُتوسّطُ العيّناتِ ($\bar{y}_{i\bullet}$)	مجاميعُ العيّناتِ ($y_{i\bullet}$)	المشاهداتُ (y_{ij})						العيّناتُ أوِ المعاملاتُ
$\bar{y}_{1\bullet}$=15.2	$y_{1\bullet}=90$	15	16	14	16	15	14	**Y_1**
$\bar{y}_{2\bullet}$=22.4	$y_{2\bullet}=132$	**19**	**23**	**27**	**21**	**22**	**20**	**Y_2**
$\bar{y}_{3\bullet}$=13.4	$y_{3\bullet}=78$	**19**	**7**	**8**	**21**	**14**	**9**	**Y_3**
المُتوسّطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet}=16.665$	**المجموعُ الكلّيُّ** $y_{\bullet\bullet}=300$	**عددُ المشاهداتِ الكلّيِّ** $N=\sum r_i=r_1+r_2+r_3=18$						

$r_1 = r_2 = r_3 = 6$, $t=3$ $N = 18$

1- حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF=\frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{N}=\frac{(300)^2}{18}=\frac{90000}{18}=5000$$

2- حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij})^2-CF=((14)^2+(15)^2+\ldots\ldots(19)^2)-5000=490$$

3- مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ المجموعاتِ(Sum Square Between Groups -SSB)

$$SSB=\sum_{i=1}^{t}\frac{(y_{i\bullet})^2}{r}-CF=\frac{(90)^2+(132)^2+(78)^2}{6}-5000=268$$

4- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ انحرافاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (Sum Square of Error-SSE)

$$SSE = SSTO - SSB = 490 - 268 = 222$$

5- حسابُ التّبايُنِ بينَ المجموعاتِ (MSB) وداخلَ المجموعاتِ (MSE):

$$MSB = \frac{SSB}{t-1} = \frac{268}{2} = 134$$

$$MSE = \frac{SSE}{N-t} = \frac{222}{15} = 14.8$$

2- تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

بعدَ حسابِ القيمِ السّابقةِ يَتِمُّ تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ في الجدولِ (3-18).

جدول (3-18): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأنواعِ العلائقِ العلفيّةِ الثّلاثة.

مصادرُ التّبايُنِ Source of Variance (S.O.V)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ Sum of squares (SS)	درجاتُ الحرّيّةِ df	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّباين) Mean squares (MS)	F (المحسوبة) Calculated	F (الجدوليّة) Tabulated
بينَ المجموعاتِ (Between Groups)	SSB = 268	t – 1 = 3 – 1 = 2	$MSB = \frac{SSB}{t-1} = 134$	$F_C = 9.05$	$F_{(2, 15)}$=3.68
داخلَ المجموعاتِ Within Groups (Error)	SSE = 222	N – t = 18 – 3 =15	$MSE = \frac{SSE}{N-t} == 14.8$		
المجموعُ *Total*	SSTO = SSB + SSE = 490	N – 1 = 18 – 1 = 17			

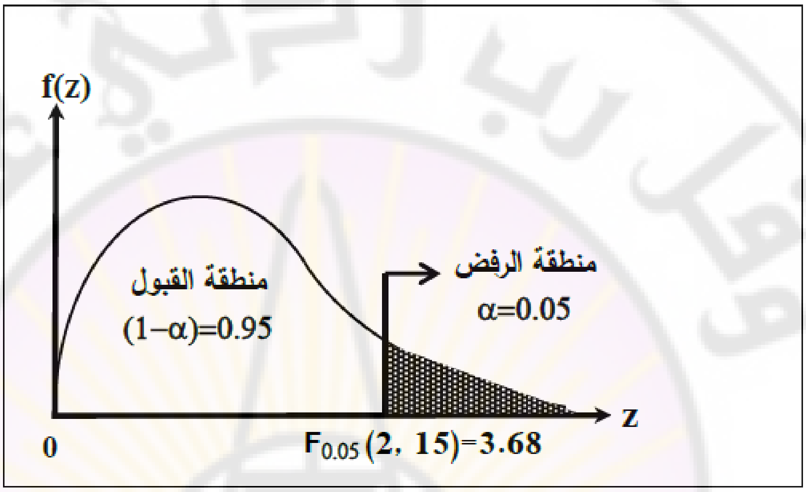
3- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:

يَتِمُّ حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ منَ المعادلةِ: $F_C = \frac{MSB}{MSE} = \frac{134}{14.8} = 9.05$

4- تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ من قيمِ (F_t) الجدوليّةِ وعندَ مستوى معنويّة ($\alpha=0.05$) وبدرجاتِ حرّيّة ($t-1=3-1=2$) للبسطِ، و ($N-t=18-3=15$) للمقامِ نجدُ أنَّ (F_t) الجدوليّة تساوي:

$F_t = F_\alpha(t-1, N-t) = F_{0.05}(2,15) = 3.68$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالرّسمِ كَمَا بالشّكلِ (6−3).



شكل (3−6): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ للمثالِ (3−5).

5− المقارنـةُ و اتّخـاذُ القـرارِ: بِما أنَّ قيمـةَ إحصـائيّةِ الاختبـارِ المحسوبةِ والتّـي تسـاوي ($F_c=9.05$) أكبرُ منَ القيمةِ الجدوليّة ($F_t=3.68$) فإنَّها تقعُ في منطقةِ الرّفضِ وبالتّالي فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ العدمِ بتساوي مُتوسّطاتِ العيّناتِ الثّلاثة وقبولُ الفرضِ البديلِ أي أنَّه يوجدُ علـى الأقلِّ مُتوسّطانِ مختلفانِ أي أنَّـه هنـاكَ فروقٌ معنويّـةٌ بـينَ مُتوسّطاتِ الزّيـادةِ بـالوزنِ لأنـواعِ العلائـقِ الثّلاثةِ.

الفصلُ الرّابع

المبادئُ الأساسيّةُ لتصميمِ وتحليلِ التّجاربِ

Basic Principles of Design and Analysis of)

(Experiments

Damascus University

الفصلُ الرّابع

المبادئُ الأساسيّةُ لتصميمِ وتحليلِ التّجاربِ

4-1- تعاريفٌ ومصطلحاتٌ أساسيّةٌ فِي علمِ تصميمِ وتحليلِ التّجاربِ:

علمُ تصميمِ وتحليلِ التّجارب: هوَ أحدُ فروعِ علمِ الإحصاءِ التّطبيقيّ الذّي يهتمُّ بتطبيقِ الأساليبِ والطّرقِ الإحصائيّةِ فِي التّجاربِ البحثيّةِ والعمليّةِ.

إنَّ الغرضَ مِنَ التّصميمِ الحديثِ السّعيُ إلى تقديرِ و تقليلِ الخطأِ التّجريبيِّ ويتحقّقُ ذلكَ بتحديدِ التّصميمِ المناسبِ مِن خلالِ دراسةِ خصائص الوَحداتِ التّجريبيّةِ مِن ناحية وزيادةِ عددِ التّكراراتِ أو التّحكّمِ فِي عددِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ مِن ناحيةٍ أخرى.

التّجربةُ (Experiment): هِيَ عبارةٌ عَن سلسلةٍ مِنَ الإجراءاتِ المخطّطةِ والمنظّمةِ التّي تهدفُ إلى دراسةِ العواملِ التّي تؤثّرُ على ظاهرةٍ معيّنةٍ (أو لتفسيرِ ظاهرةٍ معيّنةٍ) للحصولِ على نتائجَ جديدةٍ أو إثباتِ أو نفي نتائجَ قديمةٍ حُصلَ عليها مِن تجاربَ سابقةٍ. وأيضاً تستخدمُ التّجربةُ لاختبارِ الفرضيّاتِ واستكشافِ العلاقاتِ بينَ المتغيّراتِ.

التّصميمُ (Design): التّصميمُ هوَ تخطيطُ التّجربةِ المرادُ دراستها.

التّحليلُ(Analysis): التّحليلُ هيَ عبارةٌ عنِ المرحلةِ الأخيرةِ وتشملُ طريقةَ جمعِ البياناتِ وترتيبها واختزالها ثمَّ إجراءِ اختباراتٍ إحصائيّةٍ معيّنةٍ يُستعانُ بها لاتّخاذِ قراراتٍ بخصوصِ الأهدافِ التّي صُمّمتِ التّجربةُ لدراستها.

المادّةُ التّجريبيّةُ (Experimental Material): هيَ العناصرُ أوِ الموادُّ التّي تُطبّقُ عليها (أو على جزءٍ منها) المعالجاتُ. مثلُ(العجولِ- قطعُ الأرضِ).

الوحدةُ التّجريبيّةُ (Experimental Unit): هيَ أصغرُ جزءٍ منَ المادّةِ التّجريبيّةِ التّي يُطبّقُ عليها المعالجةُ. وقد تكونُ الوحدةُ التّجريبيّةُ عبارة عنْ عنصرٍ واحدٍ (قطعةُ أرضٍ زراعيّةٍ – حيوانٌ – شخصٌ – شجرةٌ – نباتٌ) أو عدّةُ عناصرَ معاً (عدّةُ قِطَعٍ زراعيّةٍ – عدّةُ حيواناتٍ "حظيرة").

إنَّ دراسةَ خصائصِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ من حيث التّجانسِ هيَ أحدُ أساسيّاتِ التّصميمِ المحدّدةِ لنوعِ التّصميمِ والذّي يترتّبُ عليه مدى تقليلِ الخطأِ التّجريبيّ.

وحدةُ المعاينةِ (Sampling Unit): هيَ الجزءُ منَ الوحدةِ التّجريبيّةِ الذّي يُؤخَذُ عليه قياسُ تأثيرِ المعالجةِ. وقد تكونُ وحدةُ المعاينةِ هي نفسَها الوحدةُ التّجريبيّةُ.

مثلاً: إذا كانتِ الوحدةُ التّجريبيّةُ تُمثّلُ قطعةَ أرضٍ لقياسِ تأثيرِ نوعٍ منَ السّمادِ على القمحِ، يَتِمُّ أخذُ عيّنةٍ من سنابلِ القمحِ تُمثّلُ وحدةَ المعاينةِ.

العواملُ (Factors): هيَ عبارة عنْ مُتغيّراتٍ مؤثّرةٍ يهدفُ الباحثُ إلى قياسِ تأثيرها (السّمادُ، طريقةُ الرّيِّ، المبيدُ). والعاملُ (Factor) يتكوّنُ مِن مُستوياتٍ مختلفةٍ تُسمّى معاملاتٍ أو معالجاتٍ (Treatments).

المعاملاتُ أوِ المعالجاتُ (Treatments): هيَ أصنافُ أو مُستوياتُ العاملِ التّي يقومُ الباحثُ بتوزيعها عشوائيّاً على الوَحداتِ التّجريبيّةِ وفقاً لنموذجِ التّصميمِ المستخدمِ، السّمادُ هوَ عاملٌ وأصنافُ السّمادِ (سمادٌ عضويٌّ، نتروجيني، و فوسفاتي) تعتبرُ معاملات.

المعالجةُ أوِ المعاملةُ (Treatment): المعالجةُ هيَ الطّريقةُ أوِ الإجراءُ المطلوب قياسُ تأثيرها على المادّةِ التّجريبيّةِ.

إذا كانتِ التّجربةُ (بسيطةٌ) لدراسةِ تأثيرِ عاملٍ واحدٍ بعدّةِ مُستوياتٍ فهذهِ المستوياتُ تمثّلُ المعاملاتِ، أمّا إذا كانتِ التّجربةُ لدراسةِ تأثيرِ أكثرَ مِن عاملٍ واحدٍ (تجاربُ عامليّةٌ) ولكلِّ عاملٍ عدّةُ مستوياتٍ فالمعاملاتُ هنا تُمثّلُ التّوافيقَ (التّوليفاتَ) المختلفةَ بينَ مُستوياتِ تلكَ العواملِ والتّي تُسمّى المعاملاتِ التّوافقيّة.

أي أنَّ المعاملاتِ أوِ المعالجاتِ قد تُمثّلُ مُستوياتِ العاملِ (Factor) (في التّجاربِ البسيطةِ)، أو توليفاتٍ مِن مستوياتِ عواملَ مختلفةٍ(في التّجاربِ العامليّةِ).

ومفهومُ العواملِ أوسعُ من المعاملاتِ مِن حيثِ المعنى ويكونُ لكلِّ عاملٍ من هذهِ العواملِ مستويات، مثلاً السّمادُ عاملٌ وليسَ معاملة بينما مستوياتُ السّمادِ (سماد عضوي، نتروجيني، فوسفاتي) تمثّلُ معاملاتٍ.

- المعالجاتُ قد تكونُ اسميّةً (مثل أصنافِ السّمادِ/ طرقُ الرّيِّ) أو ترتيبيّةً (المستوى التّعليميُّ/ مستوياتٌ من تركيزِ مبيدٍ/عمقُ الحراثةِ)

مثال (4–1):

إذا كانَ العاملُ هوَ السّماد فإنَّ مستوياتِ السّمادِ (عضوي، نتروجيني، فوسفاتي) هيَ معالجاتٌ(اسميّة).

أمّا إذا كانَ العاملُ هوَ عمق البذارِ فإنَّ مستوياته (سطحي، 2سم، 4سم، 6سم) هيَ معالجاتٌ أو معاملاتٌ (ترتيبيّة).

و إذا كانَ العاملُ هوَ نوع الحيوانِ فإنَّ مستوياته (ماعز شامي، ماعز بلدي ، ماعز قلموني) هيَ معالجاتٌ أو معاملاتٌ (اسميّة).

الخطأُ التّجريبيُّ (Experimental Error): يُقصدُ بالخطأِ التّجريبيِّ الاختلافاتُ الموجودةُ بينَ المشاهداتِ المسجّلةِ منَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ والتّي طُبّقت عليها نفس المعاملةِ.

و هوَ الخطأُ الذّي يحصلُ نتيجةَ إجراءِ التّجربةِ ويعودُ لأسبابٍ فنيّةٍ أوِ الجهازُ المستعملُ فِي القياسِ أوِ الخبرةُ فِي العملِ فضلاً عنِ الظّروفِ المحيطةِ بالتّجربةِ.

والخطأُ التّجريبيُّ ينشأُ مِن مصدرينِ هُمَا:

1- عدمُ تجانسِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ: أي الاختلافاتُ التّي توجدُ بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ والتّي يمكنُ إرجاعها إلى الاختلافاتِ الوراثيّةِ والظّروفِ البيئيّةِ التّي لا يمكنُ التّحكّمُ بها.

2- طريقةُ تنفيذِ التّجربةِ: أي طريقةُ تطبيقِ المعاملاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ.

وهيَ تُمثّلُ مجموعةً منَ العواملِ غير المتحكّمِ بها والكامنةِ داخلَ الموادِّ التّجريبيّةِ ذاتها أوِ الظّروفِ المحيطةِ بها. لذلكَ فإنَّ الخطأَ التجريبيَّ ليسَ خطأً فِي إجراءِ التّجربةِ.

أي أنَّ الخطأَ الذّي يكونُ خارجَ سيطرةِ الباحثِ و الذّي لا يمكنُ تلافيهِ مهما كانتِ الدّقّةُ فِي إجراءِ التّجربةِ، أي لا يمكنُ السّيطرةُ عليهِ. ومنَ الممكنِ تقليلُ هذا الخطأِ عن طريقِ زيادةِ عددِ المشاهداتِ أوِ التّكراراتِ واستعمالُ أحدثِ الطّرقِ فِي القياسِ وأدقِّ الأجهزةِ والسّيطرةِ قدرَ الإمكانِ على الظّروفِ المحيطةِ فِي التّجربةِ.

4-2- مفهومُ التّجربةِ (Concept of Experiment):

يمكنُ تلخيصُ مفهومِ التّجربةِ بالمثالِ التّالي:

لنفرض أنَّ هدفَ التّجربةِ هوَ مقارنةُ صنفينِ منَ السّمادِ (A , B) منْ حيثِ كميّةِ محصولِ نوعٍ معيّنٍ منَ القمحِ. نريدُ الإجابةَ على التّساؤلاتِ التّاليةِ:

- هل يوجدُ اختلافٌ بينَ صنفيِّ السّمادِ على كميّةِ القمحِ؟
- أو بمعنى آخر هل نوعُ السّمادِ يؤثّرُ على كميّةِ القمحِ؟
- إذا كانَ هناكَ اختلافٌ، فما هيَ القيمةُ التّقديريّةُ للفرقِ بينهما؟
- إذا كانَ هناكَ اختلافٌ، فما هوَ صنفُ السّمادِ الذّي يُنتجُ محصولاً أكثر؟

- **العاملُ (Factor) فِي هذهِ التّجربةِ هوَ السّماد (المتغيّرُ المراد دراسةَ تأثيره).**
  - مستوياتُ العاملِ هما اثنان (الصّنفُ الأوّلُ A، والصّنفُ الثّاني B).
  - تُسمّى مستوياتُ العاملِ بالمعالجاتِ أوِ المعاملاتِ (Treatments).
- **متغيّرُ الاستجابةِ (Response Variable)** و هوَ يُمثّلُ (الظّاهرةَ المراد دراستها) ويساوي كميّةَ محصولِ القمحِ (Y).

ومن أجلِ توضيحِ مفهومِ التّجربةِ سنوردُ ثلاثةَ أمثلةٍ للتّجاربِ كمَا يلي:

4-2-1- التّجربةُ الأولى:

لنفرض أنّنا اخترنا (10) قطعٍ زراعيّةٍ (Plots) تُمثّلُ وحداتٍ تجريبيّةٍ متجانسةٍ أي متشابهةٍ في المساحةِ والخصوبةِ والتّربةِ والرّطوبةِ والرّيِّ وزرعناها بالقمحِ منْ نفسِ نوعِ القمحِ وبنفسِ كميّةِ البذارِ.

- ❖ قسّمنا القِطَعَ الزّراعيّةَ بشكلٍ عشوائيٍّ إلى مجموعتينِ، كلُّ مجموعةٍ تضمُّ (5) قطعٍ زراعيّةٍ.
- ❖ تمَّ توزيعُ السّمادِ منَ النّوعِ الأوّلِ (A) الذّي يمثّلُ المعالجةَ الأولى بشكلٍ عشوائيٍّ على قِطَعِ إحدى المجموعتينِ، واستخدمنا السّمادَ منَ النّوعِ الثّاني (B) في قِطَعِ المجموعةِ الأخرى. الجدولُ التّالي يوضّحُ توزيعَ المعالجاتِ (أصنافُ السّمادِ A و B) بشكلٍ عشوائيٍّ على القِطَعِ الزّراعيّةِ (الوحداتِ التّجريبيّةِ).

رقمُ القطعةِ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
نوعُ السّمادِ	B	A	A	B	A	A	B	B	A	B

☒ **المادّةُ التّجريبيّةُ:** هيَ مجموعةُ جميعِ القِطَعِ الزّراعيّةِ المزروعةِ بالقمحِ.

☒ **الوحدةُ التّجريبيّةُ:** هيَ القطعةُ الزّراعيّةُ الواحدةُ.

☒ **المعالجاتُ:** هيَ أصنافُ السّمادِ المختلفةِ (الصّنفُ الأوّلُ (A) والصّنفُ الثّاني (B))

- ▪ لاحظ أنَّ كلَّ قطعةٍ زراعيّةٍ يُطبّقُ عليها صنفُ سمادٍ واحدٍ (معالجةٍ واحدةٍ فقط)
- ▪ لاحظ أنَّ كلَّ صنفٍ من أصنافِ السّمادِ (معالجة) تكرّرَ بشكلٍ عشوائيٍّ خمس مرّاتٍ (n=5)

☒ في نهايةِ الموسمِ تمَّ حصادُ القمحِ بنفسِ الطّريقةِ، والجدولُ (4-1) يحتوي على نتائجِ التّجربةِ (محصولُ القمحِ بالطّنِ / هكتار).

جدول (4-1): مشاهداتُ صنفيِّ السّمادِ (A, B) للتّجربةِ الأولى.

رقمُ المشاهدة	مشاهداتُ صنفِ السّمادِ الأوّلِ (A) (العيّنةُ الأولى)	مشاهداتُ صنفِ السّمادِ الثّاني (B) (العيّنةُ الثّانيةُ)
1	3.27	2.55
2	3.68	2.36
3	3.52	2.92
4	3.72	2.15

3.06	2.89	5
$\bar{X}_2$=2.608	$\bar{X}_1$=3.416	مُتوسّطُ العيّنةِ
S^2_2= 0.144	S^2_1= 0.118	تبايُنُ العيّنةِ

❖ نعتبرُ أنَّ العيّنةَ الأولى عيّنةٌ عشوائيّةٌ مأخوذةٌ من مجتمعٍ مُتوسّطهُ = μ_1، أي مُتوسّطُ محصولِ القمحِ لصنفِ السّمادِ الأوّلِ (A) وتباينهُ = σ_1^2

❖ نعتبرُ أنَّ العيّنةَ الثّانية عيّنةٌ عشوائيّةٌ مأخوذةٌ من مجتمعٍ مُتوسّطهُ = μ_2، أي مُتوسّطُ محصولِ القمحِ لصنفِ السّمادِ الثّاني (B) وتباينهُ = σ_2^2

μ_1= مُتوسّطُ محصولِ القمحِ لصنفِ السّمادِ الأوّل (A) **(مُتوسّطُ المجتمعِ الأوّلِ)**

μ_2= مُتوسّطُ محصولِ القمحِ لصنفِ السّمادِ الثّاني (B) **(مُتوسّطُ المجتمعِ الثّاني)**

فيكونُ أهدافُ التّجربةِ هما هدفينِ رئيسيّينِ:

أوّلاً: معرفةُ هل هناكَ تأثيرٌ لصنفِ السّمادِ على كميّةِ محصولِ القمحِ، أي هل هناكَ فرقٌ فِي كميّةِ القمحِ بينَ صنفيِّ السّمادِ. وبعبارةٍ أخرى، هلِ الفرقُ بالمحصولِ هوَ فرقٌ معنويٌّ (جوهريٌّ / مهمٌّ /إحصائيٌّ)، أم أنَّه ناشئٌ بمحضِ الصّدفةِ (بسببِ الخطأِ فِي المعاينةِ).

وللإجابةِ على هذا التّساؤلِ، نقومُ بتطبيقِ اختبارِ الفرضيّاتِ.

1) فرضيّةُ العدمِ ($H_0:\mu_1=\mu_2$) تعني عدمَ وجودِ فرقٍ معنويٍّ بينَ مُتوسّطيِّ محصول صنفيِّ السّمادِ، أي أنَّ صنفَ السّمادِ ليسَ لهُ تأثيرٌ على كميّةِ القمحِ.

2) الفرضيّةُ البديلةُ ($H_1:\mu_1\neq\mu_2$) تعني وجودَ فرقٍ معنويٍّ بينَ مُتوسّطيِّ محصول صنفيِّ السّمادِ، أي أنَّ صنفَ السّمادِ لهُ تأثيرٌ على كميّةِ القمحِ النّاتجِ.

ثانياً: الهدفُ الثّاني هوَ تقديرُ قيمةِ الفرقِ بينَ المُتوسطينِ **(μ_1-μ_2)** إن وجدَ. وتعتمدُ هذهِ الخطوةُ على الخطوةِ السّابقةِ فإذا كانَ هناكَ فرقاً معنوياً بينَ المُتوسّطينِ، فيصبحُ من بابِ الاستدلالِ تقديرُ قيمةِ ذلكَ الفرقِ.

وبشكلٍ عامٍّ، تُجرى معظمُ التّجارب لتحقيقِ هدفينِ هُمَا:

(1): اختبارُ الفروضِ الإحصائيّةِ حولَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ.

(Testing of Hypotheses about the Means)

(2): تقديرُ الفروقِ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ

(Estimating the Differences between the Means)

4-2-2- التّجربةُ الثّانيةُ:

لنفرض أنَّ هدفَ التّجربةِ هوَ مقارنةُ نوعينِ منَ الأعلافِ (A و B) لتسمينِ العجولِ.

وتمَّ اختيارُ (20) عجلاً متشابهاً (في الوزنِ و الجنسِ و العمرِ) وتمَّ وضعُ كلِّ عجلٍ من هذهِ العجولِ فِي حظيرةٍ منفصلةٍ بحيث أنَّ هذهِ الحظائرَ متشابهة فِي الخصائصِ كَمَا هوَ موضّحٌ بالشّكلِ (4-1).

وتمَّ تقسيمُ الحظائرِ إلى مجموعتينِ بشكلٍ عشوائيٍّ كلُّ مجموعةٍ تحوي (10) حظائر، ثمَّ تمّ تغذيةُ العجولِ فِي إحدى المجموعاتِ بالنّوعِ الأوّلِ (A) وتغذيةُ العجولِ فِي المجموعةِ الأخرى بالنّوعِ الثّاني (B) وفِي نهايةِ برنامجِ التّغذيةِ تمّ وزنُ جميعِ العجولِ بنفسِ الطّريقةِ.

- **المادّةُ التّجريبيّةُ:** هيَ مجموعةُ جميعِ العجولِ.
- **الوحدةُ التّجريبيّةُ:** هيَ العجلُ الواحدُ.
- **المعالجاتُ:** هيَ أنواعُ الأعلافِ (الصّنفُ الأوّلُ (A) والصّنفُ الثّاني (B))

- لاحظ أنَّ كلَّ عجلٍ يُطبّقُ عليهِ نوعٌ واحدٌ منَ الأعلافِ (معالجة واحدة فقط)
- لاحظ أنَّ كلَّ معالجةٍ تكرّرت عشر مرّاتٍ (n=10) فِي التّجربةِ (أي ظهرتْ 10 مرّاتٍ فِي التّجربةِ)

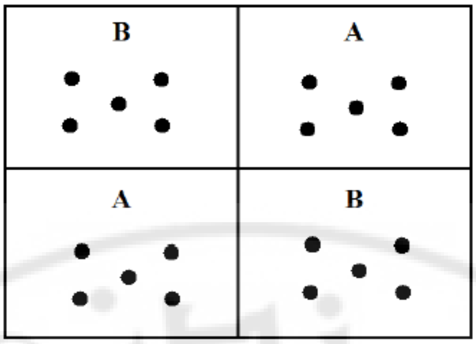
B ●	B ●	A ●	A ●	B ●	A ●	A ●	B ●	B ●	A ●
B ●	A ●	B ●	B ●	A ●	A ●	B ●	A ●	A ●	B ●

شكل (4-1): مخطّطُ التّجربةِ الثّانيةِ.

4-2-3- التّجربةُ الثّالثةُ:

لنفرض أنَّ هدفَ التّجربةِ هوَ مقارنةُ نوعينِ منَ الأعلافِ (A و B) لتسمينِ العجولِ.

وتمَّ اختيارُ (20) عجلاً متشابهاً (فِي الوزنِ / الجنسِ /العمرِ). وتمَّ تقسيمُ هذهِ العجولِ إلى أربعةِ مجموعاتٍ بشكلٍ عشوائيٍّ، كلُّ مجموعةٍ تحتوي (5) عجول. وتمَّ وضعُ كلِّ مجموعةٍ فِي حظيرةٍ منفصلةٍ بحيث أنَّ هذهِ الحظائرَ متشابهةٌ فِي الخصائصِ. وتمَّ تقسيمُ الحظائرِ الأربعِ إلى مجموعتينِ بشكلٍ عشوائيٍّ كلُّ مجموعةٍ تحوي (حظيرتينِ)، ثمَّ تمَّ تغذيةُ العجولِ فِي إحدى المجموعاتِ بالنّوعِ الأوّلِ (A) وتغذيةُ العجولِ فِي المجموعةِ الأخرى بالنّوعِ الثّاني (B). وفِي نهايةِ برنامجِ التّغذيةِ تمَّ وزنُ جميعِ العجولِ فِي كلِّ حظيرةٍ بنفسِ الطّريقةِ كَمَا هوَ موضّحٌ بالشّكلِ(4-2).



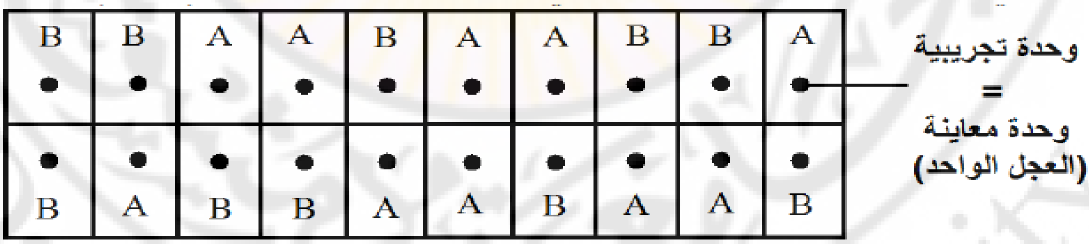
شكل (4-2): مخطّطُ التّجربةِ الثّالثةِ.

- **المادّةُ التّجريبيّةُ:** هيَ مجموعةُ جميعِ العجولِ.
- **الوحدةُ التّجريبيّةُ:** هيَ كلُّ (5) عجولٍ فِي أيِّ حظيرةٍ (كلُّ مجموعةٍ من مجموعاتِ العجولِ الأربعِ (وليستِ العجلَ الواحدَ) تعتبُر وحدةَ تجريبيّةً)، ويمكنُ القولُ أنَّ الوحدةَ التّجريبيّةَ هيَ **الحظيرةُ**.
- **المعالجاتُ:** هيَ أنواعُ الأعلافِ (الصّنفُ الأوّلُ (A) والصّنفُ الثّاني (B)

▪ لاحظ أنَّ كلَّ مجموعةٍ منَ العجولِ (أي كلُّ حظيرةٍ) يُطبّقُ عليها نوعٌ واحدٌ منَ الأعلافِ (معالجة واحدة فقط).

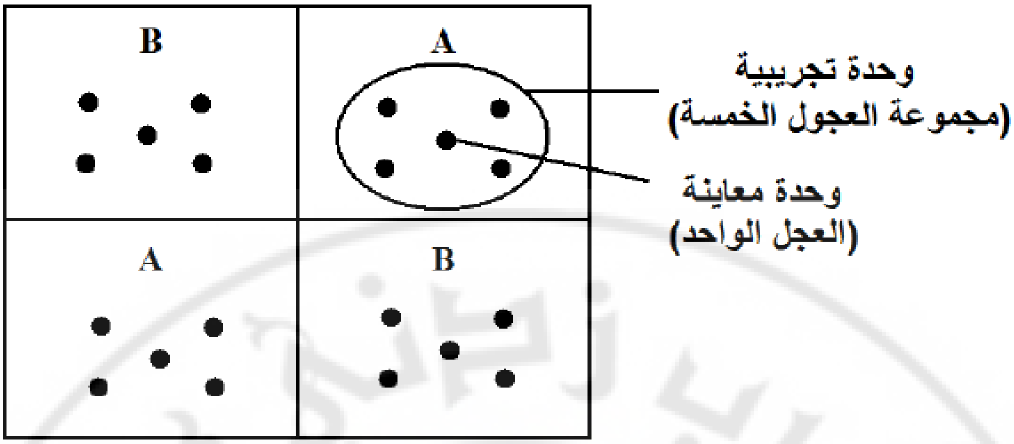
▪ لاحظ أنَّ كلَّ معالجةٍ تكرّرت مرّتينِ فقط (n=2) فِي التّجربةِ.

وحدةُ المعاينةِ (Sampling Unit): هيَ الجزءُ منَ الوحدةِ التّجريبيّةِ الذّي يُؤخذُ عليهِ قياسُ تأثيرِ المعالجةِ. وقد تكونُ وحدةُ المعاينةِ هيَ نفسها الوحدةُ التّجريبيّةُ. ففي التّجربةِ الثّانيةِ، وحدةُ المعاينةِ هيَ نفسها الوحدةُ التّجريبيّةُ (العجلُ) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدولِ (4-3).



شكل (4-3): الفرقُ بينَ وحدةِ المعاينةِ والوحدةِ التّجريبيّةِ فِي التّجربةِ الثّانيةِ.

أمّا فِي التّجربةِ الثّالثةِ، فإنَّ الوحدةَ التّجريبيّةَ هيَ كلُّ مجموعةٍ مكوّنةٍ من (5) عجولٍ فِي الحظيرةِ الواحدةِ، بينما وحدةُ المعاينةِ هيَ العجلُ الواحدُ داخلَ الحظيرةِ، الشّكلُ (4-4).



شكل (4-4): الفرقُ بينَ وحدةِ المعاينةِ والوحدةِ التّجريبيّةِ فِي التّجربةِ الثّالثةِ.

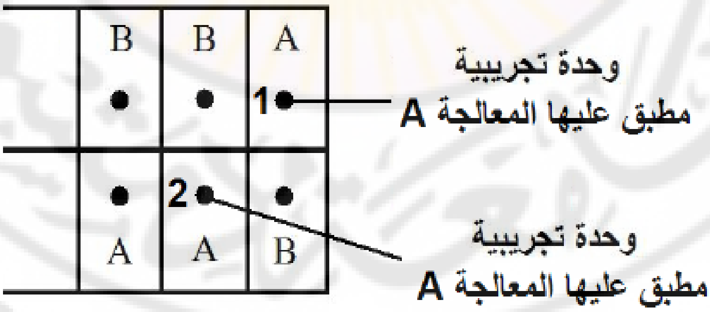
4-3- مفهومُ الخطأِ التّجريبيِّ فِي التّجربةِ (Experimental Error):

يُقصدُ بالخطأِ التّجريبيِّ الاختلافاتُ الموجودةُ بينَ المشاهداتِ المسجّلةِ منَ الوحداتِ التّجريبيّةِ والتّي عُومِلَتْ بنفسِ المعاملةِ. فعلى سبيلِ المثالِ:

فِي التّجربةِ الثّانيةِ: إنَّ الاختلافَ بينَ نتيجةِ العجلِ رقم (1) والعجلِ رقم (2) ليسَ بسببِ المعالجةِ (لأنَّه تمَّ تطبيقُ نفسِ المعالجةِ A عليهما)، وإنّما هناكَ سببانِ للاختلافِ هُمَا:

- اختلافُ العجلِ (اختلافاتٍ حيويّةٍ وراثيّةٍ بينَ العجلينِ)
- اختلافُ الحظيرةِ (الظّروفِ المحيطةِ بتطبيقِ المعالجةِ على العجلِ).

لاحظ هُنا أنَّ وحدةَ المعاينةِ هيَ نفسها الوحدةُ التّجريبيّةُ (العجلُ) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدولِ (4-5).



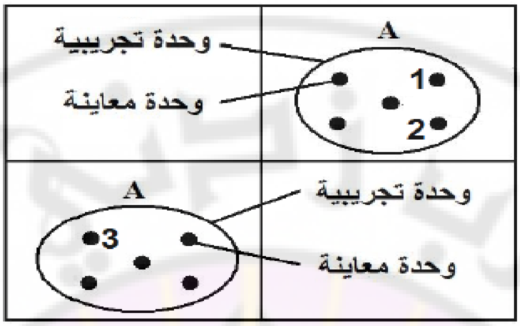
شكل (4-5): مفهومُ الخطأِ التّجريبيِّ فِي التّجربةِ الثّانيةِ.

فِي التّجربةِ الثّالثةِ: إنَّ الاختلافَ بينَ نتيجةِ العجلِ رقم (1) والعجلِ رقم (3) ليسَ بسببِ المعالجةِ (لأنَّه تمَّ تطبيقُ نفسِ المعالجةِ A عليهما)، وإنّما هناكَ سببانِ للاختلافِ هُمَا:

- اختلافُ العجلِ (اختلافاتٍ حيويّةٍ وراثيّةٍ بينَ العجلينِ).

➔ اختلافُ الحظيرةِ (الظّروفِ المحيطةِ بتطبيقِ المعالجةِ على العجلِ).

لاحظ هُنا أنَّ وحدةَ المعاينةِ (العجلَ الواحدَ) ليستِ الوحدةَ التّجريبيّةَ (خمسة العجولِ فِي الحظيرةِ) إنّما جزءٌ منها، و الشّكلُ (4–6) يوضّحُ ذلكَ.



شكل (4–6): مفهومُ الخطأِ التّجريبيِّ فِي التّجربةِ الثّالثةِ.

وأمّا الاختلافُ بينَ نتيجةِ العجلِ رقم (1) والعجلِ رقم (2) فليسَ بسببِ المعالجةِ ولا بسببِ الحظيرةِ (الظّروفِ المحيطةِ بتطبيقِ المعالجةِ) لأنّه تمَّ تطبيقُ نفسِ المعالجةِ A عليهما، وهُما فِي نفسِ الحظيرةِ، وإنّما سببُ الاختلافِ يكمنُ فقط فِي اختلافِ العجلِ (اختلافاتٍ وراثيّةٍ حيويّةٍ بينَ العجلينِ).

أي أنَّ خطأَ المعاينةِ يكونُ ناتجاً فقط عن مجموعةٍ منَ العواملِ غيرِ المتحكّمِ بها والكامنة داخلَ وحداتِ المعاينةِ نفسها. ولذلكَ فإنَّ خطأَ المعاينةِ ليسَ خطأً فِي إجراءِ التّجربةِ وإنّما ذلكَ ناتجٌ عنِ الاختلافاتِ فِي طبيعةِ وحداتِ المعاينةِ.

لِذا، فإنَّ ما يُسمّى بخطأِ المعاينةِ (Sampling Error) مكوّنٌ من مركّبةٍ واحدةٍ فقط هيَ اختلافُ العجلِ.

خطأُ المعاينةِ (Sampling Error): هوَ التّباينُ (أوِ الاختلافُ) بينَ وحداتِ المعاينةِ التّي طُبّقت عليها نفسُ المعالجةِ تحتَ نفسِ الظّروفِ المحيطةِ.

وينتجُ خطأُ المعاينةِ فِي الحالةِ التّي تكونُ فيها وحداتُ المعاينةِ جزءٌ منَ الوحدةِ التّجريبيّةِ وليست كاملَ الوحدةِ التّجريبيّةِ.

وعندَ تصميمِ وإجراءِ التّجربةِ فإنَّ منَ الضّروريِّ العملُ على تصغيرِ خطأِ المعاينةِ وذلكَ بجعلِ وحداتِ المعاينةِ داخلَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ متجانسة بقدرِ الإمكانِ.

4–4– المبادئُ الأساسيّةُ لتصميمِ التّجاربِ (Basic Principles of Design of Experiments)

هناكَ ثلاثُ قواعدَ رئيسيّة لابدَّ من توفّرها فِي أيِّ تصميمٍ والتّي تؤدّي إلى تقليلِ الخطأِ التّجريبيِّ وبالتّالي زيادةُ دقّةِ وكفاءةِ التّجربةِ وهيَ تُمثّلُ ثلاثَ مبادئَ أساسيّة لتصميمِ التّجاربِ هيَ:

1– مبدأُ التّكرارِ (Replication)

2- مبدأُ التّعشيةِ أوِ العشوائيّةِ (Randomization)

3- مبدأُ القطّاعاتِ (أوِ التّحكّم فِي الوَحداتِ التّجريبيّةِ) (Blocking)

4-4-1 مبدأُ التّكرارِ (Replication):

يُقصدُ بهِ تطبيقُ المعالجةِ أكثرَ من مرّةٍ وبالتّالي كلُّ معالجةٍ يَتِمُّ تطبيقها بشكلٍ مستقلٍّ على عدّةِ وحداتٍ تجريبيّةٍ .ويمكننا أن نلخّصَ أهدافَ التّكرارِ كَمَا يلِي:

- **يوفّرُ إمكانيّةَ تقديرِ الخطأِ التّجريبيِّ**: والذّي يُمثّلُ انحرافَ كلِّ قياسٍ عن مُتوسّطِ المعالجةِ.
- **تقليلُ الخطأِ التّجريبيِّ**: زيادةُ التّكراراتِ يؤدّي إلى تقليلِ الخطأِ المعياريِّ (Standard Error) أي الجذرُ التّربيعيّ لتبايُنِ المُتوسّطِ ومن ثمَّ زيادةُ دقّةِ التّقديرِ.

4-4-2- التّوزيعُ العشوائيُّ أو مبدأُ التّعشيةِ أوِ العشوائيّة (Randomization):

المقصودُ بالتّعشيةِ هيَ عمليةُ توزيعِ (تطبيقِ) المعالجاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ بطريقةٍ عشوائيّةٍ تخلو من أيِّ تأثيرٍ للعاملِ الشّخصيِّ وذلكَ لتجنّبِ خطأِ التّحيّزِ، وهذا يعني أنَّ كلَّ وحدةٍ تجريبيّةٍ لها نفسُ الفرصةِ أو متساويةُ الاحتمالِ لاستقبالِ المعالجةِ.

وتكمنُ أهميّةُ التّعشيةِ فيما يلِي:

1- ضمانُ استقلاليّةِ المشاهداتِ(Independence)، حيثُ أنَّ الكثيرَ منَ الأساليبِ الإحصائيّةِ المستخدمةِ فِي تحليلِ التّجاربِ تشترطُ استقلاليّةَ المشاهداتِ.

2- إزالةُ التّحيّزِ: ويَتِمُّ بتوزيعِ المعالجاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ.

3- إزالةُ تأثيرِ بعضِ العواملِ غيرِ المرغوبِ فيها (غيرِ معروفةٍ) والتّي قد تؤثّرُ على متغيّرِ الاستجابةِ.

لتوضيحِ أهميّةِ التّعشيةِ لنفترض أنّه تمّ تطبيقُ صنفيِّ السّمادِ (A و B) على القِطَعِ الزّراعيّةِ حسبَ أحدِ التّصميمينِ فِي الشّكلينِ أدناهُ. ولنفترض أنَّ هناكَ تدرّجٌ فِي خصوبةِ التّربةِ (لم يعلمْ عنهُ الباحثُ)، بحيث أنَّ الخصوبةَ تزدادُ كلّما اتّجهنا منَ اليسارِ إلى اليمينِ كَمَا هوَ موضّحٌ فِي الشّكلِ (4-7).

B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	التصميم الأول

➡ إتجاه زيادة خصوبة التربة ➡

B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	التصميم الثاني

➡ إتجاه زيادة خصوبة التربة ➡

شكل (4-7): تأثيرُ بعضِ العواملِ غيرِ المرغوبِ فيها على التّجربةِ.

نلاحظُ فِي هذينِ التّصميمينِ أنَّ تطبيقَ المعالجاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ لم يكنْ بشكلٍ عشوائيٍّ.

حيثُ أنَّ المعالجةَ الأولى (صنفُ السّمادِ A) كانت دائماً تُطبّقُ فِي قطعٍ زراعيّةٍ أكثرَ خصوبةٍ منَ القِطَعِ الزّراعيّةِ التّي تُطبّقُ فيها المعالجةُ الثّانيةُ (صنفُ السّمادِ B).

ففِي التّصميمِ الأوّلِ نجدُ أنّه فِي كلِّ قطعتينِ متجاورتينِ يَتِمُّ تطبيقُ المعالجةِ الأولى A فِي القطعةِ ذات الخصوبةِ الأعلى.

وأمّا فِي التّصميمِ الثّاني فقد تمَّ تطبيقُ المعالجةِ الأولى A فِي القِطَعِ ذاتِ الخصوبةِ الأعلى. وفِي كلا التّصميميينِ هناكَ تحيّزٌ منتظمٌ لصالحِ الصّنفِ الأوّلِ A. ولذلكَ فإنَّ الفرقَ بينَ كميّةِ محصولِ الصّنفينِ (إن وجدَ) لا يكونُ بسببِ اختلافِ الصّنفينِ فقط وإنّما قد يكونُ أيضاً بسببِ الاختلافِ فِي درجةِ الخصوبةِ. وبذلكَ يكونُ هناكَ مصدرينِ للاختلافِ هُما:

- ← الفرقُ النّاتجُ عنِ الاختلافِ فِي درجةِ الخصوبةِ (إن وجدَ) (لاحظ أنَّه ليسَ من أهدافِ هذهِ التّجربةِ معرفةُ تأثيرِ الخصوبةِ).
- ← الفرقُ النّاتجُ عنِ الاختلافِ بينَ صنفيِّ السّمادِ (إن وجدَ)، (لاحظ أنَّ هدفَ هذهِ التّجربةِ هوَ معرفةُ تأثيرِ صنفِ السّمادِ).

ولذلكَ فإنّنا لا نستطيعُ فِي هذينِ التّصميمينِ الفصلُ بينَ تأثيرِ صنفِ السّمادِ وتأثيرِ خصوبةِ التّربةِ على كميّةِ إنتاجِ القمحِ. علماً بأنَّ الهدفَ الأساسيَّ منَ التّجربةِ هوَ معرفةُ هل هناكَ فرقٌ بينَ أصنافِ السّمادِ (أي معرفةُ تأثيرِ أصنافِ السّمادِ على كميّةِ الإنتاجِ). وأمّا تأثيرُ خصوبةِ التّربةِ فليسَ من أهدافِ التّجربةِ.

إنَّ استعمالَ مبدأِ التّعشيةِ هوَ بمثابةِ عمليّةِ التّأمينِ ضدَّ التّحيّزِ أو معَ بعضِ المعالجاتِ دونَ الأخرى بحيث تُمنحُ كلُّ وحدةٍ تجريبيّةٍ نفسَ الفرصةِ للظّهورِ معَ أيِّ معالجةٍ فِي التّجربةِ.

4-4-3- التّحكّمُ فِي الوَحداتِ التّجريبيّةِ أوِ التّحكّمُ الموقعيُّ (Local Control– Blocking):

أو تُسمّى السّيطرةُ على الأخطاءِ التّجريبيّةِ.

وتعني السّيطرةَ على غالبيةِ العواملِ والظّروفِ التّي تحيطُ بالتّجربةِ، أي بمعنى آخر تقليلُ أو إزالةُ تأثيرِ العواملِ الخارجيّةِ المحيطةِ بالتّجربةِ (والتّي قد تؤثّرُ على متغيّرِ الاستجابةِ) غير العواملِ التّي يُرادُ دراسةَ تأثيرها. مثلُ إزالةِ تأثيرِ خصوبةِ الأرضِ كعاملٍ مؤثّرٍ على إنتاجِ القمحِ والتّركيزِ على تأثيرِ أصنافِ السّمادِ، وذلكَ من خلالِ تقسيمِ الوحداتِ التّجريبيّةِ إلى مجموعاتٍ متجانسةٍ تُسمّى قطّاعات (Blocks)، ثمَّ يَتِمُّ توزيعُ (أو تطبيقُ) المعالجاتِ بشكلٍ عشوائيٍّ داخلَ كلِّ قطّاعٍ، وينتجُ عن هذهِ الطّريقةِ فصلُ تبايُنِ

القطّاعاتِ (الاختلافِ بينَ القطّاعاتِ) عنِ الخطأ التّجريبيِّ، وبذلكَ يَتِمُّ تقليلُ الخطأ التّجريبيِّ وزيادةُ دقّةِ التّجربةِ، أي بمعنى عزلُ العوامل قيدَ الدّراسةِ عنِ العوامل المؤثّرةِ الأخرى.

تُعتبرُ عمليّةُ استخدامِ القطّاعاتِ (Blocks) منَ الأسسِ الرّئيسيّةِ للتّصميمِ النّاجحِ للتّجربةِ.

وتكونُ عمليّةُ القطّاعاتِ ناجحةً إذا استطاعَ الباحثُ تقسيمَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى مجموعاتٍ (قطّاعاتٍ) بحيث تكونُ الوَحداتُ التّجريبيّةُ داخلَ أيِّ قطّاعٍ أكثرَ تجانساً فيما بينها وأكثرَ اختلافاً عنِ الوحداتِ التّجريبيّةِ فِي القطّاعاتِ الأخرى.

4-5- تصنيفُ التّجاربِ على أساسِ العوامل الدّاخلة فيها:

يمكنُ تصنيفُ التّجاربِ بصورةٍ عامّةٍ إلى مجموعتينِ على أساسِ العوامل الدّاخلة فيها:

أوّلاً: التّجاربُ البسيطةُ (Simple Experiments):

فِي هذا النّوعِ منَ التّجاربِ يُدرسُ متغيّرٌ واحدٌ فقط، ويجبُ أن يكونَ جميعُ العواملِ الأخرى ثابتةَ ماعدا العاملُ المرادُ دراسته. أي أنّها هيَ تجاربٌ ذاتَ عاملٍ واحدٍ فقط مثلُ دراسةِ تأثيرِ خمسةِ مستوياتٍ (أصنافٍ) منَ الأسمدةِ على إنتاجِ محصولِ القمحِ، أو دراسةِ تأثيرِ خمسةِ تركيزاتٍ من مبيدٍ لمكافحةِ مرضٍ معيّنٍ لشجرةِ الزّيتونِ. الخ.

ثانياً: التّجاربُ العامليّةُ (Factorial Experiments):

فِي هذهِ التّجاربِ يُدرسُ تأثيرُ عاملينِ أو أكثر فِي وقتٍ واحدٍ. حيثُ يكونُ الهدفُ من إجراءِ هذهِ التّجارب هوَ دراسةُ تأثيرِ كلٍّ من هذهِ العوامل بالإضافةِ إلى تأثيرِ التّداخلِ (Combinations) بينَ هذهِ العوامل. مثلُ دراسةِ تأثيرِ السّمادِ بأصنافهِ المختلفةِ (3 أصنافٍ مثلاً) معَ عاملِ كميّةِ الرّيّ (نوعينِ) على إنتاجِ القمحِ. و خيراً يمكنُ تصنيفُ تصاميمَ التّجاربِ كَمَا يلِي:

4-6- أنواعُ التّصميماتِ الإحصائيّةِ للتّجاربِ (Experimental Designs):

أوّلاً: التّجاربُ البسيطةُ (Simple Experiments):

1- التّجاربُ العشوائيّةُ الكاملةُ (Completely Randomized Design- CRD)

2- تجاربُ القطّاعاتِ الكاملةِ (Randomized Completely Block Design–RCBD)

3- تصميمُ المُربّعِ اللّاتينيِّ (Latin Square)

ثانياً: التّجاربُ العامليّةُ (Factorial Experiments):

التّجاربُ العامليّةُ ذات عاملينِ تُصمّمُ بأحدِ التّصاميمِ التّاليةِ:

- تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ تُطبّقُ فِي تصميمٍ عشوائيٍّ كاملٍ (CRD)

- تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ تُطبّقُ فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD)
- تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ تُطبّقُ فِي تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيِّ

التّجاربُ العامليّةُ ذات ثلاثةِ عوامل تُصمّمُ بأحدِ التّصاميمِ التّاليةِ:

- تجربةٌ عامليّةٌ بثلاثةِ عواملٍ تُطبّقُ بتصميمٍ عشوائيٍّ كاملٍ (CRD)
- تجربةٌ عامليّةٌ بثلاثةِ عواملٍ باستخدامِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD)

ثالثاً: تجاربُ القِطَعِ والقطّاعاتِ المُنشقّةِ(Split-Plot & Split-Block Designs)

الفصلُ الخامس

التّصميمُ العشوائيُّ الكاملُ

Completely Randomized Design (CRD)

Damascus University

الفصلُ الخامس

التّصميمُ العشوائيُّ الكاملُ

Completely Randomized Design (CRD)

5-1- مقدّمة:

يُعدُّ التّصميمُ العشوائيُّ الكاملُ من أبسطِ وأسهلِ التّصاميمِ التّجريبيّةِ تخطيطاً وتحليلاً، ويُعتبرُ من أكثرِ التّصاميمِ استعمالاً في مجالِ الإنتاجِ الحيوانيِّ والنّباتيِّ، ويكثرُ استخدامُ هذا النّوعِ في التّجاربِ المعمليّةِ والزّراعيّةِ أي في التّجاربِ التّي تَتمُّ في الظّروفِ المسيطرِ عليها (تربة + مناخ) كالمختبرِ والبيوتِ الزّجاجيّةِ وغيرها. ويُستعملُ هذا التّصميمُ غالباً عندما تكونُ الوَحداتُ التّجريبيّةُ متجانسةً أي أنَّ الاختلافاتِ بينها ضئيلةٌ جدّاً.

التّصميمُ العشوائيُّ الكاملُ (CRD): هوَ التّصميمُ الذّي يَتِمُّ فيهِ توزيعُ المعاملاتِ (أو مستوياتِ المتغيّرِ المستقلِّ) المراد دراسة تأثيرهِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ بطريقةٍ عشوائيّةٍ كاملةٍ أي بدونِ نظامٍ محدّدٍ.

5-2- مزايا وعيوبُ التّصميمِ (CRD):

5-2-1- مزايا التّصميمِ (CRD):

- يتميّزُ هذا التّصميمُ بالمرونةِ، فهوَ لا يضعُ حدوداً لأعدادِ المعاملاتِ أوِ تكراراتِ كلٍّ منها طالما توافرتْ أعدادٌ كافيةٌ منَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ.
- سهولةُ تنفيذِ التّصميمِ والتّحليلِ الإحصائيِّ، حتى ولو فُقدَت بعضُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ أثناءَ التّجربةِ.
- ليسَ منَ الضّروري تساوي عددَ التّكراراتِ لجميعِ المعاملاتِ.
- لهذا التّصميمِ دقّةٌ عاليةٌ لأنَّه يسمحُ باستخدامِ أعلى ما يمكنُ من درجاتِ الحرّيّةِ للخطأِ التّجريبيِّ (dfe) لتجربةٍ معيّنةٍ بالمقارنةِ بأنواعِ التّصاميمِ الأخرى ممّا يؤدّي إلى خفضِ القيمةِ المقدّرةِ لـ تبايُنِ الخطأِ التّجريبيِّ (MSE)، وبالتّالي تقليلُ الخطأِ التّجريبيِّ و زيادةُ دقّةِ التّجربةِ.

5-2-2- عيوبُ التّصميم (CRD):

- لا يصلحُ استخدامُ هذا التّصميمِ إلّا إذا كانتِ الوَحداتُ التّجريبيّةُ على درجةٍ عاليةٍ منَ التّجانسِ.
- إذا لم يتوفّرِ التّجانسُ التّامُّ بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ، أي فِي حالةِ وجودِ اختلافاتٍ ضئيلةٍ بينَ هذهِ الوَحداتِ يؤدّي إلى تراكمِ تبايناتٍ كبيرةٍ للخطأِ التّجريبيِّ (SSE) وبذلكَ تزدادُ قيمةُ الخطأِ التّجريبيِّ (MSE) ممّا يؤدّي إلى عدمِ دقّةِ وكفاءةِ هذا التّصميمِ، لأنَّ الدّقّةَ تساوي:

$$\boldsymbol{Precision = \frac{1}{MSE}}$$

5-3- التّعشيةُ (Randomization):

إنَّ التّعشيةَ هيَ الأساسُ التّي يعتمدُ عليها هذا التّصميمُ، ويُقصدُ بالتّعشيةِ توزيعُ المعالجاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ بطريقةٍ عشوائيّةٍ كاملةٍ دونَ تحيّزٍ. فِي هذهِ الحالةِ يمكنُ توليدُ أرقامٍ عشوائيّةٍ باستخدامِ برامجَ إحصائيّةٍ لتحديدِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المخصّصةِ لكلِّ معالجةٍ.

يمكنُ تنفيذُ هذا التّصميمِ فِي حالةِ تساوي أو عدمِ تساوي التّكراراتِ لكلِّ معاملةٍ.

5-4- استخدامُ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ فِي حالةِ تساوي التّكراراتِ لكلِّ معاملةٍ

Completely Randomized Design with Equal Replications

نبيّنُ فيما يلِي مخطّطُ التّجربةِ والنّموذجُ الرّياضيّ وطريقةُ تنظيمِ البياناتِ فِي حالةِ تساوي التّكراراتِ لكلِّ معالجةٍ.

5-4-1- تخطيطُ التّجربةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتصميمِ التّجاربِ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD) فِي حالةِ تساوي التّكراراتِ لكلِّ معاملةٍ، بفرضِ أنَّه يوجدُ أربعُ معالجاتٍ (t=4) ويرمزُ لأسمائها بالرّموزِ (A, B, C, D) ويُرادُ تطبيقها على الوَحداتِ التّجريبيّةِ التّي عددها (24) وحدةٍ مرقّمةٍ من (1-24) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالمخطّطِ الموضّحِ بالشّكلِ (5-1).

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

19	20	21	22	23	24

شكل (5–1): تخطيطُ تجربةٍ من (24) وحدةٍ تجريبيّةٍ متجانسةٍ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD).

بما أنَّ كلَّ المعاملاتِ لها نفسُ التّكرارِ، هذا يعني أنَّ كلَّ معاملةٍ سوفَ تُطبّقُ على العددِ نفسهِ منَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ أي أنَّ كلَّ معاملةٍ سوفَ تُطبّقُ على (6) وحداتٍ تجريبيّةٍ وبشكلٍ عشوائيٍّ تامٍّ. ولكي يُطبّقَ مبدأُ العشوائيّةِ يَتمُّ توليدُ (6) أرقامٍ عشوائيّةٍ من(1-24) تمثّلُ أرقامَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المخصّصةِ للمعالجةِ (A) وكذلكَ توليدُ (6) أرقامٍ عشوائيّةٍ أخرى من(1-24) معَ تجنّبِ تكرارِ الأرقامِ السّابقةِ لتمثّلَ أرقامَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المخصّصةِ للمعالجةِ (B) وهكذا من أجلِ كلِّ المعالجاتِ، ومن ثمَّ يكونُ توزيعُ المعالجاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ كَمَا هوَ مبيّنٌ بالشّكلِ (5-2).

1 C	2 A	3 B	4 A	5 A	6 B
7 B	8 D	9 C	10 D	11 C	12 B
13 B	14 D	15 A	16 B	17 C	18 D
19 C	20 A	21 D	22 D	23 C	24 A

شكل (5–2): تخطيطُ تجربةٍ بـ أربعِ معاملاتٍ و 6 مكرّراتٍ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD).

5–4–2– تنظيمُ البياناتِ:

بعدَ تصميمِ التّجربةِ، وتنفيذها والانتهاءِ منها يكونُ لدينا عددٌ منَ المشاهداتِ (y_{ij}).

وبشكلٍ عامٍّ، نفترضُ أنَّ التّجربةَ تحتوي على معاملاتٍ عددها (t) معاملة، وكلُّ معاملةٍ طُبّقت على نفسِ العددِ منَ الوحداتِ التّجريبيّةِ، أي كلُّ معاملةٍ تكرّرت فِي التّجربةِ بنفسِ التّكرارِ وبعددٍ قدرهُ (r) وحدةٍ تجريبيّةٍ لكلِّ معاملةٍ، فيكونُ العددُ الكلّيُّ لمشاهداتِ التّجربةِ ($N=t \times r$).

وعلى أساسِ هذهِ الرّموزِ تنظيمُ المشاهداتِ أو القراءاتِ أو البياناتِ التّي تقاسُ فِي التّجربةِ للصّفاتِ المدروسةِ ولكي نستطيعَ تحليلها إحصائيّاً يَتمُّ تنظيمُ البياناتِ بالجدولِ (5-1).

جدول (5-1): تنظيمُ البياناتِ لتصميم (CRD).

المعاملاتُ Treatments (T)	المشاهداتُ أوِ التّكراراتِ (Observations- y_{ij})				مجاميعُ المعاملاتِ $(y_{i\bullet})$	مُتوسّطُ المعاملاتِ $(\bar{y}_{i\bullet})$
t_1	y_{11}	y_{12}	…..	y_{1r}	$y_{1\bullet}$	$\bar{y}_{1\bullet}$
t_2	y_{21}	y_{22}	…..	y_{2r}	$y_{2\bullet}$	$\bar{y}_{2\bullet}$
…	…..	…..	…..	…..		
t_t	y_{t1}	y_{t2}	…..	y_{tr}	$y_{t\bullet}$	$\bar{y}_{t\bullet}$
					المجموعُ العامُّ $y_{\bullet\bullet}$	المتوسطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet}$

i= 1,2 …t يمثّلُ عددَ المعاملاتِ

j= 1,2 …r يمثّلُ عددَ التّكراراتِ فِي كلِّ معاملةٍ

(y_{ij}): تمثّلُ قيمةَ المشاهدةِ المأخوذةِ من تطبيقِ المعالجةِ رقم (i) على الوحدةِ التّجريبيّةِ رقم (j)، فعلى سبيلِ المثالِ المشاهدةُ الثّالثةُ منَ المعاملةِ الرّابعةِ تُكتبُ هكذا (y_{43}).

($y_{i\bullet}$): تمثّلُ مجموعَ قيمِ المشاهداتِ التّي طُبّقت عليها المعالجةُ رقمُ (i).

$$y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{r} y_{ij} = y_{i1} + y_{i2} + y_{i2} + \cdots\cdots + y_{ir}$$

وعليهِ مجموعُ قيمِ المعاملةِ الثّانيةِ: $y_{2\bullet} = y_{21} + y_{22} + \cdots\cdots + y_{2r}$

($\bar{y}_{i\bullet}$): يمثّلُ مُتوسّطَ مشاهداتِ المعالجةِ رقم (i)

5-4-3- النّموذجُ الرّياضيُّ للتّصميم (Mathematical Model):

النّموذجُ الرّياضيُّ لهذا التّصميمِ يمثّلُ نموذجاً خطيّاً يتمثّلُ بالمعادلةِ الرّياضيّةِ التّي تصفُ مكوّناتِ التّجربةِ أي التّي توضّحُ مكوّناتِ أيِّ مشاهدةٍ فِي التّجربةِ. وقيمةُ كلِّ مشاهدةٍ فِي التّجربةِ تتكوّنُ من ثلاثةِ مكوّناتٍ مستقلّةٍ وهيَ المُتوسّطُ العامُّ وتأثيرُ المعاملةِ التّي أخذتها الوحدةُ التّجريبيّةُ والتّي سُجّلت منها المشاهدةُ وقيمةُ الخطأِ العشوائيِّ بتلكَ المشاهدةِ أوِ الوحدةِ التّجريبيّةِ وعليهِ فمعادلةُ النّموذجِ الرّياضيِّ لهذا التّصميم هيَ:

$$Y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$$

y_{ij} : قيمةُ المشاهدةِ رقم (j) العائدة للمعالجةِ (i).

μ: المُتوسّطُ العامُّ للتّجربةِ (لمجتمعِ المشاهداتِ) وتقديرِه هوَ: $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$

t_i: تأثيرُ المعاملةِ (i) الخاصّةِ بهذِهِ المشاهدةِ، وتقديرها هوَ مقدارُ انحرافِ مُتوسّطِ هذهِ المعاملةِ (i) عنِ المُتوسّطِ العامِّ للتّجربةِ $\hat{t}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$

e_{ij}: مقدارُ الخطأِ العشوائيِّ (التّجريبيِّ) الخاصِّ بالمشاهدةِ (y_{ij}) ويقدّرُ بمقدارِ انحرافِ قيمةِ هذهِ المشاهدةِ عن مُتوسّطِ المشاهداتِ التّي طُبّقت عليها نفسُ المعالجةِ: $e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$

5-4-4- الأهدافُ الأساسيّةُ من تصميمِ (CRD):

1- إنَّ الهدفَ الأساسيَّ منَ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ هوَ التّحقّقُ من وجودِ (أو عدمِ وجودِ) فروقٍ معنويّةٍ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ(μ_1, μ_2.........., μ_t)، وبمعنى أخر تطبيقُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ لاختبارِ فيما إذا كانَ هناكَ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ كَمَا يلِي:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2$......$=\mu_t$) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ متساويةٌ، أي عدمُ وجودِ فروقٍ معنويّةٍ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ، ممّا يعني عدم وجودِ اختلافٍ بينَ تأثيراتِ المعالجاتِ على متغيّرِ الاستجابةِ (التّابعِ).
- **الفرضُ البديل** :(H_1) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويين).

2- في حالةِ وجودِ فروقٍ معنويّةٍ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ، يكونُ الهدفُ الثّاني من تصميمِ تامِّ العشوائيّةِ هوَ التّعرّفُ على مكامنِ الاختلافاتِ وتقديرِها بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ، من خلالِ إجراءِ مقارناتٍ متعدّدةٍ بينَ المُتوسّطاتِ (المقارنات البعديّة).

5-4-5- خطواتُ تطبيقِ تصميمِ (CRD):

من أجلِ تحقيقِ الهدفِ الأوّلِ من تصميمِ (CRD)، يَتِمُّ تطبيقُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ لاختبارِ فيما إذا كانَ هناكَ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ وفقاً للخطواتِ الآتيةِ:

6) صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ
7) تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّباينِ (AVOVA Table)
8) حسابُ قيمةِ إحصاءةِ الاختبارِ (F_c)
9) استخراجُ قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ وتحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ:
10) المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

1- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- **الفرضُ العدميُّ**: ($H_0: \mu_1=\mu_2......=\mu_t$) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ).
- **الفرضُ البديلُ** :(H_1) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غيرَ متساويينِ).

2- تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE)

إنَّ الطّريقةَ الإحصائيّةَ لتطبيقِ هذا النوعِ من اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ تعتمدُ على طريقةِ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ، أي أنَّ هناكَ مصدرينِ لحدوثِ التّبايُنِ الكلّيِّ لقيمِ مشاهداتِ التّجربةِ.

وبالتّالي من أجلِ تحليلِ التّبايُنِ حسبَ مصادرِه، يَتِمُّ حسابُ التّبايُنِ الكلّيِّ لكلِّ مشاهداتِ التّجربةِ ثمَّ يقسمُ (يحلّلُ) هذا التّباينُ إلى قسمينِ هُما:

القسمُ الأوّلُ: الاختلافاتُ أوِ التّبايناتُ بينَ المعالجاتِ.

القسمُ الثّاني: الاختلافاتُ **أوِ التّبايناتُ** التّي تحدثُ داخلَ المعالجاتِ والتّي تعرفُ بالأخطاءِ التّجريبيّةِ (Experimental Error) أوِ التّبايناتُ بسببِ الأخطاءِ التّجريبيّةِ، ويمكنُ التّعبيرُ عنهُ رياضياً كَمَا يلِي:

$$(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) = (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) \qquad i = 1,2 \dots . t, \quad j = 1,2 \dots \dots r$$

- $(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})$: انحرافُ مشاهداتِ التّجربةِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ ($\bar{y}_{..}$).
- $(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})$: انحرافُ مشاهداتِ كلِّ معالجةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ لتلكَ المعالجةِ.
- $(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})$: انحرافُ الأوساطِ الحسابيّةِ للمعالجاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ العامِّ ($\bar{y}_{..}$).

وبتربيعِ طرفيِّ المساواةِ السّابقةِ وإدخالِ إشارةِ المجموعِ نحصلُ على العلاقةِ التّاليةِ:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{t} r(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$$

حيثُ يعرفُ كلُّ مقدارٍ منَ المقاديرِ الثّلاثةِ الواردةِ فِي المساواةِ أعلاهُ على النّحوِ التّالي:

- $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$: يمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ انحرافاتِ المشاهداتِ عن مُتوسّطاتها المرافقة لكلِّ معالجةٍ، أي يُمثّلُ التّغيّراتِ بينَ مشاهداتِ المعاملةِ الواحدةِ، وهوَ يقيسُ تشتّتَ أو تبايُنَ المشاهداتِ ضمنَ المعالجةِ الواحدةِ، أي يُعبّرُ عنِ الخطأِ التّجريبيِّ ويُسمّى (**Sum Squares of Error**) ويرمزُ لهُ بالاختصارِ (SSE).
- $\sum_{i=1}^{t} r(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$: يُمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ انحرافاتِ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ، أي يُمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ المعالجاتِ، ويُسمّى (**Sum Squares of Treatments**)، ويُعبّرُ عنهُ بالاختصارِ (SSTr).

➲ $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$: يُمثّلُ مجموعَ مُربّعاتِ انحرافاتِ مشاهداتِ التّجربةِ عنِ المُتوسّطِ العامِّ ، وهوَ يقيسُ تشتّتَ مشاهداتِ التّجربةِ عنِ الوسطِ الإجماليِّ لهذهِ التّجربةِ، ويُسمّى بمجموعِ المُربّعاتِ الكلّيِّ (Total Sum of Squares) ويُعبّرُ عنهُ بالاختصارِ (SSTO).

ويمكنُ التّعبيرُ رياضياً أنَّ مجموعَ مُربّعاتِ الانحرافاتِ الكلّيّةِ لمشاهداتِ التّجربةِ (SSTO) يساوي مجموعَ المُربّعاتِ الذّي يُعزى إلى المعالجاتِ (SSTr) مضافاً إليهِ مجموعُ المُربّعاتِ الذّي يُعزى إلى الأخطاءِ التّجريبيّةِ (SSE) كَمَا يلِي:

مجموعُ المُربّعاتِ الكلّيِّ	=	**مجموعُ مُربّعاتِ المعالجاتِ**	+	**مجموعُ مُربّعاتِ الأخطاءِ**
Sum Squares of Total	=	**Sum Squares of Treatments**	+	**Sum Squares of Error**
SSTO	=	SSTr	+	SSE
$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	=	$\sum_{i=1}^{t} r(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	+	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet})^2$

حيثُ يمكنُ حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ (SS) لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّبايُنِ إمّا باستخدامِ المُتوسّطاتِ(Means) أو باستخدامِ المجاميعِ (Summations) كَمَا هو مبيّنٌ بالجدولِ (5−2).

جدول (5−2): طرائقُ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لتصميمِ (CRD) في حالةِ تساوي التّكراراتِ.

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ *SS* باستخدامِ المُتوسّطاتِ (*Means*)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ *SS* باستخدامِ المجاميعِ (*Summations*)
المعاملاتُ Treatments	$SSTr=\sum_{i=1}^{t} r(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$SSTr=\frac{\sum_{i=1}^{t}(y_{i\bullet})^2}{r}-CF$
الخطأُ التّجريبيُّ Experimental Error	$SSE=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet})^2$ SSE=SSTO- SSTr	$SSE=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}y_{ij}^2-\frac{\sum_{1}^{t}(y_{i\bullet})^2}{r}$ SSE=SSTO - SSTr
المجموعُ Total	$SSTO=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$SSTO=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}y_{ij}^2-CF$

حيثُ أنَّ التّكراراتِ لكلِّ المعاملاتِ متساويةٌ أي ($r_1=r_2=r_3=\dots r_i=r_t$).

وبعدَ حسابِ مجموعِ المُربّعاتِ يَتِمُّ تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) فِي الجدولِ (5-3).

جدول (5–3): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتصميمِ (CRD) فِي حالةِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

مصادرُ التّبايُنِ **Source of Variance (S.O.V)**	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافات **Sum of squares (SS)**	درجاتُ الحرّيّة **df**	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّباين) **Mean squares (MS)**	F (المحسوبة) **Calculated**	F (الجدوليّة) **Tabulated**
بينَ المعالجاتِ Treatments	**SSTr**	t-1	$MSTr = \frac{SSTr}{t-1}$	$F_C = \frac{MSTr}{MSE}$	$F_{\alpha\,(t-1),\,(tr-t)}$
الأخطاءُ التّجريبيّةُ (Experimental Error)	**SSE**	t(r-1)	$MSE = \frac{SSE}{t(r-1)}$		
المجموعُ **Total**	**SSTO = SSTr + SSE**	tr-1			

علماً أنَّ:

r: عددُ المشاهداتِ أوِ المكرّراتِ فِي كلِّ معاملةٍ.

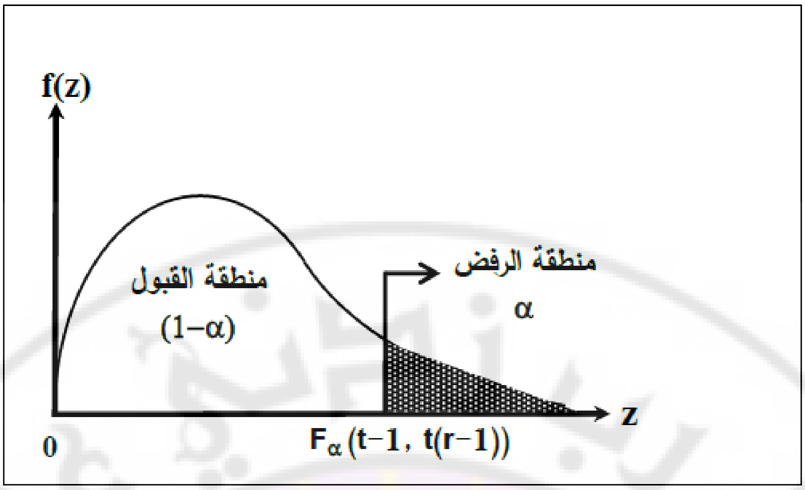
t: عددُ المعاملاتِ فِي التّجربةِ.

CF: يُمثِّلُ معامل التّصحيحِ ويساوي مُربّعَ مجموعِ القيمِ مقسوماً على عددهَا والعددُ ناتجٌ من ضربِ عددِ المعاملاتِ (t) فِي عددِ المكرّراتِ لكلِّ معاملةٍ (r)، أي أنَّ $CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{tr}$

3–حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c):

يَتِمُّ حسابُ واستخلاصُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c المحسوبة) من جدولِ أنوفا السّابقِ وتُحسبُ منَ العلاقةِ التّاليةِ: $F_C = \frac{MSTr}{MSE}$

4–تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ: يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ F_T (الجدوليّةِ) من جدولِ توزيعِ F بدرجاتِ حرّيّةِ(t-1) للبسطِ و t(r-1) للمقامِ وبمستوى معنويّةٍ (α) أي استخراجُ قيمةِ $F_t = F_\alpha(t-1, tr-t)$. وفِي اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ يكونُ نوعُ الاختبارِ منَ الطّرفِ الأيمنِ، أي أنَّ منطقةَ الرّفضِ تقعُ بالكاملِ على الطّرفِ الأيمنِ كَمَا بالشّكلِ (5–3).



شكل (5−3): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ لاختبارِ F بتصميم (CRD).

5− المقارنةُ واتّخاذُ القرار: إذا كانت قيمةُ (F_C) المحسوبةِ من إحصاءةِ الاختبارِ أقلَّ من قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ عندَ مستوى المعنويّةِ ودرجاتِ الحرّيّةِ المعيّنةِ نقبلُ الفرضَ العدميَّ بتساوي مُتوسّطاتِ المعالجاتِ، أمّا إذا كانت قيمةُ (F_C) المحسوبةِ من إحصاءةِ الاختبارِ أكبرَ من قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ نرفضُ الفرضَ العدميَّ أي هناكَ فرقٌ معنويٌّ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ، أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويين.

مثال (5−1):

أُجريَت تجربةٌ حقليّةٌ بتصميم (CRD) لدراسةِ تأثيرِ (5) أصنافٍ منَ السّمادِ على إنتاجِ القمحِ، حيثُ استخدمَ الباحثُ لكلِّ صنفٍ (4 مكرّراتٍ) قِطعٍ زراعيّةٍ وتمَّ قياسُ إنتاجِ كلِّ قطعةٍ (وحدةٍ تجريبيّةٍ) وتمَّ تدوينها بالجدولِ (5−4).

المطلوبُ:

1− هل يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ كميّاتِ القمحِ النّاتجِ من تطبيقِ أصنافِ السّمادِ الخمسةِ؟

2− أنشئ جدولاً بالأخطاءِ التّجريبيّةِ لكلِّ وحدةٍ تجريبيّةٍ.

الحلُّ:

أوّلاً: من أجلِ اختبارِ معنويّةِ الفروقِ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ، نُطبّقُ خطواتِ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ.

يَتِمُّ تنظيمُ جدولٍ بالبياناتِ التّي سُجّلت عن مُتوسّطاتِ كميّاتِ القمحِ فِي كلِّ وحدةٍ تجريبيّةٍ على الشّكلِ الآتي:

جدول (5−4): كميّاتُ القمحِ النّاتجةِ من تطبيقِ خمسةِ أصنافٍ منَ السّمادِ بتصميم (CRD).

مُتوسّط المعاملاتِ ($\bar{y}_{i\bullet}$)	مجاميعُ المعاملاتِ ($y_{i\bullet}$)	المشاهداتُ (yij)				الأصنافُ
$\bar{y}_{1\bullet}$=42	$y_{1\bullet} = 16$	y_{14} 40	y_{13} 42	y_{12} 40	y_{11} 46	t_1
$\bar{y}_{2\bullet}$=47	$y_{2\bullet} = 188$	Y_{24} 42	Y_{23} 47	Y_{22} 48	Y_{21} 51	t_2
$\bar{y}_{3\bullet}$=42	$y_{3\bullet} = 168$	Y_{34} 46	Y_{33} 44	Y_{32} 42	Y_{31} 36	t_3
$\bar{y}_{4\bullet} = 43$	$y_{4\bullet} = 172$	Y_{44} 43	Y_{43} 45	Y_{42} 42	Y_{41} 42	t_4
$\bar{y}_{5\bullet} = 36$	$y_{5\bullet} = 144$	Y_{54} 36	Y_{53} 37	Y_{52} 36	Y_{51} 35	t_5
المُتوسّطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 42$	المجموعُ الكلّيُّ $y_{\bullet\bullet} = 840$	عددُ المشاهداتِ الكلّيِّ $N = \sum r_i = 20$				

1- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$) مُتوسّطاتُ أصنافِ السّمّادِ الخمسةِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ أصنافِ السّمّادِ).
- **الفرضُ البديلُ:** (H_1) مُتوسّطاتُ أصنافِ السّمّادِ الخمسةِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويينِ).

2- تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّباينُ (AVOVA TABLE):

يَتِمُّ حسابُ القيمِ التّفصيليّةِ لتحليلِ التّباينُ كَمَا يلِي:

1- حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{tr} = \frac{(\sum y_{ij})^2}{tr} = \frac{(840)^2}{5\times4} = 35280$$

2- حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF = ((46)^2 + (40)^2 + \dots\dots(36)^2) - 35280$$

$$= 35658 - 35280 = 378$$

3- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ (Sum Square of Treatments-SSTr):

$$SSTr = \frac{\sum_{i=1}^{t}(y_{i\bullet})^2}{r} - CF = \frac{(168)^2 + (188)^2 + \dots\dots + (144)^2}{4} - 35280$$

$$= 35528 - 35280 = 248$$

4- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (Sum Square of Error -SSE):

$$SSE = SSTO - SSTr = 378 - 248 = 130$$

5- حسابُ درجاتِ الحرّيّةِ (Degree of Freedom-df) لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّبايُنِ هوَ مبيّنٌ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (5-6).

جدول (5-6): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأصنافِ السّمادِ الخمسةِ بتصميم (CRD).

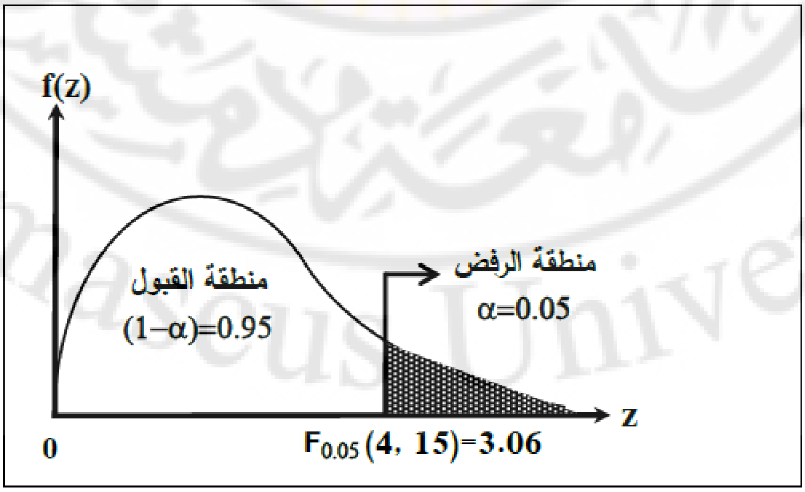
مصادرُ التّبايُنِ **Source of Variance (S.O.V)**	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافات **Sum of squares (SS)**	درجاتُ الحرّيّةِ **df**	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّباين) **Mean squares (MS)**	F (المحسوبة) **Calculated**	F (الجدوليّة) **Tabulated**
بينَ المعالجاتِ **Treatments**	**SSTr=248**	t-1=4	$MSTr=\frac{248}{4}=62$	$F_C=\frac{MSTr}{MSE}=\frac{62}{8.67}=7.15$	**$F_{0.05\,(4,\,15)}=3.06$**
الأخطاءُ التّجريبيّةُ **(Experimental Error)**	**SSE=130**	t(r-1)=15	$MSE=\frac{130}{15}=8.67$		
المجموعُ **Total**	**SSTO = SSTr+ SSE=378**	tr-1=19			

3- حساب قيمةِ إحصائيةِ الاختبارِ: يَتِمُّ حسابُ إحصائيةِ الاختبارِ (أو F المحسوبةِ) من المعادلةِ:

$$F_C=\frac{MSTr}{MSE}=\frac{62}{8.67}=7.15$$

4- تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ من جدولِ توزيعِ F بدرجاتِ حرّيّةٍ(t-1) للبسطِ وللمقامِ t(r-1) وبمستوى معنويّةٍ (α=0.05) أي استخراجُ قيمةِ $F_t=F_\alpha(t-1,tr-t)=F_{0.05}(4,15)=3.06$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالشّكلِ (5-3).



شكل (5-3): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ للمثالِ (5-1).

5- **المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:** بما أنَّ قيمةَ (F_c=7.15) المحسوبةِ من إحصاءةِ الاختبارِ أكبرَ من قيمةِ (F_t=3.06) الجدوليّةِ فإنَّ القرارَ برفضِ الفرضِ العدميِّ أي يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غير متساويان.

ثانياً: جدولٌ بالأخطاءِ التّجريبيّةِ لكلِّ وحدةٍ تجريبيّةٍ.

يَتِمُّ حسابُ الأخطاءِ وفقَ المعادلةِ التّاليةِ $e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}$

وتدوينُ الأخطاءِ بالجدولِ (5-7).

جدول (5-7): جدولٌ بالأخطاءِ التّجريبيّةِ للوحداتِ التّجريبيةِ لأصنافِ السّمادِ الخمسةِ بتصميمِ (CRD).

الأصنافُ	المشاهداتُ (yij)				مجاميعُ المعاملاتِ ($y_{i\bullet}$)	مُتوسّطُ المعاملاتِ ($\bar{y}_{i\bullet}$)
t_1	y_{11} 46 4	y_{12} 40 -2	y_{13} 42 0	y_{14} 40 -2	$y_{1\bullet} = 16$	$\bar{y}_{1\bullet}$=42
t_2	Y_{21} 51 4	Y_{22} 48 1	Y_{23} 47 0	Y_{24} 42 -5	$y_{2\bullet} = 188$	$\bar{y}_{2\bullet}$=47
t_3	Y_{31} 36 -6	Y_{32} 42 0	Y_{33} 44 2	Y_{34} 46 4	$y_{3\bullet} = 168$	$\bar{y}_{3\bullet}$=42
t_4	Y_{41} 42 -1	Y_{42} 42 -1	Y_{43} 45 2	Y_{44} 43 0	$y_{4\bullet} = 172$	$\bar{y}_{4\bullet} = 43$
t_5	Y_{51} 35 -1	Y_{52} 36 0	Y_{53} 37 1	Y_{54} 36 0	$y_{5\bullet} = 144$	$\bar{y}_{5\bullet} = 36$
	عددُ المشاهداتِ الكلّي $N = \sum r_i = 20$				المجموعُ الكلّي $y_{\bullet\bullet} = 840$	المُتوسّطُ العام $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 42$

SSE = مجموعُ مُربّعاتِ انحرافاتِ الأخطاءِ التّجريبيّةِ لكلِّ وحدةٍ تجريبيّةٍ.

$$SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 = (16+4+0+4) + (16+1+0+25) + \cdots$$
$$+(1+0+1+0) = 130$$

وهوَ نفسُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ الذّي حُسبَ سابقاً.

5-5- استخدامُ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ فِي حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ

Completely Randomized Design with Unequal Replications

فِي بعضِ الحالاتِ يكونُ منَ الصّعبِ أو من غيرِ الممكنِ إجراءُ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ بعددٍ متساوٍ منَ التّكراراتِ لجميعِ المعاملاتِ، وقد يعودُ السّببُ فِي ذلكَ إلى محدوديّةِ الوحداتِ التّجريبيّةِ، أو تلفُ بعضِ الوحداتِ التّجريبيّةِ خلالَ تنفيذِ التّجربةِ. ويمتازُ التّصميمُ تامُّ العشوائيّةِ بإمكانيّةِ تطبيقهِ فِي حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

5-5-1- تخطيطُ التّجربةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتصميمِ التّجاربِ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD) فِي حالةِ عدمِ تساوي التّكراراتِ لكلِّ معاملةٍ، بفرضِ أنَّه يوجدُ أربعُ معالجاتٍ (t=4) ويرمزُ لأسمائها بالرّموزِ (A, B, C, D) ويُرادُ تطبيقها على الوحداتِ التّجريبيّةِ التّي عددها (24) وحدة مرقّمة من (1-24).

وإذا كانَ المطلوبُ تخصيصُ (7 وحداتٍ تجريبيّةٍ) للمعالجةِ الأولى (A)، و(5 وحداتٍ تجريبيّةٍ) للمعالجةِ الثّانيةِ (B)، و (8 وحداتٍ تجريبيّةٍ) للمعالجةِ الثّالثةِ (C)، و (4 وحداتٍ تجريبيّةٍ) للمعالجةِ الرّابعةِ (D)، بشرطِ أن يَتِمَّ توزيعُ المعالجاتِ على الوحداتِ التّجريبيّةِ بشكلٍ عشوائيٍّ تامٍّ فيكونُ تخطيطُ التّجربةِ كَمَا بالشّكلِ (5-4).

1 C	2 A	3 B	4 A	5 A	6 A
7 B	8 C	9 C	10 D	11 C	12 B
13 B	14 D	15 A	16 B	17 C	18 D
19 C	20 A	21 C	22 D	23 C	24 A

شكل (5-4): تخطيطُ تجربةٍ بـ أربعِ معاملاتٍ وعدمُ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ بتصميمِ (CRD).

5-5-2- تنظيمُ البياناتِ:

بعدَ تصميمِ التّجربةِ وتنفيذها والانتهاءِ منها يكونُ لدينا عددٌ $r=\sum_{i=1}^{t} r_i$ منَ المشاهداتِ (y_{ij}) تُنظَّمُ فِي جدولٍ مثلَ الجدولِ فِي حالةِ تساوي المكرّراتِ، ثمَّ يَتِمُّ حسابُ المقاديرِ فِي جدولِ تحليلِ التّباينِ بالطّريقةِ نفسها فِي حالةِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ معَ وجودِ بعضِ التّعديلاتِ فمثلاً عندَ حسابِ

درجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيِّ يَتِمُّ حسابها وفقَ المعادلةِ التّاليةِ: $(dfE = \sum r_i - t)$ أمّا فِي حالةِ تساوي المكرّراتِ كانت تُحسبُ ((t(r-1)).

كذلكَ يمكنُ حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ (SS) لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّباين إمّا باستخدامِ المُتوسّطاتِ(Means) أو باستخدامِ المجاميعِ (Summations) كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدولِ (5−8).

جدول (5−8): طرائقُ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لتصميم (CRD) فِي حالةِ عدمِ تساوي التّكراراتِ.

	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ SS	
مصادرُ التّباين S.O.V	باستخدامِ المُتوسّطاتِ $(Means)$	باستخدامِ المجاميعِ $(Summations)$
Treatments المعاملاتُ	$SSTr = \sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$SSTr = \sum_{i=1}^{t} \frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i} - CF$
الخطأُ التّجريبيُّ Experimental Error	$SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$ SSE=SSTO- SSTr	$SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{t} \frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i}$ SSE=SSTO - SSTr
المجموعُ Total	$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF$

وبعدَ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ يَتِمُّ تنظيمُ جدولِ تحليلِ التّباينِ بالجدولِ رقم (5−9).

جدول (5−9): جدولُ تحليلِ التّباين (ANOVA Table) لتصميم (CRD) فِي حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

مصادرُ التّباين Source of Variance (S.O.V)	**مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ Sum of squares (SS)**	**درجاتُ الحرّيّةِ df**	**مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّباين) Mean squares (MS)**	**F (المحسوبة) Calculated**	**F (الجدوليّة) Tabulated**
بينَ المعالجاتِ Treatments	$SSTr = \sum_{i=1}^{t} \frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i} - CF$	t-1	$MSTr = \frac{SSTr}{t-1}$	$F_C = \frac{MSTr}{MSE}$	$\mathbf{F}_{\alpha\,(t-1,\, dfE)}$
الأخطاءُ التّجريبيّةُ (Experimental Error)	**SSE= SSTO - SSTr**	$\sum r_i - t$	$MSE = \frac{SSE}{\sum r_i - t}$		
المجموعُ Total	$SSTO = \sum\sum Y_{ij}^2 - CF$	$\sum r_i - 1$			

مثال (5-2):

نُفّذت تجربةٌ لتقييمِ خمسةِ أنواعِ منَ العلائقِ العلفيّةِ (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) على الزّيادةِ بالوزنِ لمجموعةِ عجولٍ متجانسةٍ بالسّلالةِ والوزنِ والعمرِ (وحدات تجريبيّة متجانسة) أي أنّه تمَّ باستخدامِ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ، حيثُ تم تنفيذ التجربة بأن (t_1 طُبّقت على 3عجولٍ) و (t_2 طُبّقت على 4عجولٍ) و (t_3 طُبّقت على 3عجول)، و (t_4 طُبّقت على 4عجولٍ) و (t_5 طُبّقت على 3عجولٍ). وتمَّ تسجيلُ نتائجِ الزّيادةِ بالوزنِ وتنظيمها بالجدولِ (5-10).

جدول (5-10): أوزانُ العجولِ النّاتجةِ من تطبيقِ خمسِ علائقَ علفيّةٍ بتصميمِ (CRD).

العيّناتُ أو الأصنافُ	المشاهداتُ (y_{ij})				مجاميعُ المعاملاتِ ($y_{i\bullet}$)	عددُ التّكراراتِ (r_i)
t_1	2	4	3	……	$y_{1\bullet} = 9$	3
t_2	7	7	6	4	$y_{2\bullet} = 24$	4
t_3	2	3	4	……	$y_{3\bullet} = 9$	3
t_4	10	11	9	12	$y_{4\bullet} = 42$	4
t_5	7	5	6	……	$y_{5\bullet} = 18$	3
عددُ المشاهداتِ الكلّي $N = \sum r_i = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 17$					المجموعُ الكلّي $y_{\bullet\bullet} = 102$	$\sum r_i = 17$

المطلوبُ:

1- تنظيمُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ وبيانُ اختبارِ المعنويّةِ بينَ أنواعِ العلائقِ الخمسِ عندَ مستوى (α=0.05).

الحلُّ:

1- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّة:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2= \mu_3=\mu_4=\mu_5$) مُتوسّطاتُ العلائقِ الخمسِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ العلائقِ).
- **الفرضُ البديلُ:** (H_1) مُتوسّطاتُ العلائقِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غيرَ متساويينِ).

2- تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

التّحليلُ الإحصائيُّ لبياناتِ التّجربةِ تتمُّ وفقَ الخطواتِ التّاليةِ:

1- حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{\sum r_i} = \frac{(102)^2}{17} = 612$$

2- حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكليّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO = \sum\sum y_{ij}^2 - CF = ((2)^2 + (4)^2 + (3)^2 \dots\dots (6)^2) - 612 = 764 - 612 = 152$$

3- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ (Sum Square of treatments-SSTr):

$$SSTr = \sum_{i=1}^{t} \frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i} - CF = \frac{(9)^2}{3} + \frac{(24)^2}{4} + \frac{(9)^2}{3} + \frac{(42)^2}{4} + \frac{(18)^2}{3} - 612 = 135$$

4- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيّ (Sum Square of Error -SSE):

$$SSE = SSTO - SSTr = 152 - 135 = 17$$

5- حسابُ درجاتِ الحرّيّةِ (Degree of Freedom-df) لكلِّ مصدرٍ من مصادرِ التّبايُنِ كَمَا هوَ مبيّنٌ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (5-11).

جدول (5-11): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) بتصميمِ (CRD) في حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

مصادرُ التّبايُنِ Source of Variance (S.O.V)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ Sum of squares (SS)	درجاتُ الحرّيّةِ df	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُن) Mean squares (MS)	F (المحسوبة) Calculated	F (الجدوليّة) Tabulated
بينَ المعالجاتِ Treatments	SSTr=135	t-1=4	$MSTr = \frac{135}{4} = 33.75$	$F_C = \frac{33.75}{1.42} = 23.77$	$F_{\alpha\,(4,\,12)}=3.26$
الأخطاءُ التّجريبيّةُ (Experimental Error)	SSE=17	$\sum r_i - t = 17 - 5 = 12$	$MSE = \frac{17}{12} = 1.42$		
المجموعُ Total	SSTO =152	$\sum r_i - 1 = 17 - 1 = 16$			

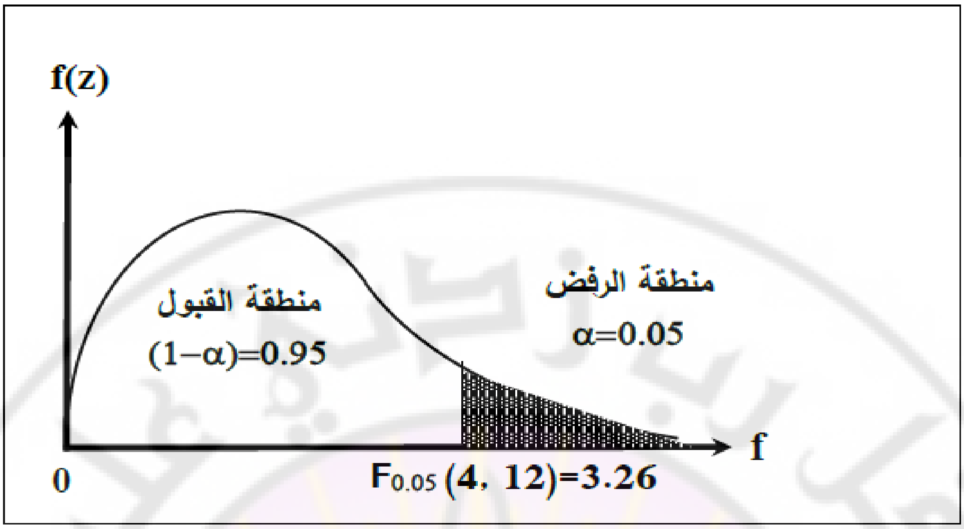
3- حسابُ قيمةِ إحصائيةِ الاختبارِ: يَتِمُّ حسابُ قيمةِ الإحصائيّةِ (أو F المحسوبةِ) منَ المعادلةِ:

$$F_C = \frac{MSTr}{MSE} = 23.77$$

4- تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتيِّ القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ من جدولِ توزيعِ F بدرجاتِ حرّيّةٍ(t-1=4) للبسطِ وللمقامِ $\sum r_i - t = 17 - 5 = 12$ و بمستوى معنويّةٍ (α=0.05) أي استخراجُ قيمةِ

$F_t = F_{0.05}(4, 12) = 3.26$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالشّكلِ (5-5).



شكل (5-5): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتيِّ القبولِ والرّفضِ للمثالِ (5-2).

5- **المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:** بما أنَّ قيمةَ (F_C=23.77) المحسوبةِ من إحصاءةِ الاختبارِ أكبرَ من قيمةِ (F_t=3.03) الجدوليّةِ فإنَّ القرارَ برفضِ الفرضِ العدميِّ أي يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ للعلائقِ الخمسةِ غيرَ متساويانِ.

الفصلُ السّادسُ

الاختباراتُ المقترحة بعدَ إجراءِ التّجربةِ

(المقارنات المتعددة Multiple Comparisons)

الفصلُ السّادسُ

الاختباراتُ المقترحةُ بعدَ إجراءِ التّجربةِ

(المقارناتُ المُتعدّدةُ Multiple Comparisons)

6-1- مُقدّمة:

بعدَ تحليلِ التّبايُنِ وإجراءِ اختبارِ (F) إذا تبّينَ وجودُ اختلافاتٍ معنويّةٍ بينَ المعاملاتِ أي بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ، فإنّهُ مِنَ الطّبيعيِّ أنْ تبرُزَ بعضُ الأسئلةِ، مثلاً، بينَ أيٍّ مِنَ المُتوسّطاتِ توجدُ هذهِ الاختلافاتُ؟

هل مُتوسّطُ المعاملةِ الأولى يختلفُ عَن مُتوسّطِ المعاملةِ الثّانيةِ؟ وعَن مُتوسّطاتِ المعاملاتِ الأخرى؟ ومِن أجلِ الإجابةِ على مثلِ هذهِ الأسئلةِ توجدُ هناكَ اختباراتٌ تُسمّى بالاختباراتِ المقترحةِ بعدَ إجراءِ التّجربةِ (Tests Suggested after Experimentation)

6-2- الاختباراتُ المقترحةُ بعدَ إجراءِ التّجربةِ (المقارناتُ المُتعدّدةُ):

تُسمّى أيضاً اختبارات معرفةِ الفروقِ المعنويّةِ بينَ المعالجاتِ (Test of Significant)، وهيَ الاختباراتُ التّي تُطبّقُ بعدَ إجراءِ التّجربةِ لمعرفةِ معنويّةِ الاختلافاتِ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ وذلكَ عندَ إجراءِ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ واختبارِ (F) ومعرفةِ هلِ المعالجات المستخدمة بينها فروقٌ معنويّةٌ أم لا؟ ويَتِمُّ ذلكَ باتّباعِ الآتي:

1- إذا كانتْ نتيجةُ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ بقبولِ الفرضِ العدمِ أي أنّهُ لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ فهنا ينتهي التّحليلُ وتُثبّتُ نتائجهُ، علماً أنّهُ بعضُ الآراءِ توصِي بإجراءِ اختباراتِ معرفةِ الفروقِ المعنويّةِ بينَ المعالجاتِ بغضِ النّظرِ عَن معنويّةِ أو عدمِ معنويّةِ اختبارِ (F).

2- أمّا إذا كانتْ نتيجةُ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ رفضَ الفرضِ العدمِ وقبولَ الفرضِ البديلِ أي أنَّ هناكَ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ حسبَ اختبارِ (F) فيكونُ الهدفُ معرفةَ الفروقِ المعنويّةِ موجودةٌ بينَ أيِّ معاملةٍ وأخرى، ويَتِمُّ ذلكَ عادةً بمقارنةِ المُتوسّطاتِ الحسابيّةِ للمعاملاتِ ويحدّدُ بينَ أيِّ مُتوسّطٍ حسابيٍّ وأخر كانَ هذا الفرقُ وفِي هذهِ الحالةِ يَتِمُّ إجراءُ مقارناتٍ تُسمّى بالمقارناتِ

المُتعدّدةِ (Multiple Comparisons) أو المقارناتِ الثّنائيّةِ وهناكَ الكثيرُ مِنَ الطّرقِ الإحصائيّةِ لإجراءِ مثلِ هذهِ المقارناتِ والتّي تُجرى بعدَ إجراءِ التّجربةِ و مِن أشهرِ طرقِ المقارناتِ المُتعدّدةِ للمعاملاتِ هيَ:

- اختبارُ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ (*Least Significant Difference – LSD*):
- اختبارُ دنكن مُتعدّد الحدودِ(*Duncan's Multiple Range Test*).
- اختبارُ توكي (*Tukey's* Test)
- اختبارُ شيفي (*Scheffe's Test*)

6-3- طريقةُ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ (Least Significant Difference – LSD):

تعتبرُ طريقةُ (LSD) الأكثر استخداماً لأنّها أفضلُ طريقةٍ لإجراءِ المقارناتِ المُتعدّدةِ البعديّةِ أو الثّنائيّةِ (Comparisons Pairwise) وذلكَ لسهولةِ إجرائها ثمَّ لدقتها فِي الوصولِ إلى النّتائجِ الصّحيحةِ، وهيَ تعتمدُ بشكلٍ رئيسيٍّ على اختبارِ (t) لمقارنةِ مُتوسطي عينتينِ مستقلتينِ.

6-3-1- خطواتُ تطبيقِ اختبارِ (LSD):

بعدَ إنشاءِ جدولِ تحليلِ التّباينُ (ANOVA Table) وحسابِ إحصائيّةِ الاختبارِ $F_c = \frac{MSt}{MSE}$، إذا كانتْ (F_c)غيرُ معنويّةٍ (قبولُ فرضِ العدمِ بأنَّ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ متساويةٌ) نتوقّفُ عندَ هذا الحدِّ أمّا إذا كانتْ (F_c) معنويّةٌ (رفضُ فرضِ العدمِ أي المُتوسّطاتُ غير متساويةٍ) فسوفَ نقارنُ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ.

← فِي حالةِ عدمِ تساوي عدد التّكراراتِ لكُلِّ المعاملاتِ:

فِي حالةِ عدمِ تساوي التّكراراتِ لكُلِّ المعاملاتِ فسوفَ تختلفُ قيمةُ (LSD) حسبَ تكراريِّ المعاملتينِ المرادُ مقارنة مُتوسّطاتهما، حيثُ يَتِمُّ حسابُ قيمةِ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ (LSD) لكُلِّ زوجٍ مِن مُتوسّطاتِ المعاملاتِ بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$LSD_{ij} = t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right)} \qquad if \quad r_i \neq r_j$$

- حيثُ إنَّ الحدَّ $S_{(\bar{Y}_i - \bar{Y}_j)} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right)}$ يمثّلُ الخطأَ المعياريَّ (أو الانحرافَ المعياريَّ) للفرقِ بينَ مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $(\bar{Y}_i,\ \bar{Y}_j)$.
- والحدَّ $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)}$ يمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (t) وفقاً لمستوى المعنويّةِ (α/2) و درجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (df_e).

خطواتُ تطبيقِ المقارناتِ باستخدامِ (LSD):

- يَتِمُّ ترتيبُ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots . \bar{Y}_t)$ تصاعديّاً.
- نوجدُ أقلَّ فرقٍ معنويٍّ (LSD_{ij}) لكُلِّ زوجين مِنَ المُتوسّطاتِ.
- ثمَّ نحسبُ القيمةَ المطلقةَ للفرقِ بينَ كُلِّ مُتوسّطين $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|$
- نقارنُ كُلَّ قيمةٍ مطلقةٍ للفرقِ بينَ مُتوسّطينِ $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|$ معَ القيمةِ (LSD_{ij}) المقابلةِ لها.
- إذا كانَ $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| \leq LSD_{ij}$ هذا يعني عدم وجودِ فرقٍ معنويٍّ بينَ المُتوسّطينِ $(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j)$.
- أمَا إذا كانَ $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| > LSD_{ij}$ فهذا يعني وجود فرقٍ معنويٍّ بينَ مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j)$ وبالتّالي يَتِمُّ رفضُ الفرضِ العدمِ بأنَّ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ متساويةٌ وقبولُ الفرضِ البديلِ بأنّهُ يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غير متساويان.

➔ **فِي حالةِ تساوي عدد التّكراراتِ لكُلِّ المعاملاتِ:**

فِي حالةِ تساوي عدد التّكراراتِ لكُلِّ المعاملاتِ $(r_1 = r_2 = \cdots\cdots r_t = r)$ تكونُ هناكَ قيمةٌ واحدةٌ للـ (LSD) فقط نقارنُ بها كُلَّ الفروقِ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ وتحسبُ بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$LSD = t_{(\frac{\alpha}{2},\ dfe)}\sqrt{\frac{2MSE}{r}} \qquad if \quad r_i = r_j \dots = r_t = r$$

ثمَّ يَتِمُّ اتّباعُ نفسِ الخطواتِ السّابقةِ لإجراءِ المقارناتِ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ.

مثال (6-1):

أجريَتْ تجربةٌ لدراسةِ تأثيرِ خمسةِ أنواعٍ مِنَ العلائقِ فِي معدّلِ الزّيادةِ الوزنيّةِ لدى العجولِ وقد شملتْ كُلُّ معاملةٍ خمسِ عجولٍ (تكراراتٍ) وتمَّ قياسُ أوزانِ العجولِ وتنظيمها فِي الجدولِ (6-1).

جدول (6-1): أوزانُ العجولِ لخمسةِ علائقَ بتصميمِ (CRD).

المعاملةُ	المشاهداتُ او التّكراراتُ معدّلُ الزّيادةِ الوزنيّةِ (y_{ij})					مجاميع المعاملاتِ $(y_{i\bullet})$	مُتوسّطُ المعاملاتِ $(\bar{y}_{i\bullet})$
treat.	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5		
t_1	6	10	7	3	10	$y_{1\bullet} = 36$	$\bar{y}_{1\bullet}$=7.2
t_2	9	8	11	11	10	$y_{2\bullet} = 49$	$\bar{y}_{2\bullet}$=9.8
t_3	7	5	5	9	4	$y_{3\bullet} = 30$	$\bar{y}_{3\bullet}$=6
t_4	5	3	4	6	6	$y_{4\bullet} = 24$	$\bar{y}_{4\bullet} = 4.8$
t_5	8	6	9	9	11	$y_{5\bullet} = 43$	$\bar{y}_{5\bullet} = 8.6$
						المجموعُ العامُّ $y_{\bullet\bullet} = 182$	المُتوسّطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 7.28$

المطلوبُ:

1- كوّنْ جدولَ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table)

2- اختبِرْ فرضَ تساوي مُتوسّطاتِ العلائقِ العلفيّةِ الخمسِ عندَ مستوى (α=0.05).

3- قمْ بإجراءِ المقارناتِ المُتعدّدةِ (الثّنائيّةِ) بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ باستخدامِ طريقةِ أقلّ فرقٍ معنويٍّ (LSD) ثمّ علّق على النّتائجِ التّي حصلتَ عليها.

الحلُّ: التّحليلُ الإحصائيُّ لبياناتِ التّجربةِ تَتِمُّ وفقَ الخطواتِ التّاليةِ:

4- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- **الفرضُ العدميُّ**: (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$) مُتوسّطاتُ العلائقِ الخمسِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ العلائقِ).
- **الفرضُ البديلُ**: (H_1) مُتوسّطاتُ العلائقِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غير متساويين).

5- تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

تكونُ الحساباتُ التّفصيليّةُ لتحليلِ التّبايُنِ كَمَا يلِي:

1- حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{tr} = \frac{(\sum y_{ij})^2}{tr} = \frac{(182)^2}{5\times5} = 1324.96$$

2- حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO = \sum\sum y_{ij}^2 - CF = ((6)^2 + (10)^2 + \dots\dots(11)^2) - 1324.96 = 157.04$$

3- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ (Sum Square of treatments-SSt):

$$SSTr = \frac{\sum_{i=1}^{t}(y_{i\bullet})^2}{r} - CF = \frac{(36)^2+(49)^2+\dots..+(43)^2}{5} - CF = 1404.4 - 1324.96 = 79.44$$

4- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (Sum Square of Error -SSE):

$$SSE = SSTO - SSTr = 157.04 - 79.44 = 77.6$$

5- حسابُ درجاتِ الحرّيّةِ (Degree of Freedom-df) لكُلِّ مصدرٍ مِن مصادرِ التّبايُنِ كَمَا هوَ موضّحٌ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقمِ (6-2).

جدول (6-2): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأوزانِ العجولِ بتصميمِ (CRD).

مصادرُ التّبايُنِ Source of Variance (S.O.V)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ Sum of squares (SS)	درجاتُ الحرّيّةِ df	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُن) Mean squares (MS)	F (المحسوبةُ) Calculated	F (الجدوليّةُ) Tabulated
بينَ المعالجاتِ Treatments	**SSTr=79.44**	t-1=4	$MSTr = \frac{79.44}{4} = 19.86$	$F_C = \frac{MSTr}{MSE}$	2.87

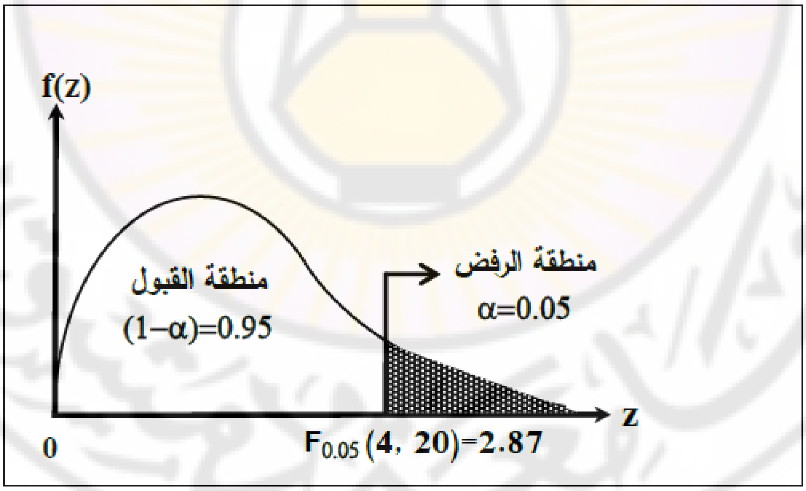
الأخطاءُ التّجريبيّة (Experimental Error)	**SSE=77.6**	t(r-1)=20	$MSE = \frac{77.6}{20} = 3.88$	$= \frac{19.86}{3.88} = 5.11$	
المجموعُ Total	**SSTO = SSTr + SSE=157.04**	tr-1=24			

6- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ: يَتِمُّ حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ (أو Fc المحسوبة) مِنَ المعادلةِ:

$$F_C = \frac{MSTr}{MSE} = 5.11$$

4- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ مِن جدولِ توزيعِ F بدرجاتِ حرّيّة(t-1) للبسطِ وللمقامِ t(r-1) وبمستوى معنويّة (α=0.05) أي استخراجُ قيمة $F_t = F_\alpha(t-1, tr-t) = F_{0.05}(4, 20) = 2.8$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالشّكلِ (6−1).



شكل (6−1): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (6−1).

5- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بما أنَّ قيمةَ (F_c=5.11) المحسوبة مِن إحصائيّةِ الاختبارِ أكبرُ مِن قيمةِ (F_t=2.87) الجدوليّةِ فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ العدميِّ أي يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غير متساويين.

- **إجراءُ اختبارِ (LSD):**

(r=5), MSE = 3.88 وقيمةُ t الجدوليّةِ تساوي $t_{(\frac{\alpha}{2},\ dfe)} = t_{(0.025,\ 20)} = 2.086$

$$LSD = \sqrt{\frac{2 \times MSE}{r}} \times t = \sqrt{\frac{2 \times (3.88)}{5}} \times 2.086 = 2.59$$

الآن نأخذُ الفرقَ بينَ مُتوسّطيِّ كُلِّ معاملتينِ ونقارنهُ معَ قيمةِ LSD فإذا كانَ الفرقُ بينَ المُتوسّطينِ معنويّ نضعُ جنبها إشارةَ (*)، وإذا كانَ الفرقُ غيرَ معنويّ لا نضعُ أيَّ إشارةٍ، ويَتِمُّ تصميمُ الجدولِ (6−3) الذّي يعكسُ الفروقَ بينَ المُتوسّطاتِ وإشارة (*) تدلُّ على الفرقِ المعنويِّ.

جدول (6−3): مقارنةُ مُتوسّطاتِ العلائقِ الخمسِ باستخدامِ (LSD).

LSD = 2.59	t_4= 4.8	t_3=6.0	t_1=7.2	t_5=8.6
t_2=9.8	5*	3.8*	2.6*	1
t_5=8.6	3.8*	2.6*	1.6	
t_1=7.2	2.4	1.2		
t_3=6.0	1.2			

مثلاً الفرقُ بينَ مُتوسّطِ المعاملتينِ t_2 و t_3 يكون9.8-6.0=3.8 وبما أنَّ 3.8 أكبرَ مِن 2.239 لذلكَ فإنَّ الفرقَ معنويٌّ بينَ مُتوسّطيِّ المعاملةِ الثّانيةِ والثّالثةِ لذلكَ نضعُ إشارةَ (*)، وكذلكَ بِما أنَّ الفرقَ بينَ مُتوسّطِ المعاملةِ الأولى (t_1=7.2) ومُتوسّطِ المعاملةِ الثّالثةِ (t_3=6) يساوي (1.2) إذاً الفرقُ غير معنويٍّ لأنّه أقلُّ مِن قيمةِ (LSD=2.239) وبالتّالي لا نضعُ إشارةَ النّجمةِ (*).

6−4− اختبارُ دنكن مُتعدّدُ الحدودِ (Duncan's Multiple Range Test (DMRT)).

وُجِدَ هذا الاختبارُ عامَ 1955 مِن قبلِ الباحثِ Duncan ويتميّزُ هذا الاختبارُ عَن باقي الاختباراتِ بِما يلِي:

1) يختبرُ الفروقَ المعنويّةَ بينَ المُتوسّطاتِ مهما كانَ عددها مرّةً واحدةً.
2) اختبارُ الفرقِ بينَ كُلِّ مُتوسّطينِ بالمقارنةِ معَ قيمةٍ معياريّةٍ خاصّةٍ بهما.
3) يمكنُ إجراءه بصرفِ النّظرِ عَن معنويّةِ أو عدمِ معنويّةِ اختبارِ تحليلِ التّباينِ F.

فِي هذا الاختبارِ وضعَ العالمُ Duncan جداولَ إحصائيّةٍ خاصّةٍ سمّاها جداولَ دنكن أو جداولَ (Student zed Significant Range-SSR) وذلكَ لإيجادِ قيمةِ هذا الاختبارِ الذّي يُطلقُ عليه قيمة أقلِّ مدىً معنويٍّ (Least Significant Rang - LSR)

6−4−1− خطواتُ إجراءِ اختبارِ دنكن مُتعدّدُ الحدودِ (DMRT):

1) حسابُ الخطأِ المعياريِّ (أو الانحرافِ المعياريِّ) لأيِّ مُتوسّطِ معاملةٍ كَمَا يأتِي:

• فِي حالةِ تساوي كُلِّ المكرّراتِ لِكُلِّ المعاملاتِ $(r_1 = r_2 = \cdots\cdots r_t = r)$

$$S_{\bar{Y}_i} = \sqrt{\frac{MSE}{r}}$$

• أمّا فِي حالةِ عدمِ تساوي كُلِّ المكرّراتِ لِكُلِّ المعاملاتِ يَتِمُّ حسابُ المُتوسّطِ التّوافقيِّ لتكراراتِ المعاملاتِ مِنَ المعادلةِ التّاليةِ:

$$r = \frac{t}{\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{1}{r_i}\right)}$$

2) استخراجُ قيمِ SSR مِن جداول دنكن ذلكَ حسبَ مستوى المعنويّةِ و عددَ المُتوسّطاتِ الدّاخلةِ فِي المقارنةِ ودرجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيّ $SSR(\alpha, p, df_E)$. حيثُ (P) يمثّلُ عددَ المُتوسّطاتِ الدّاخلةِ بالمقارنةِ، و (df_E) درجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيّ فِي جدولِ أنوفا.

3) حسابُ قيمِ LSR وهيَ تمثّلُ أقلَّ مدىً معنويٍّ وتنتجُ مِن حاصلِ ضربِ SSR فِي الخطأِ القياسيِّ كَمَا يلِي: $LSR = \sqrt{\frac{MSE}{r}} \times SSR$

4) يَتِمُّ ترتيبُ المُتوسّطاتِ وقيمِ LSR تنازليّاً وبشكلٍ عموديٍّ وكذلكَ ترتيبُ المُتوسّطاتِ تصاعديّاً وبشكلٍ أفقيٍّ. بعدَ ذلكَ نأخذُ الفرقَ بينَ كُلِّ مُتوسّطينِ ونقارنهُ بقيمةِ LSR المقابلةِ لهما، فإذا كانتْ قيمةُ الفرقِ بينَ المُتوسّطينِ أعلى مِن قيمةِ LSR يكونُ الفرقُ بينَ المُتوسّطينِ معنوي ، أمّا إذا كانَ الفرقُ أقلَّ مِن الـ LSR فهوَ غيرُ معنويٍّ.

مثال (6−2):

قمْ بتطبيقِ المقارناتِ البعديّةِ (الثّنائيّةِ) بينَ مُتوسّطاتِ أصنافِ العلائقِ الخمسِ باستخدامِ طريقةِ دنكان (DMRT) على المثالِ السّابقِ (6−1) معَ الاستنتاجاتِ.

جدول (6−4): أوزانُ العجولِ لخمسِ علائقَ بتصميمِ (CRD) فِي حالةِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

المعاملة	المشاهداتُ او التّكراراتُ معدّلُ الزّيادةِ الوزنيّةِ (y_{ij})					مجاميع المعاملاتِ $(y_{i\bullet})$	مُتوسّطُ المعاملاتِ $(\bar{y}_{i\bullet})$
treat.	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5		
t_1	6	10	7	3	10	$y_{1\bullet} = 36$	$\bar{y}_{1\bullet} = 7.2$
t_2	9	8	11	11	10	$y_{2\bullet} = 49$	$\bar{y}_{2\bullet}=9.8$
t_3	7	5	5	9	4	$y_{3\bullet} = 30$	$\bar{y}_{3\bullet}=6$
t_4	5	3	4	6	6	$y_{4\bullet} = 24$	$\bar{y}_{4\bullet}=4.8$
t_5	8	6	9	9	11	$y_{5\bullet} = 43$	$\bar{y}_{5\bullet}=8.6$
						المجموعُ العامُّ $y_{\bullet\bullet} = 182$	المُتوسّطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 7.28$

حسابُ الخطأِ المعياريِّ للمُتوسّطاتِ مِن جدولِ (ANOVA) الذّي يساوي:

$$S_{\bar{Y}_i} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{3.88}{5}} = 0.88$$

يَتِمُّ استخراجُ قيمِ SSR مِن جداولِ دنكان وفقاً لـ $SSR(\alpha, p, df_E) = SSR(0.05, 5, 20)$ وتدوينها بالجدولِ (6−5).

جدول (6−5): حسابُ قيمِ LSR لمُتوسّطاتِ العلائقِ الخمسِ.

	α=0.05			
عددُ المُتوسّطاتِ	2	3	4	5
SSR	**2.95**	**3.09**	**3.19**	**3.25**
$\sqrt{\frac{MSE}{r}}$	0.88			
LSR	2.59	2.71	2.80	2.86

نلاحظُ أنَّ قيمَ LSR فِي الجدولِ ناتجةٌ مِن ضربِ قيمِ (SSR) في (0.88)

- ومِن أجلِ إجراءِ المقارناتِ الثّنائيّةِ نكوّنُ الجدولَ (6−6).

جدول (6−6): مقارنةُ مُتوسّطاتِ العلائقِ الخمسِ باستخدامِ (DMRT).

مُتوسّط المعاملاتِ تنازليّاً	قيمُ LSR تنازليّاً	t_4=4.8	t_3=6	t_1=7.2	t_5=8.6
t_2= 9.8	**2.86**	**5***	**3.8***	**2.6**	**1.2**
t_5= 8.6	**2.80**	**3.8***	**2.6**	**1.4**	
t_1= 7.2	**2.71**	**2.4**	**1.2**		
t_3= 6	**2.59**	**1.2**			

يتبيّنُ مِنَ الجدولِ (6−6) أنَّ الفرقَ بينَ مُتوسّطِ المعاملةِ الثّانيةِ (t_2=9.8) والمعاملةِ الرّابعةِ (t_4=4.8) هوَ (5.0) كَمَا موضّح فِي الجدولِ وهذهِ القيمةُ أعلى مِن قيمةِ LSR المقابلة لها (2.86) لذلكَ الفرقُ بينَ مُتوسّطيِّ المعاملتينِ الثّانيةِ والرّابعةِ معنويٌّ لِذا وُضعتِ الإشارةُ (*).

مثال (6−3): أجريتْ تجربةٌ بتصميمِ (CRD) لدراسةِ تأثيرِ أربعةِ أنواعٍ مِنَ العلائقِ العلفيّةِ على نموِّ الدّجاجِ، حيثُ استخدمَ الباحثُ خمسَ دجاجاتٍ متماثلةٍ (تكراراتٍ) لكُلِّ عليقةٍ، وتمَّ قياسُ وزنِ الدّجاجِ وتنظيمهِ بالجدولِ (6−7).

جدول (6−7): أوزانُ الدّجاجِ لأربعِ علائقَ بتصميمِ (CRD).

أنواعُ العلائقِ	المشاهداتُ او التكراراتُ معدّلُ الزّيادةِ الوزنيّةِ (y_{ij})					مجاميع المعاملاتِ ($y_{i\bullet}$)	مُتوسطُ المعاملاتِ ($\bar{y}_{i\bullet}$)
treat.	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5		
t_1	24	52	45	55	58	$y_{1\bullet} = 234$	$\bar{y}_{1\bullet} = 46.8$
t_2	92	115	64	66	33	$y_{2\bullet} = 370$	$\bar{y}_{2\bullet} = 74$
t_3	98	100	45	95	84	$y_{3\bullet} = 422$	$\bar{y}_{3\bullet} = 84.8$
t_4	88	150	172	157	162	$y_{4\bullet} = 729$	$\bar{y}_{4\bullet} = 145.8$
						المجموعُ العامُّ $y_{\bullet\bullet} = 1755$	المُتوسّطُ العامُّ $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 87.75$

المطلوبُ:

− هل يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ لتأثيرِ العليقةِ على نموِّ الدّجاجِ ؟

− طبّقِ اختبارَ الفروقِ المعنويّةِ بينَ مُتوسّطاتِ أصنافِ العلائقِ المستخدمةِ وفقَ اختبارِ دنكن (DMRT) و (LSD) معَ الاستنتاجاتِ وبيّنْ أيَّ نوعٍ مِنَ العلائقِ أكثر فعاليّةٍ عندَ مستوى 0.05؟

الحـل:

1− صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

الفرضُ العدميُّ: (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$) مُتوسّطاتُ العلائقِ الأربعِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ العلائقِ).

الفرضُ البديلُ :(H_1) مُتوسّطاتُ العلائقِ الأربعِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطين غير متساويين).

2− تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

تكونُ الحساباتُ التّفصيليةُ لتحليلِ التّبايُنِ كَمَا يلِي:

1− حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor −CF):

$$CF = \frac{y_{\bullet\bullet})^2}{tr} = \frac{(\sum y_{ij})^2}{tr} = \frac{(1755)^2}{5\times4} = 154001.3$$

2− حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total-SSTO):

$$SSTO = \sum\sum y_{ij}^2 - CF = ((24)^2 + (52)^2 + \ldots\ldots(162)^2) - 154001.3 = 37353.7$$

3- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ (Sum Square of treatments -SSTr):

$$SSTr = \frac{\sum_{i=1}^{t}(y_{i\bullet})^2}{r} - CF = \frac{(234)^2 + (370)^2 + \ldots + (729)^2}{5} - 154001.3 = 26235$$

4- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيّ (Sum Square of Error -SSE):

$$SSE = SSTO - SSTr = 37353.7 - 26235 = 11118.8$$

5- حسابُ درجاتِ الحرّيّة (Degree of Freedom-df) لكُلِّ مصدرٍ مِن مصادرِ التّبايُن.

$df_t = t - 1 = 4 - 1 = 3$

$df_T = (t \times r) - 1 = (4 \times 5) - 1 = 19$

$df_e = df_T - df_t = 19 - 3 = 16$

6- حسابُ التّباينات (Mean Square-MS) للمعاملاتِ والخطأِ التّجريبيّ.

$$MSTr = \frac{SSTr}{t-1} = \frac{26238}{3} = 8744.98$$

$$MSE = \frac{SSE}{t(r-1)} = \frac{11118.8}{16} = 694.9$$

1) يُعدُّ جدولِ تحليلِ التّبايُن Analysis of Variance (ANOVA Table)

بعدَ حسابِ القيمِ السّابقةِ يَتِمُّ تنظيمُ جدولِ تحليلِ التّبايُن بالجدولِ (8-6).

جدول (8-6): جدولُ تحليلِ التّبايُن (ANOVA Table) لأوزانِ الدّجاج بتصميم (CRD).

مصادرُ التّبايُن Source of Variance (S.O.V)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافات Sum of squares (SS)	درجاتُ الحرّيّة df	مُتوسّطُ المُربّعات (التّبايُن) Mean squares (MS)	F (المحسوبة) Calculated	F (الجدوليّة) Tabulated
بينَ المعاملاتِ (الأصناف) Treatments	**SSTr=26234.95**	t-1=3	$MSTr = \frac{26234.95}{3} = 8744.98$	$F_C = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{8744.98}{694.9} = 12.58$	$F_{\alpha\,(3,16)} = 3.24$
الأخطاءُ التّجريبيّةُ (Experimental Error)	**SSE=11118.8**	t(r-1)=16	$MSE = \frac{11118.8}{16} = 694.9$		
المجموعُ Total	**SSTO** = 37353.7	tr-1=19			

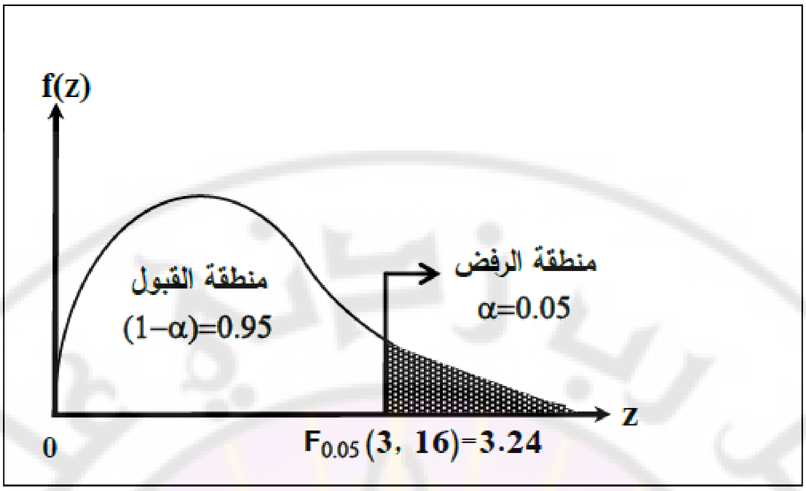
3- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبار: قيمةُ إحصائيّةِ الاختبارِ (أو F المحسوبة) هيَ:

$$F_C = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{8744.98}{694.9} = 12.58$$

4- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ F_t F الجدوليّةِ مِن جدولِ توزيعِ F بدرجاتِ حرّيّة(t-1) للبسطِ وللمقامِ t(r-1) وبمستوى معنويّة (α=0.05) أي استخراجُ قيمةِ

$F_t = F_\alpha(t-1, tr-t) = F_{0.05}(3,16) = 3.24$ كَمَا هوَ موضّحٌ بالشّكلِ (6-2).



شكل (6-2): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (6-3).

5- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بما أنَّ قيمةَ (F_c=12.58) المحسوبةِ مِن إحصائيّةِ الاختبارِ أكبرُ مِن قيمةِ (F_t=3.24) الجدوليّةِ فإنَّ القرارَ برفضِ الفرضِ العدميِّ أي يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ غير متساويان، أي يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ لتأثيرِ العليقةِ على نموِّ الدّجاجِ.

ثانياً: للإجابةِ على المطلبِ الثّاني للسّؤالِ يجبُ المقارنةُ بينَ مُتوسّطاتِ العلائقِ لمعرفةِ أيّها أكثر فعاليّة ولذلكَ نجري أحدَ المقارناتِ المُتعدّدةِ Multiple Comparisons وأهمّها:

أوّلاً: اختبارُ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ Least Significant Difference Test (LSD)

يَتِمُّ حسابُ قيمةِ .L.S.D عندَ تساوي عدد تكراراتِ جميعِ المعاملاتِ كَمَا يلِي:

$$LSD = \sqrt{\frac{2MSE}{r}} \times t$$

يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ t مِن جدولِ (t) بدلالةِ قيمةِ df_e فِي المحورِ العموديّ ومستوى المعنويّةِ فِي المحورِ الأفقيِّ كَمَا يلِي:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)} = t_{(0.025,\ 16)} = 2.12$$

$$LSD = \sqrt{\frac{2\times MSE}{r}} \times t = \sqrt{\frac{2\times(694.9)}{5}} \times 2.12 = 35.34$$

ثمَّ يُعدُّ جدولٌ للمقارنةِ بينَ المُتوسّطاتِ وترُتّبُ أسماءُ المعاملاتِ وفقَ مُتوسّطاتها تنازليّاً (مِنَ الأكبرِ إلى الأقلِّ قيمة) فِي المحورِ العموديِّ للجدولِ، وتصاعديّاً (مِنَ الأقلِّ إلى الأكبرِ قيمة) فِي المحورِ الأفقيِّ ثمَّ يُطرحُ كُلُّ مُتوسّطٍ فِي المحورِ العموديِّ مِنَ المُتوسّطاتِ فِي المحورِ الأفقيِّ لاستخراجِ الفرقِ بينهما، فإذا كانتْ قيمةُ الفرقِ أكبرَ مِن قيمةِ (LSD) فيوضَعُ نجمةٌ عليه (الفرقُ معنويٌّ) وهكذا باقي المعاملاتِ،

وتُعدُّ المعاملةُ الحائزةُ على أكبرِ عددٍ مِنَ النّجومِ هيَ الأفضلُ ويأتي بعدها الأقلُّ ثمَّ الأقلُّ كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدولِ (6−9).

جدول (6−9): مقارنةُ مُتوسّطاتِ العلائقِ الأربعِ باستخدامِ (LSD).

LSD = 35.34		مُتوسّطاتُ المعالجاتِ تصاعديّاً			
		$t_1= 46.8$	$t_2=74$	$t_3=84.4$	$t_4=145.8$
مُتوسّطاتُ المعالجاتِ	$t_4=145.8$	99*	71.8*	61.4*	00
	$t_3=84.4$	37.6*	10.4	00	
	$t_2=74$	27.2	00		
	$t_1=46.8$	00			

t4 = *** t3 = * t2 = *

إذاً تفوّقتْ معنوياً معاملةُ العليقةِ t_4 على باقي المعاملاتِ وأعطتْ أعلى مُتوسّطٍ فِي الزّيادةِ بالوزنِ بلغَ 145.8 بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ لمعاملةِ المقارنةِ التّي أعطتْ 46.8.

ثانياً: اختبارُ دنكن مُتعدّدُ الحدودِ Duncan Multiple Range Test (DMRT)

لتطبيقِ هذا الاختبارِ يجبُ حسابُ قيمِ أقلِّ مدىً معنويٍّ Least Significant Range (LSR) كَمَا يلِي:

$$LSR = S_{\bar{x}} \times SSR$$

الانحرافُ القياسيُّ لأيِّ مُتوسّطٍ (أو الخطأُ القياسيُّ) هوَ:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{694.9}{5}} = 11.79$$

يَتمُّ استخراجُ قيمةِ Studentized Significant Range (SSR) مِن جدولِ Duncan بدلالةِ قيمةِ df_e ومستوى الاحتماليّةِ فِي المحورِ العموديِّ وعددِ المُتوسّطاتِ فِي المحورِ الأفقيِّ وتُدوّنُ فِي الجدولِ (6−10).

جدول (6−10): حسابُ قيمِ LSR لمُتوسّطاتِ العلائقِ الأربعِ.

تسلسلُ المقارناتِ	2	3	4
SSR	3.00	3.15	3.23
$S_{\bar{x}}$	11.79		
LSR	35.37	37.14	38.08

ثمَّ يُعدُّ الجدولُ (6−11) للمقارنةِ بينَ المُتوسّطاتِ وتُرتّبُ أسماءُ المعاملاتِ وفقَ مُتوسّطاتها تنازليّاً (مِنَ الأكبرِ إلى الأقلِّ قيمة) فِي المحورِ العموديِّ للجدولِ وتصاعديّاً (مِنَ الأقلِّ إلى الأكبرِ قيمة) فِي المحورِ

الأفقيِّ معَ قيمِ LSR ثمَّ يُطرحُ كُلُّ مُتوسّطٍ فِي المحورِ العموديِّ مِنَ المُتوسّطِ فِي المحورِ الأفقيِّ لاستخراجِ الفرقِ بينهما، فإذا كانتْ قيمةُ الفرقِ أكبرَ مِن قيمةِ LSR فهذا يعني أنّه يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ المُتوسّطانِ وهكذا باقي المعاملاتِ.

جدول (6-11): مقارنةُ مُتوسّطاتِ العلائقِ الخمسة باستخدامِ (DMRT).

مُتوسّطُ المعاملاتِ تنازليّاً	قيمُ LSR تنازليّاً	t_1=46.8	t_2=74	t_3=84.4
t_4= 145.8	38.08	99*	71.8*	61.4*
t_3= 84.4	37.14	37.6*	10.4	
t_2= 74	35.37	27.2		

مثالٌ عَن تطبيقِ اختبارِ LSD و Duncan فِي حالة ِعدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

مثال (6-4): أُجريَت تجربةٌ حقليّةٌ باستخدام التصميم العشوائي الكامل(CRD) لدراسةِ تأثيرِ (5) أصنافٍ مِنَ السّمادِ (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) على إنتاجِ القمحِ، وتمَّ تسجيلُ كميات القمح الناتجة من تطبيق أصناف السماد وتنظيمها بالجدولِ(6-12).

جدول (6-12): كميات القمح بتصميم (CRD) في حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

الأصناف	المشاهداتُ (y_{ij})				مجاميعُ المعاملاتِ ($y_{i\cdot}$)	مُتوسّطاتُ المعاملاتِ($\bar{y}_{i\cdot}$)	عددُ التّكراراتِ (r_i)
t_1	37	39	41	……	$y_{1\cdot} = 117$	$\bar{y}_{1\cdot}$=39	3
t_2	51	48	47	42	$y_{2\cdot} = 188$	$\bar{y}_{2\cdot}$=47	4
t_3	46	44	42	……	$y_{3\cdot} = 132$	$\bar{y}_{3\cdot}$=44	3
t_4	42	42	45	43	$y_{4\cdot} = 172$	$\bar{y}_{4\cdot} = 43$	4
t_5	35	36	34	……	$y_{5\cdot} = 105$	$\bar{y}_{5\cdot} = 35$	3
عدد المشاهدات الكلي $N = \sum r_i = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 16$					المجموع الكلي $y_{\cdot\cdot} = 714$	المتوسط العام $\bar{y}_{\cdot\cdot} = 41.6$	$\sum r_i = 17$

المطلوبُ:

1- تنظيمُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ وبيانُ اختبارِ المعنويّةِ بينَ أصنافِ السمادِ عندَ مستوى (α=0.05).

2- إجراءُ اختبارِ الفروقِ المعنويّةِ بينَ أصنافِ السماد الخمسةِ وفقَ اختبارِ (LSD) واختبارِ دنكان.

مع العلم ان $\sum\sum y_{ij}^2 = 30344$

الحلُّ:

1- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$) مُتوسّطاتُ أصنافِ السماد الخمسةِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ العلائقِ).
- **الفرضُ البديلُ:** (H_1) مُتوسّطاتُ أصنافِ السماد غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غيرُ متساويينِ).

2- تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّباينُ (AVOVA TABLE):

التّحليلُ الإحصائيُّ لبياناتِ التّجربةِ تَتمُّ وفقَ الخطواتِ التّاليةِ:

6- حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF=\frac{(y_{\bullet\bullet})^2}{\sum r_i}=\frac{(714)^2}{17}=29988$$

7- حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO=\sum\sum y_{ij}^2-CF=((37)^2+(39)^2+(41)^2\dots\dots(34)^2)-29988=30344-29988=356$$

8- حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ (Sum Square of treatments-SSTr):

$$SSTr=\sum_{i=1}^{t}\frac{(y_{i\bullet})^2}{r_i}-CF$$

$$=\frac{(117)^2}{3}+\frac{(188)^2}{4}+\frac{(132)^2}{3}+\frac{(172)^2}{4}+\frac{(105)^2}{3}-29988$$

$$=30278-29988=290$$

4) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيّ (Sum Square of Error-SSE):

$$SSE=SSTO-SSTr=356-290=60$$

9- حسابُ درجاتِ الحرّيّةِ (Degree of Freedom-df) لكُلِّ مصدرٍ مِن مصادرِ التّباينُ كَمَا هوَ مبيّنٌ في جدولِ تحليلِ التّباينُ رقم (6-13).

جدول (6-13): جدولُ تحليلِ التّباينُ لأوزانِ العجولِ (CRD) في حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

مصادرُ التّباينُ Source of Variance (S.O.V)	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ Sum of squares (SS)	درجاتُ الحرّيّةِ df	مُتوسّطُ المُربعاتِ (التّباين) Mean squares (MS)	F (المحسوبة) Calculated	F (الجدوليّة) Tabulated
بينَ المعالجاتِ Treatments	SSTr=290	t-1=4	$MSTr=\frac{290}{4}=72.5$	$F_C=\frac{72.5}{5.5}=13.18$	$F_{\alpha\,(4,12)}=3.26$
الأخطاءُ التّجريبيّةُ (Experimental	SSE=66	$\sum r_i-t=17-5=$	$MSE=\frac{66}{12}=5.5$		

Error)		12			
المجموع Total	SSTO = 356	$\sum r_i - 1 = 17 - 1 = 16$			

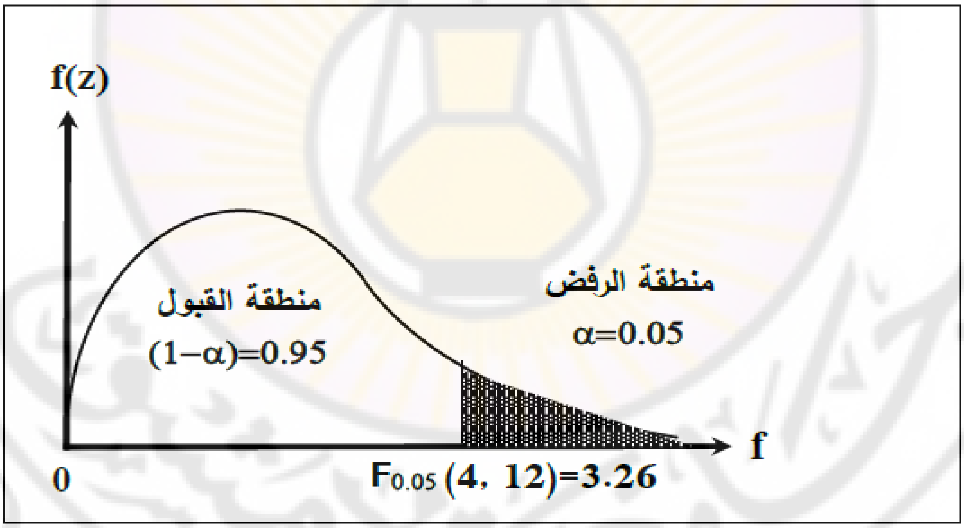
3- **حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ:** يَتِمُّ حسابُ قيمةِ الإحصائيّةِ (أو F المحسوبةِ) مِنَ المعادلةِ:

$$F_C = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{74}{5.5} = 13.18$$

6- **تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:**

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ مِن جدولِ توزيعِ F بـدرجاتِ حرّيّـةِ(t-1=4) للبسـطِ وللمقـامِ $\sum r_i - t = 17 - 5 = 12$ و بمسـتوى معنويّـةِ (α=0.05) أي استخراجُ قيمةِ

$F_t = F_{0.05}(4, 12) = 3.26$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالشّكلِ (6-3).



شكل (6-3): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (6-4).

5- **المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:** بما أنَّ قيمةَ $(F_c=13.18)$ المحسوبةِ مِن إحصائيّةِ الاختبارِ أكبرُ مِن قيمةِ $(F_t=3.26)$الجدوليّةِ فإنَّ القرارَ برفضِ الفرضِ العدميِّ أي يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطانِ لأصناقِ السماد الخمسةِ غير متساويان.

أوّلاً: اختبارُ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ Least Significant Difference Test (LSD)

بِما أنَّ تكراراتِ المعاملاتِ غيرُ متساويةٍ نوجدُ قيمةَ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ $\left(LSD_{ij}\right)$ لكُلِ زوجينِ مِنَ المُتوسّطاتِ عندَ مستوى معنويّة (α=0.05) باستخدامِ الصّيغةِ التّاليةِ:

$$LSD_{ij} = t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)}\sqrt{MSE\left(\frac{1}{r_i}+\frac{1}{r_j}\right)}$$

$$t_{(0.025,\ 12)} = 2.18$$

ثمَّ يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ $\left(LSD_{ij}\right)$ لكُلِّ مُتوسّطينِ والقيمِ المطلقةِ للفرقِ بينها بالجدولِ (6–14).

جدول (6–14): جدولُ حسابِ قيمِ $\left(LSD_{ij}\right)$ وفقاً لتكراراتِ المعاملاتِ.

	$\lvert\bar{Y}_i - \bar{Y}_j\rvert$	LSD_{ij}
1	$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2\rvert = \lvert 39-47\rvert = 8^*$	$LSD_{12} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = 3.90$
2	$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_3\rvert = \lvert 39-44\rvert = 5^*$	$LSD_{13} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 4.17$
3	$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_4\rvert = \lvert 39-43\rvert = 4^*$	$LSD_{14} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = 3.9$
4	$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 39-35\rvert = 4$	$LSD_{15} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 4.17$
5	$\lvert\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3\rvert = \lvert 47-44\rvert = 3$	$LSD_{23} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)} = 3.9$
6	$\lvert\bar{Y}_2 - \bar{Y}_4\rvert = \lvert 47-43\rvert = 4^*$	$LSD_{24} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 3.62$
7	$\lvert\bar{Y}_2 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 47-35\rvert = 12^*$	$LSD_{25} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)} = 3.9$
8	$\lvert\bar{Y}_3 - \bar{Y}_4\rvert = \lvert 44-43\rvert = 1$	$LSD_{34} = t_{(0.025,\ 12)}\sqrt{5.5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = 4.3.9$
9	$\lvert\bar{Y}_3 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 44-35\rvert = 11^*$	$LSD_{35} = t_{(0.025,\ 11)}\sqrt{5.45\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 4.17$
10	$\lvert\bar{Y}_4 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 43-35\rvert = 8^*$	$LSD_{35} = t_{(0.025,\ 11)}\sqrt{5.45\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)} = 3.90$

إنَّ إشارةَ (*) تدلُّ أنّه يوجدُ فرقٌ معنويٌّ بينَ مُتوسّطيِّ العينتينِ المقابلتينِ.

الجديرُ بالملاحظةِ أنَّ قيمَ $\left(LSD_{ij}\right)$ تعتمدُ بشكلٍ كبيرٍ على تكراراتِ المعاملاتِ (حجم العيّناتِ المقابلةِ).

ويتبيّنُ مِنَ الجدولِ (6−14) أنَّ المُتوسّطاتِ مختلفةٌ معنويّاً ماعدا مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $(\bar{Y}_2,\ \bar{Y}_3)$ و مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $(\bar{Y}_1,\ \bar{Y}_5)$ كذلكَ مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $(\bar{Y}_3,\ \bar{Y}_4)$.

ولتوضيحِ أماكن الاختلافِ بينَ المُتوسّطاتِ، نقومُ بتنظيمِ القيمِ المطلقةِ للفروقاتِ بينَ المُتوسّطاتِ ونتائج المقارناتِ فِي الجدولِ (6−15).

جدول (6−15): مقارنةُ متوسّطاتِ أصنافِ السماد الخمسةِ باستخدامِ (LSD) فِي حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

المُتوسّطاتُ	$t_5=35$	$t_1=39$	$t_4=43$	$t_3=44$
$t_2=47$	12*	8*	4*	2
$t_3=44$	9*	*5	1	
$t_4=43$	8*	4*		
$t_1=39$	4			

ويلاحظُ مِنَ الجدولِ (6−15) أنَّ الفرقَ بينَ مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_4| = 4^*$ وهوَ فرقٌ معنويٌّ بينما الفرقُ بينَ مُتوسّطيّ المعاملتينِ $|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_5| = 4$ هوَ نفس قيمةِ الفرقِ (4) بينما هوَ غير معنوي، وهذا منطقيٌّ ومتوقّعٌ لأنَّ قيمةَ $(LSD_{14} = 3.92)$ تختلفُ عَن قيمةِ $(LSD_{15} = 4.19)$ وهذا يفسّرُ بأنَّ الفرقَ بالأولى معنويٌّ وبالثّانيةِ غيرُ معنويٍّ.

و أخيراً، تفوّقتْ معنويّاً معاملةُ الصنف t_2 على باقي المعاملاتِ وأعطتْ أعلى مُتوسّطٍ فِي انتاج القمح بلغَ 47 بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ لمعاملةِ المقارنةِ التّي أعطتْ 35.

ثانياً: اختبـــــارُ دنكن مُتعدّدُ الحدودِ Duncan Multiple Range Test (DMRT)

لتطبيقِ هذا الاختبارِ يجبُ حسابُ قيمِ أقلِّ مدىً معنويٍّ Least Significant Range (LSR)

$$LSR = \sqrt{\frac{MSE}{r}} \times SSR$$

ولابدَّ أن نحسبَ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ أوّلاً:

$$S_{\bar{Y}_i} = \sqrt{\frac{MSE}{r}}$$

وبما أنَّ مكرّراتِ المعاملاتِ غيرُ متساويةٍ يَتِمُّ حسابُ المُتوسّطِ التّوافقيِّ لتكراراتِ المعاملاتِ مِنَ المعادلةِ التّاليةِ:

$$r = \frac{t}{\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{1}{r_i}\right)} = \frac{5}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)} = 3.33$$

يَتِمُّ حسابهُ فِي حالةِ عدمِ تساوي المكرّراتِ لِكُلِّ المعالجاتِ.

$$S_{\bar{Y}_i}=\sqrt{\frac{MSE}{r}}=\sqrt{\frac{5.5}{3.33}}=1.29$$

$$LSR=SSR*S_{\bar{Y}_i}=SSR*1.29$$

يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ Studentized Significant Range (SSR) مِن جدولِ Duncan بدلالةِ قيمةِ df_e ومستوى الاحتماليّةِ فِي المحورِ العموديِّ وعدد المُتوسّطاتِ فِي المحورِ الأفقيِّ وتدوينها بالجدولِ (6−16).

جدول (6−16): حسابُ قيمِ LSR لمُتوسّطاتِ اصنافِ السماد الخمسةِ فِي حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

تسلسلُ المقارنات	2	3	4	5
SSR	3.11	3.25	3.34	3.39
$S_{\bar{x}}$	1.29			
LSR	4.01	4.19	4.3	4.37

ثمَّ يُعدُّ جدولٌ للمقارنةِ بينَ المُتوسّطاتِ وترُتّبُ المعاملاتُ وفقَ مُتوسّطاتها تنازليّاً (مِنَ الأكبرِ إلى الأقلِّ قيمة) فِي المحورِ العموديِّ للجدولِ وتصاعديّاً (مِنَ الأقلِّ إلى الأكبرِ قيمة) فِي المحورِ الأفقيِّ معَ قيمِ LSR ثمَّ يُطرحُ كُلُّ مُتوسّطٍ فِي المحورِ العموديِّ مِنَ المُتوسّطِ فِي المحورِ الأفقيِّ لاستخراجِ الفرقِ بينهما، فإذا كانتْ قيمةُ الفرقِ أكبرَ مِن قيمةِ LSR فيوضعُ نجمةٌ عليهِ وهكذا باقي المعاملاتِ، كَمَا فِي الجدولِ (6−17).

جدول (6−17): مقارنةُ مُتوسّطاتِ اصنافِ السماد باستخدامِ (DMRT) فِي حالةِ عدمِ تساوي تكراراتِ المعاملاتِ.

مُتوسّطُ المعاملات تنازليّاً	قيمُ LSR تنازليّاً	t_5=35	t_1=39	t_4=43	t_3=44
t_2= 47	4.37	12*	8*	4	3
t_3= 44	4.3	5*	5*	2	
t_4= 43	4.19	8*	4		
t_1= 39	4.01	4			

ويلاحظُ مِنَ الجدولِ (6−17) أنَّ الفرقَ بينَ مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $|\bar{Y}_1-\bar{Y}_4|=4$ وهوَ فرقٌ غيرُ معنويٍّ لأنّه أصغرُ مِن قيمةِ (LSR=4.37) الموافقةِ للمعاملتينِ، بينما رأينا أنَّ الفرقَ بينَ مُتوسّطيِّ المعاملتينِ $|\bar{Y}_1-\bar{Y}_4|=4^*$ معنويٌّ فِي الجدولِ رقم (6−15) الخاصّ بتطبيقِ اختبارِ (LSD)

والخلاصةُ: أنّه فِي بعضِ الحالاتِ قد يكونُ الفرقُ بينَ مُتوسّطيِّ معاملتينِ معيّنتينِ معنوياً بتطبيقِ اختبارِ (LDS) مثلاً وغير معنويٍّ نتيجة تطبيقِ اختبارِ دنكان (DMRT

الفصلُ السّابِع

تصميمُ القطاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ
Completely Randomized Block Design

(CRBD)

الفصلُ السّابِع

تصميمُ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ

Completely Randomized Block Design (CRBD)

7-1- مُقدّمة:

يُعدُّ تصميمُ القطّاعاتِ المُنشقّةِ (CRBD) مِن أكثرِ أنواعِ التّصميماتِ استعمالاً فِي ميادينِ البحثِ العلميِّ وخاصّةً التّجاربُ الزّراعيّةُ الحقليّةُ سيما وأنّه يُستعملُ عندما تكونُ الوَحداتُ التّجريبيّةُ غيرَ متجانسةٍ باتّجاهٍ واحدٍ مثلَ وجودِ عاملٍ بيئيٍّ متدرّجٍ باتّجاهٍ واحدٍ غير مسيطرٍ عليه (مثل تدرّج خصوبةِ التّربةِ أو الملوحةِ) وهيَ حالةٌ شائعةٌ فِي التّجاربِ الحقليّةِ الزّراعيّة.

تعريفُ التّصميم: هوُ التّصميمُ الذّي يَتِمُّ فيه تجميعُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ فِي قطّاعاتٍ بحيث تكونُ الوَحداتُ التّجريبيّةُ الموجودةُ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ متجانسةٌ "نسبيّاً" قدرَ المستطاعِ، وأن يكونَ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ مساوياً لعددِ المعاملاتِ المطلوبِ دراستها، بشرطِ أن تُطبّقَ جميعُ المعاملاتِ فِي كُلِّ قطّاعٍ مرّةً واحدةً فقط، وتتوزّعُ المعاملاتُ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ توزيعاً عشوائيّاً ومستقلاً عَن بقيّةِ القطّاعاتِ.

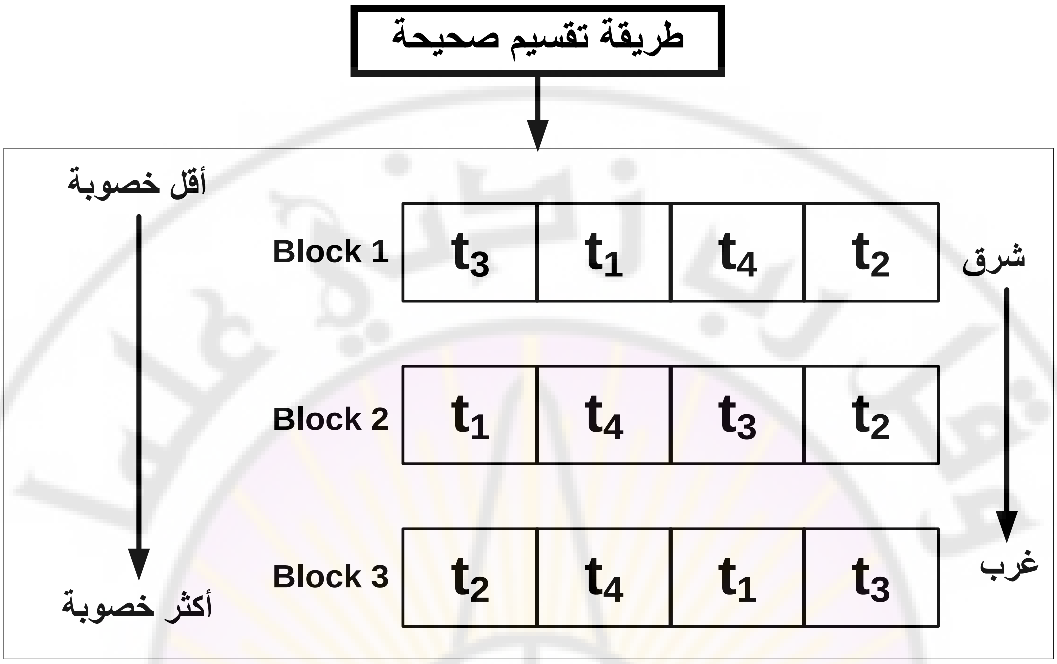
7-2- استخداماتُ التّصميم (CRBD):

- يُستخدمُ هذا التّصميمُ إذا كانَ هناكَ عاملٌ ثاني(خصوبةُ التّربةِ مثلاً) يؤثّرُ على متغيّرِ الاستجابةِ (إنتاجُ القمحِ) مِن وجهةِ نظرِ الباحثِ ويجبُ أخذه فِي الاعتبارِ.
- أي يُستخدمُ هذا التّصميمُ إذا كانتْ الوَحداتُ التّجريبيّةُ غيرَ متجانسةٍ باتّجاهٍ واحدٍ أي وجودُ عاملٍ بيئيٍّ متدرّجٍ باتّجاهٍ واحدٍ غير مسيطرٍ عليهِ (مثلُ تدرّجِ خصوبةِ أو ملوحةِ التّربةِ)، حيثُ يمكنُ تجميعُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ فِي قطّاعاتٍ غيرِ متجانسةٍ(Blocks) تصمّمُ عموديّاً على اتّجاهِ عدمِ التّجانسِ، بحيث تكونُ الوَحداتُ التّجريبيّةُ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ متجانسة.

7-3- طريقةُ تقسيمِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى قطّاعات:

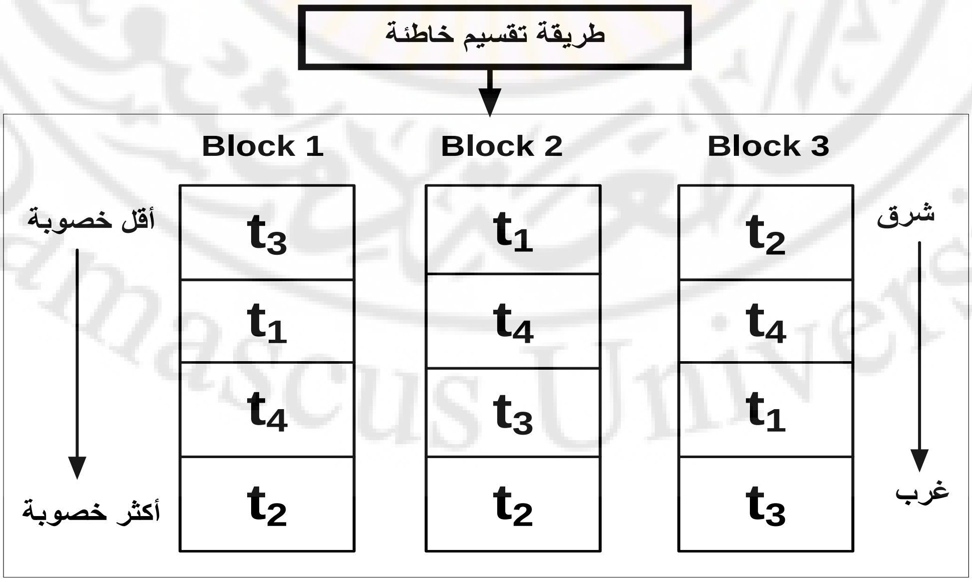
يَتِمُّ تقسيمُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى قطّاعاتٍ فِي حالةِ وجودِ اختلافاتٍ (عدم تجانس) بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ باتّجاهٍ واحدٍ. أي أنّه فِي التّجاربِ الحقليّةِ إذا كانَ هناكَ عاملٌ بيئيٌّ متدرّجٌ باتّجاهٍ واحدٍ غير مسيطرٍ عليهِ

(مثلُ تدرّجِ خصوبةِ أو ملوحةِ التّربةِ) فيمكنُ تقليلُ الخطأِ التّجريبيِّ بتقسيمِ أرضِ التّجربةِ إلى قطّاعاتٍ تصمّمُ عمودياً على اتّجاهِ عدمِ التّجانسِ (اتّجاهِ التّدرّجِ فِي الخصوبةِ) كَمَا بالشّكلِ (7−1).



شكل (7−1): طريقةٌ صحيحةٌ لتقسيمِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى قطاعاتٍ.

أمّا إذا تمَّ تقسيمُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى قطّاعاتٍ تصمّمُ بنفسِ اتّجاهِ عدمِ التّجانسِ (اتّجاهِ التّدرّجِ فِي الخصوبةِ) يكونُ هذا التّقسيمُ خاطئاً كَمَا هوَ مبيّنٌ بالشّكلِ (7−2) وذلكَ لأنَّ الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ القطّاعِ لن تكونَ مجانسةٌ وبالتّالي لم يتحقّقِ الهدفُ الأساسيُّ مِن تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ وهوَ تقسيمُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى قطّاعاتٍ تكونُ الوَحداتُ التّجريبيّةُ متجانسةٌ داخلَ القطّاعِ.

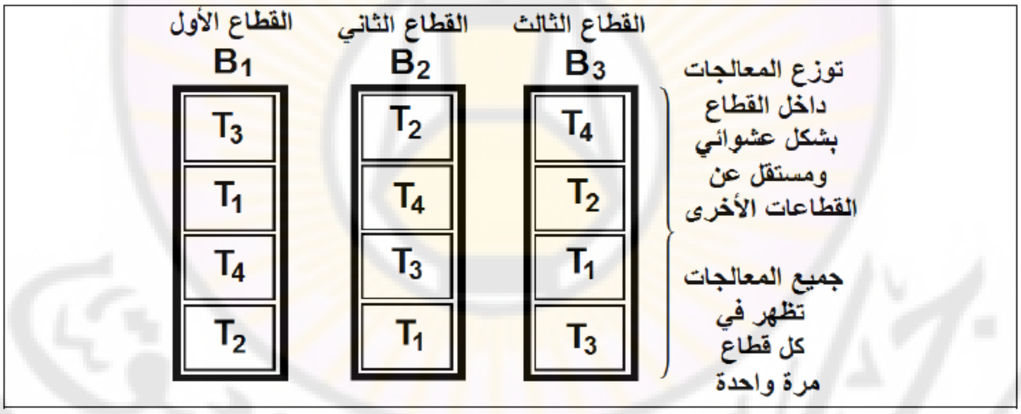


شكل (7−2): طريقةٌ خاطئةٌ لتقسيمِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى قطّاعاتٍ.

فِي هذا النّوعِ مِنَ التّجاربِ يجبُ توحيدُ العمليّاتِ الزّراعيّةِ (ري/ حصاد/ مبيد) داخلَ كُلِّ قطّاعٍ و إذا أُريدَ إدخالُ أيَّ تغييرٍ فليكن هذا التّغييرُ مِن قطّاعٍ إلى آخر و ليسَ داخلَ القطّاعِ الواحدِ، فمثلاً إذا تعذّرَ ريٌّ أو حصادُ محصولِ التّجربةِ كلّها فِي وقتٍ واحدٍ فيفضّلُ على الأقلِّ أن يحصدَ أو يروى أحدَ القطّاعاتِ أو أكثر دفعةً واحدةً بحيث يكونُ ريٌّ أو حصادُ كُلِّ قطّاعٍ قد جرى فِي وقتٍ واحدٍ.

مثال (7-1): إذا كانَ لدينا أرضٌ زراعيّةٌ تتدرّجُ خصوبتها مِنَ الشّمالِ إلى الجنوبِ ونريدُ دراسةَ تأثيرِ (4) أنواعٍ مِنَ الأسمدةِ (t_1, t_2, t_3, t_4) على إنتاجِ القمحِ.

يمكنُ تقسيمُ المادّةِ التّجريبيّةِ (الأرضِ) إلى (12) وحدةٍ تجريبيّةٍ (قِطَعِ أرضٍ) غير متجانسةٍ، ثمَّ تمَّ تقسيمُ الأرضِ إلى (3) قطّاعاتٍ متّجهةٍ مِنَ الغربِ إلى الشّرقِ (متعامدةٍ على تدرّجِ خصوبةِ التّربةِ)، وكُلُّ قطّاعٍ يتألّفُ مِن (4) وحداتٍ تجريبيّةٍ وتمَّ توزيعُ المعالجاتِ الأربعِ (مستوياتِ السّمادِ(t_1, t_2, t_3, t_4) على الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ توزيعاً عشوائيّاً مستقلاً عَن بقيّةِ القطّاعاتِ ثمَّ تمَّ قياسُ مُتوسّطِ إنتاجِ القمحِ (كغ/القطعة) فِي كُلِّ وحدةٍ تجريبيّةٍ كَمَا بالشّكلِ (7-3).



شكل (7-3): طريقةُ تقسيمِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى 3 قطّاعاتٍ.

7-4- مميّزاتُ وعيوبُ التّصميمِ (CRBD):

7-4-1- مميّزاتُ التّصميمِ (CRBD):

يمكنُ تلخيصُ المميّزاتِ الرّئيسيّةِ لتصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ بِما يلِي:

1) سهولةُ تنفيذِ التّجربةِ وسهولةُ التّحليلِ الإحصائيِّ للتّجربةِ.

2) الدّقّةُ: الدّقّةُ فِي هذا التّصميمِ تتمُّ بفصلِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ بينَ القطّاعاتِ عَن مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (بعدَ أن كانا سويّةً فِي تصميمِ CRD) وبالتّالي سيكونُ تباينُ الخطأِ التّجريبيِّ أقلَّ وبالتّالي زيادةُ دقّةِ وكفاءةِ هذا التّصميمِ.

3) المرونةُ: ليست هناكَ قيودٌ على عددِ المعاملاتِ أو (القطّاعاتِ) وذلكَ باستعمالِ أيِّ عددٍ مِنَ القطّاعاتِ والمعاملاتِ إذا توفّرتْ الوَحداتُ التّجريبيّةُ المتجانسةُ.

4) عندَ فقدِ أو استبعادِ مشاهدةٍ (وفاةُ حيوانٍ أو تلفُ نباتٍ) فإنَّ ذلكَ لا يؤثّرُ على التّحليلِ الإحصائيِّ للتّجربةِ لأنّه يمكنُ تقديرُ قيمِ المشاهداتِ المفقودةِ بسهولةٍ.

7-4-2- عيوبُ التّصميمِ (CRBD):

1- توجدُ صعوبةٌ فِي بعضِ الأحيانِ فِي الحصولِ على تجانسٍ كاملٍ بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ القطّاعِ الواحدِ ممّا يؤدّي إلى زيادةِ الخطأِ التّجريبيِّ للتّجربة.

2- تتناقصُ كفاءةُ هذا التّصميمِ وتقلُّ دقّةُ التّجربةِ فِي حالةِ زيادةِ عددِ المعاملاتِ عَن 8 معاملاتٍ لأنّه يزدادُ حجمُ القطّاعِ نتيجةَ زيادةِ عددِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ الدّاخلةِ بالقطّاعِ وبالتّالي يؤدّي إلى زيادةِ التّبايُنِ بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ (تنخفضُ درجةُ التّجانسِ) داخلَ القطّاعاتِ وبناءً عليهِ تزدادُ قيمةُ الخطأِ التّجريبيّ وتقلُّ دقّةُ التّجربة.

أمثلةٌ مختلفةٌ على تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ:

- تجربةٌ لدراسةِ تأثيرِ عاملِ التّسميدِ بثلاثةِ أصنافٍ على إنتاجيّةِ القمحِ القاسي فِي أرضٍ مائلةٍ.

هذهِ التّجربةُ تنفّذُ بطريقةِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ لوجودِ مصدرينِ للتّبايُنِ همَا:

- ✓ التّسميدُ.
- ✓ ميولُ الأرضِ.

- تجربةٌ لدراسةِ عقارٍ معيّنٍ بثلاثةِ تراكيزَ (10ملم، 20 ملم، 30ملم) على طولِ فترةِ الشّفاءِ لدى المرضى مِنَ الرّجالِ والنّساءِ والأطفالِ.

هذهِ التّجربةُ يجبُ أن تنفّذَ بطريقةِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ لوجودِ مصدرينِ للتّبايُنِ همَا:

- ➢ تركيزُ العقارِ (10ملم، 20 ملم، 30ملم).
- ➢ فئةُ المرضى (الرجال، النساء، الأطفال).

ملاحظةٌ: عددُ القطّاعاتِ يمثّلُ عددَ المكرّراتِ للمعاملاتِ.

7-5- توصيفُ التّصميمِ (CRBD):

أهمُّ ما يميّزُ هذا التّصميمَ الخواصّ التّالية:

1- عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ مساوياً لعددِ المعاملاتِ المطلوبُ دراستها فِي التّجربةِ.

2- جميعُ المعاملاتِ تظهرُ فِي كُلِّ قطّاعٍ مرّةً واحدةً فقط، أي أنَّ كُلَّ قطّاعٍ يحتوي على جميعِ المعاملاتِ.

3- توزّعُ المعاملاتُ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ توزيعاً عشوائيّاً مستقلاً عَن بقيّةِ القطّاعاتِ.

4- عددُ القطّاعاتِ يجبُ أن تكونَ ثلاثةً فأكثرَ لكي تكونَ درجاتُ الحرّيّةِ 2 فأكثر لكي تأخذَ دورها الفعّال فِي خفضِ قيمةِ الخطأِ التّجريبيّ.

7-6- التّوزيعُ العشوائيُّ للمعاملاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ:

العشوائيّةُ هنا تعني أن يَتِمَّ توزيعُ المعاملاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ توزيعاً عشوائيّاً مستقلاً عَن بقيّةِ القطّاعاتِ الأخرى، أي لا يتأثّرُ بما حدثَ فِي القطّاعاتِ الأخرى، و الجدولُ (7-1) يبيّنُ مخطّطاً لتجربةٍ تتضمّنُ (6) معاملاتٍ (A, B, C, D, E, F) تتوزّعُ على خمسةِ قطّاعاتٍ.

جدول (7-1): التّوزيعُ العشوائيُّ للمعاملاتِ بتصميمِ (CRBD).

القطّاعُ الخامس B5	القطّاعُ الرّابع B4	القطّاعُ الثّالث B3	القطّاعُ الثّاني B2	القطّاعُ الأوّل B1
C	E	F	A	E
D	C	D	B	D
A	F	E	D	B
F	B	C	E	A
B	D	A	F	C
E	A	B	C	F

7-7- تحليلُ التّباينِ للقطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (مصادرُ التّباينِ):

تعودُ التّبايناتُ الكلّيّةُ بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ فِي هذا النّوعِ مِنَ التّجاربِ إلى ثلاثةِ مصادر هيَ:

- التّبايناتُ بينَ القطّاعاتِ.
- التّبايناتُ بينَ المعاملاتِ.
- التّبايناتُ الرّاجعةُ إلى الخطأِ التّجريبيِّ.

7-8- النّموذجُ الرّياضيُّ العامُّ للتّصميمِ (CRBD):

النّموذجُ الرّياضيُّ لهذا التّصميمِ يمثّلُ نموذجاً خطيّاً يتمثّلُ بالمعادلةِ الرّياضيّةِ التّي تصفُ مكوّناتِ التّجربةِ، أي التّي توضّحُ مكوّناتِ أيِّ مشاهدةٍ فِي التّجربةِ. وقيمةُ كُلِّ مشاهدةٍ فِي التّجربةِ تتكوّنُ مِن أربعةِ مكوّناتٍ مستقلّةٍ وهيَ المُتوسّطُ العامُّ (μ) وتأثيرُ المعاملةِ التّي أخذتها الوَحدةُ التّجريبيّةُ (t_i) و تأثيرُ القطّاعِ على المشاهدةِ الموجودةِ بالقطّاعِ (R_j) و قيمةُ الخطأِ العشوائيِّ (E_{ij}) بتلكَ المشاهدةِ أو الوَحدةِ التّجريبيّةِ وعليهِ فمعادلةُ النّموذجِ الرّياضيِّ لهذا التّصميمِ هيَ:

$$\mathbf{Y_{ij} = \mu + t_i + B_j + E_{ij}}$$

y_{ij}: قيمةُ المشاهدةِ الخاصّةِ بالوَحدةِ التّجريبيّةِ التّي أخذتِ المعاملةُ (i) والموجودةُ فِي القطّاعِ (j).

μ: المُتوسّطُ العامُّ للتّجربةِ (لمجتمعِ المشاهداتِ) يمكنُ تقديرهُ بالمُتوسّطِ العامِّ لجميعِ المشاهداتِ $\hat{\mu} = \bar{y}_{\bullet\bullet}$

t_i: تأثيرُ المعاملةِ (i) الخاصّةِ بهذهِ المشاهدةِ، وتقديرها هوَ مقدارُ انحرافِ مُتوسّطِ هذهِ المعاملةِ (i) عَنِ المُتوسّطِ العامِّ للتّجربةِ $\hat{t}_i = \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$

B_j: (تأثيرُ القطّاعِ j) الخاصّةِ بهذهِ المشاهدةِ ويمكنُ تقديرها بمقدارِ انحرافِ مُتوسّطِ المشاهداتِ الموجودةِ فِي القطّاعِ (j) عَنِ المُتوسّطِ العامِّ لجميعِ المشاهداتِ.

E_{ij}: (الخطأُ التّجريبيُّ) تمثّلُ قيمةَ التّأثيرِ الحقيقيِّ للخطأِ التّجريبيِّ الخاصِّ بتلكَ المشاهدةِ التّي أخذتِ المعاملةُ (i) وكانتْ ضمنَ القطّاعِ (j) وتقدّرُ هذهِ القيمةُ بمقدارِ انحرافِ قيمةِ تلكَ المشاهدةِ عَنِ القيمةِ التّي تحدّدها المقاديرُ الثّلاثةُ السّابقةُ (μ , t_i , B_j).

حيثُ الرّموزُ التّاليةُ تمثّلُ:

t: يمثّلُ عددَ المعاملاتِ فِي التّجربةِ. $i=1,2,3……t$

r: يمثّلُ عددَ المكرّراتِ (القطّاعاتِ) فِي التّجربةِ. $J=1,2,3 …..r$

7–9- تخطيطُ التّجربةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتخطيطِ تجربةٍ باستخدامِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ، بفرضِ أنَّ عددَ المعاملاتِ المرادُ تطبيقها خمسِ معاملاتٍ (t=5) وهيَ $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ سوفَ تتوزّعُ على أربعةِ قطّاعاتٍ وكُلّ قطّاعٍ يتألّفُ مِن خمسِ وحداتٍ تجريبيّةٍ (نفس عددِ المعاملاتِ) فيكونُ تخطيطُ التّجربةِ و توزيعُ المعاملاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ موضّح بالجدولِ (7– 2).

جدول (7–2): تخطيطُ تجربةٍ لخمسِ معاملاتٍ بتصميمِ (CRBD).

القطّاعُ الرّابع B4	القطّاعُ الثّالث B3	القطّاعُ الثّاني B2	القطّاعُ الأوّل B1
t_3	t_5	t_3	t_5
t_5	t_4	t_1	t_2
t_4	t_3	t_4	t_1
t_1	t_2	t_5	t_4
t_2	t_1	t_2	t_3

7–10- تنظيمُ المشاهداتِ فِي جدولٍ مناسبٍ:

من أجل توضيح وتنظيم الشكل العام لمشاهدات هذا التصميم، لنفترض أن عدد المعاملات هو (t)، و المعاملات هي $(t_1,t_2,……..t_t)$.

ولنفترض أن عدد القطاعات هو (r) والقطاعات هي $(B_1, B_2,,\ldots\ldots B_r)$.

وبذلك يكون العدد الكلي للوحدات التجريبية هو $(N=t*r)$ والجدول (7−3) يمثل طريقة تنظيم بيانات هذا التصميم:

مِن أجلِ تسهيلِ عمليّةِ حسابِ القيمِ الإحصائيّةِ يمكنُ تصنيفُ القيمِ (المشاهداتِ) بالجدولِ (7− 3) بحيث تدرجُ المعاملاتُ المختلفةُ فِي عناوين الأسطرِ و القطّاعاتِ المختلفةِ فِي عناوين الأعمدةِ الذّي يمثّلُ بياناتِ تجربةٍ منفّذةٍ بتصميمِ (CRBD).

جدول (7−3): تنظيمُ المشاهداتِ لتجربةٍ بتصميمِ (CRBD).

المعاملات (Treatments)	القطاعات (Blocks)				مجاميع المعاملات ($y_{i\bullet}$)	متوسطات المعاملات ($\bar{y}_{i\bullet}$)
	B_1	B_2	……………	B_r		
t_1	y_{11}	y_{12}	………………	y_{1r}	$y_{1\bullet}$	$\bar{y}_{1\bullet}$
t_2	Y_{21}	Y_{22}	……………	Y_{2r}	$y_{2\bullet}$	$\bar{y}_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
t_t	y_{t1}	y_{t2}	……………	y_{tr}	$y_{t\bullet}$	$\bar{y}_{t\bullet}$
مجاميع القطاعات ($y_{\bullet j}$)	$y_{\bullet 1}$	$y_{\bullet 2}$	……………	$y_{\bullet r}$	المجموع العام $y_{\bullet\bullet} =$	المتوسط العام $\bar{y}_{\bullet\bullet} =$

مِن أجلِ تسهيلِ عمليّةِ حسابِ القيمِ الإحصائيّةِ يمكنُ تصنيفُ القيمِ (المشاهداتِ) بالجدولِ (7− 3) بحيث تدرجُ المعاملاتُ المختلفةُ فِي عناوين الأسطرِ و القطّاعاتِ المختلفةِ فِي عناوين الأعمدةِ الذّي يمثّلُ بياناتِ تجربةٍ منفّذةٍ بتصميمِ (CRBD).

جدول (7−3): تنظيمُ المشاهداتِ لتجربةٍ بتصميمِ (CRBD).

المعاملاتُ t_i	القطّاعاتُ				مجاميعُ المعاملاتِ $Y_{i.}$	مُتوسّطاتُ المعاملاتِ $\bar{Y}_{i.}$
	القطّاعُ الأوّل B1	القطّاعُ الثّاني B2	القطّاعُ الثّالث B3	القطّاعُ الرّابع B4		
t_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	$y_{1\bullet}$	$\bar{y}_{1\bullet}$
t_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	$y_{2\bullet}$	$\bar{y}_{2\bullet}$
t_3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}	$y_{3\bullet}$	$\bar{y}_{3\bullet}$
t_4	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}	$y_{4\bullet}$	$\bar{y}_{4\bullet}$
t_5	Y_{51}	Y_{52}	Y_{53}	Y_{54}	$y_{5\bullet}$	$\bar{y}_{5\bullet}$

المتوسط العام $\bar{y}_{\bullet\bullet}$ =	المجموع العام $y_{\bullet\bullet}$ =	$y_{\bullet 4}$	$y_{\bullet 3}$	$y_{\bullet 2}$	$y_{\bullet 1}$	مجاميع القطاعات $(y_{\bullet j})$

7-11- الأهدافُ الأساسيّةُ مِن تصميم (CRBD):

إنَّ لتصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ هدفينِ رئيسيينِ همَا:

1- اختبارُ تساوي مُتوسّطاتِ المعالجات.

إنَّ الهدفَ الأساسيّ مِن تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ هوَ التّحققُ مِن وجودِ (أو عدمِ وجودِ) فروقٍ معنويّةٍ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ ($\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, \mu_t$)، وبمعنى آخر تطبيقُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ لاختبارِ فيما إذا كانَ هناكَ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ.

2- اختبارُ أهميّةِ أخذ القطّاعاتِ فِي الاعتبارِ عندَ التّصميم.

الهدفُ الثّاني مِن هذا التّصميمِ هوَ اختبارُ هل أخذُ القطّاعاتِ فِي الاعتبارِ عندَ تنفيذِ التّجربةِ لهُ أثرٌ معنويٌّ أي هل استخدامُ القطّاعاتِ فِي التّجربةِ كانَ فعّالاً ومفيداً، أم أنَّ استخدامَ القطّاعاتِ فِي التّجربةِ لم يكن مفيداً ويوصى بعدمِ استخدامهِ عندَ إجراءِ هذا النّوعِ مِن التّجاربِ مستقبلاً.

أوّلاً: اختبارُ تساوي مُتوسّطاتِ المعالجات.

7-12- خطواتُ تطبيقِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD):

مِن أجلِ تحقيقِ الهدفِ الأوّلِ مِن تصميمِ (CRBD)، يَتِمُّ تطبيقُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ لاختبارِ فيما إذا كانَ هناكَ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ وفقاً للخطواتِ الآتية

11) صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ
12) تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّباينُ (AVOVA TABLE)
13) حسابُ قيمةِ إحصاءةِ الاختبارِ (F_c)
14) استخراجُ قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ وتحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ
15) المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ

2- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّة:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2 \ldots\ldots=\mu_t$) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ).

- **الفرضُ البديلُ** :(H_1) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غير متساويين).

3- تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE)

فِي هذا التّصميمِ يَتِمُّ تقسيمُ المجموعِ الكلّيِّ لمُربّعاتِ انحرافاتِ المشاهداتِ عَنِ المُتوسّطِ العامِّ $SSTO=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{Y}..)$ ودرجاتِ الحرّيّةِ وفقاً لمصادرِ الاختلافِ إلى (3) مكوّناتٍ (مصادر) وهيَ:

- مجموعُ مُربّعاتِ المعالجاتِ (SSTr) بدرجاتِ حرّيّة $(df_{SSTr}=t-1)$.
- مجموعُ مُربّعاتِ القطّاعاتِ (SSBk) بدرجاتِ حرّيّة $(df_{SSBk}=r-1)$.
- مجموعُ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ (SSE) بدرجاتِ حرّيّة $(df_{SSE}=(t-1)(r-1))$.

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = r\sum_{i=1}^{t}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 + t\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2$$

$$SSTO \quad = \quad SSTr \quad + \quad SSBk \quad + \quad SSE$$

ويمكنُ حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ (SS) لكُلِّ مصدرٍ مِن مصادرِ التّبايُنِ إمّا باستخدامِ المُتوسّطاتِ(Means) أو باستخدامِ المجاميعِ (Summations) لتصميمِ (CRBD) كَمَا هوَ مُبيّنٌ بالجدولِ (7-4).

جدول (7-4): جدولُ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لتصميمِ (CRBD).

مجموع مربعات الانحرافات (SS)		
باستخدام المجاميع متوسطات $(Summations)$	باستخدام المتوسطات $(Means)$	مصادرُ التّبايُنِ S.O.V
$SSBk=\frac{\sum_1^r(y_{.j})^2}{t}-CF$	$SSBk=t\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2$	القطاعاتُ (المكرّراتُ) Blocks
$SSTr=\frac{\sum_1^t(y_{i.})^2}{r}-CF$	$SSTr=r\sum_{i=1}^{t}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$	المعاملاتُ Treatments
SSE=SSTO – SSTr- SSBk	$SSE=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2$ SSE=SSTO- SSt-SSr	الخطأُ التجريبي Experimental Error

التّباينُ الكلّي Total	$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF$

حيثُ أنَّ:

r: عددُ القطّاعاتِ.

t: عددُ المعاملاتِ فِي التّجربةِ.

C.F: يمثّلُ معامل التّصحيحِ ويساوي $CF = \frac{(Y_{..})^2}{tr}$

ثمَّ يَتِمُّ تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) بالجدولِ (5-7).

جدول (5−7): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتصميم (CRBD).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	درجاتُ الحرّيّة d.f	مُتوسّطُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ M.S	F (المحسوبة) F_{cal}	F (الجدوليّة) F_{tab}
القطاعاتُ (المكرّراتُ) Blocks	SSBk	r-1	$MSBk = \frac{SSBk}{r-1}$	$F_{BC} = \frac{MSBk}{MSE}$	F_{BT}
المعاملاتُ (الأصنافُ) Treatments	SSTr	t-1	$MSTr = \frac{SSTr}{t-1}$	$F_C = \frac{MSTr}{MSE}$	F_T
الخطأ التجريبي Experimental Error	SSE	(t-1) (r-1)	$MSE = \frac{SSE}{(t-1)(r-1)}$		
التّباينُ الكلّي Total	SSTO	tr-1			

حيث يتم استخراج قيم (F_{BT}, F_T) الجدولية كما يلي:

$$F_t = F_\alpha(t-1,(t-1)(r-1))$$
$$F_{BT} = F_\alpha(r-1,(t-1)(r-1))$$

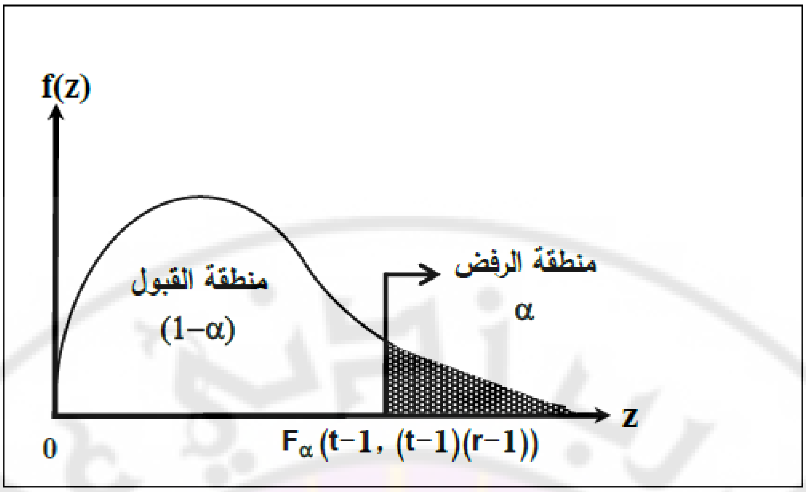
4−حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c):

يَتِمُّ حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ F_c (المحسوبة) مِن جدولِ أنوفا السّابقِ وتحسبُ مِنَ العلاقةِ

$$F_C = \frac{MSTr}{MSE}$$

5− تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ: يَتِمُّ تحديدُ منطقتَي القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ F_T (F الجدوليّةِ) مِن جدولِ توزيعِ F بدرجاتِ حرّيّة(t-1) للبسطِ و (t-1) (r-1) للمقامِ بمستوى معنويّةِ (α) أي استخراجُ قيمةِ $F_t = F_\alpha(t-1,(t-1)(r-1))$. وفِي اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ يكونُ نوعُ الاختبارِ مِنَ الطّرفِ الأيمنِ، أي أنَّ منطقةَ الرّفضِ تقعُ بالكاملِ على الطّرفِ الأيمنِ كَمَا بالشّكلِ التّالي:

Damascus University



شكل (7-4): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ لاختبارِ F بتصميمِ (CRBD).

5- المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: تتمُّ مقارنةُ (F_C) المحسوبةِ مِن إحصاءةِ الاختبارِ معَ (F_T) الجدوليّةِ، فإذا كانتْ (F_C) أقلّ مِن قيمةِ (F_T) الجدوليّةِ عندَ مستوى المعنويّةِ ودرجاتِ الحرّيّةِ المعيّنةِ نقبلُ الفرضَ العدميَّ بتساوي مُتوسّطاتِ المعاملاتِ ، أما إذا كانتْ قيمةُ (F_C) المحسوبةِ أكبرَ مِن قيمةِ (F_T) الجدوليّةِ نرفضُ الفرضَ العدميَّ ونقبلُ الفرضَ البديلَ بأنَّ هناكَ فرقٌ معنويٌّ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ، أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غيرِ متساويين.

ثانياً: اختبارُ أهميّةِ أخذِ القطّاعاتِ في الاعتبارِ عندَ التّصميمِ.

يمكنُ اختبارُ أهميّةِ أخذِ القطّاعاتِ في الاعتبارِ في تصميمِ التّجربةِ باستخدامِ النّسبةِ $F_{BC} = \frac{MSBk}{MSE}$ كمؤشّرٍ أو مقياسٍ عدديٍ (وليسَ كاختبارٍ إحصائيٍّ) للدلالةِ على مدى أهميّةِ استخدامِ القطّاعاتِ فِي هذا التّصميمِ.

ثمَّ استخراجُ القيمةِ الجدوليّةِ $F_{BT} = F_\alpha(r-1,(t-1)(r-1))$ التّي تمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (F) بدرجاتِ حرّيّةِ القطّاعاتِ و تساوي (r-1) للبسطِ، ودرجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيِّ للمقامِ والتّي تساوي (t-1)(r-1) وبمستوى معنويّةِ ($\alpha=0.05$)

- فإذا كانَ $F_{BC} > F_{BT}$

فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ القطّاعاتِ فِي هذهِ التّجربةِ كانَ فعّالاً ومفيداً.

- وأمّا إذا كانَ $F_{BC} \leq F_{BT}$

فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ القطّاعاتِ فِي هذهِ التّجربةِ لم يكن مفيداً ونوصي بعدمِ استخدامهِ عندَ إجراءِ هذا النّوعِ مِنَ التّجاربِ مستقبلاً.

مثال (7-2):

أجريَتْ تجربةٌ لدراسةِ تأثيرِ (5) أصنافٍ مِنَ السّمادِ (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)على كميّةِ محصولِ القمحِ، علماً أنَّ أرضَ التّجربةِ فيها اختلافٌ فِي ملوحةِ التّربةِ، لذلكَ تمَّ تقسيمُ الأرضِ إلى 4 قطّاعاتٍ متعامدةٍ على تدرّجِ ملوحةِ التّربةِ، وكُلُّ قطّاعٍ يتألّفُ مِن 5 وحداتٍ تجريبيّةٍ وتمَّ توزيعُ المعالجاتِ (أصنافِ السّمادِ) بشكلٍ عشوائيٍّ على القطّاعاتِ (أي تمَّ استخدامُ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ) ثمَّ تمَّ قياسُ إنتاجِ القمحِ (كغ/القطعة) فِي كُلِّ وحدةٍ تجريبيّةٍ ولُخصتِ البياناتُ فِي الجدولِ (7− 6).

جدول (7−6): كميّاتُ القمحِ لخمسةِ أصنافِ السّمادِ بتصميمِ (CRBD).

المعاملاتُ t_i	القطّاعاتُ				مجاميعُ المعاملاتِ Yi.	متوسطاتُ المعاملاتِ
	القطاعُ الاوّلُ B1	القطّاعُ الثّاني B2	القطّاعُ الثّالث B3	القطّاعُ الرّابع B4		
t_1	8	10	10	12	$y_{1\cdot} = 40$	$\bar{y}_{1\cdot} = 10$
t_2	11	15	15	16	$y_{2\cdot} = 57$	$\bar{y}_{2\cdot} = 14.25$
t_3	17	14	16	13	$y_{3\cdot} = 60$	$\bar{y}_{3\cdot} = 15$
t_4	15	14	16	15	$y_{4\cdot} = 60$	$\bar{y}_{4\cdot} = 15$
t_5	17	14	15	17	$y_{5\cdot} = 63$	$\bar{y}_{5\cdot} = 15.75$
مجاميع القطاعات	$y_{\cdot 1} = 68$	$y_{\cdot 2} = 67$	$y_{\cdot 3} = 72$	$y_{\cdot 4} = 73$	المجموع العام $y_{\cdot\cdot} = 280$	المتوسط العام $\bar{y}_{\cdot\cdot} =$

المطلوبُ:

1− هل هناكَ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ إنتاجِ أصنافِ السّمادِ الخمسةِ عندَ مستوى معنويّةِ (0.05)؟

2− هلِ القطّاعاتُ كانتْ مهمّةً للتّصميمِ؟

الحلُّ: فِي هذا التّصميمِ سوفَ يَتمُّ تطبيقُ اختبارِ الفروضِ على المعالجاتِ وعلى القطّاعاتِ:

1− اختبارُ تساوي مُتوسّطاتِ المعالجاتِ(مستوياتُ السّمادِ)

2− اختبارُ أهميّةِ أخذِ القطّاعاتِ (تقسيمُ الوَحداتِ إلى قطّاعاتٍ) فِي الاعتبارِ عندَ التّصميمِ:

أوّلاً: اختبارُ تساوي مُتوسّطاتِ المعالجاتِ(مستوياتِ السّمادِ)

التّحليلُ الإحصائيُّ لبياناتِ التّجربةِ تَتمُّ وفقَ الخطواتِ التّاليةِ:

عددُ المعالجاتِ (t=5) وعددُ القطّاعاتِ (r=4)

3- صياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$) مُتوسّطاتُ أصنافِ السّمادِ الخمسةِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ).

الفرضُ البديلُ :(H_1) مُتوسّطاتُ أصنافِ السّمادِ الخمسةِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطين غيرُ متساويين).

4- تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

نحسبُ معاملَ التّصحيحِ (C.F) كَمَا يلِي: $CF = \frac{(Y..)^2}{tr} = \frac{(\sum y_{ij})^2}{tr} = \frac{(280)^2}{5\times4} = 3920$

6- مجموعُ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (SSTO):

$$SSTO = \sum y_{ij}^2 - CF = ((8)^2 + (10)^2 + \dots\dots(17)^2) - 3920 = 126$$

7- مجموعُ مُربّعاتِ المعاملاتِ (SSTr):

$$SSTr = \frac{\sum y_{i.}^2}{r} - CF = \frac{(40)^2+(57)^2+(60)^2+(60)^2+(63)^2}{4} - 3920 = 84.5$$

8- مجموعُ مُربّعاتِ القطّاعاتِ (SSBk):

$$SSBk = \frac{\sum y_{.j}^2}{t} - CF = \frac{(68)^2+(67)^2+(72)^2+(73)^2}{5} - 3920 = 5.2$$

9- مجموعُ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ(SSE):

$$SSE = SSTO - SSTr - SSBk = 126 - 84.5 - 5.2 = 36.3$$

درجاتُ الحرّيّةِ (d.f) لكُلِّ مصدرٍ مِن مصادرِ التّبايُنِ تحسبُ كَمَا هوَ مبيّنٌ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ.

10- قيمةُ F_t الجدوليّة= تُستخرجُ مِن جدولِ F بالاعتمادِ على درجاتِ حرّيّةِ المعاملاتِ ودرجاتِ الخطأِ التّجريبيِّ. أي $F_{Bt} = F_t = F_\alpha(t-1,(t-1)(r-1) = F_{0.05}(4,12) = 3.26$

يَتِمُّ تنظيمُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) بالجدول (7 -7).

جدول (7-7): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأصنافِ السّمادِ بتصميمِ (CRBD).

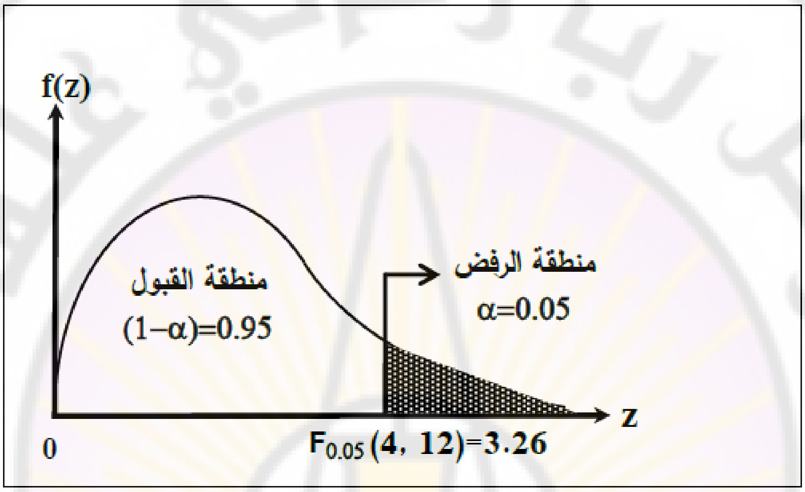
مصادرُ الاختلافِ S.O.V	مجموعُ مربعاتِ الانحرافاتِ S.S	درجاتُ الحرّيّة d.f	مُتوسّطُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ M.S	F (المحسوبة) F_{tab}	F (الجدوليّة) F_{cal}
القطاعاتُ (المكرّرات) Blocks	SSBk=5.2	r-1=3	$MSBk = \frac{5.2}{3} = 1.73$	$F_{BC} = \frac{1.73}{3.02} = 0.57$	F_{Bt}=3.45
المعاملاتُ (الأصنافُ) Treatments	SSTr=84.5	t-1=4	$MSTr = \frac{84.5}{4} = 21.1$	$F_C = \frac{21.1}{3.02} = 6.98$	F_t=3.26
الخطأ التجريبيّ Experimental Error	SSE=36.3	(t-1) (r-1)=12	$MSE = \frac{36.3}{12} = 3.025$		
المجموعُ Total	SSTO=126	tr-1=19			

5- حسابُ قيمةِ إحصائيّةِ الاختبار:

إنَّ قيمةَ الإحصائيّةِ (أو F المحسوبةِ) هي $F_C = \frac{MSTr}{MSE} = 6.98$

6- تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ F_T (F الجدوليّةِ) مِن جدولِ توزيعِ F بدرجاتِ حرّيّة(t-1=4) للبسطِ وللمقامِ ((t-1)(r-1)=12) وبمستوى معنويّة (α=0.05) أي استخراجُ قيمة $F_\alpha(t-1,(t-1)(r-1)) = F_{0.05}(4,\ 12) = 3.26$ ويمكنُ توضيحُ ذلكَ بالشّكلِ رقم (7- 5).



شكل (7−5): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (7−2).

المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بما أنَّ قيمةَ (F_C=6.98) المحسوبةِ مِن إحصاءةِ الاختبارِ أكبرُ من قيمةِ (F_t=3.26) الجدوليّةِ فإنَّ القرارَ هوَ رفضُ الفرضِ العدميِّ وقبولُ الفرضِ البديلِ بأنّه يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطين غيرُ متساويانِ من مُتوسّطاتِ أصنافِ السّمادِ الخمسةِ.

اختبارُ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ (Least Significant Difference – LSD):

تُحسبُ قيمةُ (LCD) مِنَ المعادلةِ الآتيةِ: $LSD = t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)}\sqrt{\frac{2MSE}{r}}$

ويَتِمُّ استخراجُ القيمةِ الجدوليّةِ (t) وفقاً لما يلي: $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)} = t_{(0.025,\ 12)} = 2.179$

$$LSD = t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)}\sqrt{\frac{2MSE}{r}} = 2.179 \times \sqrt{\frac{2\times 3.025}{4}} = 2.68$$

ثمَّ يُعدُّ الجدولُ (7−15) للمقارنةِ بينَ المُتوسّطاتِ كَمَا يأتِي:

جدول (7−15): مقارنةُ مُتوسّطاتِ أصنافِ السّمادِ الخمسةِ باستخدامِ (LSD).

LSD = 2.68	t_1=10	t_2=14.25	t_3=15	t_4=15

treats	Mean				
t_5	15.75	5.75*	1.5	0.75	0.75
t_4	15	5*	0.75	0	0
t_3	15	5*	0.75	0	
t_2	14.25	*4.25	0		

يُبيّنُ اختبارُ LSD تفوّقاً معنويّاً لمعاملةِ السّمادِ t_5 على باقي المعاملاتِ حيثُ أعطَتْ أعلى المُتوسّطات فِي كميّةِ إنتاجِ القمحِ الذّي بلغَ 15.75 كغ .

ثانياً: اختبارُ أهميّةِ أخذِ القطّاعاتِ (أنواعِ التُّرب) فِي الاعتبارِ عندَ التّصميم

مِن أجلِ اختبارِ أهميّةِ أخذِ القطّاعاتِ فِي الاعتبارِ فِي تصميمِ التّجربةِ نحسبُ القيمتين (F_{BC}, F_{BT}) كَمَا يلِي:

$$F_{BC} = \frac{MSBk}{MSE} = \frac{10}{0.96} = 10.41$$

ثمَّ استخراجُ القيمةِ الجدوليّة(F_{BT}).

$$F_{Bt} = F_{\alpha}(r-1,(t-1)(r-1) = F_{0.05}(3,12) = 3.45$$

التّي تمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (F) بدرجاتِ حرّيّةِ القطّاعاتِ والتّي تساوي (r-1) للبسطِ، و درجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيِّ للمقامِ والتّي تساوي {(t-1)(r-1)} وبمستوى معنويّة (α=0.05).

- بما أنَّ $(F_{BC} = 10.41) > (F_{BT} = 3.45)$

فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ القطّاعاتِ فِي هذهِ التّجربةِ كانَ فعّالاً ومفيداً.

أي أنَّ أخذَ القطّاعاتِ (ملوحةُ التّربةِ) فِي الاعتبارِ عندَ تنفيذِ التّجربةِ لهُ أثرٌ معنويٌّ على الإنتاجيّةِ لِذا يجبُ عدمُ إهمالهِ لأنّه يقلّلُ معنويّاً من تبايُنِ الخطأِ التّجريبيِّ.

7-13- تقديرُ البياناتِ المفقودةِ فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (Missing Value):

فِي تصميمِ (CRBD) قد يَتِمُّ فقدانُ مشاهدةٍ أو أكثر لأيِّ سببٍ منَ الأسبابِ، مثل تعرّضِ نباتاتِ وحدةٍ تجريبيّةٍ للتّلفِ، أو موتِ حيوانٍ أو سرقةِ محصولِ قطعةِ أرضٍ، بشرطِ أنَّ فقدانَ المشاهدةِ لا يكونُ مِن جرّاءِ تأثيرِ المعاملةِ المستخدمةِ فِي التّجربةِ وعليهِ نلجأُ إلى تقديرِ القيمةِ المفقودةِ وفقَ المعادلةِ التّاليةِ:

$$Y_{ij} = \frac{r(\mathbf{y_{\bullet j}}) + t(y_{i\bullet}) - \mathbf{y_{\bullet\bullet}}}{(r-1)(t-1)}$$

حيثُ أنَّ

$(\mathbf{y_{ij}})$: تمثل قيمةُ المشاهدةِ المفقودةِ.

r: عددُ التّكراراتِ (القطّاعاتِ) المستخدمةِ بالتّجربةِ

$(\mathbf{y_{\bullet j}})$: مجموعُ قيمِ القطّاعِ الفاقدِ للمشاهدةِ (بدونِ القيمةِ)

t : عددُ المعاملاتِ المستخدمةِ فِي التّجربةِ

$(\mathbf{y_{i\bullet}})$: مجموعُ قيمِ المعاملةِ الفاقدةِ للمشاهدةِ المراد تقديرها

$(\mathbf{y_{\bullet\bullet}})$: المجموعُ العامُّ الكلّيُّ للمشاهداتِ الموجودةِ (بدونِ القيمةِ المفقودةِ).

بعدَ حسابِ القيمةِ التّقديريّةِ $(\mathbf{y_{ij}})$ نُدخلُ هذهِ القيمةَ فِي مكانها المحدّدِ ضمنَ جدولِ البياناتِ ثمَّ نصحّحُ مجموعَ القطّاعِ و مجموعَ المعاملةِ الفاقدينِ لها وكذلكَ المجموعُ العامُّ ثمَّ نحلّلُ إحصائيّاً التّجربةَ بصورةٍ اعتياديّةٍ باستثناءِ ما يأتِي:

- تقليلُ درجاتِ الحرّيّةِ للخطأِ التّجريبيِّ قيمةً واحدةً عَن كُلِّ قيمةٍ مفقودةٍ و درجات الحرّيّة الكلّيّةِ درجةً واحدةً وذلكَ لأنَّ هذهِ القيمةَ التّي تمَّ تقديرها لا يمكنُ اعتبارها حرّةً.
- أمّا فِي حالةِ غيابِ أو فقدانِ مشاهدتينِ مِنَ التّجربةِ فإنّنا نستطيعُ أنْ نعوّضَ عَنِ المشاهدةِ الأولى بقيمةِ مُتوسّطِ المعاملةِ المقابلةِ للمشاهدةِ المفقودةِ $(\bar{Y}_{i.})$ ومُتوسّطُ القطّاعِ الذّي تنتمي إليهِ القيمةُ المفقودةُ $(\bar{Y}_{.j})$ وحسبَ المعادلةِ التّاليةِ:

$$Y_{ij} = \frac{\bar{y}_{i\bullet} + \bar{y}_{\bullet j}}{2}$$

ثمَّ يَتِمُّ حسابُ قيمةِ المشاهدةِ المفقودةِ الثّانيةِ باستخدامِ المعادلةِ السّابقةِ.

بعدَ ذلكَ يَتِمُّ حذفُ قيمةِ المشاهدةِ الأولى التّي تمَّ تقديرها تقريبيّاً بالاعتمادِ على مُتوسّطِ المعاملةِ والقطّاعِ الفاقدِ لها ومِن ثمَّ إعادة الحساباتِ مرّةَ ثانيةً وتقدير قيمةِ المشاهدةِ الأولى باستخدامِ قيمةِ المشاهدةِ المقدّرةِ الثّانية وفقَ المعادلةِ الأولى السّابقة وهكذا يَتِمُّ الحصولُ على القيمتينِ للمشاهدتينِ المفقودتينِ.

وهكذا كُلَّ مرّةٍ نصحّحُ مجموعَ القطّاعِ والمعاملةِ الفاقدةِ وكذلكَ المجموع العامّ وفِي هذهِ الحال عندَ التّحليلِ فِي حالةِ المشاهدتينِ يَتِمُّ حذفُ درجتينِ مِن درجاتِ حرّيّةِ الخطأِ وحذفُ درجتينِ مِن درجاتِ حرّيّةِ المجموعِ العامِّ.

أمّا فِي حالةِ حصولِ فقدانِ كاملِ القطّاعِ أو فقدانِ معاملةٍ ما مِن جميعِ القطّاعاتِ فأنَّ ذلكَ لا يؤثّرُ فِي تحليلِ البياناتِ حيثُ يمكنُ الاستمرارُ فِي التّحليلِ كالمعتادِ وذلكَ باعتبارِ أنَّ عددَ القطّاعاتِ هوَ (r−1) أو عددَ المعاملاتِ هوَ (t−1).

مثال (7−3):

نُفّذتْ تجربةٌ باستخدامِ تصميمِ (CRBD) لدراسةِ تأثيرِ أربعةِ أنواعٍ مِنَ المبيداتِ على إنتاجِ شجرةِ التّفاحِ حيثُ تمَّ تقسيمُ أشجارِ التّفاحِ إلى (3) قطّاعاتٍ، إلّا أنّه تعرّضتْ إحدى الأشجارِ (Y_{32}) إلى العطبِ وفقدانِ إنتاجها و تمَّ تسجيلُ النّتائجِ بالجدولِ (7− 8).

جدول (7−8): كميّاتُ التّفاحِ لأربعةِ أصنافٍ مِنَ المبيداتِ بتصميمِ (CRBD).

المعاملات t_i	القطّاعات			مجاميعُ المعاملات $Y_{i.}$
	القطّاع الأوّل B1	القطّاع الثاني B2	القطّاعُ الثّالث B3	
t_1	8	10	7	$y_{1\bullet} = 25$
t_2	10	11	9	$y_{2\bullet} = 30$
t_3	12	Y_{32}	11	$y_{3\bullet} = 23$
t_4	9	7	6	$y_{4\bullet} = 22$
مجاميعُ القطاعات	$y_{\bullet 1} = 39$	$y_{\bullet 2} = 28$	$y_{\bullet 3} = 33$	$y_{\bullet\bullet} = 100$

المطلوبُ: قدّرْ قيمةَ إنتاجِ الشّجرةِ المعطوبةِ ثمَّ أنشأ جدولَ تحليلِ التّباينِ لهذهِ التّجربةِ.

الحلُّ: نجدُ القيمةَ المفقودةَ أوّلاً:

$$Y_{ij} = \frac{r(y_{\bullet j})+t(y_{i\bullet})-y_{\bullet\bullet}}{(r-1)(t-1)} = Y_{32} = \frac{3(Y_{.2})+t(Y_{3.})-Y_{..}}{(3-1)(4-1)} = \frac{3(28)+4(23)-100}{6} = 12.67$$

ثمَّ ندخلُ القيمةَ المقدّرةَ فِي مكانها ونعيدُ الحساباتِ ونكملُ التّحليلَ الإحصائيَّ كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدول

جدول (7−9): كميّاتُ التّفاحِ بعدَ تقديرِ القيمةِ المفقودةِ لأصنافِ المبيداتِ بتصميمِ (CRBD).

المعاملات t_i	القطاعات			مجاميعُ المعاملات $Y_{i.}$
	القطاع الاول B1	القطاع الثاني B2	القطاع الثالث B3	
t_1	8	10	7	$y_{1\bullet} = 25$
t_2	10	11	9	$y_{2\bullet} = 30$
t_3	12	12.67	11	$y_{3\bullet} = 35.67$

t4	9	7	6	$y_{4\bullet} = 22$
مجاميعُ القطاعاتِ	$y_{\bullet 1} = 39$	$y_{\bullet 2} = 40.67$	$y_{\bullet 3} = 33$	$y_{..} = 112.67$

التّحليلُ الإحصائيُّ لبياناتِ التّجربةِ تَتِمُّ وفقَ الخطواتِ التّاليةِ:

1- نحسبُ معاملَ التّصحيحِ (C.F) كما يلي: $CF = \frac{(Y..)^2}{tr} = \frac{(\sum y_{ij})^2}{tr} = \frac{(112.67)^2}{4\times 3} = 1057.88$

2- مجموعُ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (SSTO):

$$SSTO = \sum y_{ij}^2 - CF = ((8)^2 + (10)^2 + \dots\dots (6)^2) - 51057.88 = 1106.53 - 1057.88 = 48.65$$

3- مجموعُ مُربّعاتِ المعاملاتِ (SSTr):

$$SSTr = \frac{\sum y_{i.}^2}{r} - CF = \frac{(25)^2 + (30)^2 + \dots\dots + (22)^2}{3} - 1057.88 = 35.9$$

4- مجموعُ مُربّعاتِ القطّاعاتِ (SSBk):

$$SSBk = \frac{\sum y_{.j}^2}{t} - CF = \frac{(39)^2 + (40)^2 + \dots + (33)^2}{4} - 1057.88 = 1066.01 - 1057.88 = 8.13$$

5- مجموعُ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيِّ(SSE):

$$SSE = SSTO - SSTr - SSBk = 48.65 - 35.9 - 8.13 = 4.62$$

6- درجاتُ الحرّيّةِ (d.f) لكُلِّ مصدرٍ مِن مصادرِ التّبايُنِ تُحسبُ كَمَا هوَ مُبيّنٌ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ.

7- يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (7-10).

جدول (7-10): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأصنافِ المبيداتِ على التفاحِ بتصميمِ (CRBD).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	درجاتُ الحرّيّةِ d.f	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ *S.S*	مُتوسّطُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ *M.S*	*F* (المحسوبة) F_{tab}	*F* (الجدوليّة) F_{cal}
القطاعاتُ (المكرراتُ) Blocks	r-1=3-1=2	8.13	4.065		
المعاملاتُ Treatments	t-1=4-1=3	35.9	11.97	13.11	5.41
الخطأُ التجريبي Experimental Error	(t-1)* (r-1)=6 6-1=5	4.62	0.92		
المجموعُ Total	tr-1=12-1=11 11-1	48.65			

إنَّ التّحليلَ الإحصائيّ لهذهِ التّجربةِ التّي تضمّنتْ قيمةً مفقودةً تمَّ تحليلها اعتياديّاً ما عدى طرح درجةِ حرّيّةٍ واحدةٍ مِن درجاتِ حرّيّةِ المجموعِ ودرجةٍ واحدةٍ مِن درجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيِّ.

ينتجُ مِن إدخالِ القيمةِ المقدّرةِ للقيمةِ المفقودةِ أنَّ قيمةَ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ (SSTr) سوفَ تتغيّر لذلكَ يتوجّبُ تصحيحها حيثُ يَتِمُّ حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ المصحّحةِ (SS_t) وفقَ المعادلةِ التّاليةِ:

$$SS_t = SSTr - \frac{\left[y_{\bullet j} - (t-1)y_{ij}\right]^2}{t(t-1)}$$

حيثُ أنَّ SS_t يمثل مجموعُ مُربّعاتِ المعاملاتِ المصحّحةِ.

(y_{ij}) : تمثل قيمةُ المشاهدةِ المفقودةِ.

($y_{\bullet j}$): مجموعُ قيمِ القطّاعِ الفاقدِ للمشاهدةِ (بدونِ القيمةِ) أي قبلَ تقديرها.

t: عددُ المعاملاتِ المستخدمةِ في التّجربةِ، وعليهِ سيكونُ مجموعُ مُربّعاتِ المعاملاتِ المصحّحةِ هوَ

$$SS_t = SSTr - \frac{\left[y_{\bullet j} - (t-1)y_{ij}\right]^2}{t(t-1)} = 35.9 - \frac{[28-(4-1)12.67]^2}{4(4-1)} = 35.9 - 8.35 = 27.55$$

إذ أنَّ قيمةَ SS_t=27.55 هيَ التّي ستدخلُ في جدولِ تحليلِ التّباينِ وسيكونُ جدولُ تحليلِ التّباينِ الجديد المصحّح مُبيّنٌ بالجدولِ (7−11).

جدول (7−11): جدولُ تحليلِ التّباينِ (ANOVA Table) المصحّح لأصنافِ المبيداتِ بتصميمِ (CRBD).

مصادرُ التباينِ S.O.V	درجاتُ الحرّيّة d.f	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافات S.S	متوسط مُربّعاتِ الانحرافات M.S	F (المحسوبة) F_{tab}	F (الجدوليّة) F_{cal}
القطاعاتُ (المكرّرات) Blocks	r-1=3-1=2	8.13	4.065		
المعاملاتُ Treatments	t-1=4-1=3	27.55	9.18	9.98	5.41
الخطأ التجريبي Experimental Error	(t-1)* (r-1)=6 6-1=5	4.62	0.92		
المجموعُ Total	tr-1=12-1=11 11-1	48.65			

المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بما أنَّ قيمةَ (F_C=9.98) المحسوبةِ مِن إحصاءةِ الاختبارِ أكبرُ مِن قيمةِ (F_T=5.41) الجدوليّةِ فإنَّ القرارَ برفضِ الفرضِ العدميِّ و نقبلُ الفرضَ البديلَ أي أنّه هناكَ مُتوسّطانِ مِن أصنافِ المبيدِ على الأقلِّ غير متساويانِ.

كذلكَ يُستدلُّ مِن جدولِ انوفا على أنَّ أخذَ القطّاعاتِ في الاعتبارِ عندَ تنفيذِ التّجربةِ لهُ أثرٌ معنويٌّ على الإنتاجيّةِ لِذا يجبُ عدمُ إهمالهِ لأنّه يقلّلُ معنويّاً مِن تبايُنِ الخطأِ التّجريبيِّ.

7-14- الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD) مقارنةً مع التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD).

Relative Efficiency between RCBD & CRD

لقياسِ كفاءةِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD) مقارنةً معَ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ (CRD) يمكننا استخدامُ المقياسِ الآتِي:

$$RE(CRBD:CRD)\% = \frac{(r-1)MSBk+r(t-1)MSE}{(rt-1)MSE} \times 100$$

فإذا كانتْ القطّاعاتُ فعّالةً في تقليلِ الخطأِ التّجريبيِّ فإنَّ قيمةَ هذا المقياسِ تكونُ أكبرَ مِن (100).

ويمكنُ تفسيرُ قيمةِ هذا المقياسِ كَمَا يأتِي:

إذا فرضنا أنَّ عددَ تكراراتِ المعالجاتِ فِي التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ هوَ (r_c) وعددَ تكراراتِ المعالجاتِ فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD) هوَ (r_b) فلكي تكونَ كفاءةُ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ مساويةً لتصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ فلا بدَّ أن يكونَ r_c=RE*r_b

فعلى سبيلِ المثالِ، لو كانَ (RE=1.6) وكانتْ عددُ تكراراتِ المعالجاتِ (عددُ القطّاعاتِ) فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ هوَ (r_b=r=5) فلا بدَّ أن يكونَ عددُ التّكراراتِ فِي التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ للوصولِ إلى نفسِ كفاءةِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ مساوٍ للقيمةِ: R_c=RE*r_b=1.6*5=8

مثال (7-4):

نفّذتْ تجربةٌ باستخدامِ تصميمِ (CRBD) لدراسةِ تأثيرِ أربعةِ أصنافٍ مِن أدويةِ ارتفاعِ الضّغطِ الشّرياني على مجموعةٍ مِنَ المرضى، حيثُ تمَّ تقسيمُ المرضى حسبَ أعمارِهم إلى (5) قطّاعاتٍ، وكانتِ النّتائجُ بعدَ التّحليلِ مدوّنةً بجدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (7-12).

جدول (7-12): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأصنافِ أدويةِ الضّغطِ بتصميمِ (CRBD).

مصادر التباين S.O.V	درجاتُ الحرية d.f	مجموع مربعات الانحرافات S.S	متوسط مربعات الانحرافات M.S	Fالمحسوبة F cal.

القطاعات (المكررات) Blocks	r-1=4	SSBk=21.46	MSBk=5.36	
المعاملاتُ Treatments	t-1=4-1=3	SSTr=134.45	MSTr=44.83	20.46
الخطأ التجريبي Experimental Error	(t-1)* (r-1)=12	SSE=26.26	MSE=2.19	
التباينُ الكلّي Total	tr-1=19	SSTO=182.17		

المطلوبُ: مِن أجلِ التّأكّدِ مِن ملائمةِ التّصميمِ المستعملِ فِي التّجربةِ قمْ بقياسِ كفاءةِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD) مقارنةً معَ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ (CRD)

الحلُّ:

لقياسِ كفاءةِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD) مقارنةً معَ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ (CRD) يمكننا استخدامُ المقياسِ الآتِي:

$$RE(CRBD:CRD)\% = \frac{(r-1)MSBk+r(t-1)MSE}{(rt-1)MSE} \times 100 = \frac{4\times 5.36+15\times 2.19}{19\times 2.19} \times 100 = 131\%$$

وهذهِ النّتيجةُ تعني أنَّ تصميمَ (CRBD) أكبرُ كفاءةً مِن تصميمِ (CRD) بمقدارِ 30%، أي أنَّ استعمالَ 130 تكرارٍ (مريضٍ) باستعمالِ تصميمِ (CRD) تعطي نفسَ نتيجةِ استعمالِ 100 مكرّرٍ (مريضٍ) باستعمالِ تصميمِ (CRBD) لذلكَ فإنَّ التّكلفةَ الاقتصاديّةَ فِي حالِ تطبيقِ تصميمِ (CRD) تكونُ أعلى وأنَّ استعمالَ تصميمِ (CRBD) أفضلُ.

وفِي هذا المثالِ بِما أنَّ الكفاءةَ النّسبيةَ تساوي (RE=1.3) وكانتْ عددُ تكراراتِ المعالجاتِ (القطّاعاتِ) فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ هوَ (r_b=r=5) فلا بدَّ أنْ يكونَ عددُ التّكراراتِ فِي التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ للوصولِ إلى نفسِ كفاءةِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ مساوٍ للقيمةِ:

R_c=RE*r_b=1.3*5=6.5=7

مثال (7-5):

الشكل التالي يمثل مخطط تجربة على أرض زراعية بتصميم القطاعات العشوائية الكاملة (CRBD) لتقيم (3) أصناف من السماد (t_1, t_2, t_3) على انتاج القمح. وقبل جني المحصول تعرضت قطعة أرض واحدة للتلف بسبب عوامل خارجية.

المشاهدات (كميات القمح) كغ			القطاعات
$t_2=5$	$t_1=6$	$t_3=3$	القطّاعُ الأوّل (B1)
$t_3=2$	$t_1=10$	$t_2=6$	القطّاعُ الثّاني (B2)
…….	$t_3=4$	$t_1=9$	القطّاعُ الثّالث (B3)
$t_1=10$	$t_3=4$	$t_2=2$	القطّاعُ الرّابع (B4)

شكل (7-6): مخطط التجربة للمثال (7-5).

المطلوب:

1- نظم البيانات و قدر قيمة محصول قطعة الأرض المفقودة (....)

2- نظم جدول تحليل التباين للتجربة و هل هناك فروق معنوية بين المعاملات ؟

3- هل تقسيم الوحدات التجريبية إلى قطاعات كان ذو أهمية في هذا التصميم ؟.

4- طبق اختبار (LSD) لمقارنة متوسطات أصناف السماد بمستوى معنوية (α=0.05)؟

5- احسب كفاءة تصميم القطاعات العشوائية الكاملة (CRBD) مقارنة مع التصميم تام العشوائية (CRD).

الحل:

أولاً: يتم تنظيم البيانات بالجدول الأتي لتسهيل عملية اجراء العمليات الاحصائية:

جدول (7-13): تنظيم البيانات التي تمثل كميات القمح للمثال (7-5).

مجموع المعاملات	المشاهدات				
	B4	B3	B2	B1	اصناف السماد
$Y_{1.}=35$	10	9	10	6	t_1
$Y_{2.}=13$	2	....	6	5	t_2
$Y_{3.}=13$	4	4	2	3	t_3
$Y_{..}=61$	16	13	18	14	مجموع

يتم تقدير القيمة المفقودة بالعلاقة التالية:

$$Y_{ij}=\frac{r(\mathbf{y_{\cdot j}})+t(y_{i\cdot})-\mathbf{y_{\cdot\cdot}}}{(r-1)(t-1)}=\frac{4(\mathbf{13})+3(13)-\mathbf{61}}{(3)(2)}=5$$

4- صياغة الفروض الاحصائية:

الفرض العدمي: (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3$) متوسطات الانتاج لأصناف السماد الثلاثة متساوية.

⬅ **الفرض البديل :**(H_1) متوسطات الانتاج لأصناف السما الثلاثة غير متساوية (أو يوجد على الأقل متوسطين غير متساويين).

5- تنظيم الحسابات في جدول تحليل التباين (AVOVA TABLE):

تستبدل القيمة المفقودة وتوضع المقدرة مكانها ويصبح الجدول كما يلي:

جدول (7-14): تنظيم البيانات بعد تقدير القيمة المفقودة.

اصناف السماد	المشاهدات B1	B2	B3	B4	مجموع المعاملات	متوسط المعاملات
t_1	6	10	9	10	$Y_{1.}$=35	8.75
t_2	5	6	5	2	$Y_{2.}$=18	4.5
t_3	3	2	4	4	$Y_{3.}$=13	3.25
مجموع	14	18	18	16	$Y_{..}$=66	

حساب معامل التصحيح (Correction Factor -CF):

$$CF = \frac{(Y_{..})^2}{tr} = \frac{(\sum y_{ij})^2}{tr} = \frac{(66)^2}{4\times 3} = 363$$

7- حساب مجموع المربعات الكلية (Sum Square of Total-SSTO):

$$SSTO = \sum y_{ij}^2 - CF = ((7)^2 + (12)^2 + \dots\dots (3)^2) - 363 = 452 - 363 = 89$$

8- حساب مجموع مربعات المعاملات (Sum Square of treatments -SSTr):

$$SSTr = \frac{\sum y_{i.}^2}{r} - CF = \frac{(35)^2 + (18)^2 + (13)^2}{4} - 363 = 429.5 - 363 = 66.5$$

9- مجموع مربعات القطاعات (SSBK):

$$SSBK = \frac{\sum y_{.j}^2}{t} - CF = \frac{(14)^2+(18)^2+(18)^2+(16)^2}{3} - 363 = 366.66 - 363 = 3.66$$

10- حساب مجموع مربعات الخطأ التجريبي (Sum Square of Error -SSE):

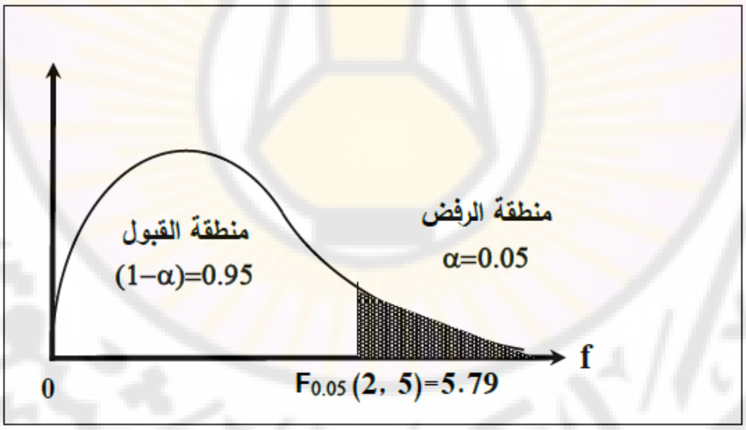
$$SSE = SSTO - SSTr - SSBK = 89 - 66.5 - 3.66 = 18.84$$

جدول (7-15): جدول أنوفا للمثال (7-5).

مصادر التباين Source of Variance (S.O.V)	مجموع مربعات الانحرافات Sum of squares (SS)	درجات الحرية df	متوسط المربعات (التباين) Mean squares (MS)	F (المحسوبة) Calculated	F (الجدولية) Tabulated
بين المعاملات (الأصناف) Treatments	SSTr=66.5	t-1=2	MSTr= 33.25	$F_t = \frac{33.25}{3.77} = 8.82$	$F_{0.05}(2,5)=5.79$
القطاعات Blocks	SSBK=3.66	r-1=3	MSBK= 1.22	$F_{Bt} = \frac{1.22}{3.77} = 0.32$	$F_{0.05}(3,5)=5.41$
الأخطاء التجريبية (Experimental Error)	SSE=18.84	(t-1)(r-1)-1=5	MSE=3.77		
المجموع Total	SSTO = 89	tr-1-1=10			

5- تحديد منطقتي القبول والرفض:

يتم تحديد منطقتي القبول والرفض بالحصول على قيمة F_T (F الجدولية) بمستوى معنوية (α=0.05) أي استخراج قيمة $F_{0.05}(2, 5)=5.79$



شكل (7-7): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (7-5).

5- المقارنة واتخاذ القرار: بما أن قيمة F_t=8.82 المحسوبة أكبر من قيمة F_T=5.79 الجدولية فإن القرار برفض الفرض العدمي أي يوجد على الاقل متوسطان غير متساويان.

ثانياً: اختبارُ أهميّةِ أخذِ القطّاعاتِ في الاعتبارِ عندَ التّصميمِ:

مِن أجلِ اختبارِ أهميّةِ أخذِ القطّاعاتِ في الاعتبارِ في تصميمِ التّجربةِ نقارن (F_{BC}) المحسوبة للقطاعات مع (F_{BT}) الجدولية للقطاعات كما يلي:

▪ بِما أنّ (F) المحسوبة للقطاعات أصغر من الجدولية $F_{BC} = 0.32) < (F_{BT} = 5.41)$ (فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ القطّاعاتِ فِي هذهِ التّجربةِ لم يكن مفيداً.

تطبيق اختبار (LSD):

تحسب قيمة (LCD) من المعادلة الأتية: $LSD = t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)}\sqrt{\frac{2MSE}{r}}$

ويتم استخراج القيمة الجدولية (t) وفقاً لما يلي: $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)} = t_{(0.025,\ 5)} = 2.57$

$$LSD = t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)}\sqrt{\frac{2MSE}{r}} = 2.57 \times \sqrt{\frac{2\times 3.77}{4}} = 3.53$$

LSD 3.53 / Mean	t_3=3.25	t_2=4.5	t_1=8.75
t_1=8.75	5.5*	4.25*	0
t_2=4.5	1.25	0	0
t_3=3.25	0		

لقياس كفاءة تصميم القطاعات العشوائية الكاملة (CRBD) مقارنة مع التصميم تام العشوائية (CRD)

كفاءة تصميم القطاعات العشوائية الكاملة (CRBD) مقارنة مع التصميم تام العشوائية (CRD)

$$RE(CRBD{:}\,CRD)\% = \frac{(r-1)MSBK + r(t-1)MSE}{(rt-1)MSE} \times 100$$
$$= \frac{(3)1.22 + 4(2)3.77}{(11)3.77} \times 100 = 81.5\%$$

تصميمُ المُربّعِ اللاتينيّ

Latin Square Design (L.S)

Damascus University

الفصلُ الثّامنْ

تصميمُ المُربّعِ اللاتينيّ

Latin Square Design (L.S)

8-1- مُقدّمة:

رأينا سابقاً فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD) يَتِمُّ تجميعُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ فِي قطّاعٍ واحدٍ بحيث تكونُ الوَحداتُ التّجريبيّةُ داخلَ القطّاعِ متجانسةٍ بالنّسبةِ لمصدرِ اختلافٍ معيّنٍ (درجةُ الخصوبةِ)، ولكنْ تَختلِفُ مِنْ قطّاعٍ إلى آخرٍ. حيثُ كانَ الهدفُ الأساسيَّ مِنْ هذا التّجميعِ هوَ إزالةُ (أو فصلُ) مصدرٍ جديدٍ مِن مصادرِ الاختلافِ (بينَ القطّاعاتِ) عَنِ الخطأِ التّجريبيِّ ممّا يزيدُ مِنْ دقّةِ التّجربةِ.

وفِي بعضِ التّجارب يَرغَبُ الباحثُ فِي التّحكّمِ فِي مصدرينِ للاختلافِ (خصوبةُ التّربةِ وملوحةُ التّربةِ) عوضاً عن مصدرٍ واحدٍ، وهذا يَصْعُبُ تحقيقهُ فِي تصميمِ (CBRD).

أمّا تصميمُ المُربّعِ اللّاتينيّ فيُتيحُ للباحثِ بالتّحكّمِ فِي مصدرينِ للاختلافِ فِي آنٍ واحدٍ، وذلكَ بتقسيمِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ غيرَ المتجانسةِ إلى مجموعاتٍ فِي اتجاهينِ متعامدينِ. و ذلكَ على أساسِ صفتينِ متعامدتينِ، أي استعمالُ نوعينِ مِنَ القطّاعاتِ، النّوعُ الأوّلُ و يُرمزُ لهُ بالصّفوفِ (Rows) و الثّاني يُرمزُ لهُ بالأعمدةِ (Columns) وبالتّالي يَتِمُّ فصلُ مصدرينِ للاختلافِ عَنِ الخطأِ التّجريبيّ ممّا يُؤدّي إلى زيادةِ دقّةِ التّجربةِ.

8-2- تصميمُ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS):

تصميمُ المُربّعِ اللّاتينيّ هوَ ذلكَ التّصميمُ الذّي يَتِمُّ فيهِ تجميعُ (تقسيمُ) الوَحداتِ التّجريبيّةِ غيرَ المتجانسةِ إلى مجموعاتٍ تضمُّ كُلٌّ منها وَحداتٍ تجريبيّةٍ متجانسةٍ بنفسِ عددِ المعاملاتِ الدّاخلةِ فِي التّجربةِ، ويَتِمُّ التّجميعُ فِي اتجاهينِ متعامدينِ همَا صفوفٌ (Rows) وأعمدةٌ (Columns) بشرطِ أنَّ كُلَّ

معاملةٍ تظهرُ مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ صفٍّ و مّرةً واحدةً فقط فِي كُلِّ عمودٍ، ومعنى ذلكَ بأنَّ كُلَّ صفٍّ وكُلَّ عمودٍ هوَ بمثابةِ قطّاعٍ.

ويكونُ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المطلوبةِ لتطبيقِ تجربةٍ ما باستخدامِ هذا التّصميمِ مُساوياً لمُربّعِ عددِ المعاملاتِ المطلوبِ دراستها فِي تلكَ التّجربةِ، ويُرمزُ للمعاملاتِ بالحروفِ اللاتينيّةِ ومِن هنا جاءَت تسميةُ هذا التّصميمِ باسم المُربّعِ اللّاتينيّ .

8-2-1- استخداماتُ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS):

فيما يلِي الحالاتُ التّي يُستخدمُ فيها تصميمُ المُربّعِ اللّاتينيّ:

- يُستخدمُ هذا التّصميمُ فِي حالةِ عدمِ التّجانسِ (الاختلافِ) فِي اتجاهينِ متعامدينِ، يكوّنانِ مصدرينِ للاختلافِ (التّبايُنِ) مثلاً اختلافٌ فِي خصوبةِ التّربةِ يتّجهُ مِنَ الشّمالِ إلى الجنوبِ واختلافٌ آخرَ فِي ملوحةِ التّربةِ يتّجهُ مِنَ الشّرقِ إلى الغربِ، ويكونُ هدفُ التّصميمِ فصلَ هذهِ التّأثيراتِ عَنِ الخطأِ التّجريبيّ بغرضِ زيادةِ دقّةِ وكفاءةِ التّجربةِ.
- يُستخدمُ فِي حالةِ عددِ المعاملاتِ من 4-8 معاملاتٍ بشرطِ عدمِ تكرارِ أيِّ معاملةٍ داخلَ أيِّ صفٍّ أو عمودٍ.

أمثلةٌ على استخداماتِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ:

1- عندَ مقارنةِ كفاءةِ عدّةِ أنواعٍ مِنَ الأعلافِ فِي تسمينِ الأغنامِ، فَمِنَ الممكنِ أن يكونَ جنسُ الحيوانِ هوَ عاملُ القطّاعاتِ الأوّلِ (الصّفوف) وصنفُ الحيوانِ هوَ عاملُ القطّاعاتِ الثّاني (الأعمدة).

2- عندَ مقارنةِ تأثيرِ عدّةِ أنواعٍ مِنَ الأسمدةِ على كميّةِ محصولِ القمحِ، فَمِنَ الممكنِ أن تكونَ الحقولُ الزّراعيّةُ هيَ عاملُ القطّاعاتِ الأوّلِ (الصّفوف)، ونوعُ القمحِ هوَ عاملُ القطّاعاتِ الثّاني (الأعمدة).

3- عندَ مقارنةِ بعضِ المعالجاتِ فِي التّجارب المعمليّةِ، فَمِنَ الممكنِ أن يكونَ فنيُّ المختبرِ (إذا كانَ هناكَ عدّةُ فنييّنَ يقومونَ بتنفيذِ التّجربةِ) هوَ عاملُ القطّاعاتِ الأوّلِ(الصّفوف)، والفترةُ الزّمانيّةُ التّي تُطبّقُ فيها التّجربةُ(إذا لم يكن بالإمكانِ إكمالُ التّجربةِ فِي فترةٍ زمانيّةٍ واحدةٍ)هيَ عاملُ القطّاعاتِ الثّاني(الأعمدة.)

8-2-2 مُميّزاتُ وعيوبُ تصميمِ المُربّعِ اللاّتينيّ (LS):

مُميّزاتُ التّصميمِ (LS):

1- فِـي تصــميمِ المُربّـعِ اللاّتينــيّ يكـونُ عـددُ المعـاملاتِ يسـاوي عـددَ الصّـفوفِ ويسـاوي عـددَ الأعمدةِ(t=r=c)، و يكونُ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ فِي هذا التّصميمِ مساوياً لمُربّعِ عددِ المعاملاتِ المطلوبِ دراسة تأثيرها.

2- إنَّ شرطَ المُربّعِ اللاّتينيّ هوَ أنَّ كُلَّ معاملةٍ تظهرُ مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ صفٍّ و مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ عمودٍ.

3- يَتِمُّ توزيعُ المعاملاتِ على الصّفوفِ والأعمدةِ بطريقةٍ عشوائيّةٍ بشرطِ أنَّ كُلَّ معاملةٍ تظهرُ مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ صفٍّ و مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ عمودٍ.

4- تصميمُ المُربّعِ اللاّتينيّ يُعدُّ أدقَّ (أكفأ) مِنَ التّصميمينِ (RCBD) و (CDR).

5- يُمكنُ تقديرُ القِيمِ المفقودةِ بسهولةٍ بمعادلةٍ خاصّةٍ فِي حالةِ فقدِ بعضِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ.

6- التّحكّمُ فِي الاختلافاتِ الموجودةِ أصلاً بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ بدرجةٍ أكبر مِنَ التّصميمينِ السّابقينِ وبالتّالي يكونُ تباينُ الخطأِ أصغرَ ممّا يُؤدّي إلى زيادةِ كفاءةِ ودقّةِ التّجربةِ.

عيوبُ التّصميمِ (LS):

إنَّـهُ مِنْ أكبرِ عيوبِ هذا التّصميمِ هِي زيادةُ نسبةِ الخطأِ التّجريبيّ فِي حالـةِ استعمالِ أقلّ مِنْ ثلاثِ معاملاتٍ وكذلكَ يُصبحُ التّحليلُ مُعقّداً فِي حالةِ زيادةِ عددِ المعاملاتِ عن ثمانيةٍ.

1- لا يُنصحُ باستخدامِ هذا التّصميمِ إذا كانَ عددُ المعاملاتِ أقلَّ مِنْ (3) معاملاتٍ، لأنَّ درجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ تساوي ((dfe=(t-1)(t-2) تكونُ قليلةً وبالتّالي ترتفعُ قيمةُ تبايُنِ الخطأ التّجريبيّ ($MSE = \frac{SSE}{dfe}$) ممّا يُؤدّي إلى اتّخاذِ قراراتٍ خاطئةٍ (رفض فرضيّاتٍ صحيحةٍ). مثلاً فِي حالةِ مُربّعٍ لاتينيّ (2×2) لا يبقى درجات الحرّيّة للخطأ (dfe=0)، وفِي حالةِ (3×3) يكونُ هناكَ درجتي حرّيّة للخطأ التّجريبيّ (dfe=2) فقط، لذلكَ لا يُنصحُ باستخدامِ هذا التّصميمِ فِي حالةِ قلّةِ المعاملاتِ عَن ثلاثةٍ.

2- لا يُنصحُ باستخدامِ هذا التّصميمِ إذا كانَ عددُ المعاملاتِ أكثَر مِن (8) معاملاتٍ، وذلكَ لأنَّ عددَ الوَحداتِ التّجريبيّة يساوي مُربّعَ عددِ المعاملاتِ، وبالتّالي زيادةُ عددِ المعاملاتِ يُؤدّي إلى

ارتفاعِ عددِ الوَحداتِ التّجريبيّة وعليهِ أنّهُ كلّما زادَتْ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّة كلّما زادَ الخطأُ التّجريبيّ.

3-8- تخطيطُ التّجربةِ (Layout of the Experiment):

يَتمثّلُ تصميمُ المُربّعِ اللّاتينيّ الذّي يحتوي على (5) معاملاتٍ مثلاً هيَ (A, B, C, D, E) فِي مُربّعٍ مكوّنٍ مِن (5) صفوفٍ و (5) أعمدةٍ، ومخطط هذا التّصميم هوَ الموضّحُ بالشّكلِ (8−1) الذّي يُسمَّى المُربّعُ اللّاتينيّ القياسيّ، و المُربّعُ القياسيّ هوَ ذلكَ المُربّعُ الذّي تترتّبُ فيهِ المعاملاتُ فِي العمودِ الأوّلِ أو الصّفِ الأوّلِ ترتيباً تنازليّاً أو تصاعديّاً. وفِي كُلِّ الأحوالِ تظهرُ المعاملةُ مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ صفٍّ و مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ عمودٍ.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	B	C	D	E	A
3	C	D	E	A	B
4	D	E	A	B	C
5	E	A	B	C	D

شكل (8−1): المُربّعُ اللّاتينيّ القياسيّ.

ومِن أجلِ تنفيذِ تجربةٍ بتصميمِ المُربّعِ اللاّتينيّ نقومُ أوّلاً باختيارِ مُربّعٍ لاتينيٍّ قياسيٍّ بطريقةٍ عشوائيّةٍ ثمَّ نُطبّقُ عمليّةَ التّعشيةِ على هذا المُربّعِ ليُصبحَ مخطّطٌ معتمدٌ للتّجربةِ وذلكَ عَن طريقِ تبديلِ الصّفوفِ معَ بعضِها وتبديلِ الأعمدةِ معَ بعضِها بطريقةٍ عشوائيّةٍ، مع ملاحظةِ أنّه بعدَ عمليّةِ التّعشيةِ يَحتفِظُ المُربّعُ اللّاتينيّ بالخاصيّةِ الأساسيّةِ وهيَ أنَّ كُلَّ معاملةٍ تظهرُ مرّةً واحدةً فِي كُلِّ عمودٍ وفِي كُلِّ سطرٍ ليُصبحَ مخطّطٌ مُعتَمَدٌ للتّجربةِ كَمَا بالشّكلِ (8−2).

	2	4	5	3	1
3	B	C	A	D	E
5	C	E	B	A	D
1	A	B	D	E	C
4	D	A	E	C	B
2	E	D	C	B	A

شكل (8−2): المربع اللاتيني العشوائي.

مثال (8-1):

كمثالٍ لتخطيطِ تجربةٍ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ، نفرضُ أنَّ عددَ المعاملاتِ المُراد تطبيقها (t=5) معاملاً وهي (A, B, C, D, E)، لذلكَ يجبُ أنْ يكونَ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ (t^2=25)، مقسّمةً إلى خمسةِ صفوفٍ و خمسةِ أعمدةٍ، ويَتِمُّ توزيعُ المعاملاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ بشكلٍ عشوائيٍّ و بشرطِ أنَّ كُلَّ معاملةٍ تظهرُ مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ صفٍّ و مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ عمودٍ كَمَا هوَ مُبيّنٌ بالجدولِ (8-1).

جدول (8-1): تخطيطُ تجربةٍ بتصميمِ (LS).

		مستوياتُ عاملِ قطّاعاتِ الأعمدةِ				
		C1	C2	C3	C4	5C
مستوياتُ عاملِ قطّاعاتِ الصّفوفِ	R1	E	B	A	D	C
	R2	D	E	B	C	A
	R3	A	C	D	B	E
	R4	B	A	C	E	D
	5R	C	D	E	A	B

مثال (8-2):

يُمكِنُ استعمالُ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ فِي تجارب الإنتاجِ الحيوانيِّ بمردودٍ عالٍ، و ذلكَ بتجميعِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى مجاميعَ متجانسةٍ بالنّسبةِ للعمرِ و الوزنِ مثلاً، معَ اختبارِ عدّةِ أنواعٍ مِنَ العلائِقِ و الجدول (2) يوضّحُ مخطّطَ التّجربةِ دراسة تأثيرِ (5) أنواعٍ مِنَ العلائِقِ العلفيّةِ (معاملات) هيَ (A, B, C, D, E) المختلفة على تسمينِ الخرافِ (25 خروف).

الوَحداتُ التّجريبيّةُ هنَا تُمثّلُ (25 خروف) حيثُ قُسّمتْ إلى خمسِ مجموعاتٍ (أعمدةٍ) حسبَ الوزنِ وكُلّ عمودٍ يتألّفُ مِن (5) خرافٍ، كذلكَ تمَّ تقسيمُ الخرافِ إلى خمسِ مجموعاتٍ (صفوفٍ) حسبَ العائلةِ (السُّلالةِ) كَمَا هوَ مُبيّنٌ بالجدولِ (8-2)، فتصميمُ المُربّعِ اللّاتينيّ المستعملِ يُعطي كُلُّ رأسٍ ضمنَ العائلةِ الواحدةِ إحدى العلائِق الخمسِ، كَمَا و يُعطي كُلُّ رأسٍ ضمنَ المجموعةِ التّي تؤلّفُ وزناً معيّناً عليقةً مختلفةً.

جدول (8-2): تخطيطُ تجربةٍ لخمسِ علائِقَ علفيّةٍ بتصميمِ (LS).

		الأعمدةُ				
الصّفوفُ		وزن 1	وزن 2	وزن 3	وزن 4	وزن 5
	العائلة 1	D	A	B	C	E
	العائلة 2	A	B	E	D	C
	العائلة 3	B	C	D	E	A
	العائلة 4	E	D	C	A	B
	العائلة 5	C	E	A	B	D

مثال (8-3):

نُفّذَتْ تجربةٌ لاختبارِ (4) أصنافٍ مِن دواءِ الضّغطِ وهيَ (A, B, C, D) على (16) مريضٍ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (L.S) حيثُ تمَّ تصنيفُ المرضى حسبَ مؤشّرِ العمرِ بالسّنواتِ إلى (4) فئاتٍ مثّلتِ الصّفوفَ، ووفقَ مؤشّرِ الوزنِ بالكلغ إلى (4) فئاتٍ مثّلتِ الأعمدةَ، الجدولُ (8-3) يُمثّلُ هذا التّصميمَ.

جدول (8-3): تخطيطُ تجربةٍ لأربعةِ أصنافِ دواءٍ بتصميمِ (LS).

	الأعمدةِ الوزن (كغ)				
الصّفوفِ العمر (السّنة)		C1 0-30	C2 30-60	C3 60-90	C4 90-120
	R1 0-20	D	B	A	C
	R2 20-40	B	A	C	D
	R3 40-60	C	D	B	A
	R4 60-80	A	C	D	B

لاحِظ: أنَّ كُلَّ وحدةٍ تجريبيّةٍ تُمثّلُ مريضاً واحداً وكُلَّ معاملةٍ (صنف دواء) تظهرُ مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ صفٍّ و مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ عمودٍ.

8-4- تنظيمُ البياناتِ (المُشاهداتِ):

بعدَ تسجيلِ المُشاهداتِ للوَحداتِ التّجريبيّةِ، يَتِمُّ تنظيمها بالجدولِ (8-4) تمهيداً لحسابِ المجاميع الخاصّةِ بتحليلِ التّبايُنِ وتنظيمها فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ.

جدول (8-4): تنظيمُ المُشاهداتِ لتجربةٍ بتصميمِ (LS).

Damascus University

		مستوياتُ عاملِ قطّاعاتِ الأعمدةِ				مجاميعُ الصّفوفِ	مجاميعُ المعاملاتِ	مُتوسّطُ المعاملاتِ
		C1	C2	C3	C4	$y_{i\bullet}$	$y_{\bullet(k)}$	$\bar{y}_{\bullet(k)}$
مستوياتُ عاملِ قطّاعاتِ الصّفوفِ	R1	y_{11}(4)	y_{12}(2)	y_{13}(1)	y_{14}(3)	$y_{1\bullet}$	$y_{\bullet(1)}$	$\bar{y}_{\bullet(1)}$
	R2	(2)y_{21}	(1)y_{22}	(3)y_{23}	(4)y_{24}	$y_{2\bullet}$	$y_{\bullet(2)}$	$\bar{y}_{\bullet(2)}$
	R3	(3)y_{31}	(4)y_{32}	(2)y_{33}	(1)y_{34}	$y_{3\bullet}$	$y_{\bullet(3)}$	$\bar{y}_{\bullet(3)}$
	R4	(1)y_{41}	(3)y_{42}	(4)y_{43}	(2)y_{44}	$y_{4\bullet}$	$y_{\bullet(4)}$	$\bar{y}_{\bullet(4)}$
مجاميعُ الأعمدةِ $y_{\bullet j}$		$y_{\bullet 1}$	$y_{\bullet 2}$	$y_{\bullet 3}$	$y_{\bullet 4}$	المجموع الكلي $y_{\bullet\bullet}$		

8-5- النّموذجُ الرّياضيُّ العامُّ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيِّ (LS):

معادلةُ النّموذجِ الرّياضيّ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ كَمَا يلِي:

$$Y_{ij(k)} = \mu + r_i + c_j + t_k + e_{ij(k)}$$

$Y_{ij(k)}$: قيمةُ المُشاهدةِ الخاصّةِ بالوحدةِ التّجريبيّةِ التّي طُبّقتْ عليها المعاملةُ (k) والتّي تقعُ فِي الصّفِّ (i) والعمودِ (j).

μ : المتوسّطُ العامُّ للصّفةِ المدروسةِ (المجتمعِ) ويُقدَّرُ بقيمةِ المتوسّطِ العامِّ لمُشاهداتِ التّجربة.

r_i: قيمةُ التّأثيرِ الحقيقيّ للصّفِّ i.

c_j: قيمةُ التّأثيرِ الحقيقيّ للعمودِ j.

t_k: قيمةُ التّأثيرِ الحقيقيّ للمعاملةِ k.

$e_{ij(k)}$: القيمةُ الحقيقيّةُ للخطأِ التّجريبيّ الخاصِّ بالمُشاهدةِ التّي طُبِّقتْ عليها المعاملةُ (k) والتّي تقعُ فِي الصّفِّ (i) والعمودِ (j).

8-6- الأهدافُ الأساسيّةُ مِنْ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS):

إنَّ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ الأهدافَ الأتيةُ:

1- اختبارُ تَساوي مُتوسّطاتِ المعالجاتِ.

2- اختبارُ أهميّةِ أخذ الصّفوفِ فِي الاعتبارِ عندَ التّصميمِ.

3- اختبارُ أهميّةِ أخذ الأعمدةِ فِي الاعتبارِ عندَ التّصميمِ.

4- إجراءُ المقارناتِ الثّنائيّةِ أو البعديّةِ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ باستخدامِ اختباراتِ (LSD, DMRT).

8-6-1- اختبارُ تساوي مُتوسّطاتِ المعالجاتِ:

خطواتُ تطبيقِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS)

من أجلِ تحقيقِ الهدفِ الأوّل من تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS)، يَتِمُّ تطبيقُ اختباراتِ الفروضِ الإحصائيّةِ لاختبارِ فيما إذا كانَ هناكَ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ وفقاً للخطواتِ الآتيةِ:

16) صِياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ

17) تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE)

18) حسابُ قيمةِ إحصاءةِ الاختبارِ (F_c)

19) استخراجُ قيمةِ (F_t) الجدوليّةِ وتحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ:

20) المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ:

4- صِياغةُ الفروضِ الإحصائيّةِ:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2 \ldots\ldots=\mu_t$) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ متساويةٌ (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ).
- **الفرضُ البديلُ** :(H_1) مُتوسّطاتُ المعالجاتِ غيرُ متساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ متوسّطينِ غيرَ متساويينِ).

5– تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE)

فِي هذا التّصميمِ يَتِمُّ تقسيمُ المجموعِ الكلّي لمُربّعاتِ انحرافاتِ المُشاهداتِ عَنِ المُتوسّطِ العامِّ $SSTO=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\bar{Y}_{..})$ ودرجاتِ الحرّيّةِ الكلّيّةِ ($df_{TO}=N-1=t^2-1$) وفقاً لمصادرِ الاختلافِ إلى (4) مكوّناتٍ (مصادرٍ) وهيَ:

1) مجموعُ مُربّعاتِ المعالجاتِ (SSTr) بدرجاتِ حرّيّة ($df_{SSTr}=t-1$).

2) مجموعُ مُربّعاتِ الصّفوفِ (SSr) بدرجاتِ حرّيّة ($df_{SSr}=t-1$).

3) مجموعُ مُربّعاتِ الأعمدةِ (SSc) بدرجاتِ حرّيّة ($df_{SSc}=t-1$).

4) مجموعُ مُربّعاتِ الخطأ التّجريبيّ (SSE) بدرجاتِ حرّيّة ($df_{SSE}=(t-1)(t-2)$).

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = t\sum_{k=1}^{t}(\bar{y}_{.(k)}-\bar{y}_{..})^2 + t\sum_{i=1}^{t}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 + t\sum_{j=1}^{t}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{.(k)}+2\bar{y}_{..})^2$$

+ SSr + SSc + SSE SSTr = SSTO

يمكنُ حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ (SS) لكُلِّ مصدرٍ مِن مصادرِ التّبايُنِ إمّا باستخدامِ المُتوسّطاتِ(Means) أو باستخدامِ المجاميعِ (Summations) لتصميمِ (LS) كَمَا هوَ مُبيّنٌ بالجدولِ (5−8).

جدول (8−5): جدولُ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لتصميمِ (LS).

	مجموع مربعات الانحرافات SS	
مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	باستخدام المتوسطات $(Means)$	باستخدام المجاميع متوسطات $(Summations)$
الصّفوفُ Rows	$SSr=t\sum_{i=1}^{t}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$	$SSr=\frac{\sum_1^t (y_{i.})^2}{t}-CF$
الأعمدةُ	$SSc=t\sum_{j=1}^{t}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2$	$SSc=\frac{\sum_1^t (y_{.j})^2}{t}-CF$

Columns		
المعاملاتُ Treatments	$SSTr = t\sum_{k=1}^{t}(\bar{y}_{.(k)} - \bar{y}_{..})^2$	$SSTr = \frac{\sum_{k=1}^{t} y_{.(k)}^2}{t} - CF$
الخطأ التجريبي Experimental Error	$SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij(k)} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{.(k)} + 2\bar{y}_{..})^2$ SSE=SSTO – SSTr- SSr -SSC	SSE=SSTO – SSTr- SSr - SSC
التّباينُ الكلّي Total	$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij(k)} - \bar{y}_{..})^2$	$SSTO = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF$

تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ

يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (8−6).

جدول (8−6): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتصميمِ (LS).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	درجاتُ الحرّيّةِ d.f	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُنِ) S.M	F(المحسوبة) $F_{cal.}$	F(الجدوليّة) $F_{Tab.}$
الصّفوفُ Rows	SSr	t-1	$MSr = \frac{SSr}{t-1}$	$F_r = \frac{MSr}{MSE}$	F_α(t-1,(t-1)(t-2))
الأعمدةُ	SSc	t-1	$MSc = \frac{SSc}{t-1}$	$F_c = \frac{MSc}{MSE}$	

Columns					
المعاملاتُ Treatments	SSTr	t-1	$MSTr = \frac{SSTr}{t-1}$	$F_{tr} = \frac{MSTr}{MSE}$	
الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	SSE	(t-1)(t-2)	$MSE = \frac{SSE}{(t-1)(t-2)}$		
المجموعُ Total	SSTO	t^2-1			

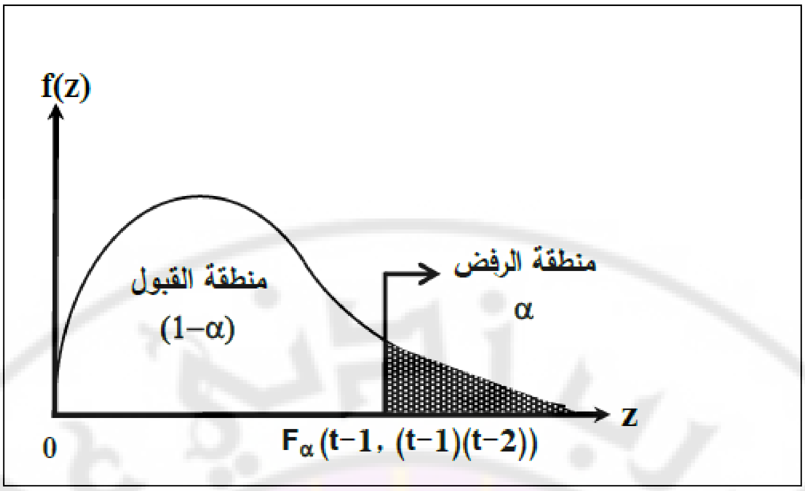
C.F: يُمثّلُ مُعامل التّصحيحِ ويساوي: $CF = \frac{(Y_{..})^2}{t^2}$

6–حسابُ إحصائيّةِ الاختبارِ (F_c):

يَتِمُّ حساب قيمةِ إحصائيّةِ الاختبارِ F_c (المحسوبةِ) مِن جدولِ أنوفا السّابق وتُحسَبُ مِنَ العلاقةِ:

$$F_C = \frac{MSTr}{MSE}$$

4–تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ: يَتِمُّ تحديدُ منطقتي القبولِ والرّفضِ بالحصولِ على قيمةِ (F_T) الجدوليّةِ مِن جدولِ توزيعِ (F) بدرجاتِ حرّيّة(t-1) للبسطِ و (t-1) (t-2) للمقامِ بمُستوى معنويّة (α) أي استخراجُ قيمةِ $F_t = F_\alpha(t-1,(t-1)(t-2))$. وفي اختبارِ تحليلِ التّباينُ يكونُ نوعُ الاختبارِ مِنَ الطّرفِ الأيمنِ، أي أنَّ منطقةَ الرّفضِ تقعُ بالكاملِ على الطّرفِ الأيمنِ كَمَا بالشّكلِ (8–3).



شكل (8−3): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ لاختبارِ F بتصميمِ (LS).

5− **المقارنةُ واتّخاذُ القرار:** إذا كانت قيمةُ (F_C) المحسوبة مِن إحصاءةِ الاختبارِ أقلّ مِن قيمةِ (F_T) الجدوليّةِ عندَ مستوى المعنويّةِ ودرجاتِ الحرّيّةِ المعيّنة نقبلُ الفرضَ العدميّ بتساوي مُتوسّطاتِ المعالجاتِ، أمّا إذا كانت قيمةُ (F_C) المحسوبة مِن إحصاءةِ الاختبارِ أكبر مِن قيمةِ (F_T) الجدوليّةِ نرفضُ الفرضَ العدميّ أي هناكَ فرقٌ معنويٌّ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ، أو يُوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غير متساويينِ.

8−6−2− اختبارُ أهميّةِ أخذِ الصّفوفِ فِي الاعتبارِ فِي تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS):

يُمكنُ اختبارُ أهميّةِ أخذِ الصّفوفِ فِي الاعتبارِ فِي تصميمِ التّجربةِ باستخدامِ النّسبةِ $F_r = \frac{MSr}{MSE}$ كمؤشّرٍ أو مقياسٍ عدديٍّ (وليسَ كاختبارٍ إحصائيٍّ) للدّلالةِ على مدى أهميّةِ استخدامِ الصّفوفِ فِي هذا التّصميمِ.

ثمَّ استخراجُ القيمةِ الجدوليّةِ $F_{tab} = F_\alpha(t-1, (t-1)(t-2))$ التّي تُمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (F) بدرجاتِ حرّيّةِ الصّفوفِ و تساوي (t-1) للبسطِ، ودرجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيّ للمقامِ والتّي تُساوي (t-1)(t-2) وبمُستوى معنويّة (α)

- فإذا كانَ $F_r > F_{tab}$

فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ الصّفوفِ فِي هذهِ التّجربةِ كانَ فعالاً ومفيداً.

- وأمّا إذا كانَ $F_r \leq F_{tab}$

فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ الصّفوفِ فِي هذهِ التّجربةِ لَمْ يكنْ مفيداً ونوصي بعدمِ استخدامهِ عندَ إجراءِ هذا النّوعِ مِنَ التّجارب مستقبلاً.

8-6-3- اختبارُ أهميّةِ أخذِ الأعمدةِ فِي الاعتبارِ فِي تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS):

بنفسِ الطّريقةِ يمكنُ اختبارُ أهميّةِ أخذِ الأعمدةِ فِي الاعتبارِ فِي تصميمِ التّجربةِ باستخدامِ النّسبةِ $F_C = \frac{MSc}{MSE}$ كمؤشّرٍ للدّلالةِ على مدى أهميّةِ استخدامِ الأعمدةِ فِي هذا التّصميم.

ثمَّ استخراجُ القيمةِ الجدوليّةِ $F_{tab} = F_\alpha(t-1,(t-1)(t-2))$

- فإذا كانَ $F_c > F_{tab}$

فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ الأعمدةِ فِي هذهِ التّجربةِ كانَ فعالاً ومفيداً.

- وأمّا إذا كانَ $F_c \leq F_{tab}$

فإنّنا نستنتجُ أنَّ استخدامَ الأعمدةِ فِي هذهِ التّجربةِ لَمْ يكنْ مفيداً ونوصي بعدمِ استخدامهِ عندَ إجراءِ هذا النّوعِ مِنَ التّجارب مستقبلاً.

8-6-4- إجراءُ المقارناتِ البعديّةِ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ باستخدامِ اختباراتِ (LSD, DMRT):

بعدَ الانتهاءِ مِن تنظيمِ البياناتِ وتكوينِ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA) واختبارِ تساوي المُتوسّطاتِ وأهميّةِ أخذِ الصّفوفِ والأعمدةِ بعينِ الاعتبارِ عندَ تصميمِ التّجارب، بعدها يكونُ اهتمامُ الباحثِ بتطبيقِ الاختباراتِ الثّنائيّةِ بينَ المعاملاتِ مِن أجلِ تبيانِ الفروقِ بينَ المُتوسّطاتِ ويتمُّ ذلكَ بتطبيقِ اختباريِّ (LSD) ودنكان المُتعدّد (DMRT) بالطّريقةِ نفسها التّي طُبّقتْ بالتّصاميم السّابقة.

8-7- الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ بالمقارنةِ معَ التّصميمينِ (CRD و RCBD)

Relative Efficiency between LS & CRD & RCBD

8-7-1- الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً معَ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD):

الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً بما كانَ متوقّعاً لو استُخدِمَ التّصميمُ العشوائيُّ الكاملُ (CRD) يَتِمُّ حسابه بالمعادلةِ التّاليةِ:

$$RE(LS: CRD)\% = \frac{MSr+MSc+(t-1)MSE}{(t+1)MSE} \times 100$$

ويتّضحُ مِنَ الدّراساتِ السّابقةِ أنَّ تصميمَ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) يتطلّبُ نصفَ عددِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ التّي يتطلّبُهَا التّصميمُ (CRD).

8-7-2- الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللاتينيّ (LS) مقارنةً معَ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD):

الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً بما كانَ متوقّعاً لو استُخدِمَ تصميمُ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD) تُحسبُ كَمَا يلِي:

أ- **كفاءةُ الصّفوفِ:** بافتراضِ أنَّ الصّفوفَ كانت تُستخدَمُ كقطّاعاتٍ فتُحسبُ الكفاءةُ النّسبيّة للصّفوفِ فِي تصميمِ (LS) بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$RE_r(LS: RCBD)\% = \frac{MSr+(t-1)MSE}{t \times MSE} \times 100$$

ب- **كفاءةُ الأعمدةِ:** بافتراضِ أنَّ الأعمدةَ كانت تُستخدَمُ كقطّاعاتٍ فتُحسبُ الكفاءةُ النّسبيّة للأعمدةِ فِي تصميمِ (LS) بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$RE_c(LS: RCBD)\% = \frac{MSc+(t-1)MSE}{t \times MSE} \times 100$$

ويتّضحُ مِنَ الدّراساتِ السّابقةِ أنَّ تصميمَ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD) يتطلّبُ أكثرَ مِن ضعفِ عددِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ التّي يتطلّبها تصميمُ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) وذلكَ مِن أجلِ تحقيقِ درجةِ دقّةٍ معيّنةٍ.

مثال (8-4):

نُفّذتْ تجربةٌ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS)، وفي نهايةِ التّجربةِ تمَّ تنظيمُ النّتائجِ و تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (8-7).

جدول (8-7): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) للمثال.

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	درجاتُ الحّريّةِ d.f	متوسّط المُربّعات (التّبايُنِ) S.M
الصّفوفُ Rows	SSr=13601	4	MSr=3400
الأعمدةُ Columns	SSc=6144	4	MSc=1536
المعاملاتُ Treatments	SSTr=4156	4	MSt=1039
الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	SSE=12668	12	MSE=1056
المجموعُ Total	SSTO=36569	24	

المطلوبُ: احسب قيمةَ الكفاءةِ النّسبيّة لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) بالمقارنةِ معَ التّصميمينِ (CRD) و (RCBD):

الحلُّ:

1- الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً معَ التّصميمِ (CRD):

يَتِمُّ حسابُ قيمةِ الكفاءةِ النّسبيّةِ مِنَ المعادلةِ الآتيةِ:

$$RE(LS:CRD)\% = \frac{MSr+MSc+(t-1)MSE}{(t+1)MSE} \times 100 = \frac{3400+1536+(5-1)1056}{(5+1)1056} \times 100 = 145\%$$

قيمةُ هذا المقياسِ دليلٌ على أنَّ تصميمَ المُربّعِ اللّاتينيّ الذّي استُخدِمَ فِي هذهِ التّجربةِ كانَ مفيداً فِي تقليلِ الخطأ التّجريبيّ، وفِي تقليلِ تكلفةِ التّجربةِ حيثُ كانَ مِنَ المُتطلّبِ زيادةُ عددِ التّكراراتِ بنسبةِ (45%) للحصولِ على نفسِ الكفاءةِ فِي حالِ تمَّ استِخدَامُ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ (CRD).

2- الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً معَ التّصميمِ (RCBD):

- **كفاءةُ الصّفوفِ:** بافتراضِ أنَّ الصّفوفَ كانتْ تُستخدَمُ كقطّاعاتٍ فتُحسبُ الكفاءةُ النّسبيّةُ للصّفوفِ فِي تصميمِ (LS) بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$RE_r(LS:RCBD)\% = \frac{MSr+(t-1)MSE}{t\times MSE}\times 100 = \frac{3400+4\times 1056}{5\times 1056}\times 100 = 143\%$$

أي أنَّ كفاءةَ التّجربةِ قد زادَتْ بمقدارِ (43%) نتيجةَ استخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ فيما لو استُخدِمَ تصميمُ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ وكانتِ القطّاعاتُ هيَ الصّفوف.

- **كفاءةُ الأعمدةِ:** بافتراضِ أنَّ الأعمدةَ كانت تُستخدَمُ كقطّاعاتٍ فتُحسبُ الكفاءةُ النّسبيّةُ للأعمدةِ فِي تصميمِ (LS) بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$RE_c(LS:RCBD)\% = \frac{MSc+(t-1)MSE}{t\times MSE}\times 100 = \frac{1536+4\times 1056}{5\times 1056}\times 100 = 109\%$$

أي أنَّ كفاءةَ التّجربةِ قد زادَتْ بمقدارِ (9%) نتيجةَ استخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ فيما لو استُخدِمَ تصميمُ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ وكانتِ القطّاعاتُ هيَ الأعمدة.

8-8- تقديرُ القيمِ المفقودةِ فِي تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (Missing Observations):

فِي تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) قد يَتمُّ فقدانُ مشاهدةٍ أو أكثر لأيِّ سببٍ مِنَ الأسبابِ، مثل تعرّضِ نباتاتِ وحدةٍ تجريبيّةٍ للتّلفِ، أو موتِ حيوانٍ أو سرقةِ محصولِ قطعةِ أرضٍ، بشرطِ أنَّ فقدانَ المشاهدةِ لا يكونُ مِن جرّاءِ تأثيرِ المعاملةِ المُستخدمةِ فِي التّجربةِ وعليهِ نلجأُ إلى تقديرِ القيمةِ المفقودةِ وفقَ المعادلةِ التّاليةِ:

$$\hat{Y}_{ij(k)} = \frac{t\left(Y_{i.}+Y_{.j}+Y_{.(k)}\right)-2(Y_{..})}{(t-1)(t-2)}$$

حيثُ أنَّ:

$\hat{Y}_{ij(k)}$: القيمةُ التّقديريّةُ للقيمةِ المفقودةِ.

$Y_{i.}$: مجموعُ قيمِ المُشاهداتِ الموجودةِ فِي نفسِ الصّفِ الذّي فُقدتْ منهُ المُشاهدةُ (بدونِ القيمةِ).

$Y_{.j}$: مجموعُ قيمِ المُشاهداتِ الموجودةِ فِي نفسِ العمودِ الذّي فُقدتْ منهُ المُشاهدةُ (بدونِ القيمةِ).

$Y_{.(k)}$: مجموعُ قيمِ المُشاهداتِ الخاصّةِ بنفسِ المعاملةِ التّي فُقدتْ منها المُشاهدةُ.

$Y_{..}$: المجموعُ الكلّي لكُلِّ مشاهداتِ التّجربةِ بعدَ فقدانِ المشاهدةِ (بدونِ القيمةِ المفقودةِ).

وبعدَ حسابِ القيمةِ التّقديريّةِ للقيمةِ المفقودةِ $\widehat{Y}_{ij(k)}$ نُدخلُ هذهِ القيمةَ فِي مكانِها المُحدّدِ ضمنَ جدولِ البياناتِ ثمَّ نحسبُ المجاميعَ ثمَّ نُحلّلُ إحصائياً التّجربةَ بصورةٍ اعتياديّةٍ باستثناءِ:

- تقليلِ درجاتِ الحرّيّةِ للخطأِ التّجريبيّ قيمة واحدة عن كُلِّ قيمةٍ مفقودةٍ ليُصبحَ $\{(t-1)(t-2)-1\}$ و درجاتِ الحرّيّةِ الكلّيّةِ درجة واحدة ليُصبحَ (t^2-2) وذلكَ لأنَّ هذه القيمةَ التّي تمَّ تقديرها لا يمكنُ اعتبارها حرّةً.

مثال (8-5):

الجدول رقم (8-8) يُمثّلُ بياناتٍ طُبّقتْ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ وفُقِدَتْ إحدى المُشاهدات.

جدول (8-8): تنظيمُ المُشاهداتِ للمثالِ بتصميمِ (LS).

	C1	C2	C3	مجاميعُ الصّفوفِ Yi.	مجاميعُ المعاملاتِ $y_{\bullet(k)}$
R1	t_2=600	t_3=972	t_1=651	2223	$y_{\bullet(1)} = 1247$
R2	t_1	t_2=770	t_3=825	1595	$y_{\bullet(2)} = 2087$
R3	t_3=729	t_1=596	t_2=717	2042	$y_{\bullet(3)} = 2526$
مجاميع الأعمدة Y.j	1329	2338	2193	5860	

المطلوبُ: أوجدِ القيمةَ التّقديريّة للقيمةِ المفقودةِ.

الحلُّ:

$$\hat{Y}_{ij(k)}=\frac{t(Y_{i\cdot}+Y_{\cdot j}+Y_{\cdot(k)})-2(Y_{\cdot\cdot})}{(t-1)(t-2)}=\frac{3(1595+1329+1247)-2(5860)}{(3-1)(3-2)}=397$$

ثمَّ يَتِمُّ وضعُ القيمةِ المقدّرةِ في مكانها ويَتِمُّ حسابُ المجاميعِ مِن جديدٍ، حيثُ يَتِمُّ تقليلُ درجاتِ الحرّيّةِ للخطأ التّجريبيّ قيمةً واحدةً و تقليلُ درجاتِ الحرّيّةِ الكلّيّةِ قيمةً واحدةً أيضاً.

مثال (8-6):

نُفّذَتْ تجربةٌ لاختبارِ (4) أصنافٍ مِن دواءِ الضّغطِ وهيَ (A, B, C, D) على (16) مريضٍ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (L.S) حيثُ تمَّ تصنيفُ المرضى حسبَ مؤشّرِ العمرِ بالسّنواتِ إلى (4) فئاتٍ مثّلتِ الصّفوفَ، ووفقَ مؤشّرِ الوزنِ بالكغ إلى (4) فئاتٍ مثّلتِ الأعمدةَ، وقد سُجّلت نتائجُ قياسِ الضّغطِ لكلِّ مريضٍ كَمَا هوَ مُبيّنٌ بالجدولِ (8-9).

جدول (8-9): تنظيمُ المُشاهداتِ لأربعةِ أصنافٍ مِن دواءِ الضّغطِ بتصميمِ (LS).

الأعمدةُ الصّفوفُ		فئاتُ الوزنِ				**مجاميعُ الصّفوفِ**	**مجاميعُ المعاملاتِ**	**مُتوسّطاتُ المعاملاتِ**
		الفئة الأولى C1	الفئة الثّانية C2	الفئة الثّالثة C3	الفئة الرّابعة C4	$y_{i\bullet}$	$y_{\bullet(k)}$	$\bar{y}_{\bullet(k)}$
فئاتُ العمرِ	R1	72**B**	62**A**	87**C**	92**D**	**320**	276A=	$\bar{A}=69$
	R2	**A** 71	**B** 70	**D** 90	**C** 89	**313**	315B=	$\bar{B}=78.75$
	R3	**C** 76	**D** 71	**B** 83	**A** 75	**053**	329C=	$\bar{C}=82.25$
	R4	**D** 85	**C** 77	**A** 68	**B** 90	**203**	338D=	$\bar{D}=84.5$
	مجاميعُ الاعمدةِ $y_{\bullet j}$	**304**	**280**	**328**	**346**	**المجموعُ الكلّي** $y_{\bullet\bullet}=1258$		

المطلوبُ:

1- إجراءُ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ لهذهِ التّجربةِ واختبارُ معنويّةِ الفرقِ بينَ أصنافِ الأدويةِ (المعاملاتِ).

2- طبّقِ اختبارَ LSD و دنكن (DMRT) للمقارناتِ المتعدّدةِ بينَ مُتوسّطاتِ أصنافِ الأدويةِ.

3- أوجدِ الكفاءةَ النّسبيّةَ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ مقارنةً معَ التّصميمينِ (CRD, CRBD).

الحلُّ: t=r=c=4

1) حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(Y_{..})^2}{t^2} = \frac{(1258)^2}{16} = 98910.25$$

2) حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$SSTO = \sum y_{ij}^2 - CF = ((72)^2 + \dots\dots (90)^2) - 98910.25 = 100232 - 98910.25 = 1321.75$$

3) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ المعاملاتِ (Sum Square of treatments-SSTr):

$$SSTr = \frac{\sum y_{.(k)}^2}{t} - CF = \frac{(276)^2 + (315)^2 + (329)^2 + (338)^2}{4} - 98910.25 = 561.25$$

4) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الأعمدةِ (Sum Square of Columns-SSc):

$$SSc = \frac{\sum y_{.j}^2}{t} - CF = \frac{(304)^2 + (280)^2 + (328)^2 + (346)^2}{4} - 98910.25 = 618.75$$

5) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الصّفوفِ (Sum Square of Rows-SSr):

$$SSr = \frac{\sum y_{i.}^2}{t} - CF = \frac{(320)^2 + (313)^2 + (305)^2 + (320)^2}{4} - 98910.25 = 38.25$$

6) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأ التّجريبيّ (Sum Square of Error-SSE):

$$SSE = SSTO - SSTr - SSr - SSc = 1321.75 - 618.75 - 561.25 - 38.25 = 103.5$$

7) حسابُ مُتوسّطاتِ المُربّعاتِ (Mean Square-MS) للمعاملاتِ والصّفوفِ والأعمدةِ والخطأ التّجريبيّ:

$$MSTr = \frac{SSTr}{t-1} = \frac{561.25}{3} = 187.08$$

$$MSc = \frac{SSc}{t-1} = \frac{618.75}{3} = 206.25$$

$$MSr = \frac{SSr}{t-1} = \frac{38.25}{3} = 12.75$$

$$MSE = \frac{SSE}{(t-1)(t-2)} = \frac{103.5}{6} = 17.25$$

8) جدولُ تحليلِ التّبايُنِ Analysis of Variance (ANOVA Table)

يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ وتنظيمها فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (8−10).

جدول (8−10): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لأربعةِ أصنافٍ من دواءِ الضّغطِ بتصميم (LS).

مصادر الاختلاف S.O.V	مجموع مُربّعات الانحرافات *S.S*	درجاتُ الحرّيّةِ *d.f*	مُتوسّط مُربّعاتِ الانحرافاتِ *S.M*	(المحسوبة) F *F cal.*	(الجدوليّة) F *F Tabl.*
الصّفوفُ Rows	SSr=38.25	t-1=3	MSr=12.75	$F_r = \frac{MSr}{MSE} = 0.739$	F(3, 6)=4.76
الأعمدةُ Columns	SSc=618.75	t-1=3	MSc=206.25	$F_c = \frac{MSc}{MSE} = 11.59$	
المعاملاتُ Treatments	SSTr=561.25	t-1=3	MSTr=187.08	$F_{tr} = \frac{MSTr}{MSE} = 10.85$	
الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	SSE=103.5	(t-1)(t-2)=6	MSE=17.25		
التّباينُ الكلّيّ Total	SST=1321.75	t^2-1=15			

- **اختبارُ تساوي مُتوسّطاتِ المعالجاتِ (أنواع الدّواءِ)**

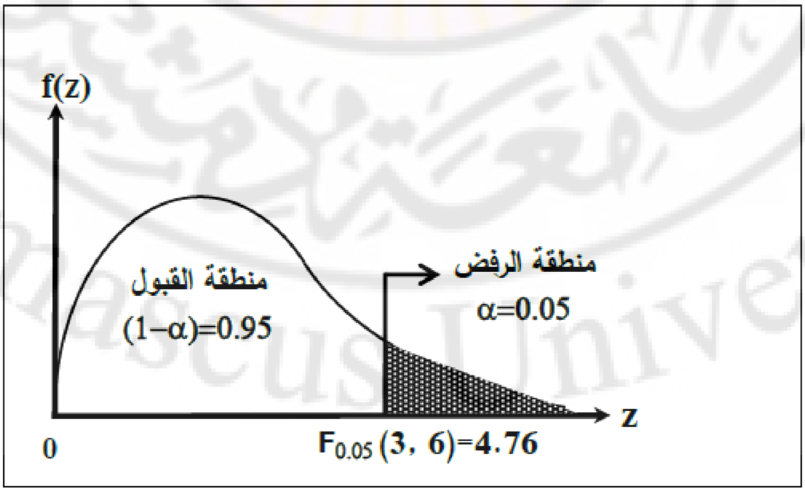
1- صِياغةُ الفروضِ الإحصائيّة:

- **الفرضُ العدميُّ:** (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$) مُتوسّطاتُ أصنافِ الدّواءِ الأربعةِ مُتساوية (لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ مُتوسّطاتِ المعالجاتِ).
- **الفرضُ البديلُ :**(H_1) مُتوسّطاتُ أصنافِ الدّواءِ الأربعةِ غيرَ مُتساويةٍ (أو يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطينِ غير مُتساويين).

7- إحصائيّةُ الاختبارِ: يَتِمُّ حسابُ قيمةِ إحصاءةِ الاختبارِ (أو F_{tr} المحسوبة) مِنَ المعادلةِ:

$$F_{tr} = \frac{MSTr}{MSE} = 10.85$$

المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بِما أنَّ قيمةَ (F_{tr}) المحسوبةِ ($F_{tr}=10.85$) أكبر مِن قيمةِ (F_{tab}) الجدوليّةِ ($F_{tab}=F_{\alpha}(t-1,\ (t-1)(t-2))=\ F_{0.05}(3,\ 6)=4.76$ كَمَا بالشّكلِ (8-4)، لذلكَ نرفضُ الفرضَ العدمَ ونقبلُ الفرضَ البديلَ القائل بأنَّ مُتوسّطاتِ الشّفاءِ لأنواعِ الأدويةِ الأربعةِ غير مُتساويةٍ أنَّه يوجدُ على الأقلِّ مُتوسّطين مختلفينِ لأنواعِ الأدويةِ، ومِن ثمَّ يمكنُ تطبيقُ المقارناتِ المتعدّدةِ لمعرفةِ الفروقِ المعنويّةِ بينَ كُلِّ المُتوسّطاتِ.



شكل (8-4): التّمثيلُ البيانيُّ لمنطقتي القبولِ والرّفضِ للمثالِ (8-6).

- **اختبارُ أهميّةِ أخذِ الصّفوفِ (عمر المريض) فِي الاعتبارِ عندَ التّصميمِ:**

الفرضُ العدمُ: عمرُ المريضِ ليسَ لهُ أهميّة فِي التّأثيرِ على الشّفاءِ.

الفرضُ البديلُ: عمرُ المريضِ يؤثّرُ معنوياً على الشّفاءِ.

إحصائيّةُ الاختبارِ:

$$F_r = \frac{MSr}{MSE} = 0.739$$

المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بما أنَّ قيمةَ (F_r) المحسوبةِ (F_r=0.74) أصغرُ مِن قيمةِ (F_{tab}) الجدوليّةِ (F_{tab}=4.76) لذلكَ نقبلُ الفرضَ العدمَ القائل أنَّ أخذَ عمرِ المريضِ بالاعتبارِ عندَ التّصميمِ ليسَ لهُ أهميّة فِي التّأثيرِ على الشّفاءِ، لِذا يجبُ إهمالُ عمرِ المريضِ لأنَّه (لا يؤثّرُ معنويّاً) أي لا يقلّل مِن تبايُنِ الخطأ التّجريبيّ.

- **اختبارُ أهميّةِ أخذِ الأعمدةِ (وزن المريض) فِي الاعتبارِ عندَ التّصميمِ:**

الفرضُ العدمُ: وزنُ المريضِ ليسَ لهُ أهميّة فِي التّأثيرِ على الشّفاءِ.

الفرضُ البديلُ: وزنُ المريضِ يؤثّرُ معنوياً على الشّفاءِ.

إحصائيّةُ الاختبارِ:

$$F_c = \frac{MSc}{MSE} = 11.59$$

المقارنةُ واتّخاذُ القرارِ: بما أنَّ قيمةَ F_c المحسوبةِ (F_c=11.59) أكبرُ مِن قيمةِ (F_{tab}) الجدوليّةِ (F_{tab}=4.76) لذلكَ نرفضُ الفرضَ العدمَ ونقبلُ الفرضَ البديلَ القائل أنَّ أخذَ وزنِ المريضِ بالاعتبارِ عندَ التّصميمِ يؤثّرُ معنوياً على الشّفاءِ، لِذا يجبُ عدمُ إهمالِ وزنِ المريضِ كمصدرٍ للاختلافِ لأنَّهُ (يؤثّرُ معنويّاً) أي يقلّلُ مِن تبايُنِ الخطأ التّجريبيّ.

تطبيقُ اختبارِ(LSD):

بما أنَّ $r = 4$, $MSE = 17.25$

لحسابِ قيمةِ LCD يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ t الجدوليّةِ بدلالةِ قيمةِ درجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (df_e=6)

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)} = t_{(0.025,\ \ 6)} = 2.45$$

$$LSD = t_{\left(\frac{\alpha}{2},\ dfe\right)}\sqrt{\frac{2MSE}{r}} = 2.45\sqrt{\frac{2\times 17.25}{4}} = 7.19$$

الآن نأخذُ الفرقَ بينَ مُتوسّطي كُلِّ معاملتينِ ونقارنهُ معَ قيمةِ LSD فإذا كانَ الفرقُ بينَ المُتوسّطينِ معنويّ نضعُ جنبها إشارة (*)، وإذا كانَ الفرقُ غيرَ معنويٍّ لا نضعُ أيَّ إشارةٍ.

نُنشأُ الجدولَ (8−11) الذّي يعكسُ الفروقَ بينَ المُتوسّطاتِ وإشارةِ (*) تدلُّ على الفرقِ المعنويِّ.

جدول (8−11): مقارنةُ مُتوسّطاتِ أصنافِ الدّواءِ الأربعةِ باستخدامِ (LSD).

	LSD=7.19	مُتوسّطاتُ المعالجاتِ تصاعديّاً		
		A=69	B=78.75	C=82.25
مُتوسّطات	D=84.5	15.5*	5.75	2.25
المعالجاتِ	C=82.25	13.25*	3.5	
تنازليّاً	B=78.75	9.72*		

بما أنَّ الفرقَ بينَ مُتوسّطِ المعاملتينِ A و D يكونُ (15.5) وهوَ أكبرُ مِن (7.19) لذلكَ فإنَّ الفرقَ معنويٌّ بينَ مُتوسّطي المعاملتينِ (A و D) لذلكَ نضعُ إشارةَ (*).

كذلكَ بِما أنَّ الفرقَ بينَ مُتوسّطِ المعاملتينِ A و C يكونُ (13.25) وهوَ أكبرُ مِن (7.19) لذلكَ فإنَّ الفرقَ معنويٌّ بينَ مُتوسّطي المعاملتينِ (A و C) لذلكَ نضعُ إشارةَ (*) وهكذا.

إجراءُ اختبارِ دنكن متعدّدِ الحدودِ ((Duncan's Multiple Range Test (DMRT)).

لإجراءِ اختبارِ دنكن متعدّدِ الحدودِ DMR يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ SSR مِن جدولِ SSR− Duncan بدلالةِ قيمةِ (df_e=6) ومستوى الإحتماليّةِ 0.05 وعدد المعاملاتِ (p=4) وفقاً لِمَا يلِي:

$SSR(\alpha, p, df_E)=SSR(0.05,4,6)$

ثمَّ حسابُ الخطأِ المعياريِّ للمُتوسّطاتِ مِن جدولِ (ANOVA) الذّي يساوي

$$S_{\bar{Y}_i} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{17.25}{4}} = 2.076$$

ثمَّ يَتِمُّ حسابُ قيمِ LSR مِنَ المعادلةِ التّاليةِ وتنظيمها فِي الجدولِ (8−12).

$$LSR = \sqrt{\frac{MSE}{r}} \times SSR$$

جدول (8−12): حسابُ قيمِ LSR لمُتوسّطاتِ أصنافِ الدّواءِ الأربعةِ.

	α=0.05		
عدد المُتوسّطاتِ	2	3	4
SSR	3.926	4.013	4.033
$S_{\bar{Y}_i} = \sqrt{\frac{MSE}{r}}$	2.076		
LSR	8.15	8.33	8.37

نلاحظُ أنَّ قيمَ LSR فِي الجدولِ ناتجةٌ مِن ضربِ قيمِ (SSR) فِي (2.076)

- ومِن أجلِ إجراءِ المقارنةِ نكوّنُ الجدولَ (8−13).

جدول (8−13): مقارنةُ مُتوسّطاتِ أصنافِ الدّواءِ الأربعةِ باستخدامِ (DMRT).

مُتوسّط المعاملاتِ تنازليّاً	قيمُ LSR تنازليّاً	A=69	B=78.75	C=82.25
D= 84.5	8.37	15.5*	5.75	2.25
C= 82.25	8.33	13.25*	3.5	
B= 78.75	8.15	9.72*		

فمثلاً الفرقُ بينَ مُتوسّطِ المعاملةِ A (69) والمعاملة D (84.5) هوَ (15.5) كَمَا موضّح فِي الجدولِ وهذهِ القيمةُ أعلى مِن قيمةِ LSR المقابلةِ لها (8.37) لذلكَ الفرقُ بينَ مُتوسّطي المعاملتينِ (A وD) معنويّ لِذا وُضِعَت الإشارةُ (*) وهكذا.

الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ بالمقارنةِ معَ التّصميمينِ (CRD, CBRD)

1) الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً معَ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD):

الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً بِما كانَ متوقّعاً لو استُخدِمَ التّصميمُ العشوائيُّ الكاملُ (CRD) يَتِمُّ حسابه بالمعادلةِ التّاليةِ:

$$RE(LS:CRD)\% = \frac{MSr + MSc + (t-1)MSE}{(t+1)MSE} \times 100 =$$

$$= \frac{12.75+206.25+3\times(17.25)}{5\times(17.25)} \times 100 = 314\%$$

وقيمةُ هذا المقياسِ يدلُّ على أنَّ تصميمَ المُربّعِ اللّاتينيّ الذّي استُخدِمَ فِي هذهِ التّجربةِ قد زادَ مِن كفاءةِ التّجربةِ عمّا لو استُخدِمَ التّصميمُ تامُّ العشوائيّةِ بمقدارِ (214%)أي أنَّه كانَ مِنَ المتطلّبِ زيادةُ عددِ التّكراراتِ بنسبةِ (214%) للحصولِ على نفسِ الكفاءةِ فِي حالِ تمَّ استخدامُ التّصميمِ تامِّ العشوائيّةِ وهذهِ النّسبة عالية جدّاً وكفاءة ممتازة.

2- الكفاءةُ النّسبيّةُ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) مقارنةً معَ التّصميمِ (RCBD):

- **كفاءةُ الصّفوفِ:** بافتراضِ أنَّ الصّفوفَ كانت تُستخدَمُ كقطّاعاتٍ فتُحسَبُ الكفاءةُ النّسبيّةُ للصّفوفِ فِي تصميمِ (LS) بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$RE_r(LS:RCRD)\% = \frac{MSr+(t-1)MSE}{t\times MSE} \times 100 = \frac{12.75+3\times(17.25)}{4\times(17.25)} \times 100 = 93\%$$

أي أنَّ كفاءةَ التّجربةِ قد قلّت (9%) نتيجةَ استخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ فيما لو استُخدِمَ تصميمُ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ وكانتِ القطّاعاتُ هيَ الصّفوف.

وهذا يعني أنَّ تقسيمَ المرضى (على أساسِ عمرِ المريضِ) غيرُ مفيدةٍ وغيرُ ناجحةٍ.

- **كفاءةُ الأعمدةِ:** بافتراضِ أنَّ الأعمدةَ كانت تُستخدمُ كقطّاعاتٍ فتُحسبُ الكفاءةُ النّسبيّةُ للأعمدةِ فِي تصميمِ (LS) بالمعادلةِ الآتيةِ:

$$RE_c(LS:CRD)\% = \frac{MSc+(t-1)MSE}{t\times MSE} \times 100 = \frac{206.25+3\times(17.25)}{4\times(17.25)} \times 100 = 347\%$$

أي أنَّ كفاءةَ التّجربةِ قد زادَت بمقدارِ (247%) نتيجةَ استخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ فيما لو استُخدِمَ تصميمُ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ وكانتِ القطّاعاتُ هيَ الأعمدة، أي أنَّ تقسيمَ المرضى على أساسِ وزنِ المريضِ كانت فعّالةً ومفيدةً ومعنويّةً.

الخلاصةُ: إنَّ تقسيمَ المرضى إلى أعمدةٍ (على أساسِ وزنِ المريضِ) كانت فعّالةً ومفيدةً ومعنويّةً، بينما تقسيمُ المرضى إلى صفوفٍ (على أساسِ عمرِ المريضِ) كانت غيرَ فعّالةٍ وغيرَ مفيدةٍ.

Damascus University

الفصل التاسع

التّجاربُ العامليّةً
(Factorial Experiments)

Damascus University

التّجاربُ العامليّةُ

(Factorial Experiments)

9-1- مُقدّمة:

التّجاربُ العامليّةُ (Factorial Experiments): هيَ التّجاربُ التّي تُطبّقُ عندَ دراسةِ تأثيرِ عاملينِ أو أكثر فِي وقتٍ واحدٍ على صفةٍ معيّنةٍ، حيثُ يكونُ لهذهِ العواملِ أهميّةٌ مُتساويةٌ بالنّسبةِ للباحثِ ويكونُ لكُلِّ عاملٍ عدّةُ مُستوياتٍ، وأغلبُ هذهِ التّجاربِ تُطبّقُ بالتّصاميمِ السّابقةِ (CRD, CRBD, LS).

وفِي هذهِ التّجارب يَتِمُّ دراسةُ تأثيرِ كُلِّ عاملٍ مِن هذهِ العواملِ على الصّفةِ المدروسةِ ومِن ثمَّ دراسةُ تأثيرِ التّداخُلِ بينَ العواملِ (Interactions)، إنَّ التّداخُلَ بينَ العواملِ يُعتبرُ مهمٌّ جدّاً، إذ إنَّه يُعطي أفضلَ توليفةٍ بينَ مستوياتِ العواملِ المدروسةِ، فمثلاً عندَ دراسةِ تأثيرِ سلالةِ الأغنامِ (عواس، حمداني، عرابي) و دراسةِ تأثيرِ الموسمِ (الشّتاء، الرّبيع، الصّيف، الخريف) على إنتاجِ الحليبِ، فإنَّ العاملَ الأوّلَ لهُ (3 مستوياتٍ) والعاملَ الثّاني لهُ (4 مستوياتٍ) لذلكَ يُطلقُ على هذهِ التّجربةِ (4×3) و هذهِ التّجاربُ تحتاجُ إلى دقّةٍ فِي التّطبيقِ، كَمَا أنَّ زيادةَ عددِ مستوياتِ العواملِ المدروسةِ يزيدُ مِن صعوبةِ تحليلِ التّجربةِ.

ولتوضيحِ الميزةِ الأساسيّة للتّجارب العامليّةِ نستخدمُ المثالَ التّالي: أرادَ باحثٌ إدخالَ صنفٍ جديدٍ مِنَ القمحِ فِي منطقةٍ معيّنةٍ لم يَسبق لهُ أن زرعَ فيها هذا الصّنفَ فستكونُ هناكَ العديدُ مِنَ الأسئلةِ المطروحةِ للبحثِ منها:

- ما هوَ أفضلُ وقتٍ للزّراعةِ؟
- ما هيَ كميّةُ البذورِ المناسبةِ للدّونمِ؟
- ما هيَ الأسمدةُ الضّروريّةُ لها و ما هيَ مستوياتها (أصنافها)؟
- ما هيَ كميّةُ المياهِ المطلوبةِ؟
- ما هيَ نوعيّةُ التّربةِ المفضّلةِ؟

ولدراسةِ تأثيرِ كُلِّ هذهِ العوامل على إنتاجِ القمحِ قد يقومُ الباحثُ بتجربةِ كُلِّ عاملٍ على حدة حيثُ يُجري تجربةً بمستوياتِ عاملٍ واحدٍ مع تثبيتِ باقي العوامل و أخرى بعاملٍ آخرَ ... الخ. و تُسمّى مثلُ هذهِ التّجارب بالتّجارب البسيطةِ أو ذاتِ العاملِ الواحدِ (One Factor Experiment)، إلاّ أنَّ هذهِ التّجاربَ لا تُعطي أيَّ معلوماتٍ عَنِ ارتباطِ كميّةِ الرّي بنوعيّةِ التّربةِ بوقتِ الزّراعةِ أو كميّةِ السّمادِ بكميّةِ البذورِ بوقتِ الزّراعةِ وغيره، و يُعبّرُ عَن هذهِ التّأثيراتِ المشتركةِ بالتّفاعلاتِ أو التّداخُلاتِ (Interactions) والتّي قد

تكونُ ذاتَ أهميّةٍ كبيرةٍ في التّجربةِ بحيث لا يمكنُ تجاهلها ,لذلكَ مِنَ الأفضلِ إدخالُ كُلِّ هذهِ العوامل في التّجربةِ وفي هذهِ الحالةِ يُطلقُ على هذا النوّعِ مِنَ التّجارب بالتّجارب العامليّةِ والتّي تُتيحُ للباحثِ التّعرّفَ على تأثيرِ كُلٍّ مِن هذهِ العوامل منفردةً بالإضافةِ إلى التّأثيرِ المُشتركِ للتّداخُلِ (Interactions) بينها.

- التّجاربُ العامليّةُ هيَ توليفةٌ مِنَ المعاملاتِ (Treatments) تُنفَّذُ وفقَ شروطِ أحدِ التّصاميم، وهذهِ المعاملاتُ تتضمّنُ كافّةَ التّداخُلاتِ أو التّوافيقِ أو التّوليفاتِ أو التّداخُلاتِ (or Interactions Combinations) بينَ مستوياتِ عوامل التّجربةِ (Factors).
- تُحسبُ وتُحدّدُ عددُ المعاملاتِ الكلّيّةِ للتّجربةِ العامليّةِ بأنَّهُ حاصلُ ضربِ مستوياتِ كُلِّ العوامل الدّاخلةِ بالتّجربةِ، وتُمثّلُ عادةً العواملُ المدروسةِ بأحرفٍ كبيرةٍ A,B,C وتُمثّلُ مستوياتُ كُلِّ عاملٍ بحروفٍ صغيرةٍ (a_1,a_2,a_3) وهكذا لبقيّةِ العوامل الأخرى.

مثال (9−1):

عندَ دراسةِ تأثيرِ عاملينِ (A, B) وكُلّ منهما لهُ ثلاثةِ مستوياتٍ (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) سيكونُ عددُ المعاملاتِ التّوافقيّةِ الكاملةِ للتّجربةِ هيَ (3×3=9) معاملة كَمَا هيَ موضحّةٌ بالجدولِ (9−1).

جدول (9−1): المعاملاتُ التّوافقيّةُ لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملين (3×3).

		العامل (A)		
		a_1	a_2	a_3
العامل (B)	b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1
	b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2
	b_3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3

مثال (9−2):

كمثالٍ على التّجارب العامليّةِ مكوّنةٍ مِن (3) عوامل (متغيّراتٍ مستقلّةٍ وصفيّةٍ) في حالةِ زراعةِ نوعٍ جديدٍ مِنَ الذّرةِ وهذهِ العوامل هيَ:

A: كميّةُ السّمادِ وتتكوّنُ مِن ثلاثةِ أصنافٍ (a=3) و هي ($A: a_1, a_2, a_3$).

B: طريقةُ الرّيِّ وتتكوّنُ مِن نوعين تنقيط وتقليديّ (b=2) هي ($B: b_1, b_2$).

C: عمقُ الحراثةِ وتتكوّنُ مِن مستويين 20 سم و 30 سم (c=2) هي ($C: c_1, c_2$).

فيكونُ عددُ المعاملاتِ التّوافقيّةِ أو التّوليفاتِ (Combinations) هيَ (t=abc=3×2×2=12) تَتمثّلُ بالجدولِ (9−2).

جدول (9−2): المعاملاتُ التّوافقيّةُ لتجربةٍ عامليّةٍ بثلاثِ عوامل (3×2×2).

		العاملُ (A)					
		a_1		a_2		a_3	
	العاملُ (B)	b_1	b_2	b_1	b_2	b_1	b_2
العاملُ (C)	c_1	$a_1b_1c_1$	$a_1b_2c_1$	$a_2b_1c_1$	$a_2b_2c_1$	$a_3b_1c_1$	$a_3b_2c_1$
	c_2	$a_1b_1c_2$	$a_1b_2c_2$	$a_2b_1c_2$	$a_2b_2c_2$	$a_3b_1c_2$	$a_3b_2c_2$

وبعدَ تكوينِ المعاملاتِ يَتِمُّ تنفيذُ التّجربةِ إمّا باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD) أو فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD) أو المُربّعِ اللّاتينيِّ (LS) أو بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ (Split-Plot) على هذهِ المعاملاتِ، حيثُ يَتِمُّ تحديدُ عددِ التّكراراتِ لكُلِّ معالجةٍ وتحديدُ عددِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ، وخصائصِها، والتّعشيةِ، والنّموذجِ الرّياضيِّ المستخدمِ.

9-2- مَزايا وعيوبُ التّجارب العامليّةِ:

9-2-1- مَزايا التّجارب العامليّةِ (Advantages of the Factorial Experiment):

- فِي التّجارب العامليّةِ يَتِمُّ تقليلُ التّكلفةِ والوقتِ والجهدِ، فإذا استخدمنا تجربةً بسيطةً لكُلِّ عاملٍ على حدة، سنحتاجُ ضعفَ عددِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ التّي تُستخدمُ فِي التّجارب العامليّةِ للحصولِ على نفسِ الدّقّةِ المطلوبة.
- تُتيحُ التّجاربُ العامليّةُ للباحثِ فرصةَ دراسةِ وتقييمِ التّأثيراتِ المشتركةِ أو التّداخُلاتِ (Interaction Effects) بينَ العوامل الدّاخلةِ فِي التّجربةِ على الظّاهرةِ المدروسةِ فِي نفسِ التّجربةِ والذّي يفوقُ التّأثيرَ النّاتجَ عَن تلكَ العوامل إذا أُخذَتْ بمفردها (التّجاربُ البسيطةُ).

9-2-2- عيوبُ التّجارب العامليّةِ:

- عيبُ التّجارب العامليّةِ هوَ عندما يزدادُ عددُ العوامل المدروسةِ ومستوياتها(زيادةُ عددِ التّوافيقِ)، يُؤدّي إلى تضخّمِ التّجربةِ وزيادةُ عددِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ وبالتّالي يُؤدّي إلى التّكلفةِ الباهظةِ للتّجربةِ و إلى زيادةِ الخطأ التّجريبيّ و يزيدُ مِن صعوبةِ تحليلِ التّجربةِ إحصائيّاً.

9-3- تصنيفُ التّجارب العامليّةِ:

تُصنّفُ التّجاربُ العامليّةُ إلى فئتينِ كَمَا يلِي:

- التّجاربُ العامليّةُ ذات عاملين (Two – Factor Factorial Experiments)
- التّجاربُ العامليّةُ ذات ثلاثةِ عوامل (Three – Factors Factorial Experiments)

9-4- التّجاربُ العامليّةُ ذات عاملينِ (Two – Factor Factorial Experiments):

هيَ تلكَ التّجاربُ التّي تُنفّذُ لدراسةِ تأثيرِ اثنينِ مِنَ العوامل فِي وقتٍ واحدٍ بهدفِ الحصولِ على معلوماتٍ عَن تأثيرِ كُلٍّ مِنَ العاملينِ إضافةً إلى التّعرُّفِ على العلاقةِ بينَ العاملين (أي التّداخُلُ بينَ مستوياتِ العاملينِ (Interactions) وتُجرى التّجاربُ ذات العاملينِ بسببِ كونِ التّجارب ذات العاملِ الواحدِ تتّصفُ بمحدوديّتها فِي عاملٍ واحدٍ.

التّصميماتُ المستخدمةُ فِي التّجارب ذات العاملينِ

يَتِمُّ تنفيذُ التّجارب ذات العاملينِ بأحدِ التّصاميم التّاليةِ:

أوّلاً: تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (Two-Factors Experiment in a CRD)

ثانياً: تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ بتصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (Two-Factors Experiment in a RCBD)

ثالثاً: تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (Two-Factors Experiment in a L.S)

حيثُ يَتِمُّ اختيارُ التّصميمِ المناسبِ حسبَ الظّروفِ الخاصّةِ بكُلِّ تجربةٍ وحسبَ تجانسِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ وطبيعةِ التّجربةِ.

9-5- تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (Two-Factors Experiment in a CRD)

9-5-1- تخطيطُ التّجربةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتخطيطِ تجربةٍ عامليّةٍ ذات عاملينِ (2×3)، العاملُ الأوّلُ ($A: a_1, a_2$) والعاملُ الثّاني ($B: b_1, b_2, b_3$) تُطبّقُ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD)، وإنَّ كُلَّ معاملةٍ عامليّةٍ (توافقيّةٍ) سوفَ تتكرّرُ (4 مرّاتٍ)، فَمِنَ الممكنِ أنْ يكونَ توزيعُ المعاملاتِ التّوافقيّةِ كَمَا يلِي:

عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ ($r \times a \times b=4\times3\times2=24$) وحدةً.

والمعاملاتُ التّوافقيّةُ هيَ ($a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3$) وكُلٌّ منها يجبُ أنْ يتكرّرَ 4 مراتٍ كَمَا هوَ موضّحٌ بالجدولِ (9-3).

جدول (9–3): تخطيطُ تجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ بتصميمِ (CRD).

a_1b_1	a_2b_1	a_1b_2	a_2b_3	a_2b_2	a_1b_1
a_1b_3	a_2b_3	a_2b_2	a_2b_1	a_1b_2	a_1b_3
a_2b_2	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_1	a_2b_3	a_2b_1
a_2b_3	a_1b_1	a_2b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_2b_2

9–5–2– تنظيمُ المشاهداتِ في جدولٍ مناسبٍ:

مِن أجلِ تسهيلِ عمليّةِ حسابِ القيمِ الإحصائيّةِ يمكنُ تصنيفُ القيمِ (المشاهداتِ) بجدولٍ ثنائيٍّ بحيث تُدرجُ المعاملاتِ المختلفةِ في عناوينِ الأسطرِ، كمثالٍ لتجربةٍ عامليّةٍ ذات عاملينِ (2×3) تُطبّقُ باستخدامِ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (CRD)، وإنَّ كُلَّ معاملةٍ (توافقيّةٍ) سوفَ تتكرّرُ (4 مرّاتٍ)، فيكونُ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ (r×a×b=4×2×3=24) وحدةً كَمَا هوَ موضحٌ بالجدولِ (9–4).

جدول (9–4): تنظيمُ البياناتِ لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ بتصميمِ (CRD).

مُتوسّطُ المعاملاتِ ($\bar{y}_{i\bullet}$)	مجاميعُ المعاملاتِ ($y_{i\bullet}$)	التكراراتُ (المشاهداتُ) yijk				المعاملاتُ		
		r4	r3	r2	r1	المعاملاتُ التّوافقيّةُ	العاملُ (B)	العاملُ (A)
6	24	7	6	6	5	a1b1	b1	a1
6.5	26	8	7	5	6	a1b2	b2	
8.5	34	9	8	9	8	a1b3	b3	
4.25	17	6	4	3	4	a2b1	b1	a2
5	20	5	6	4	5	A2b2	b2	
6.25	25	6	6	7	6	a2b3	b3	
	المجموعُ الكلّيّ 146					Y..k		

9–5–3– النّموذجُ الرّياضيُّ للتّصميمِ:

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + AB_{(ij)} + E_{ijk}$$

A_i: تأثيرُ العاملِ الأوّلِ.

B_j: تأثيرُ العاملِ الثّاني.

AB_{ij}: تأثيرُ التّداخُلِ بينَ العاملينِ.

أمّا باقي الرّموزِ فهيَ كَمَا تمَّ تفسيرها سابقاً وفقَ النّماذجِ الرّياضيّةِ السّابقةِ، ويتضمّنُ جدولُ تحليلِ التّباينِ ممثّلاً بالجدولِ (9–5).

Damascus University

جدول (9–5): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ بتصميم (CRD).

مصادرُ التّبايُن S.O.V	درجاتُ الحرّيّة df	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	مُتوسّط المُربّعاتِ (التّبايُن) M.S	F (المحسوبة) F cal.	F (الجدوليّة) F tab.
العاملُ الأوّل A	a - 1	SSA = A – CF	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$F_{Cal(A)} = \frac{MSA}{MSE}$	$F_{Tab(A)}$
العاملُ الثّاني B	b - 1	SSB = B – CF	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$F_{Cal(B)} = \frac{MSB}{MSE}$	$F_{Tab(B)}$
التّداخُلُ بين AB	(a -1)(b - 1)	SSAB = AB – B – A + CF	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$F_{Cal(AB)} = \frac{MSAB}{MSE}$	$F_{Tab(AB)}$
الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	ab(r - 1)	SSE = RAB – AB	$MSE = \frac{SSE}{ab(r-1)}$		
المجموع Total	abr – 1	SSTO = RAB –CF			

$$F_{Tab(A)} = F_{\alpha}(df_A, df_E)$$
$$F_{Tab(B)} = F_{\alpha}(df_B, df_E)$$
$$F_{Tab(AB)} = F_{\alpha}(df_{AB}, df_E)$$

علماً أنَّ (a) يُمثّلُ عددَ مستوياتِ العاملِ (A).

و (b) يُمثّلُ عددَ مستوياتِ العاملِ (B).

و (r) يُمثّلُ عددَ المكرّراتِ، وأنَّ هناكَ ثلاث قيم لـ (F).

أمّا القوانينُ المتعلّقةُ بالحساباتِ فِي الجدولِ يَتِمُّ حسابها كَمَا هوَ موضّح بالجدولِ (9–6).

جدول (9–6): جدولُ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ بتصميم (CRD).

مصادرُ التّباين S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	درجاتُ الحرّيّةِ d.f	مُتوسّط المُربّعاتِ (التّبايُن) M.S
العاملُ الأوّل A	SSA=A-CF $A = \frac{\sum ai^2}{br}$	a - 1	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$
العاملُ الثّاني B	SSB=B-CF $B = \frac{\sum bi^2}{ar}$	b - 1	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$
التّداخُلُ بين AB	SSAB=AB-A-B+CF $AB = \frac{\sum y^2}{r}$	(a -1)(b - 1)	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$

الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	SSE=RAB-AB $RAB = \sum_{1}^{abr} Y_{ijk}^2$	ab(r - 1)	$MSE = \frac{SSE}{ab(r-1)}$
المجموع Total	SSTO=RAB-CF	abr – 1	

معاملُ التّصحيحِ: $CF = \frac{(y_{\dots})^2}{abr}$

- إذا كانَ $F_{Cal(A)} \geq F_{Tab(A)}$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (A).
- إذا كانَ $F_{Cal(B)} \geq F_{Tab(B)}$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (B).
- إذا كانَ $F_{Cal(AB)} \geq F_{Tab(AB)}$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ التّداخُلِ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) و مستوياتِ العاملِ (B).

9-6- المقارناتُ البعديّةُ في التّجاربِ العامليّةِ (Comparisons in Factorial Experiments):

بعدَ تحليلِ التّبايُنِ وإجراءِ اختبارِ(F) إذا تبيّنَ وجودُ اختلافاتٍ معنويّةٍ بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ أو بينَ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ التّوافقيّةِ، فإنّه مِنَ الطّبيعي أنْ تَبرُزَ بعضُ الأسئلةِ، مثلاً: بينَ أيٍّ مِنَ المُتوسّطاتِ تُوجدُ هذهِ الاختلافاتُ؟

هل مُتوسّطُ المعاملةِ الأولى يختلفُ عَن مُتوسّطِ المعاملةِ الثّانيةِ؟ وعَن مُتوسّطاتِ المعاملاتِ الأخرى؟
وللإجابةِ على مثلِ هذهِ الأسئلةِ يَتِمُّ إجراءُ مجموعةٍ مِنَ الاختباراتِ البعديّةِ و أهمُّ هذهِ الاختباراتِ هيَ:

- اختبارُ أقلّ فرقٍ معنويٍّ (Least Significant Difference – LSD):
- اختبارُ دنكن مُتعدّدُ الحدودِ (Duncan's Multiple Range Test –DMRT).

9-6-1- اختبارُ أقلّ فرقٍ معنويٍّ (Least Significant Difference – LSD):

يُعتبرُ اختبارُ (LSD) مِن أسهلِ الاختباراتِ وأكثرِها وتعتمدُ هذهِ الطّريقةُ على اختبارِ (t) لاختبارِ معنويّةِ الفرقِ بينَ كُلِّ مُتوسّطينِ ويَتِمُّ حسابه للعاملينِ (A، B) وللتّداخُلِ بينهما (AB) كَمَا يلِي:

1- حسابُ اختبارِ (LSD) للعاملِ (A):

إذا ثُبّتتْ معنويّةُ قيمةِ (F المحسوبة $F_{Cal(A)}$) الخاصّةِ بالعاملِ (A) عندها يَتِمُّ حسابُ أقلّ فرقٍ معنويٍّ للعاملِ (A) مِنَ العلاقةِ : $LSD_{(A)} = t(\frac{\alpha}{2}, dfE) \times \sqrt{\frac{2MSE}{br}}$

حيثُ $t(\frac{\alpha}{2}, dfE)$ تُمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (t) بدرجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (df_E) وعندَ مستوى معنويّةِ (α/2).

ويكونُ عددُ المقارناتِ: $No.of\ Comparisons = \frac{a(a-1)}{2}$

2- حسابُ اختبارِ (LSD) للعاملِ (B):

إذا ثَبُتتْ معنويّةُ قيمةِ (F المحسوبة $F_{Cal(B)}$) الخاصّةِ بالعاملِ (B) عندها يَتِمُّ حسابُ أقلّ فرقٍ معنويٍّ للعاملِ (B) مِنَ العلاقةِ : $LSD_{(B)} = t(\frac{\alpha}{2}, dfE) \times \sqrt{\frac{2MSE}{ar}}$

حيثُ $t(\frac{\alpha}{2}, dfE)$ تُمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (t) بدرجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (dfE) وعندَ مستوى معنويّة (α/2).

ويكونُ عددُ المقارناتِ: $No.of\ Comparisons = \frac{b(b-1)}{2}$

3- حسابُ اختبارِ (LSD) للتّداخُلِ بينَ العاملينِ (AB):

إذا ثَبُتتْ معنويّةُ قيمةِ (F المحسوبة $F_{Cal(AB)}$) الخاصّةِ بتداخُلِ العاملينِ (AB) عندها يَتِمُّ حسابُ أقلّ فرقٍ معنويٍّ لتداخُلِ العاملينِ (AB) مِنَ العلاقةِ : $LSD_{(AB)} = t(\frac{\alpha}{2}, dfE) \times \sqrt{\frac{2MSE}{r}}$

حيثُ $t(\frac{\alpha}{2}, dfE)$ تُمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (t) بدرجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (dfE) وعندَ مستوى معنويّة (α/2).

ويكونُ عددُ المقارناتِ: $No.of\ Comparisons = \frac{ab(ab-1)}{2}$

9-6-2- اختبارُ دنكن مُتعدّدُ الحدود (Duncan's Multiple Range Test -DMRT).

1- حسابُ اختبارِ دانكان (***Duncan***) للعاملِ (A):

إذا ثَبُتتْ معنويّةُ قيمةِ (F المحسوبة $F_{Cal(A)}$) الخاصّةِ بالعاملِ (A) عندها يَتِمُّ حسابُ قيمةِ ($LSR_{(A)}$) للعاملِ (A) مِنَ العلاقةِ : $LSR_{(A)} = SSR \times \sqrt{\frac{MSE}{br}}$

حيثُ (SSR) تُمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (Duncan) بدرجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (dfE) وعندَ مستوى معنويّة (α) وعددِ مُتوسّطاتِ مستوياتِ العاملِ (A) التّي تساوي (a) أي $SSR(\alpha, p, df_E)$ حيثُ p=a.

2- حسابُ اختبارِ دانكان (***Duncan***) للعاملِ (B):

إذا ثَبُتتْ معنويّةُ قيمةِ (F المحسوبة $F_{Cal(B)}$) الخاصّةِ بالعاملِ (B) عندها يَتِمُّ حسابُ قيمةِ ($LSR_{(B)}$) للعاملِ (B) مِنَ العلاقةِ : $LSR_{(B)} = SSR \times \sqrt{\frac{MSE}{ar}}$

حيثُ (SSR) تُمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (Duncan) بدرجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (dfE) وعندَ مستوى معنويّة (α) وعددُ مُتوسّطاتِ مستوياتِ العاملِ (B) التّي تساوي (b) أي $SSR(\alpha, p, df_E)$ حيثُ p=b.

3- حسابُ اختبارِ دانكان (***Duncan***) للتّداخُلِ بينَ العاملينِ (AB):

إذا ثَبُتَتْ معنويّةُ قيمةِ (F المحسوبة $F_{Cal(AB)}$) الخاصّةِ بتداخُلِ العاملينِ (AB) عندها يَتِمُّ حسابُ قيمةِ ($LSR_{(AB)}$) للتّداخُلِ بينَ العاملينِ (AB) مِنَ العلاقةِ : $LSR_{(AB)} = SSR \times \sqrt{\frac{MSE}{r}}$

حيثُ (SSR) تُمثّلُ القيمةَ الجدوليّةَ لتوزيعِ (Duncan) بدرجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (dfE) وعندَ مستوى معنويّة (α) وعددُ المعاملاتِ التّوافقيّةِ للتّداخُلِ بينَ العاملينِ (AB) التّي تساوي (ab) أي $SSR(\alpha, p, df_E)$ حيثُ p=ab.

مثال (9-3):

نُفّذتْ تجربةٌ لدراسةِ تأثيرِ صنفينِ مِنَ الطّماطمِ (a1, a2) مزروعةٍ على ثلاثِ مسافاتٍ (b1=20, b2=30, b3=40) على كميّةِ حاصلِ النّباتِ الواحدِ، وكانتْ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ المتوفّرةِ لدى الباحثِ هيَ (24) وحدة تجريبيّة وكانتْ نتائجُ التّجربةِ منظّمةٌ بالجدولِ (9-7).

جدول (9-7): تنظيمُ البياناتِ لتجربةٍ عامليّةٍ لأصنافِ الطّماطمِ ومسافاتِ الزّراعةِ بتصميم (CRD).

المعاملاتُ			التّكراراتُ (المشاهداتُ) y_{ijk}				مجاميعُ المعاملاتِ Yi.	مُتوسّطاتُ المعاملاتِ $\bar{Y}_{i.}$
العاملُ (A)	العاملُ (B)	المعاملاتُ التّوافقيّةُ	R_1	R_2	R_3	R_4		
a1	b1	a1b1	5	6	6	7	24	**6**
	b2	a1b2	6	5	7	8	26	**6.5**
	b3	a1b3	8	9	8	9	34	**8.5**
a2	b1	a2b1	4	3	4	6	17	**4.25**
	b2	A2b2	5	4	6	5	20	**5**
	b3	a2b3	6	7	6	6	25	**6.25**
							المجموعُ الكلّيّ 146	

المطلوبُ:

إجراءُ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ لهذهِ التّجربةِ واختبارُ معنويّةِ الفرقِ بينَ معاملاتِ العواملِ والتّداخُلِ بينهما.

الحلُّ:

هنا تجربةٌ عامليّةٌ، العاملُ الأوّلُ هوَ صنفُ الطّماطمِ ولهُ مستويينِ هما (a1, a2) والعاملُ الثّاني هوَ المسافةُ بينَ النّباتِ ولهُ ثلاثِ مستوياتٍ هم (b3=40 b2=30, b1=20,) وبالتّالي تكونُ التّداخُلاتُ بينَ المستوياتِ (2*3=6). وكُلُّ معاملةٍ نُفّذتْ (4 مكرّراتٍ r=4) وبالتّالي يكونُ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ (المشاهداتِ) هيَ (24) وحدة تجريبيّة.

لتنظيمِ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ نَتّبِعُ الآتي:

1- لحسابِ مجاميع المُربّعاتِ لمصادرِ التّبايُنِ نعملُ على تنظيمِ الجدولِ (9-8) نُبيّنُ فيهِ مجاميع المعاملاتِ العامليّةِ وذو اتّجاهينِ بينَ A و B للمكرّراتِ الأربعةِ في كُلِّ توليفةٍ.

جدول (9-8): مجاميعُ المعاملاتِ لتجربةِ أصنافِ الطّماطمِ ومسافاتِ الزّراعةِ بتصميم (CRD).

	y_i			
B / A	b1	b2	b3	∑ai
a1	24	26	34	84
a2	17	20	25	62
∑bi	41	46	59	$Y_{\dots}=\sum y_{ijk}$ =146

تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

a=2 b=3 r=4

1) حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF=\frac{(Y_{\dots})^2}{abr}=\frac{(146)^2}{2\times3\times4}=888.16$$

2) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الأوّلِ (أصنافُ الطّماطم) (Sum Square of Factor A -SSA):

$$SSA=A-CF \qquad A=\frac{\sum ai^2}{br}=\frac{(84)^2+(62)^2}{3\times4}=\frac{7056+3844}{12}=908.33$$

$$SSA=A-CF=908.33-888.16=20.164$$

3) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الثّاني (المسافةُ بينَ النّباتِ) (Sum Square of Factor B - SSB):

$$SSB=B-CF$$

$$B=\frac{\sum bi^2}{ar}=\frac{(41)^2+(46)^2+(59)^2}{2\times4}=\frac{1681+2116+3481}{8}=909.75$$

$$SSB=B-CF=909.75-888.16=21.59$$

4) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ (Sum Square of Interaction AB - SSAB):

$$AB=\frac{\sum y^2}{r}=\frac{(24)^2+\dots+(25)^2}{4}=930.5$$

SSAB = AB – B – A + CF= 930.5- 908.33 -909.75 +888.166= 0.586

5) حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

SSTO = RAB – CF $\quad RAB = \sum_1^{abr} y_{ijk}^2 = (5)^2 + \cdots + (6)^2 = 946$

SSTO = RAB –CF =946– 888.16 = 57.84

6) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأ التّجريبيّ (Sum Square of Error-SSE):

SSE = RAB – AB=946 – 930.5 = 15.5

7) حسابُ مُتوسّطاتِ المُربّعاتِ (Mean Square- MS) للمعاملاتِ المنفصلةِ والتّداخُلِ والخطأ التّجريبيّ.

$$MSA = \frac{SSA}{a-1} = \frac{20.16}{1} = 20.16$$
$$MSB = \frac{SSB}{b-1} = \frac{21.59}{2} = 10.79$$
$$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)} = \frac{0.586}{12} = 0.29$$
$$MSE = \frac{SSE}{ab(r-1)} = \frac{15.5}{18} = 0.86$$

8) تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ Analysis of Variance (ANOVA Table)

يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ سابقاً وتنظيمها في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (9–9).

جدول (9–9): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةِ أصنافِ الطّماطمِ ومسافاتِ الزّراعةِ بتصميمِ (CRD).

S.O.V	Df	SS	MS	F cal.	F tab.
A	a-1=1	SSA = 20.164	MSA=20.146	$F_{Cal(A)}$=23.42	4.41
B	b-1=2	SSB = 21.59	MSB=10.79	$F_{Cal(B)}$=12.56	3.55
AB	(a -1)(b - 1)=2	SSAB = 0.586	MSAB=0.293	$F_{Cal(AB)}$=0.34	3.55
Error	ab(r - 1) =18	SSE = 15.5	MSE=0.861		
Total	abr – 1 =23	SSTO = 57.84			

- بِما أنَّ $(F_{Tab(A)} = 4.41) \geq (F_{Cal(A)} = 23.42)$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) أي بينَ أصنافِ الطّماطمِ.
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(B)} = 3.55) \geq (F_{Cal(B)} = 12.56)$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (B) أي أنَّ المسافاتِ بينَ النّباتِ لها تأثيرٌ معنويٌّ على حاصلِ النّباتِ.
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(AB)} = 3.55) \leq (F_{Cal(AB)} = 0.34)$ فهذا يعني أنَّه لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ التّداخُلِ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) و مستوياتِ العاملِ (B).

مثال (9–4):

أُجريَتْ تجربةٌ حقليّةٌ فِي وَحداتٍ تجريبيّةٍ متجانسةٍ تماماً بأربعِ تكراراتٍ لدراسةِ تأثيرِ السّمادِ بثلاثةِ أصنافٍ ($A: a_1, a_2, a_3$) و كذلكَ تأثيرُ عمقِ الحراثةِ بثلاثِ مستوياتٍ (10، 20، 30) سم ($B: b_1, b_2, b_3$) على كميّةِ القمحِ، وفِي نهايةِ الموسمِ تمَّ قياسُ نتائجِ حصادِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ /كغم وتدوينها فِي الجدولِ(9–10).

جدول (9–10): تنظيمُ البياناتِ لتجربةٍ عامليّةٍ لأصنافِ السّمادِ وعمقِ الحراثةِ بتصميمِ (CRD).

المعاملاتُ Treats			التّكراراتُ (المشاهداتُ) y_{ijk}				مجاميعُ المعاملاتِ$Y_{i.}$	مُتوسّطاتُ المعاملاتِ $\bar{Y}_{i.}$
السّمادُ (A)	عمق الحراثةِ (B)	المعاملاتُ التّوافقيّةُ	R1	R2	R3	R4	$\sum yi$	
a1	b1	a1b1	1.1	1.3	1.2	1.3	4.9	1.2
	b2	a1b2	1.4	1.2	1.3	1.5	5.4	1.4
	b3	a1b3	1.7	1.5	1.7	1.6	5.6	1.6
a2	b1	a2b1	1.3	1.1	1.3	1.2	4.9	1.2
	b2	a2b2	1.5	1.8	1.7	1.6	6.6	1.7
	b3	a2b3	1.7	1.8	1.9	1.7	7.1	1.8
a3	b1	a3b1	1.2	1.3	1.1	1.2	4.8	1.2
	b2	a3b2	1.5	1.6	1.3	1.3	5.7	1.4
	b3	a3b3	1.6	1.5	1.4	1.6	6.1	1.5
							المجموع الكلي **52**	

المطلوبُ:

1) أوجدْ تأثيرَ صنفِ السّمادِ وعمقِ الحراثةِ وتداخلهما على إنتاجِ القمحِ عندَ مستوى معنويّةٍ (α=0.01) بتطبيقِ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ.
2) أوجدِ الفروقَ المعنويّةَ بينَ المعاملاتِ باستخدامِ اختبارِ (LSD)، ثمَّ حدّدِ الأفضلَ بينَ أصنافِ السّمادِ وعمقِ الحراثةِ والتّداخُلِ بينهما.

الحـلُّ:

1) استخراجُ مجموعِ التّكراراتِ والمُتوسّطاتِ مِنَ الجدولِ (9–10)، ثمَّ إعدادُ الجدولِ (9–11) للتّداخُلِ AB.

جدول (9–11): مجاميعُ المعاملاتِ لتجربةِ أصنافِ السّمادِ وعمقِ الحراثةِ بتصميمِ (CRD).

	y_i				
B / A	b1	b2	b3	المجموعُ $\sum ai$	المُتوسّطاتُ Mean A
a1	4.9	5.4	6.5	16.8	1.4
a2	4.9	6.6	7.1	18.6	1.55
a3	4.8	5.7	6.1	16.6	1.38
المجموعُ $\sum bi$	14.6	17.7	19.7	$\sum y_i = 52$	
المُتوسّطاتُ Mean B	1.22	1.48	1.64		

تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

a=3 b=3 r=4

1) حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$CF = \frac{(Y\ldots)^2}{abr} = \frac{(52)^2}{3\times3\times4} = 75.11$$

2) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الأوّلِ (أصنافُ السّمادِ) - Sum Square of Factor A SSA):

$$SSA = \mathrm{A} - \mathrm{CF} \qquad A = \frac{\sum ai^2}{br} = \frac{(16.8)^2+(18.6)^2+(16.6)^2}{3\times4} = \frac{282.24+345.96+275.56}{12} = 75.3$$

$$SSA = \mathrm{A} - \mathrm{CF} = 75.3 - 75.1 = 0.2$$

3) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الثّاني (عمقُ الحراثةِ) (Sum Square of Factor B -SSB):

$$SSB = \mathrm{B} - \mathrm{CF} \qquad B = \frac{\sum bi^2}{ar} = \frac{(14.6)^2+(17.7)^2+(19.7)^2}{3\times4} = \frac{213.16+313.29+388.09}{12} = 76.21$$

$$SSB = \mathrm{B} - \mathrm{CF} = 76.2 - 75.1 = 1.1$$

4) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ - Sum Square of Interaction AB SSAB):

$$AB = \frac{\sum y^2}{r} = \frac{(4.9)^2 + \ldots + (6.1)^2}{4} = 76.5$$

SSAB = AB – B – A + CF= 76.5 – 76.2 – 75.3 + 75.1 = 0.12

5) حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

$$RAB = \sum_1^{abr} y_{ijk}^2 = (1.3)^2 + \cdots + (1.6)^2 = 76.86$$

SSTO = RAB –CF=76.86 – 75.1= 1.75

6) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأ التّجريبيّ (Sum Square of Error-SSE):

SSE = RAB – AB = 76.86 – 76.5 = 0.33
Or
SSE = SSTO-SSA-SSB-SSAB = 0.33

7) حسابُ مُتوسّطاتِ المُربّعاتِ (Mean Square- MS) للمعاملاتِ المنفصلةِ والتّداخلِ والخطأ التّجريبيّ.

$$MSA = \frac{SSA}{a-1} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$
$$MSB = \frac{SSB}{b-1} = \frac{1.1}{2} = 0.55$$
$$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)} = \frac{0.12}{4} = 0.03$$
$$MSE = \frac{SSE}{ab(r-1)} = \frac{0.33}{27} = 0.012$$

8) يُعدُّ جدولُ تحليلِ التّبايُنِ Analysis of Variance (ANOVA Table)

يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ سابقاً وتنظيمها في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (9–12).

جدول (9–12): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةِ أصنافِ السّمادِ وعمقِ الحراثةِ بتصميم (CRD).

S.O.V	df	SS	MS	F cal.	F tab.
A	a-1=2	SSA = 0.2	MSA=0.1	$F_{Cal(A)}$=8.33	5.49
B	b-1=2	SSB = 1.1	MSB=0.55	$F_{Cal(B)}$=45.8	5.49
AB	(a -1)(b - 1)=4	SSAB = 0.12	MSAB=0.03	$F_{Cal(AB)}$=2.5	4.11
Error	ab(r - 1) =27	SSE = 0.33	MSE=0.012		
Total	abr – 1 =35	SSTO = 1.75			

12) حسابُ قيم (F_{cal}) المحسوبةِ للمعاملاتِ (A, B, AB) كَمَا يلِي:

$$F_{cal(A)} = \frac{MSA}{MSE} = \frac{0.1}{0.012} = 8.33 \qquad F_{cal(B)} = \frac{MSB}{MSE} = \frac{0.55}{0.012} = 45.8$$
$$F_{cal(AB)} = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{0.03}{0.012} = 2.5$$

13) استخراجُ القيمِ الجدوليّةِ (F_{Tab})

$$F_{Tab(A)} = F_\alpha(df_A, df_E) = F_\alpha(2, 27) = 5.49$$
$$F_{Tab(B)} = F_\alpha(df_B, df_E) = F_\alpha(2, 27) = 5.49$$
$$F_{Tab(AB)} = F_\alpha(df_{AB}, df_E) = F_\alpha(4, 27) = 4.11$$

المقارناتُ:

- بِما أنَّ $(F_{Tab(A)} = 5.49) \geq (F_{Cal(A)} = 8.33)$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) أي بينَ أصنافِ السّمادِ.
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(B)} = 5.49) \geq (F_{Cal(B)} = 45.8)$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (B) أي أنَّ عمقَ الحراثةِ لها تأثيرٌ معنويٌّ على الإنتاجِ.
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(AB)} = 4.11) \leq (F_{Cal(AB)} = 2.5)$ فهذا يعني أنَّهُ لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ التّداخُلِ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) و مستوياتِ العاملِ (B) أي لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ للتّداخُلِ بينَ أصنافِ السّمادِ وعمقِ الحراثةِ.

تطبيقُ اختبارِ (LSD)

لإجراءِ اختبارِ LSD يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ (t) الجدوليّةِ وفقاً لدرجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ ومستوى معنويّة: $t\left(\frac{\alpha}{2}, dfE\right) = t\left(\frac{0.01}{2}, 27\right) = 2.771$

عندها يَتِمُّ حسابُ أقلِّ فرقٍ معنويٍّ للعاملِ (A) والعاملِ (B) والتّداخُلِ (AB) كَمَا يلِي:

$$LSD_{(A)} = t\left(\frac{\alpha}{2}, dfE\right) \times \sqrt{\frac{2MSE}{br}} = 2.771 \times \sqrt{\frac{2\times0.012}{3\times4}} = 0.123$$

$$LSD_{(B)} = t\left(\frac{\alpha}{2}, dfE\right) \times \sqrt{\frac{2MSE}{ar}} = 2.771 \times \sqrt{\frac{2\times0.012}{3\times4}} = 0.123$$

$$LSD_{(AB)} = t\left(\frac{\alpha}{2}, dfE\right) \times \sqrt{\frac{2MSE}{r}} = 2.771 \times \sqrt{\frac{2\times0.012}{4}} = 0.215$$

- يَتِمُّ تنظيمُ الجدولِ (9−13) للمقارنةِ بينَ مُتوسّطاتِ العاملِ A (الأصناف).

جدول (9−13): مقارنةُ مُتوسّطاتِ أصنافِ السّمادِ الثّلاثةِ في تجربةٍ عامليّةٍ باستخدامِ (LSD).

$LSD_A = 0.123$		a_3	a_1
treats	Mean	1.38	1.4
a_2	1.55	0.17*	0.15*
a_1	1.4	0.1	0.0

- تفوّقَ معنويّاً الصّنفِ (a_2) على بقيّةِ الأصنافِ إذ أعطى أعلى مُتوسّط بلغَ 1.55 كغم. بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ للأصنافِ (a_3) بلغ 1.38 كغم.
- إعدادُ الجدولِ (9−14) للمقارنةِ بينَ مُتوسّطاتِ العاملِ B (عمقُ الحراثةِ).

جدول (9−14): مقارنةُ مُتوسّطاتِ عمقِ الحراثةِ الثّلاثةِ في تجربةٍ عامليّةٍ باستخدامِ (LSD).

$LSD_B = 0.123$		b_1	b_2
treats	Mean	1.22	1.48

b_3	1.64	0.42*	0.16*
b_2	1.48	0.26*	0.0

تفوّقُ معنويّاً عمقِ الحراثةِ (b3=30سم) على بقيّةِ التّراكيزِ إذ أعطى أعلى مُتوسّطٍ لإنتاجِ القمحِ بلغَ 1.64 كغم بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ لعمقِ الحراثةِ (b1=10 سم) الذّي بلغَ 1.2 كغم.

- إعدادُ الجدولِ (9−15) للمقارنةِ بينَ مُتوسّطاتِ التّداخُلِ AB (صنفُ السّمادِ × عمقُ الحراثةِ).

جدول (9−15): مقارنةُ مُتوسّطاتِ المعاملاتِ التّوافقيّةِ لعمقِ الحراثةِ وأصنافِ السّمادِ الثّلاثةِ باستخدامِ (LSD).

LSD_{AB}=0.215		a3b1	a2b1	a1b1	a1b2	a3b2	a3b3	a1b3	a2b2
Treat AB	Mean AB	1.2	1.2	1.2	1.4	1.4	1.5	1.6	1.7
a2b3	1.8	0.6*	0.6*	0.6*	0.4*	0.4*	0.3*	0.2	0.1
a2b2	1.7	0.5*	0.5*	0.5*	0.3*	0.3*	0.2	0.1	0.0
a1b3	1.6	0.4*	0.4*	0.4*	0.2	0.2	0.1	0.0	
a3b3	1.5	0.3*	0.3*	0.3*	0.1	0.1	0.0		
a3b2	1.4	0.2	0.2	0.2	0.0	0.0			
a1b2	1.4	0.2	0.2	0.2	0.0				
a1b1	1.2	0.0	0.0	0.0					
a2b1	1.2	0.0	0.0						

تفوّقُ معنويّاً معاملةِ التّداخُلِ صنف السّمادِ (a_2) معَ عمقِ الحراثةِ (b_3=30) أي المعاملةُ (a2b3) على بقيّةِ المعاملاتِ إذ أعطى أعلى إنتاجِ قمحٍ بلغَ 1.8 كغ بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ لمعاملاتِ تداخُلِ الأصنافِ معَ عمقِ الحراثةِ (a1b1 و a2b1 و a3b1) التّي أعطى كُلٌّ منها 1.2 كغم.

9−7− تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ بتصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (Two-Factors Experiment in a RCBD)

يُستعملُ هذا النّوعُ مِنَ التّجاربِ فِي حالةِ عدمِ تجانسِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ للعوامل المؤثّرةِ فِي الصّدفةِ المدروسةِ وإمكانيّةِ مُجانستها بتجميعها فِي قطّاعاتٍ متجانسةٍ كَمَا تمَّت الإشارةُ إليها فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CBRD) باتّجاهٍ واحدٍ.

9−7−1− تخطيطُ التّجربةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتخطيطِ تجربةٍ عامليّةٍ ذات عاملين (2×3)، العاملُ الأوّلُ ($A: a_1, a_2$) والعاملُ الثّاني ($B: b_1, b_2, b_3$) تُطبّقُ باستخدامِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD)، و بأربعةِ قطّاعاتٍ (أي كُلُّ معاملةٍ توافقيّةٍ سوفَ تتكرّرُ 4 مرّات)، فيكونُ تشكيلُ المعاملاتِ التّوافقيّةِ كَمَا يلِي:

$(a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3)$. ويكونُ مخططُ التّجربةِ موضحّ بالجدولِ (9−16).

جدول (9−16): تخطيطُ تجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ (2×3) بتصميمِ (CRBD).

القطّاعُ الأوّلُ B1	القطّاعُ الثّاني B2	القطّاعُ الثّالثُ B3	القطّاعُ الرّابعُ B4
a_1b_1	a_2b_2	a_2b_1	a_2b_3
a_2b_2	a_1b_2	a_2b_3	a_1b_3
a_2b_3	a_2b_1	a_1b_1	a_1b_2
a_1b_2	a_1b_1	a_1b_3	a_1b_1
a_2b_1	a_2b_3	a_1b_2	a_2b_1
a_1b_3	a_1b_3	a_2b_2	a_2b_2

بشرطِ أن تظهرَ جميعُ المعاملاتِ التّوافقيّة في كُلِّ قطّاعٍ ولمرّةٍ واحدةٍ فقط، أي أنَّ كُلَّ قطّاعٍ يحتوي على جميعِ المعاملاتِ التّوافقيّة، و أن يتمَّ توزيعُ المعاملاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ داخلَ كُلِّ قطّاعٍ توزيعاً عشوائيّاً مستقلّاً عَن بقيّةِ القطّاعاتِ.

9−7−2− تنظيمُ المشاهداتِ في جدولٍ مناسبٍ:

مِن أجلِ تسهيلِ عمليّةِ حسابِ القيمِ الإحصائيّةِ يمكنُ تصنيفُ القيمِ (المشاهداتِ) بجدولٍ ثنائيٍّ بحيث تُدرجُ المعاملاتُ المختلفةُ في عناوينِ الأسطرِ، كمثالٍ لتجربةٍ عامليّةٍ ذات عاملينِ (2×3) تُطبّقُ باستخدامِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD)، حيثُ تمَّ تقسيمُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى (4 قطّاعاتٍ) فيكونُ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ المتجانسةِ $(r{\times}a{\times}b=4{\times}2{\times}3=24)$ وحدة كَمَا بالجدولِ (9−17).

جدول (9−17): تنظيمُ البياناتِ لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ (2×3) بتصميمِ (CRBD).

المعاملاتُ			القطّاعاتُ				مجاميعُ المعاملاتِ $Y_{i.}$	مُتوسّطاتُ المعاملاتِ $\bar{Y}_{i.}$
العاملُ (A)	العاملُ (B)	المعاملاتُ التّوافقيّة	القطّاعُ الأوّلُ B1	القطّاعُ الثّاني B2	القطّاعُ الثّالثُ B3	لقطّاعُ الرّابعُ B4	$\sum yi$	
a1	b1	a1b1	5	6	6	7	24	4
	b2	a1b2	6	5	7	8	26	4.3
	b3	a1b3	8	9	8	9	34	5.7
a2	b1	a2b1	4	3	4	6	17	2.8
	b2	a2b2	5	4	6	5	20	3.3
	b3	a2b3	6	7	6	6	25	4.1
مجاميعُ القطّاعاتِ $Y_{.j}$							المجموع الكلي 146	

9-7-3- النّموذجُ الرّياضيُّ للتّصميم:

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + AB_{(ij)} + PK + E_{ijk}$$

Y_{ijk}: قيمةُ المشاهدةِ الخاصّةِ بالوحدةِ التّجريبيّةِ (k) والتّي طُبّقَ عليها المستوى (i) مِنَ العاملِ (A) والمستوى (j) مِنَ العاملِ (B).

μ: المُتوسّطُ العامُّ للتّجربةِ (لمجتمعِ المشاهداتِ).

A_i: قيمةُ تأثيرِ المستوى (i) مِنَ العاملِ (A).

B_j: قيمةُ تأثيرِ المستوى (j) مِنَ العاملِ (B).

AB_{ij}: قيمةُ التّأثيرِ المشتركِ بينَ المستوى (i) مِنَ العاملِ (A) والمستوى (j) مِنَ العاملِ (B) أي تأثيرُ التّداخُلِ بينَ العاملين.

PK: قيمةُ تأثيرِ القطّاعِ (k) الخاصّةِ بهذهِ المشاهدةِ.

E_{ijk}: قيمةُ الخطأ التّجريبيّ الخاصِّ بتلكَ الوحدةِ التّجريبيّةِ (Y_{ijk}).

تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ

يكونُ جدولُ تحليلِ التّبايُنِ لهذا النّوعِ مِنَ التّجاربِ موضّحاً بالجدولِ (9-18).

جدول (9-18): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ بتصميم (CRBD).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	درجاتُ الحرّيّةِ df	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُنِ) M.S	F (المحسوبة) $F_{cal.}$	(الجدوليّة) F $F_{Tab.}$
القطّاعاتُ Blocks	r-1	SSBk=R-CF	$MSBk = \frac{SSBk}{r-1}$	$F_{(Bk)} = \frac{SSBk}{MSE}$	$F_{Tab(R)}$
العاملُ الأوّلُ A	a - 1	SSA = A – CF	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$F_{Cal(A)} = \frac{MSA}{MSE}$	$F_{Tab(A)}$
العاملُ الثّاني B	b - 1	SSB = B – CF	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$F_{Cal(B)} = \frac{MSB}{MSE}$	$F_{Tab(B)}$
التّداخُلُ بينَ AB	(a -1)(b - 1)	SSAB = AB – B – A + CF	$MSAB = \frac{SSAB}{df_{AB}}$	$F_{Cal(AB)} = \frac{MSAB}{MSE}$	$F_{Tab(AB)}$
Experimental Error الخطأُ التّجريبيّ	(ab – 1)(r - 1)	SSE = RAB –R- AB +CF	$MSE = \frac{SSE}{df_E}$		
Total	abr – 1	SSTO = RAB –CF			

أمّا القوانينُ المتعلّقةُ بالحساباتِ في الجدولِ يَتِمُّ حسابها كَمَا هوَ مبيّنٌ بالجدولِ (9–19).

جدول (9–19): جدولُ حساب مجموع مُربّعاتِ الانحرافاتِ لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملين بتصميم (CRBD).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	درجاتُ الحرّيّةِ d.f	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُنِ) M.S
القطّاعاتُ Blocks	SSBk=R-CF $R = \frac{\sum Y_{..k}^2}{ab}$	r-1	$MSBk = \frac{SSBk}{r-1}$
العاملُ الأوّلُ A	SSA=A-CF $A = \frac{\sum ai^2}{br}$	a – 1	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$
العاملُ الثّاني B	SSB=B-CF $B = \frac{\sum bi^2}{ar}$	b – 1	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$
التّداخُلُ بينَ AB	SSAB=AB-A-B+CF $AB = \frac{\sum y^2}{r}$	(a -1)(b - 1)	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$
الخطأُ التّجريبيّ Experimental Error	SSE=RAB-R-AB+CF $RAB = \sum_{1}^{abr} Y_{ijk}^2$	(ab-1)(r - 1)	$MSE = \frac{SSE}{(ab-1)(r-1)}$
المجموعُ Total	SSTO=RAB-CF	abr – 1	

مُعاملُ التّصحيحِ: $CF = \frac{(Y\ ...)^2}{abr}$

حيثُ يَتِمّ استخراجُ القيمِ الجدوليّةِ لقيمِ (F) كَمَا يلِي:

$$F_{Tab(Bk)} = F(df_R, df_E)$$
$$F_{Tab(A)} = F(df_A, df_E)$$
$$F_{Tab(B)} = F(df_B, df_E)$$
$$F_{Tab(AB)} = F(df_{AB}, df_E)$$

مثال (9-5):

أجريَتْ تجربةٌ حقليّةٌ لدراسةِ تأثيرِ السّمادِ بثلاثةِ أصنافٍ ($A: a_1, a_2, a_3$) و كذلكَ تأثيرُ طرقِ الرّيِّ بثلاثةِ أنواعٍ (تقليدي، رزاز، تنقيط) ($B: b_1, b_2, b_3$) على كميّةِ الباذنجانِ، وبِما أنَّ أرضَ التّجربةِ مائلةٌ تمَّ تقسيمُ قطعِ الأرضِ إلى (3 ثلاثةِ) قطّاعاتٍ عموديّةٍ على ميولِ الأرضِ، أي طُبِّقتِ التّجربةُ العامليّةُ باستخدامِ التّصميمِ (CRBD)، فكانتْ نتائجُ حصادِ الوَحداتِ التّجريبيّةِ /كغ منظّمةً بالجدولِ (9-20).

جدول (9-20): تنظيمُ البياناتِ لتجربةِ أصنافِ السّمادِ مع طرقِ الرّيّ بتصميمِ (CRBD).

المعاملاتُ المعاملاتُ Treats			القطّاعاتُ y_{ij}			مجاميعُ المعاملاتِ $\sum Y_i$	مُتوسّطاتُ المعاملاتِ Means $\bar{Y}_{i.}$	
السّمادُ (A)	طرقُ الرّيّ (B)	المعاملاتُ التّوافقيّة	B1	B2	B3			
	b_1	a1b1	1.6	1.5	1.5	4.6	1.5	
a_1	b_2	a1b2	1.9	2.0	2.1	6	2.0	17.7
	b_3	a1b3	2.3	2.5	2.3	7.1	2.3	
	b_1	a2b1	1.7	1.6	1.7	5	1.6	
a_2	b_2	a2b2	2.4	2.3	2.2	6.9	2.3	19.1
	b_3	a2b3	2.5	2.3	2.4	7.2	2.4	
	b_1	a3b1	1.9	1.8	1.8	5.5	1.8	
a_3	b_2	a3b2	2.4	2.3	2.5	7.2	2.4	20.5
	b_3	a3b3	2.7	2.6	2.5	7.8	2.6	
$\sum B_i$			**19.0**	**18.9**	**19.4**	57.3		

المطلوبُ:

1. أوجدْ تأثيرَ صنفِ السّمادِ وطريقةِ الرّيّ وتداخلهما على إنتاجِ الباذنجانِ بتطبيقِ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ.

2. أوجدِ الفروقَ المعنويّةَ بينَ المعاملاتِ باستخدامِ اختبارِ (Duncan).
3. حدّدْ أفضلَ نوعٍ للسّمادِ وأفضلَ طريقةٍ للرّيّ وأفضلَ توليفةٍ (تداخلٍ) بينَ السّمادِ وطريقةِ الرّيّ التّي تُعطي أفضلَ إنتاجيّةٍ مِنَ الباذنجانِ عندَ مستوى احتمالِ (α =0.05)؟

الحلُّ:

أوّلاً: لتسهيلِ العمليّاتِ الحسابيّةِ لقيمِ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ نُنظّمُ الجدولَ (9−21) وهوَ جدولٌ مزدوجٌ بينَ العاملينِ (A و B) وذلكَ لإيجادِ قيمِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ للعاملِ (A) وللعاملِ (B) وللتّداخُلِ بينهما أي حسابُ (SSA, SSB, SSAB).

جدول (9−21): مجاميعُ المعاملاتِ لتجربةِ أصنافِ السّمادِ معَ طرقِ الرّيّ بتصميمِ (CRBD).

	$y_{i.}$				
B / A	b1	b2	b3	∑ai	Mean A
a1	4.6	6.0	7.1	17.7	1.9
a2	5.0	6.9	7.2	19.1	2.1
a3	5.5	7.2	7.8	20.5	2.2
∑bi	15.1	20.1	22.1	$\sum y_{ijk}$ =57.3	
Mean B	1.7	2.2	2.5		

تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

a=3 b=3 r=3

1) حسابُ معاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$C.F.=\frac{(Y_{...})^2}{abr}=\frac{(57.3)^2}{3\times3\times3}=121.603$$

2) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ القطّاعاتِ (Sum Square of Block-SSBk):

SSBk= R – CF

$$\text{R}=\frac{\sum Y_{..k}^2}{ab}=\frac{(19)^2+(18.9)^2+(19.4)^2}{3\times3}=\frac{361+357.21+376.36}{9}=121.618$$

SSBk= 121.61-121.6=0.016

3) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الأوّلِ (أصنافُ السّمادِ) - Sum Square of Factor A SSA):

$$SSA=A-CF \qquad A=\frac{\sum ai^2}{br}=\frac{(17.7)^2+(19.1)^2+(20.5)^2}{3\times3}=\frac{313.29+364.81+420.25}{9}=122.038$$

$$SSA=A-CF=122.038-121.603=0.435$$

4) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الثّاني (طرقُ الرّيّ) (Sum Square of Factor B -SSB):

SSB = B – CF

$$B = \frac{\sum bi^2}{ar} = \frac{(15.1)^2+(20.1)^2+(22.1)^2}{9} = \frac{228.01+404.01+488.41}{9} = 124.492$$

$SSB = \mathrm{B} - \mathrm{CF} = 124.492 - 121.603 = 2.889$

5) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ - (Sum Square of Interaction AB - SSAB):

$$AB = \frac{\sum y^2}{r} = \frac{(4.6)^2 + \ldots + (7.8)^2}{3} = 124.983 \ \ (6$$

SSAB = AB – B – A + CF= 124.983 – 124.492 – 122.038 + 121.603 = 0.056

7) حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total - SSTO):

SSTO = RAB –CF

$$RAB = \sum {y_{ijk}}^2 = (1.6)^2 + \ldots + (2.5)^2 = 125.13$$

SSTO = 125.13 – 121.603= 3.527

8) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأ التّجريبيّ (Sum Square of Error-SSE):

SSE = RAB – AB – R + CF = 125.13 – 124.983 – 121.618 + 121.603 = 0.132

9) حسابُ مُتوسّطاتِ المُربّعاتِ (Mean Square- MS) للمعاملاتِ المنفصلةِ والتّداخُلِ والخطأ التّجريبيّ.

$$MSA = \frac{SSA}{df_A} = \frac{0.43}{2} = 0.215 \qquad MSB = \frac{SSB}{df_B} = \frac{2.88}{2} = 1.44$$

$$MSAB = \frac{SSAB}{df_{AB}} = \frac{0.056}{4} = 0.014 \qquad MSE = \frac{SSE}{df_E} = \frac{0.132}{16} = 0.0083$$

$$MSBk = \frac{SSBk}{df_{Bk}} = \frac{0.016}{2} = 0.008$$

9) يُعدُّ جدولُ تحليلِ التّبايُنِ Analysis of Variance (ANOVA Table)

يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ سابقاً وتنظيمها في جدولِ تحليلِ التّباينِ رقم (9–22).

جدول (9–22): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةِ أصنافِ السّمادِ معَ طرقِ الرّيّ بتصميم (CRBD).

S.O.V	df	SS	MS	F cal.	F tab.
Blocks	r-1=2	SSBk=0.016	MSBk=0.008	$F_{Cal(Bk)}$=0.96	3.36
A	a-1=2	SSA = 0.436	MSA=0.215	$F_{Cal(A)}$=25.9	3.36
B	b-1=2	SSB = 2.889	MSB=1.44	$F_{Cal(B)}$=173.49	3.36
AB	(a -1)(b - 1)= 4	SSAB = 0.056	MSAB=0.014	$F_{Cal(AB)}$=1.68	3.01
Error	(ab – 1)(r - 1)=16	SSE = 0.132	MSE=0.0083		
Total	abr – 1 =26	SSTO = 3.527			

10) حسابُ قيمةِ (F) المحسوبةِ:

$$F_{Cal(A)} = \frac{MSA}{MSE} = \frac{0.215}{0.0083} = 25.9$$
$$F_{Cal(B)} = \frac{MSB}{MSE} = \frac{1.44}{0.0083} = 173.49$$
$$F_{Cal(AB)} = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{0.014}{0.0083} = 1.68$$
$$F_{Cal(Bk)} = \frac{MSBk}{MSE} = \frac{0.008}{0.0083} = 0.96$$

11) استخراجُ قيمةِ (F tab) مِن جدولِ (F) بتقاطعِ df_e (16) فِي المحورِ العموديِّ وفقَ مستوى الاحتماليّةِ 0.05 ودرجاتِ الحرّيّةِ للمعاملاتِ df_A و df_B (2) و df_{AB} (4) فِي المحورِ الأفقيِّ.

- بما أنَّ $(F_{Cal(A)} = 25.9) \geq (F_{Tab(A)} = 3.36)$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) أي بينَ أصنافِ السّمادِ.
- بما أنَّ $(F_{Cal(B)} = 173.49) \geq (F_{Tab(B)} = 3.36)$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (B) أي بينَ طرقِ الرّيّ على الإنتاج.
- وبما أنَّ $(F_{Cal(AB)} = 1.68) \leq (F_{Tab(AB)} = 3.01)$ فهذا يعني أنّه لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ التّداخُلِ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) و مستوياتِ العاملِ (B) أي لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ التّداخُلِ بينَ مستوياتِ السّمادِ (A السّماد)، و طرقِ الرّيّ (B طرق الرّيّ).

ثانياً: أوجدِ الفروقَ المعنويّةَ بينَ المعاملاتِ باستخدامِ اختبارِ دنكان (Duncan).

لإجراءِ الفروقِ المعنويّةِ بينَ المعاملاتِ يجبُ إجراءُ اختبارِ دنكان المُتعدّدِ (DMRT) للعوامل المفردةِ والتّداخُلِ بينها تُتبّعُ الخطواتُ الآتيةُ:

- تطبيقُ اختبارِ دنكان لمقارنةِ مُتوسّطاتِ العاملِ (A).
- تطبيقُ اختبارِ دنكان لمقارنةِ مُتوسّطاتِ العاملِ (B).
- تطبيقُ اختبارِ دنكان لمقارنةِ مُتوسّطاتِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ (AB).

1) تطبيقُ اختبارِ دنكان لمقارنةِ مُتوسّطاتِ العاملِ (A).

يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ SSR مِن جدولِ SSR-Duncan بدلالةِ قيمةِ df_e (16) ومستوى الاحتماليّةِ 0.05 فِي المحورِ العموديِّ وعددِ المعاملاتِ 3 فِي المحورِ الأفقيِّ لمعاملاتِ العاملِ A كَمَا فِي المعادلةِ والجدولِ أدناهُ:

$$LSR_{(A)} = S_{\bar{x}_A} \times SSR$$
$$S_{\bar{x}_A} = \sqrt{\frac{MSe}{br}} = \sqrt{\frac{0.0083}{3\times3}} = 0.0303$$

ثمَّ إعدادُ الجدولِ (9−23) لاستخراجِ LSR كَمَا يلِي:

جدول (9−23): حسابُ قيمِ LSR لمُتوسّطاتِ أصنافِ السّمادِ.

SSR	3.00	3.15
$S_{\bar{x}_A}$	0.0303	
$LSR_{(A)}$	0.091	0.095

ثمَّ إعدادُ الجدولِ (9−24) للمقارنةِ بينَ مُتوسّطاتِ A كَمَا يلِي:

جدول (9−24): مقارنةُ مُتوسّطاتِ أصنافِ السّمادِ باستخدامِ (DMRT).

مُتوسّطُ المعاملاتِ تنازليّاً	قيمُ LSR تنازليّاً	a1 1.9	a2 2.1
a3=2.2	0.095	0.3*	0.1*
a2=2.1	0.091	0.2*	0.0

Treats A	Means
a3	2.2 a
a2	2.1 b
a1	1.9 c

وتكونُ نتيجةُ الاختبارِ كَمَا يلِي:

المُتوسّطاتُ التّي تشتركُ بالحرفِ نفسه لا يوجدُ بينها فرقٌ معنويٌّ حسبَ اختبارِ (DMRT) عندَ مستوى احتمالِ 0.05

- تفوّقُ معنويّاً صنفِ السّمادِ (a3) على بقيّةِ الأصنافِ إذ أعطى أعلى مُتوسّطٍ لكميّةِ إنتاجِ الباذنجانِ والتّي بلغَتْ (2.2 كغ) بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ لصنفِ السّمادِ (a1) الذّي أعطى إنتاجَ باذنجانٍ بلغَ (1.9 كغ).

2) تطبيقُ اختبارِ دنكان (DMRT) لمقارنةِ مُتوسّطاتِ العاملِ (B).

يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ SSR مِن جدولِ SSR-Duncan بدلالةِ قيمةِ df_e (16) ومستوى الاحتماليّةِ 0.05 فِي المحورِ العموديِّ وعددِ المعاملاتِ 3 فِي المحورِ الأفقيِّ لمعاملاتِ العاملِ B كَمَا فِي المعادلةِ والجدولِ أدناهُ:

$$LSR_{(B)} = S_{\bar{x}_{(B)}} \times SSR$$

$$S_{\bar{x}_B} = \sqrt{\frac{MSe}{ar}} = \sqrt{\frac{0.0083}{3\times 3}} = 0.0303$$

ثمَّ إعدادُ الجدولِ (9−25) لاستخراجِ LSR كَمَا يلِي:

جدول (9−25): حسابُ قيمِ LSR لمُتوسّطاتِ عمقِ الحراثةِ.

SSR	3.00	3.15
$S_{\bar{x}_B}$	0.038	
LSR	0.091	0.095

ثمَّ إعدادُ الجدولِ (9−26) للمقارنةِ بينَ مُتوسّطاتِ B كَمَا يلِي:

جدول (9−26): مقارنةُ مُتوسّطاتِ عمقِ الحراثةِ باستخدامِ (DMRT).

b2 2.2	b1 1.7	قيمُ LSR تنازليّاً	مُتوسّطَ المعاملاتِ تنازليّاً
0.3*	0.8*	0.095	b3=2.5
0.0	0.5*	0.091	b2=2.2

Treats	Means
b3	2.5 a
b2	2.2 b
b1	1.7 c

وتكونُ نتيجةُ الاختبارِ كَمَا يلِي:

المُتوسّطاتُ التّي تشتركُ بالحرفِ نفسهِ لا يوجدُ بينها فرقٌ معنويٌّ حسبَ اختبارِ (DMRT) عندَ مستوى احتمال 0.05

- تفوّقَ معنويّاً طريقةِ الرّيّ (تنقيط) التّي تُقابلُ (b3) على بقيّةِ طرقِ الرّيِّ إذ أعطى أعلى مُتوسّطٍ لإنتاجِ الباذنجانِ بلغَ (2.5 كغ) بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ لطريقةِ الرّيِّ (التّقليديّةِ) التّي تُقابلُ (b1) بإنتاجِ باذنجانٍ بلغَ (1.9 كغ).

3) تطبيقُ اختبارِ دنكان (DMRT) لمقارنةِ مُتوسّطاتِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ (AB).

يَتِمُّ استخراجُ قيمةِ SSR مِن جدولِ SSR-Duncan بدلالةِ قيمةِ درجاتِ حرّيّةِ الخطأ التّجريبيّ (df_E = 16) ومستوى المعنويّةِ (α=0.05) وعددِ المعاملاتِ (P=9) التّي تُمثّلُ عددَ المعاملاتِ التّوافقيّةِ (AB)، أي استخراجُ القيمِ الجدوليّةِ وفقاً لـ ($SSR(\alpha, p, df_E)$).

$$LSR_{(AB)} = S_{\bar{x}_{(AB)}} \times SSR$$

$$S_{\bar{x}(AB)} = \sqrt{\frac{MSe}{r}} = \sqrt{\frac{0.0038}{3}} = 0.0525$$

ثمَّ إعدادُ الجدولِ (9−27)لاستخراجِ LSR كَمَا يلِي:

جدول (9−27): حسابُ قيمِ LSR لمُتوسّطاتِ التّداخُلِ بينَ أصنافِ السّمادِ وطريقةِ الرّيّ.

SSR	3.00	3.15	3.23	3.3	3.34	3.37	3.39	3.41
$S_{\bar{x}(AB)}$	0.0525							
LSR(AB)	0.158	0.166	0.169	0.173	0.175	0.177	0.178	0.179

ثمَّ إعدادُ الجدولِ (9−28) للمقارنةِ بينَ مُتوسّطاتِ التّداخُلِ AB (صنفُ السّمادِ× طريقةُ الرّيِّ) كَمَا يلِي:

جدول (9−28): مقارنةُ مُتوسّطاتِ التّداخُلِ بينَ أصنافِ السّمادِ وطريقةِ الرّيِّ باستخدامِ (DMRT).

Treat AB	Mean AB	قيمُ LSR تنازليّاً	a1b1 1.5	a2b1 1.7	a3b1 1.8	a1b2 2.0	a2b2 2.3	a3b2 2.4	a2b3 2.4	a1b3 2.4
a3b3	2.6	0.179	1.1*	0.9*	0.8*	0.6*	0.3*	0.2*	0.2*	0.2*
a1b3	2.4	0.178	0.9*	0.7*	0.6*	0.4*	0.1	0.0	0.0	0.0
a2b3	2.4	0.177	0.9*	0.7*	0.6*	0.4*	0.1	0.0	0.0	
a3b2	2.4	0.175	0.9*	0.7*	0.6*	0.4*	0.1	0.0		
a2b2	2.3	0.173	0.8*	0.6*	0.5*	0.3*	0.0			
a1b2	2.0	0.169	0.5*	0.3*	0.2*	0.0				
a3b1	1.8	0.166	0.3*	0.1	0.0					
a2b1	1.7	0.158	0.2*	0.0						

ويكونُ ترتيبُ مُتوسّطاتِ التّداخُلِ موضّحة بالجدولِ (9−29).

جدول (9−29): ترتيبُ مُتوسّطاتِ التّداخُلِ بينَ أصنافِ السّمادِ وطريقةِ الرّيِّ (DMRT).

Treats AB	Means AB
a3b3	2.6 a
a1b3	2.4 b
a2b3	2.4 b
a3b2	2.4 b
a2b2	2.3 b
a1b2	2.0 c
a3b1	1.8 d
a2b1	1.7 d
a1b1	1.5 e

المُتوسّطاتُ التّي تشتركُ بالحرفِ نفسه لا يوجدُ بينها فرقٌ معنويٌّ حسبَ اختبارِ (DMRT) عندَ مستوى احتمال($\alpha = 0.05$).

ثالثاً: تفوّقُ معنويّاً معاملةِ التّداخُلِ بينَ صنفِ السّمادِ (a3) معَ طريقةِ الرّيِّ (التّنقيط b3) التّي تُمثّلُ المعاملة (a3b3)على بقيّةِ المعاملاتِ إذ أعطى أعلى مُتوسّطِ إنتاجٍ مِنَ الباذنجانِ بلغَ (2.6 كغ) بالمقارنةِ معَ أقلِّ مُتوسّطٍ لمعاملاتِ تداخُلِ صنفِ السّمادِ (a1) معَ طريقةِ الرّيّ (التّقليديّة b1) التّي تُمثّلُ المعاملةَ (a1b1) التّي أعطتْ إنتاجاً مِنَ الباذنجانِ بلغَ (1.5 كغ).

9–8– تجربةٌ عامليّةٌ بعاملينِ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيِّ (Two-Factors Experiment in a L.S)

يمكنُ تطبيقُ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيِّ (LS) فِي التّجاربَ العامليّةِ صغيرة الحجم أي يجبُ أنْ يكونَ عددُ العواملَ الدّاخلةِ فِي الدّراسةِ ومستوياتها قليل، ويكونُ حجمُ المُربّعِ اللّاتينيِّ فِي هذهِ الحالةِ هوَ مُربّع عددِ المعاملاتِ التّوافقيّةِ $(ab)^2$ معَ تطبيقِ طريقةِ التّعشيةِ بتوزيعِ المعاملاتِ التّوافقيّةِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ بالطّريقةِ نفسها التّي تمَّ شرحها فِي الفصلِ الثّامنِ. لذلكَ فِي هذا الفصلِ سوفَ ندرسُ التّجاربَ العامليّةَ التّي تستخدمُ تصميمَ المُربّعِ اللّاتينيِّ بعاملينِ فقط.

9–8–1– تخطيطُ التّجربةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتخطيطِ تجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ (2×3)، العاملُ الأوّلُ ($A: a_1, a_2$) والعاملُ الثّاني ($B: b_1, b_2, b_3$) تُطبّقُ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيِّ (LS)، لذلكَ يجبُ أنْ يكونَ لدينا مُربّعٌ لاتينيٌّ يتألّفُ مِن (6) صفوفٍ و (6) أعمدةٍ ويكونُ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ ($(a\times b)^2 = (2\times3)^2 = 36$)، و تكونُ المعاملاتُ التّوافقيّةُ هيَ:

(a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3).

لسهولةِ تنظيمِ التّجربةِ يمكنُ ترميزُ المعاملاتِ التّوافقيّةِ بالشّكلِ التّالي:

$t_1 = a_1b_1$ $t_2 = a_1b_{21}$ $t_3 = a_1b_3$ $t_4 = a_2b_1$ $t_5 = a_2b_2$ $t_6 = a_2b_3$

حيثُ يَتِمُّ توزيعُ المعاملاتِ على الوَحداتِ التّجريبيّة بشكلٍ عشوائيٍّ و بشرطِ أنَّ كُلَّ معاملةٍ تظهرُ مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ صفٍّ و مرّةً واحدةً فقط فِي كُلِّ عمودٍ كَمَا هوَ مُبيّنٌ بالجدولِ (9–30).

جدول (9−30): تخطيطُ تجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ (2×3) بتصميمِ (LS).

		مستوياتُ عاملِ قطاعاتِ الأعمدةِ					
		C1	C2	C3	C4	C5	C6
مستوياتُ عاملِ قطّاعاتِ الصّفوفِ	R1	t_2	t_1	t_3	t_4	t_5	t_6
	R2	t_4	t_3	t_5	t_6	t_1	t_2
	R3	t_5	t_4	t_6	t_1	t_2	t_3
	R4	t_3	t_2	t_4	t_5	t_6	t_1
	R5	t_6	t_5	t_1	t_2	t_3	t_4
	R5	t_1	t_6	t_2	t_3	t_4	t_5

9−8−2− النّموذجُ الرّياضيُّ العامُّ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيِّ في التّجاربِ العامليّةِ:

معادلةُ النّموذجِ الرّياضيِّ لتصميمِ المُربّعِ اللّاتينيِّ لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ كَمَا يلِي:

$$Y_{ijjk} = \mu + r_i + c_j + A_k + B_l + AB_{(kl)} + e_{ij(k)} \qquad \left\{\begin{matrix} i = 1, 2, 3. \dots . ab \\ j = 1, 2, 3. \dots . ab \\ k = 1, 2, 3. \dots . a \\ l = 1, 2, 3. \dots . b \end{matrix}\right\}$$

Y_{ijkl}: قيمةُ المشاهدةِ الخاصّةِ بالوحدةِ التّجريبيّةِ الموجودةِ بالصّفِّ رقم (i) والعمودِ (j) والتّي استلمت المستوى (k) مِنَ العاملِ (A) والمستوى (l) مِنَ العاملِ (B).

μ : المُتوسّطُ العامُّ للصّفةِ المدروسةِ (المجتمع) ويُقدّرُ بقيمةِ المُتوسّطِ العامِّ لمشاهداتِ التّجربةِ.

r_i: قيمةُ تأثيرِ الصّفِّ (i) الموجود فيه الوحدة التّجريبيّة.

c_j: قيمةُ تأثيرِ العمودِ (j) الموجود فيه الوحدة التّجريبيّة.

A_k: قيمةُ تأثيرِ المستوى (k) مِنَ العاملِ (A).

B_l: قيمةُ تأثيرِ المستوى (l) مِنَ العاملِ (B).

AB_{kl}: قيمةُ التّأثيرِ المشتركِ بينَ المستوى (k) مِنَ العاملِ (A) والمستوى (l) مِنَ العاملِ (B).

$e_{ij(k)}$: القيمةُ الحقيقيّةُ للخطأ التّجريبيِّ الخاصِّ بالمشاهدةِ (Y_{ijkl}).

تكوينُ جدولِ تحليلِ التّباُينِ

يَتِمُّ تكوينُ جدولِ تحليلِ التّباُينِ لهذا النّوعِ بالجدولِ رقم (9−31).

جدول (9–31): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ بتصميم (LS).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	درجاتُ الحرّيّةِ df	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُنِ) M.S	F (المحسوبة) $F_{cal.}$	F (الجدوليّة) $F_{Tab.}$
الصّفوف Rows	ab - 1	SSr	$MSr = \frac{SSr}{ab-1}$		
الأعمدة Columns	ab - 1	SSc	$MSc = \frac{SSc}{ab-1}$		
العاملُ الأوّلُ A	a - 1	SSA = A – CF	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$F_{Cal\,(A)} = \frac{MSA}{MSE}$	$F_{Tab(A)}$
العاملُ الثّاني B	b - 1	SSB = B – CF	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$F_{Cal\,(B)} = \frac{MSB}{MSE}$	$F_{Tab(B)}$
التّداخُلُ بينَ AB	(a -1)(b - 1)	SSAB = AB – B – A + CF	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$F_{Cal\,(AB)} = \frac{MSAB}{MSE}$	$F_{Tab(AB)}$
الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	(ab -1)(ab - 2)	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(ab-1)(ab-2)}$		
التّبايُنُ الكلّيُّ Total	$(ab)^2 – 1$	SSTO = RAB –CF			

أمّا القوانينُ المتعلّقةُ بالحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ موضّحةٌ بالجدولِ (9–32).

جدول (9–32): جدولُ حسابِ مجموعِ مُربّعاتِ الانحرافاتِ لتجربةٍ عامليّةٍ بعاملينِ بتصميم (LS).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ S.S	درجاتُ الحرّيّةِ d.f	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُنِ) M.S
الصّفوفُ Rows	$SSr = \frac{\sum Y_{i.}^2}{ab} - CF$	ab - 1	
الأعمدةُ Columns	$SSc = \frac{\sum Y_{.j}^2}{ab} - CF$	ab - 1	
العاملُ الأوّلُ A	SSA=A-CF $A = \frac{\sum ai^2}{ab^2}$	a – 1	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$
العاملُ الثّاني B	SSB=B-CF $B = \frac{\sum bi^2}{a^2 b}$	b – 1	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$
التّداخُلُ بينَ AB	SSAB=AB-A-B+CF $AB = \frac{\sum y^2}{ab}$	(a -1)(b - 1)	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$
الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	SSE=SSTO-SSR-SSC-SSA-SSB-SSAB	(ab -1)(ab - 2)	$MSE = \frac{SSE}{(ab-1)(ab-2)}$

المجموع Total	SSTO=RAB-CF $RAB=\sum_{1}^{(ab)^2} Y_{ijkl}^2$	$(ab)^2-1$	

معاملُ التّصحيح: $CF=\frac{(Y...)^2}{(ab)^2}$

حيثُ يَتِمُّ استخراجُ القيمِ الجدوليّةِ لقيمِ (F) كَمَا يلِي:

$$F_{Tab(A)}=F_{\alpha}(df_A,\ df_E)$$
$$F_{Tab(B)}=F_{\alpha}(df_B,\ df_E)$$
$$F_{Tab(AB)}=F_{\alpha}(df_{AB},\ df_E)$$

مثال (9-6):

أجريَتْ تجربةٌ عامليّةٌ باستخدامِ تصميمِ المُربّعِ اللّاتينيّ (LS) لدراسةِ تأثيرِ صنفينِ مِنَ السّمادِ ($A: a_1,$ a_2) و كذلكَ تأثيرُ طريقتَيِّ الرّيِّ (تقليديّ، تنقيط) ($B: b_1, b_2$) على كميّة إنتاجِ الفاصولياءِ، فيكونُ المُربّعُ اللّاتينيُّ يتألّفُ مِن (4) صفوفٍ و (4) أعمدةٍ ويكونُ عددُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ (16) قطعةِ أرضٍ وتكونُ المعاملاتُ التّوافقيّةُ هيَ: $D=a_2b_2$ $C=a_2b_1$ $B=a_1b_2$ $A=a_1b_1$

وتمَّ تنظيمُ البياناتِ بالجدولِ (9-33).

جدول (9-33): تنظيمُ البياناتِ لتجربةِ صنفيّ السّمادِ معَ طريقتيّ الرّيّ بتصميمِ (LS).

		مستوياتُ عاملِ قطّاعاتِ الأعمدةِ				مجاميعُ الصّفوفِ	مجاميعُ المعاملاتِ	مُتوسّطُ المعاملاتِ
		C1	C2	C3	C4	Yi.	$Y_{..(k)}$	
مستويات عاملِ قطّاعاتِ الصّفوفِ	R1	C =−1	D=-2	A= 0	B=−5	$Y_{1.}$= -8	t_1=−5	
	R2	B=1	C=−1	D=−2	A= 0	$Y_{2.}$= -2	t_2=-8	
	R3	A=4	B=1	C=-3	D=−4	Y_3= -2	t_3=−2	
	R4	D=0	A=1	B=0	C= -4	Y_4=.-3	t_4=0	
مجاميعُ الأعمدةِ Y.j		$Y_{.1}$=4	$Y_{.2}$=-1	$Y_{.3}$= -5	$Y_{.4}$= -13	المجموع الكلي Y..=-15		

المطلوبُ:

1- إجراءُ اختبارِ تحليلِ التّبايُنِ لهذهِ التّجربةِ بمستوى معنويّةٍ (0.05).

الحلُّ:

على عددِ قطعِ الأرضِ البالغ عددها (16) قطعةٍ.

1- لحسابِ مجاميع المُربّعاتِ لمصادرِ التّباينِ نعملُ على تنظيمِ الجدولِ (9-34) الذّي يبيّنُ فيه مجاميعُ المعاملاتِ العامليّةِ وذو اتّجاهين بينَ A و B للمكرّراتِ الأربعةِ في كُلِّ توليفةٍ.

جدول (9-34): مجاميعُ المعاملاتِ لتجربةِ صنفيّ السّمادِ معَ طريقتيّ الرّيّ بتصميمِ (LS).

العاملُ A	العاملُ B		
	b1	b2	المجموعُ $\sum ai$
a1	5	-3	2
a2	-9	-8	-17
المجموعُ $\sum bi$	-4	-11	$\sum y_i$ =-15

تنظيمُ الحساباتِ في جدولِ تحليلِ التّباينِ (AVOVA TABLE):

a=2 b=2 c=4 r=4 t= 4

1) حسابُ معاملِ التّصحيح (C.F): $C.F.=\frac{(Y...)^2}{(ab)^2}=\frac{(-15)^2}{2\times2\times4}=14.06$

7) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الأعمدةِ (Sum Square of Columns-SSc)

$$SSc=\frac{\sum y_{.j}^2}{ab}-CF=\frac{(4)^2+(-1)^2+(-5)^2+(-13)^2}{4}-14.06=52.75-14.06=38.69$$

3) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الصّفوفِ (Sum Square of Rows-SSr)

$$SSr=\frac{\sum y_{i.}^2}{ab}-CF=\frac{(-8)^2+(-2)^2+(-2)^2+(-3)^2}{4}-14.06=6.19$$

4) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الأوّلِ (أصنافِ السّمادِ) (Sum Square of Factor A-SSA):

$SSA=A-CF$ $\qquad A=\frac{\sum ai^2}{ab^2}=\frac{(2)^2+(-17)^2}{2\times4}=\frac{293}{8}=36.66$

$$SSA=A-CF=36.66-14.06=22.6$$

5) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الثّاني (طرقِ الرّيِّ) (Sum Square of Factor B-SSB):

$SSB=B-CF$

$$B=\frac{\sum bi^2}{a^2b}=\frac{(-4)^2+(-11)^2}{2\times4}=\frac{137}{8}=17.13$$

$SSB=17.13-14.06=3.07$

6) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ (Sum Square of Interaction AB-SSAB):

$$AB=\frac{\sum y^2}{ab}=\frac{(5)^2+(-3)^2+(-9)^2+(-8)^2}{4}=\frac{179}{4}=44.75$$

SSAB = AB – B – A + CF= 44.75 – 17.13- 36.66 + 14.06 = 5.02

7) حسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكلّيّةِ (Sum Square of Total-SSTO):

$$SSTO = RAB - CF \qquad RAB = \sum_{1}^{(ab)^2} y_{ijkl}^2 = (-1)^2 + (-2)^2 \ldots + (-4)^2 = 95$$

SSTO = RAB –CF =94– 14.06 = 80.94

8) حسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأ التّجريبيّ (Sum Square of Error-SSE):

SSE = SSTO- SSr – SSc – SSA – SSB - SSAB=
80.94 - 6.19 – 38.69 - 22.6 - 3.07 - 5.02= 5.37

9) حسابُ مُتوسّطِ المُربّعاتِ (Mean Square-MS) للصّفوفِ والأعمدةِ والمعاملاتِ المنفصلةِ وللتّداخُلِ والخطأ التّجريبيّ.

$$MSc = \frac{SSc}{ab-1} = \frac{38.69}{3} = 12.9$$
$$MSr = \frac{SSr}{ab-1} = \frac{6.19}{3} = 2.06$$
$$MSA = \frac{SSA}{a-1} = \frac{22.6}{1} = 22.6$$
$$MSB = \frac{SSB}{b-1} = \frac{3.07}{1} = 3.07$$
$$MSAB = \frac{5.02}{(a-1)(b-1)} = \frac{5.02}{1} = 5.02$$
$$MSE = \frac{5.37}{(ab-1)(ab-2)} = \frac{5.37}{6} = 0.895$$

10) تكوينُ جدولِ تحليلِ التّبايُنِ Analysis of Variance (ANOVA Table)

يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ وتنظيمها في جدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (9–35).

جدول (9–35): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةِ صنفيّ السّمادِ معَ طريقتيّ الرّيّ بتصميمِ (LS).

مصادرُ التّبايُنِ S.O.V	درجاتُ الحرّيّةِ df	مجموعُ مُربّعاتِ الانحرافاتِ *S.S*	مُتوسّطُ المُربّعاتِ (التّبايُنِ) *M.S*	*F* (المحسوبة) $F_{cal.}$	*F* (الجدوليّة) $F_{Tab.}$
الصّفوفُ Rows	3	SSr=6.19	MSr=2.06		
الأعمدةُ Columns	3	SSc=38.69	MSc=12.9		
العاملُ الأوّلُ A	1	SSA = 22.6	MSA=22.6	$F_{Cal(A)} = \frac{MSA}{MSE} = 25.25$	$F_{Tab(A)} = 5.99$
العاملُ الثّاني B	1	SSB = 3.07	MSB=3.07	$F_{Cal(B)} = \frac{MSB}{MSE} = 3.43$	$F_{Tab(B)} = 5.99$

التّداخُلُ بينَ AB	1	SSAB =5.02	MSAB=5.02	$F_{Cal(AB)} = \frac{MSAB}{MSE} = 5.6$	$F_{Tab(AB)} = 5.99$
الخطأ التّجريبيّ Experimental Error	6	SSE= 5.37	MSE=0.895		
Total	15	SSTO =80.94			

حيثُ يَتِمُّ استخراجُ القيمِ الجدوليّةِ لقيمِ (F) كَمَا يلي:

$$F_{Tab(A)} = F_\alpha(df_A, df_E) = F_{0.05}(1,6) = 5.99$$
$$F_{Tab(B)} = F_\alpha(df_B, df_E) = F_{0.05}(1,6) = 5.99$$
$$F_{Tab(AB)} = F_\alpha(df_{AB}, df_E) = F_{0.05}(1,6) = 5.99$$

نستنتجُ مِن هذا الجدولِ معنويّةِ العاملِ (A) عندَ مستوى معنويّة (α=0.05) وعدم معنويّةِ العاملِ (B) والتّداخُلِ (AB).

- بِما أنَّ $(F_{Tab(A)} = 5.99) \geq (F_{Cal(A)} = 25.25)$ فهذا يعني وجود فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (A).
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(B)} = 5.99) \leq (F_{Cal(B)} = 3.43)$ فهذا يعني عدم وجودِ فروقٍ معنويّةٍ بينَ مستوياتِ العاملِ (B).
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(AB)} = 5.99) \leq (F_{Cal(AB)} = 5.6)$ فهذا يعني أنَّهُ لا يوجدُ فروقٌ معنويّةٌ بينَ التّداخُلِ بينَ مستوياتِ العاملِ (A) و مستوياتِ العاملِ (B).

Damascus University

الفصلُ العاشرْ

تصاميمُ القِطَعِ والقطّاعاتِ المُنشقّةِ
(Split-Plot & Split-Block Designs)

الفصل العاشر

تصاميمُ القِطَعِ والقطّاعاتِ المُنشقّةِ

Split-Plot & Split-Block Designs

10-1- مُقدّمة:

تُعتَبَرُ تصاميمُ القِطَعِ المُنشقّةِ (أو القِطَعِ المُنشطرةِ أو الوحداتِ المُنشطرةِ) مِنَ التّصاميمِ المهمّةِ والتّي تستخدمُ فِي التّجاربِ العامليّةِ، وفِي هذهِ التّجاربِ يكونُ الاهتمامُ بعاملينِ على الأقلِّ معَ التّركيزِ وطلبِ مزيدٍ مِنَ الدّقّةِ على عاملٍ واحدٍ دونَ الآخرِ، أي أنّهُ فِي هذا النّوعِ مِنَ التّصميمِ يكونُ العاملانِ المرادُ دراسةُ تأثيرهما يكونانِ على مستويينِ مختلفينِ مِنَ الأهميّةِ بالنّسبةِ للباحثِ فأحدهما يكونُ مهمّاً والآخرُ يكونُ أكثرَ أهميّةٍ

وتجاربُ القِطَعِ المُنشقّةِ قد يَتِمُّ تنظيمها على أساسِ أيٍّ مِنَ التّصاميمِ الأساسيّةِ الثّلاثةِ وهيَ (CRD) و (CRBD) و (L.S).

10-2- أنواعُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ فِي تصاميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ:

يُوجَدُ نوعانِ مِنَ الوَحداتِ التّجريبيّةِ فِي تصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ ذاتِ العاملينِ هُما:

النّوعُ الأوّلُ: هِي الوَحداتُ التّجريبيّةُ الرّئيسيّةُ، وتُسمّى بِالقِطَعِ الكاملةِ (Whole or Main Plots) ويُطبّقُ عليها العاملُ الأوّلُ ويُسمّى بعاملِ القِطَعِ الكاملةِ (Whole Plots Factor) وفِي الغالبِ تتطلّبُ عمليّةُ تطبيقِ مُستوياتِ العاملِ الأوّلِ(عاملُ القِطَعِ الكاملةِ) وَحداتٍ تجريبيّةٍ كبيرةٍ بسببِ الصّعوبةِ فِي تَطبيقها على وَحداتٍ صغيرةٍ.

النّوعُ الثّانيْ: هِي الوَحداتُ التّجريبيّةُ الجُزئيّةُ، وتُسمّى بالقِطَعِ المُنشقّةِ أو الثّانويّةِ أو الفرعيّةِ (Sub or Split Plots) و يُطبّقُ عليها العاملُ الثّاني ويُسمّى عاملُ القِطَعِ المُنشقّةِ (Split Plots Factor) أو (Sub Plots Factor) وفِي الغالبِ يكونُ مِنَ السّهلِ تَطبيقُ مُستوياتِ العاملِ الثّاني (عاملُ القِطَعِ المُنشقّةِ)على وحداتٍ تجريبيّةٍ صغيرةٍ، وتَحظىْ قياساتُ هذا العاملِ بدقّةٍ أكثرَ مِنَ العاملِ الأوّلِ(عاملُ القطعِ الرّئيسيّةِ).

وفِي تَصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ، يَتِمُّ تَطبيقُ مُستوياتِ العاملِ الأوّلِ على القِطَعِ الكاملةِ أو الرّئيسيّةِ (Main Plots) بشكلٍ عشوائيٍّ، ثمَّ يَتِمُّ تجزيءُ(شقٍّ أو شطرٍ) كلُّ قطعةٍ رئيسيّةٍ كاملةٍ(الوحداتُ التّجريبيّةُ

الرّئيسيّةُ)إلى أجزاءٍ تُمثّلُ القِطَعَ المُنشقّةِ (الوَحداتُ التّجريبيّةُ الجزئيّةُ) ومِنْ ثَمَّ يَتِمُّ تطبيقُ مُستوياتِ العاملِ الثّاني بشكلٍ عشوائيٍّ على القِطَعِ المُنشقّةِ داخلَ كُلِّ قطعةٍ كاملةٍ. لِذا، فإنَّ القِطَعَ الكاملةُ (Whole Plots) تَعملُ عملَ القطّاعاتِ (Blocks) لعاملِ القِطَعِ المُنشقّةِ. ولِذلكَ، فَإنَّ هذا التّصميمَ يُعتَبرُ حالةً خاصّةً مِن تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّة؛ حيثُ يكونُ هُناكَ تقييدٌ على العمليّةِ العشوائيّةِ فِي التّصميمِ.

- إنَّ تصميمَ القِطَعِ المُنشقّةِ يَتِمُّ تَنفيذهُ على مرحلتينِ هُما:

المرحلةُ الأولى: فِي هَذه المرحلةِ يَتِمُّ توزيعُ مُستوياتِ العاملِ الأوّلِ على القِطَعِ الكاملةِ(الوَحداتُ التّجريبيّةُ الرّئيسيّةُ) وِفقَ أيٍّ مِنَ التّصاميمِ الأساسيّةِ التّي درسناهَا(التّصميمُ تامُّ العشوائيّةِ، أو تصميمُ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ، أو تصميمُ المُربّعِ اللاتينيِّ)

المرحلةُ الثّانيةُ: وفِي هَذه المرحلةِ يَتِمُّ تَوزيعُ مُستوياتِ العاملِ الثّاني على القِطَعِ المُنشقّةِ (الوحداتُ التّجريبيّةُ الجُزئيّةُ) بشكلٍ عشوائيٍّ داخلَ كُلِ قطعةٍ كاملةٍ.

ويتّضحُ مِن هَذهِ الطّريقةِ أنّهُ يُوجدُ نوعانِ مِنَ الوحداتِ التّجريبيّةِ وبالتّالي يَنتُجُ عنهما نوعانِ مِنَ الأخطاءِ التّجريبيّةِ؛ هُمَا:

10-3- أنواعُ الأخطاءِ فِي تجاربِ القِطَعِ المُنشقّةِ:

الخطأُ التّجريبيُّ الأوّلُ: هذا الخطأُ يُسمّى Error(a) وهو يُمثّلُ الخطأَ التّجريبي للقِطَعِ الكاملةِ(الوحداتُ التّجريبيّةُ الرّئيسيّةُ) حيثُ يختبرُ تبايُنَ المُكرّراتِ وتبايُنَ مُستوياتِ العاملِ الرّئيسي (A).

الخطأُ التّجريبيُّ الثّاني: و هذا الخطأُ يُسمّى Error(b) وهو يُمثّلُ الخطأ التّجريبي للقِطَعِ المُنشقّةِ (الوحداتُ التّجريبيّةُ الثّانويّةُ) وهوَ يَختبرُ تبايناتِ العاملِ الثّانويِّ (B) إضافةً إلى تبايُنِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ (AB).

وفِي الغالبِ يكونُ الخطأُ التّجريبيَّ الثّاني للقِطَعِ المُنشقّةِ أقلّ مِنَ الخطأِ التّجريبي الأوّلِ للقِطَعِ الكاملةِ؛ لِسببينِ هُما:

- تَجانسُ(تشابهُ)القِطَعِ المُنشقّةِ يكونُ فِي الغالبِ أكثرَ مِن تجانسِ القِطَعِ الكاملةِ.
- عددُ تكراراتِ القِطَعِ المُنشقّةِ أكبرَ مِن عددِ تكراراتِ القِطَعِ الكاملةِ.

فمثلاً لو كانَ لدينا العاملُ (A) ولهُ (a) مُستوى، والعاملُ (B) ولهُ (b) مُستوى ونريدُ دقّةً أكبرَ للعاملِ (B)، فنقومُ أوّلاً بتوزيعِ مُستوياتِ العاملِ (A) على الوَحداتِ التّجريبيّةِ الكاملةِ، ثُمَّ نُقسّمُ الوَحداتِ الكاملةِ إلى وَحداتٍ ثانويّةٍ لِيَتِمَّ تطبيقُ مُستوياتِ العاملِ (B).

10-4- التّوزيعُ العشوائيُّ:

تُوزّعُ المُعامِلاتُ التّي خُصِصَتْ للوَحداتِ التّجريبيّةِ الرّئيسيّةِ توزيعاً عشوائياً حسبَ نوعِ التّصميمِ المُختارِ للوَحداتِ التّجريبيّةِ الرّئيسيّةِ (أي حسبَ التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ أو القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ أو المُربّعِ اللاتينيِّ).

أمّا المعاملاتُ المخصّصةُ للوَحداتِ التّجريبيّةِ الثّانويّةِ فتتوزّعُ توزيعاً عشوائيّاً على القِطعِ (الوحدات) الثّانويّةِ داخلَ كُلِّ (وحدة) قطعةٍ رئيسيّةٍ وبصورةٍ مستقلّةٍ عَنِ الوَحداتِ الرّئيسيّةِ الأُخرى.

10-5- استخداماتُ تصاميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ

:(Applications of Split- Plot Designs)

يَكثُرُ استخدامُ هَذهِ التّصاميم فِي الحالاتِ الآتيةِ:

1- يُستخدمُ هذا التّصميمُ فِي الحالاتِ التّي يكونُ فيها أحدُ العاملينِ لهُ أهميّةً أكبرَ لدىْ الباحث، فتُوزّعُ مُستوياتهُ على القِطَعِ التّجريبيّةِ المُنشقّةِ. فِي حينْ يَتمُّ توزيعُ مُستوياتِ العاملِ الأقلِّ أهميّة بالنّسبةِ فِي القِطَعِ الكبيرةِ الكاملةِ ورُبّما قدْ يكونُ الخطأُ التّجريبيَّ فِي القِطعِ الثّانويّةِ أقلَّ مِنَ الخطأِ التّجريبيِّ فِي القِطَعِ الرّئيسيّةِ.

2- يُستخدمُ فِي التّجاربِ التّي يتطلّبُ فِيها أحدُ العواملِ وَحداتٍ تجريبيّةٍ كبيرةٍ (عاملٌ يَصعُبُ تغييرُ مُستوياتِهِ بسهولةٍ عندَ تنفيذِ التّجربةِ) مثلُ طريقةِ الرّي، عُمقُ الحراثةِ. حيثُ أنَّ هذهِ المعاملاتِ تحتاجُ الى وَحداتٍ تجريبيّةٍ أكبَرَ لِتلافِي التّأثيراتِ الجانبيّةِ لِهذهِ العواملِ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ المُجاورةِ.

بينما يُمكنُ تطبيقُ العاملِ الآخرِ على وَحداتٍ تجريبيّةٍ صغيرةٍ (عاملٌ يَسهلُ تغييرُ مُستوياتِهِ عندَ تنفيذِ التّجربةِ)،مثلُ الأصنافِ أو مواعيدُ الزّراعةِ. وعليهِ فالمعاملاتِ التّي تحتاجُ إلى حجمٍ أكبرَ تُوضعُ فِي القِطَعِ الكاملةِ أو الرّئيسيّةِ والتّي لا تحتاجُ إلى وَحداتٍ كبيرةٍ تُوضعُ فِي القِطَعِ الثّانويّةِ.

3- يُستخدمُ فِي التّجاربِ التّي يَتمُّ فيها إدخالُ عاملٍ ثاني والتّجربة قائمة بمُستوياتِ العاملِ الأوّلِ (يستخدمُ مواعيدُ رشِّ المبيدِ بفتراتٍ مختلفةٍ على تجربةِ أصنافِ القمحِ فِي طرقِ ريٍّ مختلفةٍ)

4- يُستخدمُ فِي التّجاربِ التّي يصعبُ فيها تطبيقُ العواملِ معًا في نفسِ الوقتِ.

5- يُستخدمُ فِي التّجاربِ المرتبطةِ بمُتابعةِ مراحلِ النّمو، أو التّجاربِ التّي تتطلّبُ أخذَ عيّناتٍ على فتراتٍ زمنيّةٍ لدراسةِ تأثيرِ الزّمنِ على الظّاهرةِ محلَ الدّراسةِ.

أمثلةٌ على تجاربِ القِطَعِ المُنشقّةِ:

1- فِي التّجاربِ الحقليّةِ قدْ يكونُ العاملُ الأوّلُ هو طريقةُ حرثِ الأرضِ والعاملُ الثّاني هوَ نوعُ البذورِ. فمِنَ الأفضلِ عملياً تطبيقُ مُستوياتِ العاملِ الأوّلِ فِي وَحداتٍ تجريبيّةٍ كبيرةٍ (حرْثُ حقولٍ زراعيّةٍ كبيرةٍ باستخدامِ الجراراتِ)، وتطبيقُ مُستوياتِ العاملِ الثّاني(نَوعُ البذورِ) فِي وَحداتٍ تجريبيّةٍ أصغرَ (قِطَعٌ زراعيّةٌ داخلَ الحقولِ).

2- فِي تجارِبِ الصّناعاتِ الغذائيّةِ، قد يكونُ العاملُ الأوّلُ هوَ طريقةُ تحضيرِ الآيسكريم والعاملُ الثّاني هوَ درجةُ حرارةِ التّخزين .فمنَ الأفضلِ عمليّاً تجهيزُ خلطاتٍ كبيرةٍ من الآيسكريم(قِطَعٌ كاملةٌ) باستخدامِ طرقِ التّحضيرِ المختلفةِ(العاملُ الأوّلُ)، ثُمَّ يَتِمُّ تقسيمُ كُلِّ خلطةٍ(القطعةُ الكاملةُ) إلى أجزاءٍ(قِطَعٌ مُنشقّةٌ) ويُخزّنُ كُلُّ جزءٍ تحتَ حرارةٍ مختلفةٍ بشكلٍ عشوائيٍّ.

10-6- مُميّزاتُ وعُيوبُ تصاميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ:

10-6-1- مُيزّاتُ تصاميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ:

1) المعاملاتُ التّي تطبّقُ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ الرّئيسيّةِ تُقاسُ بدرجةِ دقّةٍ أقلَّ مِنَ المعاملاتِ التّي تُنفّذُ فِي الوَحداتِ الثّانويّةِ.

2) تُعدُّ هذهِ التّصاميمُ ملائمةً لطبيعةِ بعضِ العواملِ التّجريبيّةِ وطريقةِ تطبيقها على المادّةِ التّجريبيّةِ سيما فِي ميدانِ العلومِ الزّراعيّةِ.

10-6-2- عُيوبُ تصاميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ:

1) تزدادُ درجةُ تعقيدِ تحليلِ بياناتِ هذهِ التّصاميمِ عندَ فقدانِ قيمِ بعضِ المُشاهداتِ.

2) فِي هذا التّصميمِ، المعاملاتُ التّي تُطبّقُ على الوَحداتِ التّجريبيّةِ الرّئيسيّةِ تُقاسُ بدرجةِ دقّةٍ أقلَّ مِنَ المعاملاتِ التّي تُنفّذُ فِي الوَحداتِ الثّانويّةِ، و هذا المُؤشّرُ يُعتبرُ ميزةً وعيباً فِي الوقتِ نفسهِ وذلكَ حسبَ طبيعةِ التّجربةِ.

10-7- تطبيقُ القِطَعِ المُنشقّةِ فِي التّصميمِ العشوائيِّ الكاملِ (Split Plots Design Using CRD):

عندَ تنفيذِ تجربةٍ فِي ظروفٍ مُسيطرٍ عليها (الوَحداتُ التّجريبيّةُ متجانسة) تُوزّعُ المعاملاتُ التّي خُصّصَتْ للوَحداتِ التّجريبيّةِ الرّئيسيّةِ توزيعاً عشوائيّاً كاملاً على الوَحداتِ التّجريبيّةِ الرّئيسيّةِ وبعددِ تكراراتٍ معيّنٍ.

أمّا المعاملاتُ المُخصّصةُ للوَحداتِ التّجريبيّةِ الثّانويّةِ فتتوزّعُ توزيعاً عشوائيّاً على القِطَعِ (الوحدات) الثّانويّةِ داخلَ كُلِّ (وحدة) قطعةٍ رئيسيّةٍ وبصورةٍ مُستقلّةٍ عَنِ الوَحداتِ الرّئيسيّةِ الأُخرى.

10-7-1 تخطيطُ التّجرُبةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتخطيطِ تجرُبةِ قِطَعٍ مُنشقّةٍ على أساسِ التّصميمِ العشوائيّ الكاملِ، نَفرِضُ أنَّ التّجرُبةَ عامليّةٌ ذاتَ عاملينِ (4×3)، العاملُ الأوّلُ (A) ولهُ أربعةِ مُستوياتٍ (A: a1, a2, a3, a4) ، والعاملُ الثّاني (B) ولهُ ثلاثةِ مُستوياتٍ (B: b1, b2, b3) وإنَّ كُلَّ معاملةٍ توافقيّةٍ سوفَ تتكرّرُ ثلاثِ مرّاتٍ (r=3) وكانَتِ الوَحداتُ التّجريبيّةُ متجانسةً فيكونُ تخطيطُ التّجرُبةِ موضّحاً فِي الشّكلِ (10−1).

b_1 b_3 b_2 a_1	b_2 b_1 b_3 a_2	b_1 b_2 b_3 a_3	b_1 b_3 b_2 a_3
b_3 b_2 b_1 a_4	b_3 b_1 b_2 a_3	b_3 b_2 b_1 a_1	b_3 b_1 b_2 a_2
b_2 b_1 b_3 a_1	b_1 b_3 b_2 a_2	b_1 b_3 b_2 a_4	b_2 b_1 b_3 a_4

شكل (10−1): تخطيطُ تجربةِ قطعٍ مُنشقّةٍ بالتّصميمِ العشوائيّ الكاملِ.

ويكونُ جدولُ تحليلِ التّبايُنِ لتَجرُبةِ ذاتِ عاملينِ بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ باستخدامِ CRD موضّح بالجدولِ (10−1).

جدول (10−1): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةٍ بعاملينِ بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ باستخدامِ (CRD).

S.O.V	Df	SS	MS	F cal.
A	a-1	SSA= A-CF $A = \frac{\sum ai^2}{br}$	MSA= $\frac{SSA}{df_a}$	$= \frac{SSA}{SSE_{(a)}}$
Error(a)	a (r-1)	$SSE_{(a)}$= RA-A $RA = \frac{\sum ra^2}{b}$	$MSE_{(a)} = \frac{SSE_{(a)}}{df_{e(a)}}$	
B	b-1	SSB= B-CF $B = \frac{\sum bi^2}{ar}$	$MSB = \frac{SSB}{df_b}$	$= \frac{MSB}{MSE_{(b)}}$
AB	(a-1)(b-1)	SSAB=AB-B-A+CF $AB = \frac{\sum y^2}{r}$	$MSAB = \frac{SSAB}{df_{ab}}$	$= \frac{MSAB}{MSE_{(b)}}$
Error(b)	a (b-1)(r-1)	$SSE_{(b)}$= RAB-AB-RA+A	$MSE_{(b)} = \frac{SSE_{(b)}}{df_{e(b)}}$	
Total	rab-1	SSTO= RAB-CF RAB= $\sum y^2$		

عِندَ حِسابِ قيمِ LSD ودنكن Duncan لاختبارِ المقارناتِ يُعتَمَدُ على قيمةِ (a) MSE عندَ المقارنةِ لقيمِ العاملِ A أمّا فِي حالةِ العاملِ B والتّداخُلِ AB يُعتَمَدُ عندَ المقارنةِ على قيمةِ الخطأِ التّجريبيّ الثّاني MSE (b).

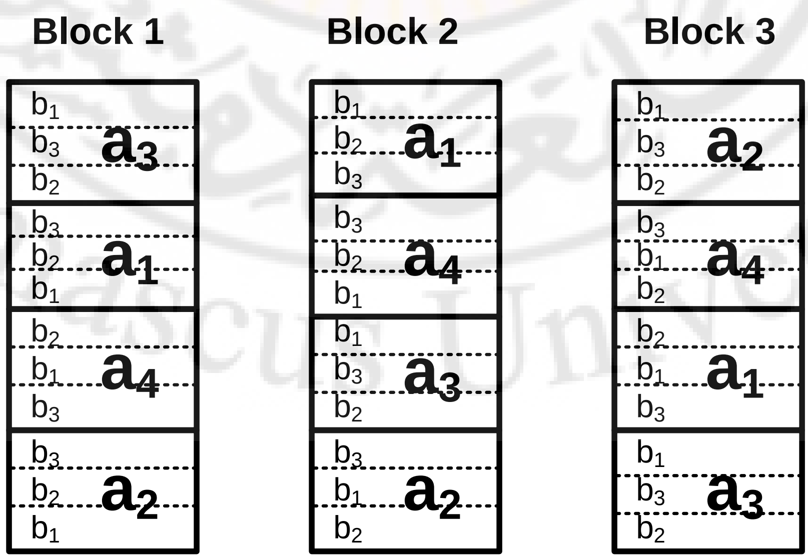
10–8– تطبيقُ القِطَعِ المُنشقّةِ فِي تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملة (Split Plots Design Using CRBD)

عِندَ تنفيذِ تَجربةٍ فِي ظُروفٍ غيرِ مُسيطرٍ عليها (الوَحداتُ التّجريبيّةُ غيرُ متجانسةٍ) يَتِمُّ تجميعُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ فِي قطّاعاتٍ مُتعامدةٍ على عاملِ التّدرُّجِ (عَدمُ التّجانسِ):

10–8–1– تخطيطُ التّجرِبةِ (Layout of the Experiment):

كمثالٍ لتخطيطِ تَجرُبةٍ عامليّةٍ فِي تصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ معَ تطبيقِ تصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (CRBD) على القِطَعِ الكاملةِ أو الرّئيسيّةِ (Main Split) باستخدامِ (3) قطّاعاتٍ.

نَفترِضُ أنَّ التّجرُبةَ عامليّةٌ ذاتَ عاملينِ (4×3)، العاملُ الأوّلُ (A) ولهُ أربعةِ مُستوياتٍ (A: a1, a2, a3, a4)، والعاملُ الثّاني (B) ولهُ ثلاثةِ مُستوياتٍ (B: b1, b2, b3) وكانَتِ الوَحداتُ التّجريبيّةَ غيرَ متجانسةٍ (أي يُوجدُ اختلافٌ بينَ الوَحداتِ التّجريبيّةA فِي أحدِ الاتجاهاتِ) ثُمَّ تمَّ تقسيمُ الوَحداتِ التّجريبيّةِ إلى (3) قطّاعاتٍ عموديّةٍ على عاملِ عدمِ التّجانسِ، إنَّ كُلَّ معاملةٍ توافقيّةٍ سوفَ تَظهرُ مرّةً واحدةً فِي كُلِّ قطّاعٍ فيكونُ تخطيطُ التّجرِبةِ كَمَا هوَ موضّحاً بالشّكلِ (10–2).



شكل (10–2): تخطيط تجربة قطع منشقة تصميم القطاعات العشوائية الكاملة (CRBD).

حيثُ يَتِمُّ توزيعُ مُستوياتِ العاملِ A على الوَحداتِ التّجريبيّةِ الكبيرةِ داخلَ القطّاعاتِ، و ثمَّ يَتِمُّ تقسيمُ كُلِّ وحدةٍ تجريبيّةٍ كبيرةٍ إلى وَحداتٍ صغيرةٍ عددهَا يُساوي مُستوياتِ العاملِ الثّاني B كَمَا هوَ بالشّكلِ السّابقِ.

وبشكلٍ مُفصّلٍ، يَتِمُّ تقسيمُ كُلِّ قطّاعٍ إلى (4) أجزاءٍ بعددِ مُستوياتِ العاملِ الأوّلِA (هذهِ الأجزاءُ هِيَ الوَحداتُ التّجريبيّةُ الرّئيسيّةُ) ، ثُمَّ يَتِمُّ تطبيقُ جميعِ مُستوياتِ العاملِ الأوّلِ (A) عشوائيّاً داخلَ كُلِّ قطّاعٍ.

بعدَ ذلكَ، يَتِمُّ تقسيمُ كُلِّ قطعةٍ كاملةٍ إلى (3) أجزاءٍ بعددِ مُستوياتِ العاملِ الثّاني B (هذهِ الأجزاءُ هِيَ الوحداتُ التّجريبيّةُ الثّانويّةُ /القطعُ المُنشطرةُ)، ثُمَّ يَتِمُّ تطبيقُ جميعِ مُستوياتِ العاملِ الثّاني Bعشوائيّاً على القِطَعِ المُنشطرةِ داخلَ كُلِّ قطعةٍ رئيسيّةٍ.

مُلاحظاتٌ:

مِنَ الشّكلِ أعلاهُ يُلاحظُ مَا يأتِي:

- يُوجدُ ثلاثةُ قطّاعاتٍ.
- كُلُّ قطّاعٍ مُقسّمٍ إلى (4) قطعٍ رئيسيّةٍ (وحداتٌ تجريبيّةٌ رئيسيّةٌ) بعددِ مُستوياتِ العاملِ الأوّلِ (A).
- مُستوياتُ العاملِ الأوّلِ (A: a1, a2, a3, a4) موزعةٌ عشوائيّاً بداخلِ كُلِّ قطّاعٍ (Block) على الوَحداتِ التّجريبيّةِ الرّئيسيّةِ(القِطَعُ الكاملةُ (Whole Splits).
- كُلُّ وحدةٍ تجريبيّةٍ رئيسيّةٍ (قطعةٌ كاملةٌ Whole Plot) تَمَّ شقّها إلى ثلاثِ وَحداتٍ تجريبيّةٍ جُزئيّةٍ (قطعٌ مُنشقّةٌ) (Sub Plot /Split Plot) بعددِ مُستوياتِ العاملِ الثّاني (B). ثُمَّ تَمَّ توزيعُ مُستوياتِ العاملِ الثّاني(B) عشوائيّاً على القِطَعِ المُنشطرةِ بداخلِ كُلِّ قطعةٍ كاملةٍ .ومِنْ هُنا يُلاحَظُ أنَّ القِطَعَ الكاملةُ بمثابةِ قطّاعاتِ Blocks لمُستوياتِ العاملِ الثّاني.
- العاملُ الأوّلُ (A) هوَ عاملُ القِطَعِ الرّئيسيّةِ (الكاملةُ)، والعاملُ الثّاني (B) هوَ عاملُ القِطَعِ المُنشقّةِ (الثّانويةِ). وسوفَ يُقاسُ العاملُ الثّاني (B) بدقّةٍ أكبرَ مِنْ قياسِ العاملِ الأوّلِ (A).

يكونُ جدولُ تحليلَ التّباينِ لتجربةِ ذاتِ عاملينِ بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ بتصميمِ (CRBD) موضّح بالجدولِ (2-10).

جدول (2-10): جدولُ تحليلِ التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةٍ بعاملينِ بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ باستخدامِ (CRBD).

S.O.V	Df	SS		MS	F cal.
Blocks	r-1	SSBk=R-CF	$R=\frac{\sum ri^2}{ab}$	$MSBk=\frac{SSBk}{r-1}$	
A	a-1	SSA= A-CF	$A=\frac{\sum ai^2}{br}$	$MSA=\frac{SSA}{df_a}$	$=\frac{SSA_a}{SSE_{(a)}}$
Error(a)	(a-1) (r-1)	$SSE_{(a)}$= RA-A-R+CF	$RA=\frac{\sum r^2}{b}$	$MSE_{(a)}=\frac{SSE_{(a)}}{df_{e(a)}}$	

B	b-1	SSB= B-CF $B = \frac{\sum bi^2}{ar}$	SSB= $\frac{SSB}{df_b}$	$= \frac{MSB}{MSE_{(b)}}$
AB	(a-1)(b-1)	SSAB=AB-B-A+CF $AB = \frac{\sum y^2}{r}$	SSAB= $\frac{SSAB}{df_{ab}}$	$= \frac{MSAB}{MS_{e(b)}}$
Error(b)	a (b-1)(r-1)	$SSE_{(b)}$= RAB-AB-RA+A	$MSE_{(b)} = \frac{SSE_{(b)}}{df_{e(b)}}$	
Total	rab-1	SSTO= RAB-CF RAB= $\sum y^2$		

يُلاحَظُ ممّا تقدّم أنَّ جدولَ تحليلُ التّبايُنِ لتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ بالحالتينِ لا يختلِفُ فِي شَيءٍ باستثناءِ كيفيّةِ حسابِ درجاتِ الحرّيّةِ ومجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيّ الأوّلِ.

10-9- المُقارناتُ البعديّةُ فِي تصاميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ:

يَتِمُّ تطبيقُ الاختباراتِ البعديّةِ فِي هذهِ التّصاميمِ مثل التّصاميمِ العامليّةِ.

- يَتِمُّ حِسابُ قيمةِ (LSD) للعاملِ المُرادِ اختبارُهُ كَمَا يأتِي:

$$LSD_{(A)} = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, df_{e(a)}\right)} \sqrt{\frac{2MSE_{(a)}}{br}}$$

$$LSD_{(B)} = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, df_{e(b)}\right)} \sqrt{\frac{2MSE_{(b)}}{ar}}$$

$$LSD_{(AB)} = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, df_{e(b)}\right)} \sqrt{\frac{2MSE_{(b)}}{r}}$$

حيثُ يَتِمُّ الحصولُ على قيمةِ (t) مِنَ الجداولِ الإحصائيّةِ لتوزيعِ (t) بالاعتمادِ على درجاتِ الحرّيّةِ للخطأِ التّجريبيّ لكُلِّ عاملٍ أي عندَ مقارنةِ مُستوياتِ العاملِ A نستخدمُ درجاتِ حرّيّةِ الخطأِ التّجريبيّ للعاملِ A ($dfe_{(a)}$) بينمَا فِي حالةِ العاملِ B و AB نستخدمُ درجاتِ الحرّيّةِ للخطأِ التّجريبيّ للعاملِ B ($dfe_{(b)}$).

مِثال (10-1):

نُفّذَتْ تجربةٌ عامليّةٌ باستعمالِ تصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ وكانَتِ القِطَعُ الرّئيسيّةَ ثلاثةِ أصنافٍ مِنَ القمحِ (A: a1, a2, a3,) وكانَتِ القطعُ الثّانويّةَ ثلاثةِ مُستوياتٍ مِنَ السّمادِ المُركّبِ هِيَ (B: b1, b2, b3) وكُرّرتْ كُلُّ مُعاملةٍ ثلاثِ مرّاتٍ، ثُمَّ تَمَّ جمعُ المحصولِ وتَمَّ تنظيمُ النّتائجِ بالجدولِ (10-3).

المطلوبُ: أنشأ جدولَ تحليلِ التّبايُنِ ومعنويّةِ بينَ مُستوياتِ العواملِ (A, B, AB) عندَ مُستوى معنويّة (α=0.05)

جدول (10-3): تنظيمُ البياناتِ لتجربةِ أصنافِ القمحِ مع أصنافِ السّمادِ بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ باستخدامِ (CRD).

الصنف A	مستويات السماد	r_1	r_2	r_3	$\sum abi$	متوسطات المعاملات (Means)

	B					AB
(a1)	(b1)	11.0	10.5	10.4	**31.9**	10.6
	(b2)	12.0	11.5	11.4	**34.9**	11.6
	(b3)	13.5	13.2	12.9	**39.6**	13.2
(a2)	(b1)	12.6	12.7	13	38.3	12.8
	(b2)	13.8	13.5	13.7	41.0	13.7
	(b3)	15.3	16.1	15.7	47.1	15.7
(a3)	(b1)	11.1	10.3	10.2	31.6	10.5
	(b2)	11.3	11	11.1	33.4	11.1
	(b3)	11.3	11.4	11.1	33.8	11.3
					331.6	

الحَـل:

1) فِي البدايةِ يَتِمُّ تنظيمُ الجدولِ (10−4) لحسابِ مجاميعِ المُعاملاتِ للتّداخُلِ (AB)، والجدول (10−5) لحسابِ مجاميعِ المُعاملاتِ للتّداخُلِ (RA).

جدول (10−4): مجاميعُ المُعاملاتِ للتّداخُلِ بينَ أصنافِ القمحِ مع أصنافِ السّمادِ (AB) بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ.

AB	b1	b2	b3	∑ai	متوسطات Mean A
a1	31.9	34.9	39.6	106.4	11.8
a2	38.3	41.0	47.1	126.4	14.0
a3	31.6	33.4	33.8	98.8	11.0
∑bi	101.8	109.3	120.5	331.6	
متوسطات Mean B	11.3	12.1	13.4		

جدول (10−5): مجاميعُ المُعاملاتِ للتّداخُلِ بينَ أصنافِ القمحِ معَ القطّاعاتِ(RA) بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ.

RA	r1	r2	r3	∑ai	Mean A
a1	36.5	35.2	34.7	106.4	11.8
a2	41.7	42.3	42.4	126.4	14.0
a3	33.7	32.7	32.4	98.8	11.0
∑ri	111.9	110.2	109.5	331.6	

تنظيمُ الحساباتِ فِي جدولِ تحليلِ التّبايُنِ (AVOVA TABLE):

10) حِسابُ مُعاملِ التّصحيحِ (Correction Factor-CF):

$$C.F. = \frac{(\sum yi)^2}{n} = \frac{(331.6)^2}{3\times3\times3} = 4072.5 \qquad n = a \times b \times r$$

11) حِسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الأوّلِ (أصنافُ القمحِ) (Sum Square of Factor A -SSA):

SSA = A – CF $\quad A = \frac{\sum ai^2}{br} = \frac{(106.4)^2 + \ldots + (98.8)^2}{3\times3} = 4117.7$

$$SSA = 4117.7 - 4072.5 = 45.5$$

12) حِسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيّ الأوّلِ (Sum Square of Error(a)-$SSE_{(a)}$):

$SSE_{(a)} = RAB - A \quad RAB = \frac{\sum ra^2}{b} = \frac{(36.5)^2 + \ldots + (32.4)^2}{3} = 4118.9$

$$SSE_{(a)} = 4118.9 - 4117.7 = 1.2$$

13) حِسابُ مجموعِ مُربّعاتِ العاملِ الثّاني (مُستوياتُ السّمادِ) (Sum Square of Factor B -SSB):

SSB = B – CF $\quad B = \frac{\sum bi^2}{ar} = \frac{(101.8)^2 + \ldots + (120.5)^2}{3\times3} = 4092.2$

$SSB = 4092.2 - 4072.5 = 19.7$

14) حِسابُ مجموعِ مُربّعاتِ التّداخُلِ بينَ العاملينِ (Sum Square of Interaction AB - SSAB):

SSAB = AB – B – A + CF $\quad AB = \frac{\sum y^2}{r} = \frac{(31.9)^2 + \ldots + (33.8)^2}{3} = 4142.4$

SSAB= 4142.4 – 4092.2 – 4117.7+ 4072.5 = 5.0

15) حِسابُ مجموعِ المُربّعاتِ الكُليّة (Sum Square of Total - SSTO):

SSTO=RAB –CF $\quad RAB = \sum y^2 = (11.01)2+\ldots+(11.1)2 = 4144.06$

SSTO= 4144.06 – 4072.5 = 71.56

16) حِسابُ مجموعِ مربّعاتِ الخطأِ التّجريبيّ الثّاني (Sum Square of Error(b)-$SSE_{(b)}$):

17) $SSE_{(b)} = RAB - AB - RA + A = 4144.06 - 4142.4 - 4118.9 + 4117.7 = 0.46$

8) حِسابُ درجاتِ الحريّةِ (Degree of Freedom-df) للمُعاملاتِ والأخطاءِ التّجريبيّةِ والتّداخُلِ والتّبايُنِ الكُلّي.

$df_a = a - 1 \quad = 3 - 1 = 2 \qquad df_{e(a)} = a(r-1) \quad = 3\times2 = 6$

$df_b = b - 1 \quad = 3 - 1 = 2 \qquad df_{ab} = (a-1)(b-1) \quad = 2\times2 = 4$

$df_T = abr - 1 \quad = 27 - 1 = 26 \qquad df_{e(b)} = a(b-1)(r-1) \quad = 3\times2\times2 = 18$

9) حِسابُ مُتوسّطاتِ المُربّعاتِ (Mean Square-MS) للمُعاملاتِ المنفصلةِ والتّداخُلِ والأخطاءِ التّجريبيّةِ.

$$MSA = \frac{SSA}{df_a} = \frac{45.5}{2} = 22.7 \qquad MSE_{(a)} = \frac{SSE_{(b)}}{df_{e(b)}} = \frac{1.2}{6} = 0.2$$

$$MSB = \frac{SSB}{df_b} = \frac{19.7}{2} = 9.7 \qquad MSAB = \frac{SSAB}{df_{ab}} = \frac{0.5}{4} = 1.25$$

$$MSE_{(b)} = \frac{SSE_{(b)}}{df_e(b)} = \frac{0.46}{12} = 0.038$$

10) يُعدُّ جدولُ تحليلَ التّبايُنِ Analysis of Variance (ANOVA Table)

يَتِمُّ تنظيمُ القيمِ المحسوبةِ أعلاهُ بجدولِ تحليلِ التّبايُنِ رقم (10–6).

جدول (10–6): جدولُ تحليلِ التّباين (ANOVA Table) لتجربةِ القمحِ معَ السّمادِ بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ باستخدامِ (CRD).

S.O.V	df	SS	MS	F cal.	F tab.
A	2	45.5	22.7	113.5	$F_{Tab(A)} = 5.14$
Error(a)	6	1.2	0.2		
B	2	19.7	9.8	257.8	$F_{Tab(B)} = 3.89$
AB	4	5.0	1.25	32.8	$F_{Tab(AB)} = 3.26$
Error(b)	12	0.46	0.038		
Total	26	71.56			

11) حِسابُ قيمِ (F_{cal}) المحسوبةِ للمُعاملاتِ (A, B, AB) كَمَا يأتِي:

$$F_{cal(A)} = \frac{MSA}{MSE_{(a)}} = \frac{22.7}{0.2} = 113.5$$

$$F_{cal(B)} = \frac{MS_b}{MS_{e(b)}} = \frac{9.8}{0.038} = 257.8$$

$$F_{cal(AB)} = \frac{MSAB}{MSE_{(b)}} = \frac{1.25}{0.038} = 32.8$$

12) استخراجُ القيمِ الجدوليّةِ (F_{Tab}) للمُعاملاتِ (A, B, AB) كَمَا يأتِي:

$$F_{Tab(A)} = F_\alpha(df_A, df_{e(a)}) = F_\alpha(2, 6) = 5.14$$

$$F_{Tab(B)} = F_\alpha(df_B, df_{e(b)}) = F_\alpha(2, 12) = 3.89$$

$$F_{Tab(AB)} = F_\alpha(df_{AB}, df_{e(b)}) = F_\alpha(4, 12) = 3.26$$

المُقارنات:

- بِما أنَّ $(F_{Tab(A)} = 5.14) \geq (F_{Cal(A)} = 113.5)$ فهذا يَعني وجودَ فُروقٍ معنويّةٍ بينَ مُستوياتِ العاملِ (A) أي بينَ أصنافِ القمحِ.
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(B)} = 3.89) \geq (F_{Cal(B)} = 257.8)$ فهذا يَعني وجودَ فُروقٍ معنويّةٍ بينَ مُستوياتِ العاملِ (B) أي أنّهُ يوجدُ فُروقٌ معنويّةٌ بينَ أصنافِ السّمادِ.
- وبِما أنَّ $(F_{Tab(AB)} = 3.26) \geq (F_{Cal(AB)} = 32.8)$ فهذا يَعني أنّهُ يوجدُ فُروقٌ معنويّةٌ بينَ التّداخُلِ بينَ مُستوياتِ العاملِ (A) و مُستوياتِ العاملِ (B) أي يوجدُ فُروقٌ معنويّةٌ للتّداخُلِ بينَ أصنافِ القمحِ وأصنافِ السّمادِ.

في حالِ نُفّذتِ التّجربةُ نفسها بتصميمِ القطّاعاتِ العشوائيّةِ الكاملةِ (RCBD)

يَتِمُّ حِسابُ مجموعِ مُربّعاتِ القطّاعاتِ (Sum Square of Block-SSR) بواسطةِ المعادلةِ الآتيةِ:

SSBk= R-CF $$R = \frac{\sum r^2}{ab} = \frac{(111.9)^2 + \dots + (109.5)^2}{3\times3} = 4072.8$$

$$SSBk = \mathrm{R} - \mathrm{CF} = 4072.8 - 4072.5 = 0.3$$

بعدَ ذلكَ يَتِمُّ حِسابُ مجموعِ مُربّعاتِ الخطأِ التّجريبيّ الأوّلِ (Sum Square of Error(a)-SSE$_{(a)}$) كَمَا يأتِي:

$$SSE_{(a)} = RAB - A - R + CF = 4118.9 - 4117.7 - 4072.8 + 4072.5 = 0.9$$

ويُصبحُ جدولُ تحليلِ التّبايُنِ كَمَا هوَ موضّحٌ بالجدولِ (10−7).

جدول (10−7): جدولُ تحليل التّبايُنِ (ANOVA Table) لتجربةِ القمحِ معَ السّمادِ بتصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ باستخدامِ (CRBD).

S.O.V	Df	SS	MS	F cal.
Blocks	2	0.3		
A	2	45.5	22.7	151.3
Error(a)	6	0.9	0.15	
B	2	19.7	9.8	257.8
AB	4	5.0	1.25	32.8
Error(b)	12	0.46	0.038	
Total	26	71.56		

مُلاحظةٌ: يُلاحَظُ الفرقُ بينَ التّصميمينِ هوَ طريقةُ حِسابِ الخطأِ التّجريبيّ الأوّلِ فقط.

10−10 تقديرُ القيمةِ المفقودةِ في تصاميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ (Missing Value)

عندما يَتِمُّ فقدانُ مشاهدةٍ فِي الوَحداتِ الثّانويّةِ فِي تصميمِ القِطَعِ المُنشقّةِ مثلَ تَعرّضِ نباتاتِ وحدةٍ تجريبيّةٍ للتّلفِ، أو مَوتِ حيوانٍ يَتِمُّ تقديرها باستخدامِ المعادلةِ التّاليةِ.

$$Y_{ijk} = \frac{\text{rw+b}(a_j b_k)-(a_j)}{(r-1)(b-1)}$$

Yijk: قيمةُ المشاهدةِ المفقودةِ

r: عددُ التّكراراتِ (القطّاعاتُ) المستخدمةِ بالتّجربةِ

W: مجموعةُ قيمِ المكرّرِ (القطّاعُ) الفاقدِ للقيمةِ (القيمُ مِنَ القطّاعِ الموافقةِ للعاملِ A)

b: عددُ مُستوياتِ العاملِ الثّاني

$a_j b_k$: مجموعُ قيمِ مشاهداتِ اللّوحِ الثّانوي الفاقدِ للقيمةِ

a_j: مجموعُ قيمِ مشاهداتِ اللّوحِ الرّئيسي مِنَ العاملِ الرّئيسي (A) الفاقدِ للقيمةِ.

مثال (2−10):

إذا فرضنا أنَّ القيمةَ (a1b2r1) قد فُقِدتْ مِنَ المثالِ السّابقِ فيَتِمُّ تقديرها حسبَ المعادلةِ كَمَا يلِي:

$$Y_{ijk} = \frac{\text{rw+b}(a_j b_k)-(a_j)}{(r-1)(b-1)} = \frac{3(24.5)+3(22.9)-94.4}{(3-1)(3-1)} = 11.95$$

وهذهِ القيمةُ المقدّرةُ تُقارِبُ القيمةَ الحقيقيّةَ والتّي تساوي (12).

ثمَّ يَتِمُّ تحليلُ البياناتِ بصورةٍ اعتياديّةٍ معَ طرحِ درجةِ حرّيّةٍ واحدةٍ مِنْ درجاتِ الحرّيّةِ لكُلٍّ مِن E(b) و Total لكُلِّ قيمةٍ مفقودةٍ. أمّا إذا فُقِدتْ أكثرَ مِن قيمةٍ مشاهدةٍ كُلّ منها فِي لوحٍ رئيسيٍّ مختلفٍ أو أكثرَ مِنْ مشاهدةٍ فِي اللّوحِ الثّانوي فمنها يَتِمُّ تقديرُ هذهِ القيمِ بإعادةِ استخدامِ الصّيغةِ السّابقةِ لتقديرِ قيمةِ المشاهدةِ المفقودةِ.

$$LSD_{(A)} = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, df_{e(a)}\right)} \sqrt{\frac{2MSE_{(a)}}{br}} = 2.44 \sqrt{\frac{2\times 0.2}{9}} = 0.512$$

$$LSD_{(B)} = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, df_{e(b)}\right)} \sqrt{\frac{2MSE_{(b)}}{ar}} = 2.17 \sqrt{\frac{2\times 0.038}{9}} = 0.199$$

$$LSD_{(AB)} = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, df_{e(b)}\right)} \sqrt{\frac{2MSE_{(b)}}{r}} = 2.17 \sqrt{\frac{2\times 0.038}{3}} = 0.345$$